# COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE INTEGRAL INDEFINIDA. UN ESTUDIO CON PROFESORES DE BACHILLERATO


Por

Isaías Lima Zempoalteca


TESIS PRESENTADA COMO REQUISITO QUE PARA
OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRO EN CIENCIAS**
EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

EN EL


CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL


Director

Dr. Antonio Rivera Figueroa

MÉXICO, D.F. ABRIL 2013.

*A mis padres*

# Contenido

# Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo financiero que he recibido durante mis estudios de maestría por medio de la beca otorgada con el número de registro 250513.

Mi sincero agradecimiento a mi director de tesis, Dr. Antonio Rivera Figueroa por sus valiosas observaciones y recomendaciones durante la realización de esta investigación, así como de su tiempo y paciencia dedicado.

Agradezco a mis sinodales los doctores: Rosa María García y Hugo Mejía por sus valiosas observaciones que favorecieron el mejoramiento de esta tesis.

Agradezco a mis amigos de la universidad por su apoyo incondicional en la realización de este trabajo.

A todos ellos: ¡Gracias!

# Resumen

En esta investigación se documentó la comprensión presente en diez profesores de matemáticas de nivel medio superior, acerca del concepto de integral indefinida. Para ello, se usó como marco conceptual elementos de la teoría: aprender matemáticas con comprensión (learning mathematics with understanding), descritos por Carpenter & Lehrer (1999), Hiebert & Carpenter (1992) y Sierpinska (1992); con el cual se pudieron alcanzar los objetivos planteados en el presente estudio.

Para la recolección de datos, se diseñó un cuestionario que consistió de nueve preguntas y cuatro actividades, que fue aplicado a diez profesores de matemáticas de nivel medio superior. Para cada una de las actividades, se realizó una discusión que fue audiograbada con el propósito de hacer reflexionar a los profesores sobre algunas ideas centrales en torno al concepto de integral indefinida.

El análisis cualitativo de los datos obtenidos, pone de manifiesto una falta de comprensión por parte de los profesores, respecto a los conceptos de integral indefinida y de primitiva. Los profesores, conciben la integral indefinida como una primitiva o como la familia de primitivas. Respecto a la definición de primitiva, se pudo percibir una problemática en su comprensión relativa al dominio de derivabilidad de esta función, además de un conflicto acerca de la existencia de primitivas definidas por piezas. Por otra parte, la mayoría de los profesores encuestados, saben que con la presencia de la constante de integración se genera la familia de primitivas aun cuando no entienden la justificación. Finalmente, pocos son los profesores que se refieren de manera explícita al teorema fundamental del cálculo, al responder sobre la importancia del cálculo de integrales indefinidas.

# Abstract

In this research was documented the understanding of ten high school teachers, about the concept of indefinite integral. For this, was used as conceptual framework elements of the theory: learning mathematics with understanding, described by Carpenter & Lehrer (1999), Hiebert & Carpenter (1992) and Sierpinska (1992); with which enabled us to achieve the objectives established in this study.

For data collection, we designed a questionnaire consisting on nine questions and four activities, which were applied to ten high school teachers. For each of the activities, we audio-recorded a discussion which the purpose is making teachers reflect on some central ideas around the concept of indefinite integral.

The qualitative analysis of the data, shows a lack of understanding teachers, about the concepts of indefinite integral and primitive. The teachers, conceived the indefinite integral as a primitive or as the family of primitives. Regarding on the definition of primitive we saw a problem, first in the understanding concerning on domain of differentiability of this function, in addition to a conflict about the existence of primitives defined by parts. Moreover, the most of the teachers surveyed, knew that with the presence of the constant of integration is generated the family of primitives primitives, even though they do not understand the justification. Finally, just few teachers refer explicitly to the fundamental theorem of calculus, to respond about the importance of the calculation of indefinite integrals.

# Introducción

El cálculo está presente de forma explícita o implícita en nuestra vida cotidiana; esto se debe a que es una importante herramienta que nos permite responder a preguntas no sólo de la matemática misma, sino también, a preguntas en ciencias físicas, sociales, biológicas y de ingeniería.

Lo expresado antes, es una de las principales razones para que en los programas de matemáticas del nivel medio superior en México, se estudien los dos conceptos fundamentales del cálculo: derivada e integral; los cuales, serán el pilar para estudios posteriores.

Al igual que en investigaciones como las de Artigue (2004), Díaz (2011), Ponce (2007) y Santos-Trigo & Rivera-Figueroa (2010) por citar algunas, consideramos que hoy en día los profesores son el eslabón clave de cualquier evolución de la enseñanza de la matemática, principalmente cuando éstos tienen la primordial tarea de enseñar los conceptos básicos de cualquier curso de matemáticas. En particular, podemos hablar sobre la asignatura de cálculo diferencial e integral, en donde se estudian diversos conceptos como: límite, continuidad, derivada, e integral, entre otros; y cuyo éxito en su aprendizaje por parte de los alumnos, depende en gran medida del dominio del concepto que tenga el profesor, pues aunque sea una obviedad, el profesor debe comprender con profundidad el concepto que desea enseñar.

A propósito de lo anterior, el aprendizaje de las matemáticas con comprensión[1] (learning mathematics with understanding), ha sido tema de interés para diversos investigadores. Por

[1] El proceso de aprender matemáticas con comprensión es descrito en el capítulo 2.

ejemplo Carpenter & Lehrer (1999), Hiebert & Carpenter (1992), y Sierpinska (1992), entre otros; se han ocupado de que la enseñanza de las matemáticas dentro del salón de clases sea aprendida con comprensión. Al respecto, Carpenter & Lehrer (1999) mencionan: "Cuando los estudiantes adquieren conocimiento con comprensión, ellos pueden aplicar tal conocimiento para aprender nuevos tópicos y resolver problemas tanto nuevos como aquellos que no les sean familiares. Cuando los estudiantes no comprenden, perciben cada tópico como una habilidad aislada. Ellos no pueden aplicar sus habilidades para resolver problemas que no son cubiertos explícitamente en la instrucción, y tampoco pueden extender su aprendizaje hacia nuevos tópicos" (p. 21). Al respecto, es importante mencionar que esto también se presenta en los profesores. Un profesor que comprende con profundidad el tema que desea enseñar, tiene más recursos matemáticos que un profesor que no ha comprendido dicho tema, por lo tanto, está en mejores condiciones para que su enseñanza sea exitosa.

Sin lugar a dudas, la enseñanza del concepto de Integral Indefinida resulta de gran importancia en el nivel medio superior, debido al papel que juega en el cálculo de integrales definidas mediante el teorema fundamental del cálculo. Es por ello que en este trabajo, realizamos un estudio de caso con el fin de documentar la comprensión por parte de diez profesores de matemáticas de nivel medio superior, acerca de diversas ideas alrededor del concepto de integral indefinida, en diversas situaciones.

Este trabajo comprende los siguientes capítulos:

En el capítulo 1 se describen algunas investigaciones relacionadas con este trabajo, mencionando primero algunos trabajos respecto a la enseñanza y aprendizaje de los principales conceptos del cálculo, para finalmente concluir con algunas investigaciones que abordan el concepto de integral indefinida. También, se describe la justificación de este trabajo, el problema de investigación, los objetivos, así como las preguntas de investigación planteadas. Concluyendo con la exposición de los elementos teóricos respecto al concepto de integral indefinida.

El capítulo 2 describe los aspectos teóricos sobre el marco conceptual: aprender matemáticas con comprensión (learning mathematics with understanding); el cual, será el sustento teórico de nuestra investigación.

En el capítulo 3 se hace la descripción de la metodología empleada en este trabajo; además, se describen las características de los profesores que participaron en esta investigación, finalizando con la elaboración, justificación y condiciones bajo las cuales se aplicó este instrumento.

En el capítulo 4 se presentan los resultados de un análisis cualitativo que se hizo a las respuestas obtenidas del instrumento aplicado. En este análisis, el aspecto principal a discutir es acerca de la comprensión que tienen los profesores, respecto a las ideas centrales del concepto de integral indefinida; mismas que son descritas en el capítulo 1.

El capítulo 5 está dedicado a las conclusiones de los aspectos más relevantes encontrados en la investigación, en función de los objetivos planteados en el capítulo 1; también, en este capítulo son contestadas las preguntas de investigación. Los datos recogidos y el análisis de estos, ponen de relieve la falta de comprensión por parte de los profesores aquí encuestados, respecto al concepto de integral indefinida.

# Capítulo 1

# Planteamiento del Problema y Preguntas de Investigación

En este capítulo, primero se describe una breve introducción acerca del surgimiento del cálculo, mencionando para ello, los trabajos de los científicos Leibniz y Newton; quienes de forma independiente dieron los primeros pasos para crear al cálculo como una disciplina de la matemática. Posteriormente, se describen algunas investigaciones relacionadas con este trabajo, el problema y preguntas de investigación así como los objetivos que persigue este estudio, los cuales, se pretenden alcanzar mediante el análisis de las respuestas de uno o más cuestionarios diseñados especialmente para esta investigación y que se aplicará a un grupo de profesores.

Finalmente, en la última sección de este capítulo, se muestran los elementos teóricos respecto al concepto de integral indefinida dentro del contexto del calculo integral.

## 1.1. Introducción

Se sabe que el cálculo surge a mediados del siglo XVII por el ingenio de dos grandes científicos: el alemán Gottfried W. Leibniz (1646-1716) y el inglés Isaac Newton (1643-1727); quienes de forma independiente sistematizaron y generalizaron los métodos de solución obtenidos por antiguos matemáticos a problemas de tangentes y cuadraturas. Esto es, como señala Grabiner (1983), tanto Leibniz como Newton realizaron tres importantes acciones para el surgimiento del cálculo. La primera acción se refiere a la reunión de la gran variedad de métodos que existían en ese momento para el cálculo de tangentes, extremos y áreas, los cuales fueron resumidos en dos principales conceptos que hoy llamamos derivada e integral. La segunda acción se refiere a que cada uno trabajó con su propia notación, con el propósito de que fuera sencillo manejar estos dos conceptos; por ejemplo, dependiendo del tema a estudiar podemos usar la notación de Newton $\dot{x}$ o la de Leibniz $\frac{dy}{dx}$ y $\int ydx$. Por último, la tercera acción hace mención a que tanto Leibniz como Newton formularon de forma independiente, un argumento para probar lo que ahora conocemos como el teorema fundamental del cálculo, el cual expresa que la derivada y la integral son mutuamente inversas. Al respecto Ímaz y Moreno (2010) mencionan: "...hubo que esperar sus trabajos [de Newton y Leibniz] para que se cristalizara lo que se venia gestando: el teorema que establece la relación más profunda entre la derivada y la integral. Precisamente, lo que ellos hicieron fue poner a punto las ideas que el trabajo precedente había puesto en la zona de desarrollo potencial del Cálculo" (p.14-15).

De esta manera, el cálculo se desarrolló a partir de ideas básicas presentes en la resolución a problemas concretos, las cuales fueron desarrolladas a través de los años hasta llegar a su formalización como hoy en día se estudia. No obstante, actualmente su enseñanza suele darse de forma inversa, es decir, primero se enseñan las definiciones, luego se pasa a estudiar algunos resultados, y finalmente se ilustra la teoría con ejemplos y aplicaciones. Una problemática en su enseñanza se debe al énfasis puesto en la memorización y aplicación de fórmulas, dando poco interés en la conceptualización y formalización de los conceptos.

Respecto al estudio de los conceptos derivada e integral, al revisar algunos libros de texto de cálculo, nos encontramos que pocos son los autores que presentan la integral definida antes que la derivada (e.g. Apostol (1998) y Hughes-Hallett y otros (2003)). En este caso, se entiende que esto tiene como propósito mostrar que la integral definida no está supeditada al concepto de derivada. Sin embargo, el progreso de la teoría sobre la integral se ve limitado si no se presenta el teorema fundamental del cálculo, porque es entonces, cuando se hace necesario estudiar la derivada y establecer el concepto de primitiva también llamado integral indefinida.

Otros autores de textos de cálculo correspondientes al nivel medio superior en México (e.g. Ayres (1983), De Oteyza (2006), Purcell y Varbeg (2000), Santaló y Carbonell (1977), Smith y Minton (2003), Stein (1985), y Swokowski (1987), entre otros) presentan primero la construcción del concepto de derivada, después el de integral indefinida y finalmente el de integral definida. En estos casos, cuando se estudia la integral indefinida no se entiende su relevancia en el contexto del cálculo integral. Su relevancia se hace patente solamente hasta que se estudia la integral definida y su cálculo mediante el teorema fundamental del cálculo.

## 1.2. Antecedentes

En esta sección mencionamos algunas investigaciones respecto a la enseñanza y el aprendizaje de algunos conceptos del cálculo. Con esto, pretendemos mostrar que el cálculo ha sido tema de interés debido a diversas dificultades que se han observado respecto a su enseñanza y a su aprendizaje. Algunas de las investigaciones que se describen a continuación están enfocadas a profesores y algunas otras a alumnos, ambos de distintos niveles educativos. Por ejemplo, uno de los principales obstáculos respecto a las dificultades del aprendizaje del cálculo, se menciona en el trabajo de Judson & Nishimori (2005), quienes comentan: "en el aprendizaje del cálculo, los estudiantes simplemente aprenden recetas para resolver problemas, sin adquirir una comprensión conceptual de los conceptos del cálculo" (p. 24). Otro de los trabajos pioneros corresponde a Tall & Vinner (1981), en donde se mencionan varios obstáculos en términos de dificultades, que presentan un número determinado de estudiantes durante el aprendizaje del concepto de límite y de continuidad; además, también se estudia el desarrollo de estos dos conceptos desde el punto de vista cognitivo.

Por otra parte Ferrara, Pratt & Robutti (2006) presentan un artículo de revisión de los últimos 30 años, sobre las ideas discutidas en la PME (Psychology of Mathematics Education) con respecto al uso de la tecnología y\o lápiz y papel para la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra y Cálculo. Algunas observaciones relevantes, mencionadas en este trabajo, son con respecto a la enseñanza y el aprendizaje del concepto de función. Esto es, al hacer una retrospectiva en la investigación en la PME sobre las ultimas tres décadas, se ha podido identificar tres diferentes enfoques en relación a la tarea de entender cómo la tecnología impacta sobre el proceso de asimilación de los tres tipos de representaciones dinámicas (simbólica, gráfica y tabular) de las funciones. En este mismo artículo se mencionan diversas investigaciones que estudian las dificultades en el aprendizaje del concepto de límite. Por ejemplo, el artículo citado perteneciente a Cornu (1991) aborda el concepto de límite basándose en la idea de las concepciones espontáneas y los modelos mentales, es decir, las ideas, intuiciones, imágenes y conocimientos de la experiencia cotidiana, tales como significados coloquiales de términos frecuentemente usados en la vida diaria por los estudiantes, y que condicionan las ideas del estudiante antes de cualquier aprendizaje. Además, aborda tanto obstáculos cognitivos como epistemológicos desde una perspectiva histórica, con la finalidad de proporcionar una visión general sobre la noción que tienen los estudiantes sobre éste concepto.

Santos-Trigo & Rivera-Figueroa (2010) realizan una investigación con veintitrés aspirantes a un programa de maestría en educación matemática en México, acerca de sus conocimientos y razonamientos matemáticos mostrados en sus respuestas dadas a un cuestionario de nueve preguntas, diseñado con base en la agenda académica de la disciplina en matemática educativa. Entre las nueve preguntas, algunas fueron redactadas con base en los conceptos de derivada e integral. Los resultados obtenidos en esta investigación permitieron obtener información sobre los conocimientos matemáticos presentes en cada uno de los candidatos, además de algunas formas de razonamiento que fueron de utilidad para organizar las actividades académicas así como las posibles rutas didácticas durante sus estudios de posgrado. También, se obtuvo evidencia en este trabajo, respecto a que cada aspirante necesita ser encaminado a actividades donde se desarrollen los procesos de comprensión y en donde se tenga que dar sentido a problemas o ideas matemáticas; además, se menciona la relevancia de usar diversas estrategias cognitivas y metacognitivas; todo esto con el propósito de que puedan comunicar de forma eficiente su conocimiento matemático.

A continuación, mostramos algunas investigaciones relevantes relacionadas con el tema del cálculo integral, en ellas se abordan principalmente los conceptos de integral indefinida e integral definida.

Por ejemplo, Ponce (2007) realiza un estudio con profesores de bachillerato sobre las ideas centrales del Teorema Fundamental del Cálculo, algunas de sus conclusiones obtenidas con base a las respuestas de su población, son que hay profesores que confunden este teorema con la definición de integral indefinida, algunos otros, creen que hay funciones continuas sin antiderivadas o simplemente existe confusión sobre el tipo de funciones a las que se puede aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo, es decir, no se percatan que la continuidad es un concepto preponderante en el cálculo de antiderivadas.

Un artículo que aborda dos situaciones, en las cuales no es aplicable la fórmula $\int_a^b F'(x)dx = F(b)-F(a)$, pertenece a Ponce y Rivera (2009); en este trabajo, la primera situación mostrada puede surgir en la práctica y es con respecto a la sustitución $u = \tan\frac{x}{2}$, la cual, al ser empleada en el cálculo de una primitiva, puede obtenerse como resultado una antiderivada que no sea diferenciable en el mismo dominio de definición del integrando. En la segunda situación, se muestran dos ejemplos en donde $F'$ no es integrable en el sentido de Riemann. Para fines de este trabajo, solo haremos mención del primero de ellos: en este ejemplo, se da la siguiente función definida por piezas:

$$F(x) = \begin{cases} x^2\cos(\frac{\pi}{x^2}), & \text{si } 0 < x \leqslant 1; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La cual es derivable en $[0,1]$, pero $F'$ no es Riemann integrable, debido a que no está acotada en este intervalo. Para estas dos situaciones, la fórmula expresada al principio no es aplicable.

Por otra parte, Ponce-Campuzano & Rivera-Figueroa (2011a) y Ponce-Campuzano & Rivera-Figueroa (2011c) analizan el uso de CAS (Computer Algebra Systems) para calcular antiderivadas; principalmente, ellos muestran que para situaciones particulares, CAS no brinda el resultado correcto obtenido mediante la teoría matemática. El principal "error" que comete CAS, es que no siempre emplea los métodos adecuados para verificar que la supuesta antiderivada que arroja como resultado, cumple con la propiedad de ser diferenciable para todo dominio de la función a la cual se le está calculando su antiderivada. Ellos mencionan: "En primera instancia, mostramos que en algunos casos los resultados del CAS no son apropiados, mientras que la teoría nos da mejores resultados... En segundo lugar, las situaciones aquí presentadas dan pauta para considerar y analizar varios hechos importantes, por ejemplo: 1) no siempre existe primitiva de una función a pesar de que ésta sea integrable (en el sentido de Riemann); 2) no siempre existe una fórmula para expresar una primitiva de una función con operaciones finitas de funciones elementales y 3) no siempre se pone atención a los dominios de las primitivas" (p. 97). Además, indican que se puede llegar a obtener una solución incorrecta si se aplica un método para calcular primitivas de manera automática, sin antes realizar una reflexión previa.

En otro artículo de estos mismos autores: Ponce-Campuzano & Rivera-Figueroa (2011b), realizan una discusión sobre la sustitución $u = \tan \frac{x}{2}$ (recordemos que este cambio de variable pertenece a un método de sustitución para encontrar antiderivadas de funciones racionales trigonométricas), la cual falla cuando la función a calcular su antiderivada es continua en el conjunto de los números reales, en este caso, el resultado obtenido es una función que aparentemente es una antiderivada; el problema radica en que esta función no está definida en el mismo dominio del integrando. Para obtener un resultado correcto, se deben de emplear otras técnicas extras, que sin duda, requiere que se tenga claro el concepto de antiderivada así como las condiciones para aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo. Una de las afirmaciones escrita por lo autores referente a este problema es: "En la enseñanza del Cálculo, en particular, en la enseñanza del método de sustitución es necesario poner atención a los dominios de las funciones, especialmente cuando tratamos de evaluar integrales definidas al calcular las primitivas" (p.44).

Hasta aquí, hemos mencionado las investigaciones que hemos considerado relevantes respecto a la enseñanza y el aprendizaje de algunos conceptos del cálculo diferencial e integral, y que forman parte del sustento de este trabajo de investigación. A continuación, se aborda el problema y las preguntas de investigación.

## 1.3. Planteamiento del Problema de Investigación

Independientemente de cómo se inicie el estudio del cálculo en el bachillerato, es común que existan algunas dificultades de comprensión en los conceptos derivada e integral. Esto se pudo percibir en algunas de las investigaciones descritas en la sección anterior. Además, en estos trabajos, se hace mención a un problema presente en el aprendizaje del cálculo, en el cual los profesores poseen en gran medida la responsabilidad, debido a que al no tener el conocimiento matemático necesario que "equilibre" lo operativo y lo formal, la enseñanza del cálculo puede volverse una instrucción de conceptos abstractos produciendo en el estudiante un nulo conocimiento sobre su utilidad; o en contraparte, se pueden desatender los fundamentos esenciales del cálculo ocasionando una limitada formación matemática en el alumno.

Es por ello que nuestro interés es investigar acerca de la comprensión que tienen los profesores respecto del concepto de integral indefinida, el cual pertenece a la asignatura de cálculo integral en el nivel medio superior. Recordemos que el problema principal que dio origen a este tema fue el de calcular el área bajo una curva, cuya solución está estrechamente relacionada mediante el teorema fundamental del cálculo, es decir, se debe calcular una función cuya derivada sea una función dada.

El teorema fundamental del cálculo no solo pone en relieve las relaciones de reciprocidad entre la derivada e integral, sino que sugiere un orden en la presentación o construcción de los conceptos, y proporciona una expresión que permite calcular el área bajo una función en un intervalo $I$. Todo pareciera indicar que una vez estudiado el concepto de derivada, el problema de calcular áreas se vuelve sumamente "fácil" empleando el teorema fundamental del cálculo; no obstante, el problema surge al tratar de calcular una primitiva[1]. Como se mencionó en el párrafo anterior, una primitiva de una función $f$, es otra función $F$ cuya primera derivada es igual a la función $f$, entonces por definición de primitiva, la función $F$ debe ser diferenciable en todos los puntos del dominio de definición de la función $f$. Cuando se reúnan estas condiciones, podemos usar $F$.

En suma, la importancia del cálculo de una primitiva, recae en el uso del teorema fundamental del cálculo. Al procedimiento de calcular una primitiva o la familia de primitivas, también se le llama integración[2] y se denota mediante el signo integral $\int$, por lo cual a una primitiva se le llama asimismo integral. Es un hecho que cualesquiera dos primitivas de una misma función, en un intervalo difieren en una constante $C$, y dado que la constante es indefinida, a la expresión $F(x) + C$ también suele llamársele integral indefinida.

En principio, la familia de todas las primitivas de una función dada en un intervalo, puede ser calculada mediante una integral indefinida, sin embargo esto no es del todo claro para los profesores, debido a que suelen presentar dificultades en diversas situaciones respecto al cálculo de integrales indefinidas. A continuación mencionamos algunas de ellas:

1. **Constante de Integración.** Es habitual que el profesor desconozca algún argumento que justifique la presencia de la constante de integración. La adición de la constante de integración a una primitiva, nos genera la familia de primitivas de la función integrando. Algunos justifican este hecho mencionando que se debe a que la derivada de una función, adicionada con una constante es igual a la derivada de la función misma. Sin embargo, la justificación de este hecho se basa en el resultado de que si dos funciones tienen la misma derivada en un intervalo, entonces difieren en una constante. Este resultado se

[1]Algunos autores suelen llamarla antiderivada; Antiderivada y Primitiva son sinónimos.
[2]De aquí a lo que resta de esta sección, se ha tomado como referencia el libro de Granville (1982).

basa a su vez en el teorema del valor medio.

2. **Diversas soluciones al calcular una integral indefinida.** Dependiendo de las habilidades, destrezas y de los métodos aplicados, se pueden obtener diversas expresiones para la integral indefinida. Para confirmar que todos los resultados obtenidos representan la misma familia de primitivas, una estrategia sencilla es derivar cada expresión obtenida y hacer uso del siguiente resultado: *si dos funciones tienen la misma derivada, entonces difieren en una constante.* De lo anterior, surge la pregunta ¿Está convencido el profesor de que ese procedimiento es suficiente para garantizar la validez de los resultados, aun cuando se obtengan primitivas con expresiones radicalmente diferentes?

3. **Dominio de derivabilidad de una primitiva.** Un error que se suele cometer al hallar la integral indefinida de una función, es no verificar que el resultado obtenido sea diferenciable en todo el domino de definición de la función dada. Si la primitiva obtenida no es derivable en los mismos puntos donde está definida la función a integrar, pueden obtenerse resultados erróneos al intentar aplicar el teorema fundamental del cálculo.

4. **Funciones sin primitiva elemental.** Es importante que el profesor tenga conocimiento sobre la existencia de funciones cuyas integrales no pueden ser expresadas mediante funciones elementales[3]. Es decir, la integral $\int f dx$ no siempre puede ser expresada como una función cuya "forma" sea de las que se estudian en un curso de cálculo elemental. Algunos ejemplos son $\int e^{x^2} dx$ y $\int \frac{x}{\log x} dx$.

5. **Uso de los métodos de integración.** En relación a los métodos de integración que no son otra cosa que métodos para determinar primitivas, los textos y programas de estudio de cálculo integral usualmente incluyen los siguientes

[3]El concepto de *función elemental* se describe con más detalle en la sección 3.2

- Reconocimiento de integrales inmediatas.
- Integración por partes.
- Sustitución trigonométrica.
- Cambio de variable $u = \tan \frac{x}{2}$.
- Integración de funciones racionales por descomposición en fracciones parciales.

La reflexión acerca del cálculo de primitivas no va más allá de estos métodos por lo que ante el problema de hallar una primitiva de una función tan simple como $f(x) = |x|$ los profesores pueden no saber cómo hacerlo.

En la medida en que el profesor cuente con los recursos matemáticos, podrá introducir los diversos conceptos de forma adecuada y oportuna, de tal manera que el alumno comprenda la esencia del cálculo integral. Una mala comprensión del concepto de integral indefinida por parte del profesor, se traducirá en ideas erróneas que comunicará en su enseñanza dentro del salón de clase.

En este trabajo de investigación de tipo cualitativo, nos planteamos los siguientes objetivos de investigación

1. Documentar la comprensión de parte de diez profesores de matemáticas de nivel medio superior acerca del concepto de integral indefinida.
2. Indagar acerca del estatus dentro del cálculo que le asignan los profesores encuestados al concepto de integral indefinida.

## 1.4. Preguntas de Investigación

Los objetivos de investigación descritos anteriormente, se pretenden alcanzar mediante la respuesta de las siguientes dos preguntas generales de investigación:

1. ¿Qué conocimiento matemático tiene el profesor acerca del concepto de Integral Indefinida?

2. ¿Cómo ubican los profesores el concepto de Integral Indefinida en el contexto de todo el Cálculo?

Para responder a la primera pregunta, nos apoyaremos de las primeras tres preguntas siguientes; y para responder la segunda pregunta general, nos apoyaremos de la cuarta pregunta:

- ¿Qué significado tiene la Integral Indefinida para un profesor?
- ¿Comprende el profesor el papel que juega la constante de integración?
- ¿Qué recursos tiene el profesor para determinar primitivas de funciones simples no rutinarias?
- ¿Comprende el profesor el uso de una primitiva de una función $f$?

