Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

RAZONAMIENTO SOBRE LAS IDEAS DE ALEATORIEDAD, INDEPENDENCIA Y VARIABILIDAD DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Tesis que presenta

Ulises David Martínez Colula

para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa

Director de la Tesis: Dr. Ernesto Alonso Sánchez Sánchez

Ciudad de México, Noviembre, 2016

Agradecimiento

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por la beca (número de becario 626456) y todos los apoyos que me fueron otorgados para realizar los estudios de maestría.

A mis padres por todo su apoyo a lo largo de mis estudios.

Al Dr. Ernesto A. Sánchez Sánchez por la ayuda brindada para realizar esta investigación.

Contenido

Resumen

En el presente trabajo se explora cómo razonan los estudiantes con relación a las grandes ideas de probabilidad (Gal, 2005), los sesgos o heurísticas que emergen cuando responden a preguntas relacionadas a dos situaciones que involucran el azar y el papel de la herramienta tecnológica en la transformación de su manera de razonar. En particular, se plantean las siguientes preguntas: 1) ¿Qué rasgos de razonamiento se perciben en las respuestas de los estudiantes acerca de las ideas de aleatoriedad, independencia y variabilidad? 2) ¿Cuáles son los sesgos y heurísticas que se presentan cuando los estudiantes responden preguntas en las que subyacen las ideas probabilísticas de aleatoriedad, independencia y variabilidad? 3) ¿Qué cambios en las respuestas de los estudiantes se perciben después de llevar a cabo actividades de simulación con Fathom?

El trabajo se realizó con la participación de 16 estudiantes de segundo semestre de bachillerato en el Colegio de Ciencias y Humanidades, plantel Vallejo. Se aplicaron dos tareas, en la primera se hacían lanzamientos de moneda y en la segunda se tenía una urna con tres bolas marcadas con las letras A, B y C de donde se realizaban extracciones con reemplazo, teniendo el propósito de analizar como los estudiantes perciben y vinculan los aspectos de aleatoriedad, independencia y variabilidad de la probabilidad. En ambas tareas se pedía predecir los resultados que se podían obtener al repetir múltiples veces cada experimento, así como contar la frecuencia en que se obtenía cada resultado (águila/sol o bola A/B/C) al repetir el experimento diez veces en múltiples ocasiones.

Se identificó que en la mayoría de las respuestas proporcionadas se tenía una concepción determinística de las probabilidades, ya que los estudiantes consideraban que el valor esperado en cada pregunta era el que se obtendría, por lo que se considera que son propensos a utilizar la heurística de representatividad en sus razonamientos. Al realizar actividades de simulación física y computacional, en algunos casos, el razonamiento utilizado por los estudiantes cambió y mejoró, lo que lleva a afirmar que las actividades aquí propuestas mejoraron la conceptualización de las grandes ideas de probabilidad.

Abstract

In this paper we explore how students reason in relation to the great ideas of probability (Gal, 2005), the biases or heuristics that emerge when they answer questions related to two situations that involve chance and the role of the technological tool in the transformation of his way of reasoning. In particular, the following questions are posed: 1) What features of reasoning are perceived in students' responses to the ideas of randomness, independence, and variability? 2) What are the biases and heuristics that arise when students answer questions that underlie the probabilistic ideas of randomness, independence, and variability? 3) What changes in student responses are perceived after performing simulation activities with Fathom?

The experimental work was carried out with the participation of 16 students of second semester of bachillerato in the School of Sciences and Humanities, campus Vallejo. Two tasks were applied, in the first one was made coin launches and in the second one had a ballot box with three balls marked with the letters A, B and C where they were made extractions with replacement, with the purpose of analyzing how the students perceive and link the aspects of randomness, independence and probability variability. Both tasks required predicting the results that could be obtained by repeating each experiment multiple times, and counting the frequency at which each result (eagle / sun or ball A / B / C) was obtained by repeating the experiment ten times in multiple occasions.

It was identified that in most of the provided answers we had a deterministic conception of the probabilities, since the students considered that the expected value in each question was the one that would be obtained, reason why they are considered that they are inclined to use the heuristic of representativeness in their reasoning. In carrying out physical and computational simulation activities, in some cases, the reasoning used by the students changed and improved, which leads to the assertion that the activities proposed here improved the conceptualization of the great ideas of probability.

Capítulo 1

Introducción

En la actualidad, existe un creciente interés en la enseñanza y el aprendizaje de la estadística y la probabilidad en todos los niveles escolares. En particular, con relación a la probabilidad y con los continuos desarrollos computacionales, se ha sugerido comenzar a dar más importancia en la enseñanza al enfoque frecuencial de probabilidad y a la modelación estocástica de situaciones reales. El desarrollo de las computadoras ha añadido un recurso importante para la simulación en probabilidad con generadores de datos al azar; sin embargo, aún es necesario explorar sus posibilidades.

No obstante, un enfoque puramente experimental no es suficiente para lograr un buen aprendizaje de la probabilidad; ya que cuando una simulación puede ayudar a encontrar una solución a un problema de probabilidad que surge en una situación real, la experimentación en sí misma no ayuda a construir el andamiaje teórico ni puede probar lo relevante de la solución en un contexto más amplio, pues depende de las hipótesis y la configuración teórica sobre la que se construye el modelo. Por lo anterior, formulamos la hipótesis de que el desarrollo del razonamiento probabilístico de los estudiantes puede lograrse a través de la interacción entre el estudio de la teoría de probabilidad y el análisis de los datos obtenidos mediante experimentos; la adquisición de tal teoría por parte de los estudiantes debe ser gradual y apoyada por experiencias empíricas (Batanero, Henry & Parzysz, 2005).

Por otro lado, Jones (2005) señala que el interés generalizado de la probabilidad en el currículo escolar es especialmente oportuno porque los niños de épocas presentes y futuras se encontrarán cada vez más con la variación aleatoria y los fenómenos de azar no sólo en la escuela sino en los medios de comunicación, en la predicción meteorológica, económica y financiera y en las actividades sociales. Esto ha generado retos para la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad de manera que estos tópicos se han introducido en los currículos de educación básica de muchos países. Los primeros documentos curriculares que incorporaron la probabilidad han existido desde hace al menos 15 años, y durante estos se ha intensificado la investigación sobre el razonamiento de los estudiante en tareas de probabilidad (Jones, Langrall & Mooney, 2007).

Batanero, Henry y Parzysz (2005) señalan que un punto clave en la enseñanza de la probabilidad es reflexionar sobre el contenido principal que deben aprender los estudiantes en los diferentes niveles educativos y de cómo este contenido puede ayudar a preparar a los estudiantes para la vida. Un ejemplo de dicho contenido para el aprendizaje de la materia desde los niveles básicos hasta el bachillerato, se pueden encontrar en los Principios y Estándares Curriculares de los Estados Unidos (NCTM, 2000). En este documento se divide la educación en cuatro niveles educativos que abarcan desde el jardín de niños hasta el grado 12 (bachillerato). En el estándar de Análisis de datos y Probabilidad se señala que los programas de enseñanza deberían capacitar a los estudiantes para:

- Formular preguntas que se pueden responder con datos y recolectar, organizar y presentar los datos relevantes para responderlas.
- Seleccionar y utilizar los métodos estadísticos apropiados para analizar los datos
- Desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos
- Comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad

En el caso de México los temas de probabilidad en la educación básica están presentes de una forma muy escasa, es hasta el bachillerato donde se tienen clases específicas de probabilidad y estadística, que en la mayoría de las veces aparece como una materia optativa en el último año escolar. En este estudio nos centraremos en el currículo del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) ya que fue en este lugar donde se realizaron las actividades que más adelante se detallan. En esta institución en los dos primeros años se imparte un tronco común de matemáticas enfocado en temas de algebra y geometría, no es sino hasta el tercer año y de manera optativa que se puede cursar estadística y probabilidad; en el *Programa de Estudios de Estadística y Probabilidad I y II* (2003) se señala que el alumno adquirirá conocimientos, valores y actitudes, entre los que se menciona:

- La incorporación de la visión no determinista de los fenómenos aleatorios, que coadyuve a una mejor comprensión de su entorno.

Como propósitos generales relacionados con la probabilidad se señala que el alumno podrá:

- Comprenderá la naturaleza de los fenómenos aleatorios que se presentan en su entorno, a partir del análisis probabilístico, para continuar el desarrollo de su pensamiento matemático.
- Comprenderá que la Probabilidad y la Estadística constituyen disciplinas que incluyen conceptos, técnicas y métodos que permiten aproximarse al estudio de los fenómenos aleatorios a partir del tratamiento de la información.
- Realizará predicciones e inferencias sustentadas en modelos matemáticos, cuyo alcance trascienda hacia otras áreas del conocimiento.

Conviene destacar que en este currículo se recomienda un enfoque didáctico basado en la resolución de problemas en contextos ricos y accesibles para los alumnos. En la práctica, sin embargo, no se abandona aún el enfoque tradicional de la enseñanza mediante cálculos aritmético y definiciones teóricas. Watson (2005) indica que tradicionalmente los problemas de probabilidad se resuelven con base en la consideración teórica de espacios muéstrales y eventos de complejidad creciente (definición clásica de probabilidad y combinatoria). No obstante, se está operando un cambio por lo menos en los planes de estudio de muchos países, en los que se reconoce la importancia de los enfoques subjetivo y frecuencial para el aprendizaje de la probabilidad; como sostienen Jones, Langrall y Mooney (2007):

> Aunque hay una considerable investigación en todos los niveles sobre las concepciones de los estudiantes sobre la probabilidad teórica, ha habido relativamente poca investigación sobre el pensamiento de los estudiantes acerca de la probabilidad experimental y aún menos sobre la comprensión de las conexiones entre la probabilidad teórica y la probabilidad experimental (p. 946).

El razonamiento de los estudiantes respecto a la relación entre la probabilidad teórica y la probabilidad frecuencial implica, como lo menciona Gal (2005), que razonen con las grandes ideas de probabilidad, *aleatoriedad, variabilidad e independencia*, pues éstas son los ladrillos con los que se construye aquella relación. Así, en el presente trabajo, nos proponemos explorar cómo razonan los estudiantes con relación a estas grandes ideas, los sesgos o heurísticas que emergen cuando resuelven las tareas y el papel de la herramienta tecnológica en la transformación de su manera de razonar. En particular, nos plateamos las siguientes preguntas:

- ¿Qué rasgos de razonamiento se perciben en las respuestas de los estudiantes acerca de las ideas de aleatoriedad, independencia y variabilidad?
- ¿Cuáles son los sesgos y heurísticas que se presentan cuando los estudiantes responden preguntas en las que subyacen las ideas probabilísticas de aleatoriedad, independencia y variabilidad?
- ¿Qué cambios en las respuestas de los estudiantes se perciben después de llevar a cabo actividades de simulación con Fathom?

Capítulo 2

Antecedentes

2.1 Introducción

En este capítulo se presentan algunas investigaciones en el campo de la Matemática Educativa y que son relevantes para la presente investigación sobre los temas de aleatoriedad, variabilidad e independencia. Adicionalmente, se retoman algunos trabajos donde se presenta la relación que existe entre los enfoques clásico y frecuencial de probabilidad; por último, se menciona el uso de tecnologías digitales y de las simulaciones en la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad en el salón de clases.

2.2 Aleatoriedad

Green (1989) retoma el trabajo de Piaget e Inhelder (1975) donde se describe un experimento llevado a cabo de forma individual con niños de diferentes edades, se proporcionaba una hoja de papel dividida en cuadrados de alrededor de 3 cm^2 y pequeños cubos de vidrio para representar las gotas de lluvia. Posteriormente se les solicito que mostraran dónde pensaban que caería cada uno de los cubos, los niños designados por Piaget en la Etapa 1 (6 a 9 años), colocaron ordenadamente uno por cuadro y cuando se muestro una cuadrícula casi terminada con sólo una casilla vacía (figura 2.1), el niño siempre coloca el cubo en el lugar vacío a fin de completar el patrón; se concluyó que el deseo de la regularidad dominó las predicciones hechas.

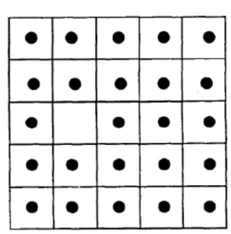
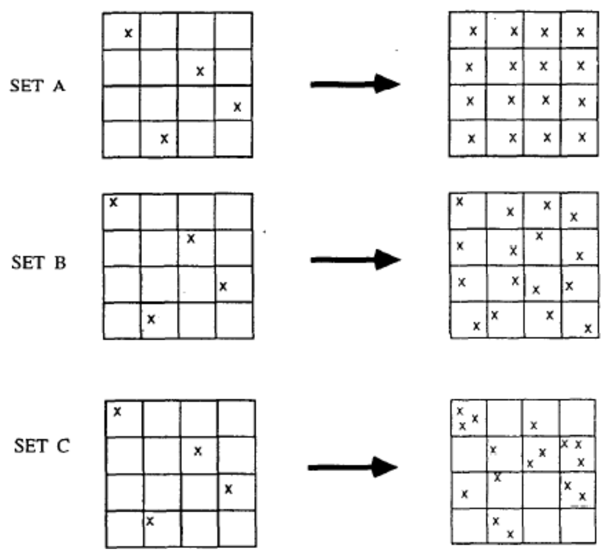


Figura 2.1 Ejemplo de la cuadricula mostrada a los niños, Green (1989)

En la Etapa 2 (9 a 12 años) se aceptó la irregularidad de la distribución, pero aún se pensaba que el cuadro vacío era el más probable para recibir la próxima gota. En la Etapa 3 (más de 12 años), el razonamiento proporcional apareció y Piaget afirmaba que los niños examinados comprendían la Ley de los Grandes Números, la cual establece que con un número cada vez mayor de gotas de lluvia, la uniformidad aumenta en términos proporcionales; sin embargo, los ejemplos que cito no eran convincentes.

Para Green el concepto de aleatoriedad es algo que todas las personas sienten que entienden, pero proporcionar una definición aceptable de ninguna manera es sencillo, ya que la aleatoriedad es más de una intuición y se sabe que la intuición puede fallar. Por lo cual, realizo un estudio sobre este tema con una muestra de 2,930 alumnos de entre 11 y 16 años de una escuela secundaria inglesa, los cuales respondieron una pregunta que trataba sobre la caída de copos de nieve, ver figura 2.2.

A continuación se presentan tres conjuntos de dos imágenes. Cada conjunto muestra el patrón de copos de nieve que se acumulan: primero 4 copos y después 16 copos.



¿Cuál de estos conjuntos muestra mejor el tipo de patrón que se puede esperar para ver como los copos de nieve aterrizan?

i. A

ii. B

iii. C

iv. B y C

v. Cualquiera es probable

Figura 2.2 Pregunta aplicada por Green (1989) sobre la caída de copos de nieve

En la pregunta anterior el conjunto A presenta una distribución regular, el conjunto B una distribución semi-aleatoria y mientras que el conjunto C una distribución aleatoria de los copos de nieve. El resultado sorprendente es que el porcentaje de seleccionar la distribución aleatoria disminuye con el aumento de la edad (figura 2.3, línea inferior). Incluso si se incluye la distribución semi-aleatoria, todavía hay una disminución (figura 2.3, línea superior).

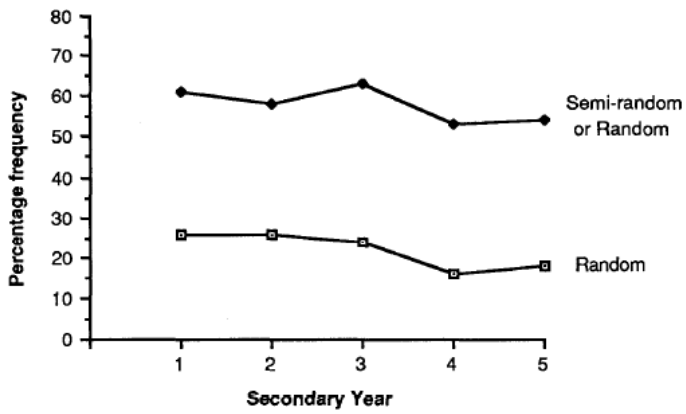
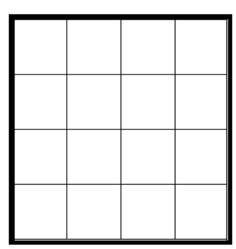


Figura 2.3 El porcentaje de alumnos que seleccionaron una distribución aleatoria o semi-aleatoria, Green (1989)

Engel y Sedlmeier (2005) hacen una investigación sobre como la cultura estadística de los estudiantes evoluciona con la edad, para esto aplican un cuestionario a 222 estudiantes de los grados 5, 7 y 9 en las tres modalidades del sistema escolar alemán (Hauptschule, Realschule y Gymnasium) en el área de Stuttgart. La tarea 2 del cuestionario referente a la caída de copos de nieve se muestra en la figura 2.4.

Tarea 2: La azotea cuadrada del jardín tiene 16 azulejos cuadrados del mismo tamaño.



Si empieza a nevar, después de un corto periodo de tiempo 16 copos de nieve han aterrizado en el techo. Por favor, escriba donde los 16 copos podrían haber aterrizado (marque una X para cada copo). Explique su respuesta:

Figura 2.4 Pregunta descrita por Engel y Sedlmeier (2005) sobre la caída de copos de nieve

En esta tarea, en contraste con la tarea utilizado por Green (1989), los estudiantes fueron libres de elegir la distribución de los copos de nieve en el techo del jardín, además se les pidió que explicar su respuesta en sus propias palabras. Al evaluar las respuestas de los estudiantes se identificaron cuatro patrones diferentes:

i. "Estrictamente deterministas": los patrones de cómo se colocan las escamas son claramente visibles y rígidos, por ejemplo, cada copo se encuentra exactamente en el centro de un azulejo.

ii. "Moderadamente determinista": Los patrones son reconocibles, a pesar de que la distribución de los copos no se determina detalladamente, por ejemplo, cada azulejo contiene un copo que se coloca en algún lugar de este.

iii. "Principiante": Los patrones no son perceptibles, en particular, hay al menos un azulejo vacío; sin embargo, la variabilidad en el número de copos por azulejo es muy pequeña, hay algunos azulejos vacíos y otros con más de un copo. Un máximo de tres azulejos permanecen vacíos.

iv. "Experto": Parecer una distribución aleatoria porque no hay patrones reconocibles; entre cuatro y ocho azulejos permanecen vacíos. No hay simetría o cualquier otro patrón de regularidad.

En este estudio también se realizó una evaluación cuantitativa hecha en función de tres criterios diferentes (puntuación 1, 2 y 3), que se definieron de la siguiente manera:

Puntuación 1 = número relativo de alumnos que no eran estrictamente deterministas.

Puntuación 2 = número relativo de alumnos principiantes y expertos.

Puntuación 3 = número relativo de alumnos expertos.

El análisis de las puntuaciones no reveló ninguna diferencia significativa entre los tres tipos de escuela, mientras que la distribución de la aleatoriedad a través de los diferentes grados se hace evidente a partir de la inspección visual de los datos (figura 2.5) y se observa que disminuye con la edad.

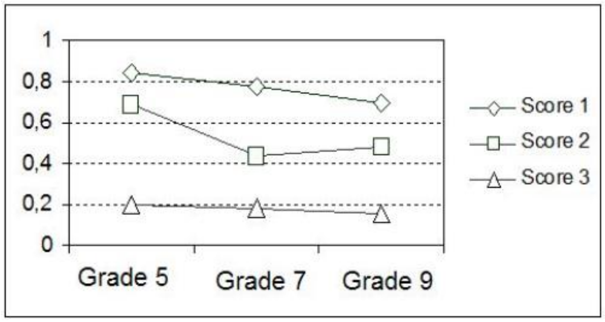


Figura 2.5 Porcentaje de alumnos catalogados en cada puntuación, Engel y Sedlmeier (2005)

Otra pregunta contenida en el cuestionario de Engel y Sedlmeier (2005) referente a la aleatoriedad habla sobre el lanzamiento de una moneda 20 veces (figura 2.6).

Tarea 1: Imagine que está lanzando una moneda 20 veces. Cada tiro puede que sea águila (A) o sol (S). ¿Qué resultado podría aparecer al realizar los 20 lanzamientos? Anote una secuencia de águilas y soles que sea típica para usted.

Figura 2.6 Pregunta descrita por Engel y Sedlmeier (2005)

En las respuestas de los estudiantes a la tarea 1 se analizaron tres criterios diferentes: la frecuencia relativa de águilas, el número de carreras y la longitud de la racha más larga.

a. Distribución del número de águilas

Se realizó la comparación de valores medios para el número de águilas en todos los grados para comprobar si los estudiantes tienen una preferencia por cualquiera de los dos resultados posibles o si decidían aproximadamente igual número de águilas o soles.

Se llegó a la conclusión que los estudiantes a lo largo de todos los grados y tipos de escuela produjeron águilas y soles en números aproximadamente iguales (tabla 2.1), los cuales están cerca al valor teóricamente correcto de 10 y se pudo concluir que la variabilidad aleatoria es subestimada, debido a que los estudiantes eligen 9, 10 o 11 águilas con demasiada frecuencia.

	Grado 5	Grado 7	Grado 9	Total
Hauptschule	9.96	9.87	10.04	9.96
Realschule	9.75	10.8	10.2	10.01
Gymnasium	9.26	9.98	9.73	9.66
Total	9.64	9.98	10.01	9.88

Tabla 2.1 Distribución del número de águilas en la tarea 1 de Engel y Sedlmeier (2005)

b. Número de carreras

Si bien los lanzamientos de una moneda se producen con la misma probabilidad, la aleatoriedad de una secuencia concreta puede ser juzgada por el análisis de patrones; la secuencia consecutiva del mismo resultado se le llama carrera, por ejemplo, la secuencia SSASSAAA consta de 4 carreras (primero una carrera de 2 soles, seguida por una carrera de una águila, de nuevo una carrera de 2 soles y finalmente una carrera que contiene 3 águilas). En las secuencias aleatorias la ocurrencia de muchas así como de pocas carreras es poco probable, probabilísticamente se llega al resultado de que el número esperado de carreras en una secuencia de 20 lanzamientos de moneda es de 10.5, en la tabla 2.2 se presentan los resultados empíricos del cuestionario aplicado a los alumnos y se observa que la mayoría da entre 12 y 13 carreras, un valor por encima del esperado.

	Grado 5	Grado 7	Grado 9	Total
Hauptschule	13.44	12.13	12.96	18.86
Realschule	13.75	12.50	12.28	12.83
Gymnasium	10.78	12.14	12.42	11.72
Total	12.59	12.26	12.55	12.47

Tabla 2.2 Distribución del número de carreras en la tarea 1 de Engel y Sedlmeier (2005)

c. Longitud de la carrera más larga

Como resultado de una falsa comprensión de la independencia muchos adultos estiman la longitud de la carrera más larga como demasiado corta. En el caso de $n = 20$ se calcula un valor esperado de 4.322, es decir, una carrera de longitud 4 o 5 no es inusual en 20 lanzamientos de moneda. La tabla 2.3 muestra los promedios tomados de las secuencias producidas por los estudiantes y se observa que las diferencias entre los distintos grados son muy pequeñas.

	Grado 5	Grado 7	Grado 9	Total
Hauptschule	2.80	3.39	3.24	3.14
Realschule	2.88	3.15	3.16	3.06
Gymnasium	4.41	3.36	3.21	3.70
Total	3.39	3.29	3.20	3.29

Tabla 2.3 Longitud de la carrera más larga en la tarea 1 de Engel y Sedlmeier (2005)

Engel y Sedlmeier concluyen que en la simulación de lanzamiento de monedas, los estudiantes en todas las escuelas y grados son propensos a equilibrar el número de águilas y soles, además las rachas más largas no son suficientemente largas.

Arteaga, Batanero y Ruiz (2010) realizaron esta misma pregunta a 200 profesores en formación, en la Facultad de Educación de la Universidad de Granada, de dos años académicos diferentes, todos ellos estaban siguiendo el mismo curso de educación matemática y habían tomado un curso de matemáticas que incluyó estadística descriptiva.

La investigación anterior tuvo como objetivo evaluar la percepción de aleatoriedad de los profesores, el experimento consistió en anotar los resultados de aparentar lanzar una moneda 20 veces, de tal manera que otras personas pensaran que la moneda se tiró al azar (secuencia simulada), los participantes registraron la secuencia simulada en una hoja de registro. Posteriormente se pidió a los participantes lanzar una moneda 20 veces y escribir los resultados en la misma hoja (secuencia real). Al final de la sesión, con el fin de hacer frente a sus conceptos erróneos, se les proporcionaron los datos recogidos de toda la clase y se les pidió que hicieran un informe anotando las diferencias observadas en los datos; en estos datos figuraron seis variables estadísticas: número de águilas, número de carreras y la longitud de la racha más larga para cada una de las secuencias real y simulada.

Los trabajos recolectados presentaban ideas erróneas sobre la aleatoriedad, por lo que se clasificaron en distintos grupos de acuerdo a la perspectiva observada:

a) *La aleatoriedad como impredecible*: En las respuestas se asumió que no se pudo llegar a una conclusión acerca de las diferencias en la distribución del número de carreras, el número de águilas o racha más larga, porque cualquier cosa podría suceder en un proceso aleatorio.

b) *La aleatoriedad como equiprobabilidad* (en el enfoque clásico de este concepto): estos profesores sólo vieron un evento aleatorio si había la misma probabilidad en este evento y cualquier otro posible evento en el experimento.
c) *La aleatoriedad como falta de modelo o patrón*: Indica que una secuencia era aleatoria cada vez que no era posible conseguir un algoritmo que produjera la secuencia.
d) *La aleatoriedad como algo que no puede ser controlado* (aleatoriedad como falta de control).
e) *La ilusión de control*: Algunos participantes creían que podían predecir el resultado de los experimentos aleatorios.
f) *La aleatoriedad como la falta de orden*.

El análisis anterior sugiere que los profesores presentan diferentes conceptos erróneos de aleatoriedad que podían transmitir a sus futuros alumnos, también muestran la utilidad de trabajar con actividades similares para ayudarlos a hacer estas concepciones explícita con el fin de superar estas ideas falsas,

Batanero, Gómez, Gea y Contreras (2014) más recientemente hicieron un estudio empírico con el objetivo de analizar los resultados de una actividad relacionada con la percepción de aleatoriedad. Un cuestionario fue aplicado a un total de 157 profesores en formación de primaria, los datos se tomaron como parte de una actividad práctica en un curso de educación matemática. Los maestros debatieron sus respuestas y justificaciones a las tareas, además se organizaron actividades de simulación con el fin de enfrentar a los participantes con sus propias ideas falsas y ayudarlos a superarlas; el problema planteado se presenta en la figura 2.7.

A Clara y Luisa se les dijo que lanzaran una moneda 150 veces. Una lo hizo correctamente y la otra lo invento.

Ellas pusieron 0 para Águilas y 1 para Soles.

Clara: 01011001100101011011010001110001101101010110010001
01010011100110101100101100101100100101110110011011
01010010110010101100010011010110011101110101100011

Luisa: 10011101111010011100100111001000111011111101010101
11100000001000101001000001000110001010000000000011001
00000001111100001101010010010011111101001100011000

Pregunta 1. ¿Quién hizo trampa?

Pregunta 2. ¿Cómo puede afirmarlo?

Figura 2.7 Pregunta descrita por Batanero, Gómez, Gea y Contreras (2014)

Los argumentos más frecuentes dados por los profesores fueron los basados en la longitud de las carreras, seguido por la existencia de un patrón aparente y con menor frecuencia por las diferencias entre las frecuencias observadas y esperadas; el 59% de los futuros maestros dio argumentos para afirmar equivocadamente que Luisa hizo trampa, el 27% de ellos proporcionan razones correctas para afirmar que Clara hizo trampa y el resto de participantes fueron incapaces de decidir qué secuencia no fue al azar o proporcionar un argumento sólido

Los resultados muestran dificultades iniciales para discriminar una secuencia aleatoria y una no aleatoria; dificultades en la comprensión de la independencia y la percepción de variabilidad ligada a la aleatoriedad, las actividades de simulación ayudaron a muchos participantes a superar estos sesgos. Los futuros profesores mostraron inicialmente una mezcla de intuiciones y creencias acerca de la aleatoriedad, la cual puede interferir en su enseñanza de la probabilidad, por tal motivo se les debe ayudar para construir una sólida comprensión de la aleatoriedad, a partir de intuiciones correctas.

2.3 Variabilidad

Shaughnessy (1997) señalo que el estudio sobre la enseñanza y el aprendizaje de la variabilidad no habían sido fuertemente investigados hasta ese momento, por lo que era una excelente área de oportunidad para la investigación probabilística, como un ejemplo sobre el estudio de la variabilidad cito el problema mostrado en la figura 2.8.

¿Qué le parece que es más probable que ocurra?
A) 7 de cada 10 bebés nacidos son varones.
B) 70 de 100 bebés nacidos son varones.
C) Los dos tienen la misma probabilidad de ocurrir.

Figura 2.8 Pregunta descrita por Shaughnessy (1997)

En este problema se pueden encontrar varias creencias e interpretaciones, por ejemplo, en la predicción de las medias o proporciones, se puede usar una proporción de 50:50 de niños y niñas o la proporción de la muestra que es 0.7 para ambas opciones A y B. Por otra parte, varias de las respuestas proporcionadas a la pregunta indicaron que existe la conciencia de que las muestras más pequeñas se desvían de las expectativas, o por el contrario, que las largas deben estar más cercanas a las expectativas. Al aplicar la pregunta a 153 profesores de matemáticas en formación se observó que aunque el 60% de la muestra eligió la respuesta A, este resultado es engañoso debido a que en las preguntas de seguimiento se dieron razones incorrectas para la respuesta correcta, lo que indica que se estaba ignorando por completo la efecto del tamaño de la muestra en el problema.

Un segundo problema descrito se presenta en la figura 2.9.

Imagine que tiene un enorme frasco de M&M con muchos colores diferentes en el mismo. Se sabe que el fabricante pone 40% de M&M marrones. Si con su mano saca muestras de 20 M&M a la vez, ¿cuál sería el rango probable para el número de M&M marrones que encontró en sus muestras?

Figura 2.9 Pregunta descrita por Shaughnessy (1997)

Las respuestas proporcionadas para esta pregunta varían de 7 a 9 lunetas marrones hasta el rango de 5 a 12 lunetas marrones y se observó que nadie dijo que "obtendrá 8 marrones en toda muestra". Por lo tanto, la idea de preguntar un rango de valores posibles en una situación de muestreo, donde se conoce la proporción de la población (40% en este caso) fue muy accesible para los estudiantes, lo que puede ser un punto de partida para una mayor investigación sobre variabilidad, por ejemplo, ¿qué dirán los estudiantes si se cambiara esta pregunta a muestras de 100 M&M? y para muestras mayores sería muy fácil su simulación mediante la introducción de algún tipo de software de toma de muestras.

En conclusión, Shaughnessy (1997) recomendó investigar el pensamiento de los estudiantes acerca de los datos y el azar a partir de conjuntos de datos y tareas que promovieran las concepciones sobre variabilidad y sus diferencias, en lugar de las tareas que se centran en los centros y la igualdad.

En un estudio posterior Shaughnessy, Canada y Ciancetta (2003) investigan el pensamiento de los estudiantes sobre la variabilidad en tres tareas que involucran ensayos repetidos; se aplicó un cuestionario a 84 estudiantes de tres clases diferentes, 2 clases de 6° grado de una escuela primaria suburbana y una clase de 7° grado de una escuela secundaria urbana, las tareas aplicadas se muestran en la figura 2.10.

T1. La tarea de muestreo

Suponga que tiene un recipiente con 100 dulces en él, 60 son de color rojo y 40 son de color amarillo. Los dulces están todos mezclados en el recipiente. Usted saca un puñado de 10 dulces y cuenta el número de rojos.

Supongamos que seis de sus compañeros hicieron este experimento, cada uno de ellos sacando 10 dulces. (Después de cada extracción, los dulces se vuelven a colocar y se remezclan).

a) ¿Qué cree usted que es probable que ocurra para el número de dulces rojos que cada compañero sacaría? (Escribe los números de rojos en los espacios).

______, ______, ______, ______, ______, ______

b) ¿Por qué piensa esto?

T2. La tarea del dado. Considere un dado normal de seis caras.

Imagínese que usted lanzó un dado 60 veces. Complete la tabla de abajo para mostrar cuántas veces cada número podría obtenerse. ¿Porque piensas esto?

Número en los dados	¿Cuántas veces puede obtenerse?
1	
2	
3	
4	
5	
6	
TOTAL	60

T3. La tarea de la ruleta

Supongamos que se van a hacer 6 series de 50 giros. Escribir una lista que describa cuantos giros de la ruleta aterrizaran en la parte sombreada en cada uno de los 6 grupos de 50 giros.

