Cinvestav

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS AVANZADOS

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Dificultades en la comprensión de la división de fracciones en alumnos de primero de secundaria

Tesis que presenta:

GUADALUPE MARTÍNEZ ESTRELLA

Para obtener el grado de Maestra en Ciencias en la

Especialidad de Matemática Educativa

Directora de tesis:

DRA. MARTA ELENA VALDEMOROS ÁLVAREZ

Ciudad de México Febrero 2019

Resumen

Dificultades en la comprensión de la división de fracciones en alumnos de primero de secundaria

Resolver problemas que impliquen una división de fracciones es dificultoso para los alumnos. Varios estudios, entre ellos los realizados por Streefland, (1993), Fishbein, Deri, Nello, Marino, (1985), Lamon, (2012), Flores, (2014), Nillas, (2003), se centran en la división de fracciones, por ser una operación de fácil aplicación pero de difícil comprensión y establecen que estas dificultades no sólo se presentan en alumnos de secundaria, se observan también en estudiantes de nivel medio superior o superior, como pudimos constatar en una experiencia piloto asociada a esta investigación con estudiantes del Colegio Nacional de Educación Profesional Técnica (CONALEP).

Esta tesis muestra una investigación realizada en torno a las dificultades de comprensión de la división de fracciones en alumnos de primero de secundaria. Se centra en este nivel porque es ahí en donde inicialmente se abordan dichos contenidos curriculares. Se realizó una exploración en relación al uso de la división de fracciones en el cálculo aritmético y los significados que los estudiantes dan a las fracciones y sus operaciones, mediante observación, el empleo de un cuestionario y la aplicación de un taller.

Se identifican dificultades en la adquisición de significado y sentido de esta construcción numérica, que surgen a partir de una enseñanza basada solamente en la aplicación de algoritmos, en la que se aborda de manera muy breve la división de fracciones y esto termina provocando confusión, sin permitir que los estudiantes desarrollen de manera intuitiva el significado de la operación. Por ello, se propone un breve diseño didáctico que permita a través de la resolución de problemas (problemas que faciliten la identificación del significado de la división de fracciones), así como del empleo de materiales visuales y manipulativos contribuir a superar dichas dificultades y lograr que el estudiante alcance la comprensión de estos contenidos semánticos.

Fueron realizadas tres entrevistas de corte didáctico. Se seleccionó a los estudiantes cuyo desempeño mostraba diversas dificultades, a la par que exhibían la problemática general del grupo de estudio. Se presenta el caso de Fernando, quien después de presentar serias deficiencias en el manejo de los números fraccionarios, al participar en la entrevista, confrontándolo con sus errores y resolviendo problemas mediante el empleo de material visual manipulativo, se logró que alcanzara un avance sustancial en la adquisición de significado y sentido de la división de fracciones. El caso

de Brenda, que fue seleccionada por presentar un desempeño en el que se evidenciaron errores que llamaron nuestra atención, como es la inversión de denominadores, es decir, sabemos que la fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el total de las partes, en dónde la primera representa al numerador y la segunda al denominador, en el caso de Brenda, ella los identifica de manera invertida; dicho problema lo atribuimos al desconocimiento del sentido del denominador en ese par ordenado escrito según la notación fraccionaria $\frac{a}{b}$.

También se presentó el caso de Martha, una persona muy entusiasta, con muchos deseos de participar, que presenta capacidad reflexiva pero que cometió errores que se atribuyen a la aplicación de nociones inconsistentes atribuidas por ella a las fracciones, las cuales logró corregir en la entrevista a través de la confrontación de sus errores y el empleo de material visual manipulativo.

Esta investigación nos permite mostrar que en la enseñanza básica, con el uso adecuado de materiales visuales y manipulativos se puede lograr que el estudiante realice una reflexión en torno a la construcción de dichos números, lo alejen del error y lo acerquen a la formación de contenidos semánticos adecuados a la división de fracciones.

Abstract

Difficulties in understanding the division of fractions in students of secondary school

Problems solving that involves division of fractions is difficult for students. Several studies, including those by Streefland (1993), Fishbein, Deri, Nello, Marino (1985), Lamon (2012), Flores (2014), Nillas, (2003), focus on the division of fractions, for being an operation of easy application but of difficult understanding and establish that these difficulties not only occur in secondary school students, they are also observed in students of high school level or higher, as we could see in a pilot experience associated with this research with students of the National College of Technical Professional Education (CONALEP).

This thesis shows an investigation carried out around the difficulties of understanding the division of fractions in students of the first year of secondary school. It focuses on this level because that is where the curricular contents are initially addressed. An exploration was carried out in relation to the use of division of fractions in the arithmetic calculation and the meanings that students give to fractions and their operations, through observation, the use of a questionnaire and the application of a workshop.

Difficulties are identified in the acquisition of meaning and sense of this numerical construction, which arise from a teaching based only on the application of algorithms, in which the division of fractions is dealt with very briefly and this ends up causing confusion, without allow students to intuitively develop the meaning of the operation. For this reason, a brief didactic design is proposed that allows, through the resolution of problems (problems that facilitate the identification of the meaning of the division of fractions), as well as the use of visual and manipulative materials to help overcome these difficulties and achieve the student reaches the understanding of these semantic contents.

Three didactic interviews were conducted. The students whose performance showed various difficulties were selected, at the same time they exhibited the general problems of the study group. The case of Fernando is presented, who after presenting serious deficiencies in the handling of the fractional numbers, when participating in the interview, confronting him with his errors and solving problems through the use of manipulative visual material, he was able to reach a substantial advance in the acquisition of meaning and sense of the division of fractions. The case of Brenda, who was selected for presenting a performance in which there were errors that caught our attention, such as the inversion of denominators, that is, we know that the fraction indicates the relationship that exists between a number of parts and the total of the parties, where the first represents the numerator and the second the denominator, in the case of Brenda, she identifies them in an inverted manner; we attribute this problem to the ignorance of the meaning of the denominator in that ordered pair written according to the fractional notation a / b.

The case of Martha was also presented, a very enthusiastic person, with many wishes to participate, who presents reflective capacity but who made mistakes that are attributed to the application of inconsistent notions attributed by her to the fractions, which she managed to correct in the interview through the confrontation of their errors and the use of manipulative visual material.

This research allows us to show that in basic education, with the appropriate use of visual and manipulative materials, the student can make a reflection about the construction of these numbers, move it away from the error and bring it closer to the content formation semantics appropriate to the division of fractions.

Índice

Capítulo 3

Capítulo 4

Capítulo 5

Capítulo 6

Capítulo 7

Capítulo 8

Capítulo 9

Capítulo 10

Apéndice A

Apéndice B

Apéndice C

Introducción

En el paso del alumno por los distintos niveles de Educación Básica, en ocasiones, los contenidos educativos no son asimilados de manera clara y al llevarse a cabo la transición de un nivel a otro, los adolescentes arrastran deficiencias que se ven reflejadas en su evaluación.

Entre los tópicos en los que se muestran deficiencias en la aritmética básica se considera el manejo de operaciones con números racionales o fracciones. El aprendizaje de las operaciones con tales números es un tema de difícil comprensión (Kieren, 1976, Streefland, 1993, Llinares & Sánchez, 2000, Valdemoros, 2001). En México, el plan de estudios de primaria incluye el aprendizaje de dichos números a partir de 3º y hasta 6º grado. Se retoman en primero de secundaria como una recapitulación, para consolidar el conocimiento, ampliar el tratamiento de la multiplicación e introducir la división de fracciones. Sin embargo, se ha podido constatar que, en general, la mayoría de los estudiantes de primero de secundaria no recuerdan lo aprendido en la primaria en lo que se refiere a la resolución de operaciones con fracciones, sus conocimientos son limitados o confusos. Un gran porcentaje de estudiantes de primaria llegan a la secundaria con muchas carencias.

En sexto de primaria, en aritmética, los programas abordan las operaciones de suma y resta con números naturales y fraccionarios, así como la resolución de problemas multiplicativos de la forma a/b de n. Al ingresar a secundaria se abordan los contenidos matemáticos que darán continuidad a esos conocimientos adquiridos en la primaria estableciendo nuevos propósitos y logros educativos.

El programa de estudios 2011 de matemáticas, en secundaria, menciona que dentro de los propósitos de la asignatura, se espera que los alumnos empleen el cálculo mental, la estimación de resultados, trabajen operaciones con números enteros, fraccionarios o decimales, y resuelvan problemas aditivos y multiplicativos (SEP, 2011).

El nuevo modelo educativo 2017, que inició su implementación en el actual período lectivo 2018-2019, para educación secundaria, en lo referente a fracciones establece como propósito lo que se destaca a continuación.

"Utilizar de manera flexible la estimación, el cálculo mental y el cálculo escrito en las operaciones con números enteros, fraccionarios y decimales positivos y negativos" (SEP, 2017, p.162).

Sin embargo, las pruebas estandarizadas de evaluación aplicadas por la Secretaría de Educación Pública (SEP) a los estudiantes de secundaria, entre ellas la prueba Plan Nacional para la Educación de los Aprendizajes (Planea), arrojan resultados educativos desfavorables en la asignatura de matemáticas en la que se consideran las operaciones con fracciones.

En dicha prueba se evalúan los logros obtenidos por los estudiantes de educación básica en cuanto a Lenguaje y Comunicación así como en Matemáticas. La evaluación se realiza a través de niveles del I al IV. La prueba Planea que nos concierne en esta investigación es la que se refiere a la evaluación de secundaria en Matemáticas, en particular la evaluación del manejo de resolución de problemas con números fraccionarios. Dicha prueba establece que el estudiante que logra desarrollar estos contenidos alcanza el Nivel III. Sin embargo, los resultados obtenidos en la prueba aplicada en 2017 arrojan que más del 50% de los estudiantes evaluados sólo llega al Nivel I y sólo el 8% a nivel nacional alcanza el nivel III en secundarias generales y técnicas públicas. Para mayor profundización de estos señalamientos véase Apéndice A. Resultados de la prueba Planea, 2017.

Investigaciones sobre el tema mencionan que "La enseñanza y aprendizaje de las fracciones sigue teniendo dificultades en la educación básica" (Perera y Valdemoros, 2009).

Meneses (1991), Flores (2014), en su estudio sobre fracciones mencionan que no sólo los alumnos de nivel básico tienen dificultades en la realización de operaciones con fracciones, sino que aún los estudiantes que llegan a niveles universitarios tienen dificultades en el manejo de esas operaciones. Meneses realiza exploración en estudiantes de la Normal superior y manifiesta que algunos no tenían una idea precisa del significado de una multiplicación o división de fracciones, otros multiplicaban o dividían por la unidad y otros realizaban problemas con enteros y los disfrazaban en forma de fracciones. Por todo esto, no es raro que las fracciones sean fuente de dificultades en la enseñanza básica.

De manera personal, al trabajar en la presente investigación, la autora de esta tesis descubre que presenta deficiencias en la comprensión del concepto de multiplicación y división de fracciones, desarrollando solamente los algoritmos de solución, sin comprender su significado y sentido.

Por otro lado, pudimos constatar al revisar los programas de estudio de primer semestre de nivel medio superior, CCH y vocacional (véase Apéndice B), que todos ellos incluyen una recapitulación de contenidos curriculares previos, antes de iniciar los programas propios del nivel. Lo que nos permite suponer que los alumnos que ingresan al nivel medio superior aún presentan deficiencias en cuanto al dominio de la aritmética básica, entre ellas el desarrollo de operaciones con fracciones y su respectiva comprensión.

Flores (2014), menciona que los maestros deben diseñar o desarrollar experiencias de aprendizaje que permitan al estudiante formar conocimiento matemático por sí mismos, sin que tengan que depender de los algoritmos y así desarrollar competencia en el manejo de los números racionales, afirma que ese conocimiento permitirá a los alumnos, en la medida de lo posible, corregir sus errores, generar nuevo conocimiento y recuperar lo que hayan olvidado.

El no corregir los errores o la confusión en los estudiantes, generados por la introducción temprana de los algoritmos sin la comprensión del significado y sentido, puede conducir a problemas posteriores en otras áreas de las matemáticas como el álgebra.

Para aminorar el problema es necesario conocer cuáles son las interpretaciones que los alumnos dan a las situaciones problemáticas cuando resuelven tareas de división de fracciones y qué estrategias emplean. Es necesario que los profesores aumentemos nuestro marco de referencia que nos faculte para seleccionar problemas y diseñar tareas adecuadas que logren construir una amplia comprensión de la división de fracciones en los estudiantes.

Por todo lo anterior, consideramos que es importante realizar investigación respecto a la construcción numérica de la división de fracciones que permita modificar la acción didáctica, siendo a la par guía de los estudiantes para salvar las dificultades y crear su propio conocimiento, al resolver problemas que involucren fracciones, permitiendo que desarrollen competencias en ese aspecto.

Para presentar los resultados de esta investigación de Maestría, la información se organiza en 10 capítulos, que comprenden cada una de las etapas del proceso de desarrollo que se llevó a cabo y que se describen a continuación.

En el Capítulo 1 se da a conocer el planteamiento del problema, las preguntas y los objetivos de investigación, así como su justificación. Se integra además el marco teórico que da sustento a este estudio, el cual se organiza de la siguiente manera: enfoque didáctico general de las fracciones, equivalencia y operaciones con fracciones, enfoque didáctico de la división de fracciones, problemas de estructura multiplicativa, estrategias de solución de la división de fracciones, modelo de conmensuración, uso de diversos modelos concretos, resolución de problemas, errores y dificultades cognitivas, tratamiento curricular de los errores, la comprensión como superación de obstáculos cognitivos, el juego en el proceso educativo, todos ellos temas que consideramos de importancia para el desarrollo de la investigación.

El Capítulo 2 integra los métodos y los instrumentos metodológicos empleados en la investigación, los que incluyen observación participante, aplicación de un cuestionario inicial de exploración, un taller exploratorio, entrevistas en profundidad y de corte didáctico, la aplicación de un cuestionario final y el estudio de tres casos. En este Capítulo además se hace mención de los sujetos y el escenario de investigación y se habla ampliamente sobre el diseño metodológico de los instrumentos empleados.

En el Capítulo 3 se hace referencia a la descripción y análisis del primer instrumento metodológico empleado, la observación participante, en la que se incluye todo lo relativo al trabajo observado en el aula, el lenguaje empleado por la profesora, la forma en que responden y participan los estudiantes, observar si se emplea algún material didáctico; así como la observación indirecta, en la que se pudo observar también un cuaderno de apuntes de un estudiante que nos permitió tener un mayor acercamiento al registro de actividades del día a día en la clase de matemáticas.

En el Capítulo 4 se habla ampliamente sobre el cuestionario inicial de exploración. Se presentan resultados observados y se inicia el análisis de las estrategias de resolución empleadas por los estudiantes, así como de las dificultades cognitivas detectadas. Se identifican categorías de análisis de la división de fracciones.

En el Capítulo 5 se analiza el trabajo realizado por los estudiantes en el taller exploratorio, en el que se les proporcionaron materiales visuales manipulativos y se les pidió realizar trabajo colaborativo. El objetivo del taller consistía en que representaran mediante pictogramas el resultado de los problemas de operaciones con fracciones. Se da cuenta de los hallazgos y las dificultades observadas debido a la incorrecta aplicación de los algoritmos y el limitado acercamiento que tenían al uso de materiales, algo que sin este instrumento no hubiera sido posible observar. Se centra el análisis en la tarea de división de fracciones. Se realizó también la aplicación de un juego de operaciones con fracciones diseñado por la investigadora para acercar al estudiante al significado de la operación de manera lúdica.

El Capítulo 6 incluye los problemas diseñados para las entrevistas realizadas a los tres estudiantes seleccionados, se menciona cuál fue el proceso de selección y se incluyen los problemas adicionales y los materiales visuales y manipulativos empleados, los que permitieron lograr avances sustanciales en la comprensión de los estudiantes entrevistados. Se presentan también cinco problemas de división de fracciones en sus diferentes interpretaciones, el isomorfismo de medida, el inverso del producto de medida y la comparación multiplicativa, temas que involucran diferentes procesos de razonamiento y que constituyen el cuestionario final, el cual fue aplicado a los tres estudiantes con el propósito de identificar si se lograron avances en los estudiantes entrevistados.

En el Capítulo 7 se incluyen los resultados obtenidos por Fernando en el cuestionario inicial, el taller, la entrevista y el cuestionario final que sólo incluye problemas de división de fracciones. De la observación y análisis de tales resultados surgió el estudio de casos de Fernando que es ampliamente abordado en el capítulo.

El Capítulo 8 incluye el estudio de casos de Brenda en el que se contrastan las elaboraciones que realiza en el Cuestionario inicial, el Taller, en el transcurso de la Entrevista y en el Cuestionario final. Se analizan los resultados obtenidos para dar cuenta de su evolución.

El Capítulo 9 involucra el estudio de casos de Martha. En este capítulo, al igual que en los dos anteriores, se comparan las tareas elaboradas por Martha a lo largo de la investigación y se analizan mediante triangulación los resultados.

Por último, en el Capítulo 10 se presenta un análisis general y conclusiones de la investigación, y se hace mención de algunas sugerencias para la enseñanza.

En este trabajo se incluyen también Apéndices que complementan la información de la investigación. El Apéndice A muestra los resultados de la Evaluación Planea. El Apéndice B incluye los programas de estudio de nivel medio superior, CCH y Vocacional, para complementar la información presentada en la Introducción. En el Apéndice C se presenta el cuestionario de exploración aplicado a estudiantes de Conalep. En el Apéndice D se muestra el instructivo del juego de fracciones diseñado por la investigadora, en el que se describen las reglas de uso y los materiales empleados.

Capítulo 1

El problema de investigación y su marco teórico

En este capítulo se aborda el problema de investigación y su justificación, se exponen las razones o argumentos para realizarla y el objetivo general que se persigue, así como los objetivos específicos. También se presenta el marco teórico que da sustento a la investigación, el cual considera las aportaciones de algunos investigadores especializados en el tema de las fracciones.

Es importante mencionar que comprender las fracciones es esencial para el aprendizaje de álgebra, geometría y otros ámbitos de las matemáticas superiores. Las operaciones con fracciones, se abordan aquí mediante la resolución de problemas porque es en este terreno dónde los estudiantes recrean las experiencias comunitarias y familiares, a la par que enriquecen y construyen eficazmente nuevos significados, nociones y conceptos ligados a las fracciones (Valdemoros & Ruiz, 2008).

El desarrollo de los conceptos matemáticos debe partir de situaciones problemáticas tomadas de la vida real que los ejemplifiquen y tengan sentido para los estudiantes (Freudenthal, 1983, Streefland, 1993, Quintero, 2006).

Sin embargo, el profesor generalmente les presenta a los estudiantes el algoritmo de la operación (refiriéndonos en específico a la división de fracciones) sin que antes ellos hubiesen comprendido esta composición numérica particular como tampoco las situaciones problemáticas involucradas, lo que interfiere con la construcción tanto del significado como del sentido y ello puede generar confusión o incluso un retroceso en el aprendizaje.

1.1. Problema de investigación

Considerando lo anterior, la presente investigación se centra en:

La identificación de las dificultades que presentan los alumnos de primer grado de secundaria en la comprensión de la división de fracciones, por ser la operación de mayor complejidad semántica en el ámbito de dichos números, con el fin de proporcionar información que contribuya al tratamiento de tales números.

Dentro de las cuatro operaciones con fracciones, la división es abordada de manera muy rápida y sin profundidad, por lo que al terminar la secundaria los alumnos manejan solamente el algoritmo de solución sin comprender el sentido de la división, carecen del conocimiento técnico que explica por qué este procedimiento es matemáticamente justificado y por qué se produce el resultado obtenido. Revisando los libros de texto de primero de secundaria actuales, se observa que sólo un par de lecciones involucran dicha operación, enfocada primordialmente en procedimientos algorítmicos, por lo que su enseñanza es muy limitada.

Hart (1981) encontró que los niños de entre 12 y 15 años evitan multiplicar o dividir fracciones cuando resuelven problemas, prefieren realizar procedimientos más extensos empleando números naturales o decimales, aún cuando la forma más sencilla sea mediante una operación con fracciones.

La división de fracciones puede ser presentada como un procedimiento algorítmico fácilmente enseñado y aprendido (productos cruzados), lo cual es como generalmente se aborda en México; sin embargo, semánticamente es así difícil asimilarla, es decir, a nivel de significado, sentido, nociones y conceptos asociados, su explicación requiere de varias representaciones y trabajo en situaciones reales.

Freudenthal (1983) menciona que enseñar a los alumnos los algoritmos sin que comprendan qué son las fracciones, puede ser un retroceso en su proceso de enseñanza. Por su parte, Valdemoros & Ruiz (2008, p. 133), afirma que existen "prácticas escolares en las que se procura que el sujeto del aprendizaje avance mediante experiencias apoyadas fuertemente en la memorización de algoritmos".

Un estudiante podría dominar los procedimientos para resolver problemas de división de fracciones, aplicando el algoritmo de solución, pero a la vez puede carecer del conocimiento que explica por qué este procedimiento está matemáticamente justificado y por qué se produce el resultado obtenido. Muchos estudiantes ven a las fracciones como símbolos sin sentido o miran el numerador y denominador como números separados, en lugar de comprenderlos como un todo unificado. Las dificultades de los estudiantes usualmente se derivan de una falta de comprensión semántica y conceptual.

1.1.2 Objetivo general

Derivado de lo anterior, la presente investigación pretende centrarse en:

> Elaborar un breve diseño didáctico que promueva la comprensión de los contenidos semánticos de la división de fracciones, en estudiantes de primer grado de secundaria, desde un enfoque realista, apoyado en materiales visuales didácticos y manipulativos que permita minimizar los errores y dificultades enfrentadas por los alumnos en la resolución de problemas.

Este estudio se centra en alumnos de primer grado porque es actualmente el nivel educativo en el que se aborda el tema mencionado. Quizás esto se modifique en un futuro próximo.

1.1.3. Objetivos específicos

Empleando los instrumentos metodológicos adecuados, se persigue el logro de los objetivos que se describen a continuación.

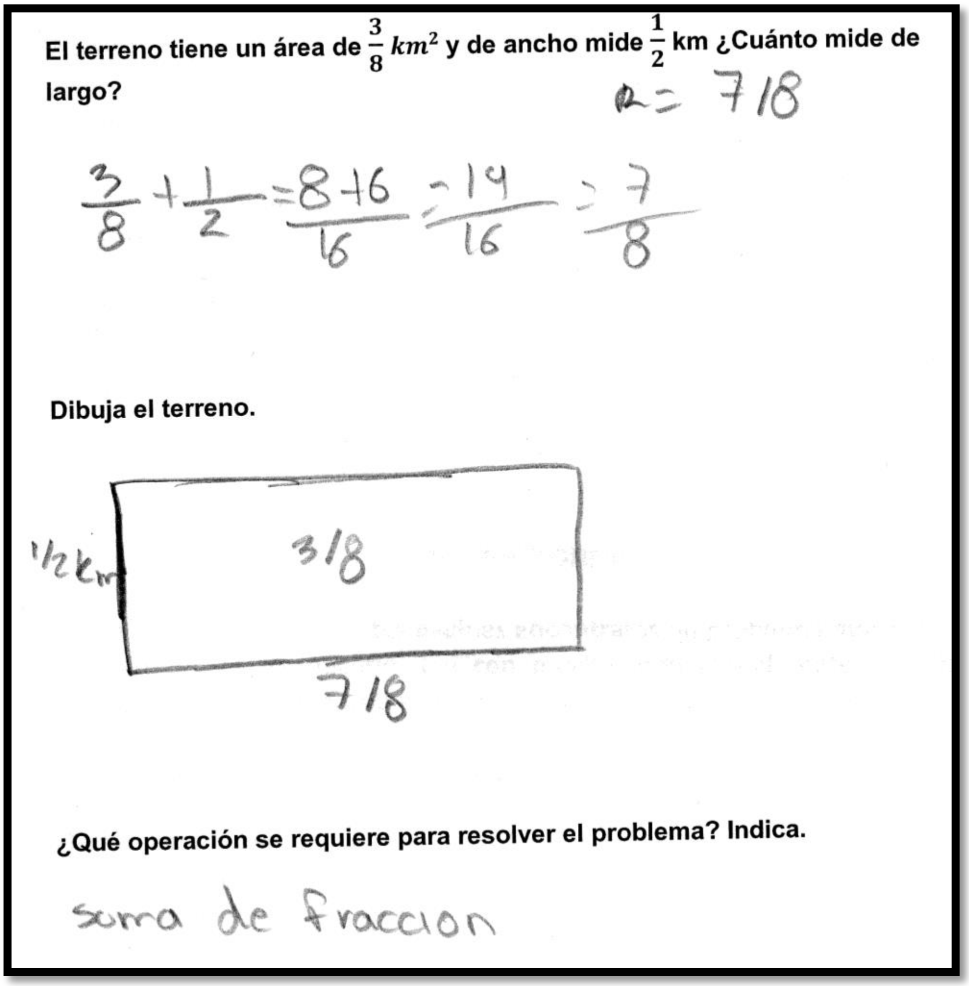
- Elaborar y aplicar un cuestionario que sirva como instrumento apto para diagnosticar las condiciones preliminares en las que se encuentran los alumnos, en cuanto al manejo de las fracciones, en particular las estrategias de solución de la división de fracciones.
- Confirmar si la resolución de problemas verbales de división de fracciones contribuye a la construcción de significado y sentido en los estudiantes de secundaria.
- Constatar si el empleo de material visual manipulativo contribuye a que el estudiante logre superar sus dificultades cognitivas al confrontar sus errores y reelaborar sus tareas de división de fracciones.
- Verificar, mediante la aplicación de un Cuestionario final y Estudio de casos, que lo realizado anteriormente permite que el alumno afiance los conocimientos y adquiera el significado y sentido de la división de fracciones.

1.1.4. Justificación del problema de estudio

La necesidad de investigar sobre la comprensión de la división de fracciones en alumnos de secundaria se justifica entre otras razones por: a) las dificultades que presentan los estudiantes ante este tipo de problemas, b) los resultados desfavorables que aún siguen presentándose en las pruebas estandarizadas aplicadas por la Secretaría de Educación Pública, c) el limitado enfoque con el que se aborda este contenido curricular basado sólo en enseñanza de algoritmos, d) las limitantes que presentan los alumnos para asociar el enunciado de los problemas con la respuesta requerida y e) la escasa comprensión de las nociones detectadas en alumnos del nivel medio superior (Cuestionario aplicado por la autora de este escrito a estudiantes de CONALEP, véase Apéndice C) y f) la escasa investigación reunida actualmente en torno a este problema de estudio.

A ese respecto, la investigadora pudo realizar una prueba piloto a estudiantes de nivel medio superior, mediante la aplicación de un cuestionario a 10 estudiantes de CONALEP y se observaron dificultades similares a las ya registradas con estudiantes de secundaria. Dificultades como manejo incorrecto de los algoritmos, imposibilidad de realizar un reparto equitativo y exhaustivo, imposibilidad para reconstruir el todo, no logran determinar la operación a emplear en un problema de división de fracciones. Un ejemplo de ello se muestra en la Figura 1.1 y 1.2.

De lo anterior destaca la relevancia de continuar con la investigación sobre la división de fracciones, abordando el tema de esta construcción numérica y su diversidad de modos de composición, en particular la división de fracciones, debido a que los estudiantes suelen arrastrar estas dificultades cognitivas no resueltas hacia los niveles educativos posteriores.



El terreno tiene un área de $\frac{3}{8}\,km^2$ y de ancho mide $\frac{1}{2}$ km ¿Cuánto mide de largo?

R= 7/8

$\frac{3}{8}+\frac{1}{2}=\frac{8+16}{16}=\frac{14}{16}=\frac{7}{8}$

Dibuja el terreno.

1/2km

3/8

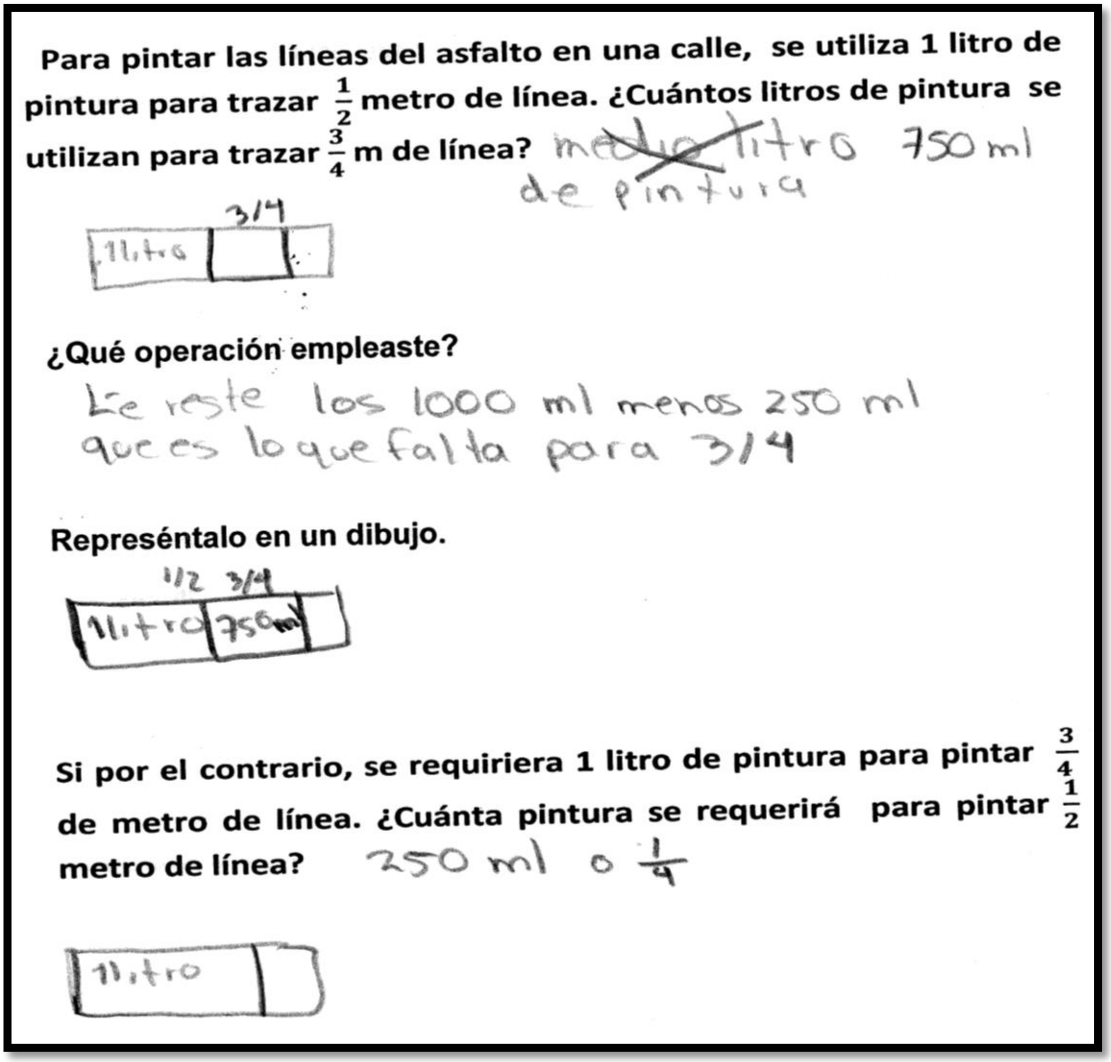
7/8

¿Qué operación se requiere para resolver el problema? Indica.

suma de fraccion

Figura 1.1. Problema de división de fracciones resuelto por un estudiante de Conalep.

Se observa en ambas tareas resueltas por estudiantes de Conalep, dificultades en la comprensión de significado y sentido de la división de fracciones. En dónde no se identifica una respuesta adecuada.



Para pintar las líneas del asfalto en una calle, se utiliza 1 litro de pintura para trazar $\frac{1}{2}$ metro de línea. ¿Cuántos litros de pintura se utilizan para trazar $\frac{3}{4}$ m de línea? ~~medio~~ litro 750 ml de pintura

3/4

1litro

¿Qué operación empleaste?

Le reste los 1000 ml menos 250 ml que es lo que falta para 3/4

Represéntalo en un dibujo.

1/2 3/4

1litro 750ml

Si por el contrario, se requiriera 1 litro de pintura para pintar $\frac{3}{4}$ de metro de línea. ¿Cuánta pintura se requerirá para pintar $\frac{1}{2}$ metro de línea? 250 ml o $\frac{1}{4}$

1litro

Figura 1.2. Problema de división de fracciones resuelto por un estudiante de Conalep.

1.2. Preguntas de investigación

En el transcurso de la presente investigación se plantean las siguientes interrogantes.

(1) ¿Qué tipo de dificultades cognitivas y de cálculo enfrentan los alumnos de primer grado de secundaria en la resolución de problemas de división de fracciones?

(2) ¿Qué rol jugó el profesor en las sesiones de enseñanza de la división de fracciones observadas, y qué peso tuvo su presentación en el aprendizaje de los estudiantes?

(3) ¿El uso de modelos didácticos visuales y manipulativos en la enseñanza-aprendizaje de la división de fracciones favorece su comprensión?

1.3. Marco Teórico

1.3.1. El enfoque didáctico general de las fracciones

Con el objetivo de configurar un enfoque o visión general sobre la enseñanza y aprendizaje de las fracciones, se llevó a cabo una revisión general de publicaciones dentro de la gran riqueza de información que se ha producido en torno a estos números en los últimos años, de los cuales seleccionamos algunos cuyas ideas matemáticas forman parte de los antecedentes de la presente investigación.

Entre los investigadores que han realizado trabajos sobre fracciones tomamos en cuenta las aportaciones de Freudenthal (1983), autor que habla sobre la riqueza fenomenológica de las fracciones, es decir, las múltiples maneras de trabajarlas para favorecer su enseñanza. Proporciona ejemplos didácticos para abordar las fracciones en el lenguaje cotidiano, señala que la fracción como medida puede ser empleada como comparador entre dos o más objetos para determinar su tamaño, plantea además la importancia de la relación parte-todo en el acercamiento de las fracciones y menciona que ese todo puede ser discreto o continuo, definido o indefinido, estructurado o carente de estructura y que la fracción puede ser empleada como fracturador, como operador o como razón. Establece que las longitudes y áreas son los medios más naturales para visualizar magnitudes con respecto a la enseñanza de las fracciones. Menciona que enseñar a los alumnos los algoritmos sin que comprendan qué son las fracciones, puede ser un retroceso en su proceso de enseñanza. Afirma que en la didáctica los profesores abordan los números naturales a través de varias perspectivas, sin embargo, cuando se trata de fracciones sólo abordan el concepto desde una perspectiva y ésa es la razón por la cual muchas personas no aprenden fracciones.

Kieren (1976, 1988), quien habla de los distintos constructos (aquí interpretados como significados) reconocidos por él con referencia a las fracciones y que contribuyen en la comprensión del número racional. Identifica cinco constructos o significados: relación parte-todo, cociente, medida, razón y operador. Esta es una clasificación muy usada en el ámbito de investigación de las fracciones. Con respecto al cociente intuitivo, menciona que es un número de la forma a/b, en dónde el numerador y denominador son interpretados como la partición y el reparto de uno o más objetos entre dos o más personas.

Por otro lado, menciona Kieren (1976, 1988), que la educación en las escuelas enfatiza el trabajo con algoritmos, por lo que los alumnos logran sólo fragmentos de conocimientos temporales, por lo que no construyen conocimientos perdurables. Este tipo de saber es altamente dependiente de procesos de repetición y está sujeto a un deterioro. También habla de la importancia de las imágenes físicas, pictóricas y mentales en la construcción de las ideas matemáticas, por lo que se pueden proveer ideas vinculadas a los números racionales, relacionadas con la imaginación visual, como partición de objetos o formas susceptibles de percepción.

Dentro de los constructos manejados por Kieren, la idea de medida puede ser usada como comparador entre dos o más objetos para determinar su tamaño, idea en la que coinciden Freudenthal (1983), Valdemoros y Ruiz (2008).

Otro de los constructos de importancia es la fracción como razón, la cual está ligada a la relación entre dos magnitudes que pueden ser de naturaleza igual o distinta, aquí la idea de par ordenado de números naturales toma fuerza. Desde el punto de vista de número racional expresa el número de veces que una cantidad contiene a la otra, Freudenthal (1983), Meneses (1991).

Esta idea de comparación de cantidades es tomada en cuenta para el diseño del material didáctico elaborado por la autora de esta tesis para la aplicación del modelo de conmensuración en la división de fracciones.

Streefland (1993), destaca el enfoque realista de las fracciones. Él desarrolló un curso que a través del manejo constructivo de materiales concretos (entre otros muchos aspectos relevantes), enriqueció la enseñanza de las fracciones, a través del planteamiento de situaciones de la vida cotidiana. Dicho curso es objeto de inspiración para la investigadora en el presente trabajo.

Dentro de sus aportaciones a las fracciones menciona que para trabajar el reparto, la alternativa es buscar situaciones de la vida real que permitan la asociación de los conocimientos previos del alumno con lo nuevo, de manera que permitan potenciar el concepto de fracción. Establece que en los procesos de enseñanza-aprendizaje, los modelos visuales, esquemas o diagramas son herramientas necesarias para que los alumnos logren situarse en la realidad matemática y progresar en ella.

Valdemoros (1993) establece que el dibujo y los modelos visuales pueden contribuir a la comprensión del concepto de las operaciones con fracciones. Establece también la importancia del lenguaje como expresión del pensamiento. Menciona que cuando un estudiante es capaz de inventar un problema correctamente, eso da cuenta de que ha logrado comprender.

Valdemoros y Ruiz (2008) afirman que la fracción como cociente involucra el reparto equitativo, que es una práctica común en la enseñanza formal de las fracciones, promueve en el sujeto las primeras nociones del número fraccionario.

Se tienen 3 barras de chocolate y hay que repartirla de manera equitativa entre 5 niños (Fig. 1.3).

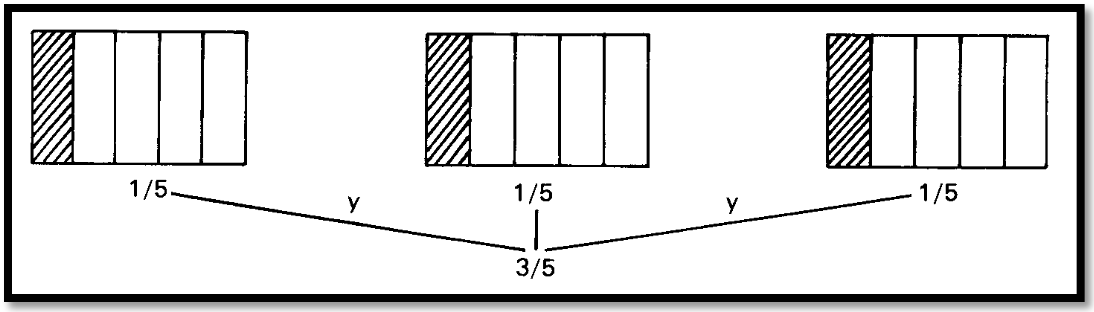


Fig.1.3. Reparto equitativo.

Una de las tareas del cuestionario inicial de exploración diseñado para obtener información relevante para la investigación, incluye reparto, por ser importante en el desarrollo de la noción de división partitiva (aplicada al PAR DE ENTEROS que forman la fracción).

Olguín (2009) establece diferentes estrategias de reparto de fracciones, algunas de las cuales son:

- "Divide cada unidad en el mismo número de personas".
- "En su respuesta numérica, da una fracción equivalente a la que corresponde a su reparto".
- "Partición y reparto equivalente realizando más divisiones de las necesarias".
- "Reparte unidades a cada persona y lo que sobra lo divide en fracciones".

Estas estrategias elaboradas por Olguín (2009) nos sirven de apoyo en el análisis de algunos de los instrumentos metodológicos empleados en esta investigación, en particular en las tareas que involucran situaciones de reparto.

1.3.2. Equivalencia y operaciones con fracciones

La comparación de fracciones es una puerta de entrada a la equivalencia, comparar $\frac{1}{2}\ con\ \frac{2}{4}$ se reduce a observar que

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

Las fracciones equivalentes también pueden ser representadas por el mismo punto en la recta numérica, lo que permite interpretar cada número racional como único punto de la recta numérica, Novillis, (1976). Además de que permite apreciar el orden de las fracciones. Ser “mayor que” significa estar “a la derecha de”, definida entre dos puntos de la recta.

La equivalencia prepara el camino para la introducción de los algoritmos de las operaciones de suma y sustracción de fracciones y posteriormente a la multiplicación y división.

Para la comparación de fracciones generalmente se recurre al modelo matemático del rectángulo, representación pictórica empleada como modelo multiplicativo, Meneses (1991), (Fig. 1.4). Aunque también puede ser empleado en la división de fracciones.

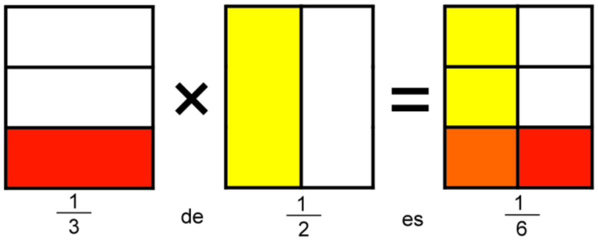


Fig. 1.4. Modelo matemático del rectángulo para representar multiplicación de fracciones.

Luna (1999) afirma que la representación pictórica es un tipo de representación de datos, generalmente numéricos, mediante recursos gráficos (líneas, vectores, superficies o símbolos) para mostrar visualmente la relación matemática que guardan entre sí. Esta habilidad permite al hombre comunicar información e ideas mediante diversos grafismos, así como representar objetiva y materialmente objetos mentales. Luna (1999) menciona que la representación pictórica ofrece al estudiante un soporte material para la formación del concepto, el cual puede acudir en caso de duda u olvido, de ahí la importancia del desarrollo de esta habilidad en el estudiante. A partir de la representación pictórica de un modelo, el estudiante puede ser capaz de encontrar las relaciones matemáticas existentes en el mismo. La visualización puede servir de base a una abstracción o como elemento heurístico, pero también puede ayudar a comprender más profundamente una relación abstracta.

Es importante mencionar que se hizo uso de representaciones pictóricas en el diseño y la implementación de los instrumentos metodológicos empleados, a lo largo de toda la tesis, por la importancia de su uso para el logro de la abstracción de los contenidos semánticos, con el objetivo de lograr la adquisición de significado[1] y sentido[2] de la división de fracciones en los estudiantes.

Lamon (2012) afirma que mediante preguntas y métodos visuales adecuados es posible que el alumno pueda percibir y realizar las cuatro operaciones con fracciones sin el uso de algún algoritmo.

Y lo muestra en el siguiente ejemplo:
El objetivo es mostrar cómo pueden visualizarse ciertas cantidades en una imagen.

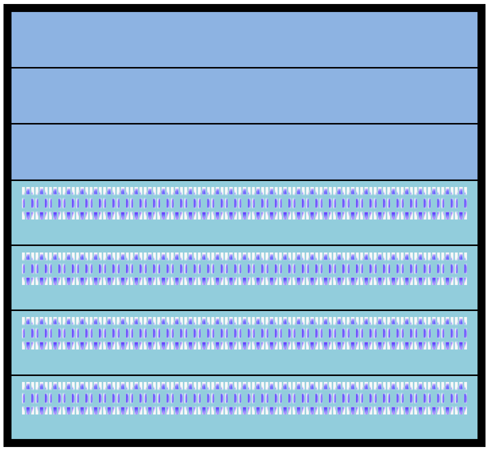


Fig. 1.5 Representación visual de una cantidad (Lamon, 2012, p.200).

---

[1] Significado. Aquellas representaciones que construye el sujeto por medio del uso de signos, lo cual ocurre en dos momentos: primero, en el plano interpsicológico y luego en el plano intrapsicológico; es decir, inicialmente surgen en la relación y luego en el pensamiento.
El significado de las palabras se refiere a generalizaciones provenientes del pensamiento. La aproximación al significado de una palabra se hace a través de otra palabra. Vigotsky (1995).
Las asociaciones que los seres humanos crean de los estímulos que los rodean o de los componentes de sus procesos de pensamiento. Bruner.

[2] Sentido. Construcción de contenidos semánticos a través de aspectos o procesos psicológicos que actúan como mediadores entre la enseñanza y los resultados del aprendizaje: la percepción que tiene el alumno de la escuela, del profesor y sus actuaciones; sus expectativas ante la enseñanza; sus motivaciones, creencias, actitudes y atribuciones; las estrategias de aprendizajes que es capaz de utilizar, etc. Coll (1988).

La Figura 1.5, representa un pastel con tres secciones azules lisas y 4 secciones en la parte inferior con pequeñas grecas o formas.

Las preguntas son las siguientes:

1.- ¿Puedes ver $\frac{3}{7}$?

Si el pastel rectangular completo es la unidad, las piezas azules lisas representan $\frac{3}{7}$

2.- ¿Puedes ver $\frac{3}{4}$?

Si la parte con grecas es la unidad (las 4 secciones inferiores), entonces la sección azul representa $\frac{3}{4}$.

3.- ¿Puedes ver $\frac{3}{4}\ de\ \frac{4}{7}$?

Si el pastel completo es la unidad, entonces $\frac{4}{7}$ es la imagen con grecas (las 4 secciones inferiores) y $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{7}$ es la parte lisa (las tres secciones azules), la cual es $\frac{3}{7}$. Así que $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{7}$ es $\frac{3}{7}$.

4.- ¿Puedes ver $1 \div \frac{3}{7}$? (Si lo transformamos a pregunta de medida ¿Cuánto se repite $\frac{3}{7}$ en 1?)

Si el pastel entero es 1, entonces $\frac{3}{7}$ es la parte lisa (las tres secciones azules) y con esa sección se puede medir el entero $2\frac{1}{3}$ veces. Así, $1 \div \frac{3}{7} = 2\frac{1}{3}$ (Lamon, 2012, p. 156).

Estas son experiencias que deberán adquirir los niños, realizando juegos prácticos para que se lleve a cabo un proceso de abstracción y una perfecta comprensión del conocimiento.

Una vez que logró comprender el significado de la división es conveniente acercarlo al procedimiento algebraico, el cual puede realizarse mediante el proceso largo del algoritmo empleando fracciones equivalentes como se muestra a continuación.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} \div \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{b} = \frac{ad}{bd} \div \frac{bc}{bd} = \frac{ad}{bc}$$

A otro nivel menciona Dienes (1972) que el aplicar las reglas de manera mecánica garantiza respuestas aprendidas pero no comprensión de los conceptos.

Por ello, en el salón de clases, el niño debe sentirse seguro de expresar sus ideas con libertad y tomar el riesgo de construir conocimiento, darles tiempo de pensar y reflexionar e intercambiar ideas entre pares, lo que le permitirá estar listo para desarrollar el material que se le presente.

En cambio, un niño al que se le ha enseñado solamente con algoritmos y que se le presentan las matemáticas sólo como elaboración de cálculos siguiendo un sistema de memorización de reglas, no puede empezar a pensar profundamente acerca de los números e inventar procedimientos. Esos niños se vuelven dependientes de los métodos de solución de los maestros y se vuelve difícil cambiar su comportamiento. Warrington (1997).

1.3.3. Dificultades en la conversión de decimales a fracción

Sánchez (2012) menciona que existen diferencias entre el manejo de la fracción con su representación decimal y viceversa, por lo que en el cambio de representación en los números racionales pueden presentarse dificultades para su comprensión las cuales dependen exclusivamente de la representación y no del objeto matemático. Duval (citado por Sánchez, 2012), afirma que hacer un cambio de representación es presentar un mismo objeto en sus diferentes registros, es decir, permite ver diferentes formas de presentar un mismo elemento con un mismo significado. En la conversión de decimal a fracción no existe correspondencia entre las unidades significantes, por ejemplo, en la escritura fraccionaria de $\frac{1}{2}$ y del decimal 0.5 pudiera haber un reconocimiento erróneo de "1", "-", "2" y "0", "." y "5", lo cual parecería representar para algunos alumnos la ocasión de hacer corresponder uno a uno los elementos que se reúnen en cada representación numérica.

La no correspondencia ocasiona que se presente en el estudiante mayor complejidad al tener que realizar el cambio de representación de fracción a decimal y viceversa. Sánchez (2012) menciona que si el estudiante no utiliza diversas representaciones de un número racional no podrá construir adecuadamente el concepto de número racional y esto puede provocar una dificultad presente en los procesos de conversión de decimales a fracción y viceversa.

A lo anterior, la autora de esta tesis destaca que siguiendo el ejemplo de $\frac{1}{2}$ y 0.5, la representación que facilitaría el reconocimiento de la equivalencia entre ambos números sería el uso de una fracción decimal o de múltiples expresiones equivalentes.

1.3.4. El enfoque didáctico de la división de fracciones

La enseñanza de la división de fracciones tiene múltiples dificultades, debido a que los alumnos la asocian con la división de números naturales, lo que les lleva a ver la división de fracciones como la división de dos números enteros separados, en lugar de verlas como un solo número.

Ocurre también que consideran la conmutatividad, la cual puede ser aplicada en suma o multiplicación de fracciones, pero no puede aplicarse a la división de fracciones y eso representa un error conceptual.

Como ya se mencionó, cuando se trata de dividir fracciones, generalmente se les presenta a los estudiantes el algoritmo de solución, sin darles oportunidad de que construyan el significado por cuenta propia, esto ocasiona que tiendan a memorizar el algoritmo de solución, como una regla sin sentido, por lo que debe evitarse este tipo de aprendizaje mecánico. Los estudiantes que memorizan hechos o procedimientos sin comprensión, no están seguros de cómo o cuándo usar lo que conocen, por lo que su aprendizaje es frágil.

Lamon (2012) afirma que la enseñanza de la división con fracciones tiene múltiples dificultades, debido a que los alumnos la asocian con la división de números naturales, lo que les lleva a ver la división de fracciones como la división de dos números enteros separados, en lugar de verlas como un solo número.

1.3.5 Tipos de división

De acuerdo con Fishbein, Deri, Nello, Marino (1985), se ha descubierto que los niños tienen dificultades al resolver problemas verbales de multiplicación y división en el momento de elegir la operación a realizar, ellos pueden cambiar en su mente la operación que necesitan para resolver el problema dependiendo del número o dato específico dado. Fishbein menciona que en la división, la estructura del problema determina el modelo. Él establece dos tipos de división que se describen a continuación.

La **división partitiva**: Está determinada por el reparto. Un objeto o número de objetos es dividido en un número igual de fragmentos, subcolecciones o agrupamientos. De acuerdo a nuestra interpretación, la división partitiva, además de repartir objetos con naturales, si queda un resto, ese resto es viable que ***sea expresado como fracción.***

La **división cuotativa**: llamada también como división de medida determina cuántas veces está contenida una cantidad en otra cantidad más grande. El modelo puede ser visto como una sustracción repetida.

Flores, (2014) menciona que un paso preliminar importante para la comprensión de la división de fracciones es que los alumnos consideren problemas de división entre números enteros e interpreten el resultado como una fracción.

Por lo tanto, en los problemas de **división partitiva** se proporciona el número total de agrupamientos y se intenta encontrar el tamaño de cada agrupamiento. Por ejemplo, si Juan tiene un paquete de 30 galletas, para repartir equitativamente entre sus 5 amigos, la pregunta es ¿cuántas galletas recibe cada uno? o ¿Qué porción del paquete recibirá cada chico? Cada chico recibirá 5/30 o 1/6 del paquete. La **división partitiva** es una división que está basada en el reparto equitativo y exhaustivo.

En la **división cuotativa** se proporciona el tamaño del agrupamiento y se pretende determinar cuántos agrupamientos se forman con la cantidad proporcionada. Por ejemplo: Juan tiene 30 galletas y le dará 3 galletas a cada persona (una razón de 3 por persona 3 : 1) ¿A cuántas personas les dará galletas? La **división cuotativa** cita una razón (puede ser expresada 30 ÷ $\frac{3}{1}$)

Ejemplo:

El Sr. López tiene una cuerda que mide $9\frac{3}{8}$ m de largo. Cada niño en su tropa de scouts necesita $\frac{5}{8}$ m de largo. ¿Cuántas piezas de la longitud requerida puede cortar?

La división cuotativa es también llamada de medida o sustracción porque se proporciona una medida que puede ser sustraída de manera iterada para obtener la respuesta. Puedes contar cuánto puedes medir $\frac{5}{8}$ en $9\frac{3}{8}$ o puedes contar cuanto puedes restar $\frac{5}{8}$ de $9\frac{3}{8}$.

Como menciona Fishbein, Deri, Nello, Marino, (1985), en la división cuotativa se busca hallar cuántas veces una cantidad determinada está contenida en una cantidad mayor.

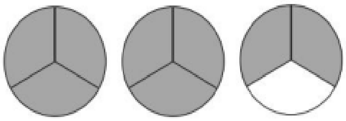
Lamon (2012), quien coincide con Fishbein , habla sobre los tipos de división de fracciones, *la* ***división partitiva*** (también conocida como división de reparto, cuya fuente original proviene de Fishbein, “1985“ y Clark, Berenson & Cavey “2003“), que suele aplicarse a números naturales, de los cuales surge la fracción, es decir, dividiendo se construye la fracción y en el camino se construyen estructuras aditivas y multiplicativas, y ***división cuotativa o tasativa*** (también conocida como división de medición, de sustracción o de agrupamiento). Menciona que la división es la primera operación en la que no se refiere uno al todo para dar la respuesta. En un problema de división, el divisor se convierte en la unidad (reunitización[3]) y el residuo debe ser nombrado en términos del divisor.

Ejemplo:

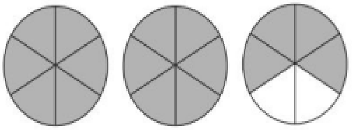
$2\frac{2}{3} \div \frac{5}{6} = ?$

Retomando el significado de división. ¿Cuánto puedo medir $\frac{5}{6}$ de $2\frac{2}{3}$? (Lamon, 2012, p.158).

Primero represento $2\frac{2}{3}$



Subdivido para representar en sextos, que es la unidad del divisor (Lamon, 2012, p.158).



La región sombreada representa $2\frac{2}{3}$ (o $2\frac{4}{6}$). Se pueden medir 3 juegos de $\frac{5}{6}$ y se tiene un residuo de $\frac{1}{6}$. ¿Qué parte del divisor $\frac{5}{6}$ es $\frac{1}{6}$? Recordando que el divisor se convierte en la unidad, entonces nuestra unidad es $\frac{5}{6}$ y $\frac{1}{6}$ equivale a $\frac{1}{5}$ de $\frac{5}{6}$, por lo que el residuo es $\frac{1}{5}$. La respuesta de la división entonces es:

$$2\frac{2}{3} \div \frac{5}{6} = 3\frac{1}{5}$$

Valdemoros, Ramírez y Lamadrid (2015) en su escrito sobre *"Núcleos de significación y pensamiento" en la enseñanza de fracciones,* establecen, mediante un estudio de caso realizado a

---

[3] Unitizar. Es la asignación cognitiva de una unidad de medida para una cantidad dada. Es el tamaño del byte mental en términos de los cuales se piensa acerca de la unidad, es un proceso que está en la mente de la persona. Identificar la unidad en una situación particular.
Reunitizar : Lamon lo define como la capacidad de recomponer la unidad. Reconceptualizar la unidad en términos de piezas de diferentes tamaños.

una estudiante normalista, que es posible resolver de manera intuitiva un problema de división de fracciones que involucra el uso de áreas, empleando la operación inversa de la multiplicación, o lo que llamarían posteriormente como ***“el inverso del producto de medidas”,*** categoría establecida por Valdemoros, Lamadrid y Ramírez (2017) en PME-NA, a partir de aplicar la inversión a la categoría multiplicativa del “producto de medida” (Vergnaud, 1991).

Flores (2014) establece la importancia de que los alumnos aprendan lo que significa dividir fracciones mediante representaciones pictóricas, sin el empleo de algoritmos. Y por otro lado, la importancia de guiarlos en el desarrollo de diversos métodos de resolución de problemas que favorezcan la comprensión de la división de fracciones mediante el planteamiento de preguntas adecuadas, que tengan sentido para los estudiantes y la selección de tareas que propicien su resolución empleando no sólo adición o sustracción repetida, sino que los acerquen al uso de la comparación multiplicativa y eso los conduzca a desarrollar un pensamiento o razonamiento proporcional. Menciona que las comparaciones multiplicativas pueden surgir cuando los estudiantes multiplican o dividen números, visualizando que una cantidad es n veces mayor que otra y que la multiplicación basada únicamente en sumas repetidas puede ser muy limitante y problemática para los alumnos. Para propiciar que el estudiante compare mediante una razón debemos ayudarlo a visualizar que una cantidad es *n* veces mayor que una segunda cantidad, en vez de pensar solamente que la segunda cantidad es una de *n* partes idénticas de la primera.

1.3.6. Problemas de estructura multiplicativa

En la resolución de problemas de estructura multiplicativa, los estudiantes emplean distintas estrategias y presentan dificultades para comprender las diferentes situaciones multiplicativas.

Vergnaud (1991), Ivars & Fernández (2016), mencionan que las relaciones multiplicativas se definen como las relaciones que conllevan una multiplicación o una división. Existen varias clases de problemas de multiplicación y división, según la forma de relación multiplicativa; pueden ser de relación ternaria (de tres cantidades) o cuaternaria (involucra cuatro cantidades), pero en general, Vergnaud (1991) establece que hay tres tipos de problemas:

1. **Isomorfismo de medida**, problemas cuya estructura consiste en una proporción entre dos espacios de medidas M1 y M2, (remite a una tabla de correspondencia entre dos cantidades o una relación cuaternaria, tabla 1.1). En los problemas más simples una de esas cantidades es uno.

Un ejemplo de ello sería:

Multiplicación: Si un kilogramo de jícamas vale 12 pesos, ¿cuánto valen 5 kilogramos?

División partitiva: Si con 60 pesos compro 5 kilos de jícamas, ¿cuánto cuesta el kilo?

División cuotativa: Con 60 pesos ¿cuántos kilos de jícama puedo comprar si el kilo cuesta 12 pesos?

Tabla 1.1. Tabulación de datos en la que la ubicación de la incógnita define la operación

kilogramos	jícamas
1	12
5	x

Multiplicación

kilogramos	jícamas
1	x
5	60

División partitiva

kilogramos	jícamas
1	12
x	60

División cuotativa

2. **Un solo espacio de medida**, problemas en los que se establece una correspondencia entre dos cantidades y un operador escalar, designado verbalmente por la palabra *veces*.

Un ejemplo sería:

Hacen falta dos metros de tela para hacer una falda. Hacen falta 3 veces más para hacer un conjunto. Entonces hacen falta 6 metros para hacer un conjunto, (Fig. 1.6).

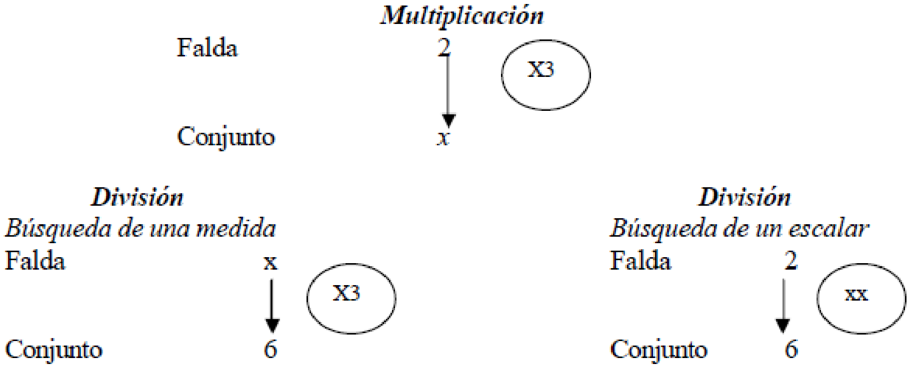


Fig. 1.6. Representación de operaciones de un solo espacio de medida.

3. **Producto de medidas**, problemas cuya estructura consiste en la composición cartesiana de dos espacios de medidas M1 y M2 en un tercero, M3. Permite distinguir dos tipos de problemas:
   - Multiplicación. Encontrar la medida-producto cuando se conocen las medidas elementales.
   - División. Encontrar una de las medidas elementales cuando se conoce la otra y la medida-producto.

Un ejemplo sería:

Un rectángulo tiene un área de $\frac{3}{8}cm^2$ y una altura de $\frac{1}{2}$ cm ¿Cuánto mide de ancho el rectángulo?, (fig. 1.7).

Problema de multiplicación

Problema de división

Fig. 1.7. Composición cartesiana de dos espacios de medida M1 y M2 en un tercero M3, propuesta por Vergnaud.

Esta clasificación de los problemas propuesta por Vergnaud, (1991), la resumen Ivars y Fernández, (2016) en la tabla 1.2 como se muestra a continuación.

Tabla 1.2. Clasificación de los problemas de estructura multiplicativa

Clases de problemas de tipo multiplicativo	Operación	Incógnita
Isomorfismo de medidas	Multiplicación División Partitiva División medida	Total de objetos Número de objetos por grupo Número de grupos
Un único espacio de medidas	Multiplicación División División	Una medida (cantidad comparada) Una medida (cantidad referente) Un escalar
Producto de medidas	Multiplicación	Medida Producto (cantidad compuesta. Se conocen las 2 medidas elementales o componentes).
	División	Una medida elemental (una de los componentes)

Esta clasificación de problemas multiplicativos está planteada para su aplicación con números enteros, sin embargo puede ser aplicada a números fraccionarios y sirve de referencia a la investigadora del estudio aquí comunicado para el diseño de tareas de división de fracciones.

1.3.7. Estrategias de solución de división de fracciones

A continuación se muestran diversas investigaciones sobre estrategias de solución de división de fracciones, cuyos resultados son fuente de inspiración para la autora de esta tesis, que establece a partir de ellos, categorías de análisis de las soluciones que los estudiantes de primero de secundaria dan a los problemas de división de fracciones empleados en la presente investigación.

Nillas, (2003), realiza una investigación con normalistas para determinar las estrategias de solución que emplean para solucionar problemas de división de fracciones. El introduce en su investigación problemas de medida, reparto, razón e inverso de la multiplicación.

Las ideas de división de fracciones subrayadas son:

- Identificación del número de grupos
- El número(tamaño) de un grupo
- Encontrar la medida unitaria
- Relacionando entre división y multiplicación
- Aplicación del concepto de área

De las respuestas obtenidas, Nillas establece una clasificación, la cual puede observarse en la Tabla 1.3.

Tabla 1.3. Estrategias de solución de división de fracciones (Nillas, 2003)

Tipo de problema de división de fracciones	**Estrategias de solución**	**Tipos de solución**
De Medida (división cuotativa) Se evalúa ¿cuántos grupos hay?	Adición repetida Sustracción repetida (la división fue vista como una sustracción repetida)	Solución pictórica Tabular Aritmética
Partitiva (reparto equitativo) Se evalúa ¿cuánto hay en un grupo?	Reparto Multiplicación	Solución pictórica Recta numérica (se comprendió como medida en lugar de reparto) Aritmética
Medida unitaria	Establecimiento de ecuación	Solución pictórica Tabular Aritmética
Inverso de la multiplicación	División directa	Solución pictórica Ecuación Aritmética

Es importante mencionar que realizamos una adaptación a la Tabla 1.3 y 1.4, eliminando una de las categorías con la cual consideramos que no había coincidencia.

De acuerdo a Sinicrope, Mick and Kolb (2002),Bruce, Bennett y Flyn (2014), quienes realizan una investigación similar a la realizada por Nillas, (2003), pero con estudiantes, la división de fracciones puede ser entendida de diversas formas, como dividir para determinar cuántas veces una cantidad está contenida en otra (medida), repartir y determinar la cantidad (reparto-partitiva), restricción ya planteada con respecto a las fracciones (p. 22, Fishbein et al.), determinar cuál es la unidad o determinar una cantidad a partir de la unidad (medida unitaria), determinar la cantidad original o determinar una dimensión a partir de un arreglo. Esta información se resume en la Tabla 1.4.

Establecen que se puede relacionar el conocimiento de operaciones de números enteros con operaciones de fracciones y por tanto se puede considerar que los modelos pueden ser empleados para división de números enteros y división de fracciones.

Tabla 1.4. Estrategias empleadas por los estudiantes para dividir fracciones (Sinicrope, Mick and Kolb, 2002)

ESTRATEGIAS DE DIVISIÓN	DESCRIPCIÓN
DIVISIÓN DE MEDIDA (cuotativa)	Este modelo involucra determinar el número de agrupamientos o cuántas veces cabe un número en otro
DIVISIÓN PARTITIVA (Reparto Equitativo)	Este modelo involucra reparto equitativo. Determinar el tamaño de un agrupamiento.
DETERMINACIÓN DE UNA RAZÓN UNITARIA	Este modelo enfatiza el tamaño de un agrupamiento (la razón unitaria)
INVERSO DE LA MULTIPLICACIÓN	Este modelo se basa en el entendimiento de que la división es el inverso de la multiplicación. Invirtiendo una fracción y multiplicando, se aplica el inverso.

Las estrategias mencionadas sirven de apoyo para el análisis de las tareas solucionadas por los estudiantes en la presente investigación.

1.3.8. Modelo de conmensuración

Entre las contribuciones de Brousseau citado por Block (2000), está su modelo de conmensuración, considerado como una herramienta matemática que es un excelente recurso didáctico para relacionar las fracciones y puede ser empleado para realizar operaciones con fracciones. Fue el método de inspiración para el diseño del material empleado por la investigadora y se describe a continuación de manera breve.

Se puede abordar la equivalencia de fracciones mediante el empleo del modelo de conmensuración[4] que es una herramienta matemática que consta de trabajar con dos tiras de cartón o cartulina, una tira representa la unidad y la otra el pedazo que debe ser medido con dicha unidad. Balbuena, (1988) p. 32.

Brousseau, citado por Balbuena, (1988) y Block, (2008), realiza en su tesis doctoral una secuencia didáctica para fracciones, conocido como el problema de las hojas de papel, que permite introducir las fracciones como medida utilizando el modelo de conmensuración.

Consiste en el trabajo realizado entre dos equipos, uno llamado emisor y el otro receptor. Los dos equipos cuentan con varias pilas de hojas de diferente grosor, indicando que en una misma pila las hojas son del mismo grosor.

El problema consiste en que el equipo emisor debe seleccionar una hoja de alguna de las pilas y enviar un mensaje al equipo receptor para que éste pueda seleccionar una hoja de igual espesor.

Los niños enfrentan el problema de determinar cuánto mide el espesor de la hoja porque no se puede medir con una regla. Para resolver el problema toman varias hojas, por ejemplo, 20 hojas de un mismo espesor, que juntas miden 3 mm. Los niños expresan esos datos como la razón (20:3), y con ese lenguaje intentan resolver la situación al descubrir distintas relaciones entre los pares, juegan entonces a utilizar parejas (número de hojas, mm. de espesor), para identificar el espesor de cada tipo de hoja.

Mediante estas relaciones de conmensuración logran establecer de dos hojas distintas, cuál tiene mayor grosor, por ejemplo, 50 hojas: 4 mm., son más gruesas que 80 hojas: 2 mm. De esta manera logran establecer relaciones de equivalencia, (n hojas, m milímetros) y a partir de esto se puede expresar la medida de una hoja en términos de fracción $\frac{4}{50}$, es decir, una hoja mide 4 mm entre 50.

Actualmente, este modelo ha sufrido modificaciones y se le ha agregado color a las tiras que también nombran regletas, resultando en un excelente recurso didáctico para relacionar las fracciones y la noción de medida y permitiendo la construcción de un lenguaje simbólico como se observa en la figura 1.8. Llinares, & Sánchez (2000, p. 60). Balbuena, (1988, p. 34).

---

[4] Concepto de conmensuración: Medida, igualdad o proporción que tiene una cosa con la otra.

<table>
<tr><td colspan="2">blanca</td></tr>
<tr><td>azul</td><td>azul</td></tr>
</table>

La tira blanca es dos veces la azul, la blanca corresponde al entero, la azul representa ½.
n enteros = m pedazos (relación n/m, medida fraccionaria de una tira de cartón).
Fig. 1.8. Modelo de conmensuración.

Este modelo de conmensuración puede ser empleado para realizar operaciones con fracciones, por ejemplo suma de fracciones o incluso división de fracciones, (Fig. 1.9).

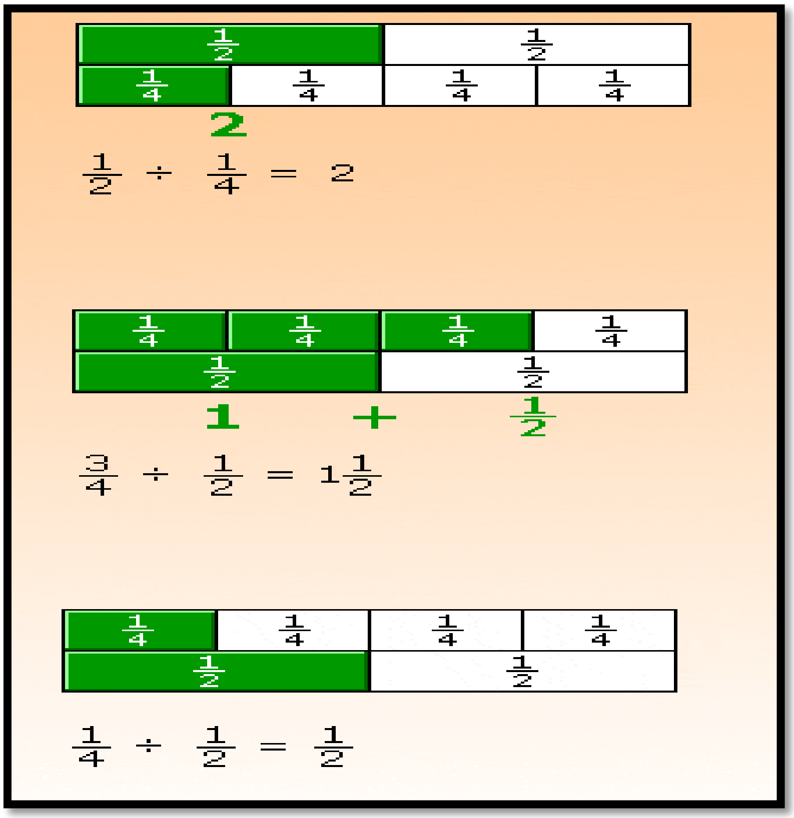


Fig. 1.9. División de fracciones empleando el modelo de conmensuración.

En la presente investigación este modelo sirvió de inspiración en la elaboración del material didáctico en el que se emplean acetatos para la elaboración de un juego de fracciones y un tablero de tiras de leds, utilizado en las entrevistas y que nos permitió acercar al estudiante al sentido de la división de fracciones.

1.3.9. Uso de los modelos concretos y materiales manipulativos

Cramer, Wyberg, y Leavitt, (2008), hablan de la importancia del uso de modelos concretos en la construcción de significado de las fracciones y sus operaciones, en particular se refieren al **círculo de fracciones** y afirman que este modelo apoya la comprensión de los estudiantes en el significado de la relación parte todo y les proporciona una representación mental que les permite juzgar el tamaño relativo de las fracciones. Menciona que ellos forman representaciones mentales que pueden manipular y esto les permite estimar las respuestas a las operaciones con fracciones. Establecen que trabajar este material ayuda a los estudiantes a construir significado al intentar encontrar respuestas exactas a los problemas de operaciones con fracciones usando denominadores comunes. Y los círculos de fracción permiten intercambiar fracciones por equivalentes o denominadores comunes. Finalmente, afirman que los círculos de fracción y otros modelos contribuyen al dominio de los alumnos de este difícil procedimiento.

Montes (2017) afirma que la excesiva mecanización de la enseñanza en matemáticas puede llegar a ocasionar problemas en los estudiantes, y en algunos casos, el fracaso escolar. Menciona que el uso de materiales manipulativos puede ayudar a los estudiantes a superar dificultades que pueden surgir en el proceso de aprendizaje.

Basados en lo descrito anteriormente, empleamos materiales visuales y manipulativos en la implementación de las tareas para determinar si el usarlos ayuda a los estudiantes a superar sus dificultades.

1.3.10. Resolución de problemas

Godino (2004), en su libro Didáctica de las matemáticas para Maestros, menciona que la resolución de problemas no es sólo uno de los fines de la enseñanza de las matemáticas, sino el medio esencial para lograr el aprendizaje.

Los estudiantes deberán tener frecuentes oportunidades de plantear, explorar y resolver problemas que requieran un esfuerzo significativo. Mediante la resolución de problemas matemáticos, adquieren modos de pensamiento adecuados, hábitos de persistencia, curiosidad y confianza ante situaciones no familiares que les son útiles fuera de la clase de matemáticas. Incluso en la vida diaria y profesional es importante saber resolver problemas.

La resolución de problemas es una parte integral de cualquier aprendizaje matemático, por lo que no debería ser considerado como una parte aislada del currículo matemático. En consecuencia, la resolución de problemas debe estar articulada dentro del proceso de estudio de los distintos bloques de contenido matemático. Los contextos de los problemas pueden referirse tanto a las experiencias familiares de los estudiantes así como aplicaciones a otras áreas. Desde este punto de vista, los problemas aparecen primero para la construcción de los objetos matemáticos y después para su aplicación a diferentes contextos.

Por lo anterior, la investigación presente, está basada en la resolución de problemas, empleados a lo largo de toda la tesis, en el cuestionario inicial de exploración, en el taller exploratorio, en las entrevistas y en el cuestionario final.

1.3.11. Errores y dificultades cognitivas

De acuerdo a Rico (1995), en su escrito “Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas”, menciona que en la adquisición de conocimiento siempre hay una presencia permanente de errores. El error es una posibilidad permanente en la adquisición y consolidación del conocimiento. Ante el error debemos realizar una constante crítica, sometiendo a prueba nuestros conocimientos y aproximaciones a la verdad.

Todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores. Son parte de las producciones de los alumnos en su estudio de las matemáticas y pueden contribuir positivamente en el proceso de aprendizaje. La aritmética es el área de contenidos en dónde los alumnos cometen más errores.

A partir de sus errores un alumno puede aprender las propiedades de un concepto del que no era previamente consciente. Al cometer un error el alumno expresa el carácter incompleto de su conocimiento sobre ese tema, lo que permite que sus compañeros o profesor lo ayuden a completar su conocimiento o lo llevan a él mismo a la reflexión de su equivocación y comprender lo que estaba mal. Los errores son el resultado de concepciones inadecuadas sobre aspectos fundamentales de las matemáticas.

Los errores sistemáticos señalan una comprensión equivocada de un concepto, que el estudiante considera como correcta. Este tipo de errores es muy frecuente. La corrección de errores puede necesitar de una reorganización de conocimientos de los alumnos.

De acuerdo a Bell (1986), la enseñanza diagnóstica se basa en tareas críticas que exponen las ideas correctas y equivocadas de los alumnos, para posteriormente provocar conflicto y discusión. El objetivo es elegir una tarea realista que involucre los conceptos erróneos, provocar un conflicto cognitivo que conduzca a la discusión que eventualmente lleve a la solución del conflicto. Se pretende dirigir la enseñanza al desarrollo de estructuras conceptuales correctas y no sólo la adquisición de procedimientos algorítmicos.

González (2015), menciona que el reconocimiento por parte de los alumnos de los errores y la necesidad de superarlos, contribuye a la obtención de logros en el aprendizaje.

1.3.11.1 Errores más comunes en el uso de las fracciones.

González (2015), después de una amplia revisión y estudio, afirma que hay 4 tipos de errores más comunes en el uso de las fracciones, clasificados por Llinares de la siguiente manera:

I.- Errores por descuido o distracción

II.- Errores por desconocimiento de la respuesta.

> a). Simplificación incompleta, b). Operaciones con enteros, c). Errores en la jerarquía de las operaciones.

III.- Errores por defectos en la comprensión del concepto

> a). Error con la conmutatividad de las operaciones, b). Errores en la ordenación de fracciones, c). Comparación cualitativa incorrecta, d). No consideran legítimo dividir/restar un número menor por uno mayor, e). Relacionar multiplicar con ampliar y dividir con reducir, f). Extrapolación del cálculo de los naturales a las fracciones, g). Error relacionado con la equivalencia de fracciones

IV.- Aplicación sistemática de procedimientos erróneos

> a). sobresimplificación, b). Error en el algoritmo suma, c). Error en el algoritmo multiplicación, d). Multiplicación cruzada incorrecta, e). Común denominador incorrecto, f). División o multiplicación incorrecta, g). Dividir en lugar de multiplicar y viceversa.

Esta clasificación de errores es empleada por la investigadora para la realización del análisis de las tareas del cuestionario inicial de exploración. Y por otro lado, la enseñanza diagnóstica, mencionada por Bell (1986), nos permite confrontar en la entrevista, al estudiante con sus errores con el objetivo de generar conflicto que lo lleve a la reflexión, la solución del conflicto y la posterior abstracción.

1.3.12. La comprensión como superación de obstáculos cognitivos

El concepto de obstáculos cognitivos ayuda a identificar dificultades de los estudiantes, ya que se relacionan con el aprendizaje y después se utilizan para construir mejores estrategias de enseñanza (Gómez, 2000).

Sierpinska, mencionado por Gómez, (2000) indica que la superación de un obstáculo significa que el estudiante debe despojarse de sus convicciones y analizar dichas creencias desde un punto de vista externo.

La medición de la profundidad de la comprensión se logra mediante la identificación del número y la calidad de los actos de comprensión logrados, o el número de dificultades cognitivas superadas. Este punto de vista proporciona imágenes de los cambios cualitativos en la mente, conforme el estudiante interactúa con los conceptos.

Sin embargo, la definición del concepto que proporciona el estudiante, puede diferir de la definición matemática formal de un concepto, debido a que la definición del estudiante es una descripción individualizada del mismo. La construcción de esas imágenes del concepto suceden cuando el estudiante encuentra nueva información y se enfrenta a la consolidación de esta información dentro de la estructura cognitiva ya presente. La adquisición de nuevos datos y la formación de vínculos entre esta nueva información y la estructura original se relacionan con la asimilación y la acomodación de Piaget. Reorganiza parte del todo de la estructura cognitiva del individuo, para dar paso a la generalización y abstracción.

Meel (2003), afirma que cuando el estudiante construye un significado personal, se presenta una negociación entre dos mundos separados: las operaciones físicas que pueden observarse y las operaciones mentales que son hipotéticas. El desarrollo de la comprensión es el cambio de actuación en el mundo de las operaciones físicas para operar en el mundo de las transformaciones mentales. La comprensión es el desarrollo de conexiones entre ideas, hechos o procedimientos. Se construye mediante la formación de elaboraciones mentales y de la realización de conexiones entre ellas.

1.3.13. El juego en el proceso educativo

Chapouille (2007), menciona que el juego como técnica de aprendizaje ofrece algunas ventajas:

- Genera placer
- Moviliza al sujeto
- Desarrolla la creatividad, la curiosidad y la imaginación.
- Activa el pensamiento divergente.
- Favorece la comunicación, la integración y la cohesión grupal.
- Facilita la convivencia.

Los juegos le permiten al estudiante descubrir nuevas facetas de su imaginación, pensar en numerosas alternativas para un problema, desarrollar diferentes modos y estilos de pensamiento y favorecen el cambio de conducta que se enriquece al socializar.

Al incluir el juego en las actividades del aula se les enseña que aprender es fácil y divertido y que se pueden generar cualidades como la creatividad, el deseo y el interés por participar, el respeto por los demás, atender y cumplir reglas, ser valorado por el grupo, actuar con más seguridad y comunicarse mejor, es decir expresar su pensamiento sin obstáculos.

Corbalán (2002), que habla sobre juegos matemáticos, menciona que las matemáticas tratan de razonamientos y procedimientos lógicos o reflexivos (no procedimientos numéricos), por lo que no es en los algoritmos donde debemos poner el acento, sino en el estudio de los procedimientos y en eso, los juegos pueden desempeñar un papel muy importante. Conseguir que la enseñanza de las matemáticas se dé en un ambiente lúdico puede resultar en que el alumno logre sentir placer por el conocimiento, por lo que el profesor debe hacer un esfuerzo por presentar el tema de forma lúdica. Si el juego se prepara con cuidado, puede contribuir a generar ideas matemáticas de importancia.

En la presente investigación se retoma el juego en la implementación del taller exploratorio. Con el objetivo de acercar de manera lúdica al estudiante a la resolución de la división de fracciones y favorecer con ello la adquisición de sentido y significado de dicha operación.

Capítulo 2

Diseño metodológico de la investigación

En este capítulo se da cuenta del carácter de la investigación, indicando cómo se inició y de qué manera culmina, dónde y cómo llevamos a cabo la reunión de información, los sujetos de estudio a los que tuvimos acceso, los instrumentos metodológicos empleados en la investigación cualitativa realizada y cuyos datos serán posteriormente sistematizados y los procedimientos de validación aplicados.

2. MÉTODO

2.1. Esquema general del desarrollo de la investigación

En esta investigación se pretende mediante la aplicación de diversos instrumentos metodológicos, identificar las nociones o las dificultades que los estudiantes de primero de secundaria tienen de la **división de fracciones**, con el objetivo de contrastar los datos y obtener una mayor visión de la problemática.

Se emplea la metodología cualitativa, descriptiva, interpretativa. De acuerdo a Taylor y Bogdan, (1992), la metodología cualitativa es un modo de investigación que produce datos descriptivos, permite encarar el mundo empírico observando a las personas en su vida cotidiana y obteniendo un conocimiento directo de la vida social, en dónde los investigadores desarrollan interpretaciones y conceptos partiendo de los datos. Su diseño de investigación es flexible en el modo de conducir sus estudios porque se siguen lineamientos orientadores pero no reglas, se interactúa con los informantes de un modo natural y no intrusivo. Se emplea observación participante en dónde se trata de no desentonar en la estructura y entrevistas en profundidad, que siguen el modelo de una conversación normal y no de un intercambio formal de preguntas y respuestas. Los investigadores cualitativos se identifican con las personas para comprender como ven las cosas, para ellos todas las perspectivas son valiosas y dan énfasis a la validez de sus investigaciones. El investigador se basa en lo que observa e intenta describir las formas en que la gente da significado al comportamiento. Los investigadores de campo deben ser operadores hábiles en lo referente a las habilidades sociales. Deben ser capaces de trabajar, hablar y convencer a la gente de la importancia y necesidad de su investigación. Deben estar preparados para pasar muchas horas en paciente discusión con gente responsable de la situación institucional o comunitaria en la que van a trabajar.

Para llevar a cabo investigación se deben también diseñar instrumentos para obtener respuestas válidas a las preguntas de investigación y si es necesario, se modifica el diseño original. Con imaginación y paciencia, muchos de los problemas prácticos de la implementación de un diseño de investigación pueden resolverse de manera satisfactoria, para ello, emplear la triangulación es de mucha ayuda. La triangulación de acuerdo con Taylor y Bogdan, (1992) es la combinación de distintos métodos o fuentes de datos, en un estudio único, que permite dar validez a los datos recabados y, al mismo tiempo, enriquecen el análisis de los resultados registrados.

Uno de los instrumentos de la investigación cualitativa es el cuestionario, el que tiene la ventaja de una visión amplia, se obtiene gran cantidad de información. La desventaja es que la información de los cuestionarios generalmente no profundiza mucho debajo de la superficie. A nivel educativo, el cuestionario indaga acerca de conocimientos.

La entrevista personal es otro método principal para obtener información. Todos los datos sobre la producción de los entrevistados deben provenir de ellos o de otras personas. La entrevista personal puede ayudar a conocer las razones del entrevistado para hacer o creer algo. Cuando se le pregunta a la gente las razones de las acciones, intenciones o creencias, llegan a responder que han hecho algo, intentado hacer algo o que se sienten de ciertas formas acerca de algo. Si el individuo bajo estudio revela en forma concreta sus valores, deseos y necesidades, la entrevista personal resulta muy valiosa.

2.1.1. Instrumentos metodológicos empleados en la investigación

Considerando lo mencionado por Taylor y Bogdan, (1992), sobre la observación en la investigación, el diseño de instrumentos y la entrevista, así como la importancia de reunir información para la presente investigación, decidimos emplear los siguientes instrumentos metodológicos:

Observación participante.
Cuestionario inicial de exploración.
Taller exploratorio mediante un juego didáctico de operaciones con fracciones.
Entrevistas en profundidad y de corte didáctico.
Cuestionario final.

A los anteriores instrumentos metodológicos agregamos un Estudio de casos, el cual no se considera un instrumento metodológico, sino que es una investigación en sí mismas, coincidiendo con Bisquerra (1989) y del cual hablaremos más adelante.

Es importante mencionar que de los datos obtenidos en los tres primeros instrumentos metodológicos, se determinó la selección de sujetos para la realización de entrevista, cuestionario final y estudio de casos (Fig. 2.1).