## 1.5. Acerca de la Integral Indefinida

En esta sección describiremos la importancia que tiene la integral indefinida dentro del contexto del cálculo integral. Pero antes, haremos una disertación y una exposición acerca del lugar que asignan al concepto de integral indefinida algunos de los autores de texto de cálculo disponibles para los profesores de bachillerato. No obstante, es el profesor quien basado en sus conocimientos matemáticos y experiencia en la docencia, el que tiene la última opción de elegir cómo presentar este concepto dentro del salón de clases.

Por ejemplo, en los libros Ayres (1983), Arana (2008), Fuenlabrada (2003), Morales (2004), Santaló y Carbonell (1977) y Stein (1985), se estudia el concepto de integral definida después de presentar la integral indefinida y los métodos de integración; el tema de la integral, concluye con aplicaciones de la integral definida. Algunos otros como De Oteyza (2006), Ibáñez y García (2011), Purcell y Varbeg (2000), Smith y Minton (2003), Stewart (1998) y Swokowski (1987) también exponen el concepto de integral definida después de presentar la integral indefinida, sin embargo a diferencia de los anteriores, enseguida se estudian las aplicaciones de la integral definida, para concluir con los métodos de integración. Finalmente en Salazar, Bahena y Vega (2011) se estudia primero el concepto de integral definida para posteriormente estudiar el concepto de integral indefinida, enseguida se estudian los métodos de integración y se concluye con aplicaciones de la integral definida.

Como se pudo observar en la revisión de estos libros de texto, el concepto de integral indefinida es expuesto ya sea antes o después del concepto de integral definida. Sin embargo, al igual que Courant y Herbert (1979), coincidimos en que la ubicación donde se estudie el concepto de integral indefinida no es un inconveniente para la comprensión de este concepto. Las dificultades para su comprensión radican en que inician el estudio del cálculo integral estableciendo lo que es una integral indefinida; su definición es la de primitiva pero le llaman integral indefinida. Hablar de la integral indefinida sin hablar antes de la integral definida es lo que se puede traducir en una dificultad en la comprensión de lo que es una integral.Algunos autores de texto de cálculo elemental usan el término de integral para referirse a la integral definida. De esta manera, el primer uso de integral no parece tener ninguna conexión con el segundo uso.

Por otra parte, recordemos que la diferenciación y la integración son procesos inversos; y que además, fueron Newton y Leibniz quienes aprovecharon esta relación y dieron los primeros pasos para crear al cálculo como una disciplina de la matemática. En particular, ellos observaron que el teorema fundamental les permitía calcular áreas e integrales con suma facilidad, sin tener que determinarlas como límites de sumas. Así, el teorema fundamental del cálculo proporciona la relación inversa entre la derivada y la integral.

Antes de abordar el teorema fundamental del cálculo, daremos las definiciones de los conceptos derivada y primitiva; teniendo como referencia los siguientes libros de cálculo: Apostol (1998), Granville (1982), Rivera (2007), así como Stewart (1998).

**Definición 1.1.** Sea $f$ una función y $x_0$ un punto del dominio de $f$, entonces cuando el límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

exista, diremos que $f$ es derivable en $x_0$, tal límite se llama la *derivada* de $f$ en $x_0$ y se denota por $f'(x_0)$.

Observemos que la derivada por definición es un límite, y una interpretación de este límite es el de la pendiente de la recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$ a la curva. Por lo cual, la tangente a una curva definida por la gráfica de una función $f$, en un punto $(x_0, f(x_0))$ existe cuando el límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

existe.

Este límite también se puede escribir como

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

para $h = x - x_0$; de esta manera $h \to 0$ cuando $x \to x_0$.

Es importante señalar que la definición de derivada es de carácter puntual, se define para cada punto $x$ del dominio de $f$ cuando el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

existe.

De esta manera, dada una función $f$, tenemos definida una función $f'$ en todos los puntos donde $f$ es derivable, esta función se llama la derivada de $f$. El dominio de $f'$ son los puntos del dominio de $f$ donde es derivable. Si una función $f$ es derivable en todos los puntos de su dominio, su derivada $f'$ tiene el mismo dominio que $f$. Un problema importante en cálculo es determinar la función $f$ cuando se conoce su derivada. Si $f$ es una función dada y $F$ es una función cuya derivada es $f$, diremos que $F$ es una primitiva de $f$:

**Definición 1.2.** Una función, $F$, se denomina *primitiva* de $f$ en un intervalo $I$, si $F'(x) = f(x)$ para toda $x$ en $I$.

Note que el tener un dominio en el cálculo de derivadas, principalmente en la reglas de diferenciación, nos puede facilitar el cálculo de las funciones primitivas; esto debido a que los principales métodos para hallar primitivas[4] surgen a partir de las reglas ya establecidas en

[4]Usualmente llamados en los libros de cálculo como métodos de integración.

el cálculo diferencial.

Por otra parte, si $f$ es una función continua en un intervalo $I$, denotaremos a la familia de primitivas de $f$ por la expresión $\int f(x)dx$. Mas aún, si $F$ es una primitiva de $f$, entonces toda primitiva de $f$ es de la forma $F(x) + C$, donde el parámetro $C$ es llamado *constante de integración*. Esto es, si $F$ y $G$ son dos primitivas cualesquiera de $f$ en un intervalo $I$, entonces se cumple que $F'(x) = G'(x) = f(x)$, y por lo tanto la función diferencia $F(x) - G(x)$ tiene derivada cero en ese intervalo. De esta manera, la función diferencia es una constante en el intervalo $I$, es decir, $F(x) = G(x) + C$, donde $C \in \mathbb{R}$ para toda $x \in I$.

Observemos que con lo anterior, se ha dado una idea de la demostración del siguiente teorema, para lo cual, se requiere del uso del teorema del valor medio del cálculo diferencial.

**Teorema 1.1.** *Si $F$ y $G$ son dos primitivas de una función $f$ en un intervalo $I$, entonces existe $C \in \mathbb{R}$, tal que para toda $x \in I$ se tiene $F(x) = G(x) + C$.*

Note que la hipótesis de que el conjunto $I$ donde $F$ y $G$ son primitivas de $f$, sea un intervalo, es muy importante; debido a que si $I$ es la unión de intervalos ajenos, entonces existirá una constante para cada uno de los intervalos cuya unión será el conjunto $I$.

Al proceso de encontrar una primitiva de una función $f$ que nos permitirá escribir la expresión $\int f(x)dx = F(x)+C$, se llama *integración*; y la función $f$ se llama *función integrando.*

A la expresión $\int f(x)dx$ también se le suele llamar la integral indefinida y representa toda la familia de primitivas de $f$. Además, es importante mencionar que si el dominio de la función integrando no fuera un intervalo, entonces la integral indefinida no tiene la forma: $\int f(x)dx = F(x) + C$. En otras palabras, si el dominio de la función integrando consiste de una unión de intervalos ajenos, entonces hemos de elegir constantes de integración distintas para cada intervalo que compone el dominio de $f$.

Después de describir los conceptos de primitiva e integral indefinida, a continuación detallaremos el teorema fundamental del cálculo, mismo que pone en relieve que la derivada e integral son conceptos inversos uno del otro.

Para obtener el teorema fundamental, sea $f$ una función continua en $[a, b]$ y definamos una nueva función, $g$, mediante

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Note que el límite superior de la integral, es una variable $x$, por lo cual, $g$ sólo depende de $x$. Además, si $x$ es un número fijo, se tiene que la integral es un número definido. Si por el contrario, dejamos que $x$ varíe dentro del intervalo $[a, b]$, la integral también varía y define a una función de $x$, la cual hemos llamado $g$.

Luego, podemos suponer que $f(x) \geqslant 0$. Entonces $g(x)$ puede ser interpretada como el área bajo la gráfica de $f$, de $a$ a $x$, donde $x$ varía dentro del intervalo $[a, b]$ como se puede apreciar en la Figura 1. Luego para calcular $g'(x)$ a partir de la definición de derivada, notemos que para un $h > 0$, $g(x+h) - g(x)$ es una resta de áreas, por lo cual, el valor obtenido es el área bajo la gráfica de $f$ desde $x$ hasta $x + h$, es decir, el área del rectángulo de altura $f(x)$ y base igual a $h$ (ver Figura 2). De esta manera si $h$ es "pequeña", se tiene

$$g(x+h) - g(x) \approx hf(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \approx f(x)$$

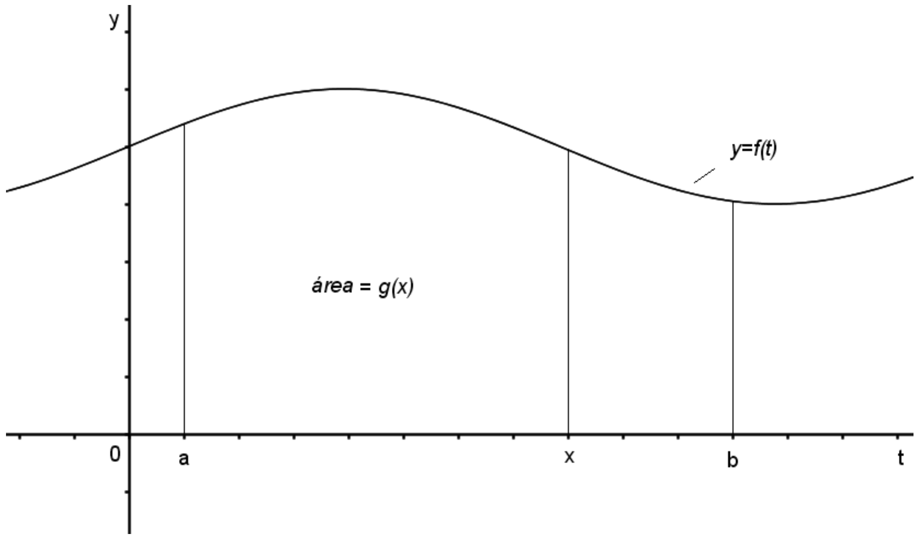



Figura 1.

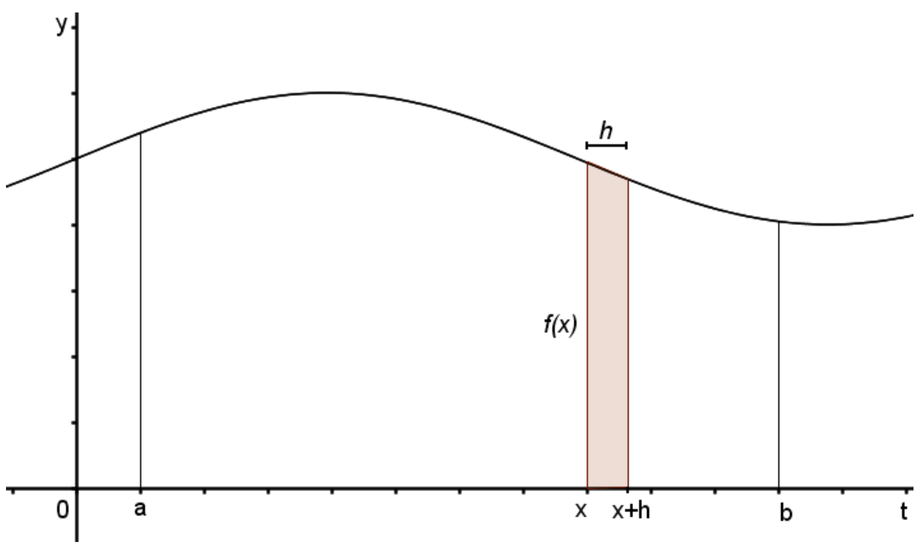



Figura 2.

Por lo cual, a nivel intuitivo se espera que

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x)$$

con lo cual $g$ resulta ser una primitiva de $f$.

El hecho de que lo anterior se cumpla aun cuando $f$ no sea necesariamente positiva, es la primera parte del teorema fundamental del cálculo.

**Teorema 1.2** (TFC Primera Parte.)**.** *Si $f$ es continua en $[a, b]$, la función $F$, definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

*es continua en $[a, b]$, diferenciable en $(a, b)$, y $F'(x) = f(x)$.*

El teorema anterior, expresa que, si primero integramos $f$ y después derivamos el resultado, obtendremos de nuevo la función original $f$.

Por otra parte, supongamos que tenemos una primitiva $G(x)$ de $f(x)$ para un intervalo $[a, b]$, luego por la primera parte del teorema fundamental del cálculo, tenemos que $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es también una primitiva de $f(x)$, por lo tanto existe una constante $C$ tal que $G(x) = F(x) + C$, en $[a, b]$. La constante queda determinada por la condición $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$ la cual implica que $G(a) = C$. Luego entonces

$$\begin{aligned} G(x) &= F(x) + G(a) \\ G(x) - G(a) &= F(x) \\ G(x) - G(a) &= \int_a^x f(t)dt \end{aligned}$$

si hacemos $x = b$ obtenemos

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$

lo cual es la segunda parte del teorema fundamental del cálculo.

**Teorema 1.3** (TFC Segunda Parte.)**.** *Si $f$ es continua en $[a, b]$, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

*en donde $F$ es cualquier primitiva de $f$.*

Obsérvese que del teorema anterior, $F(x)$ es "cualquier primitiva" de $f(x)$, por lo tanto, para calcular la integral definida $\int_a^b f(x)dx$, basta hallar una función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ y luego calcular la diferencia $F(b) - F(a)$.

Hasta aquí, se ha visto la importancia del papel que juega la integral indefinida dentro del cálculo diferencial e integral. Como se mencionó anteriormente, la aplicación correcta del teorema fundamental del cálculo va a depender del cálculo correcto de una primitiva de la función integrando.

Por último, haremos mención de que no hay un consenso en la definición de los conceptos de integral de una función, integral definida e integral indefinida por parte de los diversos autores de los libros de cálculo. Por ejemplo, para los libros aquí citados se tiene:

- Para el concepto de integral definida, en los libros Apostol (1998), Rivera (2007) y Stewart (1998), se define mediante el valor del límite para la sucesión de sumas de Riemann. En cambio Granville (1982), a partir de la expresión $\int_a^b f(x)dx$ menciona:

"Puesto que esta expresión tiene siempre un valor definido, o puesto que los límites $a$ y $b$ definen un valor determinado, se llama integral definida" (p. 289).

- Para el concepto de integral indefinida, en los libros de Granville (1982) y Rivera (2007), se define como la familia de primitivas; en contraparte, para los libros correspondientes a Apostol (1998) y Stewart (1998), el concepto de integral indefinida es concebido como una primitiva.

- Para el concepto de integral de una función, Apostol (1998), Rivera (2007) y Stewart (1998) manejan el término de integral de una función respecto al concepto de integral definida. En contraparte, sólo en el libro de Granville (1982) el concepto de integral de una función se concibe como el concepto de integral indefinida.

Es importante aclarar que en todas estas definiciones se está hablando del mismo concepto, el cual, tiene la misma utilidad y lo único que varía es la forma en cómo lo define cada autor.

# Capítulo 2

# Marco Conceptual

En este capítulo se describen los elementos teóricos sobre el marco conceptual: aprender matemáticas con comprensión (learning mathematics with understanding), descritos por Carpenter & Lehrer (1999), Hiebert & Carpenter (1992) y Sierpinska (1992); los cuales, serán el sustento teórico de esta investigación.

## 2.1. Aprender Matemáticas con Comprensión

Uno de los actores principales en la labor de enseñanza de las matemáticas es el profesor, debido a que en él recae la conducción de la clase. Esto es, son los profesores quienes determinan las situaciones que se llevaran a cabo dentro del salón de clases así como la naturaleza del ambiente dentro del cual se encontrarán inmersos sus estudiantes durante la actividad matemática; sin lugar a dudas, éstos factores dependen del grado de comprensión de los conocimientos matemáticos por parte del profesor. Respecto a esto, Artigue (2004) señala: "...considerar al docente como un elemento clave del sistema no es suficiente si ese docente no es problematizado como un verdadero actor, si no se intenta comprender sus prácticas y aquello que las determinan, las restricciones a las que está sujeto y sus márgenes de maniobra, los conocimientos disciplinares y otros que hacen su competencia profesional y el modo en que se construyen"(p.25). Es por ello que algunos trabajos de investigación como Rivera, García y Díaz (2013), Sierpinska (1992) y Fennema & Romberg (1999) (por citar algunos), se han centrado en estudiar el proceso de aprender matemáticas con entendimiento o aprender matemáticas con comprensión (learning mathematics with understanding) en temas de matemáticas y para distintos niveles educativos.

El aprender matemáticas con comprensión, es uno de los principios de aprendizaje para la educación matemática que aparece en el documento Principles and Standards for School Mathematics publicado en el año 2000 por el National Council of Teachers of Mathematics. En este documento se da un enfoque de las matemáticas basado en un aprendizaje donde se comprenda lo aprendido. Es decir: "Los estudiantes deben aprender matemáticas comprendiéndolas, y construir activamente nuevos conocimientos a partir de la experiencia y de los conocimientos previos"(National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000, p.20). También, se menciona que el aprender matemáticas requiere comprender y ser capaz de aplicar procedimientos, conceptos y procesos; por lo tanto, se destacan los siguientes tres componentes presentes en el aprendizaje de las matemáticas con comprensión: conocimiento, destreza y comprensión conceptual.

Carpenter y Lehrer (1999) mencionan al respecto: “Cuando los estudiantes adquieren conocimiento con comprensión, ellos pueden aplicar tal conocimiento para aprender nuevos tópicos y resolver problemas tanto nuevos como aquellos que no les sean familiares. Cuando los estudiantes no comprenden, perciben cada tópico como una habilidad aislada. Ellos no pueden aplicar sus habilidades para resolver problemas que no son cubiertos explícitamente en la instrucción, y tampoco pueden extender su aprendizaje hacia nuevos tópicos”(p.21). Es por ello que se vuelve necesario preparar a los estudiantes para que aprendan con comprensión nuevas habilidades y nuevos conocimientos, de tal forma que puedan adaptarlos en la resolución de problemas no rutinarios.

Sin embargo el comprender conceptos en matemáticas, no es un acto que resulta de un momento de reflexión o mediante una actividad mental que termina eventualmente; la comprensión conceptual en matemáticas, es un proceso que consiste de una sucesión de actos o actividades mentales. De esta manera, la comprensión está en permanente desarrollo; es decir, está en permanente evolución donde crece y se transforma con el tiempo. Por lo tanto, “la comprensión de un concepto matemático puede ser de un alto nivel de complejidad, puede requerir de un proceso largo de aprendizaje con diferentes vertientes, debido a la diversidad de componentes que constituyan el concepto”(Rivera, García y Díaz, 2013, p. 40-41); por lo cual, el grado de comprensión de un concepto en matemáticas, está determinado por el conocimiento de cada una de las partes que lo conforman.

No obstante, es indudable que en el aprendizaje de las matemáticas es importante el memorizar, el adquirir destrezas en cálculos así como la habilidad para la aplicación de conocimientos. Todo esto forma parte del conocimiento de un individuo, el cual, es requerido para adquirir nuevos conocimientos y de esta manera desarrollar su comprensión en matemáticas.

En nuestro caso, consideramos que un profesor comprende el concepto de integral indefinida, si tiene conocimiento acerca de las siguientes situaciones respecto al cálculo de integrales indefinidas: presencia de la constante de integración, diversas soluciones al calcular una integral indefinida, dominio de derivabilidad de una primitiva, funciones sin primitiva elemental, y el uso de los métodos de integración; estas situaciones fueron descritas con más detalle en el capítulo anterior. Que un profesor tenga conocimiento de estas situaciones, significa que puede reconocerlas y emplearlas en la resolución de problemas no rutinarios.

Para determinar la comprensión acerca del concepto de integral indefinida se diseñó un instrumento, tomando para ello, las cinco formas de actividad mental para el desarrollo de la comprensión en matemáticas propuestas por Carpenter & Lehrer (1999).

A continuación damos algunas explicaciones de cada una de las formas de actividad mental así como las consideraciones que hicimos para el diseño del instrumento:

1. **Construcción de relaciones.** Los objetos toman significado con base en las formas en las cuales están relacionadas con otros objetos. De esta manera, las personas construyen significados para una nueva idea o proceso relacionándolo a ideas o procesos ya conocidos. Es así como los conceptos matemáticos formales, operaciones y símbolos, que forman las bases del curriculum matemático escolar, se les puede dar significado relacionándolos con ideas e intuiciones anteriores.

Para nuestro trabajo hemos utilizado un cuestionario cuyas preguntas giran en torno a las situaciones respecto al cálculo de integrales indefinidas. Un conocimiento básico en el cálculo de primitivas por parte del profesor, le permitirá reconocer la mayoría de estas situaciones; sin embargo, son las relaciones entre cada una de ellas lo que le permitirá responder con éxito a cada una de las actividades del cuestionario. Por ejemplo, una relación que puede ser de utilidad a los profesores en la resolución del cuestionario, es la del significado de familia de primitivas con la integral indefinida.

2. **Extensión y aplicación de conocimiento matemático.** Una de las características del aprendizaje con comprensión es la de ser generativo. Esto significa agregar nuevos conceptos y procesos al conocimiento existente, además de la creación de estructuras que integre el conocimiento.

   El aprender con comprensión también nos provee formas de cómo el conocimiento puede ser usado. Aunque esto frecuentemente es asumido, es claro que los conceptos básicos y habilidades necesitan ser aprendidos antes que las aplicaciones sean introducidas.

   Es indudable que hay una gran distancia entre conocer un conocimiento matemático y el poder aplicarlo. Usualmente se requieren de ideas ingeniosas para su aplicación; sin embargo, la aplicación de un concepto en diferentes situaciones ayuda a su comprensión. De esta manera, se redactaron cuatro actividades en las cuales, se abordan algunas situaciones respecto al cálculo de la integral indefinida. La solución correcta de cada actividad, fortalecerá la comprensión de este concepto.

3. **Reflexión sobre las experiencias.** La reflexión involucra un examen consciente de nuestras acciones y pensamientos. El resolver problemas no rutinarios implica examinar conscientemente la relación entre nuestro conocimiento existente y las condiciones de una situación problema; lo que conlleva a reorganizar todo lo que ya se sabe. De esta manera, la reflexión es un hábito y una habilidad que se debe desarrollar.

El cuestionario que se aplicó en esta investigación, se diseñó de tal manera que cada una de las preguntas y actividades inducieran a cada profesor a una reflexión sobre las ideas centrales del concepto de integral indefinida.

4. **Articulación de lo que el individuo conoce.** El tener la habilidad de articular nuestras ideas es un punto importante de la comprensión; sin embargo, nosotros agregaremos la propuesta de saber comunicar estas ideas. La articulación implica la comunicación de nuestro conocimiento, ya sea de forma escrita, verbal, o a través de algún otro medio como puede ser: gráficas, diagramas, o modelos. Cuando articulamos nuestras ideas, debemos reflexionar sobre ellas con el fin de identificar y describir elementos críticos. Es así como la articulación requiere de la reflexión, y, en efecto, la articulación puede ser pensada como una forma de reflexión pública.

   En cada una de las preguntas y actividades del cuestionario, es necesario reconocer las ideas centrales puestas en juego acerca del concepto de integral indefinida. No obstante, para responder con éxito el cuestionario se requiere que el profesor tenga además del conocimiento matemático, la habilidad para poder comunicarlo; pues en algunos casos por ejemplo, se le pide que explique las razones que tuvo para elegir la respuesta correcta.

5. **Apropiación del conocimiento matemático.** El desarrollo de la participación personal del estudiante en el aprendizaje con comprensión, está ligada a las prácticas dentro del aula, en donde la comunicación y la negociación de significados son facetas importantes. De hecho, un objetivo general de la instrucción es que los estudiantes desarrollen una predisposición a comprender, y que se esfuercen por entender el por qué la comprensión les resulta importante. Esto significa que los estudiantes por si mismos deben reflexionar sobre las actividades en las que participan mientras aprenden o resuelven problemas.

Como se mencionó anteriormente, la característica más importante del instrumento diseñado, es la de enganchar al profesor hacia una reflexión, lo que se espera que lo conduzca a una apropiación del conocimiento matemático. Con esto, se espera que el profesor obtenga la habilidad de comunicar su conocimiento matemático respecto al concepto de integral indefinida en su labor de enseñanza.

Es importante mencionar que el desarrollo de la comprensión involucra de algún modo cada una de estas formas de actividad mental dentro del aprendizaje, aún con el hecho de que los individuos no aprenden de las misma manera, ni mucho menos, todos entienden lo mismo. Además, también es cierto que las relaciones entre estas actividades mentales por parte del individuo no se forman de la misma manera o a través de las mismas actividades, lo que aquí se sugiere es que la comprensión se basa sobre ideas que están siendo organizadas de una manera productiva haciéndolas accesibles para resolver problemas.

Por último, es útil mencionar que el privilegiar un aprendizaje con comprensión en vez de un aprendizaje basado en la memorización y ejecución irreflexiva de procedimientos consistentes en series de reglas, da como resultado la obtención de una lista de consecuencias que son significativas cuando se está aprendiendo matemáticas. A continuación, describiremos algunas características de ellas, las cuales son mencionadas en Hiebert & Carpenter (1992):

1. **La comprensión es generativa.** De forma general, esto significa que los individuos crean sus propias representaciones del conocimiento con base en sus interacciones con el mundo; es decir, ellos agregan nuevos conceptos y procesos al conocimiento existente. Si hablamos del aprendizaje, la comprensión es generada de manera individual por los estudiantes más que provisto por el profesor.

2. **La comprensión promueve el recordar.** Una ventaja al inclinarse a crear conexiones entre el conocimiento nuevo y el existente, es que el conocimiento que es "bien conectado" es mejor recordado.

3. **La comprensión reduce la cantidad de información que debe ser recordada.** Esto es una consecuencia del punto anterior, debido a que si algo es comprendido, entonces está representado de cierta manera que pueda ser conectado a una red de conocimiento, reduciendo el número de información que debe ser recordada.

4. **La comprensión mejora la transferencia.** La transferencia en matemáticas ocurre cuando nuevos problemas deben ser resueltos usando estrategias aprendidas previamente; de esta manera, muchos estudiantes mejoran su rendimiento en la resolución de algunos problemas una vez que han aprendido a resolver problemas relacionados. La situación o contexto influye en la cantidad de transferencia que se realiza.

5. **La comprensión influye en las creencias.** En este trabajo, la acepción de creencia a la cual centramos nuestra atención, es a la de Callejo & Vila (2004): "Las creencias son un tipo de conocimiento subjetivo referido a un contenido sobre el cual versan; tienen un fuerte componente cognitivo, que predomina sobre el afectivo y están ligadas a situaciones. Aunque tienen un alto grado de estabilidad, pueden evolucionar gracias a la confrontación con experiencias que las pueden desestabilizar: las creencias se van construyendo y transformando a lo largo de toda la vida" (p. 51).

   Por lo cual, de la misma manera en que las creencias de los profesores acerca de las matemáticas, influyen en el desarrollo de la comprensión, de manera sutil pero importante, también es plausible que una vez que el profesor se encuentre inmerso dentro del proceso de comprensión, se vean modificadas sus creencias acerca de las matemáticas.

Hasta aquí se han descrito las ideas centrales del marco conceptual: aprender matemáticas con comprensión; las cuales, serán la guía para el diseño del instrumento así como para el análisis de los datos que sean obtenidos.

# Capítulo 3

# Aspectos Metodológicos

En el presente capítulo, se explica la forma en que se diseñó el cuestionario, los propósitos de cada una de las preguntas, y el objetivo general del mismo. También, se detalla la población de estudio y el método empleado para la aplicación del cuestionario; así como el procedimiento usado para analizar las respuestas obtenidas de los participantes.

## 3.1. Descripción de los Participantes de la Investigación

El instrumento se aplicó a un grupo de diez profesores con formaciones matemáticas diversas y diferentes años de experiencia docente. Todos ellos son docentes del nivel medio superior y laboran en distintos planteles educativos, ubicados en diferentes poblaciones del estado de Tlaxcala. En la tabla 3.1 se proporciona información sobre la preparación académica de cada uno de estos profesores.