_______, _______, _______, _______, _______, _______

Figura 2.10 Preguntas descritas por Shaughnessy, Canada y Ciancetta (2003)

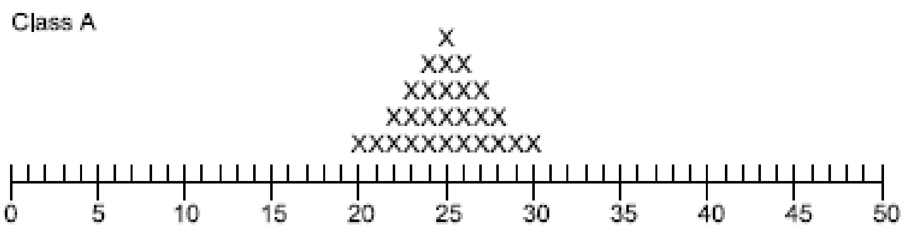
Los resultados indicaron que hubo una tendencia muy fuerte para los estudiantes de no reconocer variación en la predicción de la distribución de frecuencias para el problema de los dados, más de la mitad de los estudiantes predijeron 10,10,10,10,10,10 para la frecuencia de tirar 60 veces un dado. Por otro lado, la mayoría de los estudiantes pudo predecir listas en la tarea de muestreo y la ruleta que tenían algún tipo de variación en los resultados (91% para la toma de muestras y el 85% para la ruleta). Estos resultados fueron bastante consistentes a través de las tres clases y ambos grados.

Shaughnessy, Canada y Ciancetta (2003) conjeturaron que los estudiantes son propensos a predecir resultados constantes para los ensayos repetidos en una situación de probabilidad familiar como la tarea del dado y a descuidar la cuestión de la variabilidad en las frecuencias de los resultados individuales. Creen que tal razonamiento puede deberse en parte a la forma en que la probabilidad se enseña en las escuelas, con demasiada frecuencia se enseña a los estudiantes el cálculo de la probabilidad de eventos individuales o probabilidad de resultados particulares, sin tener en cuenta la variación de los resultados que pueden ocurrir en la repetición de pruebas reales; rara vez se da a los estudiantes la oportunidad de desarrollar su intuición para un probable rango de resultados en situaciones de pruebas repetidas, especialmente cuando hay un modelo de probabilidad conveniente como en la distribución uniforme en la tarea de los dados.

Watson, Kelly, Callingham y Shaughnessy (2003) aplicaron un cuestionario sobre temas de variabilidad con un total de 16 preguntas a alumnos de primaria y secundaria de diez escuelas públicas en Tasmania, un total de 746 estudiantes en los grados 3° (177 alumnos), 5° (183), 7° (189) y 9° (197) participaron en la aplicación del cuestionario con duración de aproximadamente 45 minutos. El objetivo del proyecto fue diseñar una encuesta que utilizara el contexto del azar y los datos, el cual reconocía de manera implícita la variación en que se encontraba.

Las preguntas fueron analizadas mediante una escala jerárquica de puntos, por ejemplo, la pregunta 5 era la siguiente:

P5. Imagine que tres clases producen gráficos donde se muestran los giros de una ruleta. En algunos casos, los resultados se hicieron sin hacer el experimento.

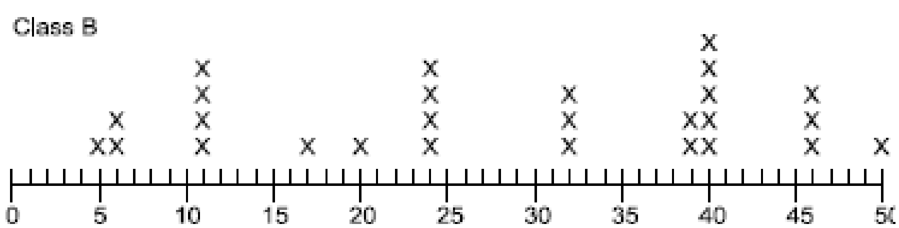


(A) ¿Cree que los resultados de la clase A son inventados o hechos a partir del experimento?

□ Inventados

□ Reales

Explicar ¿por qué cree esto?

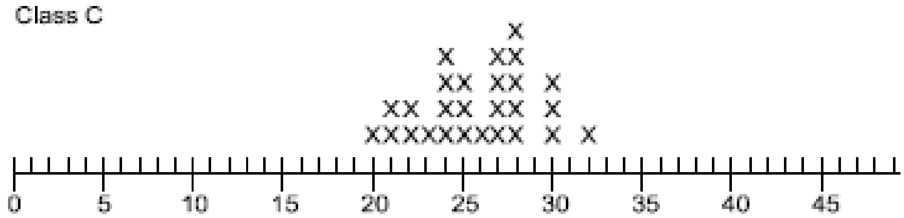


(B) ¿Cree que los resultados de la clase B son inventados o hechos a partir del experimento?

□ Inventados

□ Reales

Explicar ¿por qué cree esto?



(C) ¿Cree que los resultados de la clase C son inventados o hechos a partir del experimento?

□ Inventados

□ Reales

Explicar ¿por qué cree esto?

Figura 2.11 Pregunta descrita por Watson, Kelly, Callingham y Shaughnessy (2003)

En esta pregunta se pidió a los estudiantes determinar cuál de los tres gráficos de puntos apilados parecía provenir de datos reales y cuál parecía ser falso, el reconocimiento de un patrón estricto y una gráfica con demasiada variación fue el centro de la discusión. Dado que las respuestas debían justificarse, los que no tienen razonamiento se codificaron como 0 (14.2%), otras respuestas inapropiadas eran los que no tienen las decisiones correctas o con un razonamiento lógico; el razonamiento para la categoría parcialmente correcta, se codifico con 1 (33,2%) y el razonamiento para la categoría correcta, se asignó un 2 (52,6%).

Debido a que el cuestionario presentaba aspectos básicos de azar, variación y muestreo combinado con el análisis de gráficos y tablas; Watson, Kelly, Callingham y Shaughnessy (2003) generaron cuatro niveles de respuesta:

Nivel 1. *Prerrequisitos para la variación*: los estudiantes son propensos a usar historias o experiencias personales para justificar las respuestas, reconocen la variación sólo en un contexto sencillo; la interpretación de gráficos y tablas se limitan a las habilidades básicas de lectura y las respuestas a las preguntas sobre azar son numéricamente inapropiadas.

Nivel 2. *Reconocimiento parcial de la variación*: los estudiantes son propensos a usar declaraciones de azar incuantificadas para describir los resultados, excepto en el caso de un 50-50 de oportunidad; los patrones parecen anular la variación en la interpretación de gráficos y la terminología de interés (muestra, azar, variación) es familiar pero los estudiantes tienen dificultad para expresar los conceptos en palabras.

Nivel 3. *Aplicaciones de la variación*: se presenta una mejora en la lectura de gráficas; la atención se centra en los resultados relacionados con la variación y el muestreo; los estudiantes se centran en algunos aspectos pertinentes de los conceptos mientras que ignora o inducen un error en otros y las definiciones de los términos básicos son más estructuradas y/o combinan más aspectos, pero no alcanzan un alto nivel de sofisticación.

Nivel 4. *Aspectos críticos de variación*: se produce la consolidación de los conceptos; en cuanto a la variación, los estudiantes son propensos a resumir la información gráfica de forma estadísticamente apropiada y reconocen que los valores varían en un conjunto de datos; en los términos muestra, variación y azar son propensos a mostrar entendimientos sofisticados a menudo sin depender de ejemplos; incluyen aspectos de la incertidumbre para explicar la variación; son conscientes de la posibilidad de errores en los gráficos y proporcionan explicaciones con varios componentes integrados.

Sánchez y Trujillo (2008) realizaron una investigación donde se exploran las nociones de variabilidad estadística en situaciones de azar de estudiantes mexicanos, estos investigadores aplicaron un cuestionario de 12 preguntas a 327 estudiantes de secundaria, 215 de bachillerato y 74 universitarios; algunas de las preguntas fueron tomadas y modificadas del estudio hecho por Watson, Kelly, Callingham y Shaughnessy (2003) comentado anteriormente, a continuación se analizaran tres de ellas (figura 2.12).

6. Imagina que ahora lanzas 60 veces el dado. Llena la siguiente tabla escribiendo cuántas veces crees que saldrá cada número.

Caras del dado	Num. de veces
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Total	60

¿Por qué consideras este resultado?

10. Se tiene una urna con 3 bolas, cada una tiene una letra (A, B y C). Juan saca una bola sin ver, anota en una tabla la letra que corresponde a la bola y la regresa a la urna. Juan repite el experimento 30 veces. ¿Cuál de las siguientes tablas crees que sea la que obtuvo Juan? Marca la tabla que consideres correcta.

Letra	# de bolas
A	12
B	7
C	11
TOTAL	30

[ ] Tabla 1

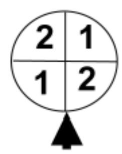
Letra	# de bolas
A	11
B	18
C	1
TOTAL	30

[ ] Tabla 2

Letra	# de bolas
A	10
B	10
C	10
TOTAL	30

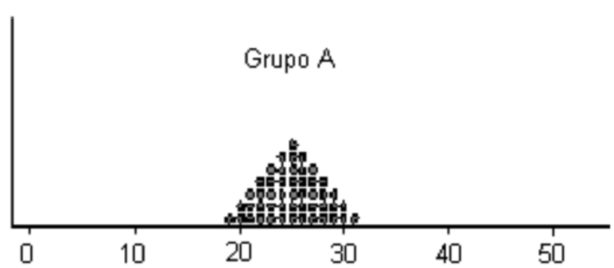
[ ] Tabla 3

11. Tres grupos A, B y C, realizaron el experimento de girar la ruleta (50 veces por alumno), cada alumno anotó el número de veces que obtuvieron un 2, reunieron los resultados de todo el grupo y los graficaron. Sin embargo, al maestro le informaron de que uno o dos de los grupos inventaron los resultados sin hacer el experimento, mientras que los otros dos o el otro sí lo hicieron y graficaron.



Observa las siguientes gráficas e indica en cada caso si se trata de una gráfica inventada o real y las razones que te llevan a dar tu respuesta.

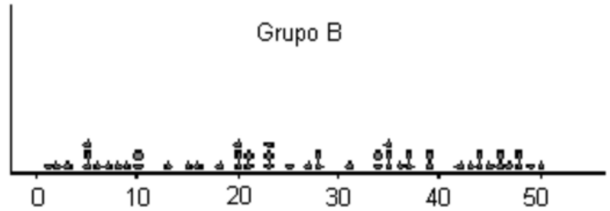
a) Grupo A



¿Los resultados del grupo A son reales o inventados?

Explica tu respuesta:

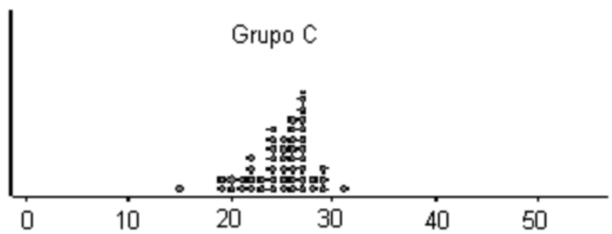
b) Grupo B



¿Los resultados del grupo B son reales o inventados?

Explica tu respuesta:

c) Grupo C:



¿Los resultados del grupo C son reales o inventados?

Explica tu respuesta.

Figura 2.12 Preguntas descritas por Sánchez y Trujillo (2008)

En el estudio se observó que los estudiantes más jóvenes son proclives a percibir principalmente la aleatoriedad en los fenómenos de azar, mientras que los mayores llevan su atención hacia la estructura y sólo algunos manifiestan un nivel relacional de pensamiento sobre la variación. En las preguntas 10 y 11 donde se daba una serie de resultados posibles fue más fácil identificar la opción que considera la variabilidad que en la pregunta 6 que se pedía predecir los resultados.

Sánchez y Trujillo (2008) concluyen que la concepción de la variación implica conocer la estructura y tener en cuenta la aleatoriedad, dispersión o irregularidad del fenómeno, así estos dos aspectos se integran proponiendo de antemano un intervalo alrededor de los valores esperados cuya longitud se determina de acuerdo a la probabilidad con la que se quiere hacer la predicción.

2.4 Independencia

Fischbein, Nello y Marino (1991) realizaron una investigación cuyo objetivo principal había sido la obtención de una mejor comprensión de los orígenes y la naturaleza de algunos obstáculos intuitivos probabilísticos. Para este propósito utilizaron dos cuestionarios (A y B) cada uno con 14 preguntas; las preguntas fueron paralelas, es decir, que abordaron el mismo tipo de problema de probabilidad, pero con diferentes contextos. En el estudio participaron 618 alumnos en seis escuelas de la región de Pisa, Italia, divididos tres grupos de análisis: 211 alumnos de primaria (grados 4 y 5), 278 alumnos de secundaria (grados 1, 2 y 3, sin instrucción previa en probabilidad) y 130 alumnos de secundaria (grados 1, 2 y 3 con instrucción previa en probabilidad).

Las preguntas 2A y 2B se expondrán a continuación y en ellas se analizó la intuición de independencia que tienen los estudiantes. En la pregunta 2A se pidió comparar si es igual o diferente la probabilidad de obtener tres veces 5, ya sea tirando un dado tres veces o tirando tres dados al mismo tiempo; en la tabla 2.4 se muestran los resultados:

	Primaria (N=102)	**Secundaria (N=139)**	**Secundaria con instrucción (N=65)**
Sin respuesta	11.8	16.6	16.9
Probabilidades son iguales	50.0	62.6	70.8
Probabilidades son diferentes	38.2	20.9	12.3
Tipo I	59.0	65.5	50.0
Tipo II	33.3	20.7	37.5

Tabla 2.4 Resultados de la pregunta 2A descrita por Fischbein, Nello y Marino (1991)

Existen dos tipos principales de respuesta cuando las probabilidades son diferentes, del tipo I: al lanzar el dado sucesivamente se tiene una mayor probabilidad de obtener el resultado esperado y el tipo II: al lanzar tres dados al mismo tiempo se tiene una mayor probabilidad de obtener el resultado esperado.

Solo la mitad de los estudiantes más jóvenes consideraron que los dos procedimientos conducían a la misma probabilidad, hubo una mejora con la edad (aproximadamente el 60% de respuestas correctas en la secundaria) y con la instrucción (alrededor del 70% de respuestas correctas cuando se recibió alguna instrucción en probabilidad). Las respuestas que afirman que las probabilidades son diferentes están distribuidos de manera desigual, alrededor de dos veces más las respuestas que afirman que al tirar un dado tres veces sucesivamente se tiene una mayor probabilidad de obtener la secuencia 5, 5, 5.

La pregunta 2B se refirió al lanzamiento de una moneda: la probabilidad de obtener tres veces águila (A, A, A) es igual o diferente, ya sea al lanzar una moneda tres veces o al lanzar tres monedas al mismo tiempo. La distribución de las respuestas es aproximadamente la misma que en la versión de dados y aquí también las respuestas de diferentes probabilidades expresan la idea de que el resultado esperado (A, A, A) tiene una mayor probabilidad al lanzar una moneda tres veces sucesivamente, estos resultados se muestran en la tabla 2.5.

	Primaria (N=109)	**Secundaria (N=139)**	**Secundaria con instrucción (N=65)**
Sin respuesta	7.4	12.2	3.1
Probabilidades son iguales	55.0	57.6	76.9
Probabilidades son diferentes	37.6	30.2	20.0
Tipo I	58.5	66.7	69.2
Tipo II	39.0	23.8	30.8

Tabla 2.5 Resultados de la pregunta 2B observados en el estudio de Fischbein, Nello y Marino (1991)

Fischbein, Nello y Marino (1991) concluyeron a partir de estos resultados que hay muchos estudiantes, incluso en secundaria, que no detectan la estructura matemática idéntica en diferentes situaciones y los estudiantes que tuvieron instrucción previa en probabilidad utilizaron de mejor manera las nociones básicas del concepto de independencia y el hecho de que cada posible resultado es equiprobable.

Truran y Truran (1999) examinaron algunas interpretaciones del concepto de independencia usando dados mediante la comparación de los resultados realizados por Fischbein, Nello y Marino en 1991. Truran y Truran realizaron cuatro estudios que replicaban la siguiente pregunta:

¿Cómo es más probable conseguir cinco en cada uno de estos tres dados, haciendo rodar un dado tres veces o haciendo rodar los tres dados juntos o son ambas opciones iguales? ¿Puede decir por qué?

Figura 2.13 Preguntas descritas por Truran y Truran (1999)

Las dos primeras repeticiones fueron realizadas por estudiantes de una escuela primaria de Australia de entre 7 y 12 años; las otras dos repeticiones fueron realizadas por un conjunto de profesores en formación de primaria de Australia con edades mayores de 19 años en 1996 y 1998. Los grupos de edad en la comparación no son idénticos, pero existe una similitud suficiente para hacer comparaciones creíbles.

Los resultados de los primeros dos grupos de estudiantes, entre 7 y 12 años, se muestran en la tabla 2.6.

	Fischbein Grado 4 y 5 N=102	Truran Grado 5 N=43	Truran Grado 5 N=135	Fischbein Grado 7, 8 y 9 N=139	Truran Grado 7 N=36	Truran Grado 7 N=98
Sin respuesta	12	0	0	16	0	0
Ambos iguales	50	6	5	63	19	16
Sucesivos	23	67	64	14	63	59
Simultáneos	13	27	29	4	13	20
Otros (inespecíficos)	2	0	2	3	0	4
Combinación	0	0	0	0	5	1

Tabla 2.6 Resultados observados en los grados 5 y 7 en la investigación de Truran y Truran (1999)

En el estudio más reciente, no se encontraron preguntas sin respuesta; el término sucesivo se refiere al lanzamiento de los tres dados por separado y el termino simultáneos a que los tres dados se lanzaron juntos. El término combinación se utiliza para referirse a la respuesta que especifica lanzar dos dados juntos y uno solo, justificando que un mejor resultado se produciría de esa manera, porque tres dados juntos eran demasiados.

Se tuvieron dos características en los resultados que fueron de interés especial: la primera es que ambos grupos de estudiantes, italianos y australianos, dan proporciones muy diferentes en sus respuestas; la segunda es que ambos utilizan el mismo razonamiento para la elección de las diferentes respuestas.

La tabla 2.7 resume los resultados de los maestros en formación y son notablemente diferentes uno del otro. Las respuestas del grupo del 96 son muy similares a los dos grupos de la escuela primaria de Australia, con casi dos tercios que optar por los lanzamientos sucesivos. La gran mayoría del grupo del 98 dio la respuesta correcta, pero con la diferencia que las respuestas incorrectas pertenecía a una nueva categoría llamada ambivalente, estas respuestas normalmente iniciaban diciendo que ambas formas de lanzamiento eran iguales y luego pasaban a elegir una respuesta diferente, que parecía ser la respuesta preferida.

	1996 N=87	**1998 N=140**
Sin respuesta	0	0
Ambos iguales	25	81
Sucesivos	57	6
Simultáneos	18	3
Ambivalentes	0	10

Tabla 2.7 Resultados observados en profesores en formación en la investigación de Truran y Truran (1999)

Truran y Truran (1999) afirman que para los niños y los adultos la comprensión de que un experimento es aleatorio es un requisito previo fundamental para el desarrollo del concepto de independencia y tal habilidad probablemente no es intuitiva pero puede ser aprendida.

Green (1991) realizo un estudio transversal que comparaba las respuestas a una serie de preguntas sobre aleatoriedad, en dichas preguntas también se analizaron cuestiones relacionadas con la independencia. En 1986 participaron 1000 alumnos de primaria de entre 7 y 11 años, en 1990 se puso localizar a 305 se estos estudiantes que se distribuían como se muestra en la tabla 2.8.

Grado	Edad (en 1990)	Hombres	Mujeres	Total
1	11-12	36	27	63
2	12-13	98	95	193
3	13-14	27	22	49
		161	**144**	**305**

Tabla 2.8 Distribución de los estudiantes en el estudio de Green (1991)

Una de las preguntas relacionada con la noción de independencia descrita en este estudio transversal se muestra en la figura 2.14.

Simular que se está lanzando una moneda 50 veces correctamente. Ponga A o S en cada recuadro.

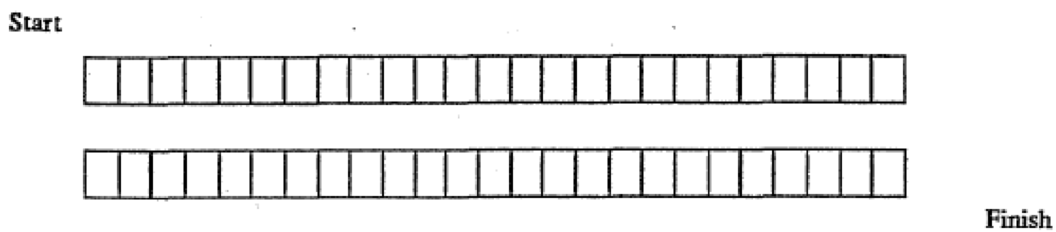


FIGURE 1
Coin tossing simulation item

Figura 2.14 Preguntas descritas por Green (1991)

Algunos alumnos fueron catalogados como extremistas y caen en dos campos, los alternadores y los replicadores Si la secuencia más larga era 1, la secuencia seria ASASA... (o SASAS...), se determinó al estudiante como alternador. Si la secuencia más larga era de 25 o más (esto se consideró como un número arbitrario ya que cualquier número por encima de 10 sería adecuado), entonces tenemos un replicador; el desglose de los extremistas se muestra en la tabla 2.9.

	Alternador		Replicador	
	1986	**1990**	**1986**	**1990**
Hombres	2	10	-	1
Mujeres	3	8	1	4

Tabla 2.9 Alumnos catalogados como extremistas, Green (1991)

Debido a que se tuvo un número relativamente pequeño de casos es prudente suponer que el aumento de la incidencia del extremismo en los cuatro años fue genuino y significativo, de 18 alternadores en 1990 sólo un alternador había en 1986.

La discusión anterior sobre los extremistas refleja la falta de independencia en las respuestas ya que el número de carreras en una secuencia es una estadística importante, acompañada de la estadística de la longitud de la secuencia más larga.

Para la muestra la duración media de la secuencia más larga estaba cerca de 4 para todos los niveles y para ambos sexos y no se encontraron cambios significativos que ocurrieran durante el período de cuatro años. La tabla 2.10 muestra los resultados para el número de carreras, para los estudiantes que no son extremistas, donde se puede observar que todos los grupos generaron demasiadas carreras.

	1986 (N=280)	**1990 (N=298)**
Hombres	29.7	29.7
Mujeres	30.5	30.8

Tabla 2.10 Numero de carreras para los estudiantes no extremistas, Green (1991)

El estudio de Green (1991) ha demostrado que en la simulación del lanzamiento de una moneda, los alumnos producen secuencias cuya primera y segunda mitad son muy parecidas y tienen carreras demasiado cortas; por lo que las respuestas son demasiado consistentes para reflejar la independencia entre los lanzamientos. Por último, se observa que en un periodo de cuatro años surgieron pocos cambios en ambos rasgos.

2.5 Enfoques de probabilidad

Stohl, Rider y Tarr (2004) realizaron un estudio donde se analizó cómo los estudiantes usan datos empíricos para hacer inferencias acerca de las probabilidades desconocidas y tomar decisiones acerca de la imparcialidad de dados; además de utilizar un micromundo para mostrar y llevar a cabo la recogida de datos y análisis simultáneo. El estudio fue realizado con 23 alumnos de sexto grado (11-12 años) de una escuela pública urbana en el sur de Estados Unidos, a los cuales se les impartió una unidad probabilidad de 12 días diseñado e impartido por Stohl y Tarr.

La tarea Schoolopoly fue la evaluación final de rendimiento en los días 10-12 y se usó el software *Probability Explorer* que permitía a los usuarios ajustar el número de ensayos, actualiza los resultados después de cada ensayo y ver los datos de simulación en la pantalla, la tarea se muestra en la figura 2.15.

Schoolopoly

Tu escuela tiene la intención de crear un juego de mesa inspirado en el clásico juego de Monopoly. El juego se llamará Schoolopoly y, al igual Monopoly, se juega con dados. Debido a que muchas copias del juego esperan ser vendidas, las empresas están compitiendo por el contrato de suministro de los dados para Schoolopoly. Algunas empresas han sido acusadas de hacer dados de baja calidad y éstos deben ser evitados ya que los jugadores deben creer que los dados que están usando son en realidad justos. Cada empresa ha proporcionado un dado muestra para su análisis y se te asignará una compañía a investigar:

Luckytown Dice Company	Dice, Dice, Baby!	Dice R'Us
Pips and Dots	High Rollers, Inc.	Slice n'Dice

Tu asignación:

Trabajando con una pareja, investigar si el dado enviado por la empresa es justo; es decir, ¿los seis resultados son igualmente probables que ocurran? Tendrás que crear un cartel para presentar a la Junta Escolar. Las siguientes tres preguntas deben ser contestadas en el cartel:

1. ¿Recomendarías que los dados sean comprados a la compañía que investigas?

2. ¿Qué evidencia tienes de que el dado sea justo o injusto?

3. Usa tus resultados experimentales para estimar la probabilidad teórica de cada resultado, 1-6 del dado que probaste.

Utiliza Probability Explorer para recopilar datos de los lanzamientos del dado. Copia los gráficos y capturas de pantalla que desees utilizar como prueba y pegarlos en un documento de Word, más tarde serás capaz de imprimir estos.

Figura 2.15 Tarea utilizada por Stohl, Rider y Tarr (2004)

La tarea Schoolopoly fomento el razonamiento de los alumnos desde una perspectiva frecuentista, a partir de datos empíricos para hacer inferencias sobre las probabilidades teóricas desconocidas, vinculando sus recursos internos (tamaño de la muestra, la independencia, la imparcialidad y la variabilidad) a los recursos externos (representaciones, tecnología, contexto de la tarea, y las negociaciones sociales). Los estudiantes que corrían un mayor número de ensayos, utilizaron múltiples representaciones, y negociaron con su pareja eran más éxito en la coordinación de estos recursos y más precisos sobre su inferencia de la equidad y la estimación de probabilidades.

Stohl, Rider y Tarr (2004) concluyen que la apropiación de los estudiantes de los recursos externos puede ayudar a hacer conexiones significativas entre sus recursos internos de la variabilidad, la independencia y tamaño de la muestra, una comprensión sólida de estos tres conceptos puede ayudar a los estudiantes a desarrollar una comprensión de una relación bidireccional entre la probabilidad empírica y teórica.

En un reporte anterior (Stohl y Tarr, 2002) se indica que los algunos estudiantes de sexto grado desarrollaron la comprensión de los conceptos fundamentales que sirven como base para el estudio de la estadística inferencial, en concreto, observaron que las tendencias en los datos de muestras suficientemente grandes pueden ser utilizadas para hacer inferencias, y pequeñas muestras a menudo conducen a conclusiones erróneas. Se sugiere que los adolescentes pueden desarrollar nociones sobre la inferencia utilizando herramientas de simulación, pueden reconocer la importancia de utilizar muestras más grandes en la elaboración de inferencias válidas y el uso de pantallas de datos para entender la conexión bidireccional entre probabilidades teóricas y empíricas.

Sánchez y Valdez (2015) investigaron los conocimientos de los estudiantes sobre los enfoques de probabilidad (clásico y frecuencial) al dar respuesta a preguntas de probabilidad. Para esto aplicaron un cuestionario a 10 estudiantes de sexto semestre de bachillerato con estudios de un semestre de probabilidad y estadística. El cuestionario contenía tres situaciones sobre urnas que se presentan en la figura 2.16.

Situación 1. El resultado de 1000 extracciones de una urna (una muestra) que contiene 4 bolas (entre blancas y negras), fue de 489 bolas blancas y 511 bolas negras:

A) ¿Cuántas bolas blancas y cuántas negras tiene la urna?

B) Si se realiza la extracción 1001, ¿qué color de bola crees que se obtendrá?

C) ¿Qué color de bola consideras que se obtuvo en la primera extracción? Justifica tus respuestas.

Situación 2. Se tienen dos urnas: La urna B contiene 6 bolas en total (entre blancas y negras) y la urna C contiene 3 bolas en total. Se hicieron 1000 extracciones al azar de cada urna. En la urna B se obtuvieron 324 bolas blancas y 676 bolas negras. En la urna C se obtuvieron 344 blancas y 656 negras.

A) ¿Cuál urna elegirías para hacer la extracción 1001, de tal forma que la bola resultante sea negra?

B) ¿Qué valor [numérico] le asignarías a que ocurra el evento "Sacar una bola negra de la urna B en la extracción 1001"?

C) ¿Qué valor [numérico] le asignarías a que ocurra el evento "Sacar una bola negra de la urna C en la extracción 1001"? Justifica tus respuestas.

Situación 3. Los resultados de sacar 10 bolas de cada urna se presentan en seguida (con los contenidos establecidos en el inciso anterior: B: 2 blancas y 4 negras; C: 1 blanca y 2 negras):

Urna B	n	b	n	n	n	n	n	n	b	n
Urna C	b	n	n	n	n	b	b	b	n	b

A) ¿Cuál urna elegirías para hacer la onceava extracción de tal forma que la bola resultante sea blanca?

B) ¿Qué valor [numérico] le asignarías a que ocurra el evento "Sacar una bola blanca de la urna B en la onceava extracción"?

C) ¿Qué valor [numérico] le asignarías a que ocurra el evento "Sacar una bola blanca de la urna C en la onceava extracción"? Justifica tus respuestas.

Figura 2.16 Situaciones utilizadas en el estudio de Sánchez y Valdez (2015)

En la tabla 2.11 se resumen las características de las respuestas a cada una de las situaciones del cuestionario, en relación con las grandes ideas de probabilidad (aleatoriedad, independencia y variabilidad), organizadas de manera jerárquica en los tres primeros niveles y el cuarto nivel describe las proposiciones normativas informales que podrían haber emergido pero que en ninguna respuesta se presentaron de manera completa.

	Nivel 1	**Nivel 2**	**Nivel 3**	**Nivel 4**
Aleatoriedad (Situación 1b)	Hace una predicción determinista	Hace una predicción determinista matizándola con lenguaje probabilístico	Reconoce que no se puede predecir el resultado con exactitud.	No se puede predecir con certeza el resultado de un sorteo pero se puede predecir que las frecuencias se estabilizan a la larga alrededor de un número (la probabilidad).
Independencia (Situación 2b)	Asigna probabilidades ignorando el modelo y considerando las frecuencias más un ensayo cuyo resultado es el evento que se quiere calcular	Asigna probabilidades con base en las frecuencia relativas e ignora el modelo	Asigna probabilidades con base en el modelo e ignora los resultados previos (muestra)	Bajo el supuesto de independencia se debe ignorar lo ocurrido y asignar las probabilidades con base en el modelo.
Variabilidad (Situaciones 1a y 3c)	Espera resultados sin variabilidad y/o en muestras pequeñas consideran las diferencias de las frecuencias a los valores esperados como significativas	Creen que las pequeñas diferencias son significativas en muestras grandes	Estima que frecuencias relativamente pequeñas no son significativas cuando la muestra es grande	La variabilidad es grande cuando la muestra es pequeña, pero es poca cuando la muestra es grande (Observan el tamaño de la muestra)

Tabla 2.11 Características de las respuestas observadas por Sánchez y Valdez (2015)

El análisis de Sánchez y Valdez (2015) revelo que la calidad de las respuestas depende de ideas informales de aleatoriedad, independencia y variabilidad, además de la manera en que se combinan para hacer predicciones. La posibilidad de hacer inferencias válidas a partir de estimaciones o juicios de probabilidad depende de la articulación de los enfoques clásico y frecuencial de probabilidad, a través de una versión informal de la ley de los grandes números.

2.6 Uso de tecnologías digitales y la simulación

Chance, Ben-Zvi, Garfield y Medina (2007) presentan una visión general del papel que las herramientas tecnológicas pueden desempeñar para ayudar a los estudiantes a entender y razonar sobre ideas estadísticas importantes. La tecnología digital ha dado lugar a numerosos cambios en la práctica estadística, muchos de los problemas que antes eran intratables analíticamente ahora tienen soluciones aproximadas y muchas suposiciones que se hacían para que los modelos estadísticos pudieran simplificarse y utilizarse ya no tienen que ser hechos; estos cambios en la práctica estadística tienen un impacto directo sobre el contenido que debe enseñarse, incluso en el material introductorio.

A medida que hay más herramientas tecnológicas disponibles es más importante centrarse en mejores maneras de utilizarlas en el aula. A continuación, los autores describen algunos ejemplos de los usos efectivos de la tecnología en las clases de estadística.