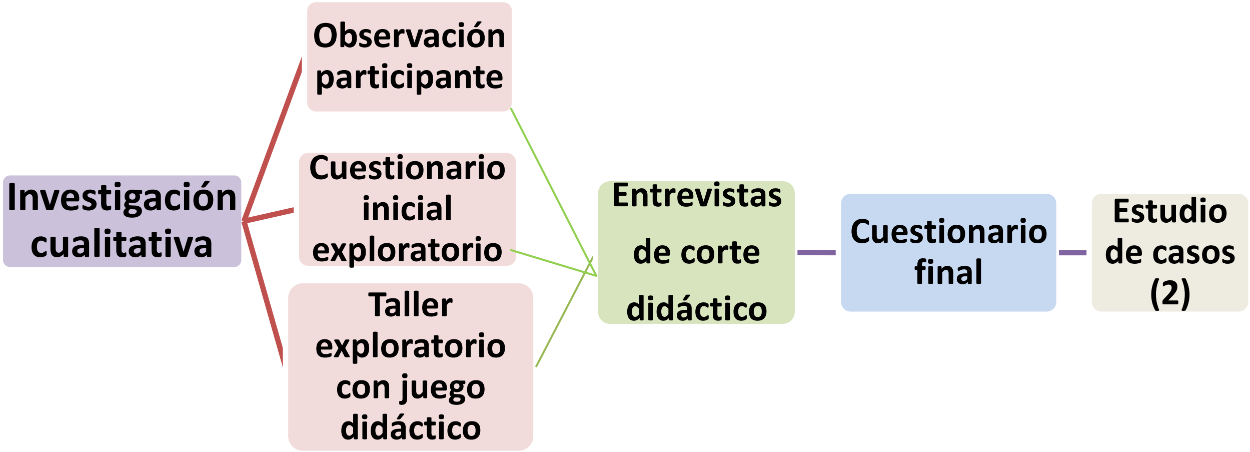


Fig. 2.1. Instrumentos metodológicos empleados en la investigación.

2.1.2. Diseño de los instrumentos metodológicos empleados

2.1.2.1. Observación participante

De acuerdo con Taylor y Bogdan (1992), la observación participante es empleada para designar a la investigación que involucra la interacción social entre el investigador y los informantes, y durante la cual se recogen datos de modo sistemático y no intrusivo.

El observador participante toma un papel interno en el grupo estudiado, y tal vez ni siquiera declara que es un investigador, conservando la ética de la investigación encubierta. El observador participante, como su nombre lo indica, es parte de lo social y cuando está participando en la vida escolar puede realizar registro de impresiones, observaciones de conversaciones, comentarios, comportamientos o eventos. Los datos derivados de la observación participante son "fuertes en realidad', Cohen, Manion & Morrison, (2007).

Para esta investigación se consideró realizar observación participante de las clases de problemas multiplicativos que se llevaban a cabo en el aula del grupo sujeto a investigación, para recabar información que nos fuese de utilidad. Para ello fue necesario establecer con anticipación, una lista de los aspectos relevantes a tener en cuenta al realizar dicha actividad. De ello derivó un plan de observación, planteado por la investigadora y supervisado por nuestra asesora, que sirviera como guía de observación, el cual se muestra en la tabla 2.1.

Dicha tabla muestra los rasgos importantes a observar en cuanto al trabajo planteado por la profesora, no como sujeto de estudio, sino por la relevancia de las actividades que desarrollarían los estudiantes mediante su guía, observar si los temas abordados acerca de problemas multiplicativos con fracciones se presentan considerando un contexto o sólo como elementos aislados, si se aborda la semántica de las operaciones o sólo se privilegia la algoritmización, si emplea material concreto o manipulativo y la manera en que concluye el tema abordado. Los elementos más importantes en la observación tienen que ver con el trabajo que desarrollen los estudiantes, observar si ponen atención, participan o realizan trabajo colaborativo y lo primordial, las estrategias que emplean en la resolución de problemas o actividades planteados en la clase y si hay evidencia de que comprenden lo que la profesora les explica. Como rasgo adicional se agrega la observación de la organización en el aula, si el número de alumnos, el tamaño y la distribución del lugar pueden afectar el desempeño de los estudiantes.

Tabla 2.1. Diseño del Protocolo de observación

PLAN DE OBSERVACIÓN			
Escuela:	Fecha:	Grado:	Tema: Multiplicación fracciones
Categoría			
Profesor			Nombre del Profesor:
Inicio de clase			
Tema abordado (contenido)			
Modo de enseñanza secuencia de enseñanza estrategias de enseñanza			
¿Trabaja con algoritmos? ¿Cómo lo hace? ¿Qué otros tratamientos didácticos presenta?			
Organización de la clase Participación promovida en los alumnos Conclusión de la clase			
Alumnos (Objeto principal de estudio)			
¿Evidencian interés en el contenido de clase? Los que ponen atención, ¿entienden? Participación en clase.			
Realizan trabajo en equipo ¿Cómo trabajan en colectivo? Convivencia Trabajo colaborativo Interacción entre partes			
Trabajo realizado Estrategias de solución Procedimiento empleado en la solución. Material empleado			
Utilización de material concreto			
¿El profesor emplea algún material concreto para la enseñanza?			
Recursos utilizados (libro, pizarrón) Información del pizarrón Quien la sitúa (alumno o profesor)			

2.1.2.2. Cuestionario inicial de exploración

El cuestionario es un instrumento de uso generalizado, útil para recoger información. Proporciona datos estructurados, a menudo numéricos, pudiendo ser administrado sin la presencia del investigador, y muchas veces siendo comparativamente sencillo de analizar, Cohen, Manion & Morrison, (2007).

Para el diseño y elaboración de los problemas del cuestionario inicial de exploración se partió de revisar trabajos de investigación realizados con anterioridad y relacionados con el tema, con ello, diseñar problemas similares a los estructurados por expertos, para luego llevar a cabo pruebas piloto con sujetos y en condiciones similares a las que se consideran en la investigación y observar los resultados. Finalmente realizamos nuestros propios diseños. En este proceso inicial de diseño se plantearon diversas tareas. Algunas fueron descartadas debido a que en la prueba piloto se observó que los estudiantes demoraban mucho en resolverlas; en otras, se modificó el enunciado al detectar que les resultaba confuso y eso impedía determinar la solución. Gracias a los resultados de las pruebas-piloto fue posible identificar fallas en la escritura que fueron corregidas y, con ello, evitamos que la redacción del problema se convirtiera en un obstáculo para su resolución. Esto nos llevó a introducir mejoras que permitieron adecuar dichos problemas al propósito que se requería. Se incluyeron pictogramas en las tareas coincidiendo con Luna (1999), para observar si su uso favorecía la resolución en el estudiante y se emplearon fracciones que le fueran familiares. La redacción de los enunciados de los problemas tenía el objetivo de ubicar a los estudiantes en un contexto de su vida cotidiana que permitiera su comprensión y enriqueciera el uso de las fracciones, como plantea Streefland, (1983). Por todo lo anterior, podemos decir que las pruebas de piloteo nos permitieron validar las tareas.

En el diseño final de este cuestionario se introducen problemas de reparto, orden y equivalencia y representación en la recta numérica, porque estimamos que son elementos indispensables en el manejo de las fracciones.

Por otro lado, considerando que para abordar la división de fracciones el estudiante debe haber aprendido antes a resolver la suma de fracciones, se incluye en el cuestionario una tarea de suma de fracciones pero con el agregado de solicitar la representación pictórica del resultado, cuyo objetivo es detectar si el estudiante entiende el significado de la operación y así conocer el manejo general que tiene de las fracciones. En general, partimos de que el sentido de cada operación, se constituye en gran medida, por el contraste con el sentido de las otras operaciones.

Con respecto al tema de problemas multiplicativos y considerando que la división es el inverso de la multiplicación, se plantean también tres problemas de multiplicación de fracciones para determinar si el alumno identifica la relación parte-parte y la preposición “de”, las que darían evidencia de la comprensión de la semántica de dicha operación.

Finalmente, se plantean tres problemas de división de fracciones, considerando los significados de la división, es decir, división partitiva y tasativa o cuotativa. El primer problema considera la división partitiva como reparto, como plantea Fishbein (1985), Lamon (2012), Flores (2014), aplicada en primera instancia a números naturales y, abordando posteriormente el uso de la fracción como cociente, el objetivo es que partiendo de la división de enteros, se obtenga como resultado una fracción, que es el primer acercamiento a la división de fracciones. El segundo y tercer problema involucran la división tasativa o cuotativa y lo que se pretende es explorar si el estudiante entiende por sí mismo lo que significa dividir fracciones y, mediante el uso de representaciones pictóricas, observar si logra identificar el número de agrupamientos e interpretar correctamente el residuo.

El diseño final consiste en un cuestionario de 11 tareas en las que, al llevar a cabo su aplicación, se pretende identificar lo siguiente:

- Modos de reparto.
- Reconstrucción del todo, representación pictórica de fracciones con diferentes denominadores.
- Representación en la recta numérica.
- Equivalencia y orden.
- Representación pictórica de operaciones con fracciones.
- Empleo de algoritmos.
- Invención de problemas.
- Identificación de partes de partes mediante distintos modos de representación.
- Identificación de la preposición “de”.
- División partitiva, empleando enteros que conduzcan a respuesta en fracción, resolución de división sin el empleo de un algoritmo.
- División cuotativa. Empleo de algoritmo de división de fracciones y determinación del sobrante.

Es importante mencionar que se consideró también en el diseño, los diferentes usos o constructos de las fracciones planteados por Kieren (1983), con el objetivo de ampliar el panorama de aplicación de dichos números. Se considera a las fracciones como relación parte-todo, medida, cociente y razón. Algunas de ellas en el cuestionario inicial de exploración y otras en las tareas del taller exploratorio.

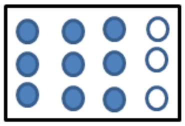
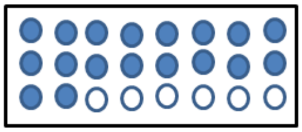
En la Tabla 2.2 se presenta el objetivo a lograr en cada una de las tareas del cuestionario inicial de exploración. En dicha tabla se expresa el número del problema en el cuestionario, la actividad que deberá realizar el estudiante en el problema y el objetivo a lograr.

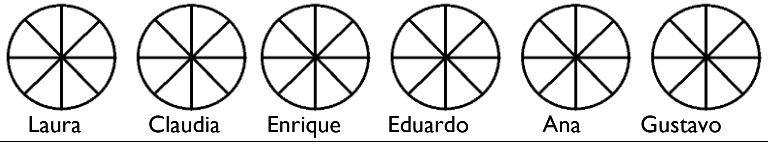
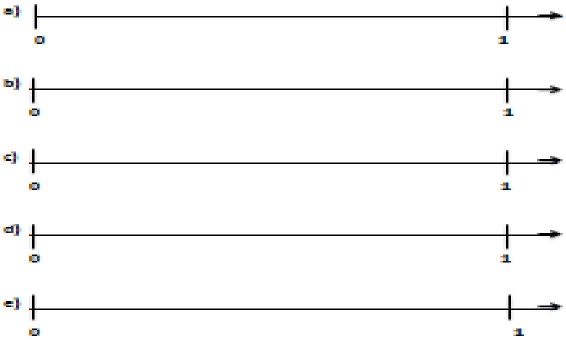
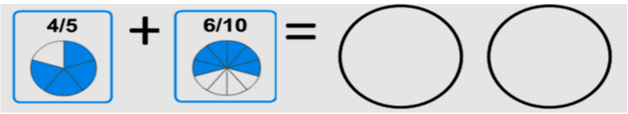
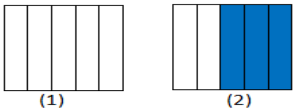
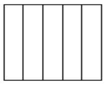
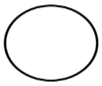
Tabla 2.2. Actividad a realizar y objetivo a lograr en cada una de las tareas del cuestionario inicial de exploración

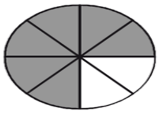
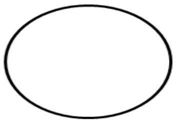
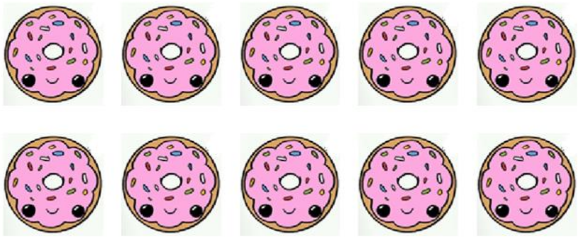
Problema	Actividad	Objetivo
1	Repartir 4 cajas de 8 chocolates cada una entre 3 niños, Juan, Enrique y Pedro. ¿Cuánto recibe cada uno?	Determinar modos de reparto, observar si realizan reparto equitativo y exhaustivo. Uso de fracciones.
2	Determinar la fracción de focos que no encienden en 2 paneles de distinto tamaño. ¿Tienen algo en común?	Identificar fracciones equivalentes
3	En una fiesta 6 niños comieron pastel, determinar qué niños comieron más o menos pastel o si comieron igual cantidad, indicar si sobra algo y cuánto sobra. Representar en un pictograma cuánto comió cada niño.	Reconstrucción del todo, identificación de fracciones equivalentes, representación pictórica de diferentes denominadores, empleo de algoritmo de suma de fracciones. Empleo de un todo continuo
4	Representar fracciones en la recta numérica, identificar si tienen algo en común y ordenarlas de menor a mayor.	Observar representación de fracciones en la recta numérica. Identificación de equivalencia y orden.
5	Representar pictóricamente la siguiente suma de fracciones $\frac{4}{5}+\frac{6}{10}=$ Invención de un problema con los mismos datos.	Representación pictórica de una suma de fracciones. Orden. Empleo de algoritmo. Invención adecuada de un problema similar.
6	Representar $\frac{2}{3}\ de\ \frac{3}{5}$ en un modelo de área rectangular. Inventar un problema similar con $\frac{3}{4}\ de\ \frac{2}{3}$ en una representación circular.	Identificación de partes de partes mediante distintos modos de representación. Empleo de algoritmo de multiplicación de fracciones.
7	Dos personas recorren el parque, representar en la recta numérica $\frac{1}{4}\ de\ \frac{1}{2}$ hora, que es lo que tarda la segunda persona en recorrer el parque.	Medida en línea de tiempo. Identificación de parte de parte y representación en la recta.
8	Repartir $\frac{6}{8}$ de pizza entre 4 personas. Representar gráficamente cuánto recibe una persona.	Representación pictórica de partes de partes, identificación de la preposición "de"
9	Repartir 10 tartas entre 6 niñas sin que haya sobrante. ¿Qué operación realizaste?	División partitiva, empleando enteros que conduzcan a respuesta en fracción, resolución de división sin el empleo de un algoritmo. Todo discreto.
10	Determinar cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ lt se llenan con una garrafa de $2\frac{3}{4}$ lt de aceite.	División cuotativa. Empleo de algoritmo de división de fracciones, determinación del sobrante. Identificación correcta del residuo.
11	Determinar cuántos cinturones de $\frac{5}{4}$ m se pueden elaborar con $2\frac{3}{4}$ m de cuero.	División cuotativa. Empleo de algoritmo de división de fracciones, determinación el sobrante. Identificación correcta del residuo.

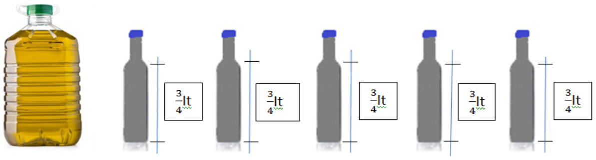
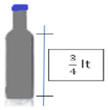
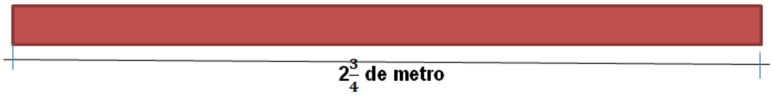
Los objetivos de las tareas nos permitirían ver cómo pensaban los estudiantes y cómo podían desarrollar sus propias tareas, es decir las estrategias de solución que emplearían en cada tarea, asociado a sus experiencias vitales y los conocimientos previos que poseían, evidenciando si tenían un dominio sobre los aspectos matemáticos involucrados. Cada tarea cubría un objetivo específico, el cual se muestra en la Tabla 2.2. Estos nos permitieron observar si podían realizar un reparto equitativo y exhaustivo, identificar fracciones equivalentes y ordenarlas, representar correctamente en la recta numérica, qué formas de representación empleaban, si conservaban la equidistribución, si lograban identificar el significado de las operaciones, en particular la división de fracciones y cómo empleaban los algoritmos. La versión final del cuestionario inicial aplicado a los estudiantes se muestra en la Tabla 2.3, en la que se indica el número de tarea, el propósito a lograr y el problema verbal diseñado por la investigadora.

Tabla 2.3. Cuestionario inicial exploratorio

CUESTIONARIO INICIAL EXPLORATORIO		
No. de Tarea	Propósito	Problema verbal
Tarea 1 Modos de reparto. Fracción como relación parte-todo.	Observar si realizan reparto equitativo y exhaustivo	Juan invitó a Enrique y a Pedro a jugar videojuegos en Game Planet. Su mamá les llevó 4 cajitas de chocolates para que las repartieran equitativamente entre los 3 ¿Qué parte le tocó a cada uno? Indica cómo repartirías los siguientes chocolates a cada persona.  Explica porqué es equitativa la repartición.
Tarea 2 Equivalencia Fracción como relación parte-todo.	Identificación de equivalencia	En la plaza comercial hay dos paneles de focos uno de 12 y otro de 24. Ambos están dañados y no encienden algunos focos. De acuerdo a la imagen, indica ¿qué fracción de los paneles NO enciende en cada uno?, entendiendo que los focos que están coloreados son los encendidos.   De acuerdo a tu respuesta, de las fracciones que obtuviste: ¿Las fracciones tienen algo en común? ____ ¿Una es mayor que la otra o son equivalentes? Explica por qué.
Tarea 3 Fracción como relación parte-todo.	Reconstrucción del todo, identificación de fracciones equivalentes,	Laura festejó sus cumpleaños e invitó a varios amigos a su fiesta. Laura comió $\frac{1}{8}$ de pastel, Claudia comió $\frac{2}{16}$ de pastel, Enrique comió $\frac{1}{4}$, Eduardo comió $\frac{3}{16}$, Ana comió $\frac{1}{16}$ y Gustavo comió $\frac{3}{16}$. ¿Sobró pastel? De ser así, ¿qué fracción de pastel quedó sin repartir? ¿Quién comió más pastel, Laura o Claudia? ¿Eduardo comió más que Gustavo?

Empleo de todo continuo.	representación pictórica de fracciones con diferentes denominadores, empleo de algoritmo de suma de fracciones.	¿Ana comió más o menos que Enrique? Explica por qué. Justifica tu respuesta. Sombrea la fracción que comió cada uno e indica si tienen algo en común o qué relación hay entre ellas. 
Tarea 4 Equivalencia y orden Fracción como medida.	Observar representación de fracciones en la recta numérica.	Representa en cada recta numérica, cada una de las siguientes fracciones: a) $\frac{3}{8}$, b) $\frac{5}{10}$, c) $\frac{1}{5}$, d) $\frac{2}{3}$, e) $\frac{1}{2}$  ¿Identificas si algunas de ellas tienen algo en común? Sí _____________ No________________. Explica por qué. Ordena las fracciones de menor a mayor.
Tarea 5 Representación pictórica de una suma de fracciones. Empleo de algoritmo. Invención de problemas.	Identificación del significado de la suma de fracciones.	¿Qué figura se obtiene al sumar las dos fracciones siguientes?  Explica porqué lo has representado así. ¿Cuál de las dos fracciones es mayor? Inventa un problema donde utilices los datos anteriores. Resuélvelo.
Tarea 6 Empleo de algoritmo de multiplicación de fracciones. Empleo de todo continuo.	Identificación de partes de partes mediante distintos modos de representación y significado de la multiplicación de fracciones.	Observa las siguientes figuras:  La figura 1 corresponde a la unidad y la figura 2 corresponde a $\frac{3}{5}$ de la unidad. En la figura de abajo dibuja lo que corresponde a $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{5}$. Ilumina el producto correspondiente.  Plantea un problema similar empleando las fracciones $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$. Represéntalo en la figura de abajo.  ¿Qué operación aplicaste? ¿Por qué?

Tarea 7 Empleo de algoritmo de multiplicación de fracciones. Fracción como medida.	Identificación de partes de partes y su representación en la recta.	Jorge sale a correr cada mañana, recorre el parque en $\frac{1}{2}$ hora. Su vecino Armando recorre el parque en $\frac{1}{4}$ del tiempo que lo hace Jorge. ¿Qué fracción de tiempo tarda Armando en recorrer el parque? ¿Cómo lo resolviste? Explica. Representa en la recta numérica la fracción de tiempo que tarda Armando en recorrer el parque. Explica tu respuesta. 
Tarea 8 Representación pictórica de partes de partes e identificación de la preposición "de". Fracción como operador.	Observar si pueden asociar a la división de fracciones como el inverso de la multiplicación.	Adriana compró una pizza grande hawaiana, la pizza estaba cortada en ocho partes, se sentó a ver la televisión y se comió dos rebanadas. En ese momento llegaron a visitarla 4 de sus viejos amigos. Ella repartió equitativamente lo que quedaba de la pizza entre sus amigos. ¿Qué fracción tenía que repartir? ¿Qué fracción de pizza le correspondió a cada uno? Sombrea en el círculo en blanco, la cantidad de pizza que recibiría una persona.   ¿Cuál es la expresión que define el problema? a) $\frac{1}{8}$ de $\frac{6}{4}$ c) $\frac{6}{8}$ de $\frac{2}{4}$ b) $\frac{1}{4}$ de $\frac{6}{8}$ d) $\frac{6}{8}$ $de\frac{1}{4}$ Del todo original dividido en octavos, ¿qué parte es la que escogiste? Explica cómo obtuviste esos resultados y simplifícalos.
Tares 9 División partitiva. Fracción como cociente. Empleo de todo discreto.	Resolución de división partitiva, empleando enteros que conduzcan a respuesta en fracción. Observar si emplean algoritmo.	Alicia preparó 10 pequeñas tartas para su reunión de amigas. A su reunión acudieron 6 de sus mejores amigas. Se terminaron las tartas y todas comieron lo mismo. ¿Cuánto comió cada una de ellas? ¿Qué operación realizaste y por qué? Dibuja el reparto que hiciste. 
Tarea 10 División cuotativa. Fracción como medida.	Observar empleo de algoritmo de división de fracciones,	En un Restaurante de comida rápida, el dueño compra garrafas de aceite de $2\frac{3}{4}$litros para la elaboración de los alimentos que preparan. Ellos llenan botellas de $\frac{3}{4}$ de litro para su uso. ¿Cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ de litro se pueden llenar con una garrafa? En el siguiente dibujo, marca las botellas que se llenarían con la garrafa.

	determinación del sobrante.	 ¿Sobró algo de aceite? De ser así, ¿cómo calculaste qué fracción de una botella se llena con el sobrante? Dibuja la fracción que queda en la botella que se llena con el sobrante.  Explica cómo llegaste a esa conclusión y que operación realizaste.
Tarea 11 División cuotativa. Fracción como medida.	Observar el empleo de algoritmo de división de fracciones, determinación del sobrante.	Con $\frac{5}{4}$ de un metro de cuero, un artesano elabora un cinturón. Si tiene una tira de $2\frac{3}{4}$ de metro. ¿Cuántos cinturones puede elaborar?   Representa en la figura la cantidad de cinturones que se obtienen. ¿Sobra material? De ser así, ¿qué fracción de material sobra?  ¿Cuántas operaciones realizaste? ¿Cuáles fueron esas operaciones?

Los problemas del cuestionario tuvieron como estructura un texto breve acompañados de pictogramas que permitieran lograr una reconstrucción de los aspectos fundamentales de los problemas, así como preguntas que les ayudaran en la reflexión y por otro lado, nos permitiesen identificar sus formas de pensar.

2.1.2.3. Taller exploratorio mediante un juego didáctico de operaciones con fracciones

Tratando de aportar un nuevo punto de vista en la realización del taller, lo consideramos como **taller exploratorio** que se trabajó en condiciones distintas a las que normalmente dan marco al trabajo del aula. El objetivo a lograr en el taller consistía en que los alumnos, mediante la resolución de problemas con fracciones y el uso de material visual manipulativo, mostrado en la Figura 2.2, (primero de manera individual y, posteriormente con trabajo colaborativo), desarrollaran la representación pictórica de cada una de las operaciones considerando que ya habían sido abordadas en la clase por el profesor, indagar en torno a la comprensión o a las nociones que el estudiante tiene de cada una de dichas operaciones. Posteriormente, acompañados por el investigador, construir en sesión plenaria el significado de dichas operaciones y, una vez logrado lo anterior, emplear el juego didáctico en el que se representan las operaciones con fracciones de manera pictórica con el fin de reforzar dichas nociones y lograr un nivel de abstracción de la semántica de las operaciones.

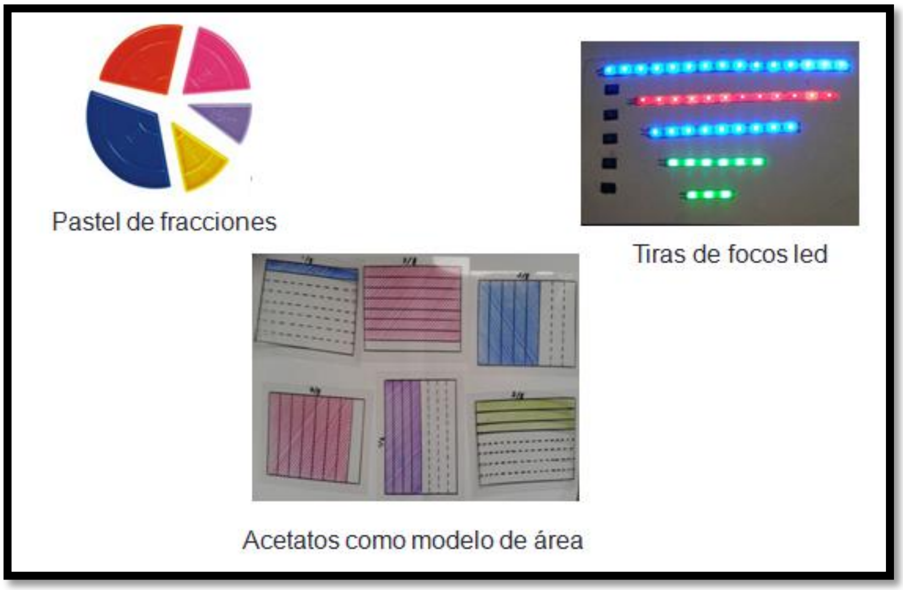


Fig. 2.2. Material manipulativo.

Es importante aclarar que el objetivo principal de la investigación es la división de fracciones, sin embargo, realizamos un pasaje breve por las cuatro operaciones, esto debido a que la división de fracciones es un tema de difícil comprensión y si el estudiante no entiende las operaciones de suma y resta, será más complicado que comprenda la división que se considera una operación más difícil.

Si el estudiante logra comprender el significado de las operaciones le será más sencillo entender el resultado, es decir, el significado de las otras operaciones le permitirá diferenciar y comprender mejor el significado de la división de fracciones.

Si el estudiante entiende que sumar significa agregar, que restar significa quitar, que multiplicar significa tomar partes de partes y que dividir significa determinar cuánto se repite una fracción en otra, esto le dará sentido y le permitirá elegir el algoritmo correcto al resolver problemas. Esto se pretende lograr mediante el uso de pictogramas y los materiales mencionados.

La manera de emplear los materiales es, de acuerdo al significado mencionado anteriormente, si se trata de una suma, tomar del material la fracción inicial y “agregar” la siguiente fracción y observar el resultado; si se trata de una resta, “quitar” a la fracción inicial la siguiente fracción; en el caso de la multiplicación, tomar una fracción de la fracción inicial y en el caso de la división, medir con el material, cuánto se repite una fracción en otra.

Para la selección de las tareas a desarrollar en el taller se consideraron algunas de las ya diseñadas para el cuestionario inicial de exploración.

La Tabla 2.4 muestra las actividades y objetivos que se pretendía lograr en la aplicación de las tareas que se emplearon en el desarrollo del taller.

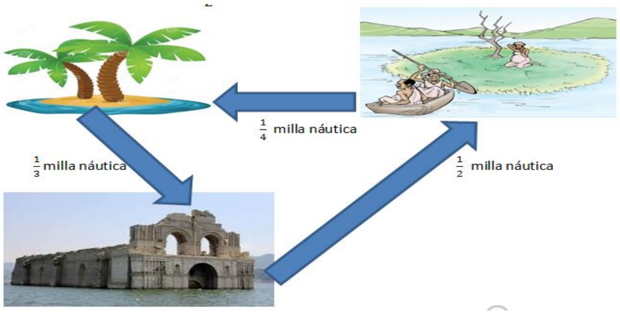
Tabla 2.4. Actividad y objetivo a desarrollar en las tareas aplicadas en el taller exploratorio

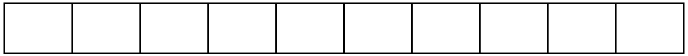
Problemas		**Actividad**	**Objetivo**
Sesión 1 y sesión 2	12	Determinar la distancia que recorre una familia que viaja en el mar a dos lugares distintos y regresa. Comparar las distancias y determinar cuál es mayor y por cuánto.	Suma, comparación y resta de fracciones. Observación de estrategias de solución. Empleo de algoritmo de suma y resta. Formas de representación pictórica de la suma y resta de fracciones. Se trabajó cada problema en un equipo y se le proporcionó a cada equipo material concreto que debía utilizar para hacer una representación pictórica de la solución.
	13	Determinar cuánta gasolina tiene el tanque de un auto al final de un viaje que inicia con una determinada cantidad, gasta una parte y vuelve a cargar. Representar gráficamente el proceso de llenado del tanque de gasolina al inicio, después del viaje y al final.	
	14	Determinar la fracción de dinero que le queda a una persona que gastó una fracción de su dinero un día y otra fracción al siguiente día y representar pictóricamente el proceso.	

	15	Determinar a qué fracción de una tira de lámpara de 12 leds corresponden 5 tiras de lámparas cuyos focos no encienden por completo, posteriormente sumar 2 y restar 2 de ellas.	
Sesión 3	16	Realizar la partición de un terreno que es sembrado con flores de acuerdo a ciertas indicaciones.	Identificación de partes de partes mediante instrucciones coloquiales como es “la mitad de la mitad”. Reconocimiento de la fracción y empleo del algoritmo de multiplicación. Representación pictórica.
Sesión 4	17	Determinar la cantidad de pintura que se requiere para pintar una línea en el asfalto de acuerdo a una razón establecida.	Establecer la relación proporcional y determinar número de agrupamientos e identificación del residuo. Empleo de algoritmo de la división de fracciones.
	18	Determinar cuántos trozos de tubo para elaborar una cerca, se obtienen de un tubo más largo	Determinar número de agrupamientos e identificación del residuo. Empleo de algoritmo de la división de fracciones.
Sesión 5		Aplicación del juego de fracciones.	Acercamiento al significado de las operaciones con fracciones de manera lúdica.

De inicio se consideró aplicar cuatro tareas diferentes a todo el grupo, con el objetivo de obtener información diversa que permitiera enriquecer la investigación, sin embargo, al llevar a cabo la primera sesión observamos que esto complicaba el desarrollo de la sesión, lo que ocasionó que se prolongara a dos sesiones, debido a ello decidimos preparar dos tareas por sesión, para que en las sesiones restantes, iniciáramos con una y si el tiempo era idóneo, realizar la segunda. La sesión 3 de multiplicación de fracciones se llevó un tiempo considerable y sólo se pudo trabajar con una tarea y en la sesión 4 de división de fracciones, sólo un equipo pudo trabajar con la segunda tarea (dos estudiantes). Es por ello que, en la Tabla 2.4 se presentan cuatro tareas de suma y resta, una de multiplicación y dos de división de fracciones. Los objetivos a lograr eran, al igual que en las tareas del cuestionario, observar las estrategias de solución que emplearían los estudiantes para determinar si eso nos conducía a descubrir cómo pensaban al momento de solucionar los problemas. En la tabla 2.5 se muestran las tareas aplicadas en el taller exploratorio por sesión.

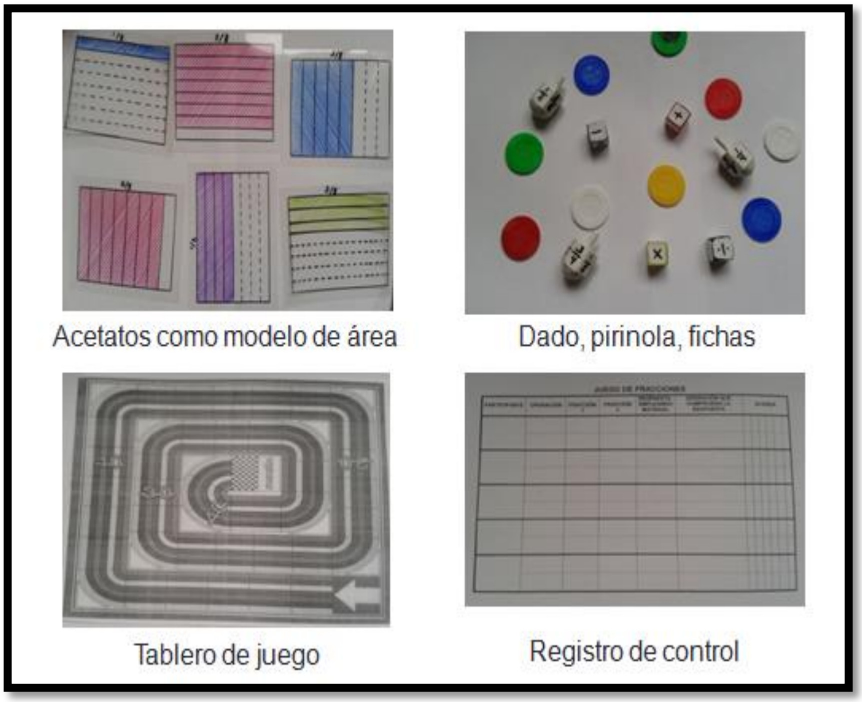
Tabla 2.5. Tareas del taller exploratorio de operaciones con fracciones

TALLER EXPLORATORIO	
No. De Tarea	Tarea de taller
Tarea 12 Suma y resta de fracciones comparación	Una familia que vive en la Isla de Hawai debe navegar $\frac{1}{4}$ de milla náutica a la isla vecina para conseguir víveres, de ahí deben viajar $\frac{1}{3}$ de milla hacia el templo y viajar $\frac{1}{2}$ milla de regreso a la Isla de Hawai .  a)¿Qué fracción de milla recorrieron en total? Realiza la operación y escribe la respuesta. b)¿Qué distancia es mayor: de la de isla de Hawai a la isla vecina o la de la isla vecina al templo? ¿Cuánto es mayor? Indica la operación y explica cómo la identificaste. c) Expresa la diferencia entre ambas distancias con una fracción de milla
Tarea 13 Suma y resta de fracciones	Susana gastó el sábado $\frac{2}{6}$ del dinero que tenía, y el domingo $\frac{4}{9}$ de la cantidad inicial. ¿Qué fracción del dinero le quedó? ¿Qué operación realizaste? ¿Por qué elegiste esa operación? Haz una representación pictórica de lo que gastó en total y de lo que le resta.
Tarea 14 Suma y resta de fracciones	Raúl carga el tanque de gasolina de su auto a $\frac{7}{8}$ de su capacidad. Viaja a Guanajuato, de ida y vuelta, gasta $\frac{1}{2}$ de tanque. De regreso a la ciudad, carga $\frac{1}{4}$ de tanque de gasolina nuevamente. ¿Qué fracción de gasolina tiene el tanque al final? ¿Cuántas operaciones se requieren para resolver el problema y cuáles son? Representa en las siguientes figuras el proceso de llenado del tanque de gasolina. Inicio después del viaje a Guanajuato final
Tarea 15 Suma y resta de fracciones	En el autobús que lleva al centro comercial se utilizan lámparas de led para iluminar el interior, cada lámpara tiene 12 leds, pero en la mayoría hay fallas y no encienden todos los leds. Tira de 12 leds  Las lámparas que encienden son las siguientes, ¿A qué fracción de la tira corresponde cada una?

	a)  b)  c)  d)  e)  Representa las fracciones anteriores en la recta numérica. Realiza las siguientes operaciones. b) + e) d) - a)
Tarea 16 Multiplicación de fracciones	Mi abuelo fue al centro comercial a comprar semillas porque tiene un terreno en donde siembra flores, en la mitad del terreno siembra claveles, y en la otra mitad, repartidos en partes iguales siembra rosas, y crisantemos. En la parte donde siembra rosas, la mitad son rosas rojas y la otra mitad son blancas. ¿Qué fracción del terreno emplea para sembrar crisantemos? ¿Qué fracción del terreno emplea para sembrar rosas rojas? ¿Cuánto es $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$? Dibuja cómo distribuirías el terreno
Tarea 17 División de fracciones	Para pintar las líneas del asfalto en una calle, se utiliza 1 litro de pintura para trazar $\frac{1}{2}$ metro de línea. ¿Cuántos litros de pintura se utilizan para trazar $\frac{3}{4}$ m de línea? ¿Qué operación empleaste? Represéntalo en un dibujo.
Tarea 18 División de fracciones	Un albañil debe construir una cerca con tubos de $\frac{3}{4}$ de metro. En la tlapalería le venden sólo tubos de $2\frac{1}{2}$ metros de largo. ¿Cuántos trozos para la cerca obtendrá del tubo comprado en la tlapalería?  Un alumno de secundaria lo dividió así. ¿Estás de acuerdo con su división?, De ser así, marca en el dibujo los trozos de tubo que obtendrá el albañil.  ¿Sobra algo del tubo? Si es así, ¿a qué fracción corresponde? ¿Qué operación se emplea en este proceso?

2.1.2.3.1. Juego de fracciones

Estimamos conveniente agregar un componente lúdico en la aplicación del taller, por lo que surgió la idea de desarrollar un juego de fracciones que tuviera como propósito acercar al estudiante el significado de las operaciones con fracciones, empleando material manipulativo. Para ello decidimos aprovechar la característica de material traslúcido de los acetatos y diseñar un juego, empleando dicho material, el modelo de área y fracciones familiares al estudiante. La investigadora consideró que elaborar un juego que sólo involucrara división no sería un atractivo para los profesores y en cambio si se incluía las cuatro operaciones sería más efectivo su uso. El diseño y desarrollo, así como las reglas del juego, en extenso, se muestran en el Apéndice D, en el que se describe la manera de utilizar el material para representar cada una de las operaciones con fracciones, el tablero empleado, la pirinola, el dado, las fichas y la hoja de registro de avances. El material empleado para el juego se muestra en la Figura 2.3.


Acetatos como modelo de área

Dado, pirinola, fichas

Tablero de juego

Registro de control

Fig. 2.3. Juego didáctico de fracciones.

2.1.2.4. Entrevistas en profundidad y de corte didáctico

En la presente investigación se consideró realizar entrevistas a tres estudiantes que serían elegidos después de realizar un análisis cualitativo de los datos recabados en la aplicación del cuestionario inicial de exploración y del taller exploratorio. La elección de los estudiantes a entrevistar dependería de los resultados que se obtuvieran de dichos instrumentos, se buscó realizar entrevistas en profundidad y de corte didáctico (las cuáles se definen ampliamente en el Capítulo 6, de acuerdo a los planteamientos de Taylor y Bogdan, 1992 y Valdemoros, 2008), a los estudiantes seleccionados para obtener información que nos llevara a identificar el porqué de las estrategias y dificultades que presentan los estudiantes de primero de secundaria en la división de fracciones, se pretendía que revelaran información que de no ser por este método, no se podría observar directamente. El corte didáctico se aplicaría si se consideraba necesario acercar al estudiante al significado y sentido de las operaciones, mediante preguntas guía que lo aproximaran a la semántica de dichas operaciones.

Para las entrevistas se emplearon tareas adicionales, las cuales pueden ser revisadas en el Capítulo 6. Estas tareas tenían el objetivo de guiar y acercar a los entrevistados al significado y sentido de las fracciones, en particular la división de fracciones.

2.1.2.5. Cuestionario final

Posterior a la realización de las entrevistas se consideró la aplicación de un cuestionario final a los estudiantes entrevistados (de acuerdo a lo establecido por Cohen, Manion & Morrison, (2007) y que se describe más adelante), con el fin de contrastar si se logró un avance o si se observaban diferencias de su desempeño al comparar y realizar una triangulación de las tareas realizadas en el cuestionario inicial de exploración y el taller exploratorio con el trabajo realizado en el Cuestionario final. En dicho cuestionario se pretendía aplicar solamente resolución de división de fracciones en sus diferentes significados.

2.1.2.6. Estudio de casos

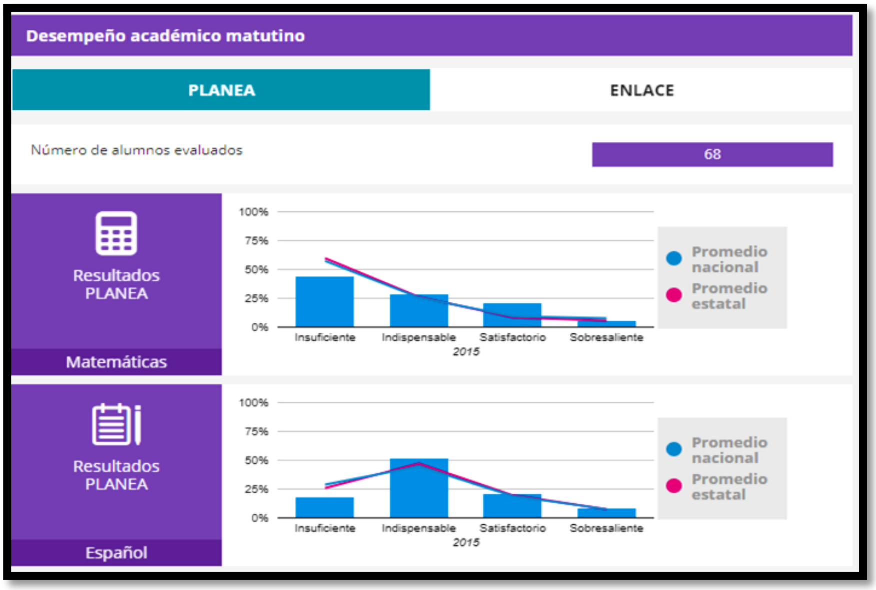
Se desarrolló este estudio (definido más adelante, de acuerdo a lo establecido por Taylor y Bogdan, 1992), para profundizar el análisis de algunos de los sujetos de investigación. Las entrevistas fueron realizadas de manera individual, y se consideró realizar tres estudios de casos, el objetivo era indagar y analizar profundamente los datos obtenidos de esos sujetos de investigación y validar los datos mediante la contrastación de los diversos instrumentos, con el propósito de comprobar si se cumplieron los objetivos establecidos en la propuesta inicial de esta investigación y brindar un reporte de los resultados obtenidos.

2.1.3. Escenario y sujetos de investigación

En este apartado se hace mención sobre la institución educativa en la que se nos permitió llevar a cabo la presente investigación, sus condiciones y contexto general, así como de los sujetos que participan en la investigación.

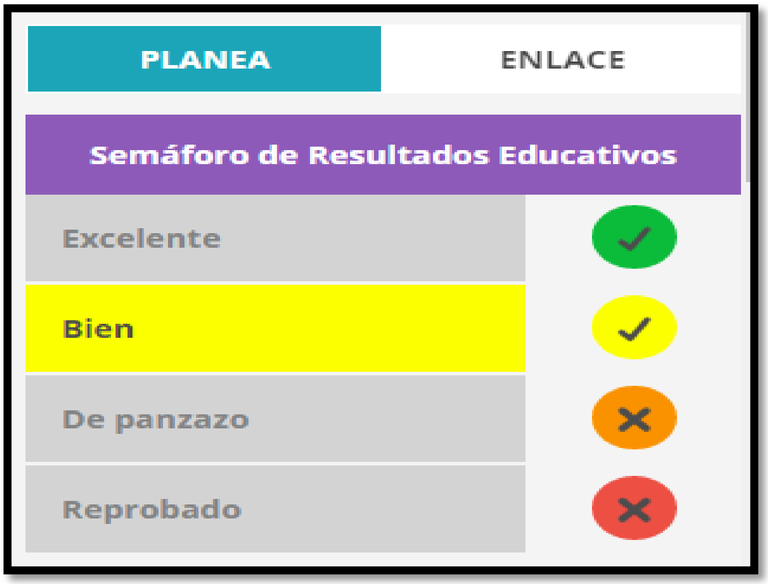
Se trata de una Escuela Secundaria General pública ubicada en el Estado de México. Se eligió esta escuela porque fue la que nos brindó facilidades para la realización de la presente investigación, y que pudo mantener incólume sus actividades después del terremoto del 19 de septiembre. Fue un momento difícil en el contexto social, en el que las escuelas permanecieron cerradas en espera de revisión de infraestructura, por la difícil situación enfrentada.

Es una escuela pública ubicada en la Zona Metropolitana al norte de la Ciudad de México. Cuenta con todos los servicios. En cuanto al desempeño académico institucional, se ubica en el número 554 de 3501, de acuerdo a datos de Mejora tu Escuela.org, cuyos resultados de PLANEA se muestran a continuación (Fig. 2.4 y 2.5), esta institución ha sido situada entre las escuelas públicas promedio en el Estado de México. Para más información sobre datos de PLANEA véase Apéndice A.



Número de alumnos evaluados 68

Fig. 2.4. Resultado de la Secundaria de estudio en Planea 2015.



Semáforo de Resultados Educativos

Excelente	✓
Bien	✓
De panzazo	✗
Reprobado	✗

Fig. 2.5. Resultados de la secundaria en PLANEA 2017, de Mejora tu escuela.org.

La escuela se ubica en una situación social de clase media baja, en la cual en la mayoría de los hogares deben trabajar ambos padres (quienes en muchos casos no concretaron sus estudios), para solventar los gastos familiares, por lo que la atención brindada a la educación de sus hijos es muy limitada y en ocasiones nula.

Esta escuela es considerada de baja y muy baja marginación, de acuerdo a la prueba realizada por Planea 2017. Esto se refiere a la evaluación que realizan de la situación social, en la que consideran los diferentes factores y circunstancias que intervienen en los resultados de aprendizaje. Pueden ser de tipo personal, familiar, escolar, socioeconómico e inclusive ambiental y en este caso se refiere a que es una zona que en general tiene acceso a servicios y el entorno familiar es aceptable, en el que el número de personas en el hogar que comparten un cuarto es pequeño, que cuentan con trabajo remunerado en casa, agua dentro de la casa, escolaridad de los padres y supervisión de tareas, entre otros.

En Matemáticas la escuela presenta los siguientes resultados, de un total de 73 alumnos evaluados:

Tabla 2.6. Niveles de desempeño de la institución en la que se llevó a cabo la investigación

NI	*NII*	*NIII*	*NIV*
23	*30*	*8*	*12*
31.5%	*41.1%*	*11%*	*16.4%*

Estos niveles van del I al IV en orden progresivo, es decir, el nivel más bajo es el I y el más alto es el IV. Además, son acumulativos, ya que los estudiantes que se ubican en el nivel II cuentan con los aprendizajes del nivel previo (I) y así sucesivamente. El nivel I, se considera insuficiente, el nivel II elemental, el nivel III satisfactorio y el nivel IV sobresaliente. Para más información sobre la descripción de estos niveles, véase Apéndice A.

De acuerdo a la descripción de los niveles que PLANEA proporciona, el nivel que se debe alcanzar de acuerdo al tema de investigación es el III, en el que los estudiantes "*Resuelven problemas con fracciones, números enteros o potencias de números naturales"*, Planea 2017.

Los resultados observados en la Tabla 2.6 nos indican que la escuela presenta un bajo porcentaje de alumnos que alcanzan el nivel III y IV, que son los niveles en los que se considera que los alumnos adquieren la habilidad para resolver problemas que involucran números fraccionarios. Por lo que se deduce de lo anterior, que los estudiantes requieren apoyo en esa área de estudio. Es importante destacar que se observa una discrepancia en la información que proporciona PLANEA, debido a que en la Figura 2.5 se indica que la escuela se ubica en la posición Bien, sin embargo la información proporcionada en la Figura 2.4 y en la Tabla 2.6 muestra que la escuela se encuentra en el nivel I que es insuficiente. Aunque en la Figura 2.4, la información proporcionada es de 2015, los resultados en 2017 no han variado mucho.

2.1.3.1. Sujetos de estudio

En cuanto a los sujetos de estudio, se trabajó con un grupo de primer grado, por ser el grado en el que se abordan los contenidos matemáticos a los que se hace referencia en la presente investigación.

Se eligió éste grupo de entre cinco, por ser el único que en el momento de la investigación contaba con profesor titular, los demás grupos se encontraban sin profesor a cargo por lo que no creímos conveniente trabajar con un grupo sin supervisión. Por ser el único grupo con el que era posible trabajar en el momento, se presentaron dificultades en la compaginación de horarios.

El grupo consta de 42 alumnos con edades entre 12 y 13 años de edad, con alrededor de 3 o 4 niños sobresalientes y el resto con desempeño promedio e incluso con niños en los que se detectan fuertes dificultades de aprendizaje. Por información proporcionada por la profesora a cargo, el grupo es distraído, en general con problemas para seguir indicaciones, y hay que repetirles la consigna varias veces para que puedan llevar a cabo lo que se les solicita.

Considero importante mencionar que al momento de trabajar con el grupo, la profesora a cargo se encontraba en un proceso de valoración por parte de las autoridades escolares en lo que respecta al proceso de Evaluación de la Educación que se estructura en la Reforma Educativa. Debido a ello, y a la premura que tenía por cumplir con sus procesos de valuación, se limitó el tiempo de trabajo con los estudiantes a 7 sesiones de 50 minutos, que se vieron reducidos a 40 minutos aproximadamente por cuestiones técnicas. Su argumento fue que se encontraba en proceso de recibir supervisión y debía cumplir con los contenidos del programa en tiempo y forma por lo que el trabajar más tiempo con los alumnos le ocasionaría un retraso en su labor educativa.

Por el problema de investigación aquí tratado, consideramos conveniente esperar a que la profesora abordara el tema curricular de los números fraccionarios con los estudiantes, para posteriormente evaluar la comprensión o las nociones de la división de fracciones que los alumnos hubiesen logrado. Las sesiones fueron distribuidas de la siguiente manera:

- 2 sesiones para la aplicación de cuestionario inicial.
- 5 sesiones para la implementación de un taller exploratorio de resolución de problemas.

Adicionalmente y previo a llevar a cabo el taller, solicitamos a la profesora que nos permitiera observar sus clases sobre el tema y tuvimos oportunidad de observar el tema de multiplicación de fracciones que la profesora impartió a los estudiantes en dos sesiones. Por otro lado, tuvimos oportunidad de realizar observación indirecta, debido a que logramos tener un acercamiento al cuaderno de anotaciones diarias de un estudiante, con lo cual pudimos ampliar el panorama sobre la forma en que se llevó a cabo la enseñanza-aprendizaje de las fracciones en el grupo.

En este capítulo hemos descrito a grandes rasgos en qué consistió el diseño de cada uno de los instrumentos metodológicos a emplear. La aplicación de los instrumentos metodológicos se llevó a cabo en dos etapas, la primera de ellas involucra la observación participante, el cuestionario inicial exploratorio y el taller exploratorio con empleo de juego didáctico de fracciones, los que nos permitieron recabar información para la selección de los sujetos a entrevistar; y la segunda etapa incluye entrevistas de corte didáctico, la aplicación del cuestionario final y estudio de casos de los sujetos seleccionados. Se profundizará en dichos elementos a medida que se avance en los capítulos posteriores.

Capítulo 3

Análisis de los resultados registrados en la observación participante

En este capítulo abordaremos a detalle dos de los instrumentos metodológicos empleados en la parte inicial de la investigación, los que nos permitieron reunir información importante para conocer el estado general del grupo de investigación. Se presentan los resultados de la observación realizada a una clase de multiplicación de fracciones y de la observación indirecta que tuvimos oportunidad de realizar al tener acercamiento a un cuaderno de apuntes de uno de los estudiantes.

3.1. La observación de clase

En esta investigación se llevó a cabo observación de una clase sobre problemas multiplicativos con fracciones y para ello de manera anticipada la investigadora, en acompañamiento con su asesora, como se mencionó anteriormente, preparó un listado de los tópicos de importancia a observar, estableciendo que en dicha observación lo más importante era identificar las estrategias que emplean los alumnos para resolver lo que la profesora les plantea, si se hace uso de material concreto, si se realiza trabajo colaborativo, y los recursos que se utilizan para la enseñanza.

La clase fue impartida en 2 sesiones de 50 minutos, por la profesora a cargo del grupo. Ella hizo uso del modelo de área, partiendo de la resolución de un problema. El tema que abordó de acuerdo al programa fue problemas multiplicativos, indicando a los estudiantes que hay problemas que implican el uso de la multiplicación y división de fracciones. Les recordó que ya sabían sumar empleando la técnica que les enseñó de "la carita feliz", pero en esa clase iban a realizar multiplicaciones y para ello resolverían un problema.

Sesión 1

El problema trabajado fue el siguiente:

Axel, Luis y Fernando tienen un terreno rectangular dividido en partes iguales, Axel desea sembrar en su parte o fracción del terreno una cuarta parte de frambuesas. ¿Qué fracción del terreno total es la que va a ocupar Axel para sembrar?

La profesora fue guiando al alumno, desde el pizarrón y empleando instrumentos de medición, en la partición del terreno, primero en tercios y posteriormente uno de los tercios subdividido en cuatro partes, para elegir uno que correspondería a $\frac{1}{12}$, como muestra la Fig. 3.1.

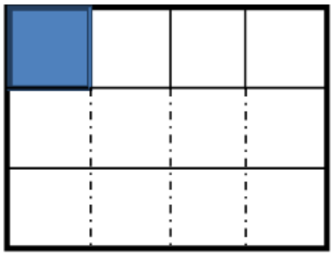


Fig. 3.1. Partición que realiza la profesora en el pizarrón y que simboliza el problema planteado.

Y les pregunta:

P = Profesora, **T**= Todos, **A**= Alumna, **B**=Alumno.

P: Esto [señala el tercio de Axel] es lo que le toca a Axel, pero yo quiero saber, esto [señala la parte coloreada], de todo mi terreno ¿cuánto es?
A: Un doceavo porque … si divido todas las partes iguales, quedaría como un doceavo.
P: Ah, entonces, estoy iluminando uno de ¿cuántos en total?
T: De doce.

P: Entonces ¿cómo responderías la pregunta del problema?
P: ¿Cuál es la pregunta del problema?
A: ¿Qué fracción del terreno total es la que va a ocupar Axel para sembrar?

P: ¿Qué fracción total del terreno?
T: Un doceavo.
P: Una doceava parte del terreno total, ok. Ocupará una doceava parte del terreno total.

La profesora agrega otra parte al problema:

P: ¿Quién sigue?
T: Luis.
P: Ok, escribimos como continuación del problema.
Luis desea sembrar ajo en dos terceras partes de su terreno, estamos hablando del mismo terreno.
A: ¿Dos terceras partes?
P: Dos terceras partes de su terreno. ¿Qué fracción del terreno va a sembrar? Estamos hablando del terreno total también. Ok.

Les solicita que vuelvan a realizar un rectángulo pero ahora considerando la nueva división que solicita el problema, lo representa en el pizarrón, como muestra la fig. 3.2 y vuelve a preguntar.

Fig. 3.2. Representación pictórica de problema de multiplicación de fracciones.

P: ¿Cuánto me pidieron? ¿Cuánto va a ocupar? Dos terceras partes ¿de su qué?
A2: Terreno.
P: Terreno. Estamos de acuerdo. ¿Ahora la pregunta cuál era compañerito? Vuelve a leerla por favor.
A2:¿Qué fracción del terreno total va a sembrar?
P: ¿Qué harías tú para saber?
A2: Dividir el terreno entre tres.
P: Perfecto. Entonces, así como hicimos el anterior, haz este, puntéalo.
P: Ok. Y entonces, tú mismo compañerito. Si iluminé estos dos, y todos de una misma medida ¿cuántos iluminé?
A2: Dos.
P: Dos de ¿cuántos?
A: Dos novenos.
P: Dos novenos. ¿Están de acuerdo? Entonces la pregunta ¿cómo la contestamos?

A: Ocuparemos dos novenos.
P: Ocuparemos dos novenos del total ¿de qué?
T: Del terreno.

La profesora continúa la división del terreno con los estudiantes y al término de esto, para asociar la respuesta del problema al algoritmo mencionó que debía haber una forma más sencilla de resolverlo, sin necesidad de dibujar todo el terreno.

Sesión 2

En la segunda sesión, para determinar la multiplicación de fracciones emplea la fórmula de área de un rectángulo y de esa manera, indicando el lado de cada parte del rectángulo, obtiene el resultado de la multiplicación, (Fig. 3.3). Vuelve a preguntar:

P: ¿Cómo calculas el área de un rectángulo?
T: Base por altura.
P: ¿Y quién es la base?
T: La de abajo.
P: ¿Y quién es la altura?
A: La de arriba.
B: La del lado.
P: Entonces base por ¿quién?
A: Por altura.
P: ¿De quién?
T: Del rectángulo.
P: Del rectángulo. Aplicando la fórmula del rectángulo que es A=bxh.

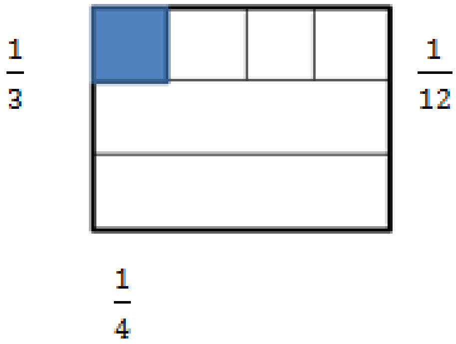


Fig. 3.3. Aplicación de la fórmula de área A=bxh al problema.

P: De base tengo un cuarto y de altura ¿un qué?
T: Un tercio.
P: Y si tu aplicas tu fórmula, fíjate bien sería $\frac{1}{4}x\ \frac{1}{3}$ =
Tú ya me diste la respuesta ayer, ¿cuál fue la respuesta?
A: Un doceavo.

P: A ver, fíjate bien ¿cómo se multiplica? $\frac{1}{4}\,x\,\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$
A: ¿Se multiplican los de abajo?
P: Ajá, ¿y cuánto te daría?
A: Doce.
P: ¿Y qué más multiplicaría aquí?
A: Los de arriba.
P: ¿Y cuánto te da?
A: Uno.
P: Uno. Un doceavo. ¿Me salió lo mismo?
T: Sí.
P: Y ya te diste cuenta que no está tan difícil. Entonces ¿existirá otra forma de hacer esto [señala los pictogramas] sin tener que estar cuadriculando tanto?
B: Sí.
P: ¿Y qué tendríamos que hacer? La multiplicación en este caso de base ¿por qué?
T: Por altura.
P: ¿Y porqué esto? Ah, porque todas las figuritas que obtuve fueron en forma ¿de qué? De rectángulo. Ok. Todas las figuritas que obtuvimos fueron en forma de rectángulo. Fue otra forma de encontrarlo.

La profesora proporcionó una hoja con ejercicios a los alumnos y posteriormente leyó en plenaria las instrucciones y con eso concluyó la clase de multiplicación de fracciones, para después resolver algunos ejercicios del libro.

Parte de esa segunda sesión se concretó en la revisión de la lección del libro relacionada a la multiplicación de fracciones en la que se les solicita resolver problemas sobre el tema y se observó que la profesora inducía a los estudiantes la operación que debían emplear, sin darles oportunidad de discernir por sí mismos.

P: Fíjate bien, ¿qué operación debemos realizar?, ¿qué estamos trabajando?
T: La multiplicación.
P: Ok, entonces ¿qué, operación debemos realizar?
T: Una multiplicación.

La profesora trabaja la intersección de áreas (rectángulo) y lo asocia a la fórmula del cálculo de áreas. A través de dicho cálculo aproxima a los estudiantes al algoritmo de multiplicación de fracciones, que al parecer, era el objetivo principal de la profesora. No se observa en ningún momento que asocie la multiplicación de fracciones a la preposición "de" y no hay una conclusión que explique que esta operación se asocia a partes de partes. Es decir, no se aborda la semántica de la operación.

Esta observación nos permitió reconocer el lenguaje empleado por la profesora y la forma en que los alumnos resuelven los problemas planteados, no se emplea material concreto y no se observa trabajo colaborativo, se expone y se pregunta al grupo en general, el trabajo realizado es individual, al término de la explicación la hoja con el ejercicio que les proporcionó, consistía en determinar el valor del producto de áreas sombreadas mediante multiplicación de fracciones. Tuvimos oportunidad de acercarnos a observar el trabajo que realizaban y pudimos notar en algunos estudiantes dificultades para la realización de ese ejercicio, posterior a la enseñanza. Al término de la sesión la profesora solicitó opinión de la investigadora y como retroalimentación le comenté, de acuerdo a lo observado, que los alumnos iniciaban la resolución del ejercicio sin leer las indicaciones por lo que no respondían lo que se solicitaba sino lo que creían que debían realizar. Este comentario permitió que la profesora en la siguiente sesión hiciera énfasis a los alumnos sobre la importancia de leer y entender las indicaciones antes de comenzar a resolver un problema.

Por otro lado, llama la atención la mención que hace de la técnica que les enseñó de "la carita feliz" para sumar fracciones. Este método de la "carita feliz" consiste en dibujar líneas sobre las fracciones de la operación de suma o resta de fracciones, que representa los pasos del algoritmo y que asemejan una carita feliz, cuyo propósito al parecer consiste en que el estudiante memorice dicho algoritmo (Fig. 3.4).

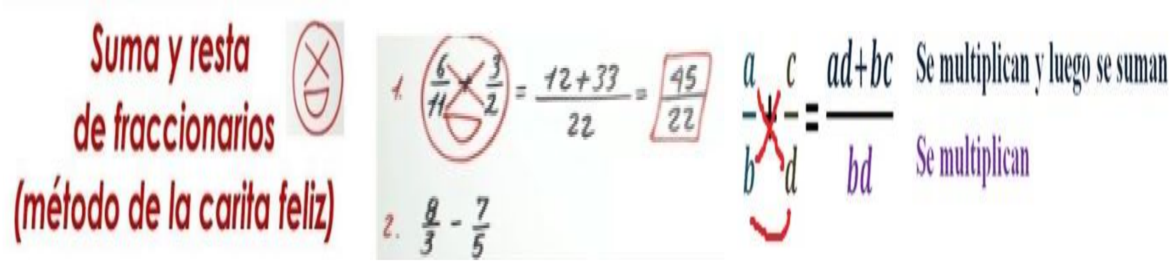
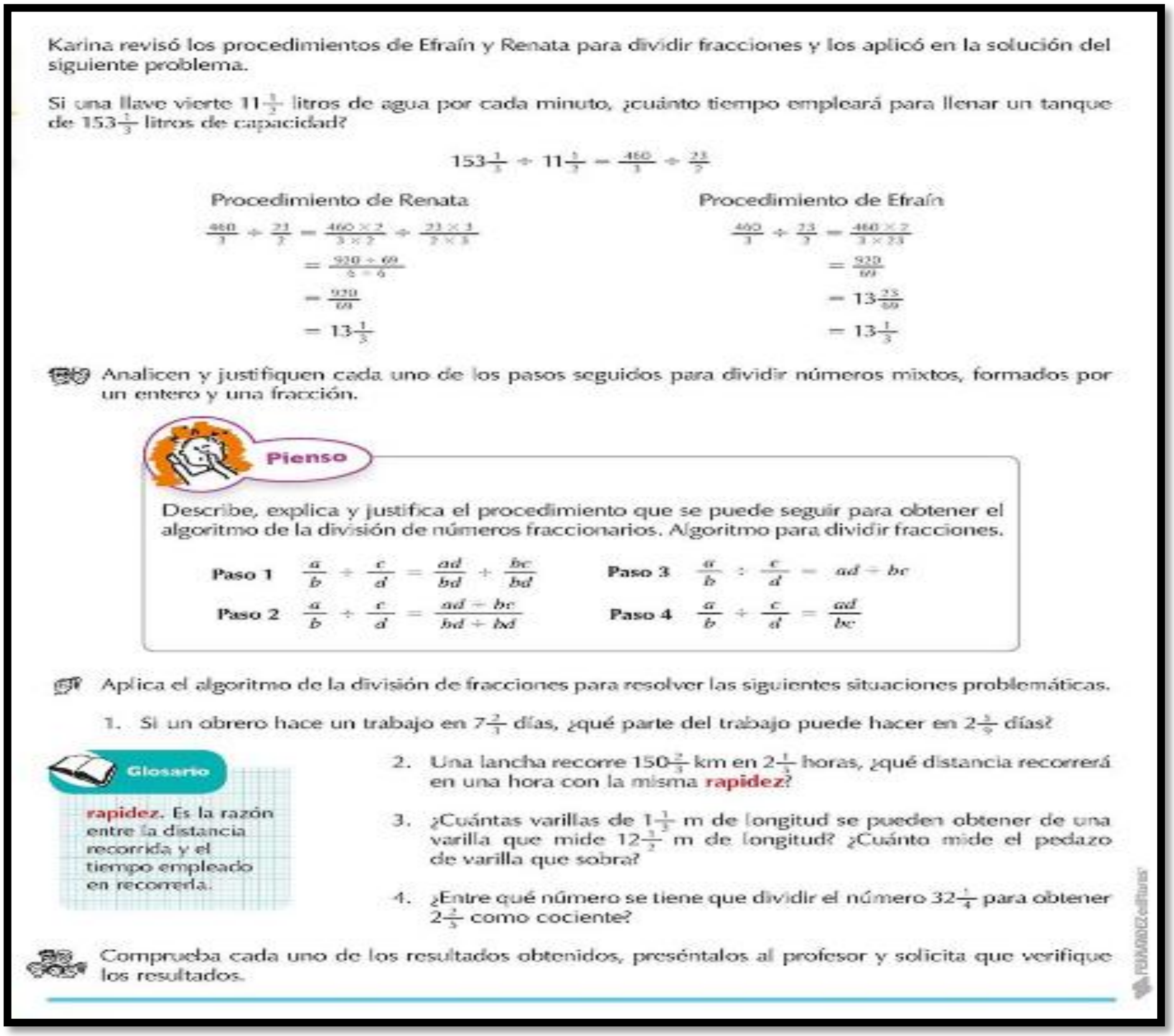


Fig. 3.4. Método de la carita feliz.

Se pretendía observar también la clase que la profesora impartiría sobre el tema de división de fracciones, por ser el tema a abordar en la investigación, pero debido a que fue imposible, en ese momento, compaginar los horarios de ambas partes, no se llevó a cabo dicha observación, de manera que fue necesario indagar sobre la forma en que se desarrolló dicha clase. Por información proporcionada por la profesora y algunos alumnos, la clase se realizó mediante una lectura guiada, con la participación sucesiva de cada lector del grupo, de la lección de problemas multiplicativos, del bloque 2, de un libro de texto autorizado por la SEP (Sánchez, “2017” pp. 90-93), referida a dos procedimientos algorítmicos de división de fracciones (Fig. 3.5 y 3.6), la profesora les preguntó cuál de los dos procedimientos les parecía más fácil de resolver y ese algoritmo fue el que eligieron para resolver las tareas propuestas en el libro y se les dejó de tarea resolver los ejercicios del libro correspondientes a división de fracciones (Fig. 3.10).

Por lo anterior, podemos decir que no se observa que hubiese un acercamiento con la semántica de la operación de división de fracciones, ni por parte de la profesora en su clase y tampoco en el tema abordado en el libro, en el que se privilegia sólo el proceso algorítmico.



Karina revisó los procedimientos de Efraín y Renata para dividir fracciones y los aplicó en la solución del siguiente problema.

Si una llave vierte $11\frac{1}{2}$ litros de agua por cada minuto, ¿cuánto tiempo empleará para llenar un tanque de $153\frac{1}{3}$ litros de capacidad?

$$153\frac{1}{3} \div 11\frac{1}{2} = \frac{460}{3} \div \frac{23}{2}$$

Procedimiento de Renata

$$\begin{aligned}\frac{460}{3} \div \frac{23}{2} &= \frac{460 \times 2}{3 \times 2} \div \frac{23 \times 3}{2 \times 3}\\ &= \frac{920 \div 69}{6 \div 6}\\ &= \frac{920}{69}\\ &= 13\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Procedimiento de Efraín

$$\begin{aligned}\frac{460}{3} \div \frac{23}{2} &= \frac{460 \times 2}{3 \times 23}\\ &= \frac{920}{69}\\ &= 13\frac{23}{69}\\ &= 13\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Analicen y justifiquen cada uno de los pasos seguidos para dividir números mixtos, formados por un entero y una fracción.

Pienso

Describe, explica y justifica el procedimiento que se puede seguir para obtener el algoritmo de la división de números fraccionarios. Algoritmo para dividir fracciones.

Paso 1 $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \div \frac{bc}{bd}$

Paso 2 $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad \div bc}{bd \div bd}$

Paso 3 $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = ad \div bc$

Paso 4 $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

Aplica el algoritmo de la división de fracciones para resolver las siguientes situaciones problemáticas.

1. Si un obrero hace un trabajo en $7\frac{2}{3}$ días, ¿qué parte del trabajo puede hacer en $2\frac{3}{5}$ días?
2. Una lancha recorre $150\frac{2}{3}$ km en $2\frac{1}{3}$ horas, ¿qué distancia recorrerá en una hora con la misma **rapidez**?
3. ¿Cuántas varillas de $1\frac{1}{3}$ m de longitud se pueden obtener de una varilla que mide $12\frac{1}{2}$ m de longitud? ¿Cuánto mide el pedazo de varilla que sobra?
4. ¿Entre qué número se tiene que dividir el número $32\frac{1}{4}$ para obtener $2\frac{2}{5}$ como cociente?

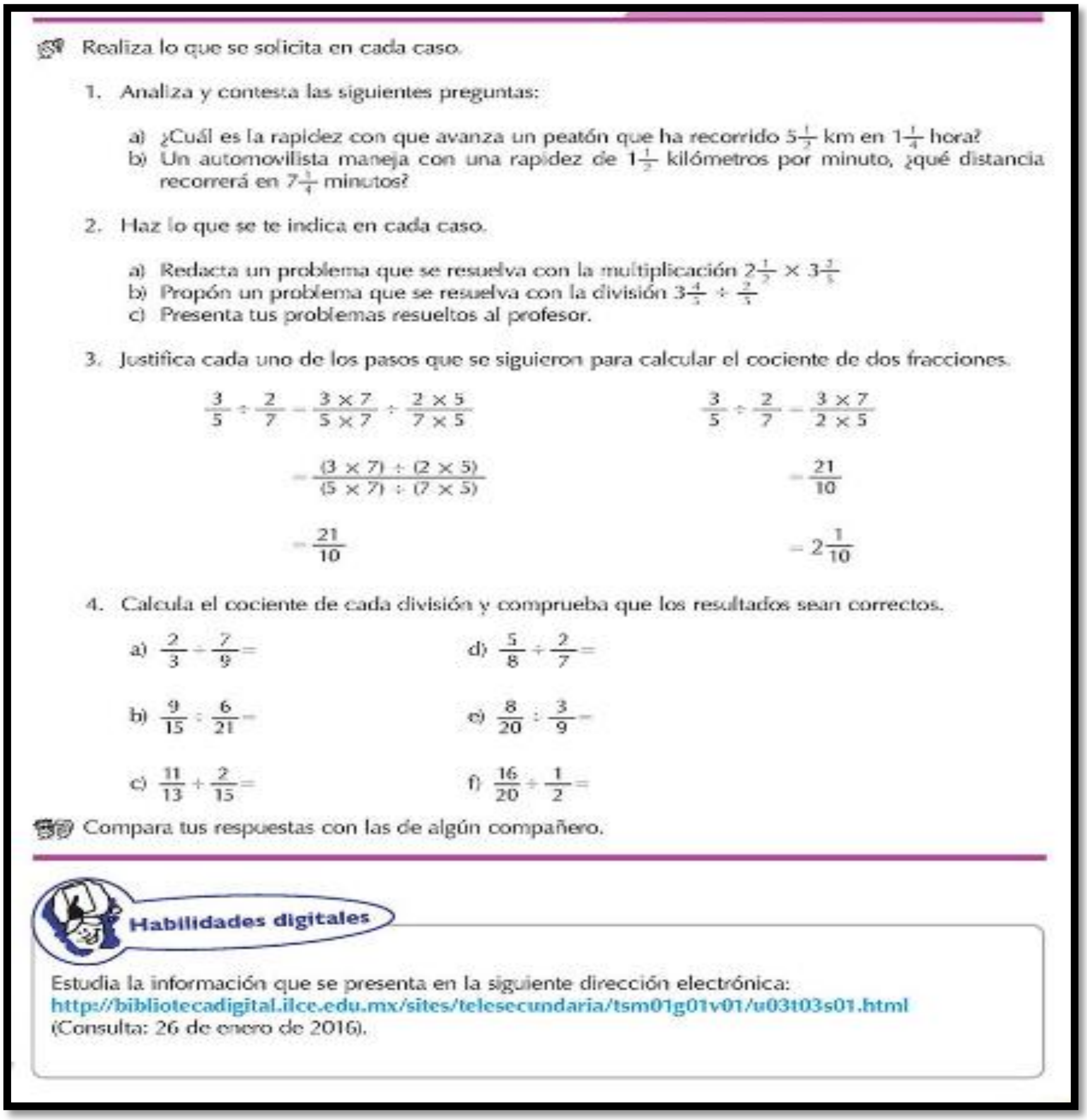
Glosario

rapidez. Es la razón entre la distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrerla.

Comprueba cada uno de los resultados obtenidos, preséntalos al profesor y solicita que verifique los resultados.

Fig. 3.5. Lección de división de fracciones. Libro de texto.

Realizando un análisis breve de la observación directa, podemos decir que la enseñanza proporcionada por la profesora, por quedar inconclusa, incidió en el aprendizaje de los estudiantes provocando confusión lo que les generó dificultades posteriores en la aplicación de los algoritmos, como pudimos comprobar en la aplicación del Taller.



Realiza lo que se solicita en cada caso.

1. Analiza y contesta las siguientes preguntas:
   - a) ¿Cuál es la rapidez con que avanza un peatón que ha recorrido $5\frac{1}{2}$ km en $1\frac{1}{4}$ hora?
   - b) Un automovilista maneja con una rapidez de $1\frac{1}{2}$ kilómetros por minuto, ¿qué distancia recorrerá en $7\frac{1}{4}$ minutos?
2. Haz lo que se te indica en cada caso.
   - a) Redacta un problema que se resuelva con la multiplicación $2\frac{1}{2} \times 3\frac{2}{5}$
   - b) Propón un problema que se resuelva con la división $3\frac{4}{5} \div \frac{2}{5}$
   - c) Presenta tus problemas resueltos al profesor.
3. Justifica cada uno de los pasos que se siguieron para calcular el cociente de dos fracciones.

$$\frac{3}{5} \div \frac{2}{7} = \frac{3 \times 7}{5 \times 7} \div \frac{2 \times 5}{7 \times 5} = \frac{(3 \times 7) \div (2 \times 5)}{(5 \times 7) \div (7 \times 5)} = \frac{21}{10}$$

$$\frac{3}{5} \div \frac{2}{7} = \frac{3 \times 7}{2 \times 5} = \frac{21}{10} = 2\frac{1}{10}$$

4. Calcula el cociente de cada división y comprueba que los resultados sean correctos.

a) $\frac{2}{3} \div \frac{7}{9} =$

d) $\frac{5}{8} \div \frac{2}{7} =$

b) $\frac{9}{15} : \frac{6}{21} =$

e) $\frac{8}{20} : \frac{3}{9} =$

c) $\frac{11}{13} + \frac{2}{15} =$

f) $\frac{16}{20} \div \frac{1}{2} =$

Compara tus respuestas con las de algún compañero.

Habilidades digitales

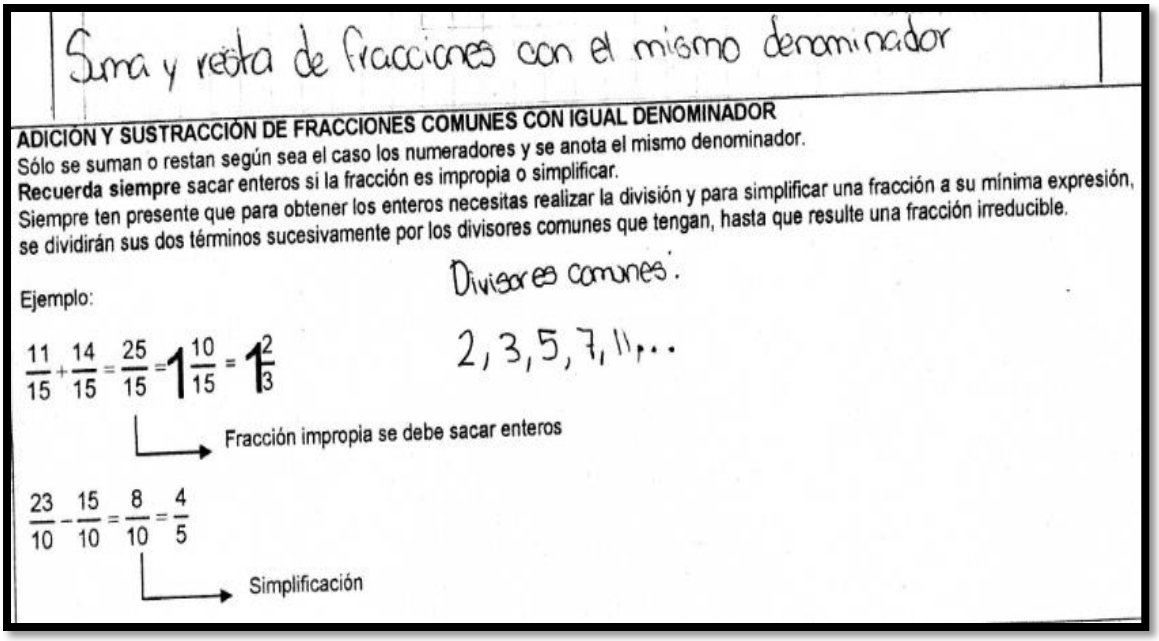
Estudia la información que se presenta en la siguiente dirección electrónica:
http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/telesecundaria/tsm01g01v01/u03t03s01.html
(Consulta: 26 de enero de 2016).

Fig. 3.6. Lección de división de fracciones. Libro de texto.

3.2. Observación indirecta

Adicional a esto, tuvimos oportunidad de realizar observación indirecta de las actividades que involucran trabajo con fracciones, realizadas hasta ese momento por los estudiantes en sus cuadernos de trabajo, revisando las anotaciones diarias de un estudiante, en dónde se lleva registro de las producciones aritméticas de este tipo en las clases de matemáticas.

A continuación se muestran algunas imágenes de los trabajos elaborados por los estudiantes en las clases impartidas por la profesora y que fueron observadas indirectamente en las anotaciones del cuaderno, (Fig. 3.7, 3.8 y 3.9).



Suma y resta de fracciones con el mismo denominador

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE FRACCIONES COMUNES CON IGUAL DENOMINADOR

Sólo se suman o restan según sea el caso los numeradores y se anota el mismo denominador.

Recuerda siempre sacar enteros si la fracción es impropia o simplificar.

Siempre ten presente que para obtener los enteros necesitas realizar la división y para simplificar una fracción a su mínima expresión, se dividirán sus dos términos sucesivamente por los divisores comunes que tengan, hasta que resulte una fracción irreducible.

Divisores comunes:

2, 3, 5, 7, 11, . . .

Ejemplo:

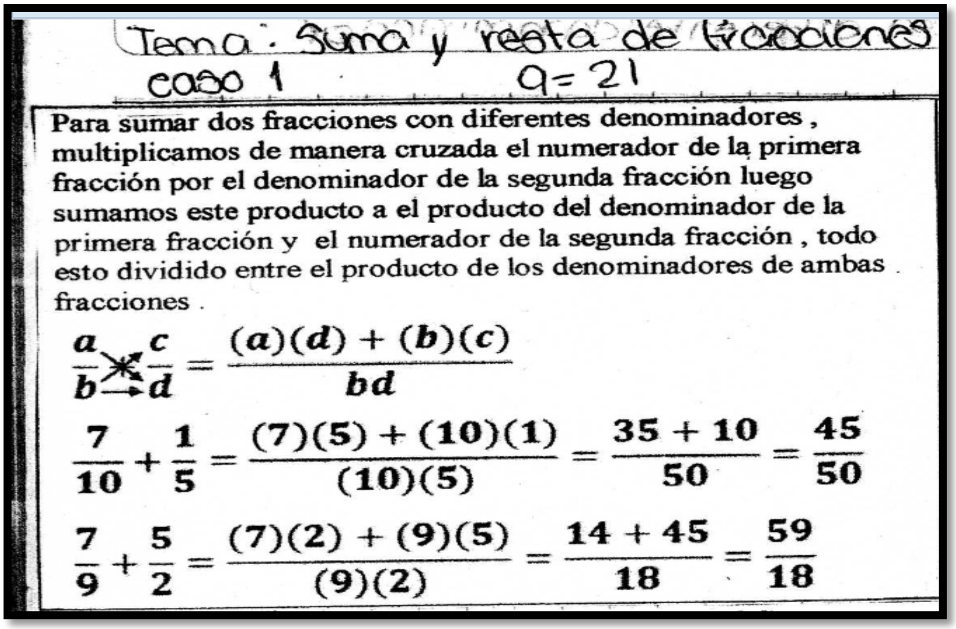
$$\frac{11}{15}+\frac{14}{15}=\frac{25}{15}=1\frac{10}{15}=1\frac{2}{3}$$

Fracción impropia se debe sacar enteros

$$\frac{23}{10}-\frac{15}{10}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

Simplificación

Fig. 3.7. Clase de suma de fracciones con igual denominador



Tema: Suma y resta de fracciones

caso 1 9=21

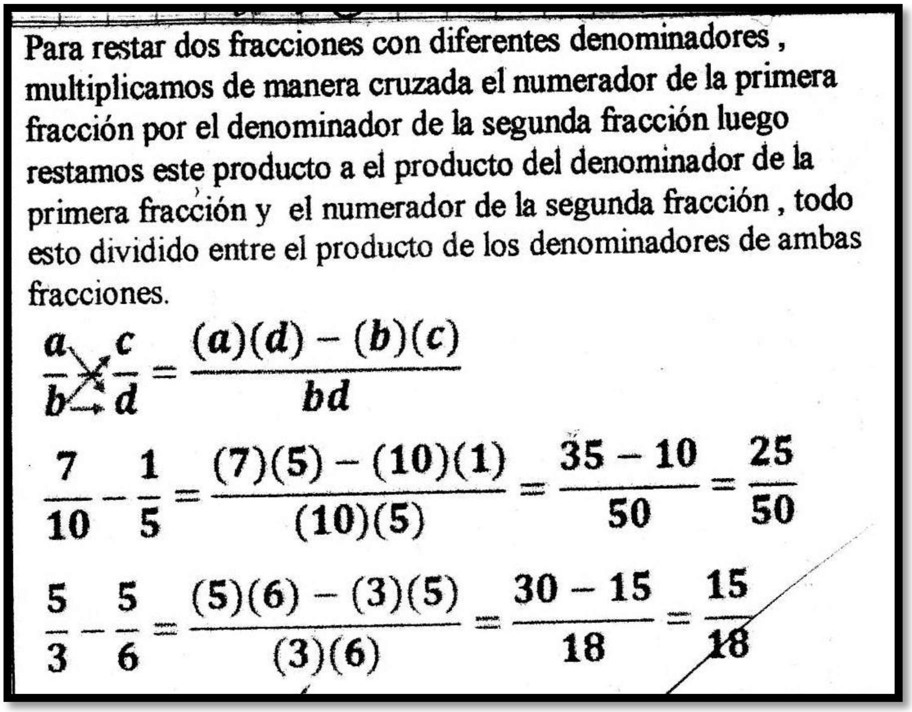
Para sumar dos fracciones con diferentes denominadores, multiplicamos de manera cruzada el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción luego sumamos este producto a el producto del denominador de la primera fracción y el numerador de la segunda fracción, todo esto dividido entre el producto de los denominadores de ambas fracciones.

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{(a)(d)+(b)(c)}{bd}$$

$$\frac{7}{10}+\frac{1}{5}=\frac{(7)(5)+(10)(1)}{(10)(5)}=\frac{35+10}{50}=\frac{45}{50}$$

$$\frac{7}{9}+\frac{5}{2}=\frac{(7)(2)+(9)(5)}{(9)(2)}=\frac{14+45}{18}=\frac{59}{18}$$

Fig. 3.8. Algoritmo de la suma de fracciones



Para restar dos fracciones con diferentes denominadores, multiplicamos de manera cruzada el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción luego restamos este producto a el producto del denominador de la primera fracción y el numerador de la segunda fracción, todo esto dividido entre el producto de los denominadores de ambas fracciones.