Un aspecto importante a resaltar es que todos los profesores han impartido la asignatura de Cálculo Integral en sus respectivos planteles de trabajo.

Durante la aplicación del instrumento, se les indicó que incluyeran las justificaciones de cada una de las respuestas, escribiéndolas en los espacios asignados para eso, o si era necesario, en una hoja aparte que entregarían junto con el cuestionario.

Tabla 3.1 Perfil académico de los participantes en la investigación

| Profesor | Formación | Años de experiencia | Institución de egreso |
|---|---|---|---|
| 1 | Lic. Matemáticas Aplicadas | 5 | UAT |
| 2 | Lic. Enseñanza de las Matemáticas | 8 | BUAP |
| 3 | Lic. Matemáticas Aplicadas | 13 | UAT |
| 4 | Lic. Matemáticas Aplicadas | 6 | UAT |
| 5 | Lic. Matemáticas Aplicadas | 2 | UAT |
| 6 | Lic. Matemáticas Aplicadas | 10 | UAT |
| 7 | Lic. Matemáticas Aplicadas | 3 | UAT |
| 8 | Lic. Matemáticas Aplicadas | 12 | UAT |
| 9 | Ing. Sistemas Computacionales | 8 | IPN |
| 10 | Lic. Matemáticas Aplicadas | 7 | UAT |

UAT: Universidad Autónoma de Tlaxcala.
BUAP: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
IPN: Instituto Politécnico Nacional.

## 3.2. Diseño y Justificación del Instrumento

Dado que el principal objetivo de esta investigación, es el de documentar la comprensión de parte de diez profesores de matemáticas de nivel medio superior acerca del concepto de integral indefinida, se diseñó un instrumento, de tal manera que las respuestas de los profesores nos proporcionaran información relevante sobre su compresión acerca de este concepto. Este instrumento se describe a continuación.

El instrumento está compuesto de dos partes. La primera de ellas es un cuestionario escrito que consta de nueve preguntas, para el cual, se le dio a cada profesor un tiempo máximo de hora y media para responderlo en su totalidad. La segunda parte, está conformada por cuatro actividades, las cuales se realizaron en dos sesiones de trabajo de dos horas cada una. En la primera sesión se discutieron las actividades uno y dos; y en la segunda las dos actividades restantes. Es importante mencionar que la aplicación del cuestionario se realizó en tres días; en el primer día se resolvió la parte uno del cuestionario, y en los dos días restantes, fueron aplicadas las sesiones de actividades (una por cada día). Además, cada actividad fue resuelta primero de forma individual, y posteriormente se realizó una discusión grupal que fue audiograbada. En estas discusiones colectivas, los profesores tuvieron la oportunidad de expresar sus soluciones, sus opiniones así como sus dudas. A continuación mostramos el instrumento aplicado y los propósitos de cada pregunta y actividad.

### 3.2.1. Acerca de las preguntas del cuestionario

Para esta parte del cuestionario, todas las preguntas son de carácter conceptual, para cuyas respuestas el profesor deberá: construir relaciones entre cada una de las ideas centrales respecto al concepto de integral indefinida, deberá poder aplicar su conocimiento matemático y articularlo para poder comunicar sus ideas, pero principalmente, deberá reflexionar con relativa profundidad sobre las ideas relacionadas con el concepto de integral indefinida. Se espera que con estas preguntas, se pueda inducir a cada profesor a un proceso de comprensión que le permita entender el concepto de integral indefinida.

1. *Diga lo que significa cada uno de los siguientes conceptos:*

- *Integral de una función*
- *Integral indefinida*
- *Integral definida*

Esta pregunta consta de tres incisos. En ellos se aborda la definición de tres conceptos fundamentales del cálculo integral[1]: la integral de una función (concebida como una primitiva), la integral indefinida (concebida como la familia de primitivas), y la integral definida (concebida como límite de sucesiones de sumas de Riemann). El propósito de esta pregunta es averiguar cómo conciben los profesores estos tres conceptos, así como evidenciar cómo los profesores comunican sus ideas respecto a cada uno de estos conceptos; lo que nos permitirá documentar su comprensión acerca de la definición del concepto de integral indefinida.

2. *¿Qué nombre recibe una función $F$ que cumple $F'(x) = f(x)$ para toda $x$ en un intervalo $I$?*

Esta pregunta se refiere a la definición de primitiva. Por supuesto, el propósito de esta pregunta es averiguar si el profesor conoce esta definición.

[1]Las definiciones aquí mostradas, aparecen, por ejemplo, en el libro de Granville (1982) que es un libro ampliamente conocido en ese nivel.

Una observación importante a resaltar es que, en algunos libros elementales de Cálculo, los autores a una primitiva de $f$ también le llaman antiderivada de $f$. En estos casos primitiva y antiderivada son sinónimos.

3. *¿Qué significado tiene la igualdad* $\int f(x)dx = F(x)$*?*

Aun cuando el símbolo $\int f(x)dx$ tiene el significado de familia de primitivas de $f(x)$, también algunas veces se conviene que represente una primitiva. El conocer en que situaciones conviene cada significado, indica una comprensión acerca de la familia de primitivas de una función. El propósito de la pregunta es averiguar si el profesor hace alguna observación al respecto o si la traduce simplemente como la condición $F'(x) = f(x)$.

4. *¿Qué papel juega la constante de integración en la integral indefinida?*

La constante de integración es un parámetro mediante el cual se genera la familia de todas las primitivas de una función $f$ en un intervalo. El propósito de la pregunta es averiguar si el profesor la concibe de esta manera. Una posible respuesta, no correcta por supuesto, es que simplemente al adicionar una constante a una primitiva se obtiene otra primitiva. Que con la adición de una constante (como parámetro) a una primitiva en un intervalo se genera la familia de primitivas, es un hecho profundo que va más allá del hecho trivial de que la adición de una constante a una primitiva produce otra primitiva. No se espera que el profesor exponga un argumento para justificar que se genera la familia de primitivas, lo cual se basa en el hecho de que dos primitivas cualesquiera necesariamente difieren en una constante, lo cual a su vez se sustenta en el teorema del valor medio. El argumento anterior nos sugeriría una profunda comprensión por parte del profesor, acerca de la justificación de la presencia de la constante de integración en el cálculo de la familia de primitivas.

5. *Suponga que tres alumnos obtienen por diferentes métodos de integración los siguientes resultados*

$$\int \operatorname{sen} x \cos x dx = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C_1$$
$$\int \operatorname{sen} x \cos x dx = -\frac{\cos^2 x}{2} + C_2$$
$$\int \operatorname{sen} x \cos x dx = -\frac{\cos 2x}{4} + C_3$$

*¿Los acepta como resultados correctos? Justifique su respuesta.*

El propósito de esta pregunta es averiguar qué argumentos emplea el profesor para aceptar o refutar cada uno de los tres resultados obtenidos por los estudiantes. En primera instancia nos preguntamos si tiene claro el profesor que expresiones esencialmente diferentes en forma no es una razón para que representen la misma solución. En estos casos, es relevante el papel que juega la constante de integración. Sin embargo, dos respuestas esperadas pueden hacer alusión a lo siguiente.

1. El profesor puede aceptarlas como respuestas correctas argumentando que los resultados diferentes se obtienen al aplicar el método de sustitución (cambio de variable) mediante sustituciones diferentes. O bien transformando previamente el integrando. El profesor puede hacer explícito el cambio de variable correspondiente a cada caso o realizar transformaciones del integrando. Por ejemplo, la integral puede calcularse haciendo el cambio de variable $u = \operatorname{sen} x$. Otra posibilidad es haciendo $u = \cos x$. Una posible transformación del integrando es mediante la identidad trigonométrica $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$.

2. El profesor puede aceptarlos como resultados correctos argumentando que al derivar

estos resultados se obtiene la función integrando. Esto es:

$$\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2}+C_1\right)'=\left(-\frac{\cos^2 x}{2}+C_2\right)'=\left(-\frac{\cos 2x}{4}+C_3\right)'=\operatorname{sen} x\cos x.$$

para todo $x$ real.

Como se dijo antes, en términos estrictos una respuesta correcta debe hacer alusión al hecho de que la constante de integración genera la familia de primitivas y que todas las expresiones generan la misma familia; el relacionar estos dos hechos, es parte de una actividad mental que permite comprender el concepto de integral indefinida. La siguiente pregunta es en este sentido. La pregunta es pertinente para aquellos profesores que no hayan hecho mención de la constante de integración.

6. *Con base en la pregunta anterior, responda: ¿Con cuál de los tres resultados obtenidos por los alumnos se genera la familia de primitivas de la función $f(x)=\operatorname{sen} x\cos x$? Argumente su respuesta.*

No dudamos que el profesor responda que los tres resultados son correctos ya que cada uno de ellos representa a la familia de primitivas del integrando. Pero será interesante averiguar si ofrece algún argumento para este hecho o simplemente acepta el resultado.

La siguiente pregunta es un caso en los que una función elemental no tiene una primitiva elemental.

7. *¿Qué puede decir acerca de la integral $\int e^{-x^2}dx$?*

En ocasiones se presentan integrales de funciones elementales las cuales no tienen primitivas elementales. Usando otras palabras, se trata de integrales que no se pueden calcular en términos de funciones elementales. La funciones elementales son, en palabras simples, las funciones que se construyen mediante la suma, resta, multiplicación, división, extracción de raíces y composición de las funciones polinomiales, racionales, exponenciales, logarítmicas, las seis trigonométricas y las seis funciones arco.

El concepto de función elemental fue estudiado en 1838 por el matemático Joseph Liouville (1809 - 1882). En su trabajo, en particular demostró que la integral $\int e^{-x^2}dx$ no es una función elemental.

Otras integrales que no son elementales son $\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx$ y $\int \frac{e^x}{x}dx$. Muchas integrales no elementales son variantes de estas o se reducen a estas. En ocasiones, los profesores se enfrentan a integrales de este tipo sin saber que les va a ser imposible "calcularlas". Lograr que el profesor tenga conocimiento de estas integrales le permitirá extender y en consecuencia, aplicar este conocimiento matemático; lo cual es una de las características del aprendizaje con comprensión. El propósito de la pregunta es averiguar si el profesor está enterado de la problemática para la integral particular $\int e^{-x^2}dx$ o qué sabe respecto a ella.

Es importante aclarar que no obstante que la integral $\int e^{-x^2}dx$ no es una función elemental, la función $e^{-x^2}$ tiene primitiva, de hecho, por la primera parte del teorema fundamental del cálculo se tiene que una primitiva de esta función está dada por $G(x) = \int_c^x e^{-z^2}dz$.

8. *¿Toda antiderivada es continua? Justifique su respuesta.*

Un resultado bien conocido por los profesores es que toda función derivable es continua.

Este resultado lo evocan con facilidad o naturalidad, por lo que debería resultar obvia la afirmación de que toda primitiva es continua, pues por definición, una primitiva es derivable. Con esta pregunta se pretende averiguar si planteada la pregunta en términos de primitivas rescatan el resultado sobre la continuidad de las funciones derivables. La situación se torna más interesante cuando por ejemplo tenemos funciones definidas en intervalos ajenos. Por ejemplo, es común concebir la función $f(x) = -1$ para $x < 0$ y $f(x) = 1$ para $x > 0$ como discontinua. Cuando se piensa en la derivabilidad de esta función no cabe duda de que es continua pero cuando se mira su gráfica suele entenderse (equivocadamente) como discontinua. El comprender la definición de derivada implica entender el carácter puntual de este concepto, y a su vez, el comprender la definición de primitiva conduce a responder de forma afirmativa esta pregunta.

9. *¿Cuál es la importancia del cálculo de primitivas dentro de todo el contexto del Cálculo?*

Algunos libros de texto de cálculo[2], inician el estudio del cálculo integral definiendo lo que es una primitiva, después abordan la definición de integral indefinida así como algunos métodos para poder calcularlas, a continuación exponen el concepto de integral definida y la fórmula del teorema fundamental del cálculo $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$ para su determinación; y finalmente exponen algunas de las aplicaciones de la integral definida. Con este enfoque o secuencia de conceptos en la enseñanza del cálculo integral, cuando el estudiante estudia los métodos de integración, puede no comprender por qué es importante calcular integrales indefinidas en el contexto del cálculo y por lo tanto para qué requiere calcularlas (aparte de que puede ser un quehacer intelectual interesante el hallar una función cuando se conoce su derivada). Se esperaría que una vez que se estudie el concepto de integral definida y el teorema fundamental del cálculo, el estudiante comprenderá la importancia que tiene el

[2]En el capítulo 1 fueron mencionados algunos ejemplos.

cálculo de primitivas. Nosotros nos preguntamos si el profesor tiene claro el rol que juegan las primitivas y por lo tanto, la importancia que tiene el tener métodos para su determinación de modo que pueda enviar ese mensaje a los alumnos.

### 3.2.2. Acerca de las actividades del cuestionario

La segunda parte del cuestionario consta de cuatro actividades, las cuales, fueron desarrolladas mediante sesiones de trabajo con el propósito de que durante la participación colectiva, los profesores expusiesen sus conocimientos y creencias acerca de diferentes situaciones no rutinarias en el cálculo de integrales indefinidas. Hacia el final de las sesiones, se precisaron los conceptos y se dio solución a las situaciones conflictivas. Uno de los propósitos de las sesiones de trabajo fue inducir a los profesores, en su caso, a un proceso de comprensión mediante la profundización y ampliación de sus conocimientos sobre la integral indefinida. A continuación presentamos el propósito de cada una de las cuatro actividades.

**Actividad 1**. *Calcule la integral:* $\int |x|dx$.

Esta actividad tiene como propósito averiguar qué procedimiento emplean los profesores para calcular la integral del valor absoluto de $x$. Aunque a primera vista pareciera que el integrando es una función "sencilla" a la que podemos calcular su integral usando directamente algún método de integración, en realidad, su cálculo no es tan directo como aparenta ser.

Para calcular esta integral, se requiere construir relaciones respecto a las situaciones del cálculo de integrales indefinidas, esto es, se debe manipular el integrando antes de emplear el método de integración adecuado. En primer lugar debemos usar la definición de valor absoluto en el integrando, obteniendo así, una función definida por piezas. Esta función se ha de integrar con base en la integral inmediata $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ con $n \neq -1$, dando como resultado una función primitiva definida por piezas.

Lo anterior queda expresado de la siguiente manera

$$\int |x|dx = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x^2}{2}, & \text{para } x \geqslant 0; \\ -\frac{x^2}{2}, & \text{para } x < 0. \end{array} \right\} + C$$

El resultado puede escribirse como: $\int |x|dx = \frac{x|x|}{2} + C$.

La apropiación del conocimiento matemático que esperamos logre obtener el profesor después de haber concluido esta actividad, es que el cálculo de integrales indefinidas no necesariamente consiste en aplicar de manera rutinaria de los métodos de integración estudiados, aun en el caso de funciones simples. El proceso del cálculo de integrales indefinidas puede requerir de un proceso de reflexión, más que de una aplicación directa de los métodos de integración.

**Actividad 2**. *Analice el siguiente cálculo de la integral* $\int \frac{\tan x}{\log(\cos x)} dx$.

*Escribiendo*

$$\int \frac{\tan x}{\log(\cos x)} dx = -\int \frac{-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\log(\cos x)} dx. \tag{1}$$

*En vista de que la expresión* $-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ *es la derivada de la función* $\log(\cos x)$, *haremos la sustitución* $u = \log(\cos x)$, *de modo que* $du = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx$. *De esta manera, el integrando de la segunda integral en (1) se puede expresar en términos de u como sigue:*

$$-\int \frac{-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\log(\cos x)} = -\int \frac{du}{u} = -\log(u) + C = -\log(\log(\cos x)) + C.$$

*Obteniendo finalmente que* $\int \frac{\tan x}{\log(\cos x)} dx = -\log(\log(\cos x)) + C$.

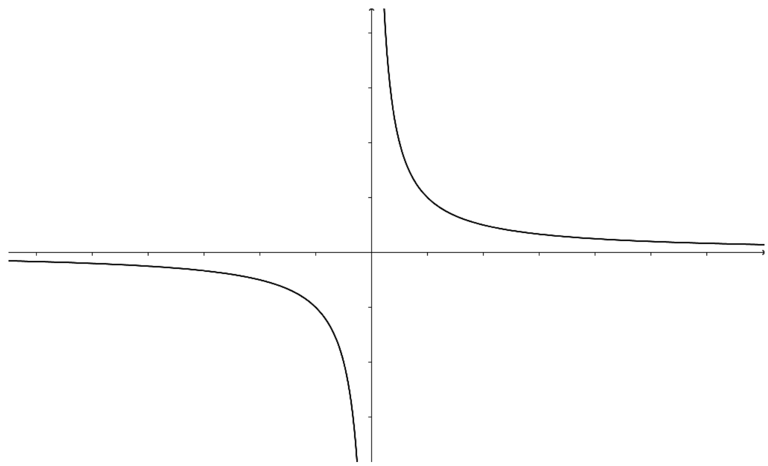
*¿Es correcto este resultado? Justifique su respuesta.*

Un error en el que incurren los estudiantes e incluso, se presenta en algunos libros de texto de cálculo y en resultados mostrados por algunos paquetes de matemáticas para PC, es relativo a la integral $\int \frac{dx}{x}$, cuya familia de primitivas está dada por la expresión $\log|x| + C$. El error consiste en que la expresan sin valor absoluto $\int \frac{dx}{x} = \log(x) + C$. Esta expresión no representa en su totalidad la familia de primitivas. La omisión del valor absoluto puede conllevar a cálculos erróneos o, a aparentes paradojas en el cálculo de integrales que básicamente se obtienen basadas en la integral de $\frac{1}{x}$; como es el caso de la integral planteada en esta actividad.

El propósito de esta actividad es averiguar si los profesores comprenden que la función $\log(u)$ no es una primitiva de la integral $\int \frac{du}{u}$, lo que conduce a la aparente paradoja de que $-\log(\log(\cos x)) + C$ representa la familia de primitivas de la función $\frac{\tan x}{\log(\cos x)}$. Por supuesto, los profesores deben comprender primero que la función $F(x) = -\log(\log(\cos x))$ no es una primitiva de $f(x) = \frac{\tan x}{\log(\cos x)}$, debido a que $F$ tiene como dominio el conjunto vacío pues la función $\cos x$ toma valores en el intervalo abierto (-1,1) y en consecuencia, al aplicar el logaritmo a $\cos x > 0$ se obtienen valores negativos ($\log(\cos x) < 0$).

También pretendemos averiguar si el profesor es capaz de modificar el procedimiento para obtener la solución correcta. Esto se logra escribiendo $\int \frac{du}{u} = -\log|u|$ obteniendo así, la función $F(x) = -\log|\log(\cos x)|$ la cual es diferenciable en el conjunto $\bigcup\limits_{n \in Z} (\frac{4n-1}{2}\pi, 2n\pi) \cup (2n\pi, \frac{4n+1}{2}\pi)$.

**Actividad 3**. *Para responder los siguientes incisos, considere la función* $f(x) = \frac{1}{x}$ *cuya gráfica se muestra en la siguiente figura:*

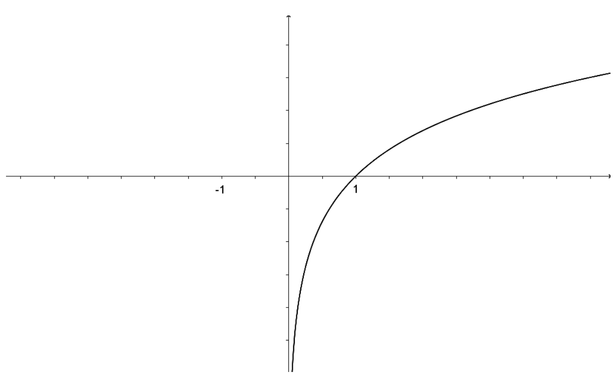


Gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$

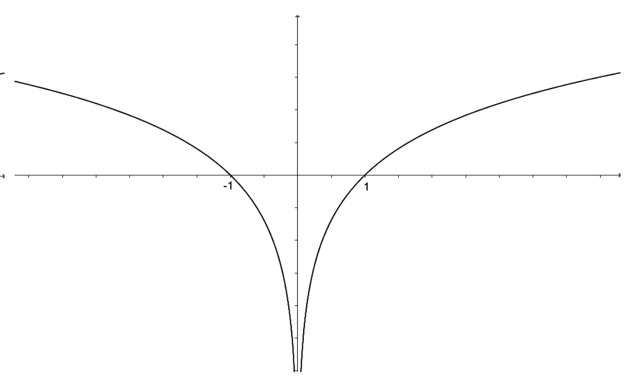
1. *Calcule la integral:* $\int \frac{1}{x}dx$.

2. *De la consulta de diversos libros de cálculo elemental y mediante el uso de algunos softwares para el cálculo de integrales, se han obtenido los siguientes resultados:*

**(a)** $\int \frac{1}{x}dx = \log(x)$

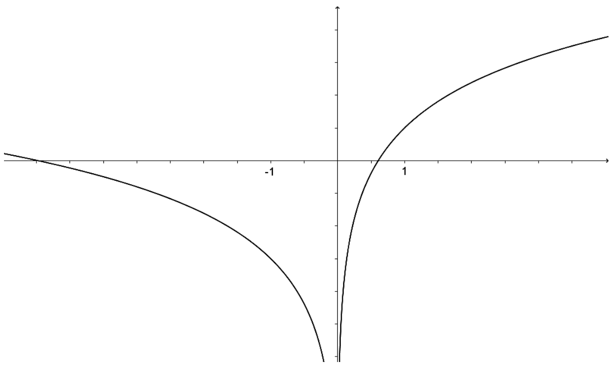


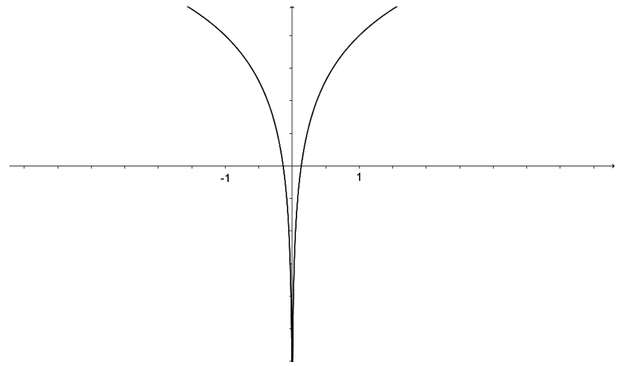

**(b)** $\int \frac{1}{x}dx = \log|x|$



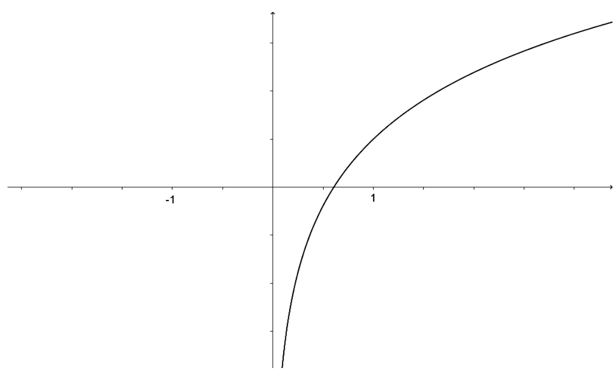
**(c)** $\int \frac{1}{x}dx = \begin{cases} \log|x| + C_1, & \text{para } \; x < 0; \\ \log|x| + C_2, & \text{para } \; x > 0. \end{cases}$

**(d)** $\int \frac{1}{x}dx = \log|x| + C$




**(e)** $\int \frac{1}{x}dx = \log(x) + C$




*¿Son correctos estos resultados? Argumente su respuesta para cada inciso.*

La constante de integración juega un papel importante en el cálculo de la integral indefinida, debido a que su adición a una función primitiva en un intervalo nos genera toda la familia de primitivas en ese intervalo. Es importante notar que este resultado es válido para las primitivas en un intervalo. Cuando el dominio de las primitivas no es un intervalo, la familia de primitivas no se genera con la adición simple de una constante de integración; para comprender esta situación, basta remitirse a lo que significa representar la familia de primitivas. Cuando el dominio consiste de más de un intervalo, todos ellos ajenos, en términos estrictos se requerirán tantas constantes de integración como intervalos ajenos constituyan el dominio. Lo que se pretende con esta actividad es averiguar si el profesor es sensible a esta situación; para lo cual es necesario construir relaciones entre el cálculo de la familia de primitivas con el significado de la constante de integración, todo esto contribuirá con el proceso de comprensión respecto al concepto de integral indefinida.

Consideremos el caso particular de la función $\frac{1}{x}$, la cual está definida y es continua en la unión de los intervalos ajenos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$. Una fórmula muy generalizada para representar la familia de primitivas es $\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$ para todo $x \neq 0$. Sin embargo, si adicionamos constantes diferentes para los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$ respectivamente, obtenemos otras primitivas, que no son de la forma $\log|x| + C$, de hecho la familia de primitivas en este caso está dado por:

$$\int \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \log|x| + C_1, & \text{para } \ x < 0; \\ \log|x| + C_2, & \text{para } \ x > 0. \end{cases}$$

De las respuestas esperadas tenemos lo siguiente:

**Para el inciso (a).** El resultado es incorrecto debido a que $F(x) = \log(x)$ es diferenciable solo en el intervalo $(0, \infty)$, faltando el intervalo $(-\infty, 0)$ donde también es continua la función $f(x) = \frac{1}{x}$, además de que $F$ es sólo una primitiva, esto es, $F$ no representa a toda la familia de primitivas de la función $f$.

**Para el inciso (b).** De acuerdo con la solución correcta mostrada en el inciso (c), si hacemos $C_1 = C_2 = 0$, obtenemos $F(x) = \log|x|$, es decir, $F$ representa una primitiva de la función $\frac{1}{x}$ pero no a toda su familia de primitivas.

**Para el inciso (d).** Para este caso, la solución $F(x) = \log|x| + C$ representa una parte de toda la familia de primitivas de la función $f(x) = \frac{1}{x}$. Esto se debe a que por cada intervalo de los dos ajenos donde $f$ es continua, su familia de primitivas se genera al sumar una constante a la primitiva $\log|x|$. Sin embargo estas constantes no necesariamente deben ser iguales en ambos intervalos, y es por ello que el conjunto de primitivas no es la totalidad de primitivas.

**Para el inciso (e).** El resultado es incorrecto debido a que $F(x) = \log(x) + C$ es diferenciable sólo para el intervalo $(0, \infty)$, faltando el intervalo $(-\infty, 0)$ donde también es continua la función $f(x) = \frac{1}{x}$ y por lo tanto $F$ no representa a toda la familia de primitivas de $f$.

En conclusión, con esta actividad pretendemos averiguar si el profesor comprende el papel que juega la constante de integración como generadora de toda la familia de primitivas, para todo el dominio donde la función $\frac{1}{x}$ está definida.