- *Automatización de cálculos.* Con la tecnología los estudiantes pueden llevar a cabo muchas tareas y cálculos en un breve periodo de tiempo, con alta precisión y pocos errores. La reducción de los tiempos en los cálculos da a los estudiantes más tiempo para centrarse en la comprensión de los conceptos.
- *Énfasis en la exploración de datos.* El uso de la tecnología amplifica la capacidad de los estudiantes para producir muchos gráficos de forma rápida y sencilla, dándoles más posibilidades para examinar múltiples gráficos y diferentes representaciones.
- *Visualización de conceptos abstractos.* La tecnología permite la visualización de los conceptos estadísticos y sus procesos, la manifestación de las ideas abstractas complejas y la provisión de múltiples ejemplos en segundos; os estudiantes son más

capaces de explorar y ver ideas estadísticas, mientras los maestros son más capaces de presentarlas a los estudiantes.

- *Simulaciones como herramienta pedagógica.* La tecnología también puede jugar un papel importante en la mejora de la capacidad de los estudiantes para estudiar los procesos aleatorios y conceptos estadísticos, dándoles un acceso fácil a la visualización y el diseño de simulaciones. Las herramientas permiten responder a la pregunta "¿qué ocurre si esto se repite un gran número de veces?" a través de la observación directa.
- *Investigación de problemas de la vida real.* La tecnología facilita la discusión de problemas y conjuntos de datos más interesantes, que puede ser más grandes y complicados; se tiene el poder de hacer que los estudiantes analicen datos reales y desordenados, dándoles una mejor idea de lo que los estadísticos hacen al realizar el proceso de recogida, análisis y conclusiones al realizar sus investigaciones.
- *Provisión de herramientas para la colaboración y la participación de los estudiantes*. Los sistemas de gestión de cursos proporcionan herramientas de comunicación (como foros de discusión o intercambio de archivos), herramientas de productividad (guías en línea o la búsqueda y revisión del progreso), herramientas de participación de los estudiantes (trabajo en grupo, autoevaluación o creación de comunidades y portafolios de estudiantes) así como herramientas de administración; estos entornos de aprendizaje se hacen para que los estudiantes colaboren con otros estudiantes y para mejorar las habilidades de escritura y comunicación necesarias para transmitir sus hallazgos.

La integración de la tecnología en el aula tiene un gran potencial para mejorar la enseñanza y el aprendizaje, convertir ese potencial en realidad puede ser una tarea compleja y multifacética. Chance, Ben-Zvi, Garfield y Medina (2007) presentan algunos de los obstáculos comunes que los maestros deben enfrentar para crear entornos de aprendizaje ricos en el uso de tecnología y los mecanismos de apoyo necesarios para superarlos.

- *La necesidad de volver a examinar los objetivos de aprendizaje de los estudiantes*. Mientras que la tecnología permite cambios en el enfoque de instrucción, estos cambios deben reflejarse en los objetivos del curso y evaluaciones de los estudiantes, para obtener un mayor impacto en el aprendizaje serán necesarias otras metas en curso.

- *La falta de conciencia saber convivir con las nuevas tecnologías*. Los maestros que han aprendido estadísticas varias décadas antes no se sienten cómodos usando las nuevas herramientas y no pueden creer en el valor de su uso; a menos que los maestros están provistos de un apoyo a largo plazo para aprender a utilizar y aplicar la tecnología, es poco probable que lo utilizan en sus clases.
- *La falta de apoyo para los maestros*. Se necesita el apoyo administrativo con el fin de proporcionar fondos para laboratorios de computación, apoyo técnico coherente y cursos de desarrollo profesional para que los maestros tengan la oportunidad de aprender nuevas tecnologías y sus usos en las aulas.
- *El tiempo requerido para la exploración*. Uno de los mayores beneficios del uso de la tecnología es la exploración de los conceptos y el análisis en grandes conjuntos de datos desordenados, pero este tipo de investigaciones puede llevar mucho tiempo. Sin embargo, se puede ahorrar tiempo mediante la eliminación de otros componentes del curso, tales como cálculos a mano y reemplazarlos con mejores preguntas o discusiones más ricas en beneficio de la comprensión más significativa por los estudiantes.
- *El hecho de que la tecnología puede fallar*. Es importante darse cuenta de que las computadoras y los sitios de internet pueden no estar disponibles, por lo cual la enseñanza con la tecnología significa tener un plan en caso de que la tecnología falle durante la clase.
- *El tiempo necesario para implementar los cambios*. Los profesores no deben esperar que la inclusión de la tecnología en el salón de clases muestre mejoras inmediatas en el logro del estudiante o ser una solución a todos los problemas de enseñanza.

Biehler, Ben-Zvi, Bakker y Makar (2012) realizaron una investigación donde se proporciona una visión actualizada de las tecnologías digitales relevantes para la educación estadística y resumen lo que se sabe sobre cómo estas pueden apoyar el desarrollo del razonamiento estadístico de los estudiantes en la escuela.

Una de las herramientas relevantes para la educación estadística que analizan es el software *Fathom Dynamic Statistics* que permite a los estudiantes explorar y analizar los datos, tanto visual como computacionalmente. Tiene un ambiente computacional basado en menús, herramientas de arrastrar-soltar y un editor de fórmulas; esto apoya la creación de nuevos atributos y procedimientos numéricos que pueden abrir nuevas posibilidades de modelado y métodos de construcción. Sus puntos fuertes están en las oportunidades que ofrece a los estudiantes para:

- arrastrar y soltar variables rápidamente en un gráfico para visualizar distribuciones y relaciones entre variables;
- a través del arrastre, visualizar cómo cambian dinámicamente los datos y parámetros, además de cómo se afectan las medidas y representaciones en tiempo real;
- enlazar múltiples representaciones de datos de manera informal para observar las tendencias estadísticas;
- crear simulaciones para investigar y probar relaciones en los datos

Biehler, Ben-Zvi, Bakker y Makar (2012) señalan que algunos tipos de razonamiento inferencial informal pueden ser apoyados con Fathom, en particular, se discute el uso de simulaciones para construir experiencias en los estudiantes con los conceptos de las distribuciones de muestreo e intervalos de confianza. Maxara y Biehler (2010) utilizaron el problema que se muestra en la figura 2.17 para ejemplificar el carácter contrario a la intuición de la relación entre el tamaño de la muestra y el nivel de confianza.

Casino: Con un cierto tipo de máquina de juego la probabilidad de ganar es 30%. En una máquina de este tipo, alrededor de 50 juegos se llevan a cabo todos los días en un casino más pequeño y alrededor de 200 juegos en un casino más grande. Si se ganara más del 40% de los juegos la máquina debe ser rellenada. ¿En qué casino es mayor la probabilidad de que en un día más del 40% de los juegos se ganen?

I. En el casino más pequeño
II. En el casino más grande
III. La probabilidad es igual

Figura 2.17 Problema del Casino (Maxara y Biehler, 2010)

Inicialmente se encontró que aproximadamente la mitad de los estudiantes tuvo dificultades con este problema, respondiendo de forma incorrecta que en el casino más grande era más probable que se ganara más de un 40% de juegos o que los dos casinos eran igualmente propensos a producir este resultado.

Una simulación construida en Fathom se puede utilizar para ilustrar los resultados en los dos casinos. La figura 2.18 muestra la simulación de los resultados de un solo día para cada casino, cada uno con una probabilidad del 30% de tener una victoria en un juego individual, aunque los estudiantes tienen generalmente la idea de que en un día determinado el número total de victorias y derrotas no será exactamente el 30%, no tienen una buena sensación de la cantidad que esta cifra varía y cuál rango de valores es razonable esperar para cada casino. Este tipo de tareas es de gran ayuda para comenzar a construir la creencia subyacente acerca de en cuál casino es más probable que se pueda producir un 40% de juegos ganados en un día determinado.

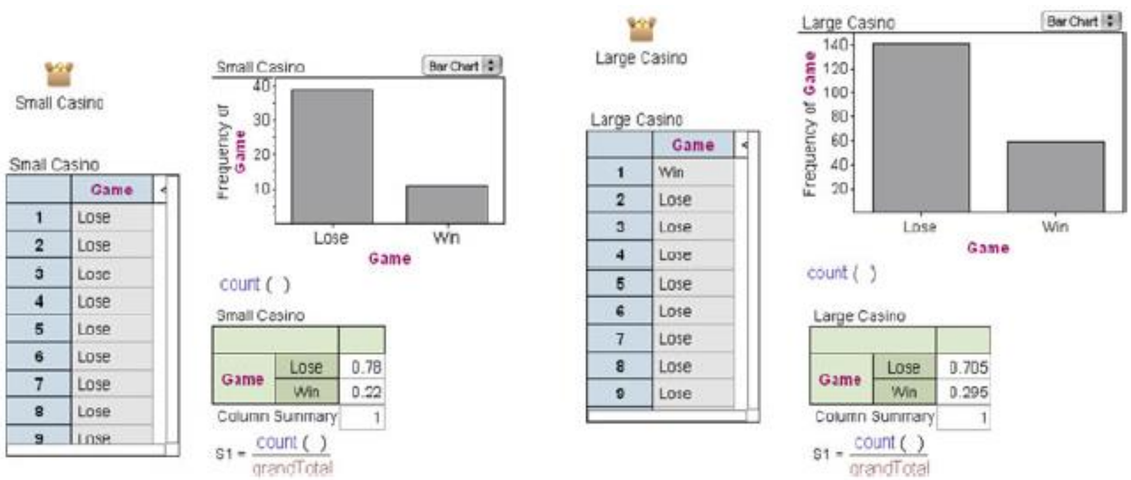


Figura 2.18 Resultado de un día de juegos en el casino pequeño (izquierda) y grande (derecha). La victoria/pérdida se representa en una tabla, gráfico de barras y tabla de resumen para cada casino (Biehler, Ben-Zvi, Bakker y Makar, 2012)

Una vez que los estudiantes desarrollaron un sentido de cómo cambian los datos día a día en cada casino, pudieron recoger estos resultados creando de una distribución de muestreo, donde cada punto representa el resultado de un solo día. En la figura 2.19, el gráfico muestra el porcentaje de victorias registradas en los casinos en más de 1.000 días, con el uso de esta distribución, los estudiantes pueden estimar la probabilidad de cuando los casinos van a generar más del 40% de victorias contando el número de días (7,6% en el casino pequeño y 0,2% en el grande). Los estudiantes pueden repetir la simulación de 1,000 días o aumentar el número de días de la muestra, por ejemplo, a 5,000 días para ver qué tan estable es y a partir de este generar una estimación de cuán probable es que el casino grande o el pequeño tenga que volver llenar sus máquinas en un día determinado.

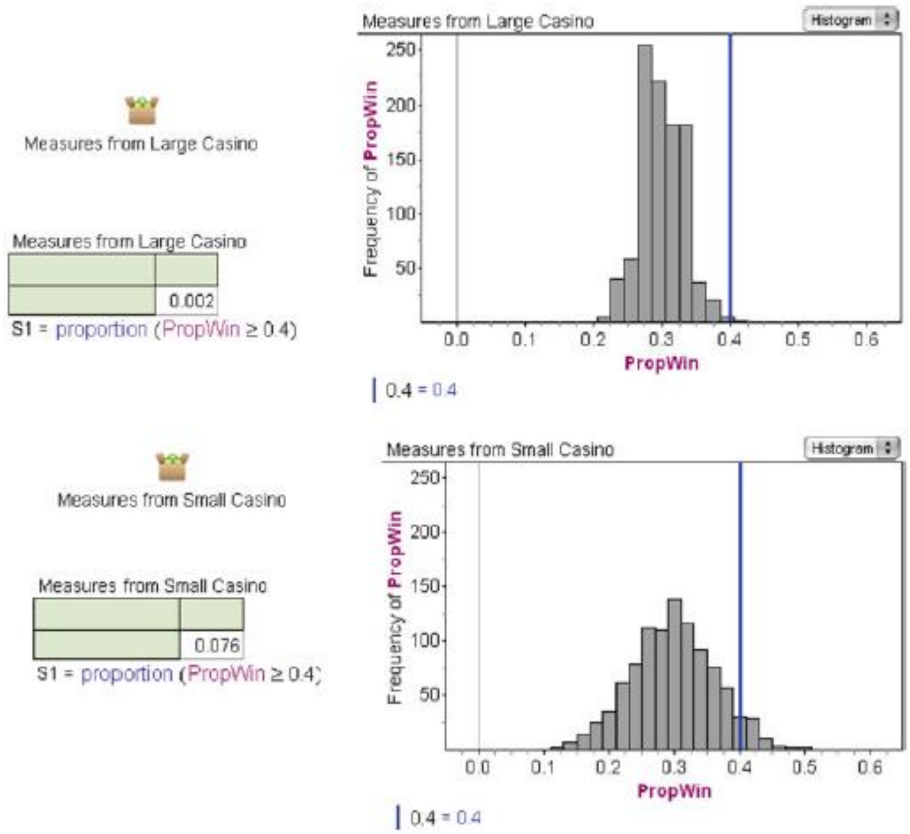


Figura 2.19 Simulación de la proporción ganada de juegos en 1,000 días. Estas proporciones están representados en un histograma y se calcula la proporción de días en que al menos el 40% de los juegos se ganen (Biehler, Ben-Zvi, Bakker y Makar, 2012)

Estas experiencias repetidas varias veces permiten que los estudiantes comiencen a desarrollar una mejor comprensión de las relaciones entre el tamaño de la muestra y la variabilidad de la muestra. A través de la generación e interpretación de estas simulaciones en diferentes contextos y en diferentes condiciones, la confusión que los estudiantes experimentan entre el tamaño de la muestra y el número de muestras extraídas, entre distribuciones de datos y distribuciones de muestreo, entre las estimaciones de intervalos y los niveles de con fianza se pueden evitar (Biehler, Ben-Zvi, Bakker y Makar, 2012).

Capítulo 3

Marco conceptual

3.1 Introducción

En este capítulo se presentan los conceptos más importantes que ayudaron a desarrollar la presente investigación. En primer lugar se abordan los distintos enfoques de probabilidad, además se presentan los componentes de la alfabetización en probabilidad y los sesgos y heurísticas más comunes que presentan los estudiantes al enfrentarse a tareas probabilísticas.

3.2 Enfoques de probabilidad

En este apartado se repasan algunas ideas sobre los cuatro enfoques de probabilidad más populares, a saber, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático. Conviene aclarar que los dos primeros enfoques son los que se suele considerar en los programas y cursos de bachillerato, por lo que en el presente estudio sólo se tendrá la oportunidad de observar respuestas de los estudiantes referentes a estos dos enfoques.

3.2.1 Enfoque clásico

Batanero, Henry y Parzysz (2005) mencionan que Laplace en 1814 publicó el libro *Essai Philosophique sur les Probabilités* donde señala que la teoría de la probabilidad consiste en la reducción de todos los eventos del mismo tipo a un cierto número de casos igualmente posibles y define como primer principio que la probabilidad es simplemente una fracción cuyo numerador es el número de casos favorables y cuyo denominador es el número de los casos posibles; esta definición de probabilidad se basa en una interpretación subjetiva, asociada con la necesidad de juzgar la equiposibilidad de diferentes resultados.

Tal definición se encontró inadecuada incluso en la época de Laplace, ya que además de ser circular y restrictiva no ofreció respuesta a la pregunta de qué es realmente la probabilidad; sólo proporcionó un método práctico de cálculo de probabilidades de algunos sucesos sencillos. Por otro lado, no puede aplicarse a los experimentos con un número infinito de posibilidades o a aquellos casos en que el espacio de muestreo es finito, pero sin que pueda garantizarse la equiprobabilidad , como en el experimento de lanzar chinchetas al suelo y observar el evento “la proporción de chinchetas que caen de cabeza”. (Batanero, 2005)

3.2.2 Enfoque frecuencial

Los estudios teóricos relativos a la predicción cualitativa de eventos futuros de observaciones regulares en ensayos repetidos de fenómenos aleatorios aparecieron hace tres siglos con Bernoulli, quien dio la primera demostración de la Ley de los Grandes Números; en términos modernos el teorema dice que cuando se repite el mismo experimento un número suficiente de veces, la probabilidad de que la distancia entre la frecuencia observada de un evento y su probabilidad p es menor que un valor dado, puede acercarse a 1 tanto como se desee; la estabilización de frecuencias para un evento después de un gran número de ensayos idénticos de un experimento aleatorio se había observado durante siglos, pero la prueba de Bernoulli refleja correctamente esta idea de un valor estabilizado y fue interpretada como una confirmación de que la probabilidad era una característica objetiva de los acontecimientos aleatorios (Batanero, Henry y Parzysz, 2005).

Algunos problemas que presenta el enfoque frecuencial son que nunca se obtiene el valor exacto de la probabilidad, sino sólo una estimación; a veces es imposible realizar los experimentos exactamente en las mismas condiciones y también es difícil saber con certeza cuál es el número de experimentos que se deben realizar para aceptar la estimación de la probabilidad como buena; ciertos sucesos aunque aleatorios, son irrepetibles y, de acuerdo con esta concepción, no podríamos aplicar la teoría de la probabilidad para su estudio (Batanero, 2005).

3.2.3 Enfoque subjetivo

Batanero, Henry y Parzysz (2005) afirman que dado que la probabilidad es un concepto teórico, su valor estimado depende de numerosos factores tales como el conocimiento del observador, las condiciones de observación o de los datos que se recogen; por lo que no se puede decir que la probabilidad existe en la realidad, sin confundir esa realidad con el modelo teórico que la describe.

A través de la regla de Bayes se crea el enfoque subjetivo, ya que permite transformar las probabilidades a priori de varias causas, una vez observadas sus consecuencias, a probabilidades a posteriori, que incorporan la información de los datos analizados; por este motivo la probabilidad de un suceso siempre está condicionada por un cierto sistema de conocimientos y puede ser diferente para distintas personas, así una de sus dificultades es hallar una regla para asignar valores numéricos a las probabilidades, de forma que expresaran los grados de creencia personal (Batanero,2005).

3.2.4 Enfoque axiomático

A lo largo del siglo XX, diferentes autores contribuyeron al desarrollo de una teoría matemática formalizada sobre la probabilidad. Borel contempló la probabilidad como un tipo especial de medida, mientras que Kolmogorov usó esta idea, aplicando la teoría de conjuntos y de la medida, para deducir una axiomática que han aceptado todas las escuelas, independientemente del significado filosófico otorgado a la naturaleza de la probabilidad (Batanero, 2005).

La probabilidad es por lo tanto un objeto matemático y los modelos probabilísticos se pueden construir para describir, simplificar e interpretar la realidad de la aleatoriedad; además la teoría probabilística ha demostrado su eficiencia en diferentes aplicaciones, pero los modelos derivados plantean hipótesis heurísticas y teóricas que necesitan ser evaluadas empíricamente (Batanero, Henry y Parzysz, 2005).

3.3 La alfabetización en probabilidad

Iddo Gal (2005) propone como componentes básicos de la alfabetización en probabilidad cinco clases principales de conocimiento y algunas disposiciones, dichos elementos se muestran en la tabla 4.1.

Elementos de conocimiento
1. Grandes ideas: Variación, aleatoriedad, independencia, predicción/incertidumbre. 2. Cálculo de probabilidades: Maneras de encontrar o estimar la probabilidad de eventos. 3. Lenguaje: Términos y métodos utilizados para comunicar sobre el azar.

4. Contexto: La comprensión del papel y las implicaciones de los problemas probabilísticos y los mensajes en varios contextos y en el discurso público y personal.
5. Preguntas críticas: Temas para reflexionar cuando se trata con probabilidades.

Elementos disposicionales

1. Postura crítica.
2. Creencias y actitudes.
3. Sentimientos personales con respecto a la incertidumbre y el riesgo (por ejemplo, la aversión al riesgo).

Tabla 4.1 Componentes básicos de la alfabetización en probabilidad

El autor hace varias anotaciones sobre el modelo: en primer lugar, aunque los elementos se enumeran por separado para facilitar la presentación, durante el aprendizaje o comportamiento real todos los elementos interactúan entre sí de manera compleja; esto indica que para desarrollar la alfabetización en probabilidad no sería suficiente la enseñanza de uno o dos de estos elementos. En segundo lugar, las disposiciones presentan, en el mundo real o en el aula, la forma en que las personas piensan sobre la información probabilística o cómo actúan en situaciones de azar e incertidumbre. En tercer lugar, los elementos de conocimiento no pueden ser definidos en términos absolutos por lo que se describen a grandes rasgos debido a su construcción dinámica y relativa.

3.3.1 Grandes ideas

Gal (2005) señala que los estudiantes deben comprender intuitivamente la naturaleza abstracta de estas grandes ideas, debido a que solo algunos de sus aspectos pueden ser representados por símbolos matemáticos o términos estadísticos; a continuación se presenta el punto de vista que tiene sobre cada una de estas grandes ideas:

- La *aleatoriedad* ha sido debatida por varios estadísticos al ser una noción "resbaladiza" y se puede ver de dos maneras diferentes. Una como una propiedad de un resultado, por ejemplo, si el arreglo de águilas y soles después de diez lanzamientos de moneda se ve desordenado o al azar. La otra, como el proceso por el cual un arreglo se produjo; en este caso, un arreglo ordenado podría ser aleatorio, por ejemplo, al obtener solo águilas en diez lanzamientos.

- La *independencia* implica que los eventos son inconexos y que un evento no puede ser predicho a partir de otro. Más precisamente, si la probabilidad de un evento no se ve modificada por la ocurrencia (pasada, simultánea o futura) de otro evento, entonces los eventos son independientes.
- La *variación* es una medida que da cuenta del cambio y las diferencias que suelen estar asociados a los fenómenos y, por tanto, también a los datos provenientes de esos fenómenos. En una secuencia de experiencias aleatorias son importantes las diferencias entre las frecuencias relativas de un evento y su probabilidad, la descripción o medida de dichas diferencias es un tipo de variación. .
- La *predicción* y la *incertidumbre* son términos aparentemente incompatibles, pues una significa "decir lo que va a ocurrir" y la otra "falta de certeza"; sin embargo, una predicción probabilística sólo afirma que algo va a ocurrir con cierta probabilidad. En este sentido, la idea se relacionan con el estado que cada persona tiene sobre el conocimiento en general acerca de un evento determinado y la probabilidad con la que cree que va a ocurrir, por ejemplo, qué tanto cree que lloverá en la noche o que se ganará la lotería. Se puede ser capaz de describir la probabilidad de un evento, por ejemplo, 10% de probabilidad o 1 en 1000; pero esto no es lo mismo que la predicción de un evento o sobre la certeza en cuanto a su ocurrencia. La predicción de un evento depende sobre los supuestos y los procesos que afectan a la ocurrencia de ese evento y la calidad de la información que se usa para apoyar esas estimaciones de probabilidad.

Por último se señala que la aleatoriedad, la independencia, la variación y la relación predicción/incertidumbre tienen una contraparte la regularidad, la co-ocurrencia, la estabilidad y la relación riesgo/confianza respectivamente, las cuales no suelen ser discutidas en la enseñanza.

3.3.2 Cálculo de probabilidades

La visión clásica de probabilidad en los libros de texto a menudo tiene prioridad; se usa para establecer la familiaridad con sus representaciones básicas en la escala 0-1 o con los cálculos combinatorios como la intersección de eventos, por ejemplo, la probabilidad de obtener 6 y 6 al tirar dos dados. Los maestros pueden justificar el énfasis en los aspectos formales de los enfoques clásicos o frecuentistas ya que sientan las bases para temas más avanzados, como las distribuciones de muestreo o el comportamiento de sistemas físicos y químicos. Pero fuera de las ciencias, las probabilidades no son calculadas en forma sencilla y directa, además que no se ajustan correctamente a solo uno de los tres enfoques de probabilidad; por lo general, se utiliza la información de múltiples fuentes, incluyendo información no probabilística y se integra a través de un proceso de juicio muy complejo (Gal, 2005).

Por las razones anteriores Gal sugiere que como mínimo se espera que las personas sepan que hay diferentes maneras de llegar a estimaciones probabilísticas y también que las estimaciones son a menudo el resultado de la integración de la información de múltiples fuentes; además deben estar familiarizados con la noción de evidencia, información cualitativa y cuantitativa, y comprender que la evidencia viene en diferentes niveles de calidad la cual puede ser evaluada y juzgada; por último, se espera que las personas deben darse cuenta que las declaraciones de probabilidad están acompañadas por declaraciones de certeza, las cuales describen el nivel de confianza que tiene en una estimación probabilística.

3.3.3 Lenguaje

Para Gal (2005) el lenguaje está dividido en dos áreas: la primera, la familiaridad con términos y frases relacionadas con construcciones abstractas pertinentes; la segunda, con las diversas formas de representar y hablar sobre las probabilidades de eventos reales.

- *Construcciones abstractas*. Los términos descritos como grandes ideas a menudo no tienen definiciones nítidas que se puedan explicar con un lenguaje sencillo o por medio de referencias a objetos tangibles, por lo que llegar a un significado no trivial solo se logra después de un proceso acumulativo. Las palabras que describen estos conceptos abstractos abundan y se utilizan en una gran variedad de formas, por ejemplo, se puede utilizar la palabra “aleatoriedad” con un significado técnico específico: “Se elige una muestra aleatoria”, pero también se utiliza de manera informal en los medios de comunicación: “La violencia aleatoria continua en las calles”.

- *Probabilidades reales*. La probabilidad de eventos se puede representar por múltiples sistemas, por ejemplo, como una escala de 0-1, como fracciones, porcentajes o proporciones, así como también gráficamente; por lo que una expectativa básica es que los estudiantes entiendan las diferentes representaciones y se sientan cómodos moviéndose entre ellas. Sin embargo, las representaciones cuantitativas son insuficientes, ya que las probabilidades pueden comunicarse a través de frases verbales y declaraciones de certeza; las personas tienden a usar este tipo de frases cuando no están seguras de sus estimaciones de probabilidad debido a que sus fuentes de información son inestables o por que integran de forma subjetiva varias piezas de información contradictoria.

3.3.4 Contexto

Los conocimientos relativos al contexto son necesarios desde un punto de vista funcional y educativo; la comprensión de que el azar y la aleatoriedad afectan a los procesos y acontecimientos del mundo real en diferente grado permite a las personas prever ciertos eventos como más predecibles que otros; además es necesario que las personas y organizaciones hagan declaraciones acerca de la probabilidad de eventos y el nivel de certeza detrás de tales declaraciones. Entender el contexto es educativamente importante ya que ayuda a explicar por qué hay una necesidad de aprender acerca de la probabilidad o incertidumbre en distintas circunstancias de la vida (Gal, 2005).

Adicionalmente Gal enumera diez áreas clave para ilustrar la ocurrencia y la importancia de la aleatoriedad, la variación, la probabilidad y el riesgo, esta lista se presenta en la tabla 4.2.

1. Mundo natural y físico (por ejemplo, el tiempo, la evolución)
2. Procesos tecnológicos (por ejemplo, control de calidad, manufactura)
3. Comportamiento humano (por ejemplo, servicios, deportes, conducción)
4. Medicina, salud pública (por ejemplo, trastornos genéticos, los riesgos relacionados con el tabaquismo)
5. Justicia y crimen (por ejemplo, concordancia de huellas dactilares o ADN)

6. Finanzas y negocios (por ejemplo, los mercados de inversión, seguros)
7. Investigación y estadísticas (por ejemplo, toma de muestras, inferencia estadística)
8. Política pública, previsión (por ejemplo, inmunización)
9. Juegos de azar, juegos y apuestas (por ejemplo, dados, loterías)
10. Decisiones personales (por ejemplo, uso de cinturones de seguridad, entrada a la universidad)

Tabla 4.2 Ejemplos de contexto en la alfabetización de probabilidad

3.3.5 Preguntas críticas

Este último elemento consiste en saber que preguntas hacer cuando se encuentra una declaración sobre probabilidad o certidumbre, también cuando se tiene que generar una estimación probabilística; los estudiantes no pueden tomar declaraciones probabilísticas a la ligera, sino que deben ser capaces de hacer una serie de preguntas críticas (Gal 2005). En la tabla 4.3 se resumen las áreas clave y las preguntas críticas que se pueden realizar cuando se tienen declaraciones de probabilidad en diferentes situaciones.

1. Contexto	¿Cuál es la naturaleza del tema sobre el que se está haciendo una declaración probabilística? ¿En qué medida los temas en cuestión implican la aleatoriedad, la independencia, la variación, etc.?
2. Fuente	¿Quién es la fuente del tema probabilístico (por ejemplo, una organización, una persona)? ¿Cuáles son sus calificaciones, experiencia, características y motivos?
3. Proceso	¿Cómo llegó esta fuente a la declaración que hizo? ¿Qué tipos de fuentes de información fueron utilizados (por ejemplo, un análisis "clásico"; información frecuentista; estimaciones subjetivas)? ¿Cuál es la relevancia de estos datos para el tema en cuestión? ¿Cuál es su calidad?

	Si se utilizaron múltiples fuentes, ¿cómo se integra la información o los conflictos entre las fuentes de datos?
4. Significado del mensaje	¿Cuál es el significado de la afirmación probabilística que se hace (numérica o verbal)? ¿Tiene que ser traducido o representados en otra manera para hacerse más claro? ¿Para qué exactamente hace referencia la declaración de probabilidad?
5. Interpretación reflexiva	¿Cómo debe interpretarse el mensaje? ¿Debería ser cuestionado, dado lo que se sabe sobre el contexto, la fuente, el proceso y la claridad del significado del mensaje? ¿Cómo son las estimaciones hechas respecto al propio conocimiento del mundo? ¿Es posible que las suposiciones y conocimientos podrían estar defectuosos? ¿Es posible que la probabilidad este sobre o bajo estimada por la fuente que lo generó, debido a intereses egoístas, motivos ocultos, necesitan de precaución, aversión al riesgo, etc.?

Tabla 4.3 Áreas clave de las preguntas criticas

3.4 Heurísticas y sesgos

3.4.1 Representatividad

Una persona que sigue esta heurística evalúa la probabilidad de un evento incierto o una muestra por el grado en que es: similar en sus propiedades esenciales a la población original y refleja las características más destacadas del proceso por el cual se genera; es decir, en muchas situaciones un evento A se juzga más probable que un acontecimiento B cuando A parece más representativo que B (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982).

Esta heurística conduce a varios sesgos los cuales fueron clasificados por Tversky y Kahneman (1974) como se presenta a continuación:

- *Insensibilidad a la probabilidad previa de los resultados* (o falacia de la tasa base). Una técnica frecuente que se usa es describir a una persona y después pedir que se ordenen algunos enunciados respecto a la persona del mas al menos probable, por ejemplo, si se dice que: "hay un hombre de 45 años, conservador, ambicioso y que no le interesan los temas políticos" y se pregunta qué es más probable: el hombre es abogado o es ingeniero; en la gran mayoría de los casos se responde que es ingeniero debido a que la respuesta parece más representativa al estereotipo de ingeniero (Shaughnessy, 1992).
- *Insensibilidad al tamaño de la muestra*. El efecto del tamaño de la muestra sobre la probabilidad y la variación no es un factor importante para las personas ingenuas en estadística, por ejemplo, las personas no ven la diferencia entre la posibilidad de obtener por lo menos 2 soles en 3 lanzamientos de una moneda y por lo menos 200 soles en 300 lanzamientos, no se percatan que los eventos extremos tienen una mayor probabilidad de ocurrir en muestras pequeñas que en las muestras mayores (Shaughnessy, 1992).
- *Conceptos erróneos de azar*. Las personas esperan que las secuencias de eventos generados por un proceso aleatorio representen las características esenciales de ese proceso, incluso cuando la secuencia es corta; por ejemplo, al considerar los lanzamientos de una moneda, las personas consideran que la secuencia *ASASSA* es más probable que la secuencia *AAASSS*, que no parece aleatoria, y también es más probable que la secuencia *AAAASA*, que no lo hace representar a la equidad de la moneda. Otra consecuencia de este sesgo es la *falacia del jugador*; por ejemplo, después de que en una ruleta se obtiene una racha larga de color rojo la mayoría de las personas creen erróneamente que el negro es el siguiente color en obtenerse, debido a que la obtención de negro resultaría en una secuencia más representativa que la ocurrencia de un rojo adicional.
- *Insensibilidad a la previsibilidad.* Las personas hacen predicciones numéricas cotidianamente, como la demanda de un producto o el resultado de un partido de fútbol, estas predicciones se hacen a menudo por la representatividad; por ejemplo, se da una descripción de una empresa y se le pide predecir su beneficio futuro, si la descripción de la empresa es muy favorable, un beneficio alto aparecerá más

representativo y si la descripción es mediocre, un rendimiento mediocre aparecerá más representativo; por lo tanto, si las personas predicen únicamente en términos de la descripción, sus predicciones serán insensibles a la fiabilidad de las pruebas y de la precisión esperada de la predicción.