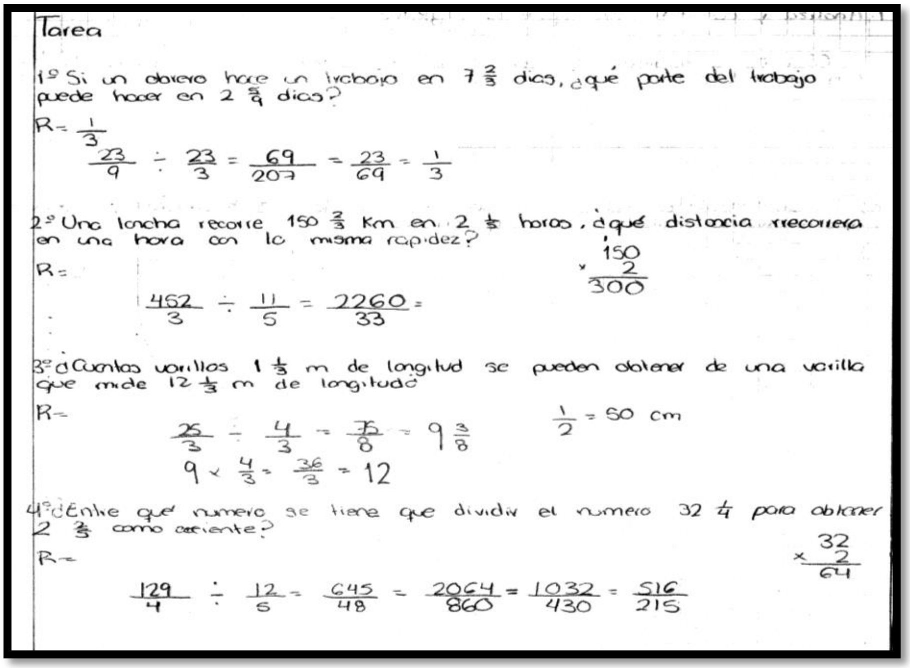
$$\frac{a}{b}\ \frac{c}{d} = \frac{(a)(d)-(b)(c)}{bd}$$

$$\frac{7}{10} - \frac{1}{5} = \frac{(7)(5)-(10)(1)}{(10)(5)} = \frac{35-10}{50} = \frac{25}{50}$$

$$\frac{5}{3} - \frac{5}{6} = \frac{(5)(6)-(3)(5)}{(3)(6)} = \frac{30-15}{18} = \frac{15}{18}$$

Fig. 3.9. Algoritmo de la resta de fracciones.

Se observa en la Fig. 3.8 y 3.9, que la explicación de la suma y resta de fracciones se resume en un enunciado escrito en máquina que describe los pasos del algoritmo (al que la profesora les da a conocer como "la carita feliz") y posteriormente la realización de ejercicios sin un contexto y eso se observa de manera reiterada en los siguientes ejercicios del cuaderno.



Tarea

1º Si un obrero hace un trabajo en $7\frac{2}{3}$ dias, ¿qué parte del trabajo puede hacer en $2\frac{5}{9}$ dias?

R= $\frac{1}{3}$

$$\frac{23}{9} \div \frac{23}{3} = \frac{69}{207} = \frac{23}{69} = \frac{1}{3}$$

2º Una lancha recorre $150\frac{2}{3}$ Km en $2\frac{1}{5}$ horas, ¿qué distancia rrecorrera en una hora con la misma rapidez?

R=

$$\frac{452}{3} \div \frac{11}{5} = \frac{2260}{33} =$$

$$\begin{array}{r} 150 \\ \times\ 2 \\ \hline 300 \end{array}$$

3º ¿Cuantas varillas $1\frac{1}{3}$ m de longitud se pueden obtener de una varilla que mide $12\frac{1}{3}$ m de longitud?

R=

$$\frac{25}{3} \div \frac{4}{3} = \frac{75}{8} = 9\frac{3}{8}$$

$$9 \times \frac{4}{3} = \frac{36}{3} = 12$$

$\frac{1}{2}$ = 50 cm

4º ¿Entre qué numero se tiene que dividir el numero $32\frac{1}{4}$ para obtener $2\frac{2}{5}$ como cociente?

R=

$$\frac{129}{4} \div \frac{12}{5} = \frac{645}{48} = \frac{2064}{860} = \frac{1032}{430} = \frac{516}{215}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times\ 2 \\ \hline 64 \end{array}$$

Fig. 3.10. Tarea de resolución de división de fracciones.

La revisión del cuaderno nos permite confirmar que las clases de la profesora privilegian la mecanización de algoritmos en la enseñanza de las fracciones, no se observa el uso de representaciones pictóricas a excepción de la clase que fue observada por la investigadora.

En general la observación participante nos permitió recabar información concerniente a las estrategias de enseñanza empleadas por la profesora en el aula y la manera en que estructuró su clase. Pudimos identificar que no organiza el trabajo en forma colaborativa sino que privilegia el trabajo individual. No se pudo observar el empleo de material didáctico y observamos, como se mencionó anteriormente, que se privilegia la mecanización del algoritmo sin poner énfasis en la semántica de las operaciones.

Capítulo 4

Cuestionario inicial de exploración

En este capítulo abordaremos ampliamente los hallazgos encontrados en la aplicación del cuestionario inicial de exploración, las dificultades observadas en las tareas en general, las estrategias empleadas por los estudiantes en la resolución de las tareas de división de fracciones y analizaremos los resultados y los propósitos que se pretendía revisar.

4.1. El Cuestionario inicial de exploración

Posterior a la observación se llevó a cabo la aplicación del cuestionario inicial de exploración que incluía resolución de problemas verbales y preguntas abiertas, constaba de 11 tareas en las que se consideraron situaciones de reparto, orden y equivalencia (temas indispensables en el manejo de operaciones con fracciones) en todos continuos y discretos, así como las cuatro operaciones, con un énfasis en la división de fracciones, para observar los diferentes usos que los adolescentes realizan de las fracciones y si podrían asociarle sentido al número. Es importante mencionar que sólo se aborda la suma y resta para explorar el dominio general que los alumnos tienen de las fracciones y no es objeto general de investigación. Se pretende observar en particular los significados que tienen de dichas operaciones, es decir, si pueden identificar qué operación aritmética deben emplear para cada problema y su forma de representarlas. Estas tareas demandaban del estudiante diferentes planos de representación (representaciones pictóricas, expresiones lingüísticas y aritméticas). Dichas tareas se observan en la Tabla 2.2 y el propósito que se pretende cumplir de cada una de ellas se muestra en la Tabla 4.1 que resumimos a continuación.

Tabla 4.1. Objetivos planteados en las tareas del cuestionario inicial de exploración

Objetivos
Tarea 1. Determinar modos de reparto, observar si realizan reparto equitativo y exhaustivo. Uso de fracciones.
Tarea 2. Identificar fracciones equivalentes
Tarea 3. Reconstrucción del todo, identificación de fracciones equivalentes, representación pictórica de fracciones con diferentes denominadores, empleo de algoritmo de suma de fracciones. Interpretación de un todo continuo.
Tarea 4. Observar representación de fracciones en la recta numérica. Identificación de equivalencia y orden.
Tarea 5. Representación pictórica de una suma de fracciones. Orden. Empleo de algoritmo. Invención adecuada de un problema similar.
Tarea 6. Identificación de partes de partes mediante distintos modos de representación. Empleo de algoritmo de multiplicación de fracciones.
Tarea 7. Medida en línea de tiempo. Identificación de parte de parte y representación en la recta.
Tarea 8. Representación pictórica de partes de partes, identificación de la preposición "de"
Tarea 9. División partitiva, empleando enteros que conduzcan a respuesta en fracción, resolución de división sin el empleo de un algoritmo. Todo discreto.
Tarea 10. División cuotativa. Empleo de algoritmo de división de fracciones, determinación del sobrante. Identificación correcta del residuo.
Tarea 11. División cuotativa. Empleo de algoritmo de división de fracciones, determinación el sobrante. Identificación correcta del residuo.

El cuestionario inicial de exploración fue aplicado a 41 alumnos. La tabla 4.2 muestra el número de tareas resueltas **por alumno**, el número de tareas correctas, incorrectas y las no contestadas. Y la Tabla 4.3, desglosa **por tareas** la frecuencia de dichas respuestas (contestadas, correctas, incorrectas y no contestadas).

Después de hacer una revisión general de la Tabla 4.2, se puede observar que sólo 1/41 estudiantes pudo resolver las 11 tareas correctamente. Y solo 9/41 pudieron resolver más de la mitad de las tareas correctamente. En general, se observa que la mayoría del grupo tiene problemas en la resolución de problemas con fracciones.

Por otro lado, en la Tabla 4.3 en donde se hace un recuento de las respuestas correctas e incorrectas, se observa que el grupo tiene mayor dificultad para la resolución de problemas multiplicativos por ser éstas las tareas en las que menos respuestas correctas se identifican. Sólo 5/41 y 8/41 respondieron correctamente los problemas de división de fracciones; sin embargo, en ninguna se identifica o interpreta el residuo correctamente.

Tabla 4.2. Lista de alumnos y cantidad de tareas resueltas

No.	ALUMNO	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	TAREAS RESUELTAS	RESPUESTAS CORRECTAS
1	María Jatziri **	RC	RC	RC	RI	RC	RC	NC	NC	NC	NC	NC	6	5/11
2	Emiliano **	RC	RC	RC	RC	RC	RC	RC	RI	RI	NC	NC	9	7/11
3	Martha * *	RC	RC	RI	RC	NC	RI	RC	RC	RC	IM	NC	9	6/11
4	Geraldine Alondra	IM	RC	RI	RC	IM	RI	NC	NC	NC	NC	NC	6	2/11
5	Luis Manuel	RC	RC	RI	RI	NC	RI	NC	NC	NC	NC	NC	5	2/11
6	ViancaYasel	RC	RC	RI	RI	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	4	2/11
7	Axel Josafat	RC	RC	RI	RC	RC	RI	RI	RC	RC	NC	NC	9	6/11
8	Joseph Emilio	RI	RI	IM	IM	RI	RI	RI	RI	NC	NC	NC	8	0/11
9	Diego Xiutecuhtli	IM	RC	RC	RC	NC	RI	NC	NC	NC	NC	NC	5	3/11
10	Sofía	RI	RC	RI	RC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	4	2/11
11	Carol Andrea	RC	RC	RC	RC	RI	RI	NC	NC	NC	NC	NC	6	4/11
12	Pablo Emiliano	NC	NC	NC	RC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	1	1/11
13	Uri **	IM	RC	RC	NC	RC	--	--	--	--	--	--	4	3/11
14	Yerey Nayir	NC	RC	RI	RI	IM	RC	RI	RI	NC	IM	RI	9	2/11
15	Guadalupe	RI	RC	RI	RI	RI	RI	RI	NC	NC	NC	NC	7	1/11
16	Ingrid Amelye	IM	RC	RC	RI	RI	RI	NC	NC	NC	NC	NC	6	2/11
17	Juan David	NC	RC	RI	RI	RI	RI	RI	RI	RI	NC	RI	9	1/11
18	Lia Saraí	RC	RC	RC	RC	RI	RI	RC	RC	RC	NC	NC	9	7/11
19	Ismael José	IM	RC	IM	RI	RI	RC	RI	IM	RI	RI	RI	11	2/11
20	Ana Jandet	RI	RC	RI	RC	IM	RI	RI	NC	NC	NC	NC	7	2/11
21	Osvaldo Yair	RI	RC	RI	RI	RI	RI	RI	RI	RI	RI	RI	11	1/11
22	Camila Alessandra	RI	RC	RI	RC	RI	RC	RI	RI	NC	NC	NC	8	2/11
23	Diego Alexis **	IM	RC	RC	RC	RC	RC	RC	RC	NC	RC	RC	10	9/11
24	Monserrat Ivón	RI	RC	NC	RC	RI	RI	RC	RC	RI	NC	NC	8	4/11
25	Michel	RI	RC	RI	RI	RI	RC	RC	RI	RI	RI	RI	11	3/11
26	Sandy Monserrat	IM	IM	RI	RC	RI	RI	RI	RI	RI	RI	RI	11	2/11
27	Luis Daniel	IM	RC	IM	RI	IM	RC	RI	RI	RI	RI	RI	11	2/11
28	César	RI	RC	IM	RC	RI	RI	RC	RI	RI	IM	RI	11	3/11
29	Sayuri Betsabe	RI	RI	RI	RI	RI	RI	RI	RI	RI	RI	RI	11	0/11
30	Melani Yaretsi	RI	NC	RI	RI	NC	RI	NC	NC	NC	IM	NC	5	0/11
31	Valeria Emineth	RC	RC	IM	RI	IM	RI	NC	RC	RI	IM	NC	9	3/11
32	Jorge Rodrigo **	RC	RC	RC	RC	RC	RC	RC	RC	NC	NC	NC	8	8/11
33	Sofía Nataly **	RC	RC	RI	RC	RI	RC	RC	RC	RC	RC	RI	11	8/11
34	Sherlin Amishadai **	IM	RC	RC	RC	RC	RI	RC	RC	RI	RC	RI	11	7/11
35	Joselin Arleth	NC	RI	IM	RC	IM	RC	RI	RI	IM	RI	RI	11	2/11
36	Fernando	RC	RC	RI	RI	RI	RI	RI	RI	RI	RI	RI	11	2/11
37	Christian Gael **	RC	RC	RC	RC	RC	RC	RC	RC	RC	RC	RI	11	10/11
38	Brenda Yamileth	RC	RI	RI	RC	IM	RI	RI	RI	IM	RC	RI	11	3/11
39	Andrés	IM	NC	IM	RC	RI	RI	NC	NC	NC	NC	NC	5	1/11
40	Sandra Daniela	RI	RI	RI	RI	NC	RI	RI	RC	NC	IM	IM	9	1/11
41	Danery Jacqueline	RC	RI	RI	RC	IM	RC	RI	RI	RI	NC	RI	9	3/11
	RC=Respuesta correcta RI= Respuesta incorrecta							NC=No contestó IM=Respuesta incompleta						

** Alumnos más destacados en la resolución del cuestionario.

Tabla 4.3. Desglose de respuestas por tarea del cuestionario inicial de exploración

Tareas Respuestas	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11
Respuestas contestadas	$\frac{37}{41}$	$\frac{37}{41}$	$\frac{39}{41}$	$\frac{40}{41}$	$\frac{33}{41}$	$\frac{37}{41}$	$\frac{28}{41}$	$\frac{27}{41}$	$\frac{21}{41}$	$\frac{19}{41}$	$\frac{18}{41}$
Respuestas correctas	$\frac{15}{41}$	$\frac{31}{41}$	$\frac{11}{41}$	$\frac{23}{41}$	$\frac{8}{41}$	$\frac{13}{41}$	$\frac{11}{41}$	$\frac{11}{41}$	$\frac{5}{41}$	$\frac{4}{41}$	$\frac{1}{41}$
Respuestas incorrectas	$\frac{22}{41}$	$\frac{6}{41}$	$\frac{28}{41}$	$\frac{17}{41}$	$\frac{25}{41}$	$\frac{24}{41}$	$\frac{17}{41}$	$\frac{16}{41}$	$\frac{16}{41}$	$\frac{15}{41}$	$\frac{17}{41}$
No contestaron	$\frac{4}{41}$	$\frac{4}{41}$	$\frac{2}{41}$	$\frac{1}{41}$	$\frac{8}{41}$	$\frac{4}{41}$	$\frac{13}{41}$	$\frac{14}{41}$	$\frac{20}{41}$	$\frac{22}{41}$	$\frac{23}{41}$

Es importante mencionar que no nos detendremos a realizar un análisis exhaustivo de todas las tareas del cuestionario, debido a que no es el objetivo de esta investigación, se realizará un análisis general de los hallazgos encontrados y se elegirán para análisis aquellas tareas que se consideran importantes para el desarrollo de la investigación.

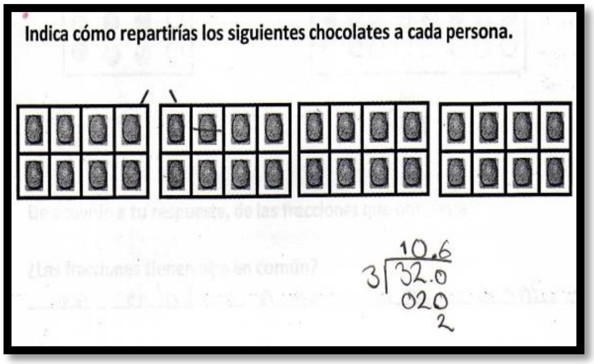
4.1.1. Dificultades encontradas en el cuestionario inicial de exploración

Posterior a la aplicación del cuestionario, y realizando un análisis general de las respuestas del grupo, se registran muchos errores y dificultades en la resolución de los problemas. Se observa que el uso del método de “la carita feliz”, empleado por la profesora de grupo, genera confusión en los alumnos, quienes recurren a la mecanización de manera inmediata sin antes detenerse a reflexionar sobre el problema y si existía una manera más sencilla de resolverlo sin utilizar dicho método. En algunas tareas evitan el uso de fracciones, trabajan a nivel de números naturales como primera opción para la resolución del problema, algo observado también por Valdemoros (2004). Tienen dificultad para realizar un reparto exhaustivo, ordenan fracciones considerando los números naturales, se observa imposibilidad para representar gráficamente la suma de fracciones, aplicación errónea de los algoritmos (problema muy recurrente), conversión errónea de decimales a fracciones, igualan dos tipos de representaciones distintas (fracciones y decimales), inversión de denominadores, dificultad para representar fracciones en la recta numérica.

De las dificultades observadas, la incorrecta aplicación de los algoritmos es la más recurrente, fue posible observar que la mayoría de los estudiantes recurrían al empleo del método de “la carita feliz”, pero de manera inadecuada, confundiendo el algoritmo de suma con el de multiplicación y el de división.

Los errores observados hacen evidentes las dificultades en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, coincidiendo con Rico (1995). Algunas de esas dificultades se muestran a continuación. Realizamos un breve análisis de ellas de acuerdo a la clasificación de errores presentada por González (2015), en particular las categorías “errores por defectos en la comprensión del concepto” y “aplicación sistemática de procedimientos erróneos”.

- **Empleo de división de naturales para realizar reparto. Evitan el uso de fracciones**

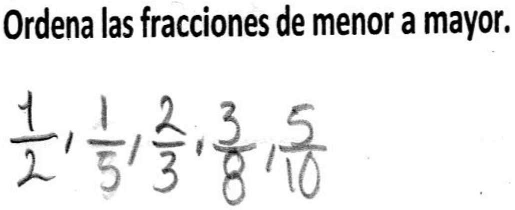


Indica cómo repartirías los siguientes chocolates a cada persona.

Fig. 4.1. Dificultades en el reparto.

Los estudiantes recurren al algoritmo estándar de la división de números naturales para dar solución al problema, como muestra la Fig. 4.1 y evitan realizar un reparto equitativo en la representación pictórica que se les presenta.

- **Orden de fracciones interpretadas como naturales**



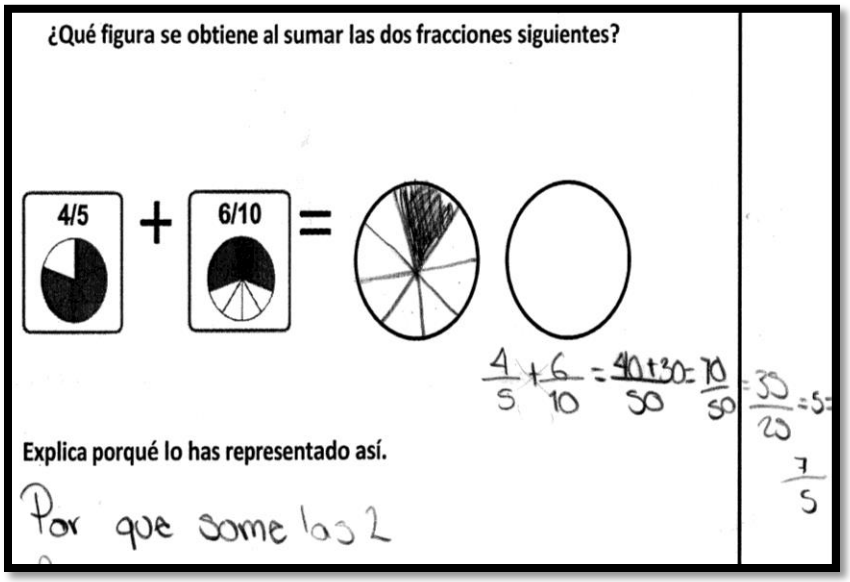
Ordena las fracciones de menor a mayor.

$\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{8}, \frac{5}{10}$

Fig. 4.2. Dificultad al ordenar fracciones.

Al realizar el orden consideran a la fracción como dos números naturales sin ninguna relación y ordenan numeradores o denominadores, como se observa en la Fig. 4.2. Podemos aseverar entonces, de acuerdo a Streefland (1993), que el conocimiento de los números naturales se convierte en una dificultad cognitiva para el aprendizaje de las fracciones, es decir, los estudiantes recurren a las reglas aritméticas de los números naturales cuando no tienen una comprensión adecuada de las fracciones y los llevan a operar sólo con numeradores o denominadores de manera independiente. De acuerdo a la clasificación de González (2015), basado en la clasificación de Llinares, esta dificultad concuerda con la categoría “errores por defectos en la comprensión del concepto “ y la subcategoría, el “error en la ordenación de las fracciones”.

- **Imposibilidad para representar pictóricamente la suma de fracciones**



¿Qué figura se obtiene al sumar las dos fracciones siguientes?

$\frac{4}{5}+\frac{6}{10}=\frac{40+30}{50}=\frac{70}{50}=\frac{35}{25}=5$

$\frac{7}{5}$

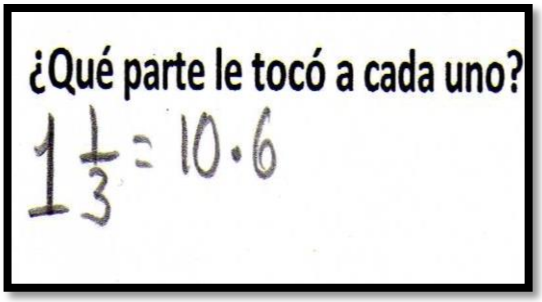
Explica porqué lo has representado así.

Por que some los 2

Fig. 4.3. Dificultad al representar gráficamente suma de fracciones.

Se observa en la Fig. 4.3 que los estudiantes no están familiarizados con las diversas formas de representación pictórica, pueden representar cada fracción por separado pero les resulta difícil representar el resultado de la operación. No consideran posible que se pueda rebasar la unidad. Sin embargo en este ejemplo, observamos que el algoritmo de la suma lo realizan adecuadamente, esto nos permite destacar que este estudiante comprende el algoritmo pero no tiene clara la semántica de la operación, coincidiendo con Valdemoros (2004). Podríamos asociar esta dificultad a la subcategoría “error relacionado con la equivalencia de las fracciones” de González (2015), en la que se menciona que los estudiantes no tienen éxito en la suma de fracciones por no encontrar la fracción equivalente adecuada para realizar la operación.

- **Igualar dos tipos de representaciones distintas (fracciones y decimales)**



¿Qué parte le tocó a cada uno?

$1\frac{1}{3} = 10 \cdot 6$

Fig. 4.4. Igualación de dos representaciones distintas.

Se detecta dificultad en la elección del todo, observado en la Fig. 4.4. Al intentar resolver el problema gráficamente, el pictograma no permite el reparto exacto de manera directa, lo que les ocasiona dificultad en el uso de las fracciones, por lo que recurren a los números naturales y obtienen dos respuestas, que les resulta sencillo igualar, sin darse cuenta que no significan lo mismo porque se consideran todos distintos (cajas o chocolates). No se encuentra una categoría relacionada con esta dificultad.

- **Aplicación errónea de los algoritmos (problema muy recurrente)**

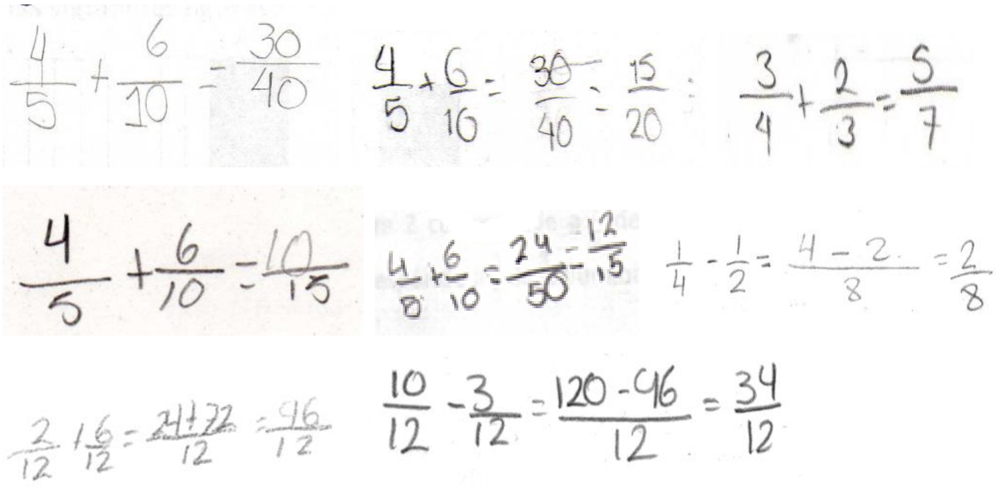
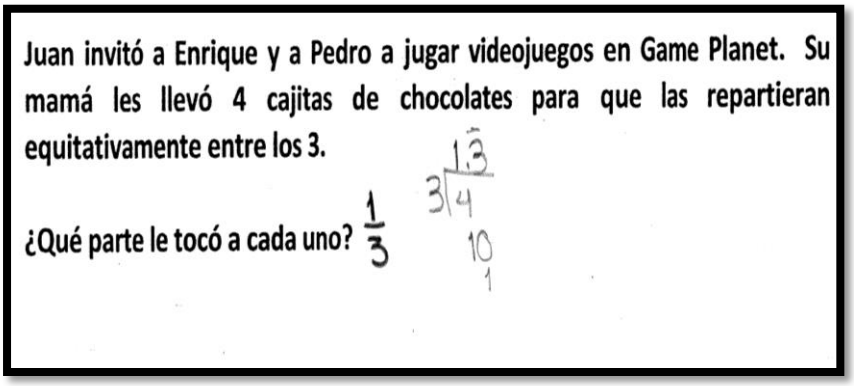


Fig. 4.5. Dificultades en la aplicación de algoritmos.

En algunas operaciones identifican a la fracción como si se comportara como número natural sumando numerador con numerador y denominador con denominador, como se observa en la Fig. 4.5. Nuevamente se manifiesta la interpretación de la fracción como dos números naturales sin relación ni sentido. La categoría de González (2015) que aplica a esta dificultad es “Extrapolación de cálculo de los naturales a las fracciones" que se refiere a la utilización de estrategias válidas para los números naturales, empleadas en los cálculos con fracciones.

Se observa también confusión en la aplicación de los algoritmos, en los que mezclan el algoritmo de la suma con el de multiplicación, el de multiplicación con el de división, etc. Este tipo de errores concuerda con la categoría "aplicación sistemática de procedimientos erróneos", de las que se desprenden las subcategorías "error en el algoritmo de la suma", "error en el algoritmo de la multiplicación", "multiplicación cruzada incorrecta", "división y multiplicación incorrecta", "dividir en lugar de multiplicar" de González (2015). Estas dificultades ponen de manifiesto que no existe comprensión en la semántica de las operaciones por parte de los alumnos.

- **Asociación de decimales a fracciones considerando los elementos significantes**



Juan invitó a Enrique y a Pedro a jugar videojuegos en Game Planet. Su mamá les llevó 4 cajitas de chocolates para que las repartieran equitativamente entre los 3.

¿Qué parte le tocó a cada uno? $\frac{1}{3}$

$1.\bar{3}$
$3\overline{)4}$
10
1

Fig. 4.6. Asociación incorrecta de decimales a fracciones

Algunos estudiantes cometen errores al momento de convertir un número decimal a fracción debido a dificultades de comprensión exclusivamente en la representación y no al objeto numérico en sí, de acuerdo a Sánchez (2012). Asocian los elementos significantes de una representación numérica con los de la otra representación y los igualan (Fig. 4.6), sin darse cuenta que no representan el mismo número, porque en la conversión de decimal a fracción, los elementos significantes de un conjunto numérico, difieren del otro. De acuerdo a Sánchez (2012) este tipo de errores ocurren por la poca práctica de los estudiantes en la conversión de decimales a fracción y viceversa.

- **Inversión de denominadores**
- La dificultad en la comprensión de las fracciones, en este caso de la relación parte todo, les lleva a invertir denominadores, como podemos observar en la Fig. 4.7, no logran identificar cuál es el numerador y cuál es el denominador ni comprenden su significado. Sí pueden determinar en cuántas partes está subdividido el todo, pero no pueden representarlo adecuadamente. Este error puede asociarse a la categoría de González (2015), "No considerar legítimo dividir el número menor por el mayor o restar un número mayor a un número menor" en el que los estudiantes consideran que éste es un procedimiento que no se puede hacer y eso los lleva a cometer dicho error.

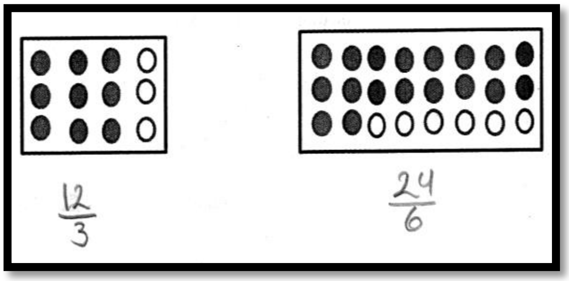
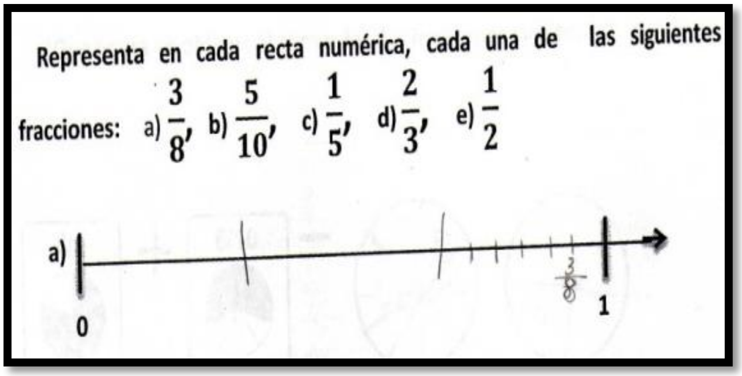


Fig. 4.7. Inversión de denominadores.

- **Dificultad para representar fracciones en la recta numérica**



Representa en cada recta numérica, cada una de las siguientes fracciones: a) $\frac{3}{8}$, b) $\frac{5}{10}$, c) $\frac{1}{5}$, d) $\frac{2}{3}$, e) $\frac{1}{2}$

Fig. 4.8. Dificultad para representar fracciones en la recta numérica.

Las representaciones en la recta numérica también son fuente de dificultades, coincidiendo con Novillis (1976), cuando menciona que generan confusión en los estudiantes, les resulta complicado identificar la unidad y el número de partes en que se debe dividir el todo, muestra de ello puede detectarse en la Fig. 4.8, en la que se observa que se toma en cuenta el numerador para realizar la partición del entero y posteriormente una nueva partición dentro de la parte fraccionada para representación de la fracción solicitada. Esto nos da evidencia de falta de comprensión en lo referente a la construcción del número.

Podemos concluir de lo anterior, que solamente la presentación en la enseñanza de los contrastes entre unos números y otros y la práctica continua ira generando el abandono de los números naturales y el uso progresivo de las fracciones coincidiendo con Valdemoros (2004).

4.1.2. Estrategias empleadas en el cuestionario de resolución de problemas con fracciones

Además de analizar de manera general las dificultades encontradas, tuvimos la oportunidad de observar diversas estrategias de solución de los problemas. Consideramos revisar la Tarea 1 (reparto), 5 (suma de fracciones), y 6, 7, 8 (multiplicación de fracciones) brevemente, para mostrar dificultades generales observadas, para posteriormente centrarnos en las Tareas 9, 10 y 11 de división de fracciones que es el tema primordial de investigación.

Se observa de la Tabla 4.3 que las tareas 1, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11 fueron contestadas con las siguientes frecuencias $\frac{37}{41}$, $\frac{33}{41}$, $\frac{37}{41}$, $\frac{28}{41}$, $\frac{27}{41}$, $\frac{21}{41}$, $\frac{19}{41}$ y $\frac{18}{41}$, observamos de ello que las tareas multiplicativas, al parecer les resultan más complicadas porque son las que menos respuestas obtuvieron, en particular las de división de fracciones que fueron contestadas por menos del 50% de los estudiantes, y de ellas sólo son correctas $\frac{5}{41}$, $\frac{4}{41}$ y $\frac{1}{41}$ respectivamente.

Para iniciar, nos enfocamos en particular en el problema 1 de reparto, el cuál consideramos de suma importancia por ser un problema que remite a la división partitiva. A continuación se hace un análisis de las estrategias encontradas.

PROBLEMA 1. REPARTO EQUITATIVO

Uno de los problemas importantes del cuestionario es la Tarea 1, que mediante un problema verbal elaborado considerando el contexto del alumno, se pretende observar cómo realizan reparto, teniendo que repartir cuatro cajas de 8 chocolates cada una, entre 3 niños. El reparto no es exacto por lo que resulta interesante observar la manera en que lo abordan y si esto los acerca a la construcción de las fracciones partiendo de la división de dos enteros, que es el objetivo que se persigue.

De lo anterior tratamos de representar los resultados en categorías que se describen a continuación.

Tabla 4.4. Estrategias de solución de la Tarea 1

<table>
<tr><th colspan="11">Estrategias de solución de la Tarea 1</th></tr>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Estrategia</th><th rowspan="2">Frecuencia</th><th colspan="3">Consideración del todo</th><th colspan="3">Número empleado en la respuesta</th><th colspan="2">No. de respuestas</th></tr>
<tr><td>caja</td><td>Chocolates</td><td>mezcla</td><td>Fracción</td><td>N.decimal</td><td>mezcla</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Reparto equitativo y exhaustivo</td><td>7
correctas</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>1</td><td>5</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Reparto equitativo no exhaustivo
(no se agota el todo sobran 2)</td><td>7</td><td>2</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td><td>4 (div)</td><td>1</td><td>5</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Respuesta sin reparto</td><td></td><td>8
correctas</td><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">5</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">5</td><td rowspan="2">5</td><td rowspan="2">6</td><td rowspan="2">4</td></tr>
<tr><td>Sobra caja</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Error de conversión Reparto exhaustivo incorrecto</td><td>2</td><td colspan="3"></td><td colspan="3">Fracción/decimal</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="7">Menciona que no puede realizarlo porque no es posible una división exacta</td><td colspan="4">2</td></tr>
<tr><td colspan="7">Respuesta incorrecta (no logra establecer un reparto)</td><td colspan="4">9</td></tr>
</table>

De la Tabla 4.4 en la que se concentran los resultados de la Tarea 1 podemos observar que respondieron el problema $\frac{37}{41}$ estudiantes, sin embargo sólo $\frac{15}{41}$ presentan una respuesta correcta y de ellas $\frac{8}{41}$ proporcionan una respuesta en número decimal, realizando solo una división de números naturales y sin un reparto. Sólo $\frac{7}{41}$ lograron realizar reparto equitativo y exhaustivo pero únicamente $\frac{3}{41}$ proporcionan una respuesta en fracción, una cantidad similar $\frac{3}{41}$ proporcionan respuesta en decimales y 1 presenta una respuesta en la que se mezclan fracciones y naturales.

Observamos también que $\frac{7}{41}$ realizan reparto equitativo pero no exhaustivo, no logran agotar el todo, por lo que presentan un sobrante y de ellos, sólo $\frac{2}{41}$ proporcionan respuesta en fracción y los restantes emplean naturales. De la tabla se observa también que para $\frac{2}{41}$ no es posible realizar un reparto equitativo porque la división no es exacta y $\frac{9}{41}$ intentan realizar el reparto pero no lo consiguen por lo que su respuesta queda incompleta.

Del total de respuestas, en ocho de ellas los estudiantes proporcionan dos soluciones, lo que hace evidente que existe confusión en las tareas de reparto. Esto puede ser debido a que los alumnos realizan mejor las tareas de reparto en contextos discretos que en contextos continuos. Inician resolviendo el problema considerando un todo continuo, pero al solicitarle representar de manera pictórica el reparto, se les presentan dificultades y entonces recurren a la modificación del reparto a un todo discreto, de ahí las dos soluciones que dan evidencia de la dificultad para identificar la unidad, es decir, no tienen claro qué “todo” representa la unidad, de acuerdo a Llinares & Sánchez (2000).

4.1.2.1. Categorías de reparto de la Tarea 1 del Cuestionario inicial de exploración

Se observan diversas estrategias de reparto que analizaremos y que trataremos de clasificar considerando algunas categorías de Olguín (2009), como se describe a continuación. Para ello, establecemos la manera en que consideramos la palabra Acierto y Error. Consideramos Acierto cuando el estudiante encuentra la respuesta correcta o en el caso de la división cuotativa de fracciones, en la que ningún estudiante logra encontrar la respuesta adecuada, la respuesta más cercana a lo correcto, y consideramos Error cuando el estudiante proporciona una respuesta incorrecta por un problema que le resulta difícil de resolver. Hay dificultades que pueden estar asociadas al acierto o al error.

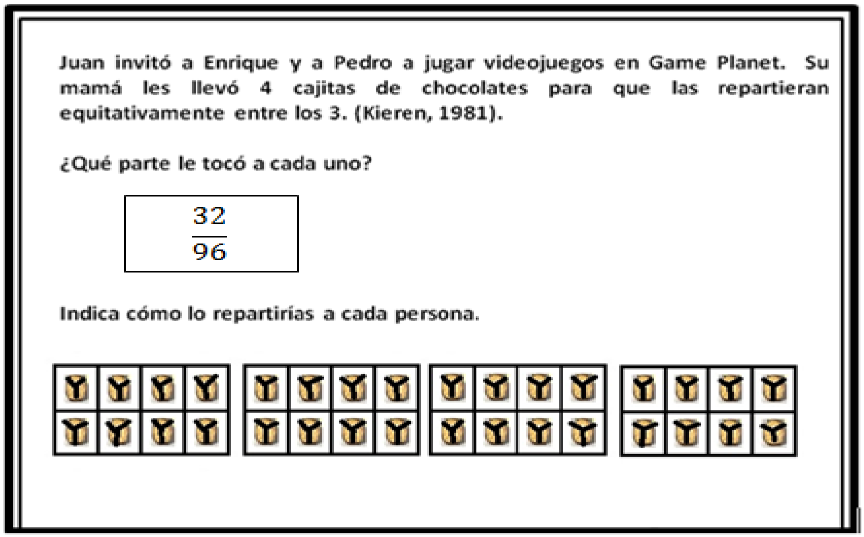
A) ACIERTOS

Uso de fracciones en una división inexacta.

1. **Realiza reparto equitativo y exhaustivo, considera un todo discreto**.

a) Contempla el total de elementos como unidad y efectúa la partición de cada elemento.

Christian, que es el único estudiante que responde todas las tareas de cuestionario correctamente, considera las cuatro cajas de chocolates como el todo, como se observa en la Fig. 4.9 y realiza un reparto exhaustivo en tercios de cada pieza de chocolate. Su reparto es correcto. Considera la fracción como cociente indicado, identificando de manera adecuada el tamaño del agrupamiento. Se asocia a las categorías *“Divide cada unidad en el mismo número de personas”* e *“Interpreta la unidad integrando todos los objetos de la colección y con base en ello hace el reparto, obteniendo una parte para cada persona”,* de Olguín (2009), al dividir cada elemento en tres y mostrarlo como noventaiseisavos y no como tercios, lo que permite obtener un número menor que la unidad.



Juan invitó a Enrique y a Pedro a jugar videojuegos en Game Planet. Su mamá les llevó 4 cajitas de chocolates para que las repartieran equitativamente entre los 3. (Kieren, 1981).

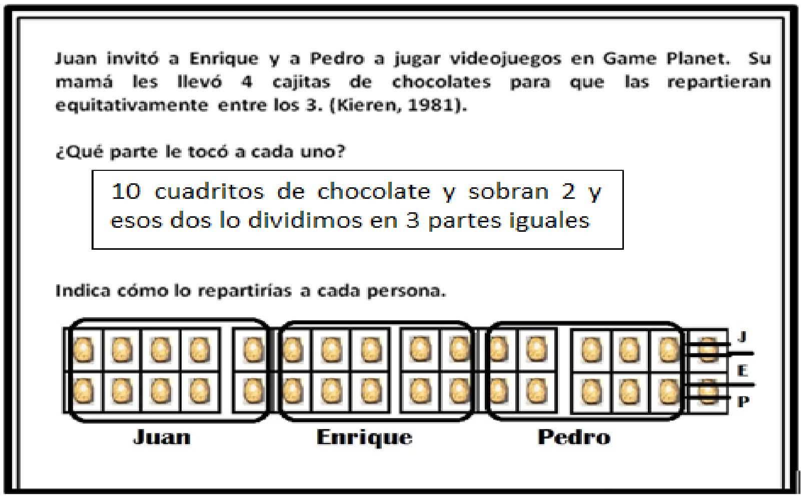
¿Qué parte le tocó a cada uno?

$\frac{32}{96}$

Indica cómo lo repartirías a cada persona.

Fig. 4.9. Reparto equitativo y exhaustivo realizado por Christian.

b) Primero reparte elementos completos y el sobrante lo reparte de manera proporcional



Juan invitó a Enrique y a Pedro a jugar videojuegos en Game Planet. Su mamá les llevó 4 cajitas de chocolates para que las repartieran equitativamente entre los 3. (Kieren, 1981).

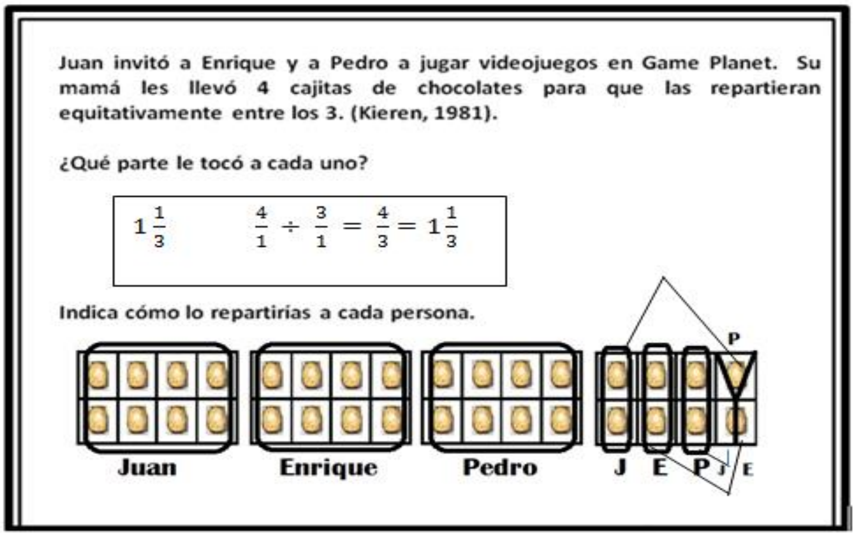
¿Qué parte le tocó a cada uno?

10 cuadritos de chocolate y sobran 2 y esos dos lo dividimos en 3 partes iguales

Indica cómo lo repartirías a cada persona.

Fig. 4.10. Estrategia de reparto de Carol Andrea.

Carol Andrea realizó un reparto equitativo (Fig. 4.10), en el que existe indicio de conteo porque considera 32 chocolates como el todo a repartir. Reparte 10 chocolates para cada niño y los dos restantes los subdivide en tercios y proporciona dos tercios a cada niño. Llama la atención la forma en que fracciona los chocolates sobrantes, considera el cuadro completo y no el chocolate en sí. Se asocia a este problema la categoría de Olguín (2009), *"Reparte unidades a cada persona y lo que sobra lo divide en fracciones".*



Juan invitó a Enrique y a Pedro a jugar videojuegos en Game Planet. Su mamá les llevó 4 cajitas de chocolates para que las repartieran equitativamente entre los 3. (Kieren, 1981).

¿Qué parte le tocó a cada uno?

$1\frac{1}{3}$ $\frac{4}{1} \div \frac{3}{1} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

Indica cómo lo repartirías a cada persona.

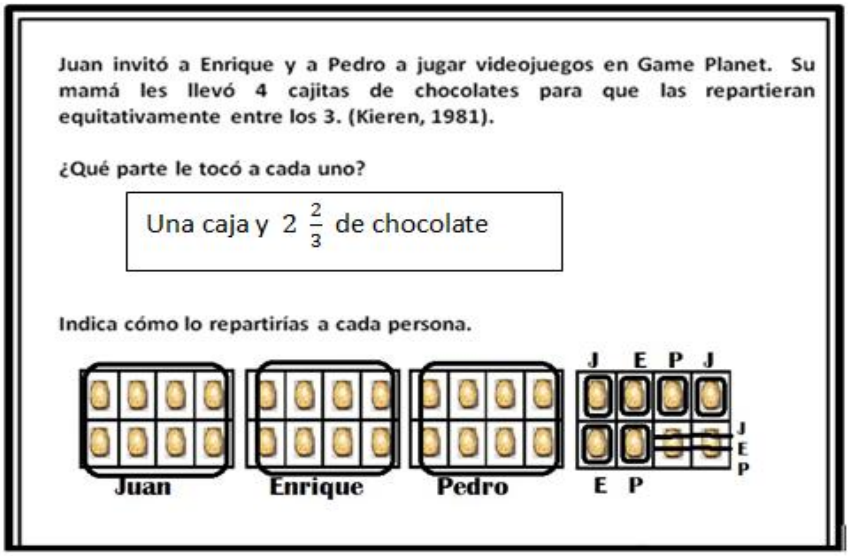
Fig. 4.11. Reparto exhaustivo realizado por Axel.

Axel realiza un reparto equitativo y exhaustivo en el que considera cada caja como la unidad (Fig. 4.11), realiza una operación de división entre un entero y una fracción. Llama la atención que el entero lo convierte a fracción mediante el elemento neutro, obteniendo un número mixto como respuesta. Este es el único problema en el que se observa un acercamiento a la operación de división de fracciones aplicado de manera adecuada en esta tarea y se observa el empleo de la fracción como cociente indicado, lo que nos permite establecer que una tarea de reparto permite el acercamiento del estudiante a la división partitiva, coincidiendo con Kieren (1988), que sostiene que el significado de cociente está ligado a situaciones de reparto equitativo, y Fishbein at all (1985) y Flores (2014), quienes mencionan que existe una relación multiplicativa entre objetos y participantes del reparto ($4 \div 3 = \frac{4}{3}$), una relación de la que pocos se dan cuenta y que es importante destacar en la enseñanza.

La representación pictórica la realiza repartiendo una caja para cada niño y reparte la caja restante en tercios aunque llama la atención la manera en la que lo efectúa debido a que parte los dos chocolates sobrantes "juntos" (considerándolos como una nueva unidad) en tercios y reparte 2 chocolates más el tercio de los dos juntos a cada niño, esto representa un tercio de la caja y los une mediante una línea, es el único que representa el tercio de la caja adecuadamente, lo que proporciona evidencia de un adecuado manejo del significado de la fracción. También este problema se asocia a la categoría de Olguín (2009), *"Reparte unidades a cada persona y lo que sobra lo divide en fracciones".*

c) Reparte primero unidades completas, el resto se reparte estableciendo una relación proporcional. Modificación de la unidad

Jatziri realizó un reparto equitativo, observado en la Fig. 4.12, aunque modifica la unidad, primero reparte una caja para cada niño y de la caja que resta reparte de manera individual los chocolates a cada niño de manera que les corresponden dos chocolates, aquí es dónde se hace evidente el cambio de unidad al no mencionar un cuarto de la caja restante, sino dos chocolates, los chocolates restantes los subdivide en tercios y reparte dos tercios a cada niño. Al igual que el ejemplo anterior fracciona el cuadro completo y no el chocolate. El pictograma es de gran ayuda para ella. La respuesta es exacta proporcionada en fracción, en una mezcla de unidades entre cajas de chocolates y chocolates.



Juan invitó a Enrique y a Pedro a jugar videojuegos en Game Planet. Su mamá les llevó 4 cajitas de chocolates para que las repartieran equitativamente entre los 3. (Kieren, 1981).

¿Qué parte le tocó a cada uno?

Una caja y $2\frac{2}{3}$ de chocolate

Indica cómo lo repartirías a cada persona.

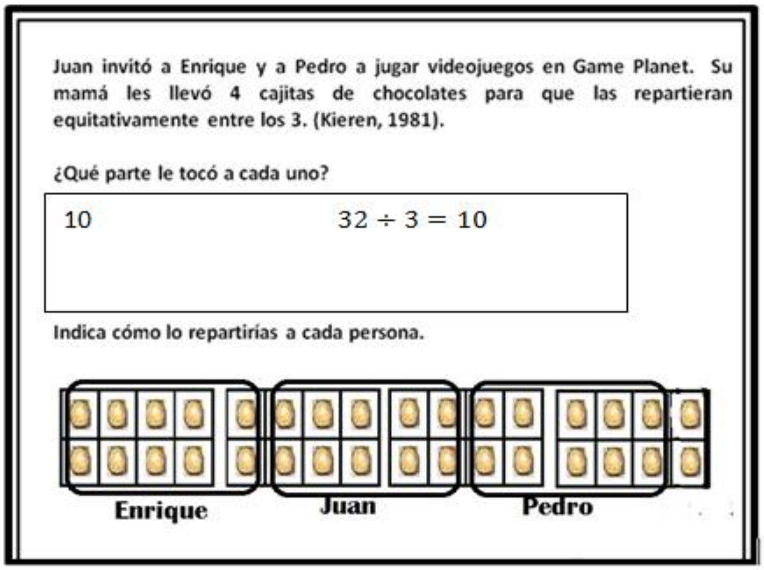
Fig. 4.12. Estrategia de reparto que realiza Jatziri

B) ERRORES

Dentro de los obstáculos encontrados, la mayoría logra realizar un reparto equitativo pero no exhaustivo, consideran lo que no pueden repartir como sobrante y solamente reparten lo que creen que sí es posible repartir. Dichas dificultades las clasificamos como se enlista a continuación.

1. Realiza reparto equitativo mas no exhaustivo

a) considera un todo discreto y el total de elementos como unidad



Juan invitó a Enrique y a Pedro a jugar videojuegos en Game Planet. Su mamá les llevó 4 cajitas de chocolates para que las repartieran equitativamente entre los 3. (Kieren, 1981).

¿Qué parte le tocó a cada uno?

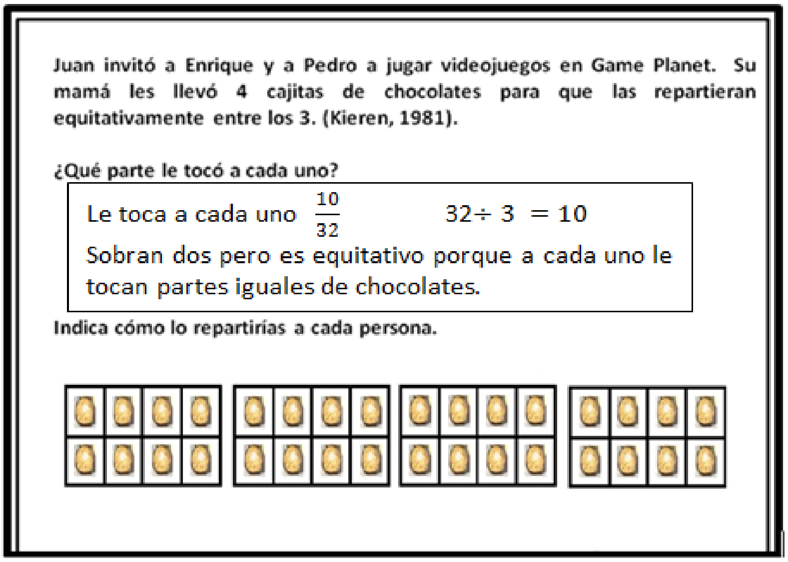
10 $32 \div 3 = 10$

Indica cómo lo repartirías a cada persona.

Enrique Juan Pedro

Fig. 4.13. Reparto no exhaustivo empleando números naturales.

b) Respuestas sin evidencia de reparto. Empleo de algoritmos. Respuesta en fracción. Considera el total de elementos como unidad



Juan invitó a Enrique y a Pedro a jugar videojuegos en Game Planet. Su mamá les llevó 4 cajitas de chocolates para que las repartieran equitativamente entre los 3. (Kieren, 1981).

¿Qué parte le tocó a cada uno?

Le toca a cada uno $\frac{10}{32}$ $32 \div 3 = 10$

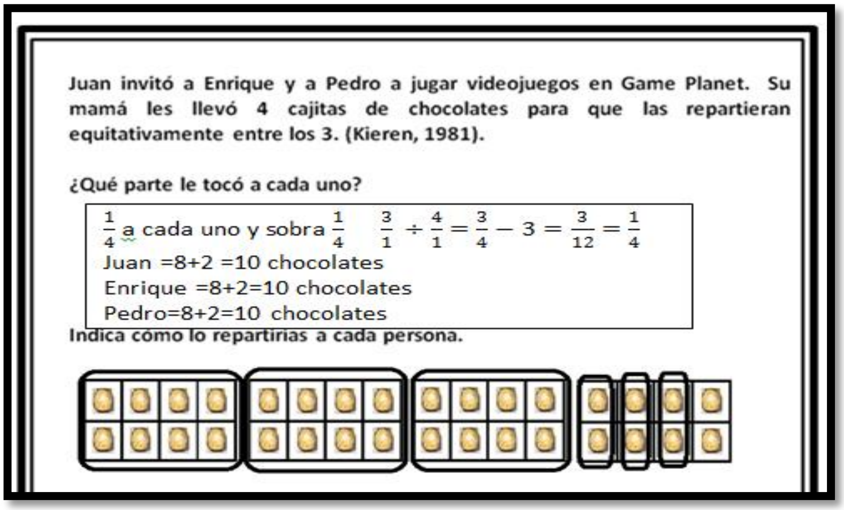
Sobran dos pero es equitativo porque a cada uno le tocan partes iguales de chocolates.

Indica cómo lo repartirías a cada persona.

Fig. 4.14. Respuesta sin realizar reparto y empleando un cociente indicado.

Se observa un reparto equitativo en donde no se agota el todo, se trabaja con naturales y no se observa un acercamiento a la construcción de la fracción (Fig. 4.13), se comprende el problema pero no se realiza un reparto empleando el pictograma, (Fig. 4.14).

c) proporciona dos respuestas considerando dos unidades distintas



Juan invitó a Enrique y a Pedro a jugar videojuegos en Game Planet. Su mamá les llevó 4 cajitas de chocolates para que las repartieran equitativamente entre los 3. (Kieren, 1981).

¿Qué parte le tocó a cada uno?

$\frac{1}{4}$ a cada uno y sobra $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{1} \div \frac{4}{1} = \frac{3}{4} - 3 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

Juan =8+2 =10 chocolates

Enrique =8+2=10 chocolates

Pedro=8+2=10 chocolates

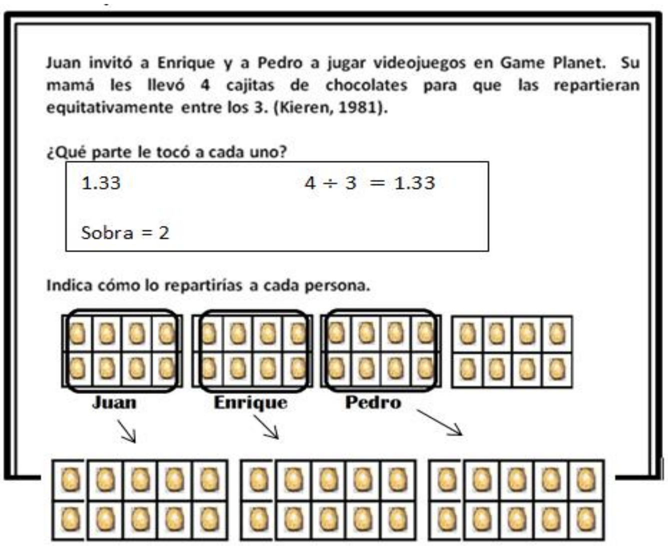
Indica cómo lo repartirías a cada persona.

Fig. 4.15. Reparto realizado por Uri, que contempla dos respuestas.

Uri considera dos unidades en su respuesta, de inicio considera cajas y realiza el algoritmo de división, el cual ejecuta adecuadamente pero se equivoca en la interpretación del problema por lo que su respuesta es errónea, es decir, identifica la operación que debe realizar adecuadamente pero realiza la división con los números invertidos, error frecuente en la división, de acuerdo con Puig y Cerdán (1988), esto lo lleva a recurrir a la modificación del todo y decide considerar cada elemento como unidad, sin embargo no logra realizar un reparto exhaustivo.

2.- **No se relaciona su respuesta con el reparto**

a) Modifica el conjunto de 8 a 10 elementos



Juan invitó a Enrique y a Pedro a jugar videojuegos en Game Planet. Su mamá les llevó 4 cajitas de chocolates para que las repartieran equitativamente entre los 3. (Kieren, 1981).

¿Qué parte le tocó a cada uno?

1.33 $4 \div 3 = 1.33$

Sobra = 2

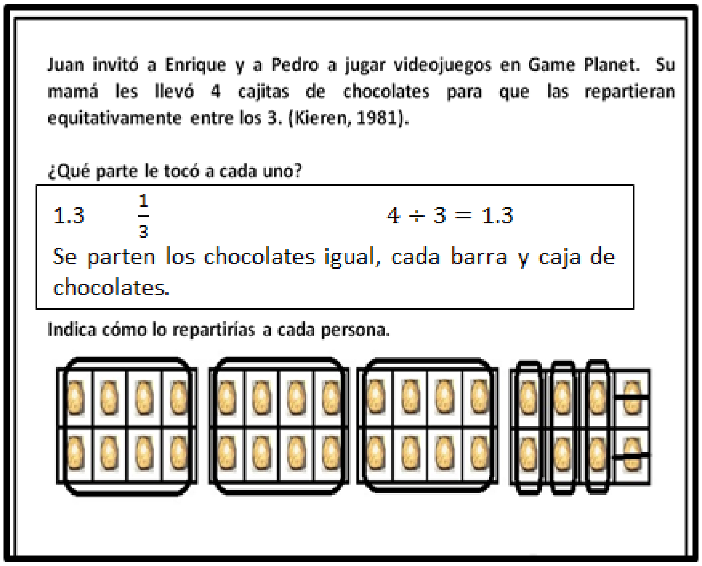
Indica cómo lo repartirías a cada persona.

Fig. 4.16. Modificación del conjunto de elementos, respuesta proporcionada por Emiliano.

Emiliano no muestra concordancia con la respuesta proporcionada en la que elige números naturales y proporciona una respuesta en decimales y el reparto que realiza en el que además modifica el conjunto de elementos proporcionado.

b) Confusión de los elementos significantes igualando 1.3 = $\frac{1}{3}$ (dos respuestas similares en el cuestionario)

Luis Daniel proporciona dos respuestas en su resolución (Fig. 4.17), para la primera realiza una división de naturales, considerando las cuatro cajas como la unidad y divide 4 entre 3, obteniendo como resultado 1.3; es probable que asocie eso a su segunda respuesta convirtiéndola en fracción $\frac{1}{3}$. Esto de acuerdo a Duval, citado por Sánchez (2012), muestra las dificultades observadas por los estudiantes en la conversión de decimal a fracción, que igualan los elementos significantes de un conjunto numérico al otro, sin considerar que no son iguales.



Juan invitó a Enrique y a Pedro a jugar videojuegos en Game Planet. Su mamá les llevó 4 cajitas de chocolates para que las repartieran equitativamente entre los 3. (Kieren, 1981).

¿Qué parte le tocó a cada uno?

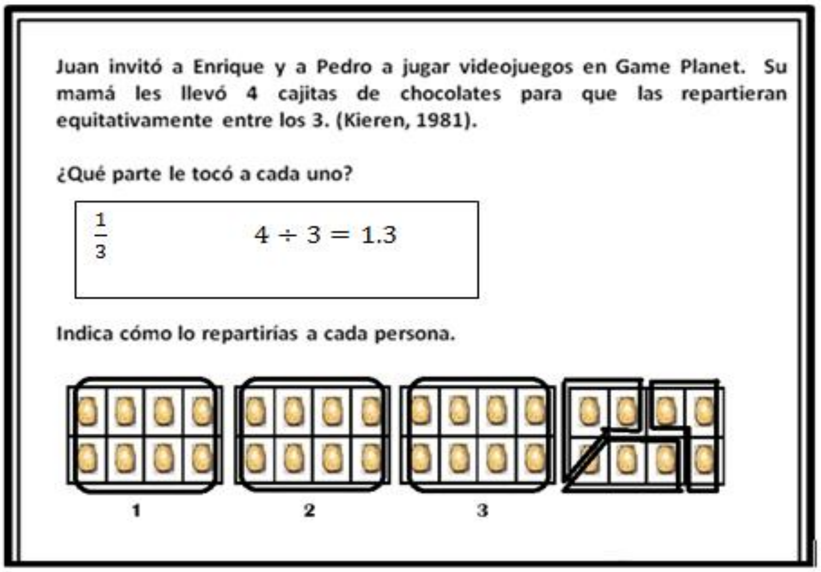
1.3 $\frac{1}{3}$ $4 \div 3 = 1.3$

Se parten los chocolates igual, cada barra y caja de chocolates.

Indica cómo lo repartirías a cada persona.

Fig. 4.17. No se observa relación de la respuesta con el reparto.

Por otro lado su respuesta no se asocia al reparto que realiza en la figura, reparte una caja para cada niño, de la caja restante, reparte dos chocolates para cada niño y los dos chocolates restantes los parte por la mitad cada uno, dando una mitad a cada niño. Una mitad queda sin repartir.



Juan invitó a Enrique y a Pedro a jugar videojuegos en Game Planet. Su mamá les llevó 4 cajitas de chocolates para que las repartieran equitativamente entre los 3. (Kieren, 1981).

¿Qué parte le tocó a cada uno?

$\frac{1}{3}$ $4 \div 3 = 1.3$

Indica cómo lo repartirías a cada persona.

Fig. 4.18. Reparto exhaustivo pero no equitativo.

Para concluir el análisis de la Tarea 1 observamos la respuesta de Camila (Fig. 4.18), quien intenta realizar un reparto equitativo, pero no lo logra. Considera una caja como la unidad. Realiza una operación de división de enteros $4\div 3 = 1.3$ cuya resultado es correcto, sin embargo, asocia ese resultado a una fracción porque da como respuesta $\frac{1}{3}$, pero no existe relación con esa respuesta y el reparto que realiza. Presenta el mismo problema que el estudiante presentado anteriormente, dónde se observan dificultades en la conversión de decimal a fracción.

Al realizar el reparto en la figura reparte una caja para cada niño e intenta repartir la caja sobrante, reparte tres chocolates para un niño y como le restan cinco, reparte 2 $\frac{1}{2}$ chocolates para los dos niños que faltan. Su reparto no es equitativo. Al parecer es consciente de su error, porque expresa que no le salió el problema.

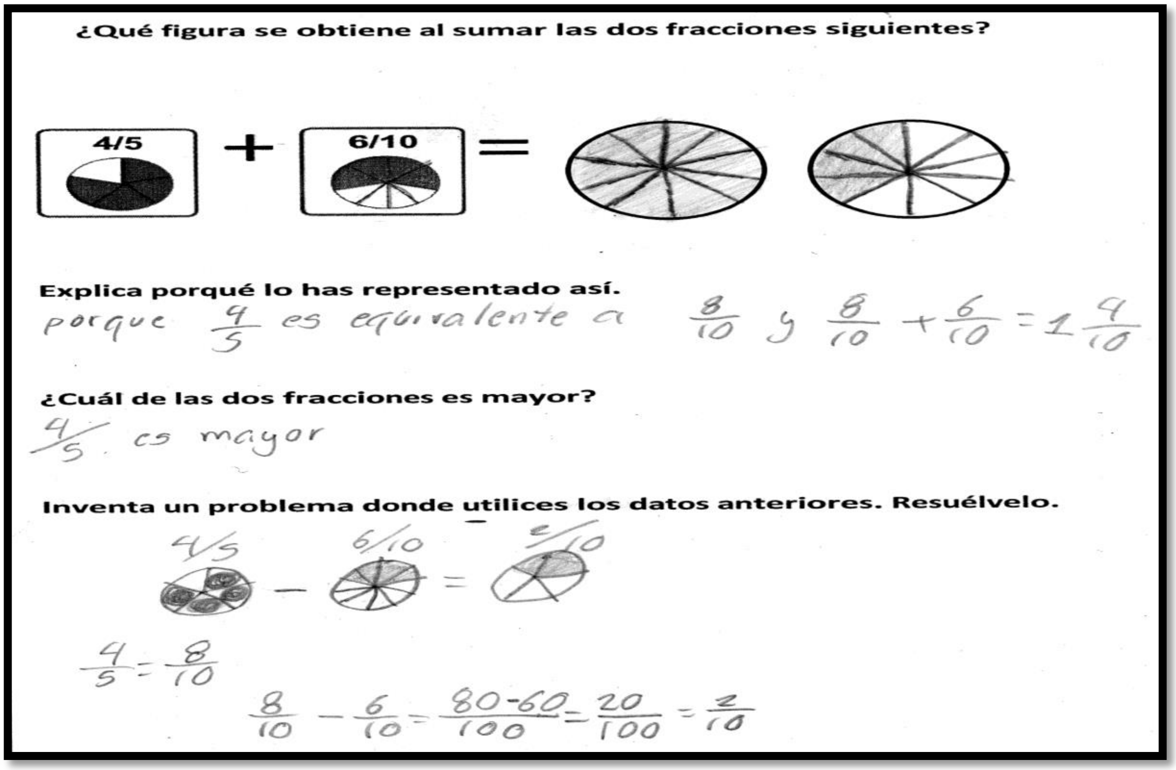
El análisis de la Tarea 1 nos muestra una parte de las estrategias empleadas por los estudiantes en el problema de reparto, mostrando que existen deficiencias en la resolución de problemas de este tipo, a los que se observa que no están familiarizados y eso les impide lograr repartos exhaustivos.

A continuación mostraremos de manera breve un acierto y una dificultad observadas en la Tarea 5 de suma de fracciones, sólo para mostrar algunas de las deficiencias detectadas en los estudiantes de manera general, sobretodo en el empleo de los algoritmos, que fue el error más recurrente.

4.1.2.2. Tarea 5 de Suma de fracciones

En cuanto a los problemas de suma de fracciones, observamos aciertos en Christian y Emiliano quienes convierten a fracción equivalente el primer factor y realizan la suma. Realizan una partición en décimos, sombreando la respuesta correcta. Plantean un problema similar de manera correcta y realiza una identificación de orden adecuada, (Fig. 4.19).

Por otro lado, Rodrigo y Sherlin logran realizar una conversión a fracción equivalente de uno de los factores, aunque no hay evidencia de una operación, se puede observar en la imagen que presentan. Realizan una partición adecuada en quintos y sombreado de la respuesta. Se observa que pueden inventar un problema que involucre suma de fracciones sin dificultad, lo que nos muestra que entienden el significado y sentido de la operación, coincidiendo con Valdemoros (2004), (Fig. 4.20).



¿Qué figura se obtiene al sumar las dos fracciones siguientes?

Explica porqué lo has representado así.

porque $\frac{4}{5}$ es equivalente a $\frac{8}{10}$ y $\frac{8}{10} + \frac{6}{10} = 1\frac{4}{10}$

¿Cuál de las dos fracciones es mayor?

$\frac{4}{5}$ es mayor

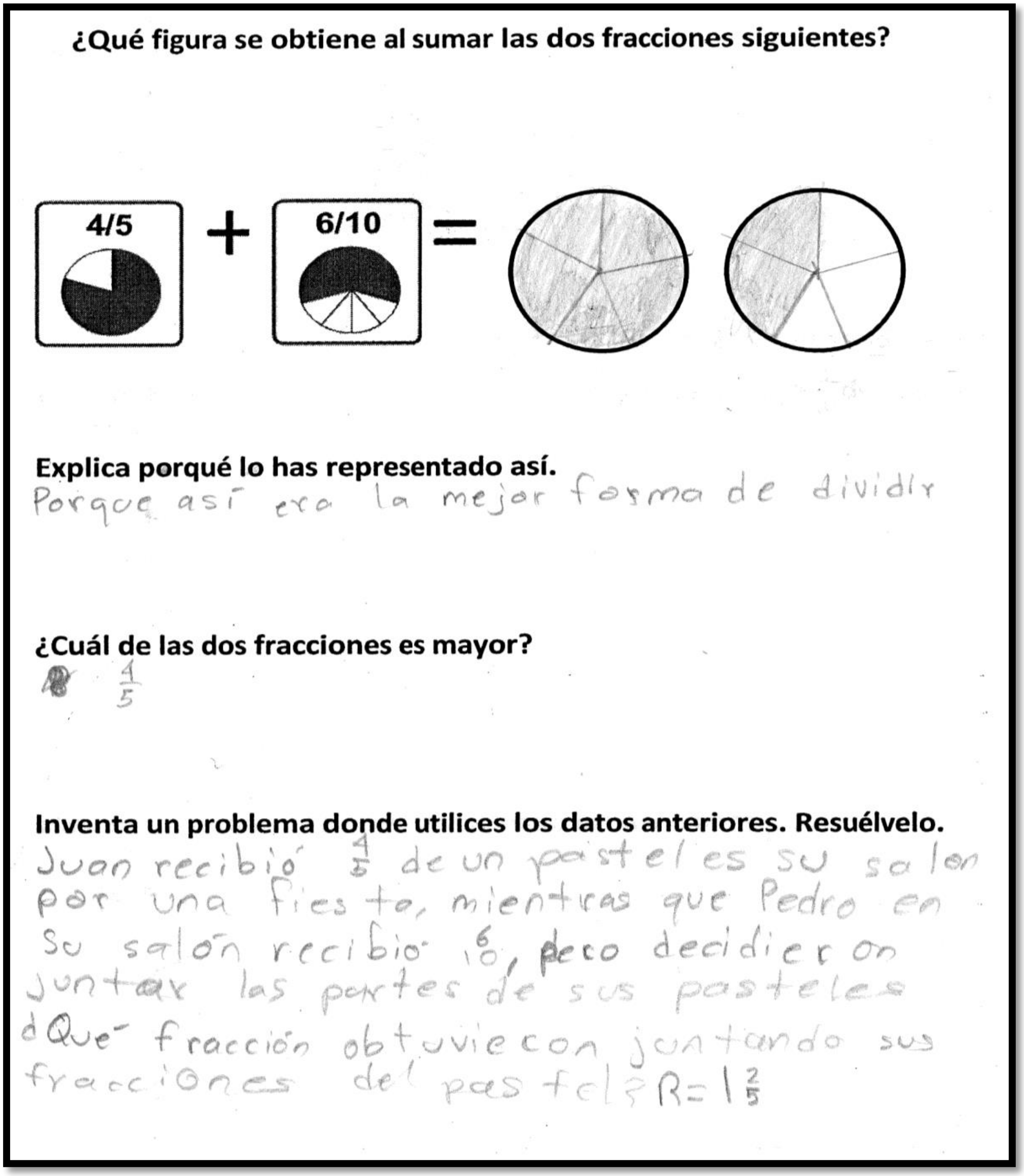
Inventa un problema donde utilices los datos anteriores. Resuélvelo.

$\frac{4}{5} - \frac{6}{10} = \frac{2}{10}$

$\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$

$\frac{8}{10} - \frac{6}{10} = \frac{80-60}{100} = \frac{20}{100} = \frac{2}{10}$

Fig. 4.19. Representación gráfica de suma de fracciones.



¿Qué figura se obtiene al sumar las dos fracciones siguientes?

Explica porqué lo has representado así.

Porque así era la mejor forma de dividir

¿Cuál de las dos fracciones es mayor?

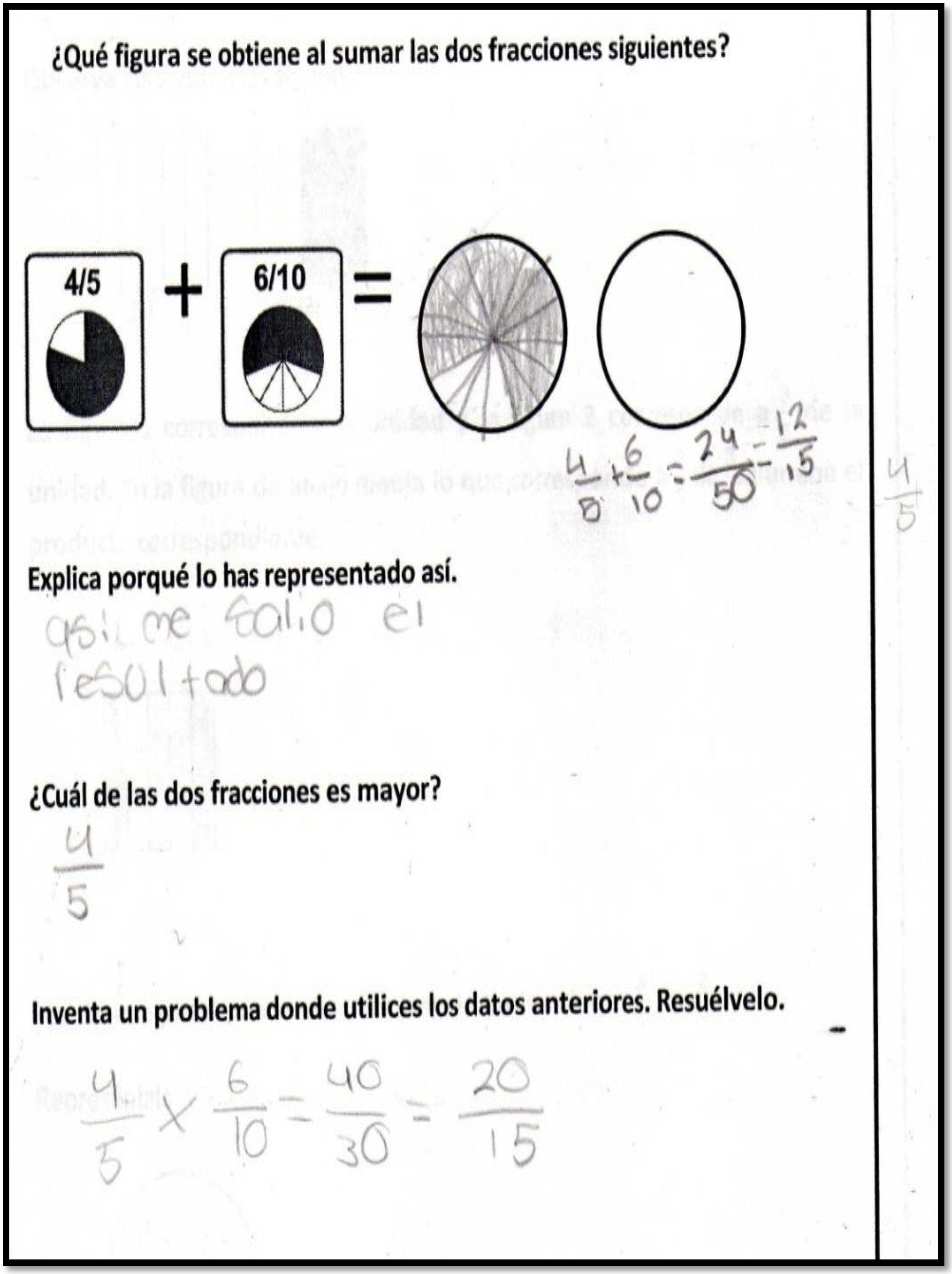
$\frac{4}{5}$

Inventa un problema donde utilices los datos anteriores. Resuélvelo.

Juan recibió $\frac{4}{5}$ de un pastel es su salon por una fiesta, mientras que Pedro en su salón recibio $\frac{6}{10}$, pero decidieron juntar las partes de sus pasteles ¿Qué fracción obtuvieron juntando sus fracciones del pastel? R= $1\frac{2}{5}$

Fig. 4.20. Representación de suma de fracciones empleando equivalencia.

Dentro de las dificultades observadas podemos remitir al trabajo de Fernando (Fig. 4.21), en dónde se observa que entiende el problema pero no logra realizar una suma adecuada ni representar gráficamente lo solicitado y se identifica su dificultad en el manejo de los algoritmos, que de acuerdo a la clasificación de errores de González (2015), muestra una *“aplicación sistemática de procedimientos erróneos”*, dentro de los cuales se consideran “*Error en el algoritmo suma,* y *Dividir en lugar de multiplicar y viceversa”.*



¿Qué figura se obtiene al sumar las dos fracciones siguientes?

4/5 + 6/10 =

$\frac{4}{8}+\frac{6}{10}=\frac{24}{50}=\frac{12}{15}$

$\frac{4}{5}$

Explica porqué lo has representado así.

asi me salio el
resultado

¿Cuál de las dos fracciones es mayor?

$\frac{4}{5}$

Inventa un problema donde utilices los datos anteriores. Resuélvelo.

$\frac{4}{5}\times\frac{6}{10}=\frac{40}{30}=\frac{20}{15}$

Fig. 4.21. Representación errónea de suma de fracciones.

4.1.2.3. Multiplicación de fracciones

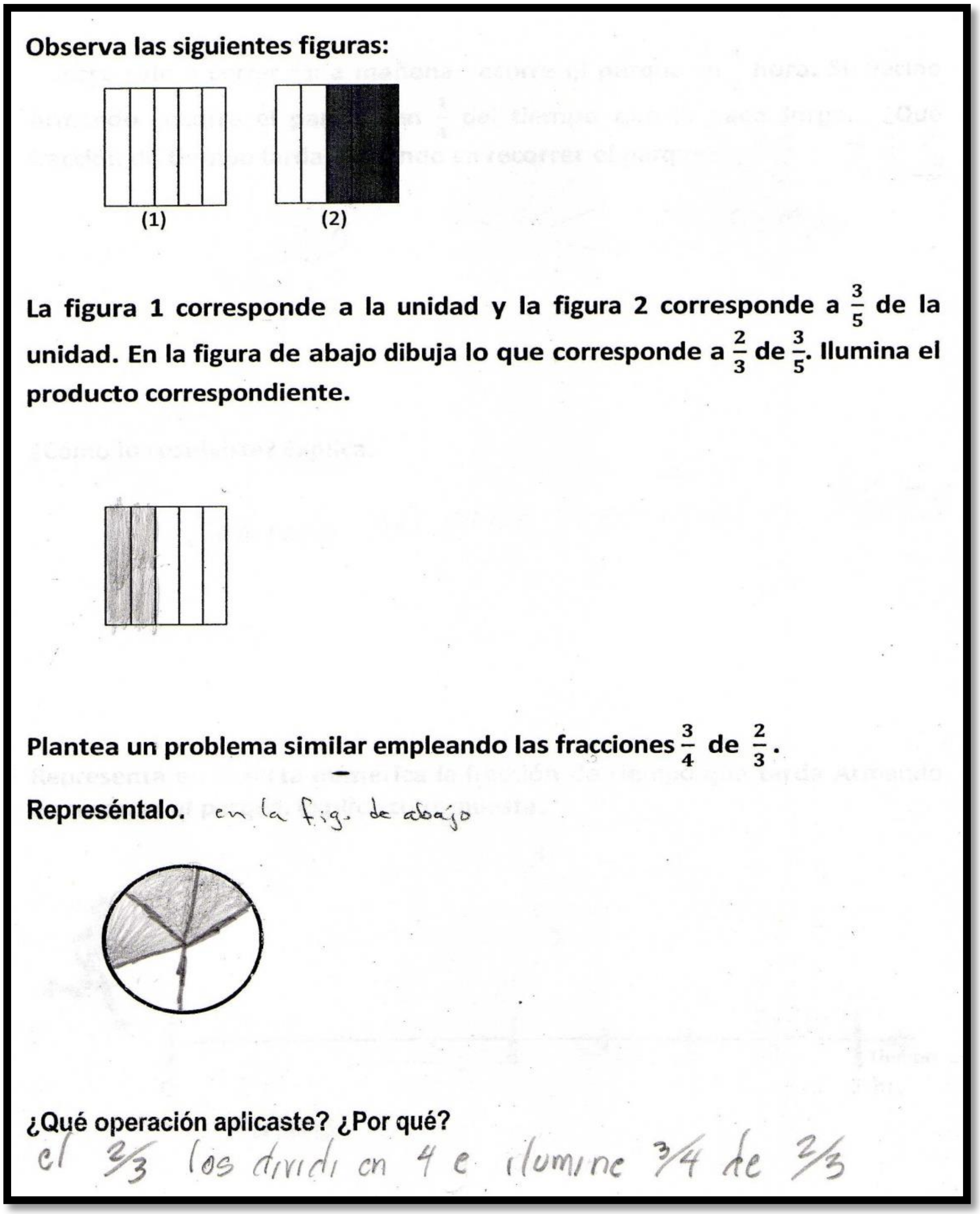
Considerando que los problemas de estructura multiplicativa involucran la multiplicación y división, creemos pertinente revisar la manera en que los estudiantes abordaron la tarea de multiplicación de fracciones, por ser la operación inversa de la división y observar si logran establecer alguna relación entre ambas.

De acuerdo a la Tabla 2.2, son tres las tareas de multiplicación de fracciones, 6, 7 y 8, en las que se pretende observar la identificación de partes de partes y la representación pictórica de la multiplicación en un modelo de área y en la recta, el uso del algoritmo, y la identificación de la preposición "de" asociada a la multiplicación. En la Tabla 4.3 se observa que sólo $\frac{13}{41}$, $\frac{11}{41}$, $\frac{11}{41}$, asociadas a las Tareas 6, 7 y 8 respectivamente, respondieron correctamente las tareas, sin embargo en la Tarea 6 que involucra el modelo de área sólo en 4 de 41 es claro que identifican el objetivo de la tarea e identifican la preposición "de" y lo explican, del resto es difícil distinguir si identificaron adecuadamente por entender el significado de la tarea o sólo fue por azar su respuesta, debido a que no realizan la tarea adicional, que es la que nos permite identificar si hay comprensión de la tarea.

Un ejemplo de una tarea adecuada se presenta en la Figura 4.22, Emiliano realiza una correcta identificación de la parte solicitada inventa un problema adicional de manera correcta y explica el procedimiento que realiza, no hay evidencia de operación.

En la misma tarea, dentro de los que no identifican lo que hay que hacer, la mayoría, lo que hace es representar gráficamente las dos fracciones que se le presentan y en la parte adicional, plantean un problema de suma de fracciones.

En la Tarea 7 que involucraba representación en la recta de una medida de tiempo, si se observa que logran identificar adecuadamente la respuesta, sin embargo la identificación no se debe al conocimiento de la multiplicación de fracciones sino a la familiarización que tienen con el uso del tiempo y la expresión "mitad de la mitad", que los lleva a resolver la tarea de manera intuitiva. Nadie asocia su respuesta a la multiplicación de fracciones, como puede observarse en las Figuras 4.23, 4.24 y 4.25. En la Figura 4.25 llama la atención que Martha debe recurrir a un tipo de representación distinta para poder expresar su respuesta. Lo que nos muestra la poca familiarización que tiene con los distintos modos de representación.



Observa las siguientes figuras:

(1) (2)

La figura 1 corresponde a la unidad y la figura 2 corresponde a $\frac{3}{5}$ de la unidad. En la figura de abajo dibuja lo que corresponde a $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{5}$. Ilumina el producto correspondiente.

Plantea un problema similar empleando las fracciones $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$.

