**CENTRO DE INVESTIGACIÓN**
**Y DE**
**ESTUDIOS AVANZADOS**
**DEL**
**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

**Unidad Distrito Federal**

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA**

# "Una propuesta didáctica para la enseñanza-aprendizaje de funciones lineales"

Tesis que presenta

**María Araceli León Pérez**

para obtener el grado de

**Maestra en Ciencias**

en la especialidad de

**Matemática Educativa**

Director de tesis: Dr. Carlos Armando Cuevas Vallejo

México, D.F. Marzo, 2015

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado, número de registro de Becario No.255742, para cursar los estudios de maestría en ciencias con especialidad en matemática educativa

## Dedicatorias

A mi madre que en paz descanse por hacer de mí una mujer valiente.

A mis queridas hijas Thalia y Cristina, quienes son el motor que me impulsa a ser mejor cada día.

Al Dr. Carlos Armando Cuevas Vallejo por su paciencia para la realización de este trabajo y por sostener mi mano en los momentos difíciles.

RESUMEN.

En este trabajo se presenta un diseño de actividades didácticas de aprendizaje en el aula con apoyo de la tecnología digital para promover la construcción y reconocimiento de gráficas de funciones lineales, sin cálculo. Las actividades se diseñaron modelando situaciones prácticas de la vida real de acuerdo a la propuesta didáctica. Se espera que estos resultados fortalezcan el concepto de función real y ayuden al estudiante a interpretar y construir gráficas tanto en el contexto escolar, como en el contexto de situaciones prácticas del mundo real. Estas actividades están diseñadas para estudiantes de nivel medio superior y, a fin de constatar la efectividad de nuestra propuesta, se diseñan diversos instrumentos de medición que permiten evaluar el avance de los estudiantes en la construcción de gráficas.

ABSTRACT

In the present work, a sequence of teaching pursuits supported on digital technology for the classroom are presented. The aim of such activities is to promote the construction and exploration of graphs of linear functions without the help of calculus. Such activities were also designed by modeling practical problems of the real life according with the didactic proposal. Through these pursuits one expect for improving the student´s knowledge of real function-concept as a better understanding of the functions and their construction in classroom as much as in problems of the real-practical situations.  The present activities have application to the high school students and for verifying the effectiveness of the proposal some measuring instruments were also designed specially in context of the student´s construction of graphs.

Contenido

Anexos

# Introducción

A partir del ciclo escolar 2009-2010 la Dirección General del Bachillerato incorporó en su plan de estudios los principios básicos de la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS, 2009), dándole un enfoque educativo basado en el desarrollo de competencias. Dentro de las competencias a desarrollar se encuentran las genéricas, las básicas, las disciplinares y por último las profesionales (SEP, 2009).

De acuerdo con los programas de estudio del Sistema Nacional del Bachillerato del campo disciplinar de Matemáticas, las Competencias Disciplinares Básicas a desarrollar en el alumno del campo de las matemáticas son:

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas y formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de la información y la comunicación.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente, las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.

8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Si enfocamos nuestra mirada a las competencias 4,5 y 8, podremos darnos cuenta que la interpretación y construcción de gráficas se menciona implícita y explícitamente en los principios pero utilizando las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) o en ambientes con tecnologías digitales y en este marco encaja el presente trabajo de investigación, el cual vendría a ser útil tanto al profesorado como a los estudiantes de este nivel.

Por otro lado, las pruebas estandarizadas como es el caso de las pruebas PISA (Programme for International Student Assessment, por sus siglas en inglés), promovidas por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), dejaron claro en los resultados obtenidos en el 2003, que México obtuvo en promedio 385 puntos en la competencia matemática situándolo en el nivel insuficiente, en 2009 obtuvo 419 puntos y aunque hubo un avance de 34 puntos la situación permanece todavía en la frontera del nivel insuficiente. Esto nos indica que existe una gran proporción de estudiantes (51% según datos de la OCDE), calificados solo como capaces de contestar a reactivos que impliquen contextos familiares, contestar a preguntas claramente definidas y que pueden resolver instrucciones directas en situaciones explícitas, así como llevar a cabo acciones que sean obvias. En resumen, los jóvenes no lograron ligar el conocimiento científico con problemas de la vida cotidiana.

De acuerdo con los resultados de la prueba ENLACE (Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares), en 2013 existen grandes dificultades asociadas a la resolución de problemas de forma numérica, algebraica y gráfica, y aún más en el establecimiento de las relaciones entre dos o más variables, esto debido a una falta de conexión del concepto de función en situaciones contextualizadas, así como por no percibir la presencia de una función al cambiar el contexto en que es presentada.

Una tendencia de los diferentes enfoques actuales del proceso de aprendizaje es considerar la construcción de significados, promoviendo estudiantes constructivos que asuman e incrementen su propio aprendizaje y que evalúen su propio crecimiento intelectual. En este contexto, el alumno debe convertirse en estudiante metacognitivo: independiente en cuanto a su aprendizaje, capaz de aprender a través de su vida y sobre todo asertivo.

Si se considera al aprendizaje como un proceso, donde el conocimiento se construye a partir de factores externos e internos, es de gran importancia el diseño de actividades de aprendizaje que permitan al estudiante interactuar con el objeto de estudio. Desde la perspectiva formativa se requiere de personas activas, asertivas, autónomas, reflexivas y responsables de su propio aprendizaje. Es por esto que las actividades que se plantean en este trabajo de investigación son tareas de desempeño que implican, entre otras cosas, la solución de problemas cuyo objeto de estudio son las funciones lineales dentro de ambientes contextualizados y ayudados de herramientas tecnológicas, basados en la propuesta didáctica presentada por Cuevas & Pluvinage (2003).

Dentro de las aplicaciones de la matemática para modelar diversos fenómenos físicos, químicos, biológicos, económicos, etc. la función lineal es el modelo por excelencia, debido a que es uno de los primeros modelos que se pueden establecer con cierto grado de simplicidad matemática y que produce predicciones aceptables en todas las ciencias. Por esta razón la función lineal adquiere relevancia en el estudio de la matemática cualquiera que sea la especialidad que el estudiante elija como profesión.

Los argumentos de fortalecimiento de lo anteriormente expuesto, así como todo lo que conlleva la presente investigación se detallan en los capítulos que dan cuerpo al estudio. A continuación daremos una breve descripción de cada uno de los seis capítulos que conforman el cuerpo de la investigación.

El capítulo I presenta un panorama general de la problemática de estudio, así como el campo de incidencia del presente trabajo.

El capítulo II presenta los aspectos teóricos considerados para el desarrollo de la investigación,

El capítulo III trata sobre los aspectos metodológicos de la investigación, la elaboración y puesta en escena de las actividades.

En el capítulo IV se hace un registro de las respuestas de los estudiantes además del análisis e interpretación de la información recabada con los instrumentos de medición diseñados.

El capítulo V presenta las conclusiones a las cuales se llegó como resultado del estudio.

# Capítulo I: Problema De Investigación

Las funciones son el modelo matemático por excelencia de casi cualquier ciencia, razón por la cual se hace necesaria su inclusión dentro de los programas de estudio de educación media superior y primeros semestres de educación superior para carreras de ciencias experimentales, ciencias de la salud, ingenierías y ciencias sociales; siempre mediante situaciones problemáticas con enfoque al área del conocimiento de que se trate.

Sin embargo, Cuevas (2005) observó en los resultados de pruebas diagnósticas hechas a estudiantes de educación superior las deficiencias que tienen los estudiantes sobre el concepto general de función. Debido a ello en el presente trabajo presentaremos una propuesta para fortalecer el concepto de función mediante el tratamiento de la función lineal.

## 1.1. Planteamiento del problema

El docente y el alumno construyen el conocimiento matemático utilizando estrategias y actividades que le dan validez al conocimiento construido por el alumno. Sin embargo, a pesar de la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS, 2009), el dominio del tema de funciones dentro de lo nuevos programas de estudios de Educación Media Superior del estado de Puebla, no han podido consolidarse. Este problema se asocia fuertemente con la falta de estrategias adecuadas que permitan al docente transmitir este contenido temático. La falta o escasez de estrategias y de actividades en el proceso enseñanza-aprendizaje de funciones, se ve reflejada en los resultados de las pruebas estandarizadas ENLACE y PISA (2003). Un caso particular se tiene en el Bachillerato General Oficial Tepecatl ubicado en la comunidad de San Miguel Xaltepec, Palmar de Bravo, Puebla, ya que de acuerdo con las estadísticas presentadas por la SEP federal, los resultados de los últimos 3 años mismos que se muestran a continuación nos permiten ver que el porcentaje de alumnos que se ubica en el nivel Excelente, no es el deseado.

| | Año | INSUFICIENTE | ELEMENTAL | BUENO | EXCELENTE |
|---|---|---|---|---|---|
| Escuela | 2012 | 47.5 | 35.6 | 8.5 | 8.5 |
| | 2013 | 4.8 | 52.4 | 26.2 | 16.7 |
| | 2014 | 6.5 | 37.0 | 30.4 | 26.1 |

Para llegar a ese nivel el estudiante debe cumplir con los siguientes requerimientos: realizar diferentes procedimientos matemáticos e integrarlos para resolver problemas de la vida real, tales como conversiones, ecuaciones, análisis de gráficas y tablas, entre otros. Efectuar conversiones y estimaciones para resolver problemas reales. Identificar la gráfica de una recta a partir de condiciones dadas. Utilizas el teorema de Pitágoras para solucionar problemas geométricos. Resolver problemas de mayor complejidad que implican el manejo de figuras, tanto planas como tridimensionales, y las propiedades geométricas de figuras incompletas. Poder realizar cálculos a partir de dos funciones lineales o cuadráticas que se muestran de manera independiente y mediante distintas representaciones (numéricas, textuales, gráficas, entre otras).

Como se puede observar, el concepto de función en sus diferentes representaciones está involucrado en este nivel de desempeño establecido en la prueba ENLACE, con este trabajo de investigación se espera que el estudiante consolide su conocimiento que sobre función tiene.

## 1.2. Justificación

El docente interesado en el proceso Enseñanza-Aprendizaje (E-A) de las matemáticas y en especial de las funciones, debe desarrollar estrategias educativas que permitan lograr un perfil de egreso en el estudiante que le garantice ingresar a una institución de educación superior y que dicha aspiración no se vea mermada por los pobres contenidos curriculares que lleve de su formación como bachiller.

Además, el conocimiento del dominio de las funciones es básico en la cotidianidad del individuo en cualquier contexto sociocultural, por lo que es necesario que los maestros manejen y desarrollen estrategias adecuadas que, a medida que se vaya avanzando, se reflejen los avances en las nuevas evaluaciones que a partir de la Reforma Educativa se tengan.

## 1.3. Propuesta pedagógica

Existe una marcada diferencia entre el contexto escolar y la resolución de problemas ubicados en él y los problemas que surgen en el contexto de la vida cotidiana. Tomando en consideración que el diseño de ambientes de aprendizaje se enfoca en pensar qué se enseña, cómo se enseña y cómo se evalúa, se presenta una propuesta de enseñanza basada en un conjunto de actividades cuyo diseño tuvo en consideración las recomendaciones expuestas por los diferentes investigadores de la literatura especializada consultada. Este estudio pretende establecer el diseño de actividades de aprendizaje en salones de clase mediadas con tecnología digital que permitan la construcción de gráficas de funciones lineales, sin cálculo diferencial, además que modelan problemas prácticos de la vida real, en un contexto escolar enmarcados dentro de la propuesta didáctica de Cuevas & Pluvinage (2003)

En este sentido se plantea saber en el presente trabajo si el diseño de actividades con enfoque contextualizado y basado en tecnologías sirve para motivar a los estudiantes a estudiar matemáticas; además, teniendo como objeto de estudio la función lineal, conocer qué características han de cumplir las actividades para que el estudiante pueda transitar de lo algebraico a lo gráfico y viceversa. También, tenemos interés en saber qué conocimientos previos requieren los estudiantes para el aprendizaje de la función lineal; así como qué habilidades requieren los estudiantes para la construcción de gráficas que permitan visualizar el comportamiento de una función lineal.

## 1.4. Importancia del tema

Uno de los aspectos importantes a tomar en cuenta en el proceso E-A en las ciencias naturales y en las ciencias sociales es el ponderar tanto los fenómenos naturales como sociales que se estudian y de esta forma interpretar los resultados y la comprensión del fenómeno en la forma más completa posible; de ahí que sean las funciones el andamio transversal que vincule interdisciplinariamente las ciencias naturales, ciencias sociales e ingenierías con las matemáticas.

### 1.4.1. Importancia del tema desde la perspectiva de las evaluaciones estandarizadas

Desde el punto de vista de las evaluaciones internacionales y nacionales aplicadas en el nivel medio superior como PISA (por sus siglas en inglés: Programme for International Student Assessment), College Board, ENLACE (Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares), CENEVAL (Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior A.C.), es importante el entendimiento de funciones matemáticas y su graficación; ya que con el modelaje e interpretación de los fenómenos de cambio y las relaciones con funciones apropiadas permitirá crear, interpretar y traducir representaciones simbólicas y gráficas de dichas relaciones.

#### 1.4.1.1. PISA

El Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (PISA), es un estudio internacional comparativo de evaluación educativa, organizado y dirigido por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OECD); el cual se realiza en ciclos trianuales desde 1997. México se incorporó al programa en el año

2000. Esta evaluación la resuelven estudiantes de 15 años en más de 60 países en el mundo. PISA se centró en lectura en 2000; en matemáticas en 2003; en ciencias en 2006, en lectura en 2009. En 2012, el énfasis fue en matemáticas y en 2015 se dará en ciencias. Cabe hacer notar que PISA evalúa competencias en tres áreas: matemáticas, ciencias y lectura y busca conocer en qué medida los estudiantes de 15 años han adquirido los conocimientos y habilidades relevantes para participar activa y plenamente en la sociedad moderna.

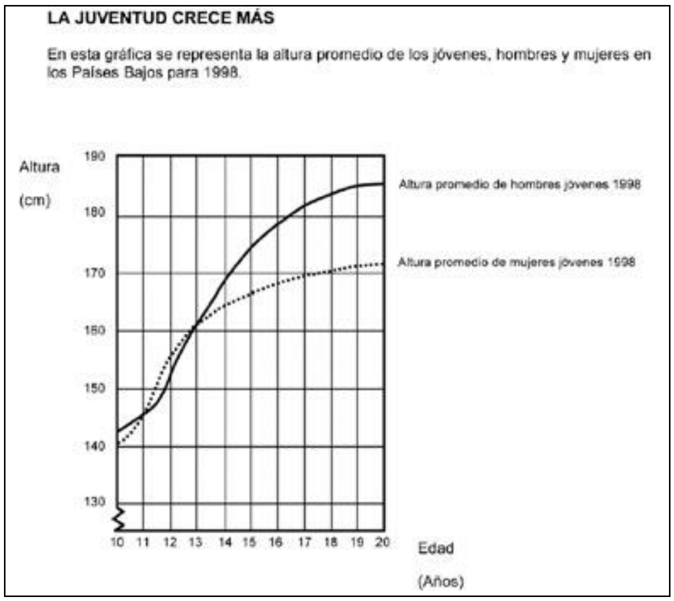
Dentro de la categoría de **cambio y relaciones,** la cual es una de las áreas de contenido matemático que guían el desarrollo de las preguntas del examen, se exige modelar el cambio y las relaciones con funciones apropiadas, así como crear, interpretar y establecer los nexos entre representaciones simbólicas y representaciones gráficas de las relaciones. De modo que los aspectos del contenido matemático tradicional de las funciones y del álgebra, incluyendo expresiones algebraicas, ecuaciones y desigualdades, representaciones tabulares y gráficas, son básicos para describir, modelar e interpretar los fenómenos de cambio.

Algunos ejemplos de reactivos del examen PISA relacionados con gráficas de funciones dentro de un contexto de la vida real se dilucidan a continuación.

Se trata de una gráfica con un enunciado breve, en la que se representan dos series de datos estadísticos referidos a una población específica: altura promedio de los hombres y mujeres jóvenes de los Países Bajos en 1998.

La gráfica se identifica con el título “Crecimiento” y los valores se representan en un plano cartesiano (con rejilla para facilitar su lectura) donde las “alturas” se indican en el eje de las ordenadas y las “edades” en el de las abscisas, diferenciando las series con el empleo de una línea continua para la altura de los hombres jóvenes y otra punteada para la altura de las mujeres jóvenes. Así, pues, la gráfica representa la información de la estatura promedio de los jóvenes en los Países Bajos, correspondiente al año 1998, desglosada por edad y sexo.

UNIDAD: CRECIMIENTO




Y se hacen las siguientes tres preguntas:

**Pregunta 1**

Desde 1980, la altura promedio de las mujeres de 20 años de edad se ha incrementado en 2.3 cm hasta llegar a 170.6 cm ¿Cuál es la altura promedio de la mujer promedio de 20 años en 1980?

Respuesta __________________________cm

**Criterios de Calificación**

Se otorgan **2 Puntos:** si la respuesta es 168.3 cm (la unidad ya está dada).

Y **0 Puntos** para cualquiera otras respuestas.

Los organizadores del examen PISA reportan los siguientes porcentajes de respuestas a nivel mundial sobre este reactivo.

**Porcentaje de respuestas**

| Lugar | País | % de Aciertos |
|---|---|---|
| 1 | Corea | 81.9 % |
| 2 | Francia | 79.6 % |
| 3 | Japón | 78.3 % |
| … | … | … |
| 38 | Tailandia | 40.1 % |
| 39 | México | 34.8 % |
| 40 | Indonesia | 18.7 % |
| | | |
| | Media de los países miembros de la OCDE | 67.0 % |
| | México | 34.8 % |

**Pregunta 2**

Explica cómo es que la gráfica muestra que el crecimiento promedio de las niñas es más lento después de los 12 años de edad.

**Criterios de Calificación**

- **2 Puntos:** La clave en este caso, consiste en que la respuesta debe referirse al "cambio" en la pendiente de la gráfica para las mujeres. Esto puede ser realizado explícita o implícitamente.
- **0 Puntos:** El estudiante indica que la altura de la mujer cae por debajo de la del hombre, pero NO menciona la inclinación de la gráfica de la mujer o una comparación de la tasa de crecimiento femenino antes y después de los 12 años.
- Otras respuestas: Por ejemplo la respuesta no se refiere a las características de la gráfica, aunque el reactivo pregunta claramente cómo se muestra en la GRÁFICA.

**Porcentaje de respuestas**

**Puntuación 2**

| Lugar | País | % de Aciertos |
|---|---|---|
| 1 | Holanda | 77.7 % |
| 2 | Finlandia | 68.2 % |
| 3 | Canadá | 64.0 % |
| … | | … |
| 38 | Brasil | 9.3 % |
| 39 | Túnez | 8.2 % |
| 40 | México | 7.1 % |
| | | |
| | OCDE | 44.8 % |
| | México | 7.1 % |

**Pregunta 3**

De acuerdo con la gráfica en promedio, ¿durante qué periodo de su vida las mujeres son más altas que los hombres de la misma edad?

**Criterios de Calificación**

- **2 Puntos:** Se proporciona el intervalo correcto, entre 11 y 13 años. Se afirma que las niñas son más altas que los niños cuando tienen 11 y 12 años. (Esta es una respuesta correcta en el lenguaje cotidiano, porque significa el intervalo de 11 a 13 años).
- **1 Punto:** Otros subconjuntos (11, 12, 13 años)
- **0 Puntos:** Otras respuestas fuera del intervalo de 11 a 13 años.

**Porcentaje de respuestas**

**Puntuación parcial obtenida al contestar la pregunta 3**

| Lugar | País | % de Aciertos |
|---|---|---|
| 1 | Corea | 80.2 % |
| 2 | Liechtenstein | 74.7 % |
| 3 | Francia | 72.3 % |
| … | | … |
| 38 | México | 23.9 % |
| 39 | Túnez | 19.3 % |
| 40 | Indonesia | 10.9 % |
| | | |
| | OCDE | 54.7 % |
| | México | 23.9 % |

**Puntuación parcial obtenida al contestar la pregunta 3**

| Lugar | País | % de Aciertos |
|---|---|---|
| 1 | Estados Unidos | 43.4 % |
| 2 | Eslovaquia | 42.3 % |
| 3 | Tailandia | 41.5 % |
| … | | … |
| 38 | Francia | 14.4 % |
| 39 | Liechtenstein | 10.1 % |
| 40 | Corea | 4.2 % |
| | | |
| | OCDE | 20.1 % |
| | México | 32.4% |

Como puede observarse dentro de las evaluaciones obtenidas, México se ubica en promedio en el país número 40 de 60, con un porcentaje de respuesta un poco mayor del 30%; sin embargo se tienen resultados menores al 8% en la pregunta 2. Y en gran parte se debe a que los estudiantes no leen correctamente la gráfica de una función, y el no poder interpretar la gráfica de una función es un problema recurrente hasta la educación superior (Cuevas y Mejía, 2003).

#### 1.4.1.2. COLLEGE BOARD

El College Board es una organización fundada en los Estados Unidos en el año 1900. Algunas instituciones de América Latina aplican sus exámenes para seleccionar a los aspirantes que solicitan admisión a estudios de preparatoria; dichas pruebas les ayudan a medir el nivel académico de cada aspirante. Entre los programas que ofrece dicha organización se encuentran el Programa de Evaluación para Admisión Universitaria (PEAU), que incluye la Prueba de Aptitud Académica (PAA) misma que aplica la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), la Universidad de las Américas Puebla (UDLAP), el Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM) para la selección de alumnos de nuevo ingreso en el nivel superior. Las habilidades matemáticas que mide la PAA se desarrollan en el transcurso de años de estudio y con la práctica. Los ejercicios de razonamiento matemático miden la habilidad para procesar, analizar y utilizar información en aritmética, álgebra, geometría y estadística.

A continuación se presenta un ejemplo de los reactivos que se aplican en los exámenes de la PAA para los cuales se hace necesario el conocimiento sobre el dominio de funciones.

El reactivo pretende que el estudiante obtenga la función a partir de una tabla de datos que presenta el comportamiento de las variables.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *x* | -2 | -1 | 0 | 2 |
| *y* | -3 | -1 | 1 | 5 |

De acuerdo con la tabla anterior, ¿cuál de las siguientes funciones representa la relación entre *x* e *y*?

(A) $y = x + 1$
(B) $y = 2x + 1$
(C) $y = -x + 1$
(D) $y = -2x + 1$

Como puede verse en la tabla, el ítem presenta 4 opciones al estudiante para que pueda seleccionar el modelo adecuado de función lineal mediante la sustitución directa.

### 1.4.1.3. ENLACE

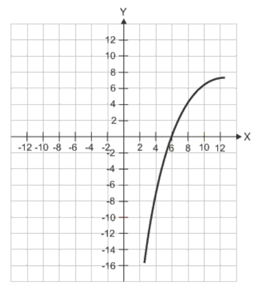
La prueba ENLACE se aplica en Educación Media Superior para conocer en qué medida los jóvenes son capaces de poner en práctica, ante situaciones del mundo real, las competencias disciplinares básicas de los campos de Comunicación (Comprensión Lectora) y Matemáticas adquiridas a lo largo de la trayectoria escolar. Para el diseño de la prueba ENLACE, se tomó en cuenta la propuesta hecha Freudenthal (1983) sobre la progresión de dificultad con el objetivo de medir las competencias desarrolladas en el área. Por ende, se plantean problemas que pueden resolverse con operaciones matemáticas sencillas, y también complejas, con ejercicios parecidos a los que se plantean en el aula; pero también otros menos comunes o estructurados en diferentes contextos.

Ejemplos de ítems tipo ENLACE en el dominio de funciones.

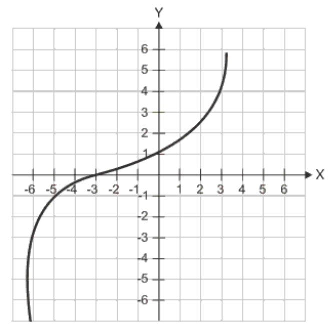
Ejemplo 1: Identifique la gráfica que representa a la expresión algebraica de la función

$f(x) = x^2 - 2x - 15$.

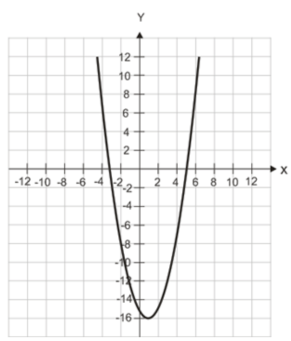
A)



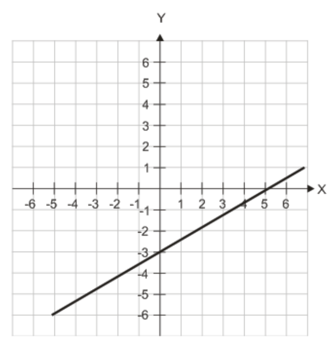

C)




B)

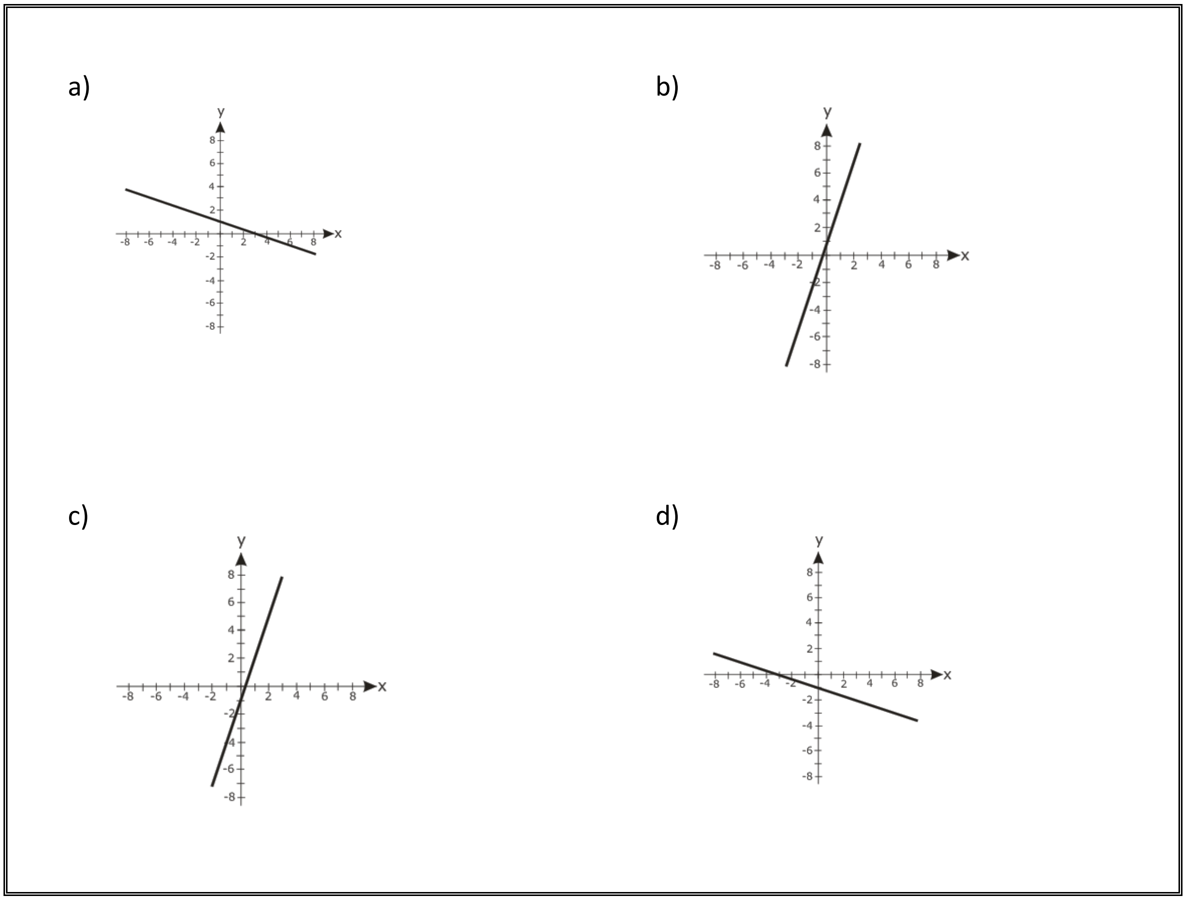



D)




Este ítem relaciona una función cuadrática en su representación algebraica con su representación gráfica.

Ejemplo 2: Dada la ecuación de la recta $3x - y + 5 = 0$, identifique la gráfica de la recta perpendicular a ésta cuya ordenada al origen es -1.




Como puede observarse este ítem relaciona una función lineal condicionada a ciertos requisitos: estimando el tiempo para cada reactivo (80 segundos por ítem), el alumno debe haber desarrollado habilidades para visualizar “de golpe” algunas funciones. Es decir, estos reactivos reafirman la importancia que tiene en la educación media superior la lectura e interpretación de la gráfica de una función.

### 1.4.1.4. CENEVAL

CENEVAL genera instrumentos útiles que comprueben los conocimientos y habilidades características profesionales que han alcanzado durante su formación educativa de bachillerato y licenciatura. Así, el Examen Nacional de Ingreso a la Educación Superior (EXANI-II) es una prueba de selección cuyo propósito es medir las habilidades y los conocimientos básicos de los aspirantes a cursar estudios de nivel superior. Después de la prueba, proporciona información a las instituciones sobre quiénes son los aspirantes con mayores posibilidades de éxito en los estudios de licenciatura.

Algunos ejemplos que consideran el conocimiento del dominio de las funciones dentro de su examen son los siguientes:

Ítem 1

| La ecuación $3x - 4y + 8 = 0$ representa una recta con: |
| --- |
| a) pendiente 2 y ordenada en el origen $-{}^{3}/_{4}$<br>b) pendiente $-{}^{3}/_{4}$ y ordenada en el origen -2<br>c) pendiente ${}^{3}/_{4}$ y ordenada en el origen $-2$<br>d) pendiente ${}^{3}/_{4}$ y ordenada en el origen 2 |

Como puede verse en este ítem lo solicitado al estudiante es que de la lectura del registro algebraico defina la pendiente y la ordenada en el origen.

Ítem 2

| Es la ecuación de la recta que pasa por los puntos (0,0) y (1,2) |
| --- |
| a) $\mathrm{y} = \mathrm{x} + 1$<br>b) $y = x + 2$<br>c) $y = 2x$<br>d) $y = 2x + 1$ |

En este reactivo lo que se espera del estudiante es que a partir de dos puntos compruebe cual es la ecuación de la recta que pasa por ellos.

Ítem 3

| |
|---|
| ¿Cuál de los siguientes conjuntos de parejas ordenadas de números constituye una función? |
| a) { (1,2), (4,4), (1,6), (9,8) }<br>b) { (2,2), (3,4), (5,6), (8,8) }<br>c) { (1,2), (1,4), (5,5), (7,8) }<br>d) { (2,3), (6,5), (6,7), (8,9) } |

Con base en los ítems de las pruebas estandarizadas se infiere de manera inmediata la importancia del conocimiento de funciones en el nivel de educación media superior. Y de todos los organismos revisados sólo PISA plantea ítems situados en un contexto.