**Actividad 4**. *Suponga que dos alumnos obtienen por diferentes métodos de integración los siguientes resultados*

$$\int \frac{2}{5+3\cos x}dx = \arctan\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\right),$$
$$\int \frac{2}{5+3\cos x}dx = \frac{x}{2} - \arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + 3}\right).$$

*Denotando como* $F(x) = \arctan\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\right)$ *y* $G(x) = \frac{x}{2} - \arctan\left(\frac{sen x}{\cos x+3}\right)$, *se le preguntó a cada estudiante si* $F(x)$ *y* $G(x)$ *representaban una primitiva específica de* $f(x) = \frac{2}{5+3\cos x}$, *con lo cual cada estudiante procedió a calcular* $F'(x)$ *y* $G'(x)$ *respectivamente de la siguiente manera:*

*Para $F(x)$ se obtuvo:*

$$F'(x) = \arctan'\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\right) = \frac{(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2})'}{1+(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2})^2} = \frac{\frac{1}{4}\sec^2\frac{x}{2}}{1+\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{4+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{4+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1+\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{4+\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{4\cos^2\frac{x}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{1}{3\cos^2\frac{x}{2}+1} = \frac{1}{\frac{3+3\cos x}{2}+1} = \frac{2}{5+3\cos x}.$$

*Por otra parte, para $G(x)$ se calculó:*

$$G'(x) = \frac{1}{2} - \arctan'\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x+3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x+3})'}{1+(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x+3})^2} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{(\cos x+3)\operatorname{sen}' x - \operatorname{sen} x(\cos x+3)'}{(\cos x+3)^2}}{\frac{(\cos x+3)^2+\operatorname{sen}^2 x}{(\cos x+3)^2}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\frac{\cos^2 x+3\cos x+\operatorname{sen}^2 x}{(\cos x+3)^2}}{\frac{\cos^2 x+6\cos x+9+\operatorname{sen}^2 x}{(\cos x+3)^2}} = \frac{1}{2} - \frac{3\cos x+1}{6\cos x+10} = \frac{6\cos x+10-6\cos x-2}{12\cos x+20} = \frac{2}{5+3\cos x}.$$

*Dado que $F'(x) = G'(x) = f(x)$, los dos estudiantes argumentaron que tanto $F(x)$ como $G(x)$ representaban una primitiva de $f(x) = \frac{2}{5+3\cos x}$.*

1. *¿Es correcta la respuesta dada por ambos estudiantes?*

2. *Usando el Teorema Fundamental del Cálculo y las funciones $F(x)$ y $G(x)$, calcule la integral definida $\int_0^{2\pi} \frac{2}{5+3\cos x}dx$.*

3. *Si observa alguna discrepancia en los resultados, ¿Cómo explica esa situación?*

El propósito de esta actividad se pretende lograr mediante las tres preguntas planteadas, y es averiguar si el profesor al tratar de aplicar el teorema fundamental del cálculo, es consciente de que la primitiva que vaya a utilizar debe serlo en todo el intervalo de integración.

La pregunta uno aborda nuevamente la comprensión acerca de la definición de primitiva de una función. En este caso, la idea que pretendemos hacer llegar a los profesores se presenta al tratar de verificar que una función representa una primitiva, en tal situación, diremos que no es suficiente el comprobar que la derivada de la función, nos de como resultado el integrando; sino que también es importante verificar que la función candidata a ser primitiva sea diferenciable en todo punto del dominio del integrando. De esta manera, aunque los cálculos de $F'(x)$ y $G'(x)$ son correctos, sólo la función $G(x)$ es diferenciable en el mismo intervalo donde está definida la función $f(x) = \frac{2}{5+3\cos x}$, y por lo tanto $G(x)$ es una primitiva de $f$.

Para responder la pregunta dos, sólo es necesario recordar la segunda parte del teorema fundamental del cálculo, es decir, el profesor debe recordar la expresión: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ donde $F$ es una primitiva de $f$. Haciendo uso de este teorema, obtenemos los siguientes resultados:

Para la función $F(x) = \arctan\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\right)$ tenemos

$$\int_0^{2\pi} \frac{2}{5+3\cos x}dx = F(2\pi) - F(0) = 0,$$

luego para $G(x) = \frac{x}{2} - \arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + 3}\right)$ obtenemos

$$\int_0^{2\pi} \frac{2}{5+3\cos x}dx = G(2\pi) - G(0) = \pi.$$

Es en esta parte, donde esperamos que los profesores hagan una reflexión acerca de la discrepancia de ambos resultados obtenidos. Esta reflexión les será de gran utilidad para responder la última pregunta de la actividad, en la cual pretendemos obtener evidencia sobre sus argumentos empleados al determinar si alguno de los dos resultados es correcto y el por qué.

Debido a que la función $f$ es siempre positiva, podemos deducir que la integral $\int_0^{2\pi} \frac{2}{5+3\cos x}dx$ debe ser mayor que cero; en efecto, el resultado correcto es $\pi$, debido a que $G(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$, en cambio $F(x)$ no lo es, debido a que no es diferenciable en el punto $x = 0$, y en consecuencia, al emplear el teorema fundamental del cálculo se obtiene un resultado erróneo. Es importante mencionar que con esta actividad, se da evidencia respecto a la relación del concepto de integral indefinida con el concepto de integral definida; con lo cual, se espera que cada profesor comprenda la importancia del cálculo de primitivas en el uso del teorema fundamental del cálculo.

## 3.3. Procedimiento de la Investigación

Esta investigación se llevó a cabo en las siguientes tres etapas:

- En la primera etapa se diseñó un cuestionario con base en el marco conceptual: aprender matemáticas con comprensión (descrito en el capítulo anterior); el cual, nos permitió recabar información presente en los profesores, respecto a las situaciones del cálculo de integrales indefinidas discutidas en el capítulo 1.

- La segunda etapa fue la aplicación del cuestionario, la cual se realizó en tres sesiones, una por día; es decir, se citó en tres ocasiones a los diez profesores encuestados, los cuales fueron reunidos dentro de un salón de clases. En la primera sesión (correspondiente al primer día), se aplicó de forma individual la primera parte del cuestionario que consiste de nueve preguntas de carácter conceptual, dando un tiempo máximo para responderlo en su totalidad de hora y media. Para la segunda parte del cuestionario que consta de cuatro actividades, se realizaron dos sesiones de trabajo de dos horas cada una (correspondiente a los dos días restantes). En la primera sesión se discutieron las actividades uno y dos; y en la segunda las dos actividades restantes. Es importante mencionar que cada actividad fue resuelta primero de forma individual; posteriormente se realizó una discusión grupal que fue audiograbada en donde se trataron temas fundamentales implícitos en cada actividad. A continuación daremos algunas preguntas que fueron realizadas, durante la discusión de cada una de ellas.

  **Para la actividad 1.** Una vez que habían respondido la actividad, se hizo énfasis en que usualmente al calcular una integral indefinida, se debe trabajar primero con el integrando, de tal forma que la expresión obtenida sea reconocible; y en consecuencia, poder usar alguna integral inmediata y/o método de integración adecuado.

Después, para aquellos profesores que no calcularon la integral de forma correcta, se les hizo notar lo siguiente:

1. La importancia de emplear la definición valor absoluto para resolver la integral indefinida, y posteriormente, usar esta definición para obtener el resultado final $F(x) = \frac{x|x|}{2} + C$.
2. Se les preguntó acerca de la constante de integración mediante la pregunta: ¿Debe ser la misma constante de integración $C$ para $x \geqslant 0$ y $x < 0$? esto con el fin de hacer notar que, para que se cumpla la definición de primitiva, esta constante debe ser la misma.

**Para la actividad 2.** Las preguntas que se les planteó a los profesores una vez que habían terminado de resolver la actividad fueron:

1. ¿Cuál es tu justificación para decir que la respuesta es correcta o incorrecta? Esta pregunta nos permitió obtener una mayor información sobre las ideas que ellos plasmaron en papel, y que fueron útiles en el proceso de análisis.
2. Para aquellos profesores que no respondieron de forma correcta, se les preguntó: ¿Es $F(x) = -\log(\log(\cos x))$ una primitiva de $f(x)$? El propósito de esta pregunta, fue la de evidenciar que la función $F$ no toma valores reales; y mediante la definición de primitiva, hacer notar que $F$ no es derivable en el dominio de definición de $f$.
3. Por último, una vez que se habían percatado de lo anterior, se les mencionó que el problema surge a partir de la integral inmediata $\int \frac{du}{u} = \log |u|$.

**Para la actividad 3.** Recordemos que esta actividad estuvo conformada por dos preguntas; en la primera de ellas se dejó al profesor que respondiera con base en sus conocimientos así como en la información proporcionada en la actividad anterior. Para la discusión respecto a las respuestas de la segunda pregunta, se siguió el siguiente itinerario:

1. Primero se les formuló la siguiente pregunta: ¿Cuales resultados son incorrectos? Esto con el fin de identificar los resultados que fueron considerados como erróneos para abordarlos uno a uno, haciendo énfasis en las condiciones que no cumplen respecto a la definición de primitiva.
2. Después se abordaron los resultados que fueron considerados correctos de manera individual, descartando aquellos que eran incorrectos.
3. Para el resultado correcto, correspondiente al inciso (c), se abordo el tema de la constante de integración mediante la pregunta: ¿Por qué $C_1$ y $C_2$ son distintas? Para responder esta pregunta, se debe de analizar el dominio de la función $\frac{1}{x}$ y después aplicar la definición de primitiva de una función para concluir que la función definida por piezas representa en su totalidad a la familia de primitivas de la función integrando.

**Para la actividad 4.** Esta actividad está formada de tres preguntas; en las dos primeras no hubo necesidad de plantear pregunta alguna, todos los profesores encuestados respondieron de manera exitosa.

La discusión se centro en la pregunta tres, en la cual se abordaron las siguientes preguntas:

1. Una vez que habían respondido la pregunta dos, se les preguntó: ¿A que se debe la obtención de dos resultados diferentes?, ¿Cuál es el resultado correcto? Con estas dos preguntas se condujo a los profesores a reflexionar sobre el resultado correcto mediante el análisis de los dominios de las funciones $F(x)$ y $G(x)$ así como el uso de la definición de primitiva.

- En la tercera etapa, se realizó el análisis cualitativo de las respuestas obtenidas a cada pregunta y a cada actividad del cuestionario aplicado. Este análisis se realizó tomando en consideración las ideas centrales puestas en juego acerca del concepto de integral indefinida; mismas que fueron explicadas para cada pregunta y cada actividad en la sección anterior. Recordemos que una completa comprensión por parte del profesor respecto al concepto de integral indefinida, está dado si tiene conocimiento acerca de estas ideas centrales. Además, de las discusiones realizadas, se buscó obtener información acerca de cómo el profesor articula su conocimiento matemático y cómo lo comunica; actividades que son importantes en la comprensión del concepto de integral indefinida.

# Capítulo 4

# Análisis de Datos

En este apartado se detalla el análisis realizado a cada de una de las respuestas dadas por los profesores, a cada una de las preguntas del cuestionario descrito en el capítulo anterior. Recordemos que tanto la primera como la segunda parte del cuestionario consistieron de preguntas para cuyas respuestas el profesor requiere un conocimiento relativamente profundo sobre el concepto de integral indefinida. Debido a lo anterior, el análisis aquí mostrado es de carácter cualitativo.

Por otra parte, es útil mencionar que de aquí en adelante nos referiremos a cada profesor con base en la tabla 3.1, en la cual, se proporciona información sobre la preparación académica de cada uno de los profesores que respondieron el cuestionario.

A continuación se muestra el análisis correspondiente a la primera parte del cuestionario.

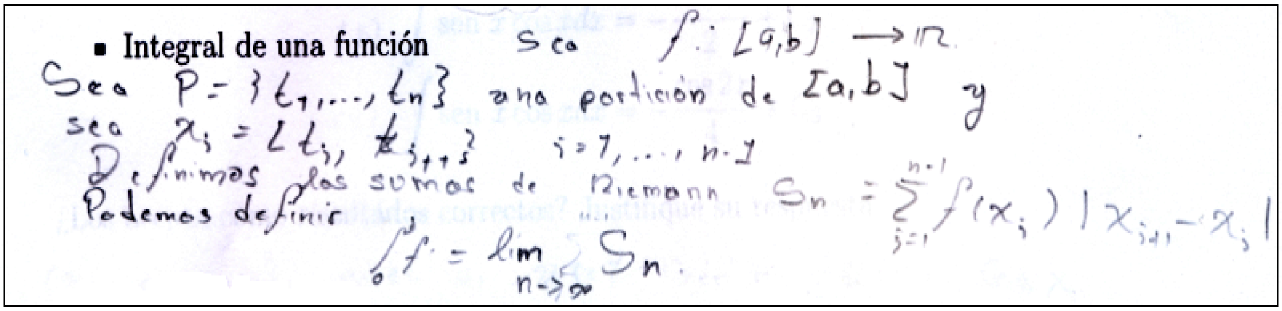
## 4.1. Análisis de las Respuestas. Primera parte del cuestionario.

**Pregunta uno.** En la primera pregunta se pide el significado de los siguientes conceptos: Integral de una función, Integral indefinida e Integral definida. Para las respuestas correspondientes a la definición de integral de una función, solo un profesor no respondió; otro profesor describió el concepto de integral de una función como el proceso de calcular su primitiva, en su respuesta menciona que la integral de una función es: *la operación inversa a la derivada*. Por otra parte, tres profesores respondieron mediante la simbología, es decir, escribieron $\int f(x)dx = F(x) + C$ como significado del concepto de integral de una función; en cambio cuatro profesores más, respondieron haciendo alusión a la interpretación de la integral de una función como área bajo su curva; como se puede observar en la respuesta:

> - Integral de una función
>
> Es aquella que nos sirve para conocer el area de una figura la cual se saca por medio de areas pequeñas y despues se van integrando una por una

Profesor 3. Integral de una función.

En la respuesta anterior, se percibe que el profesor interpreta de forma implícita el cálculo de áreas como suma de áreas, debido a que menciona que el área total de una figura se obtiene mediante la suma de areas pequeñas que conforman dicha figura. Solo un profesor considera la integral de una función como límite de sumas de Riemann:



- **Integral de una función** Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$.

Sea $P=\{t_1,\dots,t_n\}$ una portición de $[a,b]$ y

sea $x_i=[t_i, t_{i+1}]$ $i=1,\dots,n-1$

Definimos las sumas de Riemann $S_n=\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\,|x_{i+1}-x_i|$

Podemos definir

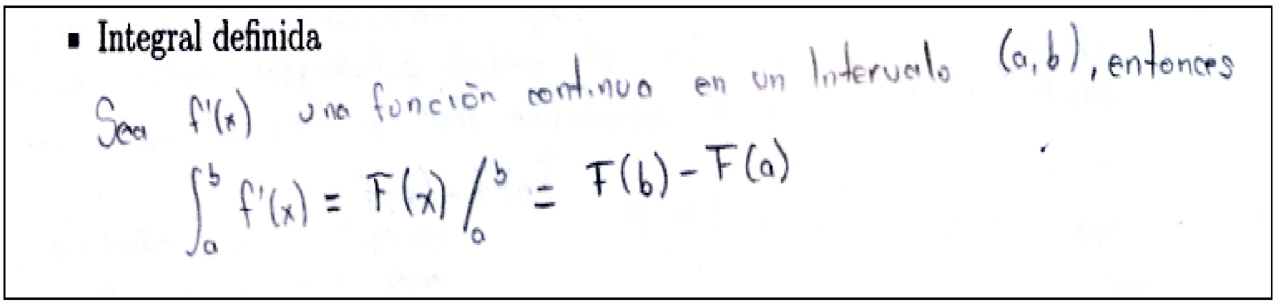
$\int f = \lim_{n\to\infty} S_n$.

Profesor 8. Integral de una función.

En su mayoría, los profesores conciben el término integral de una función como la integral definida y no como primitiva o antiderivada.

Respecto al concepto de Integral indefinida, cinco profesores la conciben como una familia de primitivas; sus respuestas, hacen referencia a la adición de la constante de integración. Por ejemplo, el profesor 1 respondió: $\int f(x)dx = F(x) + C$, *donde $C$ es una constante indefinida*; en este caso el profesor no establece ninguna definición o descripción del concepto. Otras respuestas dadas por dos profesores solo hacen mención a una primitiva, es decir, para ellos la integral indefinida es una primitiva. Otros dos profesores proporcionan respuestas ambiguas, no aportan suficientes elementos que muestren que tienen una idea clara sobre lo que significa la integral indefinida; por ejemplo, un profesor menciona: *Es la integral de una función de manera general.* Otro profesor escribió: *Es aquella que no se encuentra dentro de un intervalo*, de donde suponemos que este profesor se refiere a la ausencia de los límites de integración que caracterizan a una integral definida, los cuales, no están presentes en una integral indefinida. Por último, uno de los profesores no dio respuesta alguna, solo menciona que la integral de una función es igual a la integral indefinida, sin decir lo que significa alguno de los dos conceptos.

En relación al concepto de integral definida, solo un profesor no dio respuesta alguna; otro confundió el concepto de integral definida con el de integral indefinida, la describió como la primitiva. Dos profesores más dieron como respuesta la interpretación de la integral definida como el área bajo una curva; otro profesor describe la integral definida como la fórmula dada por el teorema fundamental del cálculo:



- **Integral definida**

Sea f'(x) una función continua en un Intervalo (a, b), entonces

$$\int_a^b f'(x) = F(x) \Big/_a^b = F(b) - F(a)$$

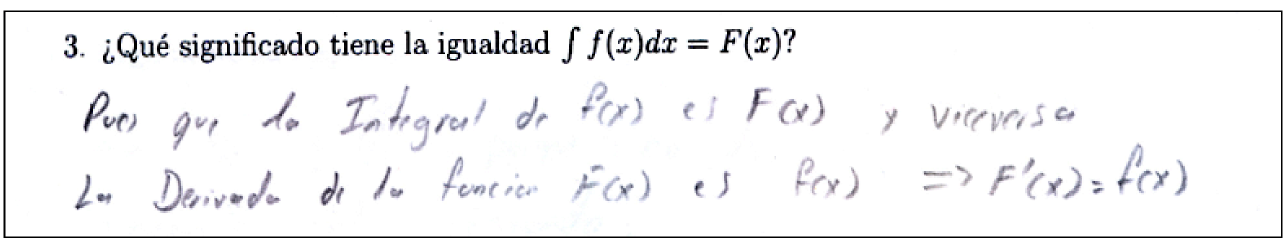
Profesor 4. Integral definida.

Puede observarse que el profesor tiene algunas confusiones con la escritura misma de la fórmula del teorema fundamental del cálculo, pues en el integrando escribe $f'(x)$ con $f$ minúscula y no con $F$ mayúscula; sin embargo, lo importante a resaltar de esta respuesta es que este profesor identifica la definición de integral definida con el teorema fundamental del cálculo, no acude a la definición vía sumas de Riemann. Las respuestas restantes correspondientes a cinco profesores, solo hacen mención al cálculo de la integral de una función definida en un intervalo $[a, b]$, mediante la expresión $\int_a^b f(x)dx$ sin describir el concepto.

Es importante mencionar que en algunos casos las respuestas de los profesores no necesariamente pueden considerarse incorrectas, pues las acepciones que los autores de libros de cálculo adoptan de los conceptos de integral e integral indefinida pueden diferir de autor a autor. En varios casos las respuestas emitidas por los profesores solamente reflejan las acepciones adoptadas por los autores de los textos que leen. Por ejemplo, recordemos que en la sección 1.5 se mencionaron algunos libros elementales de cálculo, en los cuales la definición de integral de una función estaba enfocada hacia el concepto de integral indefinida; en cambio otros, se enfocaban hacia al concepto de integral definida. Según lo anterior, podemos decir que en el nivel medio superior, no hay un consenso sobre la definición de los tres conceptos; sin embargo, en otros casos las respuestas de los profesores ciertamente reflejan un pobre conocimiento o falta de comprensión de los conceptos.

**Pregunta dos.** Con respecto a la pregunta dos, los diez profesores respondieron correctamente expresando que en la relación $F'(x) = f(x)$, $F(x)$ recibe el nombre de primitiva.

**Pregunta tres.** Por otra parte, para la pregunta tres, en donde se pide el significado de la expresión $\int f(x)dx = F(x)$, cinco profesores respondieron que $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$, algunos de ellos se apoyaron en la relación $F'(x) = f(x)$ para su respuesta. Llamaron la atención las respuestas de dos de estos cinco profesores:


3. ¿Qué significado tiene la igualdad $\int f(x)dx = F(x)$?

Pues que la Integral de f(x) es F(x) y viceversa
La Derivada de la funcion F(x) es f(x) $\Rightarrow F'(x) = f(x)$

Respuesta a la Pregunta 3 dada por el Profesor 7.

En cambio para el profesor 8, $F(x)$ representa el conjunto de primitivas y no una primitiva de $f(x)$:

**3. ¿Qué significado tiene la igualdad $\int f(x)dx = F(x)$?**

$F(x)$ es la familia de funciones, para la cual
la derivada de cada elemento es precisamente $f(x)$ es decir
si $g(x) \in F(x) \Rightarrow g'(x) = f(x)$.

Respuesta a la Pregunta 3 dada por el Profesor 8.

Aunque debido al contexto del cuestionario, debiera ser evidente que $F(x)$ representara una primitiva de $f(x)$, este profesor no lo consideró así debido al conocimiento que tiene respecto a que la $\int f(x)dx$ representa la familia de primitivas.

Por otra parte, otro profesor escribió: *...la derivada es inversa a la integral*, y hace referencia a la expresión $F'(x) = f(x)$. Dos profesores más no identifican que $F(x)$ es un elemento que pertenece al conjunto de primitivas, y solo mencionan que la expresión $\int f(x)dx = F(x)$ representa la integral indefinida de una función. Por último, un profesor dio una respuesta carente de sentido, o por lo menos no aporta elementos necesarios para su análisis, él respondió: *Es la inversa de la función*, mostrando una confusión en el manejo del concepto de función inversa.

**Pregunta cuatro.** En la pregunta cuatro, donde se pide justificar la presencia de la constante de integración en la integral indefinida, siete profesores saben que con la presencia de la constante de integración se genera la familia de primitivas; como se observa en la respuesta:

4. ¿Qué papel juega la constante de integración en la integral indefinida?

Esta nos indica que ~~es~~ esta puede tomar cualquier valor y se diría que forma una familia de resultados.

Respuesta a la Pregunta 4 dada por el Profesor 10.

En la cual, estamos suponiendo que la expresión: *una familia de resultados*, se refiere a la familia de primitivas. Otra respuesta correcta es la siguiente:

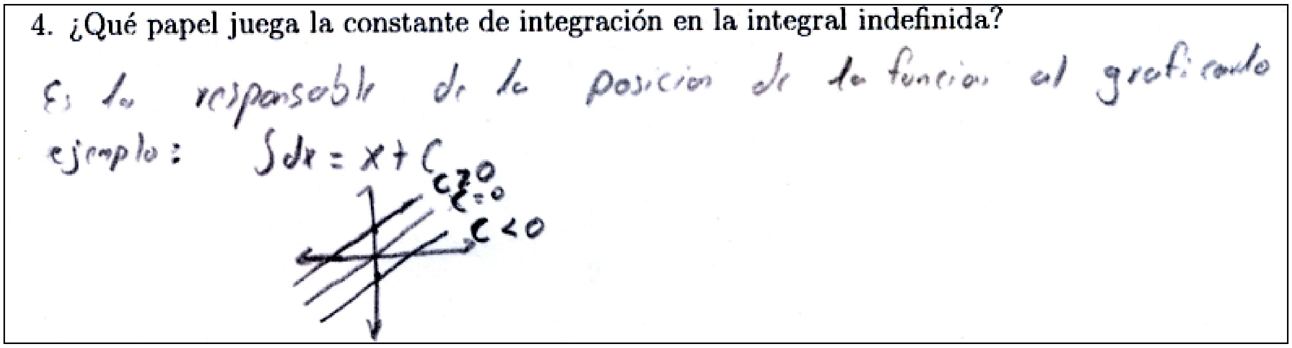
**4. ¿Qué papel juega la constante de integración en la integral indefinida?**

La constante de integración determina a la familia de funciones primitivas que cumplen $f(x) = F'(x)$.

Respuesta a la Pregunta 4 dada por el Profesor 4.

Al igual que en estas respuestas, en las restantes, ningún profesor argumenta que con la constante de integración se generan "todas" las funciones primitivas; es decir, estos profesores dieron como justificación el hecho de que si a una primitiva se le adiciona una constante se obtiene otra primitiva, pero no se percataron de que eso no justifica que la familia completa de primitivas se genera de esa manera, para justificar lo anterior, se requiere el teorema del valor medio del cálculo diferencial.

Los tres profesores restantes, muestran una falta de comprensión respecto al papel que juega la constante de integración en la integral indefinida, para ellos esta constante repercute en la posición geométrica de la función primitiva; es decir, la constante de integración solo indica la traslación de la función primitiva respecto al eje $y$. Como ejemplo se tiene la respuesta:


4. ¿Qué papel juega la constante de integración en la integral indefinida?

Es la responsable de la posicion de la funcion al graficando

ejemplo: $\int dx = x + C$



Respuesta a la Pregunta 4 dada por el Profesor 7.

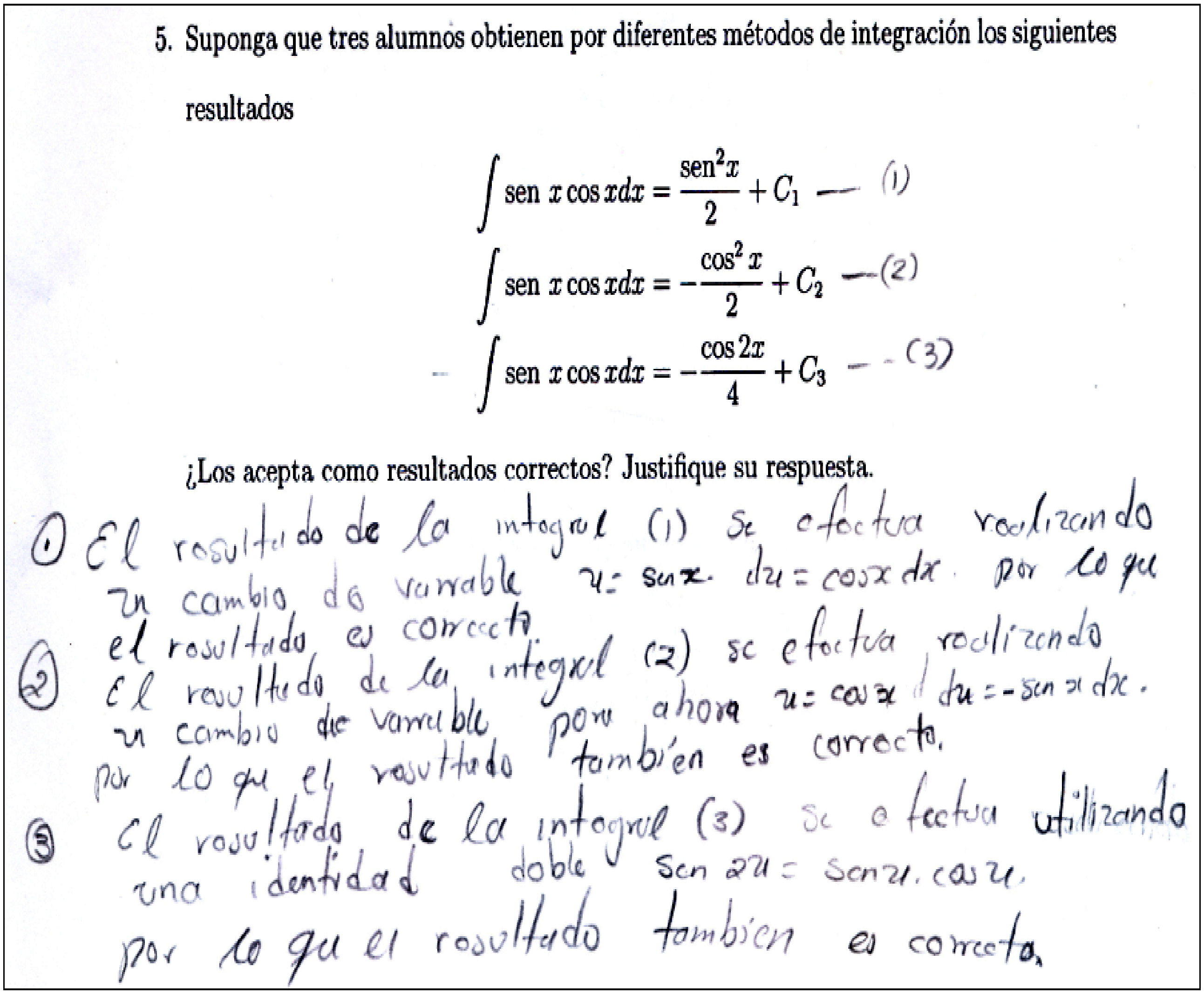
**Pregunta cinco.** Respecto a la pregunta cinco, en donde se pide justificar si son correctas o erróneas tres expresiones obtenidas al calcular la integral: $\int \operatorname{sen} x \cos x dx$. De los diez profesores encuestados, solo un profesor dio una respuesta sin elementos que nos indique si alguno de los resultados obtenidos por los alumnos es correcto o no lo es; este profesor, no concibe la idea de que se pueden obtener diversos resultados al calcular una integral indefinida, mismos que pertenecen al conjunto de primitivas de la función $\operatorname{sen} x \cos x$. Él escribió: *No. Solo hay una función que al obtener su antiderivada dará* $\operatorname{sen} x \cos x$; en la cual estamos suponiendo que este profesor confundió el proceso de derivar con el de antiderivar, mostrando así una mala comprensión respecto a esta situación.

