CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN

Unidad Distrito Federal

Departamento de Matemática Educativa

Justificación argumentativa en la prueba geométrica informal

Tesis que presenta

Ma. Dalia Lozano Grande

Para obtener el grado de:

Maestra en Ciencias en la

Especialidad de Matemática Educativa

Director de Tesis: Dr. Gonzalo Zubieta Badillo

México, Distrito Federal Agosto de 2014

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) el apoyo financiero brindado a través de la beca otorgada durante mis estudios.

Becaria No. 478439

A quienes me han acompañado a lo largo del camino.

A quienes con el milagro de su amor le dan sentido a todo lo que hago.

A la vida, que me está permitiendo cumplir mis sueños, éste es uno de ellos.

RESUMEN

Esta investigación consiste en el análisis de los argumentos generados por estudiantes de Nivel Medio Superior cuando intentan resolver problemas geométricos de prueba informal con ayuda de un software de Geometría Dinámica. El objetivo es identificar algunas razones por las cuales, con demasiada frecuencia, los estudiantes no logran transitar de la elaboración de conjeturas, a la justificación argumentativa de las mismas y posteriormente, a la prueba deductiva.

ABSTRACT

This investigation consists in the analysis of arguments generated by high school students when trying to solve geometric problems related to informal proof, using a Dynamic Geometry software. The purpose is to identify some reasons why students are too frequently not able to pass from the conjecturing to the justification argument and then to the deductive proof.

PRESENTACIÓN

A través de esta investigación se busca comprender la dinámica de la prueba geométrica informal bajo el Marco Teórico seleccionado. La prueba geométrica vista como un proceso permite identificar una serie de etapas que van desde la exploración hasta la obtención de un resultado final. Una vez que alguien ha pasado las etapas de explorar y de conjeturar, el paso referente a explicar y justificar por qué funciona un planteamiento, resulta arduo e inesperado para los estudiantes.

El objetivo general de la investigación se refiere a la identificación de algunas razones que limitan o impiden a los estudiantes transitar de la elaboración de conjeturas a la justificación argumentativa y posteriormente a la prueba deductiva. Para ello, se analizaron los argumentos producidos por estudiantes de Nivel Medio Superior durante el proceso de solución de problemas geométricos de prueba (utilizando el software Geogebra) centrándose la investigación en el estudio de los tipos de razonamiento implícitos en dicha argumentación.

Se observó que el tipo de razonamiento (llamado abducción), puesto en marcha a lo largo de las etapas argumentativas se mantiene hasta el final, en la mayoría de los casos, obteniéndose una prueba también de este tipo. Las implicaciones de lo anterior en el aprendizaje del proceso de prueba geométrica dan luz sobre la conveniencia de aceptar pruebas geométricas abductivas o informales como resultados válidos o investigar cómo promover ciertas formas de abducción para generar el salto hacia la prueba de tipo deductivo.

En relación a lo anterior, se presenta de manera general, el contenido del presente trabajo de investigación. En el Capítulo 1 se dan los antecedentes de la prueba informal (vista desde la perspectiva didáctica), el planteamiento del problema, las preguntas de investigación que guían el trabajo así como los objetivos a alcanzar. El Capítulo 2 contiene el marco teórico. En éste se presenta el espectro Exploración-Prueba (E-P) para ubicar la etapa de resolución de problemas en la cual se centra la investigación así como las características de todas las demás fases que lo componen. En ese mismo capítulo, de forma breve se hace una aclaración sobre la diferencia adoptada entre los conceptos de demostración y prueba y la distinción de los conceptos de abducción y deducción.

También, se trata lo referente al concepto de unidad cognitiva, el significado de análisis estructural, las características y la funcionalidad del Modelo de Toulmin como herramienta metodológica para esta investigación así como la conveniencia de adoptar el llamado Estudio de casos como método de investigación seleccionado. En el Capítulo 3, se lleva a cabo la descripción de la población de estudio, de los recursos utilizados, de los criterios de selección y de la aplicación de los problemas así como de las fases en las cuales fue dividido el estudio, incluidas las razones para llevar a cabo una serie de actividades con los alumnos, previas a la aplicación de un problema de prueba final en el cual debían construir y probar un par de conjeturas. Así mismo, se describe cómo se recolectaron los datos que fueron posteriormente analizados. En el Capítulo 4 se analizan dichos datos obtenidos con las actividades y el problema propuesto tomando en cuenta el Marco Teórico expuesto en el Capítulo 2. En el Capítulo 5 se ofrece la interpretación de los resultados obtenidos, las conclusiones con relación a los objetivos y se da respuesta a las preguntas de investigación. En el Capítulo 6 se presenta un panorama general de lo que se pretende abordar como continuación durante los estudios del Doctorado. En ese capítulo se dan algunos antecedentes sobre el concepto y los diferentes tipos de abducción, las implicaciones de estudiar estas clases de abducción en la actividad matemática de los estudiantes y finalmente cómo se modificaría la herramienta metodológica del modelo de Toulmin para dichos fines.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1
PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 INTRODUCCIÓN

La actividad de probar juega un papel fundamental en el razonamiento matemático y por lo tanto debiera ser un elemento regular y continuo en el aprendizaje de la disciplina matemática. Una prueba evidencia, sin lugar a dudas, la verdad o falsedad de una afirmación, brinda una explicación del porqué una aseveración es cierta o crea una estructura apropiada para comunicar el conocimiento matemático y dependiendo del papel que juegue y la perspectiva desde la cual se aborde, se le puede definir de varias maneras. Hanna (2012) puntualiza que las diferencias entre las diversas formas de prueba pueden ser: matemática, didáctica y cognitiva. De acuerdo con estas últimas, Ellis Amy B. (2012) considera que una prueba es un tipo específico de argumento matemático, el cual consiste en una secuencia de enunciados lógicos para dar soporte o refutar una afirmación.

Considerando la prueba desde esta perspectiva, se plantea en esta sección el Problema de Investigación: Primeramente los Antecedentes de la prueba informal (vista desde la perspectiva didáctica), enseguida se presenta el Planteamiento del problema así como las Preguntas de investigación que guían el trabajo y los Objetivos a alcanzar.

1.2 ANTECEDENTES

1.1.1 La prueba en la educación matemática: La prueba informal o pre-formal

Dreyfus (2012) refiriéndose a Blum y Kirsch´s (1991), distingue entre prueba formal y pre-formal. Las pruebas pre-formales contribuyen a un entendimiento profundo de los teoremas, por medio del uso de métodos experimentales y visuales, pero argumentan que estos frecuentemente están incompletos. Por el contrario, los autores enfatizan la completitud de las pruebas formales (demostraciones), las cuales muchas veces están relacionadas con un grado de complejidad que impide el entendimiento por parte del alumno. De acuerdo con Dreyfus (2012), las “pruebas pre-formales” son definidas por

Blum y Kirsch como "una cadena de conclusiones correctas, pero no representadas formalmente, las cuales dan lugar a premisas también válidas y no formales" (p. 203). Las pruebas de este tipo tienen un estilo ilustrativo y enfatizan los aspectos experimentales y visuales de las matemáticas.

La concepción de prueba pre-formal (o informal) está relacionada con el origen de la matemática experimental, la cual se basa frecuentemente en el uso de la computación. Algunos investigadores proponen usar este tipo de pruebas como puente para lograr el tránsito de los estudiantes de una instancia empírica o pragmática a una de tipo deductivo.

Para De Villiers (1990, 2010) y Weber (2008)[1], en la matemática experimental, una función importante de la acción de probar es explicar por qué una afirmación resulta verdadera bajo ciertas condiciones. Según Dreyfus (2012), muchas veces los matemáticos emprenden una prueba porque están personalmente convencidos de la validez de una aseveración habiendo explorado ésta empíricamente a través de su estructura y, de acuerdo con él, las razones para enseñar a probar en la escuela provienen precisamente de la expectativa de lograr que los estudiantes razonen de forma similar a como lo hacen los matemáticos percatándose de los orígenes y conexiones del conocimiento matemático.

También, para este mismo autor, existen distintas formas de probar, las cuales pueden convencer o no a profesores y a alumnos. Estos aspectos incluyen: representaciones, maneras de argumentar matemáticamente, diferentes grados de rigor y detalles en el proceso. Con relación a las diversas maneras de argumentar, Stylianides (2007) sostiene que los profesores juegan un papel crucial en la evaluación de los argumentos que pueden tomarse como válidos o contar como prueba.

1.2.1 La justificación argumentativa en el proceso de prueba informal

De acuerdo con Ellis Amy B. (2012) probar es más que sólo razonar, pues los estudiantes pueden explicar su pensamiento matemático o elaborar justificaciones que no lleguen a funcionar totalmente como pruebas[2]. No obstante, aun así, el proceso es importante para los estudiantes, puesto que se involucran con el significado de la prueba. Este proceso

[1] Citado en Dreyfus (2012).
[2] Se refiere a pruebas deductivas que se consideren formales.

incluye una variedad de actividades tales como: elaborar conjeturas, considerar el caso general, explorar con ejemplos, investigar similitudes estructurales a través de casos, buscar contraejemplos, etc., las cuales ayudan a construir hábitos mentales que no se desarrollan cuando a los estudiantes sólo se les pide probar una conjetura proporcionada de forma explícita.

De esta forma, una prueba en el salón de clase puede ser vista como el producto de un espectro de actividades que comienza con la exploración y progresa paulatinamente a través de las etapas de conjeturación, explicación informal y justificación argumentativa. Todas estas actividades buscan la generación de una prueba final y se encuentran estrechamente relacionadas con la resolución de problemas en un vasto sentido. Para ilustrar lo anterior, existe un modelo propuesto por Feng-Jui Hsieh, Wang-Shian Horng y Haw-Yaw Shy (2012), llamado espectro E-P (Exploración-Prueba), el cual se estudiará con mayor detalle en los Capítulos 2 y 4 de este trabajo. Del mismo modo, se profundizará en el estudio teórico de la fase de Justificación argumentativa y su relación con las etapas de Conjeturación y de Prueba final, cuyo carácter de formalidad está vinculado con el concepto de Demostración. Así mismo se tratarán las estructuras de razonamiento, abductivo y deductivo desarrolladas en estas etapas y la relación que guardan con la obtención de una prueba final con las características de esperadas.

1.3 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Como se ha dejado ver al final de la sección anterior, la presente investigación se centra en analizar lo sucedido durante las etapas intermedias que van de la conjeturación al establecimiento de una prueba final cuando los estudiantes resuelven algún problema geométrico con ayuda de un software de Geometría Dinámica.

Con demasiada frecuencia, en los estudios relacionados con los temas de argumentación y prueba llevados a cabo en el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV, la expectativa del profesor (o investigador) es la obtención de una solución con carácter deductivo en los problemas planteados. Surge entonces el interés de profundizar en las razones por las cuales rara vez el alumno se acerca a lo esperado.

La transición de la conjetura a la prueba final implica, además de los recursos cognitivos (contenido o conocimientos), una estructura de razonamiento que debiera pasar del nivel abductivo al deductivo. El tipo de razonamiento empleado entre ambas etapas, cómo se refleja este razonamiento en los argumentos generados y las implicaciones de lo anterior en el resultado final, constituyen el problema principal de la investigación. El estudio se pretende continuar en una segunda fase explicada en el Capítulo 6 de este documento.

1.4 PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

1) ¿Cómo se transita de la conjetura (elaborada con ayuda del software) a la prueba geométrica informal?
2) ¿Cuáles son algunas razones por las cuales, frecuentemente, los estudiantes no transitan de la elaboración de conjeturas, a la justificación argumentativa de tipo abductivo y posteriormente a la prueba deductiva?
3) ¿Cómo razonan los estudiantes al transitar de la elaboración de una conjetura a la obtención de una prueba en problemas geométricos elaborados con ayuda del software?

1.5 OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

1.5.1 Objetivo General

- Identificar algunas razones por las cuales, con demasiada frecuencia, los estudiantes de Nivel Medio Superior no logran transitar de la elaboración de conjeturas desarrolladas con ayuda del software, a la justificación argumentativa de las mismas y posteriormente, a la prueba deductiva.

1.5.2 Objetivos Específicos

- Analizar los argumentos (respuestas) generados por los estudiantes al intentar justificar la validez de sus conjeturas.

- Identificar si existe continuidad o ruptura en el tipo de razonamiento empleado de la conjetura a la prueba (pasando por la justificación argumentativa) así como las implicaciones que esto tiene en el resultado final.
- Desarrollar una serie de actividades preliminares antes de plantear un problema final para capacitar al estudiante en el manejo del software, construir ciertos conocimientos previos y sobre todo involucrar de forma sistemática al estudiante en la intención del proceso de justificación y prueba.

CAPÍTULO 2
MARCO CONCEPTUAL

2.1 INTRODUCCIÓN

Como se planteó en el capítulo anterior, el problema de investigación consiste en analizar la estructura argumentativa (razonamiento) de las etapas intermedias entre la conjetura y la obtención de una prueba final en el proceso de solución de problemas de tipo geométrico. Para esto, se ha tomado como base un estudio realizado por Pedemonte (2007), el cual se acota dentro de la perspectiva de investigaciones de la Teoría llamada Unidad cognitiva. Es destacable que al analizar la argumentación desde este enfoque, sale a la luz el concepto de abducción que será puerta de entrada para ahondar en el estudio del razonamiento desarrollado a lo largo del proceso de la prueba informal.

Considerando lo anterior, se presenta en esta sección el Marco Conceptual. Primeramente se presenta el Espectro Exploración-Prueba para ubicar la etapa de resolución de problemas en la cual se centrará la investigación así como las características de las fases que la preceden y le siguen. Posteriormente, de forma breve se hará una aclaración sobre la diferencia adoptada entre los conceptos de demostración y prueba. De igual modo, se distinguirán los conceptos de abducción y deducción. Finalmente entraremos en materia sobre lo referente a la Unidad cognitiva, aclarando cuales son las etapas donde interviene la argumentación y su relación con la prueba como producto final, el significado del análisis estructural, así como las características y la funcionalidad del Modelo de Toulmin como herramienta metodológica.

2.2 ESPECTRO E-P (EXPLORACIÓN-PRUEBA)

Como se mencionó en el capítulo anterior, Feng-Jui Hsieh et al. (2012), ilustran las etapas más comunes encontradas en el proceso de resolución de problemas de prueba en un modelo propuesto llamado Espectro E-P (Exploración-Prueba). Véase la figura 1.6.

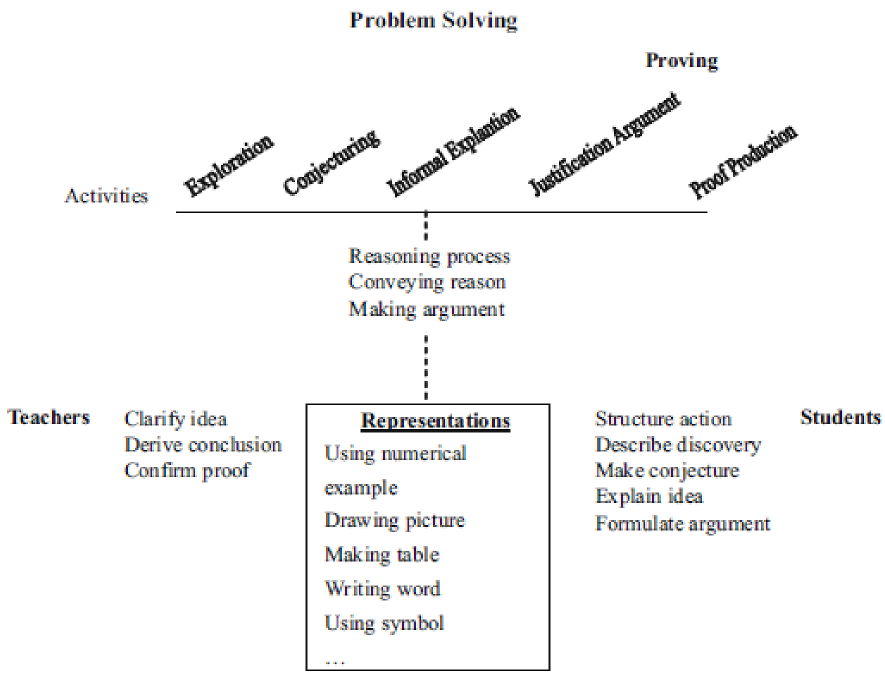


Figura 2.1 Componentes del Espectro EP (Exploración-Prueba)

Este modelo es flexible; los estudiantes pueden experimentar o trabajar simultáneamente en más de una etapa dependiendo el caso, pero regularmente las fases y el orden que se sigue son los mostrados a continuación.

2.2.1 Explorar

En muchos casos, la información requerida para resolver un problema de prueba se encuentra oculta o no es obvia de forma inmediata, por ejemplo, cuando se comienza o se continúa, un ejercicio de prueba requiere la construcción de trazos auxiliares. En estos casos, la exploración, dada su naturaleza interactiva y manipulativa, permite a los estudiantes probar en múltiples direcciones y transformar las figuras sin esfuerzo. Estas acciones, en su momento, revelan información adicional que permite a los estudiantes comenzar a suponer, conjeturar o justificar.

Cuando los estudiantes inician la solución de un problema explorando, la fase posterior de justificación consistirá en el refinamiento de sus propias concepciones. En relación a esto, en Hanna (2012) se asegura que la mejor prueba de un teorema es aquella que no solo permite ver a los estudiantes cuando algo es cierto, sino también por qué lo es.

2.2.2 Conjeturar

El énfasis sobre la exploración naturalmente genera la necesidad de reflexionar sobre el papel de la conjetura. De acuerdo al diccionario de la Real Academia Española (R.A.E.), conjeturar es formar un juicio de algo por indicios y observaciones. En nuestro problema de estudio, la conjetura debe ir más allá de una mera creencia o una especulación pues debe considerar de algún modo, la pauta inicial para generar la búsqueda de una explicación estructural. Eso muy seguramente ocasionará en las etapas subsecuentes una exploración e interpretación significativas las cuales producirán una genuina necesidad de validación (Durand-Gurrier, Boero, Douek, Epp, Tanguay, 2012). Debido a lo anterior, algunos autores como (Boero, Garuti, Mariotti, 1996; Pedemonte, 2007) consideran que la actividad argumentativa comienza desde la etapa de elaboración de conjeturas.

2.2.3 Explicación Informal

En esta etapa los estudiantes intentan explicar a otros, de manera informal las razones por las que ellos creen que una cierta conjetura es cierta; intentan explicar lo que han descubierto (la conjetura o incluso ya, las pautas iniciales para comenzar a justificar) con certeza o sin ella. En ese momento comienza la labor de persuasión. En esta fase:

1) Se recupera y recolecta lo que han hecho.
2) Se busca el vocabulario apropiado para representar los objetos visuales y sus relaciones.
3) Se busca la regla lógica aceptable que encadene las relaciones causales de los objetos u operaciones del descubrimiento.
4) Se elimina (o se intenta eliminar) de sus respuestas las acciones redundantes generadas en la exploración.
5) Se intenta preparar y organizar afirmaciones.

Estos cinco resultados muestran la importancia de la explicación informal en la transición de la exploración a la argumentación. En esta fase los estudiantes comienzan a cambiar su atención de las acciones manipulativas a las construcciones lingüísticas y visuales a través de la presentación de explicaciones. Los factores sociales, tales como la intervención del profesor también representan hasta cierto punto, un factor de importancia en el éxito de los estudiantes para transitar gradualmente de la explicación preliminar a la justificación.

De acuerdo a Porteus (1994), una vez que alguien ha pasado las etapas de explorar y conjeturar, el paso referente a explicar por qué funciona un planteamiento, resulta arduo e inesperado para los estudiantes. Esta autora, incluso plantea la conveniencia de resolver problemas cuyo tratamiento en la conjetura sea relativamente fácil para que los alumnos aprendan a probar.

2.2.4 Justificación argumentativa

El uso de pasos lógicos distingue la etapa de explicación informal de la etapa de justificación argumentativa. En esta fase, se estructuran las explicaciones (cuando se intenta persuadir a otros) por medio de la utilización de afirmaciones matemáticamente aceptadas.

De acuerdo a Feng-Jui Hsieh et al. (2012), las características de los argumentos de justificación difieren de los de la prueba[3] en al menos lo siguiente:

1. No es necesario ser “riguroso” al emprender los argumentos de justificación.
2. Los argumentos de justificación pueden tener muchos elementos redundantes.
3. La inclusión de un paso deductivo en los argumentos de justificación no necesita provenir directamente de un paso deductivo precedente o de otros axiomas[4].
4. El uso combinado de resultados obtenidos de pasos deductivos y de pasos de exploración, con frecuencia aparece en la justificación argumentativa; y

[3] Se refieren a la prueba deductiva.
[4] Axioma: Cada uno de los principios fundamentales e indemostrables sobre los que se construye una teoría. (R.A.E)

5. Las inferencias[5] elaboradas durante la justificación argumentativa pueden ser en contexto (o contenido) delimitado (por ejemplo, lo relacionado con figuras específicas, objetos o acciones más que afirmaciones generales).

Según refieren estos autores durante algunos de sus experimentos, fue común en los estudiantes el uso de datos encontrados por medio de la exploración como evidencia que garantizaba sus afirmaciones; esto significó la utilización del razonamiento abductivo. Aseguran que a pesar de que este fenómeno puede ser visto como un defecto en el acercamiento de los estudiantes, también puede ser visto en un sentido positivo pues una parte concluida de una prueba es mejor que no probar nada por completo. En esta etapa, los estudiantes frecuentemente utilizan afirmaciones verbales para expresar sus ideas intuitivas así como representaciones simbólicas.

2.2.5 La producción de la prueba

Algunos investigadores recomiendan que se demande menos rigor a los estudiantes al escribir una prueba (Usiskin[6],1980; Porteus[7],1994). Con relación a esto, Feng-Jui Hsieh et al. (2012), enfatizan que la forma de las pruebas escritas por los estudiantes frecuentemente se parecen a las formas utilizadas por los profesores en las clases diarias, por lo cual:

1) Los profesores pueden inculcar en los estudiantes la familiaridad con las pruebas escritas mediante el uso diario en la enseñanza.
2) Muchas veces, comprender la idea de cómo probar algo resulta mucho más difícil para los estudiantes que el hecho de escribir dicha prueba.
3) Si los estudiantes han internalizado un esquema de prueba, pueden aplicarlo más fácilmente después cuando descubren que se requiere una parte de este para completar otra prueba.

[5] Inferir: Sacar una consecuencia o deducir algo de otra cosa (Ídem.)
[6] Citado en Feng-Jui Hsieh et al. (2012).
[7] Porteus (1994) incluso menciona la conveniencia de aceptar una prueba informal (de tipo verbal o narrativo) que mantenga a pesar de todo su carácter general.

A este respecto, consideraremos que la prueba final es aquella que cumple con los requerimientos de rigor acordados y practicados en la clase.

2.3 PRUEBA Y DEMOSTRACIÓN

La demostración es el tipo de prueba dominante en matemáticas. Sandoval (2005)[8] menciona que al hacer una revisión de la historia y la filosofía de las matemáticas, se evidencia la existencia de conflictos sobre el papel de la demostración en matemáticas y, en particular, sobre qué hace a una demostración aceptable.

Aunque muchos autores utilizan el término demostración como sinónimo de prueba (como Harel and Sowder (1998) quienes usan la palabra ”prueba” para caracterizar no solo las pruebas deductivas formales sino también las pruebas empíricas), en este caso hacemos nuestra la diferenciación que hace Balacheff (2000), para él la demostración es:

> “…una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto de reglas bien definidas. (…) Cuando una explicación es reconocida y aceptada, conviene para diseñarla, disponer de un término que permita marcar su distinción del sujeto locutor. En matemáticas es claro que el término “demostración” no es el más conveniente debido a que su acepción es muy específica. Seleccionamos [entonces] el término prueba” (p. 13).

De acuerdo con Recio 2001; Hanna, 1996, 2001; Moreno 1996[9]:

> “La posición dominante entre los matemáticos, y los profesores de matemáticas, es considerar la demostración deductiva y formalizada (paradigma formalista). Aplicar esta interpretación en las aulas, trae consigo muchas dificultades para los estudiantes, por lo que es un tema cuestionado y motivo de preocupación para muchos investigadores en los últimos años” (p. 43).

Sandoval (2005) afirma que se trata de desarrollar en los estudiantes un pensamiento matemático deductivo, pero no como una meta inicial sino como resultado de un proceso educativo. Para ello, se requiere fomentar otros modos de justificar el conocimiento.

---

[8] Citando a Hanna (2001).
[9] Citados en Sandoval (2005).

2.4 RAZONAMIENTO ABDUCTIVO Y DEDUCTIVO

De acuerdo con la R.A.E. (Real Academia Española), razonar es discurrir[10] ordenando ideas en la mente para llegar a una conclusión. Y es precisamente, en la forma de ordenar las ideas donde se pretende comenzar a encontrar información útil para comprender el proceso de prueba. Generalmente en matemáticas la prueba final es deductiva, pero el descubrimiento y los procesos relacionados con la conjetura están más relacionados con el razonamiento que da lugar a la argumentación de tipo abductivo.