### 1.4.2. Importancia del estudio de las funciones en la educación superior.

Si bien es cierto que en algunas profesiones, la ignorancia del concepto de funciones matemáticas no se pone de manifiesto, no es el caso en las ciencias experimentales como ciencias de la salud, ingenierías y en casos más importantes las ciencias sociales; pues su desconocimiento sobre el tema puede tener graves consecuencias, tales como la extrapolación de un comportamiento socio-económico a esferas no definidas o no establecidas en la función inherente al modelo.

El uso de las matemáticas especialmente de las funciones en el área de las ciencias experimentales y ciencias de la salud ha tenido un gran impacto, tales son los casos de modelación y simulación del cáncer, el modelamiento de las neuronas, el modelamiento de enfermedades arteriales y el modelamiento multi-escalar del corazón.

Cabe señalar que una de las áreas de mayor aplicación del concepto de función es en la Farmacología, rama de la Medicina que estudia las acciones y propiedades de los fármacos en el organismo. Dado que, cuando se quiere determinar la concentración de un fármaco en el cuerpo en el tiempo cero, es muy difícil debido a que desde el momento en que se administra, independientemente de la vía, éste empieza a distribuirse en todo el organismo. Sin embargo, si se cuenta con una tabla de datos con las diferentes concentraciones del fármaco en distintos momentos y, apoyándose en los logaritmos naturales y la ecuación de la recta, se puede hacer una extrapolación y estimar su concentración en el tiempo cero.

Otra aplicación se da en el campo de la Oncología, donde el tratamiento matemático consta de varias etapas: Primeramente se identifica a las variables importantes, como son la densidad de las células cancerígenas, la presión a la que están sometidas las células y la concentración de nutrientes. A partir de los datos experimentales conocidos y usando las leyes propias de la Física, Química y Biología, se deducen las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema construyendo la gráfica que permita conocer la evolución temporal de un tumor.

Al margen, pero no menos importante, deben mencionarse las funciones de ingreso, costos, demanda, cobro de intereses de créditos bancarios y crecimientos poblacionales como ejemplos de la aplicación en economía y administración del concepto de función.

### 1.4.3. Importancia del tema desde la perspectiva de los libros de texto específicamente en bachillerato general

Aun cuando no esté escrito, el contenido de los libros de texto que se recomiendan a los alumnos se ha considerado también dentro del marco de pertinencia del presente trabajo; por tal motivo se hace el análisis del significado institucional pretendido para el objeto de estudio de las funciones de algunos libros recomendados por la S.E.P. del estado de Puebla como libros de texto para educación media superior en la modalidad de Bachillerato General, y el libro de texto aceptado por la S.E.P. para educación media superior escrito por el mismo director de este trabajo de investigación.

#### 1.4.3.1. Libro de texto 1

Salazar, P. & Callejas, L. (1999). *Matemáticas IV*, este documento se organiza en cuatro unidades:

1. Funciones
2. Funciones polinomiales
3. Funciones trascendentales
4. Introducción al cálculo.

Ninguna unidad cuenta con el objetivo al cual se pretende llegar. Cuenta con una extensa variedad de ejercicios de aplicación de los conocimientos; sin embargo sólo cuenta con contenidos en conocimientos y no presenta contenidos procedimentales ni actitudinales. No presenta un solo problema contextualizado, todos los ejercicios y problemas son dentro del contexto teórico.

#### 1.4.3.2. Libro de texto 2

Cuesta, V., Lezama. M.A. & Soto, E. (2007). *Geometría Analítica y Funciones*, este libro contiene cuatro unidades:

1) Sistema de coordenadas y línea recta;

2) Elipse y circunferencia;

3) Parábola;

4) Funciones.

En la tabla siguiente se detalla el objetivo y el contenido de esta última unidad temática, misma que nos interesa en el presente trabajo de investigación.

| | |
|---|---|
| **Objetivo general** | Construir el concepto de función como un proceso, desde lo intuitivo y el uso del sentido común, hasta la formalidad matemática |
| **Tema** | Definiciones y partes de una función |
| **Subtemas** | Desarrollo conceptual de función |
| | Definiciones y nomenclatura |
| | Evaluar una función |
| | Dominio y rango de una función |
| | Gráfica de una función |
| | Raíces y asíntotas de una función |
| | Función creciente, función decreciente y función constante |
| | Máximos y mínimos de una función |
| | Signo de una función |
| **Tema** | Álgebra de funciones |
| **Subtemas** | Las funciones algebraicas |
| | Clasificación de funciones |
| | Funciones trascendentes |
| | Funciones por secciones o trozos |

Cuenta con problemas dentro del contexto escolar resueltos, pero ni un solo problema de la vida real, en cuanto a las tareas propone ejercicios semejantes a los propuestos por el autor, no incluye actividades.

### 1.4.3.3. Libro de texto 3

Ferral, E.A. *Geometría Analítica y sus Funciones.* (2013). La estructura de este libro se enlista a continuación:

a) Estructura de la obra.
b) Enlista las competencias genéricas y las profesionales básicas.
c) Una breve reseña histórica que describe los inicios del tema principal que se analiza en la unidad
d) Evaluación diagnóstica
e) Desarrollo del contenido de la unidad
f) Evaluación final

El contenido en cuanto a la unidad de Funciones y Desigualdades se refiere es:

- Nomenclatura y componentes de una función
- Tipos y operaciones con funciones
- Desigualdades

El libro cuenta con actividades en equipo, individuales, instrumentos de evaluación, evaluación para el desempeño, evaluaciones diagnósticas al inicio de cada unidad.

El presente texto es el que se usa actualmente (ciclo escolar 2014-2015) en el estado de Puebla, su contenido está basado en el enfoque por competencias, sin embargo el tema de funciones dentro del currículo de la Educación Media Superior en Puebla no cobra gran importancia ya que solo se trata someramente en la asignatura de Geometría Analítica y Funciones en la tercera unidad.

#### 1.4.3.4. Libro de texto 4

Cuevas, C.A. (2013). *Matemáticas 4*. El autor del libro es uno de los autores de la propuesta didáctica sobre la que se fundamenta el presente trabajo. Se basa en el enfoque por competencias, su contenido se enlista a continuación.

1. Operaciones con diferentes tipos de funciones
2. Funciones especiales y transformaciones de gráficas
3. Funciones polinomiales de grados cero, uno y dos
4. Funciones polinomiales de grados tres y cuatro
5. Uso de funciones factorizables en la resolución de problemas
6. Funciones racionales
7. Funciones exponenciales y logarítmicas
8. Funciones periódicas

a) Al inicio de cada unidad señala las competencias a desarrollar y los indicadores de desempeño.
b) Cuenta con un CD en el cual se incluyen las evaluaciones diagnósticas para cada unidad temática, autoevaluaciones por medio de rúbricas, applets, ejercicios a lápiz y papel con sus respectivas preguntas de reflexión.
c) Al inicio de cada unidad presenta una situación dónde se aplican las funciones en la vida real.
d) Presenta actividades de aprendizaje en equipo.

Finalmente, y de acuerdo a mi experiencia como docente se puede ver con claridad la fuerte influencia de los libros de texto sobre el docente, y recordando al Dr. Carlos Imaz en su libro "La génesis y la enseñanza del cálculo", (2010), diagnostica a este mal "Síndrome texticular" enfatizando "… *representan una sórdida amenaza a la enseñanza*…"

El contenido del programa de Geometría Analítica y Funciones está estructurado en las siguientes unidades organizadas en 64 sesiones de 50 minutos.

**Unidad I**: Sistema de coordenadas cartesianas y línea recta. Se tratan el sistema de coordenadas cartesianas, elementos fundamentales como segmentos dirigido, distancia entre dos puntos, pendiente y ángulo de inclinación, división de un segmento y temas relacionados con la línea recta: elementos de la recta, formas de la ecuación de una recta, rectas paralelas, rectas perpendiculares, distancia entre rectas y distancia de un punto a una recta

**Unidad II**: Circunferencia, Elipse y Parábola. Se desarrollan los conceptos fundamentales, propiedades más importantes, así como las ecuaciones ordinaria y general de tres lugares geométricos relevantes: la circunferencia, elipse y parábola.

**Unidad III**: Funciones. Se estudia la nomenclatura y los componentes de una función: dominio, imagen, regla de correspondencia y gráficas, tipos y operaciones de funciones así como inecuaciones.

# CAPÍTULO II. Marco teórico

Como ya se ha mencionado con anterioridad, la vertiente principal de este trabajo consiste en establecer el diseño de actividades didácticas de aprendizaje que promuevan un aprendizaje para la construcción e interpretación de gráficas de funciones lineales; mediante la modelación de problemas prácticos de la vida real, y apoyándose en el uso de herramientas digitales enmarcadas dentro de una propuesta didáctica explicita.

La propuesta didáctica está basada en las recomendaciones hechas por la ingeniería didáctica de Cuevas & Pluvinage (2003) creando con la actividades un puente que permita al estudiante transitar entre la parte algebraica y la gráfica; específicamente en jóvenes que cursan el tercer semestre de Educación Media Superior en el sub-sistema de bachilleratos generales de Puebla.

De acuerdo con los nuevos enfoques sobre la investigación en matemáticas, se sugieren temas específicos como las funciones y sus gráficas en donde los estudiantes usan un sistema simbólico para desarrollar el primero y entender el segundo, para nuestro caso en especial, mediante un conjunto de pares ordenados o tablas de valores, como registro de representación semiótico (RRS) aritmético, una expresión verbal, como RRS verbal, una expresión algebraica, como RRS algebraico y una gráfica, como RRS geométrico.

Uno de los problemas en la enseñanza de las matemáticas yace en hacer de este proceso algo rutinario y descontextualizado aplicando algoritmos de solución de manera mecánica con una fuerte carga operativa y en deterioro de la parte conceptual. Tanto el docente como el alumno ponen énfasis en la parte operativa y dejan de lado la parte conceptual (Amit y Vinner, 1990; Oaks, 1987/1988, 1990; Schoenfeld, 1985; Hiebert y Lefevre, 1986). Hiebert y Lefevre (1986), citados en Moreno, S. & Cuevas, C.A. (2004), hacen notar que, si bien los procedimientos algorítmicos se aprenden más o menos, o incluso bien, los conceptuales carecen de significado, lo que conduce a un conocimiento procedimental sin sentido y de pronto olvido.

Las relaciones funcionales durante largo tiempo no habían sido reconocidas como constructos importantes en el desarrollo del conocimiento abstracto, Piaget, J. Szeminska, A. & Bang, V. (1968-1977); sin embargo en los últimos años las funciones y sus gráficas han tomado auge en cuanto a su investigación.

En el estado de Puebla, en la modalidad de bachilleratos generales durante el curso de Geometría Analítica y funciones es la tercera unidad temática en que se estudian las funciones y su representación gráfica. El dominio matemático de "función" es piedra angular para el estudio del Cálculo, el cual se imparte en el cuarto semestre, y para Modelos Matemáticos, que se estudia en sexto semestre; pero, además, son parte fundamental del contenido de pruebas estandarizadas como PISA y ENLACE, sin olvidar los exámenes elaborados por el College Board y CENEVAL diseñados para la admisión a la Educación Superior.

Son las pruebas estandarizadas como PISA y ENLACE las que dan gran importancia al estudio de las funciones y las gráficas, más aún dentro de un ambiente contextualizado de problemas de la vida cotidiana. Dado a que las representaciones algebraica y gráfica son registros semióticos del concepto de función, no deben ser tratados en forma aislada. Las funciones y las gráficas son un binomio simbólico en donde uno contribuye al entendimiento del otro a través de conexiones. Por lo que la graficación obtenida en actividades a lápiz y papel y las obtenidas electrónicamente son herramientas fundamentales para examinar patrones de entendimiento.

El contenido matemático de la prueba ENLACE por ejemplo cubre los rubros de cantidad, espacio y forma, más cambio y relaciones; este último rubro es el que examina el reconocer, interpretar, aplicar, sintetizar y evaluar la forma numérica, algebraica y gráfica de las relaciones entre dos o más variables, admitiendo la posibilidad de inferir datos a partir del análisis de situaciones reales, experimentales o hipotéticas.

Aunque existe una diversidad de propuestas y cada una de ellas contribuye en mayor o menor parte a resolver el problema sobre el concepto de función lineal, en nuestro caso se trata de estructurar el diseño de algunas actividades en las que se incorpore el uso de tecnología teniendo como infraestructura los elementos didácticos del Modelo Cuevas & Pluvinage.

En el modelo educativo del Bachillerato General del Estado de Puebla la meta formativa del egresado del bachillerato se bifurca en dos enfoques a saber:

- el enfoque educativo basado en el desarrollo de competencias,
- el enfoque educativo centrado en el aprendizaje.

Aquí es donde se aviene nuestra propuesta ya que esta se basa en un conjunto de actividades enfocadas hacia el alumno, cuyo diseño tuvo en consideración las recomendaciones expuestas por los diferentes investigadores de la literatura consultada y mi experiencia en el aula.

La novedad de la propuesta radica en un conjunto de actividades cuyo contenido específico a ser enseñado es el concepto de función lineal a través de problemas desarrollados en un contexto diferente al dado en clase; estas actividades establecen, además, conexiones con otros temas, áreas del conocimiento y disciplinas, y están mediadas con tecnología.

En este capítulo se describe el marco teórico dentro del cual se desarrolló el presente trabajo de investigación, tomando en cuenta la propuesta didáctica desarrollada por Cuevas-Pluvinage (2003), misma que a través de una serie de recomendaciones permite sustentar el diseño de actividades de aprendizaje de acción práctica para enseñar conceptos matemáticos, en este caso en particular, promover el concepto de función lineal a través de su parte operativa.

Uno de los quehaceres fundamentales del docente dentro de la didáctica de las matemáticas es diseñar actividades de aprendizaje, con el fin de favorecer el concepto matemático al que se desee llegar. Para ello el docente deberá tener en cuenta que el grado de entendimiento es determinado por el número y consolidación de las conexiones de conocimientos. Una idea, procedimiento o hecho matemático es entendido profundamente si las conexiones que los ligan son más fuertes o más numerosas he aquí donde el trabajo de Hiebert & Carpenter (1992) cobra importancia ya que los objetos matemáticos no son directamente accesibles por medio de los sentidos; solamente a través de las representaciones semióticas tenemos acceso a esos objetos. Por tal motivo, es importante analizar el papel que juegan las representaciones en la construcción del conocimiento matemático. El trabajo de Hiebert & Carpenter (1992), nos explica esas ideas dentro del marco teórico de las redes formadas por representaciones internas, generadas por la manipulación de representaciones externas, esto es, una idea matemática, procedimiento o hecho es entendido si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de entendimiento es determinado por el número y la fuerza de las conexiones: una idea matemática, procedimiento, o hecho es entendido profundamente si éste está ligado a una red existente con fuertes o más numerosas conexiones. Sin embargo, los estudios experimentales de Duval (1995), que involucran por un lado los problemas de manipulación de representantes dentro de un sistema matemático de signos y problemas de conversión de representaciones entre dos o más sistemas de un mismo objeto matemático, ha generado una nueva noción que es la de Registro de Representación, cuya idea está totalmente ligada a las funciones esenciales para toda actividad cognitiva. Adicionalmente, sobre la construcción de conceptos matemáticos, Duval establece, que dado que cada representación es parcial con respecto a lo que representa, debemos considerar como absolutamente necesario la interacción entre diferentes representaciones del objeto matemático para la formación del concepto.

## 2.1. Construyendo el concepto

Las redes de representaciones mentales son construidas gradualmente como información nueva la cual es conectada a las redes ya existentes o como nuevas relaciones construidas con información que ya existía pero que estaba desconectada, Hiebert & Carpenter (1992).

El crecimiento de redes puede ocurrir de varias maneras: una se lleva cabo a través de la anexión de una representación a un nuevo hecho o procedimiento; o bien a una red ya existente. La otra es vía los cambios en las redes que implican reorganizaciones, pues las representaciones son re-arregladas o se generan nuevas conexiones y las viejas conexiones pueden ser modificadas o abandonadas.

Tales reorganizaciones pueden ser globales o locales y pueden causar confusiones temporales.

Los procesos de reorganización y ajuste de nuevas representaciones a redes ya existentes dependen del grado de cómo hayan sido creadas. Experiencias pasadas crean redes mentales que el estudiante usa para interpretar y entender nuevas experiencias y nueva información.

El acercamiento de Tall & Vinner (1981) y Vinner (1994) acerca de las nociones de “Concept image and concept definition”, proporcionaron un acercamiento sobre la construcción de conceptos matemáticos. Ellos definen el Concepto imagen como *“…el nombre de un concepto cuando es nombrado, visto u oído es un estímulo para nuestra memoria. Algo es evocado por el nombre del concepto en nuestra memoria. Usualmente no es la definición del concepto, aún y cuando el concepto tenga una definición. El concepto imagen es algo no-verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto. Puede ser una representación visual del concepto, en caso de que el concepto cuente con una representación visual; también puede ser una colección de impresiones y de experiencias asociadas con el nombre del concepto que puede ser traducido en su forma verbal”*. Sin embargo, es importante recordar que estas formas verbales no fueron la primera evocación en nuestra memoria.

Tall & Vinner (1981) a través de sus investigaciones nos muestran una interpretación de la imagen conceptual construida por los estudiantes. Aunque este acercamiento nos centraba en la importancia de las conexiones, los aspectos de proceso y de conversión entre representaciones no fueron explicitados por ellos.

No debe dejar de tomarse en cuenta la propuesta de Cuevas & Pluvinage (2003); quienes proponen que al introducir un concepto matemático hay que partir de un problema en cierto contexto de interés para el educando buscando que se realice una acción, no necesariamente física sino mental, para que mediante la resolución gradual del problema (descomposición) el alumno llegue a la construcción del concepto mediante un plan de acción: el estudiante debe validar los resultados mediante operaciones directas e inversas. Adicionalmente, se debe promover que el estudiante resuelva un determinado problema de varias formas. A ello, habría que agregar el poder visualizar y operar el concepto en distintos sistemas de representación e instrumentar operaciones directas e inversas que permitan su articulación enriqueciendo el significado del mismo. Finalmente, este concepto deberá integrarse a un tema posterior de mayor complejidad como parte de la estructura necesaria para que el estudiante aborde el nuevo problema. Los autores mencionan que estos elementos que proponen están imbricados en teorías como las de: Clapàrede, Dewey, Piaget, Duval, Aebli, Sfard, Brousseau y Vigotsky, entre otros, Cuevas & Pluvinage (2003).

La forma tradicional de impartir un curso de matemáticas es meramente expositiva, y cuando se trata de resolver problemas la mayor parte la realiza el docente. Sin embargo, Lay, Dewey, Clapàrede, Decroly, Kerschenteiner y otros, resaltaron la importancia que tiene para el aprendizaje que sea el estudiante mismo quien efectúe las acciones concretas para la adquisición de los conceptos que se pretendan enseñar. En este sentido Cuevas y Pluvinage retoman tres principios de la escuela activa.

El **primero** es señalar la importancia que para la enseñanza y el aprendizaje tiene la acción (física o mental) del alumno. Es el propio educando quien mediante la resolución de problemas específicos, gradualmente dosificados, construye el concepto deseado.

El **segundo** retoma la aportación más importante de la enseñanza sensorio-empirista. Cada vez que se introduzca un concepto hay que intentar partir de un problema en cierto contexto de interés para el educando. Este problema puede generar ejercicios o sub problemas cuya solución, en forma estructurada y coordinada, lleve al estudiante a definir o mostrar el concepto matemático deseado.

El **tercero** es que una vez resuelto el problema presentado, el estudiante debe validar sus resultados, verificando que tengan un sentido lógico, de acuerdo al problema planteado.

Recapitulando lo anterior, Cuevas & Pluvinage dan a conocer una propuesta didáctica estructurada de la siguiente forma:

**Primero**, es esencial que el estudiante este realizando siempre una acción, por lo que mediante la resolución de problemas específicos, gradualmente dosificados, construya o llegue al concepto deseado.

**Segundo**, cada vez que se introduzca un concepto se debe partir de un problema en cierto contexto de interés para el educando.

**Tercero**, una vez resuelto un problema el estudiante debe comprobar sus resultados, verificando que tengan un sentido lógico, de acuerdo al problema planteado.

**Cuarto,** es necesario dividir el problema en sub-problemas que representen las operaciones parciales hasta llegar a integrar nuevamente la solución completa, por lo que un plan de acción que dosifique los ejercicios permitirá llegar a la solución de forma coherente y ordenada.
**Quinto**, cada vez que se presenten las operaciones directas asociadas a un concepto, de ser posible, implementar ejercicios que representen a la operación inversa asociada.

**Sexto**, cuando se proponga un método de resolución de un problema se debe intentar dar una forma alternativa de solución. Si esto no es posible, entonces no imponer una sola forma de solución.

**Séptimo,** elaborar los problemas de acuerdo al principio de adecuación óptima; es decir, que la dificultad de los problemas sea gradual de manera que requieren del esfuerzo del estudiante para fomentar su interés, pero no en exceso como para desanimarlo.

**Octavo**, el principio de mínima ayuda, no dar indicaciones demasiado directas que resuelvan el problema sino sólo elementos para que el alumno construya por sí mismo la solución del problema.

**Noveno**, cada vez que se propongan problemas o ejercicios que apoyen la enseñanza de un determinado concepto matemático, en un determinado sistema o registro, plantear actividades semejantes al mismo, en los diversos sistemas de representación que le sean propios, si la actividad lo permite.

**Decimo**, si un concepto se ilustra mediante ejercicios en más de un registro de representación, instrumentar operaciones directas e inversas que promuevan la translación o articulación de los mismos.

**Undécimo**, plantea la necesidad de establecer problemas en donde el concepto recién adquirido sea un elemento de análisis para un tema más avanzado o complejo.

En consecuencia tomando en cuenta a estos investigadores, se presentan una serie de actividades que retoman la importancia de conectar conocimientos previos a problemas contextualizados en ambientes escolares basados en lápiz y papel, y tecnologías digitales, todo ello con la intención de que el estudiante entienda el concepto de función lineal.

## 2.2. Ambientes de aprendizaje

Sin perder generalidad, se puede decir que un ambiente de aprendizaje es el lugar donde interactúan estudiantes y docentes con la finalidad de adquirir conocimientos, desarrollar habilidades y actitudes. Por lo que al hablar de ambientes centrados en quien aprende se refiere a aquellos en los que la atención se enfoca a los conocimientos, habilidades, actitudes y creencias que los alumnos traen sobre determinado dominio del conocimiento, para este trabajo en especial: funciones lineales.

Quienes aprenden deben construir su propio conocimiento, asumir que los conocimientos previos que se tienen sobre el tema pueden servir como base para la construcción de un nuevo entendimiento. En el presente trabajo se pretende que a partir de una prueba diagnóstica se descubra el grado de comprensión que tiene el alumno en relación a funciones lineales y sus antecedentes, dentro de un marco de problemas contextualizados, y a partir de ello se creen situaciones de aprendizaje que le permitan reajustar sus ideas en cuanto al dominio matemático que se tiene de estas.

Cuando se trata de ambientes centrados en el alumno, el docente debe poner especial atención en el diseño de sus actividades basándose en el progreso de sus alumnos, de tal manera que la realización de estas tareas no los desanime a continuar en la construcción de su conocimiento sobre el tema.

Para proporcionar un ambiente centrado en el aprendizaje, se debe poner especial atención en lo que se enseña e incorporar la enseñanza de estrategias que faciliten un nuevo aprendizaje, es decir que el entendimiento que se tenga del tema sea lo suficientemente fuerte que sirva como infraestructura para ampliar el conocimiento que puede ser un nuevo aprendizaje.

El aprendizaje con razonamiento es más difícil de lograr que simplemente memorizar. Dentro de un ambiente centrado en el aprendizaje la participación e interés de los estudiantes no garantiza entendimiento, mucho menos razonamiento y queda aún muy lejos del conocimiento que soporten nuevos aprendizajes. Es muy importante diseñar actividades didácticas que fomenten el entendimiento razonado que desemboque en conocimiento.

# Capítulo III. Diseño y justificación de los instrumentos

El presente trabajo tuvo como sustento teórico el modelo de Cuevas y Pluvinage (2003) de tal forma que a través de un conjunto de actividades a lápiz y papel apoyadas por un software de geometría dinámica en este caso Geogebra (Hohenwarter, M., 2001) se promoviese en los alumnos la construcción de gráficas de una función lineal.

Dicha propuesta se compone de una serie de actividades y la primera de ellas es la Evaluación Diagnóstica. Este instrumento de medición, tiene como propósito lo siguiente:

- Evaluación diagnóstica
    - Evaluar cuáles son los conocimientos básicos previos con los que cuenta el alumno como:
        - ✓ La ubicación de números decimales, fraccionarios y enteros sobre la recta real.
        - ✓ Así como la ubicación de coordenadas dentro del plano cartesiano.
    - Detectar cómo percibe el alumno la representación gráfica de las funciones constante, lineal y cuadrática a través de su bosquejo.
    - Una vez presentada una función, determinar cómo la construye el alumno.
    - Determinar sí es capaz de modelar un problema contextualizado
    - Determinar con qué habilidades cuenta sobre el uso de Geogebra.

- Ambientes de aprendizaje mediados con un software educativo.

  En esta parte del trabajo se trata de generar un lugar donde, al interaccionar estudiantes y herramientas tecnológicas, se puedan construir conocimientos y desarrollar habilidades.

- Se diseñan actividades a lápiz y papel que incluyen ítems que conducen al alumno a explorar, descubrir y construir su propio conocimiento sobre la función lineal.
- Se diseñan actividades usando software de geometría dinámica, cuya finalidad es reforzar la construcción de gráficas permitiendo al estudiante interactuar y explorar el objeto matemático, en este caso, la función lineal.
- Al hacer uso de este ambiente de aprendizaje, se pretende que el alumno asocie la representación algebraica de una función a su representación gráfica dentro de un contexto hipotético de la vida real. Estas actividades de aprendizaje incluyen ítems que permiten guiar al alumno en la construcción de su conocimiento.

- Evaluación sumativa.
    - El objetivo de este instrumento permite determinar sí el alumno interpreta la representación gráfica de la función lineal, tanto de “golpe” como dentro de un contexto específico.

## 3.1. Diseño de los instrumentos de evaluación.

Las funciones matemáticas permiten modelar fenómenos naturales y sociales, entre otros, en consecuencia son una herramienta útil para describir e interpretar situaciones de la vida cotidiana además de interpolar y extrapolar datos. Para ello los estudiantes deben contar con algunos conocimientos previos en Algebra, Geometría Analítica y haber desarrollado habilidades en el uso de Geogebra, además de ser capaz de graficar una función a partir de una tabla de datos o bien de una expresión algebraica.

Ya in situ de la aplicación de los métodos de evaluación, primeramente, se realizan pilotajes del examen diagnóstico, de las actividades a lápiz y papel, y de las actividades con Geogebra, con el objetivo de rediseñar las actividades si es necesario. Para ello se realizaron las siguientes acciones:

1. Se analizaron las distintas respuestas provistas por el grupo piloto con la finalidad de estimar si era o no prudente incluir mejoras en los instrumentos de evaluación debido a que pudieran causar conflicto en el estudiante.
2. Cuando fue necesario, también se rediseñaron los ítems, las actividades, y se valoró si era conveniente complementarlas.
3. Finalmente, se obtuvo la versión final de las actividades.

De acuerdo al resultado del examen diagnóstico y al acceso de las computadoras, la versión final de las actividades se aplicaron a 20 estudiantes de 48 de cuarto semestre de educación media superior del subsistema de bachilleratos generales del estado de Puebla; estas actividades fueron realizadas en 10 sesiones de 50 minutos en un horario extracurricular.

### 3.1.1. Evaluación Diagnóstica

El examen diagnóstico (Anexo 1) se divide en dos secciones: la primera dedicada a explorar si el estudiante cuenta con los conocimientos previos para graficar y la segunda se enfoca a identificar las dificultades que el estudiante tiene sobre el bosquejo, graficación y conexión de las funciones en la resolución de problemas contextualizados.

En particular, la primera sección nos permite explorar los conocimientos previos que el estudiante tiene sobre:

- El ordenamiento de una serie de números reales y determinación de cuál de ellos es menor o mayor.
- La ubicación de puntos en un plano cartesiano.

Este primer instrumento de evaluación dentro de la segunda sección permitió identificar, además, las dificultades que tienen los alumnos para:

- Bosquejar funciones en un plano cartesiano.
- Graficar en ambientes de lápiz y papel.
- Relacionar problemas contextualizados con funciones.

## 3.1.1.1. Ítems de conocimientos previos

Como las funciones a tratar son funciones reales, el ítem 1 solicita al estudiante ubicar dentro de la recta real algunos números reales (decimales, fraccionarios y enteros), con esto se pretende conocer la habilidad del estudiante para identificar el posicionamiento de varios números reales dentro de la recta numérica.

1. Ubica dentro de la recta los siguientes números:
   a. 2.5
   b. -4.25
   c. -3.75
   d. 6.5
   e. -1.33
   f. $\frac{3}{2}$
   g. 3.66
   h. $-\frac{7}{4}$

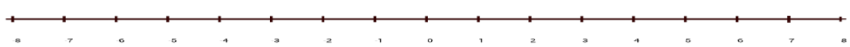


Fig. III.1. Ítem orientado a ubicar diferentes números reales en la recta numérica

Otro aspecto importante es graficar coordenadas cartesianas formadas por el valor de la variable y el de la función asociada, de ahí que el ítem 2 pretende que el estudiante ubique dentro del plano cartesiano puntos en los cuatro cuadrantes, esto permitirá conocer su habilidad para ubicar las coordenadas de un par ordenado, y al mismo tiempo ver si identifica la diferencia entre abscisa y ordenada ya que, acuerdo a mi experiencia en el aula, generalmente el estudiante entra en conflicto al graficar pares ordenados, puesto que confunde el orden del par (x, y) por (y, x).