Otro profesor menciona que el único resultado correcto es $\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C_1$, el cual obtiene mediante la sustitución $u = \operatorname{sen} x$; para los dos resultados restantes, la falta de conocimiento de la propiedad[1]: *Un factor constante puede escribirse o delante del signo integral o después de él*, es decir $\int c dx = c \int dx$ para $c$ constante; le impide obtener a este profesor ambos resultados.

Un profesor mas, al intentar calcular el tercer resultado, olvida escribir un signo menos durante su procedimiento; con esto argumenta, que solo los resultados uno y dos son correctos.

[1]Tomada de Granville pag. 231-232

De ahí en fuera, los siete profesores restantes calcularon de forma inmediata cada integral o en su defecto derivaron cada resultado para argumentar que los tres resultados son correctos:



5. Suponga que tres alumnos obtienen por diferentes métodos de integración los siguientes resultados

$$\int \operatorname{sen} x \cos x dx = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C_1 \text{ --- } (1)$$

$$\int \operatorname{sen} x \cos x dx = -\frac{\cos^2 x}{2} + C_2 \text{ --- } (2)$$

$$\int \operatorname{sen} x \cos x dx = -\frac{\cos 2x}{4} + C_3 \text{ --- } (3)$$

¿Los acepta como resultados correctos? Justifique su respuesta.

(1) El resultado de la integral (1) se efectua realizando un cambio de variable $u = \operatorname{sen} x$, $du = \cos x\, dx$. por lo que el resultado es correcto.

(2) El resultado de la integral (2) se efectua realizando un cambio de variable pero ahora $u = \cos x$ / $du = -\operatorname{sen} x\, dx$. por lo que el resultado también es correcto.

(3) El resultado de la integral (3) se efectua utilizando una identidad doble $\operatorname{sen} 2u = \operatorname{sen} u . \cos u$. por lo que el resultado tambien es correcto.

Respuesta a la Pregunta 5 dada por el Profesor 5.

**Pregunta seis.** Respecto a la pregunta seis, en donde se cuestiona que con cuál de las tres expresiones de la pregunta anterior se genera la familia de primitivas de la función $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$; de los siete profesores que respondieron a la pregunta cinco que los tres resultados obtenidos eran correctos, solo cuatro de ellos respondieron que con cualquiera de los tres resultados se genera la familia de primitivas:

**6. Con base en la pregunta anterior, responda: ¿Con cuál de los tres resultados obtenidos por los alumnos se genera la familia de primitivas de la función $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$? Argumente su respuesta.**

LAS TRES RESPUESTAS GENERAN LA FAMILIA DE PRIMITIVAS, YA QUE LAS TRES SOLUCIONES SON LA MISMA, PERO EXPRESADAS EN DIFERENTES FORMAS.

Respuesta a la Pregunta 6 dada por el Profesor 9.

Los demás profesores, solo escribieron la expresión de alguno de los tres resultados dados en la pregunta cinco. Llamó la atención la respuesta del profesor 1, en ella menciona que con los primeros dos resultados se genera la familia de primitivas, puesto que para el tercer resultado la constante de integración tenía un valor definido; por lo cual, podemos decir que este profesor no tiene una completa comprensión sobre el significado de la familia de primitivas, ya que la función $-\frac{\cos 2x}{4} - \frac{1}{4}$ es un elemento de la familia de primitivas de la función $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$ con $C_3 = -\frac{1}{4}$.

Tres profesores más respondieron con base en su respuesta a la pregunta cinco; por ejemplo, para el profesor 7, el cual respondió que los resultados correctos eran los dos primeros, escribió que la familia de primitivas se genera con cualquiera de estos dos resultados. Finalmente el profesor 2 indicó que la familia se generaba con el segundo resultado debido a que es una primitiva de la función $\operatorname{sen} x \cos x$:

6. Con base en la pregunta anterior, responda: ¿Con cuál de los tres resultados obtenidos por los alumnos se genera la familia de primitivas de la función $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$? Argumente su respuesta.

$-\dfrac{\cos^2 x}{2} + C_2$ porque la derivada de $-\dfrac{\cos^2 x}{2} + C$ es $\operatorname{Sen} x \operatorname{Cos} x$

Respuesta a la Pregunta 6 dada por el Profesor 2.

**Pregunta siete.** Respecto a la pregunta siete en donde se pide información acerca de la integral $\int e^{-x^2}dx$, de los diez profesores, solo un profesor mostró conocimiento sobre esta integral no elemental:

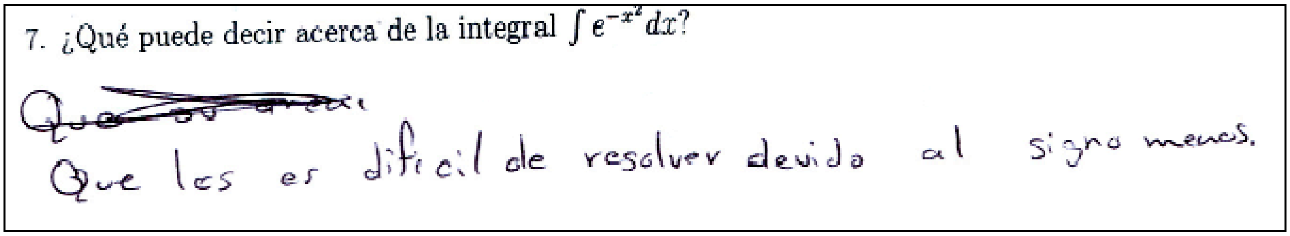
7. ¿Qué puede decir acerca de la integral $\int e^{-x^2}dx$?

QUE ES UNA INTEGRAL QUE NO TIENE PRIMITIVA, PERO QUE EXISTE SU ÁREA BAJO LA CURVA, SE PUEDE CALCULAR EL ÁREA BAJO LA CURVA, PERO NO TIENE PRIMITIVA.

Respuesta a la Pregunta 7 dada por el Profesor 9.

En esta respuesta, se percibe que este profesor tiene el conocimiento de que el área bajo la curva de la función $e^{-x^2}$ puede ser aproximada. Algo similar respondió otro profesor, él escribió: *Indefinida no existe, pero* $\int_{-\infty}^{\infty}$ *sí*; entendiendo que sí podemos aproximar la integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$. Para estas respuestas, se puede percibir la idea errónea de la no existencia de primitiva de la función $e^{-x^2}$, la cual, por la primera parte del teorema fundamental del cálculo se tiene que una primitiva de esta función es de la forma $G(x) = \int_c^x e^{-z^2}dz$.

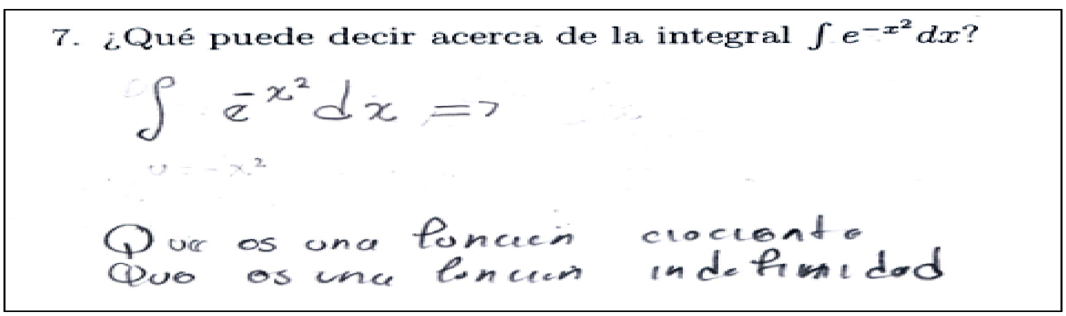
Por otra parte, solo un profesor no respondió a esta pregunta, y tres profesores más redactaron una respuesta ambigua. Por ejemplo, un profesor escribió:


7. ¿Qué puede decir acerca de la integral $\int e^{-x^2} dx$?

Que les es dificil de resolver devido al signo menos.

Respuesta a la Pregunta 7 dada por el Profesor 10.

Indicando con su respuesta, que el problema (mismo que traslada a sus alumnos) para calcular la integral indefinida, se debe a la presencia del signo menos; sin dar más detalles de esto. Otro profesor, al realizar infructuosos intentos por resolver la integral, al final solo escribió:


7. ¿Qué puede decir acerca de la integral $\int e^{-x^2} dx$?

$\int e^{-x^2} dx \Rightarrow$

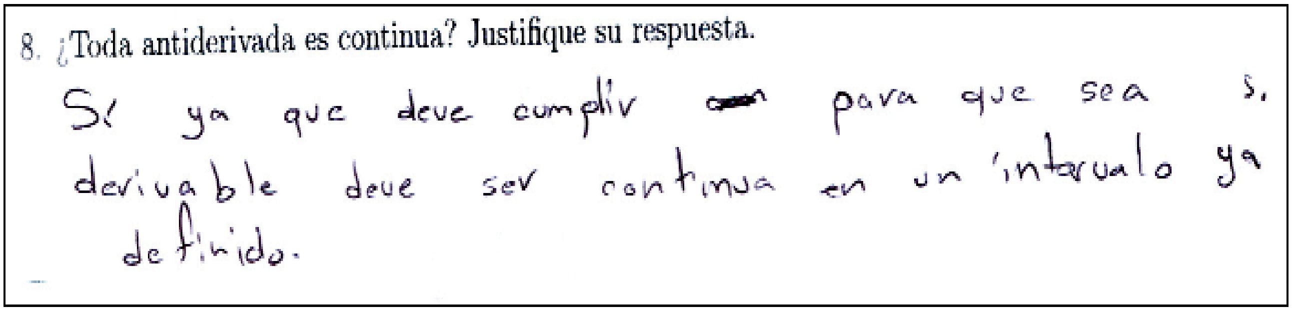
$u = -x^2$

Que es una funcion creciente
Que es una funcion indefinidad

Respuesta a la Pregunta 7 dada por el Profesor 3.

Este profesor, trato de analizar las propiedades de la función $e^{-x^2}$ con el fin de poder calcular su integral indefinida; un profesor más solo respondió que la integral indefinida es complicada, sin dar más elementos en su respuesta. Los cuatro profesores restantes intentaron calcular la integral mediante integración por partes, hecho que nos indica la falta de conocimiento de esta integral no elemental.

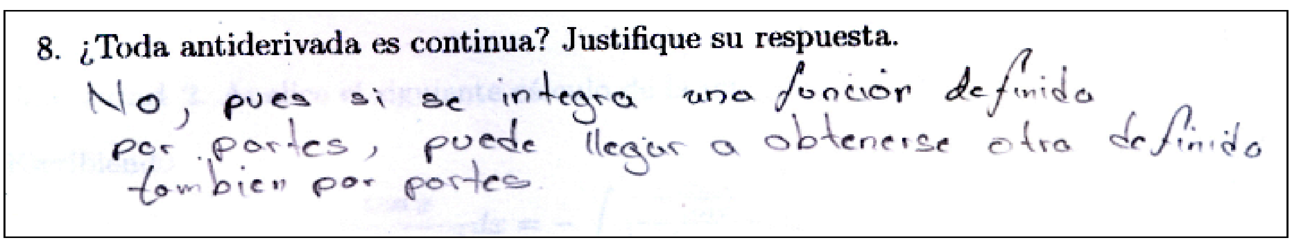
**Pregunta ocho.** Con relación a la pregunta ocho, en la cual se aborda el tema sobre la continuidad de la función primitiva, solo se obtuvo una respuesta correcta:


8. ¿Toda antiderivada es continua? Justifique su respuesta.

Sí ya que deve cumplir para que sea si derivable deve ser continua en un intervalo ya definido.

Respuesta a la Pregunta 8 dada por el Profesor 10.

Podemos observar que este profesor emplea el resultado del cálculo diferencial: *Toda función derivable es continua*, para responder de manera satisfactoria. No ocurrió así con ocho profesores, quienes respondieron de forma negativa debido a la falta de comprensión de la definición de primitiva. Por ejemplo, un profesor dio como respuesta:

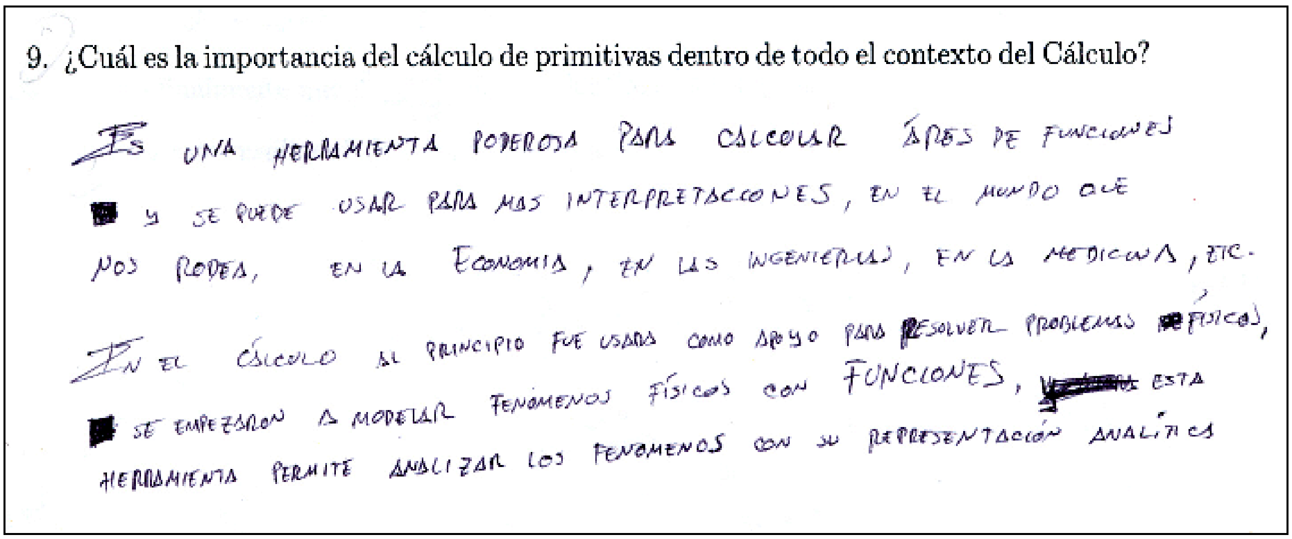

8. ¿Toda antiderivada es continua? Justifique su respuesta.

No, pues si se integra una función definido por partes, puede llegar a obtenerse otra definido tambien por partes.

Respuesta a la Pregunta 8 dada por el Profesor 8.

Notamos que este profesor presenta una mala comprensión del concepto de continuidad, es decir, existe la idea errónea de que una función definida por piezas siempre es discontinua, olvidando el carácter puntual de la definición de continuidad, esto es, solo podemos hablar de continuidad para los puntos pertenecientes al dominio de la función. Lo escrito antes también se presentó en las respuestas de los demás profesores, y el profesor restante no dio respuesta a esta pregunta.

**Pregunta nueve.** La pregunta nueve tiene el propósito de averiguar si los profesores ligan el cálculo de primitivas con el teorema fundamental del cálculo, al respecto, tres profesores respondieron que el cálculo de primitivas es importante para calcular el área bajo la curva de una función; cinco profesores más, mencionaron la importancia del cálculo de primitivas en otras áreas de la ciencia, así como su aplicación en el modelado de fenómenos físicos:



9. ¿Cuál es la importancia del cálculo de primitivas dentro de todo el contexto del Cálculo?

ES UNA HERRAMIENTA PODEROSA PARA CALCULAR ÁREAS DE FUNCIONES Y SE PUEDE USAR PARA MAS INTERPRETACCIONES, EN EL MUNDO QUE NOS RODEA, EN LA ECONOMIA, EN LAS INGENIERIAS, EN LA MEDICINA, ETC.

EN EL CÁLCULO AL PRINCIPIO FUE USADA COMO APOYO PARA RESOLVER PROBLEMAS FÍSICOS, SE EMPEZARON A MODELAR FENOMENOS FÍSICOS CON FUNCIONES, ESTA HERRAMIENTA PERMITE ANALIZAR LOS FENOMENOS CON SU REPRESENTACIÓN ANALÍTICAS

Respuesta a la Pregunta 9 dada por el Profesor 9.

Cabe mencionar que en estas respuestas, está presente de forma implícita el teorema fundamental del cálculo.

Las respuestas dadas por los dos profesores restantes, mencionan que la importancia del cálculo de primitivas ayuda a determinar de forma "general" la integral de una función. Aunque en cada una de las respuestas no se hace mención del teorema fundamental del cálculo, esto no implica que los profesores no tengan conocimiento del mismo. A continuación mostramos una de las dos respuestas:

9. ¿Cuál es la importancia del cálculo de primitivas dentro de todo el contexto del Cálculo?

– Es de gran importancia ya que nos ayuda ha determinar de manera general la integral de las funciones.

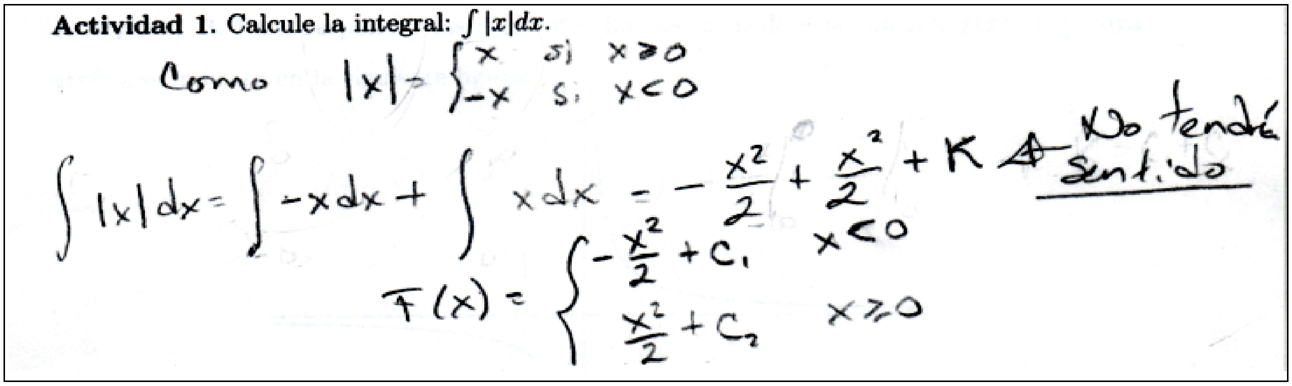
Respuesta a la Pregunta 9 dada por el Profesor 10.

## 4.2. Análisis de las Respuestas. Segunda parte del cuestionario

Recordemos que la segunda parte del cuestionario consistió de cuatro actividades que fueron realizadas primero de forma individual, y después, una vez que habían concluido la actividad se llevó a cabo una discusión del problema con el fin de obtener una solución correcta. Cabe mencionar, que cada una de las discusiones fue audiograbada con el propósito de evidenciar el intercambio de ideas entre los profesores respecto a la solución de cada actividad.

A continuación se describe el análisis realizado a cada una de las actividades del cuestionario, en el cual, se hace mención a algunos fragmentos de las discusiones realizadas de tal forma que se pueda observar cómo los profesores modifican algunas ideas erróneas respecto al concepto de integral indefinida.

**Actividad uno.** En la primera actividad se le pidió a cada profesor que calculara la siguiente integral: $\int |x|dx$; la cual, solo fue parcialmente resuelta por el profesor 2 mostrando una cierta comprensión en su cálculo, esto se observa a continuación:



**Actividad 1.** Calcule la integral: $\int |x|dx$.

Como $|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$

$$\int |x|dx = \int -x\,dx + \int x\,dx = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + K$$ No tendrá sentido

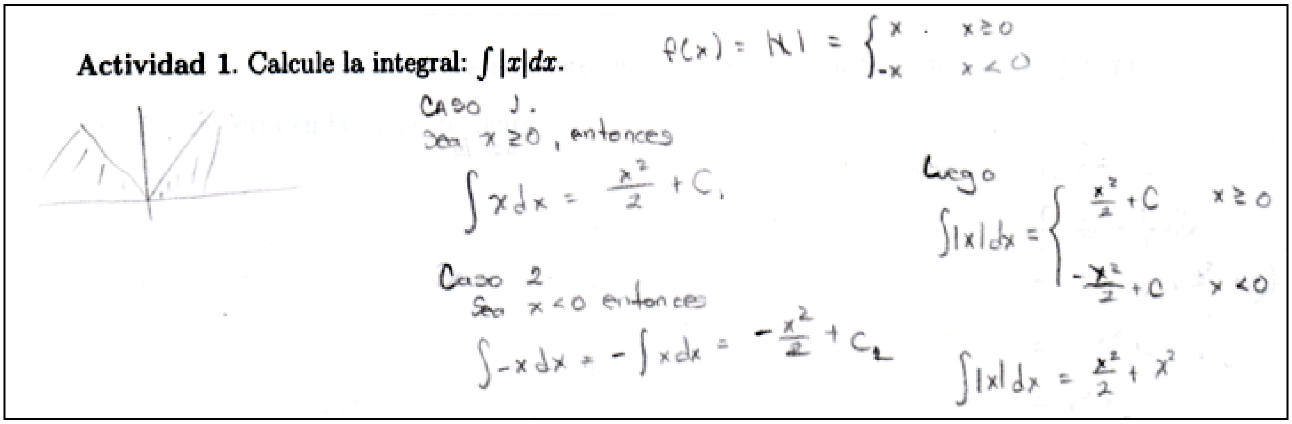
$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + C_1 & x < 0 \\ \frac{x^2}{2} + C_2 & x \geq 0 \end{cases}$$

Respuesta a la Actividad 1 dada por el Profesor 2.

Notemos que este profesor emplea la definición valor absoluto para llegar a su solución, la cual expresa mediante la función $F(x)$ definida por piezas. Sin embargo, también podemos observar que realiza un primer intento al calcular la integral, en el cual por la definición de valor absoluto intenta calcular la integral mediante una suma de dos integrales, en donde el primer integrando corresponde a la función $-x$ para $x < 0$ y el segundo integrando a la función $x$ para $x \geqslant 0$. No obstante al calcular esta suma de integrales se percata de que la expresión que obtiene no tiene sentido, lo que obliga a este profesor a reflexionar sobre el concepto de primitiva para llegar a la solución dada por $F(x)$. Esto último se observa en el Diálogo 1 correspondiente a la discusión realizada, mostrado en el Apéndice B.

Sin embargo, la solución obtenida no es correcta, debido a que las constantes de integración $C_1$ y $C_2$ deben ser las mismas para todo valor real de $x$; ya que con esto, la función $F(x)$ es diferenciable en todo el dominio de la función valor absoluto de $x$.

Otro profesor que siguió un procedimiento parecido al anterior fue el profesor 4, su respuesta se muestra a continuación:


**Actividad 1.** Calcule la integral: $\int |x|dx$.

$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

Caso 1.
Sea $x \geq 0$, entonces

$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C_1$

Caso 2
Sea $x < 0$ entonces

$\int -x\,dx = -\int x\,dx = -\frac{x^2}{2} + C_2$

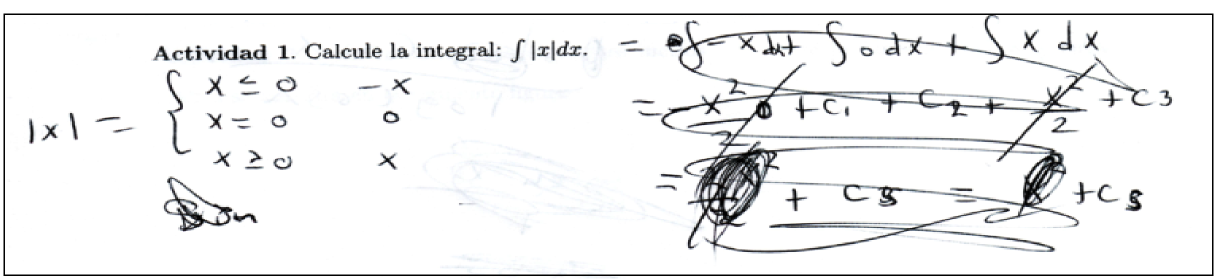
Luego

$\int |x|dx = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + C & x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{2} + C & x < 0 \end{cases}$

$\int |x|dx = \frac{x^2}{2} + x^2$

Respuesta a la Actividad 1 dada por el Profesor 4.

Notemos que este profesor escribe la solución de la integral mediante una función definida por piezas, en la cual propone la misma constante de integración para todo valor real de $x$. Sin embargo, después trata de sumar cada uno de los resultados, para $x \geqslant 0$ y $x < 0$ sin concluir su procedimiento. Con lo anterior podemos decir que este profesor no se percata que ha calculado la integral, debido a que no posee una completa comprensión de la definición de primitiva y por ello trata de obtener una sola expresión que le represente una primitiva del integrando. Esto último está presente en la respuestas de cuatro profesores más en las cuales, a partir de la definición valor absoluto, intentan hallar la familia de primitivas mediante la suma de las integrales $-\int xdx$ para $x < 0$ y $\int xdx$ para $x \geqslant 0$. Por ejemplo, se tienen las respuestas de los profesores 3 y 10:


**Actividad 1.** Calcule la integral: $\int |x|dx$.

$|x| = \begin{cases} x \leq 0 & -x \\ x = 0 & 0 \\ x \geq 0 & x \end{cases}$

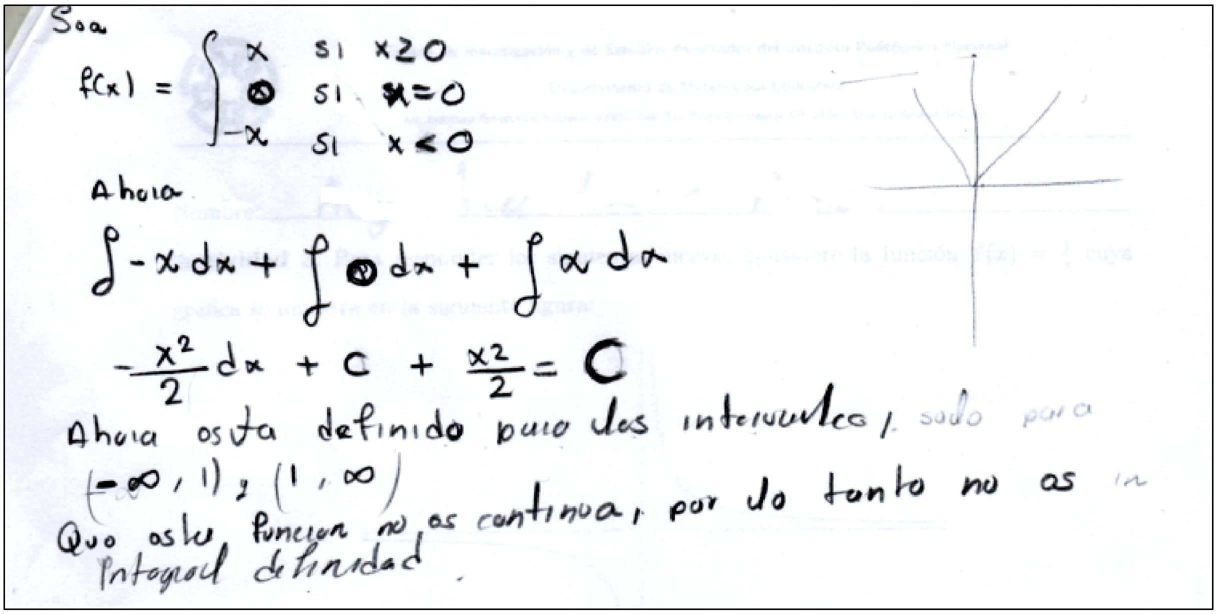
$= \int -x\,dx + \int 0\,dx + \int x\,dx$

$= -\frac{x^2}{2} + C_1 + C_2 + \frac{x^2}{2} + C_3$

$= \quad + C_5 = \quad + C_5$

Respuesta a la Actividad 1 dada por el Profesor 10.