Un razonamiento abductivo es aquel en el cual, a partir de la descripción de un hecho o fenómeno se llega a una hipótesis que explica las posibles razones o motivos de ese hecho mediante las premisas obtenidas[11]. Charles Sanders Peirce llama a esa hipótesis una conjetura[12]**.** Esa conjetura busca ser, a primera vista, la mejor explicación, o la más probable.

La idea principal de Peirce con respecto a la abducción fue dar un instrumento a la lógica de la invención. Distingue el razonar *hacia* una hipótesis del razonar *desde* una hipótesis. Justamente la abducción es el razonamiento *hacia* la hipótesis, esto es, desde los hechos hacia la hipótesis que les señala su causa o los explica. Según él, la abducción es una de las tres formas de razonamiento junto a la deducción y la inducción**.** En esta investigación se hace énfasis en los dos primeros: abducción y deducción.

Deducción es el razonamiento a partir de un principio conocido hacia uno desconocido; de lo general, a lo específico, de la hipótesis a la tesis. La deducción realiza inferencias lógicamente correctas. Esto significa que la deducción a partir de premisas que se suponen verdaderas, garantiza el resultado de conclusiones también verdaderas. Es el método más ampliamente comprendido, aceptado y reconocido de los tres indicados.

La diferencia (y la relación) entre ambos tipos de razonamiento, reflejados en el modo de argumentar, serán objeto de estudio en la continuación del presente trabajo, la cual se explicará, como ya se ha mencionado, en el Capítulo 6.

---

[10] Discurrir o reflexionar.
[11] Premisa: Señal o indicio por donde se infiere algo o se viene en conocimiento de ello (R.A.E.).
[12] Ver: Commens Dictionary of Peirce's Terms. Recuperado de: http://es.wikipedia.org/wiki/Razonamiento_abductivo#cite_note-1**.**

2.5 CONSIDERACIONES SOBRE ARGUMENTACIÓN

Harada (2009) menciona que Toulmin, en su libro *Believing and Acting*, afirma:

> "Los argumentos pueden considerarse desde una perspectiva lógica formal o de acuerdo a lo dictado por el sentido común. En términos formales, los argumentos son simplemente redes de proposiciones unidas por relaciones lógicas y sus premisas son proposiciones que proveen apoyo lógico a una conclusión. En cambio, un argumento considerado en términos del sentido común, representan una clase de actividad humana y "dar razones" es la fase de esas actividades en la cual una parte propone un argumento para convencer a la otra. La segunda acepción se refiere al significado funcional de los argumentos. Por eso, en el primer caso se habla de *validez formal* y en el segundo de *relevancia práctica"* (p. 3).

Del mismo modo, Harada (2009) afirma que en *The Abuses of Casuistry*, Toulmin, junto con Jonsen, sostiene que mientras los argumentos teóricos son *pruebas* no referidas a lugares y momentos particulares, sino a una generalidad de estos, los argumentos prácticos resultan *métodos para resolver problemas*. Así, en el primer sentido, un argumento es una cadena de proposiciones (axiomas o premisas mayores y hechos que especifican una instancia particular o premisas menores) unidas de tal manera que garanticen su conclusión y queden liberados de su dependencia respecto de las circunstancias sociales e históricas de su uso o presentación, mientras que en el segundo sentido es una red de consideraciones presentadas para resolver un problema práctico y, por ello, toma como punto de partida la experiencia o los procedimientos usados para resolver asuntos previos.

De acuerdo con (Pedemonte 2007), la argumentación puede ser relacionada con la conjetura en dos formas: la argumentación *constructiva* que contribuye a la construcción de una conjetura y por otro lado, la argumentación llamada *estructurante*[13] la cual justifica una conjetura previamente construida como un hecho. En general, en las construcciones de los estudiantes, la argumentación (tanto constructiva como estructurante) se compara con la prueba como producto (prueba final).

[13] En este trabajo llamada justificación argumentativa.

2.6 UNIDAD COGNITIVA ENTRE LA ARGUMENTACIÓN Y LA PRUEBA FINAL OBTENIDA

La relación entre conjetura y prueba ha sido analizada en educación matemática con diferentes objetivos educacionales. Algunos estudios muestran indicios sobre la continuidad que puede existir entre la *argumentación* en el proceso de *producir y justificar una conjetura* y la que se presenta en una *prueba final* (Boero, Garuti, Mariotti,1996). Esta continuidad es llamada *Unidad cognitiva.* La hipótesis de la Unidad cognitiva sostiene que en algunos casos, esta argumentación puede ser explotada por el estudiante en la construcción de la prueba, mediante la organización de algunos argumentos generados previamente.

Las investigaciones sobre la Unidad cognitiva muestran que la prueba es más “accesible” para el estudiante si una actividad de argumentación conduce a la construcción de una conjetura y dicha actividad argumentativa continúa en las demás fases de construcción de la prueba hasta lograrla de acuerdo con los requerimientos establecidos en la clase.

Siguiendo estos estudios, Pedemonte (2007) ha mostrado que el análisis de la Unidad cognitiva debe considerar:

- *El sistema referencial:* Relacionado con los sistemas de representación (lenguaje, heurísticas y dibujos) y los conocimientos (concepciones y teoremas) de la argumentación y la prueba. El análisis de la *Unidad cognitiva* hasta antes de sus investigaciones toma en cuenta sólo este sistema.
- *El sistema estructural:* La conexión lógica entre las afirmaciones (estructuras de abducción, deducción o inducción), es decir, el tipo de razonamiento llevado a cabo.

De acuerdo con Boero (2010) existe continuidad en el sistema referencial si algunos dibujos, expresiones o teoremas usados en la prueba han sido usados en la argumentación que ha servido de soporte a la conjetura. Se presenta continuidad estructural cuando las inferencias en la argumentación y en la prueba están conectadas a través de la misma estructura de razonamiento (abducción, inducción o deducción). Por ejemplo, hay continuidad estructural, si al presentarse pasos de carácter abductivo en la argumentación (durante la construcción de la conjetura y en la justificación) aparece este mismo tipo de razonamiento al lograr la prueba final.

Es importante observar que la continuidad en el sistema referencial da soporte a la construcción de la prueba y éste no es el caso por lo general de la continuidad estructural. En efecto, para producir una prueba deductiva, es necesaria una distancia estructural, pues el razonamiento de argumentación usualmente es abductivo.

Pedemonte (2002, 2003, 2007) pone su interés sobre este problema: la argumentación (soporte de una conjetura y su justificación) y el logro de la consecuente prueba. Esta autora, basándose sobre todo en teorías lingüísticas como la de Toulmin (1964) caracteriza la argumentación con relación a la prueba matemática:

1) La argumentación y la prueba pueden ser consideradas como justificaciones racionales. Esta característica de justificación es visible en la forma de argumentar: razonar cuál es la inferencia explícita que deriva en otra u otras afirmaciones dadas.
2) La argumentación y la prueba en matemáticas son para convencer. Ambas se desarrollan cuando alguien quiere convencer sobre la veracidad de una afirmación (a sí mismo y a otros). Es importante distinguir entre los términos “convencer” y “persuadir” los cuales resultan diferentes en significado. De acuerdo con la teoría lingüística, la intención de convencer es modificar opiniones apelando a la racionalidad. Convencer implica persuadir, pero persuadir no implica convencer. En matemáticas, uno utiliza argumentos para convencer.
3) La argumentación y la prueba en matemáticas están orientadas a una audiencia universal. Si la intención de la argumentación en matemáticas es convencer, ya sea a sí mismo o a una audiencia acerca de la veracidad de una afirmación, la audiencia debe ser capaz de responder. En teoría lingüística, esta audiencia es llamada universal. En oposición a la audiencia particular, una audiencia universal es capaz de defender sus propias opiniones respecto a los argumentos de su interlocutor.

La caracterización entre la argumentación y la prueba muestra la conexión funcional entre éstas. Las características estructurales entre ambas se dan en la siguiente sección.

2.7 ESTRUCTURA ARGUMENTATIVA

2.7.1 Generalidades sobre el Modelo de Toulmin

Toulmin Stephen Edelston fue un filósofo y educador británico quien propuso en el año de 1958, en su libro *The Uses of Argument*, un modelo basado en un diagrama de seis componentes interrelacionados para describir la estructura de la argumentación.

Harada (2009) sostiene que además de ser un modelo "justificatorio", el de Toulmin puede ser interpretado como un modelo heurístico, que sirve también para descubrir o encontrar razones de persuasión o convencimiento para llegar a acuerdos con otras personas.

De acuerdo con este modelo, el primer paso de cualquier argumento se da por la expresión de un punto de vista (una afirmación, una opinión). En la terminología de Toulmin, el punto de vista inicial es llamado "Claim" (afirmación). El segundo paso consiste en la producción de datos que le dan sustento a dicha afirmación: "Data". Es importante también proveer la justificación o garantía para poder utilizar los datos que sustentan dicha afirmación: "Warrant" (garantía). La garantía puede expresarse como un principio o una regla. La garantía actúa como un "puente" entre los datos y la afirmación (ver figura 2.7.1).

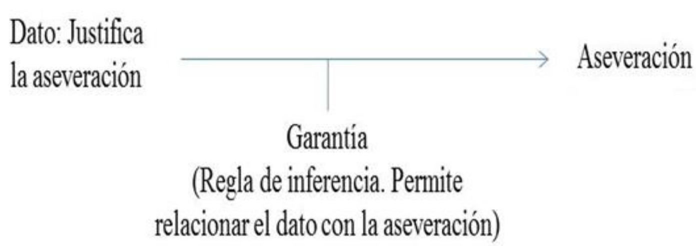


Figura 2.7.1. Modelo básico de argumentación de Toulmin

La anterior es la estructura base de la argumentación, pero podrían requerirse elementos auxiliares para describirla. Toulmin precisa tres de estos: "Qualifier" (calificador), "Rebuttal" (reserva) y "Backing" (respaldo). La validez de la garantía puede debilitarse si existen excepciones a la regla, en tales condiciones, se insertan los casos de excepción o reservas. Entonces, también la fuerza de la afirmación se debilita por medio del calificador. Se requiere un respaldo si la autoridad de la garantía no se acepta de manera directa (ver figura 2.7.1.2).

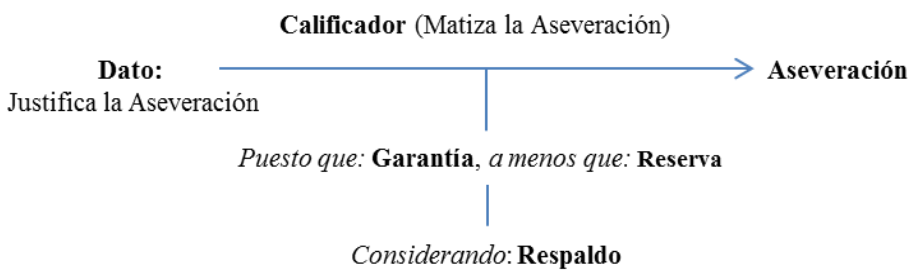


Figura 2.7.1.2. Modelo completo de Toulmin

2.7.2 Componentes del Modelo de Toulmin en abducción y deducción

La naturaleza del razonamiento llevado a cabo (abducción o deducción), ya sea en una prueba o en un argumento de conjetura o de justificación, determina el sentido de aparición de los elementos del diagrama de Toulmin (Ver Figura 2.7.2).

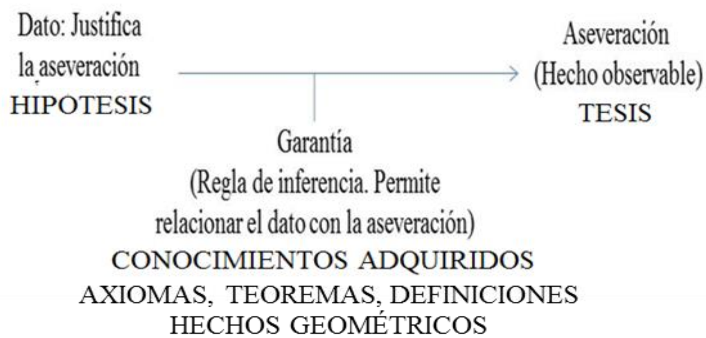


Figura 2.7.2 Modelo de Toulmin: Elementos equivalentes para abducción y deducción

En un razonamiento abductivo, dada una aseveración o hecho observable, se debe encontrar el dato que justifica o da evidencia a tal afirmación. En este caso, la garantía (formulada implícitamente en gran número de ocasiones) es el sustento teórico (o hecho geométrico) que permite esa relación. El equivalente utilizando la terminología de la prueba deductiva o demostrativa es: Dada una Tesis (lo que se quiere demostrar) es necesario encontrar la Hipótesis (lo que se supone) puesto que hay un Teorema u axioma (conocimiento teórico o hecho geométrico) que justifica esa relación. Cómo puede observarse, el sentido de aparición es el inverso al razonamiento deductivo: Dada una hipótesis y considerando ciertos Teoremas o axiomas, se obtiene una Tesis.

2.7.3 Modelo de Toulmin como herramienta de análisis de argumentos en geometría

Para Duval (1991)[14], el razonamiento deductivo no trabaja como la argumentación. Según él, existe una brecha entre ambos procesos, aún si en ambos se utilizan formas lingüísticas similares. Dentro de las pruebas, los pasos están conectados por un "proceso de reciclamiento": La conclusión de un paso sirve como condición de entrada del siguiente paso. Por el contrario, en la argumentación, las inferencias están basadas en los contenidos de la afirmación. En otras palabras, la conexión entre dos proposiciones es una conexión intrínseca: la afirmación es considerada y reinterpretada desde diferentes puntos de vista. Por estas razones Duval afirma que la distancia entre prueba y argumentación no es solamente lógica sino también cognitiva debido a que en una prueba, el valor epistémico[15] depende del estatus teórico y en la argumentación eso depende del contenido. Entonces, de acuerdo con él es fácil observar la distancia cognitiva entre ambos procesos.

La posición opuesta a estas investigaciones, las investigaciones relacionadas con la unidad cognitiva, motivaron a Pedemonte a investigar la existencia de unidad o distancia cognitiva entre la argumentación y la consecuente prueba.

Cuando un estudiante produce una argumentación abductiva, se necesita una brecha estructural para construir una prueba deductiva. Esta brecha puede representar una dificultad. La hipótesis inicial de Pedemonte fue que la continuidad "natural" presente en los contenidos de la argumentación y la prueba, (de acuerdo con la hipótesis de la unidad cognitiva) puede ser observada también en su estructura (conexiones de razonamiento). Con el propósito de dar respuesta a lo anterior y validar o invalidar la hipótesis, ella utilizó una herramienta para comparar ambas estructuras: El modelo de Toulmin. Este modelo resulta de mucha utilidad, pues al considerar la prueba como un tipo de argumento, su estructura puede ser descrita mediante un diagrama ternario: dato, aseveración y reglas de inferencia (axiomas, teoremas o definiciones).

[14] Citado en Pedemonte (2007).
[15] El valor epistémico es el grado de certeza o convicción asociada con una proposición.

En sus trabajos de 2001, 2003 y 2007, Pedemonte muestra los resultados encontrados en los cuales se dio cuenta de que los estudiantes trataron de transformar abducción en deducción durante su proceso de resolución, algunas veces exitosamente, algunas otras sin conseguir una solución aceptable (deductiva). Ella asegura que estudiando esos casos a mayor profundidad, tal vez se puedan encontrar posibles dificultades en la construcción de pruebas deductivas[16].

[16] En estudios posteriores, Pedemonte encuentra información valiosa respecto a la relación entre el razonamiento abductivo y su transformación en uno de tipo deductivo durante la producción de la prueba. Ver Capítulo 6.

CAPÍTULO 3
METODOLOGÍA

3.1 INTRODUCCIÓN

Para iniciar este capítulo primeramente se hace mención al Método de estudio seleccionado, posteriormente se ofrece una descripción de la población con la cual se trabajó y de los recursos que estuvieron al alcance para llevar a cabo la investigación así como de los criterios de selección y aplicación de los problemas. De igual forma, se describen las fases en las que fue dividido el estudio, incluidas las razones para llevar a cabo una serie de actividades previas a un problema de prueba final en el cual debían probarse un par de conjeturas, así como la forma en la que se recolectaron los datos para ser posteriormente analizados en el siguiente capítulo.

3.2 ESTUDIO DE CASOS

Par el presente estudio se consideró pertinente utilizar el Estudio de casos como método de investigación pues se trata de una estrategia de investigación empírica con la cual se abordan fenómenos contemporáneos en contextos reales, conveniente cuando se presentan preguntas del tipo "cómo" o "por qué". Este método se puede aplicar para llevar a cabo estudios cualitativos que no buscan generalizar los hallazgos a toda una población de casos similares, sino estudiar simplemente cuán plausible es la lógica de replicación del Marco conceptual utilizado.

En esta investigación se busca comprender la dinámica de la prueba geométrica informal bajo el Marco Conceptual seleccionado (Modelo Exploración-Prueba y análisis estructural de la Teoría de la Unidad cognitiva) además de lo sugerido por algunos otros autores que estudian la prueba bajo una perspectiva similar por medio del análisis cualitativo de los argumentos generados, partiendo de un estado real de conocimientos previos por parte de los alumnos, no bajo el supuesto de lo que "deberían" conocer según el programa de estudios.

3.3 DESCRIPCIÓN DE LA POBLACIÓN

La población de estudio, tanto en la fase exploratoria como en la experimental, la constituyen alumnos de los semestres segundo y cuarto del Nivel Medio Superior del Instituto Politécnico Nacional, quienes ya pasaron por un curso básico de Geometría (en el cual los problemas se resuelven de manera algebraica en su totalidad), pero nunca han trabajado con problemas de este tipo y desconocían el software de Geometría Dinámica. La investigación, como se muestra más adelante, se dividió en tres etapas, en las cuales el número de estudiantes osciló entre 2 y 5, quienes trabajaron de forma individual o por pares.

3.4 RECURSOS EMPLEADOS

Prácticamente la totalidad de problemas fueron resueltos utilizando el software de Geometría dinámica Geogebra versión 4.4., que se instaló en computadoras de la Unidad de Tecnología Educativa del C.E.C. y T 8 del I.P.N., las cuales, en esta ocasión, se pusieron a disposición de los estudiantes. A lo largo de todas las sesiones se les proporcionaron a los estudiantes las actividades en hojas de trabajo con las instrucciones respectivas paso a paso. Las condiciones en el aula impidieron la implementación de la clase a manera de plenaria, sin embargo, fue posible trabajar por pares.

3.5 SELECCIÓN DE LOS PROBLEMAS

Debido a las características de la población de estudio y con base en la experiencia docente en el plantel, se procuró que los conceptos requeridos en la solución de los problemas, resultaran familiares a los estudiantes. También se retoman las ideas planteadas en el Marco Conceptual, respecto a la conveniencia de resolver problemas cuyo tratamiento en la conjetura fuese relativamente fácil para que los alumnos se centraran en la fases de explicación y justificación. De igual modo, se retoma lo referente a la conveniencia de aceptar una prueba informal (justificación de tipo verbal o narrativo) que mantenga a pesar de todo su carácter general. No obstante, se procuró motivar a los estudiantes, a lo largo de las actividades preliminares desarrolladas antes de la aplicación del problema final, a utilizar simbología, recordando su significado en las hojas de trabajo y dejando abierta la posibilidad de escribir sus respuestas usándola en los registros escritos. Los problemas se desarrollaron a lo largo de varias sesiones y fueron seleccionados de diversas fuentes y adaptados para su manejo en Geogebra en cada una de las etapas.

3.6 FASES DE LA INVESTIGACIÓN Y RECOLECCIÓN DE DATOS

La investigación se dividió en tres etapas:

1) ***Fase exploratoria con un par de estudiantes****:* Tuvo como objetivo lograr un primer acercamiento con la población de estudio, aplicar problemas similares a los planeados y observar posibles inconvenientes para hacer correcciones durante la siguiente fase, así como implementar mejoras en aquellos aspectos no previstos. En esta etapa, participaron dos estudiantes quienes trabajaron en cinco sesiones de dos horas cada una. En la primera sesión, se planteó un problema a resolver con lápiz y papel (ver anexo 1). En dicho problema, los estudiantes hicieron trazos y mediciones para elaborar una conjetura, de la cual debían explicar las razones que la justificaban. Este es un tipo de problema totalmente ajeno a lo acostumbrado en su medio y tal como se previó, los alumnos en un inicio no alcanzaron siquiera a comprender la naturaleza de la respuesta solicitada. Posteriormente, se les propuso introducirse al manejo del software Geogebra para averiguar si después de trabajar ciertas actividades con el programa, podían resolver el mismo problema a manera de prueba final. Las actividades trabajadas y la prueba final de la fase exploratoria se tomaron de la página de internet: www.learner.org/courses/learningmath/geometry/session5/part_c/index.html

Dichas actividades se muestran en el anexo 1.

2) ***Fase experimental: Actividades preliminares***. En esta etapa, se trabajó con un grupo de 5 alumnos; a cada uno de los cuales se les solicitó realizar cuatro actividades con una serie de construcciones con el fin de lograr que comenzaran a involucrarse en el uso del software Geogebra. No obstante, la intención de esta etapa fue no sólo construir (o reconstruir) los conceptos necesarios para lograr resolver un problema final, sino también y sobre todo, involucrar al estudiante con el significado de justificar una conjetura de un problema geométrico (probar informalmente), para ello, la intención de la prueba no se planteó nunca de manera directa sino recurriendo frecuentemente a la pregunta "¿por qué?".

Las cuatro actividades antes mencionadas contienen un total de nueve construcciones geométricas, cuatro de las cuales implican problemas de prueba. Éstos se escogieron del libro de texto Geometría plana y del espacio de Baldor (2004) y se adaptaron para su implementación con los estudiantes de forma tal que pudieran ser resueltos utilizando el software Geogebra. Un par de ejemplos de los problemas en la fase de las actividades previas se muestran a continuación[17]:

Primer problema de la segunda sesión

Trazar un triángulo cualquiera cuyos vértices se encuentren sobre dos rectas paralelas (ver figura 3.6.1)[18].

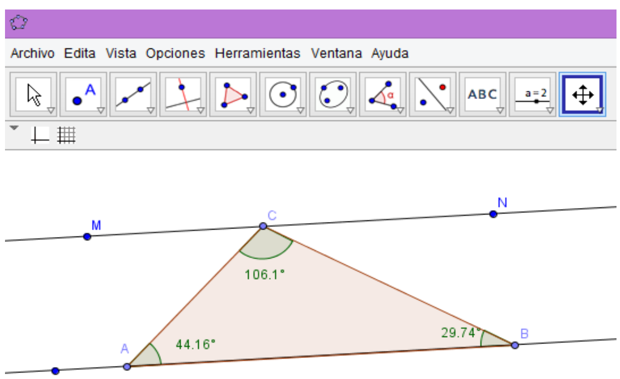


Figura 3.6.1 Ángulos internos de un triángulo construido sobre dos rectas paralelas.

A continuación trazar los ángulos internos, sumar sus valores y contestar: ¿Cuánto resulta la suma de los ángulos internos A, B y C? ¿Por qué sucede esto? ¿Cuáles son los principios geométricos que justifican este hecho?

[17] Para ver en detalle todas las actividades implementadas en esta fase, consultar el anexo 2.

[18] El trazo de las figuras fue guiado paso a paso a través de las instrucciones que se les proporcionaron en las hojas de trabajo, aquí únicamente se muestran versiones sintetizada de los problemas propuestos.

Primer problema de la cuarta sesión

Trazar un paralelogramo con sus diagonales y medir los segmentos que van desde cada vértice al punto de intersección de dichas diagonales, tal como se muestra en la figura 3.6.2.

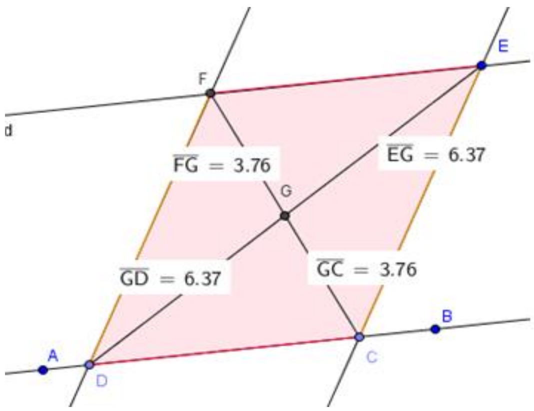


Figura 3.6.2. Paralelogramo $CDEF$

Posteriormente, las estudiantes debían contestar las preguntas: ¿Cómo son entre sí los segmentos $\overline{FG}, \overline{GC}, \overline{EG}$ y $\overline{GD}$? ¿Por qué? ¿Cuáles son los principios geométricos que justifican esto?