Ubica dentro del plano cartesiano los siguientes pares ordenados A (3,-5), B (-4,-1), C (4,0), D (-2,0), E (0,4), F (-2,2)

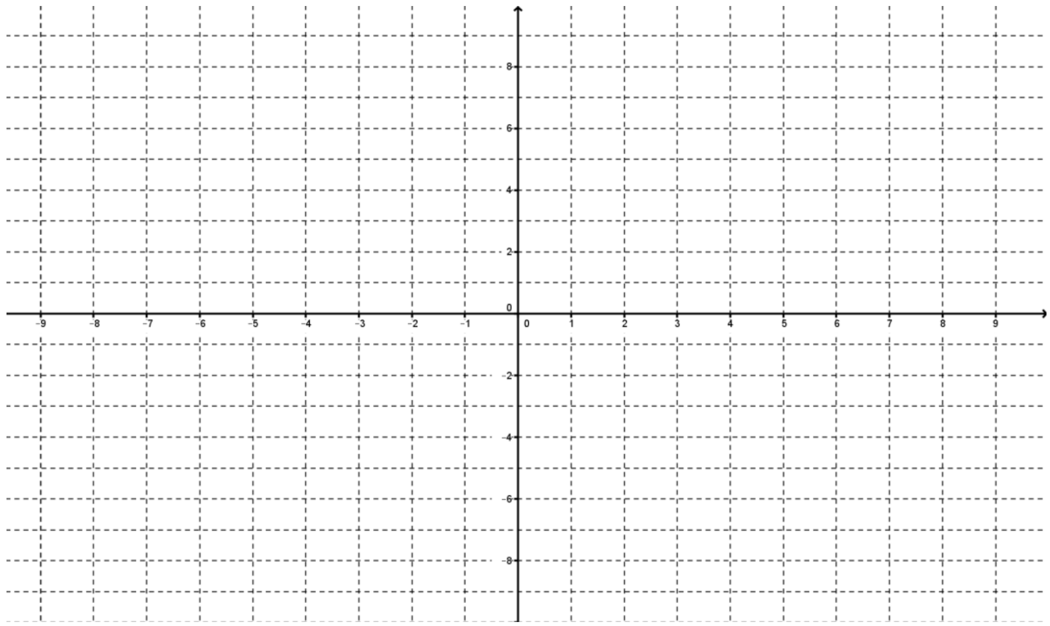



Fig.III.2. Ítem orientado a ubicar puntos dentro del plano cartesiano

Respecto a la segunda sección del examen diagnóstico, el ítem 3 permite establecer que tan capaz es el estudiante de interpretar la representación gráfica de algunas funciones. Por cierto, esta es una habilidad que evalúan tanto PISA como ENLACE.

Bosquejar las siguientes funciones en el plano cartesiano:

$f(x) = -x^2 + 4$ $g(x) = 6$ $r(x) = x + 6$ $h(x) = x^3$

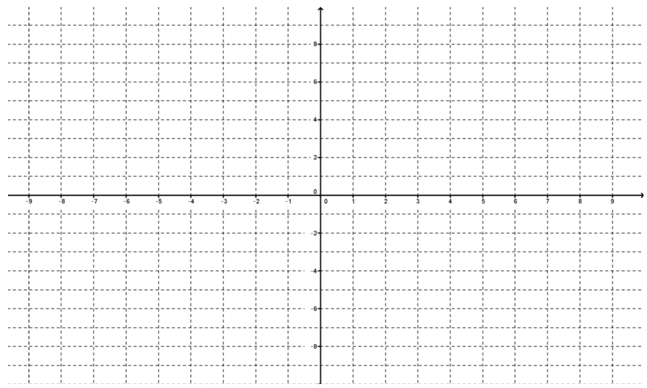


Fig. III.3. Ítem para proyectar la habilidad de respresentar gráficamente una función

Con los ítems 4, 5 y 6 se pretende determinar si el estudiante cuenta con la habilidad para que, a partir de una tabla de datos generada por ellos, haga la correcta sustitución de valores de la función, la ubicación en el plano cartesiano de los puntos generados, y su correcta graficación.

$$f(x) = 2x^2 - 1$$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

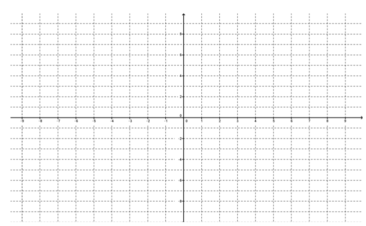


Fig. III.4. Ítem para graficar una función cuadrática a partir de una tabla

$$g(x) = 4$$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

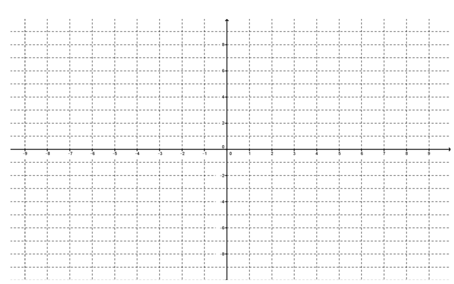


Fig. III.5. Ítem para graficar una función constante a partir de una tabla

$$h(x) = -x - 5$$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

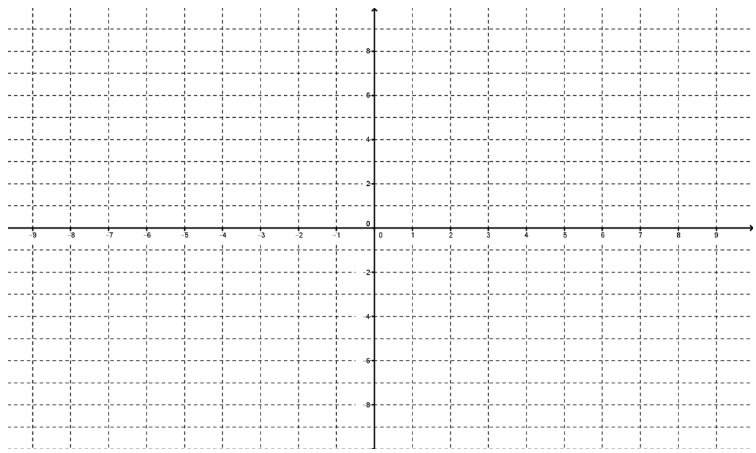


Fig. III.6. Ítem para graficar una función lineal a partir de una tabla

$$h(x) = -x^3 + 3$$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

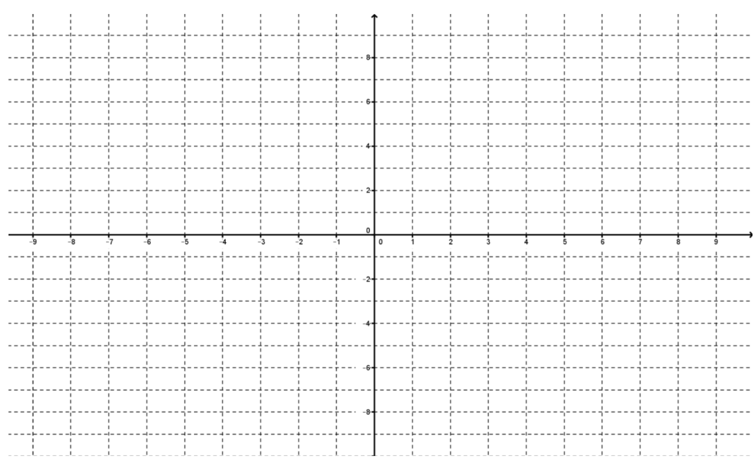


Fig. III.7. Ítem para graficar una función cúbica a partir de una tabla

Los ítems 7, 8 y 9 pretenden introducir al estudiante en forma sencilla a un contexto y determinar si éste es capaz de modelar las situaciones que se le presentan.

| Señala la letra de la expresión que modela cada situación. |
|---|
| 7. Durante la preventa de boletos para el concierto de Shaquira su precio es de *p* pesos. ¿Cuál es el precio del boleto el día del concierto si éste tiene un incremento de $30.00 extra?<br><br>a) $30p$ b) $p – 30$ c) $p + 30$ |
| 8. El precio del CD de Alejandra Guzmán es de *n* pesos. ¿Cuál es el precio del C.D si por ser el día de San Valentín tiene un descuento de $10.00?<br><br>a) $10n$ b) $n – 10$ c) $n + 10$ |
| 9. El padre de Marcela hizo un envío de *d* dólares y al cambio el dólar se cotizó ese día a $12.35 pesos, ¿cuántos pesos recibirá Marcela?<br><br>a) 12.35 d b) $d$ -12.35 c) $d + 12.35$ |
| Fig. III.8. Ítems orientados a determinar si el estudiante se encuentra familiarizado con problemas contextualizados sencillos |

El ítem 10 pretende que, a partir de un problema contextualizado y con una tabla de valores y otra más que incluya las operaciones a realizar, obtenga la función que modele el problema. Gracias a las observaciones hechas durante el pilotaje deduje que el estudiante debe ser guiado a través de tablas, pues sin ellas se le dificulta obtener la función que modela el problema.

Durante la kermesse que se efectúa en la escuela para recaudar fondos para la graduación se realizan diferentes actividades como baile, comida, golosinas, juegos y concursos. La siguiente tabla modela la relación entre en número de boletos vendidos B y el dinero recolectado G.

| Boletos vendidos | Cantidad de dinero recolectado ($) |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 5 | 40 |
| 10 | 80 |
| 15 | 120 |
| 20 | 160 |

De acuerdo a la tabla anterior llena la siguiente tabla efectuando las operaciones convenientes.

| Boletos vendidos | Operaciones efectuadas | Cantidad de dinero por recolectar |
|---|---|---|
| 0 | | |
| 5 | | |
| 8 | | |
| 10 | | |
| 13 | | |
| 15 | | |
| 17 | | |
| 18 | | |
| 20 | | |
| 25 | | |
| N | | |

¿Cuál función modela el problema anterior?

Fig.III.9.Ítem contextualizado que permite guiar al estudiante para obtener la función que modela el problema

## 3.2. Actividades de Aprendizaje

El punto número uno del Modelo Didáctico Cuevas & Pluvinage (2003), nos habla sobre el desarrollo de *proyectos de acción práctica* para la construcción de conceptos matemáticos y se apoya en lo siguiente: que el estudiante siempre esté desarrollando una acción; de tal forma que mediante la actividad del estudiante y el establecimiento del modelo matemático de solución, surja el concepto a construir. Siguiendo esta directriz se propuso la siguiente actividad.

### 3.2.1. Actividad de aprendizaje: Visualizar gráficamente los cambios en el parámetro $a$ de la función $\boldsymbol{f(x) = ax}$

Grafica funciones de la forma $f(x) = ax$, primero a lápiz y papel y después usando Geogebra™.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f(x) = x$ | $f(x) = -x$ | $f(x) = 2x$ | $f(x) = -2x$ |
| $f(x) = 3x$ | $f(x) = -3x$ | $f(x) = 0.5x$ | $f(x) = -0.5\,x$ |
| $f(x) = \frac{3}{4}x$ | $f(x) = -\frac{3}{4}x$ | $f(x) = 0.8x$ | $f(x) = -0.8x$ |
| $f(x) = 100\,x$ | $f(x) = -100x$ | $f(x) = 1000x$ | $f(x) = -1000x$ |

Fig. III.10. Actividad en Geogebra™ diseñada para guiar al estudiante en la construcción de gráficas de la forma $f(x) = ax$

| Observa las gráficas construidas y contesta las siguientes preguntas: | |
|---|---|
| 1. ¿Cuál es el efecto de $a$ en la gráfica? ______ | 2. ¿Qué sucede sí $a > 0$? ______ |
| 3. ¿Qué sucede si $a < 0$? ______ | 4. ¿Qué tienen en común tienen todas estas gráficas? ______ |

Fig. III.11. Preguntas de reflexión sobre el papel de $a$ dentro de la función lineal

A partir de las gráficas construidas completa las siguientes tablas

$f(x) = x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | 0 |

$f(x) = -x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | 0 |

$f(x) = 2x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | 0 |

$f(x) = -2x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | 0 |

$f(x) = 3x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | 0 |

$f(x) = -3x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | 0 |

$f(x) = 0.5x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | 0 |

$f(x) = -0.5\,x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | 0 |

$f(x) = \frac{3}{4}x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | 0 |

$f(x) = -\frac{3}{4}x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | 0 |

$f(x) = 0.8x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | 0 |

$f(x) = -0.8x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | 0 |

$f(x) = 100\,x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | 0 |

$f(x) = -100x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | 0 |

$f(x) = 1000x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | 0 |

$f(x) = -1000x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | 0 |

Fig. III.12. Registro tabular

A partir de las tablas construidas observa y contesta las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es el valor de $f(x)$ cuando $x = 0$?

   ______________________________________________

2. ¿Cuál es el valor de $x$ cuando $f(x) = 0$ para todos los casos?

   ______________________________________________

Fig. III.13. Preguntas para la reflexión sobre los puntos de corte con el eje *x* e *y*

Como puede verse la actividad está dividida en cuatro secciones, a saber:

- La primera permite al estudiante visualizar la construcción de funciones lineales con pendientes negativas y positivas, y con valores enteros, decimales y fraccionarios, lo suficientemente pequeños o suficientemente grandes que le permitan ver lo benevolente del uso de las herramientas tecnológicas, contrario al hacerlo a lápiz y papel.
- En la segunda sección se realizan preguntas de reflexión para el estudiante sobre el comportamiento de la pendiente y su papel en la función lineal.
- En la tercera sección se trabaja con una tabla que guía al aprendiz, quien basándose en la construcción de las gráficas con Geogebra™ pueda llenarlas y deducir la función que modele el problema.
- Una de las bondades de Geogebra™ es la de representar algebraica y gráficamente las funciones, de tal forma que el estudiante puede observar en todo momento cómo están ligados estos registros de representación, por lo que en la cuarta sección nuevamente se cuestiona al estudiante sobre el caso particular de los valores de *x* y *f(x)* cuando la recta corta a los ejes del plano cartesiano.

La principal característica del modelo Cuevas & Pluvinage (2003) es que el alumno debe aprender "haciendo", es decir, aprender implica un actividad activa del estudiante, por lo que la segunda actividad se estructuró de una manera similar a la anterior, y tiene como finalidad que el estudiante explore y descubra que el parámetro "*b"* determina el punto de corte de la función lineal con el eje "*y*".

## 3.2.2. Actividad de aprendizaje $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$

Ayúdate de Geogebra™ y grafica la columna 1 en una hoja, la columna 2 en otra y así sucesivamente.

| Columna 1 | Columna 2 | Columna 3 | Columna 4 |
|---|---|---|---|
| $f(x) = x + 4$ | $f(x) = -x + 4$ | $f(x) = 3x + 4$ | $f(x) = -3x + 4$ |
| $f(x) = x + 3$ | $f(x) = -x + 3$ | $f(x) = 3x + 3$ | $f(x) = -3x + 3$ |
| $f(x) = x + 2$ | $f(x) = -x + 2$ | $f(x) = 3x + 2$ | $f(x) = -3x + 2$ |
| $f(x) = x + 1$ | $f(x) = -x + 1$ | $f(x) = 3x + 1$ | $f(x) = -3x + 1$ |
| $f(x) = x + 0$ | $f(x) = -x + 0$ | $f(x) = 3x + 0$ | $f(x) = -3x + 0$ |
| $f(x) = x - 1$ | $f(x) = -x - 1$ | $f(x) = 3x - 1$ | $f(x) = -3x - 1$ |
| $f(x) = x - 2$ | $f(x) = -x - 2$ | $f(x) = 3x - 2$ | $f(x) = -3x - 2$ |
| $f(x) = x - 3$ | $f(x) = -x - 3$ | $f(x) = 3x - 3$ | $f(x) = -3x - 3$ |
| $f(x) = x - 4$ | $f(x) = -x - 4$ | $f(x) = 3x - 4$ | $f(x) = -3x - 4$ |

Fig. III. 14. Actividad en Geogebra™ diseñada para guiar al estudiante en la construcción de gráficas de la forma $f(x) = ax + b$

Observa las gráficas construidas y contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es el efecto de $b$ en la gráfica?
_____________________________________________________________

2. ¿Qué sucede si $b > 0$?
_____________________________________________________________

3. ¿Qué sucede si $b < 0$?
_____________________________________________________________

Fig. III.15. Preguntas de reflexión sobre el papel de $b$ dentro de la función lineal

Esta segunda actividad consta de dos secciones:

- La primera tiene por objetivo guiar al estudiante en la construcción de algunas funciones lineales con diferentes pendientes y a la vez con diferentes ordenadas al origen, con la idea de que visualice el rol que tiene el parámetro *b* dentro de la función lineal.
- La segunda sección pretende que el estudiante reflexione a través de preguntas el rol de *b.*

De manera semejante a un taller de carpintería se debe guiar al aprendiz para que vaya construyendo un mueble específico y de esta manera vaya desarrollando habilidades en el campo de la carpintería, de igual manera cada vez que se introduzca un concepto se hace necesario introducir al estudiante en situaciones contextualizadas, para ello el contexto debe ser atractivo e interesante al aprendiz (ver punto 2 Cuevas & Pluvinage, 2003). De esta manera se introduce en forma sencilla al estudiante en situaciones problemáticas que conecten las funciones lineales con contextos de la vida cotidiana. Con este fin se elaboró la siguiente actividad que se tituló “Plan telefónico”.

Este tipo de actividad permite ubicar al aprendiz en un contexto de la vida cotidiana, con características que lo involucran de forma sencilla, con tablas guiadoras y uso de herramientas tecnológicas que le permitan modificar su propia imagen conceptual de acuerdo con Tall & Vinner (1981).

### 3.2.3. Actividad: Plan telefónico.

Una compañía de cable tiene un súper paquete que incluye todas las llamadas locales a teléfonos de la misma compañía telefónica, sin límite de tiempo, T.V. por cable con 50 canales, Internet a 5 megas y todas las llamadas son ilimitadas desde tu teléfono fijo a tres celulares de la misma compañía telefónica. Pagando una renta mensual de $829.00.

**Plan Cuádruple**


por sólo

**$829 al mes**

**Todas las llamadas** de tu teléfono fijo a tus 3 celulares están incluidas y son ilimitadas (1).

1. Las llamadas ilimitadas a números frecuentes sin costo aplican los primeros 5 minutos, a partir del minuto 5:01 se cobrará la tarifa vigente que es de $ 0.98 por minuto.

Fig. III. 16. Problema contextualizado a una situación de la vida real

Construye una tabla considerando 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 10,20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100,n minutos de llamadas a celular, grafícalas a lápiz y papel en hojas milimétricas

| Minutos | Costo por los minutos excedidos | Renta mensual fija | Costo total a pagar mensualmente |
|---|---|---|---|
| 0 | | | |
| 1 | 1 x$0.98= | $829.00 | $0.98 + $829.00 = $829.98 |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | 4 x $0.98 = $3.92 | $829.00 | $3.92 + $829.00 = $832.92 |
| 5 | 5 x $0.98 = $4.90 | $829.00 | $4.90 + $829.00= $833.90 |
| 6 | | | |
| 7 | | | |
| 8 | | | |
| 9 | | | |
| 10 | | | |
| 20 | | | |
| 30 | | | |
| 40 | | | |
| 50 | | | |
| 60 | | | |
| 70 | | | |
| 80 | | | |
| 90 | | | |
| 100 | | | |
| n | | | |

Construye la misma tabla en Excel y compárala con la que hiciste a lápiz y papel y, anota tu opinión sobre la facilidad de construir una y otra_______________________________________________________________

Fig.III.17. Tabla guiadora para obtener la función que modele el problema

| De acuerdo a la información obtenida en la tabla: |
| --- |
| a) ¿Cuánto debe pagarse mensualmente si se hacen 5 llamadas al mes excedidas cada una de ellas en 19 minutos?<br>______________________________________________________________________ |
| b) ¿Cuánto debe pagarse si la renta mensual es de \$1035.00?<br>______________________________________________________________________ |
| c) ¿Cuánto debe pagarse si la renta mensual es de \$1467.00?<br>______________________________________________________________________ |
| d) Establece una función que modele el problema planteado para el pago mensual considerando los minutos extras.<br>__________________________________________________ |
| Fig. III.18. Preguntas para reflexionar sobre diferentes opciones de pago y determinación de la función que modele el problema |

| Apoyándote en Geogebra™ grafica la función que modela el problema planteado. |
| --- |
| a) ¿Qué parámetro determina el cambio de la pendiente?<br>______________________________________________________________________ |
| b) ¿Qué parámetro determina la ordenada al origen?<br>______________________________________________________________________ |
| Fig. III. 19. Preguntas de conexión entre el problema contextualizado y una función lineal |

Cómo puede observarse la tarea contiene cuatro secciones cada una de las cuales pretende que el estudiante divida el problema en sub-problemas (Ver punto 4 de Cuevas & Pluvinage).

- La primera es la lectura del problema contextualizado situado en la promoción de un plan telefónico que incluye la clásica cláusula con “letra chiquita” de la que se deriva el problema.
- La segunda sección trata sobre la construcción de una tabla guiadora con cuatro columnas, donde en la primera se establece el número de minutos extra; en la segunda columna se incluyen algunas operaciones que multiplican el número de minutos excedidos por su costo, esto con el fin de guiar al estudiante sobre lo que tiene que hacer; en la tercera columna se establece la renta mensual la cual es constante en todos los casos y finalmente la última columna presenta el pago mensual que debe hacerse en función de los minutos excedidos más la renta fija. De acuerdo al pilotaje hecho se incluye el valor para 0 minutos excedidos y para “n”, que sirve de guía al estudiante en la obtención de la función que modele el problema, ya que en el pilotaje se omitieron en la tabla estos dos datos y en consecuencia también los omite el estudiante.
- La tercera y cuarta secciones incluyen preguntas de reflexión para el alumno que le permiten conectar la situación problemática con la función lineal.

La siguiente actividad la cual se titula “Conversión de temperaturas” se estructuró de manera similar a la actividad del “Plan telefónico” con una tabla de datos, sin embargo, ahora ya no se le presenta la tabla guiadora. El objetivo de la presente actividad es que el estudiante conecte el problema contextualizado con el conocimiento que tiene sobre la imagen conceptual de función lineal y finalmente descubra que un problema real puede modelarse a través de una función (Ver punto 7 de Cuevas & Pluvinage).

## 3.2.4. Actividad Función lineal. Conversión de temperaturas

En los países anglosajones suelen usar la escala Fahrenheit para medir temperaturas. Dentro de esta escala el punto de congelación del agua se alcanza a 32ºF, y el de ebullición a 212ºF. En México usamos la escala Celsius donde el punto de congelación del agua se alcanza a los 0ºC y el punto de ebullición a los 100ºC.

Fig. III.20. Problema contextualizado a una situación hipotética dentro del salón de clases.

1. Diseñe una tabla que relacione ambas escalas de temperatura como la que se presenta a continuación:

| ºC | ºF |
|---|---|
| 0 | 32 |
| 10 | |
| 25 | |
| 38 | |
| -32 | |
| -10 | |
| 100 | 212 |
| n | |

Fig. III.21. Tabla de datos para conversión de ºC a ºF y viceversa

1. Hallar la función que relaciona ºC con ºF
2. Grafique a lápiz y papel los datos obtenidos
3. Apoyándose en Geogebra™, grafique, y compare ambas gráficas.

Fig. III.22. Pregunta sobre cómo se relacionan los ºC y ºF.Tareas que promuevan el concepto imagen de una función lineal

4. Con ayuda de la ecuación obtenida conteste las siguientes preguntas:
   a) ¿a cuántos ºC equivalen 75 ºF?
   b) ¿a cuántos ºF equivalen 47 ºC?
   c) ¿a cuántos ºF equivalen -86ºC?

Fig. III.23. Uso de la función que modela el problema

Como se puede ver, esta actividad propone al estudiante, la solución de un problema contextualizado que se le presenta en cuatro secciones que el alumno debe resolver aplicando lo aprendido en la actividad del “Plan telefónico”.

- La primera sección presenta el enunciado del problema.
- La segunda sección presenta una tabla que a diferencia de la del “Plan telefónico” no da opción a las operaciones, por lo que abre otra alternativa de solución.
- La tercera sección presenta tareas que le permiten al estudiante determinar la solución a través del registro algebraico y gráfico.
- Finalmente, la cuarta sección se diseñó tomando en cuenta las sugerencias de la Didáctica Cuevas & Pluvinage (Ver punto 5, Presentar operaciones inversas), ya que las preguntas sugeridas transitan de $^{0}$C a $^{0}$F y viceversa.

## 3.3. Actividad Sumativa

Terminadas las actividades de aprendizaje, se diseñó un instrumento que permitiese comparar el antes y después de aplicar las actividades de aprendizaje. La última actividad a realizar es la Sumativa, la cual permite al alumno ayudarse de Geogebra™ o bien a lápiz y papel, a fin de resolver un problema contextualizado que sea significativo como consecuencia de establecer conexiones con el contexto. Cuando las actividades sólo se diseñan para ser exitosas en el salón de clase, el trabajo del estudiante no es significativo ya que sólo le sirve para pasar el examen. Por ello y de acuerdo con el modelo didáctico de Cuevas & Pluvinage, una vez resueltos los problemas simples y sencillos, habrá que aumentar la dificultad de resolución gradualmente (Ver punto 7). Por ello la siguiente actividad presenta sub-problemas que se relacionan con la actividad del “Plan telefónico” y “Conversión de Temperaturas”; sin embargo los cuestionamientos a resolver involucran niveles cognitivos más altos.

### 3.3.1. Actividad Función lineal. Las corredoras.

La última parte de un triatlón es de 10 km (10 kilómetros ó 10,000 metros) de carrera. Cuando la corredora Ana empieza esta última parte de la carrera, se encuentra 600 metros atrás de Beatriz; sin embargo, Ana puede correr más rápido que Beatriz, pues, mientras que Ana puede correr en promedio a 225 metros/minuto, Beatriz lo hace en promedio a 200 metros/minuto.

Fig.III.24. Enunciado de la actividad

1. Construye una tabla de valores que describa el trayecto de ambas corredoras observando la relación que guarda el tiempo con la distancia, y que además incluye las operaciones que realices.

| Ana | | Operaciones | Beatriz | | Operaciones |
|---|---|---|---|---|---|
| tiempo (min) | distancia (m) | | tiempo (min) | Distancia (m) | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

2. Establece la función que les da la distancia dependiendo del tiempo transcurrido.

Fig.III.25. Registro tabular para obtener la función que modele el problema

3. Grafiquen a lápiz y papel ambos recorridos.
4. Apoyándose en Geogebra™, grafique el recorrido de ambas corredoras, y compare ambas gráficas.

Fig. III. 26. Actividad a papel y lápiz, y Geogebra™ para visualizar el comportamiento de ambas corredoras.

5. ¿Cuál es la variable independiente y cuál la dependiente?
6. ¿Las unidades para la distancia y el tiempo fueron adecuadas?
7. ¿Qué significado tiene el punto donde se cortan las gráficas?
8. Basándose en las gráficas obtenidas, ¿quién gana Ana o Beatriz?
9. Si gana Ana ¿cuál es la distancia que la separa de Beatriz al llegar a la meta?
10. Si es Beatriz la que gana ¿qué tan lejos quedó Ana cuando Beatriz finalizó?
11. ¿Existe algún momento en que Ana y Beatriz coincidan en algún lugar?; de ser así ¿en qué kilómetro lo hacen?

Fig. III.27. Preguntas detonantes que conectan la solución del problema con las gráficas de las funciones lineales que modelan el problema de ambas corredoras

Esta actividad engloba la aplicación de lo aprendido durante las actividades de aprendizaje aunque con una mayor complejidad. Como puede verse ésta actividad es conformada por cuatro secciones:

- La primera sección muestra el enunciado del problema
- La segunda sección presenta una tabla para completar muy parecida a las del “Plan Telefónico” y “Conversión de Temperaturas”; sin embargo, esta tabla carece de las operaciones que guíen al alumno para obtener la función lineal.
- La tercera sección permite en dos ambientes diferentes manipular las funciones lineales.
- La última sección permite al estudiante visualizar las gráficas de las dos funciones lineales que modelan el recorrido de ambas corredoras y a la vez conectar con la parte algebraica, panorama que brinda Geogebra™ y que permite al estudiante contestar los cuestionamientos hechos.

# Capítulo IV. Resultados

Habiéndose desarrollado el diseño de las actividades de aprendizaje del objeto de estudio, se procedió a implementar la parte experimental; la cual se desarrolló en clases extracurriculares durante cuatro semanas con sesiones diarias de 50 minutos y se dedicaron dos sesiones exclusivamente al manejo del software de Geogebra™. Este último trabajo de estudio se inició con un grupo de 20 alumnos de 4to. semestre del Bachillerato General Oficial “Tepecatl”, ubicado en la comunidad de San Miguel Xaltepec, Palmar de Bravo, Puebla. Cabe hacer notar que del grupo de experimentación 16 fueron mujeres y 4 hombres. La marcada diferencia de género se debe, según explicación de los propios alumnos, a la falta de interés en participar en sesiones extracurriculares; los varones participaron a cambio de tener una recompensa en sus calificaciones; en contraste, el género femenino participó sin promesa de estímulo.

En el presente capítulo tendremos una descripción de los resultados, que se obtuvieron con los instrumentos de medición, en las actividades mediadas por tecnología y las actividades de aprendizaje.

## 4.1. Evaluación Diagnóstica

La evaluación diagnóstica fue el primer instrumento de medición que se aplicó individualmente a cada miembro del susodicho grupo. El tiempo efectivo para esta tarea fue de 50 minutos, (Ver anexo 1). La evaluación diagnóstica se dividió en dos secciones. La primera dedicada a explorar si el estudiante contaba con los conocimientos previos para graficar, para ello se aplicaron dos ítems explicados en el capítulo anterior y cuyos objetivos son los siguientes:

- El ordenamiento de una serie de números reales y determinación de cuál de ellos es menor o mayor.
- La ubicación de puntos en un plano cartesiano.

La segunda sección consta de tres ítems, cuya finalidad permite identificar las dificultades que tienen los alumnos para:

- Bosquejar funciones en un plano cartesiano.
- Graficar en ambientes de lápiz y papel.
- Relacionar problemas contextualizados con funciones.

### 4.1.1. Evaluación diagnóstica Primera Sección

Como se señala en párrafos anteriores, el primer ítem se enfoca al ordenamiento de una serie de números reales y determinación de cuál de ellos es menor o mayor.

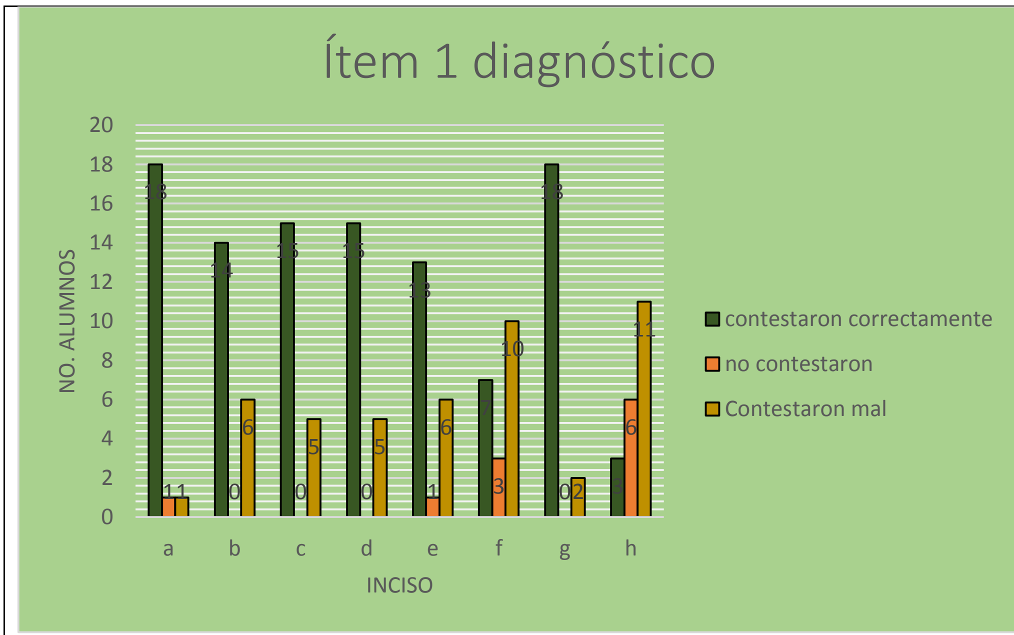



Gráfico IV.1

Como puede observarse del Gráfico IV.1, 18 estudiantes contestaron correctamente el inciso “a” que consiste en ubicar 2.5; uno incorrectamente y sólo uno no contestó, por lo que al parecer no existe dificultad en ubicar este número en la recta. Sin embargo, lo interesante del presente trabajo no sólo es focalizar la parte cuantitativa, sino observar el conflicto que ocasiona en los estudiantes lo cuestionado, para así subsanar la creencia que sobre el tema se tenga.