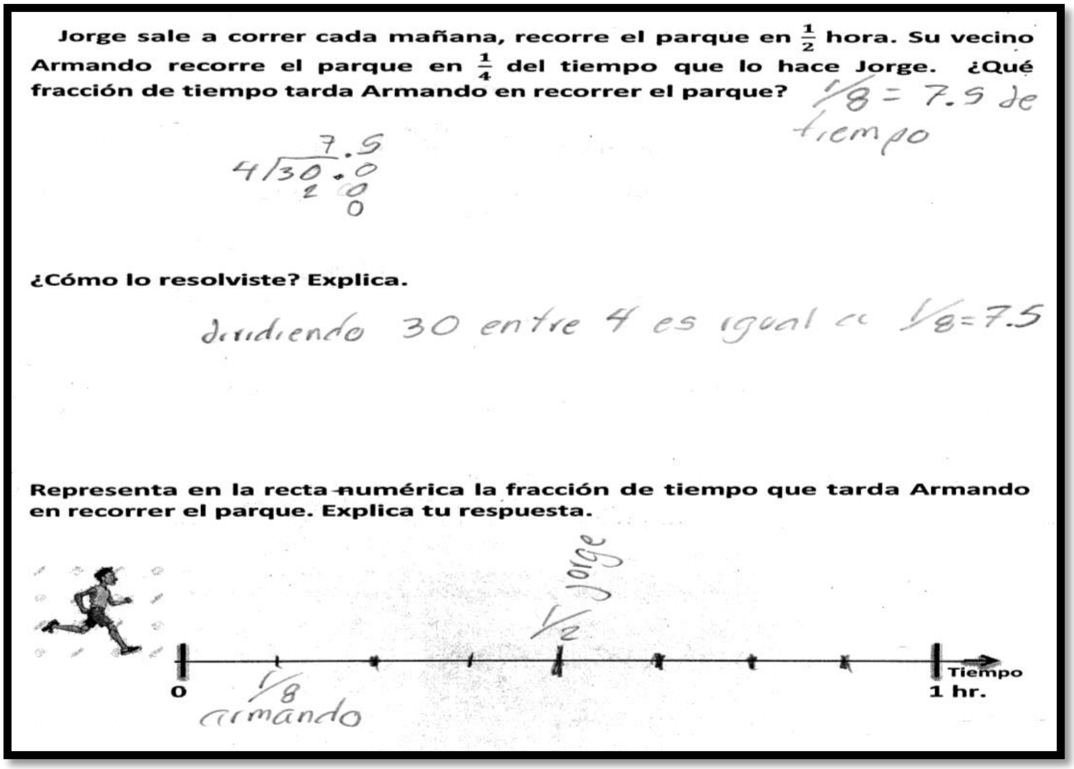
Represéntalo. en la fig. de abajo

¿Qué operación aplicaste? ¿Por qué?

el 2/3 los dividi en 4 e ilumine 3/4 de 2/3

Fig. 4.22. Identificación de partes de partes realizada por Emiliano.

Un ejemplo de no identificación adecuada se muestra en la Figura 4.26, tarea realizada por Brenda, en la que se asocia la mitad de manera incorrecta.



Jorge sale a correr cada mañana, recorre el parque en $\frac{1}{2}$ hora. Su vecino Armando recorre el parque en $\frac{1}{4}$ del tiempo que lo hace Jorge. ¿Qué fracción de tiempo tarda Armando en recorrer el parque? 1/8 = 7.5 de tiempo

$$4\overline{)30.0}\ \ 7.5$$

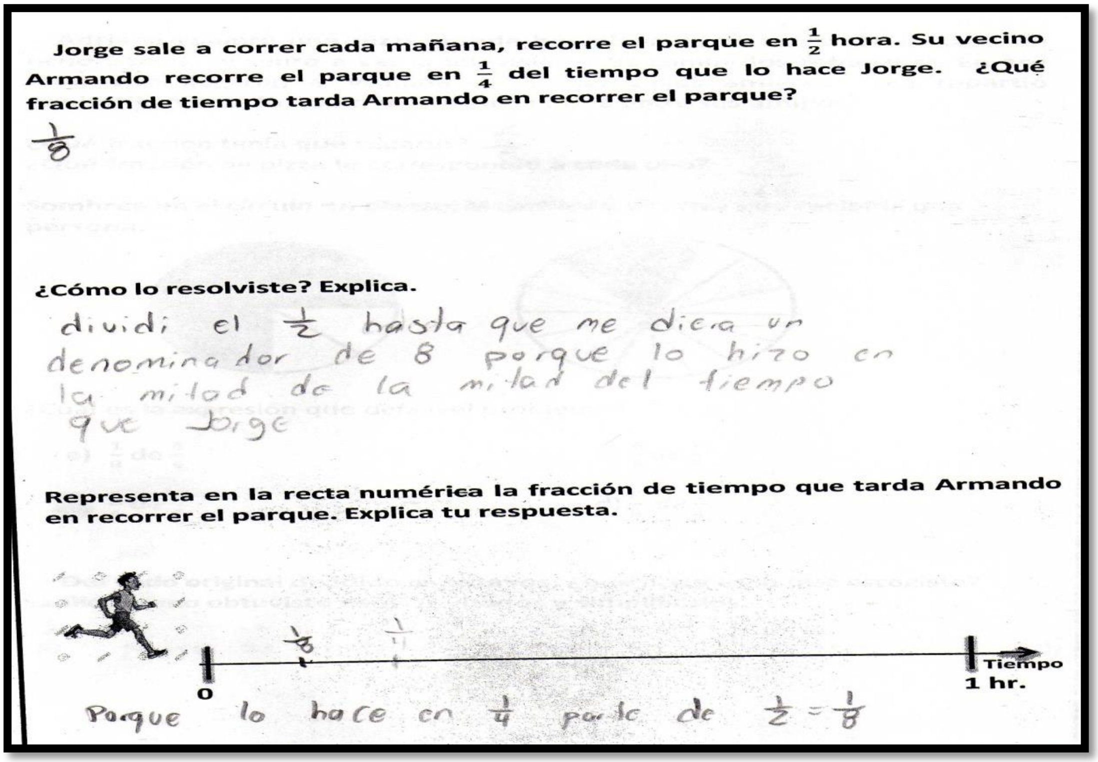
2 0
0

¿Cómo lo resolviste? Explica.

dividiendo 30 entre 4 es igual a 1/8=7.5

Representa en la recta numérica la fracción de tiempo que tarda Armando en recorrer el parque. Explica tu respuesta.

Fig. 4.23. Identificación de partes de partes, representado en la recta realizada por Emiliano.



Jorge sale a correr cada mañana, recorre el parque en $\frac{1}{2}$ hora. Su vecino Armando recorre el parque en $\frac{1}{4}$ del tiempo que lo hace Jorge. ¿Qué fracción de tiempo tarda Armando en recorrer el parque?

$\frac{1}{8}$

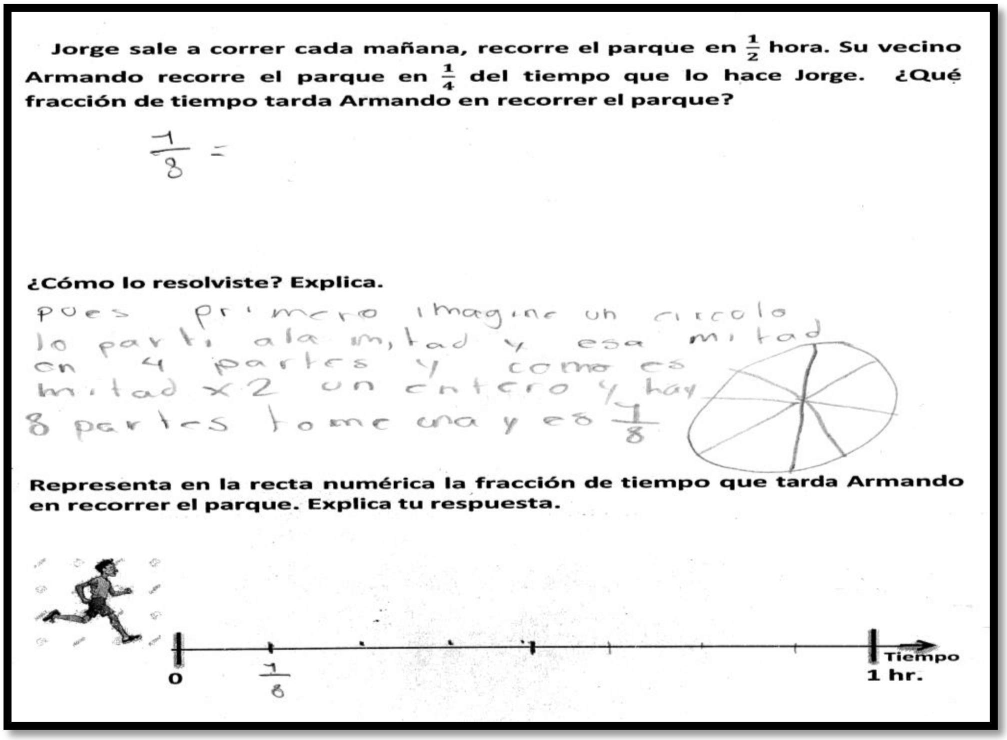
¿Cómo lo resolviste? Explica.

dividi el $\frac{1}{2}$ hasta que me diera un denominador de 8 porque lo hizo en la mitad de la mitad del tiempo que Jorge

Representa en la recta numérica la fracción de tiempo que tarda Armando en recorrer el parque. Explica tu respuesta.

Porque lo hace en $\frac{1}{4}$ parte de $\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Fig. 4.24. Identificación de partes de partes realizada por Christian.



Jorge sale a correr cada mañana, recorre el parque en $\frac{1}{2}$ hora. Su vecino Armando recorre el parque en $\frac{1}{4}$ del tiempo que lo hace Jorge. ¿Qué fracción de tiempo tarda Armando en recorrer el parque?

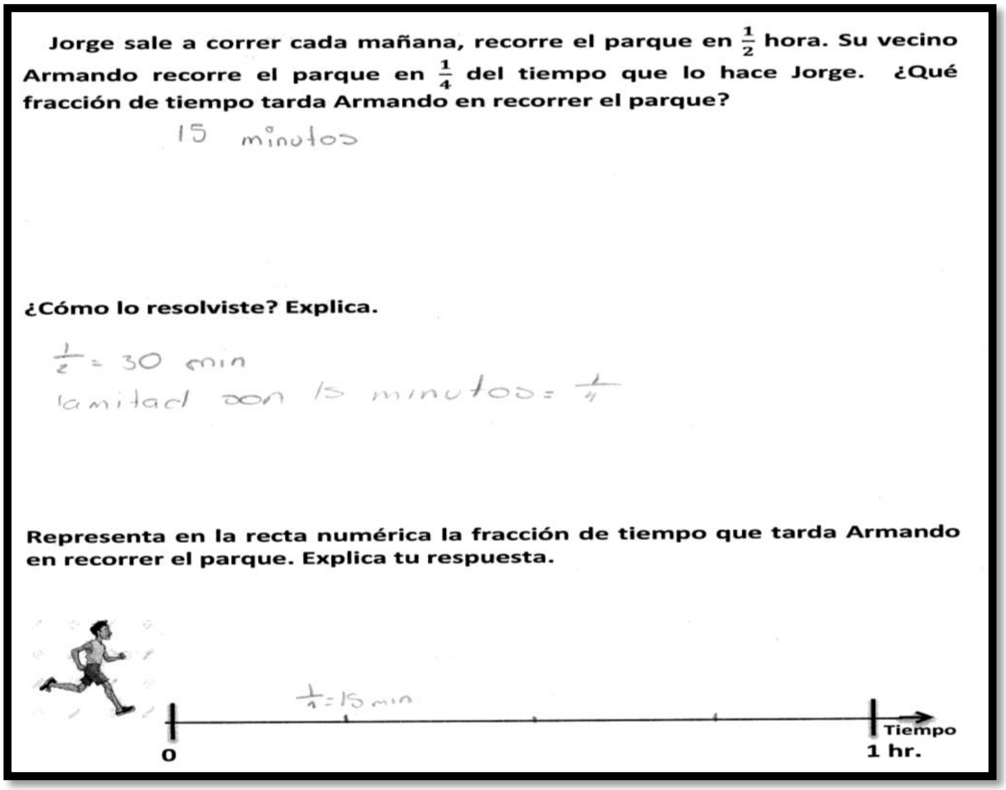
$\frac{1}{8}$ =

¿Cómo lo resolviste? Explica.

pues primero imagine un circulo
lo parti ala mitad y esa mitad
en 4 partes y como es
mitad x 2 un entero y hay
8 partes tome una y es $\frac{1}{8}$

Represienta en la recta numérica la fracción de tiempo que tarda Armando en recorrer el parque. Explica tu respuesta.

Fig. 4.25. Identificación de partes de partes empleando la mitad de la mitad, realizado por Martha.



Jorge sale a correr cada mañana, recorre el parque en $\frac{1}{2}$ hora. Su vecino Armando recorre el parque en $\frac{1}{4}$ del tiempo que lo hace Jorge. ¿Qué fracción de tiempo tarda Armando en recorrer el parque?

15 minutos

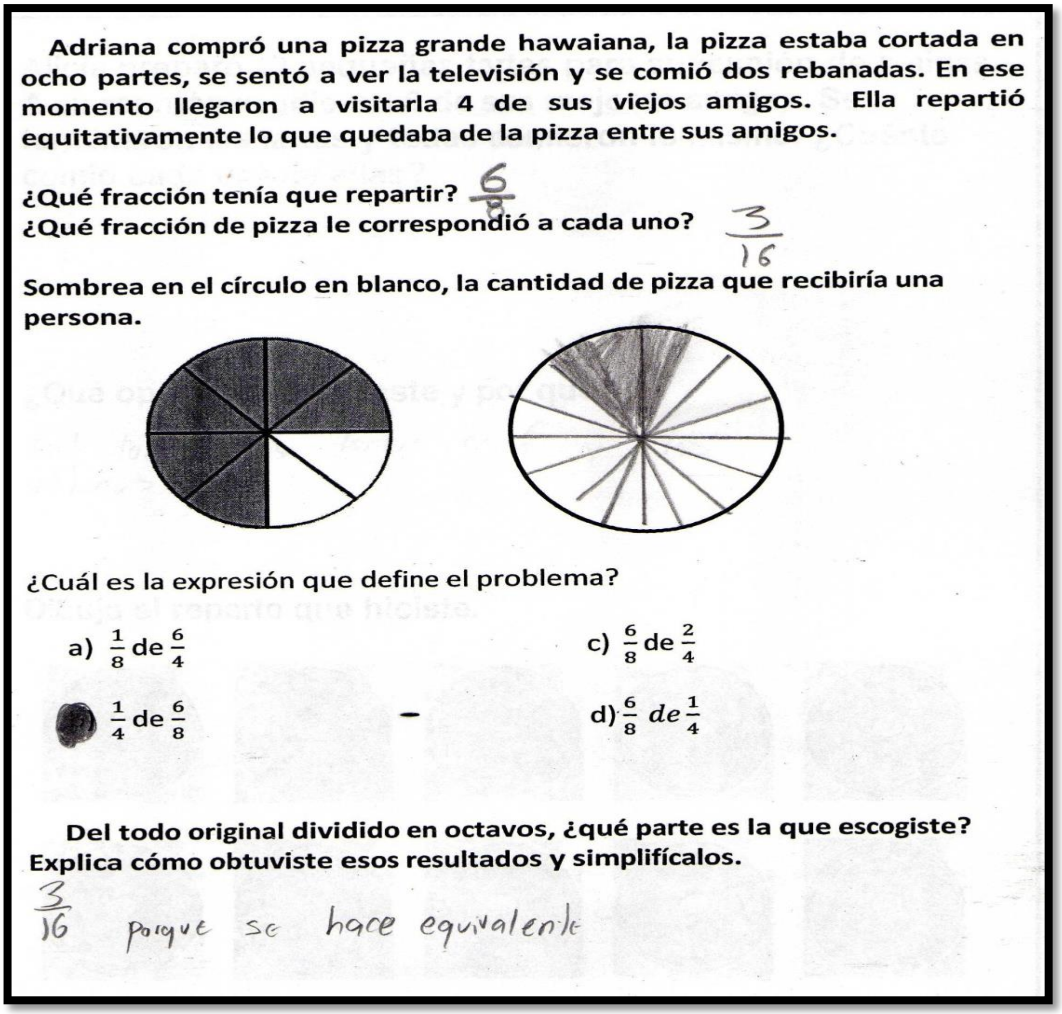
¿Cómo lo resolviste? Explica.

$\frac{1}{2}$ = 30 min
lamitad son 15 minutos = $\frac{1}{4}$

Representa en la recta numérica la fracción de tiempo que tarda Armando en recorrer el parque. Explica tu respuesta.

Fig. 4.26. Identificación errónea de partes de partes realizada Brenda.

En la Tarea 8 en la que aborda la preposición “de” que permite la asociación con partes de partes, a través de un reparto, la mayoría responde de manera intuitiva, obteniendo una respuesta de reparto adecuada, sin embargo no se asocia a la multiplicación de fracciones y no se considera el todo para la respuesta. Se pretendía observar también, si alguno podía asociarlo a la división de fracciones, como primer acercamiento al inverso de la operación, dividiendo una fracción entre un entero ($\frac{6}{8} \div 4$) para obtener la respuesta, sin embargo eso no ocurrió. Sólo 2 de 41 logran expresar la respuesta con respecto al todo e identifican las partes de partes, pero no se asocia a la multiplicación de fracciones, (Fig. 4.27). Llama la atención la respuesta proporcionada por Rodrigo (Fig. 4.28), que en la segunda parte del problema en la que tenía que elegir la opción correcta, lo que hace es representar pictóricamente partes de partes de cada opción a elegir, lo que nos da cuenta de que él comprende el significado de dicha expresión.



Adriana compró una pizza grande hawaiana, la pizza estaba cortada en ocho partes, se sentó a ver la televisión y se comió dos rebanadas. En ese momento llegaron a visitarla 4 de sus viejos amigos. Ella repartió equitativamente lo que quedaba de la pizza entre sus amigos.

¿Qué fracción tenía que repartir? $\frac{6}{8}$

¿Qué fracción de pizza le correspondió a cada uno? $\frac{3}{16}$

Sombrea en el círculo en blanco, la cantidad de pizza que recibiría una persona.

¿Cuál es la expresión que define el problema?

a) $\frac{1}{8}$ de $\frac{6}{4}$

c) $\frac{6}{8}$ de $\frac{2}{4}$

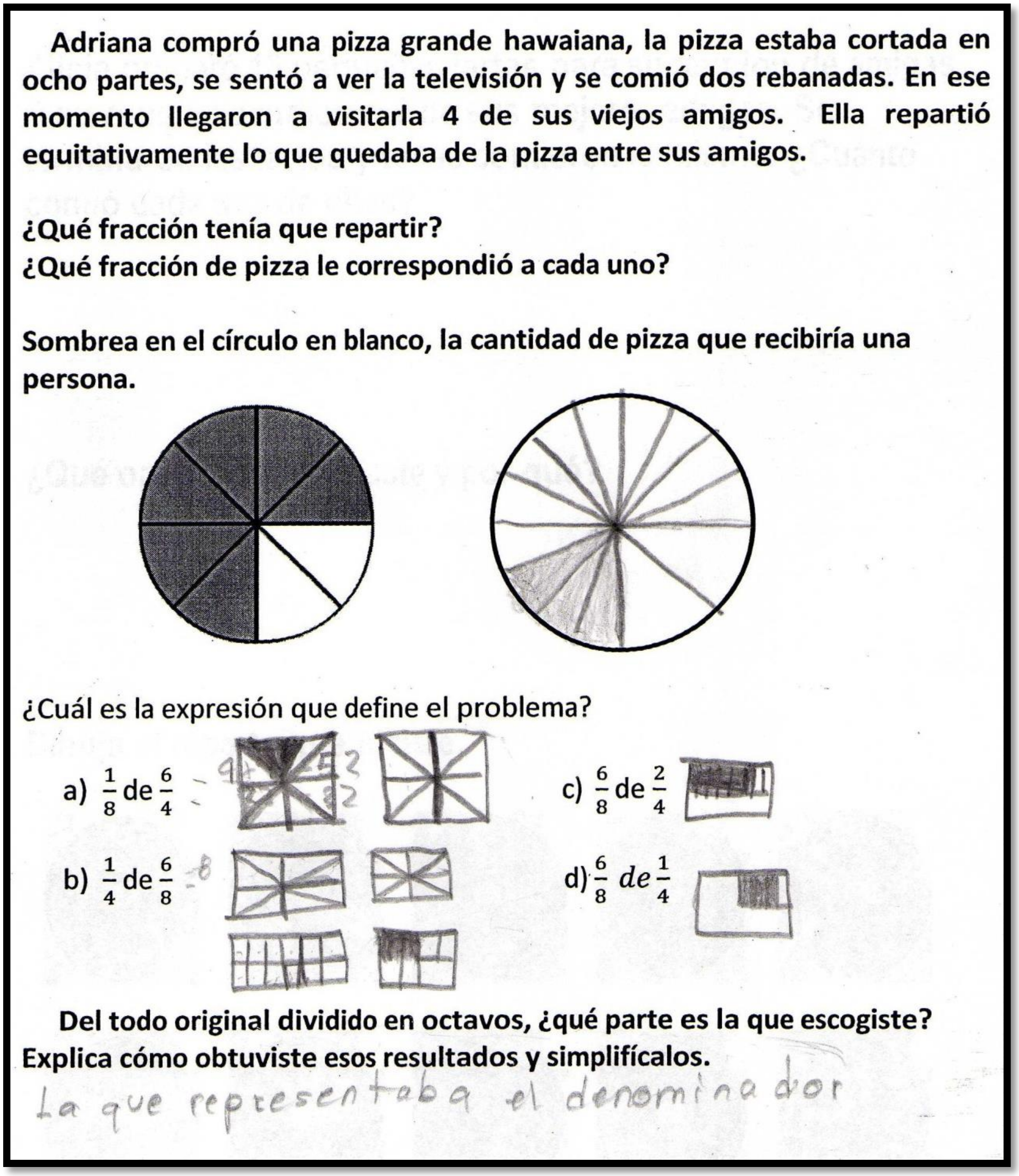
[✓] $\frac{1}{4}$ de $\frac{6}{8}$

d) $\frac{6}{8}$ de $\frac{1}{4}$

Del todo original dividido en octavos, ¿qué parte es la que escogiste? Explica cómo obtuviste esos resultados y simplifícalos.

$\frac{3}{16}$ porque se hace equivalente

Fig. 4.27. Identificación de partes de partes y preposición “de” realizada por Christian.



Adriana compró una pizza grande hawaiana, la pizza estaba cortada en ocho partes, se sentó a ver la televisión y se comió dos rebanadas. En ese momento llegaron a visitarla 4 de sus viejos amigos. Ella repartió equitativamente lo que quedaba de la pizza entre sus amigos.

¿Qué fracción tenía que repartir?
¿Qué fracción de pizza le correspondió a cada uno?

Sombrea en el círculo en blanco, la cantidad de pizza que recibiría una persona.

¿Cuál es la expresión que define el problema?

a) $\frac{1}{8}$ de $\frac{6}{4}$

b) $\frac{1}{4}$ de $\frac{6}{8}$

c) $\frac{6}{8}$ de $\frac{2}{4}$

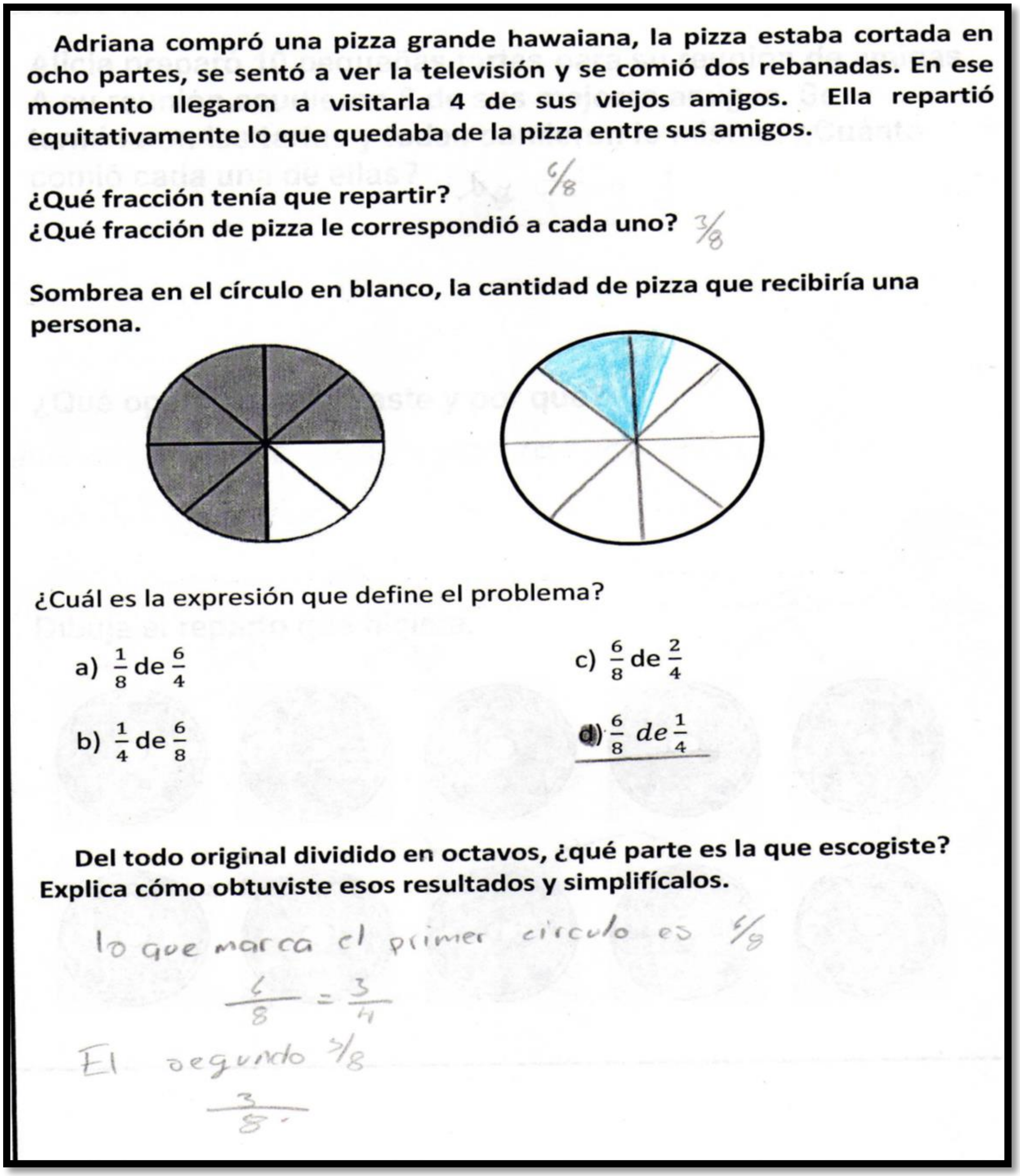
d) $\frac{6}{8}$ $de\,\frac{1}{4}$

Del todo original dividido en octavos, ¿qué parte es la que escogiste?
Explica cómo obtuviste esos resultados y simplifícalos.

La que representaba el denominador

Fig. 4.28. Representación realizada por Rodrigo representando partes de partes en cada opción.

Dentro de las dificultades identificadas se observa que pueden resolver pictóricamente de manera intuitiva, sin embargo no logran asociar a la preposición “de” (partes de partes), ni a la multiplicación de fracciones (Fig. 4.29). La mayoría de los que identificaron adecuadamente, su respuesta fue proporcionada en términos de rebanadas de pizza ($1\frac{1}{2}$). Ninguno asocia a la división.



Adriana compró una pizza grande hawaiana, la pizza estaba cortada en ocho partes, se sentó a ver la televisión y se comió dos rebanadas. En ese momento llegaron a visitarla 4 de sus viejos amigos. Ella repartió equitativamente lo que quedaba de la pizza entre sus amigos.

¿Qué fracción tenía que repartir? 6/8

¿Qué fracción de pizza le correspondió a cada uno? 3/8

Sombrea en el círculo en blanco, la cantidad de pizza que recibiría una persona.

¿Cuál es la expresión que define el problema?

a) $\frac{1}{8}$ de $\frac{6}{4}$

c) $\frac{6}{8}$ de $\frac{2}{4}$

b) $\frac{1}{4}$ de $\frac{6}{8}$

[✓ d) $\frac{6}{8}$ de $\frac{1}{4}$]

Del todo original dividido en octavos, ¿qué parte es la que escogiste? Explica cómo obtuviste esos resultados y simplifícalos.

lo que marca el primer circulo es 6/8

$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

El segundo 3/8

$\frac{3}{8}$.

Fig. 4.29. Identificación pictórica adecuada pero no se asocia con partes de partes, respuesta incorrecta proporcionada por Brenda.

4.1.3. Análisis de los resultados de las tareas de división de fracciones

A continuación realizaremos un análisis exhaustivo de las tareas de división de fracciones resueltas por los estudiantes. Remitiéndonos a la Tabla 4.3, podemos observar que las Tareas 9, 10 y 11 fueron contestadas con la siguiente frecuencia $\frac{21}{41}$, $\frac{19}{41}$ y $\frac{18}{41}$, respectivamente. Sin embargo, de esas respuestas, solo $\frac{5}{41}$, $\frac{4}{41}$ y $\frac{1}{41}$ son respuestas correctas. Del total de estudiantes, $\frac{14}{41}$ respondieron las tres tareas, $\frac{16}{41}$ no contestaron ninguna de las tareas, $\frac{6}{41}$ contestaron sólo dos tareas y $\frac{5}{41}$ contestaron sólo una tarea de división.

4.1.3.1. Análisis de la tarea de División partitiva

La Tarea 9 tiene como propósito observar las producciones y la interpretación que realizan de la división partitiva, determinar si logran establecer la relación multiplicativa que existe, partiendo de dos enteros que generen una fracción mediante la realización de un reparto equitativo y exhaustivo. El objetivo es extender el conocimiento que tienen de la división de enteros, a la interpretación de la división como una fracción, contribuyendo a la formación de significado y sentido de la división de fracciones y observar si el empleo de pictogramas facilita esta tarea.

Realizando un análisis de las respuestas proporcionadas por los estudiantes, establecimos de acuerdo a las regularidades observadas, categorías de análisis que se muestran en la Tabla 4.5.

Tabla 4.5. Categorías de análisis de la tarea de división partitiva

Categorías de análisis de la tarea 9 de división partitiva				
Categoría		Frecuencia	Número empleado en la solución	
			Fracción	natural
Aciertos	Reparto equitativo y exhaustivo Identificación de tamaño del agrupamiento	5 Correctas	3	2 Sin reparto
Errores	Reparto equitativo y exhaustivo pero se equivocan en la fracción.	3	3	
	Reparto equitativo no exhaustivo (no se agota el todo sobra 1) No se identifica el tamaño del agrupamiento	4	3	1
	No logra realizar un reparto equitativo ni exhaustivo. No se identifica tamaño del agrupamiento. (Respuesta incorrecta)	8	6	2
	Respuesta incorrecta sin reparto	1	1	

Realizando un análisis minucioso de la Tabla 4.5, podemos observar que de las respuestas proporcionadas sólo $\frac{5}{41}$ fueron acertadas, pero de ellas, $\frac{2}{41}$ son respuestas en decimal mediante una división de enteros y sólo $\frac{3}{41}$ con reparto equitativo y exhaustivo y respuesta en fracción. Se observa que $\frac{16}{41}$ estudiantes presentan dificultades, aunque la mayoría proporciona una respuesta en fracción y sólo $\frac{2}{41}$ proporcionan una respuesta en decimales. De esos 16 alumnos, $\frac{3}{41}$ logran realizar un reparto equitativo y exhaustivo, pero se equivocan en la fracción al proporcionar su respuesta, $\frac{4}{41}$ realizan un reparto equitativo pero no exhaustivo, no agotan el todo y por ello, no logran determinar el tamaño del agrupamiento y de los nueve restantes, ocho no logran realizar un reparto adecuado por lo que su respuesta es incorrecta y uno proporciona una respuesta en fracción incorrecta sin realizar reparto.

4.1.3.1.1. Categorías de análisis de la tarea 9 de División partitiva

Tomando como referencia la clasificación realizada por Vergnaud (1991), Ivars & Fernández (2016), este problema tendría la categoría de Isomorfismo de medida, determinando el número de objetos por grupo, como se muestra a continuación.

tartas	amigas
X	1
10	6

División partitiva

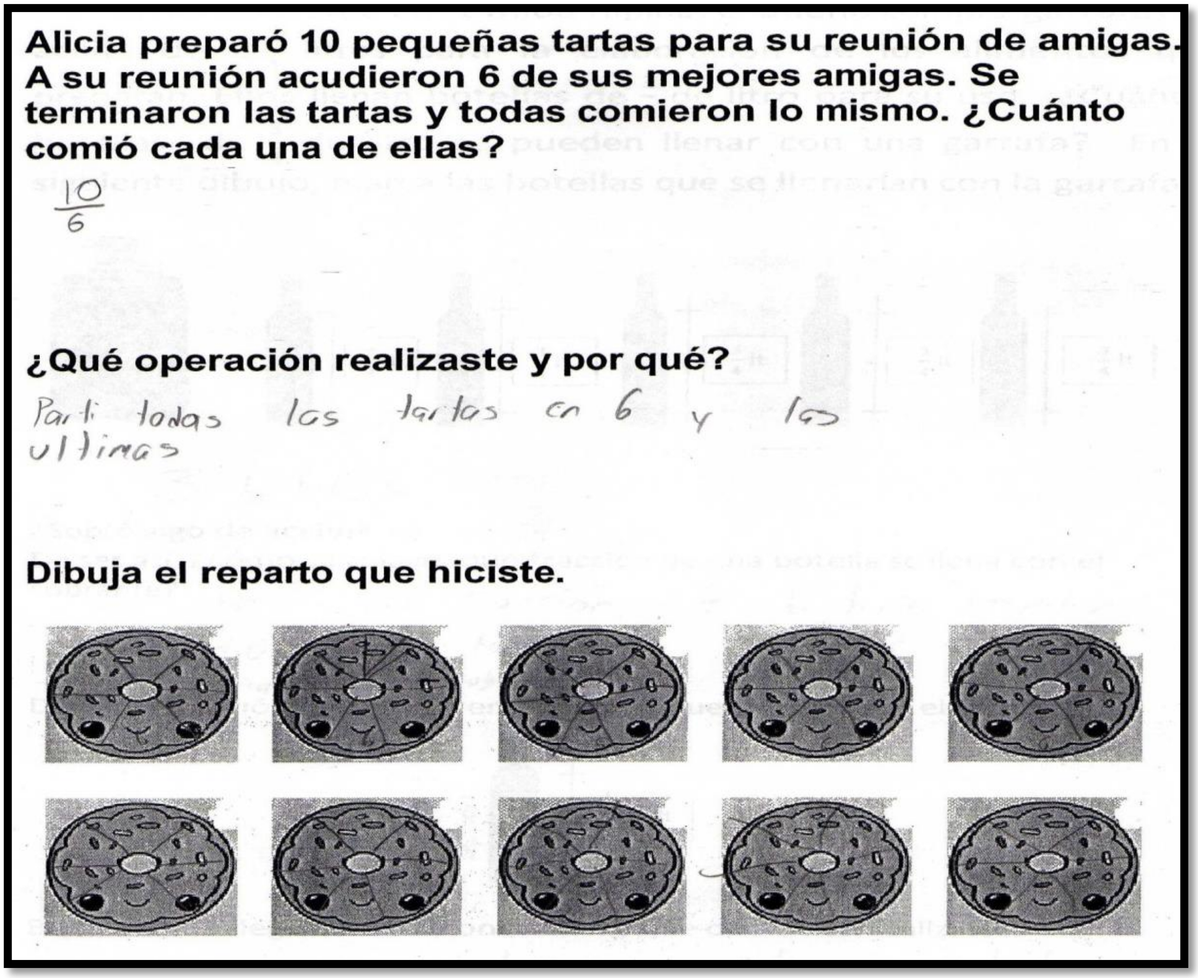
Por otro lado, considerando las categorías de Olguín (2009), de manera similar a lo que ocurre en la Tarea 1, se observan diversas estrategias de reparto que analizaremos y que se muestran en la categorización realizada.

A) Aciertos

1.- Realiza reparto equitativo y exhaustivo. Identifica tamaño del agrupamiento. No se asocia con la división de fracciones.

Christian, Sofía y Martha realizan un reparto equitativo y exhaustivo y proporcionan una respuesta en fracción. Logran identificar el tamaño del agrupamiento.

Christian proporciona su respuesta como cociente indicado (Fig. 4.30), lo que nos permite establecer en coincidencia con la Tarea 1, que un problema de reparto permite el acercamiento del estudiante a la división partitiva, coincidiendo con Kieren (1988), que sostiene que el significado de cociente está ligado a situaciones de reparto equitativo, y Fishbein at all (1985) y Flores (2014), quienes mencionan que existe una relación multiplicativa entre objetos y participantes del reparto. Esta respuesta además se asocia a la categoría *"Divide cada unidad en el mismo número de personas",* de Olguín (2009).



Alicia preparó 10 pequeñas tartas para su reunión de amigas. A su reunión acudieron 6 de sus mejores amigas. Se terminaron las tartas y todas comieron lo mismo. ¿Cuánto comió cada una de ellas?

$\frac{10}{6}$

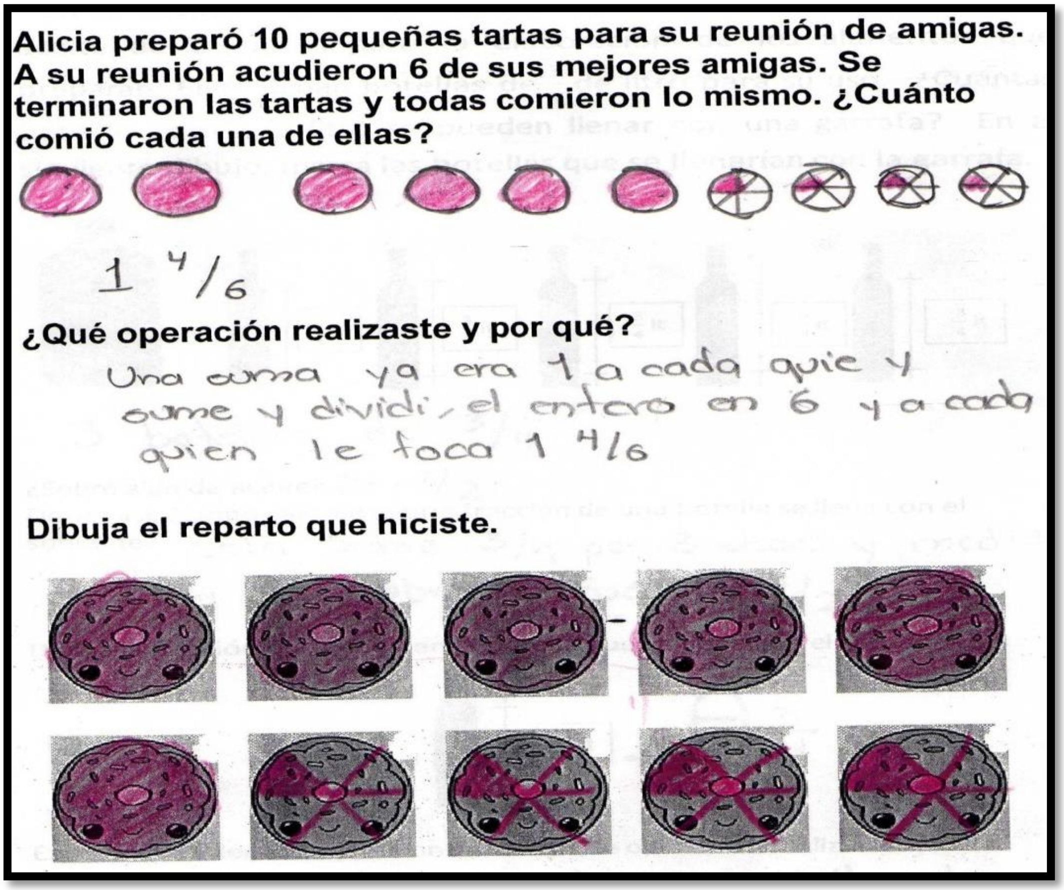
¿Qué operación realizaste y por qué?

Parti todas los tartas en 6 y los
ultimas

Dibuja el reparto que hiciste.

Fig. 4.30. División partitiva, reparto equitativo y exhaustivo realizado por Christian.

El reparto que realizan Sofía y Martha (Fig. 4.31 y 4.32), se asocia a la categoría de Olguín (2009), "*Reparte unidades a cada persona y lo que sobra lo divide en fracciones".* Llama la atención en sus respuestas la mención que hacen de las operaciones realizadas, en dónde destacamos que hablan de "dividir", refiriéndose a la acción de partir el entero y no tiene que ver con la operación dividir, para la cual no hay ninguna asociación, lo que hace evidente una carente interpretación del significado de la división. Sin embargo logran establecer una respuesta correcta de manera intuitiva apoyada en el reparto a través de pictogramas.



Alicia preparó 10 pequeñas tartas para su reunión de amigas. A su reunión acudieron 6 de sus mejores amigas. Se terminaron las tartas y todas comieron lo mismo. ¿Cuánto comió cada una de ellas?

1 4/6

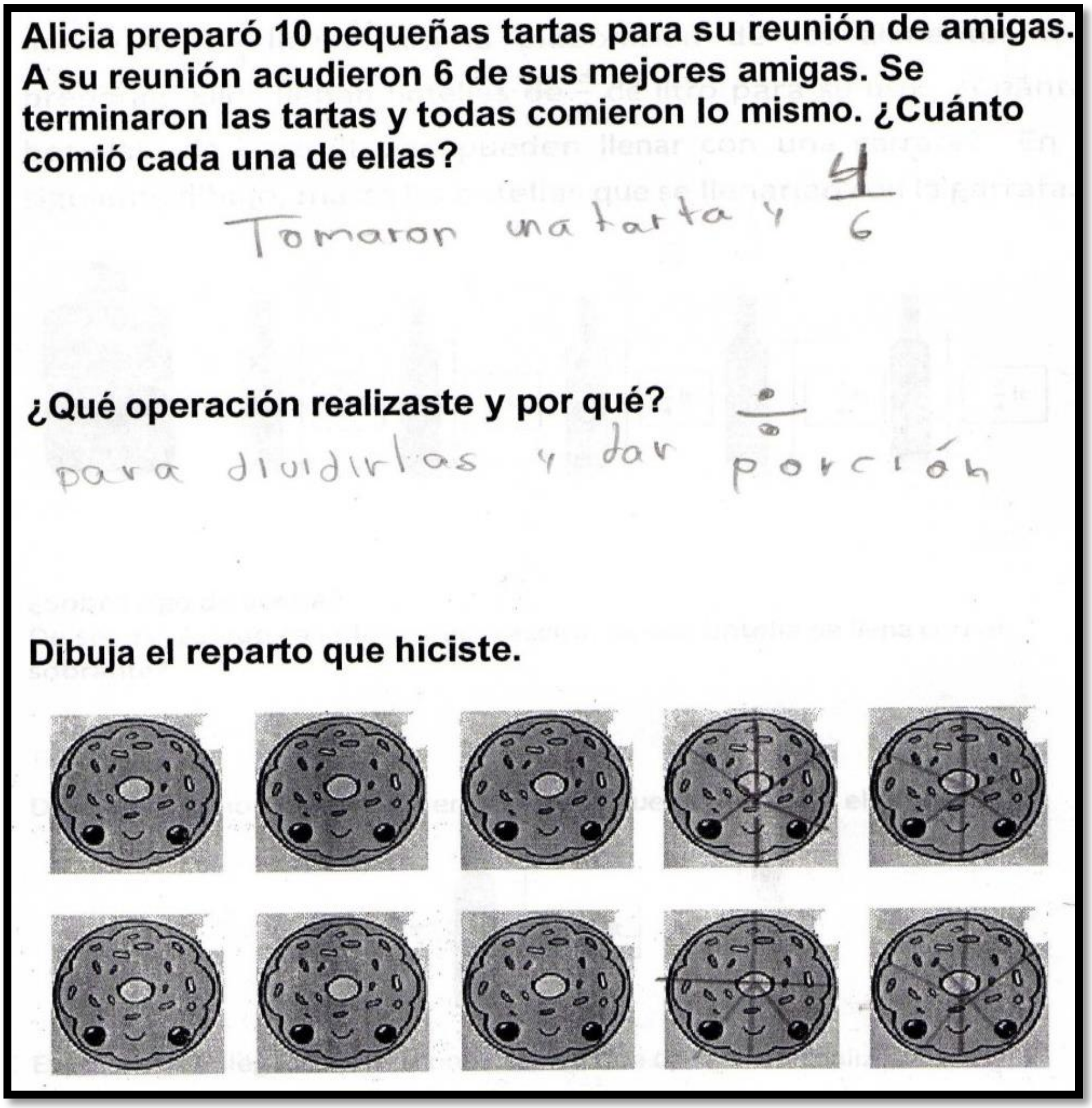
¿Qué operación realizaste y por qué?

Una suma ya era 1 a cada quie y sume y dividi, el entero en 6 y a cada quien le toca 1 4/6

Dibuja el reparto que hiciste.

Fig. 4.31. Reparto equitativo y exhaustivo realizado por Sofía.

Las respuestas proporcionadas por Christian, Martha y Sofía nos permiten establecer que ellos de manera intuitiva logran obtener el resultado adecuado de la división partitiva, en las que el uso del pictograma es de suma importancia, sin embargo no logran asociarla a la división de fracciones. En el caso concreto de Martha, hace mención de la operación de división a través de un símbolo aritmético, que no tiene nada que ver con la división y que al parecer asocia a subdividir el objeto.



Alicia preparó 10 pequeñas tartas para su reunión de amigas. A su reunión acudieron 6 de sus mejores amigas. Se terminaron las tartas y todas comieron lo mismo. ¿Cuánto comió cada una de ellas?

Tomaron una tarta y $\frac{4}{6}$

¿Qué operación realizaste y por qué? $\div$

para dividirlas y dar porción

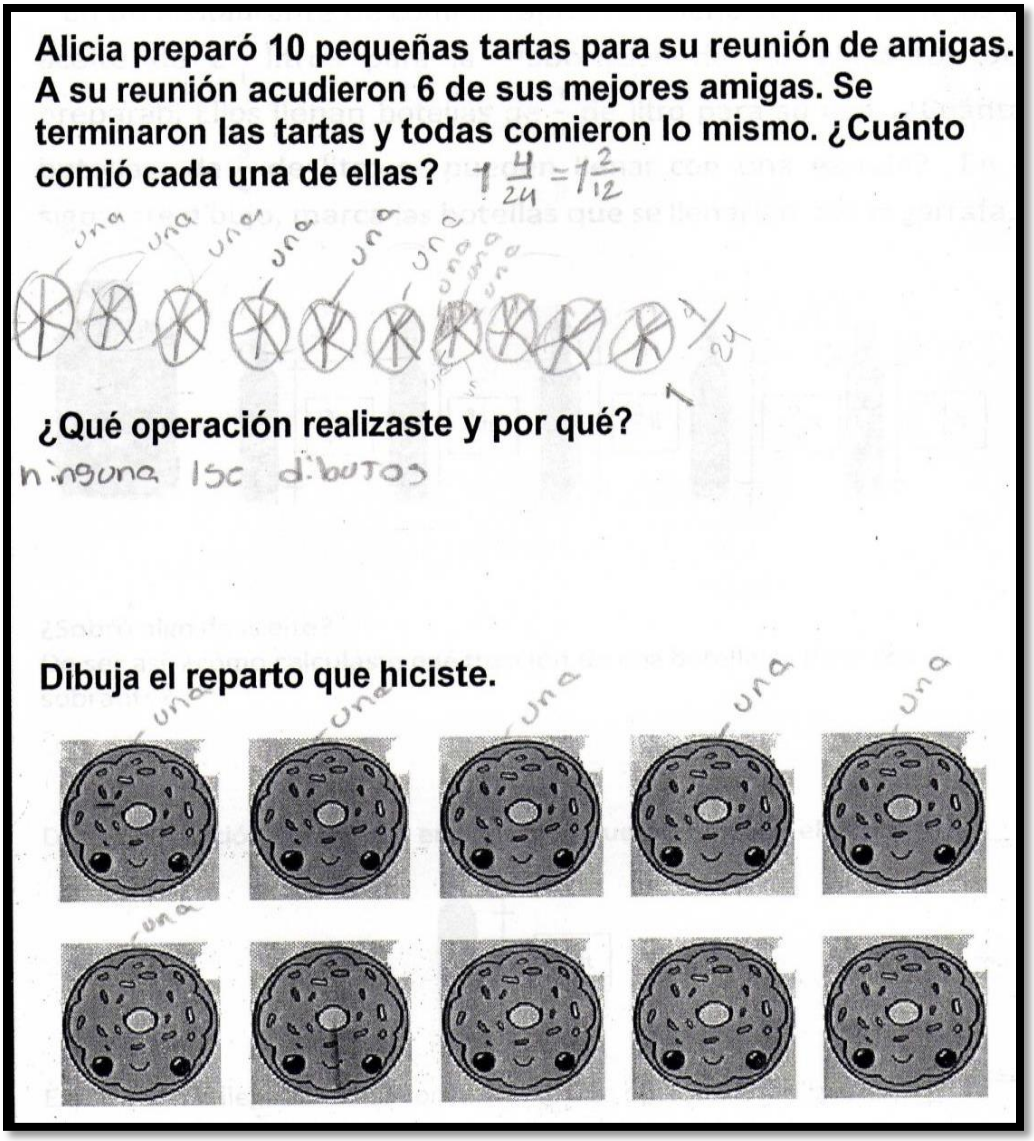
Dibuja el reparto que hiciste.

Fig. 4.32. Tarea resuelta por Martha.

B) Errores

1. **Realiza reparto equitativo y exhaustivo pero se equivoca en el resultado.**

Un ejemplo de esta dificultad se observa en la tarea resuelta por Monserrat (Fig. 4.33), ella logra realizar un reparto adecuado asociado a la categoría *"Divide cada unidad en el mismo número de personas",* de Olguín (2009), sin embargo se equivoca al proporcionar su respuesta en fracción. A pesar de haber realizado una subdivisión de cada objeto, reparte una unidad por persona y los cuatro sobrantes los reparte considerando adecuadamente el número de personas, sin embargo los considera una nueva unidad, que modifica a veinticuatroavos. Esto es evidencia de la dificultad que tiene para realizar el tránsito del pictograma al lenguaje aritmético, que probablemente se deba a la poca familiarización con tareas de reparto.



Alicia preparó 10 pequeñas tartas para su reunión de amigas. A su reunión acudieron 6 de sus mejores amigas. Se terminaron las tartas y todas comieron lo mismo. ¿Cuánto comió cada una de ellas? $1\frac{4}{24} = 1\frac{2}{12}$

¿Qué operación realizaste y por qué?

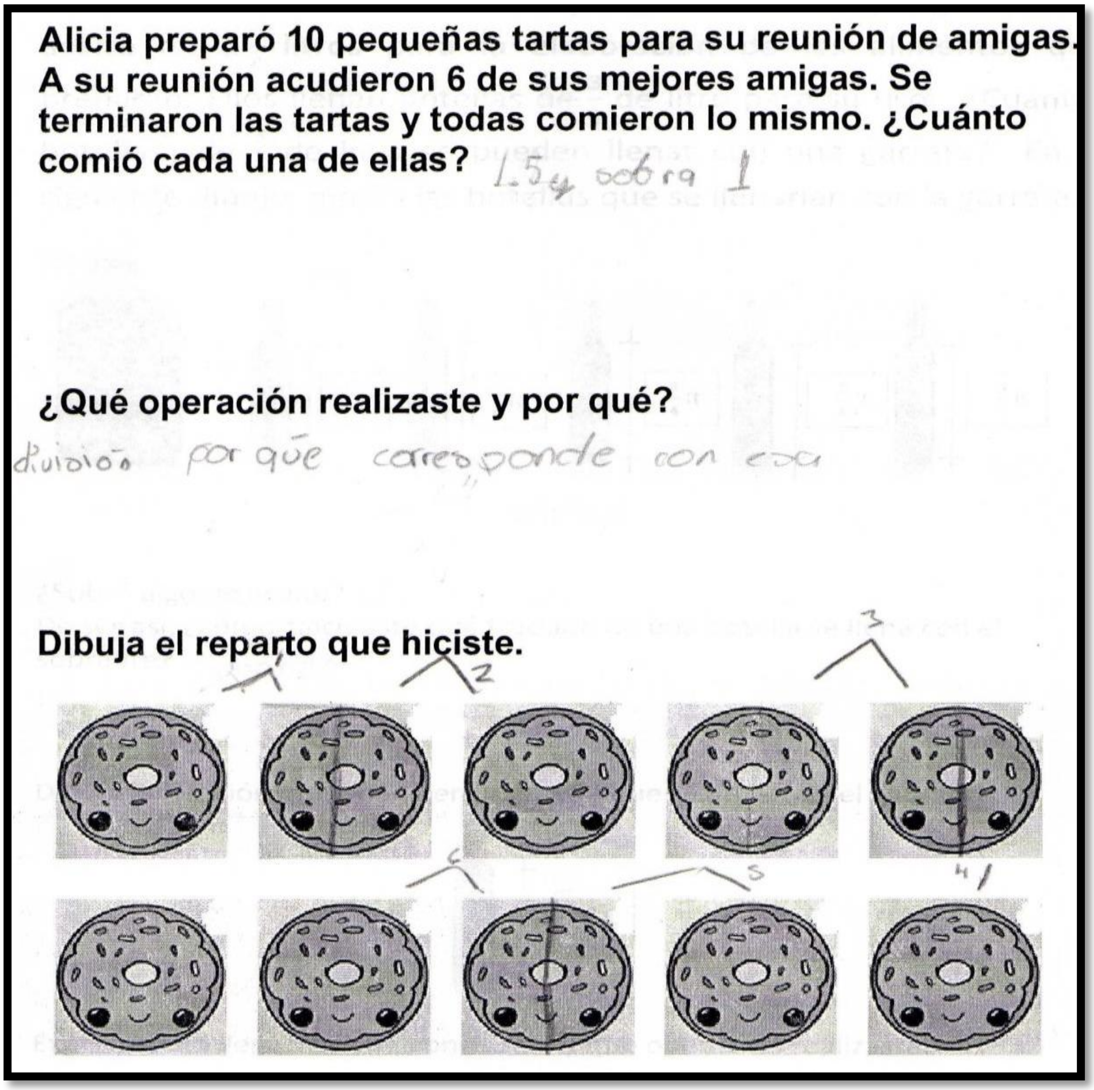
ninguna isc dibujos

Dibuja el reparto que hiciste.

Fig. 4.33. Reparto adecuado pero comete un error en la respuesta.

2. **Reparto equitativo no exhaustivo (no se agota el todo sobra un elemento). No se identifica el tamaño del agrupamiento.**

Un ejemplo de esta dificultad se presenta en la tarea resuelta por Brenda (Fig. 4.34). Ella reparte una tarta y la mitad de otra a cada persona y no agota el todo, por lo que le queda un sobrante y eso impide que logre determinar adecuadamente el tamaño del agrupamiento. Aunque la mayoría de los estudiantes que presentaron la misma dificultad presentaron su respuesta en fracción $(1\frac{1}{2})$, llama la atención que Brenda proporciona su respuesta en número decimal.



Alicia preparó 10 pequeñas tartas para su reunión de amigas. A su reunión acudieron 6 de sus mejores amigas. Se terminaron las tartas y todas comieron lo mismo. ¿Cuánto comió cada una de ellas? 1.5 y sobra 1

¿Qué operación realizaste y por qué?

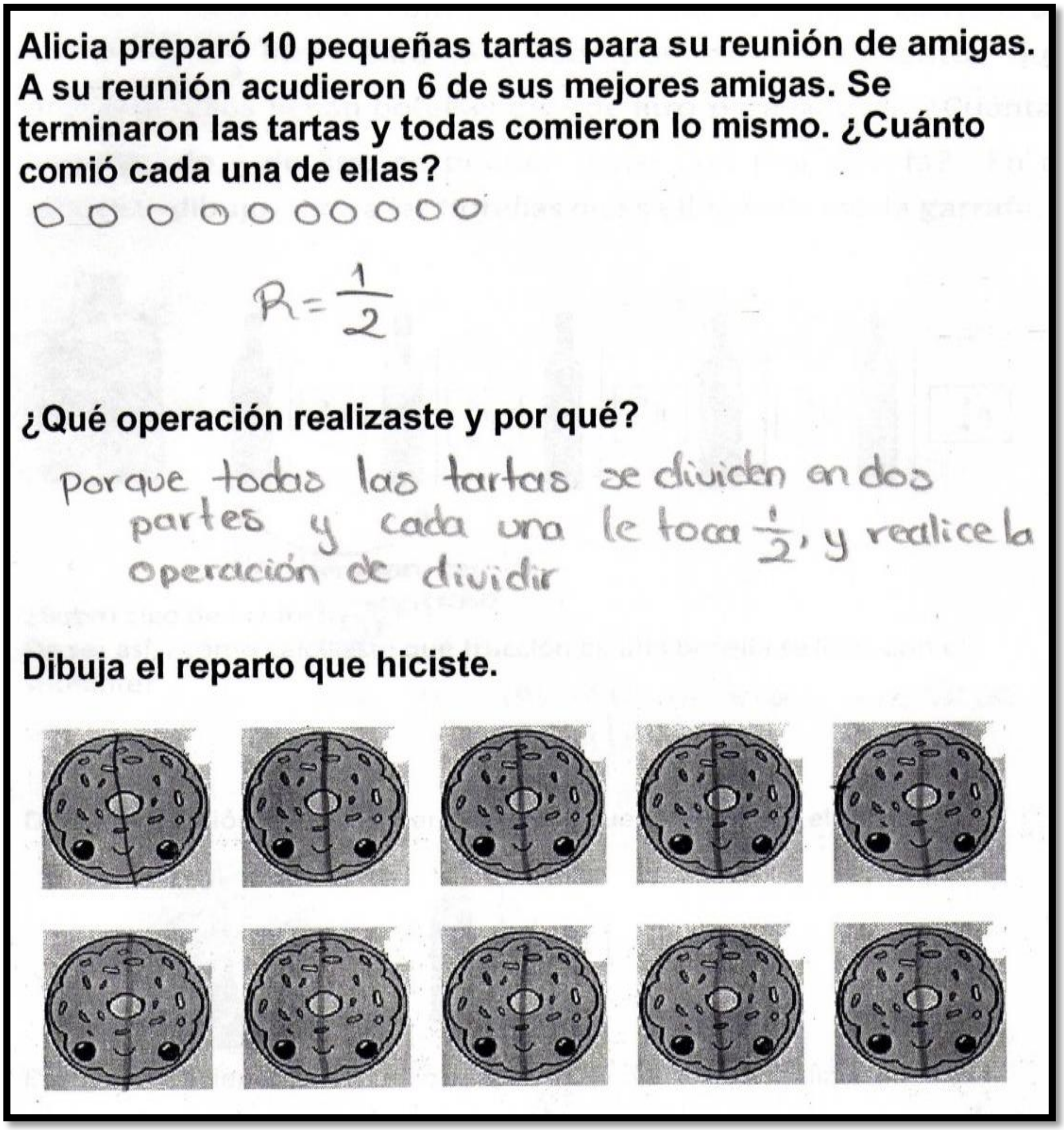
división por qûe corresponde con esa

Dibuja el reparto que hiciste.

Fig. 4.34. Reparto equitativo no exhaustivo. Tarea resuelta por Brenda.

3. **No logra realizar un reparto equitativo ni exhaustivo. No se identifica tamaño del agrupamiento.**

Un ejemplo de esta dificultad se observa en las tareas resueltas por Sandy (Fig. 4.35) y Fernando (Fig. 4.36), en dónde no se realiza un reparto adecuado. Sandy no logra resolver adecuadamente y sólo parte todo por la mitad, por lo que su respuesta es incorrecta, sin lograr establecer el tamaño del agrupamiento ni asociar a la división de fracciones. Sin embargo, menciona que la operación que realiza es división pero no hay evidencia, al parecer lo asocia a la partición.



Alicia preparó 10 pequeñas tartas para su reunión de amigas. A su reunión acudieron 6 de sus mejores amigas. Se terminaron las tartas y todas comieron lo mismo. ¿Cuánto comió cada una de ellas?

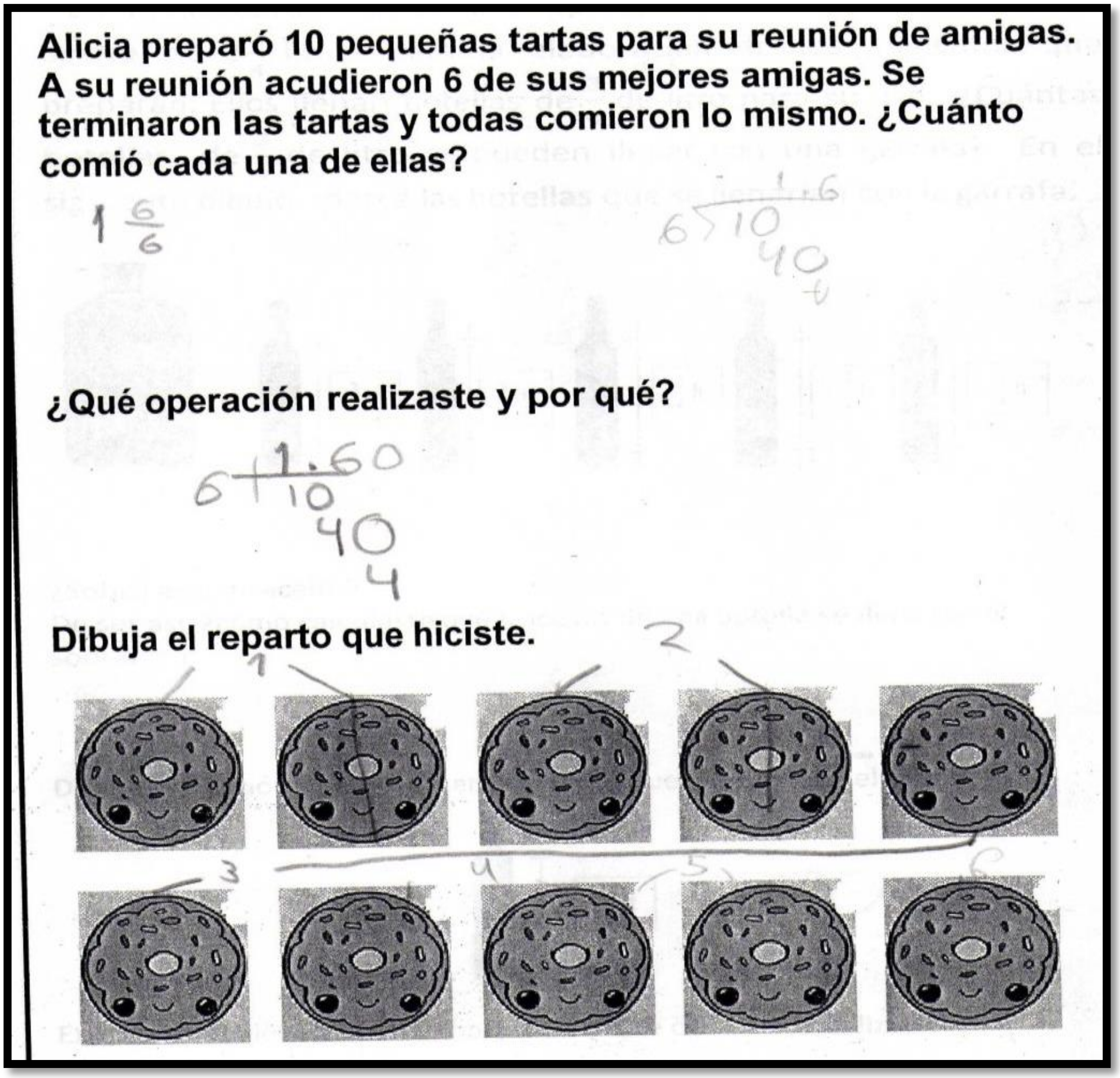
$R=\frac{1}{2}$

¿Qué operación realizaste y por qué?

porque todas las tartas se dividen en dos partes y cada una le toca $\frac{1}{2}$, y realice la operación de dividir

Dibuja el reparto que hiciste.

Fig. 4.35. Dificultades en la división partitiva. Reparto incorrecto. Tarea resuelta por Sandy.



Alicia preparó 10 pequeñas tartas para su reunión de amigas. A su reunión acudieron 6 de sus mejores amigas. Se terminaron las tartas y todas comieron lo mismo. ¿Cuánto comió cada una de ellas?

$1\frac{6}{6}$

1.6
6)10
40
4

¿Qué operación realizaste y por qué?

1.60
6)10
40
4

Dibuja el reparto que hiciste.

Fig. 4.36. Dificultades en la división partitiva, tarea resuelta por Fernando.

En la tarea resuelta por Fernando, se observa además de la dificultad para realizar reparto exhaustivo, error en la presentación de su respuesta, esto de acuerdo a Duval, citado por Sánchez (2012) se interpreta como una dificultad para convertir de decimal a fracción ya que se observa que iguala el resultado de la división a una fracción de manera incorrecta (1.6 = $1\frac{6}{6}$) y esto no concuerda con el resultado de su operación. Esto además nos indica que Fernando tiene dificultades en la construcción numérica debido a que no identifica que $\frac{6}{6}$ equivale a un entero, por lo que su respuesta tendría que ser 2.

4.1.3.2. Análisis de las tareas de división cuotativa

Las Tareas 10 y 11 tienen como propósito observar la manera en que los estudiantes interpretan el problema de división cuotativa o de medida, si consiguen establecer el número de agrupamientos mediante una solución pictórica y la relación multiplicativa que existe, si logran identificar el residuo y de qué manera lo interpretan y si emplean el algoritmo de la división de fracciones.

Basados en la clasificación realizada por Vergnaud (1991), Ivars & Fernández (2016), este problema tendría la categoría de Isomorfismo de medida, determinando el número de grupos, como se muestra a continuación.

botellas	Cantidad de aceite (lts)
1	$\frac{3}{4}$
X	$2\frac{3}{4}$

División cuotativa

4.1.3.2.1. Categorías de análisis de la División cuotativa

Partiendo de las estrategias empleadas por los estudiantes en la resolución de las tareas de división cuotativa del cuestionario inicial de exploración y de las regularidades encontradas, la autora de la presente tesis, plantea la siguiente lista de categorías de análisis en la solución de problemas de división de fracciones, inspirados en el trabajo realizado por Vergnaud (1991), Ivars & Fernández (2016), Nillas (2003), las cuales se muestran en la Tabla 4.6. Estas categorías son válidas para ambas Tareas, 10 y 11.

Tabla 4.6. Categorías establecidas en la solución de las tareas 10 y 11 de división cuotativa

Categorías de solución de las tareas 10 y 11 de división cuotativa			
Categoría		**Frecuencia**	
		Tarea 10	**Tarea 11**
Aciertos	Identifica el número de agrupamientos, identifica residuo pero no se proporciona en función del divisor.	3	1
	- Empleo de suma iterada	1	
Errores	Identifica número de agrupamientos. Identifica residuo pero es incorrecto.		5
	- Empleo de suma iterada	0	1
	Identifica número de agrupamientos. No se identifica residuo. (no lo proporciona o menciona que no sobra)	7	5
	- Empleo de suma iterada	1	
	No identifica número de agrupamientos ni residuo.	7	6

De acuerdo a lo mostrado en la Tabla 4.6 podemos observar de las estrategias empleadas por los estudiantes en la resolución de dichas tareas, que de la tarea 10 sólo $\frac{4}{41}$ respuestas se consideran correctas porque identifican adecuadamente el número de agrupamientos e identifican un residuo adecuado pero no lo proporcionan en función del divisor (reunitización), de esos 4 sólo uno menciona el empleo de suma iterada para su solución. Dentro de las 15 respuestas consideradas incorrectas, $\frac{8}{41}$ logran identificar el número de agrupamientos pero no identifican el residuo, ya sea que no lo proporcionan o consideran que no sobra nada y sólo uno menciona el empleo de suma iterada también, los $\frac{7}{41}$ restantes no identifican ni agrupamientos ni residuo**.**

De la Tarea 11 sólo $\frac{1}{41}$ respuesta es considerada correcta porque identifica adecuadamente el número de agrupamientos e identifica un residuo adecuado pero no lo proporciona en función del divisor.

Dentro de las $\frac{17}{41}$ respuestas consideradas incorrectas, $\frac{6}{41}$ logran identificar número de agrupamientos e identifican un residuo pero es incorrecto, de ellos uno menciona el uso de suma iterada; $\frac{5}{41}$ identifican el número de agrupamientos pero no logran identificar el residuo (algunos sólo mencionan que sobra pero no lo proporcionan) y las $\frac{6}{41}$ restantes no identifican ni **a**grupamientos ni residuo**.**

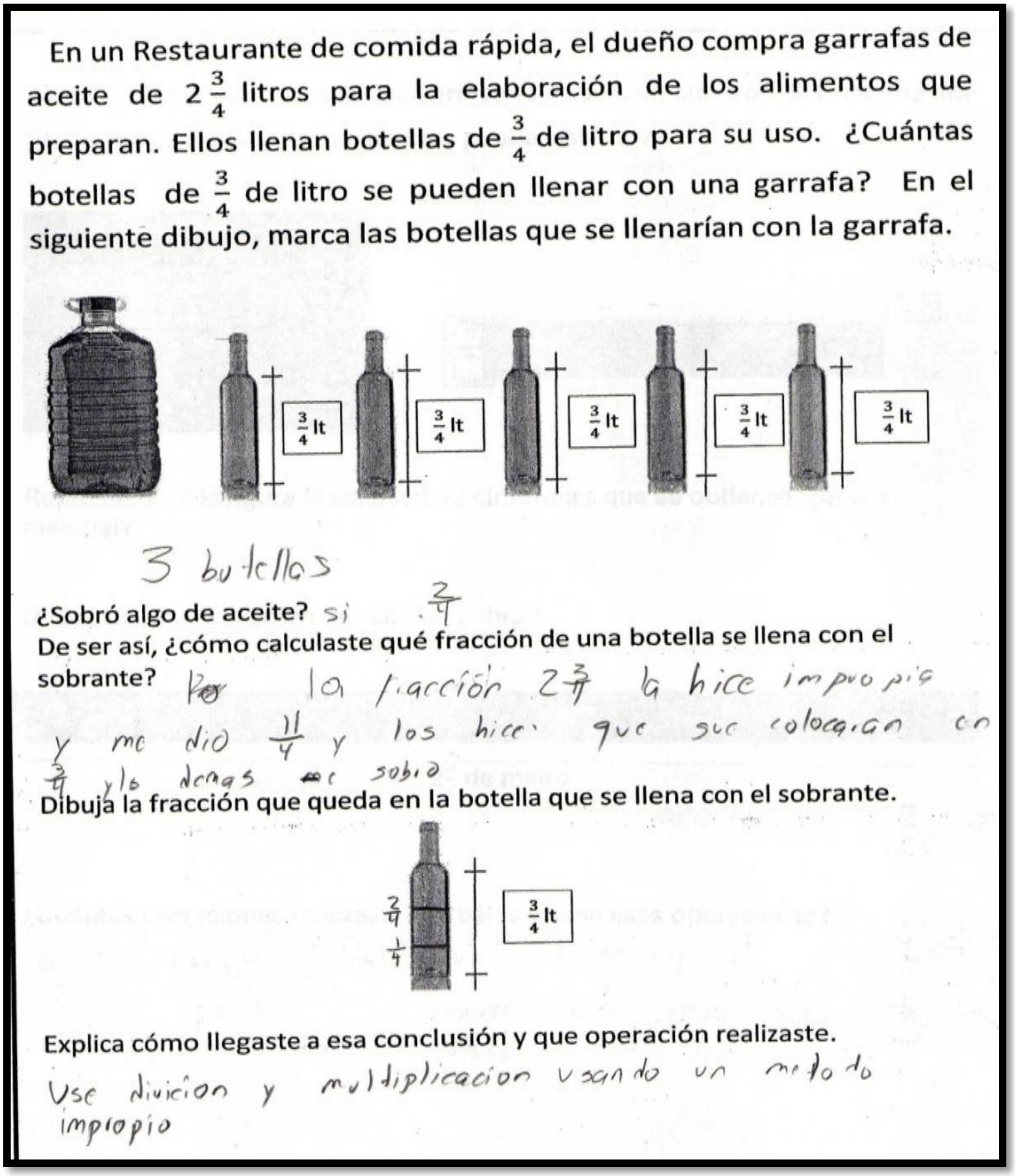
4.1.3.2.2. Categorías de análisis de la tarea 10 de División cuotativa

Un ejemplo de las estrategias empleadas por los estudiantes, que nos permitieron establecer las categorías, se muestran a continuación.

A) ACIERTOS

1. **Identifica el número de agrupamientos, identifica residuo pero no se proporciona en función del divisor. No se asocia con la división de fracciones.**

En cuanto a la división cuotativa, Tarea 10, Christian, Diego, Sherlin y Sofía, que se identifican como los niños más aventajados del grupo, logran identificar el número adecuado de repetición del volumen de aceite (número de agrupamientos), se identifica que hay un sobrante de $\frac{1}{2}$, el cual no se expresa en función del divisor, nadie indica la fracción de la botella que se llena con el sobrante y nadie escribe la magnitud. No se asocia el problema con la división de fracciones, por lo que el problema queda inconcluso. Un ejemplo de ello se muestra en la tarea resuelta por Christian (Fig. 4.37). Aunque no se expresa directamente, se hace alusión a la suma iterativa como método de solución en la tarea resuelta por Sofía (Fig. 4.38). Esto nos proporciona evidencia de que los alumnos de manera intuitiva pueden llegar a la solución de una división de fracciones empleando pictogramas y sin el uso de algoritmos.



En un Restaurante de comida rápida, el dueño compra garrafas de aceite de $2\frac{3}{4}$ litros para la elaboración de los alimentos que preparan. Ellos llenan botellas de $\frac{3}{4}$ de litro para su uso. ¿Cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ de litro se pueden llenar con una garrafa? En el siguiente dibujo, marca las botellas que se llenarían con la garrafa.

3 botellas

¿Sobró algo de aceite? si $\frac{2}{4}$

De ser así, ¿cómo calculaste qué fracción de una botella se llena con el sobrante? ~~Po~~ la fracción $2\frac{3}{4}$ la hice impropia y me dio $\frac{11}{4}$ y los hice que se colocaran en $\frac{3}{4}$ y lo demas me sobio

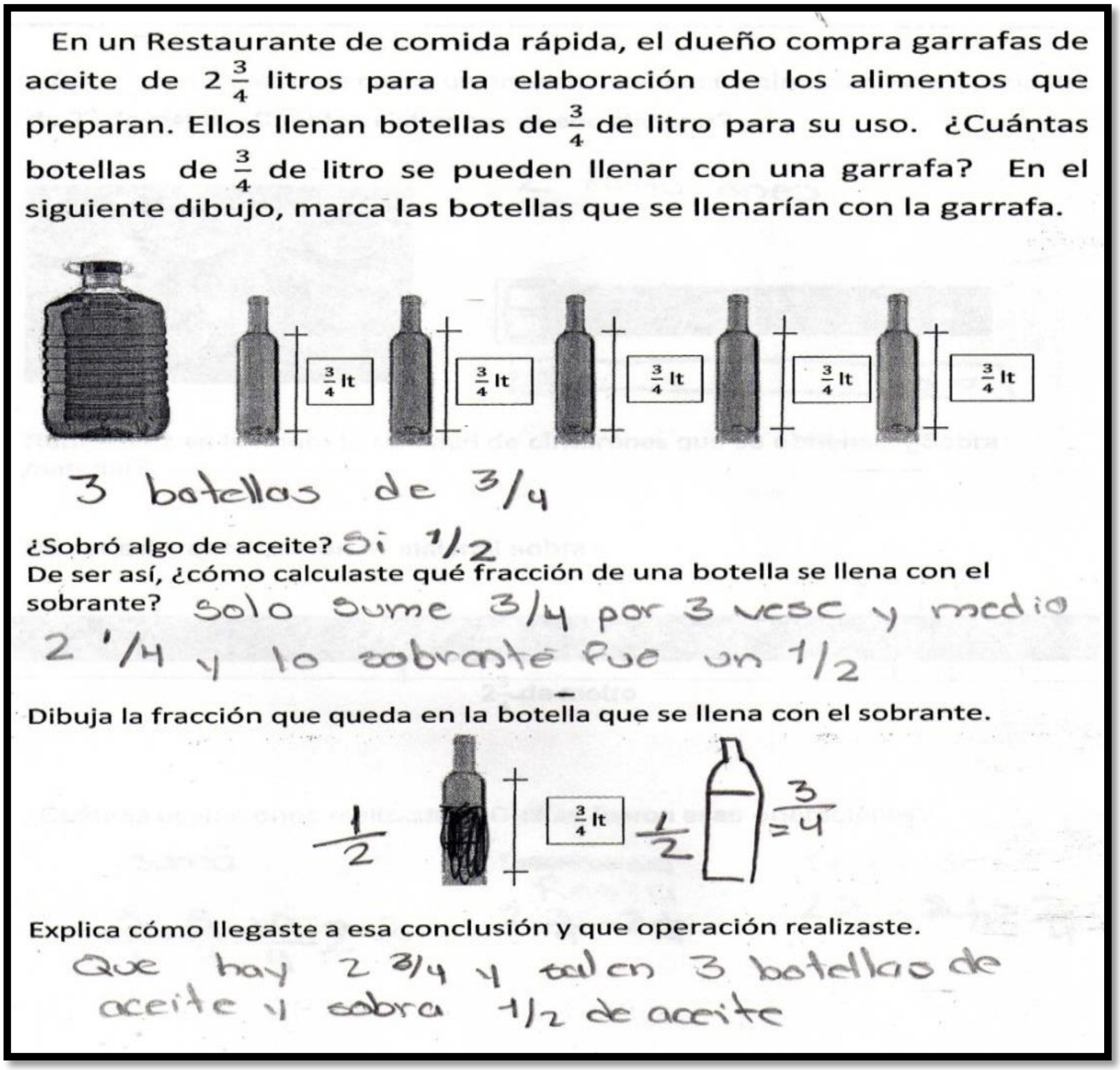
Dibuja la fracción que queda en la botella que se llena con el sobrante.

Explica cómo llegaste a esa conclusión y que operación realizaste.

Use divicion y multiplicacion usando un metodo impropio

Fig. 4.37. Correcta identificación de número de agrupamientos en la división cuotativa.

a) Empleo de suma iterada.



En un Restaurante de comida rápida, el dueño compra garrafas de aceite de $2\frac{3}{4}$ litros para la elaboración de los alimentos que preparan. Ellos llenan botellas de $\frac{3}{4}$ de litro para su uso. ¿Cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ de litro se pueden llenar con una garrafa? En el siguiente dibujo, marca las botellas que se llenarían con la garrafa.

3 botellas de 3/4

¿Sobró algo de aceite? Si 1/2

De ser así, ¿cómo calculaste qué fracción de una botella se llena con el sobrante? solo sume 3/4 por 3 vesc y medio 2 1/4 y lo sobrante fue un 1/2

Dibuja la fracción que queda en la botella que se llena con el sobrante.

Explica cómo llegaste a esa conclusión y que operación realizaste.

Que hay 2 3/4 y salen 3 botellas de aceite y sobra 1/2 de aceite

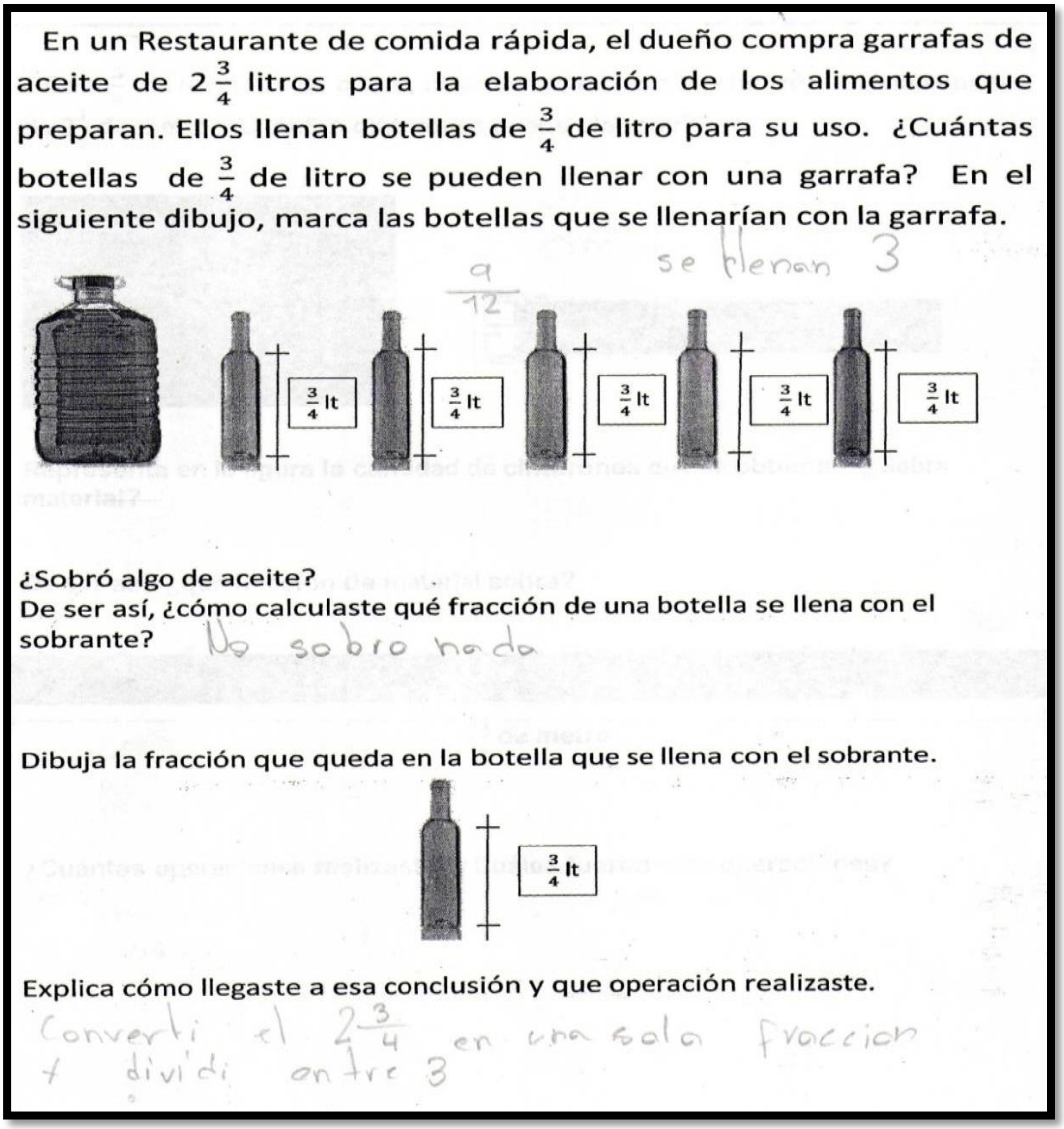
Fig. 4.38. Alusión al uso de suma iterada para la solución de división cuotativa. Tarea resuelta por Sofía.

B) ERRORES

1. Identifica número de agrupamientos. No se identifica residuo.

Brenda, Valeria y César mencionan la respuesta correcta a la primera parte del problema, logran identificar el número adecuado de repetición del volumen de aceite (número de agrupamientos), pero no identifican sobrante.

César identifica adecuadamente el número de agrupamientos (Fig. 4.39), sin embargo no logra identificar que hay un sobrante. Menciona la conversión de fracción mixta a impropia y el empleo de una división. Este sería el primer acercamiento al empleo de la división de fracciones, sin embargo no hay evidencia de alguna operación que confirme su realización.



En un Restaurante de comida rápida, el dueño compra garrafas de aceite de $2\frac{3}{4}$ litros para la elaboración de los alimentos que preparan. Ellos llenan botellas de $\frac{3}{4}$ de litro para su uso. ¿Cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ de litro se pueden llenar con una garrafa? En el siguiente dibujo, marca las botellas que se llenarían con la garrafa.