Este profesor, al percatarse que obtiene como solución una constante tacha su resultado y no es capaz de obtener alguna otra solución al problema planteado. Otra respuesta es la siguiente:


Sea

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ahora

$$\int -x\,dx + \int 0\,dx + \int x\,dx$$

$$-\frac{x^2}{2}dx + C + \frac{x^2}{2} = C$$

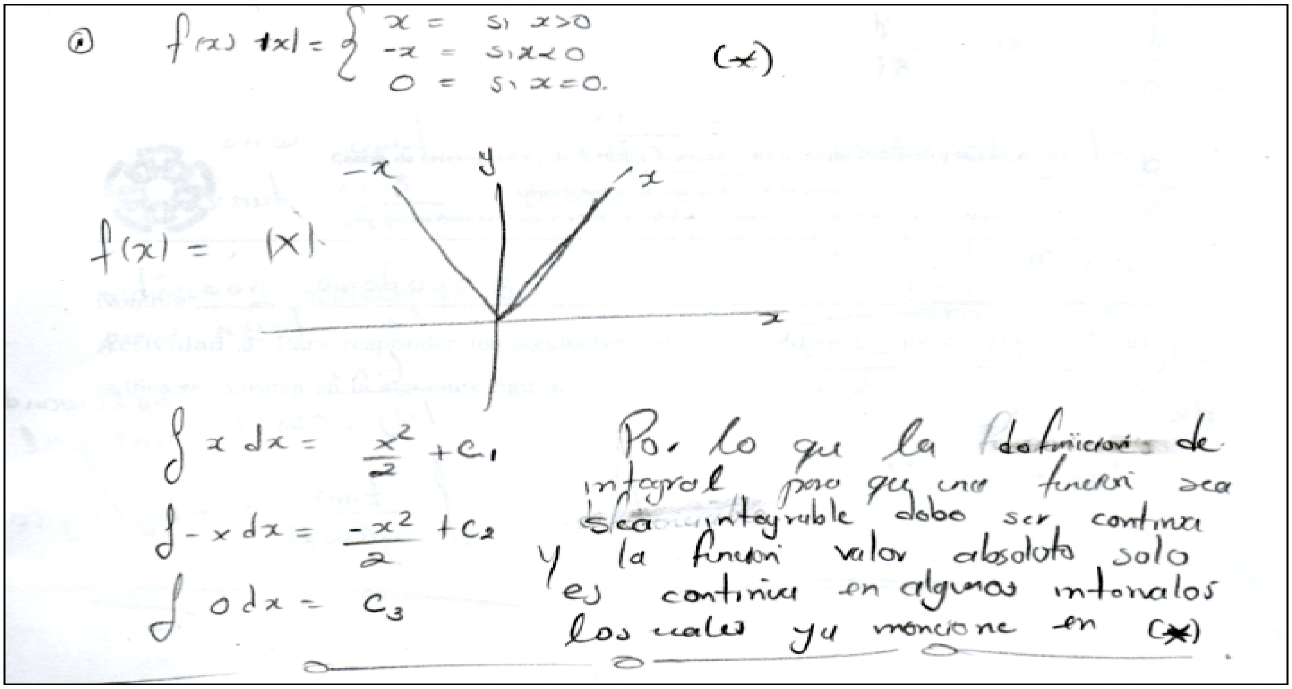
Ahora esta definido para dos intervalos, solo para $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$ Que esta funcion no es continua, por lo tanto no es in Integral definidad.

Respuesta a la Actividad 1 dada por el Profesor 3.

En la respuesta anterior podemos observar que este profesor también intenta hallar la familia de primitivas mediante la suma de dos integrales, sin embargo, al percatarse que obtiene una constante como solución, trata de escribir argumentos (los cuales son ambiguos) que le ayuden a justificar su respuesta obtenida.

Durante la discusión, se puso en evidencia que los profesores intentaban sumar las dos integrales obtenidas para cada intervalo con base en la definición del valor absoluto, con el propósito de hallar una sola expresión que representara la familia de primitivas del integrando, mostrando una falta de comprensión en el cálculo de la familia de primitivas. Lo anterior se observa en el Diálogo 2 realizado para esta actividad (ver Apéndice B).

Una respuesta en la cual se observa una falta de comprensión en el concepto de continuidad, es la del profesor 5:

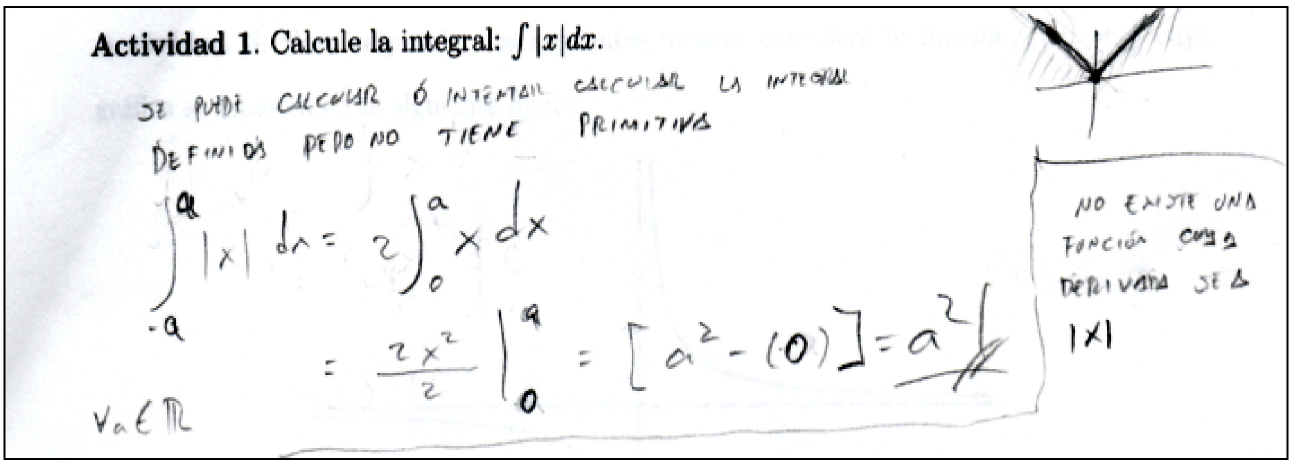



Respuesta a la Actividad 1 dada por el Profesor 5.

Además se muestra una carencia en el entendimiento de la definición de primitiva, lo que conlleva al profesor a no poder resolver el problema; así mismo, se observa que este profesor no tiene conocimiento sobre el supuesto de que una función es integrable en un intervalo $I$ si es continua en ese intervalo.

Por otra parte, el profesor 7 calculó la integral para las funciones $f(x) = x$ y $f(x) = -x$, pero no para la función $f(x) = |x|$. Este profesor intentó calcular la integral del valor absoluto de $x$ considerando dos casos, $x > 0$ y $x < 0$. En cambio, el profesor 8 respondió: $\int |x|dx = 2\int xdx = \frac{2}{2}x^2 = x^2$; durante el diálogo sostenido con él (ver Diálogo 3 en Apéndice B), expresa que la integral $\int |x|dx$ debe ser dos veces el área de la función $x$, por lo cual su solución obtenida es $F(x) = x^2$.

Por último, el profesor 9 responde que no existe una primitiva de la función valor absoluto, sin embargo sí podemos calcular la integral definida; hecho que resulta contradictorio de acuerdo a su respuesta, pues aunque este profesor no es capaz de calcular dicha primitiva, sí la emplea para calcular la integral definida $\int_{-a}^{a} |x|dx$ como se observa en su respuesta:



**Actividad 1.** Calcule la integral: $\int |x|dx$.

SE PUEDE CALCULAR Ó INTENTAR CALCULAR LA INTEGRAL DEFINIDA PERO NO TIENE PRIMITIVA

$$\int_{-a}^{a} |x| \, dx = 2\int_0^a x \, dx = \frac{2x^2}{2}\Big|_0^a = [a^2 - (0)] = a^2$$

$\forall a \in \mathbb{R}$

NO EXISTE UNA FUNCIÓN CUYA DERIVADA SEA $|x|$

Respuesta a la Actividad 1 dada por el Profesor 9.

Por otra parte, es importante mencionar que al final de la discusión todos los profesores expresaron haber entendido el cálculo de la integral $\int |x|dx$, cuya familia de primitivas está representada por la expresión

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + C, & \text{para } x \geqslant 0; \\ -\frac{x^2}{2} + C, & \text{para } x < 0. \end{cases}$$

En el Diálogo 4 mostrado en el Apéndice B, se muestra la conversación de los profesores respecto a la igualdad de las constantes de integración de $F(x)$, hecho que resulta de gran importancia para que $F(x)$ sea diferenciable en el mismo dominio que la función $|x|$.

**Actividad dos.** En la segunda actividad se les pidió a los profesores que justificaran si era correcta o incorrecta la igualdad: $\int \frac{\tan x}{\log(\cos x)} dx = -\log(\log(\cos x)) + C$; es decir, tenían que justificar si $F(x) = -\log(\log(\cos x)) + C$ representaba la familia de primitivas de la función $f(x) = \frac{\tan x}{\log(\cos x)}$. Para ello, cinco profesores procedieron a calcular la derivada de $F(x)$ y al obtener como resultado la función $f(x)$, concluyeron que la igualdad era correcta, como se muestra en la respuesta siguiente:

**Actividad 2. Analice el siguiente cálculo de la integral $\int \frac{\tan x}{\log(\cos x)} dx$.**

**Escribiendo**

$$\int \frac{\tan x}{\log(\cos x)} dx = -\int \frac{-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\log(\cos x)} dx. \qquad (1)$$

**En vista de que la expresión $-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ es la derivada de la función $\log(\cos x)$, haremos la sustitución $u = \log(\cos x)$, de modo que $du = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx$. De esta manera, el integrando de la segunda integral en (1) se puede expresar en términos de $u$ como sigue:**

$$-\int \frac{-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\log(\cos x)} = -\int \frac{du}{u} = -\log(u) + C = -\log(\log(\cos x)) + C.$$

**Obteniendo finalmente que $\int \frac{\tan x}{\log(\cos x)} dx = -\log(\log(\cos x)) + C$.**

***¿Es correcto este resultado?* Justifique su respuesta.**

De acuerdo a las sustituciones que se hicieron se puede decir que es correcto. Para verificar se tendria que derivar $-\log(\log(\cos x))$ y checar que la derivada de lo anterior es $\frac{\tan x}{\log(\cos x)} dx$.
Como esto se cumple es correcto.

Respuesta a la Actividad 2 dada por el Profesor 6.

Un procedimiento similar llevó a cabo el profesor 5, quien primero calculó la integral y después calculó la derivada de $F(x)$; y debido a que obtiene el mismo resultado expresado en la actividad, escribe que el procedimiento es correcto. En la siguiente imagen se muestra el cálculo que hizo este profesor respecto a la integral de la función $f(x)$:

$\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

luego $u = \cos x$

$du = -\operatorname{sen} x \, dx$

$-\int -\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos} dx = \int \dfrac{du}{u} = \log(u) = \log(\cos x)$

luego como $du = \log u =$

$du = -\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ $\therefore \int \dfrac{-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\log(\cos x)}$

$-\int \dfrac{du}{u} = -\log u = -(\log(\log \cos x)) + c$

Es correcto el resultado debido a que la identidad $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos}$, se realiza un cambio de variable $u = \log u$, $du = \dfrac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}$ entonces se realiza un cambio adecuado, por lo que el resultado es adecuado,

$\dfrac{d}{dx} \log u = \dfrac{u'}{u}$

$\dfrac{d}{dx} -\log(\log \cos x) = \dfrac{-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\log(\cos x)} =$ luego como $-\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x$.

sea $u = \log(\cos x)$

$du = \dfrac{-\operatorname{sen} x}{\cos}$

$\dfrac{d}{dx} \log(\cos x) = \dfrac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}$,

$u = \cos x$

$du = -\operatorname{sen} x$. $\therefore$

podemos reescribir la función como

$\dfrac{\tan x}{\log(\cos x)}$ aplicando integral tenemos:

$\int \dfrac{\tan x}{\log(\cos x)} = -\log(\log(\cos x))$

Respuesta a la Actividad 2 dada por el Profesor 5.

Un hecho interesante es que para responder la pregunta, la mayoría de los profesores procedieron a calcular la derivada de la función $F(x)$; para estos profesores, podemos decir que no tienen una profunda comprensión respecto al dominio de derivabilidad de una función primitiva. Esto se muestra en un fragmento de la discusión que se entabló al respecto en esta actividad (ver Diálogo 1 en Apéndice B).

También podemos observar, que ninguno de estos profesores consideró el dominio de la función $F(x)$ antes de realizar algún cálculo. El percatarse de que el dominio de la función $F$ es el conjunto vacío, proporciona el punto clave que conlleva a emplear correctamente la integral inmediata $\int \frac{du}{u}$, la cual, tiene como una primitiva la función $\log |u|$, y de esta manera resolver con éxito la actividad. Al respecto, el profesor 9 después de derivar $F(x)$, trata de analizar el dominio de la función integrando $f(x)$ donde se percata que esta función no es continua en todo el conjunto de los números reales, sin embargo, no analiza el dominio de la expresión que se propone como la familia de primitivas; de esta manera, lo que él hace es suponer que la función $F(x)$ está definida en el mismo dominio que $f(x)$ para después proceder a derivar la función $F(x)$. Lo antes escrito se observa en el fragmento correspondiente al Diálogo 2 (ver Apéndice B) tomado de la discusión realizada.

El único profesor que hace mención acerca del dominio de la función logaritmo, es el profesor 7 como se puede leer en su respuesta:

**Actividad 2.** Analice el siguiente cálculo de la integral $\int \frac{\tan x}{\log(\cos x)}dx$.

Escribiendo

$$\int \frac{\tan x}{\log(\cos x)}dx = -\int \frac{-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\log(\cos x)}dx. \qquad (1)$$

$\int \ln: \frac{u'}{u}$

En vista de que la expresión $-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ es la derivada de la función $\log(\cos x)$, haremos la sustitución $u = \log(\cos x)$, de modo que $du = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}dx$. De esta manera, el integrando de la segunda integral en (1) se puede expresar en términos de $u$ como sigue:

$$-\int \frac{-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\log(\cos x)} = -\int \frac{du}{u} = -\log(u) + C = -\log(\log(\cos x)) + C.$$

Obteniendo finalmente que $\int \frac{\tan x}{\log(\cos x)}dx = -\log|\log(\cos x)| + C$.

*¿Es correcto este resultado?* Justifique su respuesta.

Me parece que no porque falta | | a la expresión $\log(\cos x)$ y si no lleva valor absoluto, $\cos x$ toma valores negativos o cualquier valor y eso no es posible porque el log solo esta definido para valores > a cero.

Respuesta a la Actividad 2 dada por el Profesor 7.

Notemos que este profesor repara en la necesidad de colocar las barras del valor absoluto en $F(x)$ (incluso se las coloca en la redacción de la actividad) de tal manera que $F(x)$ este definida. Sin embargo aunque su respuesta es correcta, no da más argumentos que indiquen que al colocar las barras de valor absoluto en la expresión $F(x)$, ésta última representa la familia de primitivas de $f(x)$. Algo similar se muestra en la respuesta dada por el profesor 8, en la cual solo hace mención de la ausencia de las barras del valor absoluto en la integral $\int \frac{du}{u}$, pero no da mas argumentos sobre como esto afecta el cálculo de la integral $\int \frac{\tan x}{\log(\cos x)}dx$. Con relación a lo antes escrito, se entabla una discusión entre dos profesores acerca de la importancia de colocar las barras de valor absoluto en la función logaritmo, esta discusión se puede leer en el Diálogo 3 Apéndice B.

Por último, el profesor 1 menciona que no es correcto el resultado pero no da argumentos que apoyen su respuesta; al parecer trata de derivar sin éxito la expresión $F(x)$, de esta manera, no podemos decir algo sobresaliente respecto a su respuesta.

**Actividad 3.** Respecto a la pregunta uno de la actividad tres en la que se pide calcular la integral de la función $\frac{1}{x}$, cinco profesores escribieron como respuesta la expresión $\log(x)+C$, en cambio los cinco profesores restantes dieron como respuesta: $\log|x|+C$; siendo esta última la solución correcta.

Para la pregunta dos que consiste en argumentar si son correctos o erróneos cada uno de los cinco resultados obtenidos del cálculo de la integral $\int \frac{1}{x}dx$, se obtuvieron las siguientes respuestas:

- Respecto al inciso (a), cuyo resultado estaba indicado por la expresión $\int \frac{1}{x}dx = \log(x)$, todos los profesores encuestados concluyen que este resultado no es correcto. De los diez profesores, tres mencionan que no se genera la familia de primitivas debido a la ausencia de la constante de integración, otro mismo número de profesores escribieron que el dominio de la función $\log(x)$ no es el mismo que el de la función integrando $\frac{1}{x}$; y los cuatro profesores restantes mencionan en su respuesta ambos argumentos. Como ejemplo, se tiene la siguiente respuesta:

a) La grafica solo representa $\log(x)$ para valores positivos, en pocas palabras no es la primitiva de la funcion $f(x)=\frac{1}{x}$, ademas de que no contempla a toda la familia de primitivas ya que esta seria $\log(x)+c$, le falta la constante de integración,

Respuesta a la Actividad 3, inciso (a) dada por el Profesor 5.

- Para el inciso (b), donde se tiene como resultado la expresión $\int \frac{1}{x}dx = \log|x|$, siete profesores escriben que debido a la ausencia de la constante de integración este resultado es incorrecto. Dos profesores, además de proporcionar el argumento anterior, mencionan en su respuesta que la función $\log|x|$ considera tanto los valores positivos como negativos sin embargo este resultado no es correcto; como se observa en la respuesta:

b) Aunque ya se toma en cuenta los valores para cuando $x<0$ al igual que la anterior no se observa la constante de integración, la cual es necesaria para indicar la familia de primitivas

Respuesta a la Actividad 3, inciso (b) dada por el Profesor 6.

La respuesta del profesor 3 resulta ambigua y carente de sentido.

- Para el inciso (c), el cual es el resultado correcto, tiene la expresión

$$\int \frac{1}{x}dx = \begin{cases} \log|x| + C_1, & \text{para } x < 0; \\ \log|x| + C_2, & \text{para } x > 0. \end{cases}$$

Al respecto, tres profesores no dieron respuesta alguna; un profesor dio una respuesta que no proporciona elementos respecto a si es correcto o incorrecto este resultado, él escribió: *Se hace uso de la constante de integración, pero indicando* $C_1$ *y* $C_2$. Dos profesores más indicaron que este resultado era incorrecto, uno de ellos corresponde al profesor 9 quién escribió: *La constante de integración es diferente para los dos casos, entonces no cumple*, con lo cual, podemos decir que este profesor presenta una falta de comprensión respecto al concepto de función primitiva; esto se presenta también en la otra respuesta incorrecta dada por el profesor 5:

c) La grafica no es correcta ya que al efectuar la integral se suman constantes de integracion distintas por lo que no corresponden a la misma familia de antiderivadas, además de que el log no contempla el valor en cero, es decir no cruza al eje y.

Respuesta a la Actividad 3, inciso (c) dada por el Profesor 5.

Podemos observar que este profesor se apoya de manera errónea en la gráfica mostrada, él tiene la intuición de que la curva de la función $\log|x| + C_2$ "cruza" el eje $y$. Por último, los cuatro profesores restantes mencionan en su respuesta que es correcto este resultado; por ejemplo, el profesor 7 escribió: *Correcto por que nos da el mismo dominio*, sin embargo no escribe algún comentario respecto a las constantes de integración. Otro ejemplo es la siguiente respuesta:

El (c) Si es correcto ya que la diferencia en su grafica se deve a las cte. de integración.

Respuesta a la Actividad 3, inciso (c) dada por el Profesor 10.

Podemos percibir que este profesor reconoce cómo afecta cada una de las contantes de integración a la gráfica de la función primitiva en cada uno de los dos intervalos de definición de esta función.

- Respecto al resultado del inciso (d), escrito como $\int \frac{1}{x}dx = \log|x| + C$, solo dos profesores mencionan que no es correcto, en este caso, sus respuestas resultan incoherentes. Otro profesor no menciona si el resultado es correcto o incorrecto, sin embargo, en su respuesta menciona que este resultado denota una familia de primitivas:

d). Denota una familia de primitivas, hace uso de $x>0$ y $x<0$, Aunque en la gráfica especifica la constante con $C=2$

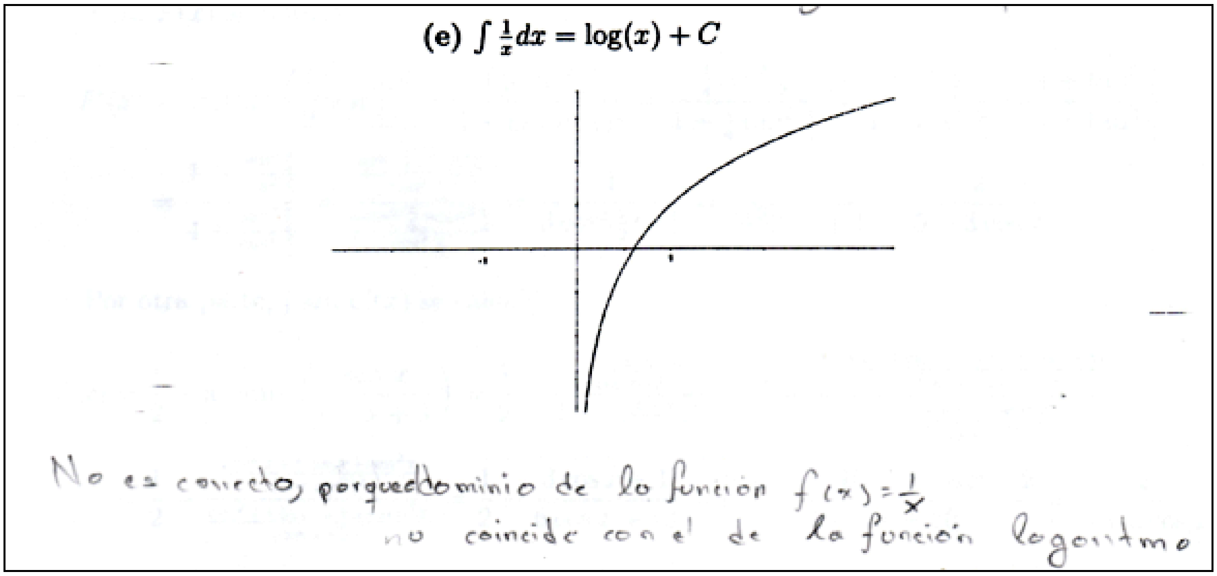
Respuesta a la Actividad 3, inciso (d) dada por el Profesor 6.

Los siete profesores restantes consideraron que el resultado era correcto, la mayoría de ellos argumentaron que la función $\log|x|$ tenia el mismo dominio que la función integrando y además, se obtenía la familia de primitivas debido a la adición de la constante de integración. Como ejemplo mostramos la siguiente respuesta:

En el inciso (d) cumple. pues el argumento del logaritmo tiene valor absoluto y la constante de integración, por lo tanto contiene a toda la familia de Soluciones

Respuesta a la Actividad 3, inciso (d) dada por el Profesor 1.

- Para el resultado correspondiente al inciso (e), escrito como $\int \frac{1}{x}dx = \log(x) + C$, seis profesores argumentaron que este resultado era incorrecto debido al dominio de la función $\log(x)$, como se observa en la respuesta:




Respuesta a la Actividad 3, inciso (e) dada por el Profesor 8.

Esto mismo argumentaron dos profesores más, sin embargo, en sus respuestas mencionan que con la presencia de la constante de integración se contempla la familia de primitivas; lo cual no es correcto, debido a que solo se tiene una parte del conjunto de primitivas de la función $\frac{1}{x}$. Lo anterior se muestra en la respuesta del profesor 5:

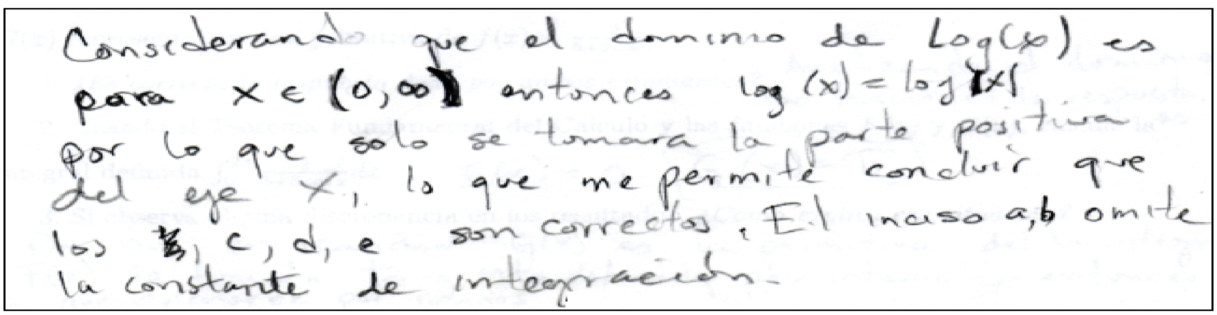
c) No contempla valores negativos, aun así si contempla la familia de primitivas.

Respuesta a la Actividad 3, inciso (e) dada por el Profesor 5.

Finalmente, un profesor escribió una respuesta ambigua y el profesor 2 fue el único que escribió que este resultado era correcto si se tomaba solo la parte positiva del eje $x$.

Después de realizar la actividad, se llevó a cabo una discusión con el propósito de hacer notar a los profesores que el resultado correcto corresponde al inciso $c$. Durante el transcurso de dicha discusión, se pudo obtener información que sustenta las respuestas antes mencionadas para cada uno de los incisos. Por ejemplo, en el Apéndice B presentamos un fragmento del Diálogo 1 de esta actividad donde se puede observar cómo los profesores descartan sus respuestas erróneas dadas en un principio, para finalmente aceptar que el resultado correcto pertenece al inciso $c$.