Las soluciones esperadas, debido a las características de la población, no eran de modo alguno respuestas de tipo deductivo. La dinámica de interacción entre las estudiantes y la entrevistadora se detalla más adelante en el Análisis de los Datos.

*3) **Fase experimental: Aplicación de un problema final***. Debido a que uno de los estudiantes no asistió a la sesión de la prueba final, ésta se aplicó únicamente a las cuatro alumnas restantes. El problema implementado se tomó de la página: http://www.learner.org/courses/learningmath/index.html y también se adaptó para su solución en Geogebra. Este problema es el utilizado para el análisis de los datos y los fragmentos de los diálogos generados se muestran en el siguiente capítulo. Al igual que en todas las demás fases, se cuenta con el registro escrito, las videograbaciones y los archivos con las soluciones elaboradas por cada alumno en Geogebra. La versión sintetizada del problema es la siguiente[19]:

Trazar un triángulo ABC, ubicar los puntos medios E y D y construir un triángulo interno ADE. Con ayuda de un deslizador girar este último triángulo sobre cualquiera de los vértices E o D hasta lograr un giro de 180°, tal como se muestra en la figura 3.6.3.

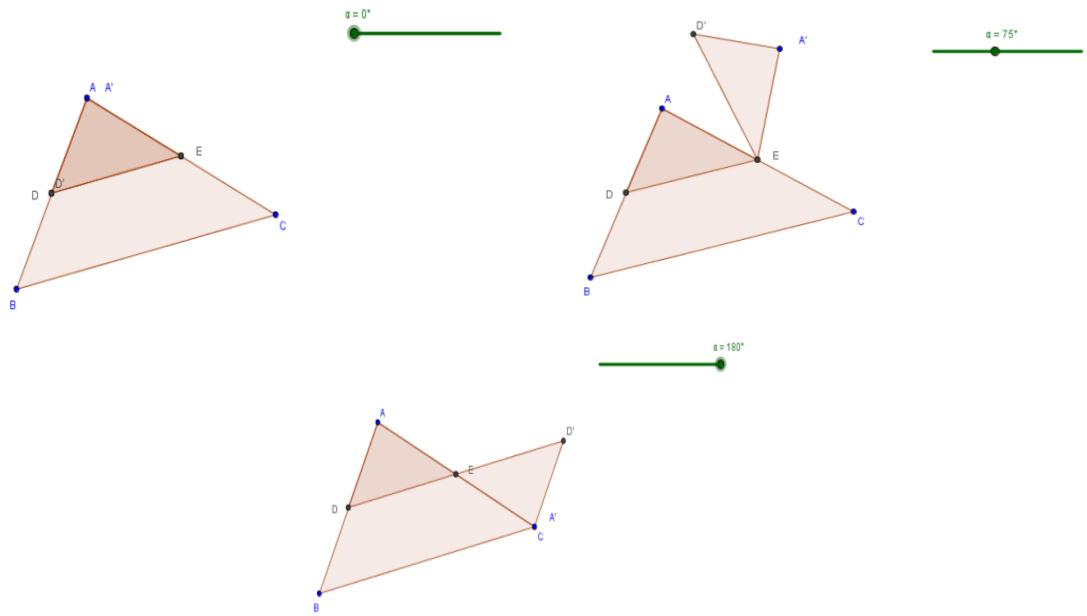


Figura 3.6.3. Rotación del ΔADE

a) ¿Cómo son entre sí $\overline{DD'}$ y $\overline{BC}$ cuando el triángulo se ha invertido por completo?[20]

b) Cambia el tamaño y la forma del triángulo ABC. ¿Se mantiene la relación anterior? ¿Por qué? ¿Con qué elementos geométricos justificarías este hecho?

---

[19] El problema tal como se les proporcionó a los estudiantes en la hoja de trabajo, se puede consultar en el anexo 3.

[20] Considerar la posición y la medida de ambos segmentos.

CAPÍTULO 4
ANÁLISIS DE DATOS

4.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se analizan los datos obtenidos con el problema final, tomando en cuenta para ello el Marco Conceptual expuesto en el Capítulo 2.

Es importante recordar que las estudiantes trabajaron todos los conceptos y conocimientos necesarios en la serie de actividades previas, varias de ellas a manera de problemas de prueba bajo un esquema similar al del problema final. Los conceptos así construidos (hechos geométricos)[21], las heurísticas y los trazos utilizados durante esta etapa fueron retomadas de maneras diversas al tratar de resolver el problema final.

Considerando lo anterior, en el presente capítulo se transcriben algunos fragmentos de las participaciones de las estudiantes conforme fueron resolviendo el problema final así como parte de las intervenciones de la entrevistadora (captadas en las videograbaciones) y para ilustrarlos se recurre a las imágenes de las construcciones hechas con el software o a fragmentos de sus reportes escritos, posteriormente, se interpretan los fragmentos de la etapa de justificación argumentativa y de la obtención de la prueba (justificación final) utilizando el Modelo de Toulmin. Después se muestra la síntesis de los resultados y los comentarios al respecto. La fase de entrevista se fue generando sobre el proceso mismo de resolución, ya que se elaboraron preguntas conforme las estudiantes argumentaban durante sus soluciones. El propósito de este análisis es estar en condiciones de responder a las preguntas de investigación planteadas en el Capítulo 1.

La simbología de la transcripción de los diálogos entre estudiantes y entrevistadora se muestra en la Tabla 1:

[21] De acuerdo con Robayo (2013) y con Boero (1999), esta última referencia fue recuperada de: http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html

Tabla 4.1

Simbología utilizada en la transcripción de los fragmentos de los diálogos

Símbolo	Significado
L1, L2, L3,…	Simbolizan las líneas; cada una indica la ocasión en la cual una sola persona habló (de acuerdo con la transcripción de las videograbaciones).
E: J1, J2, R1, R2,…	E: Entrevistador y R1, R2, J1, J2: Estudiantes.
[*Letra cursiva*]	Texto escrito entre corchetes y con letra cursiva son observaciones sobre lo dicho por los interlocutores o las acciones en Geogebra que acompañan al discurso.
[…]	Puntos suspensivos entre corchetes significan que se ha omitido una parte del discurso, la cual es irrelevante para los propósitos de la investigación.
(…)	Puntos suspensivos entre paréntesis indican breves pausas hechas por las estudiantes y la entrevistadora.
Modelo de Toulmin	
C_1, C_2, C_3 ...	La letra C con subíndices: Afirmación o aseveración (en base a algún hecho observable en Geogebra).
D_1, D_2, D_3 ...	La letra D con subíndices: Dato que justifica o da soporte a la afirmación correspondiente.
?	Indica que el dato es desconocido en un inicio (dato encontrado o datos encontrados).
W	Garantía o regla de inferencia la cual permite relacionar el dato con la afirmación

4.2 CASO DE LAS ESTUDIANTES J1 Y J2

Las alumnas J1 y J2 trabajaron en equipo durante todas las sesiones a diferencia del resto. La solución del problema final, implicó primeramente la construcción de la figura utilizando las herramientas básicas de Geogebra así como el uso de un deslizador, en seguida la elaboración de dos conjeturas las cuales debían probar al responder a la pregunta del porqué pensaban que su conjetura era cierta y qué elementos geométricos utilizarían para justificar dicha afirmación.

A continuación se muestran los diálogos y el análisis de los argumentos utilizando el diagrama de Toulmin. Es importante indicar que dicho análisis se hace únicamente a las etapas de justificación y obtención de la prueba informal (del Espectro Exploración-Prueba) pues es ahí donde se presentan los argumentos después de haber elaborado las conjeturas iniciales; en las demás etapas solo se describe lo generado por las estudiantes. Se optó llevarlo a cabo así porque en el caso de estas alumnas todas las fases se mostraron con gran claridad. También, es importante mencionar que en los casos presentados, la fase de exploración se observó antes de iniciar la justificación de las conjeturas.

1) *Fase de elaboración de las Conjeturas.*

[*Las estudiantes afirman en su registro escrito*]

$DD' = BC$ son congruentes [*Se refiere a los segmentos correspondientes*].

$\overline{BC} = 5.24,\ \overline{DD'} = 5.24$, tienen la misma medida y son paralelas [*Anotaron dos medidas cualesquiera*]

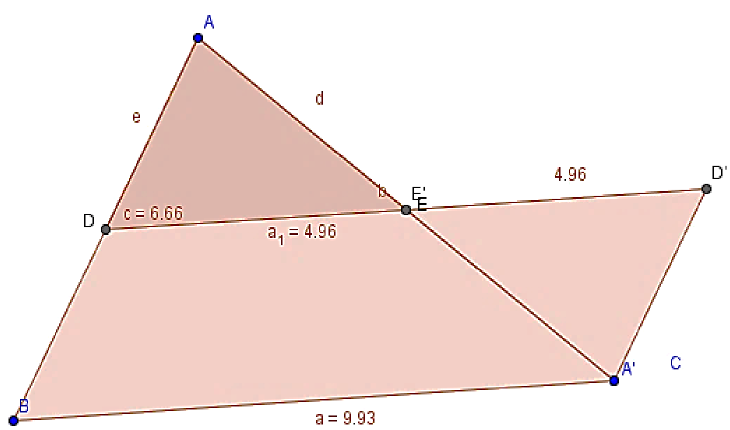


Figura 4.2.1 Construcción en Geogebra de la cual surgieron las conjeturas iniciales

El problema inicialmente implica la justificación de dos conjeturas (Afirmaciones por probar): $\overline{DD'} \cong \overline{BC}$ y $\overline{DD'} \parallel \overline{BC}$.

La primera se elaboró a través de la medición de longitudes con el software y la condición de paralelismo por simple observación.

2) *Fase de exploración.*

A continuación, revisando el protocolo de construcción del archivo en Geogebra, se puede observar que las estudiantes comenzaron su exploración midiendo los ángulos internos de la figura, primeramente los del triángulo ABC y posteriormente los de los triángulos ADE y $A'D'E'$ (ver figura 4.2.2).

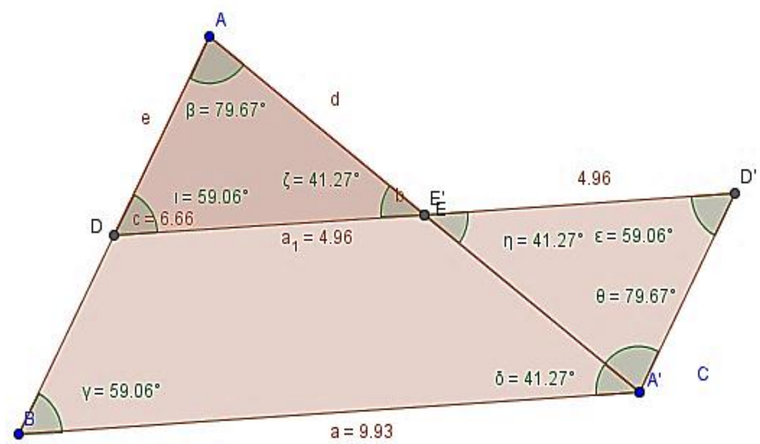


Figura 4.2.2 Triángulos ABC y $A'D'E'$ con sus ángulos internos marcados

Prosiguen con la obtención de la medida de los ángulos del cuadrilátero $BCDE$ y después, por el punto A trazan una recta paralela al $\overline{BC}$ y por el punto A' otra paralela al $\overline{AB}$ Además de una recta sobre $\overline{BC}$ (ver figura 4.2.3).

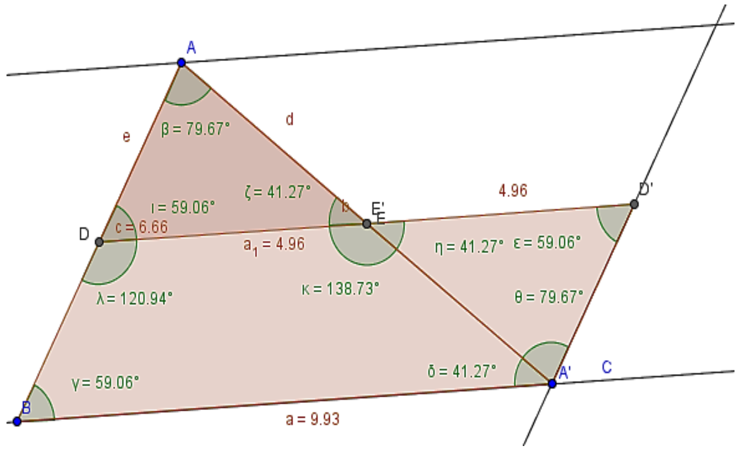


Figura 4.2.3 Figura con ángulos y paralelas marcadas

Después, tal vez para constatar la congruencia de los triángulos, obtienen las medidas de los segmentos $\overline{AD}, \overline{AE}$ y nuevamente $\overline{DE}$.

3) *Fase de explicación informal.*

Al llegar a este punto, y después de un lapso de tiempo aproximado de veinte minutos, la entrevistadora pregunta si pueden explicar por qué razones ambos segmentos "tienen la misma medida" y son paralelos. Ellas, al comenzar a explorar el contenido de la conjetura, ofrecen una explicación informal de tipo descriptivo acerca de lo que han construido (Líneas [L9] hasta [L29]). He aquí algunos fragmentos de esa parte de la conversación:

[…] [L9] E: (…) Los dos trapecios dicen que son congruentes porque solo se invierten (…) [*Se refiere a los trapecios* $DBCE$ *y* $AED'F$*. Ver Figura 4.2.3*].

[L10] J2: Ajá.

[L11] E: ¡Ah! ya entendí eso, ¿Y después?

[L12] J2: Como estos dos [*Señala los triángulos* ADE *y* $A'D'E'$], es como una traslación [*Sic. Quiso decir rotación*], también son congruentes.

[…] [L22] J2: […] Lo que nosotras también explicábamos es que si los complementamos [Se refiere a los triángulos ADE y $A'D'E'$] como resultado tenemos paralelogramos, es decir, también pueden ser dos romboides que son estos [*Señala los cuadriláteros* $DBA'D'$ *y* $ADD'F$].

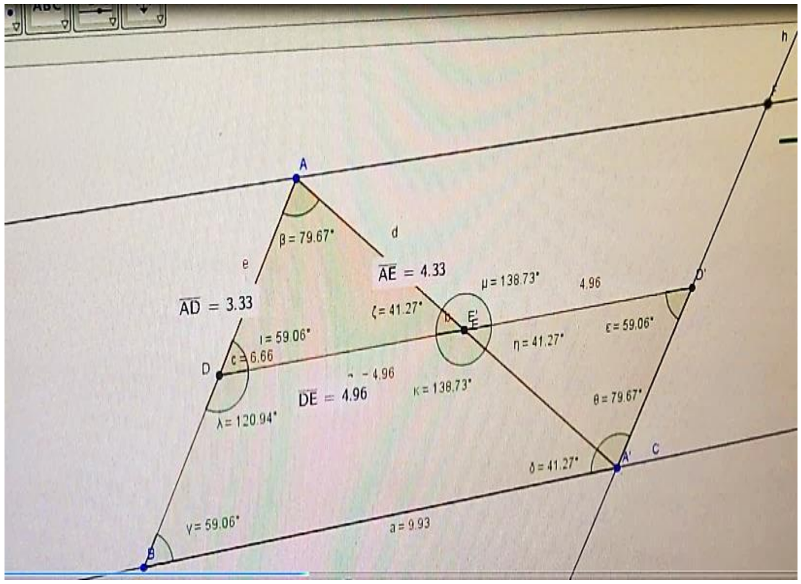


Figura 4.2.4 Paralelogramo referido desde [L2] hasta [L29] donde se muestra el punto F en la parte superior derecha

[L26] J2: O podrían ser dos triángulos escalenos que serían ABC y (…)

[L29] J1 y J2: y (…) CFA [*Al mismo tiempo*].

Posteriormente se comienzan a presentar indicios de argumentación abductiva basada, sobre todo, en lo observado a través de mediciones llevadas a cabo con el software.

4) *Fase de Justificación argumentativa.*

[L30] E: (…) ¿Eso cómo explica que los dos segmentos que les piden: $\overline{DD'}$ y $\overline{BC}$ tengan la misma medida y sean paralelos? Es decir, ya aquí veo otro paralelogramo más grande y dos triángulos que ustedes me dicen son congruentes (...) ¿Y esos elementos cómo me explican que estos dos segmentos sean paralelos y de igual medida?

[L31] J1: ¿Por la suma de las medidas?

[L32] E: ¿De cuáles?

[L33] J1: De ésta [*Reacomoda la medida a_1 para mostrarla*]

[L34] J1: De $a_1 + a'$, da lo mismo que a [*Ver figura 4.2.5*]

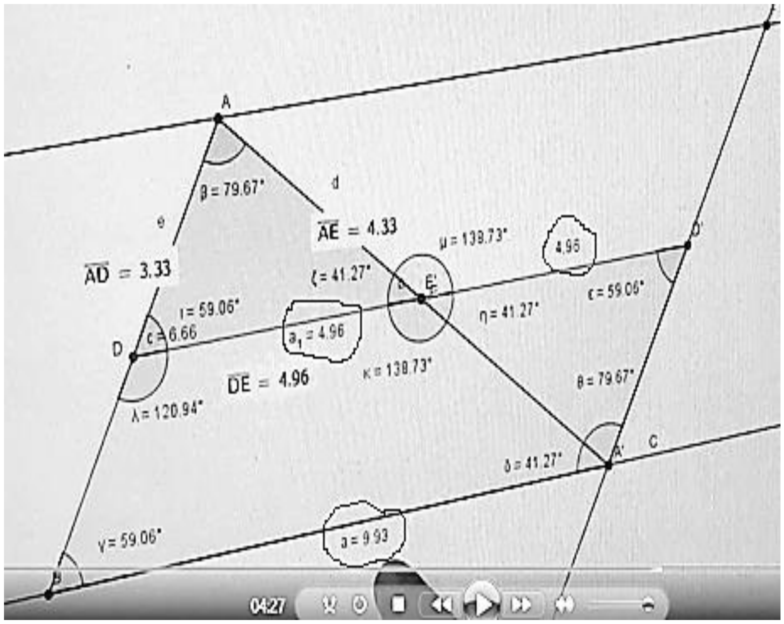


Figura 4.2.5 Medidas a_1, a' y a correspondientes a $\overline{DE}$, $\overline{ED'}$ y $\overline{BC}$ respectivamente

[…][L37] E: Ahí es donde no entiendo por qué (…) ¡Ah! Me dicen que si yo los sumo obtengo una suma determinada que resulta igual a a (…) [*Se percata que sumaron las medidas con ayuda del software*].

[L38] J2: Ajá

[L39] E: ¿Cómo lo explicarían sin medir?

[…][L42] J1: Porque, pues es el mismo vértice.

[L43] E: ¿A cuál vértice te refieres?

[L44] J1 y J2 [*Al mismo tiempo*]: Al punto E.

[L45] E: ¿Con el mismo vértice te refieres a que este divide a la mitad al segmento?

[L46] J1: Ajá

[…] [L49] E: ¿Por qué?

[L50] J2: Porque si lo ponemos recto, si ponemos D a la distancia de B [*Sic. Se refiere a que si traslada hacia abajo el segmento* $\overline{DE}$], estaría igual y sería como la mitad [*Señala el cuadrilátero* $BA'D'D$].

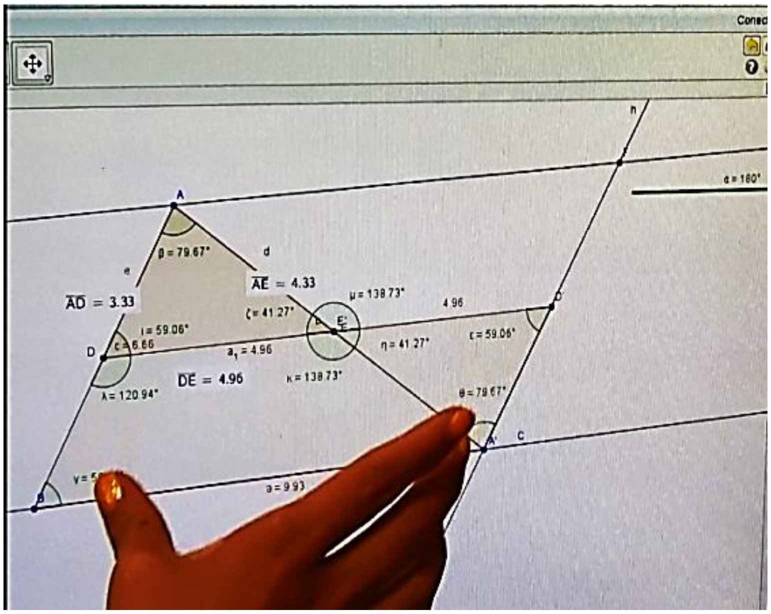


Figura 4.2.6 Cuadrilátero BA´D´D

4) *Justificación final: Obtención de la prueba informal*.

[L51] E: ¿Pueden hacer el trazo? [*Les solicita esto para entenderles*]

[…] [L54] J2: (…) Sería la paralela, creo (…) [*Traza una paralela a la recta* h *que pasa por el punto* E. *Esta recta aparece como* k]. Y aquí se observa [*Señala con su mano la distancia entre las paralelas* k *y* h] (…) a simple vista es la misma distancia. [*Lo importante aquí sobre todo es el señalamiento que hace con su mano de las distancias* a_1 *y* $a´$ *y cómo las "traslada" hacia* $\overline{BC}. Ver\ figura$ 4.2.7].

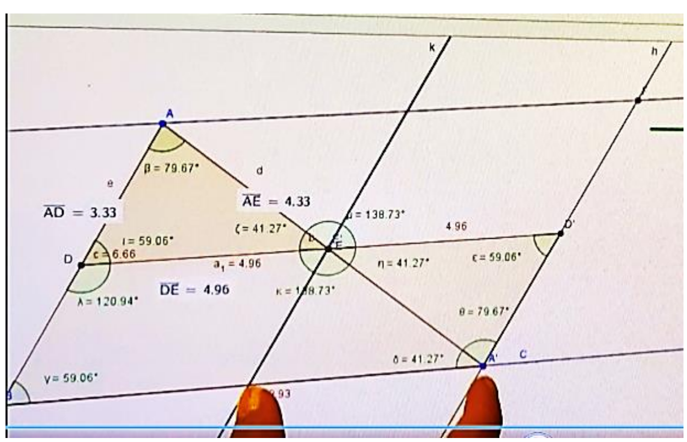


Figura 4.2.7 Distancia señalada entre las paralelas k y h

Análisis de las etapas de justificación argumentativa y obtención de la prueba final de la conjetura C_1: $\overline{DD'} \cong \overline{BC}$ utilizando el Modelo de Toulmin (estudiantes J1 y J2)

Como puede observarse, para justificar C_1: $\overline{DD'} \cong \overline{BC}$ las estudiantes sumaron con ayuda del software $a = a_1 + a'$ y esa asuma equivale a $m\overline{BC} = m\overline{DE} + m\overline{ED'}$. Utilizando el modelo de Toulmin, la expresión anterior es el dato que justifica la afirmación C_1, por lo tanto:

$$? \ D_1 : \overline{BC} = \overline{DE} + \overline{ED'} \xrightarrow[\textit{Suma de segmentos}]{} C_1 : \overline{DD'} \cong \overline{BC}$$

(a)

Ahora, el Dato D_1 es la afirmación C_2, para la cual inicialmente se desconoce el Dato D_2 que la justifica. Pero, basándose en el hecho geométrico de la traslación, esa afirmación queda justificada por medio del trazo de paralelas, las cuales visualmente "ayudan a trasladar" los puntos extremos de $\overline{DE}$ y $\overline{ED'}$ sobre $\overline{BC}$.

(b)

Como se observa, la estructura de argumentación durante la justificación (de la [L30] a la [L50]) está determinada por un razonamiento de tipo abductivo. La justificación final, considerada como una prueba informal, es también un argumento de carácter abductivo en el cual a partir de hechos observables se construyen afirmaciones.

Enseguida se muestran los fragmentos más importantes de la justificación argumentativa de la segunda conjetura del problema.

1) *Fase de Justificación argumentativa.*

[L60] E: (…) ahora hay que explicar por qué [*dicen que*] son paralelos $\overline{DD'}$ y $\overline{BA'}$.

[L61] J1: Se podría decir que es una paralela y tiene la misma distancia

[L62] E: Tienen la misma distancia (…) ¿Cuál es la "misma" distancia?

[…][L65] J2: La de este segmento con este [*Indica* $\overline{DB}$ *y* $\overline{D'A'}$].

[L66] E: ¿Por qué $\overline{DB}$ es igual a $\overline{D'A'}$?

[…] [L69] J1: (…) Por la rotación.

[L70] J2: La de 180° (…) esto es esto y esto es esto [*Expresa su razonamiento señalando con su mano la relación entre* $\overline{AD}$ *y* $\overline{DB}$ *y luego entre* $\overline{AE}$ *y* $\overline{EA'}$], (…) AD es lo mismo que DB [*Señala* $\overline{DB}$] , Sí y (…) $\overline{DD'}$ (…) con $\overline{A'B}$.