$\frac{9}{12}$

se llenan 3

¿Sobró algo de aceite?
De ser así, ¿cómo calculaste qué fracción de una botella se llena con el sobrante? No sobro nada

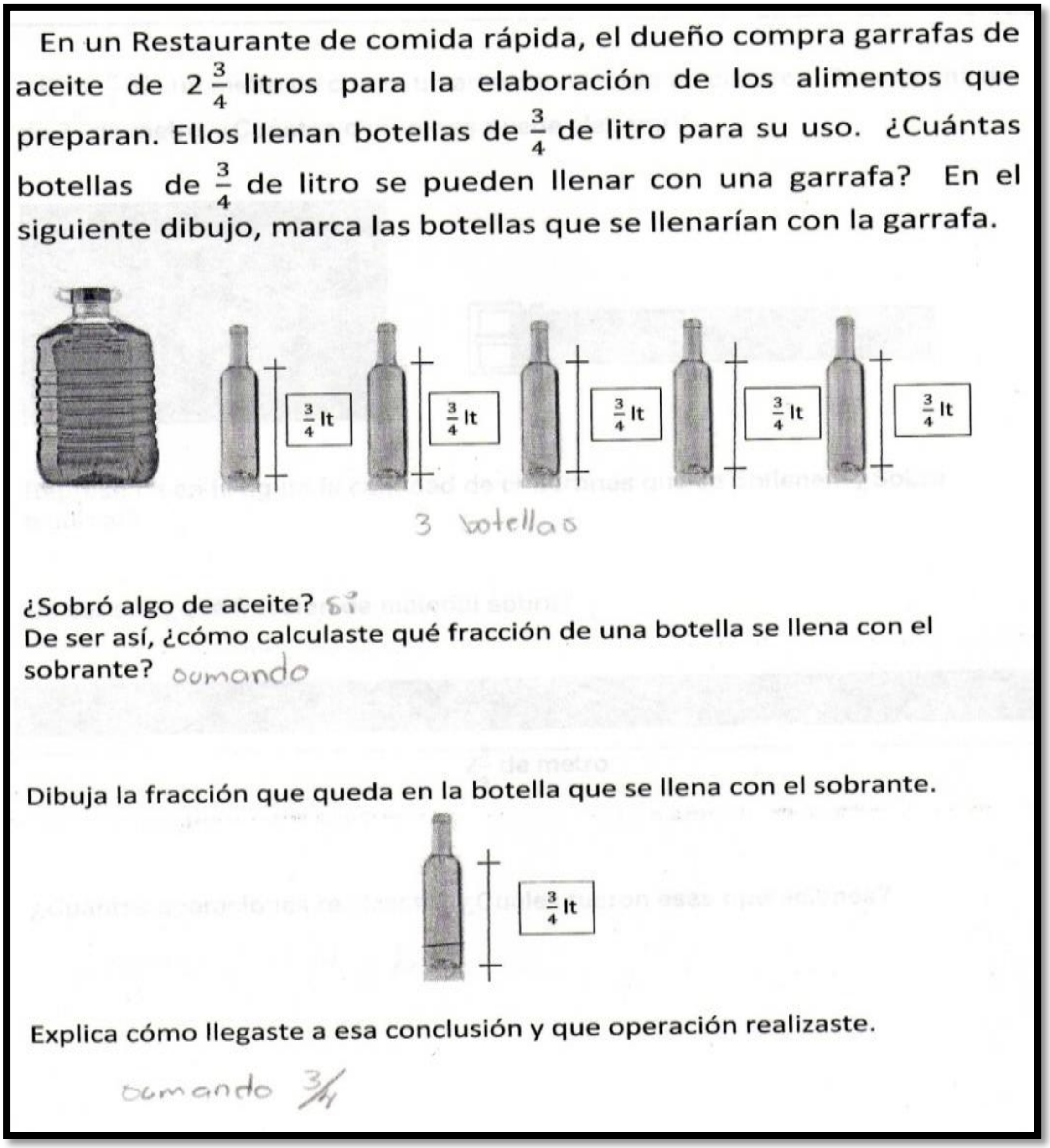
Dibuja la fracción que queda en la botella que se llena con el sobrante.

Explica cómo llegaste a esa conclusión y que operación realizaste.

Converti el $2\frac{3}{4}$ en una sola fraccion y dividi entre 3

Fig. 4.39. Identificación de agrupamientos, no se identifica residuo. Tarea resuelta por César.

Brenda también logra identificar el número de agrupamientos, menciona que hay un residuo pero no lo identifica (Fig. 4.40). Llama la atención que expresa el uso de suma iterada en su solución.



En un Restaurante de comida rápida, el dueño compra garrafas de aceite de $2\frac{3}{4}$ litros para la elaboración de los alimentos que preparan. Ellos llenan botellas de $\frac{3}{4}$ de litro para su uso. ¿Cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ de litro se pueden llenar con una garrafa? En el siguiente dibujo, marca las botellas que se llenarían con la garrafa.

3 botellas

¿Sobró algo de aceite? Sí

De ser así, ¿cómo calculaste qué fracción de una botella se llena con el sobrante? sumando

Dibuja la fracción que queda en la botella que se llena con el sobrante.

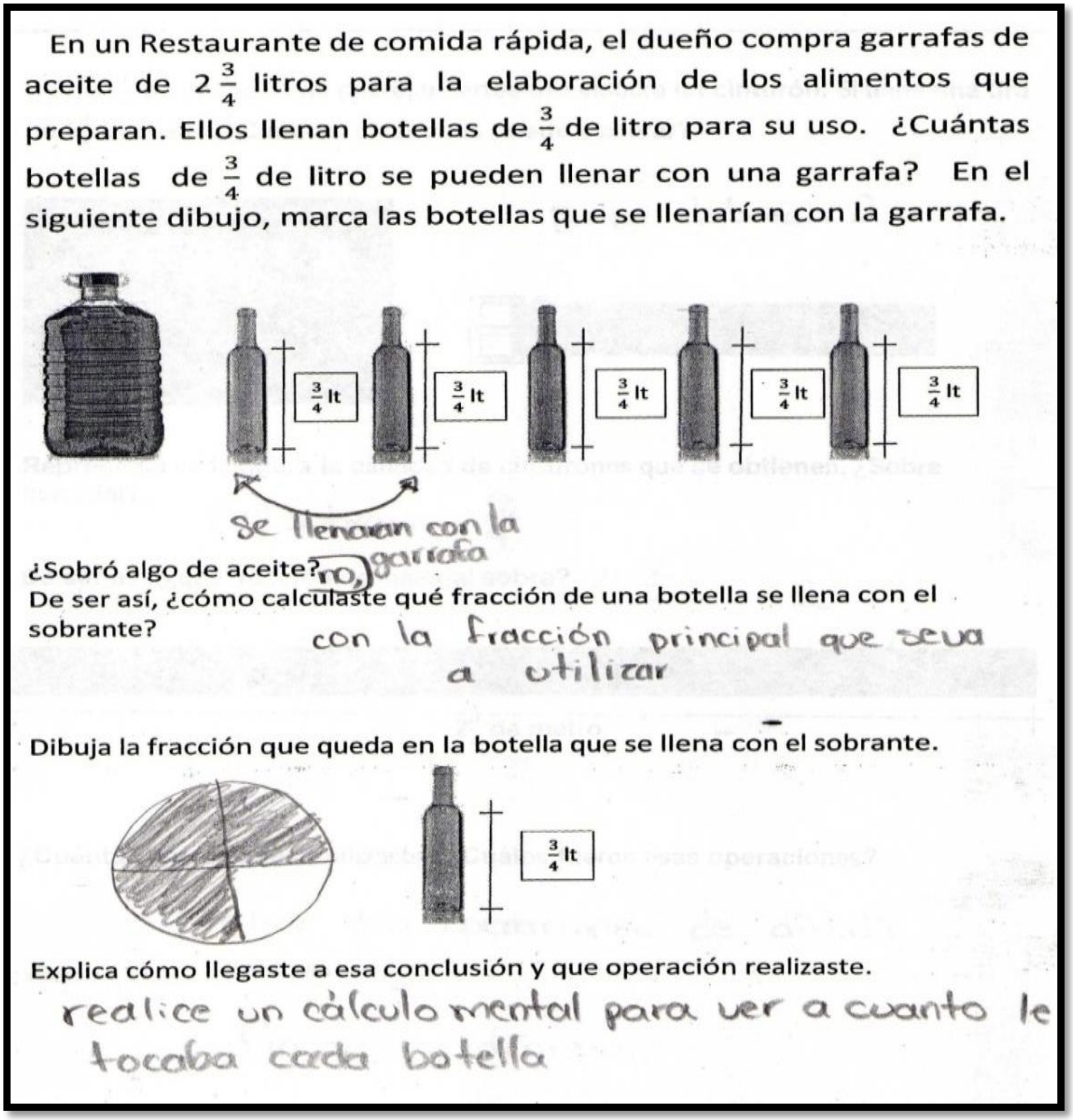
Explica cómo llegaste a esa conclusión y que operación realizaste.

sumando 3/4

Fig. 4.40. División cuotativa, no se identifica residuo. Menciona uso de suma iterada. Tarea resuelta por Brenda.

2. No identifica número de agrupamientos ni residuo.

Sandy y Michel proporcionan una respuesta errónea. De acuerdo con los datos del problema, es probable que Sandy al intentar resolver el problema sólo considerara la parte entera y por eso determina que sólo dos botellas se llenan y el resto de la fracción lo considere el sobrante, aunque no se percata que el sobrante puede llenar otra botella (Fig. 4.41). Requiere de una representación circular para indicar el sobrante. No logra identificar número de agrupamientos ni residuo.



En un Restaurante de comida rápida, el dueño compra garrafas de aceite de $2\frac{3}{4}$ litros para la elaboración de los alimentos que preparan. Ellos llenan botellas de $\frac{3}{4}$ de litro para su uso. ¿Cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ de litro se pueden llenar con una garrafa? En el siguiente dibujo, marca las botellas qué se llenarían con la garrafa.

se llenaran con la garrafa

¿Sobró algo de aceite? no,

De ser así, ¿cómo calculaste qué fracción de una botella se llena con el sobrante?

con la fracción principal que seva a utilizar

Dibuja la fracción que queda en la botella que se llena con el sobrante.

Explica cómo llegaste a esa conclusión y que operación realizaste.

realice un cálculo mental para ver a cuanto le tocaba cada botella

Fig. 4.41. No se identifica número de agrupamientos ni residuo. Tarea resuelta por Sandy.

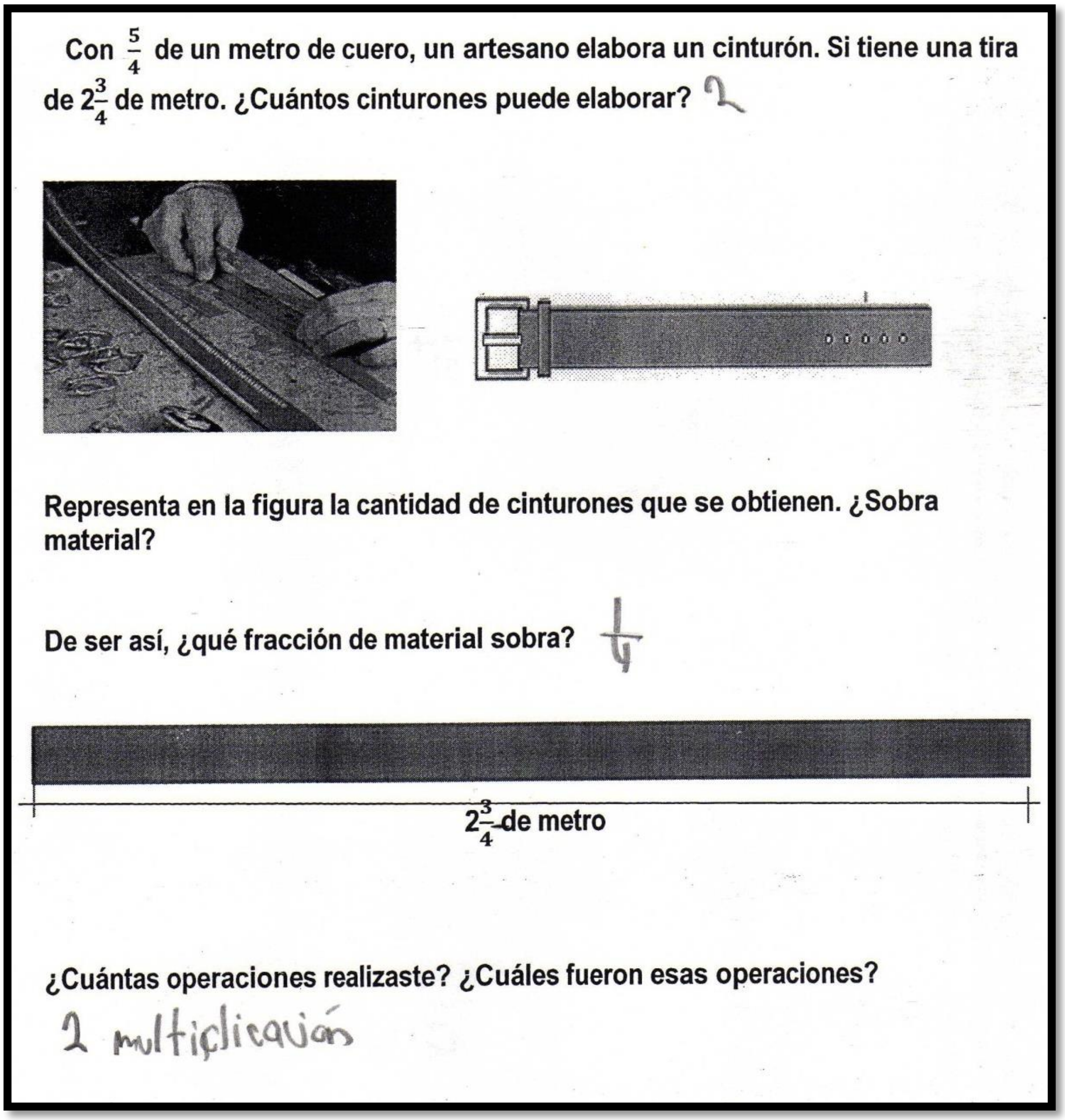
4.1.3.2.3. Categorías de análisis de la tarea 11 de División cuotativa

En lo que respecta a la Tarea 11, de los resultados obtenidos y empleando las mismas categorías de análisis se presenta la siguiente clasificación.

A) ACIERTOS

1. Identifica el número de agrupamientos, identifica residuo pero no se proporciona en función del divisor. No se asocia con la división de fracciones.

En la Tarea 11 solamente el estudiante Diego, pudo identificar adecuadamente el número de agrupamientos y el residuo, aunque no lo proporciona en función del divisor (Fig. 4.42). No lo asocia a la división de fracciones y menciona haber realizado dos multiplicaciones, aunque no hay evidencia de ello.



Con $\frac{5}{4}$ de un metro de cuero, un artesano elabora un cinturón. Si tiene una tira de $2\frac{3}{4}$ de metro. ¿Cuántos cinturones puede elaborar? 2

Representa en la figura la cantidad de cinturones que se obtienen. ¿Sobra material?

De ser así, ¿qué fracción de material sobra? $\frac{1}{4}$

$2\frac{3}{4}$ de metro

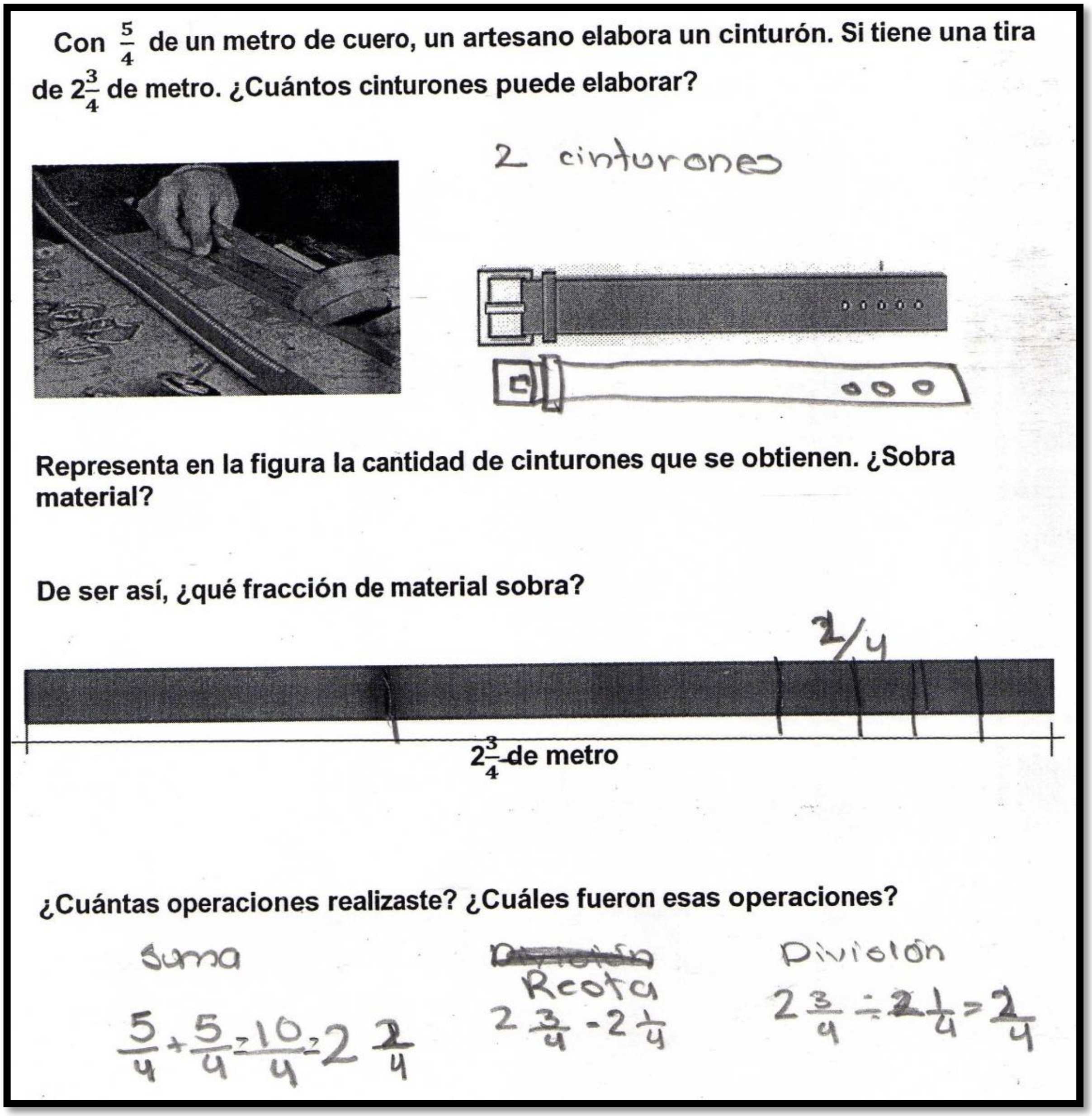
¿Cuántas operaciones realizaste? ¿Cuáles fueron esas operaciones?

2 multiplicación

Fig. 4.42. Identificación adecuada de número de agrupamientos y residuo. Tarea resuelta por Diego.

C) ERRORES

1. Identifica número de grupos. Identifica residuo pero es incorrecto.



Con $\frac{5}{4}$ de un metro de cuero, un artesano elabora un cinturón. Si tiene una tira de $2\frac{3}{4}$ de metro. ¿Cuántos cinturones puede elaborar?

2 cinturones

Representa en la figura la cantidad de cinturones que se obtienen. ¿Sobra material?

De ser así, ¿qué fracción de material sobra?

2/4

$2\frac{3}{4}$ de metro

¿Cuántas operaciones realizaste? ¿Cuáles fueron esas operaciones?

Suma

$\frac{5}{4}+\frac{5}{4}=\frac{10}{4}=2\frac{2}{4}$

~~División~~ Resta

$2\frac{3}{4}-2\frac{1}{4}$

División

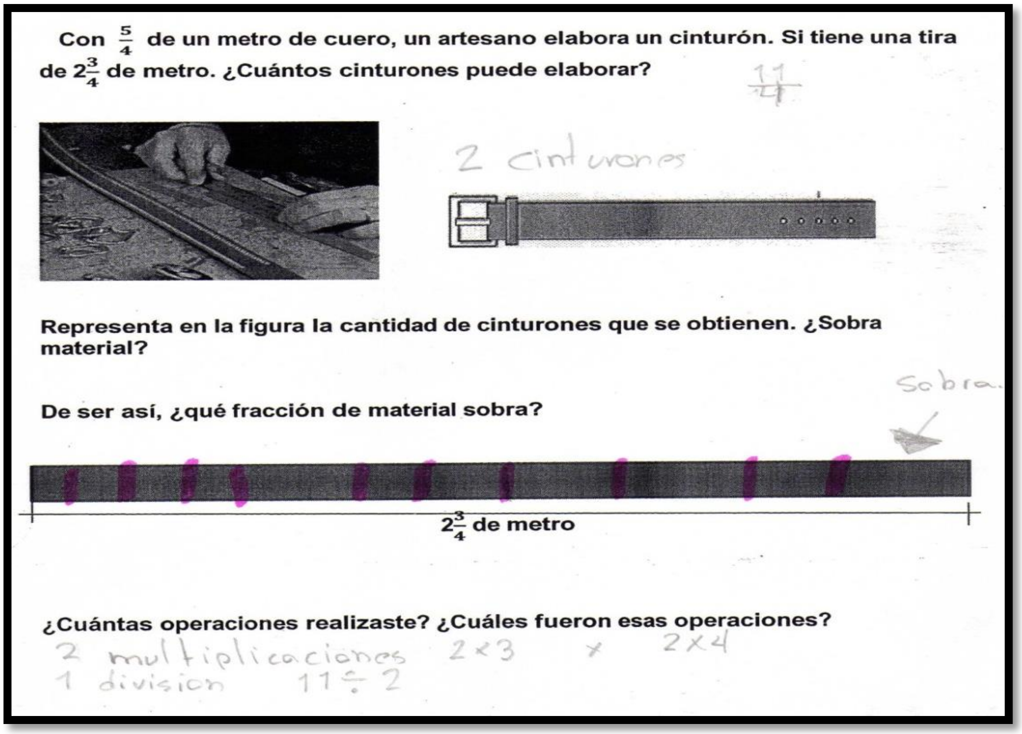
$2\frac{3}{4}\div2\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$

Fig. 4.43. División cuotativa representada como suma iterada y aproximación a la división de fracciones. Error en la identificación del residuo. Tarea resuelta por Sofía.

Un ejemplo más de solución de problemas con división de fracciones nos muestra Sofía (Fig. 4.43), que logra identificar el número de agrupamientos, es decir “cuanto se repite” y mediante una suma iterada obtiene el resultado. Al final se equivoca en la resta que realiza, por lo que no identifica el sobrante adecuadamente. Se observa confusión para determinar el tipo de operación que debe emplear para determinar el sobrante. No logra asociar la solución con una división de fracciones de manera inmediata, aunque realiza una aproximación. Al parecer su solución la obtiene de manera intuitiva. El ejemplo anterior es lo más cercano a la solución de problemas de división de fracciones que se observa en el grupo.

2. Identifica número de agrupamientos. No se identifica residuo.

Un ejemplo de esta dificultad se presenta en la solución planteada por César (Fig. 4.44), en la que logra identificar adecuadamente el número de agrupamientos y menciona que existe un sobrante pero no lo identifica. Asocia el resultado a una división de enteros.



Con $\frac{5}{4}$ de un metro de cuero, un artesano elabora un cinturón. Si tiene una tira de $2\frac{3}{4}$ de metro. ¿Cuántos cinturones puede elaborar?

$\frac{11}{4}$

2 cinturones

Representa en la figura la cantidad de cinturones que se obtienen. ¿Sobra material?

Sobra.

De ser así, ¿qué fracción de material sobra?

¿Cuántas operaciones realizaste? ¿Cuáles fueron esas operaciones?

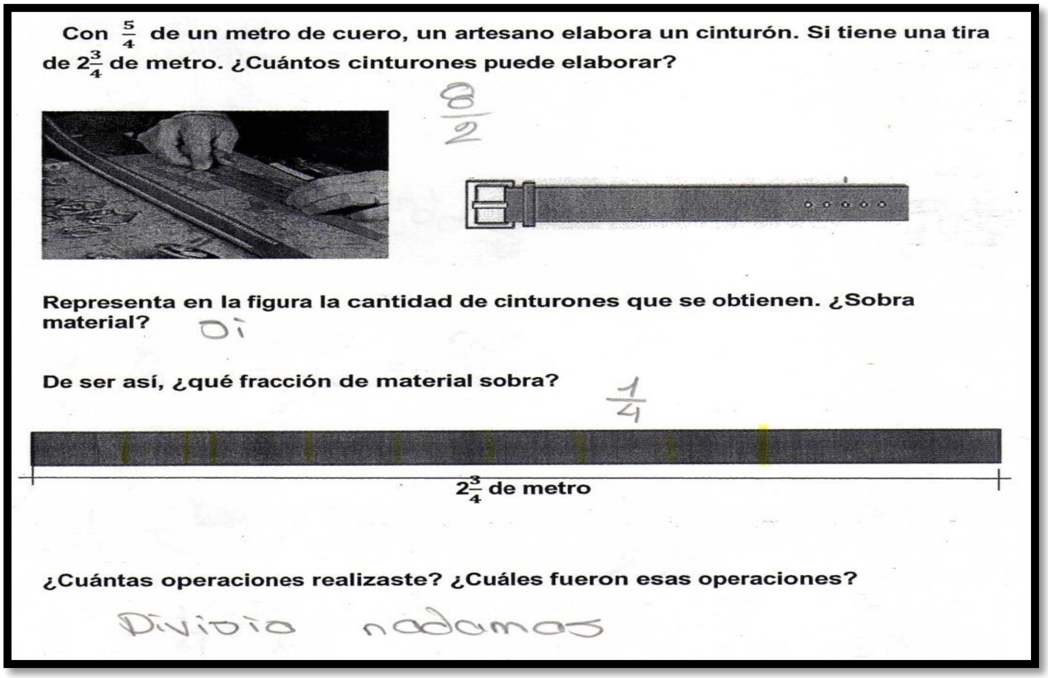
2 multiplicaciones 2×3 × 2×4

1 division $11 \div 2$

Fig. 4.44. Identifica número de agrupamientos pero no identifica residuo. Tarea resuelta por César.

3. No identifica número de agrupamientos, ni residuo.

Un ejemplo de esta dificultad se observa en la tarea resuelta por Michel (Fig. 4.45), que no logra identificar el número de agrupamientos. La identificación del residuo es adecuada, aunque no es claro de dónde surge, ni se asocia con la respuesta anterior, por lo que se interpreta como una respuesta por azar y por tanto incorrecta. Menciona la realización de una división pero no hay evidencia de ello.



Con $\frac{5}{4}$ de un metro de cuero, un artesano elabora un cinturón. Si tiene una tira de $2\frac{3}{4}$ de metro. ¿Cuántos cinturones puede elaborar?

$\frac{8}{2}$

Representa en la figura la cantidad de cinturones que se obtienen. ¿Sobra material? Si

De ser así, ¿qué fracción de material sobra? $\frac{1}{4}$

¿Cuántas operaciones realizaste? ¿Cuáles fueron esas operaciones?

Dividia nadamas

Fig. 4.45. No hay identificación de agrupamientos ni de residuo. Tarea resuelta por Michel.

En este capítulo se mostraron de manera general sólo algunas de las estrategias de resolución empleadas por los estudiantes a ciertos problemas que consideramos relevantes para esta investigación. Realizamos un análisis exhaustivo de las tareas de división de fracciones que nos permitieron identificar las dificultades que los alumnos tienen en la resolución de dichas tareas, lo que nos llevó a establecer categorías de análisis. Observamos que no tienen claro el significado y sentido de la operación y que no pueden asociarlo a la división de fracciones ni proporcionar una respuesta en la que se identifique el residuo asociado al divisor. Observamos también dificultades para realizar un reparto, comprenden lo que significa equitativo, pero no pueden concluir en un reparto exhaustivo porque se les complica mucho subdividir un entero en partes y repartir esas partes equitativamente, lo que consideramos que ocurre por la falta de trabajo en ese aspecto en la enseñanza recibida.

Como conclusión del análisis realizado al cuestionario inicial de exploración, podemos decir que su aplicación fue de suma importancia ya que nos proporcionó información relevante para el desarrollo de la investigación, lo que nos permitió identificar las dificultades que presentan los estudiantes de primero de secundaria en la comprensión de la división de fracciones y, en particular, coincidiendo con Flores (2014), dificultades para entender el residuo en términos de la unidad utilizada para medir (divisor).

Capítulo 5

Taller inicial exploratorio empleando un juego didáctico de fracciones

En este capítulo se describe la forma en que se llevó a cabo el taller exploratorio, se presentan los resultados obtenidos en las tareas aplicadas basadas en la resolución de problemas y el uso de material visual manipulativo y se incluye la experiencia de la aplicación del juego didáctico de fracciones.

5.1. Taller

De acuerdo con Egg (1999), taller es un "aprender haciendo en grupo", en el que los conocimientos se adquieren a través de una práctica sobre un aspecto de la realidad.
En el taller:

- el docente tiene una tarea de animación, estímulo, orientación, asesoría y asistencia técnica
- el alumno se inserta en el proceso pedagógico como sujeto de su propio aprendizaje con el apoyo del docente, cubriendo las exigencias que el taller vaya demandando.

Es decir, el profesor toma el papel de acompañamiento que guía al estudiante, facilitándole las herramientas necesarias para su desarrollo activo y creador de su conocimiento. Lo sustancial de un taller es realizar un proyecto de trabajo en el que docentes y alumnos participen activa y responsablemente. El conocimiento se produce fundamentalmente en respuesta a preguntas.

Según Maceratesi (1999), un taller consiste en la reunión de un grupo de personas que desarrollan funciones o papeles comunes o similares, para estudiar y analizar problemas y producir soluciones de conjunto. El taller combina actividades tales como trabajo de grupo, sesiones generales, elaboración y presentación de actas e informes, organización y ejecución de trabajos en comisiones, investigaciones y preparación de documentos. Entre sus ventajas se encuentran las de desarrollar el juicio y la habilidad mental para comprender procesos, determinar causas y escoger soluciones prácticas. Estimula el trabajo cooperativo, prepara para el trabajo en grupo y ejercita la actividad creadora y la iniciativa.

Requiere de un espacio que permita la movilidad de los participantes para que puedan trabajar con facilidad, y donde los recursos de uso común estén bien organizados. También requiere una distribución de tiempos que evite sesiones demasiado cortas que apenas den la oportunidad de desplegar y recoger el material necesario para su uso.

Para el desarrollo de la investigación, la autora de esta tesis, decidió diseñar un juego didáctico que sirviera de apoyo para la comprensión del significado de la división de fracciones, considerando lo mencionado por Corbalán (2002) sobre la importancia del juego en la enseñanza de las matemáticas, sin embargo con el objetivo de que dicho juego sirviera de apoyo a los profesores, consideramos que sería de mas utilidad si el juego abordaba las cuatro operaciones con fracciones y fue así que se decidió aplicar el juego empleando las cuatro operaciones. Para mayor información con respecto al juego didáctico véase Apéndice D.

Como parte de los instrumentos metodológicos empleados para la recopilación de información se consideró aplicar un Taller exploratorio aprovechando las ventajas, que de acuerdo con Egg (1999), brinda el taller y el trabajo colaborativo, cuyo objetivo consistía en que los alumnos desarrollaran la representación pictórica de cada una de las operaciones con fracciones, considerando que ya habían sido abordadas en la clase por el profesor, indagar en torno a la comprensión o las nociones que el estudiante tuviera de cada uno de estos procedimientos. Posteriormente acompañados por el investigador, construir en plenaria su significado, en particular de la división de fracciones, es decir, determinar *cuánto se repite o cuánto cabe una fracción en otra* y una vez logrado lo anterior, emplear el juego didáctico en el que se representan tales operaciones de manera pictórica con el fin de consolidar las nociones adquiridas y lograr un nivel de abstracción de la semántica de las operaciones. Es importante aclarar que el objetivo principal de la investigación es la división de fracciones, sin embargo realizamos un pasaje breve por las cuatro operaciones, de acuerdo a lo mencionado anteriormente.

5.6. Taller exploratorio mediante un juego didáctico de operaciones con fracciones

Para la realización de este taller y de acuerdo al tiempo que se nos permitió trabajar con los estudiantes (5 sesiones de 40 min.), se destinó una sesión para cada una de las operaciones, con el propósito era acercar al estudiante a los contenidos semánticos antes mencionados en un ambiente adecuado para el trabajo, en el que los alumnos pudieran expresar libremente sus opiniones y de ser posible, reforzar esas nociones mediante la aplicación de un juego didáctico, trabajando de manera colaborativa y acompañados por la guía del investigador.

Esto implicó profundizar tanto como fue posible en la situación, en este caso la resolución de problemas, de abordarlos individual y colectivamente, culminando con enseñanza en condiciones de laboratorio. Se trataba de que el estudiante razonara y pusiera en práctica los conocimientos y conceptos adquiridos sobre el tema.

Fig. 5.1. Estudiantes durante el desarrollo del taller, trabajando en equipo.

El taller nos permitió observar a los estudiantes enfrentando la resolución de problemas con el empleo de todos sus recursos y todas sus limitaciones. Se advirtió una conexión entre ellos para plantear y replantear en conjunto, a través del trabajo en equipo, (al que no estaban acostumbrados en la clase de matemáticas y que es propio del taller), lo que habían estado viviendo en el aula y así obtener información colectiva (Fig. 5.1).

Pudimos explorar más a profundidad y de manera directa, las dificultades que evidencian (esto no es posible en el cuestionario), cuáles eran los tropiezos que tenían a la hora de enfrentar la resolución de las tareas. Generar un ambiente de libre expresión, en donde en vivo se les escuchó decir "no entiendo". Observar de primera mano la forma en que emplean lo aprendido y las repercusiones que este aprendizaje tendrá en sus elaboraciones futuras. Un ejemplo de ello se visualiza en la resolución de una tarea que involucra la relación parte-todo en dónde ellos comprenden que una fracción es menor o igual a la unidad. La tarea 5 plantea representar gráficamente una suma de fracciones, la respuesta requiere representar una fracción impropia, Joselin, una de las estudiantes del grupo, obtiene como respuesta $\frac{70}{50}$, para ella es algo que no tiene sentido y por lo tanto no es posible realizarlo, lo que muestra una evidente dificultad cognitiva en el uso de las fracciones, al considerar que no se pueden representar 70 partes en un entero dividido en 50. No considera que la unidad puede ser rebasada.

Durante las dos primeras sesiones se realizó el trabajo de resolución de problemas de suma y resta de fracciones, con el objetivo de observar sus producciones, las estrategias de solución que presentan, el desarrollo que hacen de los algoritmos y las diversas formas de representación pictórica que utilizan, así como desarrollar las nociones de dichas operaciones y la manera en que pueden representarlas mediante pictogramas y el empleo del material manipulativo.

En la tercera sesión se trabajó resolución de un problema de multiplicación de fracciones, con un ejemplo de área, con el objetivo de acercarlos al significado de dicha operación y el uso de la preposición "de", una de las condiciones era que representaran la operación mediante el uso del material manipulativo, a algunos equipos se les proporcionaron círculos de fracciones, a otros los acetatos del juego de fracciones y a otros el panel de leds. Se observa en la Fig. 5.2 a un equipo de estudiantes trabajando en sus producciones.

Fig. 5.2. Estudiantes trabajando multiplicación de fracciones con material manipulativo.

En la cuarta sesión se trabajó resolución de un problema de división de fracciones, con un ejemplo de razón y el desarrollo de razonamiento proporcional, tratando de aproximarlos al significado de la división de fracciones, con el que se detectó que no habían tenido ningún acercamiento. Se observó que algunos alumnos, sin el empleo de algoritmos y de manera intuitiva pudieron darle una respuesta adecuada; sin embargo ninguno pudo asociarlo a la división de fracciones, (a pesar de que una semana antes se les había impartido la clase de división de fracciones). Para finalizar la sesión, con el objetivo de acercarlos al significado, la investigadora hace uso del modelo de conmensuración y el empleo de papel doblado, para explicar las nociones de la división de fracciones, así como del material con acetatos del juego de fracciones.

Durante la aplicación de este taller se pudieron observar múltiples deficiencias en las estrategias de solución de los alumnos, poca familiarización con el significado de las operaciones y con el uso de materiales concretos y las diversas formas de representación gráfica, confusión, de manera general entre los estudiantes, al emplear la palabra dividir, confunden la subdivisión de una unidad en partes, con la operación de división, debido a ello, cuándo se les solicita explicar qué operación emplearon contestan “división”, a pesar de que no emplean dicha operación, empleo indiscriminado del método de “la carita feliz”, aún cuando no es necesario. Advertimos que el estudiante al no comprender correctamente el procedimiento, crea su propio procedimiento alternativo de solución. O de manera más reiterada, debido al olvido o la no comprensión, la modificación de algún paso en los algoritmos aprendidos.

Debido a las múltiples deficiencias observadas en los alumnos, así como la poca familiarización que tenían con el uso de materiales concretos, no se pudo lograr el objetivo planteado al 100% y al término de las sesiones la investigadora tuvo que inducir en los alumnos el significado de la multiplicación y división de fracciones.

Por otro lado, se observa que algunas de las tareas del taller fueron respondidas en equipo de manera exitosa, sin el empleo de algoritmos. En esta cuarta sesión en que se abordó división de fracciones mediante un problema de razón, posterior al trabajo en equipo, en plenaria se les cuestionó sobre qué operación se asociaba a ese procedimiento. Ninguno lo asoció a la división. La investigadora mostró al grupo el significado de dicha operación y posteriormente fue asociado con el algoritmo. Se les solicita después del trabajo en plenaria, que expliquen qué entendieron por dividir fracciones.

La quinta y última sesión con el grupo se dedicó a la aplicación del juego didáctico de fracciones diseñado por la investigadora, que involucra el uso de las cuatro operaciones básicas, suma, resta, multiplicación y división de fracciones, empleando el modelo de área, para representar las operaciones básicas de fracciones de manera gráfica, es decir, mediante el uso de material concreto familiarizar al alumno con el significado gráfico (representación pictórica) de cada una de las operaciones. En esta última sesión (en la que se desarrolló el juego con fracciones), sólo 3 de 7 equipos lograron aplicar de manera correcta el juego.

5.3. Análisis de la tarea de división de fracciones aplicada en el Taller exploratorio

A pesar de haber trabajado las cuatro operaciones con fracciones en el taller, y la posterior aplicación del juego de fracciones, el análisis se enfocará en la tarea de división de fracciones por ser el tema abordado en esta investigación.

Decidimos preparar 2 tareas por sesión, para las sesiones de multiplicación y división, iniciar con una y si el tiempo era idóneo, realizar la segunda. En la sesión 4 de división de fracciones, sólo un equipo pudo trabajar con la segunda tarea (2 estudiantes). En la Tabla 2.5 se pueden observar las tareas del taller exploratorio por sesión.

De acuerdo con la clasificación establecida por Vergnaud (1991), Ivars & Fernández (2016), el problema trabajado en esta sesión tendría la categoría de Isomorfismo de medida, mediante un problema de razón, determinando el número de agrupamientos, como se muestra a continuación.

Litros de pintura	Metros de línea pintados
1	$\frac{1}{2}$
X	$\frac{3}{4}$

División cuotativa

En esta sesión se trabajó con 39 estudiantes y de los resultados obtenidos, se realiza una clasificación, estableciendo categorías de acuerdo a las regularidades observadas. En la Tabla 5.1 podemos observar la cantidad de respuestas correctas e incorrectas, de la que destacamos que los $\frac{39}{39}$ estudiantes contestaron la tarea 17 (primera tarea de división cuotativa) y de ellos, $\frac{19}{39}$ tuvieron una respuesta correcta al identificar el número de agrupamientos y residuo, y $\frac{20}{39}$ presentan una respuesta incorrecta, de los cuales sólo $\frac{6}{39}$ identifican número de agrupamientos correcto e identifican un residuo pero es incorrecto y $\frac{14}{39}$ no identifican ni agrupamientos ni residuo.

Tabla 5.1. Frecuencia de respuestas de la tarea 17 y 18

Tareas / Respuestas	T17	T18
Respuestas contestadas	$\frac{39}{39}$	$\frac{2}{39}$
Respuestas correctas	$\frac{19}{39}$	$\frac{2}{39}$
Respuestas incorrectas	$\frac{20}{39}$	$\frac{0}{39}$
No contestaron	$\frac{0}{39}$	$\frac{37}{39}$

De los $\frac{14}{39}$ incorrectos $\frac{2}{39}$ asocian la respuesta a una suma de fracciones, $\frac{7}{39}$ asocian la respuesta a una resta de fracciones, $\frac{2}{39}$ asocian la respuesta a multiplicación de fracciones con error en la aplicación del algoritmo y $\frac{1}{39}$ no tiene claro que operación debe emplear por lo que realiza suma, multiplicación y división de fracciones sin resolver adecuadamente los algoritmos.

Con respecto a la tarea 18 sólo 2 estudiantes, que trabajaban en el mismo equipo, la contestaron de manera correcta al identificar el número de agrupamientos y un residuo que no es asociado en función del divisor, para el resto, el tiempo no les favoreció, por lo que esta tarea no fue resuelta.

5.3.1. Categorías de análisis empleadas en el taller exploratorio

Para llevar a cabo el análisis de las tareas de división de fracciones del Taller exploratorio, recurrimos a las categorías empleadas en el análisis del Cuestionario inicial de exploración, ahora aplicadas a la Tarea 17 y 18 y que se observan en la Tabla 5.2.

Tabla 5.2 Categorías de análisis de la tarea de división aplicada en el taller exploratorio

Categorías de análisis de la tarea de división cuotativa aplicada en el taller exploratorio			
Categoría		**Frecuencia**	
		Tarea 17	**Tarea 18**
Aciertos	Identifica el número de agrupamientos, identifica residuo pero no se proporciona en función del divisor.	19	2
Errores	Identifica número de agrupamientos. Identifica residuo pero es incorrecto.	6	0
	No identifica número de agrupamientos ni residuo.	14	37

Además de la tabla de categorías de análisis, se empleará el modelo de análisis interpretativo de naturaleza lingüística, diseñado y empleado por Valdemoros (2004). Es un modelo de análisis que permite identificar los tres planos constituyentes del lenguaje: semántico, sintáctico y pragmático (que se refiere al lenguaje que permite descubrir procesos que no pueden ser observados de forma directa y se deben deducir) y que puede ser aplicado a lenguaje técnico. Este modelo de análisis se muestra en la Tabla 5.3.

Tabla 5.3. Modelo de análisis interpretativo de naturaleza lingüística

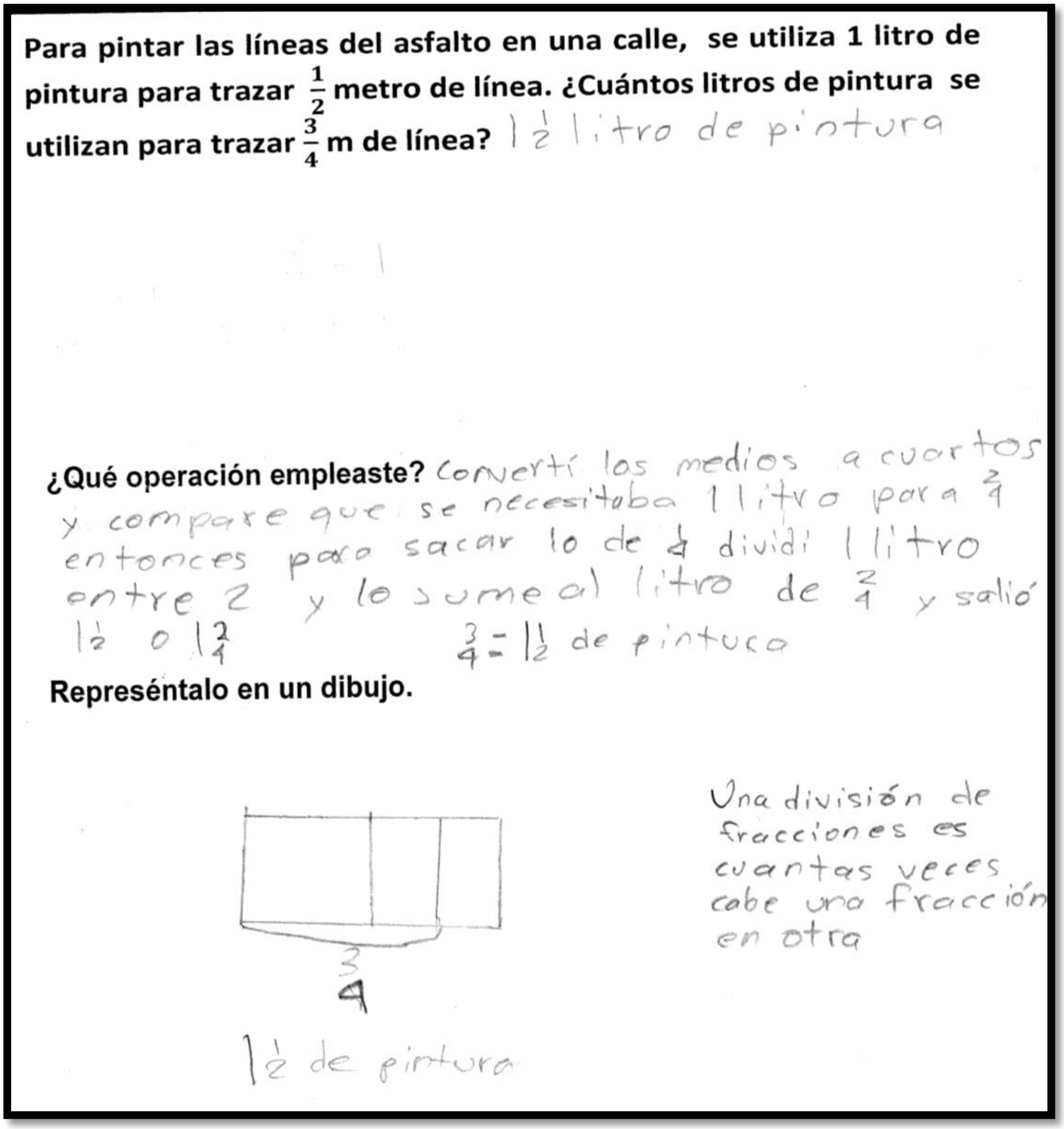
EN EL PLANO SEMÁNTICO: Identificación de los significados y de los procesos de significación detectables a través de las elaboraciones de los estudiantes.
EN EL PLANO SINTÁCTICO: El reconocimiento de las modalidades de articulación de distintos signos asociados por los niños a estrategias mixtas de solución, el manejo concreto de las reglas que regulan esas articulaciones y el uso de algoritmos.
EN EL PLANO DE TRADUCCIÓN DE UN LENGUAJE A OTRO LENGUAJE O A UN SISTEMA SIMBÓLICO: La puesta en correspondencia entre la lengua y el lenguaje aritmético, el reconocimiento de las dificultades asociadas a ese tránsito y las posibles inconsistencias manifiestas en el uso conjunto de distintos lenguajes y sistemas simbólicos.
EN EL PLANO DE LA ESCRITURA ARITMÉTICA: atención a las notaciones convencionales o personales que nos permitan reconstruir componentes conceptuales importantes de las soluciones propuestas por los estudiantes.
CON RELACIÓN AL PLANO DE LA LECTURA: Reconocimiento de modos particulares de asignación de sentido, tanto a los enunciados de los problemas como a los "pictogramas" incluidos en ellos.

Este modelo interpretativo nos permitirá analizar y reconocer los procesos y dificultades que presentan los estudiantes al resolver problemas de división de fracciones.

Aciertos

1. Identifica el número de agrupamientos, identifica residuo pero no se proporciona en función del divisor.

Con respecto a la Tarea 17, de las $\frac{19}{39}$ contestadas correctamente, sólo $\frac{10}{39}$ presentan evidencia de trabajo. Entre los que obtuvieron una respuesta correcta se encuentran Rodrigo, Christian, Sandy, Sherlin, y Camila, en cuyas tareas se observa una resolución de manera intuitiva en las que se aprecia un considerable apoyo en el uso de pictogramas para hallar la respuesta, un ejemplo de ello se muestra en la Fig. 5.3, en la que se proporciona una respuesta sin el empleo de algoritmos.



Para pintar las líneas del asfalto en una calle, se utiliza 1 litro de pintura para trazar $\frac{1}{2}$ metro de línea. ¿Cuántos litros de pintura se utilizan para trazar $\frac{3}{4}$ m de línea? $1\frac{1}{2}$ litro de pintura

¿Qué operación empleaste? Convertí los medios a cuartos y compare que se necesitaba 1 litro para $\frac{2}{4}$ entonces para sacar lo de $\frac{1}{4}$ dividí 1 litro entre 2 y lo sume al litro de $\frac{2}{4}$ y salió $1\frac{1}{2}$ o $1\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4} = 1\frac{1}{2}$ de pintuca

Represéntalo en un dibujo.

$\frac{3}{4}$

$1\frac{1}{2}$ de pintura

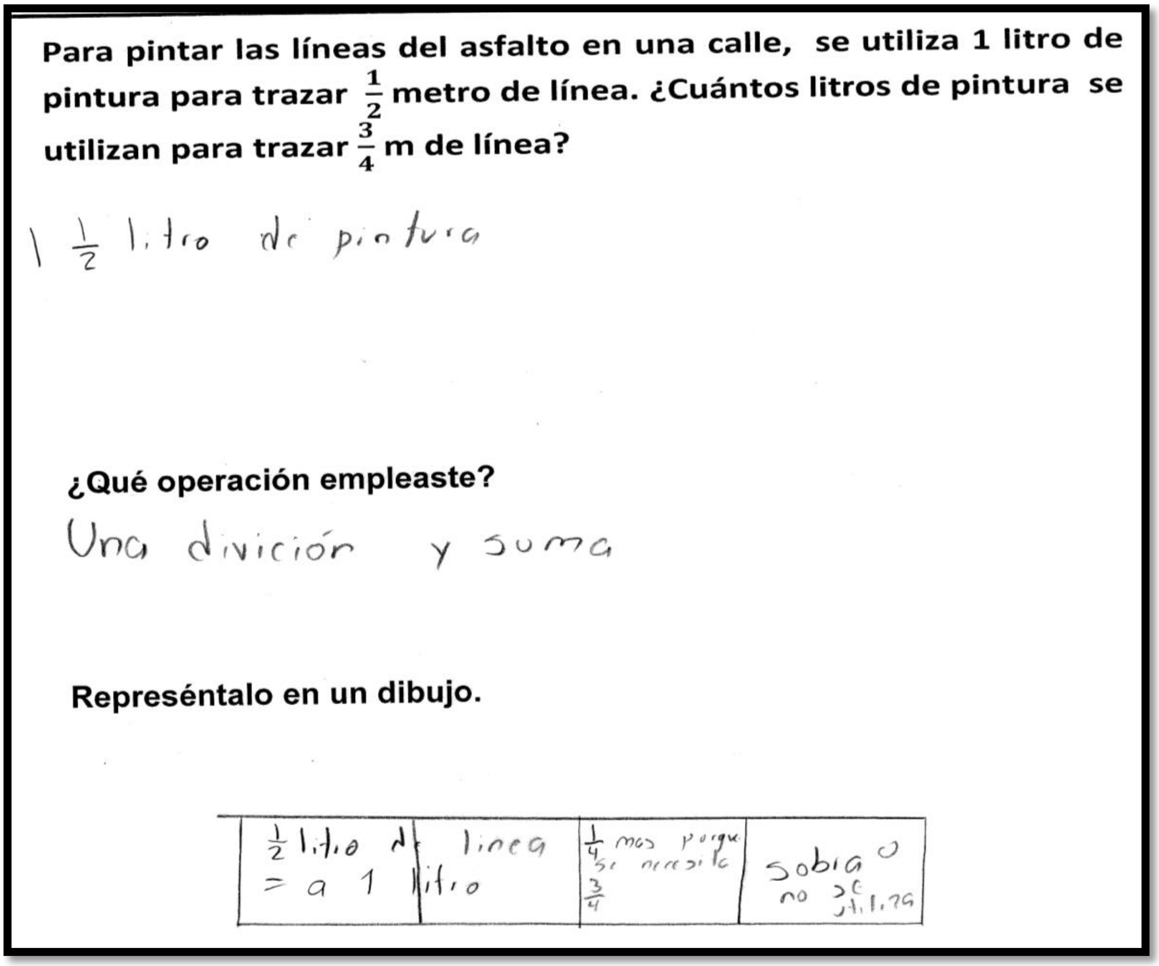
Una división de fracciones es cuantas veces cabe una fracción en otra

Fig. 5.3. Tarea de división cuotativa resuelta por Rodrigo en el taller exploratorio.

Se observa una respuesta en fracción en la que se logró una correcta interpretación de la razón establecida, Se identifica el número de agrupamientos y el residuo adecuadamente, sin embargo no hay asociación a la división de fracciones ni a ninguna otra operación.

Empleando el análisis interpretativo de Valdemoros (2004), podemos decir que en el Plano semántico, las elaboraciones de Rodrigo muestran un proceso intuitivo de comprensión del problema y su significado en el que se observa una correcta asociación de la razón involucrada que lleva a la obtención del resultado correcto pero no hay relación con la división de fracciones, por lo presumiblemente Rodrigo no tiene clara la semántica de dicha operación, aunque quizá el mayor acercamiento a la división lo tiene cuando menciona que divide un litro entre 2 (naturales), lo que le lleva a obtener una respuesta en fracción. En el plano sintáctico de acuerdo al lenguaje utilizado, se observa una apropiada articulación de signos y un manejo adecuado de la fracción, al realizar una correcta interpretación de las fracciones equivalentes, además con una asociación correcta al símbolo y su pictograma. Esto nos conduce al plano de la traducción del lenguaje natural al aritmético, en el que se observa una óptima interpretación del problema traducido a su representación pictórica, que se evidencia por el reconocimiento del número de partes en que fue partido y un pasaje adecuado del pictograma al numeral, que se advierte con un reconocimiento apropiado representado por $\frac{3}{4}$ de m de línea y relacionado a $1\frac{1}{2}$ botes de pintura, así como un tránsito correcto del lenguaje escrito al aritmético, que da cuenta de su pensamiento matemático, de su razonamiento proporcional (correcta asociación de magnitudes) y del proceso de simbolización que emplea, en el que interpreta correctamente el resultado, sin embargo no existe asociación a ningún algoritmo. Algo similar se observa en las tareas resueltas por Christian (Fig. 5.4), Sandy (Fig. 5.5), Sherlin (Fig. 5.6) y Camila (Fig. 5.7). Se observa un enunciado en la elaboración de Rodrigo y Sandy, mencionando lo que significa dividir fracciones, su aparición se aclarará más adelante.

Christian, al igual que Rodrigo, resuelve el problema de manera intuitiva (Fig. 5.4), ya que en su respuesta obtiene el número de agrupamientos y residuo correctos pero no se observa una asociación con la división de fracciones. La información que proporciona es limitada. Aunque menciona un par de operaciones, división y suma, no existe evidencia de su realización. El pictograma que realiza es adecuado, indicando una correcta partición, que se evidencia por el reconocimiento del número de partes en que fue partido (presumiblemente sea dicha partición a la que se refiere al mencionar la operación de división) y en él intenta representar la razón existente al asociar la cantidad de pintura (un litro) con el $\frac{1}{2}$ metro de línea, sin embargo no concluye dicha representación, al no mencionar que cantidad de pintura se asocia a $\frac{1}{4}$ de metro de línea; es en este punto en dónde se presume que realiza la suma a la que hace referencia para obtener $1\frac{1}{2}$ litros de pintura y $\frac{3}{4}$ de metro de línea. En el plano sintáctico presenta un pequeño error que quizá sea por distracción, al mencionar "litro" de línea en lugar de "metro" de línea (presumiblemente, se encuentra en construcción su razonamiento proporcional). En el plano de la traducción se observa una adecuada interpretación del problema, representado en su pictograma con una adecuada partición en la que agrega una parte adicional que se convierte en un residuo, pero que no está relacionado a la solución del problema.



Para pintar las líneas del asfalto en una calle, se utiliza 1 litro de pintura para trazar $\frac{1}{2}$ metro de línea. ¿Cuántos litros de pintura se utilizan para trazar $\frac{3}{4}$ m de línea?

1 $\frac{1}{2}$ litro de pintura

¿Qué operación empleaste?

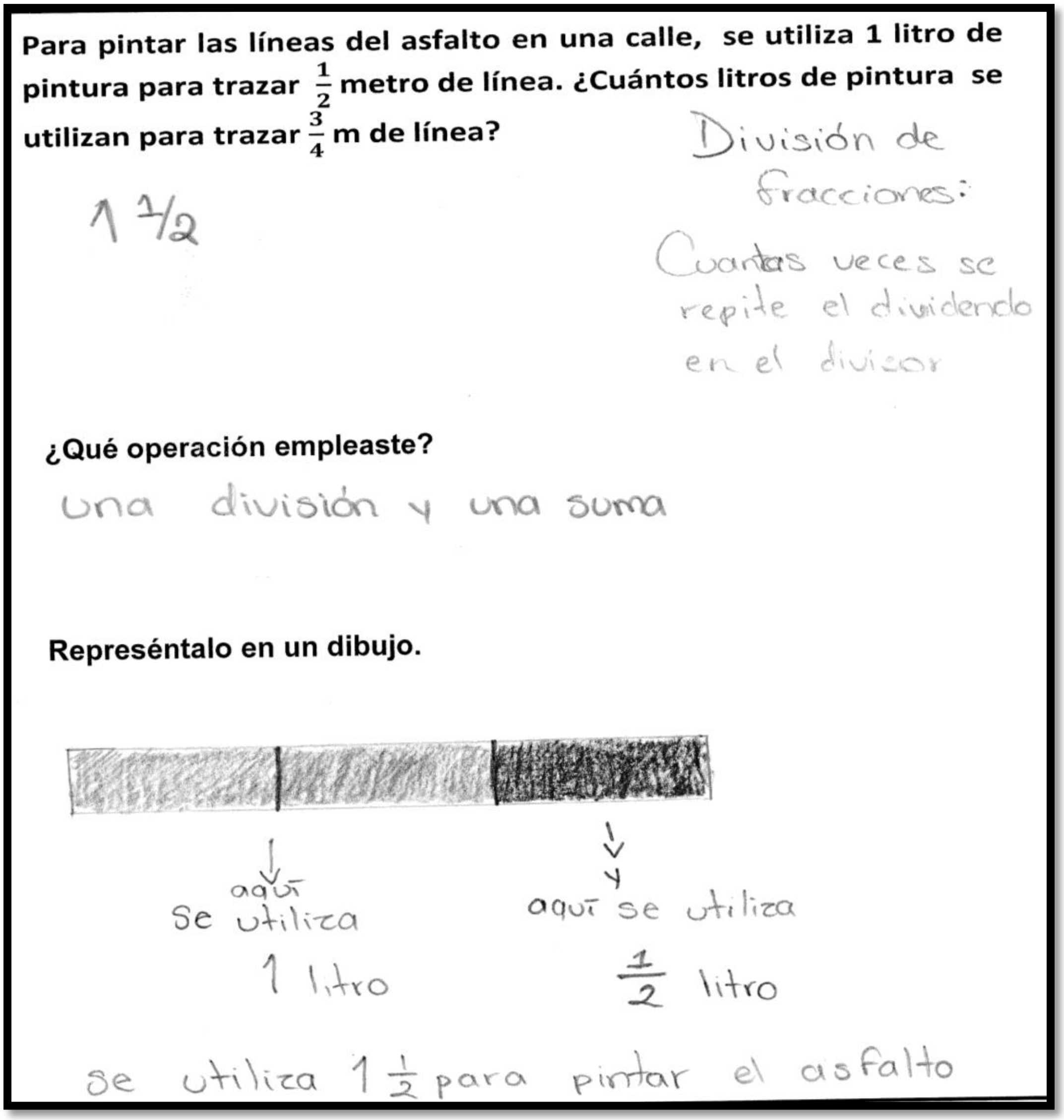
Una divición y suma

Represéntalo en un dibujo.

$\frac{1}{2}$ litro de = a 1	linea litro	$\frac{1}{4}$ mas porque se necesita $\frac{3}{4}$	sobra o no se utiliza

Fig. 5.4. Tarea resuelta por Christian

Sandy y Sherlin realizan el mismo procedimiento (Fig. 5.5 y 5.6), similar a lo realizado por Rodrigo y Christian, sólo que Sherlin proporciona su respuesta en decimal, a pesar de que su procedimiento lo realiza con fracciones, empleando situaciones de conocimiento informal como partir por la mitad. Presumiblemente ese conocimiento fue clave para ayudarle a encontrar la respuesta.



Para pintar las líneas del asfalto en una calle, se utiliza 1 litro de pintura para trazar $\frac{1}{2}$ metro de línea. ¿Cuántos litros de pintura se utilizan para trazar $\frac{3}{4}$ m de línea?

1 1/2

División de fracciones:
Cuantas veces se repite el dividendo en el divizor

¿Qué operación empleaste?

una división y una suma

Represéntalo en un dibujo.

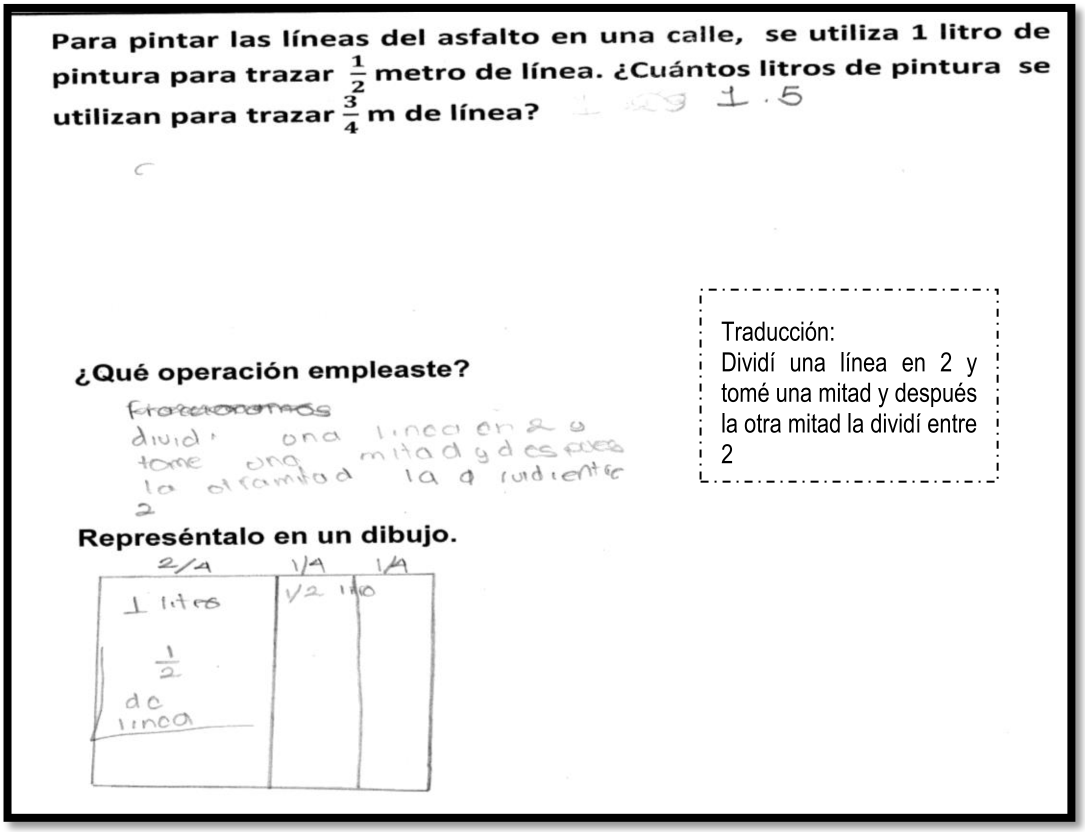
aquī se utiliza 1 litro

aquī se utiliza $\frac{1}{2}$ litro

se utiliza $1\frac{1}{2}$ para pintar el asfalto

Fig. 5.5. Tarea resuelta por Sandy.

Es importante destacar en la solución de Camila (Fig. 5.7) el lenguaje que emplea, al igual que Rodrigo y Christian, resuelve de manera intuitiva, es probable que se debiera a las fracciones empleadas, muy familiares para los estudiantes, menciona la realización de divisiones “mentalmente” por lo que no existe evidencia del tipo de división realizada, ni qué datos emplea para dicha división, debido a lo que escribe, suponemos que confunde dividir con partir la figura. Para Camila, la representación pictórica es una herramienta fundamental y a través de ella expresa de manera adecuada su pensamiento aritmético, con detallados señalamientos en sus dibujos.



Para pintar las líneas del asfalto en una calle, se utiliza 1 litro de pintura para trazar $\frac{1}{2}$ metro de línea. ¿Cuántos litros de pintura se utilizan para trazar $\frac{3}{4}$ m de línea? 1 29 1.5

¿Qué operación empleaste?

~~fraccionamos~~
dividí una linea en 2 y
tome una mitad y despues
la otramitad la a ruidiente
2

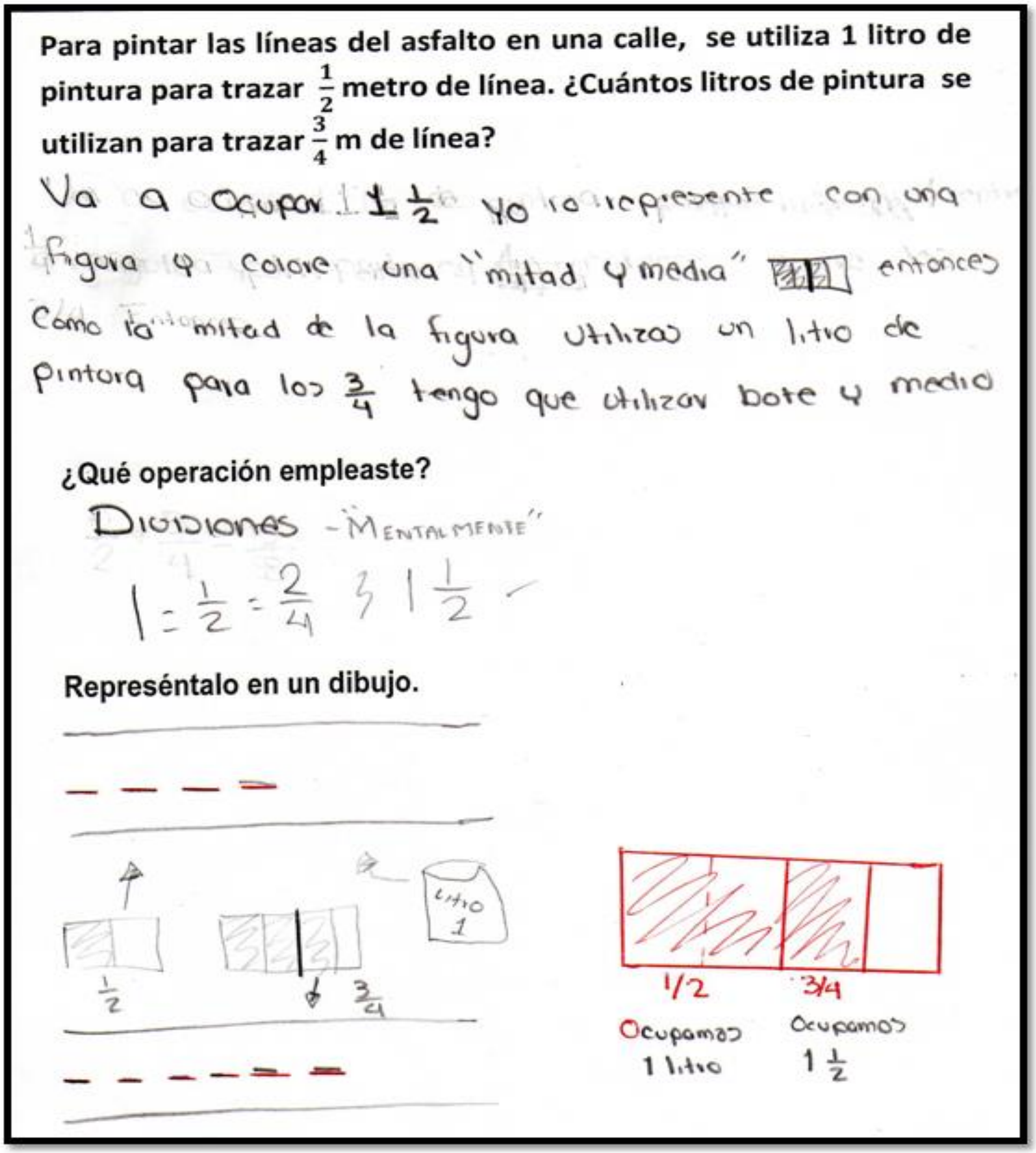
Represéntalo en un dibujo.

2/4 1/4 1/4
1 litros
$\frac{1}{2}$
de
linea
1/2 lito

Traducción:
Dividí una línea en 2 y tomé una mitad y después la otra mitad la dividí entre 2

Fig. 5.6. Tarea resuelta por Sherlin.

Analizando mediante el modelo interpretativo de Valdemoros (2004), en el plano semántico presenta un adecuado manejo de las fracciones y su equivalencia, identifica el número de agrupamientos y residuo y se observa una notoria consistencia en su ejecución, a través de los diversos planos de representación que emplea. En el plano sintáctico llama la atención su expresión “mitad y media” que hace referencia a una comparación parte-parte, representada por la fracción $\frac{3}{4}$ que cuantifica dicha comparación y que es representada de manera pictórica adecuadamente y de manera simultánea la expresión “bote y medio” representada por la fracción $1\frac{1}{2}$, ello da cuenta de el empleo de su conocimiento informal aplicado al problema y de la correcta asociación de lo lingüístico al numeral. No asocia a la división de fracciones ni empleo de algún algoritmo. En el plano de la traducción, se observa una correcta interpretación del problema, que se observa, como se mencionó anteriormente, en la representación pictórica que realiza.



Para pintar las líneas del asfalto en una calle, se utiliza 1 litro de pintura para trazar $\frac{1}{2}$ metro de línea. ¿Cuántos litros de pintura se utilizan para trazar $\frac{3}{4}$ m de línea?

Va a ocupar $1\frac{1}{2}$ yo lo represente con una figura y colore una "mitad y media" entonces como la mitad de la figura utilizas un litro de pintura para los $\frac{3}{4}$ tengo que utilizar bote y medio

¿Qué operación empleaste?

Divisiones -"Mentalmente"

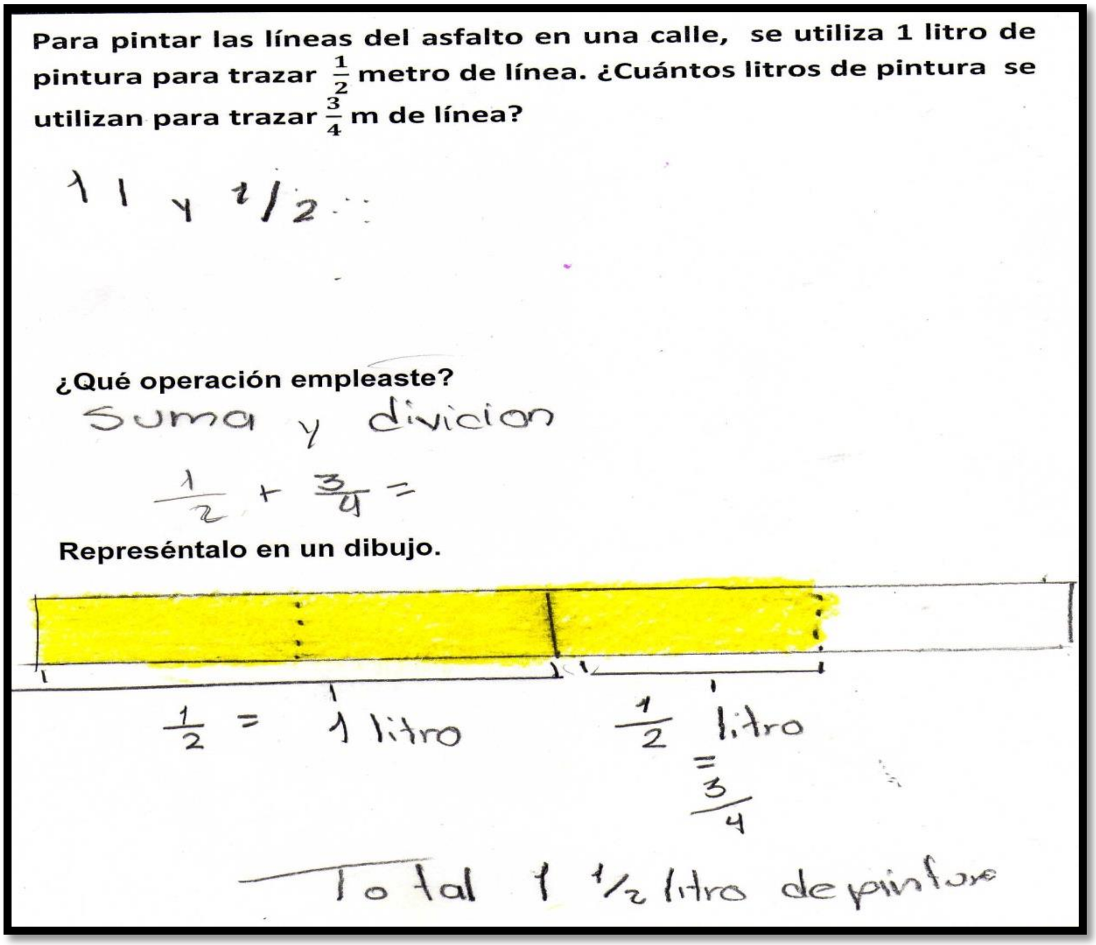
$1 = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ 3 $1\frac{1}{2}$ ✓

Represéntalo en un dibujo.

Fig. 5.7. Tarea resuelta por Camila.

En el caso de Sofía (Fig. 5.8), llama la atención que resuelve de manera intuitiva correctamente; sin embargo lo asocia a una suma de fracciones, lo que no es congruente y eso nos permite suponer que no tiene claro el significado de la división de fracciones, interpreta adecuadamente el problema lo cual se observa en la representación pictórica y mediante el lenguaje aritmético empleado hace una correcta asociación de la razón que le conduce a una respuesta acertada. Sin embargo no existe un apropiado tránsito de lo intuitivo a lo aritmético, es decir, coincidiendo con Llinares y

Sánchez (2000), su capacidad de trasladar la comprensión lograda mediante el pictograma al algoritmo no es del todo clara.



Para pintar las líneas del asfalto en una calle, se utiliza 1 litro de pintura para trazar $\frac{1}{2}$ metro de línea. ¿Cuántos litros de pintura se utilizan para trazar $\frac{3}{4}$ m de línea?

1 1 y 1/2

¿Qué operación empleaste?

Suma y divicion

$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} =$

Represéntalo en un dibujo.

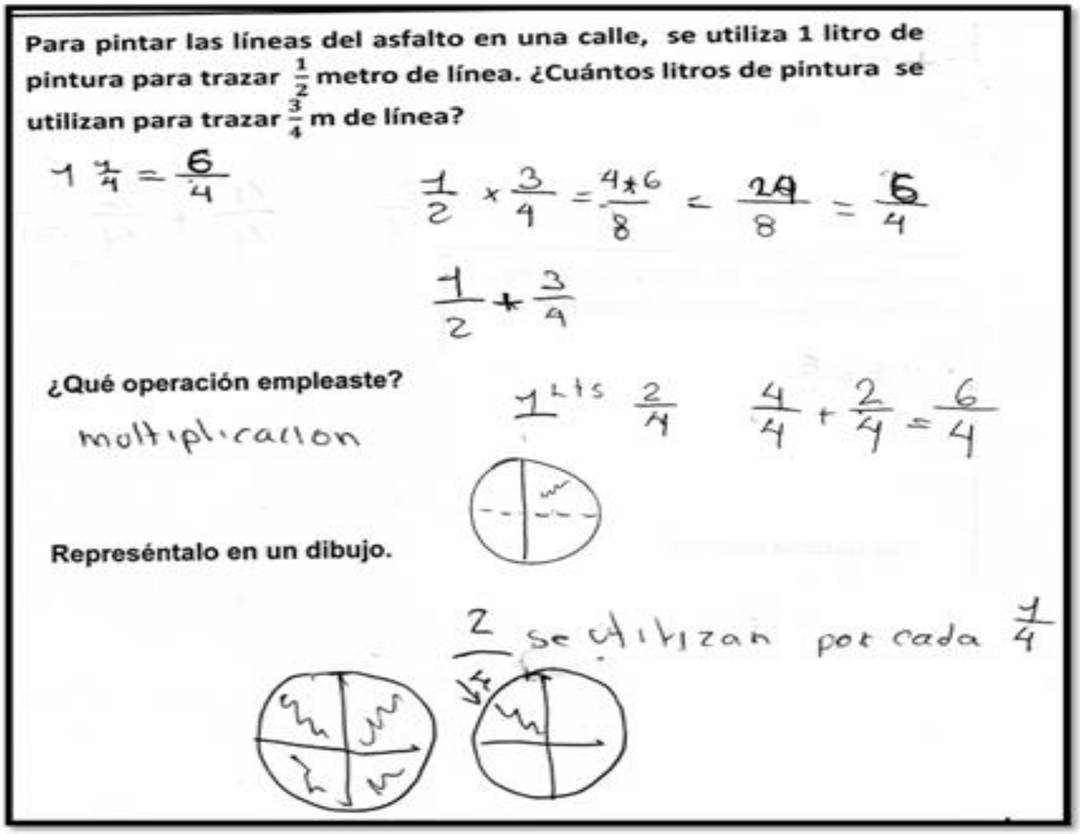
$\frac{1}{2}$ = 1 litro

$\frac{1}{2}$ litro = $\frac{3}{4}$

Total 1 1/2 litro de pintura

Fig. 5.8. Tarea resuelta por Sofía.

En el caso de Martha (Fig. 5.9), es interesante su estrategia de solución. Ella proporciona una respuesta en fracción correcta, sin embargo presenta dos operaciones, multiplicación y suma de fracciones, en la primera se equivoca en el proceso algorítmico al resolver de manera equivocada en una mezcla de algoritmo de la suma con la multiplicación y la segunda la realiza correctamente y en las dos obtiene el mismo resultado, que es correcto. Se observa por otro lado que recurre a la representación pictórica circular, que al parecer es la que más familiar le resulta, para resolver de manera intuitiva, aunque no es clara su representación, llama la atención que escribe " $\frac{2}{4}$ ***se utilizan para cada*** $\frac{1}{4}$ ". Aunque no lo menciona, al parecer se refiere en la primera fracción a litros de pintura y en la segunda a metros de línea y presumiblemente podemos aseverar que la suma de fracciones que presenta está relacionada a esta expresión en la que realiza una suma iterada, asociando $\frac{4}{4}$ (que consideramos refiere a litros de pintura) a $\frac{1}{2}$ (metro de línea) y $\frac{2}{4}$ (litros de pintura) a $\frac{1}{4}$ (de metro de línea), obteniendo un resultado correcto. Se observa que Martha logra resolver de manera intuitiva adecuadamente y además intenta relacionar su respuesta con el algoritmo, su problema es que no tiene claro el manejo de los algoritmos, lo que la lleva a cometer un error. Martha se muestra muy entusiasta y participativa durante el desarrollo del taller, lo que nos lleva a considerarla candidata para entrevista y estudio de casos.



Para pintar las líneas del asfalto en una calle, se utiliza 1 litro de pintura para trazar $\frac{1}{2}$ metro de línea. ¿Cuántos litros de pintura se utilizan para trazar $\frac{3}{4}$ m de línea?

$1\frac{2}{4} = \frac{6}{4}$

$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{4*6}{8} = \frac{24}{8} = \frac{6}{4}$

$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$

¿Qué operación empleaste?

moltiplicacion

1^{lts} $\frac{2}{4}$ $\frac{4}{4} + \frac{2}{4} = \frac{6}{4}$

Represéntalo en un dibujo.

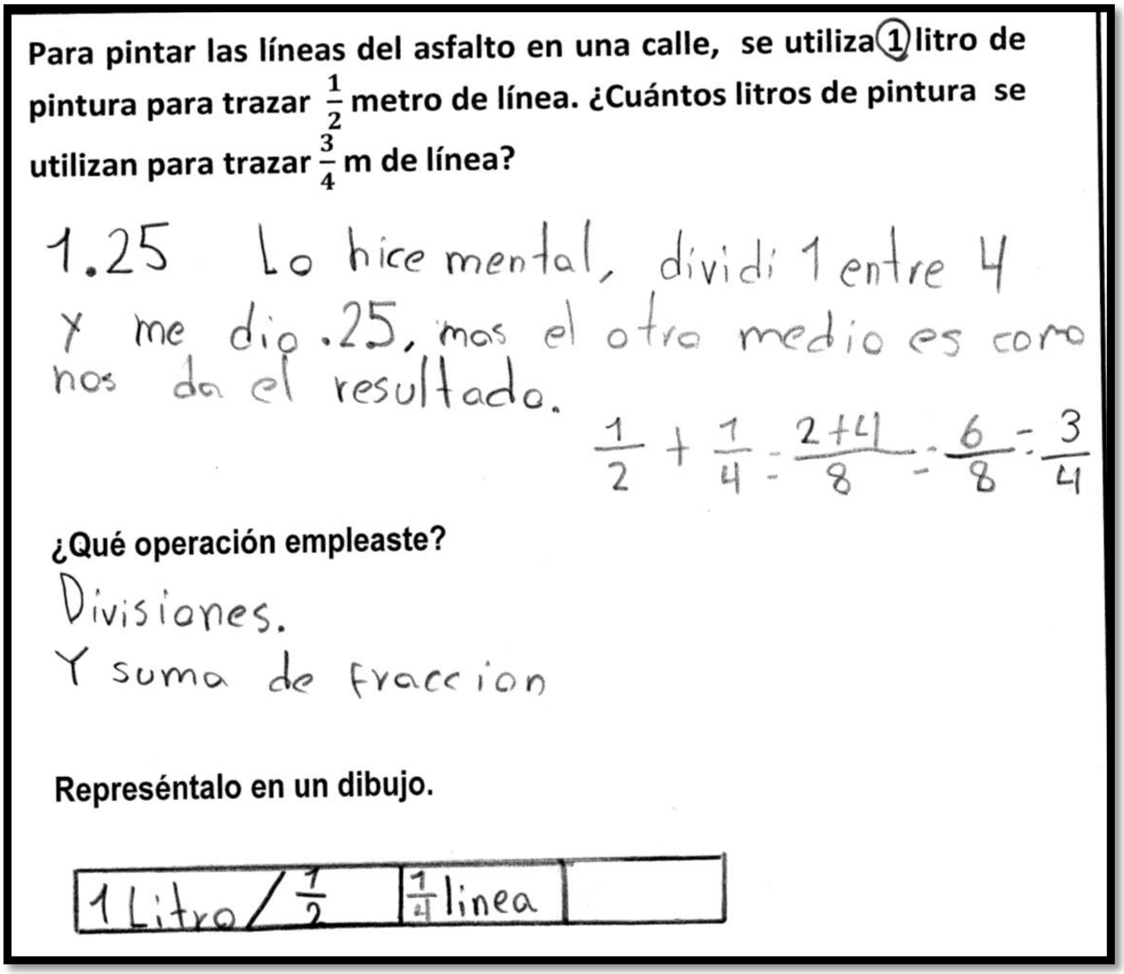
$\frac{2}{4}$ se utilizan por cada $\frac{1}{4}$

Fig. 5.9. Tarea resuelta por Martha.

Errores

1.- Identifica número de agrupamientos. Identifica residuo pero es incorrecto.

Dentro de las dificultades observadas, tenemos que hay estudiantes que logran identificar el número de agrupamientos e identifican un residuo pero es incorrecto, es decir no logran realizar una correcta traducción del problema, por lo que podemos decir que hay aciertos en los que se perciben algunas dificultades asociadas a ellos, un ejemplo de ello se muestra en la solución presentada por César en la Figura 5.10 y Lia en la Figura 5.11.



Para pintar las líneas del asfalto en una calle, se utiliza ① litro de pintura para trazar $\frac{1}{2}$ metro de línea. ¿Cuántos litros de pintura se utilizan para trazar $\frac{3}{4}$ m de línea?

1.25 Lo hice mental, dividi 1 entre 4 y me dio .25, mas el otro medio es como nos da el resultado.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2+4}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

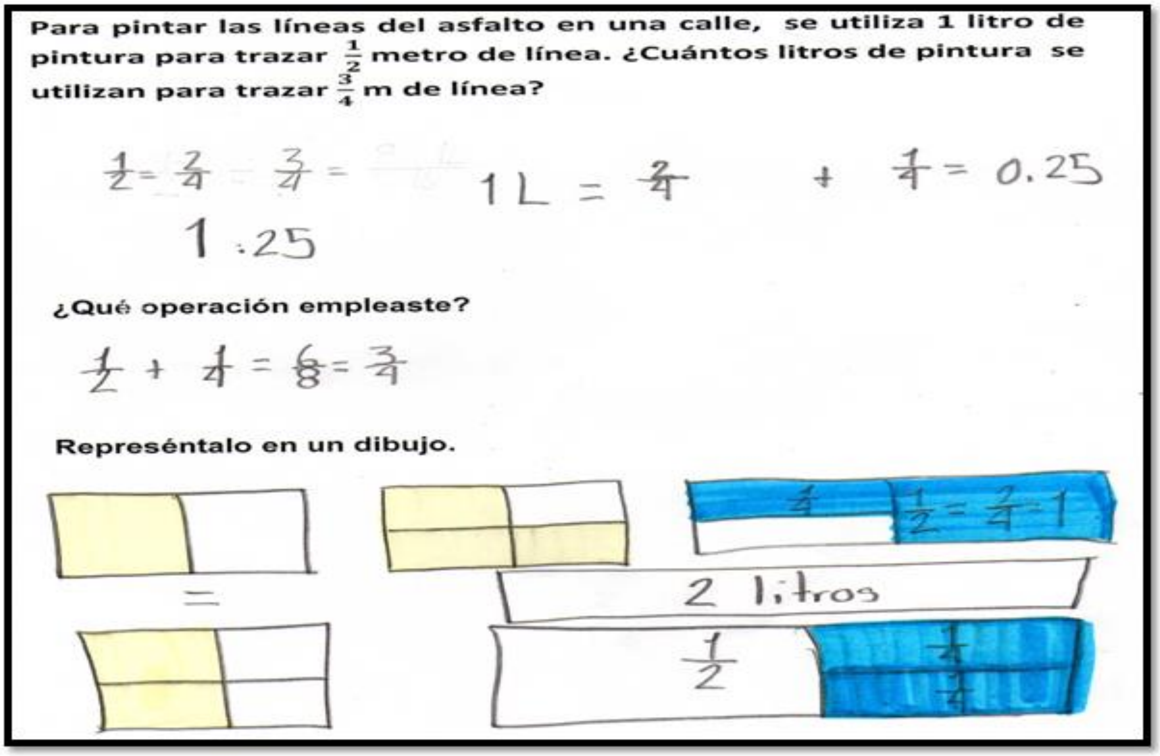
¿Qué operación empleaste?