3.4.2 Disponibilidad

En ocasiones las personas evalúan la probabilidad de un evento por la facilidad con la que las instancias u ocurrencias pueden ser llevadas a la mente; por ejemplo, una persona puede evaluar el riesgo de ataque al corazón entre las personas jóvenes recordando estos hechos entre sus conocidos. La dependencia de la disponibilidad conduce a sesgos predecibles, algunos de los cuales son descritos por Tversky y Kahneman en 1974:

- *Sesgos debido a la recuperabilidad de los casos.* Cuando la ocurrencia de un evento se juzga por la disponibilidad de sus casos, es decir, un evento cuyos casos se recuerden fácilmente parecerá más numeroso que un evento de igual frecuencia cuyas instancias son menos recordadas; por ejemplo, el impacto de ver una casa en llamas es probablemente mayor que el impacto de la lectura sobre un incendio en el periódico local; además, los sucesos recientes tienden a ser relativamente más disponibles que los sucesos anteriores.

- *Sesgos debido a la eficacia de un conjunto de búsqueda.* Supongamos que se muestran palabras (de tres letras o más) al azar de un texto en inglés, ¿es más probable que la palabra comienza con *r* o que *r* este en la tercera posición? Debido a que es mucho más fácil de buscar las palabras por su primera letra que por su tercera letra, la mayoría de las personas cree que las palabras que comienzan con una consonante determinada son más numerosas que las palabras en que la misma consonante aparece en la tercera posición, lo hacen incluso para las consonantes, como *r* o *k*, que son más frecuentes en la tercera posición que en la primera.

- *Los sesgos de imaginabilidad.* A veces se tiene que evaluar la frecuencia de un evento cuyos casos no se almacenan en la memoria pero puede ser generado de acuerdo con una regla determinada, por tal motivo se generan varios casos y se evalúa la frecuencia o probabilidad por la facilidad con que los casos pertinentes se pueden construir; sin embargo, la facilidad de la construcción de los casos no siempre refleja su frecuencia real y de este modo de la evaluación es propensa a sesgos; por ejemplo, se considera un grupo de 10 personas que forman comités de k miembros, $2 \leq k \leq 8$, ¿cuántos comités diferentes de k miembros se pueden formar? La respuesta correcta es 252 comités cuando $k=5$, pero una manera común de responder a esta pregunta es construyendo mentalmente comités de k miembros y evaluar su número por la facilidad con la que vienen a la mente, se observa que es fácil de construir cinco comités distintos de 2 miembros, mientras que es imposible generar incluso dos comités distintos de 8 miembros.

3.4.3 Ajuste y anclaje

Esta heurística describe cuando las personas hacen estimaciones partiendo de un valor inicial que se ajusta para obtener la respuesta final; el valor inicial puede ser sugerido por la propia formulación del problema o puede ser resultado de un cálculo parcial; al tener puntos de partida diferentes se producen diferentes estimaciones, las cuales están sesgadas hacia los valores iniciales, este fenómeno se le conoce como anclaje (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982).

Estos mismos autores describen el sesgo de *ajuste insuficiente* donde un estudio de estimación numérica intuitiva ilustra este efecto, dos grupos de estudiantes estiman en 5 segundos una expresión numérica, el primer grupo estima el producto *8x7x6x5x4x3x2x1* mientras el segundo grupo estima el producto *1x2x3x4x5x6x7x8*. Para responder a estas preguntas con rapidez, las personas pueden llevar a cabo algunos pasos de cálculo y estimar el producto por extrapolación o ajuste, así los resultados estimados de la primera multiplicación son más altos que en la secuencia ascendente, la primera expresión es juzgada más grande que la última; la estimación promedio para la secuencia ascendente fue de 512, mientras que la estimación media para la secuencia descendente era 2,250, mientras que la respuesta correcta es 40,320.

3.4.4 Sesgo de equiprobabilidad

Para Sánchez y Valdez (2013) el sesgo de equiprobabilidad consiste en la tendencia de los estudiantes a pensar que los resultados de un experimento aleatorio tienen la misma probabilidad; por ejemplo, si se pregunta qué evento es más probable: obtener una suma de 5 u obtener una suma de 6 al lanzar un dado dos veces, al hacer esta misma pregunta de varias maneras la respuesta en la mayoría de los casos es que ambos resultados tienen la misma probabilidad, estos autores sostienen que la causa no depende a una falta de razonamiento combinatorio, sino a la idea de que todos los resultados deben tener la misma probabilidad ya que es un experimento al azar.

3.4.5 Enfoque de resultado aislado

Konold (1991) propone que algunos errores frecuentes de los estudiantes frente a tareas de probabilidad obedecen al enfoque del resultado aislado, el cual consiste en que los estudiantes piensan que el objetivo principal de la probabilidad en situaciones de incertidumbre es predecir con éxito un resultado en un solo ensayo, esto quiere decir, que interpretan una pregunta de probabilidad como una pregunta donde se pide adivinar lo que ocurrirá en un solo experimento; por ejemplo, se informa que el pronóstico del tiempo prevé que hay un 70% de probabilidad de lluvia y se pregunta el significado de esta información, si una persona afirma que lloverá y después se le pide que suponga que finalmente no llovió, concluye entonces que el pronóstico estaba equivocado (Sánchez y Valdez, 2013). Las personas que presentan este sesgo, evalúan las probabilidades comparándolas con los valores 0%, 50% y 100%, si una probabilidad se acerca a los extremos 0% o 100%, el suceso se considerará como imposible o seguro respectivamente y sólo si se acerca al 50% se considerará verdaderamente aleatorio; los estudiantes que muestran este tipo de comportamiento, tiende a buscar explicaciones causales en lugar de aleatorias a la ocurrencia de resultados inesperados y a la variabilidad de los fenómenos aleatorios e ignoran la información de tipo frecuencial, prefiriendo basar sus juicios en consideraciones subjetivas (Serrano, Batanero, Ortíz y Cañizares, 1998).

3.5 Distribución binomial

Para García, Medina y Sánchez (2014) la distribución binomial es una de las distribuciones discretas más importantes por tres razones: da lugar a un gran número de problemas interesantes, tiene múltiples aplicaciones y se relaciona con la distribución normal. Una distribución de Bernoulli con parámetro p, sólo tiene dos posibles resultados 0 y 1 (fracaso y éxito, respectivamente), donde p es la probabilidad de éxito y $(1 - p)$ la probabilidad de fracaso. Suponga que se repite *n* veces de manera independiente una experiencia modelada por una distribución de Bernoulli: entonces si se define la variable aleatoria "número de éxitos obtenidos en las *n* repeticiones", la distribución de probabilidades de esta variable aleatoria es una binomial, con parámetros *n* y *p*. El caso más simple de una distribución binomial (diferente de la Bernoulli) se presenta cuando estos parámetros son 2 y ½ respectivamente. Esta distribución es el modelo de probabilidad de un gran número de experiencias aleatorias, en particular, la de lanzar dos monedas (o equivalentemente dos veces una moneda) y observar el número de águilas que ocurren.

Capítulo 4

Método

4.1 Introducción

En este capítulo se expone el método utilizado en la investigación, primero se describe a los participantes, posteriormente se expone cada uno de los instrumentos que se usaron para la toma de datos, continuando con el procedimiento que se siguió en cada una de las actividades realizadas y por último se describe el procedimiento de análisis de las respuestas proporcionadas por los estudiantes,

4.2 Participantes

En la presente investigación participaron 16 estudiantes de segundo semestre del Colegio de Ciencias y Humanidades plantel Vallejo (CCH-Vallejo) de la Universidad Nacional Autónoma de México, el grupo estaba conformado por siete hombres y nueve mujeres de entre 15 y 16 años de edad. La clase original constaba de 26 estudiantes, pero el número se vio reducido debido a que algunos no realizaron la mayoría de las actividades, sobre todo si no hacían la actividad 1 o la actividad 6, ya que estas son la base para la discusión de los resultados en el estudio.

4.3 Instrumentos

4.3.1 Actividad 1

Las preguntas de esta actividad provienen de investigaciones previas sobre aleatoriedad, variabilidad e independencia de diversos autores, como son: Kahneman y Tversky (1972); Konold (1989); Shaughnessy, Canada y Ciancetta (2003) y Sánchez y Trujillo (2008). Algunas preguntas fueron modificadas con el fin de adaptarlas a la temática del estudio, es decir, enfocadas al lanzamiento de monedas y a las extracciones con reemplazo de tres bolas de una urna.

La actividad 1 consta de seis preguntas divididas en dos secciones de tres preguntas cada una; la primera sección habla sobre el lanzamiento de una moneda, mientras que en la segunda se imagina una urna con tres bolas en su interior de la cual se hacen extracciones con reemplazo; para facilitar su identificación simplemente se llamaran 1a, 1b, 1c, 2a, 2b y 2c respectivamente. Esta actividad se consideró como el cuestionario diagnóstico de la investigación y sus preguntas se expondrán a continuación.

La pregunta 1a dice:

a.	Una moneda se lanza al aire cuatro veces y sale {Sol, Sol, Sol, Sol} en las cuatro ocasiones. Si se lanzara la moneda una quinta vez, ¿qué resultado crees que sea más probable Águila o Sol? Justifica tu respuesta.

En esta pregunta se investiga si los estudiantes comprenden la independencia y aleatoriedad en cada lanzamiento de la moneda. La respuesta correcta es que ningún resultado es más probable que suceda, debido a que tanto águila como sol tienen la misma probabilidad de salir; también se espera como respuesta que algunos estudiantes se inclinen por águila o por sol, si se inclinan por águila caerán en la influencia negativa de los valores recientes (recencia negativa) al suponer que como ya han caído muchos soles lo más lógico es que el siguiente lanzamiento sea águila y si se inclinan por sol estarán en la influencia positiva de los valores recientes (recencia positiva) debido a la creencia de que como han caído más soles, tal vez la moneda no sea justa y sea más probable que ocurra sol.

En la pregunta 1b se tiene:

b. ¿Cuál de las siguientes secuencias es más probable que suceda al lanzar 5 veces una moneda?, ¿cuál secuencia es la menos probable? Justifica tu respuesta.

i. {Sol, Sol, Sol, Águila, Águila}

ii. {Águila, Sol, Sol, Águila, Sol}

iii. {Águila, Sol, Águila, Águila, Águila}

iv. {Sol, Águila, Sol, Águila, Sol}

Esta pregunta investiga las nociones de aleatoriedad que tienen los estudiantes en secuencias de cinco lanzamientos de una moneda; la respuesta que se esperara obtener es que no hay secuencia más o menos probable, ya que las cuatro secuencias tienen la misma oportunidad de salir, otra respuesta que se consideraría como correcta es cuando se diga que no son las únicas secuencias que se pueden obtener debido a que hay más combinaciones de resultados al efectuar los lanzamientos.

No obstante, se esperan las respuestas que den una opción más probable y una menos probable, las cuales pueden argumentarse basándose en la heurística de representatividad al creer que las secuencias deben resultar en proporciones más o menos iguales debido a que cada cara tiene un medio de probabilidad de caer; otra respuesta que podría ocurrir es elegir la opción iv esperando que las caras salgan de forma alternada debido a que cada una tiene la misma probabilidad.

La pregunta 1c dice lo siguiente:

c. Si se lanzan 10 monedas al mismo tiempo, ¿cuántas Águilas crees que se obtengan?

i. 3, 4, 5, 6 o 7

ii. 4, 5 o 6

iii. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 o 10

iv. 5

Justifica tu respuesta.

En principio, cualquiera se los eventos indicados en cada inciso puede ocurrir. Aunque el evento más probable es iii, (es seguro que ocurra) no es informativo pues es el espacio muestral. La elección de este inciso es equivalente a la respuesta “Cualquier elemento del espacio muestra puede ocurrir”. Aunque esto es verdad, no tiene en cuenta que la distribución es binomial y que se puede aprovechar su estructura para disminuir la incertidumbre eliminando como posibles resultados a los valores más extremos. En el otro extremo, la respuesta 5 implica que se identifica que es el valor individual con mayor probabilidad (la media de la distribución), sin embargo, su probabilidad es aproximadamente ¼ ($p=0.2460$); pero es aún un valor pequeño para esperar que ocurra en una sola experiencia. En cambio, los incisos i y ii ofrecen probabilidades mayores al 50%, de donde son elegibles.

En la segunda parte de la actividad, la pregunta 2a se refiere a un problema con una urna:

Una urna contiene tres bolas marcadas con las letras A, B y C.

a. Se saca una bola aleatoriamente, se anota en una tabla la letra que corresponde a la bola y se regresa a la urna; si se repite este experimento 6 veces, ¿cuál de las siguientes listas crees que se obtenga?

    i. B, C, C, A, B, B
    ii. A, A, C, B, B, C
    iii. A, C, A, A, C, C
    iv. Cualquiera de las anteriores

   Justifica tu respuesta.

La pregunta es similar a la 1b de la primera sección de la actividad, la diferencia es que en esta pregunta explícitamente se da la opción de que cualquiera de las secuencias se puede obtener, por este motivo en esta pregunta se pretende observar el concepto de aleatoriedad que tienen los estudiantes al realizar secuencias de seis extracciones con reemplazo de una urna.

La respuesta correcta es la iv, la cual indica que se ve que cualquiera de los resultados propuestos es probable de obtener, además se considera como una respuesta correcta cuando se argumenta que hay más secuencias que pueden ocurrir debido a haber más combinaciones de resultados al extraer seis veces una pelota de la urna. Se esperaría que algunos estudiantes eligieran entre las tres opciones restantes, sobre todo elegir la opción ii debido a que es la secuencia donde se tienen dos bolas de cada tipo lo que coincide con un enfoque teórico sobre la distribución de las frecuencias, ya que cada una de las bolas tiene una probabilidad de un tercio de ser extraída en cada turno.

La pregunta 2b es la siguiente:

b. Imagina que ahora se repite el experimento 60 veces; llena la Tabla 1 escribiendo cuantas veces crees que saldrá cada bola. Justifica tu respuesta.

Bola	Número de veces
A	
B	
C	
Total	60

Tabla 1

La pregunta explora las nociones de variabilidad que tienen los estudiantes; al darles la libertad de escribir la frecuencia con que cada una de las bolas saldrá, se esperaría los tres valores fueran diferentes; aquí hay un sinfín de respuestas que se pueden tomar como correctas, como primer aspecto los valores propuestos deben de sumar 60 y deben estar cercanos a las 20 extracciones, tentativamente entre los valores 15 y 25.

Algunos estudiantes pueden contestar teniendo un enfoque teórico y considerar que cada bola será extraída 20 veces debido a que la probabilidad de cada una de estas es de un tercio y algunos otros podrán consideras que alguna de las bolas puede salir un número de veces inferior al rango propuesto como óptimo o inclusive que alguna bola no sea extraída en alguno de las 60 repeticiones del experimento, estos casos serán tomados como extremos.

La última pregunta del cuestionario es la 2c, la cual es:

c. Si se repite este experimento 30 veces ¿Cuál de las siguientes tablas crees que sea la que se obtuvo? Justifica tu respuesta.

Bola	Frecuencia
A	12
B	7
C	11
Total	30

Tabla 2 [ ]

Bola	Frecuencia
A	11
B	18
C	1
Total	30

Tabla 3 [ ]

Bola	Frecuencia
A	10
B	10
C	10
Total	30

Tabla 4 [ ]

Esta pregunta también investiga el concepto de variabilidad que tienen los estudiantes al realizar 30 extracciones de la urna, pero aquí se dan tres opciones de tablas en lugar de dejar que la respuesta sea libre. La respuesta que refleja la variabilidad es la tabla 2 ya que sus valores están cercano al valor de diez extracciones de cada bola. Se espera también que algunos estudiantes escojan las tablas restantes, si escogieran la tabla 3 estarían tendiendo a ver la variabilidad con valores extremos debido a que existe muy poca probabilidad de que la bola C solo sea extraída una vez y si alguien escoge la tabla 4 estaría tendiendo hacia un enfoque teórico al creer que cada una de las bolas saldría el mismo número de veces ya que las probabilidades de extracción son las mismas.

Las actividades 2, 3, 4 y 5 hablan sobre la independencia, la aleatoriedad y la variabilidad presente al lanzar una moneda y extraer bolas de una urna; tales actividades fueron diseñadas para hacerse de manera física y posteriormente hacerlas de manera computacional con ayuda del software de estadística Fathom; de esta manera los estudiantes entenderían qué hace el programa, primero realizando ellos mismos los experimentos y posteriormente realizarlos de una forma más fácil y extensa con ayuda de una simulación computacional.

4.3.2 Actividad 2

La actividad trata sobre el lanzamiento de monedas, es una actividad física debido a que se pide a los alumnos realizar los lanzamientos y anotar los resultados en la mayoría de los casos.

En los primeros tres puntos se dan dos secuencias de diez lanzamientos y se pide predecir el undécimo resultado, así como elegir qué moneda se escogería para que el resultado fuese sol; en los siguientes dos puntos se pide a los alumnos realizar algo parecido de forma física y decidir qué moneda escogerían para que el resultado fuese sol.

Los puntos restantes se enfocan en que los estudiantes realicen secuencias físicas de diez lanzamientos de moneda y posteriormente contar el número de soles y de águilas que hay en cada secuencia. Después se grafica la frecuencia con que sale cada valor en varios experimentos de este tipo para que al final puedan decir el número aproximado de soles y águilas que se obtendrán si realizaran de nuevo diez lanzamientos de moneda.

4.3.3 Actividad 3

La actividad está diseñada para realizarse con el apoyo de una computadora y el software de estadística Fathom, en ella se detallan las instrucciones que se deben seguir para la realización de la actividad.

La actividad 3 está dividida en dos partes; en la primera se hacen lanzamientos de moneda empezando con secuencias de diez lanzamientos, para posteriormente hacer secuencias de 100 y 1000 lanzamientos; se pide que se anote el número de águilas o soles que se obtienen en cada una de las secuencias, en muchos casos se pide predecir estos resultados para posteriormente contrastarlos con los de la simulación.

La segunda parte es sobre contar el número de águilas en una secuencia de diez lanzamientos; para esto se repiten 10 secuencias y posteriormente 100 con las cuales se crea un gráfico de frecuencias con el objetivo de que el estudiante vea la variabilidad al realizar en repetidas ocasiones la simulación de lanzar la moneda diez veces y contar el número de águilas que obtiene.

4.3.4 Actividad 4

En esta actividad se realizan experimentos físicos con una urna que contiene tres bolas marcadas con las letras A, B y C. El desarrollo de la actividad es análogo a la actividad 2, en los primeros cinco puntos se presentan secuencias de 10 extracciones con reemplazo de diferentes urnas y se pide al estudiante predecir la undécima extracción para así al finalizar escoger las urnas donde sea más probable extraer las bolas A y C. En los puntos siguientes se les proporciona una urna y se pide realizar un experimento similar para que digan qué bola podría salir en la undécima extracción.

En los puntos restantes se pide a los estudiantes realizar secuencias de diez extracciones y contar el número de bolas A, B y C que se obtienen al realizar este experimento en múltiples ocasiones, después se realiza un gráfico con las frecuencias obtenidas de cada una de las bolas y al final se pide que se diga el número esperado de veces que saldrá cada bola si se realizara el experimento una sola vez.

4.3.5 Actividad 5

Esta actividad es similar a la actividad 3 se usa una computadora y el software Fathom, con la variante que aquí se trabaja con una urna. La actividad se divide en dos partes; en la primera se trabaja con secuencias de 10 extracciones con reemplazo, para posteriormente hacer secuencias de 100 y 1000 extracciones, se pide a los estudiantes anoten todos sus resultados y después predigan el algunos de los mismos para poder contrastarlos con los que arroja la simulación.

En la segunda parte de la actividad se cuenta el número de veces que se extrae la bola A al realizar una secuencia de diez extracciones, este procedimiento se hace 10 y 100 veces para poder graficar las frecuencias con que se obtiene la bola A y así pedir a los estudiantes que digan cuantas veces puede salir dicha bola si se realizara únicamente una secuencia de diez extracciones.

4.3.6 Actividad 6

La actividad 6 consta de las mismas preguntas que la actividad 1 y es considerada el cuestionario final o post-test para evaluar los cambios las respuestas que dan los estudiantes.

4.4 Procedimientos

Las actividades fueron aplicadas por el investigador en compañía del profesor de la asignatura en el horario habitual de la clase, fueron realizadas algunas de las actividades en el salón de clases (actividad 1, 2 y 4) y algunas otras en una sala de cómputo donde se disponía del software Fathom (actividad 3, 4 y 6). Brevemente se expondrán aspectos importantes de cada sesión que se tuvo con los estudiantes:

- Sesión 1: La primera sesión con el grupo tuvo una duración de 30 minutos al final de una de sus clases regulares, en ella se aplicó la actividad 1 la cual fue respondida por los estudiantes de una forma rápida y sin ninguna complicación.
- Sesión 2: La segunda sesión tuvo una duración de 120 minutos, se señala que las actividades se tenían planeadas realizar en el orden dispuesto, pero al no tener una sala de computo disponible se optó por realizar las actividades 2 y 4 de forma

conjunta. Cada actividad se realizó en 60 minutos, explicando cada punto con detenimiento para que no hubiera dudas en lo que se pedía contestar y realizar.

- Sesión 3: La tercera sesión se realizó en 60 minutos donde se empezó a trabajar la actividad 3, debido a que los estudiantes no conocían el software Fathom la actividad se realizó de una forma más lenta con el objetivo de que entendieran el entorno y las acciones realizadas; así en esta sesión solo se hizo la primera parte de la actividad.
- Sesión 4: Esta cuarta sesión de nuevo tuvo una duración de 60 minutos, al principio se realizó un resumen de la primera parte de la actividad 3 y posteriormente se concluyó, de igual manera teniendo en cuenta que los estudiantes eran principiantes en el manejo del software.
- Sesión 5: Esta fue la última sesión de trabajo y tuvo una duración de 120 minutos; en los primeros 90 minutos se realizó la actividad 5; en esta ocasión, los estudiantes tuvieron un mejor manejo del software por lo cual se requirió un menor tiempo para realizarla y los últimos 30 minutos fueron destinados para aplicar la actividad 6.

4.5 Procedimiento de análisis

Para analizar las respuestas proporcionadas por los estudiantes se emplearon algunas técnicas utilizadas en la teoría fundamentada, específicamente la categorización de los datos.

Corbin y Strauss (1990) indican que los procedimientos de la teoría fundamentada están diseñados para desarrollar un conjunto bien integrado de conceptos que proporcionan una explicación teórica a fondo de los fenómenos en estudio y al igual que en otros enfoques cualitativos, los datos pueden provenir de diversas fuentes.

La teoría fundamentada dispone de procedimientos específicos para la recogida y análisis de datos; aunque hay flexibilidad dentro de los límites, si se amplían los límites demasiado lejos, el rigor no puede mantenerse. Algunos procedimientos y cánones descritos por Corbin y Strauss (1990) que se utilizaron para la presente investigación son los siguientes:

- *La recolección y el análisis de datos.* El análisis comienza tan pronto como se recogen los primeros datos; el análisis es necesario desde el principio, ya que se utiliza para dirigir las siguientes entrevista y observaciones. La realización de procedimientos de recogida y análisis de datos de forma sistemática y secuencial permite que el proceso de investigación capture todos los aspectos potencialmente relevantes del tema tan pronto como se perciben. Todos los conceptos introducidos en el estudio o en el proceso de investigación se consideran provisionales en un primer momento, cada concepto gana su lugar por estar presente repetidamente en entrevistas, documentos y observaciones en una u otra forma.

- *Las categorías deben ser desarrolladas y relacionadas*. Los conceptos que se refieren al mismo fenómeno se pueden agrupar para formar categorías, pero no todos los conceptos se convierten en categorías; las categorías son más altas en un nivel más abstracto que los conceptos que representan, se generan por el mismo proceso analítico de hacer comparaciones para resaltar las similitudes y diferencias que se utilizan para producir los conceptos de nivel inferior. Un concepto más abstracto debe ser desarrollado en términos de las propiedades y las dimensiones del fenómeno que representa, estas condiciones dan lugar a la misma acción/interacción que se expresa y en consecuencia que se produce. Con el tiempo, las categorías descritas pueden ser relacionados entre sí para formar una teoría.

Capítulo 5

Resultados y discusión

5.1 Introducción

Los resultados se presentan de la siguiente manera: primero se revisa la actividad 1 analizando cada una de las preguntas que la conforman, se presentan las categorías obtenidas y se dan diversos ejemplos de acuerdo a las respuestas de los estudiantes; siguiendo este mismo proceso se presenta la actividad 6, la cual se conforma por las mismas seis preguntas de la actividad 1 y para finalizar se hace la discusión de los resultados donde se presentan los avances y retrocesos en las respuestas de los estudiantes.

5.2 Actividad 1

5.2.1 Lanzamiento de monedas

5.2.1.1 Pregunta 1a

En la pregunta 1a se pidió a los estudiantes predecir el resultado del quinto lanzamiento de una moneda, conociendo que en los cuatro lanzamientos anteriores se obtuvo sol (figura 5.1).

> a. Una moneda se lanza al aire cuatro veces y sale {Sol, Sol, Sol, Sol} en las cuatro ocasiones. Si se lanzara la moneda una quinta vez, ¿qué resultado crees que sea más probable Águila o Sol? Justifica tu respuesta.

Figura 5.1 Pregunta 1a de la actividad 1.

De acuerdo a las respuestas que los estudiantes proporcionaron en la actividad, estas se agruparon en tres categorías:

- *Recencia positiva*: Los estudiantes respondieron que es más probable obtener sol en el quinto lanzamiento aun cuando se reconoce que cada cara de la moneda tiene la misma probabilidad.

- *Recencia negativa* (falacia del jugador): La respuesta en este caso fue que en el quinto lanzamiento se obtendría águila aunque se reconoce que cada cara de la moneda tiene la misma probabilidad de salir.
- *Aleatoriedad*: La respuesta expresa que no hay un resultado más probable, además se hace referencia a la equiprobabilidad de los resultados y en algunos casos a la independencia en cada lanzamiento.

De los 16 participantes en el estudio, un grupo de tres estudiantes (19%) contestó que el resultado más probable de obtenerse era sol, por tal motivo sus respuestas se encuentran en la categoría de recencia positiva al seguir la tendencia de los resultados anteriores; por ejemplo, el estudiante E2 respondió: "Yo pienso que sol, porque aunque la probabilidad sea de 50/50 ya salió 4 veces sol y podría ser más factible sol", aunque el estudiante sabe que la probabilidad de caer águila o sol en cada lanzamiento es la misma, su respuesta está influenciada por los primeros cuatro lanzamientos, por lo cual cree que es más probable que el resultado sea sol.

Sólo la respuesta de un estudiante (6%) del grupo se clasificó en la categoría de recencia negativa o falacia del jugador, el estudiante E14 señaló: "Aguila ya que es 50% igual sol pero si salio 4 veces sol lo mas probable es águila", de igual manera esta respuesta reconoce que la probabilidad de obtenerse águila o sol es la misma, pero se cree que el resultado será águila al haber tenido cuatro soles consecutivos con anterioridad, el estudiante E14 no cree que pueda haber rachas de soles de gran tamaño.

La mayoría de los estudiantes reconocen la aleatoriedad en cada lanzamiento de moneda, expresan que ningún resultado es más probable que otro, las respuestas de un grupo de 12 estudiantes (75%) están dentro de la categoría aleatoriedad, por ejemplo el estudiante E10 expresó su respuesta de la siguiente manera: "Ninguno, porque los 2 tienen la misma probabilidad y no influyen los resultados anteriores", esta respuesta expresa aleatoriedad al no dar un resultado en concreto ya que ambas caras de la moneda tienen la misma oportunidad de salir y adicionalmente contiene en la justificación la noción de independencia.

5.2.1.2 Pregunta 1b

En la pregunta 1b se pide a los estudiantes que elijan entre cuatro secuencias, cada una de cinco lanzamientos de moneda, para decir cuál de ellas es más probable y cuál es menos probable de ocurrir (figura 5.2).

b. ¿Cuál de las siguientes secuencias es más probable que suceda al lanzar 5 veces una moneda?, ¿cuál secuencia es la menos probable? Justifica tu respuesta.

   i. {Sol, Sol, Sol, Águila, Águila}
   ii. {Águila, Sol, Sol, Águila, Sol}
   iii. {Águila, Sol, Águila, Águila, Águila}
   iv. {Sol, Águila, Sol, Águila, Sol}

Figura 5.2 Pregunta 1b de la actividad 1.

Las respuestas de los estudiantes fueron clasificadas en tres categorías que se presentan a continuación:

- *Conservación de la frecuencia*: Estas respuestas están influenciadas por un aspecto de la representatividad, en la que los estudiantes ven más probable una secuencia que al formarse mantenga la frecuencia de ½, esto se logra en secuencias en las que se alterna un águila y un sol; creen menos probable que salgan rachas de dos o tres caras seguidas.
- *Desorden*: Estas respuestas están influenciadas por otro aspecto de la representatividad, la del desorden en la secuencia; los estudiantes ven más probable que en los lanzamientos se tengan rachas de dos o tres caras sin un patrón definido y ven menos probable que los lanzamientos resulten de forma alternada, es decir, un águila y un sol.
- *Aleatoriedad*: Las respuestas en esta categoría no escogen explícitamente una secuencia más o menos probable que ocurra, sino que expresan que las cuatro secuencias son igualmente probables que sucedan.

En la categoría conservación de la frecuencia se encuentran las respuestas de cuatro estudiantes (25%) los cuales piensan que es más probable que salga la secuencia {sol, águila, sol, águila, sol}; por ejemplo, el estudiante E14 expresó: "la mas probable es la iv ya que se esperaría una y una y la menos probable seria la iii porque sale mas veces águila", el argumento expresa representatividad al creer más probable una sucesión que al formarse va conservando la frecuencia relativa de ½ y menos probable a una sucesión con cuatro valores de una sola cara, en la que la frecuencia relativa de águila (o sol) se desvía de ½.

Las respuestas de cinco estudiantes (31%) se encuentran en la categoría desorden debido a que creen más probable que las secuencias no salgan de una manera ordenada, el estudiante E9 argumentó: "creo que la iv es menos probable pues no puede suceder tan en orden una secuencia al azar", este estudiante no puso cual secuencia cree que es más probable, pero su respuesta hace notar que para él las secuencias en orden no son fáciles de obtener.

Las respuestas del resto de los participantes, siete personas (44%), se encuentran en la categoría de aleatoriedad debido a que expresan que cualquiera de las cuatro secuencias se puede obtener. Como ejemplo de este grupo está la respuesta que dio el estudiante E4: "Todas tienen la misma probabilidad de que caigan, porque en c/tiro tiene un 50% de caer sol y un 50% de águila", la respuesta expresa aleatoriedad debido a que se sabe que cualquier secuencia puede salir debido a que cada tiro es independiente y cada cara de la moneda tiene la misma probabilidad.

5.2.1.3 Pregunta 1c

En la pregunta 1c se pide estimar el número de águilas que pueden obtenerse al lanzar diez veces una moneda, dando a los estudiantes varias opciones que contienen distintos rangos para escoger (figura 5.3).

c. Si se lanzan 10 monedas al mismo tiempo, ¿Cuántas Águilas crees que se obtengan?
   i. 3, 4, 5, 6 o 7
   ii. 4, 5 o 6
   iii. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 o 10
   iv. 5

   Justifica tu respuesta.

Figura 5.3 Pregunta 1c de la actividad 1.

Con base en las respuestas dadas a esta pregunta, se crearon las siguientes categorías:

- *Dogmatismo teórico*: Los estudiantes dan una respuesta teórica sobre el número de águilas, es decir, si se lanza diez veces una moneda y cada cara tiene un 50% de probabilidad de caer, responden con el valor esperado $(10 \times \frac{1}{2} = 5)$, es decir, que cinco águilas sean las que resulten.
- *Variabilidad*: Se da una respuesta que acepta la variabilidad, es decir, se sabe que el número de águilas en cada secuencia de diez lanzamientos no es fija y tiende a estar alrededor de cinco águilas.
- *Ausencia de estructura*: Las respuestas en esta categoría aceptan la impredecibilidad total del número de águilas en diez lanzamientos, por lo que creen que se puede obtener cualquier número, se cree igual de probable que caigan cinco águilas como que resulten sus valores extremos (0 o 10 águilas); esto significa que no atribuyen la estructura de campana de la distribución subyacente en la situación.