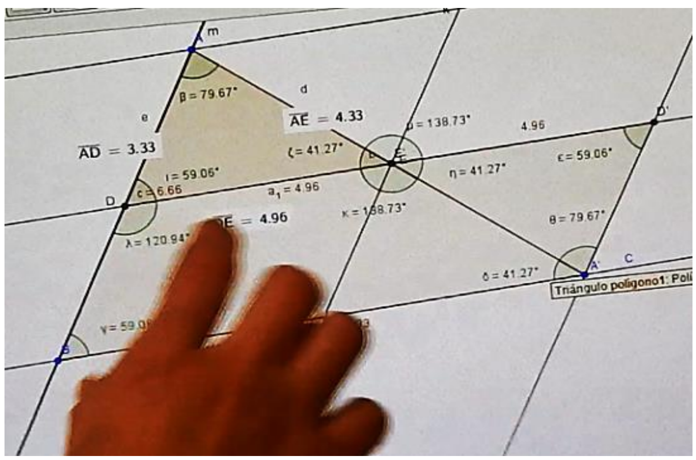


Figura 4.2.8 La estudiante J2 señala los segmentos $\overline{DB}$ y $\overline{D'A'}$

2) *Justificación final: Obtención de la prueba informal*.

[L71] E: […] ¿Y después?

[…] [L78] J1: [*Aplica el zoom para alejar un poco la imagen y señala sobre la pantalla con su lápiz* $\overline{FD'}$ *y* $\overline{D'A'}$. *Ver figura 4.2.9*] FD' es lo mismo que estas dos [*Sic. Se refiere al segmento delimitado por los dos puntos:* D'*y* A´].

[L79] J2: Que sería lo mismo que AD.

[L80] J3: ¿Por qué es lo mismo? ¿Por qué $\overline{\text{AD}}$ es lo mismo?

[L81] J4: Por la rotación.

Análisis de las etapas de justificación argumentativa y obtención de la prueba final de la conjetura C_1: $\overline{DD'} \parallel \overline{BC}$ utilizando el Modelo de Toulmin (estudiantes J1 y J2)

Tomando la conjetura C_1: $\overline{DD'} \parallel \overline{BC}$ como afirmación inicial se tiene:

$$D_I: m\overline{DB} = m\overline{D'A'} \xrightarrow[W:\ Paralelismo]{} C_I: \overline{DD'}//\overline{BC}$$

(c)

El dato D_1 mostrado en el diagrama (c) corresponde a lo afirmado de la línea [L61] a la línea [L65]. En seguida, el dato D_1 se convierte en una segunda afirmación C_{II} y analizando desde la línea [L65] a la [L70] se pueden encontrar los datos D_{II} y D_{III} que le dan sustento (ver figura 4.2.9). Es importante advertir que la garantía referente al Punto medio se da de forma implícita (siendo esto una característica del razonamiento abductivo).

$$\begin{matrix} D_{II}: m\overline{AD} = m\overline{DB} \\ D_{III}: m\overline{D'A'} = m\overline{AD} \end{matrix} \xrightarrow[\substack{W_{II}: Punto\ medio \\ W_{III}: Rotación\ 180°}]{} C_{II}: D_I: m\overline{DB} = m\overline{D'A'}$$

(d)

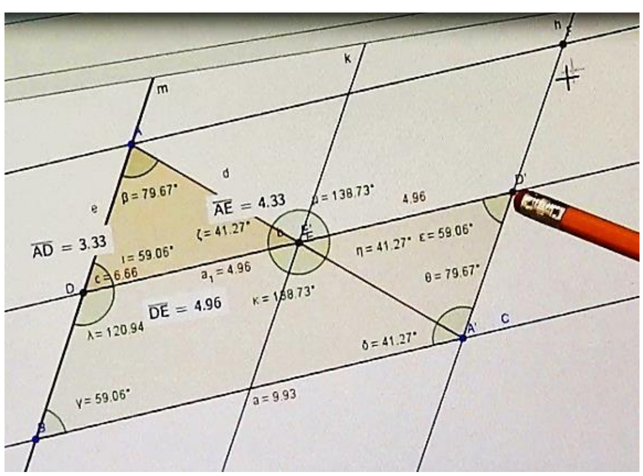


Figura 4.2.9 La estudiante J1 señala sobre la pantalla con su lápiz $\overline{FD'}$ y $\overline{D'A'}$

En este caso el razonamiento abductivo puesto en marcha al momento de conjeturar y durante la justificación, termina con un razonamiento con indicios de ser deductivo. Esto se puede identificar porque, a pesar de que en el diálogo mencionan primero la rotación del triángulo ADE, la prueba comienza a partir de la hipótesis $m\overline{AD} = m\overline{DB}$ (la cual es cierta debido a que D es punto medio) y posteriormente continúan con $m\overline{AD} = m\overline{D'A'}$ (también cierta porque el triángulo $A'D'E'$ es producto de la rotación del triángulo ADE). No obstante, es claro que la justificación dista mucho de ser completa (lo cual es una característica del razonamiento abductivo) debido a que la garantía utilizada no se explica suficientemente pues no está acompañada de algún criterio de congruencia que respalde el hecho geométrico de la Rotación.

Es importante recordar que todas estas observaciones se refieren al llamado sistema estructural, en el cual está basada nuestra investigación. Aparte están las deficiencias relacionadas con el sistema referencial (contenido y la simbología).

4.3 CASO DE LA ESTUDIANTE R1

Esta alumna trabajó de manera individual durante todas las sesiones, incluida la del problema final. Aquí se muestran únicamente las etapas de elaboración de conjeturas y de justificación argumentativa así como la de obtención de la prueba final. Como podrá observarse, ella logra llevar a buen término únicamente la justificación de la conjetura: $\overline{\mathrm{DD'}}//\overline{\mathrm{BC}}$ y lo logra en poco más del tiempo asignado: dos horas y media. A continuación se retoman los fragmentos y el análisis de los diálogos.

1) *Fase de elaboración de la conjetura.*

R1: [*La estudiante comienza leyendo la conjetura inicial de su registro escrito*]

Los segmentos DD' y BC son paralelos entre sí cuando $\alpha = 180°$ […]. Se mantiene la relación [*Se refiere al paralelismo*] porque las medidas que separan las rectas DD' y BC [*Sic. Se refiere a la medida de* $\overline{DB}$ *y* $\overline{D'C}$] fueron iguales lo que permitió que siguieran siendo paralelas entre sí.

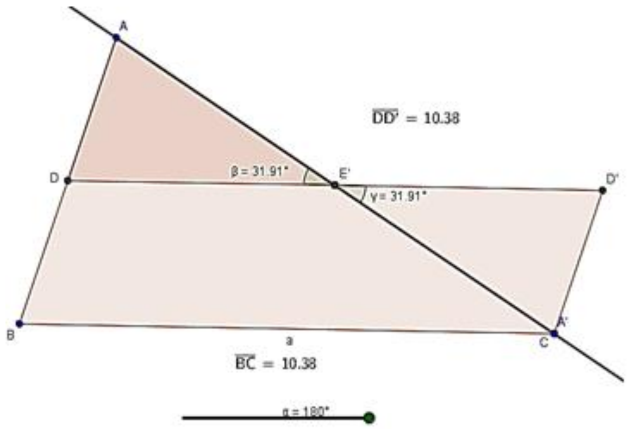


Figura 4.2.10 Construcción de la cual surgió la conjetura inicial $\overline{DD'} \parallel \overline{BC}$

2) *Fase de justificación argumentativa.*

[*Continúa de forma oral:*]

[…][L8] E: ¿Qué justifica que suceda eso que dices? ¿En qué te basas para decir que las medidas son iguales? [*Se refiere a la medida de* $\overline{DB}$ y $\overline{D'C}$].

[L9] R1: Es que este triángulo va a ser congruente con este porque tienen sus lados iguales [*Se refiere a los triángulos* ADE' y $\overline{E'CD'}$] y este punto [*Señala el punto* D] marca el punto medio entre todo este segmento [*Señala al* $\overline{AB}$].

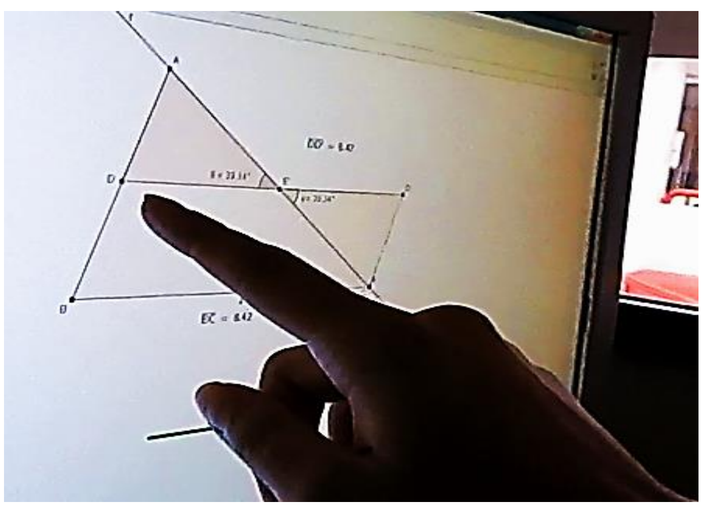


Figura 4.2.11 La estudiante R1 señala el punto medio D

3) *Justificación final: Obtención de la prueba informal*.

[L9] R1: [*Continuación*] entonces si este lado [*Se refiera al* $\overline{AD}$] mide cierto valor, por ser la mitad aquí va a medir lo mismo [*Señala* $\overline{DB}$] y entonces es igual acá a esto [*Señala* $\overline{D'C}$] y son iguales por eso.

Análisis de las etapas de justificación argumentativa y obtención de la prueba final utilizando el Modelo de Toulmin (estudiante R1)

Aplicando el modelo de Toulmin para analizar los datos de las dos últimas etapas puede observarse que para la afirmación C_I (conjetura inicial) se encontró el dato D_I referente a la congruencia de $\overline{DB}$ y $\overline{D'C}$ cuya garantía es una característica del Paralelismo (ver diagrama de Toulmin (A) y [L8]).

$$C_1: \overline{DD'} \parallel \overline{BC}$$

$$D_I: m\overline{DB} = m\overline{D'C} \longrightarrow C_I: \overline{DD'}//\overline{BC}$$

$$W: \textit{Paralelismo}$$

(A)

Posteriormente, el dato D_I se convierte en la afirmación C_{II} la cual es necesario justificar (o encontrar un dato que de forma hipotética explique su razón de ser). En esta ocasión los datos encontrados por la estudiante son D_{II} y D_{III} indicados en el diagrama (B) (ver también la [L9] de la etapa de justificación argumentativa). Las garantías respectivas son W_{II} y W_{III} las cuales se refieren al Criterio LLL de congruencia de triángulos y a la definición del Punto medio.

$$\begin{array}{l} D_{II}: \Delta ADE' \cong \Delta E'CD' \\ D_{III}: m\overline{AD} = m\overline{DB} \end{array} \longrightarrow C_{II}: D_I: m\overline{DB} = m\overline{D'C}$$

$$\begin{array}{l} W_{II}: \textit{Criterio LLL Congruencia de Triángulos} \\ W_{III}: \textit{Punto medio} \end{array}$$

(B)

A continuación el dato D_{II} es la afirmación C_{III}, cuyo dato encontrado es D_{IV}. La relación entre ambos solamente es el hecho geométrico de la rotación. Esta garantía se presenta de forma implícita. Es importante recordar que en la argumentación de tipo abductivo la garantía puede o no ser implícita (ver la continuación de [L9] en la fase de justificación final).

$$D_{IV}: m\overline{AD} = m\overline{D'C} \xrightarrow[W:\ \text{Rotación}]{} C_{III}: D_{II}: \Delta ADE' \cong \Delta E'CD'$$

(C)

Enseguida ocurre un "salto" en la lógica de argumentación debido a que el dato D_{IV} no continúa como la afirmación siguiente C_{IV} en la cadena de razonamiento (ver diagrama (D)).

$$\begin{matrix} D_{V}: m\overline{AD} = m\overline{DB} \\ D_{VI}: m\overline{AD} = m\overline{D'C} \end{matrix} \xrightarrow[W:\ \text{Transitividad}]{} C_{IV}: m\overline{DB} = m\overline{D'C}$$

(D)

Al igual que en el caso de las estudiantes J1 y J2, la justificación en general es incompleta pues la estudiante R1 no pone énfasis en el hecho de que la rotación en el diagrama (C) es de 180°, lo cual permite junto con la congruencia de $\overline{DB}$ y $\overline{D'C}$ que $\overline{DD'}$ y $\overline{BC}$ sean paralelos. Al respecto, en su registro escrito la alumna argumenta (ver figura 4.3.1):

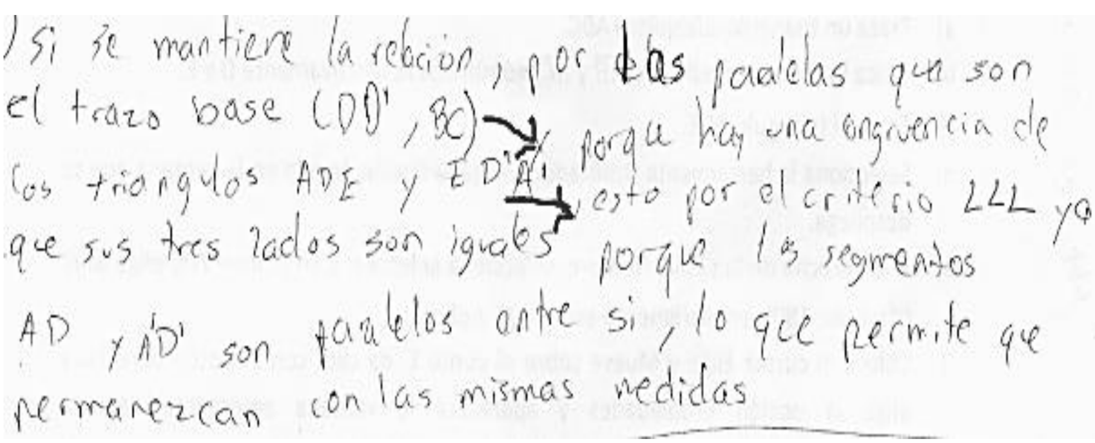

) Si se mantiene la relación, por las paralelas que son el trazo base (DD', BC) porque hay una congruencia de los triángulos ADE y E'D'A', esto por el criterio LLL ya que sus tres lados son iguales porque los segmentos AD y A'D' son paralelos entre sí, lo que permite que permanezcan con las mismas medidas

Figura 4.3.1 Argumento escrito complemento a lo expresado en [L9]

Puede observarse que sólo comenta: “Los segmentos AD y $A'D'$ son paralelos entre sí”, pero no justifica dicha afirmación. No obstante, organiza sus ideas de manera generalizada y a pesar de tener muchas deficiencias de contenido, la estructura abductiva al final también tiene indicios de razonamiento deductivo; esto se puede ver en el hecho de que, la afirmación C_{IV} no fue D_{IV} (dato de entrada de la C_{III}). Véanse los Diagramas de Toulmin (C) y (D).

4.4 CASO DEL ESTUDIANTE R2

El estudiante R2 no realizó la figura como se indicaba en la hoja de trabajo; su construcción contenía trazos extras innecesarios[22] (característica de las etapas de explicación informal y de justificación argumentativa). Los argumentos presentados durante la fase de justificación, en la cual se dieron las preguntas y respuestas, son confusos por lo cual, para poder relacionarlos más fácilmente con los diagramas de Toulmin, se marcan en negritas cursivas. Al final, el estudiante prefiere también leer su registro escrito. Los siguientes son fragmentos de lo argumentado durante la elaboración de las conjeturas y durante la justificación; posteriormente se agrega el registro escrito.

1) *Fase de elaboración de las conjeturas.*

[L1] R2: Decíamos que el ***segmento D con D´*** [*Sic. Quiso decir* $\overline{DD}$] ***es igual a B con*** C [*Sic. Quiso decir* $\overline{BC}$] y bueno, esa relación la obtuve al rotar esta figura que es un triángulo [*Señala el triángulo* $ED'A'$] y forma un ***paralelogramo y aquí se forman paralelas*** (…)[23]

[22] Mostró deficiencias de origen pues al aplicar la reproducción de los pasos del archivo de Geogebra, no se observó la secuencia de las instrucciones indicada en las hojas de trabajo. Por esa razón, únicamente se muestra la construcción final (figura 4.2.12) con la cual explicó y justificó.

[23] A pesar de no mencionarlo en el diálogo, tal conjetura se obtuvo también a partir de la obtención de la medida de ambos segmentos. Esto puede verse en la figura 4.2.12 obtenida del archivo electrónico de la construcción hecha en Geogebra así como de lo expresado en el registro escrito.

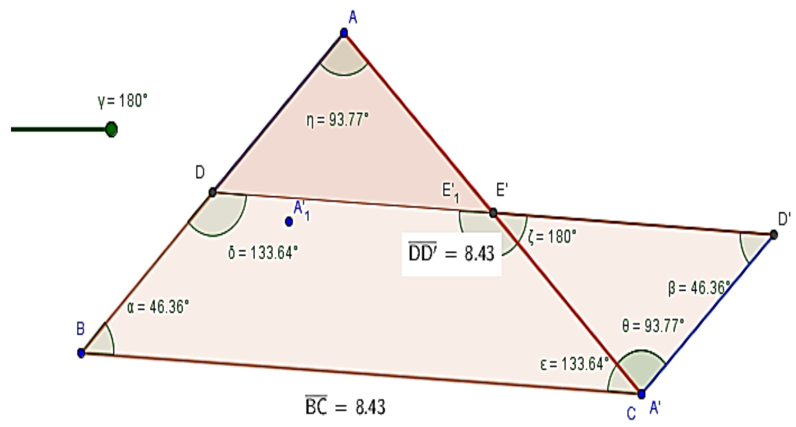


Figura 4.2.12 Construcción a partir de la cual R_2 comenzó a elaborar sus conjeturas

1) *Fase de justificación argumentativa.*

[L2] E: ¿En qué te basas para afirmar que es paralelogramo?

[L3] R2: En que ***sus lados son paralelos*** [*Señala* $\overline{DD'}$ *y* $\overline{BC}$] de ambos lados tanto los superiores como los laterales por eso es un paralelogramo ¿no? (…)

[L4] E: O sea para que sea ***paralelogramo sus lados deben ser paralelos***. Ahora, eso es lo que hay que explicar: ***¿Cómo estamos seguros que esos segmentos son paralelos?*** $\overline{¿\boldsymbol{BC}}$ ***con*** $\overline{\mathrm{DD'}}$ ***y*** $\overline{\boldsymbol{DB}}$ ***con*** $\overline{\mathrm{D'A'}}$***?***

[L5] R2: También chequé y DD´ ***es igual a*** BC, bueno, este es equitativo al rotar este triángulo (…) partiendo de estos dos triángulos que son semejantes [Sic]

[L6] E: ¿Semejantes?

[L7] R2: ***Congruentes*** (…) podemos decir esto porque de aquí podemos usar el criterio ***Lado- Ángulo-Lado*** y podemos tomar el lado A'con E_1 y D con A [*Sic. Quiso decir tomar los* ***lados*** $\overline{\boldsymbol{A'E_1}}$ ***y*** $\overline{\boldsymbol{DA}}$] y el ángulo ¿Lo puedo marcar? [*Marca el* ***ángulo*** $\boldsymbol{\measuredangle DAE_1}$].

3) *Justificación final: Obtención de la prueba informal*.

[L8] E: Lado-Ángulo-Lado (…).

[L9] R2: Sí, ya que podemos, bueno, por el ***punto medio*** que está trazado a partir del triángulo mayor, tanto va a ser la misma distancia de $\boldsymbol{C}$ ***a*** $\boldsymbol{E_1}$ ***como de*** $\boldsymbol{A}$ ***a*** E_1, entonces igual del otro lado de ***B a D y de*** A ***a*** D, entonces podemos decir que (…) el segmento AE_1 ***es igual a*** $\boldsymbol{A'E_1}$ ***y el segmento de*** $\boldsymbol{DA}$ ***es igual a*** $\boldsymbol{A'D'}$, entonces solo lo que tendríamos que sacar sería el ***ángulo*** θ ***con*** η ***que podemos observar son iguales, entonces ahí se cumple el criterio de congruencia.***

Análisis de las etapas de justificación argumentativa y obtención de la prueba final de las conjeturas C_I: $\overline{DD'} \cong \overline{BC}$ y $\overline{DD'} \parallel \overline{BC}$ utilizando el Modelo de Toulmin (estudiante R2)

Primeramente se consideró la conjetura C_I: $\overline{DD'} \cong \overline{BC}$ para la cual se encontró el dato D_I (Véase [L1]) considerando que los paralelogramos tienen lados paralelos dos a dos. Esto expresado con un diagrama de Toulmin queda:

$$? \ D_1: DD'CB \ \textit{es paralelogramo} \longrightarrow C_1: \ \overline{DD'} \cong \overline{BC}$$

W: Características de los paralelogramos

(a)

Ahora el D_1 se convierte en la afirmación C_2 para la cual se requiere encontrar más datos y por la misma razón, porque los paralelogramos tienen lados paralelos dos a dos se tiene entonces: $\overline{DD'} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{DB} \parallel \overline{D'A'}$.

$$? \ D_2: \begin{array}{r} \overline{DD} \parallel \overline{BC} \\ \overline{DB'} \parallel \overline{D'A} \end{array} \longrightarrow C_2: D_1: DD'CB \ \textit{es paralelogramo}$$

W: Características de los paralelogramos

(b)

Es importante hacer notar que en el diagrama (b), la garantía se acompaña del respaldo de la toma de las medidas $\overline{DD'}$ y $\overline{BC}$, esto a pesar de que no lo mencionó en su discurso oral ni en el escrito.

$$?\,D_3:\ \Delta ADE_1 \cong \Delta A'D'E_1 \longrightarrow C_3: D_2: \overline{DD'} \parallel \overline{BC}$$

$$\overline{DB} \parallel \overline{D'A'}$$

$$W: Congruencia\ de\ triángulos$$

(1c)

En realidad D_3 no lleva directo a la afirmación C_3 (o viceversa) tal como se muestra en (1c), no obstante, en la línea del diálogo [L5] de la etapa de justificación argumentativa él plantea:

$$?\,D_I:\ m\overline{DD'} = m\overline{BC} \longrightarrow C_I: \overline{DD'} \cong \overline{BC}$$

W: Congruencia de segmentos

(2c)

$$?\,D_{II}:\Delta ADE_1 \cong \Delta A'D'E_1 \longrightarrow C_{II}: D_I: m\overline{DD'} = m\overline{BC}$$

W: Congruencia de Triángulos

(3c)

Tampoco en este caso D_{II} nos lleva directo a la afirmación C_{II} (o viceversa) así como se muestra en (3c). Sin embargo, él continúa y en [L9] plantea:

$$D_{III}: \overline{A'E_1} = \overline{AE} \quad \overline{DA} = \overline{A'D'} \quad \hat{\theta} = \hat{\eta} \longrightarrow C_{III}: D_{II}: \Delta ADE_1 \cong \Delta A'D'E_1$$

W: Punto medio, Criterio de congruencia LAL

(4c)

De acuerdo con lo expresado verbalmente, el análisis queda incompleto puesto que nunca aclara la relación de sus afirmaciones mostrada en el diagrama (3c). Ahora, en el registro escrito se tiene lo siguiente:

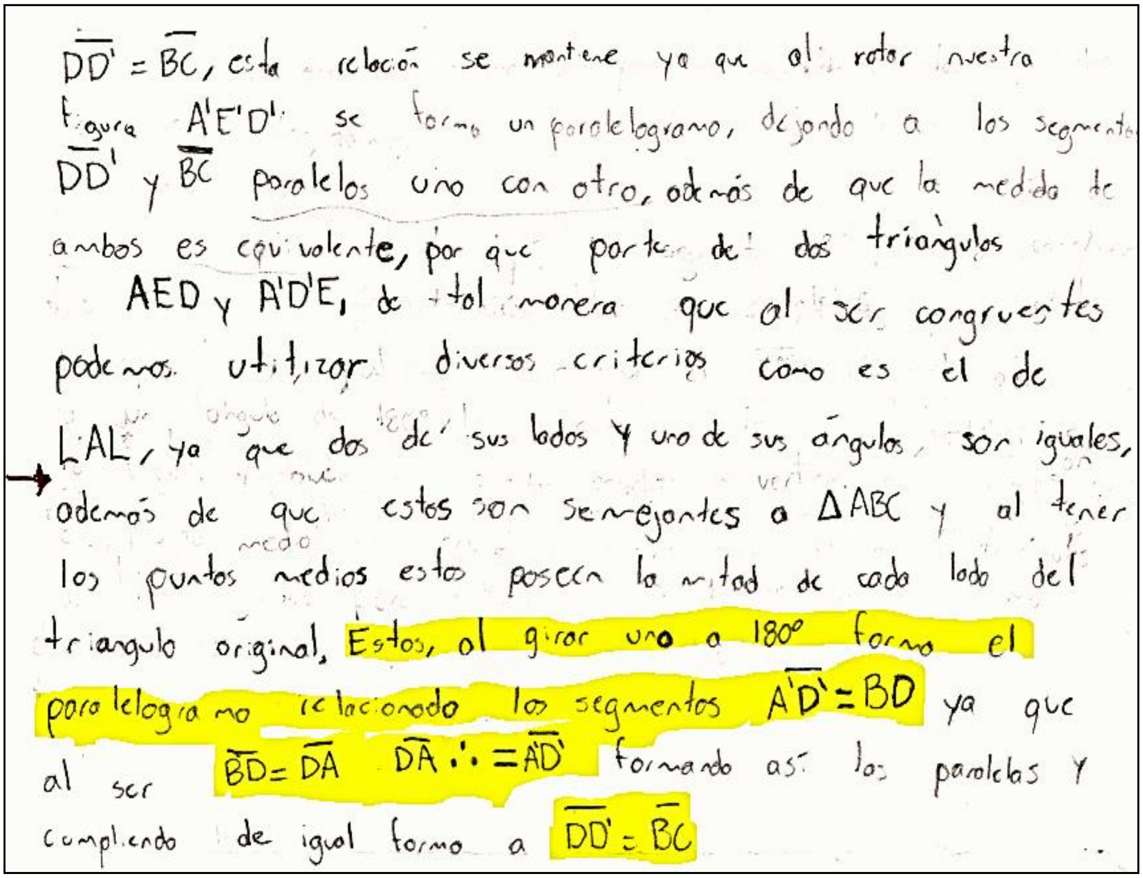

$\overline{DD'} = \overline{BC}$, esta relación se mantiene ya que al rotar nuestra figura A'E'D' se formó un paralelogramo, dejando a los segmentos $\overline{DD'}$ y $\overline{BC}$ paralelos uno con otro, además de que la medida de ambos es equivalente, porque parte de dos triángulos AED y A'D'E, de tal manera que al ser congruentes podemos utilizar diversos criterios como es el de LAL, ya que dos de sus lados y uno de sus ángulos son iguales, además de que estos son semejantes a ΔABC y al tener los puntos medios estos poseen la mitad de cada lado del triángulo original. Estos, al girar uno a 180° forma el paralelogramo relacionado los segmentos $\overline{A'D'} = \overline{BD}$ ya que al ser $\overline{BD} = \overline{DA}$ $\overline{DA} \therefore = \overline{AD'}$ formando así los paralelas y cumpliendo de igual forma a $\overline{DD'} = \overline{BC}$

Figura 4.2.13 Registro escrito realizado por el estudiante R_2

Es de tomarse en cuenta que hace referencia al giro de 180° que forma un paralelogramo relacionando $\overline{A'D'} = \overline{BD}$ (…), lo cual expresado mediante el diagrama de Toulmin puede quedar así:

? $D_a : \overline{A'D'} = \overline{BD}$ ⟶ C_a: *BDD´A´es Paralelogramo*

W: Características de los paralelogramos

(5c)

Posteriormente:

$? \ D_b : \overline{BD} = \overline{DA}$
$\overline{DA} = \overline{A'D'}$ $\longrightarrow$ C_b: D_a: $\overline{A'D'} = \overline{BD}$

W: Punto medio y Transitividad

(6c)

$D_c : C_b : \overline{A'D'} = \overline{BD} \longrightarrow C_c : \overline{DD'} = \overline{BC}$

W: Rotación 180°
Punto medio
Paralelismo

(7c)

La afirmación $\overline{DD'} \parallel \overline{BC}$ queda sin prueba concluyente y en $\overline{DD'} \cong \overline{BC}$, después de tres intentos, se llega a una prueba de carácter abductivo con un leve indicio de deducción, pues la entrada o el dato D_c es la salida o afirmación anterior C_b; a diferencia de los razonamientos abductivos en los cuales los datos de las afirmaciones previas corresponden a las afirmaciones subsecuentes.

4.5 SÍNTESIS DE LOS RESULTADOS Y COMENTARIOS

A continuación se muestran los principales resultados de la investigación.

Tabla 4.5.1

Pruebas obtenidas en cada conjetura[24]

Estudiantes / Conjetura	J1 y J2	R1	R2
$\overline{DD'} \cong \overline{BC}$ Conjetura 1	Justificación válida (Prueba informal)	No logra prueba alguna	Justificación válida (Prueba informal)
$\overline{DD'} \parallel \overline{BC}$ Conjetura 2	Justificación válida (Prueba informal)	Justificación válida (Prueba informal)	No logra prueba alguna

[24] A partir de esta tabla, en la Síntesis de resultados, se hará referencia a las conjeturas únicamente como Conjeturas 1 y 2.

Se observa en la Tabla 4.5.1 que las estudiantes J1 y J2 lograron obtener una justificación final válida (prueba informal) para ambas conjeturas. Los otros dos estudiantes lograron justificar solamente una.

La Tabla 4.5.2 hace referencia a la continuidad estructural (o de razonamiento) entre las etapas argumentativas (conjeturación y justificación) y la prueba final obtenida.

Tabla 4.5.2

Continuidad estructural: Razonamiento empleado

Estudiantes	Tipo de razonamiento			
	Conjetura 1	Prueba 1	Conjetura 2	Prueba 2
J1 y J2	Abductivo	Abductivo	Abductivo	Abductivo
	Se presenta continuidad		Se presenta continuidad	
R1	Abductivo	No se logra	Abductivo	Abductivo
	No existe continuidad		Se presenta continuidad	
R2	Abductivo	Abductivo	Abductivo	No se logra
	Se presenta continuidad		No existe continuidad	

La Tabla 4.5.3 presenta los elementos por los cuales se afirma que la prueba obtenida se considera abductiva a pesar de mostrar indicios de carácter deductivo.

Tabla 4.5.3

Elementos de carácter abductivo en las pruebas finales obtenidas

Estudiantes	Elemento	
	Prueba 1	Prueba 2
J1 y J2	La afirmación parte de la observación de un trazo.	La afirmación parte de la observación de un trazo.
	La garantía no es un conocimiento teórico	La garantía no es un conocimiento teórico
	Orden afirmación-dato	
R1	-	La afirmación parte de la observación de una rotación
		La garantía no es un conocimiento teórico
R2	La garantía no es un conocimiento teórico	-
	La afirmación implica la combinación de un conocimiento teórico y de una observación	

En la Tabla 4.5.3 se observan cuatro elementos considerados como referencia para afirmar que el razonamiento llevado a cabo en cada prueba o justificación final es de tipo abductivo: El orden afirmación-dato, la garantía no es un conocimiento teórico, la afirmación parte de una observación y la afirmación parte de un conocimiento teórico.

Lo anterior se determinó considerando que para Toulmin (1964) una diferencia importante entre un argumento deductivo y uno abductivo se encuentra en la calidad de la garantía mientras que para Pedemonte (2007) la diferencia estriba sobre todo en el orden de aparición de la afirmación y el dato. Para ella, si a partir de un hecho observable establecido como afirmación inicial se logra identificar un dato que permite llevar a cabo la siguiente inferencia (en la cual ahora ese dato cumple el papel de afirmación), ahí se está en presencia de un razonamiento abductivo (ver figura 6.1 del Capítulo 6). En el presente estudio, se considera que un razonamiento es deductivo si cumple ambas condiciones.

CAPÍTULO 5
CONCLUSIONES Y REFLEXIONES FINALES

5.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presentan de forma sintetizada la interpretación de los resultados obtenidos y las conclusiones con relación al objetivo general de investigación de forma explícita, e implícitamente con relación a los objetivos particulares planteados en el Capítulo 1. Así mismo, se da respuesta a las preguntas de investigación y finalmente se dan las reflexiones finales las cuales resumen la posición del estudio con relación a los conceptos manejados en el Marco Teórico y a las perspectivas de continuación de la presente investigación.

5.2 ACERCA DEL OBJETIVO DE INVESTIGACIÓN

El objetivo general de la investigación se refiere a la identificación de algunas razones por las cuales, los estudiantes no logran transitar de la elaboración de conjeturas a la justificación argumentativa y posteriormente a la prueba deductiva.

En relación con este objetivo, es importante traer a cuenta algunas de las ideas expuestas tanto en los antecedentes como en el marco teórico, referentes a la controversia existente, aún hoy en día, sobre la conveniencia de aceptar pruebas informales como pruebas finales válidas en una clase de matemáticas.

En esta investigación, dadas las características de la población estudiantil seleccionada, se decidió (tal como se mencionó en la metodología) aceptar como prueba final válida, aquella justificación de tipo argumentativo (verbal o narrativo) que mantuviese a pesar de todo su carácter general, es decir, una justificación que no se limitara a la enunciación de ejemplos particulares para responder a la pregunta del porqué sus conjeturas resultaban ciertas.

Al final, fue posible observar cómo los estudiantes llegaban a conclusiones válidas, de acuerdo con los parámetros de aceptación, en la mayoría de los casos, aun tomando en cuenta todas las carencias vinculadas al sistema referencial, principalmente aquellas relacionadas con el uso apropiado del lenguaje y la interpretación de las figuras geométricas; aspectos fuera del alcance de esta investigación.

Tal como se explicó en el Capítulo 3, previo a la aplicación del problema final de prueba (en el cual se debían plantear un par de conjeturas e intentar justificarlas) las estudiantes trabajaron a lo largo de cinco sesiones, una serie de actividades previas (mostradas en el anexo 2); por medio de éstas, la argumentación paulatinamente se transformó en un hecho más familiar para ellas y lograron apropiarse de la intención de la prueba.

El aprendizaje del funcionamiento de las herramientas básicas del software, la elaboración de las construcciones geométricas con ayuda del mismo así como el planteamiento de las conjeturas, no constituyeron el problema principal para las estudiantes (tal como se previó), fue la actividad argumentativa de justificación la de mayor conflicto y la que ayudó a comprender la intención de la prueba al tratar de responder a la pregunta *¿por qué?*

Este papel de la prueba, con frecuencia, lleva a obtener un resultado final de naturaleza muy distinta a la demostración. La obtención de dicho tipo de prueba, no corresponde a las posibilidades del estudiante dadas sus circunstancias de formación matemática (respecto al uso de la prueba como herramienta de aprendizaje) así como al tipo de razonamiento desarrollado cuando resuelve problemas geométricos de prueba similares a los planteados en esta investigación.

Al analizar este último aspecto (el razonamiento reflejado a través de los argumentos) se identificó y reafirmó lo planteado por Pedemonte (2001, 2003, 2007): El razonamiento abductivo puesto en marcha durante la argumentación (tanto constructiva como estructurante) de forma espontánea genera una prueba final también de tipo abductivo, por lo cual, esperar una demostración (prueba formal con características de razonamiento deductivo) representa más que un arduo problema para el estudiante, pues existe una "distancia" de tipo estructural entre el proceso "natural" de razonamiento y la prueba final esperada con dichas características. ¿De qué manera se puede favorecer un cambio o "ruptura" en el tipo de razonamiento? Es decir, ¿Cómo lograr pasar de la abducción a la deducción? La respuesta a estas preguntas será parte de la continuación de la investigación, lo cual será expuesto en el Capítulo 6.

5.3 RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

1) ¿Cómo se transita de la conjetura (elaborada con ayuda del software) a la prueba geométrica informal?

En lo referente al análisis estructural, en nuestro estudio, el razonamiento abductivo, llevó a las estudiantes a formular conjeturas especialmente a través de la medición y observación del comportamiento de las figuras geométricas, utilizando la función de arrastre con deslizadores. Al intentar responder porqué suponían que dichas conjeturas eran ciertas, se desencadenó un proceso de justificación basado igualmente en la observación de las construcciones a las cuales muchas veces se les agregaba un trazo auxiliar. Debido a que partían de lo observado, el razonamiento puesto en práctica también fue de tipo abductivo a pesar de que la utilización del software fue mucho más limitada en esta etapa (pues el análisis básicamente se hacía con la figura estática y rara vez las estudiantes movieron el deslizador en esta fase). Consideramos, que en la mayoría de los casos, se llegó a una prueba válida de tipo informal debido a la aceptación de una justificación abductiva como prueba final por parte de la profesora y porque la conexión de razonamientos llevó a realizar afirmaciones verdaderas en aquellos casos donde se cumplió con la prueba. Los diálogos entre las alumnas y la entrevistadora (profesora) condujeron las etapas de explicación informal y de justificación argumentativa hasta obtener pruebas con las características antes descritas.

2) ¿Cuáles son algunas razones por las cuales, frecuentemente, los estudiantes no transitan de la elaboración de conjeturas, a la justificación argumentativa de tipo abductivo y posteriormente a la prueba deductiva?

Las razones por las cuales frecuentemente no se transita de la conjetura a la justificación final, pueden relacionarse con el sistema referencial y con el sistema estructural. Este último aspecto, objeto de estudio de la investigación, da cuenta de dos casos que se presentaron: El primero, cuando se llega a una justificación final válida de tipo abductivo (prueba informal) y cuando no se llega a generar prueba alguna. La obtención de una demostración o siquiera de una prueba deductiva informal no se presentó. En los casos donde sí se llegó a obtener una prueba informal, se pudo observar razonamiento abductivo como forma “natural” de conectar ideas, desde la formulación de la conjetura hasta la obtención de dicha prueba. Los casos en los cuales no se obtiene ningún resultado o se hace pero de manera incorrecta, serán objeto de estudio en la continuación de la investigación, pues al parecer, de acuerdo con Pedemonte (2011), existen diferentes tipos de abducción, cada uno de los cuales favorecen o no la obtención de los resultados esperados.

3) ¿Cómo razonan los estudiantes al transitar de la elaboración de una conjetura a la obtención de una prueba en problemas geométricos elaborados con ayuda del software?

La utilización del modelo de Toulmin fue determinante para interpretar los argumentos de los estudiantes y poder encontrar la estructura de razonamiento inmersa en sus discursos aparentemente carentes de contenido aceptable. El análisis elaborado con ayuda de tal modelo, permitió descubrir que existe continuidad en el tipo de razonamiento, en el cual prevalece la abducción. También se pudo precisar de qué modo se daba esta continuidad, pues se observó la forma en la que se hilaban las proposiciones y se distinguió la diferencia entre ambos tipos de razonamiento: el abductivo y el deductivo. Es importante destacar que a pesar de prevalecer el razonamiento abductivo, se puede inferir que existen indicios de carácter deductivo por la forma como relacionaron las estudiantes sus ideas finales. Tales indicios, de igual modo, serán objeto de estudio en la continuación de la investigación.

5.4 REFLEXIONES FINALES

Debido a que se trata de un Estudio de casos, la intención de la presente investigación es observar qué tan plausibles son los resultados encontrados por Pedemonte referentes a la continuidad o ruptura del razonamiento abductivo entre la argumentación y prueba, tema que debe estudiarse más a fondo.

La continuidad estructural entre argumentación y prueba se observó en los tres casos estudiados, en los cuales este tipo de razonamiento, puesto en marcha durante las primeras fases, se conservó hasta lograr la prueba con las características mínimas aceptadas por la profesora (considerando las características de la población ya descritas con anterioridad), todo esto, a pesar también de mostrarse indicios de razonamiento deductivo.

En la mayoría de los casos, las etapas del proceso E-P se van presentando de forma simultánea, o más bien traslapada, principalmente la Explicación informal y la Justificación argumentativa. En ese sentido, se suelen presentar explicaciones descriptivas de lo que el alumno va construyendo, de lo que observa y en la mayoría de los casos, son las preguntas elaboradas por la profesora (entrevistadora) las que inician el siguiente encadenamiento de razonamientos útiles para llegar a probar la conjetura en cuestión.

En un razonamiento deductivo, los conocimientos teóricos conducen a la prueba; en uno de tipo abductivo, son las observaciones. Cuando los estudiantes ven una posible solución y no tienen idea acerca de la teoría matemática que podría ser utilizada, ellos consideran diferentes caminos de resolución (partiendo de diferentes puntos de inicio), exploran y buscan diversas estrategias. Es difícil entonces encontrar una argumentación de tipo deductivo, más aún cuando el proceso de prueba les resulta ajeno, pues no han trabajado la prueba como recurso de aprendizaje matemático a lo largo de su formación.

Las argumentaciones de tipo abductivo son usualmente empleadas bajo esas circunstancias y el paso hacia la prueba deductiva no resulta fácil para los estudiantes. Por el contrario, algunas dificultades durante la construcción de la prueba pueden ser atribuidas a la continuidad "espontánea" de tipo abductivo.

El modelo de Toulmin claramente revela la estructura de la argumentación (tanto constructiva como la estructurante) así como la de la prueba obtenida como producto final. Cuando los estudiantes utilizan abducción durante su argumentación (la cual parece ser natural al menos en la producción de la conjetura), se requiere un cambio estructural, el cual, a pesar de todo, puede detectarse en las producciones de los estudiantes. Es así como el modelo de Toulmin hizo posible analizar la continuidad o la distancia estructural entre ambas.

Como lo menciona Pedemonte y demás investigadores de la unidad cognitiva, la actividad de argumentación parece favorecer la construcción de la prueba, en la cual es importante poner énfasis en los aspectos relacionados con el razonamiento y no únicamente en lo referente al contenido, pues el razonamiento entra en juego de manera abductiva cuando directamente no se trae a colación lo trabajado con anterioridad o los conocimientos teóricos previos. Es así como se ha verificado que el análisis basado en los contenidos no es suficiente para analizar todos los aspectos que participan en la relación entre argumentación y prueba.

Es importante hacer notar que también se presentaron indicios de razonamiento deductivo en la obtención de las pruebas finales, las cuales a pesar de considerarse (y por mucho) de carácter informal, dan cuenta de un encadenamiento de ideas diferente en su estructura al presentado en las formas abductivas.

La continuidad estructural puede ser usada para analizar algunas dificultades que los estudiantes podrían tener en la construcción de una prueba, pero otras posibles dificultades requieren también ser tomadas en cuenta. Es importante considerar los casos donde una continuidad estructural no sólo evita la aparición de la prueba deductiva, sino que conlleva a pruebas formuladas incorrectamente. Tal como se observó, en algunas ocasiones, los estudiantes fueron incapaces de construir una prueba porque la continuidad espontánea entre los dos procesos está también presente desde un punto de vista estructural.

CAPÍTULO 6
PERSPECTIVAS DE CONTINUACIÓN DEL ESTUDIO

6.1 INTRODUCCIÓN

Los resultados obtenidos en este trabajo dan cuenta de la necesidad de continuar el estudio de la relación estructural entre las fases relacionadas con la actividad de argumentar (conjeturar, explicar y justificar) con la fase de obtener una prueba final deductiva. Hasta el momento se ha comprobado la continuidad existente entre las formas de razonamiento llevadas a cabo por los estudiantes durante las etapas de construcción y justificación de la conjetura y la prueba final obtenida. Dicha continuidad se observó debido al tipo de garantía utilizada y al encadenamiento de sus inferencias a lo largo del proceso de justificación. La existencia de continuidad se traduce en el predominio de las formas abductivas a pesar de haberse presentado indicios de carácter deductivo sobre todo por el cambio en el orden de los razonamientos al momento de obtener la prueba final.

Este predominio de la abducción y la calidad "deficiente" de los argumentos generados, indican la existencia de una situación con aspectos relevantes aún por estudiar, por ejemplo: ¿Qué tipos de abducción facilitan (u obstaculizan) la generación de la prueba deductiva? ¿La generación de pruebas informales se puede facilitar a través de la resolución de problemas en los cuales se pueda prever algún tipo de abducción conveniente para tales efectos?

En ese sentido, Pedemonte (2007, 2011), al estudiar el trabajo de Eco (1983), sugiere ciertas perspectivas de investigación encaminadas a estudiar la estructura de los diferentes tipos de abducción estudiados por Eco aplicados al estudio del proceso de prueba geométrica y algebraica. De manera personal, también interesa investigar si es posible diseñar problemas que permitan generar ciertos tipos de abducción como un proceso de entrenamiento en la generación de pruebas geométricas, aún las de carácter informal, las cuales pudieran evolucionar a pruebas deductivas con todo lo que ello implica.

Además, un estudio profundo sobre el tema de la abducción se ha llevado a cabo por autores como Bofantini, M., Proni, G. (1983) así como por Magnani, L. (2001) a quienes es preciso estudiar más ampliamente para reconocer las implicaciones que pudiesen tener sus estudios en la continuación de esta investigación.

De acuerdo con lo anterior, en este capítulo se da un panorama general de lo que se pretende abordar durante los estudios del Doctorado. Primeramente, se dan algunos antecedentes sobre el concepto y los tipos de abducción. Posteriormente, se explican las implicaciones en el ámbito escolar y en la actividad matemática de los estudiantes y finalmente se explica la forma en la cual se aplicaría ahora el modelo de Toulmin en la ampliación de este trabajo.

6.2 ALGUNOS ANTECEDENTES SOBRE EL CONCEPTO Y LOS TIPOS DE ABDUCCIÓN

El concepto de abducción fue redescubierto e introducido en su forma actual[25], por Pierce Charles Sanders alrededor de 1865 para referirse al tipo de inferencia distinto de la deducción y la inducción[26]. A lo largo del desarrollo de la idea de abducción, Peirce utilizó el término en diferentes formas para referirse al mismo concepto (usó los términos “hipótesis” y “retroducción”), no obstante esto, es posible identificar sus ideas principales. En sus primeros trabajos, enfatiza la forma lógica de la abducción, en la cual un resultado procede de un caso particular. En su trabajo posterior, enfoca la abducción como una fase del proceso de descubrimiento, es decir, empieza a encausar más el papel de la abducción en el contexto del pensamiento científico y menos en su forma lógica interna. Vista de este modo, la abducción comienza con la observación de un hecho sorpresivo y su objetivo es explicar este hecho. Es entonces como la evolución del pensamiento de Peirce puede abordarse con relación a estas dos etapas del estudio del término.

En general, de acuerdo con Peirce, la característica principal de la abducción es que su conclusión es plausible, pero no necesariamente cierta puesto que actúa “en reversa”: de un resultado o consecuencia llega a un antecedente. De este modo, explica dicho resultado o hecho sorpresivo. La conclusión de una abducción es susceptible de verificación o refutación por comparación con otros casos. Representa la primera etapa del razonamiento científico, seguida de la deducción (de consecuencias superiores) y la inducción (la cual

[25] Ya existían antecedentes desde Aristóteles en los *Analíticos primeros*. Ver http://classics.mit.edu/Aristotle/prior.htmlhttp://classics.mit.edu/Aristotle/prior.html.
[26] Ver http://www.unav.es/gep/AF/Genova.html.

evalúa dichas consecuencias). Los estudios de Peirce sobre lógica fueron inusuales en su tiempo porque no se enfocaban fundamentalmente en la lógica deductiva. En lugar de eso, él fue capaz de ver la lógica como "El arte de idear métodos de investigación: El método de los métodos" Pedemonte (2011)[27].

La abducción se caracteriza entonces, por ser un proceso creativo, en tanto genera las nuevas ideas, mientras que la deducción deriva conocimiento de aquel que ya ha sido validado previamente y la inducción por su parte, se limita a comprobarlo. La deducción va de lo general a lo particular, en ésta lo que se busca hallar es el resultado final. La inducción por su parte, aparece como el proceso inverso, en el cual se conoce el resultado y el caso, pero se debe buscar la regla, es decir, lo general.

Eco (1983) hace algunas diferencias útiles basadas en la formulación de Peirce sobre la abducción como la inferencia de un caso o de un dato partiendo de un resultado. Eco apunta que la regla necesitada para encontrar el antecedente no siempre es evidente. De acuerdo con él, cuando dicha regla es evidente, la formulación hecha por Peirce se cumple, pero cuando no lo es, entonces se presentan otros tipos de abducción. Eco identifica tres tipos de abducción[28]: abducción sobre-codificada, abducción sub-codificada y abducción creativa. La abducción *sobre-codificada* ocurre cuando la persona que argumenta es consciente de solo una regla relacionada con el caso; este tipo corresponde a la formulación de Pierce aludida anteriormente. De no ser así, la situación se vuelve más compleja: Antes de que el caso pueda inferirse, se debe encontrar una regla y la conclusión de la abducción depende de cuál es esa regla. Entonces, el problema real consiste en cómo entender (y encontrar) ambos, la regla y el caso al mismo tiempo, pues estos se hallan inversamente relacionados. ligados juntos, en una suerte de quiasmo[29].

Si existen múltiples reglas generales para ser seleccionadas, Eco llama a esto abducción *sub-codificada.* Afirma que para elegir una regla de todo un conjunto, a pesar de ser cada una de ellas, igualmente probables, existe un criterio de selección, a diferencia de lo afirmado por Peirce, quien decía que la preferencia no se basa en ningún conocimiento previo relacionado con la verdad de la hipótesis. Es decir, Eco sugiere que podrían existir

---

[27] Citando a Peirce (1960).
[28] Los términos en inglés corresponden a "overcoded", "undercoded" y "creative abduction".
[29] Figura de dicción que consiste en presentar en órdenes inversos los miembros de dos secuencias (R.A.E.)

criterios de selección entre todas las posibles reglas, lo cual significa que mientras todas, igualmente podrían explicar los hechos, en la práctica no son tratadas como "equiprobables".