Divisiones.
Y suma de fraccion

Represéntalo en un dibujo.

Fig. 5.10. Tarea resuelta por César con resultado incorrecto.

César y Lia tienen una idea de cómo resolverlo, sin embargo no logran concretar una respuesta adecuada. Proporcionan una respuesta incorrecta en decimal. César menciona la realización de divisiones, mediante el cálculo mental y el empleo de decimales. Analizando en el plano sintáctico, se observa una suma de fracciones realizada mediante productos cruzados, que César realiza de manera invertida, aunque obtiene un resultado correcto. Estos resultados proporcionados por César y Lia nos permiten establecer un insuficiente nivel de traducción al observar que consideran sólo una parte de la razón involucrada, es decir, presumiblemente tienen dificultades en la traducción del problema que los lleva a confundir los elementos involucrados en la razón, a mezclar ambos elementos y a proporcionar su respuesta en función de esa mezcla entre metros de línea y cantidad de pintura, lo que da evidencia de un insuficiente razonamiento proporcional. En el plano aritmético observamos, en el caso de César, el uso de diferentes construcciones numéricas, al emplear naturales, decimales y fracciones en el mismo problema. En la representación pictórica realizada por Lía se observa confusión y no logra establecer una respuesta correcta.



Para pintar las líneas del asfalto en una calle, se utiliza 1 litro de pintura para trazar $\frac{1}{2}$ metro de línea. ¿Cuántos litros de pintura se utilizan para trazar $\frac{3}{4}$ m de línea?

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ $\frac{3}{4} =$ 1L $= \frac{2}{4}$ $+$ $\frac{1}{4} = 0.25$

1.25

¿Qué operación empleaste?

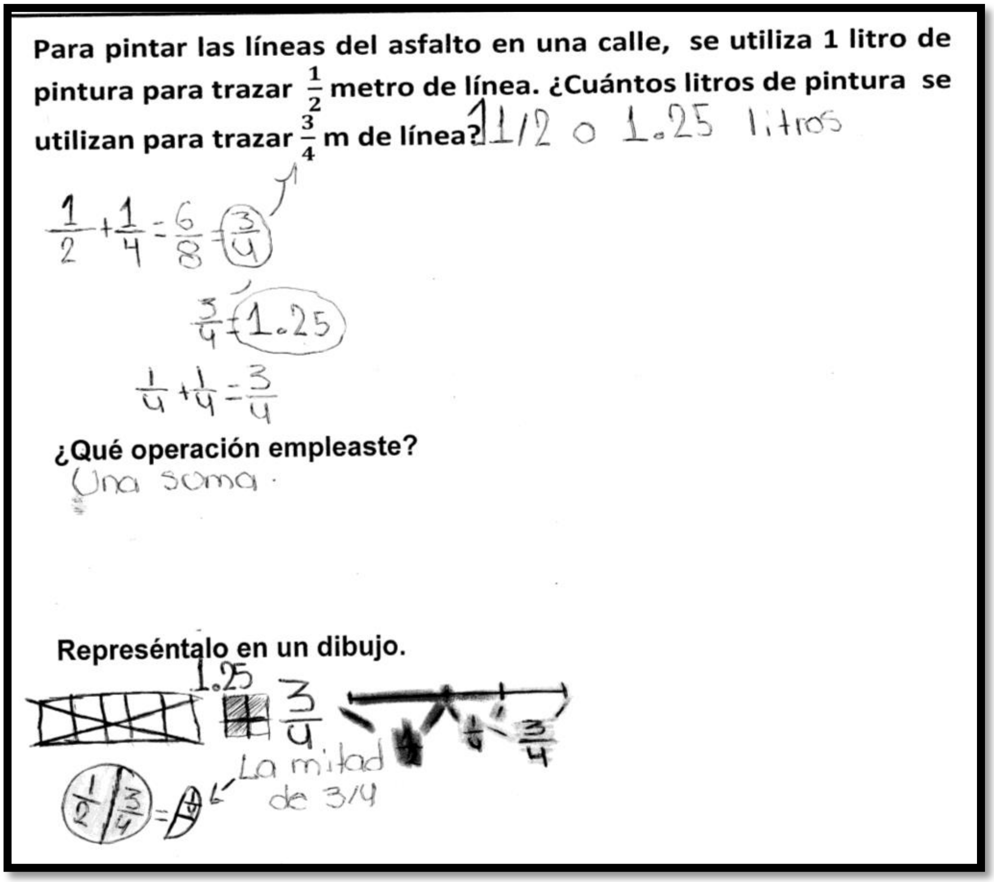
$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

Represéntalo en un dibujo.

Fig. 5.11. Tarea resuelta por Lia.

2. No identifica número de agrupamientos ni residuo.

Dentro de las dificultades observadas en los estudiantes se encuentran los que no logran identificar ni número de agrupamientos ni residuo y no existe un acercamiento a la división de fracciones, observando el empleo de diversas estrategias de solución sin desarrollar procesos adecuados, con una incorrecta traducción del problema. Algunos asocian la respuesta a una suma de fracciones, otros a una resta de fracciones y hay quien como Martha, asocia su respuesta a una multiplicación de fracciones. Un ejemplo de ello se muestra en la tarea resuelta por Regina (Fig. 5.12).



Para pintar las líneas del asfalto en una calle, se utiliza 1 litro de pintura para trazar $\frac{1}{2}$ metro de línea. ¿Cuántos litros de pintura se utilizan para trazar $\frac{3}{4}$ m de línea? 1 1/2 o 1.25 litros

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

$\frac{3}{4}=1.25$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

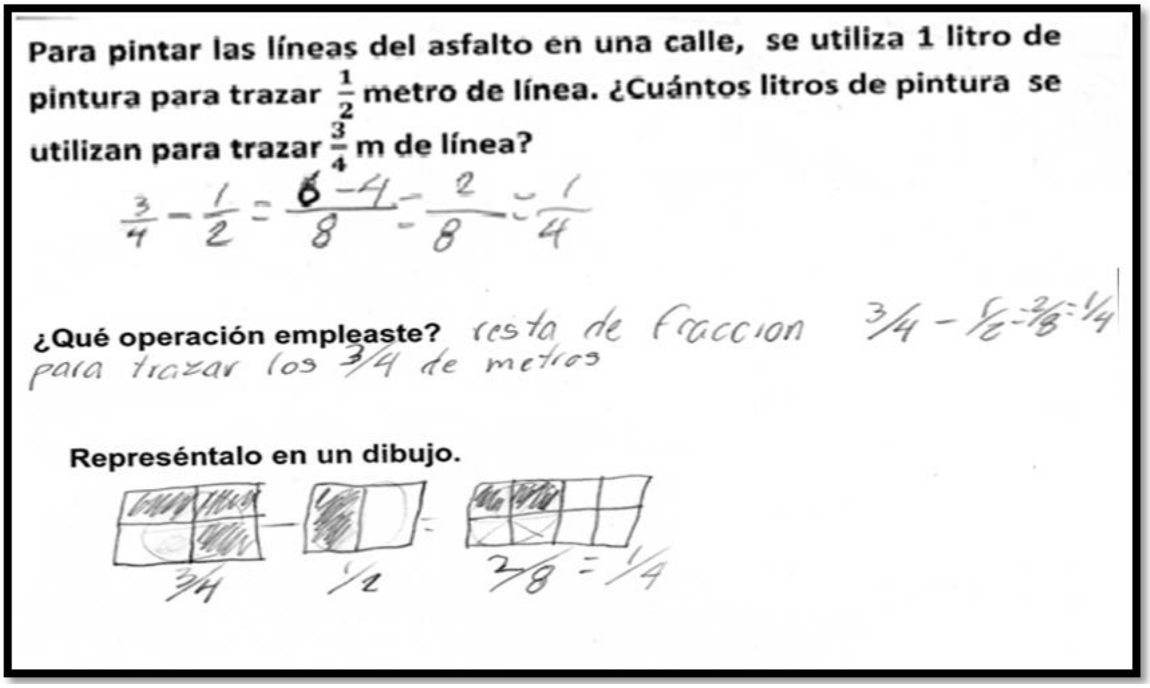
¿Qué operación empleaste?

Una soma.

Represéntalo en un dibujo.

Fig. 5.12. Tarea resuelta por Regina.

Regina proporciona una respuesta imprecisa, al presentar dos valores distintos que indican que no tiene claro cuál es el resultado adecuado, muestra evidencia de un incorrecto manejo de las fracciones y sus operaciones al igualar la suma $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ y $\frac{3}{4}=1.25$, además de una severa confusión en el manejo de los pictogramas, en dónde representa $\frac{3}{4}$ como la mitad de un entero y la mitad de tres cuartos como $\frac{1}{4}$ de la figura. Se observa un nivel insuficiente de traducción del problema al asociarlo a una suma de fracciones, sin una representación adecuada y no hay evidencia de cómo obtiene el resultado final. Podemos afirmar entonces, que el no tener claro el significado de las fracciones, representa un obstáculo cognitivo que impide concretar la solución a un problema de división de fracciones, al que no hay acercamiento ni siquiera de manera intuitiva.



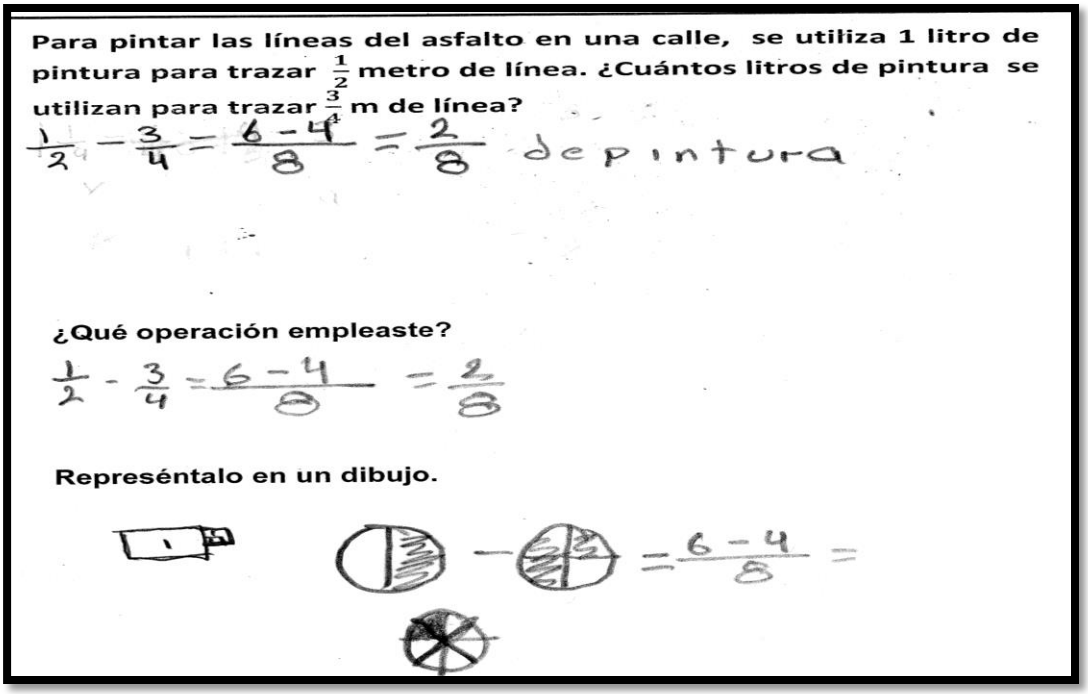
Para pintar las líneas del asfalto en una calle, se utiliza 1 litro de pintura para trazar $\frac{1}{2}$ metro de línea. ¿Cuántos litros de pintura se utilizan para trazar $\frac{3}{4}$ m de línea?

$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{6-4}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

¿Qué operación empleaste? resta de fraccion 3/4 - 1/2 = 2/8 = 1/4 para trazar los 3/4 de metros

Represéntalo en un dibujo.

Fig. 5.13. Tarea resuelta por Emiliano.



Para pintar las líneas del asfalto en una calle, se utiliza 1 litro de pintura para trazar $\frac{1}{2}$ metro de línea. ¿Cuántos litros de pintura se utilizan para trazar $\frac{3}{4}$ m de línea?

$\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{6-4}{8} = \frac{2}{8}$ de pintura

¿Qué operación empleaste?

$\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{6-4}{8} = \frac{2}{8}$

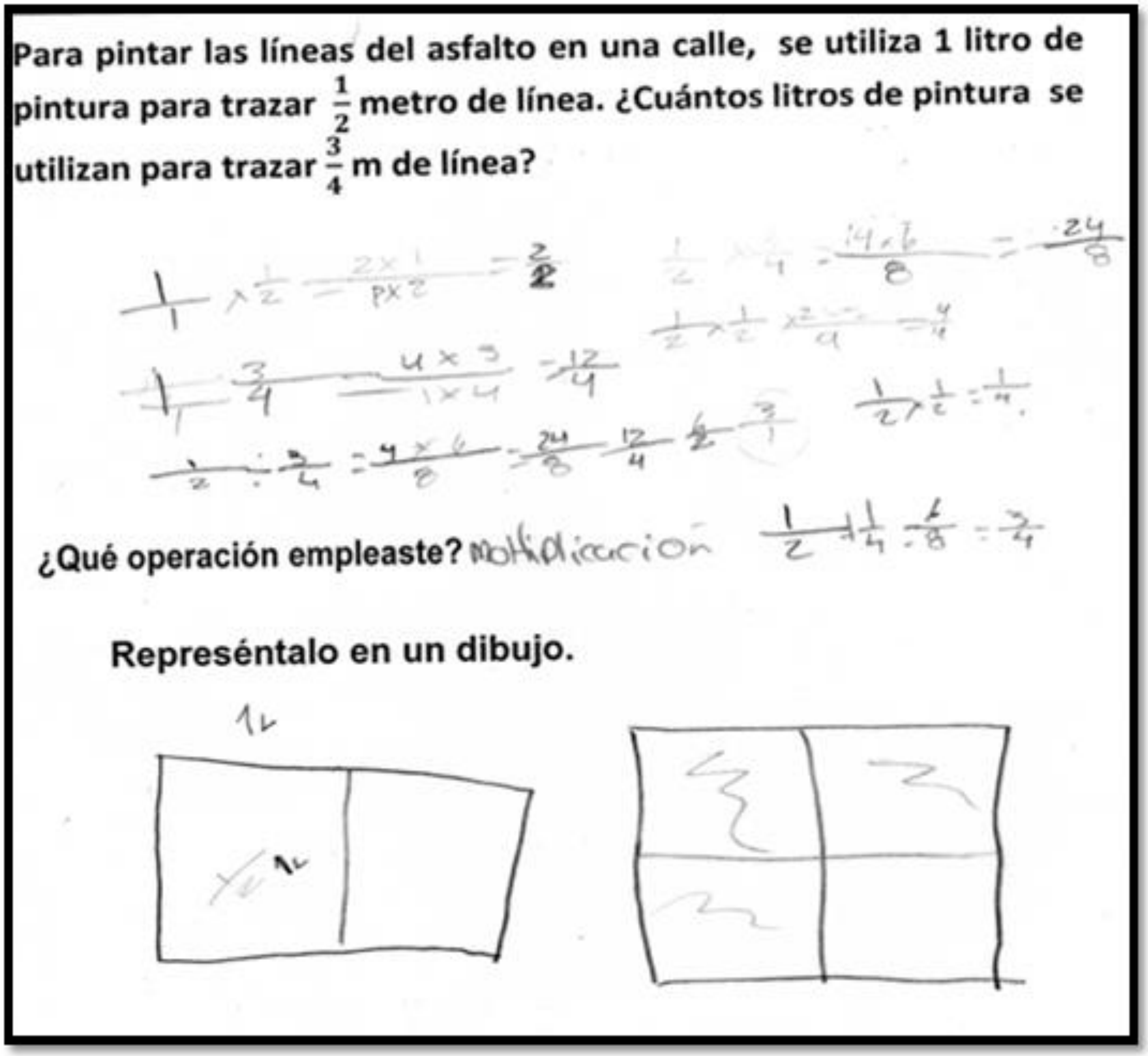
Represéntalo en un dibujo.

Fig. 5.14. Tarea resuelta por Daniel.

Emiliano (Fig. 5.13) y Daniel (Fig. 5.14), asocian su respuesta a una resta de fracciones, se observa por parte de Emiliano el desarrollo correcto del algoritmo de la resta y la realización de la representación pictórica adecuada, “de acuerdo a su interpretación”. Por parte de Daniel, se observa además la dificultad de abordar los números negativos, debido al orden que da a las fracciones en la resta que lo llevarían a obtener un resultado negativo y que los evita, ello permite establecer que "en su interpretación", él no puede quitar un número mayor a uno menor por lo que realiza la operación de manera inversa, incluso en su representación pictórica. Por lo antes expuesto, podemos afirmar que en ambos estudiantes existe dificultad para entender la razón involucrada, por la inadecuada traducción del problema que conduce a una respuesta errónea y a entender que no tienen claro el significado y sentido no sólo de la división de fracciones, sino tampoco el de la resta de fracciones, al asociar el problema a una resta. Es posible afirmar entonces, que el conocimiento del algoritmo no significa que exista una comprensión del significado y sentido de las operaciones, lo cual puede observarse sólo a través de la resolución de problemas y de la interpretación que dan a ello.

Cabe mencionar que durante el desarrollo del taller, en la segunda sesión, la investigadora en su recorrido por el aula, se acerca a Emiliano y le pregunta, *"¿Para ti que significa sumar fracciones?"* a lo que contesta, *"Es cuando multiplicas el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción y luego el denominador de la segunda por el numerador de la primera fracción y luego los sumas y multiplicas los denominadores*". La investigadora vuelve a preguntar *"¿eso significa para ti sumar?*", a lo que responde "*Sí, el método de la carita feliz*". Esto nos indica que para él sumar fracciones significa repetir el algoritmo y no comprende el significado ni el sentido de la operación.

Con respecto al problema resuelto por Carol (Fig. 5.15), podemos observar que ella tiene serias dificultades para determinar que algoritmo debe emplear para solucionar el problema, por lo que realiza varias operaciones con fracciones, al parecer planteadas al azar, incluyendo una división, con un desarrollo incorrecto de los algoritmos, empleando el mismo procedimiento de la carita feliz para todas las operaciones, sin proporcionar una respuesta adecuada y la representación pictórica que realiza es únicamente de las fracciones que se le presentan. Se encuentra muy lejos de determinar la solución al problema, en el que por supuesto no existe identificación de número de agrupamientos ni de residuo. Es claro que presenta un insuficiente nivel de traducción del problema y no tiene claro el significado y sentido de las operaciones.



Para pintar las líneas del asfalto en una calle, se utiliza 1 litro de pintura para trazar $\frac{1}{2}$ metro de línea. ¿Cuántos litros de pintura se utilizan para trazar $\frac{3}{4}$ m de línea?

$\frac{1}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{2 \times 1}{P \times 2} = \frac{2}{2}$

$\frac{1}{2} \times 4 = \frac{14 \times 6}{8} = \frac{24}{8}$

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} = \frac{4}{4}$

$\frac{1}{1} \div \frac{3}{4} = \frac{4 \times 3}{1 \times 4} = \frac{12}{4}$

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{4 \times 6}{8} = \frac{24}{8} = \frac{12}{4} = \frac{6}{2} = \frac{3}{1}$

¿Qué operación empleaste? moltiplicacion

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

Represéntalo en un dibujo.

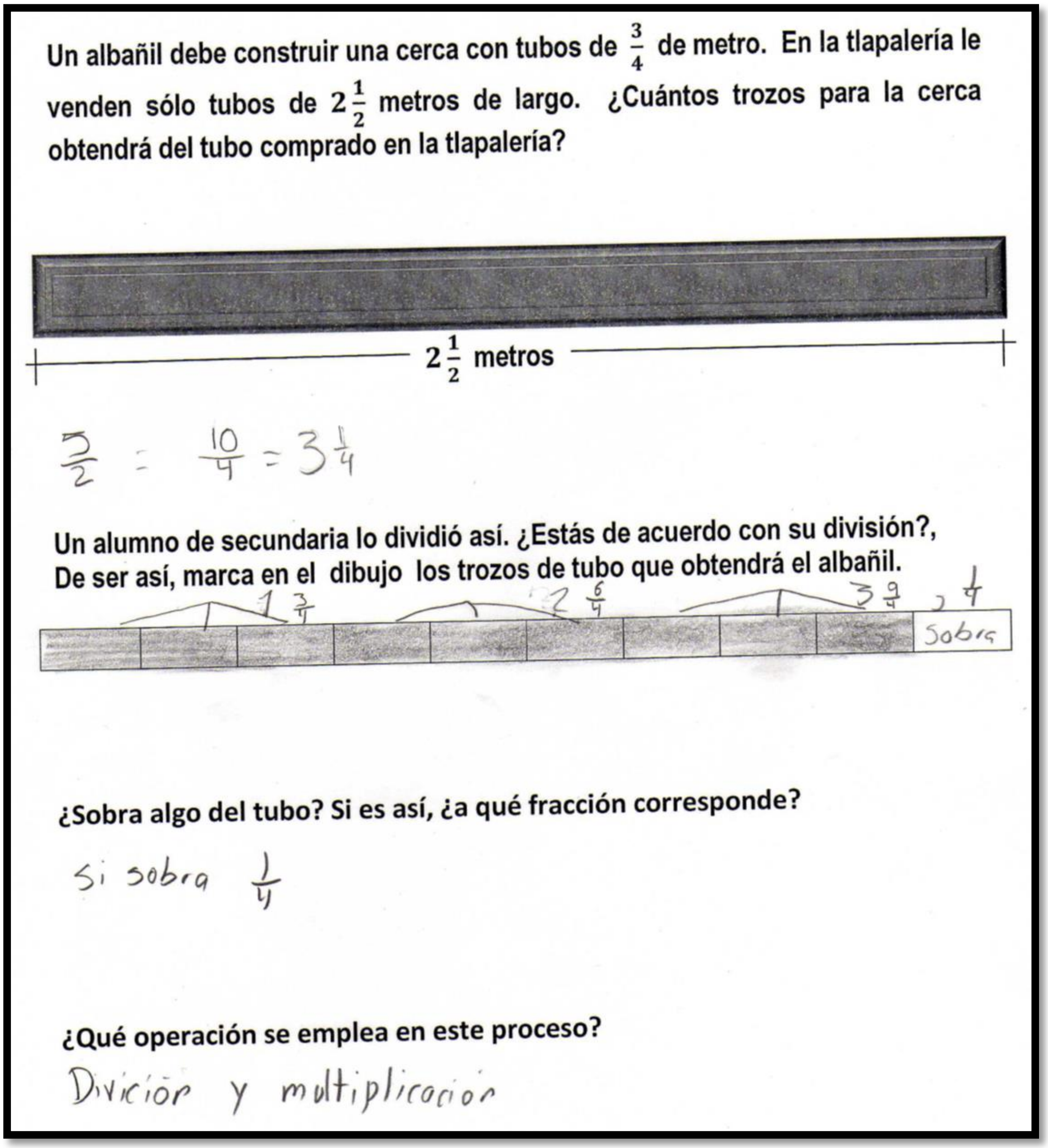
Fig. 5.15. Tarea resuelta por Carol.

5.3.2. Tarea 18 de división cuotativa

Con respecto a la tarea 18 sólo dos estudiantes la resolvieron y ambos presentan la misma respuesta, por lo que sólo se presenta una categoría de análisis, que se muestra a continuación.

Aciertos

1. **Identifica el número de agrupamientos, identifica residuo pero no se proporciona en función del divisor.**



Un albañil debe construir una cerca con tubos de $\frac{3}{4}$ de metro. En la tlapalería le venden sólo tubos de $2\frac{1}{2}$ metros de largo. ¿Cuántos trozos para la cerca obtendrá del tubo comprado en la tlapalería?

$\frac{5}{2} = \frac{10}{4} = 3\frac{1}{4}$

Un alumno de secundaria lo dividió así. ¿Estás de acuerdo con su división?, De ser así, marca en el dibujo los trozos de tubo que obtendrá el albañil.

¿Sobra algo del tubo? Si es así, ¿a qué fracción corresponde?

Si sobra $\frac{1}{4}$

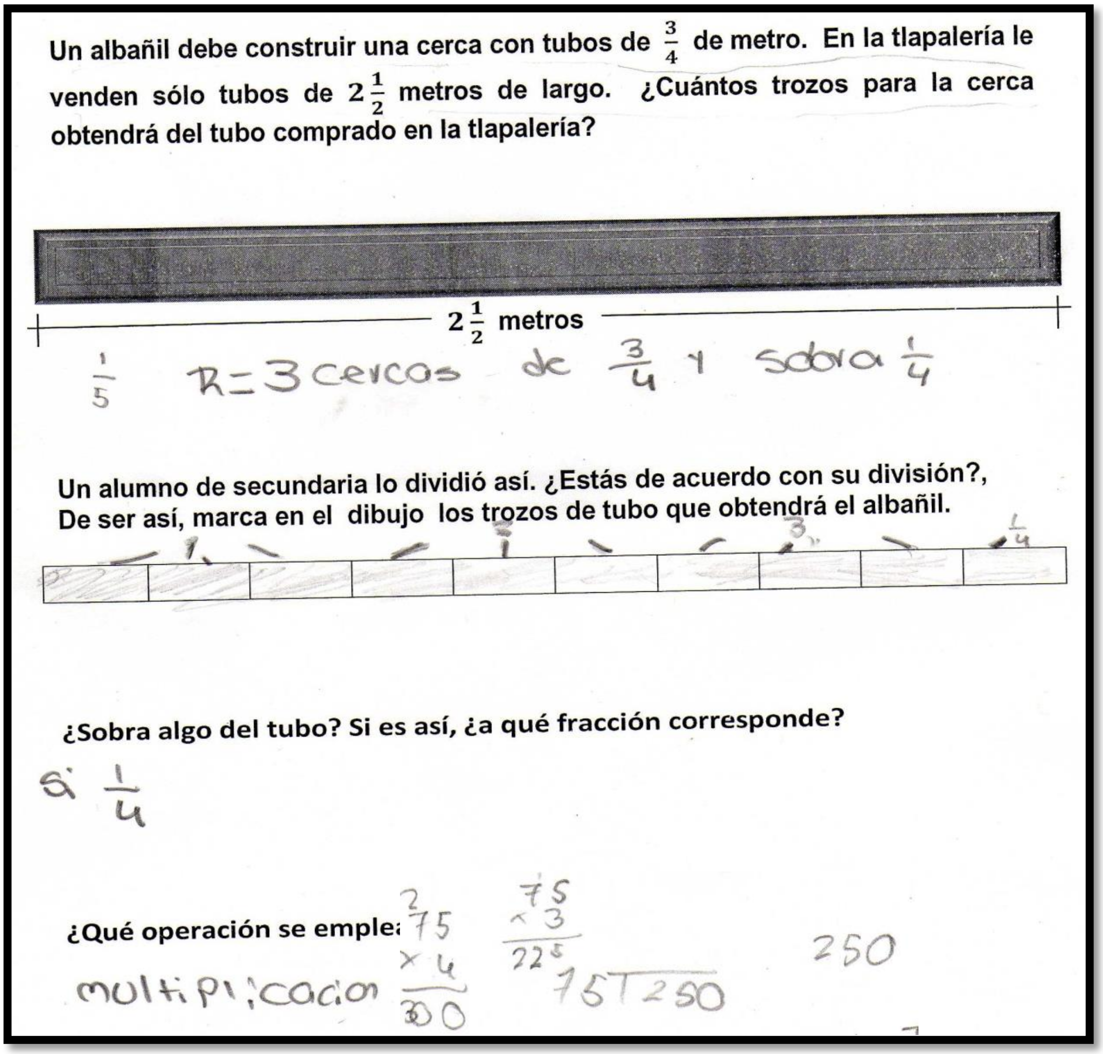
¿Qué operación se emplea en este proceso?

Divición y multiplicación

Fig.5.16. Tarea resuelta por Christian.

Christian resuelve adecuadamente el problema (Fig. 5.16), estableciendo el número de agrupamientos e identificando el residuo, pero no se proporciona en función del divisor. No se asocia a la división de fracciones. De acuerdo a su pictograma, se observa que realiza un proceso de medida y de suma iterada para identificar la respuesta. Menciona el empleo de división y multiplicación de las cuales no hay evidencia, sin embargo, por el proceso realizado en el inicio del problema en el que se advierte la conversión de la fracción mixta a impropia y después a una equivalente, es probable que se refiera a las multiplicaciones que requirió hacer para dicha transformación, que sólo involucra multiplicación de enteros, en lo que concierne a la división no queda claro a qué se refiere.

Analizando en el plano sintáctico, se advierte que iguala, al parecer sin darse cuenta, la fracción a dividir con la respuesta $\frac{5}{2} = \frac{10}{4} = 3\frac{1}{4}$, lo que representa un error. En el plano aritmético, se observa la realización de una adecuada suma iterada, combinándola con el conteo de cantidad de veces que se repite la fracción, lo que se puede observar en el pictograma. Sólo se advierte el uso de símbolos aritméticos, sin expresiones lingüísticas, a excepción de lo que menciona que sobra.



Un albañil debe construir una cerca con tubos de $\frac{3}{4}$ de metro. En la tlapalería le venden sólo tubos de $2\frac{1}{2}$ metros de largo. ¿Cuántos trozos para la cerca obtendrá del tubo comprado en la tlapalería?

$2\frac{1}{2}$ metros

$\frac{1}{5}$ R= 3 cercos de $\frac{3}{4}$ y sobra $\frac{1}{4}$

Un alumno de secundaria lo dividió así. ¿Estás de acuerdo con su división?, De ser así, marca en el dibujo los trozos de tubo que obtendrá el albañil.

¿Sobra algo del tubo? Si es así, ¿a qué fracción corresponde?

sí $\frac{1}{4}$

¿Qué operación se emple

multiplicacion

$\begin{array}{r} \overset{2}{7}5 \\ \times\ 4 \\ \hline 300 \end{array}$ $\begin{array}{r} 75 \\ \times\ 3 \\ \hline 22^5 \end{array}$ 75⟌250 250

Fig. 5.17. Tarea resuelta por Fernando.

En la solución proporcionada por Fernando (Fig. 5.17), a pesar de que su respuesta es adecuada, indicando el número de agrupamientos correcto y la identificación de un residuo, que es correcto, pero no se proporciona en función del divisor y que no se asocia a la división de fracciones, se percibe una ligera confusión, debido a que no hay consistencia con su respuesta proporcionada en fracción y las operaciones realizadas empleando naturales, a las que se refiere cuando se le pregunta qué operación empleó para la solución del problema. En ellas se observa que realizó una conversión de las fracciones dadas a centímetros y opera de esa manera, en la que al parecer se siente más cómodo. Por otro lado, la distribución hecha en el pictograma es correcta. Llama la atención también la fracción $\frac{1}{5}$ que expresa inicialmente y que no queda claro a qué se refiere. Y finalmente en el plano lingüístico, comete un error al referirse a cercas en lugar de tubos.

5.4. Uso de material de acetatos

Es importante aclarar que durante la sesión, se dio la oportunidad de socializar las respuestas obtenidas por algunos de los estudiantes, que pasaron al frente del grupo a exponer la forma en que resolvieron su problema (Fig. 5.18), debido a ello, suponemos que de las $\frac{9}{39}$ respuestas restantes, cuyo resultado es correcto y de las cuales llama la atención que la respuesta sea completamente similar y no exista evidencia de trabajo, consideramos posible que sólo copiaran de sus compañeros de equipo o del pizarrón después de haber resuelto el problema.

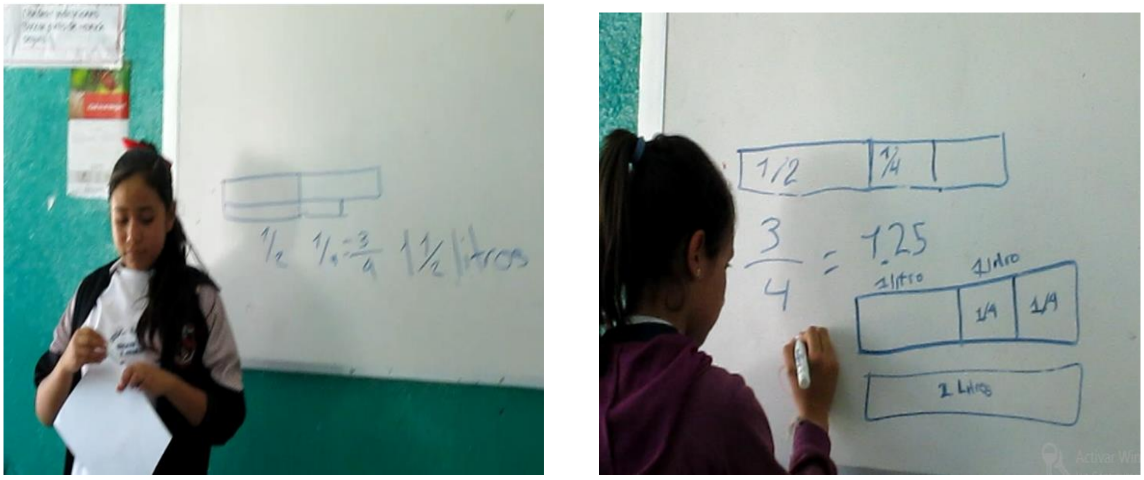


Fig. 5.18. Estudiantes en explicando en plenaria sus resultados de la división de fracciones.

Para finalizar la sesión y después de observar que ninguno de los estudiantes había asociado la solución del problema con la división de fracciones, la investigadora decidió acercar al grupo a la construcción del significado de la operación, mediante el empleo del modelo de conmensuración, planteado por Brousseau, mencionado y modificado por Block (2008) y el uso del material de acetatos elaborado para el juego de fracciones.

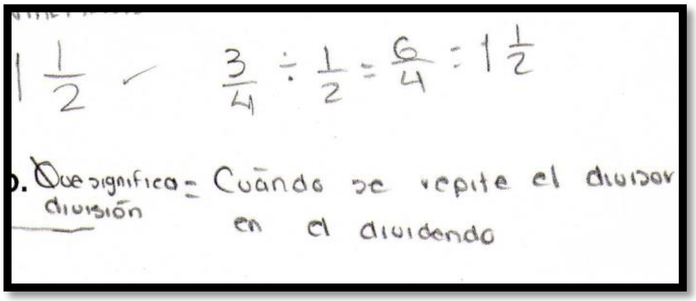
Para ello se estableció en el pizarrón en plenaria, la razón involucrada en el problema y mediante el empleo del isomorfismo de medida y el uso de la regla de tres, a la cual estaban familiarizados, se obtuvo como resultado el planteamiento de la operación de división de fracciones.

Litros de pintura	Metros de línea pintados
1	$\frac{1}{2}$
X	$\frac{3}{4}$

$$X = \frac{1 \ x \ \frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \div \frac{1}{2} =$$

Para resolverlo la investigadora socializa con los alumnos el problema, familiarizándolos con la expresión anterior, en la que $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}$ equivale a $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ y estableciendo qué fracción corresponde al dividendo y qué fracción corresponde al divisor. Se eligen del material, las fracciones involucradas en el problema y a través de la pregunta ¿cuántas veces cabe o cuánto se repite la fracción que representa al divisor en la fracción que representa al dividendo?, es decir, ¿cuántas veces cabe $\frac{1}{2}$ en $\frac{3}{4}$?, se conduce a los estudiantes hacia la solución, mediante el empleo del modelo de conmensuración, es decir, a través de la comparación y mediante medida, aprovechando el material traslúcido de los acetatos como se muestra en la Figura 5.20. Al realizar la pregunta los estudiantes contestan que sólo cabe una vez y el resto sobra. Para lograr la interpretación correcta del residuo, la investigadora menciona *"no cabe entero, pero cabe una parte ¿qué parte es la que cabe?, $\frac{1}{2}$ es ahora mi unidad ¿en cuántas partes está dividida?"*, ellos responden que *en 2*, la investigadora vuelve a preguntar *"¿cuántas de esas partes caben en $\frac{3}{4}$?"*, y ellos responden que *cabe* $\frac{1}{2}$, por lo que la respuesta final es 1 $\frac{1}{2}$. Es importante mencionar además que se lleva a cabo la reunitización del divisor lo cual se facilita con el empleo del material visual manipulativo, esto coincidiendo con Lamon (2012), quien menciona que en un problema de división, el divisor se convierte en la unidad (proceso de reunitización) y el residuo debe ser nombrado en términos del divisor, por lo que se les hace ver la importancia de interpretar el residuo en dichos términos. Posteriormente se resuelve la división planteada mediante el algoritmo (cuyo procedimiento no recordaban) y se realiza la comparación de ambos resultados, llegando a concluir que hay coincidencia lo que les permite construir el significado al expresar que dividir fracciones significa determinar cuántas veces cabe una fracción en otra. Después la investigadora les pregunta si se obtendrá el mismo resultado al invertir las fracciones, ¿será lo mismo?, para comprobarlo se realiza nuevamente el procedimiento descrito anteriormente con el material visual manipulativo invirtiendo las fracciones, como se muestra en la Figura 5.21. En un inicio los alumnos responden que no se puede, es decir no cabe ni una vez $\frac{3}{4}\ en\ \frac{1}{2}$, a lo que la investigadora menciona *"como lo hicimos anteriormente, repitamos el proceso, no cabe entero, pero cabe una parte ¿qué parte es la que cabe?,* $\frac{3}{4}$ *es ahora mi unidad ¿en cuántas partes está dividida?",* ellos responden que *en* tres, la investigadora vuelve a preguntar *"¿cuántas de esas partes caben en* $\frac{1}{2}$ *?",* y ellos responden que *caben* $\frac{2}{3}$ *o* $\frac{4}{6}$ considerando las divisiones del acetato. Finalmente llegamos a concluir en plenaria, que no significan lo mismo y que no es posible aplicar la conmutatividad en la división de fracciones.

Para concluir con la sesión, se les solicita que escriban con sus palabras en la misma hoja donde resolvieron el problema, lo que entendieron que significa dividir fracciones. Es por ello que se observa, regresando un poco a la solución de Rodrigo en la Fig. 5.3, en la página 138 y de Sandy en la Fig. 5.5, en la página 141, lo que para ellos significa dividir fracciones. Un ejemplo de ello se muestra en la figura 5.19, en la que Camila expresa lo que entendió al finalizar la intervención de la investigadora.



$1\frac{1}{2}$ ✓ $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$

. Que significa división = Cuándo se repite el divisor en el dividendo

Fig. 5.19. Respuesta posterior de Camila sobre significado de división.

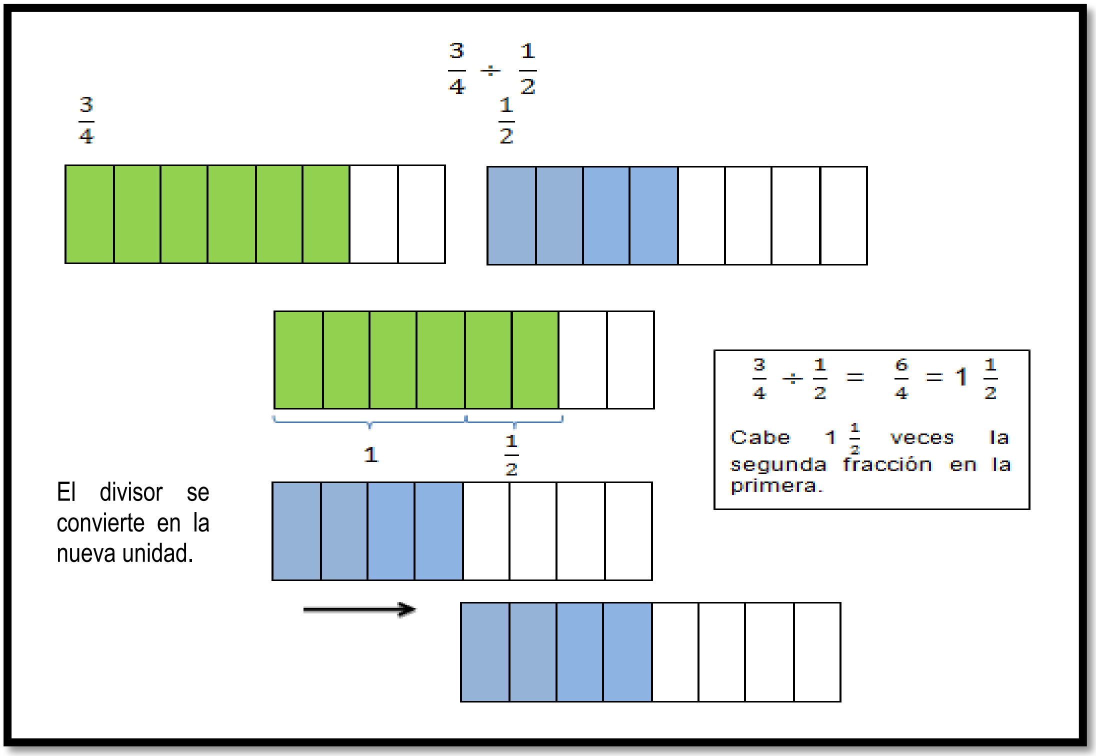


Fig. 5.20. Solución de la división de fracciones empleando el modelo de conmensuración y el uso de material visual manipulativo.

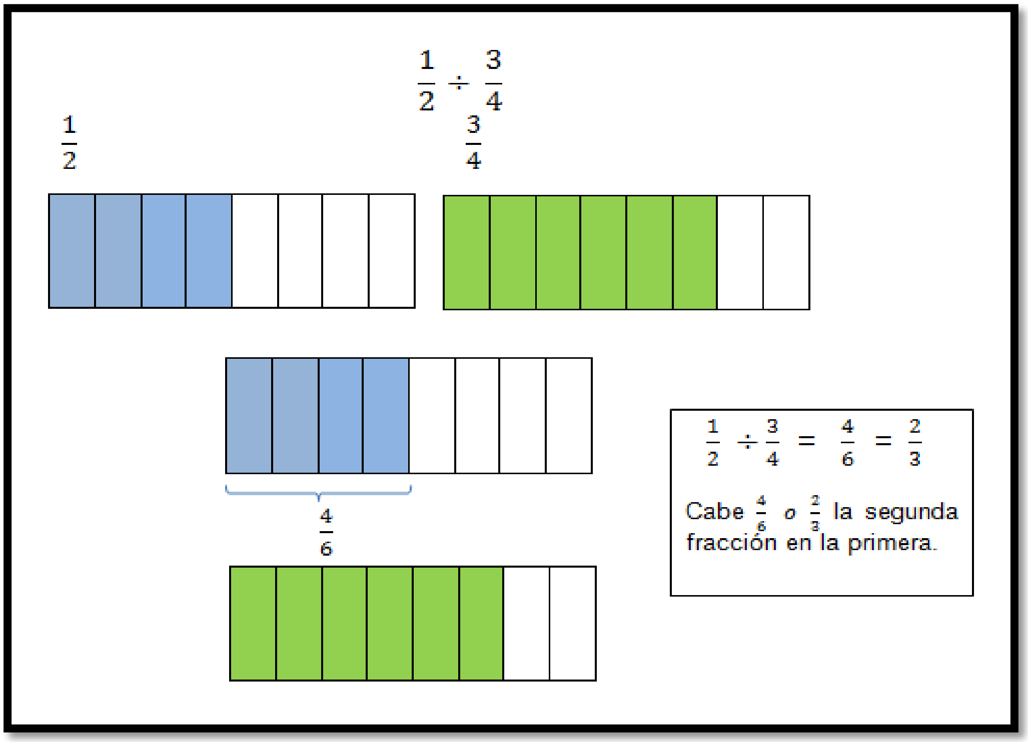


Fig. 5.21. Resolución mediante conmensuración invirtiendo las fracciones.

5.5. Juego de fracciones

La última sesión del taller se destinó a la aplicación del juego de fracciones diseñado por la investigadora, aplicando los significados de cada una de las operaciones, con el fin de reforzar lo aprendido en las sesiones anteriores, empleando el material del juego, consistente en acetatos marcados en fracciones, un tablero, dados, pirinola y fichas y una hoja para el registro de sus avances. Para más información sobre las reglas del juego véase Apéndice D.

Fig. 5.22. Equipo de alumnos jugando el juego de fracciones.

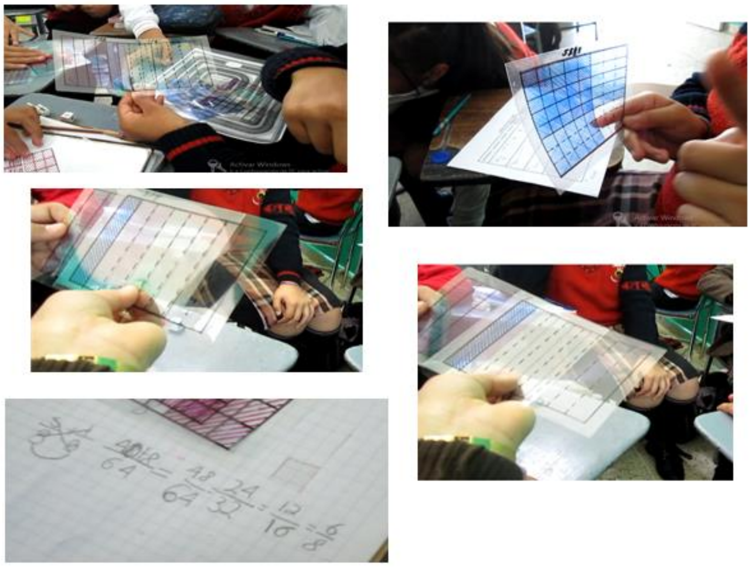
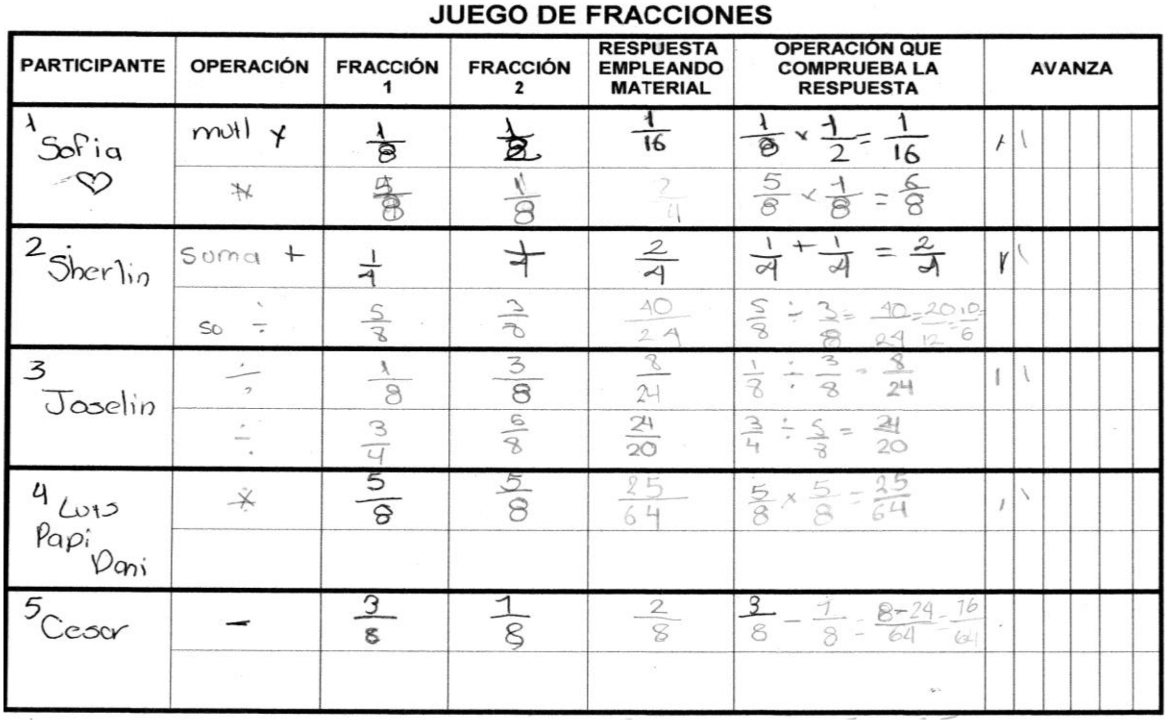


Fig. 5.23. Estudiantes empleando juego didáctico de fracciones.

El grupo se mostró entusiasta al participar activamente en el juego, en el que resolvieron las operaciones determinadas por la pirinola empleando los acetatos para obtener la fracción del resultado y comprobando si era correcto aplicando el algoritmo de la operación (Fig. 5.22 y 5.23). Fue posible observar en este punto las dificultades que genera en los estudiantes el empleo del método de la carita feliz, debido a que a pesar de ser operaciones de resolución sencilla como son la suma o resta de fracciones con denominador común, recurrieron al empleo de dicho método, complicando la resolución, como se muestra en algunas de las respuestas proporcionadas en la hoja de registro, en particular la respuesta proporcionada por César, en la que se observa que obtiene una fracción con el empleo del material y al realizar la operación de comprobación, pudiendo restar solamente los numeradores, se complica al emplear el método de la "carita feliz" proporcionando una fracción muy grande (Fig. 5.24).

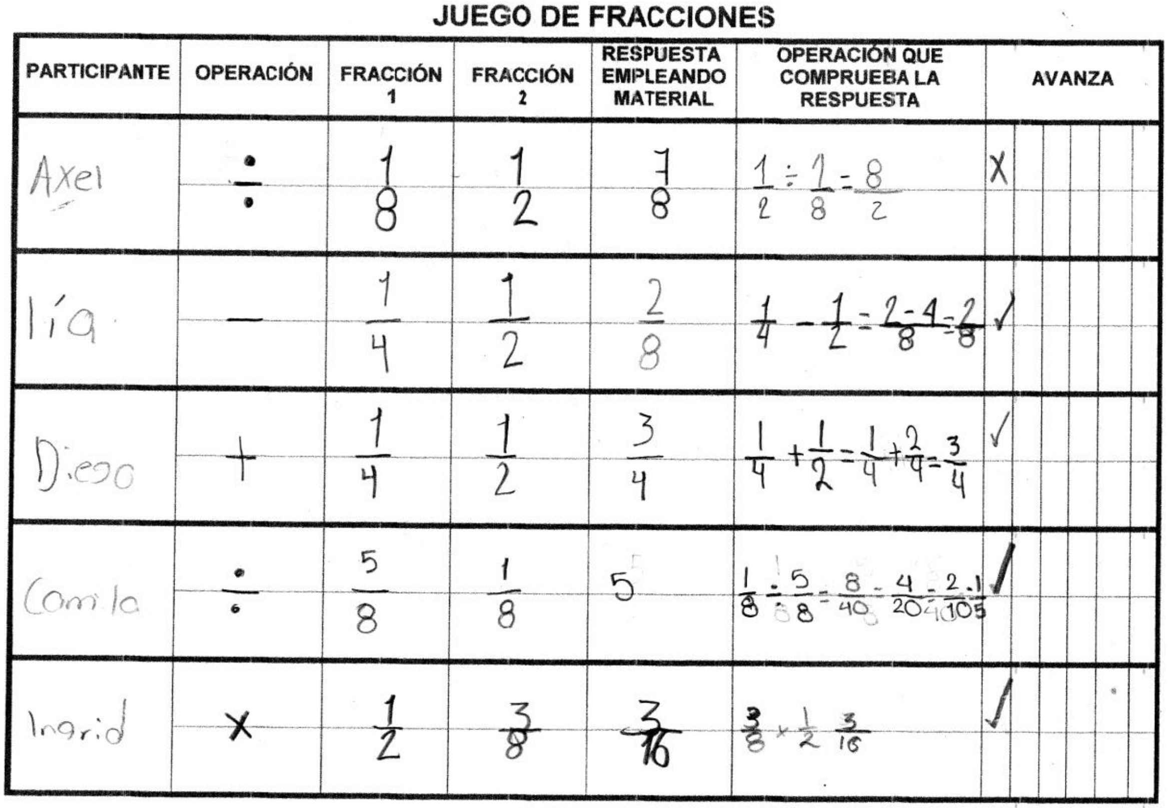


JUEGO DE FRACCIONES

PARTICIPANTE	OPERACIÓN	FRACCIÓN 1	FRACCIÓN 2	RESPUESTA EMPLEANDO MATERIAL	OPERACIÓN QUE COMPRUEBA LA RESPUESTA	AVANZA
1 Sofia ♡	mutl ×	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$	/ \
	×	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{5}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{6}{8}$	
2 Sherlin	Suma +	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$	/ \
	so ÷	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{40}{24}$	$\frac{5}{8} \div \frac{3}{8} = \frac{40}{24} = \frac{20}{12} = \frac{10}{6}$	
3 Joselin	÷	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{8}{24}$	$\frac{1}{8} \div \frac{3}{8} = \frac{8}{24}$	| \
	÷	$\frac{3}{4}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{24}{20}$	$\frac{3}{4} \div \frac{5}{8} = \frac{24}{20}$	
4 Luis Papi Dani	×	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{25}{64}$	$\frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{25}{64}$	/ \
5 Cesar	−	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{8-24}{64} = \frac{16}{64}$	

Fig. 5.24. Hoja de registro de las respuestas obtenidas en el juego.

En lo referente a la división de fracciones, se observa el caso de Camila (fig. 5.25), que al emplear el material obtiene una respuesta correcta, al determinar mediante el uso de los acetatos, que $\frac{1}{8}$ cabe 5 veces en $\frac{5}{8}$, pero al realizar la comprobación mediante el algoritmo invierte las fracciones y su respuesta es equivocada.



JUEGO DE FRACCIONES

PARTICIPANTE	OPERACIÓN	FRACCIÓN 1	FRACCIÓN 2	RESPUESTA EMPLEANDO MATERIAL	OPERACIÓN QUE COMPRUEBA LA RESPUESTA	AVANZA
Axel	÷	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{2} \div \frac{1}{8} = \frac{8}{2}$	X
Líá	—	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{2-4}{8} = \frac{2}{8}$	✓
Diego	+	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$	✓
Camila	÷	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	5	$\frac{1}{8} \div \frac{5}{8} = \frac{8}{40} = \frac{4}{20} = \frac{2}{10} . \frac{1}{5}$	✓
Ingrid	×	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{8} \times \frac{1}{2}$ $\frac{3}{16}$	✓

Fig. 5.25. Respuestas del juego de fracciones.

Al finalizar la sesión identificamos que sólo 3 equipos pudieron entender la dinámica del juego, pero una vez que lo entienden, su manejo les resulta muy sencillo. Desafortunadamente en el taller sólo contamos con una sesión para su aplicación; sin embargo, consideramos que con práctica los estudiantes se familiarizarían con el significado de las operaciones de manera lúdica. Podemos concluir que el juego permite acercar al alumno al significado de las operaciones, y brinda la oportunidad de asociarlo al algoritmo que le corresponde, permitiéndoles entender el orden de las fracciones en la operación, ya que representa para ellos una dificultad identificar cuál es el divisor y cuál el dividendo, como puede observarse en la Fig. 5.25 en la solución de Camila.

Este taller nos permitió observar las dificultades cognitivas que presentan los estudiantes en la solución de problemas de división de fracciones al no existir ni un solo alumno que asociara su respuesta a dicha operación.

Se pretendía además con este problema de razón, desarrollar el pensamiento proporcional del estudiante mediante el uso de unidades compuestas, se observó que sólo algunos lograron realizarlo y otros se confundieron en el proceso.

Podemos establecer que la resolución de tareas, mediante problemas que involucran la matemática realista, es decir problemas que se relacionan con su entorno social y el empleo de material manipulativo, favorecen la construcción de significado de la división de fracciones, en dónde la naturaleza de cada tarea propicia categorías semánticas particulares, acercando al estudiante a la propia construcción del conocimiento para que entiendan por sí mismos lo que significa dividir fracciones, estableciendo un puente entre las situaciones problemáticas y el trabajo numérico (coincidiendo con Freudenthal, 1983, Streefland, 1993, Flores, 2014, Valdemoros, 2004, Llinares y Sánchez, 2000), antes de acercarlo al algoritmo, involucrando sus conocimientos previos y desarrollando sus competencias en el manejo de las fracciones.

El uso del pictograma fue un importante respaldo para la solución del problema debido a que se observa que todos los estudiantes hicieron uso de él para representar su solución realizando una combinación y correcta asociación de la representación pictórica, aritmética y lingüística, acercándolos a la solución de manera intuitiva.

Podemos establecer como hipótesis, que en contextos distintos a los establecidos en el aula, el estudiante no es capaz de utilizar adecuadamente las herramientas aprendidas, es decir, los estudiantes tuvieron una serie de prácticas del algoritmo de división en la clase, sin embargo no pudieron trasladar ese conocimiento a su aplicación en la solución de un problema. En este aspecto coincidimos con Streefland, (1993), quien menciona que la dificultad que presenta la enseñanza de las fracciones en la escuela, consiste en que se tiende rápidamente a centrarse en un tratamiento formal y algorítmico de estas ideas. Y cuya alternativa consistiría en buscar situaciones de la vida real, apoyados en el conocimiento informal que tienen los estudiantes cuando entran en la escuela, potenciar a través de estas situaciones la "construcción" del concepto, las operaciones y las relaciones en las fracciones por los propios niños.

Basados en lo anterior, se observa en las soluciones de los estudiantes el uso de ese conocimiento informal, construyendo su conocimiento a partir de las ideas básicas que poseen como *repartir, dividir, mitad de la mitad, mitad y media,* etc**,** lo que hace evidente al observar sus estrategias, que para resolver los problemas de división de fracciones, se requiere de conocimientos previos como el manejo de la relación parte-todo que les permite partir el entero adecuadamente, así como las relaciones de equivalencia y el manejo de operaciones como la suma de fracciones, cuando el alumno no posee o no tiene claros estos conocimientos entonces presenta limitaciones conceptuales que le impiden lograr la compresión del objeto matemático implicado. Coincidiendo con Flores, 2014, quien menciona que para ser competente en la resolución de problemas de división de fracciones se requiere de una comprensión profunda de los principios matemáticos de los números racionales y sus operaciones.

Capítulo 6

Entrevistas en profundidad, de corte didáctico y el estudio de tres casos

Un análisis general de los resultados obtenidos en el cuestionario y la observación del trabajo efectuado en el taller, nos permitió seleccionar a 3 estudiantes para la realización de entrevistas. Debido a las dificultades observadas, el criterio de selección se basó en la elección de estudiantes que en su desempeño presentaban dificultades comunes a la problemática general del grupo.

Se realiza entrevista a Fernando, Brenda y Martha. En este capítulo se da cuenta de esas entrevistas, de las que surge el estudio de tres casos.

6.1. Entrevista en profundidad

De acuerdo con Taylor y Bogdan, (1992), una entrevista es una experiencia de laboratorio que nos permite indagar a profundidad. Se sustraen a los sujetos de investigación a una situación ajena al aula, para observar de manera más cercana sus producciones intelectuales. Se utiliza con el fin de obtener información amplia y detallada. Nos permite rescatar datos significativos de la persona a medida que se desarrolla la conversación. Las preguntas se formulan conforme transcurre el proceso de entrevista. Este tipo de entrevista proporciona una "orientación e interpretación significativa de la experiencia del entrevistado". Bisquerra, (1989), menciona que la entrevista de investigación es una conversación entre dos personas iniciada por el entrevistador con el propósito específico de obtener información relevante para una investigación. El entrevistado responde a las preguntas según sus propias palabras. Hay que evitar dar claves reveladoras de la respuesta correcta.

También introducen la “entrevista en profundidad” y la definen como encuentros reiterados cara a cara entre el investigador y los informantes, dirigidos hacia la comprensión de las perspectivas que tienen los informantes respectos de sus vidas, experiencias o situaciones, tal como las expresan con sus propias palabras y siguen el modelo de una conversación entre iguales, y no de un intercambio formal de preguntas y respuestas. El rol implica no sólo obtener respuestas, sino también aprender qué preguntas hacer y cómo hacerlas.

Las entrevistas en profundidad se dirigen también al aprendizaje sobre acontecimientos y actividades que no se pueden observar directamente. En este tipo de entrevistas los interlocutores son informantes en el más verdadero sentido de la palabra. Las entrevistas en profundidad, permiten conocer a la gente lo bastante bien como para comprender lo que quiere decir, y crean una atmósfera en la cual es probable que se exprese libremente.

6.1.1.. Entrevista de corte didáctico

De acuerdo a Valdemoros, (2008), la naturaleza didáctica de una entrevista está determinada por dos momentos, el primero involucra una fase inicial exploratoria, en el que se permite el avance del entrevistado empleando sus propios medios y el segundo de carácter *“constructivista-didáctico*” dónde se procura que el entrevistado supere sus dificultades cognitivas, retroalimentándolo, sin proponerle soluciones ni obstruir sus búsquedas.

6.1.3. Estudio de casos

El estudio de casos brinda un análisis en profundidad de un sujeto considerado individualmente. Se puede considerar la **unidad** como un sujeto, una clase, una escuela, una comunidad, etc. El propósito consiste en indagar y analizar profundamente los fenómenos que constituyen el ciclo vital de la unidad para establecer generalizaciones acerca de la población a la cual pertenece. La observación suele ser el método de investigación más frecuentemente utilizado y, de hecho, es la base de los estudios de casos. El estudio de casos es el estudio de la particularidad y complejidad de cada caso, para percibir su actividad en circunstancias importantes, Bisquerra, (1989).

6.2. Procedimiento de validación y categorías de análisis

Para llevar a cabo el análisis de la investigación realizamos un proceso de triangulación de las tareas elaboradas por los entrevistados en los distintos métodos empleados, comparando los procesos de solución empleados en los problemas, así como triangulación en el tiempo, es decir, analizamos como inician y como concluyen en sus procesos de aprendizaje. Tomamos en cuenta en este proceso de análisis las categorías elaboradas en los capítulos anteriores, que se resumen en la Tabla 6.1 y 6.2, y el modelo interpretativo de Valdemoros (2004).

Tabla 6.1. Categorías de análisis de la división partitiva

Categorías de análisis de la división partitiva	
Categoría	
Aciertos	Reparto equitativo y exhaustivo Identificación de tamaño del agrupamiento
Errores	Reparto equitativo y exhaustivo pero se equivocan en la fracción.
	Reparto equitativo no exhaustivo (no se agota el todo) No se identifica el tamaño del agrupamiento
	No logra realizar un reparto equitativo ni exhaustivo. No se identifica tamaño del agrupamiento.

Tabla 6.2. Categorías de análisis de la división cuotativa

Categorías de análisis de división cuotativa	
Categoría	
Aciertos	Identifica el número de agrupamientos, identifica residuo pero no se proporciona en función del divisor.
Errores	Identifica número de agrupamientos. Identifica residuo pero es incorrecto.
	Identifica número de agrupamientos. No se identifica residuo. (no lo proporciona o menciona que no sobra)
	No identifica número de agrupamientos ni residuo.

6.3. Las Entrevistas

La realización de las entrevistas nos permitió obtener información para el desarrollo del estudio de tres casos, cuyo objetivo es constatar si la resolución de problemas verbales empleando la representación pictórica y materiales visuales manipulativos favorece la creación de significado y sentido de la división de fracciones en los sujetos de estudio.

Debido a que se detectaron problemas en el grupo en el manejo de la división de fracciones, la selección de los entrevistados se concentró en elegir alumnos que en su desempeño en el cuestionario inicial y en el taller, presentaran dificultades que mostraran la problemática general del grupo. Partiendo de lo observado, se seleccionó a tres estudiantes Fernando, Brenda y Martha. En los siguientes capítulos se detalla cada caso en particular.

Las entrevistas fueron de carácter individual y semiestructurado, aunque se tenía un plan para cada tarea, la selección de la tarea a emplear lo determinaba el avance de cada entrevistado y el rumbo que tomara la entrevista. Para llevar a cabo las entrevistas se consideró partir de los trabajos realizados por los seleccionados en los instrumentos metodológicos anteriores, con el propósito de reconstruir los procesos que realizaron, solicitarles que los resolvieran nuevamente, buscando acercarlos a la identificación y corrección de sus errores, mediante la comparación de sus propias tareas.

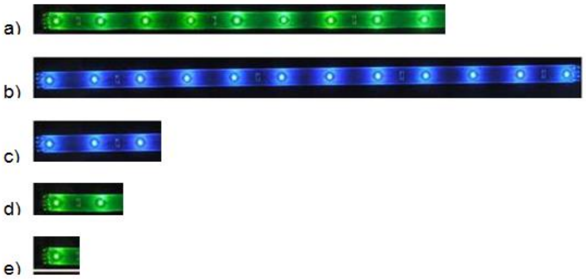
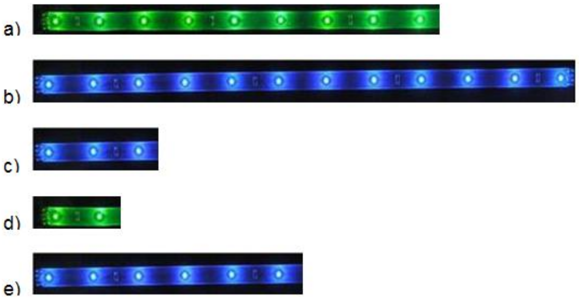
Se les permitió resolver los problemas con sus propios medios, cuando se observó que presentaban dificultades se les proporcionó material manipulativo y a través de preguntas, sin proporcionar respuestas, siguiendo las pautas proporcionadas por Valdemoros (2008) con respecto a la realización de una entrevista de corte didáctico, se intentó guiar su procedimiento, observando que el material les permitió hacer comparaciones, detectar y corregir sus errores y dar solución a las tareas, logrando superar sus dificultades cognitivas (Bell, 1986).

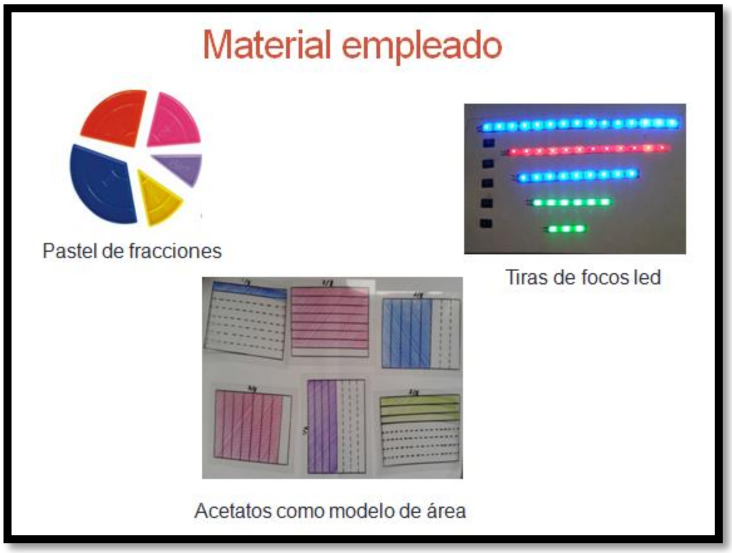
Para iniciar el trabajo con la división de fracciones fue necesario antes ayudar a los entrevistados a sortear las dificultades que presentaban en el manejo de las fracciones, algunas consideraban incluso la construcción numérica, para ello se emplearon los materiales mencionados (Fig. 6.1) y la introducción de algunas tareas adicionales que permitieran su acercamiento al logro de los objetivos planteados, (Tabla 6.3 y 6.4). Es importante mencionar que no se emplearon todas las tareas con los tres entrevistados, se eligieron algunas de acuerdo al criterio del investigador considerando el avance y disposición de cada uno.

Las tareas adicionales 1, 2, 3, y 5, fueron tareas de apoyo para lograr sortear las dificultades en los entrevistados, referentes al significado de la fracción, relación parte-todo, equivalencia, construcción numérica, partes de partes y producto de medida. Las tareas adicionales restantes consideraban la división de fracciones en sus diferentes significados, cuyo diseño se realizó tomando en cuenta las aportaciones de Vergnaud (1991), Lamon (2012), Flores (2014) y Valdemoros, Ramírez y Lamadrid (2017).

Tabla 6.3. Tareas adicionales empleadas en entrevista para acercar al estudiante a la semántica de las fracciones

ENTREVISTAS	
No. De tarea	**Tareas adicionales de entrevista**
1 Identificación de fracciones. Fracciones equivalentes.	De la tira de 12 leds:  ¿Cuántos leds tiene $\frac{1}{2}$? ¿Cuántos leds tiene $\frac{1}{3}$? ¿Cuántos leds tiene $\frac{1}{4}$? ¿Cuántos leds tiene $\frac{1}{6}$? ¿Cuántos leds tiene $\frac{2}{4}$? ¿Cuántos leds tiene $\frac{2}{6}$? ¿y $\frac{3}{6}$? Tus respuestas ¿tienen algo en común?Explica.
2 Identificación de una fracción en distintas unidades. Identificar que no se puede asociar una misma fracción en unidades distintas.	En el autobús que lleva al centro comercial se utilizan lámparas de leds para iluminar el interior como las que se muestran a continuación. a)  b)  c)  d)  ¿Cuántos leds representa $\frac{1}{3}$ en cada tira? a) b) c) d) De acuerdo a tu respuesta ¿consideras que tienen algo en común? Explica. ¿Se podrá sumar $\frac{1}{3}$ de la tira a) con $\frac{1}{3}$ de la tira c)? ¿Por qué?
3 Multiplicación de fracciones Preposición “de” Partes de partes	En el autobús que lleva al centro comercial se utilizan lámparas de led para iluminar el interior, cada lámpara tiene 9 leds, como la de la siguiente figura:  ¿Cuál de las tiras en la parte de abajo, representa $\frac{1}{3}$ de la tira de 9 leds? R1: ____________ ¿Y cuál tira representa $\frac{1}{3}$ de R1? R2: ____________ ¿Qué fracción de la tira de 9 leds representa R2? R3: ____________ ¿Podrías mencionar qué operación se relaciona con lo realizado anteriormente? Explica porqué____

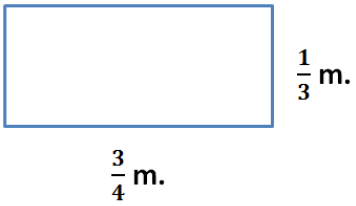
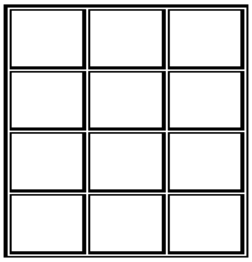
	
4 División de fracciones Familiarización con el término "cuántas veces cabe"	En su auto Enrique tiene un espacio para una lámpara de 15 leds  Pero sólo tiene tiras como las mostradas abajo.  ¿Cuántas tiras requiere de a) para completar los 15 leds? ¿Cuántas veces cabe b) en A)? ¿Cuántas tiras de e) se requieren para completar A)? ¿Qué operación se puede relacionar con lo anterior? Explica.

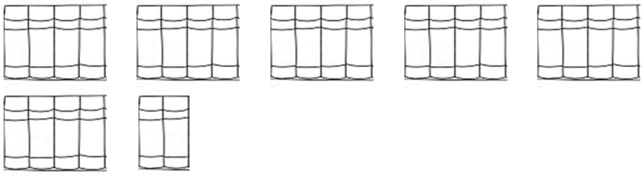
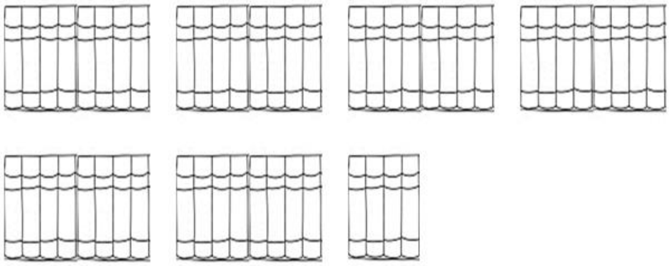
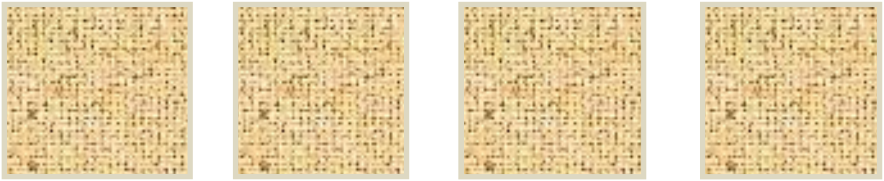


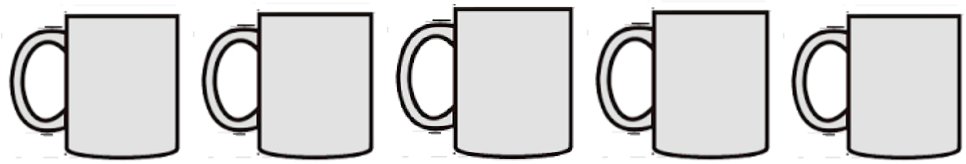
Material empleado

Fig. 6.1. Material visual manipulativo empleado en las entrevistas.

Tabla 6.4. Tareas adicionales empleadas en entrevista

ENTREVISTAS	
No. De tarea	**Tareas adicionales de entrevista**
5 Multiplicación de fracciones Modelo de área Producto de medida	Indica cuál es el área de la siguiente figura. Explica tu respuesta.  R= ______________m²
6 División de fracciones Modelo de área. Inverso del producto de medida	El terreno tiene un área de $\frac{3}{8}km^2$y de ancho mide $\frac{1}{2}$ km ¿Cuánto mide de largo? Dibuja el terreno. ¿Qué operación se requiere para resolver el problema? Indica.
7 División tasativa o cuotativa	Julio preparó una jarra de $2\frac{3}{4}$ litros de limonada. Si a cada vaso le cabe $\frac{1}{2}$ litro de limonada ¿para cuántos vasos de limonada alcanza la jarra, incluyendo fracción de vaso? (Flores, 2014) Colorea los vasos con limonada que se obtienen de la jarra.   ¿Qué operación representa ese resultado? ¿De qué otra manera representarías este problema?
8 División cuotativa de fracciones Todo discreto	Mónica trabaja en una librería y le pidieron que acomodara los libros que acaban de llegar en el nuevo librero.  En cada sección del librero se pueden acomodar $\frac{3}{4}$ de un paquete de libros. Si tiene que acomodar $6\frac{1}{2}$ paquetes de libros, ¿Cuántas secciones del librero ocupará? Representa cómo haría Mónica el reparto de libros para acomodarlos en el librero

	 ¿Qué operación resuelve el problema?
9 División cuotativa de fracciones	Si el paquete de libros fuera como el de la siguiente figura, y en cada sección del librero se pudieran acomodar $\frac{5}{8}$ del paquete de libros, ¿cuántas secciones del librero se ocuparían? Represéntalo en la siguiente figura:  ¿Qué operación resuelve el problema? Realízala. ¿Cómo comprobarías que el resultado es correcto?
10 División cuotativa Isomorfismo de medida	Con 1 paquete de papel tapiz, se tapiza $\frac{3}{4}$de pared, ¿cuántos paquetes de papel tapiz se requieren para tapizar $3\frac{1}{2}$ paredes? Represéntalo en la siguiente figura:  ¿Qué operación se resuelve el problema? Explica porqué____ ____
11 División Comparación multiplicativa	Se requiere $\frac{1}{2}$ taza de harina para hacer una dona. Se requiere $3\frac{1}{4}$ tazas de harina para hacer un pastel. ¿Cuánta más harina requiere un pastel? Represéntalo en la siguiente figura:

	 ¿Qué operación resuelve el problema? Realízala. Explica porqué____ ____
12 Inverso del producto de medida	Enrique compró una megapantalla para su casa, de área mide $3\frac{1}{2}m^2$ y de ancho mide $1\ \frac{1}{2}$ m. ¿Cuánto mide de largo? Escribe las operaciones que resuelven el problema.

Algunas de las tareas adicionales involucran la división cuotativa considerando el isomorfismo de medida, el inverso del producto de medida y la comparación multiplicativa, temas muy poco abordados en el currículo escolar y con los cuáles se pretende observar el desempeño de los estudiantes entrevistados en la resolución de dichas tareas.

6.4. Cuestionario final

Posterior a las entrevistas y con el objetivo de contrastar resultados mediante triangulación, se lleva a cabo la aplicación, a los tres entrevistados, de un cuestionario final que consta de 5 problemas de división de fracciones, considerando las distintas interpretaciones de la división y que involucra diferentes niveles de razonamiento. Dichos problemas no incluyen pictogramas, como en el cuestionario inicial, con el objetivo de determinar si se observa un avance en el estudiante después de la entrevista y el empleo de material manipulativo. Se pretende observar si logra resolver los problemas sin el apoyo de dichos pictogramas y si logró comprender el significado y sentido de dicha operación. Se introducen los significados de división partitiva y cuotativa, considerando isomorfismo de medida, inverso del producto de medida y comparación multiplicativa. Dicho cuestionario se observa en la Tabla 6.5.

Tabla 6.5. Cuestionario final aplicado a los entrevistados

CUESTIONARIO FINAL		
Número de tarea	**Significado asociado**	**Problema verbal de división de fracciones**
1	**División cuotativa** **Problema de razón asociado al isomorfismo de medida**	**Un auto recorre $\frac{1}{6}$ del camino de Pachuca a Tula en 1 hora. ¿En cuánto tiempo recorrerá $\frac{3}{8}$ del camino?** **¿Qué operación resuelve el problema? Realízala.** **Inventa un problema similar que emplee los datos del problema anterior.**
2	**Problema de área** **División como el inverso del producto de medida.**	**Enrique quiere cambiar la cubierta de su escritorio. La cubierta tiene un área de $\frac{5}{20}$ m^2 y de largo mide $\frac{3}{4}$ m. ¿Cuánto mide de ancho la cubierta?** **¿Qué operación resuelve el problema?** **Inventa un problema similar y resuélvelo.**
3	**División partitiva** **Reparto equitativo y exhaustivo.**	**Laura tiene en el refrigerador $5\frac{1}{2}$ flanes napolitanos, los repartirá de manera equitativa entre ella y sus 7 vecinos. ¿Cuánto recibirá cada uno?** **Inventa un problema similar al anterior.** **¿Qué operación lo resuelve? Explica.**
4	**Comparación multiplicativa (búsqueda de un escalar)**	**Margarita ocupó $\frac{1}{4}$ Kg de jamaica para hacer agua. Azucena preparó más agua y ocupó $2\,\frac{3}{8}$ kg de jamaica. ¿Cuántas veces más jamaica ocupó Azucena?** **¿Qué operación se emplea para resolver el problema? ¿Por qué?** **Inventa un problema similar y resuélvelo.**
5	**Comparación multiplicativa (búsqueda de una medida)**	**Laura empleo 3 veces más tela de la que empleó Estela para hacer sus cortinas. Si Laura empleó $2\frac{3}{4}$ m, ¿cuánta tela empleó Estela para hacer sus cortinas?** **¿Por qué lo resolviste así? Explica.** **Inventa un problema similar.**

La aplicación de este cuestionario nos permitirá determinar si se observa un avance en los estudiantes entrevistados. La resolución se efectuará de manera individual, con sus propios medios, sin apoyo por parte de la investigadora y ahora sin el empleo de material manipulativo.

En este capítulo se abordó de manera general el tema y las tareas de entrevista, así como el planteamiento del cuestionario final y los objetivos que se persiguen en su aplicación. Los resultados de la aplicación de estas tareas nos permitirán desarrollar tres estudios de caso, los cuales se muestran en los siguientes capítulos.

Capítulo 7

El caso de Fernando

En este capítulo se aborda el caso de Fernando, quien fue elegido para entrevista debido a que nos llamó la atención en la observación de clase, que la profesora le pedía participar continuamente, al parecer lo consideraba un niño muy inteligente; sin embargo, al observar el desempeño mostrado en el cuestionario inicial de exploración y en el taller exploratorio se detectan en él, serias dificultades cognitivas. Se muestran aquí, las dificultades observadas y la manera en que logró sortearlas en el desarrollo de la entrevista, así como el desempeño que mostró en el cuestionario final.

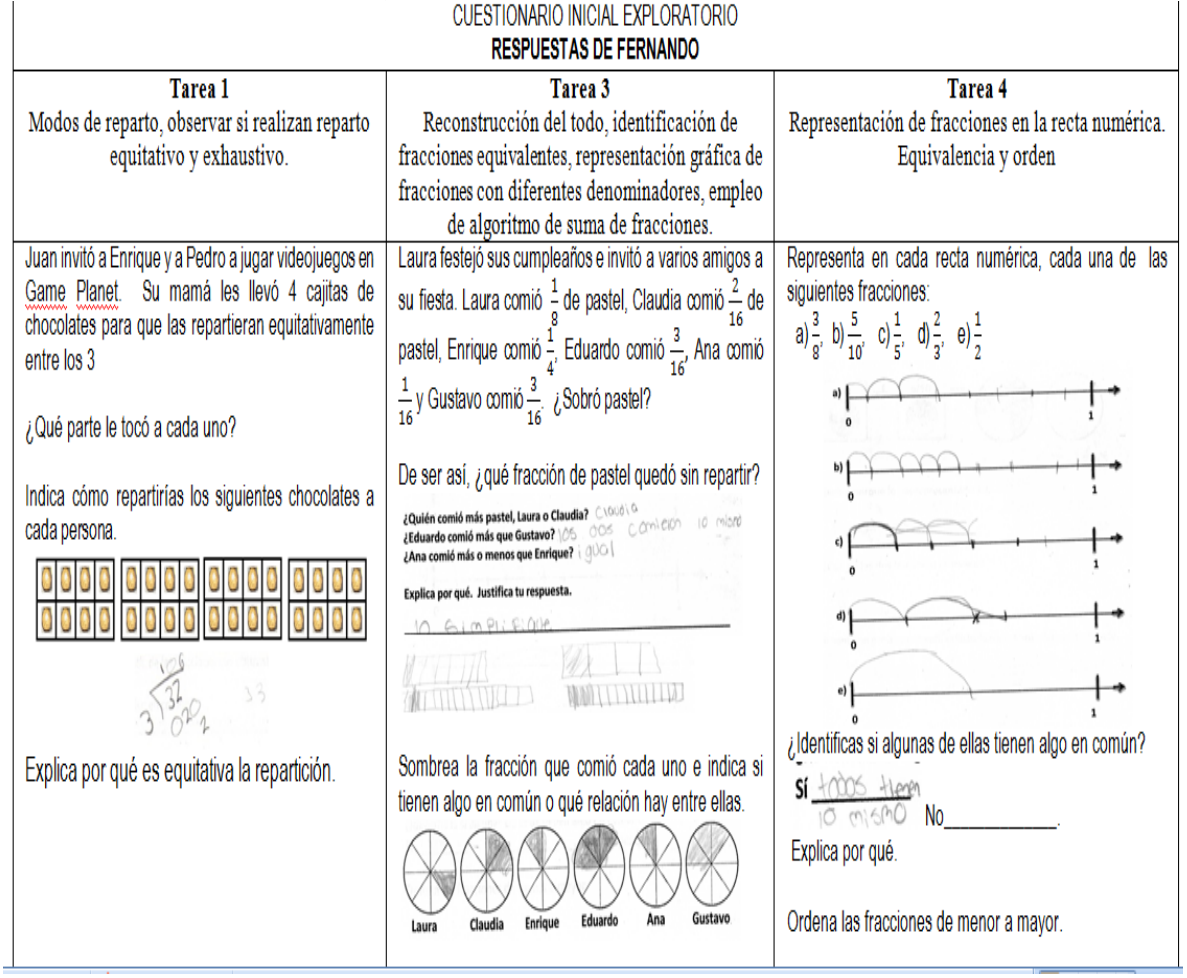
7.1. La entrevista con Fernando

Para este caso se tomaron en cuenta los trabajos de Fernando en los diferentes instrumentos metodológicos y a través de comparaciones llevar a cabo el análisis correspondiente.