En esta pregunta un estudiante (6%) no dio respuesta alguna, por lo que no se consideró que su respuesta estuviera en alguna de las categorías anteriores. Las respuestas de 6 estudiantes (38%) fueron catalogadas en dogmatismo teórico debido a que consideraron que el número de águilas esperado debía ser cinco; por ejemplo, el estudiante E8 argumentó: "iv porque cada moneda tiene una probabilidad de ½ caiga águila y 10 monedas tienen una probabilidad de 5/10", aquí las 5 águilas esperadas se expresan en forma de cociente y se cree que en los diez lanzamientos existe una probabilidad de cinco decimos de salir águila.

Las respuestas de cuatro estudiantes (25%) se encuentran en la categoría de variabilidad debido a que no hacen referencia a un solo valor, sino a varios valores que pueden obtenerse; el estudiante E14 respondió "ii porque es 50 y 50 y lo mas lógico es la mitad o sobre ese rango", aunque el estudiante sabe que la probabilidad de que caiga cualquier cara es la misma, el observa que en la mayoría de los casos no siempre caen cinco águilas sino valores cercanos a ese número.

Por último, las respuestas de cinco estudiantes (31%) expresan una ausencia de estructura debido a que responden que pueden obtenerse desde cero a diez águilas en cada lanzamiento y no se percatan de que la mayoría de los resultados esta alrededor de cinco, el estudiante E11 justifico: “iii al lanzar las monedas no sabemos cuales vamos a obtener así nos pueden salir 3 o 10”, en esta respuesta se expresa una gran incertidumbre y cree que cualquier valor tiene la misma probabilidad de ocurrencia.

5.2.2 Urna

5.2.2.1 Pregunta 2a

En la pregunta 2a se tiene la situación de una urna con tres bolas, cada una marcada con una de las letras A, B o C. Se hacen seis extracciones con reemplazo de la urna, se les da a los alumnos tres secuencias y se pide que digan la más probable, adicionalmente se tiene una cuarta opción la cual dice que cualquiera pudo resultar (figura 5.4).

a. Se saca una bola aleatoriamente, se anota en una tabla la letra que corresponde a la bola y se regresa a la urna; si se repite este experimento 6 veces, ¿cuál de las siguientes listas crees que se obtenga?

  i. B, C, C, A, B, B
  ii. A, A, C, B, B, C
  iii. A, C, A, A, C, C
  iv. Cualquiera de las anteriores

Justifica tu respuesta.

Figura 5.4 Pregunta 2ª de la actividad 1

Las respuestas de los estudiantes fueron clasificadas en dos categorías, que se presentan a continuación:

- *Dogmatismo teórico*: Las respuestas de esta categoría están influidas por la representatividad por lo que se cree que cada bola sale en la misma proporción, es decir, se cree que si se hacen seis extracciones con reemplazo cada una de las bolas debe salir dos veces; otra manera de verlo es que al tener cada bola un tercio de probabilidad de ser extraída, al realizar seis extracciones el valor esperado es $\frac{1}{3} \times 6 = 2$, por lo que cada una debería salir dos veces.
- *Aleatoriedad*: Esta categoría se conforma de las respuestas que indican que cualquiera de las secuencias mostradas es posible de obtener y en algunos casos los

estudiantes inclusive hacen referencia a que hay muchas más combinaciones que pueden resultar al hacer seis extracciones de la urna.

Sólo la respuesta de un alumno (6%) se clasificó en dogmatismo teórico al elegir la opción ii, que contiene dos bolas de cada letra; el estudiante E14 argumentó lo siguiente: “ii porque están de manera equitativa y tienen las mismas posibilidades” este argumento hace referencia a que cada bola tiene un tercio de probabilidad de ser seleccionada por lo que se justifica que salga dos veces cada una.

La mayoría de las respuestas, un total de 15 (94%), están clasificadas en la categoría aleatoriedad debido a que en ellas se indica que las tres secuencias son igualmente probables de obtener; por ejemplo, el estudiante E12 argumentó: “iv Pues varía cada vez que la saquen, es muy incierto el orden de las bolas”, esta respuesta transmite la noción de la aleatoriedad en la secuencia debido a que cada extracción es incierta. El estudiante E1 escribió: “Ninguna por que hay muchas más combinaciones y existe la misma posibilidad de sacar tanto a, b y c”, este estudiante no seleccionó ninguna respuesta, pero expresa que existen más secuencias que pueden resultar así que sería incierto saber si salió alguna de las tres propuestas.

5.2.2.2 Pregunta 2b

En la pregunta 2b se pide a los estudiantes imaginar que se realizan 60 extracciones con reemplazo de una urna con tres bolas en su interior y deben anotar en una tabla la frecuencia con que sale cada una de las bolas (figura 5.5).

b. Imagina que ahora se repite el experimento 60 veces; llena la Tabla 1 escribiendo cuantas veces crees que saldrá cada bola. Justifica tu respuesta.

Bola	Número de veces
A	
B	
C	
Total	60

Tabla 1

Figura 5.5 Pregunta 2b de la actividad 1.

Se obtuvieron cuatro categorías de acuerdo a las respuestas proporcionadas por los estudiantes, las cuales son:

- *Sesgos circunstanciales*: En esta categoría están las respuestas que expresaban que la bola A era más fácil de ser seleccionada debido a que en la Figura 1 de la primera actividad se ilustra a la bola A por encima de las otras dos bolas (figura 5.6). También se identificó otro sesgo el cual consistió en contar los resultados propuestos en la pregunta 2a y así creer que la bola C era la que más salía en las extracciones debido a que allá es la más frecuente

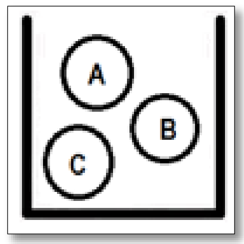


Figura 5.6 Ilustración que se presenta en la Actividad 1

- *Dogmatismo teórico*: Este grupo de respuestas expresan una creencia de que la respuesta es el valor esperado teórico de probabilidad al creer que como cada bola tiene un tercio de probabilidad de ser seleccionada entonces la distribución de las frecuencias debe ser uniforme, es decir, cada bola sería extraída 20 veces.
- *Variabilidad*: Las respuestas reflejan variabilidad entorno al valor de 20 bolas de cada letra, se tomó que un rango aceptable para que saliera cada bola era de 15 a 25 bolas de cada letra aproximadamente.

Un estudiante (6%) de un total de 16 participantes no contesto a la pregunta, por tal motivo su respuesta no fue considerada en ninguna clasificación. Cuatro estudiantes (25%) presentaron sesgos circunstanciales en su respuesta, por ejemplo el estudiante E13 contestó: “La pelota A siempre permanecerá en la parte superior pero hay una probabilidad de que salga B y C también”, este estudiante propuso que la bola A salía 30 veces y las bolas B y C salían 15 veces cada una, esto refuerza la hipótesis de que al estar la bola A arriba de las otras dos, el estudiante predijo que saldría más que las bolas B y C.

Las respuestas de ocho estudiantes (50%) fueron catalogadas en la categoría de dogmatismo teórico debido a que simplemente distribuyeron las frecuencias de las bolas de manera equitativa. Por ejemplo, el estudiante E1 justificó su respuesta así. “porque tienen la misma posibilidad de salir (simbólicamente)”, esto indica que al saber que cada bola tiene un tercio de probabilidad de ser seleccionada al hacer 60 extracciones cada una debe salir 20 veces.

Por último, las respuestas de tres estudiantes (19%) se encuentran en la categoría de variabilidad por considerar que habrá variaciones entre el número de extracciones de cada una de las bolas. Por ejemplo, el estudiante E14 puso que la bola B saldría 24 veces y las bolas A y C saldrían 18 veces cada una, argumentando lo siguiente: “Todo es al azar y pues en realidad no se puede saber”, aunque el estudiante propone dos valores iguales se consideró que identifica la variabilidad en las extracciones con un rango aceptable.

5.2.2.3 Pregunta 2c

En la pregunta 2c se pide de nuevo predecir la frecuencia con que saldrán las bolas A, B y C, pero esta vez sólo en 30 extracciones con reemplazo y se proporcionan tres posibles tablas de frecuencias para que se elija entre alguna de ellas (figura 5.7).

c. Si se repite este experimento 30 veces ¿Cuál de las siguientes tablas crees que sea la que se obtuvo? Justifica tu respuesta.

Bola	Frecuencia
A	12
B	7
C	11
Total	30

Tabla 2 [ ]

Bola	Frecuencia
A	11
B	18
C	1
Total	30

Tabla 3 [ ]

Bola	Frecuencia
A	10
B	10
C	10
Total	30

Tabla 4 [ ]

Figura 5.7 Pregunta 2c de la actividad 1.

En esta pregunta las categorías que se usaron son similares a la pregunta 2b, las cuales son:

- *Sesgo circunstancial*: Estas respuestas expresan la creencia de que la bola A saldrá más veces debido a que en la figura que ejemplifica la conformación de la urna se encuentra por encima de las bolas B y C (figura 5.6).

- *Dogmatismo teórico*: Los estudiantes responden con el valor esperado teórico y creen que debido a que cada bola tiene una probabilidad de un tercio de ser seleccionada, entonces cada bola deberá de salir en teoría diez veces.
- *Variabilidad*: Las respuestas expresan que cada bola sale un número variable de veces, en un intervalo cercano a las 10 extracciones, adicionalmente algunos estudiantes argumentaron que no se puede saber qué sucederá por lo que cualquier tabla podría ser posible de obtener.

En esta pregunta de nueva cuenta un estudiante (6%) no contestó por lo cual no se consideró en ninguna de las categorías propuestas y solo una respuesta, la proporcionada por el estudiante E7, presentó un sesgo circunstancial al justificar la pregunta como: "pues saldrá un poco más la A por ser la primera en salir así como la C & posteriormente la B", este estudiante selecciona como más probable la tabla 2 debido a que la bola A es la que se encuentra en la parte superior de la imagen.

Nueve respuestas de los estudiantes (56%) fueron catalogadas en la categoría dogmatismo teórico al tener un punto de vista basado en la idea de una frecuencia esperada teórica es decir, creen que cada una de las bolas debe salir diez veces, por ejemplo el estudiante E15 escribió: "Si hay uno de cada uno tiene un 33.3% que salga uno de esos 3 resultados", esta respuesta dice que como cada bola tiene la misma probabilidad de salir los resultados deben ser proporcionales a ese valor.

Por último, las respuestas de cinco estudiantes (31%) se encuentra en la categoría de variabilidad ya que en ellas se expresa que las frecuencias de cada una de las bolas deberían ser distintas. Por ejemplo, el estudiante E2 seleccionó la tabla 2 y justificó su respuesta de la siguiente manera: "Por que es muy poco probable que salga igual y que la c salga solo una vez", este argumento expresa que el alumno observa que rara vez las pelotas caerán de forma equitativa pero también que rara vez se obtendrá sólo una bola de un tipo en las 30 extracciones.

5.3 Actividades 2 a 5: Actividades de simulación física y computacional

Como se señaló en el capítulo anterior las actividades 2 y 4 contienen actividades de simulación física con monedas y urnas; cuando los estudiantes comenzaron a trabajar en ellas algunos expresaron que anteriormente, es decir en la escuela secundaria, ya habían realizado experimentos de este tipo; también manifestaron su desagrado al realizar un número considerable de tiros y extracciones, ya que en ambas actividades se pedía realizar las anotaciones de 100 tiros o extracciones respectivamente. A pesar de estas dos observaciones el grupo se mostró muy participativo al realizar las actividades siempre expresando las dudas que tenían sobre cada punto de la actividad.

Las actividades 3 y 5 trataron sobre simulaciones de lanzamiento de monedas y extracción de bolas de una urna usando el software estadístico Fathom. Las actividades en un principio se tenían planeadas realizarse cada una con duración de una hora, pero al ser los estudiantes novatos en el uso del software Fathom la actividad 3 se trabajó en dos clases de una hora cada una, esto con el objetivo de que las herramientas utilizadas se explicaran y comprendieran con claridad, una vez realizado esto, la actividad 5 fue realizada con una mayor facilidad por todos los estudiantes del grupo.

En estas últimas dos actividades los estudiantes mostraron un notable interés ya que muchos no sabían que se podían simular los experimentos aleatorios con ayuda de programas computacionales, también pudieron ver que era más sencillo realizar múltiples lanzamientos o extracciones de una forma más sencilla y rápida, además de que el programa permite visualizar los datos mediante el uso de tablas o graficas por lo que fue mas fácil para los estudiantes ver los cambios entre cada simulación. Este último punto es de gran importancia ya que aquí es donde se ve que los resultados en cada serie de lanzamientos de moneda o de extracciones de urna no son estáticos y que al realizar cada vez un mayor número de ensayos los resultados tienden a estabilizarse, en estas actividades es donde los alumnos pueden observar la relación entre los enfoques frecuencial y clásico de probabilidad.

5.4 Actividad 6

5.4.1 Lanzamiento de monedas

5.4.1.1 Pregunta 1a

En esta pregunta se pide a los estudiantes predecir el quinto lanzamiento de una moneda sabiendo que en los cuatro anteriores se obtuvo sol.

Debido a que las respuestas proporcionadas en la pregunta son similares a las que se dieron en la actividad 1, se usaron las mismas categorías, las cuales son: *recencia positiva* en el caso de que los estudiantes expresaron que es más probable obtener sol; *recencia negativa* cuando la respuesta denotaba que en el quinto lanzamiento se obtendría águila y *aleatoriedad* cuando se expresó que ninguna de las dos caras de la moneda es más probable o improbable que se obtenga.

El número de respuestas en cada categoría tuvo algunas variaciones: en la primera categoría, donde se presenta recencia positiva se encuentran las respuestas de un grupo de tres estudiantes (19%), por ejemplo el estudiante E8 escribió: "Sol, porque existe una gran probabilidad de que salga sol", en esta respuesta el estudiante cree que como ya han salido cuatro soles con anterioridad posiblemente esta cara tenga una probabilidad mayor de obtenerse; igual número de respuestas se situó en la categoría de recencia negativa o falacia del jugador donde el estudiante E3 expuso: "Aguila puesto que ya ha salido más veces Sol y si es 50% y 50% es lo más probable", este argumento aunque reconoce que hay igual oportunidad de que salga cualquiera de las caras de la moneda, decide que saldrá águila ya que cree que no es común salgan tantos soles seguidos.

Para finalizar diez de las respuestas proporcionadas (63%) se clasificaron en la categoría de aleatoriedad debido a que expresan que cualquier cara puede caer, el estudiante E9 justifico la pregunta de la siguiente manera: "creo que no se puede saber, porque puede que vuelva a salir sol o que esta ves salga águila", esta respuesta expresa la incertidumbre de no saber que pasara en cada lanzamiento y considera las dos caras como posible resultado.

5.4.1.2 Pregunta 1b

En esta pregunta se dan cuatro secuencias de cinco lanzamientos de moneda cada una y se pide al estudiante que seleccione cuál de ellas es más y cual es menos probable que suceda.

Se usaron las mismas categorías de la actividad 1 para clasificar las respuestas de los estudiantes: *conservación de la frecuencia* cuando los estudiantes creen que las secuencias más probables de obtenerse sean las que alternan un águila y un sol; *desorden* cuando se cree obtener más probablemente rachas de águilas y soles que no reflejan un patrón definido y *aleatoriedad* para aquellos casos en que se dice que cualquier secuencia es igualmente probable que ocurra.

Se destaca que un estudiante E2 (6%) realizó el experimento de lanzar cinco veces una moneda en tres ocasiones y su respuesta consistió en escoger la opción más parecida al resultado que obtuvo, él expreso lo siguiente: “Porque yo hice el problema 3 veces y el resultado fue más parecido al 1”; esta respuesta se considerara como una cuarta categoría llamada *experimental.*

Las respuestas de cuatro estudiantes (25%) se encuentran en la categoría conservación de la frecuencia al expresar que una secuencia ordenada y con resultados alternados es más probable, por ejemplo el estudiante E16 selecciona como la opción menos probable la iii (águila, sol, águila, águila águila) y la más probable la opción iv (sol, águila, sol, águila, sol), dando la siguiente justificación: “Ya que es más probable que varíen y salgan 1 y 1”, se observa que para este estudiante las caras de la moneda varían alternadamente.

Por otra parte, las respuestas de tres estudiantes (19%) se clasificaron en la categoría desorden, el estudiante E15 escribió: “iii la mas probable porque los resultados varian mucho por que son pocos tiros y mientras mas tiros hay mas se nivelan los resultados”, en esta respuesta se identifica que al ser pocos lanzamiento los resultados tienen gran variabilidad por lo cual no se esperaría que salieran ordenados o en proporciones idénticas. Las respuestas de ocho estudiantes (50%) fueron colocadas en la categoría de aleatoriedad. Por ejemplo, el estudiante E5 anotó: “No se sabe puede ser cualquiera”, este argumento aunque corto expresa incertidumbre en el resultado y muestra la aleatoriedad en cada secuencia de lanzamientos.

5.4.1.3 Pregunta 1c

En esta pregunta se pide predecir el número de águilas en diez lanzamientos de una moneda mostrando a los estudiantes una serie de opciones entre las cuales se puede elegir.

De nueva cuenta, se consideraron las mismas categorías de la actividad 1, las cuales se describen brevemente a continuación: *dogmatismo teórico* es cuando las respuestas dan un solo valor, en este caso cinco, influenciadas por que cada cara de la moneda tiene un medio de probabilidad de caer y al realizar diez lanzamientos se espera a que la mitad de estos sean águilas; *variabilidad* cuando los estudiantes dan un valor alrededor de cinco teniendo en cuenta que al lanzar una moneda el número de águilas varia alrededor de dicho valor y *ausencia de estructura* cuando se respondió que el número de águilas varia sobre todos los valores posibles, de tal manera que todos los resultados podrían ser águila o todos podrían ser sol.

Por último se describirá la distribución de respuestas en cada categoría: las respuestas de cuatro alumnos (25%) se encuentra en la categoría de dogmatismo teórico debido a que consideran que como cada cara tiene un medio de probabilidad de salir entonces deben salir cinco águilas, por ejemplo el estudiante E7 escribió: "5 es ½ cada cara"; mientras que un grupo de dos estudiantes (13%) fueron clasificados en la categoría de variabilidad, el estudiante E9 justifico lo siguiente: "i, porque no pueden salir todas águila", el estudiante escoge un rango amplio de valores (de 3 a 7) debido a que nota que en muy pocas ocasiones se tienen diez águilas y un razonamiento similar se pudo usar para saber que en muy pocas ocasiones se tienen cero águilas.

Finalmente, las respuestas de diez participantes (63%) se encuentra en la categoría de ausencia de estructura. Por ejemplo, la respuesta del estudiante E10 es: "iii ya que pueden salir desde 0 hasta 10 por que es un experimento aleatorio teniendo infinidad de respuestas", aquí el estudiante observa todo el rango de valores que se puede obtener al lanzar la moneda diez veces y debido a esto considera que es difícil dar un rango en el cual sea más probable obtener águila.

5.4.2 Urna

5.4.2.1 Pregunta 2a

Los estudiantes en esta pregunta deben decidir entre tres secuencias de seis extracciones con reemplazo de una urna que contiene tres bolas y decir cuál de estas secuencias es más probable que se obtenga o si todas son igualmente probables.

Se retoman las dos categorías de la actividad 1, las cuales son: *dogmatismo teórico* donde se hace uso de la representatividad ya que los estudiantes creen que las bolas en cada secuencia deben salir en la misma proporción, es decir, dos bolas de cada una deben extraerse y *aleatoriedad* para las respuestas que dicen que cualquier secuencia puede suceder e incluso señalan que puede haber más de las tres posibles combinaciones propuestas.

Adicionalmente a estas dos categorías se incluye en este caso otra:

- *Frecuencia no proporcional*: Las respuestas en esta categoría reflejan la creencia de que la secuencia obtenida es alguna en la que las bolas están en distintas proporciones, debido a que en pocas ocasiones se obtienen dos bolas de cada tipo al realizar seis extracciones.

En esta nueva categoría se encuentran las respuestas de dos estudiantes (13%) y se puede dar como ejemplo la respuesta del estudiante E8, el cual marca la opción i (B, C, C, A, B, B) y argumenta: "Existe una posibilidad de que salga más veces la bola B", su respuesta indica que alguna de las bolas puede salir más veces y con esto ya no se tendría la misma frecuencia en cada una de las bolas.

Mientras que en el dogmatismo teórico están las respuestas de cuatro estudiantes (25%), en esta categoría el estudiante E3 expreso: "ii ya que es justo tienen el 33.3% de probabilidades", este argumento se considera como teórico ya que se cree que cada bola debe salir dos veces debido a que teóricamente cada una tiene la probabilidad de salir de un tercio. Al final se tiene un grupo de diez estudiantes (63%) los cuales reconocen la aleatoriedad en los resultados, el estudiante E7 marca la opción de cualquiera de las anteriores y escribe "por que no hay orden para que al azar saque o obtenga una bola en especial: 1/3", esta respuesta refleja la incertidumbre en cada extracción y aunque se sabe que cada bola tiene la misma probabilidad de salir es incierto elegir un único resultado para obtenerse.

5.4.2.2 Pregunta 2b

En esta pregunta se pide predecir la frecuencia que cada bola tendría si se hicieran 60 extracciones con remplazo de la urna.

Para el análisis de las respuestas se utilizaron dos de las categorías de la actividad 1, las cuales son: *dogmatismo teórico* cuando las respuestas de los estudiantes son sólo las frecuencias esperadas y *variabilidad* cuando se dan respuestas sobre un intervalo cercano a la distribución teórica de cada una de las bolas, es decir, se considera un intervalo cercano a las 20 extracciones, el cual es de 15 a 25 aproximadamente.

En esta pregunta se tuvieron algunas respuestas que no podían ser consideradas en alguna de las categorías anteriores, por lo que se creó una tercera categoría:

- Ausencia de estructura: Estas respuestas expresan variabilidad en cuanto a la distribución de las frecuencias de cada bola, pero ignoran la estructura de la distribución; por lo que admiten resultados con muy poca probabilidad como equivalentes a eventos con mayor probabilidad. En consecuencia, si una respuesta proporciona valores por fuera del intervalo 15-25 se clasificó en esta categoría.

Las respuestas de tres estudiantes (19%) se encuentran dentro de esta categoría, como es el caso del participante E10 quien propone que las frecuencias se distribuyen de la siguiente manera 20 30 y 10, además justifica: "Cualquier número que entre los 3 sume 60 sería correcto por lo que las probabilidades son infinitas", aunque la justificación denota que se comprende la variabilidad de los resultados sus valores propuestos están muy lejanos del valor esperado de 20 bolas de cada una.

Las demás categorías se distribuyeron de la siguiente manera: en dogmatismo teórico se encuentra un grupo de nueve respuestas (56%), por ejemplo el estudiante E3 propuso que cada bola debía salir 20 veces y escribió: "Tienen las mismas probabilidades", esta justificación expresa la influencia de la frecuencia esperada, ya que al tener cada bola un tercio de probabilidad de ser seleccionada, en 60 extracciones cada una debería salir el mismo número de veces; mientras que cuatro estudiantes (25%) se encuentra en la categoría de variabilidad, el estudiante E4 propuso la distribución 19, 15 y 26, donde escribió: "Yo creo que seria un dato muy aproximado ya que los que puse son muy acercados a un 33.33% que es la probabilidad de c/u", si bien una de las frecuencias que propone queda fuera de los valores que se consideran como cercanos a 20, la justificación hace notar que las frecuencias deben ser cercanas a dicho número por lo cual se expresa la variabilidad de las frecuencias con que se obtienen las bolas.

5.4.2.3 Pregunta 2c

Esta pregunta es similar a la anterior, aquí presupone que se realizan 30 extracciones de la urna, dando tres posibles tablas de frecuencias y se pregunta cuál es más probable que se obtenga.

De nueva cuenta, se retoman dos categorías correspondientes a la actividad 1, las cuales son: *dogmatismo teórico,* cuando se responde con las frecuencias esperadas, en este caso se sabe que cada bola tiene un tercio de probabilidad de ser extraída por lo cual en 30 extracciones la frecuencia esperada es diez, y *variabilidad* cuando las respuestas indican que las frecuencias deben estar cercanas a las diez extracciones o cuando se diga que pueden salir más opciones además de las tres tablas propuestas.

En esta pregunta, se creó una categoría adicional la cual se describe a continuación:

- *Ausencia de estructura*: Las respuestas indican que se tiene una gran tolerancia hacia las frecuencias que cada bola puede tomar ya que puede haber el caso en que una de las bolas salga una vez, aunque en 30 extracciones esto fuera muy poco probable.

En esta última categoría se encuentran las respuestas de dos estudiantes (13%), uno de estos es E8, el cual seleccionó que las frecuencias se distribuirían como 11, 18 y 1 y agregó: “Tabla 3, porque el valor de la bola C disminuye cuando se hacen las repeticiones pocas veces”, este estudiante cree que al ser pocas extracciones podría extraerse fácilmente solo una vez la bola marcada con la letra C.

La distribución de las respuestas de las otras categorías se encuentra de la siguiente manera: un grupo de seis estudiantes (38%) se clasificaron en dogmatismo teórico; por ejemplo, el estudiante E13 propuso que cada bola debería salir 10 veces y su justificación fue: “para que todas tengan la misma oportunidad”, esto indica que se espera que al tener cada bola la misma probabilidad de extracción entonces también se esperaría que sus frecuencias fueran iguales; para finalizar en la categoría variabilidad se encuentran las respuestas de ocho estudiantes (50%), entre ellas la del estudiante E4 quien expresa lo siguiente: “Cualquiera de las anteriores pero mucho más la Tabla 4 ya que es la que más se acerca al 33.3% que se espera”, este argumento expresa que se acepta que hay un número muy grande de distribuciones posibles de las frecuencias al realizar las 30 extracciones de la urna, pero si se debiera escoger en concreto una de las opciones propuestas lo más acertado sería seleccionar la tabla que reflejara una variabilidad cercana a la frecuencia teórica de cada una de las bolas.

5.5 Discusión de los resultados

5.5.1 Lanzamiento de monedas

5.5.1.1 Pregunta 1a

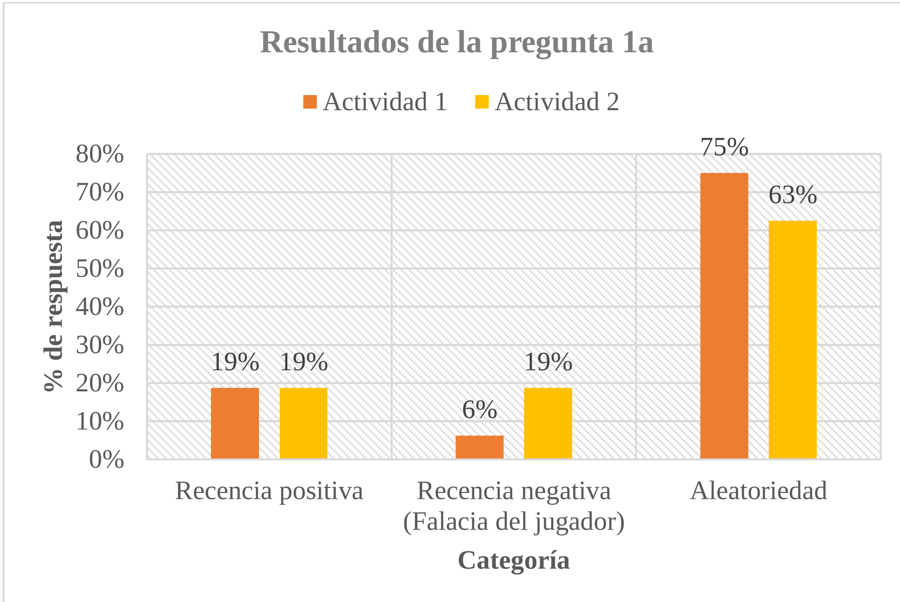
Como se ha dicho anteriormente, en esta pregunta se pide predecir el quinto lanzamiento de una moneda sabiendo que en las cuatro ocasiones anteriores el resultado fue sol. En la tabla 5.1 se muestran los resultados obtenidos en las categorías descritas de los apartados anteriores.

	Actividad 1		**Actividad 6**	
Categoría	**No. de respuestas**	**% de respuestas**	**No. de respuestas**	**% de respuestas**
Recencia positiva	3	19%	3	19%
Recencia negativa	1	6%	3	19%
Aleatoriedad	12	75%	10	63%

Tabla 5.1 Comparativo de la pregunta 1a

Se observa que en la categoría recencia negativa, donde se responde que en el quinto lanzamiento es más probable obtener sol, no hubo cambios ya que siguió manteniendo el 19% de respuestas; mientras que en la categoría recencia negativa, donde se responde que el resultado más probable es águila, hubo un aumento al pasar del 6% al 19%.

El aumento en las respuestas de la categoría recencia negativa, se vio reflejado en la disminución del número de respuestas de la categoría aleatoriedad al pasar de 75% a 63%, estas respuestas consideraban que no había ninguna cara más probable de salir; en la gráfica 5.1 se muestran los cambios descritos con anterioridad.



Gráfica 5.1 Comparativo de los resultados de la pregunta 1a

Hay algunos casos que son importantes analizar, por ejemplo, el estudiante E2 pasa de la categoría recencia positiva a recencia negativa, en la actividad 1 escribió: "Yo pienso que sol, porque aunque la probabilidad sea de 50/50 ya salió 4 veces sol y podría ser mas factible sol" y en la actividad 2 señala: "Aguila porque sigue un patrón en el cual se fija 50/50 y por ende tenemos la otra águila", se observa que este estudiante reconoce que los lados de la moneda son equiprobables y la elección de la cara que saldrá la hace pensando en los cuatro lanzamientos anteriores pero de forma al azar.

Otro estudiante E3 paso de la categoría aleatoriedad a recencia negativa, en la primera actividad puso: "1/2 porque es al azar", mientras que en la sexta actividad dijo: "Aguila puesto que ya ha salido más veces sol y si es 50 % y 50% es lo mas probable", de nueva cuenta este estudiante en ambas ocasiones señala que cada cara tiene la misma probabilidad de salir, pero en su última respuesta cae en la falacia del jugador al creer que hay una gran cantidad de soles por lo que aumenta la probabilidad de que el resultado fuera águila debido a que cree casi improbable que salgan cinco soles consecutivos. Un caso similar ocurre con el estudiante E13 el cual pasa de la categoría aleatoriedad a recencia positiva, al inicio de las actividades justifica: "Probablemente Aguila con un 50% y Sol con un 50% porque es aleatorio" y en la actividad final: "Sol porque anteriormente salió 4 y hay una probabilidad de 75%", al inicio se reconoce la equiprobabilidad en los resultados y al final se le da peso a los primeros cuatro lanzamientos y por tal motivo se cree más probable que salga sol de nuevo.

Se puede concluir que la mayoría de los estudiantes ven que en cada lanzamiento la probabilidad de que el resultado sea águila o sol es la misma, pero no todos los estudiantes expresan que no se puede saber con seguridad el resultado del quinto lanzamiento; muchos estudiantes dejan influenciar su decisión por los resultados de los primeros cuatro lanzamientos sin ver la independencia que existe entre cada uno, si caen en la recencia positiva creen que como ya cayeron cuatro soles la probabilidad de caer sol es más alta que la de águila, mientras que si caen en recencia negativa tienen la idea de que no puede haber rachas tan grandes de soles por lo que debería de resultar un águila en el quinto lanzamiento.

Aunque las actividades de simulación han influido en las respuestas de los estudiantes, tal influencia provoca una mayor tendencia a caer en el sesgo de la recencia negativa (o falacia del jugador). Esto quiere decir que algunos estudiantes que reconocían que puede ocurrir cualquier cara en un quinto ensayo cambian su opinión y ahora ven que puede ser más probable que caiga una cara diferente a la cara de los cuatro ensayos previos. La simple vista de resultado en la pantalla no es suficiente para que los estudiantes conceptualicen de manera conveniente la independencia de los ensayos.