Magnani (2001) asocia ambas, la abducción sobre-codificada y la sub-codificada, como abducciones selectivas. Para él, la abducción selectiva es el proceso de encontrar la hipótesis explicativa correcta de un conjunto dado de posibles explicaciones y quien argumenta, puede encontrar la regla más apropiada para construir la explicación de entre un conjunto de reglas a las que ha tenido acceso. Sin embargo, puede pasar que no exista una regla general conocida por quien argumenta. En tal circunstancia, se debe crear una nueva regla. Eco llama a este tipo de "creación" abducción *creativa*.

6.3 ABDUCCIÓN Y PRUEBA GEOMÉTRICA EN EL ÁMBITO ESCOLAR

De acuerdo con Pedemonte (2011), en matemáticas la demostración es deductiva, pero los procesos de descubrir y conjeturar son caracterizados por la argumentación abductiva. Cuando los estudiantes se encuentran inmersos en la práctica de la prueba matemática, frecuentemente "surge" una idea. Para analizar aquello que los estudiantes están haciendo cuando esto sucede, una puede referirse a este hecho como abducción. No obstante, mientras la abducción es crucial en la introducción de nuevas ideas (Peirce, 1960), ésta representa a veces un obstáculo para los estudiantes cuando deben construir una prueba deductiva. De acuerdo con Pedemonte (2007), cuando se resuelven problemas geométricos, muchos estudiantes no pueden transformar sus argumentaciones abductivas en pruebas deductivas a diferencia de lo sucedido al resolver problemas de prueba en el contexto algebraico. La autora menciona la importancia de realizar análisis más profundos para comenzar a explicar estos descubrimientos y de acuerdo con ella, se requiere examinar si los diferentes tipos de abducción actúan como obstáculos o como soportes de la prueba y más generalmente, si los tipos de abducción utilizados en la argumentación pueden afectar la naturaleza del proceso de prueba y de ser así cómo lo hacen.

6.4 TIPOS DE ABDUCCIÓN EN LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA DE LOS ESTUDIANTES

Para Pedemonte (2011), la argumentación que involucra abducción sobre-codificada hace más fácil la construcción de la prueba. De acuerdo con el principio de unidad cognitiva (Boero, Garuti, Mariotti, 1996; Pedemonte, 2003), la argumentación previa puede ser utilizada por los estudiantes en la construcción de pruebas si ellos pueden organizar algunos de esos argumentos en una cadena lógica. En la abducción sobre-codificada, la distancia estructural entre la argumentación abductiva y la prueba deductiva es más corta porque los estudiantes sólo tienen que buscar datos para justificar la afirmación; la regla y la afirmación ya se encuentran presentes.

Sin embargo, si el teorema no es suficiente para producir una prueba, el estudiante está obligado a cambiar de estrategia para resolver el problema. Puede ser difícil si otra regla plausible no es conocida por el estudiante. En este caso, la abducción sobre-codificada no es de ayuda y puede ser un obstáculo para construir la prueba.

En el caso de la abducción sub-codificada donde algunas reglas plausibles son conocidas, es importante seleccionar una regla útil y correcta para producir la regla. En la abducción sobre-codificada, es importante que la regla seleccionada sea suficiente para resolver el problema, de otro modo, el estudiante está obligado a cambiar de estrategia para resolver el problema, sin embargo, no resulta ser un obstáculo ya que otras reglas plausibles están disponibles para ser tratadas.

La abducción creativa es probablemente el tipo más difícil de abducción para usar como base de una prueba deductiva, pues es necesario verificar muchos elementos para asegurar que la regla creada es un teorema correcto y efectivo. En ese sentido, puede suceder que la regla creada sea incorrecta y entonces el estudiante construye una "prueba" también incorrecta.

6.5 AMPLIACIÓN DEL USO DEL MODELO DE TOULMIN PARA ANALIZAR ARGUMENTOS DE PRUEBA

Para analizar las relaciones entre los diferentes tipos de abducción y la prueba deductiva en la actividad matemática de los estudiantes, se modelan sus argumentos usando el modelo de Toulmin (1964). En esta investigación, tal como se pudo observar, la argumentación y la prueba fueron analizados y comparados desde un punto de vista estructural usando este modelo. El objetivo de Toulmin fue proveer un modelo que pudiera ser usado para analizar argumentos en general, no sólo argumentos deductivos, lo cual permitió comparar ambas estructuras: la de las etapas argumentativas y la de la prueba final obtenida. Las perspectivas para continuar la investigación se encaminan ahora a estudiar la estructura de los diferentes tipos de abducción generados y observar los efectos de cada uno en la estructura de la prueba final, tal como sugiere Pedemonte (2007, 2011). También interesa investigar si es posible diseñar problemas que permitan generar ciertos tipos de abducción como un proceso de entrenamiento en la generación de pruebas geométricas. Todo lo anterior, requiere entonces ampliar el número de elementos involucrados en el modelo de Toulmin en comparación con los usados en la presente investigación. En la figura 2.5.1.1, se muestra el modelo básico de Toulmin, el cual fue utilizado para estudiar la continuidad estructural de las resoluciones mostradas en el análisis de datos. Para la continuación de la investigación, se agregarán otros tres elementos: el calificador, la reserva y el respaldo (ver figura 2.5.1.2; ambas figuras pueden encontrase en el Capítulo dos). Es importante recordar que el calificador expresa la fuerza del argumento, la refutación introduce un contra-argumento y el respaldo provee soporte adicional para la garantía. A pesar de la enorme importancia de cada uno de ellos, para fines de la continuación del estudio interesa sobre todo analizar el papel que juega el respaldo que soporta la garantía. Puede decirse que el respaldo legitimiza la garantía del argumento. Este respaldo, está siempre presente, pero frecuentemente de forma implícita. En una prueba deductiva, el respaldo es una teoría matemática, sin embargo, no es siempre en el proceso de argumentación (el cual se presenta al conjeturar y justificar). La comparación entre los respaldos usados tanto en las argumentaciones como en las pruebas es importante porque pueden ofrecer información sobre la naturaleza de las reglas de abducción versus el teorema usado en la prueba deductiva (en los casos en los cuales se alcance). Toulmin quiso utilizar su modelo para representar argumentos tanto deductivos como de cualquier otro tipo, para él, lo que distingue a la deducción es la garantía y la naturaleza del respaldo, mientras que para Pedemonte (2007) la diferencia estriba en el orden o secuencia de aparición de la información; para ella lo que caracteriza a la abducción es la ausencia del dato que justifica una afirmación dada (ver figura 6.1).

? D: Dato ⟶ C: Afirmación

W: Garantía

Figura 6.1 Abducción representada con el Modelo de Toulmin de acuerdo a Pedemonte.

El signo de interrogación significa que se busca para aplicar la regla de inferencia o garantía. Sin embargo, esta representación es muy limitada para mostrar las diferencias entre los tipos de abducción, por lo cual el signo de interrogación en la futura investigación no solo podrá aparecer en los datos, sino también en la garantía o incluso en el respaldo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Bogotá: Una empresa docente. Universidad de los Andes.

Baldor, A. (2004). *Geometría plana y del espacio con una introducción a la Trigonometría.* México D.F.: Publicaciones Cultural.

Boero, P. D. (2010). *Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation.* In Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (pp. Vol. 1, pp.179-204).

Boero, P., Gariti, R., Mariotti M. A. (1996). *Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures.* Proc.of Psichology of Mathematics Education, (pp. Vol. 2, pp. 121-128). Valencia, España.

Bonfantini, M., & Proni, G. (1983). *To guess or not to guess*. In U. Eco & T. Sebeok (Eds.), The sign of three: Dupin, Holmes, Peirce (pp. 119–134). Bloomington, IN: Indiana University Press.

Dreyfus Tommy, N. E. (2012). *Forms of Proof and Proving in the classroom.* In G. H. (Eds), Proof and Proving in Mathematics Education (pp. 191-213). Dordrecht, Netherlands: Springer.

Durand-Guerrier , V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. S., & Tanguay, D. (2012). *Argumentation and Proof in the Mathematics Classroom*. In G. Hanna, Proof and Proving in Mathematics Education (p. 467). London, New York: Springer.

Eco, U. (1983). *Horns, hooves, insteps: Some hypotheses on three types of abduction. In U. Eco & T. Sebeok (Eds.),* The sign of three: Dupin, Holmes, Peirce (pp. 198–220). Bloomington, IN: Indiana University Press.

Ellis, A. B., Bieda, K., & Knuth, E. (2012). *Developing Essential Understanding of Proof and Proving for Teaching Mathematics in Grades 9–12.* Madison, Wisconsin; East Lansing, Michigan.: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Feng-Jui Hsieh, W.-S. H.-Y. (2012). From Exploration to Proof *Production*. In G. H. (Eds), Proof and Proving in Mathematics Education (pp. 279-303). Dordrecht, Netherlands: Springer.

Flores Samaniego, Á. H. (2007). *Prácticas argumentativas y esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato.* Tesis de Doctorado del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav. México D.F.: Cinvestav- IPN.

Fou-Lai Lin, K.-L. Y.-H. (2012). *Principles of Task Design for Conjecturing and Proving.* In G. Hanna, Proof and Proving in Mathematics Education (pp. 305-325). Dordrecht, Netherlands: Springer.

Hanna, G., & De Villiers, M. (. (2012). *Proof and Proving in Mathematics Education.* Dordrecht, Netherlands: Springer.

Harada, E. (2009). *Algunas aclaraciones sobre el "modelo" argumentativo de Toulmin*. Contactos, México, Vol. 73, pp. 45-56.

Harel, G. S. (1998). *Students' proof schemes: Results from an exploratory study.* Research in College Mathematics Education III, 234-283.

Herbst, P. G. (2000). *¿A dónde va la Investigación sobre la Prueba?* In P. G. Herbst, Procesos de Prueba en los Alumnos de Matemáticas (pp. 191-200). Michigan, E.U.: The University of Michigan, Ann Arbor.

Huerta Váquez, M. Á. (2014). *Indicios de prueba matemática surgidos mediante el uso de Geogebra: Estudios con alumnos de educación media superior.* Tesis de Maestría del Departameto de Matemática Educativa del Cinvestav. México D.F.: Cinvestav-IPN.

Martínez Carazo, P. C. (2006). *El método del estudio de caso. Estrategia metodológica de la investigación científica.* Pensamiento y Gestión No. 20.

Magnani, L. (2001). *Abduction, reason and science: Processes of discovery and explanation*. Dordrecht:Kluwer.

Mercado Martínez, M. (2004). *Del descubrimiento de resultados geométricos en un ambiente de geometría dinámica a la formulación de conjeturas y su prueba: Un estudio con alumnos de bachillerato.* Tesis de Doctorado del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav. México D.F.: Cinvestav.

Pedemonte, B. (2001). *Relation between argumentation and proof.* Proceedings (pp. 70-80). Praga, República Checa.: Charles University, Faculty of Education.

Pedemonte, B. (2003). *What kind of proof can be constructed following an abductive argumentation?* In Proceedings of the Third Conference on European Research in Mathematics Education. Genova.

Pedemonte, B. (2007). *How can the relationship between argumentation and proof be analysed?* Educational Studies in Mathematics, 23-41.

Porteous, K. (1994). *When a Truth is Seen to be Necessary.* Mathematics in School, 2-5.

Pedemonte, B.; Reid, D. (2011). *The role of abduction in proving processes*. Educational Studies in Mathematics, 281-303.

Peirce, C. S. (1960). *Collected papers*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Porteous, K. (1994). *When a Truth is Seen to be Necessary.* Mathematics in School, 2-5.

Ramírez Nolasco, V. M. (2008). *Procesos de argumentación y de comunicación utilizados por profesores de matemáticas de secundaria en resolución de problemas verbales.* Tesis de Maestría del Departamento de Matemática Educativa. México D.F.: Cinvestav-IPN.

Robayo, A., Luque, C., Molina O. (2013). *Es posible que los estudiantes en edad extraescolar aprendan a demostrar*. VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, (pp. 1599-1610).

Sandoval Cáceres, I. (2001). *Visualización y Razonamiento Geométrico.* Tesis de Maestría del Departamento de Matemática Educativa. México, D.F.: Cinvestav-IPN.

Sandoval Cáceres, I. T. (2005). *Estrategias argumentativas en la resolución de problemas geométricos en un ambiente dinámico.* Tesis de Doctorado del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav. México D.F.: Cinvestav-IPN.

Stylianides, A. J. (2007). *Proof and proving in school mathematics*. Journal of Research in Mathematics Education, Vol. 38, pp. 289-321.

Toulmin, S. (1964). *The Uses of Argument.* Cambridge, England.: Cambridge University Press.

Usiskin, Z. (2007). *What Should Not Be in the Algebra and Geometry Curricula of Average College-Bound Students*? Mathematics Teacher, Vol. 100 (I), 68.

PÁGINAS DE INTERNET.

http://www.udlap.mx/intranetWeb/centrodeescritura/files/notascompletas/estudiodeCaso.pdf

http://www.rae.es/

http://www.learner.org/courses/learningmath/geometry/session5/part_c/index.html

http://www.learner.org/courses/learningmath/index.html

http://es.wikipedia.org/wiki/Razonamiento_abductivo#cite_note-1

http://es.wikipedia.org/wiki/Estudio_de_caso

http://www.paginaspersonales.unam.mx/files/981/estudio_de_caso.pdf

http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html

http://www.cut-the-knot.org/proofs/Diagrams.shtml

http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm

https://www.youtube.com/watch?v=zd4b8godQIc

https://es.khanacademy.org/math/geometry/quadrilaterals-and-polygons/quadrilaterals/v/proof---diagonals-of-a-parallelogram-bisect-each-other

http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/garuti.html

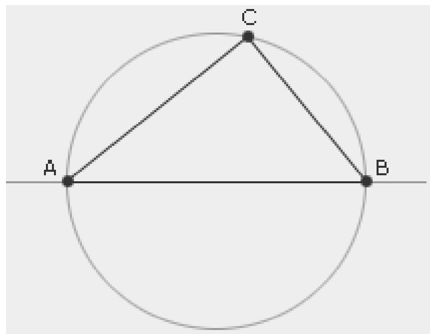
http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/simbolos.html

ANEXOS

ANEXO 1

IA. TRIÁNGULO INSCRITO EN UNA SEMICIRCUNFERENCIA.
PROBLEMA A LÁPIZ Y PAPEL.

Construye un triángulo inscrito en la parte superior de un semicírculo como en este ejemplo:



Necesitarás transportador, regla y compás para trabajar. Escoge al azar (sobre el semicírculo) varias posiciones diferentes para el punto C (No es necesario trazar el triángulo exactamente como en el ejemplo).

Después de trazar los triángulos, cada uno con C en una posición diferente, mide en cada caso los ángulos A, B y C respectivamente. Elabora una tabla como esta y anota tus resultados:

$\measuredangle A$	$\measuredangle B$	$\measuredangle C$

Presta especial atención a lo obtenido en el ángulo C. ¿Cuántos valores de C podemos dar? ¿Tienes alguna conclusión, o sospecha sobre cómo es el $\measuredangle C$ en <u>todos</u> los casos?

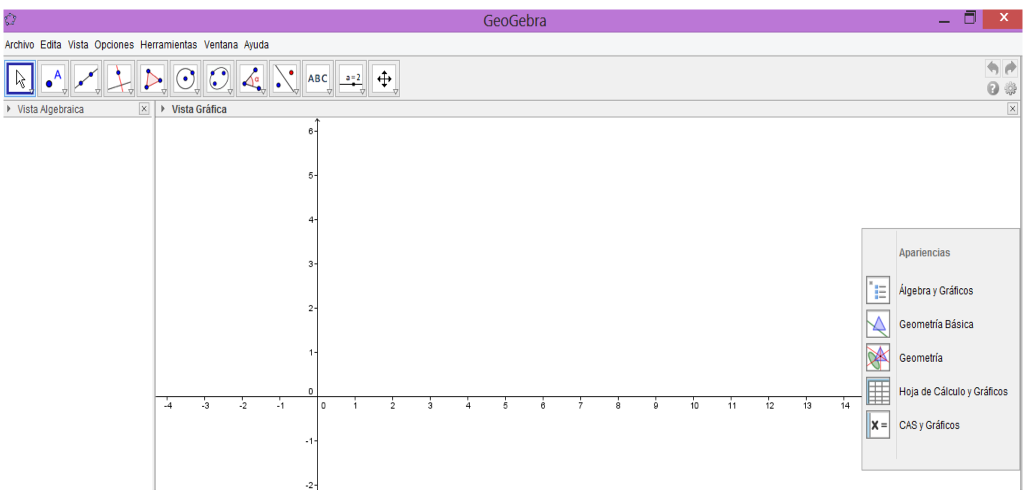
Construye ahora el triángulo utilizando el software. ¿Qué puedes observar?

¿Qué argumento o justificación (de tipo geométrico) darías para saber por qué se comporta así el ángulo C? Utiliza lo aprendido hasta ahora para dar una explicación.

IB. INTRODUCCIÓN AL USO DE GEOGEBRA.

PROPÓSITO: Realizar construcciones sencillas para conocer algunas herramientas de Geogebra.

GENERALIDADES: Geogebra es un software interactivo de matemática que combina dinámicamente álgebra y geometría. Su ambiente proporciona diferentes recursos distribuidos en *dos menús: el Windows (o del sistema) y el de Geogebra propiamente dicho*. Este último cambia de acuerdo a las Apariencias del menú vertical del lado derecho.

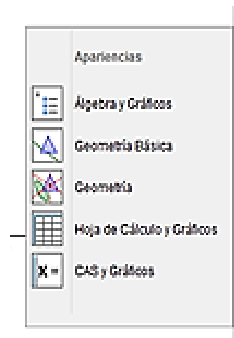


El primer menú está dedicado en modo general a la administración de archivos, trabajo de impresión, configuración de los objetos internos y de la propia interface, así como ayuda para el manejo del paquete. En general contiene los mismos elementos que cualquier programa manejado bajo Windows (o el sistema de que se trate).

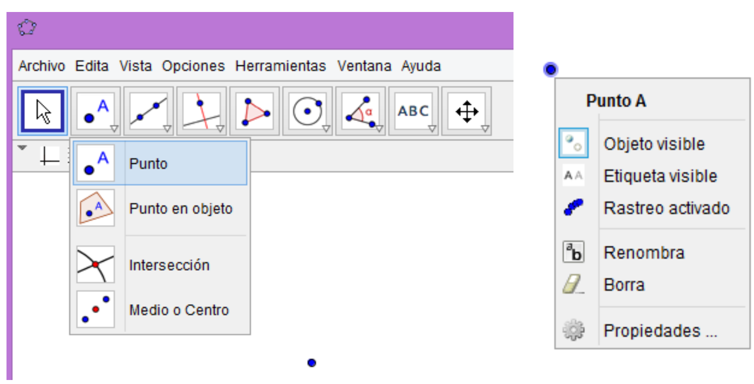
El segundo menú será el encargado de la construcción de las figuras y por ello desarrollaremos actividades para conocerlo y manejarlo con un mayor detalle. Para trabajar utilizaremos la apariencia de Geometría, cuyo menú de Geogebra nos ofrece 12 submenús (de izquierda a derecha): Cursores, puntos, dos menús de líneas, polígonos, dos menús de curvas, obtención de medidas, simetrías, menú de texto, de imágenes y de verificación de propiedades, deslizadores y desplazamientos.

PRIMERA CONSTRUCCIÓN

a) Elige la apariencia Geometría en el menú vertical del lado derecho.

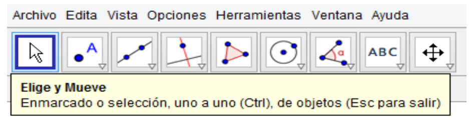


b) Crea un punto (en el menú de puntos, segundo de izquierda a derecha, elige el comando Punto) y etiquétalo con A (ubica el cursor sobre el punto, click con el botón derecho y elige renombrar).



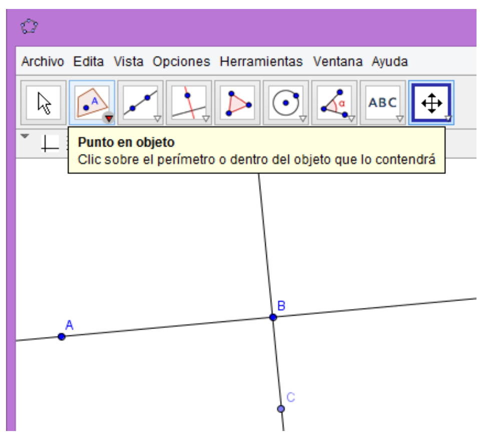
c) Crea una recta a partir de ese primer punto (de izquierda a derecha, en el primer menú de líneas elige Recta dados dos puntos, click en el punto A y otro click en cualquier otro lugar dentro de la vista gráfica de trabajo). Etiqueta al segundo punto con B.

d) Manupula la recta (Click en el comando Elige y Mueve del menú cursores).



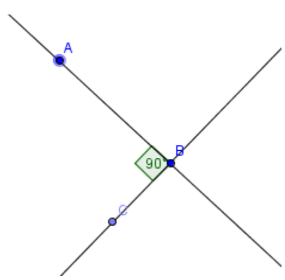
e) Construye una perpendicular a la recta anterior que pase por el punto B (En el segundo menú de rectas elige Perpendicular, click en B y luego sobre la recta).

f) Coloca un punto C sobre esta última recta, la perpendicular generada (Elige Punto en objeto en el menú puntos, segundo de izquierda a derecha).



g) Marca el ángulo ABC y corrobora que ambas rectas son perpendiculares. Para ello elige ángulo y marca los tres puntos en ese orden.

h) Manipula cada uno de los elementos anteriores ¿Todos se comportan igual?

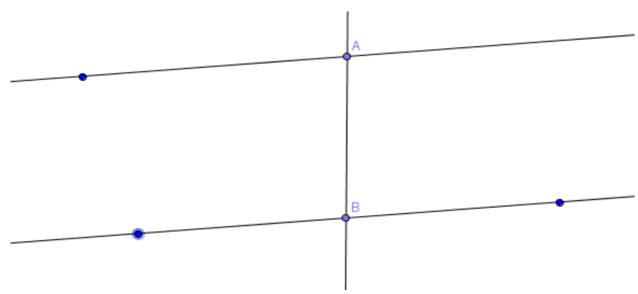


En Geogebra existen objetos libres (también llamados independientes) y objetos dependientes. De la construcción anterior ¿Cuáles son libres y cuáles dependientes?

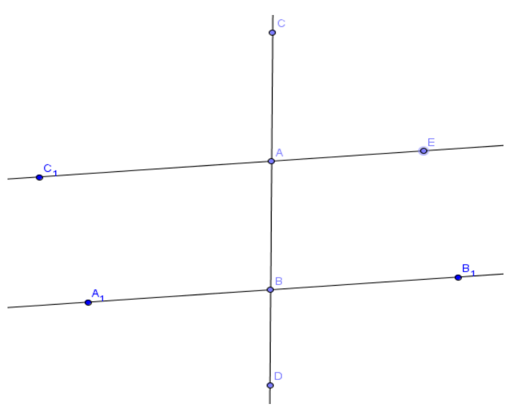
SEGUNDA CONSTRUCCIÓN

a) Traza una recta dados dos puntos y enseguida traza una paralela a esta. (Para trazar la paralela elige Paralela, haz click en cualquier punto fuera de la recta luego sobre la recta).

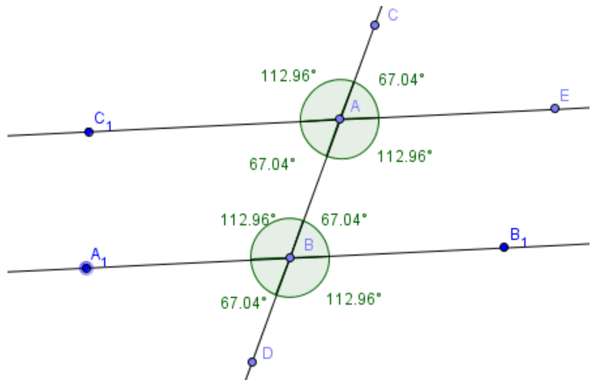
b) Luego traza un punto sobre cada recta paralela y únelos con otra recta (Puedes nombrar a estos dos últimos puntos como A y B).



c) Ahora se marcarán tres puntos auxiliares a los cuales nombraremos C, D y E respectivamente. Puede ser conveniente también mostrar las etiquetas de los tres primeros puntos.



d) Marca en sentido anti horario los ocho ángulos formados. ¿Cómo son entre sí? ¿Qué se mantiene invariante al manipular la figura?[30]



IC. DEFINICIONES Y TEOREMAS SOBRE TRIÁNGULOS

PROPÓSITO: Explorar los Teoremas y conceptos requeridos para efectuar una prueba geométrica

TERCERA CONSTRUCCIÓN.

a) Traza una recta que pase por los puntos M y N.