El inciso “b” solicita ubicar -4.25, cuatro alumnas empiezan en -4 y avanzan hacia cero y no hacia menos infinito.

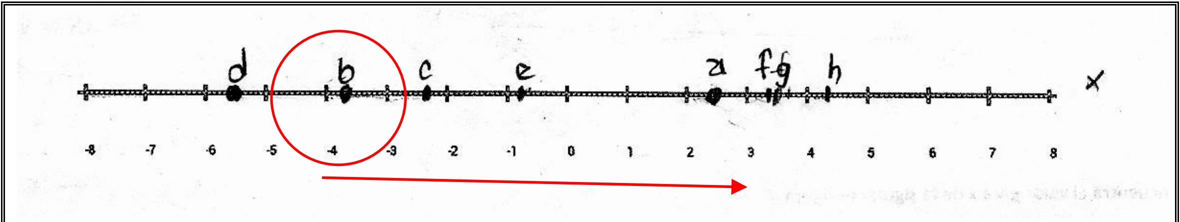



Fig.IV.1

Al solicitarles la ubicación de -3.75 las mismas cuatro alumnas empiezan en -3 y avanzan hacia cero en vez de hacerlo hacia menos infinito.

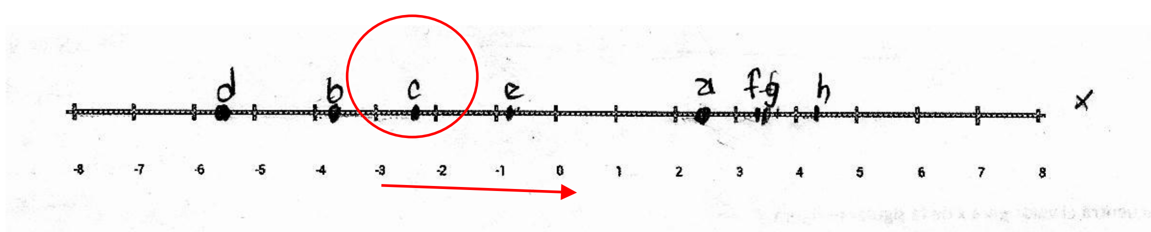



Fig.IV.2

En la respuesta de Abigail (Fig. IV.3) para ubicar 6.5 se observa nuevamente conflicto; pues en lugar de avanzar hacia 7 lo hizo hacia 5.

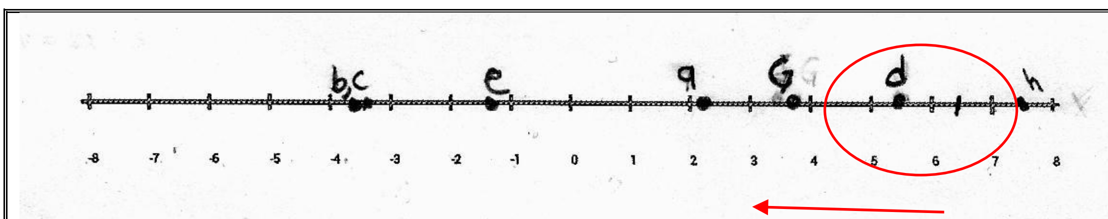



Fig. IV.3.

Gabriela tuvo conflicto en ubicar $\frac{3}{2}$. Como se ve de la Fig. IV. 4, ubica el numerador como entero y el 2 del denominador como un medio, localizándolo en 3.5, esto es, identifica al numerador con los enteros y el denominador como la fracción que se suma a la parte entera.

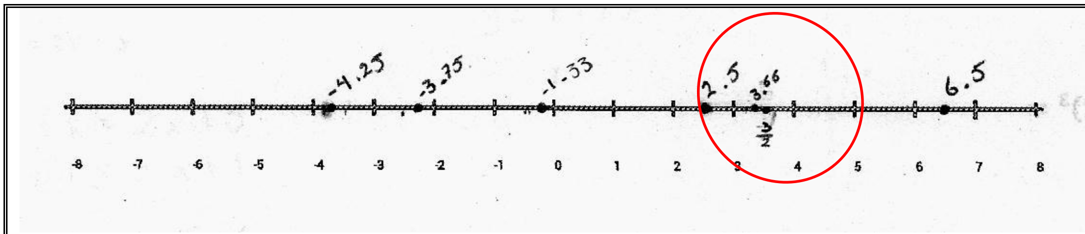



Fig. IV.4

Rubí ubica el $\frac{3}{2}$ en 3.2 aproximadamente, tal y como puede observarse en la Fig. IV.5

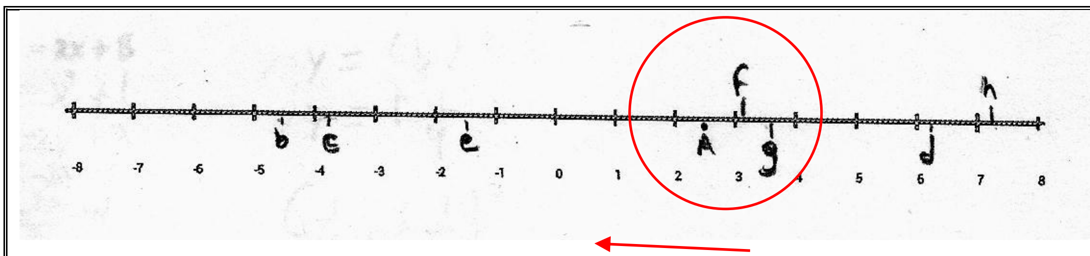



Fig. IV.5

El segundo ítem tiene como finalidad que el alumno ubique en el plano cartesiano puntos en los cuatro cuadrantes, tales como A (3,-5), B (-4, -1), C (4,0), D (-2,0), E (0,4) y F (-2,0), obteniéndose los siguientes resultados.

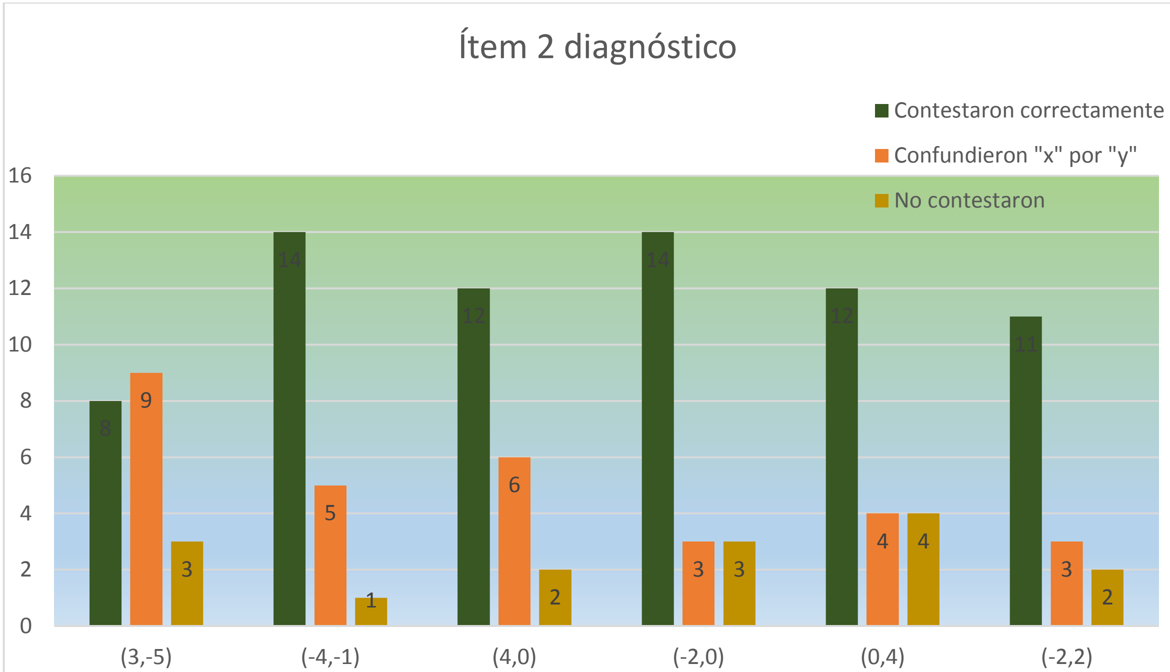
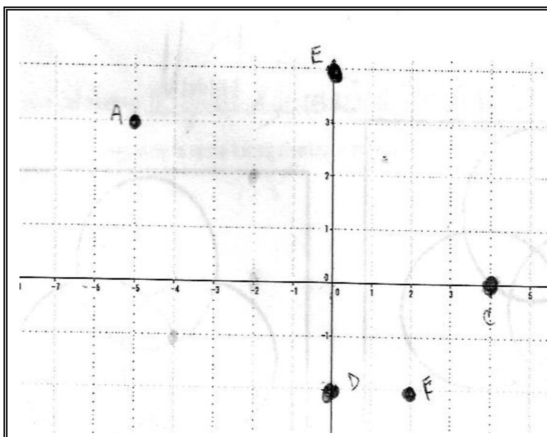
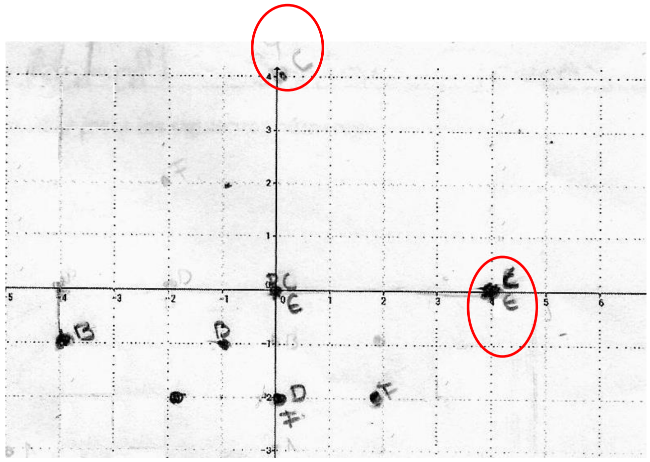



Gráfico IV.2

Como puede observarse en el Gráfico IV.2, la gran parte de los errores son porque invierten el orden entre abscisas y ordenadas.

Entre los conflictos del estudiante frente a dichos reactivos se pudieron observar los siguientes:

| | |
|---|---|
|  | Obsérvese que en los puntos A (3,-5) y D (-2,0), el estudiante invierte las abscisas por las ordenadas. |
| Fig. IV.6 | |



En el presente gráfico, el estudiante, para no errar, señala las dos posibilidades

(x, y) y (y, x).

Fig.IV.7

## 4.1.2. Evaluación Diagnóstica Segunda Sección

Respecto a la segunda sección del examen diagnóstico, el ítem 3 se diseñó con la intención de establecer qué tan capaz es el estudiante de proyectar “de golpe” su dominio sobre la representación gráfica de algunas funciones. Esta es una habilidad que evalúan tanto PISA como ENLACE.

Bosquejar las siguientes funciones en el plano cartesiano:

$f(x) = -x^2 + 4$ $\quad g(x) = 6$ $\quad r(x) = x + 6$ $\quad h(x) = x^3$

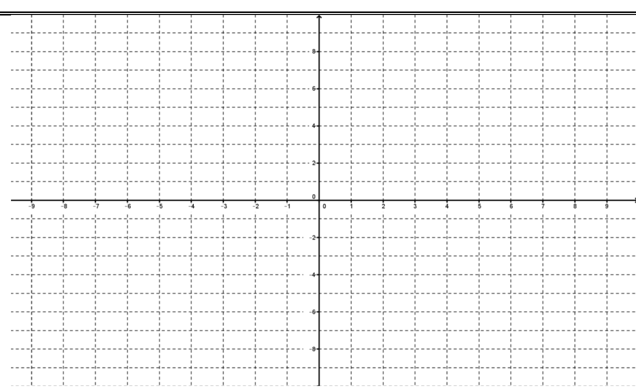


Fig. IV.8

La cuantificación de los resultados obtenidos se observa en el siguiente gráfico.

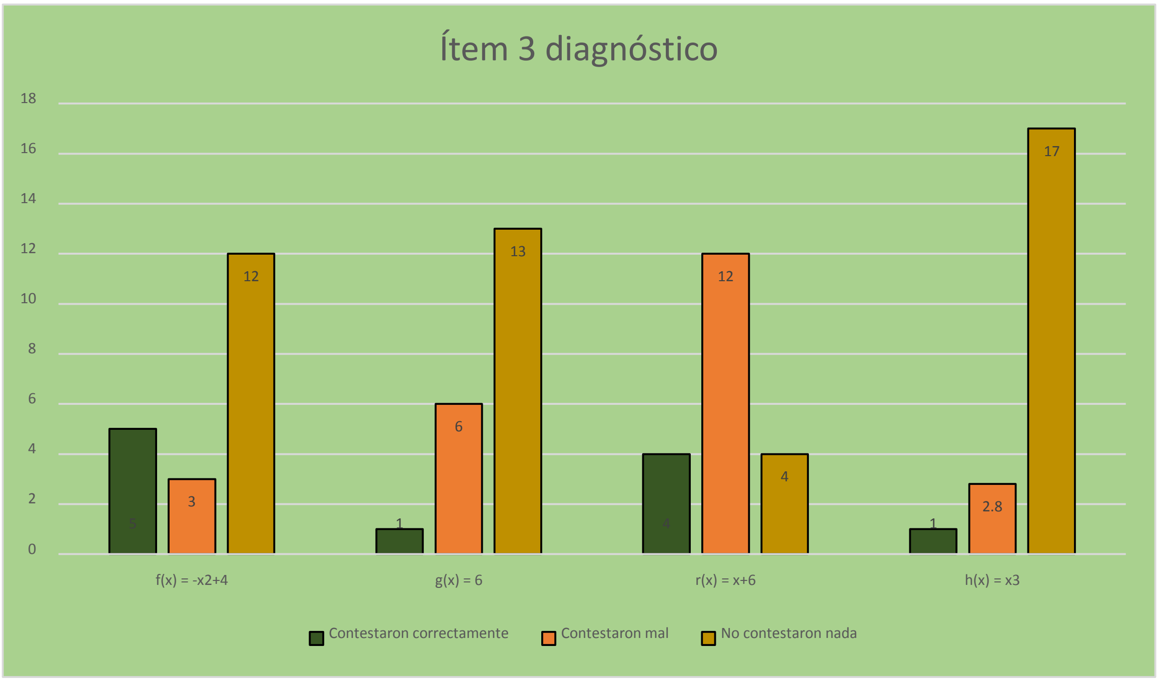



Gráfico IV.3

Con base al Gráfico IV.3, debe hacerse notar que la parábola es el lugar geométrico que más estudiantes pudieron graficar bien y la que menos es la función cúbica.

Algunos de los conflictos que presentaron los estudiantes, en cuanto a la graficación de las diferentes funciones presentadas, son los siguientes;

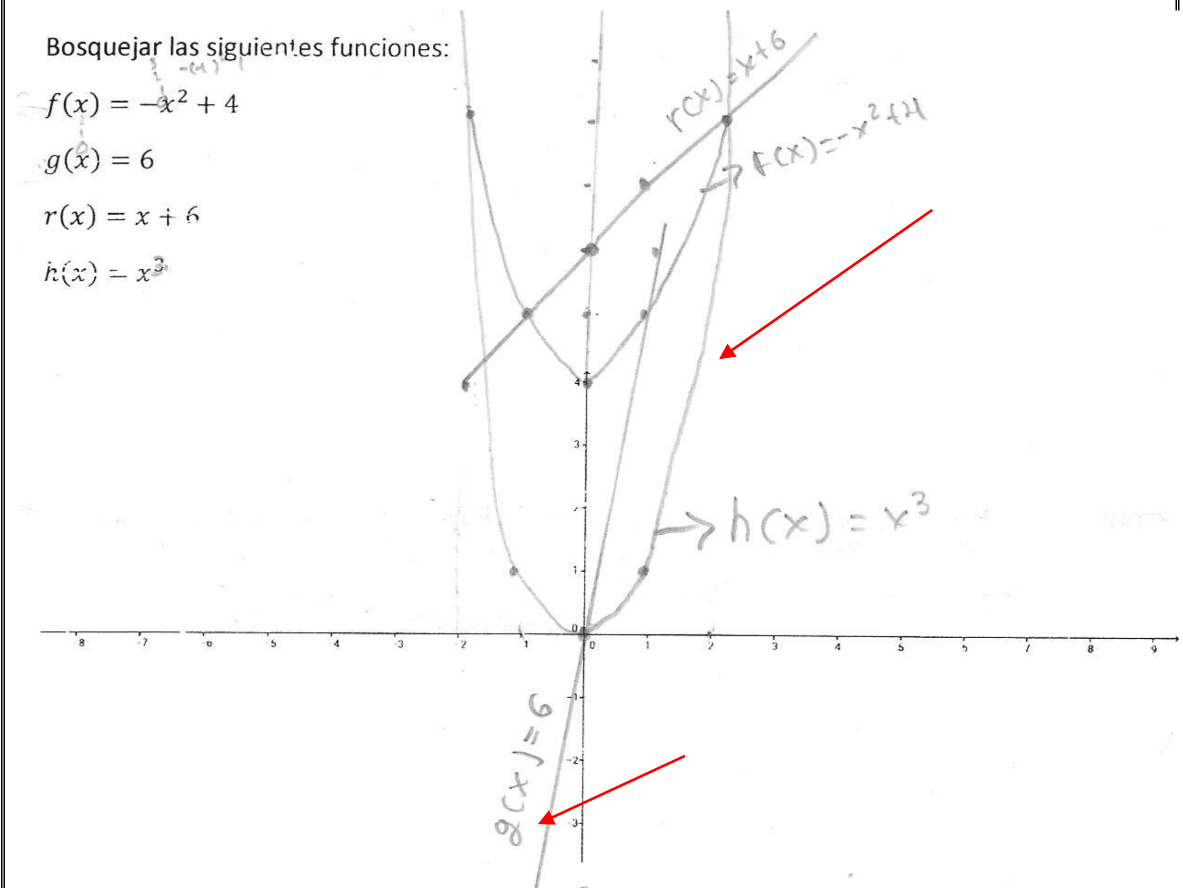



Fig.IV.9

El estudiante que realiza esta actividad confunde el concepto de una función cúbica con la de una cuadrática y la de una constante con una lineal. Además, no identifica que la abertura de la parábola es hacia abajo.

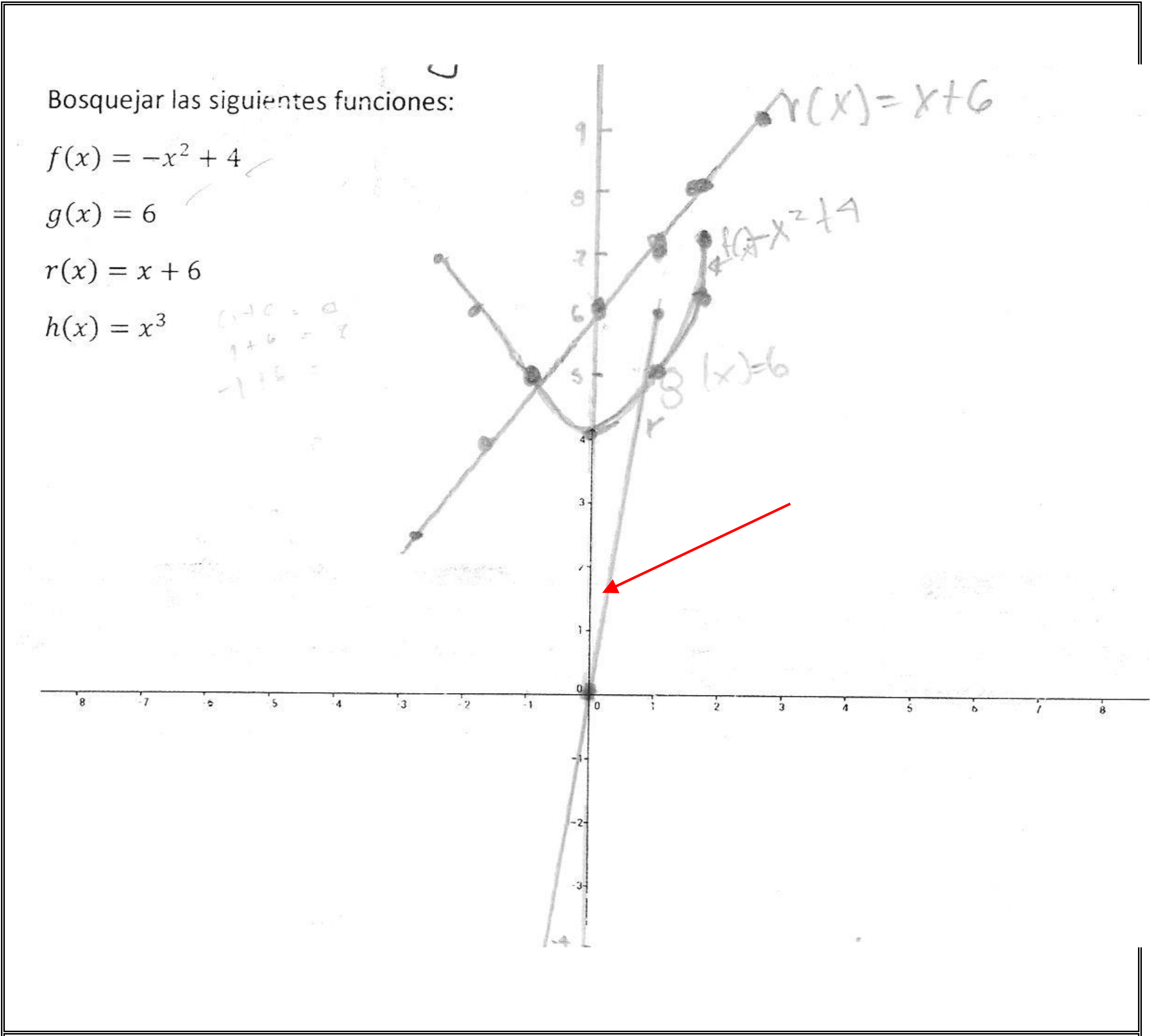



Fig. IV.10

Nuevamente el estudiante que grafica la función constante lo hace como si fuese una lineal, véase la línea señalada por la flecha.

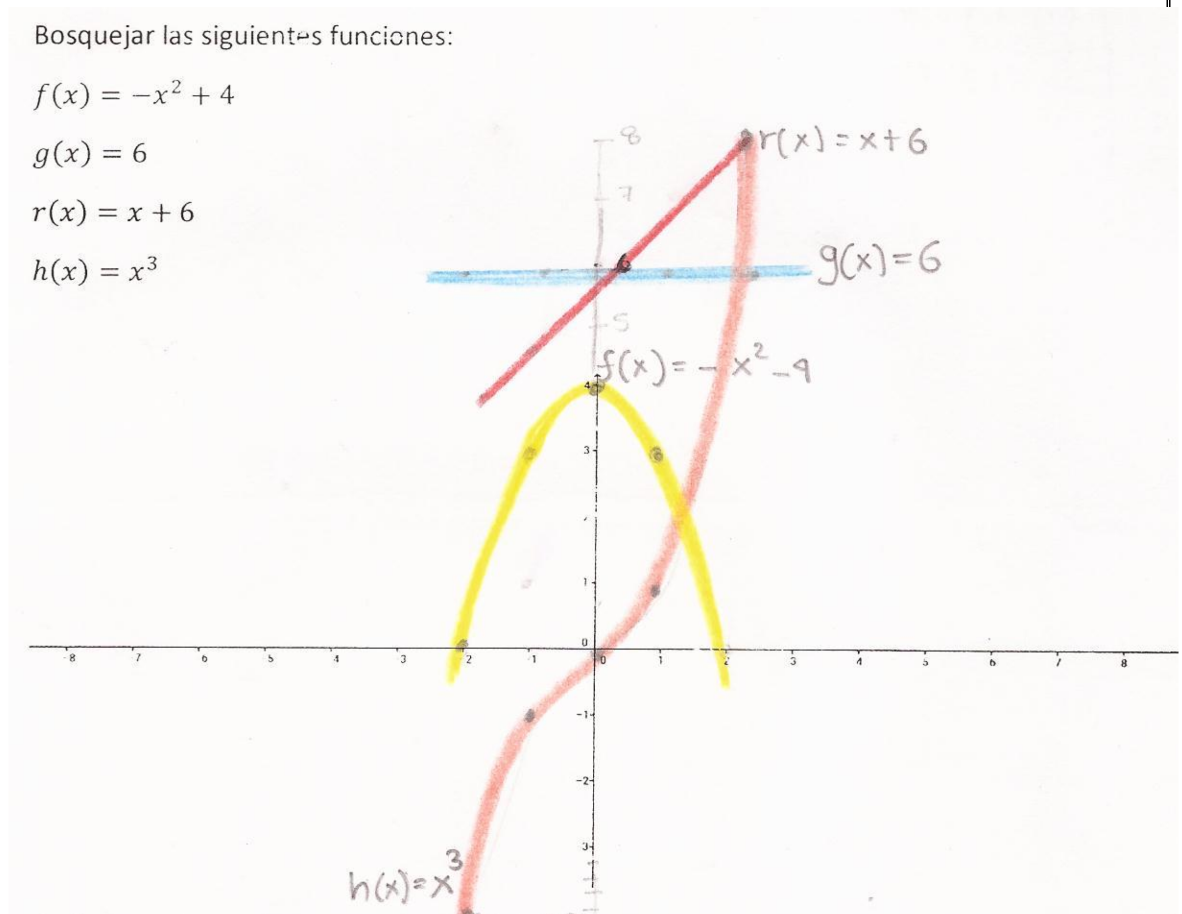



Fig. IV.11

Erika (Fig. IV.11) identifica muy bien todas las funciones aunque limita su trazo, tal como los alumnos anteriores lo hicieron, sólo trazan en ciertos puntos, no extienden el trazado más allá de los puntos seleccionados por ellos arbitrariamente.

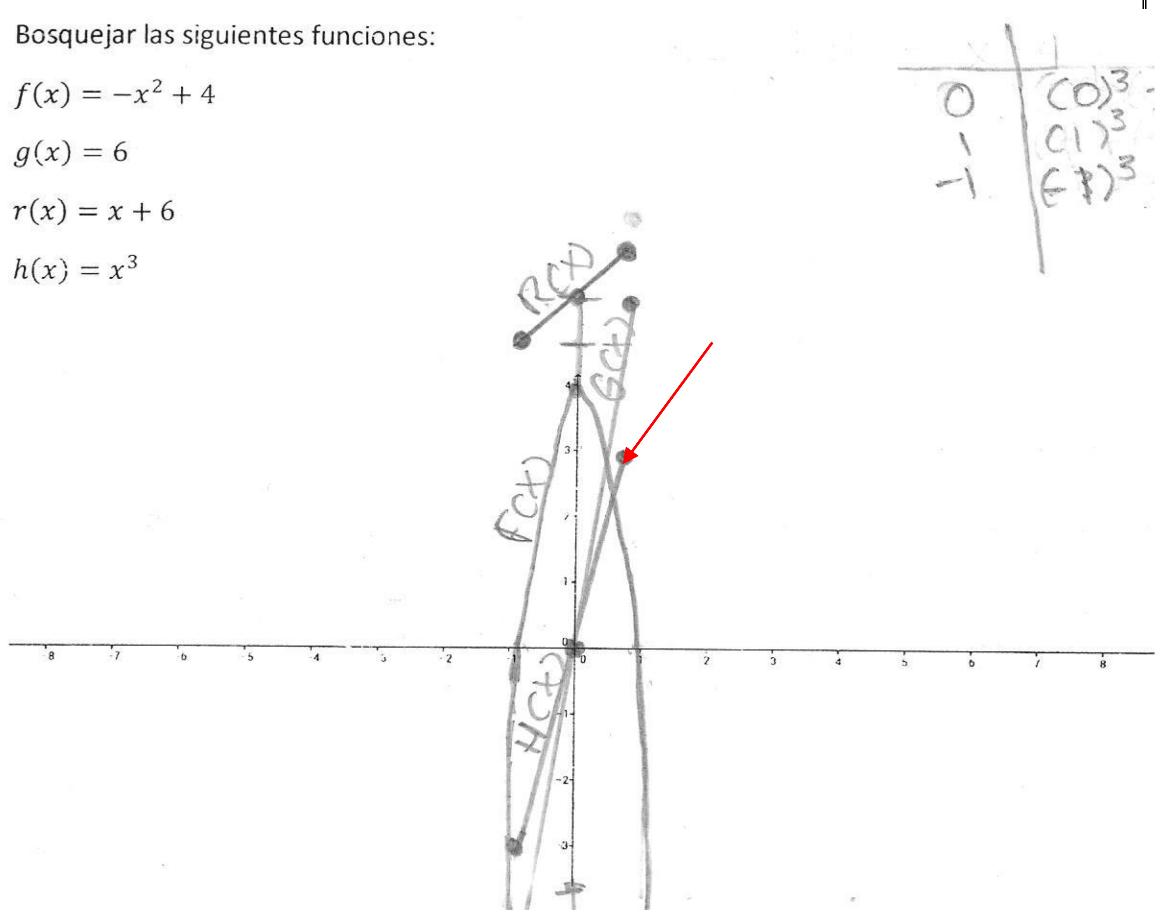



Fig. IV.12

También Miguel (Fig.IV.12) tiene la idea que una función constante es una función lineal, además en la cúbica como sólo cuenta con tres puntos e infiere que es una recta.

Con los siguientes reactivos se pretende determinar si el estudiante cuenta con la destreza para que a partir de una expresión algebraica se genere una tabla de datos, haga la sustitución correcta de valores en la función, una buena realización de las operaciones, y finalmente una graficación correcta.