5.5.1.2 Pregunta 1b

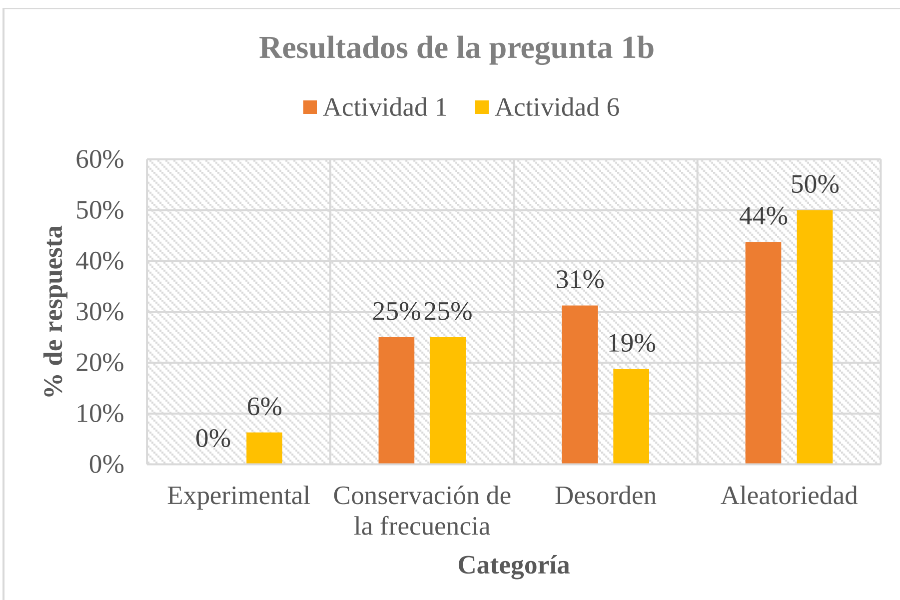
En esta pregunta se proponen cuatro posibles secuencias de cinco lanzamientos cada una y se pide decir cuál de estas es más y cuál es menos probable que suceda; en la tabla 5.2 se presentan las frecuencias observadas en cada una de las categorías.

	Actividad 1		**Actividad 6**	
Categoría	**No. de respuestas**	**% de respuestas**	**No. de respuestas**	**% de respuestas**
Experimental	0	-	1	6%
Conservación de la frecuencia	4	25%	4	25%
Desorden	5	31%	3	19%
Aleatoriedad	7	44%	8	50%

Tabla 5.2 Comparativo de los resultados de la pregunta 1b

La categoría conservación de la frecuencia, donde se cree más probable una secuencia ordenada, se mantuvo sin cambios en cuanto al porcentaje de respuestas ya que en ambas actividades presento un 25%; por otra parte, la categoría desorden, la cual considera que las secuencias más probables son las que tienen de dos o tres caras seguidas, disminuyó su porcentaje de respuesta al pasar de 31% a 19%.

También la categoría aleatoriedad, donde se expresa que las cuatro secuencias pueden salir por lo que no hay unas más o menos probable, tuvo un leve aumento en el porcentaje de respuesta al pasar de 44% a 50%; como se señaló en apartados anteriores en la actividad 6 un estudiante realizó el experimento, algo que no se esperaría en dicho punto ya que las actividades van encaminadas para evitar este tipo de acciones, en la gráfica 5.2 se presentan los resultados discutidos anteriormente.



Gráfica 5.2 Comparativo de los resultados de la actividad 1b

Algunos casos de interés son los siguientes: el estudiante E1 después de realizar las actividades expresa duda en sus respuestas, mientras en la actividad 1 expuso: “Todas son igual de probables ya que hay la misma probabilidad de que caiga águila o sol”, su respuesta en la actividad 6 fue: “Todas tienen la misma probabilidad de salir, pero creo que la 3 es un poco mas probable”, si bien su respuesta sigue diciendo que todas pueden salir tiene una tendencia por una secuencia (águila, sol, águila, águila, águila) la cual lo ubicaría en la preferencia de las secuencias que se clasifican en la categoría desorden.

Una respuesta similar a la anterior la ofrece el estudiante E7, en la primera actividad justificó lo siguiente: "creo que la iv es la menos probable pues no puede suceder tan en orden una secuencia al azar" y en la actividad 6 argumentó: "la 3 pues normalmente sale águila realmente cualquiera, pues es al azar no tiene orden", en ambas actividades se tiene una tendencia a preferir a las secuencias que no guardan un orden determinado, aunque al final reconoce, aunque con cierta duda, que cualquiera de las secuencias puede salir.

Otro caso es cuando se pasa de la categoría conservación de la frecuencia a desorden o viceversa; un ejemplo de un cambio así lo realiza el estudiante E15, el cual en la primera actividad escribió: "iv porque es muy poco probable que salga 3 veces seguidas el mismo resultado" y en la sexta actividad puso: "iii La más probable porque los resultados varían mucho porque son pocos tiros y mientras más tiros más se nivelan los resultados", en su primer respuesta expresa una clara preferencia por el orden en las secuencias (sol, águila, sol, águila, sol) y esta cambia completamente al final ya que prefiere una secuencia que varía mucho al contener cuatro águilas como resultado.

En el 50% de las respuestas a esta pregunta se reconoce la aleatoriedad de los resultados de lanzamientos de una moneda, como también en las secuencias que generan. Es muy común, sin embargo, que duden sobre si es igualmente probable que cualquiera de las secuencias se pueda obtener. Por otro lado, los estudiantes piensan que al tener solo dos posibles resultados estos deben de aparecer en ese mismo orden de manera alternada, se puede ver que hacen uso de la representatividad en los resultados.

5.5.1.3 Pregunta 1c

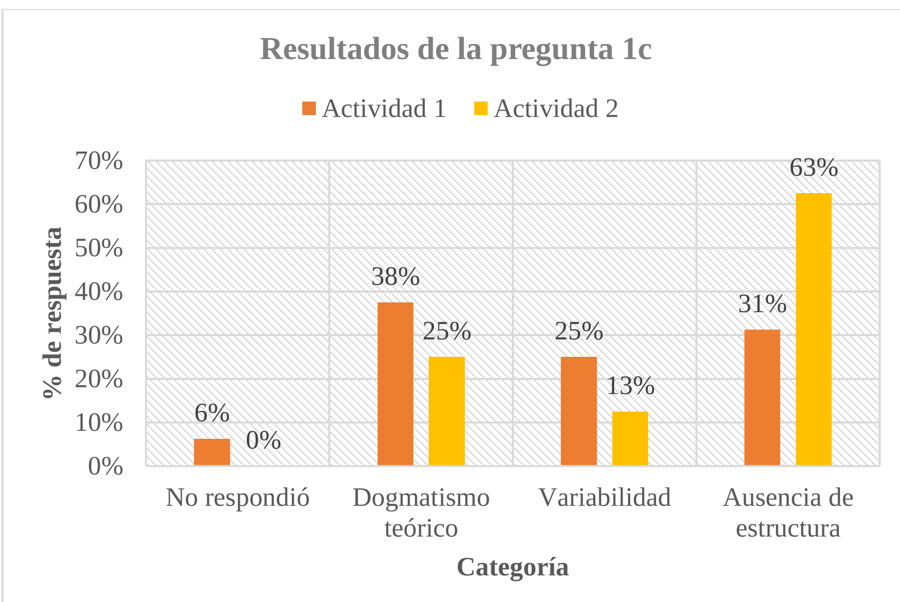
En esta pregunta se pide a los estudiantes que imaginen que se lanza diez veces una moneda y se pregunta cuál es el número de águilas que se obtendrán; la siguiente tabla muestra un comparativo de los resultados obtenidos en cada una de las categorías antes y después de las actividades de simulación:

Categoría	Actividad 1		Actividad 6	
	No. de respuestas	**% de respuestas**	**No. de respuestas**	**% de respuestas**
No respondió	1	6%	0	-
Dogmatismo teórico	6	38%	4	25%
Variabilidad	4	25%	2	13%
Ausencia de estructura	5	31%	10	63%

Tabla 5.3 Comparativo de los resultados de la pregunta 1c

Se recuerda que en la actividad 1, un estudiante no dio respuesta alguna; en la categoría dogmatismo teórico, donde se dice que el número de águilas obtenidas debe ser cinco, el porcentaje de respuesta tuvo una disminución de 38% a 25%.

En cuanto a la categoría variabilidad, donde se da como respuesta un rango de valores cercanos a cinco, también tuvo una disminución en su frecuencia de respuestas al pasar de 25% a 13%; por último en la categoría ausencia de estructura, donde se tiene gran tolerancia respecto al número de águilas que se pueden obtener, fue donde se presentó un mayor aumento en las respuestas al pasar de 31% a 63%; la gráfica 5.3 presenta los cambios en los porcentajes de respuesta que se obtuvieron.



Gráfica 5.3 Comparativo de los resultados de la pregunta 1c

Algunos estudiantes pese a las actividades realizadas cambiaron su respuestas de modo que se clasifican en dogmatismo teórico, tal es el caso del estudiante E11 que en la primera actividad contestó: “iii al lanzar las monedas no sabemos cuáles vamos a obtener así nos pueden salir 3 o 10” y en la última actividad escribió: “iv por la probabilidad de un 50%”, aunque en la primera actividad da una respuesta que considera la ausencia de estructura (de 0 a 10 águilas) debido a que ve como posible respuesta todos los valores que pueden suceder, en la actividad final cambia su respuesta hacia un dogmatismo teórico al decir que se obtendrán cinco águilas; probablemente influenciado por la probabilidad de un medio de cada resultado individual. .

El caso más común fue que los estudiantes aumentaran su tolerancia a la variabilidad en los resultados, por ejemplo el estudiante E2 en la actividad 1 expresó: “5 porque la probabilidad del sol y el Águila es de 50/50 sería casi probable lo mismo” y en la actividad 6 puso: “la 3 porque al ser un número elevado aumenta cualquier probabilidad”, se observa que al principio tenía una preferencia hacia el dogmatismo teórico influenciado por la probabilidad de cada una de las caras y al final de las actividades cambia por una respuesta con ausencia de estructura, pensando que entre más grande sea el intervalo de valores propuestos más probable será que el resultado del número de águilas caiga en ese conjunto.

Un caso similar del aumento en la variabilidad pero no de forma tan drástica lo da el estudiante E14 quien en la primera actividad señalo: “ii porque es 50 y 50 y lo más lógico es la mitad o sobre ese rango”, mientras que en la última actividad escribió: “la i porque en ese rango estaría ya que no es tan forzosa”. En la primera actividad admite una variabilidad muy cercana a cinco águilas, entre 4 y 6, mientras que en la última amplia el rango de su respuesta a un intervalo más amplio, entre 3 y 7.

Gran parte de los estudiantes fueron capaces de observar que al lanzar una moneda diez veces, en pocas ocasiones caen cinco águilas exactamente; por lo se atribuye variabilidad a la serie de lanzamientos que se realizarán, pero también una gran parte de ellos piensa que se puede obtener desde cero a diez águilas no tomando en cuenta la estructura binomial de la situación.

5.5.2 Urna

5.5.2.1 Pregunta 2a

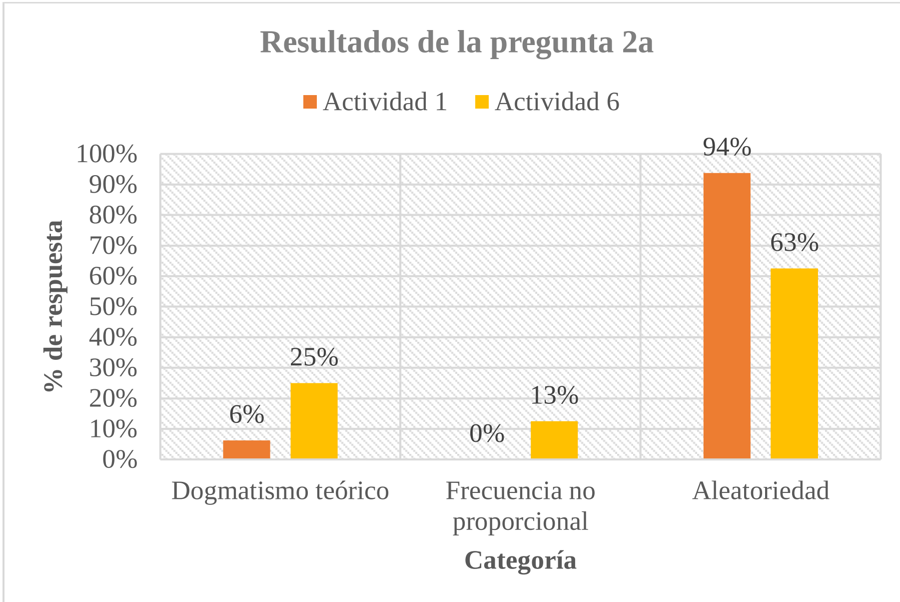
En la pregunta se presentan tres secuencias de seis extracciones cada una de la urna que contiene tres bolas en su interior y se pregunta al estudiante cuál de las listas cree que se obtenga, en la tabla 5.4 se presentan los resultados obtenidos en cada una de las categorías descritas con anterioridad.

	Actividad 1		Actividad 6	
Categoría	**No. de respuestas**	**% de respuestas**	**No. de respuestas**	**% de respuestas**
Dogmatismo teórico	1	6%	4	25%
Frecuencia no proporcional	0	-	2	13%
Aleatoriedad	15	94%	10	63%

Tabla 5.4 Comparativo de los resultados de la pregunta 2a

Lo primero que se observa es que en la categoría dogmatismo teórico hubo un aumento en el porcentaje de las respuestas al pasar del 6% al 25%, aquí la respuesta esperada era decir que la secuencia más probable es la que contiene dos bolas de cada tipo; la categoría frecuencia no proporciona solo aparece con el 13% en la actividad 6, en este caso la respuesta esperada eran las secuencias que no estaban equilibradas al tener un mayor número de alguna de las bolas.

Donde se ve un mayor descenso en el porcentaje de respuesta es en la categoría aleatoriedad al pasar de 94% a 63%, en esta categoría los estudiantes contestaban que las tres secuencias presentadas eran igualmente posibles de obtener; estos valores se presentan en la gráfica 5.4:



Gráfica 5.4 Comparativo de los resultados de la pregunta 2a

Se nota una considerable disminución entre las respuestas que al inicio de la actividad se encontraban en la categoría aleatoriedad; por ejemplo el estudiante E2 en la actividad 1 contesto: "Cualquiera debido a que no haber varias de 1 la probabilidad es igual y siempre será asi" y en la actividad 6 anotó: "la 1 porque todos salen en proporciones diferentes", se observa que al inicio de las actividades su respuesta decía que cualquier secuencia podría resultar debido que cada una de las bolas tenía la misma probabilidad de ser extraída, pero en la última actividad dice que prefiere la secuencia (B, C, C, A, B, B) debido a que sus frecuencias son distintas. Un caso similar ocurre con el estudiante E13 ya que al inicio de las actividades argumenta: "las 4 por que es aleatorio pero a la hora de devolver las pelotas puede que las demás pelotas se muevan y salgan igual o dif.", en la actividad final señala: "La ii para que salgan de modo equivalente", de igual modo este estudiante primero responde que cualquier secuencia puede que salga, pero al final de las actividades cambia su respuesta a un dogmatismo teórico asegurando que lo más probable es que todas sean extraídas de manera equitativa.

Se puede concluir que la mayoría de estudiantes comprende que cualquiera de las secuencias propuestas puede resultar debido a que cada pelota tiene la misma posibilidad de ser extraída, aunque en algunos casos las actividades cambiaron este razonamiento al creer que la secuencia más probable debía tener el mismo número de bolas de cada tipo o de manera opuesta cada una de las secuencias debería de tener distinto número de bolas extraídas de cada una.

5.5.2.2 Pregunta 2b

En esta pregunta se pide imaginar que se realizan 60 extracciones con reemplazo de la urna y se debe llenar una tabla con la frecuencia que se crea salió cada una de las tres bolas dentro; en la tabla 5.5 se presenta la distribución de las respuestas proporcionadas por los estudiantes en cada categoría.

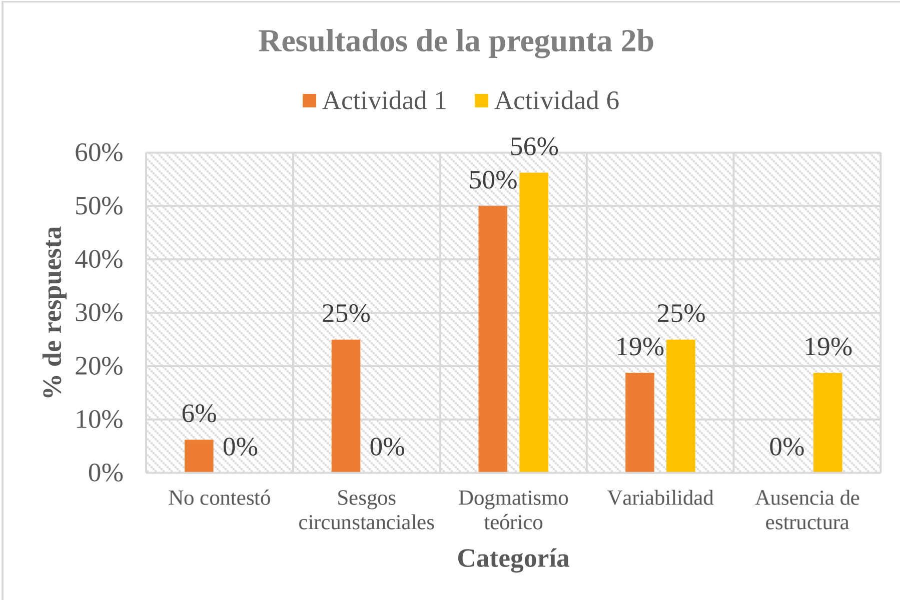
	Actividad 1		**Actividad 6**	
Categoría	**No. de respuestas**	**% de respuestas**	**No. de respuestas**	**% de respuestas**
No contestó	1	6%	0	-
Sesgos circunstanciales	4	25%	0	-
Dogmatismo teórico	8	50%	9	56%
Variabilidad	3	19%	4	25%
Ausencia de estructura	0	-	3	19%

Tabla 5.5 Comparativo de los resultados de la pregunta 2b

Se observa que en la actividad 6 todos los estudiantes respondieron a la pregunta, así también se eliminó la categoría sesgos circunstanciales, que en su mayoría correspondía a la creencia que la bola A salía un mayor número de veces debido a que en la imagen que acompaña a la actividad 1 esta se encontraba por encima de las bolas B y C.

La categoría dogmatismo teórico, la cual consistía en dar una distribución uniforme de las frecuencias en que se esperaría saliera cada una de las bolas, tuvo un aumento en el porcentaje de respuesta al pasar de 50% a 56%. También hubo un aumento en la categoría variabilidad, que consistía en dar valores cercanos a 20 extracciones de cada bola, al pasar de 19% a 25% en su porcentaje de respuesta.

Se hace notar que en la actividad 6 se creó la categoría ausencia de estructura, para aquellas respuestas que daban valores alejados a 20 extracciones de cada bola, donde el porcentaje de respuesta fue del 19%; todos estos valores se muestran en la gráfica 5.5.



Gráfica 5.5 Comparativo de los resultados de la pregunta 2b

Algunas respuestas que se encontraban en la categoría dogmatismo teórico cambiaron a la categoría variabilidad o ausencia de estructura, por ejemplo el estudiante E10 en la primera actividad supone que cada bola debe salir 20 veces y justifica: "Todas tienen la misma probabilidad", mientras que en la sexta actividad propone una distribución de 20, 30 y 10 para las bolas A, B y C respectivamente escribiendo lo siguiente: "Cualquier numero que entre los 3 sume 60 sería correcto por que las probabilidades son infinitas", en la primer respuesta tiene un argumento completamente teórico debido a que cree que al tener las bolas la misma probabilidad deben salir en proporciones iguales, posterior a la serie de actividades realizadas su pensamiento cambia y aunque su respuesta presenta ausencia de estructura se puede considerar que su razonamiento en cuanto a la distribución de las frecuencias cambio.

Por otra parte la respuesta del estudiante E15 en la actividad 1 propone que las bolas se distribuyen de manera uniforme y expresa: "No hay inclinación de resultado por lo tanto son iguales" y en la actividad 6 la distribución cambia a los valores 15, 20 y 25 donde escribe lo siguiente: "Porque mientras mas tiros son menos varian los resultados", claramente se observa un cambio, puede ver la variabilidad en los resultados y hace notar que si se hicieran mas extracciones los resultados serien menos variables.

En esta pregunta la mayoría de las respuestas de los estudiantes conserva un dogmatismo teórico respecto a la distribución de las frecuencias al realizar una serie de extracciones de la urna, pero se nota que varios estudiantes cambiaron ese pensamiento y observaron la variabilidad en los resultados aunque un gran número de estos cambios presentó la ausencia de estructura y no llego a observar que regularmente las frecuencias se encuentra alrededor del valor esperado, en este caso aproximadamente 20 bolas de cada tipo.

5.5.2.3 Pregunta 2c

En esta pregunta también se pide a los estudiantes estimar la frecuencia con que sale cada una de las bolas, se supone que se realizan 30 extracciones con reemplazo de la urna y se dan tres posibles tablas con la frecuencia que sale cada bola, en la tabla 5.6 se muestran los porcentajes de respuesta en cada una de las categorías propuestas para la pregunta:

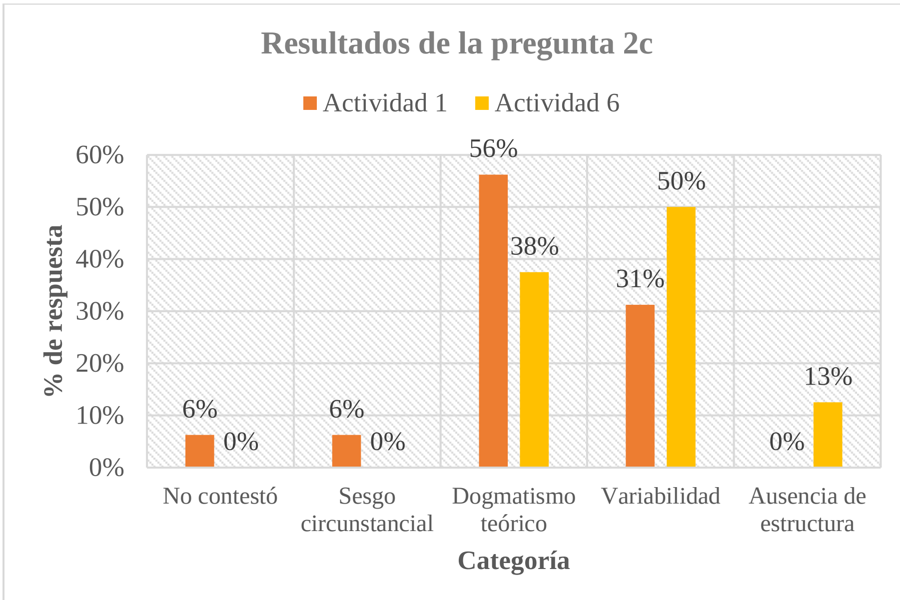
	Actividad 1		**Actividad 6**	
Categoría	**No. de respuestas**	**% de respuestas**	**No. de respuestas**	**% de respuestas**
No contestó	1	6%	0	-
Sesgo circunstancial	1	6%	0	-
Dogmatismo teórico	9	56%	6	38%
Variabilidad	5	31%	8	50%
Ausencia de estructura	0	-	2	13%

Tabla 5.6 Comparativo de los resultados de la pregunta 2c

Se observa que en la actividad 6 todos los estudiantes contestaron a la pregunta, así mismo se logró vencer la creencia donde la bola A salía más veces al estar por encima de las otras dos bolas en la figura que acompaña a la actividad 1.

En esta pregunta la categoría dogmatismo teórico, donde se respondía que había una distribución uniforme entre la frecuencia en que cada bola salía, tuvo una disminución en el porcentaje de respuesta al pasar de 56% a 38%. Inversamente al comportamiento anterior, la categoría variabilidad, donde los estudiantes respondían que la tabla más probable era aquella que tenía las frecuencias cercanas a diez extracciones de cada una de las bolas, tuvo un aumento en el porcentaje de respuestas al pasar de 31% a 50%.

Y por último en la actividad 6 se creó la categoría ausencia de estructura para las respuestas que consideraban que podía tenerse una mayor variabilidad, teniendo un porcentaje de respuesta de 13%; todos estos resultados se encuentran en la gráfica 5.6 que se presenta a continuación.



Gráfica 5.6 Comparativo de los resultados de la pregunta 2c

La mayoría de las respuestas a esta pregunta notan la variabilidad en la distribución de las frecuencias de las bolas, algunos con mayor o menos grado de tolerancia, por ejemplo el estudiante E8 en la primera actividad supuso que las frecuencias se distribuían de manera uniforme y justifico lo siguiente: "la ultima tabla por la probabilidad de 1/30 que tiene cada pelota" y en la sexta actividad selecciono la distribución 11, 18 y 1 para las bolas A, B y C respectivamente anotando lo siguiente: "Tabla 3, porque el valor de la bola C disminuye cuando se hacen las repeticiones pocas veces", este estudiante claramente paso de un dogmatismo teórico a una ausencia de estructura al creer que 30 extracciones son pocas a tal grado que la bola C puede extraerse muy probablemente solo en una ocasión.

El estudiante E1 al inicio de las actividades expreso un dogmatismo teórico donde respondió: "yo creo que ninguna pero la 4 representa que las 3 tienen la misma posibilidad" y en la actividad 6 expreso: "Ninguna, porque hay muchas otras posibilidades que solo esas 3", en su primera respuesta expresa una duda por lo que pudiera pasar, pero se decide por una distribución uniforme y después de las actividades puede articular su respuesta de una mejor manera diciendo que hay más posibilidades en que ocurra la distribución de las frecuencias pero aun así observa la variabilidad de estas. Por último, el estudiante E15 en la primera actividad selecciona que cada bola debe salir diez veces y escribe: “Si hay uno de cada uno cada uno tiene un 33.3% que salga uno de esos 3 resultados” y en la última actividad selecciona la tabla que contiene los valores 12, 7 y 11 justificando: “casi no varía es más probable porque están equilibrados y son muchos tiros”, esta última respuesta comprende la variabilidad entorno al valor de diez y expresa que al ser muchos tiros no deben variar mucho los resultados.

En esta pregunta la mayoría de los estudiantes es capaz de ver que al realizar 30 extracciones de la urna se tendrá una variabilidad en la distribución de las frecuencias de cada bola, aunque algunos toleran mas esta variabilidad creyendo que es probable que alguna de las bolas tome valores extremos presentando una ausencia de estructura en la distribución de las frecuencias.

Capítulo 6

Conclusiones

6.1 Introducción

En este capítulo se presentan las conclusiones generales de la investigación de cómo los estudiantes razonan sobre ideas de aleatoriedad, independencia y variabilidad, los sesgos y heurísticas que se observaron y la influencia que las simulaciones tuvieron en el cambio de sus respuestas; también se exponen las limitaciones que se encontraron a lo largo del estudio, se describen algunas implicaciones que pueden ser útiles para la enseñanza de la probabilidad y por último se plantea una perspectiva de investigación para desarrollar lo que se ha explorado en el presente trabajo.

6.2 Conclusiones generales

Las actividades propuestas en esta investigación analizan el razonamiento que tienen los estudiantes sobre las ideas de aleatoriedad, independencia y variabilidad, al inicio de las cuales se identificó que en la mayoría de las respuestas proporcionadas se tenía una concepción determinística de las probabilidades (dogmatismo teórico), ya que los estudiantes consideraban que el valor esperado en cada pregunta era el que se obtendría, por este motivo se considera que son propensos a utilizar la heurística de representatividad en sus razonamientos; al realizar actividades de simulación física y computacional se pudo comprobar que en algunos casos el razonamiento sobre estos temas cambió y mejoró, lo que lleva a afirmar que las actividades de simulación propuestas mejoraron la conceptualización de estas ideas.

El objetivo en esta investigación era responder a tres preguntas, las cuales tratan sobre: los rasgos en el razonamiento en las respuestas de los estudiantes sobre las ideas de aleatoriedad, independencia y variabilidad; qué heurísticas y sesgos se presentaban al responder preguntas sobre estas tres ideas y de qué manera influyo el uso de simulaciones en Fathom para cambiar estos razonamientos. A continuación se responderán a estas incógnitas y se describirán los hallazgos más sobresalientes:

- ✓ ¿Qué rasgos del razonamiento se perciben en las respuestas de los estudiantes acerca de las ideas de aleatoriedad, independencia y variabilidad?

El razonamiento sobre las ideas de aleatoriedad, independencia y variabilidad se basa en enfoques informales de estos conceptos, debido a que los estudiantes no habían llevado un curso previo de probabilidad.

La pregunta 1a, es la siguiente:

Una moneda se lanza al aire cuatro veces y sale {Sol, Sol, Sol, Sol} en las cuatro ocasiones. Si se lanzara la moneda una quinta vez, ¿qué resultado crees que sea más probable Águila o Sol? Justifica tu respuesta.

El razonamiento encontrado en las respuestas a esta pregunta no mejoró al realizar las actividades, en un principio en 12 de las respuestas dadas (75%) se consideraba la independencia y aleatoriedad en los lanzamientos de moneda (puede ocurrir Águila o Sol), pero esta cantidad disminuyó a sólo 10 respuestas (63%) después de realizar todas las actividades. En su mayoría las respuestas proporcionadas reflejaban la idea de equiprobabilidad en los resultados diciendo que cada cara de la moneda tenía 50% o ½ de probabilidad de obtenerse.

La pregunta 1b es:

¿Cuál de las siguientes secuencias es más probable que suceda al lanzar 5 veces una moneda?, ¿cuál secuencia es la menos probable? Justifica tu respuesta. i) {Sol, Sol, Sol, Águila, Águila}; ii) {Águila, Sol, Sol, Águila, Sol}; iii) {Águila, Sol, Águila, Águila, Águila} y iv) {Sol, Águila, Sol, Águila, Sol}.

Mientras que la 2a dice:

Se saca una bola aleatoriamente, se anota en una tabla la letra que corresponde a la bola y se regresa a la urna; si se repite este experimento 6 veces, ¿cuál de las siguientes listas crees que se obtenga? i) B, C, C, A, B, B; ii) A, A, C, B, B, C; iii) A, C, A, A, C, C; iv) Cualquiera de las anteriores. Justifica tu respuesta.

Al enfrentarse con la idea de aleatoriedad en estas dos preguntas los estudiantes actuaron de diferente forma dependiendo del experimento realizado. En los temas de lanzamiento de moneda se notó un aumento no muy significativo de las respuestas correctas, al pasar de siete (44%) a ocho (50%) respuestas que mostraron aleatoriedad en los razonamientos indicando que no había una secuencia mas o menos probable que sucediera, ya que todas tienen igual probabilidad de obtenerse; mientras que en los temas de extracción de bolas hubo una disminución significativa en las respuestas que indicaban que cualquiera de las secuencias propuestas podía obtenerse, al pasar de 15 (94%) a 10 (63%) respuestas dadas de un total de 16 estudiantes que participaron. En este punto la mayoría de los razonamientos expresaron que cualquier secuencia podía ocurrir ya que era un experimento aleatorio e inclusive podía resultar una secuencia distinta a las propuestas en las actividades.

La pregunta 1c es la siguiente:

Si se lanzan 10 monedas al mismo tiempo, ¿Cuántas Águilas crees que se obtengan? i) 3, 4, 5, 6 o 7; ii) 4, 5 o 6; iii) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 o 10 y iv) 5. Justifica tu respuesta.

La pregunta 2b dice:

Imagina que ahora se repite el experimento (de extracción de bolas) 60 veces; llena la Tabla 1 escribiendo cuantas veces crees que saldrá cada bola. Justifica tu respuesta.

Bola	*Número de veces*
A	
B	
C	
Total	*60*

Tabla 2

Por último, la pregunta 2c es:

Si se repite este experimento 30 veces ¿Cuál de las siguientes tablas crees que sea la que se obtuvo? Justifica tu respuesta.

Bola	*Frecuencia*
A	*12*
B	*7*
C	*11*
Total	*30*

Tabla 2 [ ]

Bola	*Frecuencia*
A	*11*
B	*18*
C	*1*
Total	*30*

Tabla 3 [ ]

Bola	*Frecuencia*
A	*10*
B	*10*
C	*10*
Total	*30*

Tabla 4 [ ]

__________________ __________________ __________________

En estas tres preguntas, que tratan la idea de variabilidad, se observaron diferencias: cuando se pedía predecir el número de águilas en 10 lanzamientos de moneda hubo una disminución en las respuestas que consideraron la variabilidad en los resultados al pasar de cuatro (25%) a dos (13%) solamente; cuando se pedía que distribuyeran la frecuencia con que podían salir tres bolas si se realizaban 60 extracciones, el porcentaje que observo variabilidad aumento de forma no muy significativa al pasar de tres (19%) a cuatro (25%) respuestas, en estas dos preguntas las respuestas consideraban un intervalo cercano al valor esperado donde podían caer los distintos resultados, y por último cuando se pedía elegir entre tres tablas que reflejaban la frecuencia con que las bolas se extraían en 30 ocasiones el porcentaje observado de nuevo aumento, al pasar de cinco (31%) a ocho (50%) respuestas donde se hacía mención que la tabla 2 era la que mejor reflejaba el experimento. Aquí la idea de variabilidad que se observó en las respuestas es que existe un rango aceptable cerca del valor esperado en que los resultados pueden obtenerse.