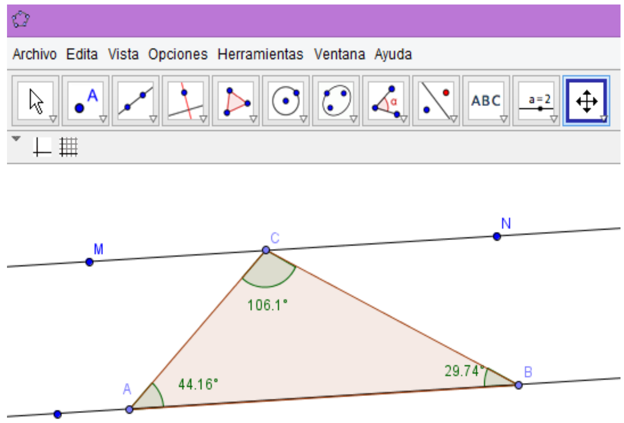
b) Traza una recta paralela.

c) Sobre esta última, coloca dos puntos A y B.

d) Sobre la recta que pasa por M y N coloca un punto auxiliar C.

e) Utilizando la herramienta Polígono traza un triángulo que una los puntos A, B y C.

[30] Es posible manipular con el cursor "Elige y mueve" las etiquetas para poder apreciarlas mejor.

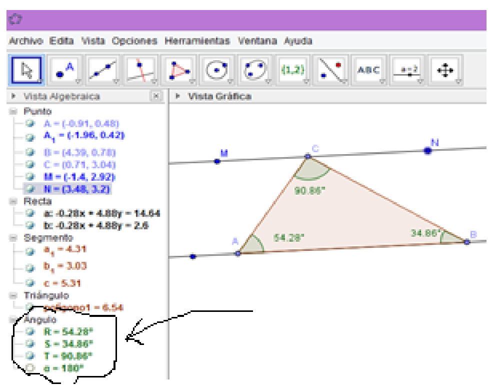


f) Cambia a la Apariencia Álgebra y Gráficos y dando click cerca de los ejes del plano en la Vista gráfica, elimina los Ejes del plano cartesiano.

g) Renombra los ángulos como A, B y C.

h) En la barra de entrada ingresa A+B+C.

i) Observa lo que aparece del lado inferior izquierdo en la Vista Algebraica.



j) Cambia la posición de los vértices y la separación de las paralelas. En todos los casos ¿Cuánto resulta la suma de los ángulos internos A, B y C? [31] ¿Por qué sucede esto? ¿Cuáles serían los argumentos, los principios geométricos o las razones que usarías para justificar este hecho?

k) Para contestar la pregunta anterior ¿Te sería útil realizar algún trazo adicional (trazo auxiliar)? De ser así ¿Cuál crees que te serviría?

[31] Si cambias la posición de las rectas, observarás que los ángulos señalados ya NO serán los INTERNOS, en ese caso, para determinar cada valor de los ángulos internos habría que restar cada uno de los valores mostrados a 360° (4R).

CUARTA CONSTRUCCIÓN

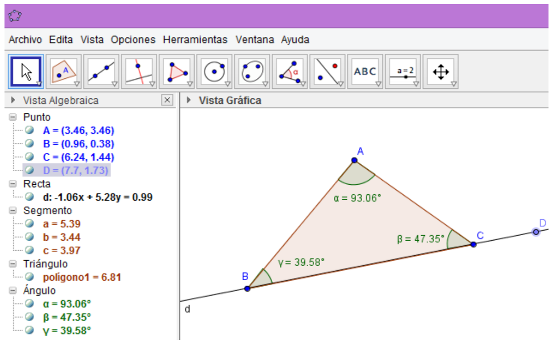
a) Usa la Apariencia Álgebra y Gráficos y elimina los Ejes del plano cartesiano.

b) Traza un triángulo cualquiera ABC.

c) Marca sus ángulos internos.

d) Prolonga el lado BC trazando una recta que pase por esos dos vértices.

e) Coloca un punto auxiliar D sobre la recta.



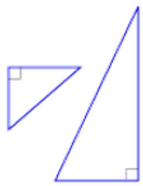
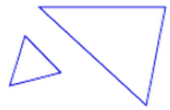
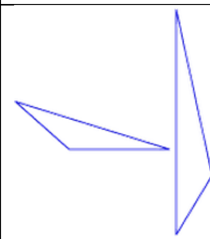
f) Sobre la recta trazada y utilizando este último punto como punto auxiliar, marca el ángulo externo DCA.

g) En la barra de entrada ingresa $\alpha + \gamma$, es decir, la suma de los ángulos internos no adyacentes al ángulo DCA. ¿Cómo es este último valor? Manipula la figura con el cursor ¿Por qué sucede esto? ¿Cuáles son los argumentos o principios geométricos que justifican esto? En este caso, para justificar lo anterior ¿Requieres usar un trazo auxiliar?

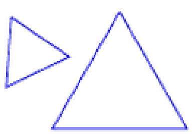
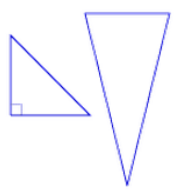
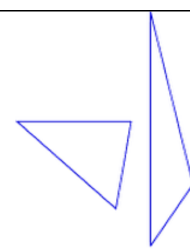
CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS

Las siguientes figuras muestran cómo los triángulos pueden clasificarse de acuerdo a algunas de sus características:

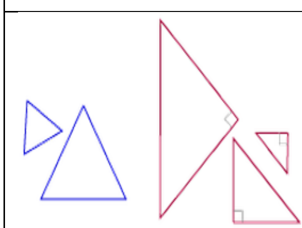
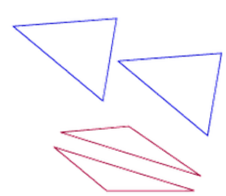
De acuerdo a sus ángulos:

Triángulos Rectángulos	Triángulos Acutángulos	Triángulos Obtusángulos
		
Un ángulo recto (90°)	Todos los ángulos menores de 90°	Un ángulo mayor de 90°

De acuerdo a sus lados:

Triángulos Equiláteros	Triángulos Isósceles	Triángulos Escalenos
		
Los tres lados tienen la misma longitud	Dos de los lados tienen la misma longitud	Los tres lados tienen diferente longitud

De acuerdo a su tamaño:

Triángulos Semejantes	Triángulos Congruentes
	
Iguales medidas de ángulos, diferente tamaño	Iguales medidas de ángulos, igual tamaño

QUINTA CONSTRUCCIÓN

Utilizando las herramientas de Recta, Medio o Centro y la de Polígono, construye un triángulo isósceles.

Marca sus ángulos internos y manipula la figura: ¿Qué relación guardan los lados con los ángulos?

SEXTA CONSTRUCCIÓN

a) Traza una circunferencia (puedes usar la herramienta Circunferencia dado un centro y un punto).
b) Utiliza la herramienta ángulo dada su amplitud para marcar dos ángulos de 120°, cada uno con vértice en el centro de la circunferencia.
c) Une los tres puntos marcados sobre la circunferencia con la herramienta Polígono. Como ves hemos trazado un triángulo equilátero. ¿Cómo harías para trazar un triángulo equilátero utilizando circunferencias? ¿Existe otra forma? En este caso ¿Qué relación guardan los lados con los ángulos?

ID. CONSTRUCCIONES PREVIAS A LA PRUEBA FINAL

PROPÓSITO: Analizar las relaciones existentes entre las figuras contenidas en construcciones previas a la prueba geométrica final.

SÉPTIMA CONSTRUCCIÓN

a) Traza una circunferencia con centro en O, coloca dos puntos A y B sobre esta y con la herramienta Segmento dibuja dos radios OA y OB.
b) Con la herramienta Polígono traza el triángulo AOB. Mueve los puntos A y B ¿Qué clase de triángulo es en todos los casos?
c) Marca los ángulos de la base ¿Cómo son entre sí?

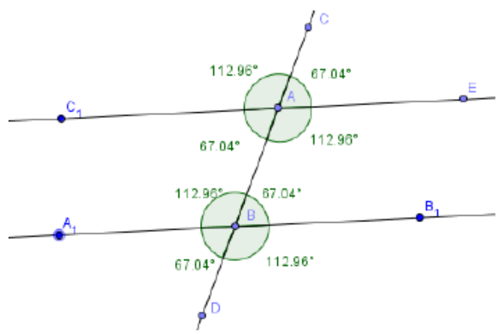
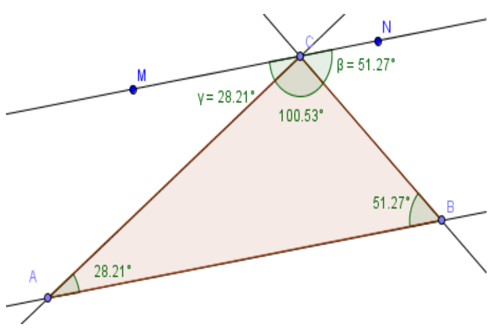
d) Con una línea recta, prolonga el radio OA hasta que corte a la circunferencia en el punto C, de forma que AC sea un diámetro. Luego Traza otro triángulo BOC. ¿Qué clase de triángulo es?

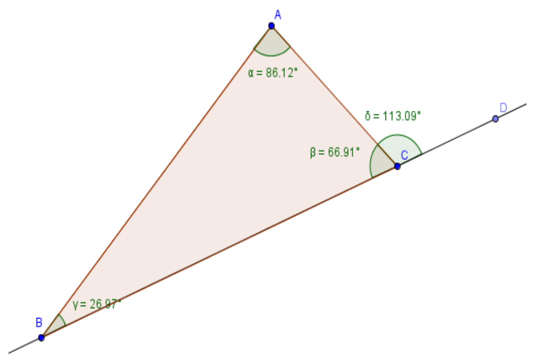
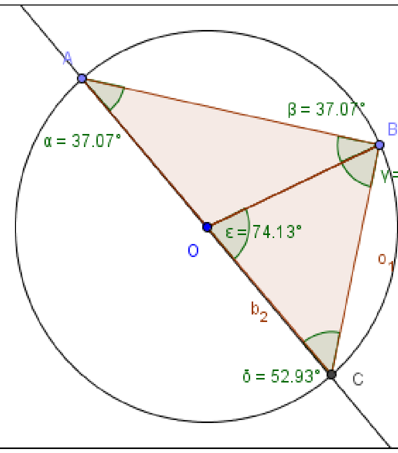
e) ¿Cómo son los ángulos OBC y OCB?

f) ¿Qué relación hay entre los ángulos COB y AOB?

g) ¿Qué relación existe entre OAB, OBA y COB?

h) ¿Puedes realizar un resumen de los resultados obtenidos a lo largo de las seis sesiones?

SESIÓN 1		
SESIÓN 2		

<table>
<tr><td></td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>SESIÓN 3</td><td>
</td><td></td></tr>
</table>

¿Cuál consideras que fue el método empleado para contestar a la pregunta del PORQUÉ una afirmación determinada es cierta?

ANEXO 2.

IA. PRIMERA SESIÓN: INTRODUCCIÓN AL USO DE GEOGEBRA.

Nombre: Clave:

PROPÓSITO: Realizar construcciones sencillas para conocer algunas herramientas de Geogebra e introducir la Idea de Prueba Geométrica.

GENERALIDADES: Geogebra 4.4 es un software interactivo de matemática que combina dinámicamente Álgebra y Geometría. Su ambiente proporciona diferentes recursos distribuidos en *dos menús: el Windows (o del sistema) y el de Geogebra propiamente dicho*. Este último cambia de acuerdo a las Apariencias del menú vertical del lado derecho. Ver *Figura 1*.

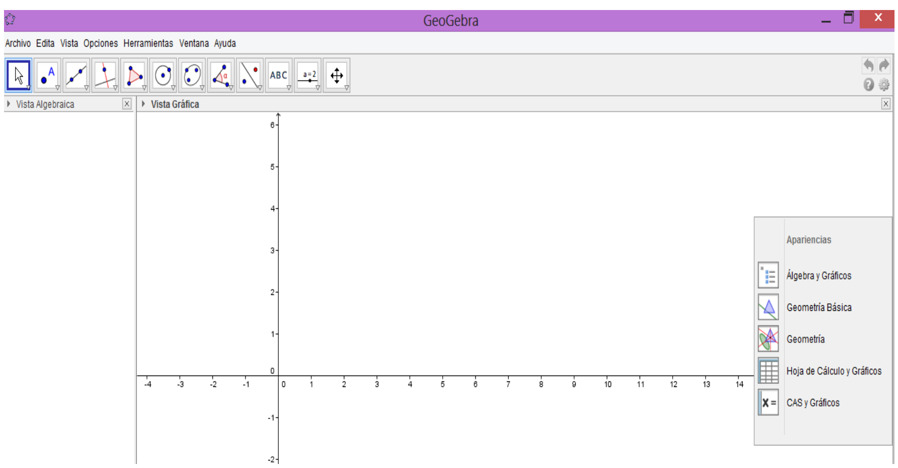


Figura 1. Menús y Apariencias en Geogebra versión 4.4

El primer menú está dedicado en modo general a la administración de archivos, trabajo de impresión, configuración de los objetos internos y de la propia interface, así como ayuda para el manejo del paquete. En general contiene los mismos elementos que cualquier programa manejado bajo Windows (o el sistema de que se trate).

El segundo menú será el encargado de la construcción de las figuras y por ello desarrollaremos actividades para conocerlo y manejarlo con un mayor detalle. Para trabajar utilizaremos la apariencia de Geometría, cuyo menú de Geogebra nos ofrece 12 submenús (de izquierda a derecha): Cursores, puntos, dos menús de líneas, polígonos, dos menús de curvas, obtención de medidas, simetrías, menú de texto, de imágenes y de verificación de propiedades, deslizadores y desplazamientos[32]

PRIMERA CONSTRUCCIÓN

a) Elige la apariencia Geometría en el menú vertical del lado derecho. Ver *Figura 1.*

b) Coloca el cursor Elige y Mueve sobre alguna parte de los Ejes del Plano Cartesiano y con el botón derecho desactiva la opción Ejes.

c) Crea un punto (en el submenú de puntos, segundo de izquierda a derecha, elige el comando Punto) y etiquétalo con A. Ver *Figura 2.*

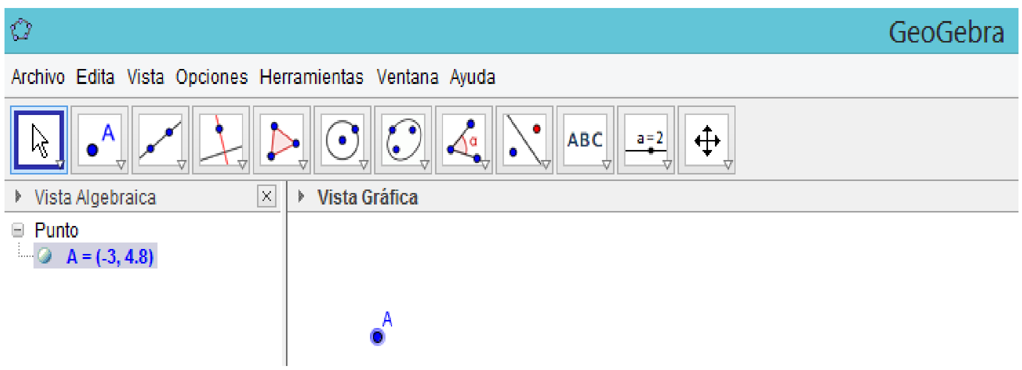


Figura 2: Punto A

d) Crea una recta a partir de ese primer punto (de izquierda a derecha, en el primer menú de líneas elige Recta dados dos puntos, click en el punto A y otro click en cualquier otro lugar dentro de la vista gráfica de la pantalla). Etiqueta al segundo punto con B. Ver *Figura 3.*

Figura 3. $\overleftrightarrow{AB}$ *(Recta del punto A al punto B)*

[32] Si colocas el cursor (sin dar click) sobre cada una de estas herramientas, el sistema te muestra en color amarillo las instrucciones para ejecutar cada una de ellas.

e) Manipula $\overleftrightarrow{AB}$ con el comando Elige y Mueve del menú cursores[33]. *Ver Figura 4.*

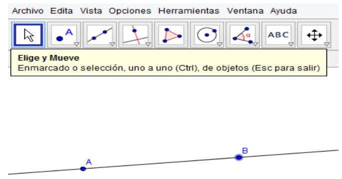


Figura 4. Cursor Elige y Mueve para manipular $\overleftrightarrow{AB}$

f) Con la herramienta Punto en objeto, coloca un punto C sobre $\overleftrightarrow{AB}$.

g) Construye una perpendicular a la recta anterior que pase por el punto C (En el tercer submenú, elige Perpendicular, da click en C y luego en $\overleftrightarrow{AB}$ a cualquier altura de la recta.

h) Coloca un punto D sobre la perpendicular construida, de esta forma se tiene: Recta $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$. Ver Figura 1.

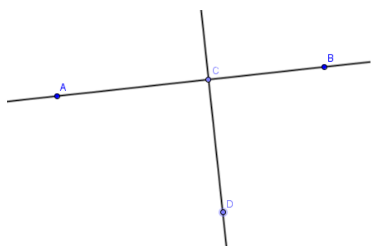


Figura 4: $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$

i) Marca el ángulo ACD y corrobora que ambas rectas son perpendiculares. Para ello elige ángulo y marca los tres puntos en ese orden[34]. Puedes mover con el cursor Elige y Mueve las etiquetas de tal forma que no estorben la visibilidad de la figura. *Ver Figura 5.*

[33] Opcional: Puedes ocultar las etiquetas que no te sean útiles ubicando el cursor sobre la etiqueta, dando click con el botón derecho del mouse y desactivando la casilla correspondiente. Lo mismo puedes hacer para ocultar objetos.

[34] Verifica las instrucciones de esa herramienta. Observa que los tres puntos del ángulo se introducen en sentido anti horario y el segundo punto siempre es el vértice.

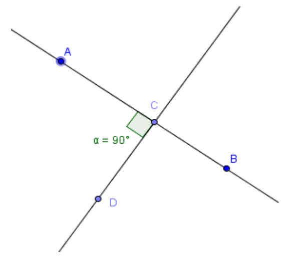


Figura 5. $\llcorner\ ACD$ *marcado en sentido antihorario*

j) Intenta manipular cada uno de los elementos anteriores, ¿todos se comportan igual?

En Geogebra existen objetos libres (también llamados independientes) y objetos dependientes.

k) De la construcción anterior ¿Cuáles son libres y cuáles dependen de otros?

SEGUNDA CONSTRUCCIÓN

a) Traza un segmento $\overline{AB}$. Enseguida traza un Punto M sobre este segmento justo a la mitad (Utiliza la herramienta Medio o Centro).

b) Dibuja un punto Z fuera de dicho segmento, en un lugar cualquiera y traza un segmento del Punto medio M al punto Z. Ver *Figura 6.*

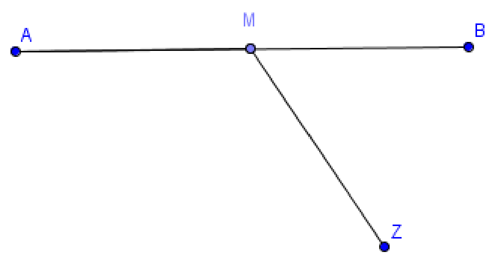


Figura 6. Segmentos $\overline{AB}$ *y* $\overline{MZ}$

c) Elige la opción ángulo y da click en A, en M y en Z (en ese orden). Haz lo mismo para el ángulo ZMB. Una vez más, puedes reacomodar las etiquetas u ocultar las que no te sirvan con las opciones del botón derecho del cursor Elige y Mueve. Ver *Figura 7.*

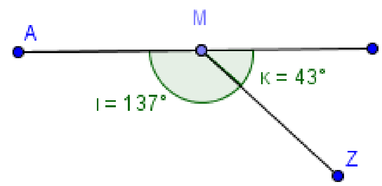


Figura 7. $\widehat{AMZ}$ *y* $\widehat{ZMB}$

d) Recuerda que un ángulo llano o de media vuelta, es aquel en el cual un lado es la prolongación del otro, mide 180°. Los ángulos adyacentes son los que tienen un lado en común.

e) ¿Cuánto suman los ángulos adyacentes AMZ y ZMB? ¿Por qué? Escribe tus razones utilizando primero palabras y después simbología.[35]

<u>TERCERA CONSTRUCCIÓN</u>

a) Traza un segmento $\overline{FG}$. En seguida elige un punto H sobre este segmento (Utiliza la herramienta Punto en Objeto).

b) Dibuja en un lugar cualquiera, un punto I fuera de dicho segmento, y traza un segmento del Punto H al punto I. Ver *Figura 8.*

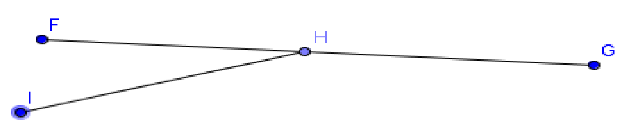


Figura 8. $\overline{FG}$ *y* $\overline{HI}$ *intersectados en* H .

c) Selecciona la Herramienta Deslizador y da click en la pantalla. En la ventana emergente elige Ángulo y en Nombre elige β , en Intervalo Mín: 0° y en Máx: 180°. En Incremento: 1°. Aplica. Ver *Figura 9.*

[35] Puedes sumar los ángulos en la barra de entrada.

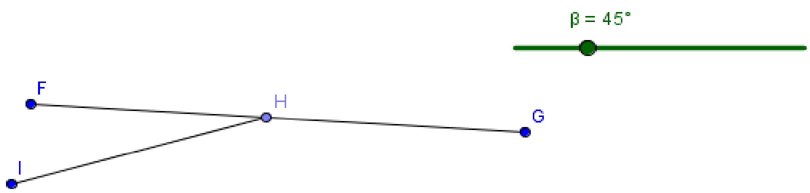


Figura 9. Deslizador para $\measuredangle\beta$

d) Elige la herramienta Rotación, da click sobre $\overline{IH}$, después sobre el punto H y en la ventana emergente de Rotación elige la letra β. Si $\overline{IH}$ está por debajo de $\overline{FG}$, selecciona sentido anti horario, de lo contrario escoge sentido horario. Ver *Figura 10.*

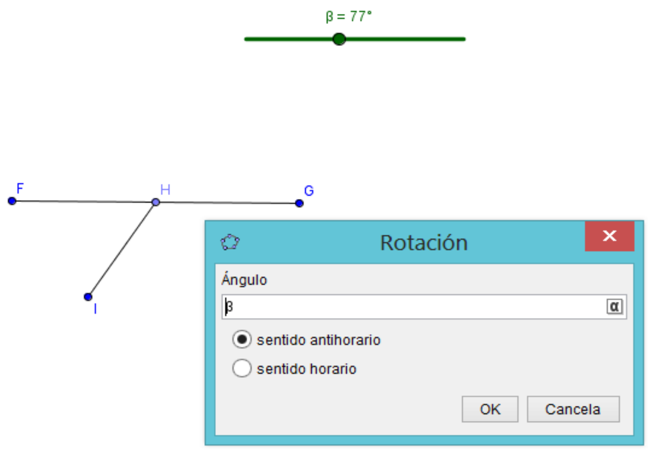


Figura 10 Elige sentido anti horario u horario dependiendo la posición de $\overline{IH}$

e) Con la herramienta Ángulo, marca: $\widehat{FHI}$ así como $\widehat{GHI'}$. Ver *Figura 11*.

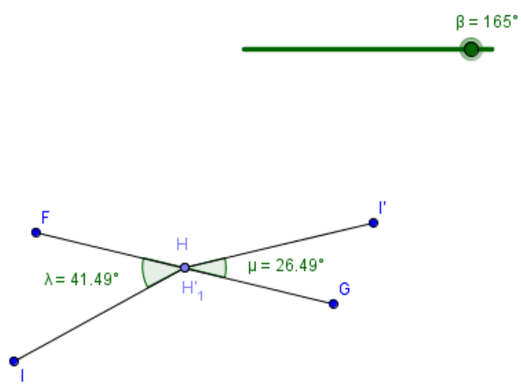


Figura 11. Ángulos $\widehat{FHI}$ *e* $\widehat{GHI'}$

f) ¿En qué momento $m\,\widehat{FHI} = m\,\widehat{GHI'}$?[36]

g) Cuando $m\measuredangle\beta = 180°$, $\widehat{FHI}$ e $\widehat{GHI'}$ se llaman Ángulos Opuestos por el Vértice. Los Ángulos Opuestos por el Vértice son dos ángulos tales que los ángulos de uno de ellos, son las prolongaciones de los lados del otro.

h) Mantén $\measuredangle\beta = 180°$. Mueve los puntos F, G y H. ¿Qué observas en los ángulos opuestos por el vértice? ¿Por qué? ¿Cómo justificarías este hecho? Es decir ¿Con qué argumentos de tipo geométrico explicarías esto?