- $f(x) = 2x^2 - 1$
- $g(x) = 4$
- $h(x) = -x - 5$
- $h(x) = -x^3 + 3$

Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

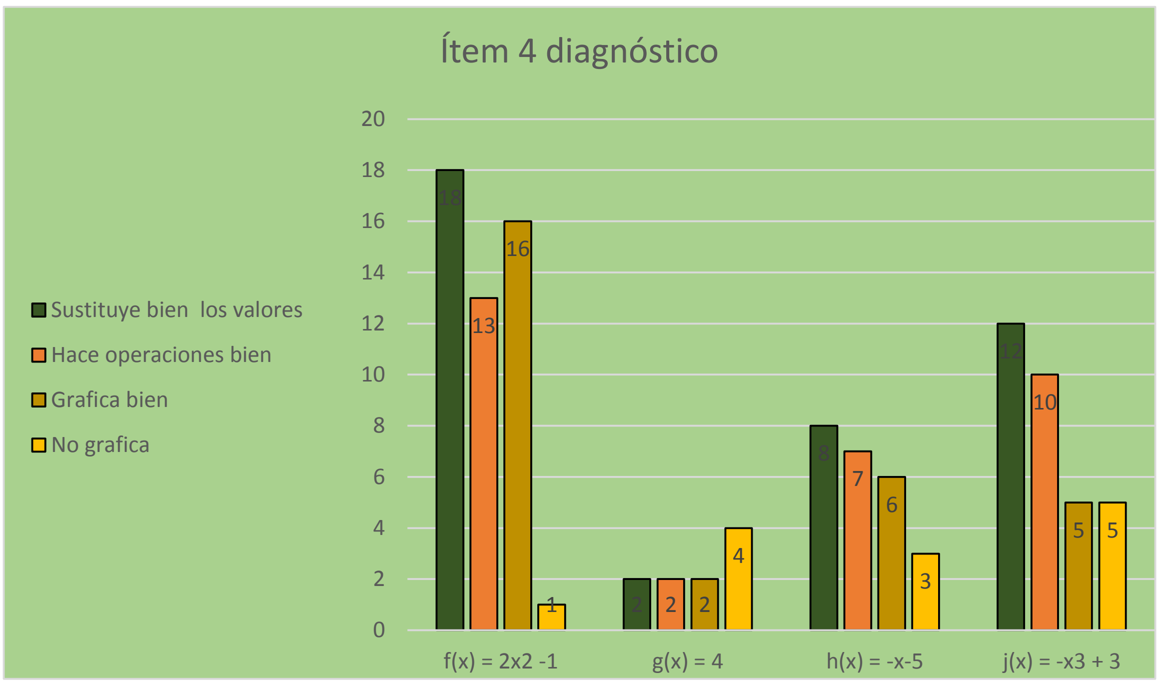



Gráfico IV.4

De acuerdo con lo que puede observarse en el Gráfico IV.4, nuevamente la parábola es el lugar geométrico que más alumnos pueden graficar y la función constante es la que menos alumnos grafican bien; una vez más la grafican como una función de la forma $f(x) = ax$. A diferencia de la actividad anterior se puede inferir que para ellos es más práctico graficar haciendo uso de una tabla que bosquejar la función; además, que el número de alumnos que no la grafican disminuyó. Todos aquellos alumnos que intentaron graficar la función constante realizaron el mismo proceso, tal y como puede observarse en la Fig. IV.13., sustituyen un valor para *x* aun cuando no existe dentro de la función.

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | $g(0) = 4(0) = 0$ |
| 1 | $g(1) = 4(1) = 4$ |
| -1 | $g(-1) = 4(-1) = -4$ |
| 2 | $g(2) = 4(2) = 8$ |
| -2 | $g(-2) = 4(-2) = -8$ |
| 3 | $g(3) = 4(3) = 12$ |
| -3 | $g(-3) = 4(-3) = -12$ |

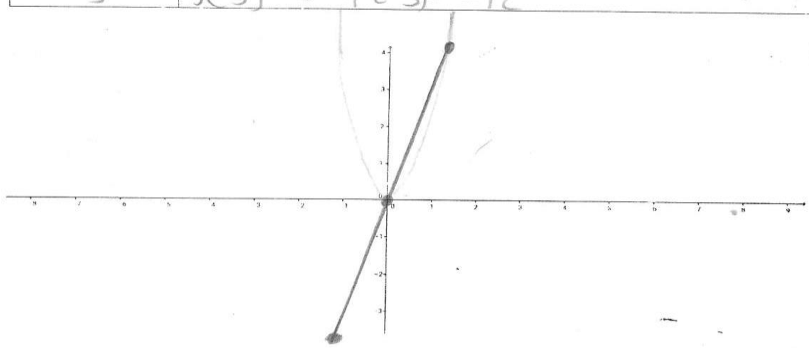


Fig. IV.13

El siguiente ítem es un escenario contextual sencillo que pretende descubrir la reacción del estudiante ante situaciones diferentes a las enseñadas en clase.

| |
|---|
| 7. Durante la preventa de boletos para el concierto de Shaquira, su precio es de $p$ pesos. ¿Cuál es el precio del boleto el día del concierto si éste tiene un incremento de $30.00 extra?<br><br>b) $30p$ b) $p - 30$ c) $p + 30$ |
| 8. El precio del CD de Alejandra Guzmán es de $n$ pesos. ¿Cuál es el precio del CD si por ser el día de San Valentín tiene un descuento de $10.00?<br><br>b) $10n$ b) $n - 10$ c) $n + 10$ |
| 9. El padre de Marcela hizo un envío de $d$ dólares y el cambio a dólar se cotizó ese día a $12.35 pesos, ¿cuántos pesos recibirá Marcela?<br><br>b) 12.35 d b) $d$ -12.35 c) $d + 12.35$ |
| Fig. IV.9 |

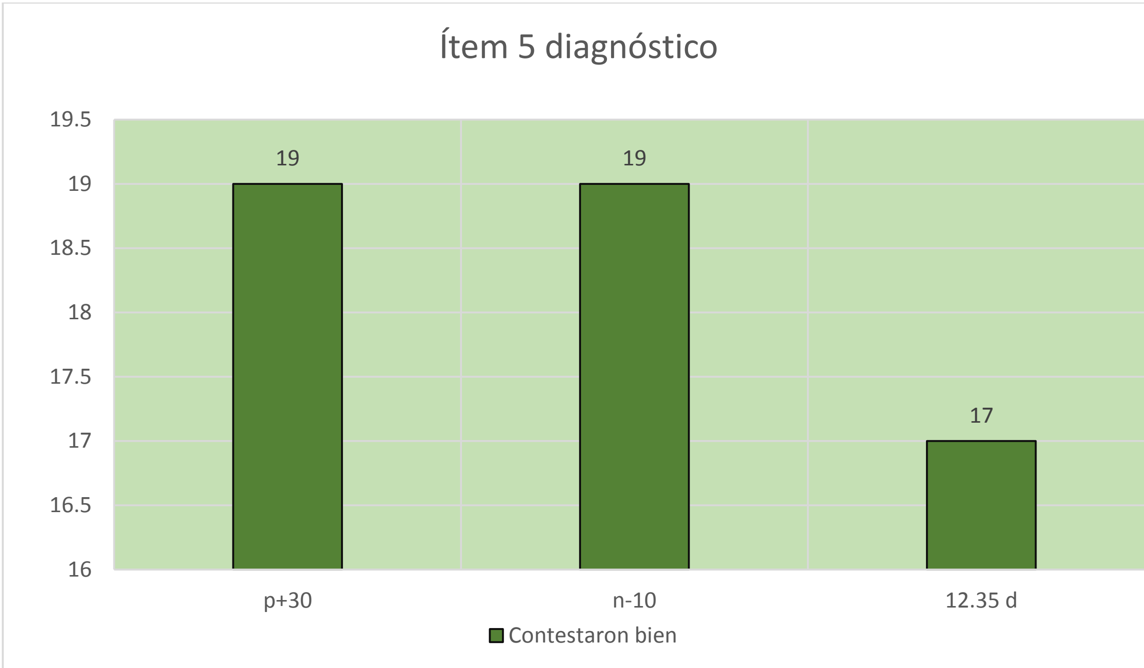



Gráfico IV.5

Obsérvese en el Gráfico IV.5, que la mayoría de los estudiantes contestaron correctamente el ítem que involucra problemas contextualizados escolares.

El último ítem de esta prueba diagnóstica que trata de un problema contextualizado escolar y cuyo objetivo es que el estudiante establezca un patrón de comportamiento del problema, realice las operaciones correctamente y pueda deducir el modelo adecuado es el siguiente.

Durante la kermesse que se efectúa en la escuela para recaudar fondos para la graduación se realizan diferentes actividades como baile, comida, golosinas, juegos y concursos. La siguiente tabla modela la relación entre en número de boletos vendidos B y el dinero recolectado G.

| Boletos vendidos | Cantidad de dinero recolectado (\$) |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 5 | 40 |
| 10 | 80 |
| 15 | 120 |
| 20 | 160 |

De acuerdo a la tabla anterior llena la siguiente tabla efectuando las operaciones convenientes.

| Boletos vendidos | Operaciones efectuadas | Cantidad de dinero por recolectar |
|---|---|---|
| 0 | | |
| 5 | | |
| 8 | | |
| 10 | | |
| 13 | | |
| 15 | | |
| 17 | | |
| 18 | | |
| 20 | | |
| 25 | | |
| N | | |

¿Cuál función modela el problema anterior?

Fig.IV.10.

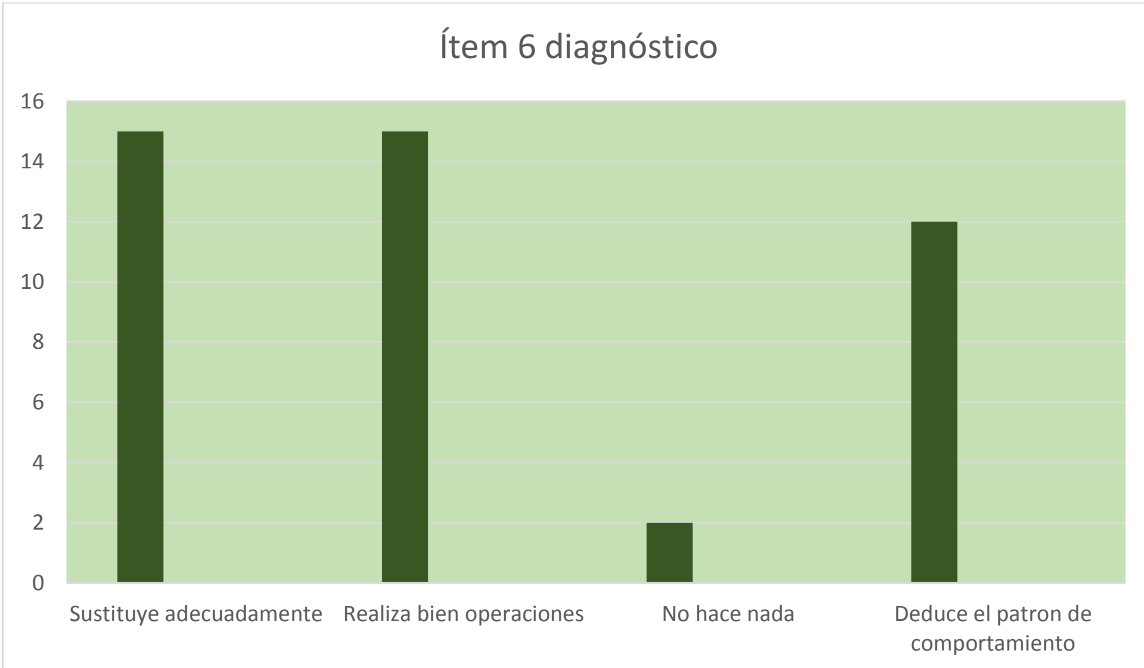



Gráfico IV.6

Una vez más, los estudiantes tienen menos conflicto para contestar correctamente problemas contextualizados sencillos; sin embargo, para la deducción de la función que modela el problema, no lo hacen a partir del uso de N sino a partir del patrón de comportamiento que el estudiante observa durante la integración del registro tabular.

| Minutos | Costo por los minutos excedidos | Renta mensual fija | Costo total a pagar mensualmente |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | $0.98 x 1 | $829.00 | $0.98 + $829.00=$859.98 |
| 2 | $0.98x2=1.94 | 829 | 829.00+1.94=830.96 |
| 3 | $0.98x3=2.94 | 829 | 829.00+2.94=831.94 |
| 4 | $0.98 x 4 = $3.92 | $829.00 | $829.00 + $3.92 = $832.92 |
| 5 | $0.98 x 5 = $4.90 | $829.00 | $829.00 + $4.90 = $833.90 |
| 6 | $0.98x6=5.88 | 829. | 829.00+5.88=834.88 |
| 7 | $0.98x7=6.86 | 829 | 829.00+6.86=835.86 |
| 8 | $0.98 x8=7.84 | 829 | 829.00+7.84 836.84 |
| 9 | $0.98 x9=8.82 | 829 | 829.00+8.82 =837.82 |
| 10 | $0.98 x10=9.8 | 829 | 829.00+9.8=838.8 |
| 20 | $0.98x20=19.6 | 829 | 829.00+19.6=848.4 |
| 30 | $0.98x30=29.4 | 829 | 829.00+29.4=858.4 |
| 40 | $0.98x40=39.2 | 829 | 829.00+39.2=868.2 |
| 50 | $0.98 x50=49 | 829 | 829.00+49=878 |
| 60 | $0.98 x 60=58.8 | 829 | 829.00+58.8=887.8 |
| 70 | $0.98x70=68.6 | 829 | 829.00+68.6=897.6 |
| 80 | $0.98x80=78.4 | 829 | 829.00+78.4=907.4 |
| 90 | $0.98x90=88.2 | 829 | 829.00+88.2=917.2 |
| 100 | $0.98 x100=98 | 829 | 829.00+98 =927 |
| N | n*0.98=N | 829 | n*0.98+829= n*0.98+829 |

## 4.2. Actividades de aprendizaje

Tras la aplicación de la prueba diagnóstico, se implementaron una serie de actividades cuyo objetivo fue promover una mejora en la comprensión del concepto de función lineal y cómo graficarla.

El experimento se realizó en un pequeño salón con 8 computadoras por lo cual la muestra se dividió en dos grupos, uno integrado por 8 estudiantes con computadora y otro con 12 estudiantes quienes realizaron dichas actividades a lápiz y papel. A continuación se detallan los resultados obtenidos en cada una de las actividades diseñadas para este trabajo de investigación.

### 4.2.1. Actividad de aprendizaje considerando $f(x) = ax$

Grafica funciones de la forma $f(x) = ax$, primero a lápiz y papel y después usando Geogebra™.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f(x) = x$ | $f(x) = -x$ | $f(x) = 2x$ | $f(x) = -2x$ |
| $f(x) = 3x$ | $f(x) = -3x$ | $f(x) = 0.5x$ | $f(x) = -0.5\,x$ |
| $f(x) = \frac{3}{4}x$ | $f(x) = -\frac{3}{4}x$ | $f(x) = 0.8x$ | $f(x) = -0.8x$ |
| $f(x) = 100\,x$ | $f(x) = -100x$ | $f(x) = 1000x$ | $f(x) = -1000x$ |

Fig. IV.11

Para la realización de esta actividad se les facilitó a los estudiantes una tabla para ser llenada y a partir de ésta poder graficar a lápiz y papel además de hacerlo usando Geogebra™. Los resultados arrojados por la muestra de estudiantes están representados en el Gráfico IV.7.

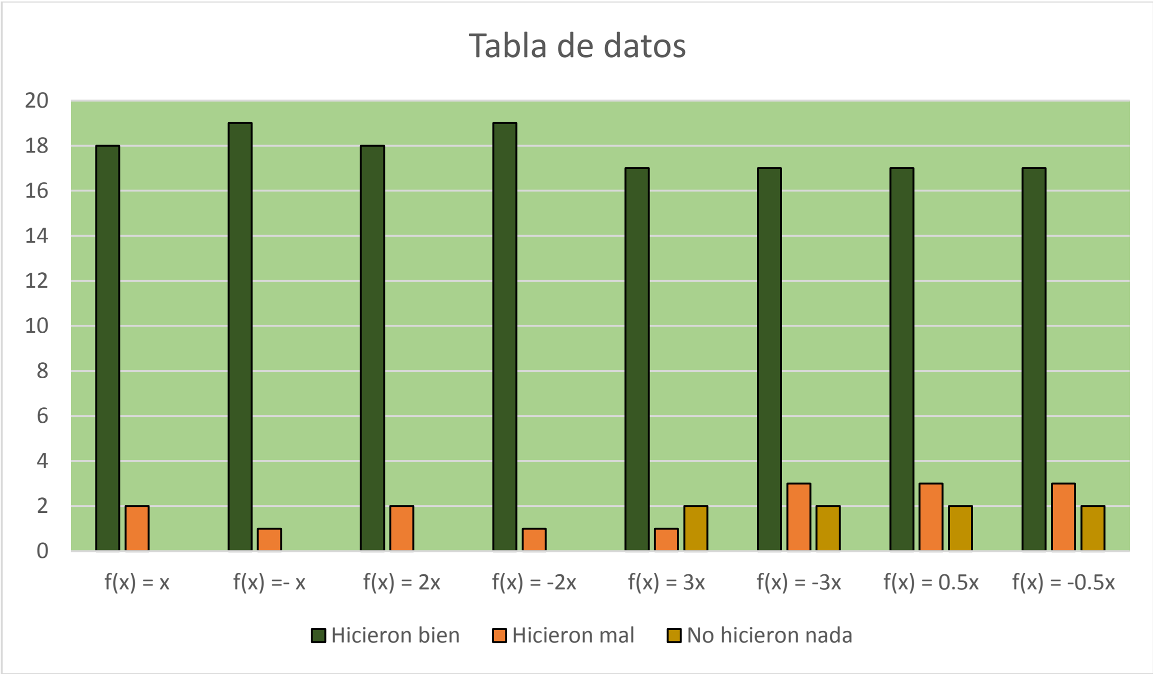


Tabla de datos
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
f(x) = x
f(x) =- x
f(x) = 2x
f(x) = -2x
f(x) = 3x
f(x) = -3x
f(x) = 0.5x
f(x) = -0.5x
Hicieron bien
Hicieron mal
No hicieron nada

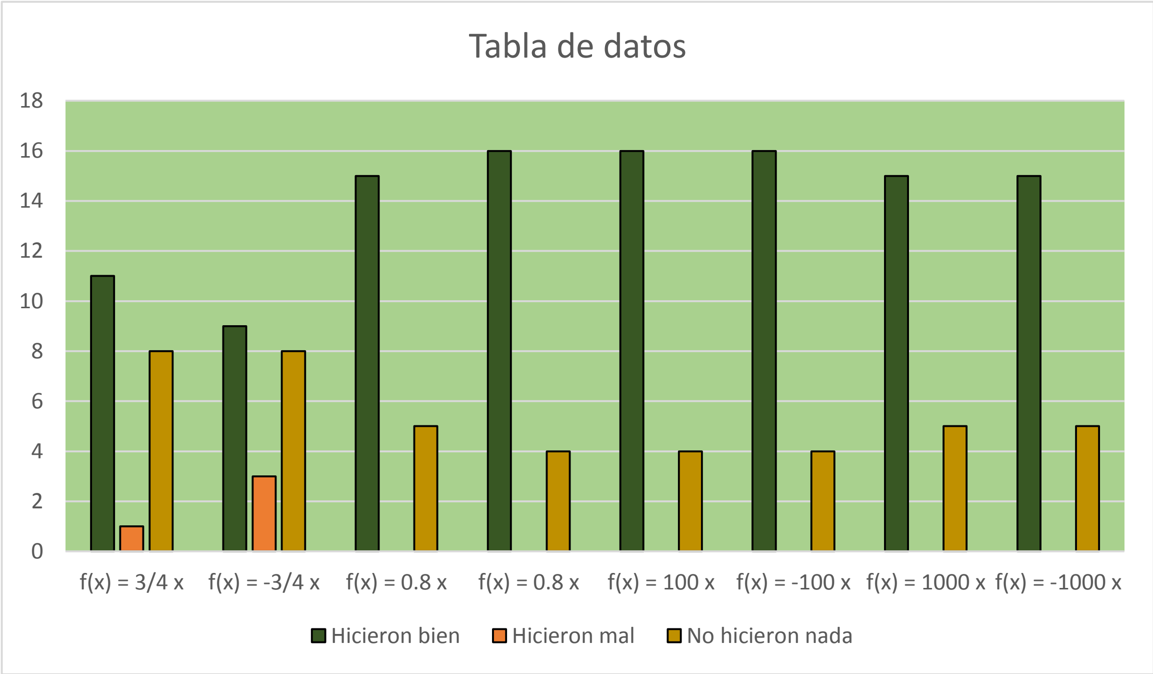
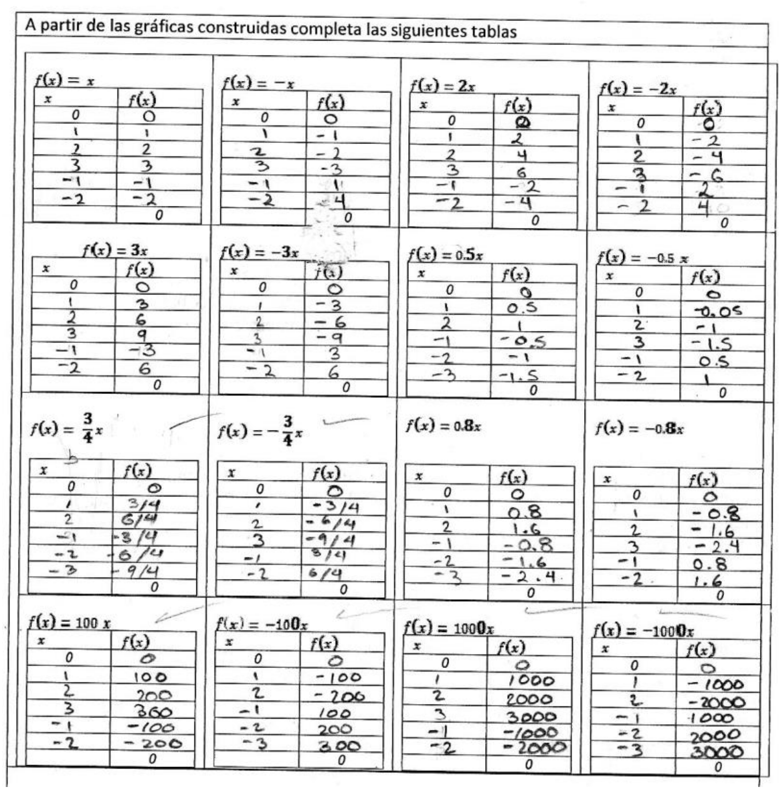


Tabla de datos
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
f(x) = 3/4 x
f(x) = -3/4 x
f(x) = 0.8 x
f(x) = 0.8 x
f(x) = 100 x
f(x) = -100 x
f(x) = 1000 x
f(x) = -1000 x
Hicieron bien
Hicieron mal
No hicieron nada

Gráfico IV. 7

En todas las primeras columnas (color verde obscuro) en el Gráfico IV.7, que especifica una resolución correcta del reactivo, se tomó en cuenta sólo aquellos estudiantes que tabularon bien todos los puntos, excepto la última fila *f(x)=0* (Ver Fig.IV.12) y finalmente sustituyeron datos que no coincidieron con el valor para *f(x)=0* (Ver Fig. IV.13). Sólo 2 estudiantes la consideraron adecuadamente.



A partir de las gráficas construidas completa las siguientes tablas

$f(x) = x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 3 |
| −1 | −1 |
| −2 | −2 |
| | 0 |

$f(x) = -x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | −1 |
| 2 | −2 |
| 3 | −3 |
| −1 | 1 |
| −2 | 4 |
| | 0 |

$f(x) = 2x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 6 |
| −1 | −2 |
| −2 | −4 |
| | 0 |

$f(x) = -2x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | −2 |
| 2 | −4 |
| 3 | −6 |
| −1 | 2 |
| −2 | 4 |
| | 0 |

$f(x) = 3x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 3 |
| 2 | 6 |
| 3 | 9 |
| −1 | −3 |
| −2 | 6 |
| | 0 |

$f(x) = -3x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | −3 |
| 2 | −6 |
| 3 | −9 |
| −1 | 3 |
| −2 | 6 |
| | 0 |

$f(x) = 0.5x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 0.5 |
| 2 | 1 |
| −1 | −0.5 |
| −2 | −1 |
| −3 | −1.5 |
| | 0 |

$f(x) = -0.5x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | −0.05 |
| 2 | −1 |
| 3 | −1.5 |
| −1 | 0.5 |
| −2 | 1 |
| | 0 |

$f(x) = \frac{3}{4}x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 3/4 |
| 2 | 6/4 |
| −1 | −3/4 |
| −2 | −6/4 |
| −3 | −9/4 |
| | 0 |

$f(x) = -\frac{3}{4}x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | −3/4 |
| 2 | −6/4 |
| 3 | −9/4 |
| −1 | 3/4 |
| −2 | 6/4 |
| | 0 |

$f(x) = 0.8x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 0.8 |
| 2 | 1.6 |
| −1 | −0.8 |
| −2 | −1.6 |
| −3 | −2.4 |
| | 0 |

$f(x) = -0.8x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | −0.8 |
| 2 | −1.6 |
| 3 | −2.4 |
| −1 | 0.8 |
| −2 | 1.6 |
| | 0 |

$f(x) = 100x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 100 |
| 2 | 200 |
| 3 | 360 |
| −1 | −100 |
| −2 | −200 |
| | 0 |

$f(x) = -100x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | −100 |
| 2 | −200 |
| −1 | 100 |
| −2 | 200 |
| −3 | 300 |
| | 0 |

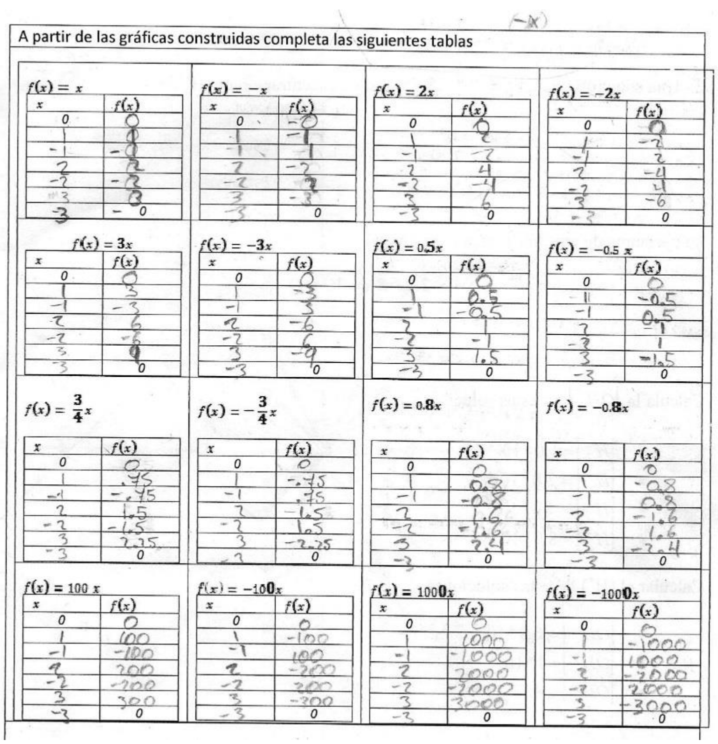
$f(x) = 1000x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1000 |
| 2 | 2000 |
| 3 | 3000 |
| −1 | −1000 |
| −2 | −2000 |
| | 0 |

$f(x) = -1000x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | −1000 |
| 2 | −2000 |
| −1 | 1000 |
| −2 | 2000 |
| −3 | 3000 |
| | 0 |

Fig.IV.12



A partir de las gráficas construidas completa las siguientes tablas

$f(x) = x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| -1 | -1 |
| 2 | 2 |
| -2 | -2 |
| 3 | 3 |
| -3 | - 0 |

$f(x) = -x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | -0 |
| 1 | -1 |
| -1 | 1 |
| 2 | -2 |
| -2 | 2 |
| 3 | -3 |
| -3 | 0 |

$f(x) = 2x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 2 |
| -1 | -2 |
| 2 | 4 |
| -2 | -4 |
| 3 | 6 |
| -3 | 0 |

$f(x) = -2x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | -2 |
| -1 | 2 |
| 2 | -4 |
| -2 | 4 |
| 3 | -6 |
| -3 | 0 |

$f(x) = 3x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 3 |
| -1 | -3 |
| 2 | 6 |
| -2 | -6 |
| 3 | 9 |
| -3 | 0 |

$f(x) = -3x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | -3 |
| -1 | 3 |
| 2 | -6 |
| -2 | 6 |
| 3 | -9 |
| -3 | 0 |

$f(x) = 0.5x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 0.5 |
| -1 | -0.5 |
| 2 | 1 |
| -2 | -1 |
| 3 | 1.5 |
| -3 | 0 |

$f(x) = -0.5\,x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | -0.5 |
| -1 | 0.5 |
| 2 | -1 |
| -2 | 1 |
| 3 | -1.5 |
| -3 | 0 |

$f(x) = \frac{3}{4}x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | .75 |
| -1 | -.75 |
| 2 | 1.5 |
| -2 | -1.5 |
| 3 | 2.25 |
| -3 | 0 |

$f(x) = -\frac{3}{4}x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | -.75 |
| -1 | .75 |
| 2 | -1.5 |
| -2 | 1.5 |
| 3 | -2.25 |
| -3 | 0 |

$f(x) = 0.8x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 0.8 |
| -1 | -0.8 |
| 2 | 1.6 |
| -2 | -1.6 |
| 3 | 2.4 |
| -3 | 0 |

$f(x) = -0.8x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | -0.8 |
| -1 | 0.8 |
| 2 | -1.6 |
| -2 | 1.6 |
| 3 | -2.4 |
| -3 | 0 |

$f(x) = 100\,x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 100 |
| -1 | -100 |
| 2 | 200 |
| -2 | -200 |
| 3 | 300 |
| -3 | 0 |

$f(x) = -100x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | -100 |
| -1 | 100 |
| 2 | -200 |
| -2 | 200 |
| 3 | -300 |
| -3 | 0 |

$f(x) = 1000x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1000 |
| -1 | -1000 |
| 2 | 2000 |
| -2 | -2000 |
| 3 | 3000 |
| -3 | 0 |

$f(x) = -1000x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | -1000 |
| -1 | 1000 |
| 2 | -2000 |
| -2 | 2000 |
| 3 | -3000 |
| -3 | 0 |

Fig. IV. 13

Remitiéndonos a la presentación de dichos resultados, se puede observar que en su mayoría hacen correctamente su tabulación, sólo pocos la hacen de manera incorrecta y aquellos alumnos que tuvieron mayor conflicto prefirieron hacer nada.