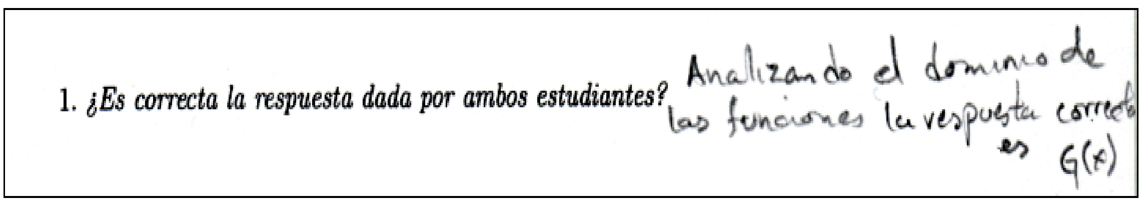
Es importante mencionar que los profesores 7 y 10 respondieron que eran correctos los incisos (c) y (d) debido a que para ambos casos, el dominio de la función $\log|x|$ es igual al de la función $\frac{1}{x}$. En cambio el profesor 2 escribió que los incisos (c), (d) y (e) son correctos debido a que considera solo el intervalo $(0, \infty)$:


Considerando que el dominio de Log(x) es para $x \in (0,\infty)$ entonces $\log(x) = \log|x|$ por lo que solo se tomara la parte positiva del eje X, lo que me permite concluir que los ~~b~~, c, d, e son correctos. El inciso a,b omite la constante de integración.

Respuesta a la Actividad 3 dada por el Profesor 2.

En el Diálogo 2 (ver Apéndice B) tomado de la discusión realizada, se muestra la discusión entre los profesores 2 y 9, en la cual, abordan el resultado del inciso $e$. Aquí se puede observar cómo uno de los profesores trata de persuadir al otro profesor de que el resultado del inciso $e$ no representa el conjunto de antiderivadas de la función integrando; al final, este profesor acepta que el resultado correcto es el inciso $c$. Por último diremos que ningún profesor mostró una profunda comprensión respecto al papel que juega la constante de integración en el cálculo de la familia de primitivas, debido a que no se percataron de que el dominio de la función integrando consiste de la unión de dos intervalos ajenos, para los cuales, hemos de elegir constantes de integración distintas para cada intervalo que compone el dominio de $f(x) = \frac{1}{x}$.

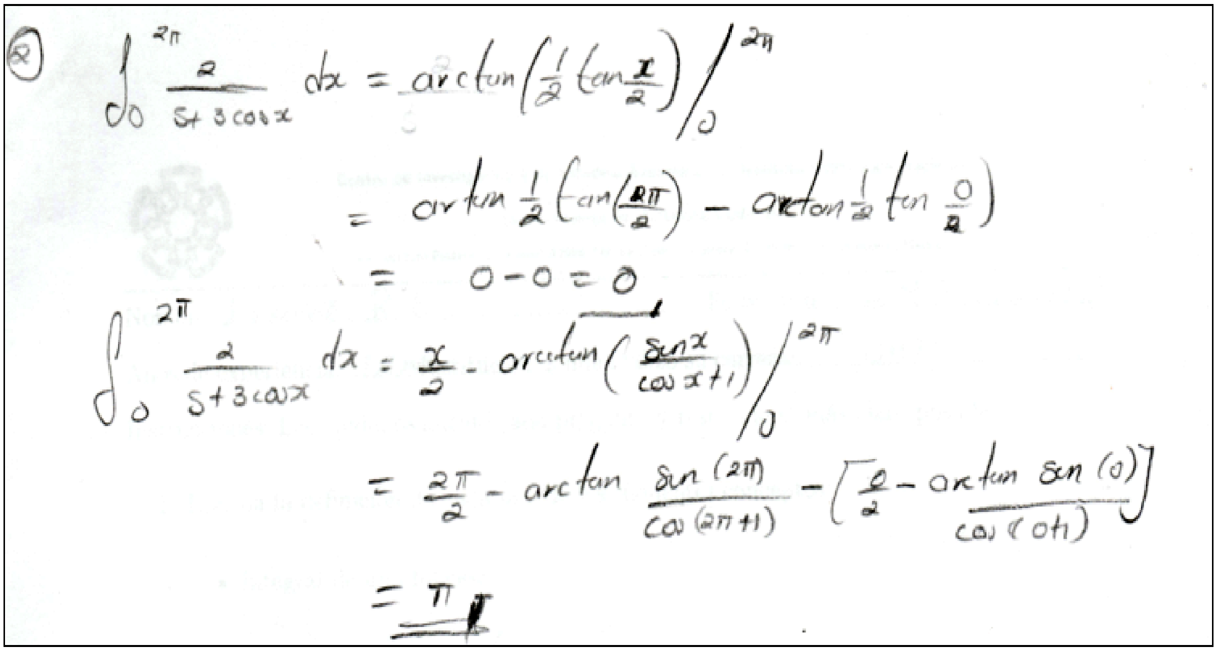
**Actividad cuatro.** La actividad cuatro consiste de tres preguntas, en la primera de ellas, se pide a los profesores que respondan si son correctos los argumentos dados por dos estudiantes respecto a que las funciones $F(x) = \arctan\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\right)$ y $G(x) = \frac{x}{2} - \arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x+3}\right)$ representan una primitiva de $f(x) = \frac{2}{5+3\cos x}$. De los diez profesores, siete respondieron que sus argumentos no son correctos, sin embargo de estos siete, solo tres profesores indicaron que la función $G(x)$ sí representa una primitiva de $f(x)$. Esto se observa en la respuesta del profesor 2:


1. ¿Es correcta la respuesta dada por ambos estudiantes? Analizando el dominio de las funciones la respuesta correcta es $G(x)$

Respuesta a la Actividad 4, pregunta 1 dada por el Profesor 2.

En el fragmento correspondiente al Diálogo 1 (ver Apéndice B) extraído de la discusión realizada, se observan los argumentos que da un profesor sobre la función $G(x)$, la cual, es una primitiva de $f(x)$. Dos profesores más respondieron que los argumentos dados por los estudiantes sí eran correctos, y solo un profesor no respondió a esta pregunta.

Respecto a la segunda pregunta, los diez profesores calcularon de manera usual la integral definida $\int_0^{2\pi} \frac{2}{5+3\cos x}dx$ para las funciones $F(x)$ y $G(x)$, empleando para ello la segunda parte del teorema fundamental del cálculo, como se muestra en la siguiente respuesta:



(2)

$$\int_0^{2\pi} \frac{2}{5+3\cos x}\,dx = \arctan\left(\frac{1}{2}\left(\tan\frac{x}{2}\right)\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \arctan\frac{1}{2}\left(\tan\left(\frac{2\pi}{2}\right)\right) - \arctan\frac{1}{2}\tan\frac{0}{2}\Big)$$

$$= 0-0 = \underline{0}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{2}{5+3\cos x}\,dx = \frac{x}{2} - \arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x+1}\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{2\pi}{2} - \arctan\frac{\operatorname{sen}(2\pi)}{\cos(2\pi+1)} - \left[\frac{0}{2} - \arctan\frac{\operatorname{sen}(0)}{\cos(0+1)}\right]$$

$$= \underline{\pi}$$

Respuesta a la Actividad 4, pregunta 2 dada por el Profesor 5.

Con relación a la última pregunta, los diez profesores pudieron identificar que la discrepancia entre ambos resultados obtenidos en la pregunta anterior, se debe a que la función $F(x)$ no es una primitiva de la función integrando, debido a que $F(x)$ no es continua para todo $x$ real. El profesor 9 quien respondió correctamente a la primera pregunta hizo mención de lo anterior, su respuesta se muestra en la siguiente página.

Otras respuestas mencionan que la primitiva (suponemos que se refieren a $F(x)$) no está definida en todo el intervalo, esto debido a que la función tangente contiene puntos en su dominio para los cuales no está definida. Como ejemplo, mostramos la respuesta correspondiente al profesor 3 quien respondió de manera errónea la primera pregunta:

(3) La tangente no esta definida en esas intervalos.
Porque la primitiva no esta definida en todo el intervalo.

Respuesta a la Actividad 4, pregunta 3 dada por el Profesor 3.

EL DOMINIO DE $\frac{2}{5+3\cos x}$ VA DESDE $(-\infty,+\infty)$

PERO COMO ES UNA FUNCIÓN PERIÓDICA PODEMOS ANALIZAR $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ EN ESTE INTERVALO LA FUNCIÓN ES CONTINUA PARA EL VALOR DE $X$ PUEDE TOMAR CUALQUIER VALOR FUERA DE ESTE INTERVALO.

PARA $F(x)$ EL DOMINIO ESTÁ DEFINIDO DE $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ Y EN LOS VALORES LÍMITE SE INDETERMINA $\therefore$ $F(x)$ NO PUEDE SER PRIMITIVA

PARA $G(x)$ EL DOMINIO ESTÁ DEFINIDO DE $(-\infty,+\infty)$ $\therefore$ $G(x)$ ES LA PRIMITIVA

Respuesta a la Actividad 4, pregunta 3 dada por el Profesor 9.

El Diálogo 2 mostrado en el Apéndice B, muestra los argumentos dados por un profesor acerca del por qué no es correcto calcular la integral $\int_0^{2\pi} \frac{2}{5+3\cos x}dx$, usando la función $F(x)$. Además, menciona que esta función puede ser utilizada para calcular dicha integral definida si se emplea la propiedad distributiva de las integrales.

Hasta aquí se ha descrito el análisis para cada pregunta y actividad del cuestionario aplicado, como se pudo observar, ningún profesor respondió de forma correcta a todo el cuestionario lo cual indica que ninguno comprende con profundidad el concepto de integral indefinida. Sin embargo, se pudo percibir que todos los profesores tienen conocimiento sobre algunas de las situaciones conflictivas en el cálculo de integrales indefinidas (las cuales se explicaron en el capítulo 1); con esto, podemos decir que que los profesores aquí encuestados comprenden de *forma superficial* el concepto de integral indefinida. Esto último se explica con más detalle en las conclusiones de este trabajo, las cuales se describen a continuación.

# Conclusiones

Las conclusiones obtenidas de este trabajo de investigación, permiten responder las preguntas de investigación planteadas en el capítulo 1, referentes a la comprensión del concepto de integral indefinida de los profesores de nivel medio superior aquí encuestados. También, nos proporcionan información acerca del estatus que le asignan los profesores a este importante concepto, dentro de todo el contexto del cálculo integral.

De forma general, este estudio pone de manifiesto algunas ideas erróneas que tienen los profesores de cálculo, respecto a los conceptos de integral indefinida y de primitiva, como se detalla en párrafos más adelante. Asimismo, se pudo observar que el instrumento utilizado para este trabajo al final cumplió dos funciones, la primera, como se dijo antes, fue proporcionarnos información acerca de la comprensión que tienen los profesores del concepto de integral indefinida, y la segunda, fue que llevó a los profesores a reflexionar sobre algunas ideas centrales en torno a los conceptos de integral e integral indefinida. Sin embargo, aun cuando cada profesor manifestaba haber entendido la solución de los problemas conforme se iban planteando y resolviendo las actividades, la comprensión de este concepto no era plena, como lo mostrarían problemas subsecuentes. Una completa comprensión del concepto de integral indefinida requiere de un tiempo de maduración de las ideas involucradas en este concepto; sin embargo como se mencionó líneas arriba, las preguntas del instrumento adoptado, ayudaron a reflexionar y profundizar en la comprensión de este concepto.

De esta manera, durante el transcurso de las discusiones de cada actividad, los profesores modificaron las ideas erróneas que tenían respecto algunas situaciones conflictivas que se les presentó en el cálculo de integrales indefinidas, como son: la presencia y significado de la constante de integración, la obtención de diversas soluciones al calcular una integral indefinida por diferentes métodos, y situaciones donde es importante analizar el dominio donde es diferenciable la primitiva obtenida mediante un método particular; estas situaciones, fueron descritas con más detalle en el capítulo 1. También, precisaron sus conocimientos acerca de los casos en donde las funciones no tienen una primitiva elemental, es decir, no tienen primitiva que sea una función elemental. De hecho, conforme se llevaban a cabo las actividades, se pudo observar que cada profesor mostraba un avance en la comprensión de las ideas del concepto de integral indefinida, de tal manera que la última pregunta de la actividad cuatro, fue resuelta de manera exitosa por todos los profesores participantes.

También se observó que, durante el desarrollo de las actividades y de todo el proceso de comprensión obtenido durante las sesiones de discusión, condujo a cada profesor a acciones que son significativas cuando se está aprendiendo matemáticas, mismas que son desarrolladas en el trabajo de Hiebert & Carpenter (1992) y que expusimos en el capítulo 2: el entendimiento es generativo, el entendimiento promueve el recordar, el entendimiento reduce la cantidad de información que debe ser recordada, el entendimiento mejora la transferencia, y el entendimiento influye en las creencias. Algunas características de estas consecuencias, quedaron en evidencia después de la conclusión de cada actividad, los conocimientos adquiridos durante las actividades realizadas, jugaron un papel importante y se pusieron de manifiesto en la resolución de los problemas planteados en las actividades subsiguientes. Lo antes escrito, se pudo lograr debido a que el instrumento aplicado se diseñó con base en las actividades mentales que favorecen un aprendizaje con comprensión, en el sentido de las ideas expresadas por Carpenter & Lehrer (1999) que son: construcción de relaciones, extensión y aplicación de conocimiento matemático, reflexión sobre las experiencias, articulación de lo que el individuo conoce, y apropiación del conocimiento matemático; las cuales, favorecieron la comprensión del concepto de integral indefinida y son detalladas en el capítulo 2.

Por otra parte, respecto a la primera pregunta general de investigación planteada
1. *¿Qué conocimiento matemático tiene el profesor acerca del concepto de Integral Indefinida?*
se derivaron diferentes preguntas. Con la primera de ellas se pretende indagar el significado que le dan los profesores, al concepto de integral indefinida:
*¿Qué significado tiene la Integral Indefinida para un profesor?*
Al respecto, podemos decir que la mitad de los profesores concebían la integral indefinida como una familia de primitivas; dos profesores como una primitiva, y las respuestas de los profesores restantes, no aportaron suficientes elementos que mostraran que tenían una idea clara sobre lo que significa la integral indefinida. Sus respuestas fueron ambiguas o carentes de sentido.

Las discrepancias entre las respuestas de la mitad de los profesores y las de los dos profesores, se debe a las diferentes acepciones que los autores de libros de cálculo adoptan de los conceptos de integral indefinida. Las respuestas emitidas por los profesores solamente reflejan las acepciones adoptadas por los autores de los textos que leen. De esta manera, ya sea que los profesores entiendan la integral indefinida como una primitiva o como la familia de primitivas, es el concepto de familia de primitivas el que prevalece en la concepción de integral indefinida, esto es, la familia de funciones cuyas derivadas son la función dada.

El término primitiva también es la respuesta de la pregunta dos de la primera parte del cuestionario, donde se preguntaba por el nombre que recibe la función $F$ que satisface la relación

$F'(x) = f(x)$; sin embargo, se pudo percibir en las respuestas correspondientes a las preguntas y actividades restantes, una problemática relativa al intervalo donde es diferenciable una función primitiva. Por ejemplo, en la pregunta ocho donde se pregunta si toda antiderivada es continua, la mayoría de los profesores respondieron que una primitiva no necesariamente es continua, mencionando como ejemplo, el cálculo de una primitiva representada por una función definida por piezas. En este caso, existen dos conflictos presentes en las respuestas de estos profesores; el primero se refiere a una mala concepción del concepto de continuidad: existe la idea errónea de que una función definida por piezas siempre es discontinua, olvidando el carácter puntual de la definición de continuidad, es decir, solo podemos hablar de continuidad para los puntos pertenecientes al dominio de la función; el segundo conflicto es respecto a la comprensión de la definición de primitiva: los profesores no cayeron en cuenta que una primitiva de una función, siendo derivable necesariamente es continua. El resultado de que toda función derivable es continua, es ampliamente conocido por los profesores, sin embargo cuando se les hace esta pregunta en términos de primitivas parecen olvidarlo. Otro ejemplo se presentó en la actividad dos, en la cual, la mayoría de los profesores no se percataron de que el dominio de la función $-\log(\log(\cos x))$ es el conjunto vacío; lo que ellos hicieron, fue calcular algebraicamente y de manera formal su derivada sin reparar antes en verificar que esta función estuviera definida en el mismo dominio que la función integrando.

Otra situación que se presentó en el cálculo de la familia de primitivas, y que evidenció ideas erróneas de los profesores, fue respecto a la presencia de la constante de integración. La siguiente pregunta, nos proporciona información acerca de la justificación que le dan los profesores a la adición de dicha constante a una primitiva dada.

*¿Comprende el profesor el papel que juega la constante de integración?*

Respecto a esta pregunta, podemos decir que siete de los diez profesores encuestados, saben que con la presencia de la constante de integración se genera la familia de primitivas aun cuando no entienden la justificación; es decir, los profesores dieron como justificación el hecho de que si a una primitiva se le adiciona una constante se obtiene otra primitiva, pero no se percataron de que eso no justifica que la familia completa de primitivas se genera de esa manera, lo cual se sustenta en el resultado no trivial de que si dos funciones tienen la misma derivada entonces difieren en una constante, hecho que a su vez se sustenta con el teorema del valor medio. Los tres profesores restantes, conciben que el papel que juega la constante de integración en la integral indefinida repercute en la posición geométrica de la función primitiva; es decir, para estos profesores la constante de integración indica en la gráfica de la función primitiva las traslaciones verticales de la curva. No obstante, en la actividad tres por ejemplo, se puso en evidencia que el profesor no tiene claro de cómo se genera la familia de primitivas cuando la primitiva está definida en intervalos abiertos ajenos, para lo cual intervienen varias constantes de integración, una para cada uno de los intervalos de definición, ajenos, que constituyen el dominio de definición de la función integrando.

Respecto a la obtención de diversas soluciones al aplicar diferentes métodos de integración para calcular una integral indefinida, podemos decir que todos los profesores excepto uno de ellos, concebían la idea de que se pueden obtener diversas expresiones para la solución dependiendo de las habilidades y destrezas que se tengan; es notable que algunos profesores tienen dificultades con el reconocimiento de integrales inmediatas.

Por otra parte, respecto a la pregunta

*¿Qué recursos tiene el profesor para determinar primitivas de funciones simples no rutinarias?*

Podemos decir que los recursos matemáticos mostrados por algunos profesores son: la estrategia de analizar el integrando antes de calcular la integral indefinida, el uso de identidades trigonométricas, el reconocimiento de integrales inmediatas, y el empleo de algunas propiedades de la integral indefinida. No obstante, la mayoría de los profesores presentaron conflictos en su uso; por ejemplo, la mitad de los profesores encuestados no reconocieron la integral inmediata $\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$.

Una situación conflictiva que no fue superada por ellos mismos, fue la del caso en el que una primitiva está definida por piezas. No aceptaban que fuese válido acudir a diversas expresiones para tener definida una primitiva en el dominio de definición del integrando. Esto se evidenció principalmente en la resolución de las actividades uno y tres.

Respecto a la función $e^{-x^2}$ sin primitiva elemental, se obtuvo evidencia de la falta de conocimiento por parte de ocho profesores sobre esta integral no elemental; la mayoría de estos profesores intentaron calcularla por el método de integración por partes.

Con lo escrito en los párrafos anteriores, se puede percibir que ningún profesor de los diez aquí encuestados, tiene conocimiento de todas las situaciones conflictivas en el cálculo de la integral indefinida (descritas con detalle en el capítulo 1); de hecho, durante el análisis de las respuestas, se obtuvo evidencia de esto. Por ejemplo, pocos son los profesores que tienen conocimiento acerca del dominio de derivabilidad de una función primitiva, así como de la integral no elemental $\int e^{-x^2}dx$. De esta manera, aunque todos los profesores que participaron en esta investigación reconocieron la definición de primitiva, ninguno comprende con profundidad esta definición, lo que conlleva a no tener una profunda comprensión respecto al concepto de integral indefinida.

Lo que se evidenció con las respuestas de cada uno de los diez profesores, es una comprensión *superficial* respecto al concepto de integral indefinida. La mayoría de los participantes de esta investigación, no comprenden las diversas situaciones conflictivas respecto al cálculo de la familia de primitivas. Ellos mostraron ideas erróneas principalmente en las siguientes situaciones: el papel que juega la constante de integración, dominio de derivabilidad de una primitiva, existencia de integrales no elementales, y lo referente al concepto de continuidad. Por lo cual, estas situaciones son las que se deben profundizar para poder obtener una profunda comprensión del concepto de integral indefinida. Esto se puede lograr mediante situaciones no rutinarias como las planteadas en las actividades del cuestionario aplicado, que conduzcan al profesor hacia una reflexión sobre estas ideas centrales pertenecientes a este concepto del cálculo integral.

Para la segunda pregunta general de investigación planteada
2. *¿Cómo ubican los profesores el concepto de Integral Indefinida en el contexto de todo el Cálculo?*
para responderla, primero nos preguntamos sobre el uso que le dan los profesores encuestados a una primitiva; para ello nos formulamos la siguiente pregunta:
*¿Comprende el profesor el uso de una primitiva de una función $f$?*
Respecto a esta pregunta, tres profesores respondieron que el cálculo de primitivas es importante para calcular el área bajo la curva de una función; cinco profesores más, mencionaron que el cálculo de primitivas es importante por su uso en otras áreas de la ciencia, así como su aplicación en el modelado de fenómenos físicos; y las respuestas dadas por los dos profesores restantes, mencionan que es importante el cálculo de primitivas porque ayuda a determinar de forma "general" la integral de una función.

Respecto al párrafo anterior, podemos decir que solamente tres de los diez profesores se refieren de manera implícita al teorema fundamental del cálculo, al responder que son importantes para calcular el área bajo una curva, sin embargo este teorema no lo mencionan de manera explícita. Las respuestas de los ocho profesores restantes dejan mucho que desear.

Por lo tanto, pocos son los profesores que ubican la importancia del cálculo de primitivas con el uso del teorema fundamental del cálculo. Puesto que recordemos, que la relevancia de este concepto se hace patente solamente hasta que se estudia la integral definida y su cálculo mediante el teorema fundamental del cálculo.

En suma, la comprensión del concepto de integral indefinida por parte de los profesores de bachillerato aquí encuestados, se muestra en las anteriores respuestas correspondientes a las preguntas de investigación planteadas, de donde se pudo observar que la comprensión de este concepto no es profunda. Esto es, en general, ningún profesor encuestado tiene conocimiento de todas las situaciones conflictivas en el cálculo de la integral indefinida. Por ejemplo, la mayoría de estos profesores, no conocen que la importancia del cálculo de primitivas estriba en el uso del teorema fundamental del cálculo durante el estudio del concepto de integral definida. El estudiar primero la integral definida, le puede permitir al profesor visualizar la importancia de la integral indefinida, además, de que esto puede dar pauta para el estudio de la situación respecto al dominio de derivabilidad de una función primitiva.

Otra situación que se debe profundizar y que se sigue de la situación descrita en el párrafo anterior, es sobre el papel que juega la constante de integración en el cálculo de la familia de primitivas; en este caso, el comprender la justificación de la presencia de la constante de integración en el cálculo de integrales indefinidas, le permite al profesor poder justificar la obtención de diversas soluciones al calcular una integral indefinida mediante distintos métodos de integración así como entender el significado de la expresión *toda la familia de primitivas.* También, en este trabajo, se pudo observar una problemática respecto a la comprensión de los profesores encuestados, acerca del carácter puntual de la definición de continuidad; sin lugar a dudas, es importante comprender este importante concepto del cálculo diferencial antes de abordar el estudio del concepto de integral indefinida.

Finalmente, para concluir este trabajo diremos que el reflexionar acerca de estas situaciones conflictivas respecto al concepto de integral indefinida, nos conducirá hacia un aprendizaje con comprensión acerca de este concepto, entendiendo que son los profesores mismos quienes influyen en la forma en cómo se aprende y se aplica este importante concepto en la matemática misma.

# Apéndice A

**Cuestionario Aplicado**

Instrucciones: Lee cuidadosamente cada pregunta y responde lo más claro posible.

1. Diga lo que significa cada uno de los siguientes conceptos:

   - Integral de una función
   - Integral indefinida
   - Integral definida

2. ¿Qué nombre recibe una función $F$ que cumple $F'(x) = f(x)$ para toda $x$ en un intervalo $I$?

3. ¿Qué significado tiene la igualdad $\int f(x)dx = F(x)$?

4. ¿Qué papel juega la constante de integración en la integral indefinida?

5. Suponga que tres alumnos obtienen por diferentes métodos de integración los siguientes resultados

$$\int \text{sen } x \cos x dx = \frac{\text{sen}^2 x}{2} + C_1$$
$$\int \text{sen } x \cos x dx = -\frac{\cos^2 x}{2} + C_2$$
$$\int \text{sen } x \cos x dx = -\frac{\cos 2x}{4} + C_3$$

   ¿Los acepta como resultados correctos? Justifique su respuesta.

6. Con base en la pregunta anterior, responda: ¿Con cuál de los tres resultados obtenidos por los alumnos se genera la familia de primitivas de la función $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$? Argumente su respuesta.

7. ¿Qué puede decir acerca de la integral $\int e^{-x^2} dx$?

8. ¿Toda antiderivada es continua? Justifique su respuesta.

9. ¿Cuál es la importancia del cálculo de primitivas dentro de todo el contexto del Cálculo?

**Actividad 1**. Calcule la integral: $\int |x| dx$.

**Actividad 2**. Analice el siguiente cálculo de la integral $\int \frac{\tan x}{\log(\cos x)} dx$.

Escribiendo

$$\int \frac{\tan x}{\log(\cos x)} dx = -\int \frac{-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\log(\cos x)} dx. \tag{1}$$

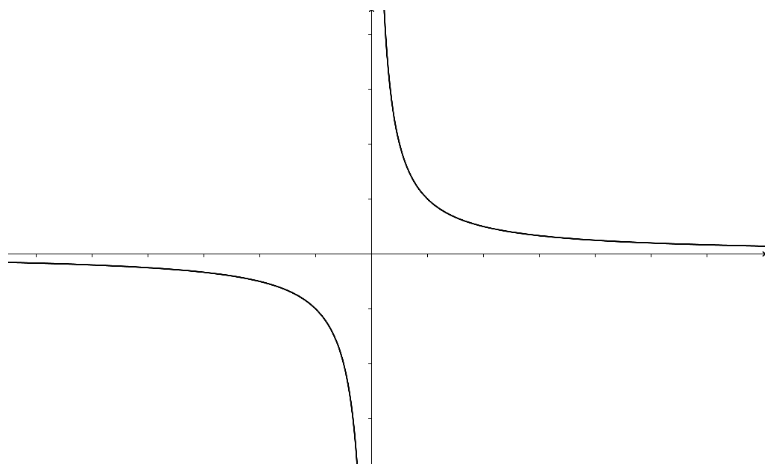
En vista de que la expresión $-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ es la derivada de la función $\log(\cos x)$, haremos la sustitución $u = \log(\cos x)$, de modo que $du = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx$. De esta manera, el integrando de la segunda integral en (1) se puede expresar en términos de $u$ como sigue:

$$-\int \frac{-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\log(\cos x)} = -\int \frac{du}{u} = -\log(u) + C = -\log(\log(\cos x)) + C.$$

Obteniendo finalmente que $\int \frac{\tan x}{\log(\cos x)} dx = -\log(\log(\cos x)) + C$.

*¿Es correcto este resultado?* Justifique su respuesta.