IB. SEGUNDA SESIÓN: ÁNGULOS ENTRE PARALELAS Y TRAZO AUXILIAR

Nombre: Clave:

PROPÓSITO: Continuar con la construcción de la idea de prueba geométrica utilizando algunas herramientas de Geogebra.

CUARTA CONSTRUCCIÓN

a) Traza una recta $\overleftrightarrow{AB}$ y enseguida traza una paralela a esta. (Para trazar la paralela elige la herramienta Paralela, después haz click en cualquier punto de $\overleftrightarrow{AB}$ y luego en cualquier punto fuera de esta).

b) Luego, con la herramienta Punto en objeto, traza un punto sobre cada recta paralela y únelos con otra recta (Puedes nombrar a estos dos últimos puntos C y D). Ver *Figura 1*.

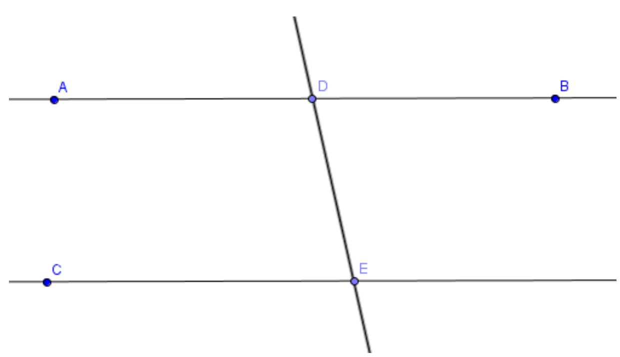


Figura 1. Dos rectas paralelas cortadas por una secante $\overleftrightarrow{DE}$

[36] Se lee: La medida del ángulo FHI es igual a la medida del ángulo GHI.

a) Ahora, con la herramienta Punto en Objeto, se marcarán tres puntos auxiliares a los cuales nombraremos F, G y H respectivamente. Ver *Figura 2.*

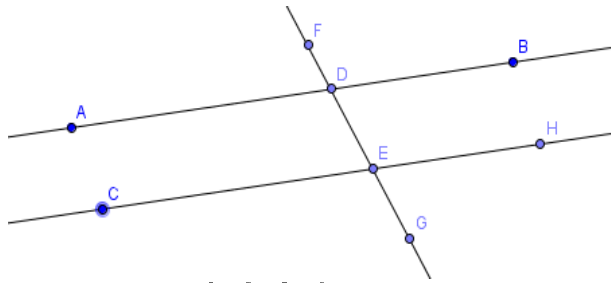


Figura 2 Rectas ∥´s $\overleftrightarrow{AB}$ *y* $\overleftrightarrow{CH}$ *cortadas por una secante* $\overleftrightarrow{FG}$

b) Marca en sentido anti horario los ocho ángulos formados. Ver *Figura 3.* Arrastra la figura. ¿Qué ángulos son iguales entre sí y qué nombres reciben debido a esta relación que guardan entre ellos?

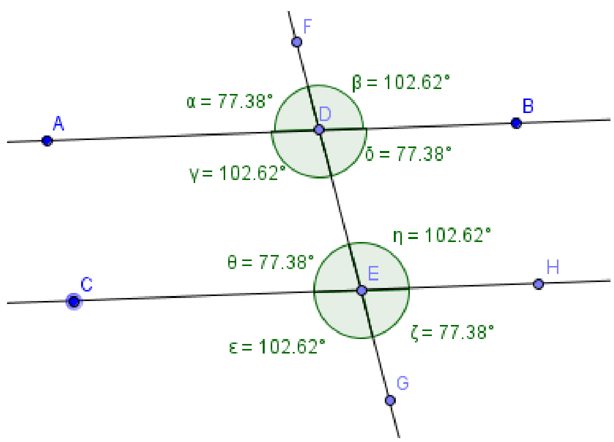


Figura 3. Ángulos formados entre dos ∥´s $\overleftrightarrow{AB}$ *y* $\overleftrightarrow{CH}$ *y una secante* $\overleftrightarrow{FG}$

<u>QUINTA CONSTRUCCIÓN</u>

i) Traza una recta que pase por los puntos M y N.

j) Traza una recta paralela.

k) Sobre esta última, coloca dos puntos A y B.

l) Con la herramienta Punto en objeto coloca un punto C sobre $\overleftrightarrow{MN}$

m) Utilizando la herramienta Polígono traza un ΔABC .[37] Ver *Figura 1*.

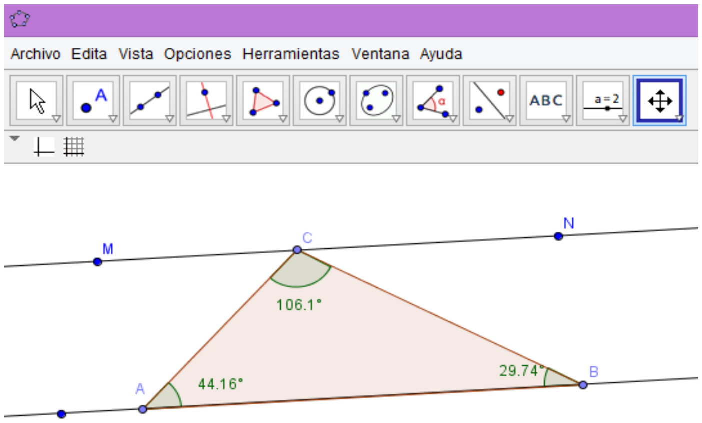


Figura 4. ΔABC *trazado entra las* $\parallel' s$ $\overleftrightarrow{MN}$ *y* $\overleftrightarrow{AB}$

n) Renombra los ángulos como A, B y C.

o) En la barra de entrada ingresa A+B+C.

p) Observa lo que aparece del lado inferior izquierdo en la Vista Algebraica.

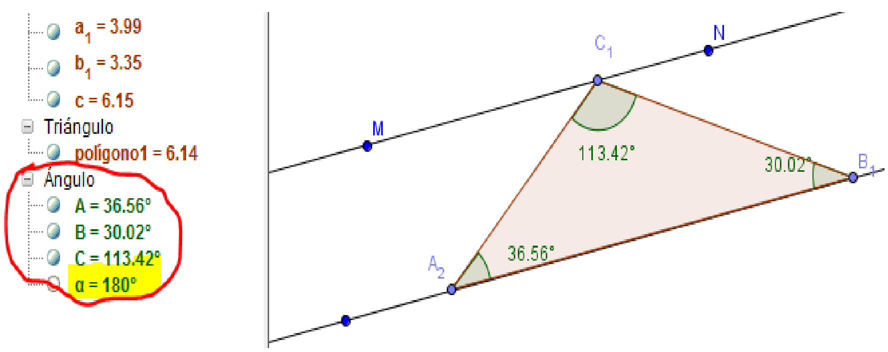


Figura 5. $\Delta A_1B_1C_1$ *, valores de los ángulos internos A, B, C y la suma de estos.*

q) Cambia la posición de los vértices y la separación de las paralelas. ¿Cuánto resulta la suma de los ángulos <u>internos</u> A, B y C? [38] ¿Por qué sucede esto? ¿Cuáles serían los argumentos, los principios geométricos o las razones que usarías para justificar este hecho?

---

[37] Se lee triángulo ABC.

[38] Si cambias la posición de las rectas, observarás que los ángulos señalados ya NO serán los INTERNOS, en ese caso, para determinar cada valor de los ángulos internos habría que restar cada uno de los valores mostrados a 360° (4R).

r) Para contestar la pregunta anterior ¿Te sería útil realizar algún trazo adicional (trazo auxiliar)? De ser así ¿Cuál crees que te serviría?

IC. TERCERA SESIÓN: CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS Y PARALELOGRAMOS

Nombre: Clave:

PROPÓSITOS: Continuar con la construcción de la idea de prueba geométrica utilizando ciertas herramientas de Geogebra. Desarrollar el concepto de congruencia en Triángulos, segmentos y ángulos y conocer las propiedades de los cuadriláteros paralelogramos.

Se dice que dos figuras son **CONGRUENTES** si tienen los lados iguales y el mismo tamaño (o también si están relacionados por un movimiento). Por así decirlo, dos figuras son congruentes si tienen la **misma forma y tamaño**, aunque su posición u orientación sean distintas. Las partes que coinciden en las figuras congruentes se llaman *homólogas o correspondientes*. El símbolo de congruencia es: $\cong$.

Para observar un ejemplo realiza la siguiente construcción:

SEXTA CONSTRUCCIÓN

a) Dibuja una circunferencia con la herramienta Circunferencia (centro punto).

b) Coloca un punto C sobre dicha circunferencia y únelo con un segmento al centro. (radio $\overline{AC}$).

c) Dibuja una recta perpendicular al radio $\overline{AC}$ que pase por el centro A y marca el punto de intersección de esta recta con la circunferencia. Ver *Figura 1.*

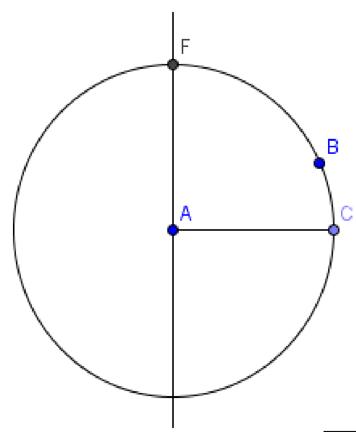


Figura 1. Circunferencia AB con radio $\overline{AC} \perp \overline{AF}$

d) Dibuja perpendicular al radio $\overline{AC}$ que pase por C y otra a $\overline{AF}$ que pase F. Ver *Figura 2.*

e) Con la herramienta polígono, dibuja el cuadrado FECA. Ver *Figura 2.*

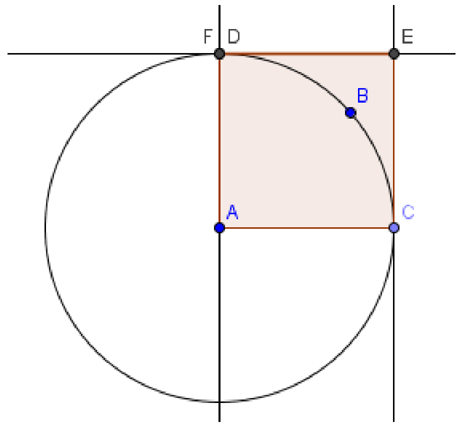


Figura 2. Cuadrado FECA

f) Oculta todos los trazos que utilizaste para generar el cuadrado y traza el $\triangle CFE$. Ver *Figura 3.*

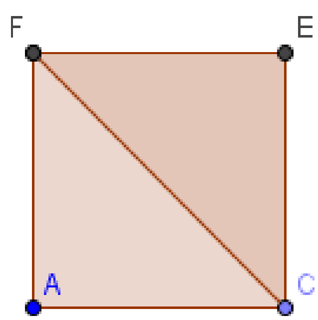


Figura 3. Cuadrado FECA y $\triangle CFE$

g) Genera un deslizador para un Ángulo $\sphericalangle\alpha$, Mín: 0° Máx:270°

h) Haz click en el punto F con el botón derecho del mouse y en Propiedades activa la casilla de Punto auxiliar.

i) Aplica una Rotación para el $\triangle CFE$, con F y α como punto y ángulo de rotación respectivamente. Ver *Figura 4.*

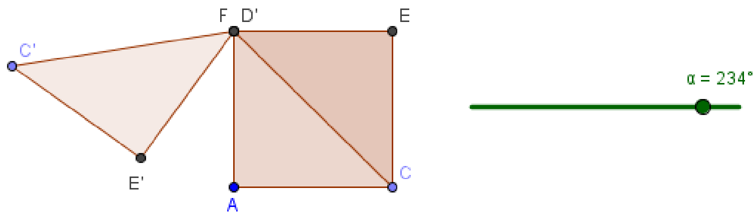


Figura 4. Rotación del $\triangle CFE$ *genera el* $\triangle C'D'E'$, *por lo cual* $\triangle CFE \cong \triangle C'D'E'$

j) Cambia los valores de $\measuredangle \alpha$ desde 0° hasta 270°. ¿Cómo son entre sí el $\triangle CFE$ y el $\triangle C'D'E'$? ¿Cuáles son los lados homólogos o correspondientes?

k) Marca los ángulos internos del $\triangle CFE$. ¿Cuáles son los ángulos correspondientes u homólogos?

Es necesario aclarar que dos ángulos son congruentes cuando tienen la misma medida entre sí, aunque sus lados no midan lo mismo. Ver *Figura 5*.

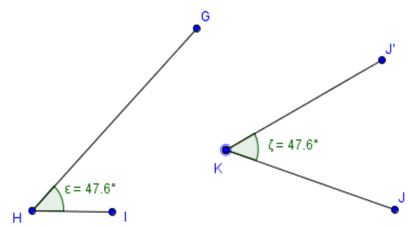


Figura 5. $\measuredangle GHI \cong \measuredangle JKJ'$

Los criterios *mínimos* que deben cumplir dos triángulos para ser congruentes son los siguientes:

Criterio LAL: Dos triángulos son congruentes si dos de sus lados tienen la misma longitud de sus homólogos, y el ángulo comprendido entre ellos tiene la misma medida de su homólogo. Ver *Figura 6*.

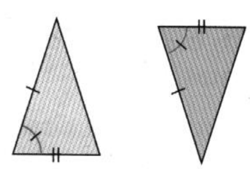


Figura 7. Caso Lado-Ángulo-Lado (LAL)

Criterio ALA: Si dos ángulos y el lado entre ellos son respectivamente congruentes con los mismos de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes. Ver *Figura 8*.

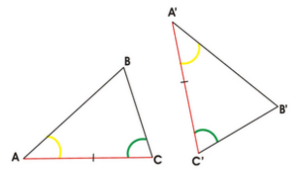


Figura 8. Caso Lado-Ángulo-Lado (LAL)

Criterio LLL: Si en dos triángulos los tres lados de uno son respectivamente congruentes con los del otro, entonces los triángulos son congruentes. Ver *Figura 9.*

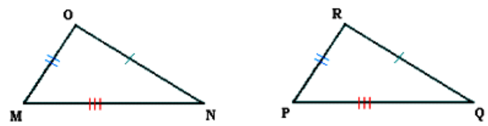


Figura 9. Caso Lado-Lado-Lado (LLL)

Criterio LLA: Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos.

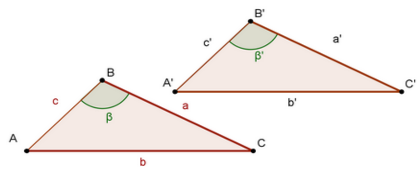


Figura 10. Caso Lado-Lado-Ángulo (LLA)

SÉPTIMA CONSTRUCCIÓN

a) Traza una $\overleftrightarrow{AB}$.

b) Coloca dos puntos C y D sobre esa recta.

c) Dibuja un punto E fuera de esa línea y únelo al punto C.

d) Dibuja una paralela a $\overleftrightarrow{CE}$ que pase por el punto D. Ver *Figura 11*.

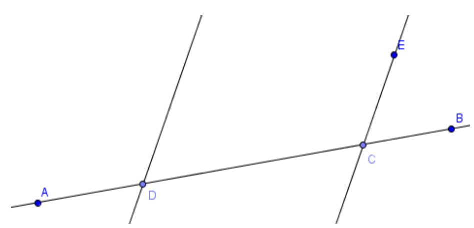


Figura 11. Recta paralela a $\overleftrightarrow{CE}$ *por el punto D*

Los PARALELOGRAMOS son aquellos cuadriláteros con sus lados opuestos congruentes y paralelos dos a dos y sus ángulos opuestos también congruentes. Ver *Figura 13.*

e) Dibuja una paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ que pase por el punto E y marca el punto de intersección F. Ver *Figura 12.*

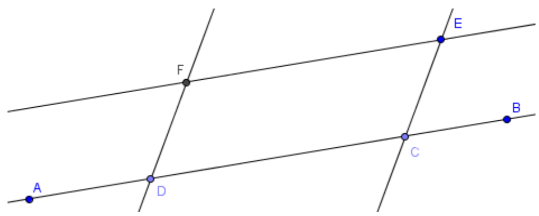


Figura 12. Recta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ por el punto E y punto de intersección F.

f) Con Polígono une los puntos del cuadrilátero obtenido y oculta los trazos auxiliares.

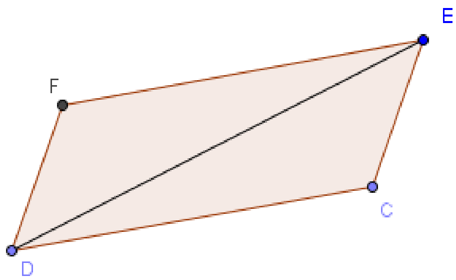


Figura 13. Polígono DCFE

g) ¿Cómo son ΔDEF y ΔDCE entre sí? ¿Qué criterios utilizarías para justificar tu afirmación?

h) Usando ambas herramientas, *Ángulo* y *Distancia o Longitud*, verifica que el polígono construido anteriormente es un paralelogramo.

D. CUARTA SESIÓN: CONGRUENCIA Y PARALELOGRAMOS II.

PROPÓSITO: Reafirmar los criterios de Congruencia de Triángulos analizando ciertas propiedades de los paralelogramos.

OCTAVA CONSTRUCCIÓN

a) Traza una $\overleftrightarrow{AB}$ y coloca dos puntos C y D sobre esta recta. Ver *Figura 1.*

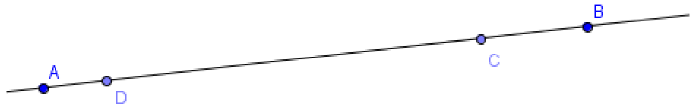


Figura 1. Puntos C y D sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

b) Dibuja un punto E fuera de esta recta y únelo al punto C con otra recta.

c) Dibuja una paralela a $\overleftrightarrow{CE}$ que pase por D.

d) Dibuja una paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ que pase por E.

e) Marca el punto de intersección F y con polígono dibuja el paralelogramo FECD. Ver *Figura 2.*

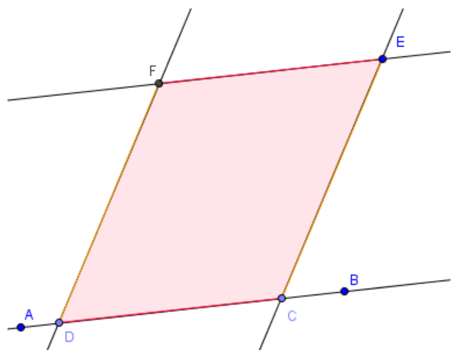


Figura 2. Paralelogramo FECD

f) Une los puntos F y C así como D y E con un segmento cada par y marca el punto de intersección G. Ver *Figura 3.*

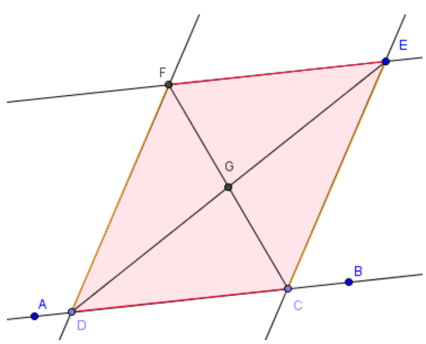


Figura 3. Diagonales $\overline{FC}$ *y* $\overline{DE}$ *con punto de intersección G.*

g) Con la herramienta Distancia y Longitud mide las longitudes de $\overline{FG}$, $\overline{GC}$, $\overline{EG}$ y $\overline{GA}$. Ver *Figura 4.*

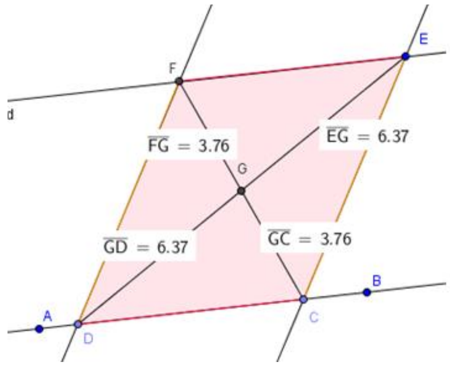


Figura 4. Etiquetas de longitudes de $\overline{FG}$, $\overline{GC}$, $\overline{FG}$.

h) De acuerdo a lo que observas ¿Cómo son entre sí los segmentos $\overline{FG}$, $\overline{GC}$, $\overline{EG}$ y $\overline{GA}$? ¿Por qué? ¿Cuáles son los principios geométricos que justifican esto?

NOVENA CONSTRUCCIÓN

a) Traza un ΔABC .

b) Por C traza una paralela a $\overline{AB}$ y por A una paralela a $\overline{BC}$.

c) Marca el punto de intersección D y dibuja el paralelogramo ABCD.

d) Marca los ángulos BAD y ADC y súmalos. Ver Figura 5.

e) ¿Por qué se obtiene ese resultado? ¿Cuáles son los principios geométricos que lo justifican?

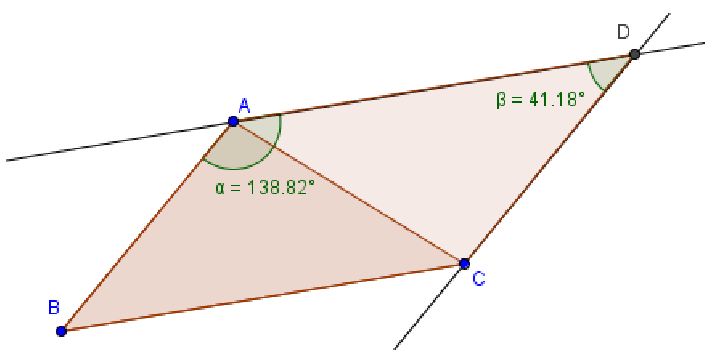


Figura 5. Paralelogramo ABCD y ángulos consecutivos α *y* β .

ANEXO 3

IE. PRUEBA FINAL

a) Traza un triángulo cualquiera ABC.

b) Ubica los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, nómbralos respectivamente D y E.

c) Traza un triángulo ADE.

d) Selecciona la herramienta Deslizador y selecciona la opción ángulo de la ventana que se despliega.

e) A la derecha de la casilla Nombre, selecciona la letra α y en el Intervalo elige Mín: 0° y Máx: 180°, en Incremento escribe 2°. Aplica.

f) Coloca el cursor Elige y Mueve sobre el punto E, da click con el botón derecho y elige la opción Propiedades y aparecerá la ventana emergente llamada Preferencias.

g) En la casilla Básico, activa la opción Objeto auxiliar.

h) Selecciona la herramienta Rotación: Elige el triángulo ADE[39], el punto auxiliar E y en Ángulo elige la letra del deslizador, en este caso α y el sentido anti horario.

i) Con la herramienta del cursor Elige y Mueve, cambia los valores del ángulo α en el deslizador hasta invertir completamente el triángulo ADE. Ver *Figura 1*

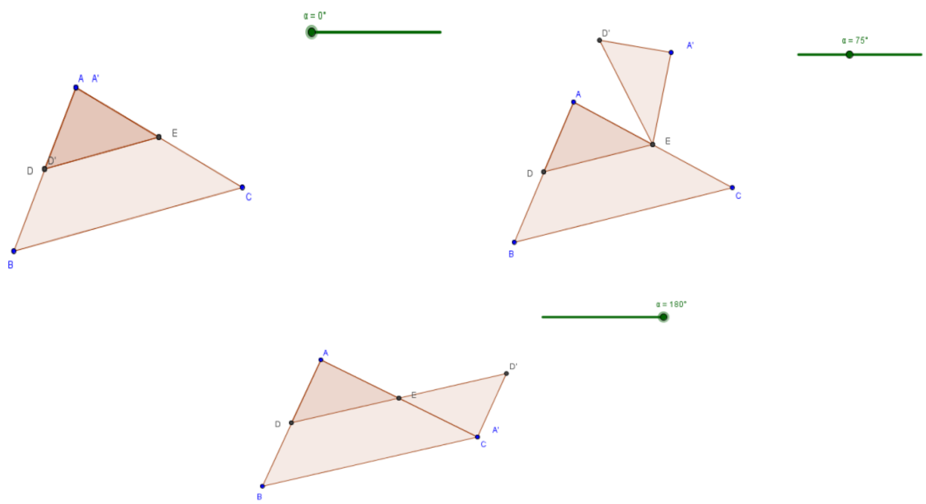


Figura 1. Rotación del ΔADE

[39] Puedes elegir dicho triángulo en la sección Triángulo de la barra derecha Vista algebraica. Debe aparecer como polígono2.

c) ¿Cómo son entre sí los segmentos DD’ y BC cuando el triángulo se ha invertido por completo?[40]

d) Cambia el tamaño y la forma del triángulo ABC. ¿Se mantiene esta relación? ¿Por qué? ¿Con qué elementos geométricos justificarías este hecho?

[40] Considera la posición y la medida de ambos segmentos.