En estas últimas preguntas al realizar las actividades se observó un aumento significativo en el porcentaje de respuestas que tenían una ausencia de estructura, que podría interpretarse como una mala concepción de la idea de variabilidad.

Con este breve análisis se puede observar que el razonamiento de los estudiantes está muy influenciado por un dogmatismo teórico cuando se tratan asuntos de probabilidad, debido a que ellos esperan que en todos los experimentos debería resultar el valor esperado en cada secuencia de ensayos y se pudo comprobar que las actividades de simulación realizadas fomentaron que estas concepciones fueran cambiadas de forma positiva por un gran número de estudiantes.

- ✓ ¿Cuáles son los sesgos y heurísticas que se presentan cuando los estudiantes responden preguntas en las que subyacen las ideas de aleatoriedad, independencia y variabilidad?

En las actividades se presentaron dos tipos de sesgos circunstanciales, el primero debido a que en cuatro respuestas (25%) se expresó que las bolas en la urna estaban acomodadas como se mostraba en la imagen presente en la primera actividad, lo que llevaba a tener respuestas donde se indicaba que la bola de arriba en dicha imagen tenía una mayor probabilidad de ser extraída; el segundo sesgo circunstancial observado fue que un estudiante (6%) realizo lanzamientos de moneda para poder decidir su respuesta, tomando como la respuesta correcta la que se pareciera mas a su experimentación.

En la pregunta 1a, donde se investigó sobre la idea de independencia, se observó con mayor frecuencia el sesgo denominado recencia negativa o falacia del jugador, el cual consistían en creer que después de una secuencia grande de soles era más probable obtener un águila en el siguiente lanzamiento, este sesgo aumento al realizar las actividades de simulación, por lo que se puede suponer que las actividades propuestas no ayudaron de manera suficiente a que los estudiantes conceptualicen de manera adecuada la independencia en cada lanzamiento.

En las preguntas restantes, que tratan sobre aleatoriedad y variabilidad, la heurística mas observada fue la representatividad que venía dada por dos aspectos; uno donde se creía que la probabilidad teórica influía en la frecuencia en que debían salir las águilas y soles en los lanzamientos de moneda o las bolas en el caso de la extracción de urnas, por ejemplo en este último caso, si se decía que se realizaban seis extracciones de una urna, las respuestas de los estudiantes indicaban que debían salir dos bolas de cada tipo, debido a que dos es el valor esperado en este caso.

El segundo aspecto observado fue que las respuestas de los estudiantes tenían una inclinación hacia las secuencias que se presentaban en aparente desorden, ya que argumentaban que al realizar alguno de los experimentos físicamente era muy poco probable que resultaran secuencias ordenadas, por ejemplo, un águila y un sol de forma alternada al realizar múltiples lanzamientos de una moneda.

- ✓ ¿Qué cambios en las respuestas de los estudiantes se perciben después de llevar a cabo actividades de simulación con Fathom?

Las actividades de simulación realizadas con el software Fathom en todos los casos ayudaron a cambiar el pensamiento de los estudiantes sobre las grandes ideas de probabilidad. En la mayoría de los casos ayudaron a comprender mejor las ideas de aleatoriedad y variabilidad, por ejemplo, en el caso de la extracción de bolas en la urna, mas de la mitad de las respuestas de los estudiantes al inicio de las actividades presentaban un dogmatismo teórico, al responder con los valores esperados en las distintas situaciones planteadas, y al finalizar las actividades se aprecia que algunas de estas respuestas cambiaron al incluir las ideas de aleatoriedad y variabilidad.

En algunos otros casos provocaron una conceptualización errónea de ideas, como lo ocurrido en la pregunta 1a donde aumento el número de respuestas que creían que después de una racha grande de soles era más probable que se obtuviese un águila o en las preguntas 2b y 2c donde después de las actividades de simulación se presentaron casos de una ausencia de estructura al seleccionar la frecuencia en que las bolas eran extraídas de la urna.

6.3 Limitaciones de la investigación

A lo largo de las actividades realizadas se observaron algunas limitaciones en la investigación que pudieron influir de alguna manera en los resultados presentados anteriormente:

El orden en que se realizarían las actividades debió ser modificada debido a la falta de disponibilidad de salas de computo, por esta misma razón las actividades se extendieron por más de lo planeado, ya que solo se pudo usar la sala de computo una vez a la semana, rompiendo un poco la continuidad y relación entre cada una de las actividades.

La mayoría de los estudiantes no está familiarizado con el uso de software matemático, lo que provoco que las actividades se realizaran de una forma más lenta para poder explicar de forma detallada el uso del software Fathom y lo que cada acción realizada significaba en la simulación; esto debido a que el currículo actual no favorece la realización de actividades de simulación ya que se centra más en realizar actividades en papel y lápiz.

Además se observó que los estudiantes no tienen un dominio apropiado del lenguaje probabilístico, aunque el currículo de educación básica contenga estos temas, esto indica que en muchos casos estos temas no son enseñados o son enseñados de forma incorrecta, lo que provoca que los estudiantes no comprendan los conceptos de forma adecuada para que los utilicen y enriquezcan a futuro.

6.4 Implicaciones para la enseñanza

La presente investigación abre una discusión de cómo debería ser la enseñanza de la probabilidad en la actualidad, por lo que se describirán algunas implicaciones útiles para favorecer el aprendizaje de los temas aquí tratados:

Se observó que el uso de la computadora en el aula es muy útil para generar discusiones sobre temas de probabilidad, en particular sobre aleatoriedad, independencia y aleatoriedad, y favorecer la comprensión de estas ideas.

También se sugiere que en los currículos actuales se le debe de dar más peso a la enseñanza de las grandes ideas de probabilidad no solo a los cálculos o conceptos formales enseñados tradicionalmente, estas ideas pueden introducirse de manera temprana desde los niveles educativos básicos e irse formalizando conforme los estudiantes avancen de grado escolar.

Las actividades propuestas en este estudio pueden servir de base para la realización de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA), que para Simon y Tzur (2004) consiste en los objetivos para el aprendizaje de los estudiantes, las tareas matemáticas que se utilizarán para promover el aprendizaje en los estudiantes y las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Estas trayectorias pueden ser muy útiles en el salón de clases y servir como antecedente para realizar más lecciones de este tipo que promueven ideas y discusiones matemáticas.

6.5 Investigaciones a futuro

La investigación realizada genero algunos temas que pueden ser investigados, tratados y mejorados en un futuro cercano, los cuales se describirán a continuación:

Realizar algunas actividades previas para familiarizar a los estudiantes con el software Fathom y así facilitar las actividades de simulación computacional propuestas en la investigación.

Incluir un mayor número ensayos en cada secuencia de las actividades en Fathom, ya sea al lanzar una moneda o al extraer bolas de una urna o inclusive en algunos otros experimentos que no se consideraron aquí, para analizar las respuestas de los estudiantes sobre la relación entre los enfoques clásico y frecuencial de probabilidad, así como la relación de estos dos enfoques con la Ley de los Grandes Números.

Anadir una sección donde se trate con mayor atención la independencia en los lanzamientos de moneda, para que los estudiantes conceptualicen de mejor manera esta idea y disminuir los sesgos de recencia positiva o negativa descritos con anterioridad.

Realizar un cambio en el cuestionario inicial, sin proporcionar en algunas preguntas opciones múltiples y ver si las respuestas de los estudiantes cambian sustancialmente con respecto al cuestionario aquí analizado.

Aplicar la actividad inicial a estudiantes que hayan tomado previamente un curso de probabilidad y comparar las respuestas con las observadas en esta investigación, para observar si los cursos actuales de probabilidad promueven las ideas de aleatoriedad, independencia y variabilidad.

Referencias

Arteaga, P., Batanero, C., & Ruiz, B. (2010). Pre-service primary school teachers' perception of randomness. En M. Pinto y T. Kawasaki (Eds). *Proceedings of the XXXIV Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (V. 2, pp. 183-190). Belo Horizonte, Brazil: PME.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *8*(3), 247-263.

Batanero, C., Gómez, E., Gea, M. M., & Contreras, J. M. (2014). Assessing and developing prospective teachers' understanding of random sequences. En *Daten, Zufall und der Rest der Welt* (pp. 1-11). Springer Fachmedien Wiesbaden.

Batanero, C., Henry, M., & Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En *Exploring probability in school* (pp. 15-37). Springer US.

Batanero, C., Henry, M., & Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En *Exploring probability in school* (pp. 15-37). Springer US.

Biehler, R., Ben-Zvi, D., Bakker, A., & Makar, K. (2012). Technology for enhancing statistical reasoning at the school level. En *Third international handbook of mathematics education* (pp. 643-689). Springer New York.

Chance, B., Ben-Zvi, D., Garfield, J., & Medina, E. (2007). The role of technology in improving student learning of statistics. *Technology Innovations in Statistics Education*, 1(1).

Corbin, J. M., & Strauss, A. (1990). Grounded theory research: Procedures, canons, and evaluative criteria. *Qualitative sociology*, 13(1), 3-21.

Engel, J., & Sedlmeier, P. (2005). On middle-school students' comprehension of randomness and chance variability in data. *ZDM*, *37*(3), 168-177.

Fischbein, E., Nello, M., & Marino, M. (1991). Factors Affecting Probabilistic Judgements in Children and Adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(6), 523-549.

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. A. Jones (Ed), *Exploring probability in school* (pp. 39-63). Springer.

García, J. I., Medina, M., & Sánchez, E. A. (2014). Niveles de razonamiento de estudiantes de secundaria y bachillerato en una situación-problema de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 6, 5-23.

Green, D. R. (1989). School pupils' understanding of randomness. *Studies in mathematics education*, *7*, 27-39.

Green, D. R. (1991). A longitudinal study of children's probability concepts. En D.Vere Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 320 - 328). Dunedin: University of Otago.

Jones, G. A. (Ed.) (2005). *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*. New York: Springer.

Jones, G.A., Langrall, C. W., & Mooney, E. S. (2007). Research in probability. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 909-955). Charlotte, NC, USA: Information Age-NCTM.

Kahneman, D., & Tversky, A. (1972). Subjective probability: A judgment of representativeness. *Cognitive psychology*, 3(3), 430-454.

Kahneman, D., Slovic, D., & Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge University Press.

Konold, C. (1989). An outbreak of belief in independence. En Maher, C., Goldin, G. y Davis B. (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Volume 2, (pp. 203-209). Rutgers, NJ: Rutgers University Press.

Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. En *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 139-156). Springer Netherlands.

Maxara, C., & Biehler, R. (2010). Students' understanding and reasoning about sample size and the law of large numbers after a computer-intensive introductory course on stochastics. En C. Reading (Ed.), *Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics*. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. .

Piaget J., & Inhelder, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant* [The origin of the idea of chance in children's thinking]. Paris: Presses Universitaires de France.

Sánchez, E., & Trujillo, K. (2008). Exploración de la noción de variación en situaciones de azar. *Publicaciones*, (38), 119-132.

Sánchez, E., & Valdez, J. C. (2015). El razonamiento probabilístico informal de estudiantes de bachillerato. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 89-103). Alicante: SEIEM.

Sánchez, E., & Valdez, J. C., (2013). La Cuantificación del azar: Una articulación de las definiciones subjetiva, frecuencial y clásica de probabilidad. *Atas do III encontro de probabilidades e estatística na escola* (pp. 23-34).

Serrano, L., Batanero, C., Ortíz, J. J., & Cañizares, M. J. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria. *Educación Matemática*, 10(1), 7-25.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. En D. Grows (Ed.), *Handbook of research in mathematics education* (pp. 465–499). New York: Macmillan

Shaughnessy, J. M., Canada, D., & Ciancetta, M. (2003). Middle school students' thinking about variability in repeated trials: A cross-task comparison. En N. A. Pateman, B. Dougherty & J. Zilloux (Eds.), *Proceedings of Joint Meeting of PME27 and PMENAXXV* (Vol. 4, pp. 159-166). Honolulu, HI: Program Committee.

Shaughnessy, J.M., (1997). Missed Opportunities in Research on the Teaching and Learning of Data and Chance. En F. Biddulph y K. Carr (eds.) *People in Mathematics Education*, Mathematics Education Research Group of Australia, Waikato, New Zealand, Vol. 1, pp. 177 –197.

Simon, M. A. y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical thinking and learning*, *6*(2), 91-104.

Stohl, H., & Tarr, J. E. (2002). Developing notions of inference using probability simulation tools. *The Journal of Mathematical Behavior*, 21(3), 319-337.

Stohl, H., Rider, R., & Tarr, J. (2004). Making connections between empirical and theoretical probability: Students' generation and analysis of data in a technological environment. Recuperado de http://www.probexplorer.com/Articles/LeeRiderTarrConnectE&T.pdf

Truran, K. M., & Truran, J. M. (1999). Are dice independent? Some responses from children and adults. En *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.4, p. 289-296).

Tversky, A., & Kahneman, D. (1974). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. *Science*, 185(4157), 1124-1131.

UNAM (2003) *Programa de Estudios de Estadística y Probabilidad I y II*. Recuperado de: http://www.cch.unam.mx/sites/default/files/plan_estudio/mapa_estadistica.pdf

Watson, J. (2005). The Probabilistic Reasoning of Middle School Students. En *Exploring Probability in School* (pp. 145-169). Springer US.

Watson, J. M., Kelly, B. A., Callingham, R. A., & Shaughnessy, J. M. (2003). The measurement of school students' understanding of statistical variation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *34*(1), 1-29.

Apéndices

Fecha ________________

Nombre ____ Edad _________________

Actividad 1

Instrucciones

1. Lee con atención los enunciados planteados y contesta lo que se te pide.
2. Utiliza pluma para contestar. Si algo consideras que está equivocado, simplemente lo tachas y continúas.
3. Escribe todo sobre la hoja.
4. Cuando en alguna pregunta no sepas que contestar y quieras dejarla, explica por qué la dejas y pasa a la siguiente.
5. Cuando termines de contestar el cuestionario, voltéalo y espera a que sea recogido.

Cuestionario

1. Lanzamiento de monedas.
    a. Una moneda se lanza al aire cuatro veces y sale {Sol, Sol, Sol, Sol} en las cuatro ocasiones. Si se lanzara la moneda una quinta vez, ¿qué resultado crees que sea más probable Águila o Sol? Justifica tu respuesta.

    ____

    ____

    ____

    b. ¿Cuál de las siguientes secuencias es más probable que suceda al lanzar 5 veces una moneda?, ¿cuál secuencia es la menos probable? Justifica tu respuesta.
        i. {Sol, Sol, Sol, Águila, Águila}
        ii. {Águila, Sol, Sol, Águila, Sol}
        iii. {Águila, Sol, Águila, Águila, Águila}
        iv. {Sol, Águila, Sol, Águila, Sol}

    ____

    ____

    ____

    c. Si se lanzan 10 monedas al mismo tiempo, ¿Cuántas Águilas crees que se obtengan?
        i. 3, 4, 5, 6 o 7
        ii. 4, 5 o 6
        iii. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 o 10
        iv. 5

    Justifica tu respuesta.

    ____

    ____

    ____

2. Urna

Se tiene una urna con tres bolas, cada una con una letra diferente A, B o C (Figura 1).

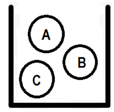


Figura 1

a. Se saca una bola aleatoriamente, se anota en una tabla la letra que corresponde a la bola y se regresa a la urna; si se repite este experimento 6 veces, ¿cuál de las siguientes listas crees que se obtenga?

   i. B, C, C, A, B, B
   ii. A, A, C, B, B, C
   iii. A, C, A, A, C, C
   iv. Cualquiera de las anteriores

   Justifica tu respuesta.

b. Imagina que ahora se repite el experimento 60 veces; llena la Tabla 1 escribiendo cuantas veces crees que saldrá cada bola. Justifica tu respuesta.

Bola	Número de veces
A	
B	
C	
Total	60

Tabla 3

c. Si se repite este experimento 30 veces ¿Cuál de las siguientes tablas crees que sea la que se obtuvo? Justifica tu respuesta.

Bola	Frecuencia
A	12
B	7
C	11
Total	30

Tabla 2 [ ]

Bola	Frecuencia
A	11
B	18
C	1
Total	30

Tabla 3 [ ]

Bola	Frecuencia
A	10
B	10
C	10
Total	30

Tabla 4 [ ]

Fecha ________________

Nombre ____ Edad _________________

Actividad 2

Instrucciones

6. Lee con atención los enunciados planteados, realiza las actividades y contesta lo que se te pide.
7. Utiliza pluma para contestar. Si algo consideras que está equivocado, simplemente lo tachas y continúas.
8. Escribe todo sobre la hoja.
9. Cuando en alguna pregunta no sepas que contestar y quieras dejarla, explica por qué la dejas y pasa a la siguiente.
10. Cuando termines de contestar el cuestionario, voltéalo y espera a que sea recogido.

Actividad

Lanzamiento de monedas

1. Una moneda se lanza al aire 10 veces y se obtienen los siguientes resultados (Tabla 1), donde A = Águila y S = Sol:

Lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resultado	S	A	A	S	A	A	S	A	A	A

Tabla 4

De acuerdo a los resultados anteriores si tuvieras que lanzar la moneda por undécima vez, ¿Cuál crees que sería el resultado? Justifica tu respuesta.

____

____

____

2. Se toma otra moneda, se lanza al aire 10 veces y se obtienen los siguientes resultados (Tabla 2):

Lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resultado	S	S	A	S	A	S	S	S	A	S

Tabla 5

De acuerdo a los resultados anteriores si tuvieras que lanzar la moneda por undécima vez, ¿Cuál crees que sería el resultado? Justifica tu respuesta.

____

____

____

3. Si quisieras que al lanzar la moneda el resultado fuera Sol ¿cuál moneda escogerías, la del punto 1 o la del 2?

____

____

____

4. Toma dos monedas y lanza cada una en 10 ocasiones, anotando tus resultados en la Tabla 3:

Lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Moneda 1										
Moneda 2										

Tabla 6

5. Si quisieras que al lanzar la moneda por undécima vez el resultado fuera Sol ¿cuál escogerías? Justifica tu respuesta.

____

____

____

6. Has estado trabajando con secuencias de 10 lanzamientos de una moneda, ahora contaras el número de Águilas y de Soles que se obtienen en estos 10 lanzamientos, por lo cual se definirán las siguientes variables:

X = número de Águilas al realizar 10 lanzamientos de una moneda

Y = número de Soles al realizar 10 lanzamientos de una moneda

¿Qué valores numéricos puede tomar cada variable? Justifica tu respuesta.

____

____

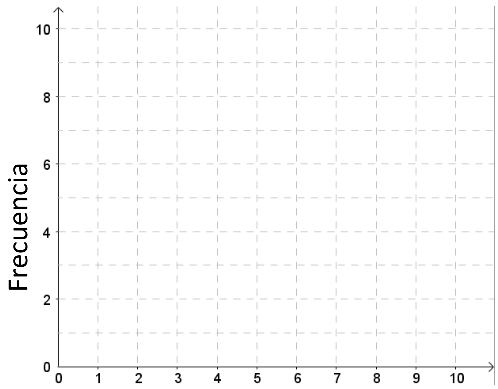
____

7. De nuevo, toma una moneda y lánzala 10 veces anotando tus resultados en la Tabla 4, además anota el valor de las variables *X* y *Y* en cada secuencia de lanzamientos; repite este proceso hasta que hayas llenado por completo la tabla:

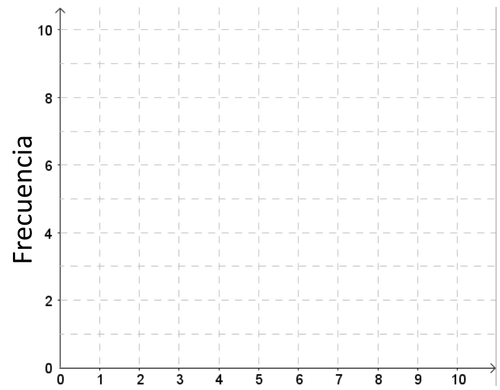
Lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	*X=#Águilas*	*Y=#Soles*
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												

Tabla 7

8. Con ayuda de la Tabla 4, grafica la frecuencia de las variables X = *#Águilas* y Y = *#Soles*.



X = # Águilas



Y = # Soles

9. ¿Puedes decir un número aproximado de veces que se obtendrá Águila al lanzar una moneda 10 veces? Justifica tu respuesta.

____

____

____

10. ¿Puedes decir un número aproximado de veces que se obtendrá Sol al lanzar una moneda 10 veces? Justifica tu respuesta.

____

____

____

Fecha ________________

Nombre ____ Edad _________________

Actividad 3

Instrucciones

1. Realiza las actividades y contesta lo que se te pide.
2. Utiliza pluma para contestar. Si algo consideras que está equivocado, simplemente lo tachas y continúas.
3. Escribe todo sobre la hoja.
4. Cuando en alguna pregunta no sepas que contestar y quieras dejarla, explica por qué la dejas y pasa a la siguiente.
5. Cuando termines de contestar el cuestionario, voltéalo y espera a que sea recogido.

Actividad

Lanzamiento de monedas mediante una simulación en Fathom.

1) Para realizar la actividad usaras el programa Fathom Versión 2.0, el cual se encuentra en el escritorio de la computadora; da doble clic sobre el icono 

y se abrirá la siguiente ventana (Figura 1):

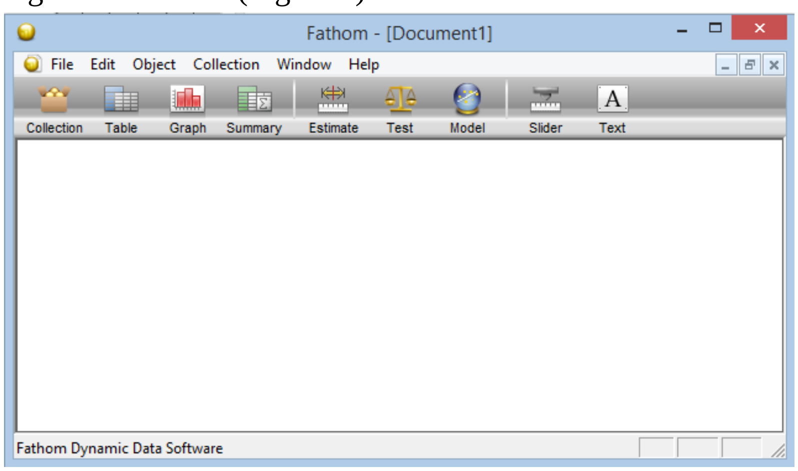


Figura 2

2) De la barra de herramientas de Fathom arrastra el icono 

. Da doble clic sobre *Collection 1*, asígnale el nombre de *Moneda* y da un clic en *OK* (Figura 2).

Figura 3

3) Selecciona la caja de la colección *Moneda* 

dando un clic sobre ella y arrastra el icono tabla 

de la barra de herramientas. Da un clic sobre *<new>* y asígnale el nombre de *"Cara"*, posteriormente da un *Enter* y escribe directamente *Águila* y *Sol* (Figura 3).

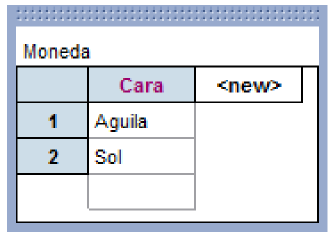
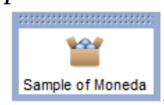


Figura 4

4) Selecciona la caja de la colección *Moneda* haciendo clic sobre ella. De la barra de menús, abre el menú *Collection* y selecciona *Sample Cases.* Automáticamente aparece otra caja con la etiqueta *Sample of Moneda* 

. Esta nueva caja contiene los resultados de la simulación del lanzamiento de una moneda.

5) Da doble clic en la caja de *Sample of Moneda*, con esto se activara el *inspector* de la caja *Sample of Moneda*. Modifica los valores predeterminados como se te muestra en la Figura 4:

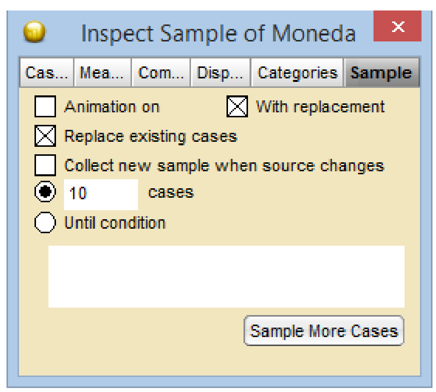
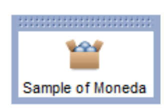
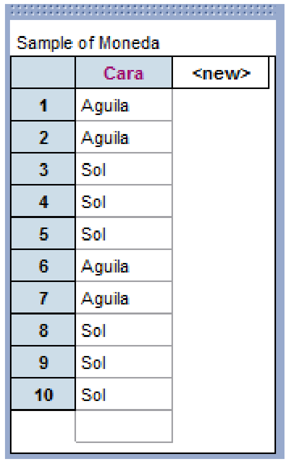


Figura 5

6) Selecciona la caja de *Sample of Moneda* dando un clic sobre ella 

y arrastra una tabla 

de la barra de herramientas; se producirá una tabla como la de la Figura 5:



Sample of Moneda

	Cara	<new>
1	Aguila	
2	Aguila	
3	Sol	
4	Sol	
5	Sol	
6	Aguila	
7	Aguila	
8	Sol	
9	Sol	
10	Sol	

Figura 6

a) Anota los valores que obtuviste en la Tabla 1:

Lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resultado										

Tabla 8

b) ¿Crees que la simulación anterior refleja el lanzamiento de una moneda en 10 ocasiones? Justifica tu respuesta.

____

____

____

7) Ahora realizaras una gráfica, con los resultados obtenidos de la simulación de 10 lanzamientos de una moneda. Para ello, arrastra el icono gráfica 

de la barra de herramientas. Selecciona la columna *Cara* de la tabla *Sample of Moneda* y arrástrala a la parte inferior de la gráfica. En la parte superior de la gráfica cambia la opción a *Bar Chart;* con ello se obtendrá una gráfica como se muestra en la Figura 6.

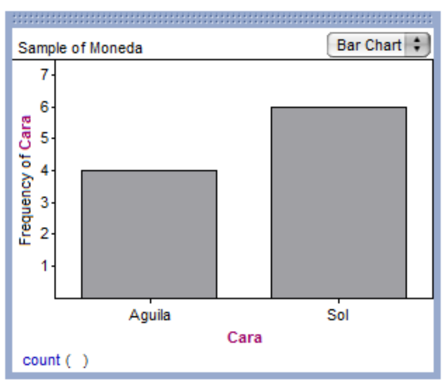


Figura 7

Nota: Si colocas el cursor sobre alguna de las barras, en la esquina inferior izquierda de la ventana de trabajo (sobre el botón de inicio de Windows) verás *aparecer la frecuencia. Además, si das clic en cualquiera de las barras, la barra seleccionada se ilumina de un color rojo y, al mismo tiempo, los casos correspondientes se destacan en la tabla.*

8) Selecciona la caja *Sample of Moneda* 

dando un clic sobre ella, presiona la tecla Ctrl + Y, y observa que los valores de la tabla y de la gráfica de la caja *Sample of Moneda* cambian. La razón es que al presionar la tecla Ctrl + Y, se vuelve a realizar la simulación de 10 lanzamientos de una moneda.

a) Realiza algunas simulaciones más y anota los resultados en la Tabla 2:

Lanzamiento	# de Águilas	# de Soles
1		
2		
3		
4		
5		

Tabla 9

b) ¿Por qué crees que varían los datos en cada simulación? Justifica tu respuesta.

c) ¿Qué crees que sea más fácil obtener 2 Águilas o 4 Águilas al realizar 10 lanzamientos de una moneda? Justifica tu respuesta.

d) Presiona Ctrl+Y para generar nuevas simulaciones de lanzamientos y pon atención cuando el resultado sea 2 Águilas o 4 Águilas ¿Con base en esto cual resultado piensas que sea más fácil de obtener? Justifica tu respuesta.

e) ¿Crees que sea fácil obtener solo 1 Águila en 10 lanzamientos de una moneda? Justifica tu respuesta.

9)

a) Si realizaras el experimento 100 y 1000 veces ¿qué valores esperarías obtener? Justifica tu respuesta.

	# de Águilas	# de Soles	Total
Resultado			100

Tabla 10

	# de Águilas	# de Soles	Total
Resultado			*1000*

Tabla 11

De manera predeterminada, el programa realiza la simulación de 10 casos; es decir, de 10 lanzamientos de una moneda, pero se puede cambiar modificando el número de casos en la ventana *Inspect Sample of Moneda* como se muestra en la Figura 7:

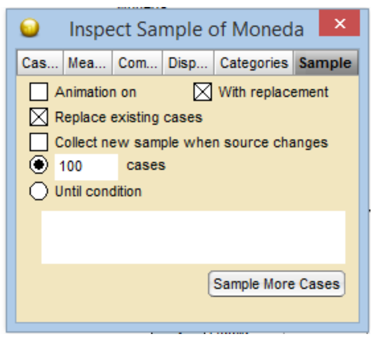


Figura 8

b) De nueva cuenta, mediante Fathom, realiza la simulación de 100 y 1000 lanzamientos y anota el total de resultados en la tabla correspondiente.

	# de Águilas	# de Soles	Total
Resultado			100

Tabla 12

	# de Águilas	# de Soles	Total
Resultado			1000

Tabla 13

¿Coinciden estos resultados con tus predicciones? Justifica tu respuesta.

c) Si repitieras el experimento (1000 lanzamientos), ¿crees que los resultados diferirían mucho de los que obtuviste en la tabla anterior? ¿Por qué?

____
____
____

d) Para realizar de forma rápida una nueva simulación, con la caja *Sample of Moneda* seleccionada, teclea ctrl + Y, conforme repites el experimento, ¿qué es lo que observas?

____
____
____

e) ¿Qué valor le asignarías a que ocurra el evento "obtener Águila al lanzar una moneda"? Justifica tu respuesta.

____
____
____

f) ¿Qué valor le asignarías a que ocurra el evento "obtener Sol al lanzar una moneda"? Justifica tu respuesta.

____
____
____

Ahora contaras el número de veces que cae Águila al realizar 10 lanzamientos de una moneda en múltiples ocasiones.

Para que esto sea más fácil, usaras la variable:

Veces_Aguila = Número de veces que se obtiene Águila al lanzar 10 veces una moneda.

Esta variable toma valores entre 0 y 10, esto quiere decir, es 0 si en 10 lanzamientos no se obtiene ningún Águila y seria 10 si todos los lanzamientos resultaran Águila.

10) Da doble clic en la caja de *Sample of Moneda*, con esto se activara nuevamente el *inspector* de la caja *Sample of Moneda*. Da un clic sobre la pestaña *Measures* (Figura 8).

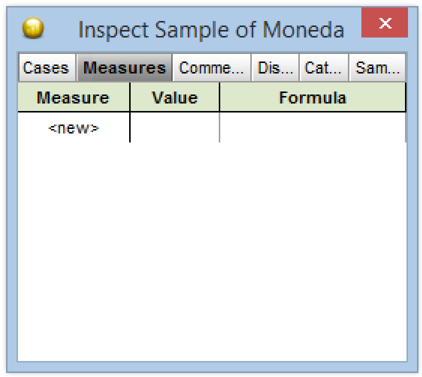


Figura 9

11) Da un clic sobre *<new>*, asígnale el nombre de *" Veces_Aguila "* y posteriormente da un *Enter*. Da doble clic en la fila *Veces_Aguila* bajo la palabra *Formula*, con esto se activara el cuadro de *Formula for Veces_Aguila*, en el insertaras la siguiente fórmula (Figura 9) que contara el número de veces que cae Águila en 10 lanzamientos de una moneda.