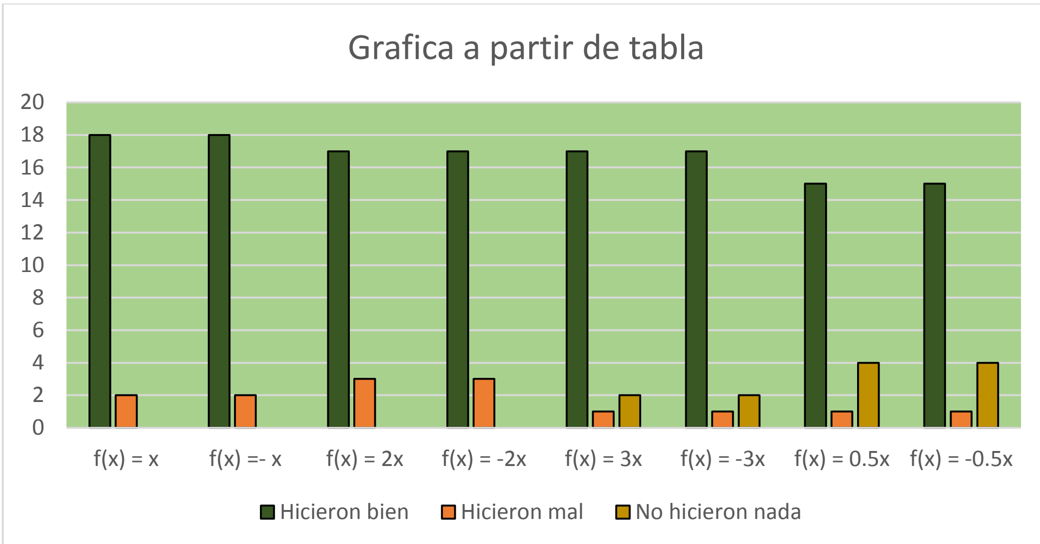



Grafico IV.8

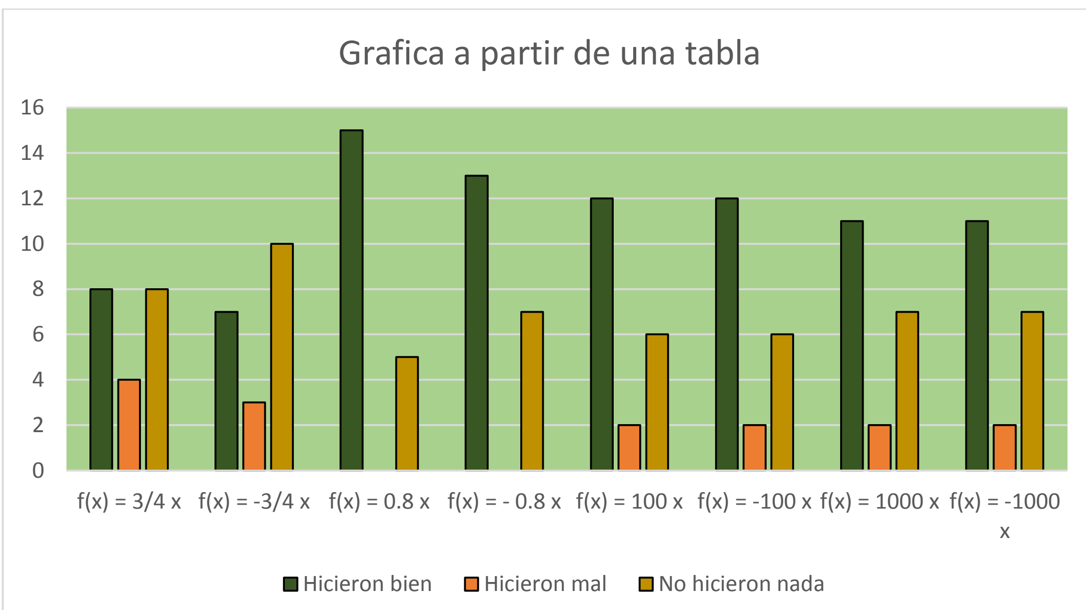



Grafico IV.9

Puede inferirse del Gráfico IV.9, cuando se tienen coeficientes fraccionarios, decimales y números relativamente grandes, el estudiante opta por hacer nada.

En contraste, aquellos estudiantes que tuvieron acceso a Geogebra™ no tuvieron mucho conflicto para graficar dichas funciones y así generar la tabla como puede verse en la Fig. IV.14.

Como puede observarse en Jesús maneja ambas partes de Geogebra™ (ver Figs. IV. 15, 16 y 17), la algebraica y la gráfica, ya que a partir verse cómo obtiene los valores usando deseados usando perpendiculares, que se entiende es parte del concepto de función.

A partir de las gráficas construidas completa las siguientes tablas

$f(x) = x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 2 | 2 |
| 4 | 4 |
| 6 | 6 |
| 8 | 8 |
| 10 | 10 |
| 0 | 0 |

$f(x) = -x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 2 | 2 |
| 4 | 4 |
| 6 | 6 |
| 8 | 8 |
| 10 | 10 |
| 0 | 0 |

$f(x) = 2x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 2 | 4 |
| 4 | 8 |
| 6 | 12 |
| 8 | 16 |
| 10 | 10 |
| 0 | 0 |

$f(x) = -2x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| -2 | 4 |
| -4 | 8 |
| -6 | 12 |
| -8 | 16 |
| -10 | 20 |
| 0 | 0 |

$f(x) = 3x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 2 | 6 |
| 4 | 12 |
| 6 | 18 |
| 8 | 24 |
| 10 | 30 |
| 0 | 0 |

$f(x) = -3x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| -2 | 6 |
| -4 | 12 |
| -6 | 18 |
| -8 | 24 |
| -10 | 30 |
| 0 | 0 |

$f(x) = 0.5x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| -2 | 1 |
| 4 | 2 |
| 6 | 3 |
| 8 | 4 |
| 10 | 5 |
| 0 | 0 |

$f(x) = -0.5x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| -2 | 1 |
| -4 | 2 |
| -6 | 3 |
| -8 | 4 |
| -10 | 5 |
| 0 | 0 |

$f(x) = \frac{3}{4}x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 2 | 1.5 |
| 4 | 3 |
| 6 | 4.5 |
| 8 | 6 |
| 10 | 7.5 |
| 0 | 0 |

$f(x) = -\frac{3}{4}x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| -2 | 1.5 |
| -4 | 3 |
| -6 | 4.5 |
| -8 | 6 |
| -10 | 7.5 |
| 0 | 0 |

$f(x) = 0.8x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 2 | 1.6 |
| 4 | 3.2 |
| 6 | 4.8 |
| 8 | 6.4 |
| 10 | 8 |
| 0 | 0 |

$f(x) = -0.8x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| -2 | 1.6 |
| -4 | 3.2 |
| -6 | 4.8 |
| -8 | 6.4 |
| -10 | 8 |
| 0 | 0 |

$f(x) = 100x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 100 |
| 2 | 200 |
| 3 | 300 |
| 4 | 400 |
| 5 | 500 |
| 0 | 0 |

$f(x) = -100x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| -1 | 100 |
| -2 | 200 |
| -3 | 300 |
| -4 | 400 |
| -5 | 500 |
| 0 | 0 |

$f(x) = 1000x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 2 | 2000 |
| 4 | 4000 |
| 6 | 6000 |
| 7 | 7000 |
| 8 | 8000 |
| 0 | 0 |

$f(x) = -1000x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| -2 | 2000 |
| -4 | 4000 |
| -6 | 6000 |
| -7 | 7000 |
| -8 | 8000 |
| 0 | 0 |

Fig. IV. 14.

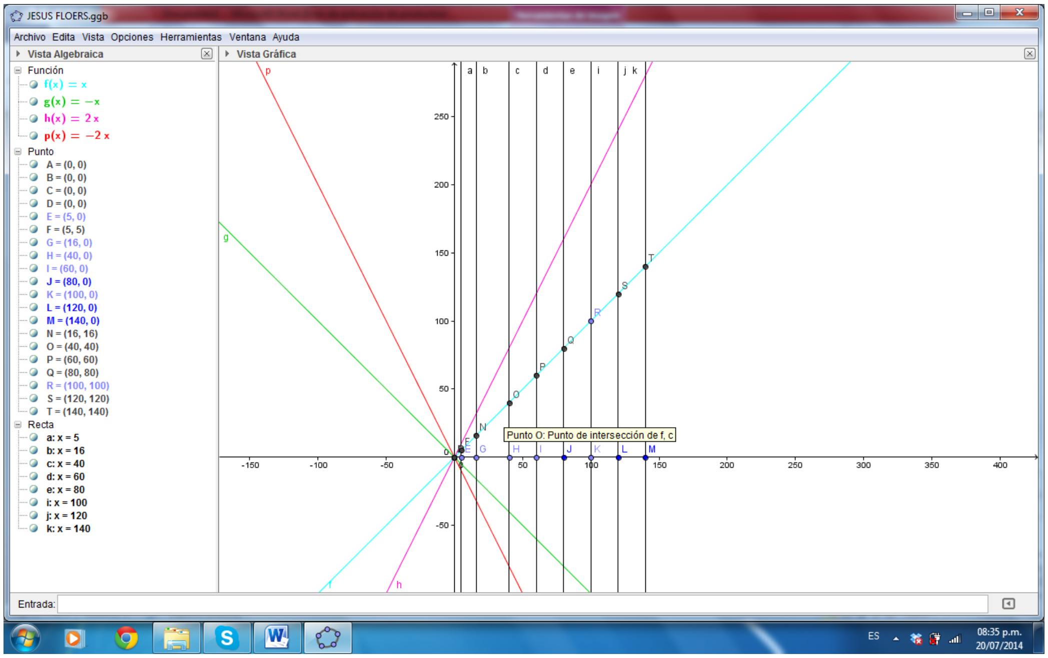



Fig.IV.15

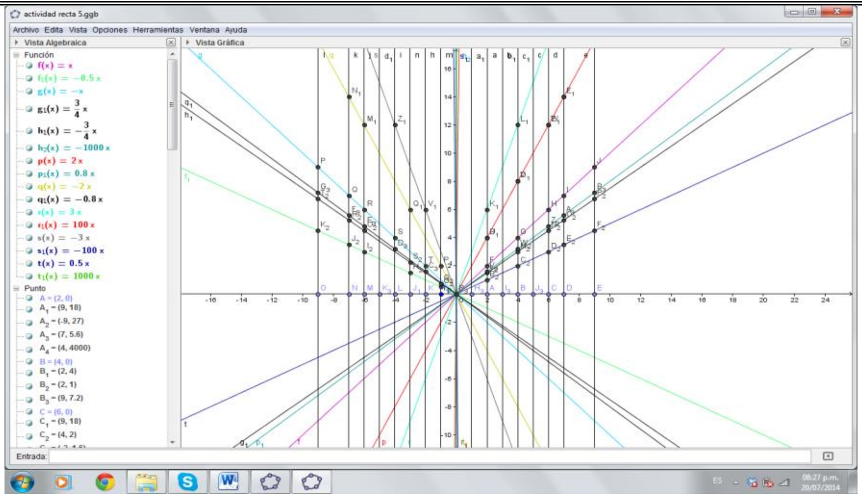



Fig. IV.16

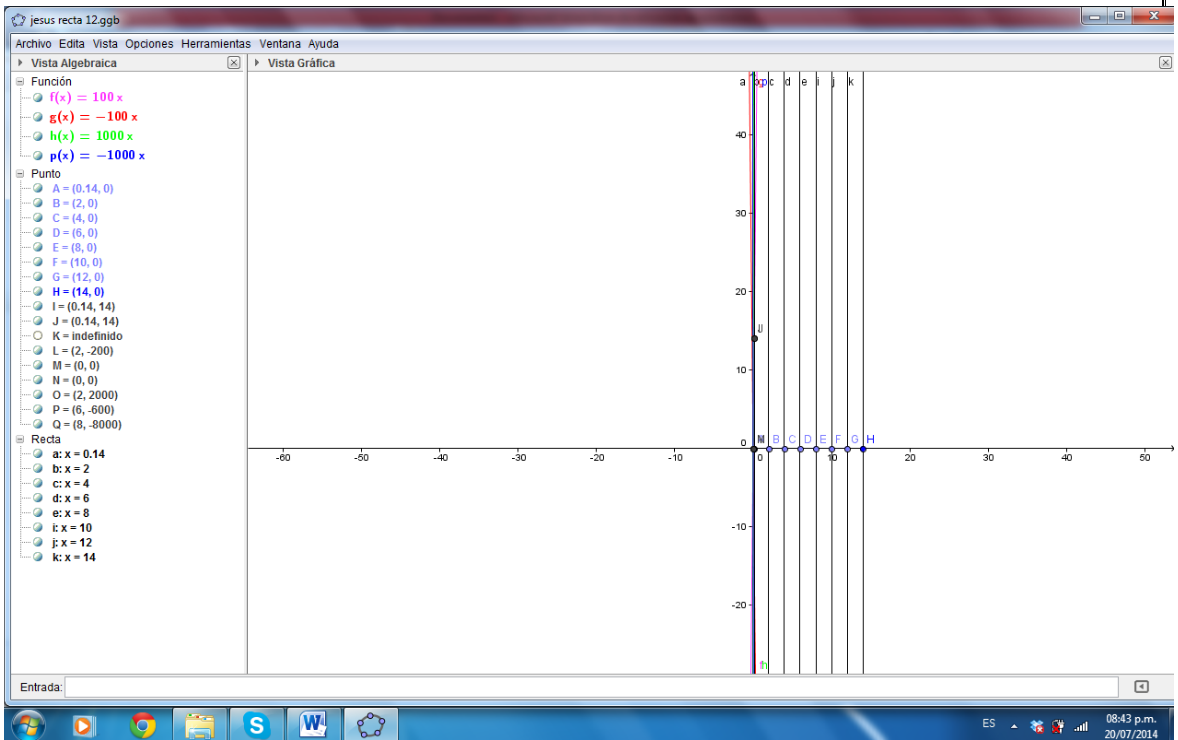



Fig.IV.17.

Al final de esta actividad se hacen algunas preguntas de reflexión al estudiante sobre el papel que juegan $a$ y $b$; empero sólo fueron contestadas por 8 estudiantes de los 20 que integraron la muestra, presentándose conflicto con el papel que realizan ambos parámetros.

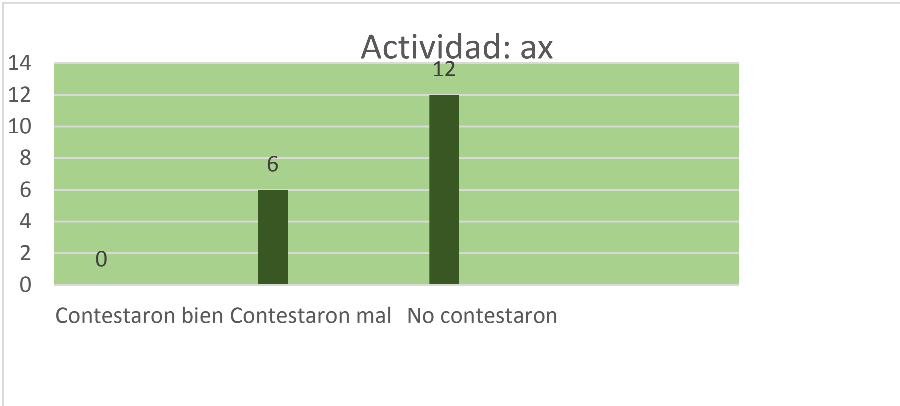
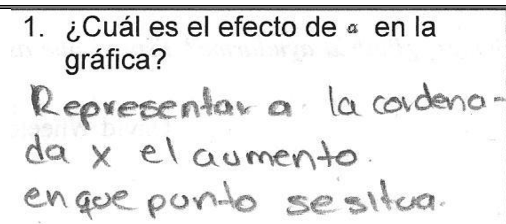
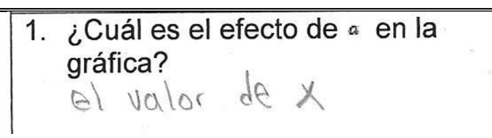


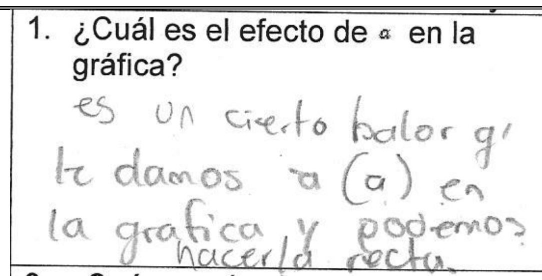

Gráfico IV.10


1. ¿Cuál es el efecto de $a$ en la gráfica?

Representar a la cordenada x el aumento. en que punto se situa.


1. ¿Cuál es el efecto de $a$ en la gráfica?

el valor de x


1. ¿Cuál es el efecto de $a$ en la gráfica?

es un cierto balor q' le damos a (a) en la grafica y podemos hacerla recta.

Fig. IV.18.

Sin embargo, dos alumnas que aunque contestaron incorrectamente parece ser que al menos observaron el efecto de $a$ en cuanto a su inclinación a la derecha o izquierda (Ver Fig. IV.19.)

| Joselyn | Ana Karen |
|---|---|
| 1. ¿Cuál es el efecto de $a$ en la gráfica? Es hacia donde se inclinara la recta | 1. ¿Cuál es el efecto de $a$ en la gráfica? Determina el valor, ya sea positiva o negativa |
| 2. ¿Qué sucede sí $a > 0$ ? la recta sera positiva se inclinara a la derecha. | 2. ¿Qué sucede sí $a > 0$ ? la recta es positiva esta se inclinara a la derecha |
| 3. ¿Qué sucede si $a < 0$ ? la recta sera negativa y se inclinara a la izquierda. | 3. ¿Qué sucede si $a < 0$ ? la recta es negativa, esta se inclinara a la izquierda. |
| 4. ¿Qué tienen en común todas estas gráficas? que a y b. depende hacia donde iran nuestras graficas + ó − positivas ó negativas | 4. ¿Qué tienen en común todas estas gráficas? Tiener una inclinación dependiendo los valores, tien algún corte en los ejes x y y |

Fig. IV.19.

## 4.2.2. Actividad con $f(x) = ax + b$

Esta segunda actividad consta de dos secciones:

- La primera tiene por objetivo guiar al estudiante en la construcción de algunas funciones lineales con diferentes pendientes, y al mismo tiempo con diferentes ordenadas en el origen, con la idea de que visualice el rol que tiene el parámetro *b* dentro de la función lineal.

- La segunda sección pretende que el estudiante reflexione, contestando preguntas formuladas por el docente, sobre el rol que juega *b.*

Algo que puede observarse sobre aquellos que trabajaron a lápiz y papel es que sólo grafican segmentos de recta enmarcados en los puntos que tabularon (cf. Fig. IV. 20 y 21); ya que para ellos no es posible que la recta exista más allá de lo que ellos tabularon.

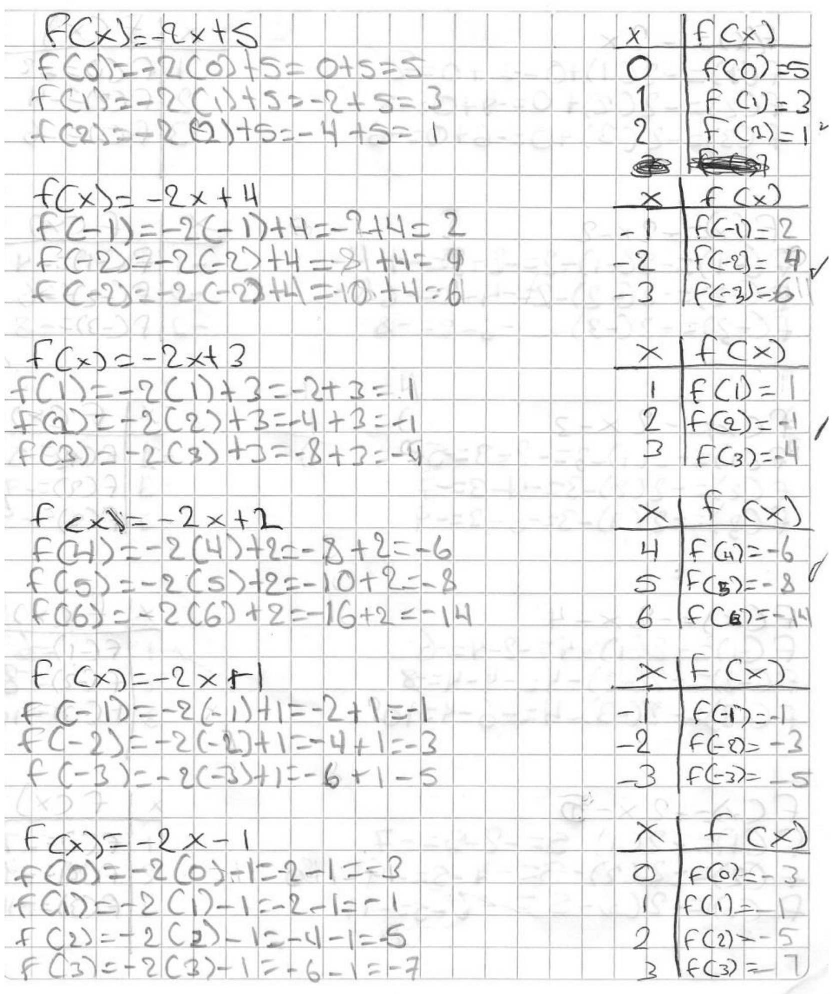



Fig. IV.20

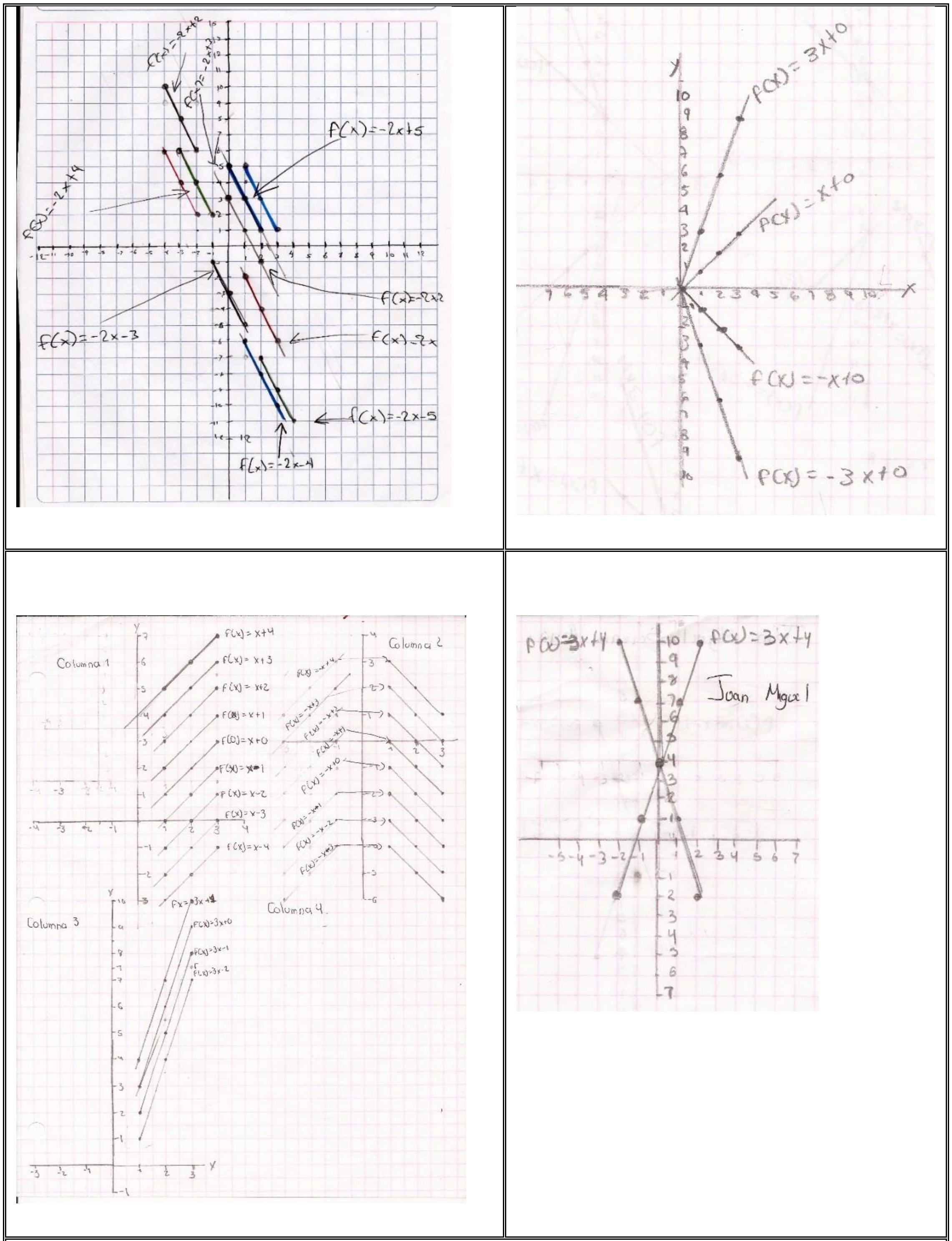



Fig. IV.21.

Además, a pesar del uso de Geogebra™ la mayor parte de los estudiantes no es capaz de apreciar el papel que juega la ordenada al origen, en este caso $b$; ya que dan respuestas incoherentes y consecuentemente no claras de entender, por ejemplo, la respuesta dada en la Fig. IV.22.

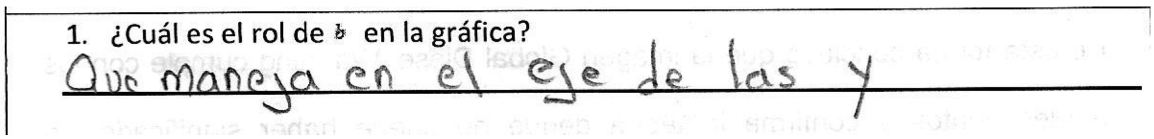

1. ¿Cuál es el rol de b en la gráfica?
Que maneja en el eje de las y

Fig. IV. 22.

El caso contrario se muestra en Fig. IV.23, 24 y 25, que corresponde a Jesús un estudiante que trabajó con Geogebra™; puede verse que grafica correctamente.

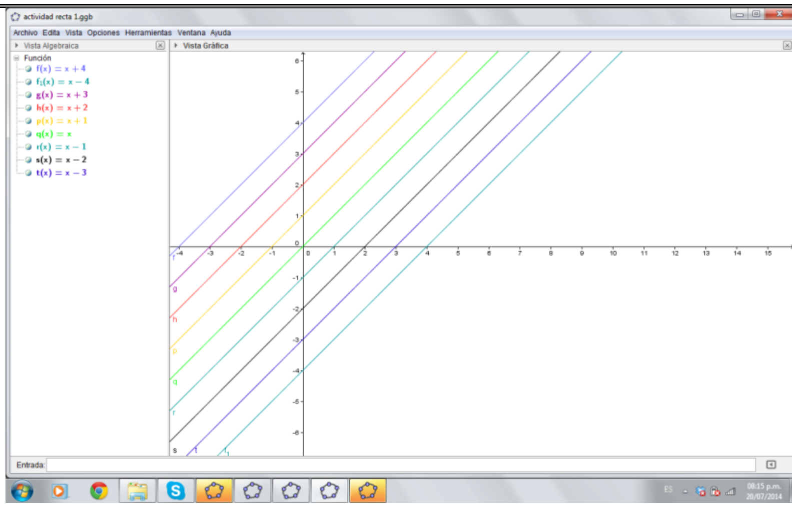



Fig.IV.23.

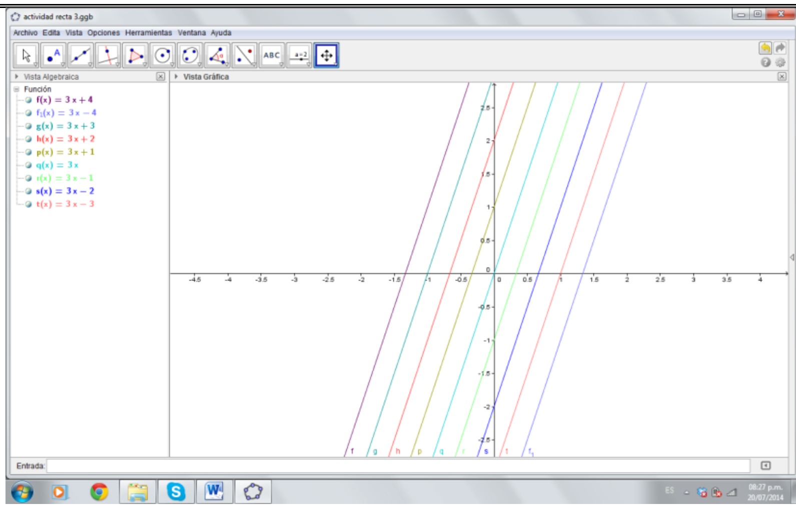



Fig.IV.24.

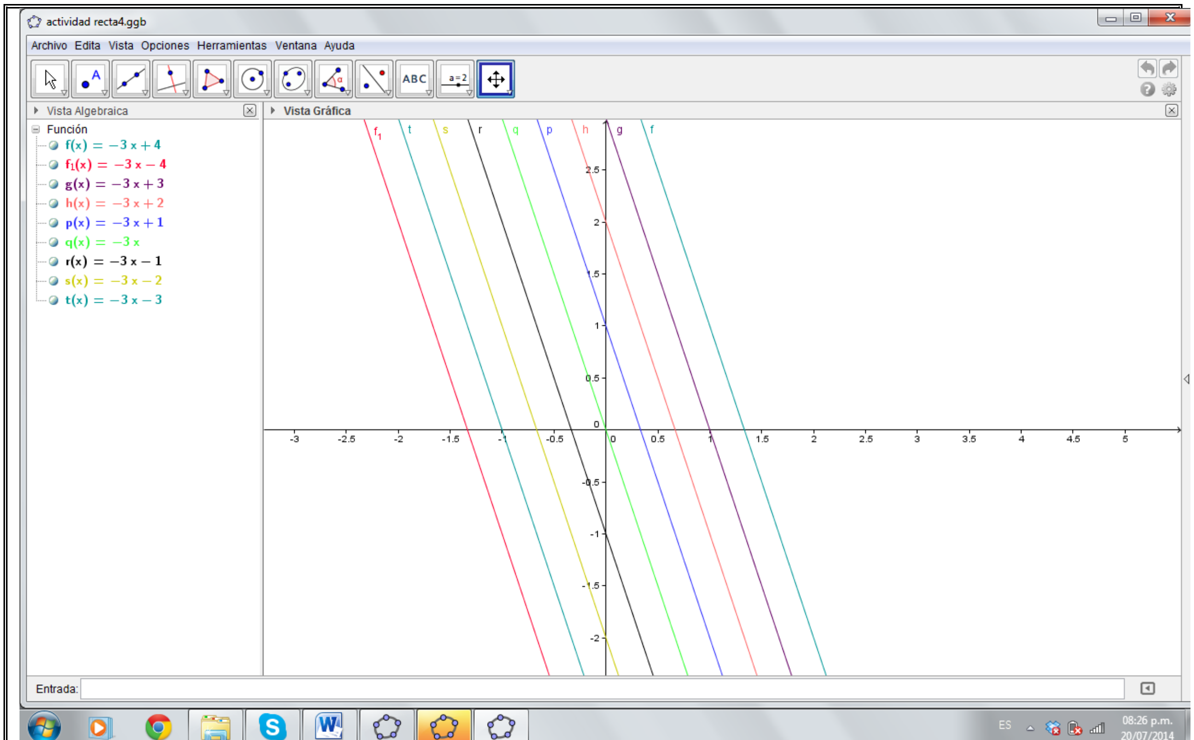



Fig. IV.25.