En la entrevista se le presentaron sus tareas elaboradas en el cuestionario con el propósito de reconstruir los procesos que utilizó o solicitarle resolver el problema nuevamente, buscando acercarlo a la identificación y corrección de sus errores, mediante la comparación de sus propias tareas. Se permitió que Fernando, como se había mencionado anteriormente, resolviera el problema con sus propios medios, cuando se observó que presentaba dificultades se le proporcionó material manipulativo y a través de preguntas, sin proporcionar respuestas, se intentó guiar su procedimiento, observando que el material le permitió hacer comparaciones y dar solución al problema.

En las tareas del cuestionario resueltas por Fernando, se evidencian dificultades cognitivas y de cálculo en el manejo de los números fraccionarios. En la primera tarea (Tabla 7.1), se le requería realizar un reparto, se observa que hay ausencia de reparto equitativo y exhaustivo y sólo recurre al empleo de una división de naturales, se advierte en general una tendencia a trabajar con números naturales. En la tarea 3 en la que se requería representar gráficamente algunas fracciones, identificar equivalencia y reconstruir el todo, no hace una correcta representación de las fracciones, no se observa identificación de orden en dichos números ni reconstrucción del todo y en la Tarea 4 no identifica orden, además de presentar algunas dificultades en sus representaciones en la recta numérica.

Tabla 7.1. Tarea 1, 3, y 4 del cuestionario inicial exploratorio elaboradas por Fernando



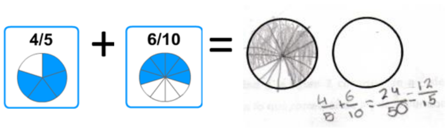
CUESTIONARIO INICIAL EXPLORATORIO

RESPUESTAS DE FERNANDO

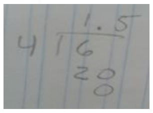
Tarea 1 Modos de reparto, observar si realizan reparto equitativo y exhaustivo.	**Tarea 3** Reconstrucción del todo, identificación de fracciones equivalentes, representación gráfica de fracciones con diferentes denominadores, empleo de algoritmo de suma de fracciones.	**Tarea 4** Representación de fracciones en la recta numérica. Equivalencia y orden
Juan invitó a Enrique y a Pedro a jugar videojuegos en Game Planet. Su mamá les llevó 4 cajitas de chocolates para que las repartieran equitativamente entre los 3 ¿Qué parte le tocó a cada uno? Indica cómo repartirías los siguientes chocolates a cada persona. 106 3)32 020 2 33 Explica por qué es equitativa la repartición.	Laura festejó sus cumpleaños e invitó a varios amigos a su fiesta. Laura comió $\frac{1}{8}$ de pastel, Claudia comió $\frac{2}{16}$ de pastel, Enrique comió $\frac{1}{4}$, Eduardo comió $\frac{3}{16}$, Ana comió $\frac{1}{16}$ y Gustavo comió $\frac{3}{16}$. ¿Sobró pastel? De ser así, ¿qué fracción de pastel quedó sin repartir? **¿Quién comió más pastel, Laura o Claudia?** Claudia **¿Eduardo comió más que Gustavo?** los dos comieron lo mismo **¿Ana comió más o menos que Enrique?** igual **Explica por qué. Justifica tu respuesta.** lo simplifique Sombrea la fracción que comió cada uno e indica si tienen algo en común o qué relación hay entre ellas. **Laura** **Claudia** **Enrique** **Eduardo** **Ana** **Gustavo**	Representa en cada recta numérica, cada una de las siguientes fracciones: a) $\frac{3}{8}$, b) $\frac{5}{10}$, c) $\frac{1}{5}$, d) $\frac{2}{3}$, e) $\frac{1}{2}$ a) 0 1 b) 0 1 c) 0 1 d) 0 1 e) 0 1 ¿Identificas si algunas de ellas tienen algo en común? **Sí** todos tienen lo mismo No____________. Explica por qué. Ordena las fracciones de menor a mayor.

En la Tarea 5 (Tabla 7.2), se solicitaba representar gráficamente una suma de fracciones e identificar orden, se identifican problemas en el manejo de algoritmos, modificando procedimientos en las operaciones. Se observan también dificultades en la construcción numérica y con la idea de unidad, no sólo en los números fraccionarios sino en la conversión a decimales como se advierte en la Tarea 8 en la que se le solicitaba identificar partes de partes. Evita trabajar con fracciones y recurre nuevamente a naturales y decimales. En cuanto a las representaciones no toma en cuenta la congruencia de las partes. No se percibe reconocimiento de la relación parte-parte, no identifica la preposición “de” y no logra asociarla con la multiplicación de fracciones.

Tabla 7.2. Respuestas de Fernando a las Tareas 5 y 8 del cuestionario inicial exploratorio.

<table>
<tr><th colspan="2">CUESTIONARIO INICIAL EXPLORATORIO
RESPUESTAS DE FERNANDO</th></tr>
<tr><th>Tarea 5
Representación gráfica de una suma de fracciones. Empleo de algoritmo. Invención de problemas.</th><th>Tarea 8
Representación gráfica de partes de partes, identificación de la preposición “de”</th></tr>
<tr><td>¿Qué figura se obtiene al sumar las dos fracciones siguientes?

$\frac{4}{8}+\frac{6}{10}=\frac{24}{50}=\frac{12}{15}$
Explica por qué lo has representado así.
asi me salio el resultado
¿Cuál de las dos fracciones es mayor?
$\frac{4}{5}$
Inventa un problema donde utilices los datos anteriores. Resuélvelo.
$\frac{4}{5} \times \frac{6}{10} = \frac{40}{30} = \frac{20}{15}$</td><td>Adriana compró una pizza grande hawaiana, la pizza estaba cortada en ocho partes, se sentó a ver la televisión y se comió dos rebanadas. En ese momento llegaron a visitarla 4 de sus viejos amigos. Ella repartió equitativamente lo que quedaba de la pizza entre sus amigos.

¿Qué fracción tenía que repartir? $\frac{1}{5}$
¿Qué fracción de pizza le correspondió a cada uno? $\frac{1}{5}$
Sombrea en el círculo en blanco, la cantidad de pizza que recibiría una persona.

¿Cuál es la expresión que define el problema?
a) $\frac{1}{8}$ de $\frac{6}{4}$ c) $\frac{6}{8}$ de $\frac{2}{4}$
b) $\frac{1}{4}$ de $\frac{6}{8}$ d) $\frac{6}{8}$ de $\frac{1}{4}$

Del todo original dividido en octavos, ¿qué parte es la que escogiste? Explica cómo obtuviste esos resultados y simplifícalos.
dividi 6 ÷ 4 y me dio $\frac{1}{5}$</td></tr>
</table>

En las tareas que involucran división de fracciones, que en el cuestionario exploratorio son tres, no se percibe identificación del tamaño del grupo en la división partitiva (no logra reparto equitativo), ni número de agrupamientos en la división cuotativa y por supuesto no identifica el residuo.

Nos interesa observar en entrevista las resoluciones de Fernando en problemas de división de fracciones, pero para ello es necesario ayudarle a sortear las dificultades que presenta, por lo que se trabaja con él en la reelaboración de sus tareas, reparto equitativo, orden y equivalencia, suma, resta y multiplicación, para concluir con un par de ejercicios de división.

Se trabajan con él las cuatro primeras tareas adicionales (Tabla 6.3), que permiten emplear el material manipulativo elaborado por la investigadora, inspirado en el modelo de conmensuración, que consta de tiras de leds de diferentes tamaños y colores, que tuvieron como objetivo identificar fracciones equivalentes, tamaños diferentes de la unidad (identificando la unidad por el número de leds en la tira) y realizar comparaciones; la finalidad, observar si su empleo ayuda a generar en Fernando las nociones de la semántica de las operaciones.

Si bien en este reporte no analizaremos todas las tareas realizadas por Fernando, por ser la división de fracciones el tema central de la investigación, como se mencionó anteriormente, existen ciertos hallazgos en sus elaboraciones, que es importante destacar porque tienen que ver con consideraciones relativas al número. Es importante que se entienda el número per se porque con esos números se crearán nuevas composiciones, de lo contrario, si el número como tal no se entiende, se generarán dificultades al trabajar con las composiciones posteriores.

7.2. Primeras tareas del Cuestionario reelaboradas por Fernando en entrevista

7.2.1. Tarea 1

Dentro de las dificultades observadas en Fernando en el Cuestionario podemos identificar la dificultad que tiene para representar situaciones de reparto en dónde en la Tarea 1 no puede identificar la unidad ni realizar un reparto exhaustivo. De acuerdo a Llinares y Sánchez (2000), a los estudiantes les resulta más sencillo repartir elementos discretos, pero cuando estos están conformados por subconjuntos en dónde el reparto no es exacto, la dificultad aumenta y en ocasiones les resulta imposible, como le ocurrió a Fernando que presenta dificultad para identificar el significado de la fracción como cociente intuitivo.

Procedimos a la reconstrucción de la tarea y lo que hicimos fue preguntarle porque no había respondido la pregunta y mencionó que el problema indica 4 cajas pero no habla nada de los 8 chocolates en cada caja por lo que se confundió y no pudo resolverlo. Se le pregunta si ha visto las cajas de chocolates Ferrero Roché que traen 8 chocolates y si las tuviera cómo las repartiría. Inicia considerando cada chocolate como unidad e intenta repartir los 32 chocolates entre los 3 niños, reparte 10 a cada niño y menciona que sobran 2. Se le menciona que no debe sobrar y cómo repartiría el sobrante de manera equitativa. Logra dividir los chocolates sobrantes en tres partes sin embargo no logra identificar a cuánto corresponde una porción del chocolate partido porque transita de considerar 10 chocolates a cada niño a $\frac{10}{32}$ modificando la unidad inicial. Esto evidencia un conflicto cognitivo por confusión en el reconocimiento de la unidad, coincidiendo con Llinares y Sánchez (2000).

Después de intentarlo y con muchos tropiezos modificamos la estrategia y le preguntamos si le sería más fácil repartir por cajas y decide intentar nuevamente. En esta segunda ocasión emplea la estrategia "*reparte unidades a cada persona y lo que sobra lo divide en fracciones*", Olguín (2009), repartiendo una caja de chocolates a cada niño. Para lograr el reparto equitativo se le pregunta cómo debe repartir el sobrante y se le pide que dibuje una caja con los 8 chocolates y determine a cuanto equivale un chocolate de la caja, el pictograma que realiza le permite identificar que un chocolate corresponde a $\frac{1}{8}$ de la caja, reparte 2 chocolates a cada niño, que considera como $\frac{2}{8}$ y los 2 chocolates sobrantes los subdivide en tres cada uno, se le pregunta entonces cuánto vale una porción del chocolate partido, esto lo lleva a identificar en el segundo intento partes de partes, estableciendo que una porción equivale a $\frac{1}{24}$ de la caja. Finalmente, se le pregunta cuánto recibe cada persona, aquí emplea la estrategia "*partición y reparto equivalente realizando más divisiones de las necesarias*", Olguín (2009), y logra establecer que cada persona recibe una caja, dos octavos y dos venticuatroavos.

Este ejercicio, aunque le resultó complicado a Fernando le permitió identificar los modos de reparto, obtención de partes de partes, acercándolo al significado de la multiplicación de fracciones y al significado de cociente de las fracciones. Es importante mencionar que la representación gráfica del problema, que al principio creó confusión, jugó un papel importante en la comprensión que logró desarrollar Fernando. Lo que posteriormente le facilitó responder la Tarea 9 de división partitiva de manera adecuada.

7.2.2. Tareas 3, 4 y 5

El empleo del material manipulativo inspirado en el modelo de conmensuración, mencionado anteriormente, y la Tarea adicional 2, permitieron a Fernando establecer la diferencia entre unidades y determinar que no es posible operar con unidades de tamaños diferentes. Esto facilitó a Fernando la reconstrucción de la Tarea 3 y 5 en la que realizó un adecuado reparto al identificar las fracciones equivalentes, realizar una correcta representación y reconstruir el todo de manera adecuada y mediante el uso de fracciones equivalentes realizar una suma de fracciones adecuada y una correcta representación gráfica, lo que lo acercó a la identificación del significado de la suma de fracciones.

La reconstrucción de la Tarea 4 permitió acercar a Fernando al significado de la fracción como medida. Se le solicitó que representara nuevamente las fracciones en la recta numérica empleando instrumentos de medición, aunque con dificultad, esto le permitió ubicar puntos adecuados en la recta, se le solicitó que ordenara las fracciones de menor a mayor y procedió a ordenar considerando las fracciones como números naturales tomando en cuenta el denominador para el orden. Se le pidió entonces que comparara el orden que había establecido con el tamaño de la fracción en la recta, esa comparación le permitió identificar que no correspondía el orden que había establecido con el tamaño de la fracción y procedió a realizar un nuevo orden, esta vez de manera correcta. Fernando sabía que un denominador más grande hace una fracción más pequeña, por ello consideraba que $\frac{5}{10}$ era menor que $\frac{1}{2}$. El empleo de material manipulativo y realizar comparaciones de sus representaciones en la recta, le permitió identificar que eran equivalentes y que no necesariamente un denominador mayor significa que la fracción sea menor.

7.2.3. Tarea 8

En la Tarea 8 en la que nos interesaba reconstruir los procesos realizados por Fernando, se observa una dificultad en el proceso de construcción numérica que tiene que ver con la conversión de decimales a fracción. Fernando para responder, realiza una división de naturales en la cual obtiene como resultado 1.5 y él decide convertirla a fracción, obteniendo como respuesta $\frac{1}{5}$. Cuando le preguntamos por qué obtuvo $\frac{1}{5}$ como respuesta, él nos indica que fue por el resultado de la división que realizó $1.5 = \frac{1}{5}$. En la representación decimal de 1.5, los elementos que lo conforman son "1", "." y el "5", a estos elementos unidos se les denomina significante (elemento que hace parte del símbolo al cuál se le da un significado en la representación); al realizar el cambio a la representación a fracción no existe ninguna correspondencia entre sus elementos los cuáles son "1", "1", "-" y "2", sin embargo Fernando asocia los elementos "1", "." y "5", con "1", "-" y "5". Esto es una dificultad presente en los procesos de conversión de decimales a fracción y viceversa, como menciona Duval citado por Sánchez (2012). Para brindar atención a esta dificultad cognitiva en Fernando, la investigadora lo confronta con su respuesta al cuestionario donde iguala $6 \div 4 = \frac{1}{5}$ y le pedimos que nos explique cómo obtuvo ese resultado a lo que responde que no recuerda, se le pregunta si $\frac{1}{5}$ es mayor o menor que la unidad, a lo que Fernando contesta que es menor, le preguntamos entonces si 1.5 es mayor o menor que la unidad y responde que es mayor. Podemos observar que Fernando presenta dificultad al realizar la conversión de decimal a fracción, en la comprensión de la representación y no del objeto matemático. Le preguntamos por qué los iguala, responde que lo que recuerda es que la maestra les dijo que así era, el 1 en la parte de arriba y el 5 abajo. Se le pide que realice las representaciones gráficas de ambos números y confronte sus respuestas (Fig. 7.1). Representar $\frac{1}{5}$ de manera pictórica, le resulta complicado porque elige un círculo para su representación y siempre recurre a la dicotomía (partir el círculo en mitades), lo que le impide lograr la congruencia de las partes. La investigadora le proporciona el pastel de círculos y le pregunta si podría serle de utilidad para lograr representar de manera adecuada quintos. Fernando elige el círculo partido en quintos y lo usa como referencia para realizar su representación, posteriormente se le solicita que represente 1.5 y menciona que es un entero, pero duda en la parte decimal y pregunta si el cinco representa un quinto. Le solicitamos entonces que lo represente en una recta numérica, en la que logra representar la cantidad adecuadamente en decimal, cuando le preguntamos cuanto es 0.5 en fracción, duda pero finalmente responde que es $\frac{1}{2}$ y menciona que representa 1 $\frac{1}{2}$. Le mostramos la elaboración que había hecho en el cuestionario y le preguntamos entonces si se puede igualar, a lo que responde que "***lo que había hecho era incorrecto y no se podían igualar porque eran distintos".***

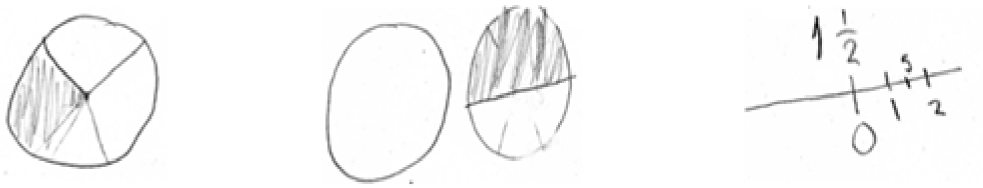
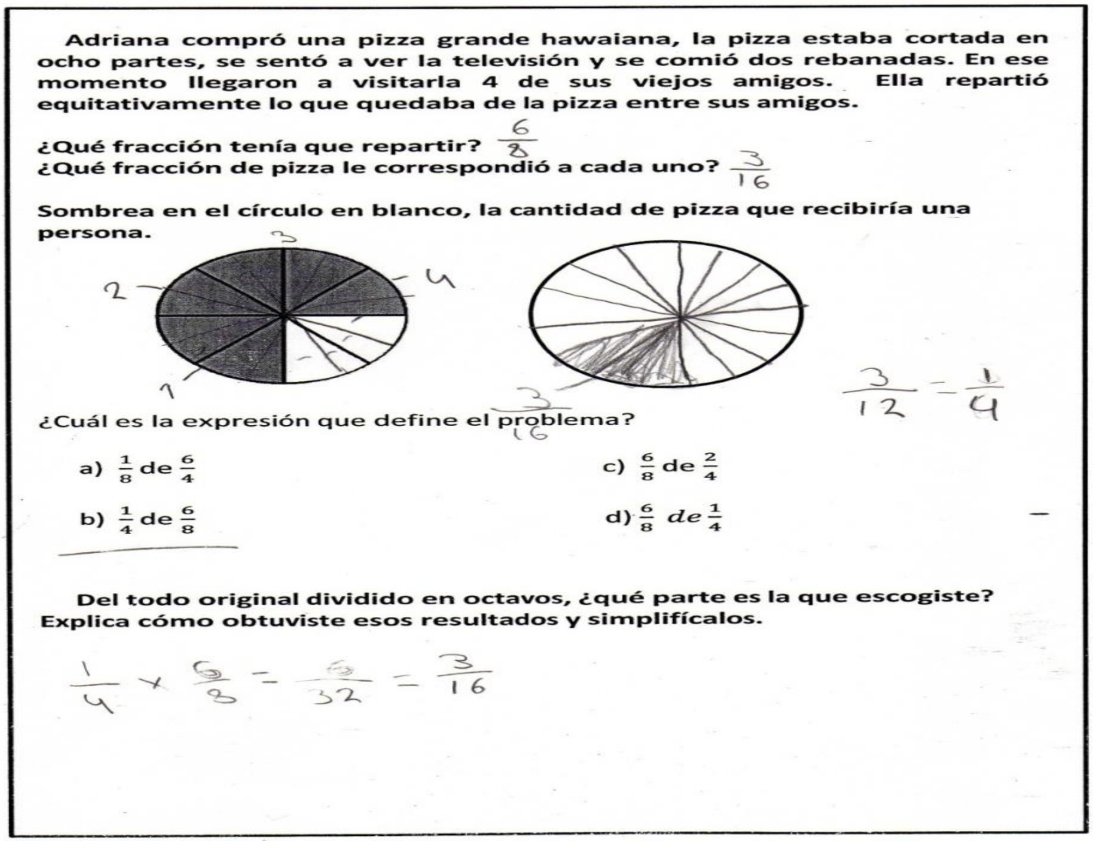


Fig. 7.1. Representación que hace Fernando de $\frac{1}{5}$ y de 1 $\frac{1}{2}$

Una vez comprendido lo anterior, le pedimos resolver nuevamente la Tarea 8 que resuelve de manera adecuada, inicia subdividiendo la figura y realiza un reparto adecuado en el que se observa un mayor cuidado en la equidistribución, identifica partes de partes y la preposición "de", además de identificar y emplear adecuadamente el algoritmo de la multiplicación de fracciones (Fig. 7.2).

En este momento se puede observar un notorio avance en las elaboraciones de Fernando.



Adriana compró una pizza grande hawaiana, la pizza estaba cortada en ocho partes, se sentó a ver la televisión y se comió dos rebanadas. En ese momento llegaron a visitarla 4 de sus viejos amigos. Ella repartió equitativamente lo que quedaba de la pizza entre sus amigos.

¿Qué fracción tenía que repartir? $\frac{6}{8}$

¿Qué fracción de pizza le correspondió a cada uno? $\frac{3}{16}$

Sombrea en el círculo en blanco, la cantidad de pizza que recibiría una persona.

$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

¿Cuál es la expresión que define el problema?

a) $\frac{1}{8}$ de $\frac{6}{4}$ c) $\frac{6}{8}$ de $\frac{2}{4}$

b) $\frac{1}{4}$ de $\frac{6}{8}$ d) $\frac{6}{8}$ de $\frac{1}{4}$

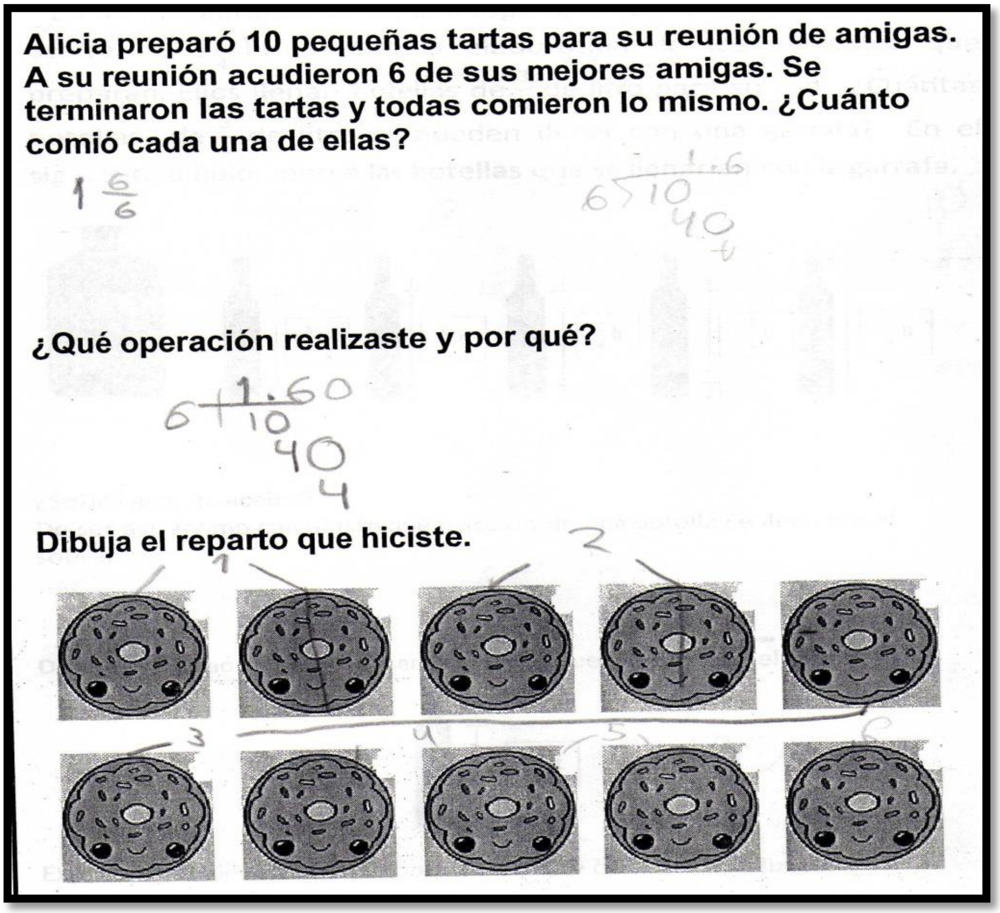
Del todo original dividido en octavos, ¿qué parte es la que escogiste? Explica cómo obtuviste esos resultados y simplifícalos.

$\frac{1}{4} \times \frac{6}{8} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$

Fig. 7.2. Reelaboración de Fernando de la tarea 8, empleando el material manipulativo.

7.3. Análisis de resultados en tareas de división de fracciones

En lo que respecta a la división de fracciones, en el Cuestionario exploratorio son tres las tareas que involucran esta operación, en sus elaboraciones Fernando tiende a resolver empleando enteros. La Tarea 9 de división partitiva la resuelve con división de naturales y el cociente que obtiene es correcto, pero posteriormente lo convierte a fracción en dónde se observa nuevamente “dificultad en la conversión de decimales a fracción”, proporcionando una respuesta de $1\frac{6}{6}$, (Fig. 7.3). En este problema realiza una división de enteros $10 \div 6 = 1.6$, pero en esta ocasión la fracción la construye tomando el entero y el decimal sobre el divisor. Esto evidencia una confusión en el empleo de algoritmos, quizá derivado de la excesiva mecanización desarrollada habitualmente en su clase de matemáticas. Se observa también que inicia un reparto que no concluye y que no es muy claro, no coincide con la respuesta proporcionada, por lo que no logra realizar un reparto equitativo y exhaustivo.



Alicia preparó 10 pequeñas tartas para su reunión de amigas. A su reunión acudieron 6 de sus mejores amigas. Se terminaron las tartas y todas comieron lo mismo. ¿Cuánto comió cada una de ellas?

$1\frac{6}{6}$

$6\overline{)10}$ 1.6
40
4

¿Qué operación realizaste y por qué?

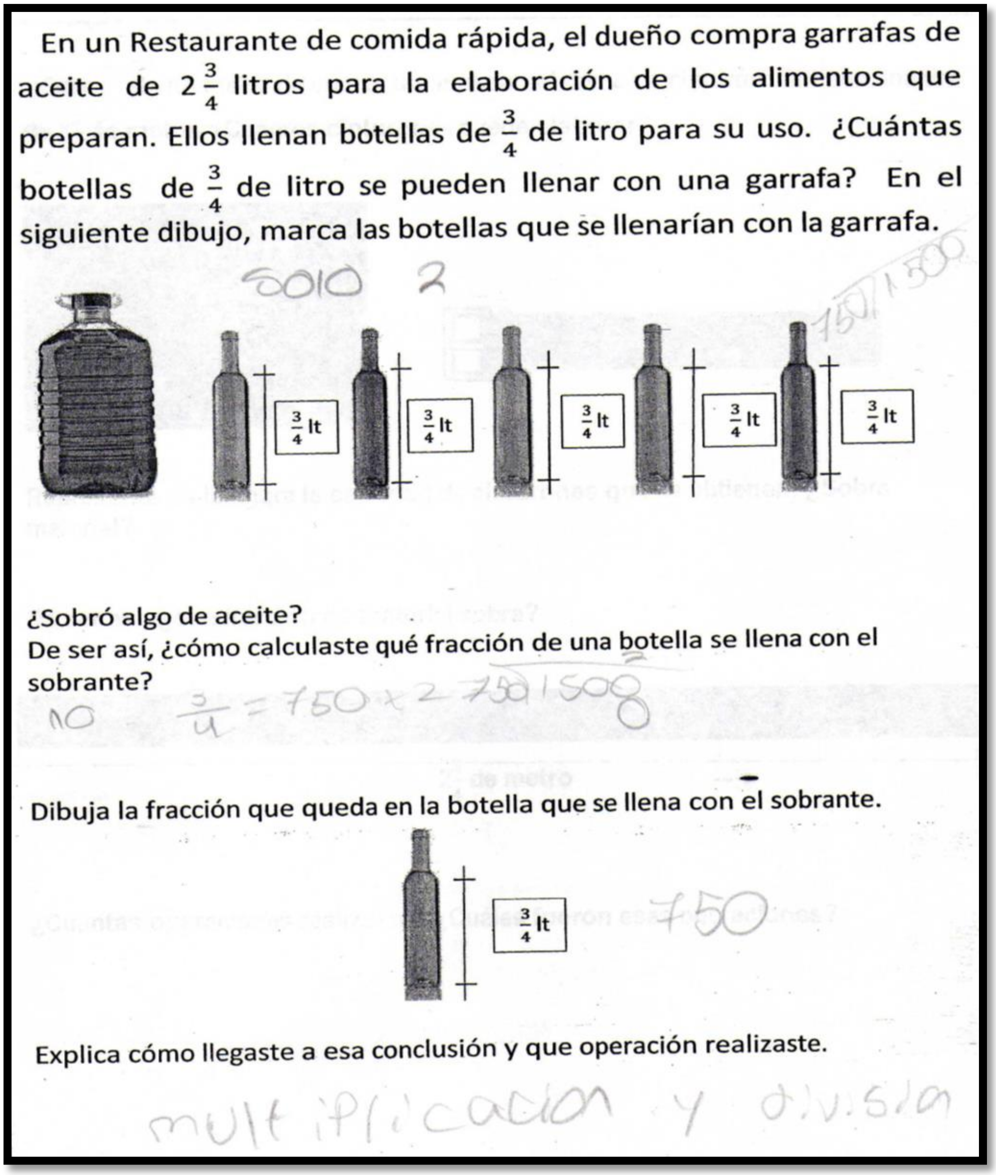
$6\overline{)10}$ 1.60
40
4

Dibuja el reparto que hiciste.

Fig. 7.3. Tarea 9 de división partitiva, elaborada por Fernando.

En cuanto a la tarea 10 de división cuotativa, que le solicitaba determinar cuántos recipientes se llenaban con cierta cantidad de aceite, trata de resolverla, pero evita usar fracciones por lo que convierte a mililitros la cantidad de aceite y realiza una división de naturales, se equivoca, por lo que su respuesta es errónea, (Fig. 7.4).

En la Tarea 11, similar a la anterior, Fernando convierte a fracción impropia y resuelve identificando de manera correcta la cantidad de agrupamientos en la división cuotativa, sin embargo no identifica el residuo y no realiza la representación gráfica que se le solicita, su respuesta está inconclusa (Fig. 7.6). Lo anterior, nos permite establecer que Fernando no está familiarizado con la resolución de problemas de división de fracciones y evita emplear operaciones con fracciones.



En un Restaurante de comida rápida, el dueño compra garrafas de aceite de $2\frac{3}{4}$ litros para la elaboración de los alimentos que preparan. Ellos llenan botellas de $\frac{3}{4}$ de litro para su uso. ¿Cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ de litro se pueden llenar con una garrafa? En el siguiente dibujo, marca las botellas que se llenarían con la garrafa.

solo 2

750|1500

¿Sobró algo de aceite?
De ser así, ¿cómo calculaste qué fracción de una botella se llena con el sobrante?

NO $\frac{3}{4}$ = 750 x 2 750|1500
0

Dibuja la fracción que queda en la botella que se llena con el sobrante.

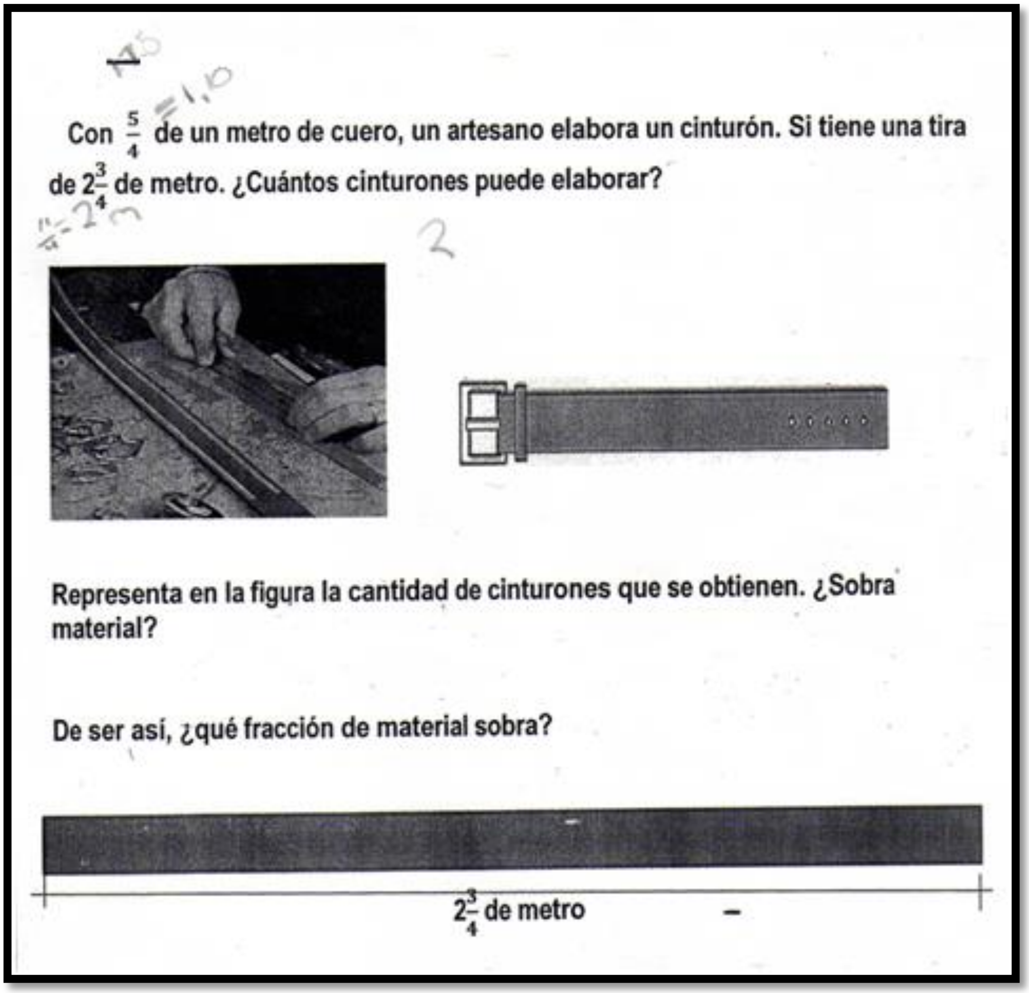
750

Explica cómo llegaste a esa conclusión y que operación realizaste.

multiplicacion y division

Fig. 7.4. Tarea 10 de División cuotativa, elaborada por Fernando.

En la primera tarea realizada en el taller exploratorio Fernando convierte las fracciones de metro a centímetros para poder trabajar con enteros. Realiza una división de enteros, en la que a pesar de estar bien realizada, conduce a resultados erróneos por considerar el divisor como 100, en lugar de tomar 75. Podemos decir que Fernando sí comprende que la solución del problema requiere de una división, sin embargo tiene dificultad para trabajar con fracciones por lo que convierte a naturales para solucionarlo y posteriormente vuelve a convertir para proporcionar su respuesta en fracción, que resulta equivocada (Fig. 7.6).



125

=1.0

Con $\frac{5}{4}$ de un metro de cuero, un artesano elabora un cinturón. Si tiene una tira de $2\frac{3}{4}$ de metro. ¿Cuántos cinturones puede elaborar?

$\frac{11}{4}$-2 m

2

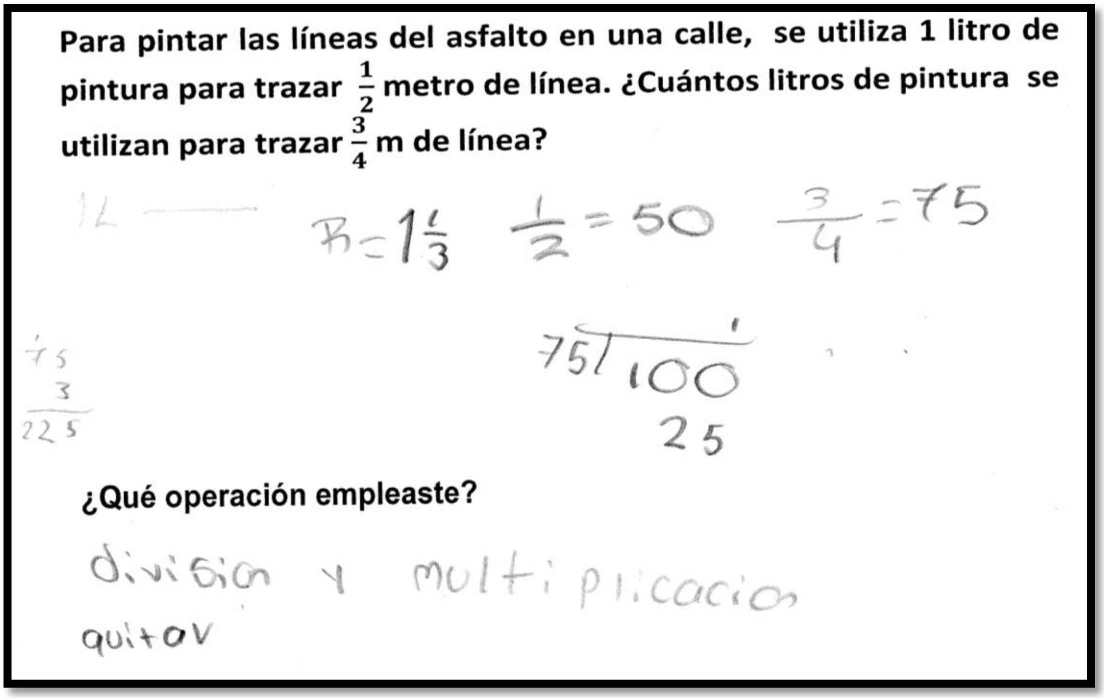
Representa en la figura la cantidad de cinturones que se obtienen. ¿Sobra material?

De ser así, ¿qué fracción de material sobra?

$2\frac{3}{4}$ de metro

Fig. 7.5. Tarea 11 de división cuotativa, elaborada por Fernando.

Es importante mencionar que Fernando es uno de los dos niños que lograron responder la segunda tarea de división de fracciones presentada en el taller exploratorio (Fig. 7.7), se observa un mejor desempeño que consideramos sea debido a la socialización y al trabajo colaborativo ya que le correspondió trabajar con uno de los alumnos más destacados del grupo, logra identificar el número de agrupamientos e identifica un residuo, pero no logra expresarlo en términos de la unidad utilizada para medir. Nuevamente recurre a la solución con números naturales aunque su respuesta la proporciona en fracción. No la relaciona con la división de fracciones.



Para pintar las líneas del asfalto en una calle, se utiliza 1 litro de pintura para trazar $\frac{1}{2}$ metro de línea. ¿Cuántos litros de pintura se utilizan para trazar $\frac{3}{4}$ m de línea?

1L ——

$R = 1\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2} = 50$ $\frac{3}{4} = 75$

$75 \overline{)100}$ 1

25

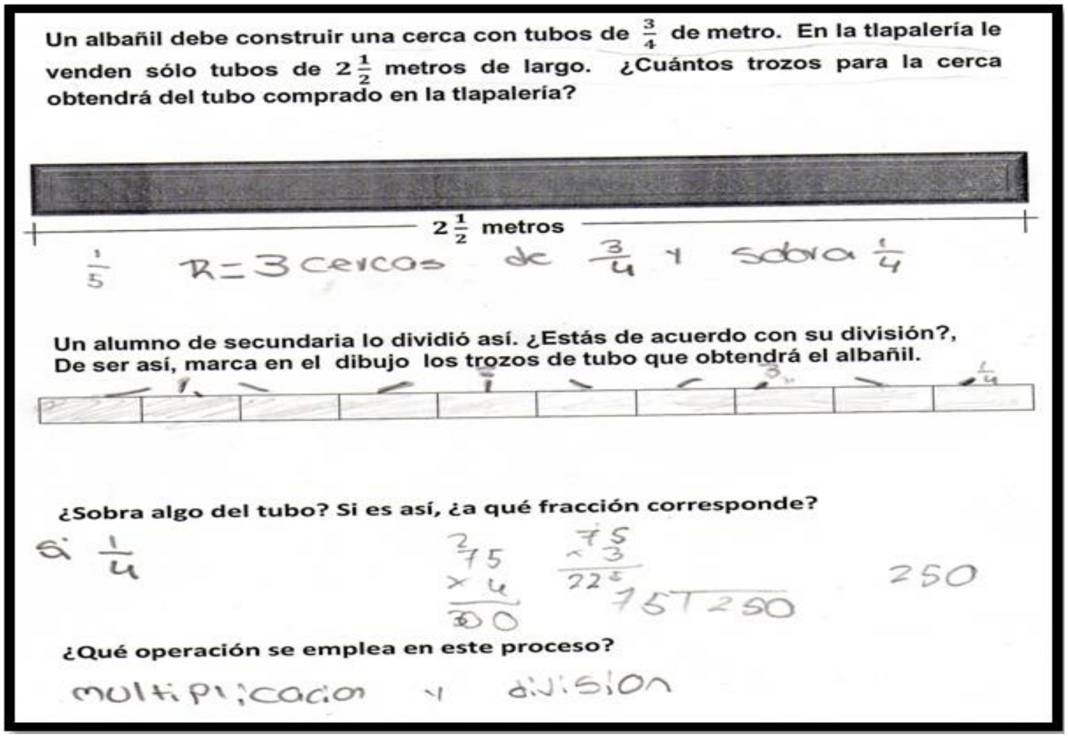
75
× 3
225

¿Qué operación empleaste?

division y multiplicacion

quitar

Fig. 7.6. Primera tarea del taller exploratorio resuelta por Fernando.



Un albañil debe construir una cerca con tubos de $\frac{3}{4}$ de metro. En la tlapalería le venden sólo tubos de $2\frac{1}{2}$ metros de largo. ¿Cuántos trozos para la cerca obtendrá del tubo comprado en la tlapalería?

$\frac{1}{5}$ R= 3 cercas de $\frac{3}{4}$ y sobra $\frac{1}{4}$

Un alumno de secundaria lo dividió así. ¿Estás de acuerdo con su división?, De ser así, marca en el dibujo los trozos de tubo que obtendrá el albañil.

¿Sobra algo del tubo? Si es así, ¿a qué fracción corresponde?

si $\frac{1}{4}$

75
× 4
300

75
× 3
225

$75 \overline{)250}$

250

¿Qué operación se emplea en este proceso?

multiplicacion y division

Fig. 7.7. Segunda tarea de división de fracciones del taller exploratorio resuelta por Fernando.

7.3.1. Tareas de división de fracciones reelaboradas por Fernando en entrevista

Posterior a la resolución en entrevista de la tarea 1 de reparto, Fernando pudo reelaborar muy fácilmente la Tarea 9, que permite acercar al estudiante a la división partitiva, realizando un reparto equitativo y exhaustivo, empleando la estrategia *"reparte unidades a cada persona y lo que sobra lo divide en fracciones"* de Olguín (2009) y obtiene un resultado adecuado que representa en fracción, aunque no explica que operación resuelve el problema. Aquí ya es posible observar un avance en Fernando al proporcionar su respuesta expresada en fracción como cociente indicado (fig. 7.8).

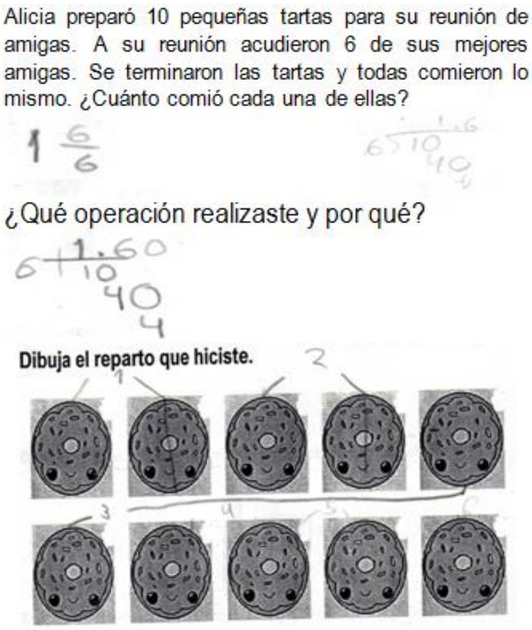
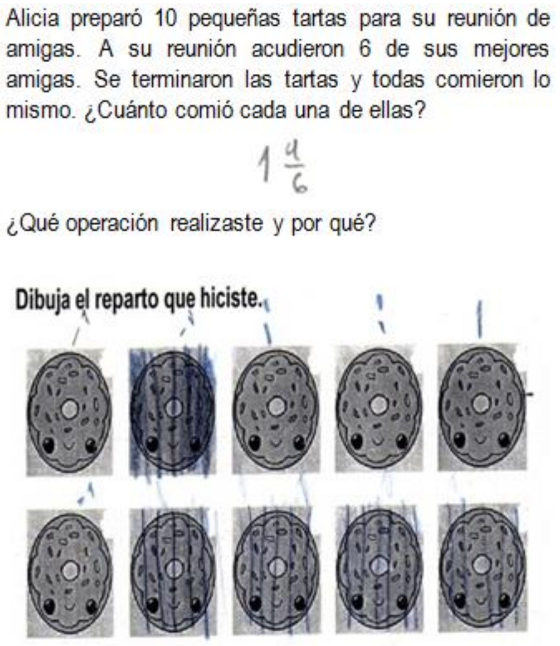
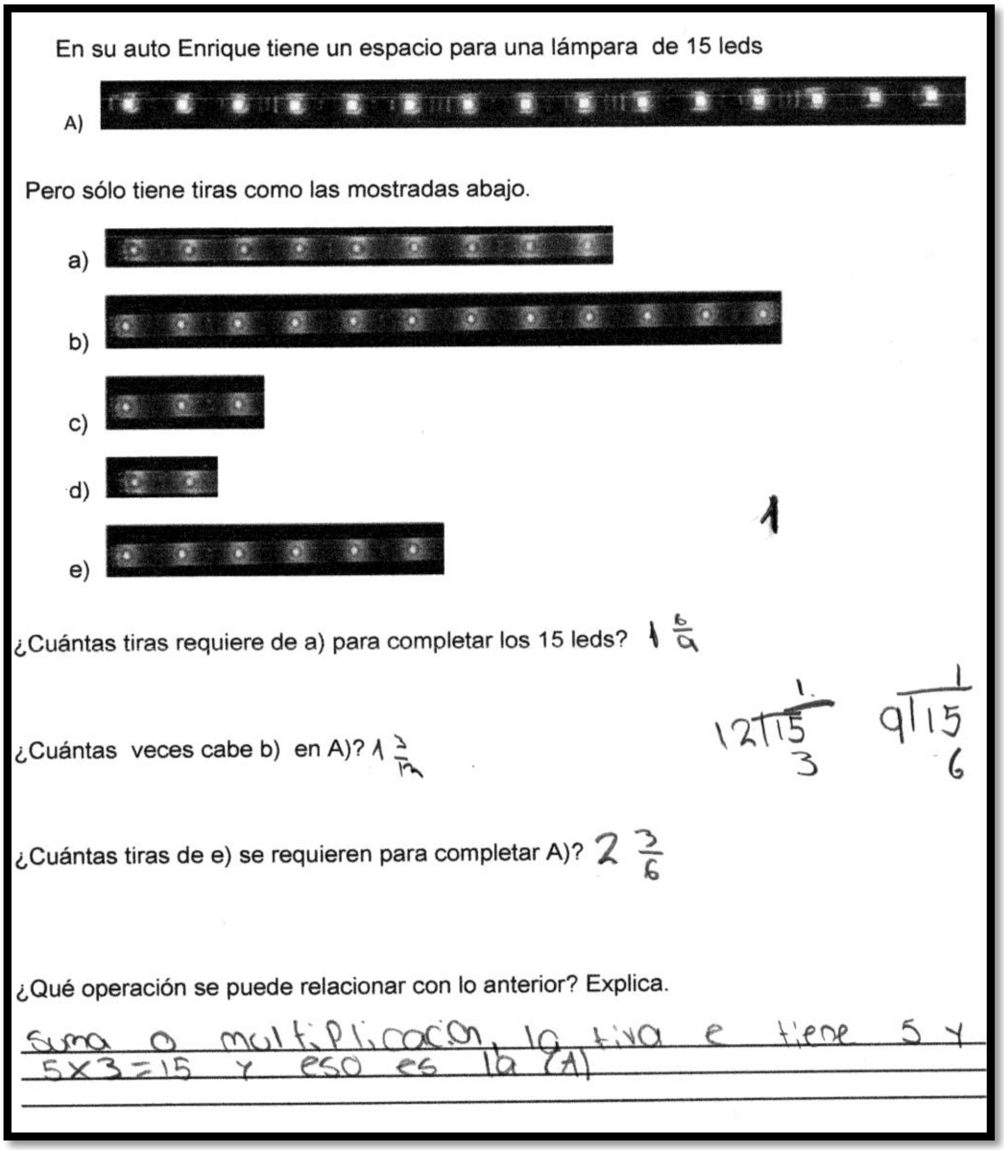
<table>
<tr><td colspan="2">Tarea 9
División partitiva, empleando enteros que conduzcan a respuesta en fracción,
resolución de división sin el empleo de un algoritmo.</td></tr>
<tr><td>Tarea de cuestionario</td><td>Reelaboración en entrevista</td></tr>
<tr><td>
Alicia preparó 10 pequeñas tartas para su reunión de amigas. A su reunión acudieron 6 de sus mejores amigas. Se terminaron las tartas y todas comieron lo mismo. ¿Cuánto comió cada una de ellas?
$1\frac{6}{6}$
$6\overline{)10}$ 1.6 40 4
¿Qué operación realizaste y por qué?
$6\overline{)10}$ 1.60 40 4
Dibuja el reparto que hiciste.
</td><td>
Alicia preparó 10 pequeñas tartas para su reunión de amigas. A su reunión acudieron 6 de sus mejores amigas. Se terminaron las tartas y todas comieron lo mismo. ¿Cuánto comió cada una de ellas?
$1\frac{4}{6}$
¿Qué operación realizaste y por qué?
Dibuja el reparto que hiciste.</td></tr>
</table>

Fig. 7.8. Comparación de la tarea 9 elaborada por Fernando antes y después de la entrevista.

Después se le presenta la Tarea adicional 4 (Fig. 7.9), que tiene como propósito acercar al estudiante al significado de la división de fracciones. Empleando las tiras de leds se le pide identificar cuántas veces cabe una tira en otra sin que sobre nada, esto lleva al estudiante a determinar el número de agrupamientos en la división cuotativa y la identificación del residuo, además de facilitar la reunitización del divisor, que es una de las principales dificultades en la resolución de la división de fracciones. Lo hace a través del **modelo de conmensuración**, es decir, la medición de porciones constantes, empezando en la parte inicial de la tira de leds que él considera como el punto cero y continuando en dónde termina la primera y así sucesivamente, hasta completar la tira de leds y considerando al final que si bien no cabe un número entero de veces, hay una pequeña fracción del divisor que cabe en el dividendo y que da paso a la identificación del residuo. En el uso del modelo es evidente el uso de la fracción como medida y el proceso de suma iterada. Un ejemplo de ello se muestra en la figura 7.10 y 7.12.



En su auto Enrique tiene un espacio para una lámpara de 15 leds

A)

Pero sólo tiene tiras como las mostradas abajo.

a)

b)

c)

d)

e)

1

¿Cuántas tiras requiere de a) para completar los 15 leds? $1\frac{6}{9}$

1
$12\overline{)15}$
3

1
$9\overline{)15}$
6

¿Cuántas veces cabe b) en A)? $1\frac{3}{12}$

¿Cuántas tiras de e) se requieren para completar A)? $2\frac{3}{6}$

¿Qué operación se puede relacionar con lo anterior? Explica.

suma o multiplicacion, la tira e tiene 5 y
5x3=15 y eso es la (A)

Fig. 7.9. Tarea adicional 4 que permite el acercamiento al significado de la división de fracciones.

Al resolver esta tarea, se observa en Fernando mucha seguridad en el uso de las fracciones ya que si bien, al responder inicialmente no identifica la operación que lo resuelve, identifica de inmediato el número de agrupamientos en la primera pregunta e identifica el residuo adecuadamente y lo proporciona en función del divisor.

I: Investigadora, F: Fernando.

I: ¿Cuántas tiras de a se requieren para completar la tira de A?
F: Nada más una.
I: Sí, Una, pero le falta algo ¿cuánto le falta?
F: Le faltan 6. Uno y 6 leds.
I: ¿en fracción cuánto sería?
F: Un entero y seis novenos.

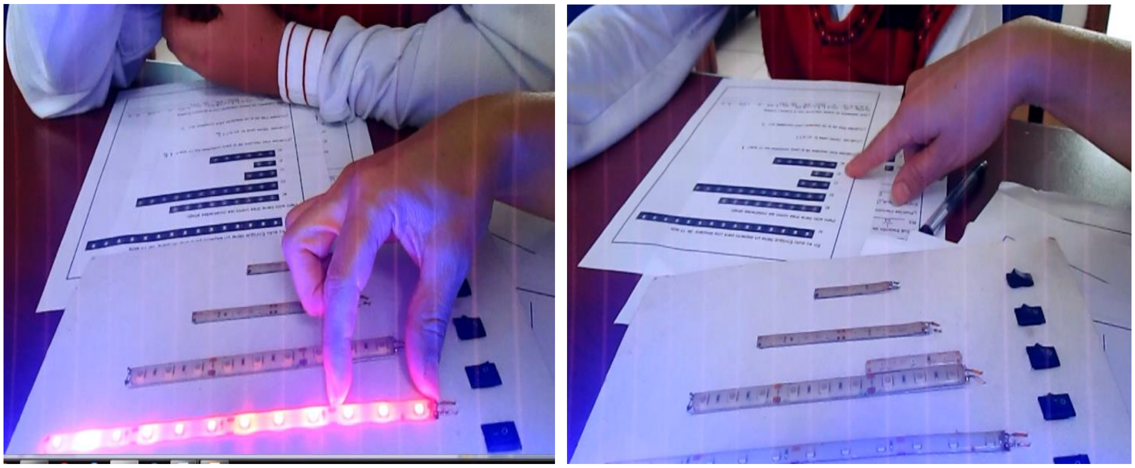


Fig. 7.10. Proceso empleado en las tareas de división de fracciones con el uso del modelo de conmensuración y el uso del material visual manipulativo.

Esta tarea permitió a Fernando identificar el significado de la división de fracciones, a la que no había tenido acercamiento, si bien en un inicio no identificó la operación, finalmente la comprobación que hizo del resultado obtenido la realiza mediante la división de enteros que le proporciona una respuesta en fracción. El problema involucraba la división de 2 naturales 15÷9, como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 9\overline{)15} \\ 6 \end{array}$$

y la investigadora le guía en el proceso de transformación a fracción de dicha cantidad, que queda expresada como $1\frac{6}{9}$. En este punto se destaca el comentario de Fernando al mencionar "***eso es lo que quería hacer en el problema anterior, sólo que no me acordaba cómo hacerlo***". Este comentario nos permite identificar la fuente de confusión en Fernando, en el proceso de transformación de decimal a fracción. Consideramos que la excesiva mecanización de los algoritmos sin considerar la semántica de las operaciones, termina por generar confusión en los estudiantes, como le ocurrió a Fernando en este proceso.

Después de trabajar el ejercicio anterior esto facilitó que Fernando pudiera responder satisfactoriamente las siguientes tareas de división de fracciones, considerando cuánto se repite una fracción en otra y además, dando una asignación de sentido, la pudo asociar a la operación de división de fracciones que finalmente pudo resolver adecuadamente, como se observa en la reelaboración de la Tarea 10 (Fig. 7.11).

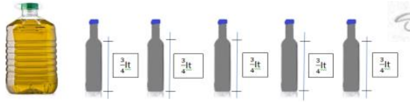
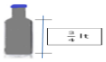
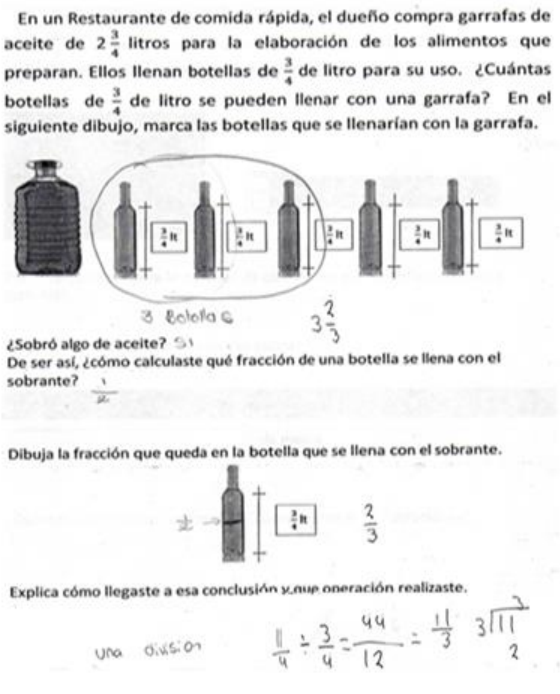
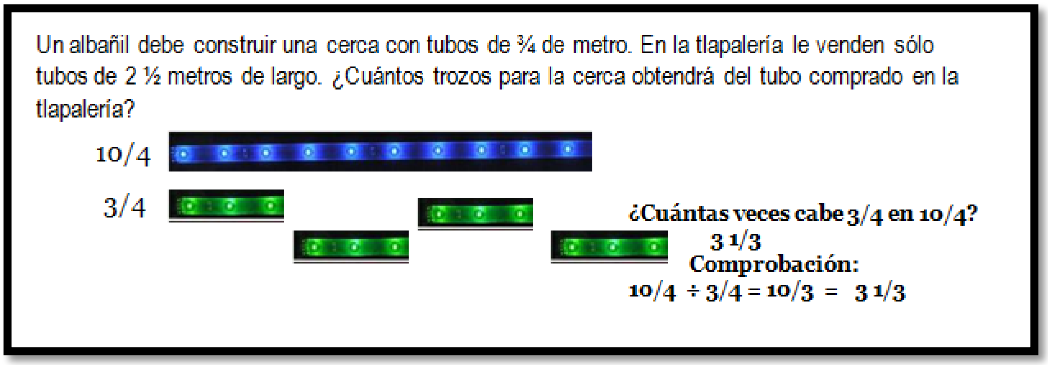
<table>
<tr><th colspan="2">Tarea 10
División cuotativa. Empleo de algoritmo de división de fracciones.
Determinación del sobrante.</th></tr>
<tr><th>Tarea de cuestionario</th><th>Reelaboración en entrevista</th></tr>
<tr><td>En un Restaurante de comida rápida, el dueño compra garrafas de aceite de $2\frac{3}{4}$litros para la elaboración de los alimentos que preparan. Ellos llenan botellas de $\frac{3}{4}$ de litro para su uso. ¿Cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ de litro se pueden llenar con una garrafa? En el siguiente dibujo, marca las botellas que se llenarían con la garrafa.

5010 2
750 1500
¿Sobró algo de aceite?
De ser así, ¿cómo calculaste qué fracción de una botella se llena con el sobrante?
750 1500
NO $\frac{3}{4} = 750 \times 2$
Dibuja la fracción que queda en la botella que se llena con el sobrante.

750
Explica cómo llegaste a esa conclusión y que operación realizaste.
multiplicación y división</td>
<td>En un Restaurante de comida rápida, el dueño compra garrafas de aceite de $2\frac{3}{4}$ litros para la elaboración de los alimentos que preparan. Ellos llenan botellas de $\frac{3}{4}$ de litro para su uso. ¿Cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ de litro se pueden llenar con una garrafa? En el siguiente dibujo, marca las botellas que se llenarían con la garrafa.
3 Botellas $3\frac{2}{3}$
¿Sobró algo de aceite? Si
De ser así, ¿cómo calculaste qué fracción de una botella se llena con el sobrante? $\frac{1}{2}$
Dibuja la fracción que queda en la botella que se llena con el sobrante.
$\frac{1}{2}$ → $\frac{2}{3}$
Explica cómo llegaste a esa conclusión y que operación realizaste.
una división $\frac{11}{4} \div \frac{3}{4} = \frac{44}{12} = \frac{11}{3}$ $3\overline{)11}$ 3 2</td></tr>
</table>

Fig. 7.11. Comparación de las elaboraciones de la tarea 10 realizadas por Fernando antes y después de la entrevista.

Fernando pudo también reelaborar la Tarea 11 y la Tarea del taller sin contratiempos, empleando el material manipulativo de leds y el uso de la fracción como medida. Realiza una subdivisión correcta, identifica adecuadamente el número de agrupamientos, identifica el residuo y finalmente lo asocia a la división de fracciones, cuyo algoritmo resuelve correctamente. Resuelve mediante representaciones pictóricas y concluye con suma iterada. La forma de emplear el material manipulativo de leds empleando el modelo de conmensuración se puede observar en la Figura 7.12 y en la Figura 7.13 se observa una comparación de la tarea del taller y la reelaboración que realizó Fernando al finalizar la entrevista.



Un albañil debe construir una cerca con tubos de ¾ de metro. En la tlapalería le venden sólo tubos de 2 ½ metros de largo. ¿Cuántos trozos para la cerca obtendrá del tubo comprado en la tlapalería?

¿Cuántas veces cabe 3/4 en 10/4?

3 1/3

Comprobación:

10/4 ÷ 3/4 = 10/3 = 3 1/3

Fig. 7.12. Representación del empleo del material manipulativo de leds empleando el modelo de conmensuración.

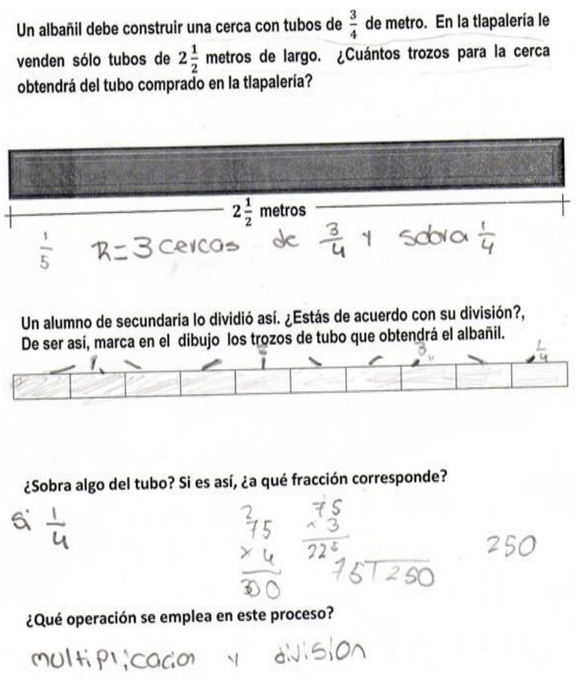
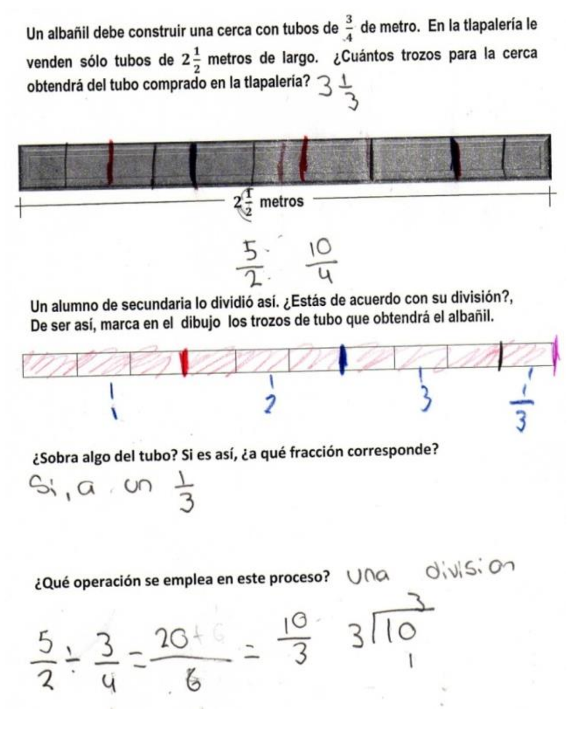
<table>
<tr><td colspan="2">Tarea del taller
División cuotativa. Empleo de algoritmo de división de fracciones.
Determinación del sobrante.</td></tr>
<tr><td>Tarea elaborada en el taller</td><td>Reelaboración en entrevista</td></tr>
<tr><td>
Un albañil debe construir una cerca con tubos de $\frac{3}{4}$ de metro. En la tlapalería le venden sólo tubos de $2\frac{1}{2}$ metros de largo. ¿Cuántos trozos para la cerca obtendrá del tubo comprado en la tlapalería?
$2\frac{1}{2}$ metros
$\frac{1}{5}$ R=3 cercas de $\frac{3}{4}$ y sobra $\frac{1}{4}$
Un alumno de secundaria lo dividió así. ¿Estás de acuerdo con su división?, De ser así, marca en el dibujo los trozos de tubo que obtendrá el albañil.
¿Sobra algo del tubo? Si es así, ¿a qué fracción corresponde?
Si $\frac{1}{4}$
75 × 4 300   75 × 3 225   75⟌250   250
¿Qué operación se emplea en este proceso?
multiplicacion y division</td>
<td>
Un albañil debe construir una cerca con tubos de $\frac{3}{4}$ de metro. En la tlapalería le venden sólo tubos de $2\frac{1}{2}$ metros de largo. ¿Cuántos trozos para la cerca obtendrá del tubo comprado en la tlapalería? $3\frac{1}{3}$
$2\frac{1}{2}$ metros
$\frac{5}{2}$ $\frac{10}{4}$
Un alumno de secundaria lo dividió así. ¿Estás de acuerdo con su división?, De ser así, marca en el dibujo los trozos de tubo que obtendrá el albañil.
1 2 3 $\frac{1}{3}$
¿Sobra algo del tubo? Si es así, ¿a qué fracción corresponde?
Si, a un $\frac{1}{3}$
¿Qué operación se emplea en este proceso? una division
$\frac{5}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$ $3\overline{)10}$ 3 1</td></tr>
</table>

Fig. 7.13. Comparación de la tarea del taller elaborada por Fernando antes y después de la entrevista.

Los resultados obtenidos en la entrevista con Fernando nos permiten agregar a la Tabla dos nuevas categorías, la primera, ***“identifica tamaño del agrupamiento, identifica residuo y lo proporciona en función del divisor”***, y la segunda, ***“Identifica número de agrupamientos, identifica residuo y lo proporciona en función del divisor”***.

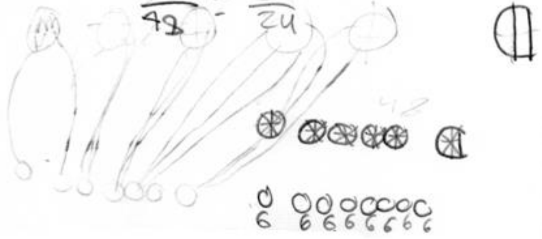
Es importante mencionar que Fernando nos pidió concluir con las sesiones de entrevista porque se estaba retrasando en su clase de matemáticas, por lo que, para no ocasionarle dificultades, dimos por terminada la entrevista con Fernando sin abordar con él las tareas de el inverso del producto de medida y comparación multiplicativa.

7.4. Cuestionario final

Posterior a la entrevista se aplica el cuestionario final, para poder contrastar con las tareas anteriores elaboradas por Fernando y determinar si se observan avances en su desempeño. Las respuestas proporcionadas por Fernando en el cuestionario se muestran en la Tabla 7.3.

Tabla 7.3. Elaboraciones de Fernando en las tareas del cuestionario final

CUESTIONARIO FINAL Elaboraciones de Fernando	
No. DE TAREA Significado asociado	PROBLEMA VERBAL DIVISION DE FRACCIONES
1 División cuotativa. Problema de razón asociado al isomorfismo de medida	Un auto recorre $\frac{1}{6}$ del camino de Pachuca a Tula en 1 hora. ¿En cuánto tiempo recorrerá $\frac{3}{8}$ del camino? $\frac{1}{6} = 1$ hrs $\frac{3}{8}$ — x 2hrs con 50 min $\frac{3}{8} \div \frac{1}{6} = \frac{18}{8}$ ¿Qué operación resuelve el problema? Realízala. regla de 3 Multiplicacion y division Inventa un problema similar que emplee los datos del problema anterior. Paquita corre $\frac{3}{6}$ en 2 hora en cuantas horas recorrera $\frac{6}{12}$?
2 Problema de área. División como el inverso del producto	Enrique quiere cambiar la cubierta de su escritorio. La cubierta tiene un área de $\frac{5}{20}$ m^2 y de largo mide $\frac{3}{4}$ m. ¿Cuánto mide de ancho la cubierta?

de medida.	$A = L \times L$ $A = \frac{5}{20} = \frac{3}{4} + \frac{x}{x}$ $A = \frac{5}{20} \div \frac{3}{4} \quad \frac{20}{60} = \frac{10}{30}$ ¿Qué operación resuelve el problema? ~~Multiplicación~~ de fraccion division Inventa un problema similar y resuélvelo. la pantalla de lois tiene de area $\frac{3}{20}$ m2 y de largo $\frac{5}{2}$ ¿Cuanto mide de ancho la cubierta
3 División partitiva Reparto equitativo y exhaustivo.	Laura tiene en el refrigerador $5\frac{1}{2}$ flanes napolitanos, los repartirá de manera equitativa entre ella y sus 7 vecinos. ¿Cuánto recibirá cada uno? uno? $\frac{6}{48} = \frac{3}{24}$  $\frac{11}{2} \div \frac{7}{1} = \frac{11}{14}$ Inventa un problema similar. Juana tiene $6\frac{2}{4}$ de pastel y lo repartira entre 10 vecinos ¿de a cuanto le toca a cada quien? ¿Qué operación lo resuelve? Explica. Suma, division, multiplicacion
4 Comparación multiplicativa (búsqueda de un escalar)	Margarita ocupó $\frac{1}{4}$ Kg de jamaica para hacer agua. Azucena preparó más agua y ocupó $2\frac{3}{8}$ kg de jamaica. ¿Cuántas veces más jamaica ocupó Azucena? $\frac{19}{8}$ $\frac{1}{4} \div \frac{19}{8} = \frac{8}{76}$

	R: ocupo 3 veces mas ¿Qué operación se emplea para resolver el problema? ¿Por qué? R - division, ~~toros~~ para saber cuanto ocupo mas Inventa un problema similar y resuélvelo. Carol ocupo $\frac{3}{9}$ de aceite para filetes pero Fernando utilizo $4\frac{1}{2}$ ¿cuantas veces mas aceite ocupo Fernando?
5 Comparación multiplicativa (búsqueda de una medida)	Laura empleo 3 veces más tela de la que empleó Estela para hacer sus cortinas. Si Laura empleó $2\frac{3}{4}$ m, ¿cuánta tela empleó Estela para hacer sus cortinas? $\frac{3}{4}$ $\frac{11}{4}$ $\frac{4}{5} + \frac{4}{5} = \frac{8}{3}\ \frac{2}{1}$ $\frac{9}{5} + \frac{9}{5} = \frac{81}{25}$ ¿Por qué lo resolviste así? Explica. lo pase a fraccion impropia y le reste 3 y ya Inventa un problema similar. Martin empleo 3 veces mas camote para sus camotes pero uso mas que daniel si Martin empleo $\frac{3}{3}$ ¿Cuánto camote utilizo daniel?

Realizando un análisis de la resolución de las tareas del Cuestionario final, tenemos que el problema 1 consiste en un problema de razón, el cual resuelve Fernando empleando regla de tres y división de fracciones. Se observa una correcta identificación de la operación a emplear, por lo que se establece que Fernando ha comprendido la semántica de la división de fracciones, es decir su significado y sentido, así como el significado de la fracción como razón, que logra establecer mediante lenguaje técnico-aritmético. Se observa un desarrollo adecuado del algoritmo y han desaparecido las confusiones que presentaba en su manejo, e incluso logra inventar un problema correctamente.

Aunque con Fernando no se trabajó el inverso del producto de medida ni la comparación multiplicativa, se observa que pudo resolver el problema 2 partiendo de la fórmula de área, identificando correctamente la operación a realizar y ejecutando el algoritmo sin problema.

En el problema de división partitiva se observa que intenta realizar un reparto que no concluye y en cambio recurre a la resolución mediante la aplicación correcta del algoritmo de división de fracciones. En el problema 4 identifica que es una división la que resuelve el problema, sin embargo comete un error al plantear la operación de manera inversa, por lo que concluye de manera errónea, aunque el problema que inventa es correcto. El último problema no lo resuelve correctamente.

En la aplicación del cuestionario final, si bien es cierto que Fernando no pudo resolver correctamente los cinco problemas, consideramos que mejoró considerablemente su desempeño, se observa un apropiado manejo de las fracciones, en el que se identifica una correcta asociación con la división de fracciones y un excelente manejo del algoritmo, con la identificación del número de agrupamientos y del residuo asociado al divisor correctamente,

7.5. Análisis de resultados empleando el método interpretativo de Valdemoros

Este modelo de análisis considera la interpretación del lenguaje empleado por el estudiante, no sólo lingüístico, sino simbólico, que nos permite inferir aspectos que no pueden ser observados de un modo directo en sus elaboraciones.

En el plano semántico

Se observó que en un inicio Fernando presentaba fuertes deficiencias en el uso de los números fraccionarios y recurría al uso de los números naturales y decimales para resolver los problemas, así como dificultades en la conversión de decimal a fracción, pero la reelaboración de las tareas mediante la guía y retroalimentación de la investigadora y el uso del material visual manipulativo, así como la introducción de las tareas adicionales le permitieron salvar las dificultades y construir su propio conocimiento lo que lo condujo a obtener avances en el terreno de la semántica de las operaciones, incluso con el empleo de los pictogramas, logró hacer una correcta simbolización del reparto, aunque no pudo verse reflejado en el cuestionario final. Fernando pudo entender por sí mismo el significado de la división de fracciones, entendiendo que se refería a determinar “cuánto cabe una fracción en otra” y que el residuo era objeto de una reunitización, cuya respuesta estaba asociada al divisor. Consiguió dar sentido a la operación y resolver tareas que involucraban razonamiento proporcional y comparaciones multiplicativas, aún cuando no se habían trabajado en entrevista.

En el plano sintáctico

A pesar de que en un principio Fernando evitaba el uso de las fracciones y de que confundía o mezclaba los procedimientos algorítmicos de dichos números, el empleo del material visual manipulativo y la reelaboración de las tareas le permitió realizar un tránsito adecuado del uso de naturales y decimales al empleo de las fracciones y la aplicación correcta de los algoritmos. Para ello, el uso de los pictogramas le fue de gran ayuda permitiéndole ampliar su pensamiento aritmético.

En el plano de la traducción

Se observó en Fernando dificultades para transitar de un sistema de representación a otro, es decir transitar del lenguaje verbal al lenguaje aritmético, si bien es cierto que pudo convertir la fracción mixta a impropia sin dificultad, se observó que evitaba trabajar con fracciones y traducía los aspectos cuantitativos del problema al lenguaje de los números naturales y decimales, además de que presentaba dificultades cognitivas en la conversión de decimales a fracción, así como en la representación pictórica, en especial en la equipartición en la que para realizarla recurría siempre a la dicotomía, lo que le dificultaba la equipartición de unidades impares. En lo referente a la división de fracciones se observó dificultad para interpretar el residuo. Pero a través de la confrontación de sus errores y mediante reelaboraciones y el uso del material visual manipulativo logró salvar sus dificultades.

En el plano de la escritura

Se observa una tendencia a trabajar solamente en el lenguaje aritmético, no se observan expresiones lingüísticas en la resolución de los problemas a menos que sean preguntas explícitas que debe responder. Se observa una correcta representación de las expresiones numéricas como en las fracciones en las que identifica adecuadamente el numerador y el denominador, así como en el uso de los naturales y decimales.

En el plano de la lectura

Se observa en general una correcta lectura de los problemas por parte de Fernando en los que logra asignar sentido al enunciado del problema y a los pictogramas involucrados en él.

En este capítulo se abordó el caso de Fernando, en el que se observaron diversas dificultades y la forma en que se enfrentaron en la entrevista mediante la reelaboración de tareas y la introducción de algunas otras, que le permitieron lograr avances y construir su propio conocimiento.

Por los resultados obtenidos y la comparación de las tareas, podemos afirmar que Fernando presentaba dificultades en las operaciones con fracciones y prefería realizar procedimientos más largos empleando números naturales o decimales, coincidiendo con Hart, (1981), sin embargo después de la entrevista Fernando logra un nivel de abstracción, medible por el número y calidad de obstáculos superados, como lo menciona Sierpinska, mencionado por Gómez (2000), es decir, logra comprender el significado y sentido de la división de fracciones y aunque no logra resolver todos los problemas en el cuestionario final, con el apoyo de un profesor y en un contexto de enseñanza apropiado, se puede potenciar su pensamiento matemático.

Capítulo 8

El caso de Brenda

En este capítulo se aborda el caso de Brenda, una estudiante muy participativa que aparentaba entender muy bien lo explicado por la profesora, pero en la que se identificaron dificultades en las tareas elaboradas que le impedían obtener resultados exitosos, la manera en que logró superarlas en entrevista, así como su desempeño en el cuestionario final, que nos permitió contrastar si tuvo avances.

8.1. La entrevista con Brenda

Como se mencionó anteriormente, durante la observación que la investigadora realizó de la clase, se pudo visualizar el desempeño de Brenda, una estudiante que siempre quería participar ya que la profesora daba puntos de participación. Se esforzó en terminar rápido un ejercicio que la profesora solicitó y pidió participar, pero su respuesta fue equivocada. Eso le ocurrió un par de veces más y eso llamó nuestra atención, algo estaba ocurriendo que le impedía obtener la respuesta adecuada. Debido a lo anterior, decidimos seleccionarla para entrevistarla.

A continuación mostramos las tareas que consideramos relevantes, elaboradas por Brenda en el cuestionario y en el taller.

CUESTIONARIO INICIAL EXPLORATORIO
RESPUESTAS DE BRENDA

Tarea 1

Modos de reparto, observar si realizan reparto equitativo y exhaustivo.

Juan invitó a Enrique y a Pedro a jugar videojuegos en Game Planet. Su mamá les llevó 4 cajitas de chocolates para que las repartieran equitativamente entre los 3

$3\overline{)4}$ 1.3
10
1

¿Qué parte le tocó a cada uno?

1.3 de parte a cada uno

Indica cómo repartirías los siguientes chocolates a cada persona.

$3\overline{)8}$ 2.6
20
2

Explica por qué es equitativa la repartición.

Se puede dividir entre 2.6 y sobrarían 2 chocolates ya que si se divide no se podrá hacer.

Fig. 8.1a. Tareas 1 del cuestionario inicial exploratorio realizadas por Brenda.

Tarea 2

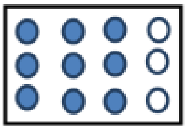
Identificación de fracciones y su equivalencia.

En la plaza comercial hay dos paneles de focos uno de 12 y otro de 24. Ambos están dañados y no encienden algunos focos. De acuerdo a la imagen, indica ¿qué fracción de los paneles NO enciende en cada uno?, entendiendo que los focos que están coloreados son los encendidos.

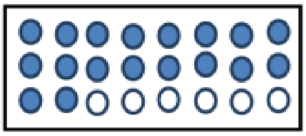
$\frac{12}{4}$ simplificado $\frac{4}{3}$

simplificado $\frac{24}{18}$ $\frac{8}{6}$

$3\overline{)24}$ 8
0
$3\overline{)18}$ 6
0



$= \frac{12}{9}$



$\frac{24}{18}$

De acuerdo a tu respuesta, de las fracciones que obtuviste:

¿Las fracciones tienen algo en común?

Si las dos se pueden simplificar y el no. de arriba del primer problema se puede multiplicar por 2 y da el resultado del 2º. Problema

¿Una es mayor que la otra o son equivalentes? Explica porqué.

Son equivalentes ya que si la primera se multiplica por 2 sale el segundo resultado

Fig. 8.1b. Tarea 2 del cuestionario inicial de exploración resuelta por Brenda.

Tarea 3

Reconstrucción del todo, identificación de fracciones equivalentes, representación gráfica de fracciones con diferentes denominadores, empleo de algoritmo de suma de fracciones.

Laura festejó sus cumpleaños e invitó a varios amigos a su fiesta. Laura comió $\frac{1}{8}$ de pastel, Claudia comió $\frac{2}{16}$ de pastel, Enrique comió $\frac{1}{4}$, Eduardo comió $\frac{3}{16}$, Ana comió $\frac{1}{16}$ y Gustavo comió $\frac{3}{16}$. ¿Sobró pastel?

Si **1+1+1+2+3+3 = 11** $\mathbf{\frac{11}{16}}$

De ser así, ¿qué fracción de pastel quedó sin repartir? $\mathbf{\frac{5}{16}}$

$\frac{5}{16}$

¿Quién comió más pastel, Laura o Claudia? Claudia

¿Eduardo comió más que Gustavo? no

¿Ana comió más o menos que Enrique?

comieron lo mismo

Explica porqué y justifica tu respuesta.

Porque se suman los de arriba nada más, se resta 16-11 y te da 5 nada más le agregas 16 o 8 abajo porque cada quién comió una porción de pastes unos más otros menos o al igual lo mismo.

Sombrea la fracción que comió cada uno e indica si tienen algo en común o qué relación hay entre ellas.

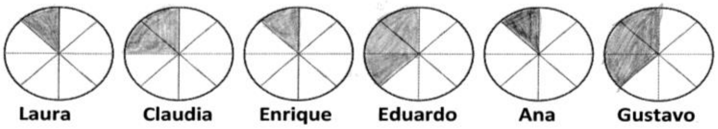


Fig. 8.1c. Tarea 3 del cuestionario inicial de exploración resuelta por Brenda.

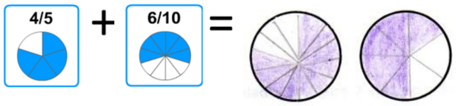
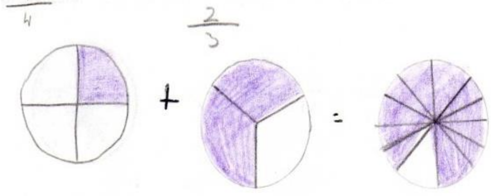
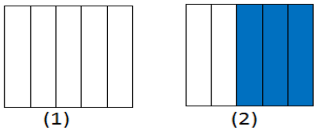
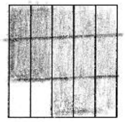
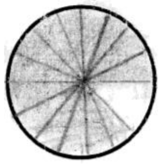
<table>
<tr><th colspan="2">CUESTIONARIO INICIAL EXPLORATORIO
RESPUESTAS DE BRENDA</th></tr>
<tr><th>Tarea 5
Representación gráfica de una suma de fracciones. Empleo de algoritmo. Invención de problemas.</th><th>Tarea 6
Representación gráfica de partes de partes, identificación de la preposición “de”</th></tr>
<tr><td>¿Qué figura se obtiene al sumar las dos fracciones siguientes?
$\frac{6}{10}+\frac{4}{5}=\frac{30+40}{50}=\frac{70}{50}=\frac{14}{10}=\frac{7}{5}$

Explica por qué lo has representado así.
por qué es una forma más facil de hacerla
¿Cuál de las dos fracciones es mayor?
La primera: es la segunda y la segunda: es la primera
Inventa un problema donde utilices los datos anteriores. Resuélvelo.
$\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\frac{8+3}{12}=\frac{11}{12}$
 </td><td>Observa las siguientes figuras:

La figura 1 corresponde a la unidad y la figura 2 corresponde a $\frac{3}{5}$ de la unidad. En la figura de abajo dibuja lo que corresponde a $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{5}$. Ilumina el producto correspondiente.

Plantea un problema similar empleando las fracciones $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$.
Represéntalo en la figura de abajo.

$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{9+8}{16}=\frac{17}{16}$
Suma para saber el resultado.</td></tr>
</table>

Fig. 8.2. Tarea 5 y 6 del cuestionario inicial elaboradas por Brenda.

CUESTIONARIO INICIAL EXPLORATORIO
RESPUESTAS DE BRENDA

Tarea 9
División partitiva, empleando enteros que conduzcan a respuesta en fracción, resolución de división sin el empleo de un algoritmo.

Alicia preparó 10 pequeñas tartas para su reunión de amigas. A su reunión acudieron 6 de sus mejores amigas. Se terminaron las tartas y todas comieron lo mismo. ¿Cuánto comió cada una de ellas?

¿Qué operación realizaste y por qué? 1.5 y sobra 1

división porqué corresponde con esa

Dibuja el reparto que hiciste.

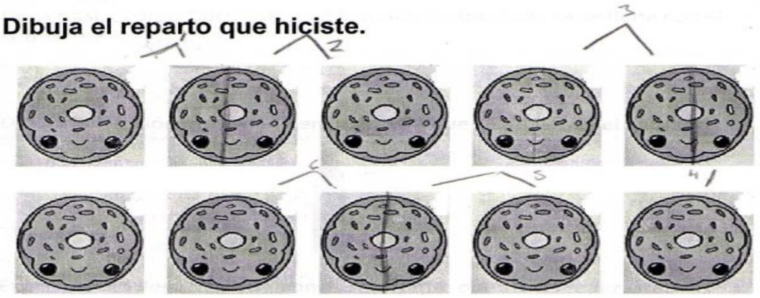
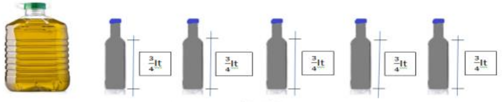


Fig. 8.3a. Elaboraciones de Brenda de problemas de división de fracciones del cuestionario inicial.