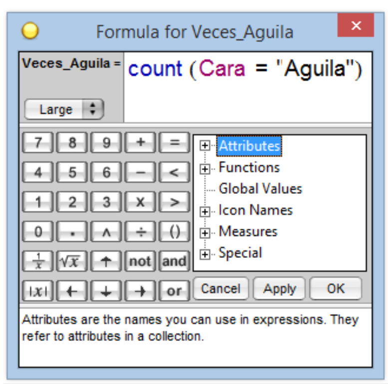
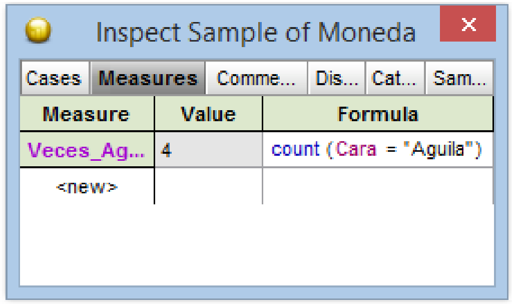


Figura 10

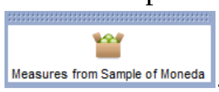
Una vez insertada la formula, da un clic en *OK* y se observara lo siguiente (Figura 10):



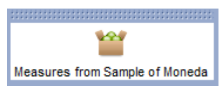
Measure	Value	Formula
Veces_Ag...	4	count (Cara = "Aguila")
<new>		

Figura 11

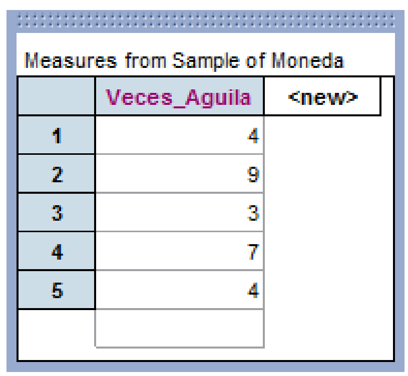
12) Selecciona la caja *Sample of Moneda* 

dando un clic sobre ella. De la barra de menús, abre el menú *Collection* y selecciona *Collect Measures.* Automáticamente aparece otra caja con la etiqueta *Measures from Sample of Moneda* 

. Esta nueva caja contiene los resultados de la variable *Veces_Aguila*, el número de veces que aparece Águila en 10 lanzamientos, al realizar este experimento en 5 ocasiones.

13) Para que corrobores esto, selecciona la caja *Measures from Sample of Moneda* dando un clic sobre la caja 

y arrastra la tabla correspondiente de la barra de herramientas (Figura 11).

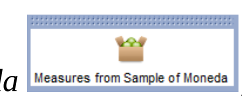


Measures from Sample of Moneda

	Veces_Aguila	<new>
1	4	
2	9	
3	3	
4	7	
5	4	

Figura 12

Como puedes observar, para nuestro ejemplo de la imagen anterior, en la primera ocasión se obtienen 4 Águilas al lanzar 10 veces una moneda, en la segunda ocasión se obtienen 9 Águilas, y así sucesivamente.

14) Da doble clic en la caja de *Measures from Sample of Moneda* 

, con esto se activara el *inspector* de la caja *Measures from Sample of Moneda*. Modifica los valores predeterminados como se te muestra en la Figura 12:

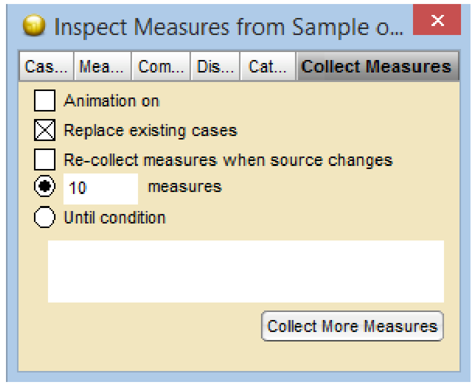


Figura 13

15) A continuación harás el histograma, con los resultados obtenidos de la simulación de contar el número de veces que cae Águila al lanzar 10 veces una moneda, al realizar este experimento en 10 ocasiones. Para ello, arrastra una gráfica 

de la barra de herramientas. Selecciona la columna *Veces_Aguila* de la tabla *Measures from Sample of Moneda* y arrástrala a la parte inferior de la gráfica. En la parte superior de la gráfica cambia la opción *Dot Plot* a *Histogram*; con ello se obtendrá una gráfica como se muestra en la Figura 13.

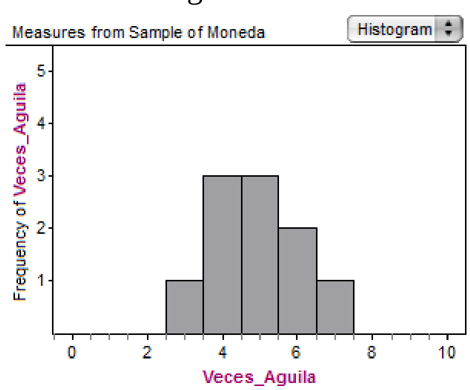
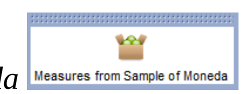


Figura 14

16) Selecciona la caja *Measures from Sample of Moneda* 

dando un clic sobre ella, presiona la tecla Ctrl + Y, y observa que los valores de la tabla y de la gráfica de la caja *Measures from Sample of Moneda* cambian.

a) De acuerdo a lo observado al cambiar los valores de la tabla y la gráfica de la caja *Measures from Sample of Moneda*, ¿cuál es el numero esperado de Águilas que se pueden obtener al lanzar una moneda 10 veces? Justifica tu respuesta.

____

____

____

b) Abre el inspector de la caja *Measures from Sample of Moneda* e indica que quieres *100 measures*, al observa su gráfica, ¿Qué diferencias observas?

____

____

____

c) De nuevo selecciona la caja *Measures from Sample of Moneda*, presiona la tecla Ctrl + Y para que los valores de la tabla y grafica cambien, realiza esto un par de veces y contesta ¿cuál es el numero esperado de Águilas que se pueden obtener al lanzar una moneda 10 veces?? Justifica tu respuesta.

____

____

____

d) Si realizaras el experimento en una sola ocasión, ¿cuál crees que sea el número esperado de Águilas que se obtengan al lanzar una moneda en 10 ocasiones? Justifica tu respuesta.

____

____

____

Fecha ________________

Nombre ____ Edad _________________

Actividad 4

Instrucciones

6. Lee con atención los enunciados planteados, realiza las actividades y contesta lo que se te pide.
7. Utiliza pluma para contestar. Si algo consideras que está equivocado, simplemente lo tachas y continúas.
8. Escribe todo sobre la hoja.
9. Cuando en alguna pregunta no sepas que contestar y quieras dejarla, explica por qué la dejas y pasa a la siguiente.
10. Cuando termines de contestar el cuestionario, voltéalo y espera a que sea recogido.

Actividad

Urna

Se tienen tres urnas, en el interior de cada una se encuentran tres bolas y cada bola tiene una letra diferente A, B o C (Figura 1).

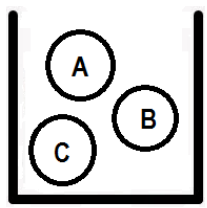


Figura 15

1. Se extrae una bola al azar de la urna 1, se anota su letra en la Tabla 1 y se regresa la bola de nuevo a la urna 1; al realizar este procedimiento 10 veces se obtuvo el siguiente resultado:

Extracción	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resultado	C	C	C	A	A	C	C	B	A	A

Tabla 14

De acuerdo a los resultados anteriores si tuvieras que extraer una bola por undécima vez, ¿Cuál crees que sería el resultado? Justifica tu respuesta.

____

____

____

2. Se extrae una bola al azar de la urna 2, se anota su letra en la Tabla 2 y se regresa la bola de nuevo a la urna 2; al realizar este procedimiento 10 veces se obtuvo el siguiente resultado:

Extracción	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resultado	B	B	A	A	A	B	B	A	A	B

Tabla 15

De acuerdo a los resultados anteriores si tuvieras que extraer una bola por undécima vez, ¿Cuál crees que sería el resultado? Justifica tu respuesta.

____

____

____

3. Se extrae una bola al azar de la urna 3, se anota su letra en la Tabla 3 y se regresa la bola de nuevo a la urna 3; al realizar este procedimiento 10 veces se obtuvo el siguiente resultado:

Extracción	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resultado	B	B	C	A	B	B	B	C	B	C

Tabla 16

De acuerdo a los resultados anteriores si tuvieras que extraer una bola por undécima vez, ¿Cuál crees que sería el resultado? Justifica tu respuesta.

____

____

____

4. Si quisieras que al extraer una bola el resultado fuera la bola marcada con la letra A ¿cuál urna escogerías, la 1, la 2 o la 3? Justifica tu respuesta.

____

____

____

5. Si quisieras que al extraer una bola el resultado fuera la bola marcada con la letra C ¿cuál urna escogerías, la 1, la 2 o la 3? Justifica tu respuesta.

____

____

____

6. A continuación se te proporcionara una urna con tres bolas en su interior, marcadas con las letras A, B y C. Extrae una bola de la urna, anota su letra en la Tabla 4 y regresa la bola a la urna; realiza este procedimiento 10 veces para completar la tabla:

Extracción	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resultado										

Tabla 17

7. Si tuvieras que extraer una bola por undécima vez, ¿cuál bola crees que resultaría selecciónala A, B o C? Justifica tu respuesta.

____

____

____

8. Has estado trabajando con secuencias de 10 extracciones con reemplazo de una urna, ahora contaras el número de veces que se extrae la Bola A, la Bola B y la Bola C al realizar 10 extracciones, por lo que se definirán las siguientes variables:

X = número de veces que se obtiene la Bola A en 10 extracciones

Y = número de veces que se obtiene la Bola B en 10 extracciones

Z = número de veces que se obtiene la Bola C en 10 extracciones

¿Qué valores numéricos puede tomar cada variable? Justifica tu respuesta.

____

____

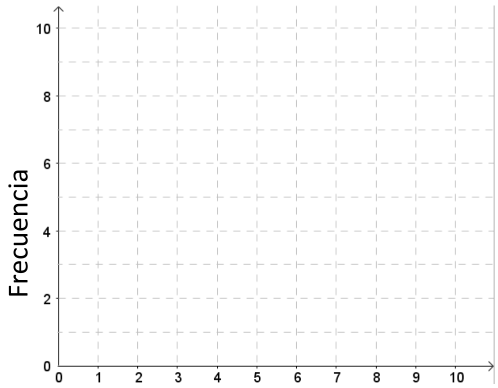
____

9. De nuevo, toma la urna y realiza 10 extracciones (siguiendo el procedimiento indicado en el punto 6), adicionalmente anotaras el valor de las variables *X*, *Y* y *Z* que obtienes en cada secuencia de extracciones; repite este proceso hasta que hayas llenado por completo la Tabla 5:

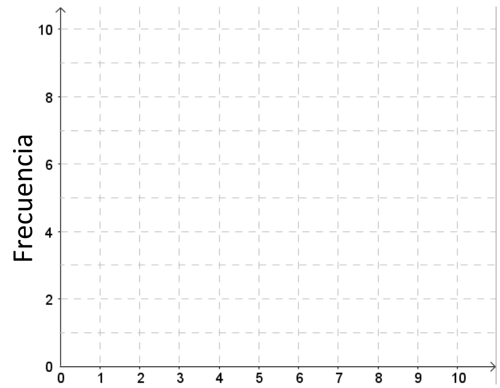
Extracción	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	*X=#Bola A*	*Y=#Bola B*	*Z=#Bola C*
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													

Tabla 18

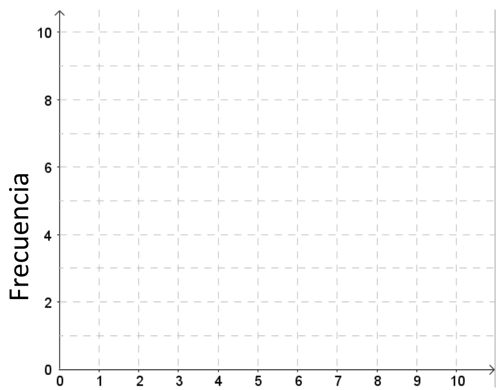
10. Con ayuda de la Tabla 5, grafica la frecuencia de las variables $X = \#BolaA$, $Y = \#BolaB$ y $Z = \#BolaC$.



X = # Bola A



Y = # Bola B



Z = # Bola C

11. ¿Puedes decir un número aproximado de veces que se obtendrá la Bola A al realizar 10 extracciones de la urna? Justifica tu respuesta.

____

____

____

12. ¿Puedes decir un número aproximado de veces que se obtendrá la Bola B al realizar 10 extracciones de la urna? Justifica tu respuesta.

____

____

____

13. ¿Puedes decir un número aproximado de veces que se obtendrá la Bola C al realizar 10 extracciones de la urna? Justifica tu respuesta.

____

____

____

Fecha ________________

Nombre ____ Edad _________________

Actividad 5

Instrucciones

11. Realiza las actividades y contesta lo que se te pide.
12. Utiliza pluma para contestar. Si algo consideras que está equivocado, simplemente lo tachas y continúas.
13. Escribe todo sobre la hoja.
14. Cuando en alguna pregunta no sepas que contestar y quieras dejarla, explica por qué la dejas y pasa a la siguiente.
15. Cuando termines de contestar el cuestionario, voltéalo y espera a que sea recogido.

Actividad

Extracción de bolas de una urna mediante una simulación en Fathom.

En la siguiente actividad se simularan 10, 100 y 1000 extracciones con reemplazo de una urna con tres bolas en su interior, marcadas con las letras A, B y C.

17) Para realizar la actividad usaras el programa Fathom Versión 2.0, el cual se encuentra en el escritorio de la computadora; da doble clic sobre el icono 

y se abrirá la siguiente ventana (Figura 1):

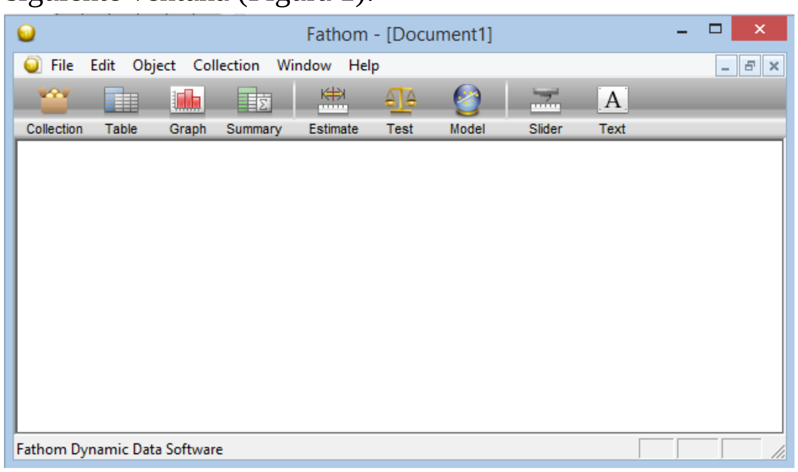


Figura 16

18) De la barra de herramientas de Fathom arrastra el icono 

. Da doble clic sobre *Collection 1*, asígnale el nombre de *Urna* y da un clic en *OK* (Figura 2).

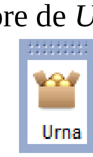


Figura 17

19) Selecciona la caja de la colección *Urna* 

dando un clic sobre ella y arrastra una tabla de la barra de herramientas 

. Da un clic sobre *<new>* y asígnale el nombre de *Bola*, posteriormente da un *Enter* y escribe directamente *A*, *B* y *C* (Figura 3).

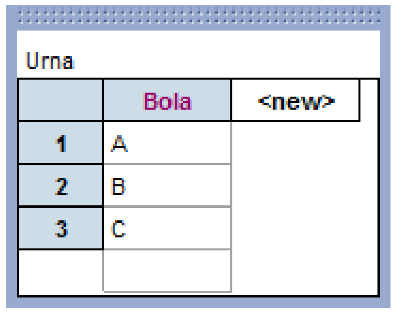


Figura 18

20) Selecciona la caja de la colección *Urna* haciendo clic sobre ella. De la barra de menús, abre el menú *Collection* y selecciona *Sample Cases*. Automáticamente aparece otra caja con la etiqueta *Sample of Urna* 

. Esta nueva caja contiene los resultados de la simulación de la extracción de una bola en una urna.

21) Da doble clic en la caja de *Sample of Urna*, con esto se activara el *inspector* de la caja *Sample of Urna*. Modifica los valores predeterminados como se te muestra en la Figura 4:

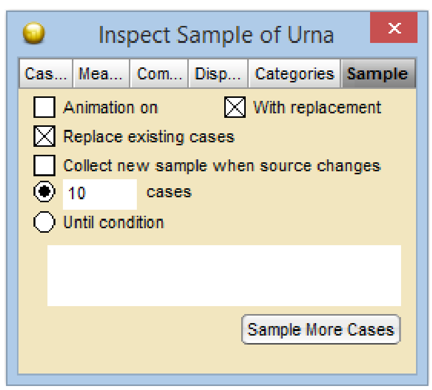
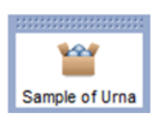
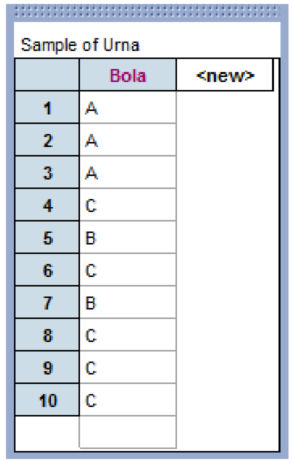


Figura 19

22) Selecciona la caja de *Sample of Urna* 

dando un clic sobre ella y arrastra una tabla de la barra de herramientas 

. Se producirá una tabla como se muestra en la Figura 5:



Sample of Urna

	Bola	<new>
1	A	
2	A	
3	A	
4	C	
5	B	
6	C	
7	B	
8	C	
9	C	
10	C	

Figura 20

c) Anota los valores que obtuviste en la Tabla 1:

Extracción	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resultado										

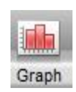
Tabla 19

d) ¿Crees que la simulación anterior refleja la extracción de una bola de la urna en 10 ocasiones? Justifica tu respuesta.

____

____

____

23) Ahora realizaras una gráfica, con los resultados obtenidos de la simulación de 10 extracciones de una bola. Para ello, arrastra el icono gráfica 

de la barra de herramientas. Selecciona la columna *Bola* de la tabla *Sample of Urna* y arrástrala a la parte inferior de la gráfica. En la parte superior de la gráfica cambia la opción a *Bar Chart;* con ello se obtendrá una gráfica como se muestra en la Figura 6.

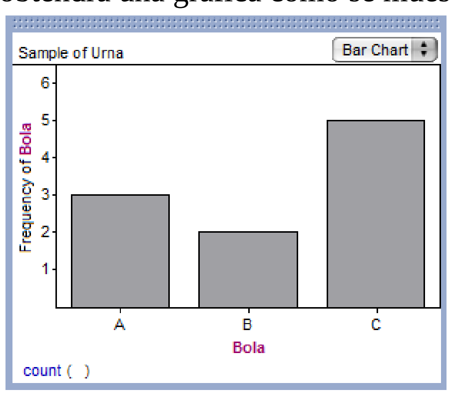


Figura 21

Nota: Si colocas el cursor sobre alguna de las barras, en la esquina inferior izquierda de la ventana de trabajo (sobre el botón de inicio de Windows) verás *aparecer la frecuencia. Además, si das clic en cualquiera de las barras, la barra seleccionada se ilumina de un color rojo y, al mismo tiempo, los casos correspondientes se destacan en la tabla.*

24) Selecciona la caja *Sample of Urna* 

dando un clic sobre ella, presiona la tecla Ctrl + Y, y observa que los valores de la tabla y de la gráfica de la caja *Sample of Urna* cambian. La razón es que al presionar la tecla Ctrl + Y, se vuelve a realizar la simulación de 10 extracciones de una bola en la urna.

f) Realiza algunas simulaciones más y anota los resultados en la Tabla 2:

Simulación	# Bola A	# Bola B	# Bola C
1			
2			
3			
4			
5			

Tabla 20

g) ¿Por qué crees que varían los datos en cada simulación? Justifica tu respuesta.

h) ¿Qué crees que sea más fácil obtener 2 bolas o 4 bolas marcadas con A al realizar 10 extracciones en la urna? Justifica tu respuesta.

i) Presiona Ctrl+Y para generar nuevas simulaciones de extracciones y pon atención cuando el resultado sea 2 bolas o 4 bolas marcadas como A ¿Con base en esto cual resultado piensas que sea más fácil de obtener? Justifica tu respuesta.

j) ¿Crees que sea fácil obtener solo 1 bola marcada como A en 10 extracciones en la urna? Justifica tu respuesta.

25)

g) Si realizaras el experimento 100 y 1000 veces ¿qué valores esperarías obtener? Justifica tu respuesta.

	# Bola A	# Bola B	# Bola C	Total
Resultado				100

Tabla 21

	# Bola A	# Bola B	# Bola C	Total
Resultado				1000

Tabla 22

De manera predeterminada, el programa realiza la simulación de 10 casos; es decir, de 10 extracciones con reemplazo de la urna, pero se puede cambiar modificando el número de casos en la ventana *Inspect Sample of Urna* como se muestra en la Figura 7:

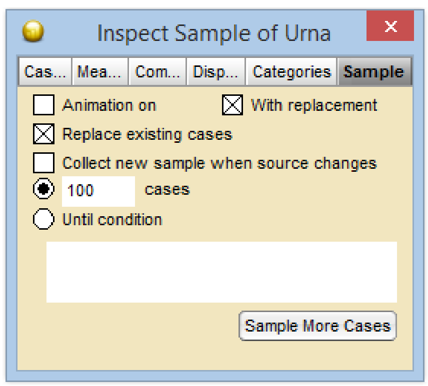


Figura 22

h) De nueva cuenta, mediante Fathom, realiza la simulación de 100 y 1000 extracciones y anota tus resultados en la tabla correspondiente.

	# Bola A	# Bola B	# Bola C	Total
Resultado				100

Tabla 23

	# Bola A	# Bola B	# Bola C	Total
Resultado				1000

Tabla 24

¿Coinciden estos resultados con tus predicciones? Justifica tu respuesta.

i) Si repitieras el experimento (1000 extracciones), ¿crees que los resultados diferirían mucho de los que obtuviste en la tabla anterior? ¿Por qué?

____
____
____

j) Para realizar de forma rápida una nueva simulación, con la caja *Sample of Urna* seleccionada, teclea ctrl + Y, conforme repites el experimento, ¿qué es lo que observas?

____
____
____

k) ¿Qué valor le asignarías a que ocurra el evento "obtener la Bola A al hacer una extracción de la urna"? Justifica tu respuesta.

____
____
____

l) ¿Qué valor le asignarías a que ocurra el evento "obtener la Bola B al hacer una extracción de la urna"? Justifica tu respuesta.

____
____
____

m) ¿Qué valor le asignarías a que ocurra el evento "obtener la Bola C al hacer una extracción de la urna"? Justifica tu respuesta.

____
____
____

Ahora contaras el número de veces que se extrae la Bola A al realizar 10 extracciones con reemplazo de la urna en múltiples ocasiones.

Para que esto sea más fácil, usaras la variable:

Veces_BolaA = Número de veces que se obtiene la Bola A al realizar 10 extracciones con reemplazo de una urna.

Esta variable toma valores entre 0 y 10, esto quiere decir, es 0 si en las 10 extracciones no resulto seleccionada ninguna vez la Bola A y es 10 si en todas las extracciones resulto seleccionada la Bola A.

26) Da doble clic en la caja de *Sample of Urna*, con esto se activara nuevamente el *inspector* de la caja *Sample of Urna*. Da un clic sobre la pestaña *Measures* (Figura 8).

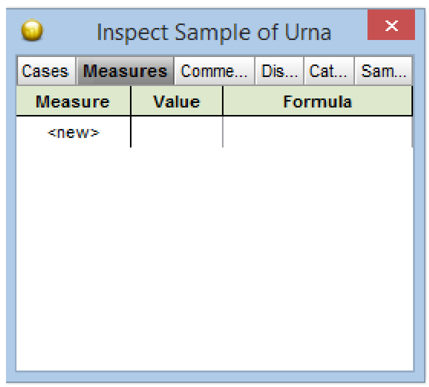


Figura 23

27) Da un clic sobre <*new*>, asígnale el nombre de *"Veces_BolaA"* y posteriormente da un *Enter*. Da doble clic en la fila *Veces_BolaA* bajo la palabra *Formula*, con esto se activara el cuadro de *Formula for Veces_BolaA*, en él insertaras la siguiente fórmula (Figura 9) que contara el número de veces se extrae la Bola A al realizar 10 extracciones de la urna.

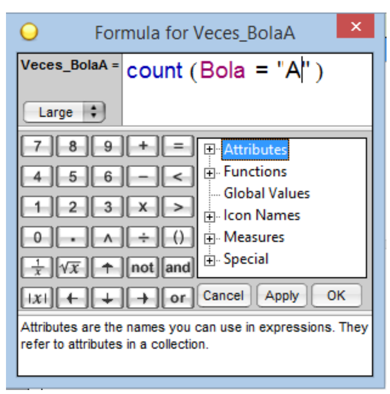


Figura 24

Una vez insertada la formula, da un clic en *OK* y se observara lo siguiente (Figura 10):

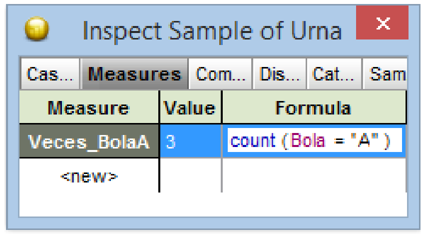
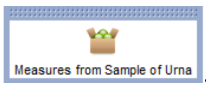
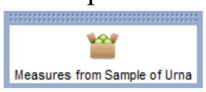


Figura 25

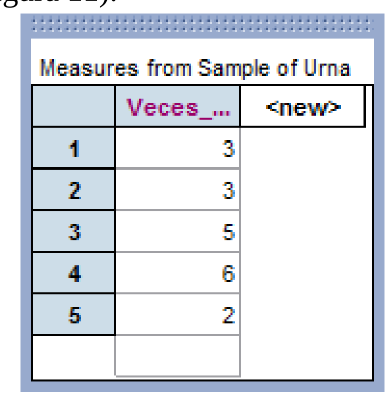
28) Selecciona la caja *Sample of Urna* 

dando un clic sobre ella. De la barra de menús, abre el menú *Collection* y selecciona *Collect Measures.* Automáticamente aparece otra caja con la etiqueta *Measures from Sample of Urna* 

. Esta nueva caja contiene los resultados de la variable *Veces_BolaA*, el número de veces que se selecciona la Bola A en 10 extracciones con reemplazo de la urna, al realizar este experimento en 5 ocasiones.

29) Para que corrobores esto, selecciona la caja *Measures from Sample of Urna* 

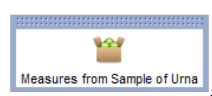
dando un clic sobre ella y arrastra la tabla correspondiente de la barra de herramientas (Figura 11).


Measures from Sample of Urna

	Veces_...	<new>
1	3	
2	3	
3	5	
4	6	
5	2	

Figura 26

Como puedes observar, para nuestro ejemplo de la imagen anterior, en la primera y segunda ocasión se obtienen 3 Bolas A al realizar 10 extracciones, en la tercera ocasión se obtienen 5 Bolas A, y así sucesivamente.

30) Da doble clic en la caja de *Measures from Sample of Urna* 

, con esto se activara el *inspector* de la caja *Measures from Sample of Urna*. Modifica los valores predeterminados como se te muestra en la Figura 12:

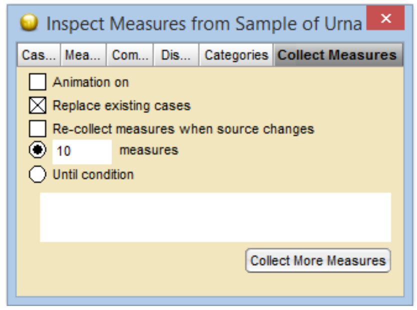


Figura 27

31) A continuación harás el histograma, con los resultados obtenidos de la simulación de contar el número de veces que se extrae la Bola A al realizar 10 extracciones de la urna, al realizar este experimento en 10 ocasiones. Para ello, arrastra una gráfica 

de la barra de herramientas. Selecciona la columna *Veces_BolaA* de la tabla *Measures from Sample of Urna* y arrástrala a la parte inferior de la gráfica. En la parte superior de la gráfica cambia la opción *Dot Plot* a *Histogram*; con ello se obtendrá una gráfica como se muestra en la Figura 13.

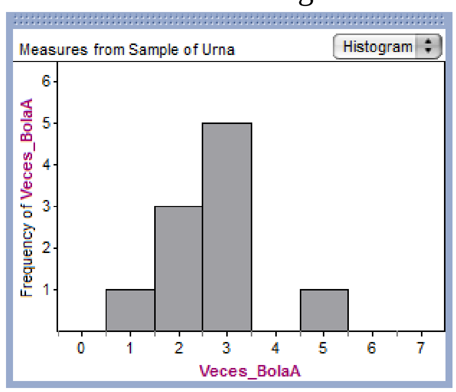
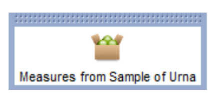


Figura 28

32) Selecciona la caja *Measures from Sample of Urna* 

dando un clic sobre ella, presiona la tecla Ctrl + Y, y observa que los valores de la tabla y de la gráfica de la caja *Measures from Sample of Urna* cambian.

e) De acuerdo a lo observado al cambiar los valores de la tabla y la gráfica de la caja *Measures from Sample of Urna*, ¿cuál es el numero esperado de veces que se obtendrá la Bola A al realizar 10 extracciones de la urna? Justifica tu respuesta.

____

____

____

f) Abre el inspector de la caja *Measures from Sample of Urna* e indica que quieres *100 measures*, al observa su gráfica, ¿Qué diferencias observas?

____

____

____

g) De nuevo selecciona la caja *Measures from Sample of Urna*, presiona la tecla Ctrl + Y para que los valores de la tabla y grafica cambien, realiza esto un par de veces y contesta ¿cuál es el numero esperado de veces que se obtendrá la Bola A al realizar 10 extracciones de la urna? Justifica tu respuesta.

____

____

____

h) Si realizaras el experimento en una sola ocasión, ¿cuál es el numero esperado de veces que se obtendrá la Bola A al realizar 10 extracciones de la urna? Justifica tu respuesta.

____

____

____

Fecha ________________

Nombre ____ Edad _________________

Actividad 6

Instrucciones

16. Lee con atención los enunciados planteados y contesta lo que se te pide.
17. Utiliza pluma para contestar. Si algo consideras que está equivocado, simplemente lo tachas y continúas.
18. Escribe todo sobre la hoja.
19. Cuando en alguna pregunta no sepas que contestar y quieras dejarla, explica por qué la dejas y pasa a la siguiente.
20. Cuando termines de contestar el cuestionario, voltéalo y espera a que sea recogido.

Cuestionario

1. Lanzamiento de monedas.
    a. Una moneda se lanza al aire cuatro veces y sale {Sol, Sol, Sol, Sol} en las cuatro ocasiones. Si se lanzara la moneda una quinta vez, ¿qué resultado crees que sea más probable Águila o Sol? Justifica tu respuesta.

    ____

    ____

    ____

    b. ¿Cuál de las siguientes secuencias es más probable que suceda al lanzar 5 veces una moneda?, ¿cuál secuencia es la menos probable? Justifica tu respuesta.
        i. {Sol, Sol, Sol, Águila, Águila}
        ii. {Águila, Sol, Sol, Águila, Sol}
        iii. {Águila, Sol, Águila, Águila, Águila}
        iv. {Sol, Águila, Sol, Águila, Sol}

    ____

    ____

    ____

    c. Si se lanzan 10 monedas al mismo tiempo, ¿Cuántas Águilas crees que se obtengan?
        i. 3, 4, 5, 6 o 7
        ii. 4, 5 o 6
        iii. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 o 10
        iv. 5

    Justifica tu respuesta.

    ____

    ____

    ____

2. Urna

Se tiene una urna con tres bolas, cada una con una letra diferente A, B o C (Figura 1).

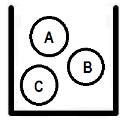


Figura 29

a. Se saca una bola aleatoriamente, se anota en una tabla la letra que corresponde a la bola y se regresa a la urna; si se repite este experimento 6 veces, ¿cuál de las siguientes listas crees que se obtenga?
   i. B, C, C, A, B, B
   ii. A, A, C, B, B, C
   iii. A, C, A, A, C, C
   iv. Cualquiera de las anteriores

   Justifica tu respuesta.

   ____

   ____

   ____

b. Imagina que ahora se repite el experimento 60 veces; llena la Tabla 1 escribiendo cuantas veces crees que saldrá cada bola. Justifica tu respuesta.

Bola	Número de veces
A	
B	
C	
Total	60

Tabla 25

____

____

____

c. Si se repite este experimento 30 veces ¿Cuál de las siguientes tablas crees que sea la que se obtuvo? Justifica tu respuesta.

Bola	Frecuencia
A	12
B	7
C	11
Total	30

Tabla 2 [   ]

Bola	Frecuencia
A	11
B	18
C	1
Total	30

Tabla 3 [   ]

Bola	Frecuencia
A	10
B	10
C	10
Total	30

Tabla 4 [   ]

____

____

____