Sin embargo no es hasta que marca los puntos de intersección entre el eje $y$ y las rectas graficadas (Fig. IV. 26) que observa que ese es el valor de $b$, manifestándolo de esta manera en la Fig. IV.27.

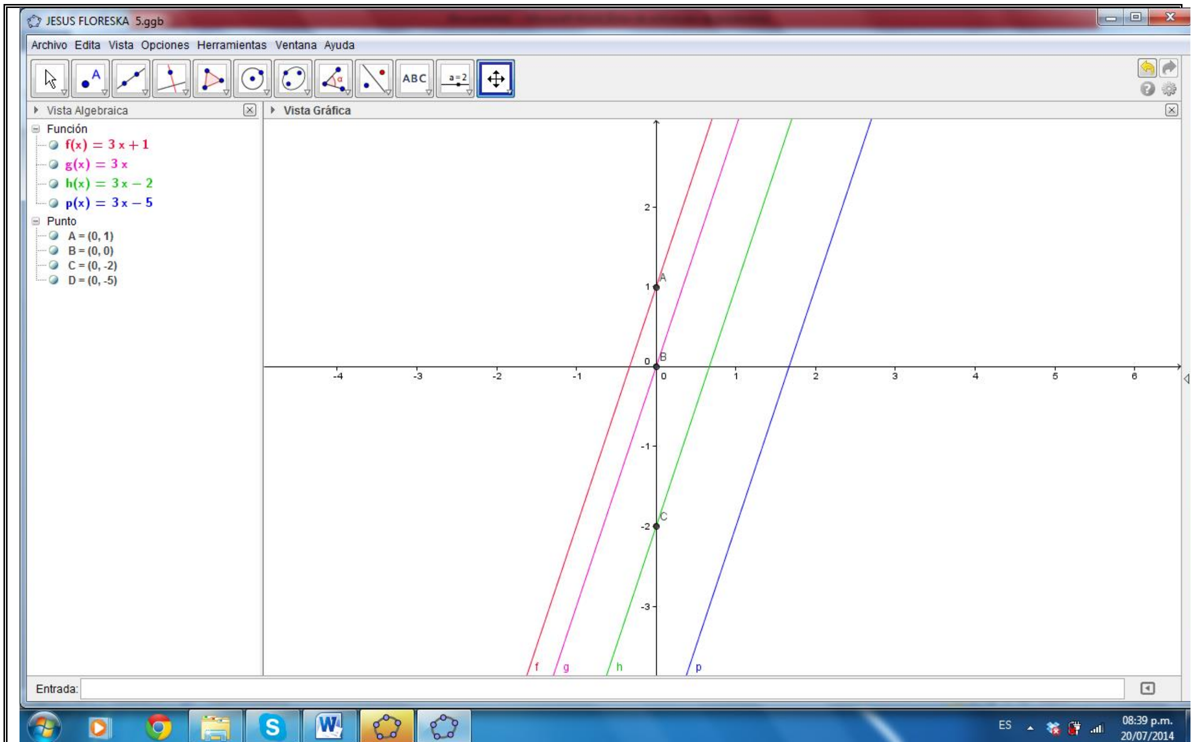
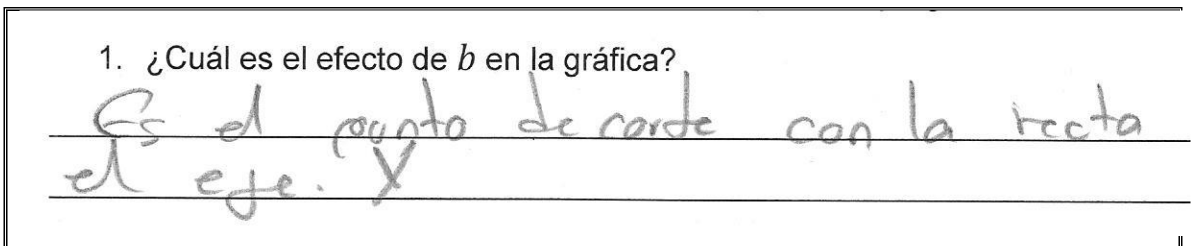



Fig.IV.26


1. ¿Cuál es el efecto de $b$ en la gráfica?

Es el punto de corte con la recta el eje. X

Fig. IV.27

## 4.2.3. Actividad: Plan telefónico

El objetivo de incluir esta actividad es vincular al estudiante con actividades de la vida real y que transite por los diferentes registros de representación, a saber de la representación algebraica a las tablas y de esta a la gráfica.

La información que se presenta (Gráfico IV.11.) a continuación es producto de la observación hecha a los estudiantes con respecto a la consideración de cero y n en la función que modele el problema.

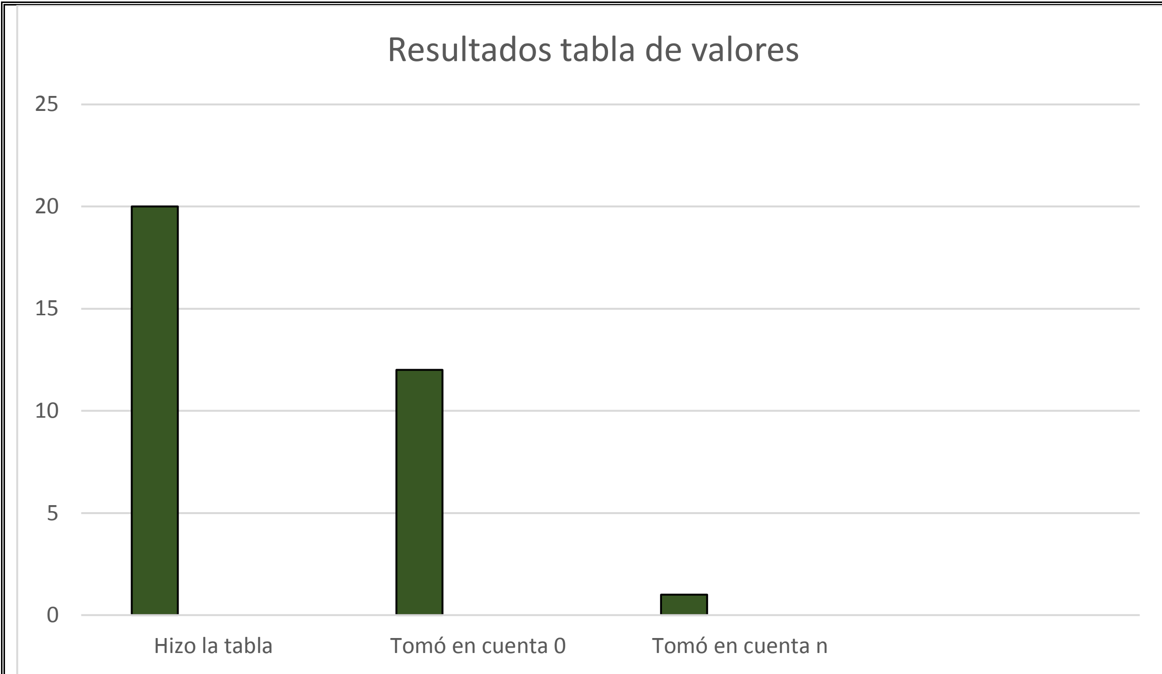



Gráfico IV.11.

A continuación se presenta en la Fig. IV.28. una tabla en la que el estudiante incluye tanto cero como n, y partir de todos los casos particulares: generaliza.

| Minutos | Costo por los minutos excedidos | Renta mensual fija | Costo total a pagar mensualmente |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | $0.98 x 1 | $829.00 | $0.98 + $829.00=$859.98 |
| 2 | $0.98x2=1.94 | 829 | 829.00+1.94=830.96 |
| 3 | $0.98x3=2.94 | 829 | 829.00+2.94=831.94 |
| 4 | $0.98 x 4 = $3.92 | $829.00 | $829.00 + $3.92 = $832.92 |
| 5 | $0.98 x 5 = $4.90 | $829.00 | $829.00 + $4.90 = $833.90 |
| 6 | $0.98x6=5.88 | 829. | 829.00+5.88=834.88 |
| 7 | $0.98x7=6.86 | 829 | 829.00+6.86=835.86 |
| 8 | $0.98 x8=7.84 | 829 | 829.00+7.84 836.84 |
| 9 | $0.98 x9=8.82 | 829 | 829.00+8.82 =837.82 |
| 10 | $0.98 x10=9.8 | 829 | 829.00+9.8=838.8 |
| 20 | $0.98x20=19.6 | 829 | 829.00+19.6=848.4 |
| 30 | $0.98x30=29.4 | 829 | 829.00+29.4=858.4 |
| 40 | $0.98x40=39.2 | 829 | 829.00+39.2=868.2 |
| 50 | $0.98x50=49 | 829 | 829.00+49=878 |
| 60 | $0.98x60=58.8 | 829 | 829.00+58.8=887.8 |
| 70 | $0.98x70=68.6 | 829 | 829.00+68.6=897.6 |
| 80 | $0.98x80=78.4 | 829 | 829.00+78.4=907.4 |
| 90 | $0.98x90=88.2 | 829 | 829.00+88.2=917.2 |
| 100 | $0.98x100=98 | 829 | 829.00+98 =927 |
| N | n*0.98=N | 829 | n*0.98+829= n*0.98+829 |

Fig. IV.28.

El Gráfico IV. 12, presenta los datos de cuántos alumnos graficaron y cuántos no lo hicieron, debido a las dificultades de identificar la renta fija como $b$; y en la Fig. IV. 29, se puede observar un ejemplo de lo que la mayoría de los estudiantes graficó.

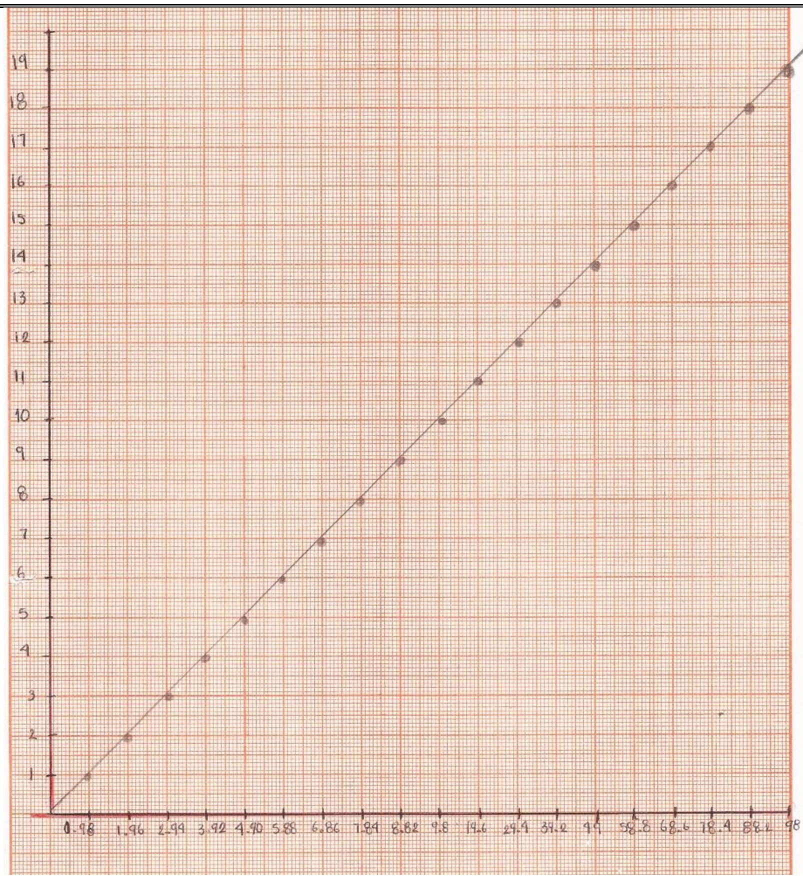


Fig. IV.29.

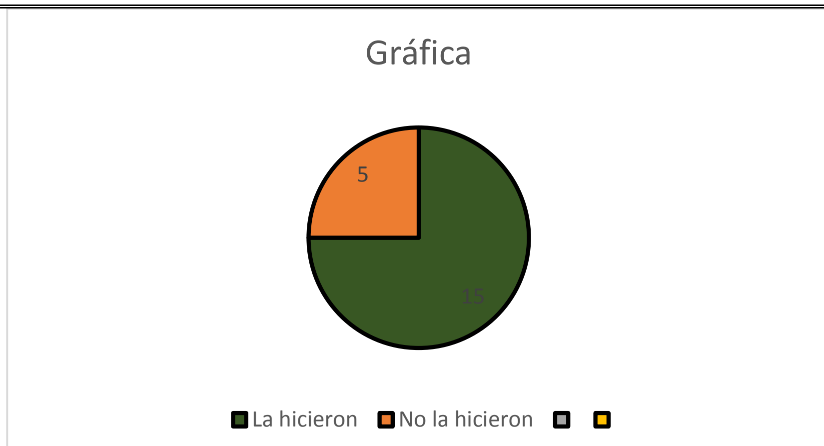



Gráfico IV.12.

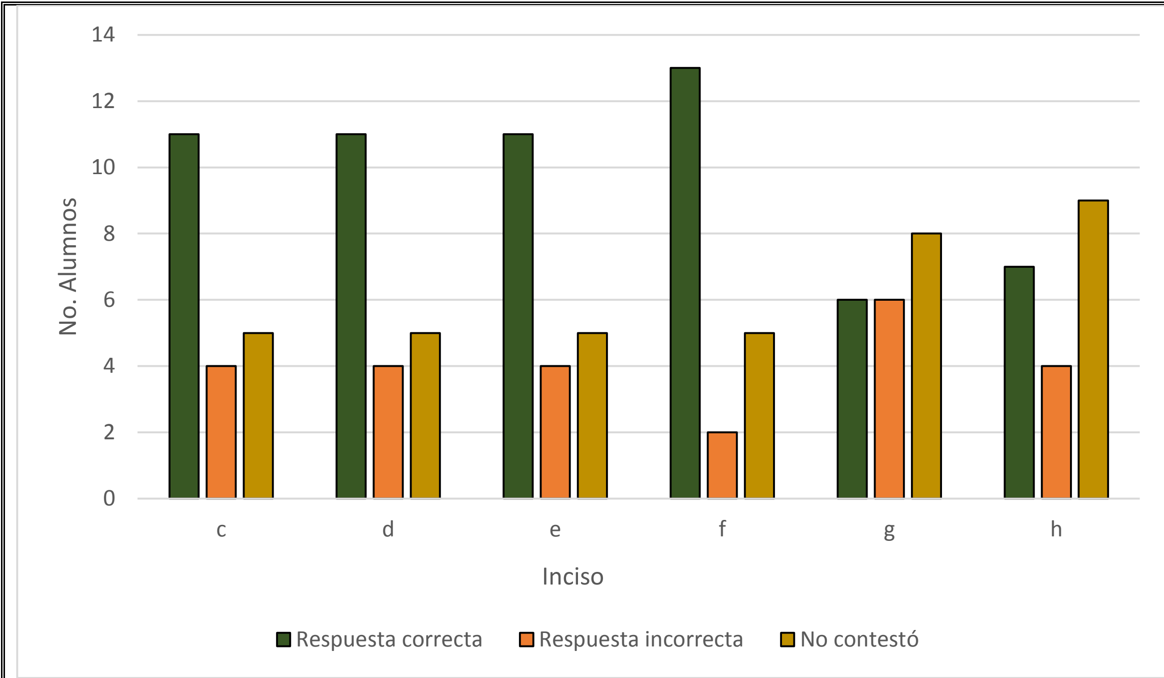



Gráfico IV.13.

Finalmente, en cuanto a esta actividad el Gráfico IV.13. presenta la cantidad de alumnos que contestaron las preguntas subsiguientes de esta actividad, en la que nuevamente puede visualizarse que no relacionan la pendiente y la ordenada al origen en problemas contextualizados y que prefieren no contestar.

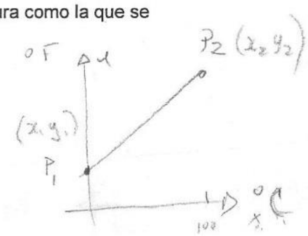
### 4.2.4. Actividad: Conversión de temperaturas

Esta se actividad se realizó en parejas y tuvo una mayor acogida por parte de los estudiantes, ya que aunque presenta una mayor complejidad, se les facilitó el realizarla a todos, salvo algunos que tuvieron conflicto con las temperaturas negativas, sin embargo para obtener la función que modela este problema hubo cero conflicto. En la Fig. IV. 30. y la Fig. IV. 31 se presenta la actividad resuelta por Karina y Xochitl y desde que comienzan a trabajar se puede observar que tienen una idea sólida de lo que se les está pidiendo.

1. Diseñen una tabla que relacione ambas escalas de temperatura como la que se presenta a continuación:

$f(y) = mx + b$

| $x$ °C | $f(x)$ °F |
|---|---|
| 0 | 32 |
| 10 | |
| 25 | |
| 38 | |
| -32 | |
| -10 | |
| 100 | 212 |
| | |




$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

1. Diseñen una tabla que relacione ambas escalas de temperatura como la que se presenta a continuación.

| °C $x$ | °F $f(x)$ | OPERACIONES. |
|---|---|---|
| 0 | $0+32$ | 32. |
| 10 | $10(9/5)+32$ | $\frac{90}{5} + \frac{32}{1} = \frac{90+160}{5} = \frac{250}{5} = 50$ |
| 25 | $25(9/5)+32$ | $\frac{225}{5} + \frac{32}{1} = \frac{225+160}{5} = \frac{385}{5} = 77$ |
| 38 | $38(9/5)+32$ | $\frac{342}{5} + \frac{32}{1} = \frac{342+160}{5} = \frac{502}{5} = 100.4$ |
| $-32$ | $-32(9/5)+32$ | $-\frac{288}{5} + \frac{32}{1} = \frac{-288+160}{5} = -\frac{128}{5} = -25.6$ |
| $-10$ | $-10(9/5)+32$ | $-\frac{90}{5} + \frac{32}{1} = \frac{-90+160}{5} = \frac{70}{5} = 14$ |
| 100 | $100(9/5)+32$ | $\frac{900}{5} + \frac{32}{1} = \frac{900+160}{5} = \frac{1060}{5} = 212$ |

Fig. IV. 30

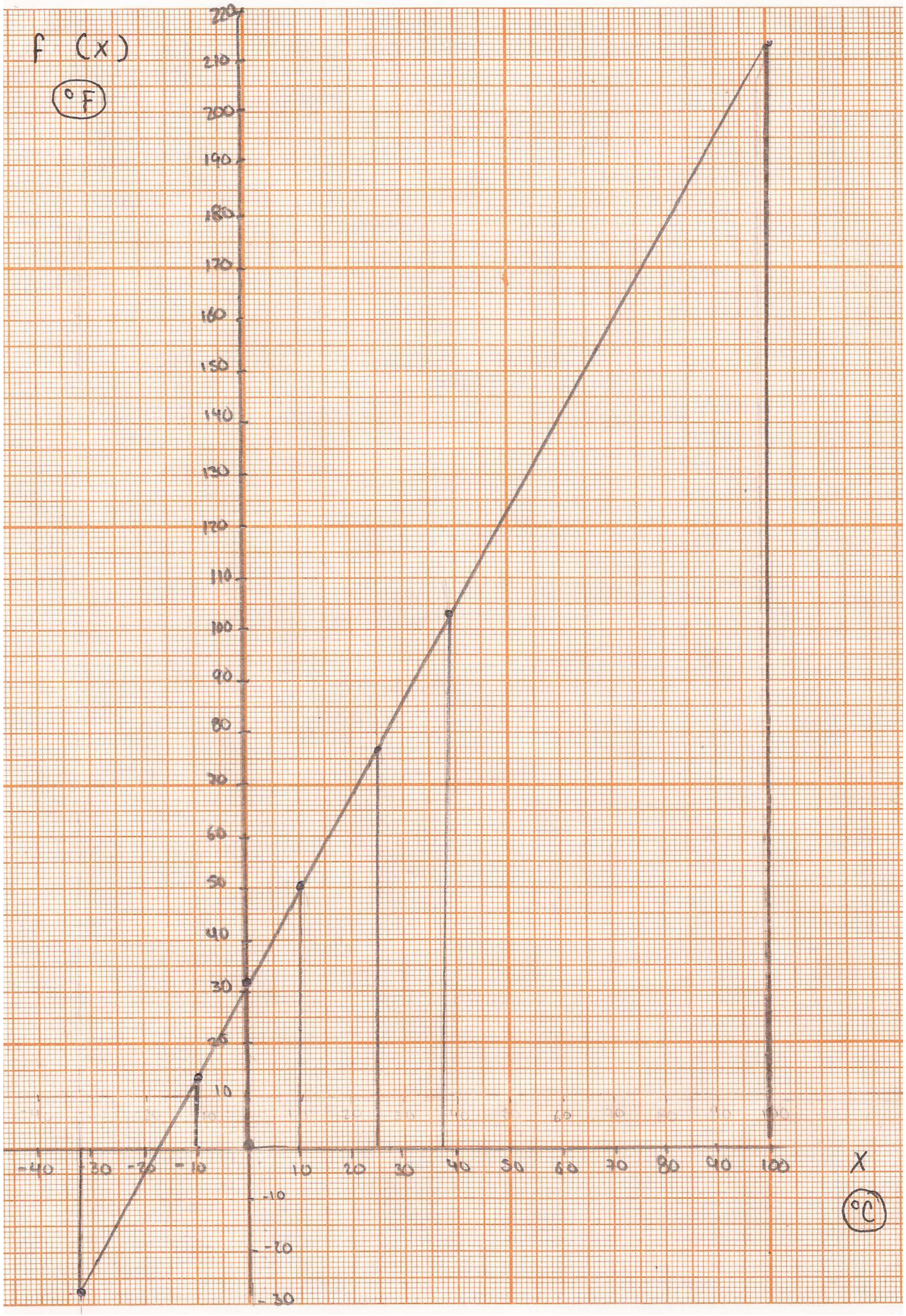



Fig. IV. 31

4. Apoyados en geogebra™, grafiquen, y comparen ambas gráficas. Discutan entre los miembros del equipo y escriban sus observaciones

Primero observamos que era lo que valores se debian encontrar, la maestro nos explico cual era el eje de x y f(x) y como graficar para encontrar el punto de intersección y el valor que se pedia (°F).

4.- Apoyandose en Geogebra™, grafiquen, y comparen ambas graficas. Discutan entre los miembros del equipo y escriban sus observaciones.

R= Primero tuvimos que poner la ecuación la cual fue un poco dificil de tener y con los puntos que teniamos que encontrar se complico más. La solucion fue realizar todas las ecuaciones

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad \frac{32-212}{100-0} = \frac{-180}{100} \quad 1.8 = \frac{9}{5}$$

$$m = \frac{9}{5}$$

$$f(x) = mx + b.$$

9 45 90 50 25 5

Fig. IV.32

En la Fig. IV.32 pueden leerse algunos comentarios sobre las facilidades de haber trabajado con Geogebra™; además de cómo también contaban una idea de cómo obtener la pendiente.

## 4.2.5. Actividad: Las corredoras.

Esta actividad tiene interés de que el alumno ya inmerso en un problema contextualizado sea capaz de establecer una función que modele la situación considerada, e identifique el papel de la pendiente y de $b$ en la gráfica. Existe una variedad de respuestas a esta actividad que son reflejo del trabajo de qué tan bien entendieron las actividades tituladas $f(x) = ax$, $f(x) = ax + b$, Plan telefónico y Temperatura, que en base al modelo Cuevas & Pluvinage se observa una evolución de problemas básicos a problemas con una mayor complejidad.

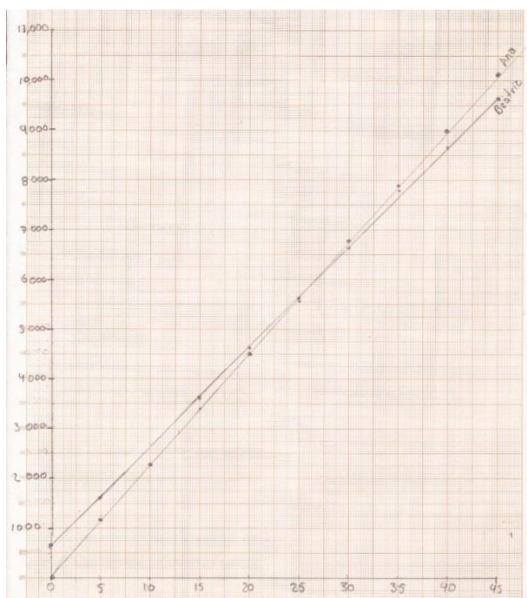



Fig. IV.33.

El trabajo de Xochitl se presenta la gráfica de la Fig. IV.33 como puede verse considera bien su función y la representa adecuadamente.

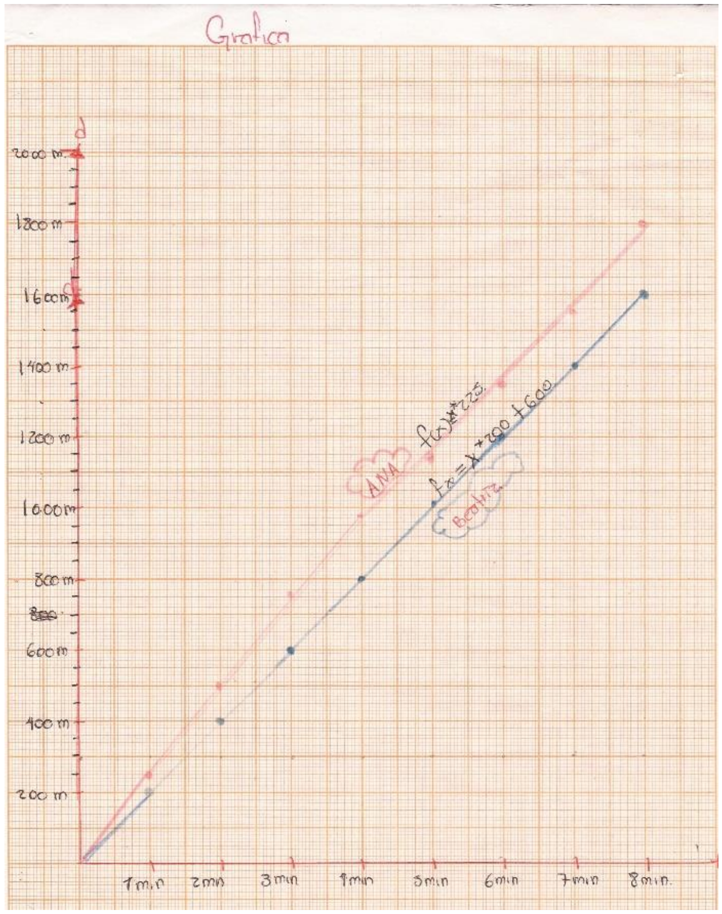



Fig. IV.34.

Sin embargo Erika cuyo trabajo se presenta en la Fig. IV.34 establece bien la función, pero al momento de graficar lo hace incorrectamente ya que omite los 600 metros de ventaja de una de las corredoras, cómo puede observarse ambas corredoras parten de cero, no se observa la ventaja de la corredora Beatriz en consecuencia no será verídico el dato de quien ganó la carrera.

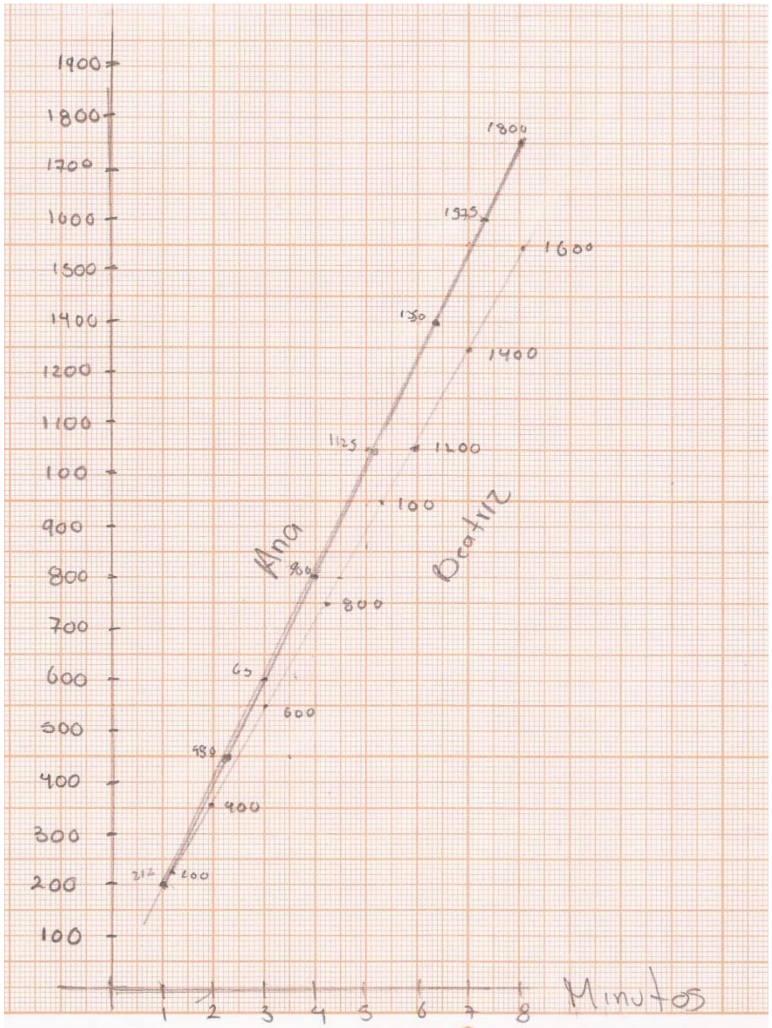



Fig. IV.35

En el caso de Miguel (Fig. IV.35) podemos ver que no toma en cuenta el momento de partida con respecto a la distancia, ya que ambas corredoras inician en el minuto 1, lo cual le da una visión errónea de cómo se desarrolló la competencia.