**Actividad 3**. Para responder los siguientes incisos, considere la función $f(x) = \frac{1}{x}$ cuya gráfica se muestra en la siguiente figura:

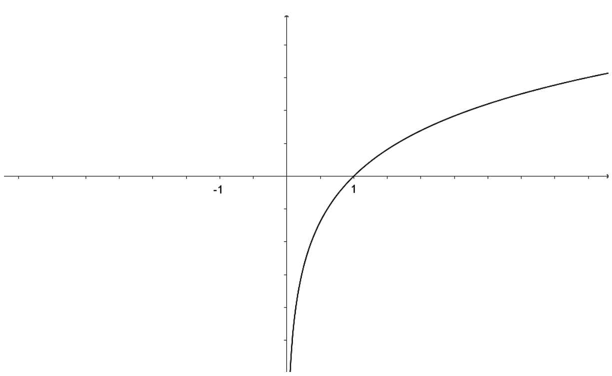


Gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$

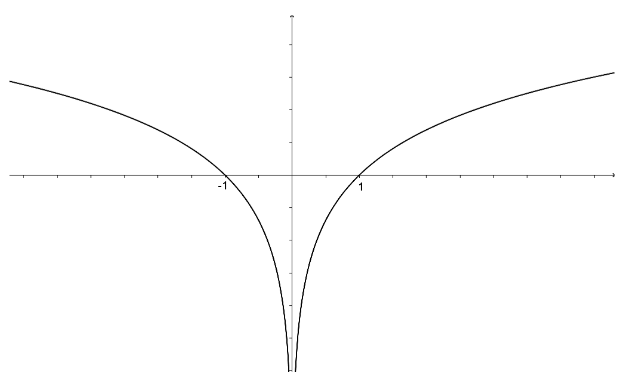
1. Calcule la integral: $\int \frac{1}{x}dx$.

2. De la consulta de diversos libros de cálculo elemental y mediante el uso de algunos softwares para el cálculo de integrales, se han obtenido los siguientes resultados:

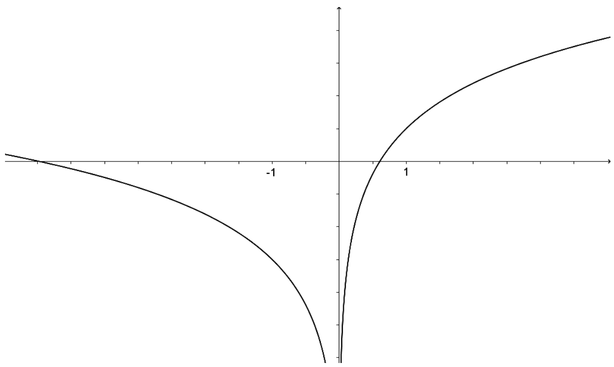
**(a)** $\int \frac{1}{x}dx = \log(x)$



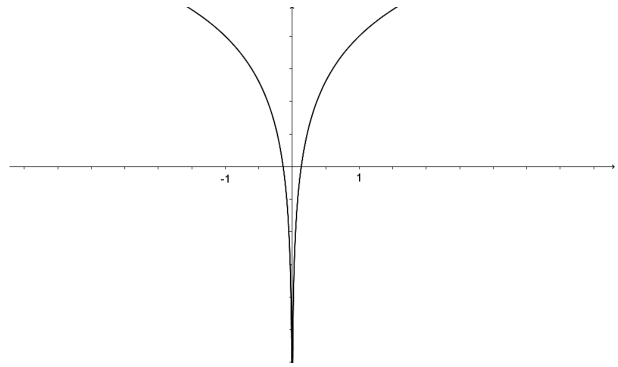

**(b)** $\int \frac{1}{x}dx = \log|x|$



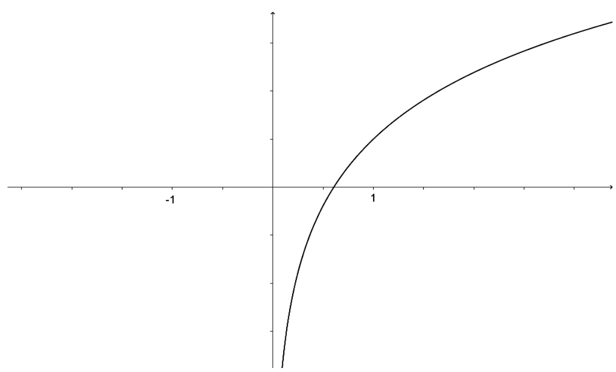
**(c)** $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \begin{cases} \log|x| + C_1, & \text{para } \ x < 0; \\ \log|x| + C_2, & \text{para } \ x > 0. \end{cases}$




**(d)** $\int \frac{1}{x}dx = \log|x| + C$




**(e)** $\int \frac{1}{x}dx = \log(x) + C$




*¿Son correctos estos resultados?* Argumente su respuesta para cada inciso.

**Actividad 4**. Suponga que dos alumnos obtienen por diferentes métodos de integración los siguientes resultados

$$\int \frac{2}{5+3\cos x}dx = \arctan\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\right),$$
$$\int \frac{2}{5+3\cos x}dx = \frac{x}{2} - \arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x+3}\right).$$

Denotando como $F(x) = \arctan\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\right)$ y $G(x) = \frac{x}{2} - \arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x+3}\right)$, se le preguntó a cada estudiante si $F(x)$ y $G(x)$ representaban una primitiva específica de $f(x) = \frac{2}{5+3\cos x}$, con lo cual cada estudiante procedió a calcular $F'(x)$ y $G'(x)$ respectivamente de la siguiente manera:

Para $F(x)$ se obtuvo:

$$F'(x) = \arctan'\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\right) = \frac{(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2})'}{1+(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2})^2} = \frac{\frac{1}{4}\sec^2\frac{x}{2}}{1+\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{4+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{4+\tan^2\frac{x}{2}}$$
$$= \frac{1+\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{4+\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{4\cos^2\frac{x}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{1}{3\cos^2\frac{x}{2}+1} = \frac{1}{\frac{3+3\cos x}{2}+1} = \frac{2}{5+3\cos x}.$$

Por otra parte, para $G(x)$ se calculó:

$$G'(x) = \frac{1}{2} - \arctan'\left(\frac{\operatorname{sen}\, x}{\cos x+3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{(\frac{\operatorname{sen}\, x}{\cos x+3})'}{1+(\frac{\operatorname{sen}\, x}{\cos x+3})^2} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{(\cos x+3)\operatorname{sen}' x - \operatorname{sen}\, x(\cos x+3)'}{(\cos x+3)^2}}{\frac{(\cos x+3)^2+\operatorname{sen}^2 x}{(\cos x+3)^2}}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{\frac{\cos^2 x+3\cos x+\operatorname{sen}^2 x}{(\cos x+3)^2}}{\frac{\cos^2 x+6\cos x+9+\operatorname{sen}^2 x}{(\cos x+3)^2}} = \frac{1}{2} - \frac{3\cos x+1}{6\cos x+10} = \frac{6\cos x+10-6\cos x-2}{12\cos x+20} = \frac{2}{5+3\cos x}.$$

Dado que $F'(x) = G'(x) = f(x)$, los dos estudiantes argumentaron que tanto $F(x)$ como $G(x)$ representaban una primitiva de $f(x) = \frac{2}{5+3\cos x}$.

1. *¿Es correcta la respuesta dada por ambos estudiantes?*

2. Usando el Teorema Fundamental del Cálculo y las funciones $F(x)$ y $G(x)$, calcule la integral definida $\int_0^{2\pi} \frac{2}{5+3\cos x}dx$.

3. Si observa alguna discrepancia en los resultados, *¿Cómo explica esa situación?*

# Apéndice B

**Fragmentos de las Discusiones Realizadas para cada Actividad**

- **Actividad 1.**

**Diálogo 1:**

Entrevistador: ...¿Cuál es tu solución?

Profesor 2: Mi solución bueno, yo digo que como la definición de valor absoluto es igual a equis cuando es mayor o igual a cero y menos equis cuando equis es menor que cero, necesito una función que me de también esos dos valores, y entonces, tomo menos equis al cuadrado sobre dos más una constante cuando equis es menor que cero para que al derivarlo me de menos equis, y equis al cuadrado sobre dos más una constante cuando equis es mayor o igual que cero, y ya entonces tengo la misma definición de valor absoluto en dos partes.

**Diálogo 2:**

Entrevistador: ...la función [la primitiva] no debe ser una función de una sola expresión.

Profesor 10: [lo expresa casi al mismo tiempo] No necesariamente debe ser de una sola expresión.

Profesor 5: ¡Ah ya!, no necesariamente se tienen que sumar.

Entrevistador: No se suman, de hecho yo no sume, ¿Por qué intentaron sumar?

Profesor 5: ¡Exactamente!, no necesariamente se tienen que sumar, ¿No? [vuelve a reafirmar].

Profesor 1: Por que quería verla como una función de una sola pieza.

Profesor 10: Quería obtener la integral de la función original.

Profesor 1: [interrumpe] Total, toda completa ¡ajá!

Entrevistador: ¡Exactamente! y no siempre se puede.

Profesores: [todos al mismo tiempo] ¡Ah, claro!...

**Diálogo 3:**

Profesor 8: ...por ejemplo si tu piensas [pausa] esta integral como el área bajo la curva, obtienes dos veces, dos veces la integral de equis.

Entrevistador: ¡Mmmm! Sí, si lo veo como una integral definida [y simétrica respecto al eje $y$], sí; pero estamos calculando una integral indefinida, que debe ser una función cuya derivada sea el valor absoluto de equis.

Profesor 8: Mmmm, sí, sí.

**Diálogo 4:**

Entrevistador: ...¿Por qué éstas son iguales? [las constantes de integración].

Profesor 10: ¿Las constantes?

Entrevistador: ¿O no son iguales? o ¿Deben ser iguales?

Profesores: ¡No necesariamente!

Entrevistador: ¿Por qué no?

Profesor 5: Corresponden a la misma, este, función, ¿No?, bueno, es la misma familia de antiderivadas.

Profesor 1: Pero si es la misma familia de antiderivadas serían iguales.

Entrevistador: ¿Qué pasa si yo gráfico ésta? [la función primitva definida por piezas]... es mas o menos así... si yo les cambio ésta [la constante $C_1$] y dejo la otra igual

[$C_2$], y ¿Qué pasa ahí?

Profesor 10: ¡Ya no es continua!

Entrevistador: Ya no es continua.

Profesor 10: Entonces para que fuera continua la constante debe ser la misma.

Profesor 1: ¡Cero!

Entrvistador: ¡La misma!

Profesor 1: ¿La misma?

Profesor 10: Sí, porque como dice él [entrevistador], si la cambia, ya tiene un salto la gráfica.

Profesor 5: ¡Un salto! [reafirma lo que dice el profesor 10], ¡exacto!

Profesor 1: ¡Y ya no es continua!

Profesor 6: Y sí, porque así como dices no es una suma, no son dos integrales es una sola, y una sola integral y una sola constante.

Profesor 1: ¡para ambas! [hace referencia a cada pieza de la función primitiva]

Profesor 10: Y si la cambias la constante [$C_1$] debe ser la misma constante para la otra [$C_2$] para que vuelva a subir ésta [hace referencia a la función $-\frac{x^2}{2}$] y siga siendo continua.

Entrevistador: ¡Exactamente!... por eso siempre es la misma.

- **Actividad 2.**

**Diálogo 1:**

Entrevistador: ... ¿Cuál fue la solución que dieron al ejercicio de la actividad dos?, ¿Cómo comprobaron que el resultado es correcto? o ¿Quién dice que el resultado es correcto?

Profesores: ¡Yo! [la mayoría dice que el resultado es correcto]

Entrevistador: Casi todos, ¿Por qué?

Profesores: ¡Derivando!

Profesor 3: ¿Cómo lo comprobamos?, pues derivando, ¿No?

Profesor 5: Bueno, en primera yo integré toda la función como estaba la original y llegue al mismo resultado, después hice la inversa, derivé y llegue al mismo resultado, aplicando claro identidades como se indica.

Entrevistador: ¡Ok! ¿Todos de acuerdo?

Profesores: ¡Sí!

**Diálogo 2:**

Profesor 9: ... bueno le había comentado [al entrevistador] que tenía duda nada más con los límites de integra..., ah bueno digo con el dominio de la función, eh, en el denominador había unas partes negativas, bueno, tocaba partes negativas y el logaritmo no puede tomar partes negativas, pero bueno, ya haciendo las consideraciones adecuadas de que se está integrando solo en los intervalos que, que son, donde se considera que existe la función, entonces sí, me parece que sí es correcta la, la ah, el cambio de variable que hacen aquí para hacer la integral y es más, bueno la dejamos así, yo luego en la comprobación lo único que hice fue, este, derivar la función que nos estaban dando y llegar a la función original.

**Diálogo 3:**

Entrevistador: ... o sea, si yo dijera calcula la integral de uno en equis $d$ de equis cuando equis es mayor que cero, entonces es esto [haciendo referencia a la integral $\int \frac{dx}{x} = \log(x)$].

Profesor 2: ¡Aja!

Profesor 9: ¡Ya!, ya se a que vas, es el valor absoluto.

Entrevistador: ¡Claro!, es el valor absoluto, siempre es el valor absoluto.

Profesor 9: Sí, sí tienes razón, sí de hecho así definen muchas, bueno no se si en ese formulario venga así.

Profesor 2: ¡No! aquí no viene.

Profesor 9: ¡Sí!, sí viene.

Profesor 2 ¡Ah sí!, faltaría el valor absoluto, ¿No?

Entrevistador: Esta es una de las principales razones por la que va siempre el valor absoluto... entonces ya vimos que siempre es importante ponérselo [haciendo referencia a la expresión $-\log(\log(\cos x))$], ¿No?

Profesor 9: ¡Sí!, de hecho sí, sí tienes razón, es importante.

Profesor 2: ¡Aja!

Profesor 9: Más en este caso.

- **Actividad 3.**

**Diálogo 1:**

Entrevistador: ... primero díganme ¿Cuáles son los resultados correctos para ustedes?... si lo vemos como que aquí [haciendo referencia a la integral $\int \frac{dx}{x}$] nos piden la familia de primitivas, todas...

Profesor 6: Para mi la completa.

Entrevistador: Ok, ¿Para ti cuál es la correcta?

Profesor 6: Para mi la correcta completa es la $d$, por que está utilizando para valores tanto positivos negativos y con la $C$ [refiriéndose a la constante de integración] nos hace mención de toda la familia de primitivas.

Entrevistador: Ok, para ti... [dirigiéndose al profesor 5].

Profesor 5: ¡Lo mismo!

Entrevistador: Ok, entonces ¿Los demás están mal? [haciendo referencia a los demás incisos].

Profesor 5: Este, ¡sí!.

Entrevistador: Para ti... [dirigiéndose al profesor 3].

Profesor 3: Para mi la $d$ también, las demás están mal.

Entrevistador: Para ti... [dirigiéndose al profesor 10].

Profesor 3: También la $d$, pero yo también puse que la $c$ también.

Entrevistador: ¡Ok! a ver, entonces vamos por la $a$ [refiriéndose al inciso $a$], la $a$ está mal porque no nos genera toda la familia de primitivas.

Profesores: ¡Exactamente! [todos están de acuerdo].

Entrevistador: ¿La $b$? [refiriéndose al inciso $b$].

Profesor 6: Falta la constante.

Profesor 10: ¡Aja! también, está mal por que falta la constante.

Profesor 1: ¡Falta la constante! [lo expresa al mismo tiempo que el profesor 10].

Entrevistador: ¿La $e$? [refiriéndose al inciso $e$].

Profesor 5: Nada mas nos genera una parte.

Profesor 1: Solo te toma la parte.

Profesores: ¡La parte positiva! [Todos completan la frase del profesor 1].

Profesor 10: Entonces por la gráfica estaría mal.

Entrevistador: Vamos a la $d$ [refiriéndose al inciso $d$], ¿La $d$ dicen que me toma positivos y negativos? [valores de la función $\log|x|$].

Profesores: ¡Sí!

Entrevistador: Y eso es, si yo derivo ésta [haciendo referencia a la función $\log|x| + C$] me da esto, ¿no? [haciendo referencia a la función integrando].

Profesores: ¡Sí!

Entrevistador: Ahora, am, ésta está definida por dos intervalos ¿no? [haciendo referencia a la familia de primitivas del inciso $c$]

Profesor 5: ¡Sí! exacto.

Entrevistador: Para equis positivo y para equis negativo, ¿Ok? entonces, si yo derivo cualquiera de éstas, si derivo ésta... para equis menor que cero, que sería esta parte, están de acuerdo que si la derivo me va a dar ésta [la función $\frac{1}{x}$] para cualquier [valor] $C$ que yo le de; y si yo derivo esto [la función $\log|x| + C_1$ para $x > 0$] me va a dar esta parte [la parte positiva de la función integrando] para cualquier $C$ que yo le de, entonces no necesariamente deben ser iguales [las constantes de integración] ¿No?

Profesores: Umm... ¡ajá!.

Profesor 1: Entonces ahí la correcta sería el inciso $c$.

Entrevistador: La correcta o la completa es la $c$...

**Diálogo 2:**

Profesor 2: $c$, $d$ y $e$ yo digo que son equivalentes.

Entrevistador: ¿$c$, $d$ y $e$?

Profesor 2: Sí.

Entrevistador: Tu... [profesor 9] ¿Por qué dices que $e$ no puede ser?

Profesor 9: Porque, no amm.

Entrevistador: ¡Convénceme!.

Profesor 9: Por que el dominio de equis va desde menos infinito hasta mas infinito [para la función $\frac{1}{x}$], y el, la respuesta ésta [$\log(x) + C$] que nos está dando, bueno de la función efe de equis igual a uno entre equis va desde menos infinito hasta mas infinito, y la respuesta que tenemos aquí umm efe [$\log(x) + C$] solo cubre la parte donde, bueno la parte del dominio que va desde cero hasta, o bueno, ni cero, bueno va de cero al infinito pero es un intervalo abierto, entonces realmente no es toda la función.

Profesor 2: Lo que pasa es que, estamos hablando de la gráfica del logaritmo, el logaritmo su dominio va de cero a infinito.

Profesor 9: Ajá.

Profesor 2: Y, o sea, para mi es equivalente por que no puedo tomar de, los negativos.

Profesor 9: Bueno yo tomando en cuenta también que.

Profesor 2: O sea no [interrumpe], ¡perdón! o sea no en relación a la función uno en equis porque uno entre equis es lo que estamos integrando pero lo que estamos analizando es la respuesta.

Profesor: 9: Ajá, pero.

Profesor 2: La primitiva, cual es la primitiva correcta, y la primitiva correcta tiene otro dominio, no debe tener exactamente el mismo dominio que la integral, o ¿Sí?.

Profesor 9: Yo creo que ahí, yo creo que sí porque como hicimos en el ejercicio anterior que, bueno aquí con Isaías que habíamos, que no me convencía la integral porque realmente el intervalo donde se estaba integrando no existía y mas o menos por ahí va el asunto, entonces este, aquí viene lo mismo, no puedes, si derivas ésta función [$\log(x) + C$] en teoría solo vas a encontrar la, ¡ah! bueno no, es que.

Profesor 2: [interrumpe] Es que son funciones lo que encuentras, y nada mas tienes que determinar cuál es su dominio, y si en el dominio está, si está, este...

Profesor 9: [interrumpe] Pero es con respecto a la misma variable, sí es una función pero la variable independiente es la misma para las dos, entonces no puedes decir que ésta [$\frac{1}{x}$] sí la evalúas de menos infinito hasta mas infinito y ésta [$\log(x) + C$] nada mas la tomas desde cero hasta más infinito, bueno es mi opinión y por eso la importancia de la parte anterior [actividad 2], ¿no? que habíamos dicho que tenía que ser el valor absoluto.

• **Actividad 4.**

**Diálogo 1:**

Entrevistador: ... ¿La correcta es ge de equis?.

Profesor 2: ¡Sí!

Entrevistador: ¿Por qué?

Profesor 9: Porque tiene que ver con el dominio de la función, ésta [$F(x)$] tiene una tangente de pi medios, pero eso entonces nos hace ver que el dominio de las respuestas solo está entre pi medios y [pausa], está definida solo en un intervalo que va de entre pi medios y [pausa], de menos pi medios a pi medios, entonces este, bueno pues no importa que valores le ponga a equis, este, va a llegar un momento, donde, por decir en este caso valga pi se va a indefinir la función, y entonces este, pero para pi sí existe el valor de la integral.

Entrevistador: ¿De la integral?

Profesor 9: ¡Exactamente!

Entrevistador: Ok, entonces para efe de equis ¿Su dominio es una unión de intervalos?

Profesor 9: ¡Sí!.

Profesor 2: ¿Cómo?

Entrevistador: El dominio de la función efe de equis es una unión de intervalos, donde quitas puntos donde no se define la tangente.

Profesor 2: ¡Ajá!, y la otra es continua, la original, bueno la función integral es continua [la función integrando], no tiene discontinuidades.

Entrevistador: ¡Ok!

Profesor 2: Y la segunda la ge [$G(x)$], igual es continua.

**Diálogo 2:**

Entrevistador: ...¿Por que ocurrió eso?

Profesor 2: Yo digo, yo digo que porque, efe mayúscula de equis se está evaluando de cero a pi sobre dos, sin considerar los intervalos, se tiene que evaluar por pi en cada intervalo que está definida, para tener una respuesta correcta.

Entrevistador: ¡Ok!

Profesor 2: Que no necesariamente van a ser iguales [los resultados], ¿Verdad?, am no se, pero si para evaluarla no se va a evaluar nada mas de dos pi a cero así como si fuese continua.

Entrevistador: Entonces tu dices que podemos usar esta función $[F(x)]$ para calcular esta integral.

Profesor 2: No, es que aquí dice que utilizando efe y ge como si fueran la primitivas correctas, entonces efe se tiene que ir calculando por intervalos.

Entrevistador: Ok, ¿Pero sí la podemos usar como primitiva pero por intervalos?

Profesor 2: O sea que como primitiva, yo digo que no se si los resultados vayan a ser los mismos, pero si evaluarla, de cero a pi sobre dos no la puedo avaluar nada mas así, tengo que separarlas.

Entrevistador: Ok.

# Bibliografía


[1] Apostol, T. M. (1998). *Calculus* (Vol 1). D.F., México: Editorial Reverté.

[2] Arana, A. (2008). *Esenciales de... cálculo*. D.F., México: Santillana.

[3] Artigue, M. (2004). Problemas y desafíos en educación matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos? *Educación Matemática*, *16*(3), 5-28.

[4] Ayres, F. (1983). *Cálculo diferencial e integral*. México: McGRAW-HILL.

[5] Callejo, M. L. & Vila, A. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar: El papel de las creencias en la resolución de problemas*. Madrid, España: NARCEA.

[6] Carpenter, T. & Lehrer, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. En E. Fennema, and T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding*, (pp. 19-32). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

[7] Cornu, B. (1991). Limits. En D. O. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*, (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer.

[8] Courant, R. y Herbert, R. (1979). *¿Qué es la matemática?*. Madrid, España: Editorial Aguilar.

[9] De Oteyza, E. (2006). *Conocimientos fundamentales de matemáticas: cálculo diferencial e integral*. México: PEARSON EDUCACIÓN.

[10] Díaz, M. (2011). *La comprensión de la derivada y sus significados. Un estudio de caso con profesores de bachillerato.* (Tesis de Doctorado no publicada). Departamento de

Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

[11] Fennema, E. & Romberg, T. (1999), *Mathematics classrooms that promote understanding*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

[12] Ferrara, F., Pratt, D. & Robutti, O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. En A. Gutiérrez, and P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*, (pp. 237-273). The Netherlands: Sense Publishers.

[13] Fuenlabrada, S. (2003). *Cálculo integral* (2ª ed.). D.F., México: McGRAW-HILL.

[14] Grabiner, J. V. (1983). The changing concept of change: the derivative from Fermat to Weierstrass. *MATHEMATICS MAGAZINE*, *56*(4), 195-206.

[15] Granville, W. A. (1982). *Cálculo diferencial e integral*. México: Editorial Limusa.

[16] Hiebert, J. & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. En A. D. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 65-97). New York, Macmillan Publishing Co.

[17] Hughes-Hallett, D., Gleason, A. M., Flath, D. E., Frazer, P., Gordon, S. P., Lomen, D. O., ... Thrash, K. R. (2003). *Cálculo* (2ª ed.). D.F., México: CONTINENTAL.

[18] Ibáñez, P. y García, G. (2011). *Matemáticas VI: cálculo integral*. D.F., México: CENGAGE Learning.

[19] Ímaz, C. & Moreno, L. A. (2010). *La génesis y la enseñanza del cálculo*. D.F., México: Trillas.

[20] Judson, T. W. & Nishimori, T. (2005). Concepts and skill in high school calculus: An examination of a special case in Japan and the United States. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(1), 24-43.

[21] Morales, F. (2004). *Cálculo Integral.* D.F., México: FONDO DE CULTURA ECONÓMICA.

[22] National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Virginia: Reston.

[23] Ponce-Campuzano, J. C. & Rivera-Figueroa, A. (2011a). Un análisis del uso de la tecnología para el cálculo de primitivas. *Revista Números*, *77*, 85-98.

[24] Ponce-Campuzano, J. C. & Rivera-Figueroa, A. (2011b). A discussion on the substitution method for trigonometric rational functions. *Mathematics and Computer Education*, *45*(1), 44-51.

[25] Ponce-Campuzano, J. C. & Rivera-Figueroa, A. (2011c). Unexpected results using computer algebraic systems for computing antiderivatives. *Far East Journal of Mathematics Education (FJME)*, *7*(1), 57-80.

[26] Ponce, J. C. (2007). *Un estudio de caso con profesores de bachillerato sobre el papel que juega el teorema fundamental del cálculo.* (Tesis de Maestría no publicada). Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

[27] Ponce, J. C. y Rivera, A. (2009). Casos en los que no es aplicable la fórmula $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$. *Miscelánea Matemática*, *48*, 59-74.

[28] Purcell, E. J. y Varbeg, D. (2000). *Cálculo diferencial e integral* (6ª ed.). México: PRENTICE HALL.

[29] Rivera, A. (2007). *Cálculo y sus fundamentos para ingeniería y ciencias.* D.F., México: GRUPO EDITORIAL PATRIA.

[30] Rivera, A., García, R. y Díaz, M. (2013). Comprensión de los significados de la derivada: un estudio con profesores de bachillerato y una propuesta didáctica en ambientes virtuales. En M. Rojano (Ed.), *Las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas*, (pp. 37-67). D.F., México: Trillas.

[31] Salazar, L., Bahena, H. y Vega, F. (2011). *Cálculo integral*. D.F., México: PATRIA.

[32] Santaló, M. y Carbonell, V. (1977). *Cálculo diferencial e integral* (7ª ed.). D.F., México: PORRUA.

[33] Santos-Trigo, M. & Rivera-Figueroa, A. (2010). Prospective mathematics education students′ answers to basic mathematical questions: characterizing their mathematical profiles. *Far East Journal of Mathematics Education (FJME)*, *4*(2), 117-140.

[34] Sierpinska, A. (1992). *Understanding in mathematics*. London. Falmer Press.

[35] Smith, R. T. & Minton, R. B. (2003). *Cálculo diferencial e integral*. D.F., México: McGraw-Hill.

[36] Stein, S. K. (1985). *Cálculo y geometría analítica* (3ª ed.). México: McGRAW-HILL.

[37] Stewart, J. (1998). *Cálculo de una variable: trascendentes tempranas* (3ª ed.). D.F., México: International Thomson Editores.

[38] Swokowski, E. W. (1987). *Introducción al cálculo con geometría analítica*. D.F., México: Grupo Editorial Iberoamérica.

[39] Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151-169.