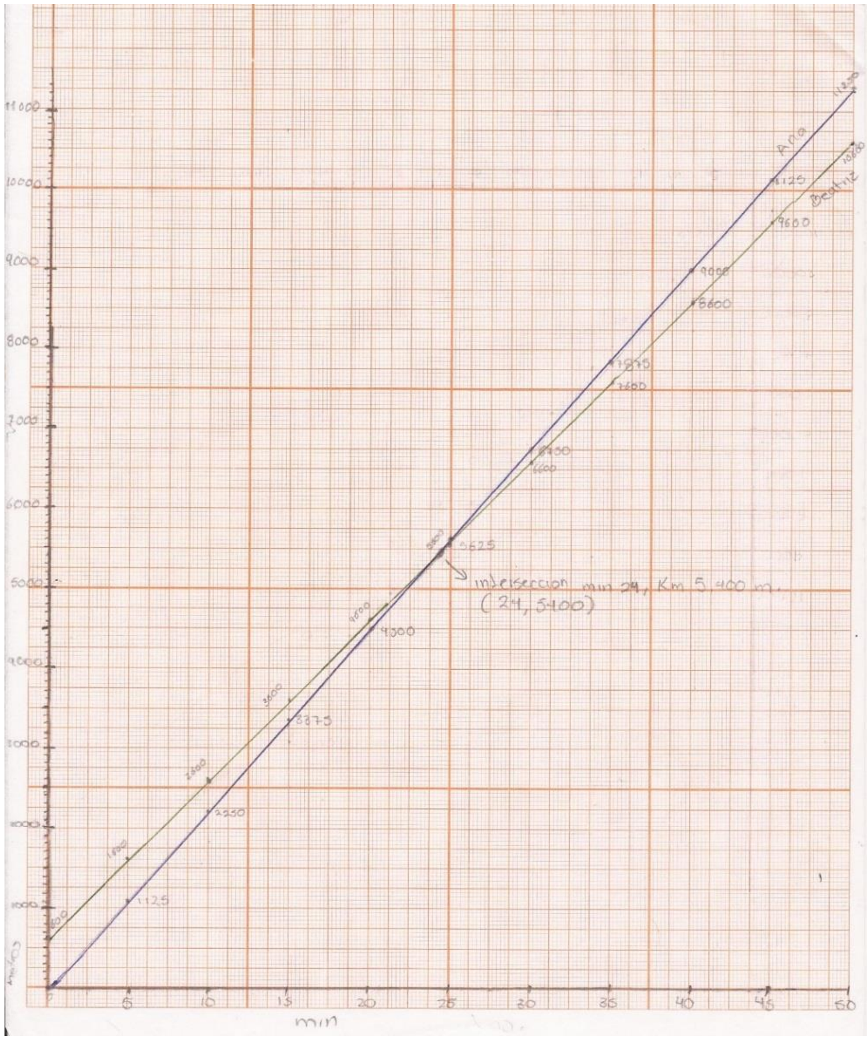



Fig.IV.36

Finalmente hubo quienes ayudados por Geogebra™ visualizaron muy bien el problema como Ana Karen (Fig.IV.36), quien además de graficar bien determina perfectamente el punto donde se encuentran ambas corredoras y con mucha exactitud, esto debido a que traslada correctamente de Geogebra™ a la hoja milimétrica.

# Capítulo V: Conclusiones y Recomendaciones

## 5.1. CONCLUSIONES

Se infieren del presente trabajo, fundamentado en la propuesta de Cuevas & Pluvinage, las dificultades que enfrenta el estudiante durante su estudio de la asignatura de Geometría Analítica y Funciones, particularmente del concepto de función lineal. Esto se refleja en la falta de comprensión que conlleva a una serie de errores al momento de transitar por las diferentes representaciones de las funciones. Dichos errores a menudo desembocan en un fracaso escolar manifestado en reprobación, rezago y deserción. El análisis de nuestro estudio se centra en aquellos conflictos que pueden catalogarse como consecuencias de la dificultad que tienen los alumnos para relacionar los problemas y actividades propuestos con las funciones, específicamente las lineales. El diseño de los ítems de la propuesta pedagógica ha permitido darse cuenta de los errores en los que incide el alumno, tales como son no tomar en cuenta 0 y generalizar a un valor *n*, dentro del registro tabular, mismo que no ayudó para determinar la función que modelara el problema que tenía que resolver; o bien graficar sin tomar en consideración el parámetro *b* ya que el alumno se ocupa muy poco sobre cómo relacionar la renta fija en la actividad del “Plan telefónico”, y la ventaja de una corredora sobre la otra en la actividad de “Las corredoras”. Como consecuencia de estas observaciones, se desprende que hay que elaborar y mejorar las estrategias utilizadas dentro del salón de clases para que el estudiante entienda mejor el tránsito de una representación a otra de las funciones y, además, vincule este conocimiento a problemas contextualizados mismos que requieren de destrezas y de un mayor nivel cognitivo. El conocimiento de dichos conflictos se obtuvo a través de ítems fundamentados en las propuesta didáctica Cuevas & Pluvinage (2003), y puesto que se consideraron los puntos estratégicos que en ella se manifiestan como son el de acompañar al estudiante a través de una serie de actividades de niveles básicos a otras de mayor complejidad, resolver problemas gradualmente dosificados e introducir el concepto de función lineal a través de problemas no tradicionales sino de actividades de interés para el estudiante como es el caso del “Plan telefónico”. Estas actividades tienen un sentido lógico por lo cual el estudiante puede construir el concepto de función lineal.

Teniendo en cuenta que la investigación tuvo como una de sus premisas reconocer el tránsito entre las diferentes representaciones de la función lineal, promovido a través de diferentes actividades de aprendizaje, hizo de alguna manera conscientes a los estudiantes de que los conocimientos matemáticos sirven de infraestructura para el entendimiento y solución de problemas en contextos de la vida real y en otras áreas del conocimiento. En nuestro caso específico el área de las ciencias experimentales, y en un futuro no lejano para ellos en el ejercicio de su práctica profesional.

Un aspecto importante que se pudo evidenciar a través de las actividades de aprendizaje puestas en escena, es que permitió a cada estudiante reflexionar sobre sus conocimientos procedimentales, a partir de comparar lo hecho a lápiz y papel, y lo hecho en Geogebra™. Las respuestas de los estudiantes permiten concluir que un concepto matemático puede comprenderse no solo como se presenta en el salón de clases, sino también dentro de un contexto de la vida real, y que dentro de su fase de formación profesional jugará un papel importante, ya que dichos conceptos no estarán aislados y desvinculados de una realidad sino por el contrario lo vincularán con situaciones reales fuera del contexto del aula.

Este tipo de actividades fueron diseñadas para promover la construcción de conocimiento nuevo y deben ser aprovechadas por el docente frente a grupo. Es por ello que la SEP de Puebla debe considerar incluir en sus programas de estudio el tema de funciones no solo en una unidad temática sino durante todo un semestre como lo tiene considerado el Sistema de Bachillerato Nacional (SBN).

Este trabajo de investigación nos permite obtener un marco de referencia sobre las consideraciones a tomar en la elaboración de actividades que guíen al alumno a la construcción del concepto de función lineal, ya que detectados algunos errores en los que incide el estudiante se pueden seguir algunas consideraciones para ser tomadas en cuenta, como lo son incluir en los registros tabulares a cero y *n;* dividir dentro de estos registros las operaciones parciales que permitan al estudiante visualizar el proceso completo para obtener la función que modele el problema propuesto. Dar mayor importancia a la promoción del uso de la visualización al comparar los ambientes a lápiz y papel con algún software, de forma conjunta, nunca en forma separada, ya que cuando los alumnos ven los comportamientos gráficos de las funciones, y entienden las relaciones que guardan sus parámetros, se motivan a resolver algo que entienden, siendo más significativo está forma de aprender y no solo a mecanizar o memorizar, y en consecuencia no entienden lo que hacen, y no llegan a generalizar.

Considerar siempre los errores o conflictos que tenga el estudiante a partir del examen diagnóstico y subsanarlos. Siempre incluir dentro de las actividades de aprendizaje problemas dentro del contexto de la vida real y no solo abocarse a ejercicios teóricos.

## 5.2. Recomendaciones

Realizar un seguimiento continuo a las actividades que se lleven a cabo en el salón de clases, de tal manera que los estudiantes que presenten problemas sean focalizados y a través de actividades extracurriculares se subsanen los errores detectados.

Fomentar el uso de gráficas sin limitarse a solo dos o tres puntos, sino a puntos con coordenadas positivas y negativas, que incluyan el valor de cero, y puntos con coordenadas con valores grandes, trabajando a la par con software de geometría dinámica para visualizar mejor el comportamiento de la función.

Considerar que el uso de gráficas debe hacerse a partir la asignatura de Algebra y no solo en Geometría Analítica y Funciones que les permitan interpretar, conocer y manipular los parámetros, e identificar el significado de las intersecciones con los ejes *x* e *y*, y así poder obtener y dar información.

Aplicar actividades formativas con el objetivo de cimentar una buena base para la mejor comprensión y manejo del concepto de función lineal, ya que a partir de ello contará con una infraestructura sólida para su educación superior y para resolver problemas de la vida real.

## 5.3. Investigaciones Futuras

El presente apartado pretende establecer algunas de las posibles líneas de investigación que pueden dar continuidad al trabajo de investigación realizado. En primer término, dados los resultados obtenidos en esta primera propuesta, se desea extender el diseño de actividades contextualizadas para funciones cuadráticas y cúbicas ya que en base a lo planeado por el Instituto Nacional de Evaluación para la Educación (INEE) para Planea (Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes, la prueba que sustituye a ENLACE, este instrumento evaluativo en incluirá esquemas de evaluación a otras áreas de aprendizaje como Ciencias y Formación Ciudadana. En términos generales, la investigación futura estará centrada en un rediseño de las actividades propuestas con la idea de extenderlas; asimismo, se diseñaran nuevos proyectos de acción práctica sustentados en el marco didáctico Cuevas & Pluvinage que complementen el presente trabajo de investigación. Se propondrán situaciones basadas en contextos interdisciplinares y transdisciplinares con otras ciencias que favorezcan que el concepto de función emerja. De igual manera, estas nuevas actividades se apoyaran en el uso de herramientas digitales ya que de acuerdo al INEE "l*a prueba PISA, coordinada por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico se aplicará, por primera vez en nuestro país, en computadora",* razón por la cual habrá que desarrollar en los estudiantes habilidades en el uso de computadoras para resolver exámenes.

# Referencias Bibliográficas


Brousseau, G. (2000). *Educación y didáctica de las matemáticas,* Vol.12 No.1. Editorial Iberoamericana.

CENEVAL. (2014). http://www.ceneval.net/

Cuesta, V., Lezama, M.A. & Soto, E. (2009). *Geometría Analítica y Funciones.* México: Editorial Book Mart.

Cuevas, C.A & Mejía, (2003).*Cálculo Visual*. México: Oxford University Press.

Cuevas, C.A & Pluvinage, F. (2003). *Les projects d´action practique elements d´une ingeniere d´ensigment des mathematiques.* Annales de didactique et sciences cognitive, Vol. 8. IREM Strasbourg.

Cuevas, C.A. (2013). *Matemáticas 4*. México: Oxford University Press.

Cuevas, A., Moreno, S. & Pluvinage, F. (2005). *Una Experiencia De Enseñanza del Objeto Función*. Annales de didactique et sciences cognitive, IREM Strasbourg.

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo.* Investigaciones en matemática educativa II. México: Editorial Iberoamericana.

ENLACE. (2013). http://www.enlace.sep.gob.mx/ms/

Ferral, E.A. (2013). *Geometría Analítica y Funciones.* México: Ediciones Anglo.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Reide Publishing Company Mathematics Education Library.

Hiebert, J. & Carpenter, Th. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In: D.W. Grouws (Ed.), Handbook of research in teaching and learning of Mathematics. New York: Macmillan

Ímaz, C. & Moreno, L. (2010). *LA GÉNESIS Y LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO. Las trampas del rigor*. México: Editorial Trillas.

INEE, (2005). *PISA para docentes. La evaluación como oportunidad de aprendizaje.* México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. www.inee.edu.mx/...**para-docentes**.../455-**pisa-para-docentes**-la-evaluación (consultada 13 agosto 2013).

Moreno, S. & Cuevas, C.A. *Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el cálculo diferencial.* Educación Matemática, vol. 16, núm. 2, agosto, 2004, pp. 93-104, Grupo Santillana México http:/*www.cca.org.mx/profesores/cursos/matematicas/apoyos/m2/prepa_interpretaciones.pdf* (consultada diciembre 2012)

Piaget, J. Szeminska, A. & Bang, V. (1968-1977). *Epistemology and phychology of functions.* Synthese Library/ volumen 83. Dordrecht-Holland. D. Reide Publishing Company. http://books.google.com.mx/books?id=2RfDSIFuq5EC&lpg=PR5&ots=bKSt0n_AMz&dq=szeminska%20alina%20piaget%20epistemology%20functions&lr&hl=es&pg=PP1#v=onepage&q=szeminska%20alina%20piaget%20epistemology%20functions&f=false (Consultada en enero 2015)

RIEMS (2009). Las *Competencias Genéricas en el estudiante del Bachillerato General.* http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/00-otros/cg-e-bg.pdf

Consultada en enero 2015.

S.E.P. (2009). Las *Competencias Genéricas en el estudiante del Bachillerato General.* http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/00-otros/cg-e-bg.pdf

Consultada en enero 2015

Salazar, P. & Callejas Luciano. (1999). *Matemáticas IV.* Colección Ciencia Educativa. México: Editorial Nueva Imagen.

Tall, D. & Vinner, S. (1981) *Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity*. Educational Studies. 12(2), pp.151 – 169.

Vinner, S. (1994). *Research in teaching and learning Mathematics at an advanced level.* D. Tall (Ed.) Adavanced Mathematical Thinking (2nd Ed.). Dordrecht: Kluwer.

# ANEXOS

## Anexo 1

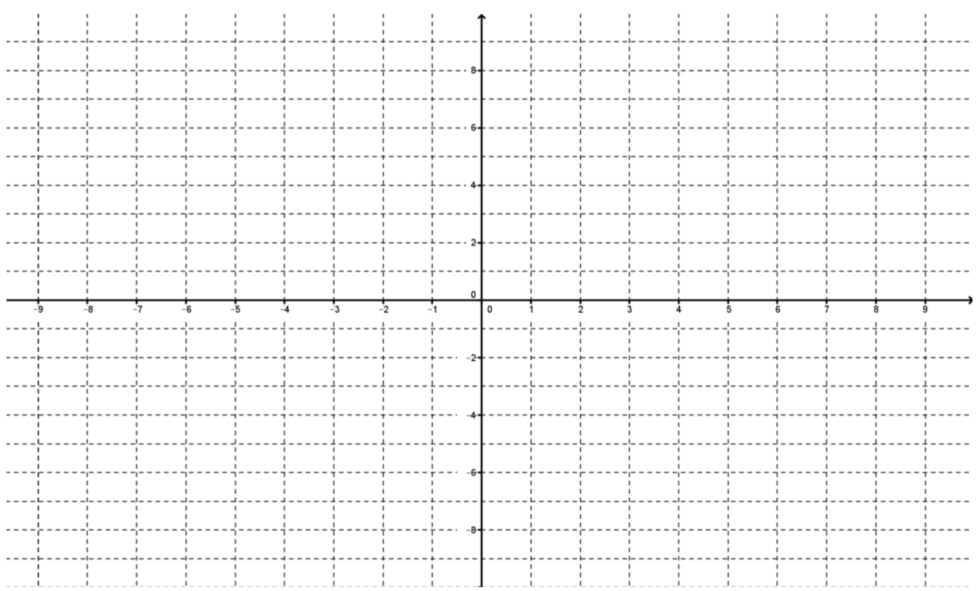
### Examen Diagnóstico

1.-Ubica dentro de la recta los siguientes números:

i. 2.5
j. -4.25
k. -3.75
l. 6.5
m. -1.33
n. $\frac{3}{2}$
o. 3.66
p. $-\frac{7}{4}$



2.- Ubica dentro del plano cartesiano los siguientes pares ordenados A (3,-5), B (-4,-1), C (4,0), D (-2,0), E (0,4), F (-2,2)



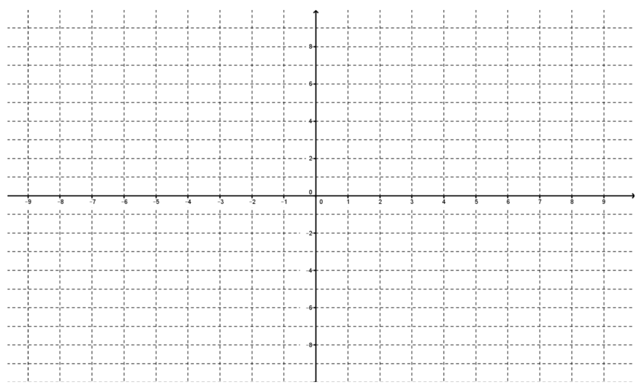
3.- Bosquejar las siguientes funciones en el plano cartesiano:

$f(x) = -x^2 + 4$

$g(x) = 6$

$r(x) = x + 6$

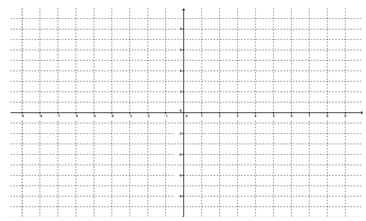
$h(x) = x^3$



4.-A partir de que generes una tabla de valores grafica la función que se te indica.

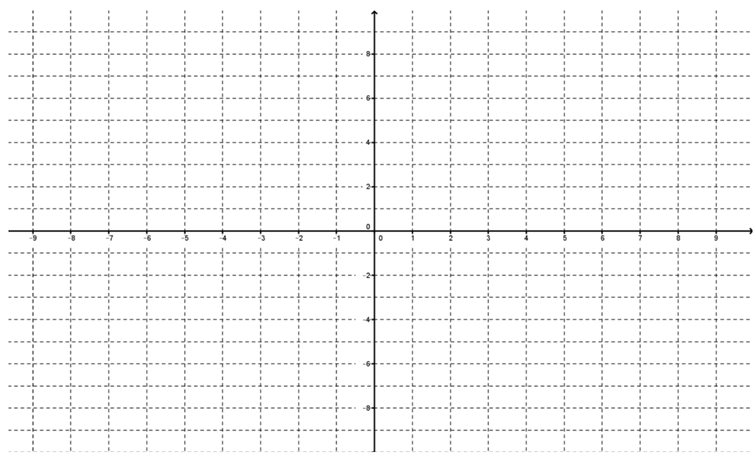
$$f(x) = 2x^2 - 1$$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |



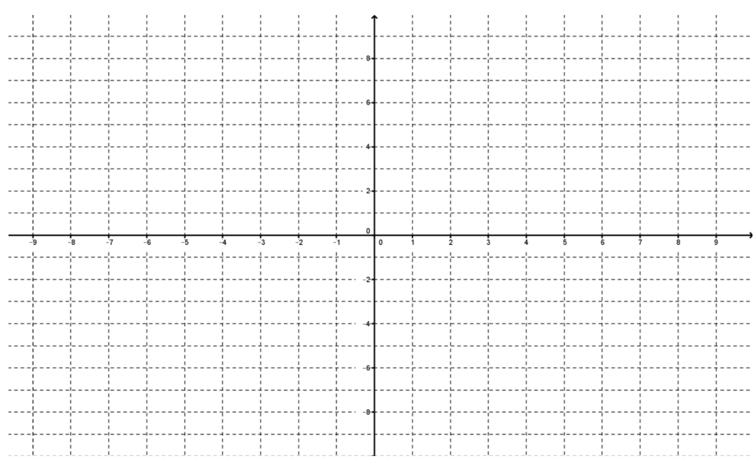
$$g(x) = 4$$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |



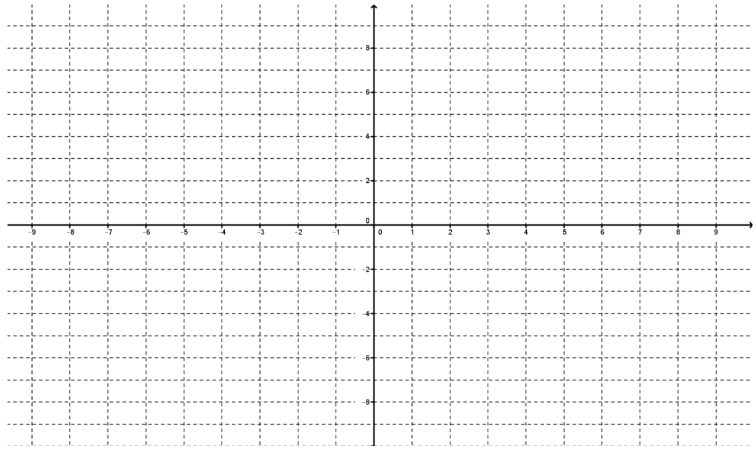
$$h(x) = -x - 5$$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |



$$h(x) = -x^3 + 3$$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |



# Anexo 2

## Actividad de aprendizaje $f(x) = ax$

Grafica funciones de la forma $f(x) = ax$, primero a lápiz y papel y después usando Geogebra™.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f(x) = x$ | $f(x) = -x$ | $f(x) = 2x$ | $f(x) = -2x$ |
| $f(x) = 3x$ | $f(x) = -3x$ | $f(x) = 0.5x$ | $f(x) = -0.5\,x$ |
| $f(x) = \frac{3}{4}x$ | $f(x) = -\frac{3}{4}x$ | $f(x) = 0.8x$ | $f(x) = -0.8x$ |
| $f(x) = 100\,x$ | $f(x) = -100x$ | $f(x) = 1000x$ | $f(x) = -1000x$ |

Observa las gráficas construidas y contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es el efecto de $a$ en la gráfica?

2. ¿Qué sucede si $a < 0$?

3. ¿Qué sucede sí $a > 0$?

4. ¿Qué tienen en común tienen todas estas gráficas?

A partir de las gráficas construidas completa las siguientes tablas

$f(x) = x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | 0 |

$f(x) = -x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | 0 |

$f(x) = 2x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | 0 |

$f(x) = -2x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | 0 |

$f(x) = 3x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | 0 |

$f(x) = -3x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | 0 |

$f(x) = 0.5x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | 0 |

$f(x) = -0.5\,x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | 0 |

$f(x) = \frac{3}{4}x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | 0 |

$f(x) = -\frac{3}{4}x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | 0 |

$f(x) = 0.8x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | 0 |

$f(x) = -0.8x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | 0 |

| $f(x) = 100\,x$ | |
|---|---|
| $x$ | $f(x)$ |
| 0 | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | 0 |

| $f(x) = -100x$ | |
|---|---|
| $x$ | $f(x)$ |
| 0 | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | 0 |

| $f(x) = 1000x$ | |
|---|---|
| $x$ | $f(x)$ |
| 0 | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | 0 |

| $f(x) = -1000x$ | |
|---|---|
| $x$ | $f(x)$ |
| 0 | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | 0 |

| |
|---|
| A partir de las tablas construidas observa y contesta las siguientes preguntas. |
| 3. ¿Cuál es el valor de $f(x) = x$ cuando $x = 0$ para todos los casos? ______________________________ |
| 4. ¿Cuál es el valor de $x$ cuando $f(x) = 0$ para todos los casos? ______________________________ |

# Anexo 3

## Actividad de aprendizaje $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$

Ayúdate de Geogebra™ y grafica la columna 1 en una hoja, la columna 2 en otra y así sucesivamente.

| Columna 1 | Columna 2 | Columna 3 | Columna 4 |
|---|---|---|---|
| $f(x) = x + 4$ | $f(x) = -x + 4$ | $f(x) = 3x + 4$ | $f(x) = -3x + 4$ |
| $f(x) = x + 3$ | $f(x) = -x + 3$ | $f(x) = 3x + 3$ | $f(x) = -3x + 3$ |
| $f(x) = x + 2$ | $f(x) = -x + 2$ | $f(x) = 3x + 2$ | $f(x) = -3x + 2$ |
| $f(x) = x + 1$ | $f(x) = -x + 1$ | $f(x) = 3x + 1$ | $f(x) = -3x + 1$ |
| $f(x) = x + 0$ | $f(x) = -x + 0$ | $f(x) = 3x + 0$ | $f(x) = -3x + 0$ |
| $f(x) = x - 1$ | $f(x) = -x - 1$ | $f(x) = 3x - 1$ | $f(x) = -3x - 1$ |
| $f(x) = x - 2$ | $f(x) = -x - 2$ | $f(x) = 3x - 2$ | $f(x) = -3x - 2$ |
| $f(x) = x - 3$ | $f(x) = -x - 3$ | $f(x) = 3x - 3$ | $f(x) = -3x - 3$ |
| $f(x) = x - 4$ | $f(x) = -x - 4$ | $f(x) = 3x - 4$ | $f(x) = -3x - 4$ |

Fig. 15. Actividad en Geogebra™ diseñada para guiar al estudiante en la construcción de gráficas de la forma $f(x) = ax + b$

Observa las gráficas construidas y contesta las siguientes preguntas:

4. ¿Cuál es el efecto de $b$ en la gráfica?
_______________________________________________________________

5. ¿Qué sucede si $b > 0$?
_______________________________________________________________

6. ¿Qué sucede si $b < 0$?
_______________________________________________________________

Fig. 16. Preguntas de reflexión sobre el papel de $b$ dentro de la función lineal

# Anexo 4

## Actividad: Plan telefónico.

Una compañía de cable tiene un súper paquete que incluye todas las llamadas locales a teléfonos de la misma compañía telefónica, sin límite de tiempo, T.V. por cable con 50 canales, Internet a 5 megas y todas las llamadas son ilimitadas desde tu teléfono fijo a tres celulares de la misma compañía telefónica. Pagando una renta mensual de $829.00.

**Plan Cuádruple**


**$829 al mes**

**Todas las llamadas** de tu teléfono fijo a tus 3 celulares están incluidas y son ilimitadas (1).

1. Las llamadas ilimitadas a números frecuentes sin costo aplican los primeros 5 minutos, a partir del minuto 5:01 se cobrará la tarifa vigente que es de $ 0.98 por minuto.

Construye una tabla considerando 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 10,20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100,n minutos de llamadas a celular, grafícalas a lápiz y papel en hojas milimétricas

| Minutos | Costo por los minutos excedidos | Renta mensual fija | Costo total a pagar mensualmente |
|---|---|---|---|
| 0 | | | |
| 1 | $0.98x1= | $829.00 | $0.98 + $829.00 = $829.98 |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | 4 x $0.98 = $3.92 | $829.00 | $829.00 + $3.92 = $832.92 |
| 5 | 5 x $0.98 = $4.90 | $829.00 | $829.00 + $4.90 = $833.90 |
| 6 | | | |
| 7 | | | |
| 8 | | | |
| 9 | | | |
| 10 | | | |
| 20 | | | |
| 30 | | | |
| 40 | | | |
| 50 | | | |
| 60 | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 70 | | | |
| 80 | | | |
| 90 | | | |
| 100 | | | |
| n | | | |

Construye la misma tabla en Excel y compárala con la que hiciste a lápiz y papel y anota tu opinión ___________________________________________________________________________

De acuerdo a la información obtenida en la tabla:

e) ¿Cuánto debe pagarse mensualmente si se hacen 5 llamadas al mes excedidas cada una de ellas en 19 minutos?

_______________________________________________________________________

f) ¿Cuánto debe pagarse si la renta mensual se incrementa a $1035.00?

_______________________________________________________________________

g) ¿Cuánto debe pagarse si la renta mensual es de $1467.00?

_______________________________________________________________________

h) Establece una función que modele el problema planteado para el pago mensual considerando los minutos extras.

_______________________________________________________________

Apoyándote en Geogebra™ grafica la función que modela el problema planteado.

c) ¿Qué parámetro determina el cambio de la pendiente?

_______________________________________________________________________

d) ¿Qué parámetro determina la ordenada en el origen?

_______________________________________________________________________

# Anexo 5

## Actividad Función lineal. Conversión de temperaturas

En los países anglosajones suelen usar la escala Fahrenheit para medir temperaturas. Dentro de esta escala el punto de congelación del agua se alcanza a 32$^{o}$F, y el de ebullición a 212$^{o}$F. En México usamos la escala Celsius donde el punto de congelación del agua se alcanza a los 0$^{o}$C y el punto de ebullición a los 100$^{o}$C.

1. Diseñe una tabla que relacione ambas escalas de temperatura como la que se presenta a continuación:

| $^{o}$C | $^{0}$F |
|---|---|
| 0 | 32 |
| 10 | |
| 25 | |
| 38 | |
| -32 | |
| -10 | |
| 100 | 212 |
| n | |

5. Hallar la función que relaciona $^{o}$C con $^{o}$F

6. Grafique a lápiz y papel los datos obtenidos
7. Apoyándose en Geogebra™, grafique, y compare ambas gráficas.

8. Con ayuda de la ecuación obtenida conteste las siguientes preguntas:
   d) ¿a cuántos $^{0}$C equivalen 75 $^{0}$F?
   e) ¿a cuántos $^{0}$F equivalen 47 $^{0}$C?
   f) ¿a cuántos $^{0}$F equivalen -86$^{0}$C?

# Anexo 6

## Actividad Función lineal. Las corredoras.

La última parte de un triatlón es de 10 km (10 kilómetros ó 10,000 metros) de carrera. Cuando la corredora Ana empieza esta última parte de la carrera, se encuentra 600 metros atrás de Beatriz; sin embargo, Ana puede correr más rápido que Beatriz, pues, mientras que Ana puede correr en promedio a 225 metros/minuto, Beatriz lo hace en promedio a 200 metros/minuto.

1. Construye una tabla de valores que describa el trayecto de ambas corredoras observando la relación que guarda el tiempo con la distancia, y que además incluye las operaciones que realices.

| Ana | | Operaciones | Beatriz | | Operaciones |
|---|---|---|---|---|---|
| tiempo (min) | distancia (m) | | tiempo (min) | Distancia (m) | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

2. Establece la función que les da la distancia dependiendo del tiempo transcurrido.

3. Grafiquen a lápiz y papel ambos recorridos.
4. Apoyándose en Geogebra™, grafique el recorrido de ambas corredoras, y compare ambas gráficas.

5. ¿Cuál es la variable independiente y cuál la dependiente?
6. ¿Las unidades para la distancia y el tiempo fueron adecuadas?
7. ¿Qué significado tiene el punto donde se cortan las gráficas?
8. Basándose en las gráficas obtenidas, ¿quién gana Ana o Beatriz?
9. Si gana Ana ¿cuál es la distancia que la separa de Beatriz al llegar a la meta?
10. Si es Beatriz la que gana ¿qué tan lejos quedó Ana cuando Beatriz finalizó?
11. ¿Existe algún momento en que Ana y Beatriz se intersecten?; de ser así ¿en qué kilómetro lo hacen?