Tarea 10
División cuotativa. Empleo de algoritmo de división de fracciones, determinación del sobrante.

En un Restaurante de comida rápida, el dueño compra garrafas de aceite de $2\frac{3}{4}$ litros para la elaboración de los alimentos que preparan. Ellos llenan botellas de $\frac{3}{4}$ de litro para su uso. ¿Cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ de litro se pueden llenar con una garrafa? En el siguiente dibujo, marca las botellas que se llenarían con la garrafa.



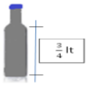
3 botellas

¿Sobró algo de aceite? si

De ser así, ¿cómo calculaste qué fracción de una botella se llena con el sobrante?

sumando

Dibuja la fracción que queda en la botella que se llena con el sobrante.



Explica cómo llegaste a esa conclusión y que operación realizaste.

sumando 3/4

Fig. 8.3b. Tarea 10 de división cuotativa resuelta por Brenda.

CUESTIONARIO
RESPUESTAS DE BRENDA

Tarea 11
División cuotativa. Empleo de algoritmo de división de fracciones, determinación del sobrante.

Con $\frac{5}{4}$ de un metro de cuero, un artesano elabora un cinturón. Si tiene una tira de $2\frac{3}{4}$ de metro. ¿Cuántos cinturones puede elaborar?

Representa en la figura la cantidad de cinturones que se obtienen. ¿Sobra material?

De ser así, ¿qué fracción de material sobra? sí $\frac{1}{4}$

¿Cuántas operaciones realizaste? ¿Cuáles fueron esas operaciones?

suma y Multiplicación

Fig. 8.4a. Tarea 11 de división cuotativa de fracciones elaborada por Brenda.

Tarea del taller
División de fracciones mediante el empleo de una razón asociada al isomorfismo de medida.
Representación pictórica y empleo de algoritmo.

Para pintar las líneas del asfalto en una calle, se utiliza 1 litro de pintura para trazar $\frac{1}{2}$ metro de línea. ¿Cuántos litros de pintura se utilizan para trazar $\frac{3}{4}$ de metro de línea?

1 ½ litros de pintura

¿Qué operación empleaste?

sumas ó multiplicación

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

Represéntalo en un dibujo.

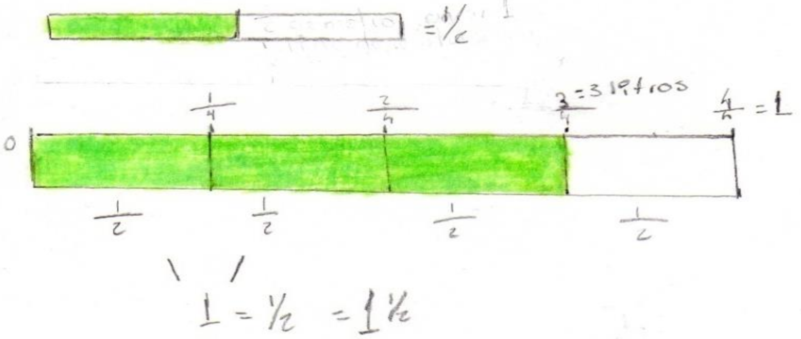


Fig. 8.4a. Tarea del taller exploratorio de división de fracciones resuelta por Brenda.

Al analizar sus elaboraciones del cuestionario y del taller identificamos que tenía dificultades en situaciones básicas de la construcción numérica de la fracción como fue la inversión de denominadores, en dónde considera el numerador como denominador y viceversa, (Fig. 8.1b), imposibilidad para reconstruir el todo, al no detectar diferencia entre $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{16}$ (Fig. 8.1c), dificultad para representar una suma de fracciones, no identifica la preposición “de” (Fig. 8.2), no logra realizar un reparto exhaustivo, recurre al empleo de naturales y decimales, en la división de fracciones (Fig. 8.3a), logra identificar número de agrupamientos pero no identifica un residuo, por supuesto no lo asocia a la división de fracciones, (Fig. 8.3b y 8.4a). Y la tarea de división realizada en el taller la resuelve de manera intuitiva correctamente; sin embargo, asocia su respuesta a una suma de fracciones, (Fig. 8.4b).

8.1.2. Tareas reelaboradas por Brenda en entrevista

Para el desarrollo de la investigación se pretendía observar el trabajo de Brenda en lo referente a la división de fracciones; sin embargo, fue necesario en primera instancia ayudarle a sortear las dificultades que presentaba en cuanto a la construcción numérica de las fracciones. Éstas se fueron resolviendo durante el avance de la entrevista mediante preguntas guiadas, la reelaboración de las tareas y el empleo del material visual manipulativo.

Fueron varias las tareas elaboradas por Brenda para lograr salvar esas dificultades; no obstante, en este documento no se presentan todas ellas, por no formar parte de la investigación, se aborda el trabajo realizado a partir de la multiplicación de fracciones, por ser un tema curricular importante para la introducción de la división de fracciones.

Se introdujo en la entrevista con Brenda, la división de fracciones empleando el inverso del producto de medida, considerando las aportaciones de Vergnaud (1991) sobre el producto de medida y Valdemoros, Ramírez, y Lamadrid, (2017) sobre el inverso del producto de medida.

Trabajamos primero el producto de medida, considerando una tarea que involucraba la obtención de áreas, mediante el plegado de papel, cuyo objetivo consistía en que identificara la intersección de áreas, identificación de partes de partes y la preposición “de”.

Para ello la reelaboración de la Tarea 6 fue importante porque permitió a Brenda acercar al significado de la multiplicación de fracciones en la que se le pide identificar $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{5}$ y en la que a pesar de haberse equivocado en el cuestionario inicial, en la reelaboración identifica adecuadamente, partiendo en tercios y marcando lo solicitado, en la primera parte de la tarea. En la segunda parte se le solicita plantear un ejercicio similar y representarlo pictóricamente, pero ahora empleando un círculo, ella lo representa repitiendo lo hecho en la primera, llama la atención que realiza particiones verticales. Emplea el sombreado como recurso de simbolización y selecciona correctamente aunque de manera invertida ya que se le solicita representar $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$ y ella representa $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$, (Fig. 8.7). Para evitar confusiones posteriores, decidimos trabajarlo como ella lo plantea, considerando que se puede realizar ese movimiento por la propiedad de conmutatividad aplicable a la multiplicación. En este punto se le hace ver la importancia de que las partes sean equitativas, y se le cuestiona si el reparto que realizó es equitativo, menciona que no se puede hacer ese reparto partiendo del centro del círculo, pero se le motiva a intentarlo. Realiza la partición del círculo en cuartos y mediante colores se le solicita que identifique $\frac{3}{4}$. Una vez que identifica, se le pide identificar de lo sombreado $\frac{2}{3}$ y que indique a qué cantidad del círculo corresponde y logra identificar que es $\frac{1}{2}$. Intentamos el acercamiento al algoritmo, preguntando si habrá una operación que nos permita obtener ese resultado. Un fragmento del diálogo se muestra a continuación.

I: Investigadora, B: Brenda.

I: ¿Crees que haya una operación de fracciones que me permita hacer lo anterior?
B: ¿Para que el resultado me salga $\frac{1}{2}$ *? Sería sumando. No, más bien dividiendo.*
I: ¿Tú crees que eso sería? ¿porqué no lo intentas?
B: Si se divide un entero entre dos sería $\frac{1}{2}$ *.* $1 \div 2 = \frac{1}{2}$ *, sólo que aquí ya serían enteros.*
I: Pero el problema no tiene enteros, el dato es $\frac{3}{4}$ *.*
B: Serían , $\frac{3}{4}$ *entre 3 [pensativa por un rato].*

Debido a que no logra identificar cómo hacerlo, la investigadora le proporciona una hoja de papel en la que se le solicita que realice un doblez en la hoja de manera vertical para identificar la primera fracción que está empleando, por lo que dobla la hoja en cuartos como se muesta en la Figura 8.5 y que marque con color la fracción del problema, posteriormente se le pide que realice en el otro extremo de la hoja un doblez con la segunda fracción del problema, de manera vertical y que ahora coloree esa segunda fracción con otro color. Una vez que lo hizo le pedimos que identificara $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$.

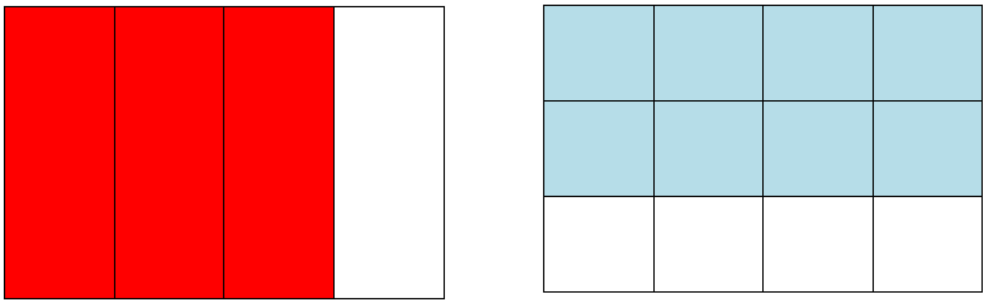


Fig. 8.5. Intento de Brenda en plegado de papel. Identificación de partes.

Posteriormente le pedimos que identifique lo que se intersecta, ella lo identifica como lo que "choca", dándose cuenta que es lo mismo, (Figura 8.6).

I: ¿Puedes ver qué es lo que se intersecta?
B: Es que chocan, el rojo con el azul.
I: ¿Y eso que choca qué representa?
B: Es lo mismo que me piden.

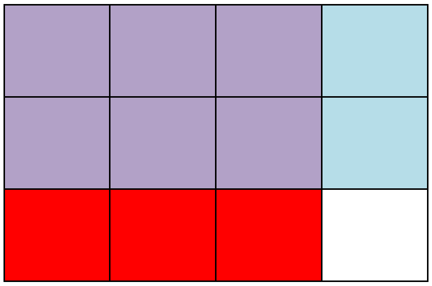


Fig. 8.6. Intersección fracciones. Identificación de partes de partes.

I: ¿Serían $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ *?*
B: Sí.
I: ¿Y eso cuánto es de toda la unidad?
B: Si los cuento todos serían 12 y lo que sobra sería equivalente a $\frac{1}{12}$ *.*
I: ¿Y cuánto es lo que se intersecta?
B: Serían $\frac{6}{12}$ *.*
I: Volvamos ahora al problema, ¿cuál era tu primera fracción?
B: $\frac{2}{3}$.
I: ¿Y la segunda?
B: $\frac{3}{4}$.

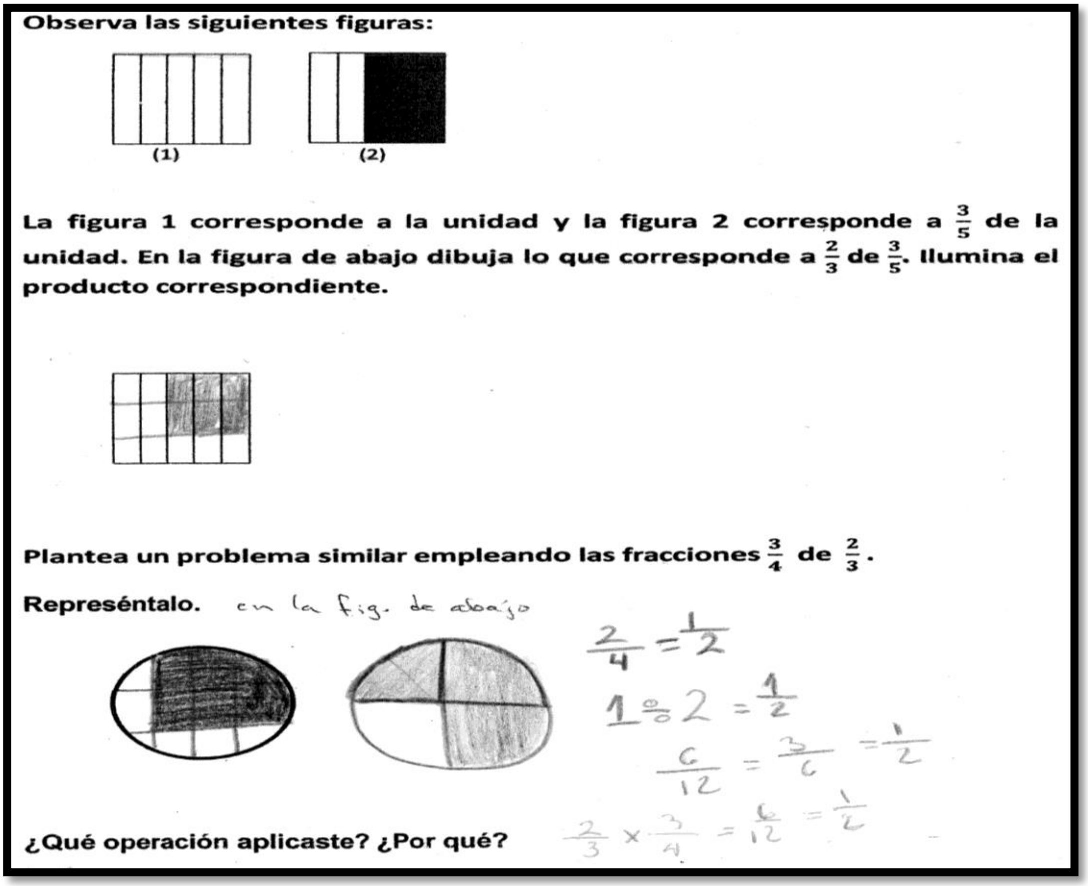
I: ¿Y eso a qué es igual?
B: $\frac{6}{12}$
I: Bien. Escríbelo.
B: $\frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} = \frac{6}{12}$
I: ¿Qué operación crees que dé ese resultado?
B: ¿Sería una división? [observa los números en silencio]. Si se multiplican estos dos, 2 x 3 saldría 6. Si lo multiplico serían $\frac{6}{12}$ *y ya simplicado sería* $\frac{1}{2}$.
I: Entonces ¿Qué operación resuelve el problema?
B: Una multiplicación [completa la operación] : $\frac{2}{3}$ *x* $\frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ *[Fig. 8.7].*

Para concluir el problema intentamos acercar a Brenda al significado de la multiplicación de fracciones solicitándole identificar que era lo que habíamos hecho paso a paso. Ella logra identificar que habíamos tomados una fracción de una fracción de un entero.

I: Bien, entonces ¿qué hicimos? ¿qué tomamos primero?
B: Tomamos $\frac{3}{4}$.
I: ¿Era un entero?
B: No, pero esa fracción la tomamos de un entero.
I: ¿Y la segunda fracción $\frac{2}{3}$ *de dónde la tomamos?*
B: De la fracción que se tomó del entero.
I: Entonces tomé …
B: Una fracción de una fracción de un entero.
I: Entonces ¿qué significa multiplicar fracciones?
B: Tomar una fracción de una fracción.

Una vez que logró identificar partes de partes, introdujimos una tarea adicional de área, considerando el producto de medida (Vergnaud, 1991), que pudo resolver fácilmente, como se muestra en la Figura 8.8. Parte de diálogo posterior a la resolución del problema se muestra a continuación.

I: ¿Puedes decir después de resolver el problema cuándo debes emplear una multiplicación de fracciones?
B: Aquí en este problema, cuando tomamos lo que se intersecta.
I: ¿Y para resolverlo que tuviste que hacer?
B: Tomar una fracción de una fracción del entero.



Observa las siguientes figuras:

(1) (2)

La figura 1 corresponde a la unidad y la figura 2 corresponde a $\frac{3}{5}$ de la unidad. En la figura de abajo dibuja lo que corresponde a $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{5}$. Ilumina el producto correspondiente.

Plantea un problema similar empleando las fracciones $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$.

Represéntalo. en la fig. de abajo

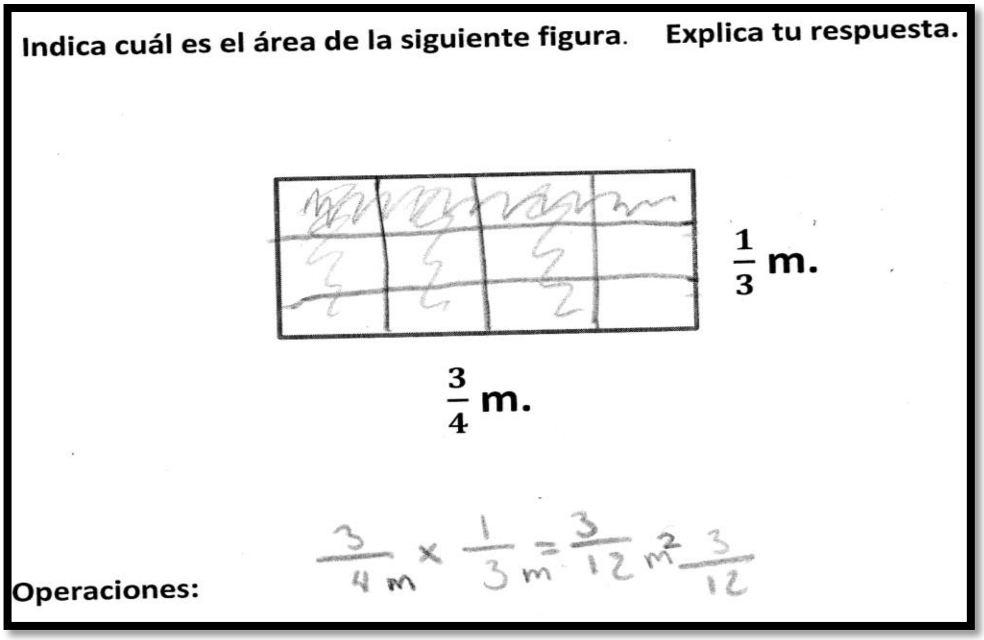
$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$1 \div 2 = \frac{1}{2}$

$\frac{6}{12} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

¿Qué operación aplicaste? ¿Por qué? $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

Fig. 8.7. Reelaboración de la tarea 6 realizado por Brenda. Identificación de partes de partes.



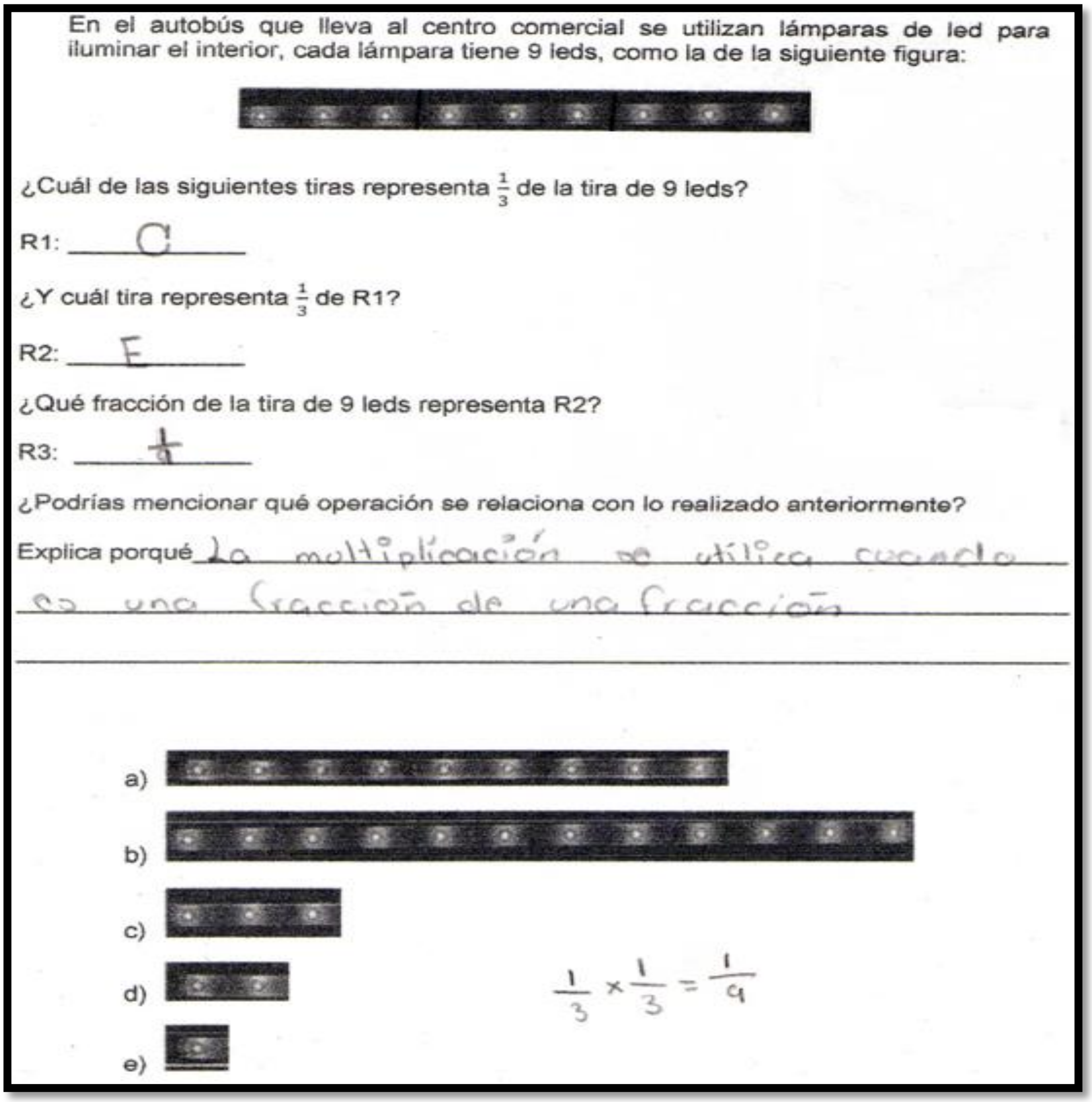
Indica cuál es el área de la siguiente figura. Explica tu respuesta.

Operaciones: $\frac{3}{4\,m} \times \frac{1}{3\,m} = \frac{3}{12}\,m^2 \; \frac{3}{12}$

Fig. 8.8. Tarea adicional de producto de medida.

En este punto introdujimos la Tarea adicional 3 en la que se emplea el material de leds para identificar partes de partes y en la que Brenda logra identificar y explicar lo que entiende por multiplicar fracciones, (Fig. 8.9), y el empleo del material visual manipulativo (acetatos empleados en el juego de fracciones) con una nueva operación, como se muestra en la (Fig. 8.10 y 8.11).

En esta tarea (Fig. 8.10), se observa en Brenda una mayor facilidad para representar pictóricamente las áreas solicitadas e identificar la intersección adecuadamente, sólo se observa que inicia su resolución por la fracción contraria. De igual manera, al emplear el material visual manipulativo, logra identificar la intersección de áreas adecuadamente, (Fig. 8.11), en las que obtene el mismo resultado, empleando el material y el pictograma.



En el autobús que lleva al centro comercial se utilizan lámparas de led para iluminar el interior, cada lámpara tiene 9 leds, como la de la siguiente figura:

¿Cuál de las siguientes tiras representa $\frac{1}{3}$ de la tira de 9 leds?

R1: C

¿Y cuál tira representa $\frac{1}{3}$ de R1?

R2: E

¿Qué fracción de la tira de 9 leds representa R2?

R3: $\frac{1}{9}$

¿Podrías mencionar qué operación se relaciona con lo realizado anteriormente?

Explica porqué La multiplicación se utiliza cuando es una fracción de una fracción

a)

b)

c)

d)

e)

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

Fig. 8.9. Identificación de partes de partes empleando el material visual manipulativo.

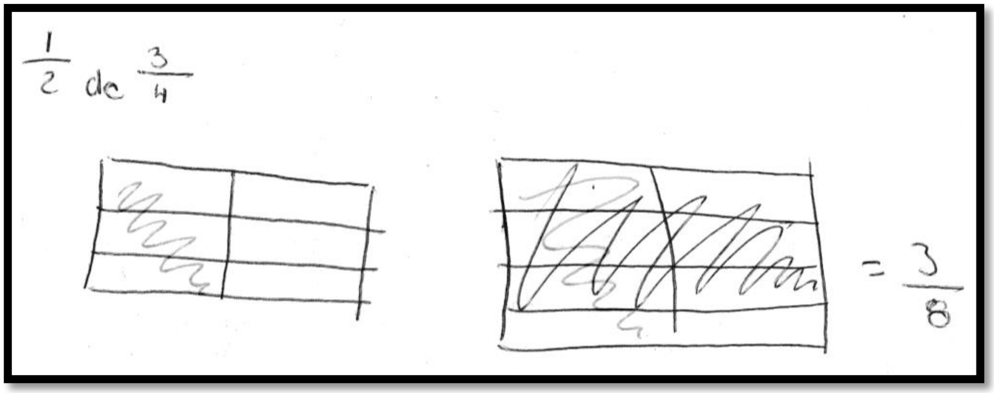


Fig. 8.10. Ejercicio de multiplicación de fracciones realizado por Brenda en donde identifica intersección de áreas.

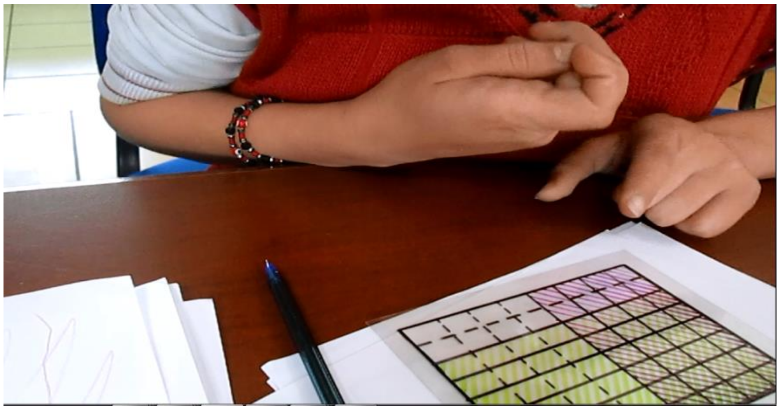
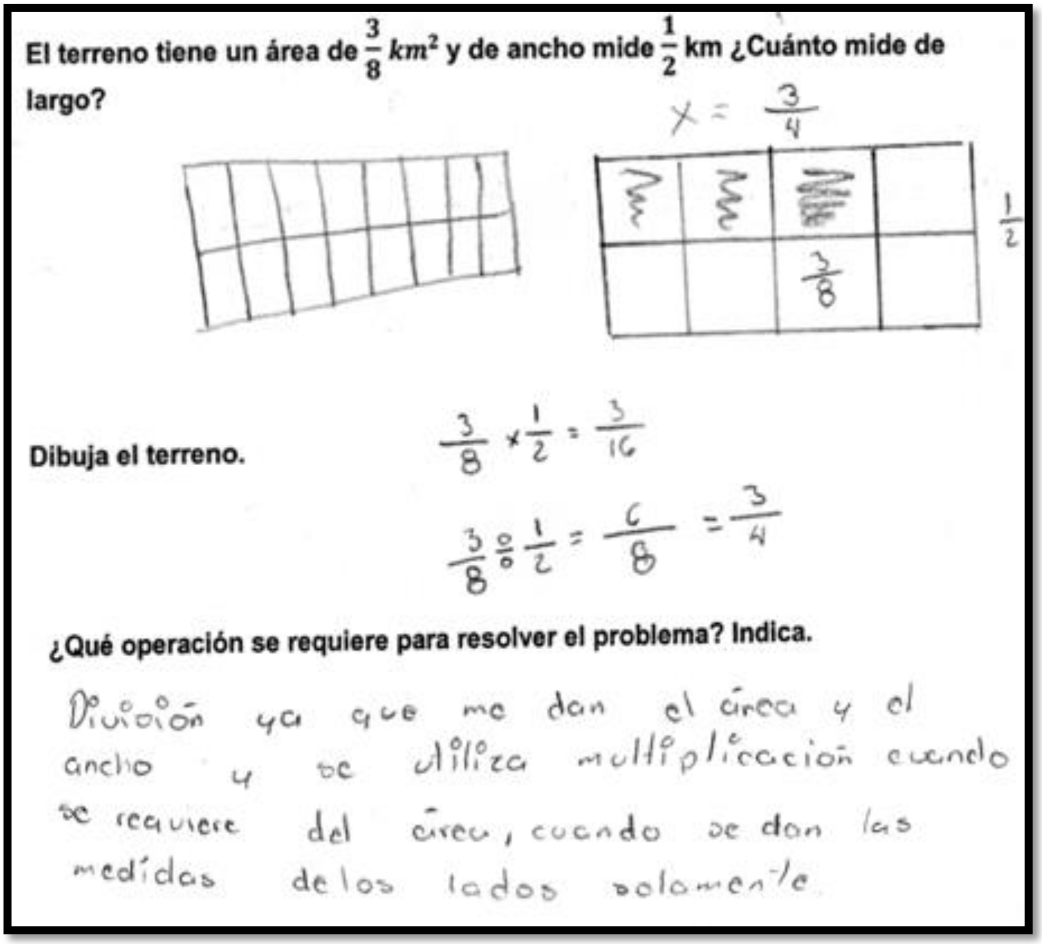


Fig. 8.11. Trabajando multiplicación de fracciones con material visual manipulativo.

8.3. Tareas de división de fracciones

Para abordar la división de fracciones introdujimos después la Tarea adicional 6, en la que se le solicita realizar el procedimiento inverso del mismo problema, el objetivo era identificar el inverso del producto de medida (Valdemoros, Ramírez, y Lamadrid, 2017), partiendo de que Brenda ya había comprendido el significado de la multiplicación de fracciones empleando el producto de medida.

I: ¿Qué pasa si ahora te proporcionan el valor del área y de un lado, y te solicitan determinar el valor del lado faltante? ¿Cómo lo resolverías?
B: [Lee el problema] ¿cómo que de área tiene $\frac{3}{8}$ *? área es ésto [señala la parte que se intersecta en el problema que había resuelto anteriormente].*
I: Sí, efectivamente.
B: Y un medio sería… [comienza a dibujar su terreno].



El terreno tiene un área de $\frac{3}{8}$ km^2 y de ancho mide $\frac{1}{2}$ km ¿Cuánto mide de largo?

$x = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{2}$

$\frac{3}{8}$

Dibuja el terreno.

$\frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$

$\frac{3}{8} \div \frac{1}{2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

¿Qué operación se requiere para resolver el problema? Indica.

División ya que me dan el área y el ancho y se utiliza multiplicación cuando se requiere del área, cuando se dan las medidas de los lados solamente

Fig. 8.12. División de fracciones mediante el inverso del producto de medida.

Brenda realiza un primer intento en el que se equivoca al realizar más particiones de las necesarias, en el primer pictograma realiza una partición vertical en 8, partiendo de que le presentan un denominador de 8 y posteriormente parte el rectángulo en dos horizontalmente, la investigadora realiza preguntas guía. Las preguntas la invitan a reflexionar lo que provoca que rectifique y realice un segundo intento, esta vez de manera correcta accediendo a la solución fácilmente como puede observarse en la Figura 8.12.

B: Sería más o menos así, y coloreo 3 para que sean 3 octavos.
I:¿Cómo le hiciste?
B: Sería $\frac{1}{2}$, que son éstos dos [señala la partición horizontal] y $\frac{3}{8}$, serían 8, lo partí en 8 [señala la particiones verticales] y tendría que colorear 3 para que sean los $\frac{3}{8}$.
I: ¿La partición que realizaste es correcta? ?¿es lo que se requiere?
B: Ah no. Es que como lo partí a la mitad se obtiene más cantidad.

I: ¿En cuántas partes está dividido tu entero?

B: 16. Sería en 4 y no en 8 [refiriéndose a las particiones verticales, realiza un segundo pictograma en el que corrige su error y colorea 3 partes de 8].

Fig. 8.13. Brenda en el segundo pictograma identifica adecuadamente el área solicitada.

I: Lo que te dice el problema es que el área es $\frac{3}{8}$ *y un lado mide* $\frac{1}{2}$ *¿cuál es el lado que mide* $\frac{1}{2}$ *?*

B: Éste [señala una de las partes horizontales] y me están pidiendo el largo.

I: ¿Y cuánto mide el largo?

B: Sería 1, 2, 3, 4. ¿sería $\frac{1}{4}$ *? No. serían* $\frac{3}{4}$ *(Fig. 8.13).*

I: Muy bien. Anota el resultado. Ahora, hay una operación que nos lleva a ese resultado. ¿Cuál crees que sería esa operación?

B: ¿La multiplicación?

I: ¿Por qué no pruebas?

B: [Realiza la multiplicación de las fracciones y obtiene $\frac{3}{16}$ *] Es lo que nos salió aquí [señala el primer pictograma]. No, así no es.*

I: Si en el problema anterior te daban los dos lados y te pedían calcular el área y ahora te dan el área y un lado y te piden calcular el largo, ¿Qué debes hacer?

B: ¿Dividir? Sí porque en la anterior se multiplica, entonces en este hay que dividir.

I: ¿Prueba?

B: [Realiza la operación y obtiene el resultado correcto] Sí. Y simplificado sería $\frac{3}{4}$ *lo que me salió. Entonces sería dividido.*

I: Bien. ¿Si notas la diferencia entre los dos problemas?

B: Sí. En el primero se multiplica y en el segundo se divide.

I: En el primero te dan los lados y debes obtener el área. Y en el segundo ¿qué te dan?

B: El área y un lado y debo obtener el lado faltante.

I: ¿Y qué operación debes realizar?

B: Una división.

I: Bien. Explícalo en el problema.

Podemos concluir de la solución de Brenda en este problema que el trabajar la multiplicación mediante el producto de medida, le permitió identificar posteriormente el inverso de dicho producto y resolver adecuadamente, así como reconocer la operación y entender la semántica de dichas operaciones.

Posteriormente guiamos a Brenda a la solución de la división partitiva, mediante la reelaboración de la Tarea 9. Ella inicia repartiendo mediante el empleo de la categoría de Olguín (2009), "*Reparte unidades a cada persona y lo que sobra lo divide en fracciones",* dando números a cada sujeto del reparto, traduciendo el aspecto cuantitativo a los números naturales (Fig. 8.14). Llama la atención la forma en que reparte la unidad sobrante, en la que considera la tarta como si fuera un cuadrado y no una rosca. Pero sí menciona al terminar el reparto que debe ser partida en partes iguales. Esto nos permite identificar que sí lo entiende pero se le dificulta representarlo.

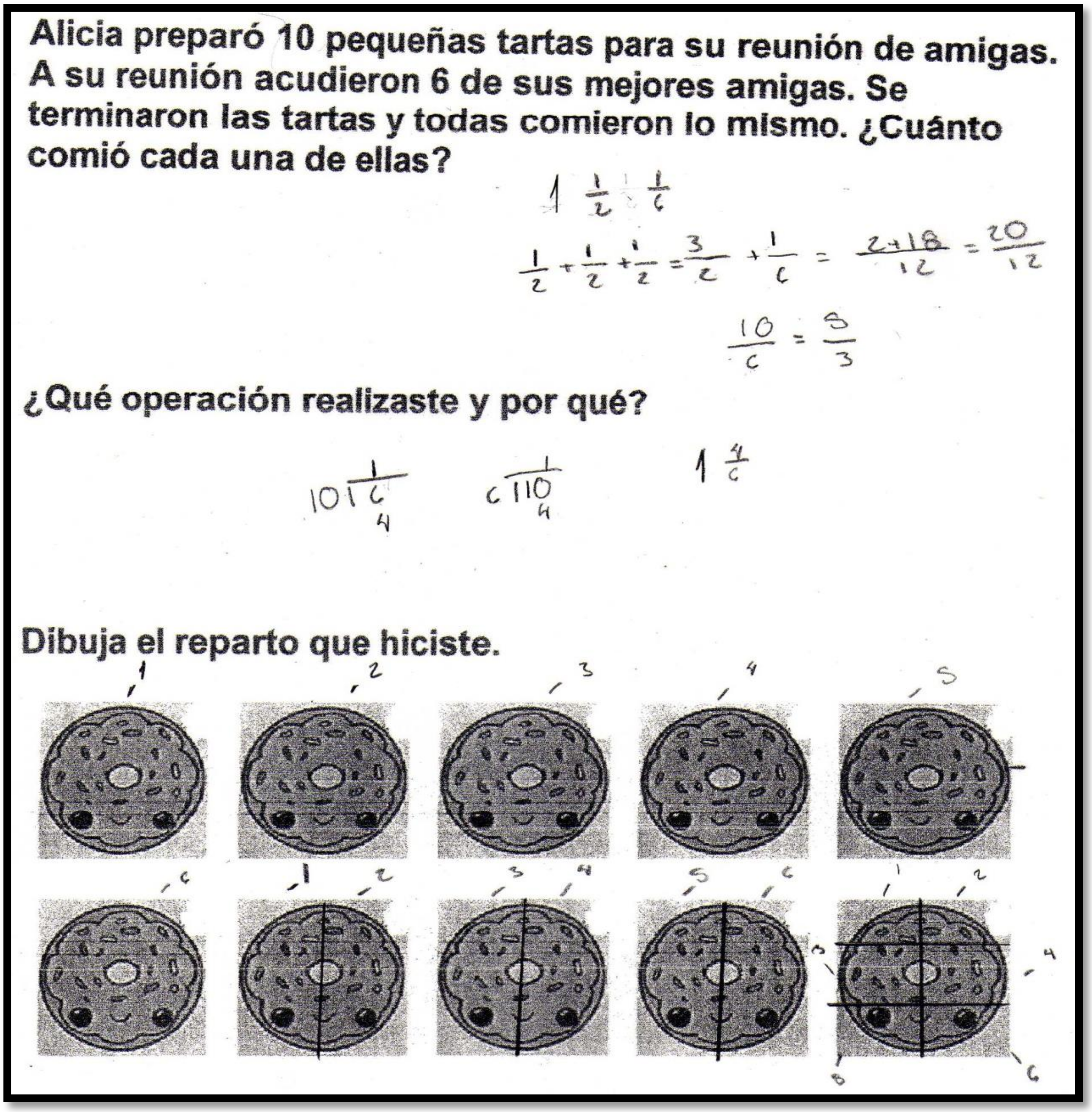
Al terminar el reparto menciona que la respuesta sería 1.5 y una fracción, a lo que se le pregunta cómo identifica esa fracción y se le pide que lo vaya anotando, considerando qué fracción representa 0.5, por lo que anota 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$ y especula que sería una suma la que debe hacer para obtener el resultado de 1, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{6}$. Le solicitamos entonces que represente todo en una sola fracción, por lo que convierte el entero en medios y realiza la suma de todos los elementos, obteniendo un resultado correcto de $\frac{5}{3}$ simplificado. En este punto, llamamos su atención sobre el resultado obtenido antes de simplificar hasta $\frac{5}{3}$, en la fracción $\frac{10}{6}$ y que lo asociara con los datos del problema, en el que hay "10" tartas y que se deben repartir entre "6" amigas, a lo que ella cae en la cuenta que desde el principio pudo haber obtenido el resultado si sólo hubiese representado esos datos en una fracción, que representara $\frac{10\ tartas}{6\ amigas}$. Le preguntamos después, qué operación se puede emplear para resolver el problema y menciona que una suma, por ser la operación que empleó al final. Se le pregunta entonces si habrá una operación que nos dé el resultado directamente. Parte del diálogo se muestra a continuación.

B: Una operación directa no, pero sí podemos poner $\frac{10}{6}$.
I: Cuándo te dicen que debes repartir 10 chocolates entre 5 niños ¿qué operación realizas?
B: Una división.
I: ¿Y en este problema qué te están pidiendo?
B: Que reparta las 10 tartas entre 6 niñas.

I: ¿Qué operación debes realizar?
B: ¿Entonces sería división?
*I: ¿Por qué no lo haces? Realiza tu operación sin llegar a decimale*s.

Brenda realiza la operación de división, pero invierte los datos, por lo que se le hace ver su error preguntado ¿qué es lo que está dividiendo tartas o personas?, por lo que rectifica su error.

I: Ahora represéntalo en una fracción. ¿Cuál sería?
B: Sería $1\frac{4}{6}$.
I: ¿Entonces qué operación se emplea en el problema?
B: Una división.



Alicia preparó 10 pequeñas tartas para su reunión de amigas. A su reunión acudieron 6 de sus mejores amigas. Se terminaron las tartas y todas comieron lo mismo. ¿Cuánto comió cada una de ellas?

$1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{6}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2+18}{12}=\frac{20}{12}$

$\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$

¿Qué operación realizaste y por qué?

$\begin{array}{r} 1 \\ 10\overline{)6} \\ 4 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \\ 6\overline{)10} \\ 4 \end{array}$ $1\frac{4}{6}$

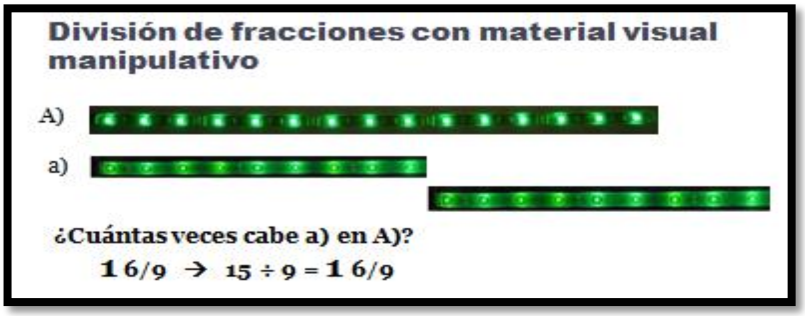
Dibuja el reparto que hiciste.

Fig. 8.14. Reelaboración de la tarea 9 de división partitiva realizada por Brenda.

Para abordar la división cuotativa, empleamos la Tarea adicional 4, ésta tarea tuvo como propósito acercar a Brenda al significado de la división de fracciones, determinando cuánto se repite una fracción en otra, coincidiendo con Fishbein, Deri, Nello, Marino (1985).

Brenda inició la solución del problema trabajando con enteros, considerando el residuo como un sobrante y, en tiras menores que la unidad, determinó que no se podía realizar por ser más grande la tira a comparar. Para lograr acercar a Brenda a la solución, se hizo uso del material de tiras de leds en las que se emplea el modelo de conmensuración , un ejemplo de su aplicación se muestra en la Figura 8.15, en este modelo, como se había mencionado anteriormente, se trabaja con dos tiras de leds, en el que una representa la unidad y la otra, la parte que debe ser medida con dicha unidad a través de la comparación, inspirados en el trabajo realizado por Balbuena (1988) y Block (2008). Como se muestra en dicha figura la segunda tira de leds que sirve para medir y comparar a través de un desplazamiento y que representa al divisor, posteriormente será objeto de una reunitización para determinar el resultado.

El empleo de dicho material permitió a Brenda identificar adecuadamente lo solicitado y lograr un resultado correcto en fracción, en dónde pudo determinar cuánto se repite la tira de 9 leds en la tira de 15 leds, (Fig. 8.16). Brenda logró incluso determinar el resultado aún cuando la primera tira era menor que la segunda en comparación (Fig.8.17). Sus respuestas se pueden observar en la Figura 8.18.



División de fracciones con material visual manipulativo

¿Cuántas veces cabe a) en A)?

1 6/9 → 15 ÷ 9 = 1 6/9

Fig. 8.15. División cuotativa empleando material visual manipulativo, modelo de conmensuración.

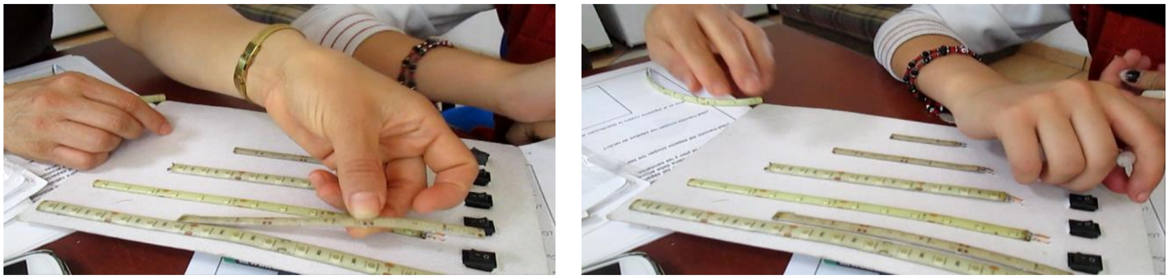


Fig. 8.16. Empleo del material visual manipulativo para la identificación del significado de la división cuotativa.

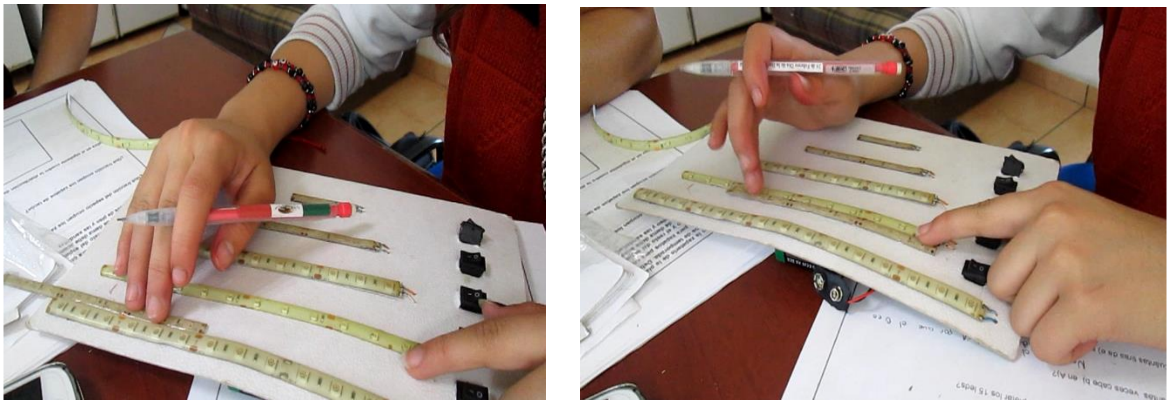
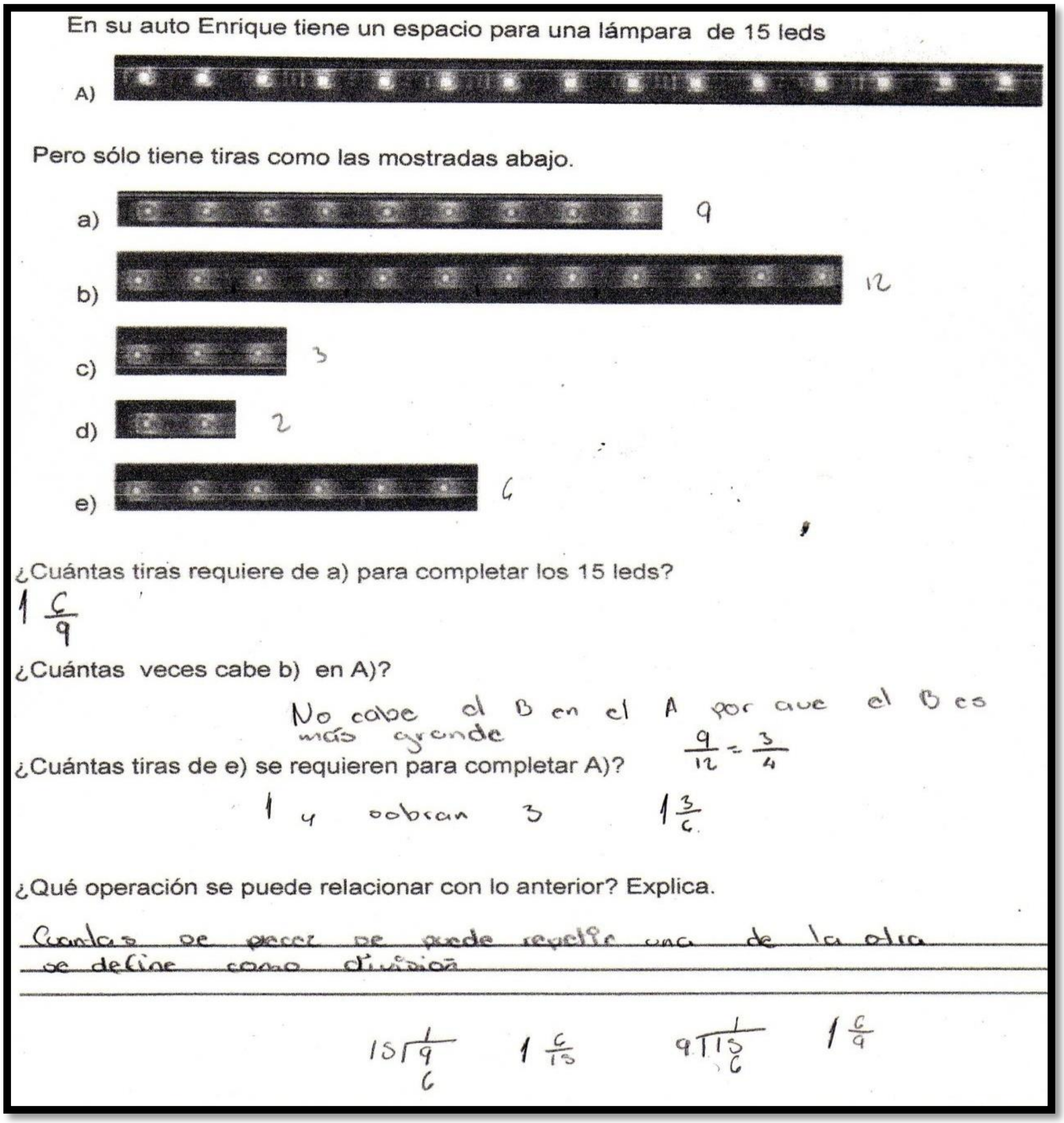


Fig. 8.17. Brenda determinando cuántas veces cabe o cuánto se repite una tira de leds en otra, al realizar comparaciones mediante el empleo del material y el modelo de conmensuración.



En su auto Enrique tiene un espacio para una lámpara de 15 leds

A)

Pero sólo tiene tiras como las mostradas abajo.

a) 9

b) 12

c) 3

d) 2

e) 6

¿Cuántas tiras requiere de a) para completar los 15 leds?

$1\frac{6}{9}$

¿Cuántas veces cabe b) en A)?

No cabe el B en el A por que el B es más grande

$\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$

¿Cuántas tiras de e) se requieren para completar A)?

1 y sobran 3 $1\frac{3}{6}$

¿Qué operación se puede relacionar con lo anterior? Explica.

Cuantas se veces se puede repetir una de la otra se define como división

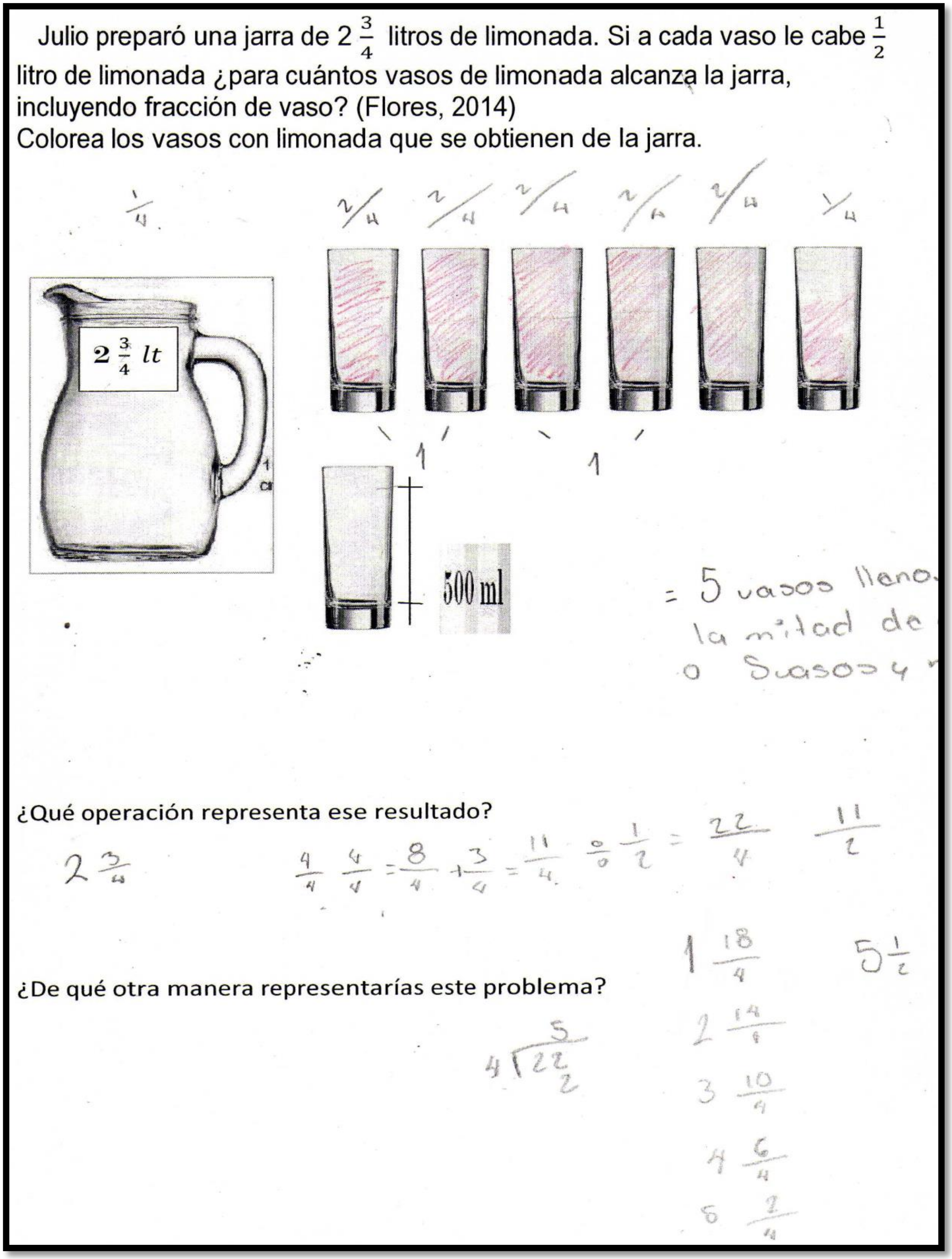
$\begin{array}{r}1\\15\overline{)9}\\6\end{array}$ $1\frac{6}{15}$ $\begin{array}{r}1\\9\overline{)15}\\6\end{array}$ $1\frac{6}{9}$

Fig. 8.18. Resolución de la tarea adicional 4 de división cuotativa a partir de enteros.

En la elaboración de Brenda de la Tarea adicional 4, la primera pregunta la responde correctamente, sin embargo en la segunda y tercera se equivoca de inciso y considera a) en lugar de A), es por eso que menciona que no cabe b) en a) por ser más grande. Pero decidimos continuar aún con el error, debido a que se consideró como una oportunidad para trabajar la división de una cantidad mayor en una menor, la reunitización y el acercamiento a la identificación del residuo en términos del divisor, lo que resultó ser un buen ejemplo, que resolvió adecuadamente.

Una vez que resolvió la tarea adicional 4, decidimos presentarle un problema similar a la Tarea 10 realizada en el cuestionario inicial exploratorio de división cuotativa, la Tarea adicional 7, para observar si le era más sencillo resolverlo con lo aprendido anteriormente. Pudimos observar en Brenda un excelente desempeño al resolver esta tarea, en la que identificó mediante el pictograma la cantidad de agrupamientos y el residuo adecuado, y proporciona como respuesta "5 vasos y la mitad de otro ó 5 vasos y medio". Cuando se le pregunta, ¿qué operación resuelve el problema? De inmediato y con mucha seguridad indica que una división, pero en dónde se observa dificultad es en la conversión de fracción mixta a impropia para poder realizar la operación. Se le permite resolverlo de la manera que le sea más sencillo y llama la atención que debe descomponer la fracción mixta por unidad, para después realizar la división, sumando $\frac{4}{4} + \frac{4}{4} = \frac{8}{4} + \frac{3}{4} = \frac{11}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{22}{4} = \frac{11}{2}$.

Una vez que encuentra el resultado, le preguntamos cómo lo representaría en fracción mixta, es decir, determinar cuántos enteros obtiene de esa fracción, con el objetivo de asociarlo al número de vasos llenos. Resulta muy interesante observar la manera en la que lo realiza, parte de $\frac{22}{4}$, resta un entero $(\frac{4}{4})$ que agrega a la fracción convirtiéndola en mixta $1\,\frac{18}{4}$ y continúa haciéndolo entero por entero hasta concluir con el resultado esperado, $5\,\frac{1}{2}$ (Fig. 8.19), que comprueba mediante una división de enteros. Le preguntamos finalmente *¿qué es lo que has comprendido hasta el momento?,* a lo que responde que aprendió "*a dividir y que hay diferentes maneras de dividir, que se puede realizar mediante pictogramas o se puede realizar mediante la operación directa*", también le preguntamos *¿cuándo debes emplear una división de fracciones?,* y responde que *"cuando se tiene que repartir algo en partes más pequeñas".*



Julio preparó una jarra de $2\frac{3}{4}$ litros de limonada. Si a cada vaso le cabe $\frac{1}{2}$ litro de limonada ¿para cuántos vasos de limonada alcanza la jarra, incluyendo fracción de vaso? (Flores, 2014)
Colorea los vasos con limonada que se obtienen de la jarra.

= 5 vasos lleno
la mitad de
o 5vasos y

¿Qué operación representa ese resultado?

$2\frac{3}{4}$

$\frac{4}{4}\ \frac{4}{4} = \frac{8}{4} + \frac{3}{4} = \frac{11}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{22}{4}$ $\frac{11}{2}$

¿De qué otra manera representarías este problema?

$1\frac{18}{4}$ $5\frac{1}{2}$

$4\overline{)22}$ 5, 2

$2\frac{14}{4}$

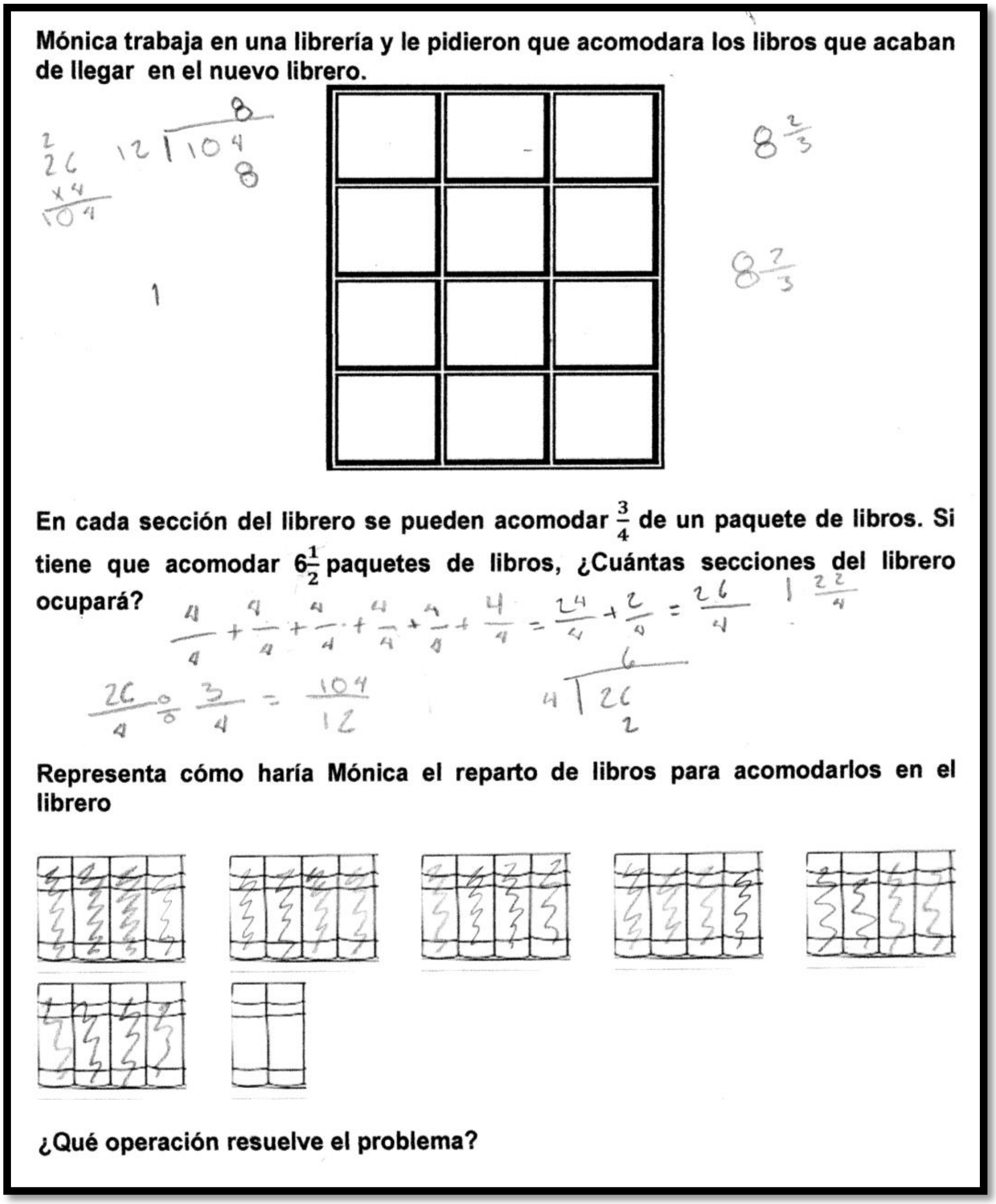
$3\frac{10}{4}$

$4\frac{6}{4}$

$5\frac{2}{4}$

Fig. 8.19. Tarea adicional 7 de división cuotativa resuelta por Brenda en entrevista.

Para finalizar las sesiones de entrevista aplicamos a Brenda una última tarea de división cuotativa de fracciones que pudo resolver sin contratiempos, identificando número de agrupamientos y residuo correctamente, mediante el pictograma y posteriormente con la operación, la cual aplicó correctamente, como puede observarse en la Figura 8.20, además de comprobar el resultado mediante el empleo del material de acetatos, midiendo cuántas veces cabe el divisor en el dividendo, como se muestra en la Figura 8.21. Brenda incluso pudo inventar un problema similar de división de fracciones como se muestra en la Figura 8.22.



Mónica trabaja en una librería y le pidieron que acomodara los libros que acaban de llegar en el nuevo librero.

2
26
×4
104

$12\overline{)104}$ 8
8

1

$8\frac{2}{3}$

$8\frac{2}{3}$

En cada sección del librero se pueden acomodar $\frac{3}{4}$ de un paquete de libros. Si tiene que acomodar $6\frac{1}{2}$ paquetes de libros, ¿Cuántas secciones del librero ocupará?

$\frac{4}{4}+\frac{4}{4}+\frac{4}{4}+\frac{4}{4}+\frac{4}{4}+\frac{4}{4}=\frac{24}{4}+\frac{2}{4}=\frac{26}{4}$ | $\frac{22}{4}$

$\frac{26}{4}\div\frac{3}{4}=\frac{104}{12}$

$4\overline{)26}$ 6
2

Representa cómo haría Mónica el reparto de libros para acomodarlos en el librero

¿Qué operación resuelve el problema?

Fig. 8.20. Tarea adicional 8 de división cuotativa resuelta por Brenda en entrevista.

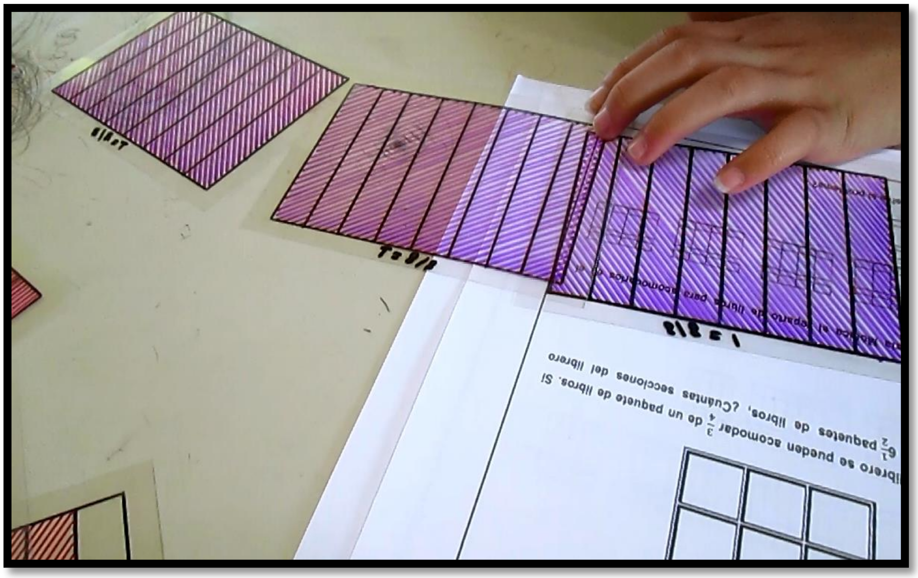
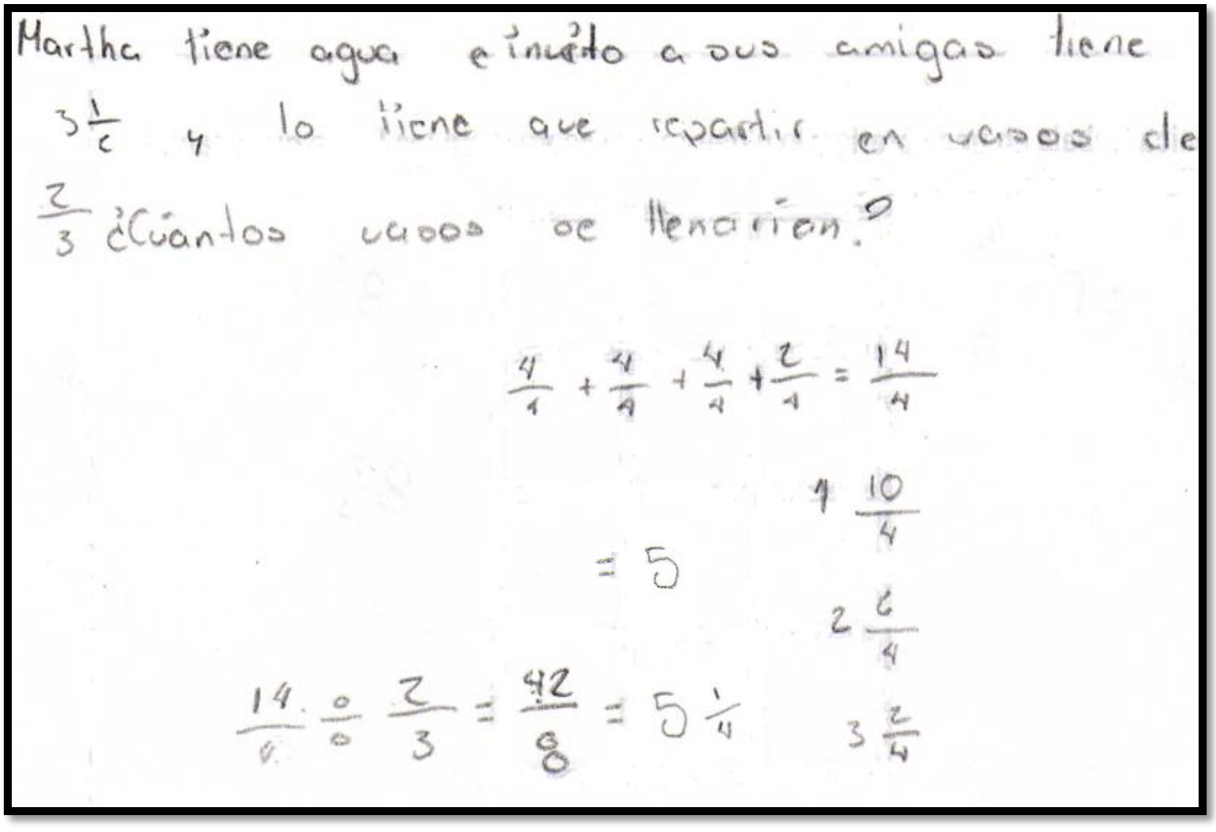


Fig. 8.21. Empleo de material visual de acetatos para resolver división cuotativa.



Martha tiene agua e invitó a sus amigas tiene $3\frac{1}{2}$ y lo tiene que repartir en vasos de $\frac{2}{3}$ ¿Cuántos vasos se llenarían?

$$\frac{4}{4}+\frac{4}{4}+\frac{4}{4}+\frac{2}{4}=\frac{14}{4}$$

$1\frac{10}{4}$

$=5$

$2\frac{6}{4}$

$$\frac{14}{4}\div\frac{2}{3}=\frac{42}{8}=5\frac{1}{4}$$

$3\frac{2}{4}$

Fig. 8.22. Problema de división de fracciones inventado por Brenda.

Podemos decir que el trabajo de Brenda en la entrevista le permitió sortear las dificultades que presentaba y se observa que logró avances en la comprensión de significado y sentido de las operaciones con fracciones, en particular de la división de fracciones. Consideramos que al igual que con Fernando, en Brenda aplica también la nueva categoría ***"Identifica número de agrupamientos, identifica residuo y lo proporciona en función del divisor"***.

8.4. Cuestionario final

Una vez concluída la entrevista y con el objetivo de poder realizar un comparativo de las elaboraciones de Brenda y constatar si hubo avances en su desempeño, se le aplicó el cuestionario final, cuyas elaboraciones se muestran en la Tabla 8.1.

Tabla 8.1. Tareas del cuestionario final elaboradas por Brenda

CUESTIONARIO FINAL Elaboraciones de Brenda	
No. DE TAREA Significado asociado	PROBLEMA VERBAL DIVISION DE FRACCIONES
1 División cuotativa. Problema de razón asociado al isomorfismo de medida	Un auto recorre $\frac{1}{6}$ del camino de Pachuca a Tula en 1 hora. ¿En cuánto tiempo recorrerá $\frac{3}{8}$ del camino? $\frac{3}{8} \div \frac{1}{6} = \frac{18}{8}$ $1\frac{10}{8} = 2\frac{2}{8}$ ¿Qué operación resuelve el problema? Realízala. División Utilize la diviòsion para sacar el equvalente de hora con la fracción $3/8$ Inventa un problema similar que emplee los datos del problema anterior. Pablo fue a correr $\frac{1}{6}$ de parque en 1 hora ¿En cuánto tiempo correra $\frac{3}{8}$ del parque? $\frac{3}{8} \div \frac{1}{6} = \frac{18}{8} = 2\frac{2}{8}$
2 Problema de área. División como el inverso del producto de medida.	Enrique quiere cambiar la cubierta de su escritorio. La cubierta tiene un área de $\frac{5}{20}$ m^2 y de largo mide $\frac{3}{4}$ m. ¿Cuánto mide de ancho la cubierta?  $\begin{array}{r} 12 \\ 8\overline{)160} \\ 18 \end{array}$ $\begin{array}{r} 3 \\ 5\overline{)15} \\ 0 \end{array}$

	¿Qué operación resuelve el problema? $\frac{5}{20} \div \frac{3}{4} = \frac{20}{60}$ 3 $\frac{4}{12}$ $\frac{10}{30}$ $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ $\frac{3}{12}$ División  Inventa un problema similar y resuélvelo. Se quiere cambiar la pintura de un salón el área es de $\frac{3}{20}$ y el largo mide 3/4 ¿Cuánto mide de ancho el salón?
3 División partitiva Reparto equitativo y exhaustivo.	Laura tiene en el refrigerador $5\frac{1}{2}$ flanes napolitanos, los repartirá de manera equitativa entre ella y sus 7 vecinos. ¿Cuánto recibirá cada uno? $7 \times 2 = 14$ $\frac{11}{2} \div \frac{14}{2} = \frac{22}{28} = 1\frac{6}{28} = \frac{3}{14}$ **Inventa un problema similar al anterior.** María tiene $5\frac{1}{2}$ de pastel de tres leches los repartirá entre sus 7 amigos ¿Cuánto recibirá cada uno? ¿Qué operación lo resuelve? Explica. División ya que se requiere saber cuanto le toca a cada uno

Analizando las respuestas de Brenda en el cuestionario final, se observa que sólo resolvió tres de los cinco problemas planteados. Podemos decir que ello se debió a que sólo contamos con una sesión de 40 minutos para que resolvieran el cuestionario y en el transcurso pudimos observar que Brenda demoró mucho en resolver la Tarea 2, lo que le impidió resolver el cuestionario completo al final de la sesión. Sin embargo, de lo que logró resolver, en la Tarea 1 se observa una correcta identificación de la operación que resuelve el problema y del algoritmo a emplear, el cual es correctamente aplicado, además de que logra inventar un problema similar sin contratiempos.

En la Tarea 2 que involucra el inverso del producto de medida logra establecer una respuesta correcta identificando la operación adecuada y aplicando bien el algoritmo, además de inventar un problema similar correctamente, sin embargo se empeña en representarlo gráficamente empleando las estrategias que se habían trabajado en la entrevista. Se observa que lo hace adecuadamente al representar la intersección de áreas, pero no logra darse cuenta que comete un solo error al subdividir de manera horizontal en 20 partes en lugar de considerar solo 15, lo que le hubiese dado la respuesta correcta, como se observa en la Figura 8.23. Consideramos que la fracción empleada en el problema era complicada y quizá debimos emplear en el diseño una fracción que fuese más accesible y les permitiese una interpretación más rápida.

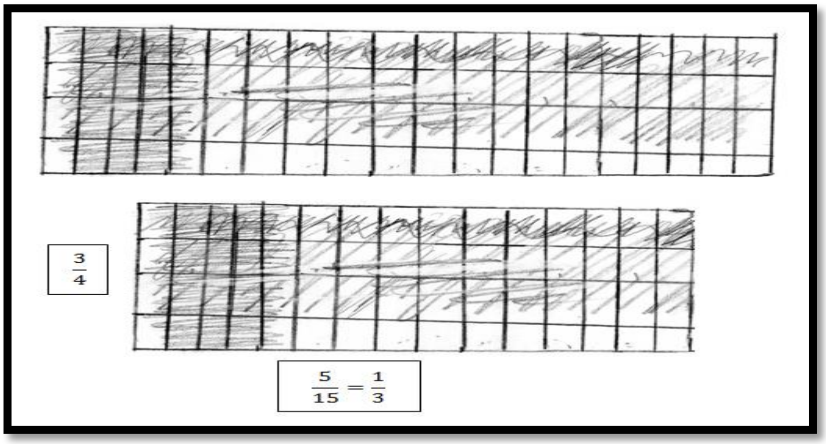


Fig. 8.23. Representación del error cometido por Brenda en la representación de la tarea 2 del cuestionario final.

En la Tarea 3 también logra establecer cuál es la operación que resuelve el problema, identifica el algoritmo, lo resuelve correctamente y el problema que inventa es adecuado, además de que explica porqué se emplea la división, lo que da cuenta de que Brenda comprende la semántica de la división de fracciones. En esta tarea ya no considera necesario realizar el reparto de manera gráfica. Sólo se observa un error al intentar simplificar el resultado obtenido, ya que considera el denominador como numerador y viceversa, es decir invirtiendo minuendo y sustraendo.

Brenda no tuvo tiempo para realizar las dos últimas tareas que correspondían a la división como comparación multiplicativa por lo que no podemos establecer si le resultaría difícil resolverlas.

8.5. Análisis de resultados empleando el método interpretativo de Valdemoros

Realizaremos la interpretación del lenguaje empleado por Brenda en la elaboración de las tareas, no sólo lingüístico, sino simbólico, que nos permita inferir aspectos que no pueden ser observados directamente.

En el plano semántico

A pesar de que Brenda presentaba varias dificultades en el manejo de las fracciones como la inversión de denominadores, imposibilidad para reconstruir el todo, dificultad para representar una suma de fracciones, la no identificación de la preposición “de” y no identificar el residuo en la división de fracciones, así como recurrir al empleo de los naturales, después de realizar la entrevista se observa en Brenda un mejor desempeño, en el que logra identificar correctamente la fracción y simbolizarla adecuadamente manteniendo la relación parte-todo, logra identificar la preposición “de”, se observa que comprende el significado de la multiplicación de fracciones y de acuerdo a los procesos de resolución realizados por Brenda en los problemas del cuestionario final podemos afirmar que logró aplicar favorablemente el significado de la división de fracciones lo que hace evidente que logró dar significado y sentido a dicha operación. Sin embargo se observa aún dificultad en los procesos de simplificación al invertir numerador y denominador o al realizar la conversión unidad por unidad.

En el plano sintáctico

Se observa en principio dificultad para reconocer la fracción al invertir numerador y denominador, sin embargo se presenta un correcto manejo en la equivalencia de fracciones. Aquí es importante destacar la estrategia que emplea al realizar la conversión de fracción impropia a mixta, realizando un proceso de resta a la fracción impropia y suma a la fracción mixta “unidad por unidad”, y la estrategia que sigue en el proceso inverso al convertir de fracción mixta a impropia mediante suma iterada de unidad por unidad. Se observa también un adecuado manejo de los símbolos aritméticos y en la Tarea adicional 7 se observa el empleo de la representación lingüística de la fracción al proporcionar como respuesta “5 vasos llenos y la mitad de otro o 5 vasos y medio”.

En el plano de la traducción

Si bien en un inicio Brenda presentaba dificultades en la traducción de los problemas, posterior a la entrevista, se observa una óptima interpretación del problema traducido a su representación pictórica, es decir, logra traducir el lenguaje verbal a lenguaje aritmético sin dificultad.

En el plano de la lectura

Se identifica una tendencia a trabajar solamente con lenguaje aritmético, no se observa el uso de lenguaje verbal en sus respuestas.

Podemos decir, después de realizar un análisis de las tareas iniciales de Brenda y su comparación con las del cuestionario final, que ella evidenciaba dificultades en la identificación de la multiplicación de fracciones y no comprendía cuándo debía emplear la división, la cual podía resolver de manera intuitiva, sin embargo, no le era posible asociarla al algoritmo y no identificaba adecuadamente el residuo, y su respuesta inmediata consistía en asociarla a la suma de fracciones, pero el trabajo en entrevista permitió que Brenda lograra avances sustanciales y una adecuada abstracción del proceso de división, lo cual se puede observar en sus elaboraciones del cuestionario final, en el que identifica de inmediato la operación que debe emplear y además inventa problemas similiares de manera adecuada, lo que da cuenta de que Brenda ha logrado comprender el significado y sentido de la operación.

Capítulo 9

El caso de Martha

En la realización del taller llamó la atención la participación de Martha, una niña muy entusiasta con deseos de intervenir siempre en todas las sesiones, que en su equipo fue líder y que comentaba mucho sus puntos de vista, en los que se observó que tenía noción de cómo resolver los problemas pero que no podía concretar una respuesta correcta. Se observó también una pequeña dificultad en la aplicación de los algoritmos y el que siempre recurría a representaciones pictóricas circulares para la resolución de los problemas. Razón por la cual decidimos seleccionarla para entrevista.

9.1. La entrevista con Martha

Observando el desempeño de Martha en el cuestionario podemos decir que fue regular en sus respuestas, sólo se observaron pequeñas dificultades en la tarea 1 de reparto, en la que sí realiza un reparto equitativo y exhaustivo pero llama la atención la construcción numérica que emplea en su respuesta $(1.\frac{2}{6}\,\frac{2}{6})$, en la Tarea 5 en la que se le dificulta representar una suma de fracciones y en la Tarea 6 en la que no identifica partes de partes. De las tareas de división de fracciones, resuelve dos, la 9 que resolvió adecuadamente realizando un reparto equitativo y exhaustivo coincidiendo en su reparto con la categoría de Olguín (2009), "*Reparte unidades a cada persona y lo que sobra lo divide en fracciones*" y que asocia a la división pero en la que consideramos que confunde dividir con partir. Y la Tarea 10 en la que identifica número de agrupamientos pero la deja inconclusa. La Tarea 11 no la responde. En lo referente a la tarea de división aplicada en el taller, resuelve de manera intuitiva correctamente, sin embargo lo asocia a la multiplicación, resolviendo dicho algoritmo de manera equivocada, empleando el procedimiento de la división en lugar de multiplicación, por lo que obtiene el resultado correcto, y nuevamente emplea una representación circular, que por supuesto no tiene relación con una línea en el asfalto. Las elaboraciones de Martha pueden observarse en la Tabla 9.1a, 9.1b, 9.2, 9.3a, 9.3b y 9.4.

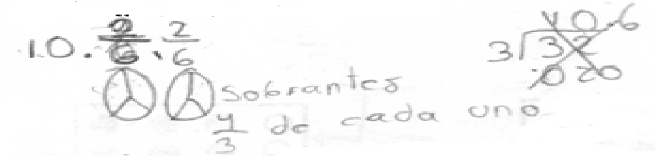
Como ocurrió con Brenda y Fernando, también para trabajar con Martha la división de fracciones, fue necesario en primera instancia abordar las dificultades que presentaba en las demás tareas mediante su reelaboración, en particular la identificación de partes de partes y su asociación con el algoritmo correspondiente. Una vez que se logró dicho avance, se procedió a introducir las tareas de división de fracciones.

Tabla 9.1a. Tareas del cuestionario inicial exploratorio resueltas por Martha

CUESTIONARIO INICIAL EXPLORATORIO
RESPUESTAS DE MARTHA

Tarea 1
Modos de reparto, observar si realizan reparto equitativo y exhaustivo.

Juan invitó a Enrique y a Pedro a jugar videojuegos en Game Planet. Su mamá les llevó 4 cajitas de chocolates para que las repartieran equitativamente entre los 3
¿Qué parte le tocó a cada uno?



Indica cómo repartirías los siguientes chocolates a cada persona.

Explica por qué es equitativa la repartición.

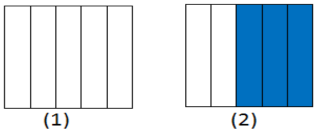
Porque les di 10 chocolates pero sobran 2 y si partimos en 6 cachos cada chocolate dan 12 cachitos y tocaría de 4 cachos que en tercios serían $\frac{2}{3}$.

Tabla 9.1b. Tarea 6 del cuestionario inicial exploratorio resuelta por Martha

Tarea 6

Representación gráfica de partes de partes, identificación de la preposición “de”

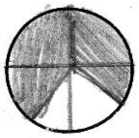
Observa las siguientes figuras:



La figura 1 corresponde a la unidad y la figura 2 corresponde a $\frac{3}{5}$ de la unidad. En la figura de abajo dibuja lo que corresponde a $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{5}$. Ilumina el producto correspondiente.

Plantea un problema similar empleando las fracciones $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$.

Represéntalo en la figura de abajo.



¿Qué operación aplicaste? ¿Por qué? $\frac{8}{3}$ porque dividi el O en 3 Δ partes y ensima 4 para ver como se toma

Tabla 9.2. Tarea 8 del cuestionario inicial exploratorio, resuelta por Martha

Tarea 8

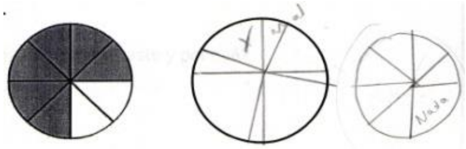
Representación gráfica de partes de partes, identificación de la preposición “de”

Adriana compró una pizza grande hawaiana, la pizza estaba cortada en ocho partes, se sentó a ver la televisión y se comió dos rebanadas. En ese momento llegaron a visitarla 4 de sus viejos amigos. Ella repartió equitativamente lo que quedaba de la pizza entre sus amigos.

¿Qué fracción tenía que repartir? 1 rebanada y media

¿Qué fracción de pizza le correspondió a cada uno? $1\frac{1}{4}$

Sombrea en el círculo en blanco, la cantidad de pizza que recibiría una persona.



¿Cuál es la expresión que define el problema?

d) $\frac{1}{8}$ de $\frac{6}{4}$ c) $\frac{6}{8}$ de $\frac{2}{4}$

[✓ e)] $\frac{1}{4}$ de $\frac{6}{8}$ d) $\frac{6}{8}$ $de\,\frac{1}{4}$

Del todo original dividido en octavos, ¿qué parte es la que escogiste? Explica cómo obtuviste esos resultados y simplifícalos.

Tabla 9.3a. Tarea 9 de división partitiva del cuestionario inicial exploratorio resuelta por Martha

CUESTIONARIO INICIAL EXPLORATORIO
RESPUESTAS DE MARTHA

Tares 9
División partitiva, empleando enteros que conduzcan a respuesta en fracción, resolución de división sin el empleo de un algoritmo.

Alicia preparó 10 pequeñas tartas para su reunión de amigas. A su reunión acudieron 6 de sus mejores amigas. Se terminaron las tartas y todas comieron lo mismo. ¿Cuánto comió cada una de ellas?

Tomaron una tarta y $\frac{4}{6}$

¿Qué operación realizaste y por qué? ÷

para dividirlas y dar porción

Dibuja el reparto que hiciste.

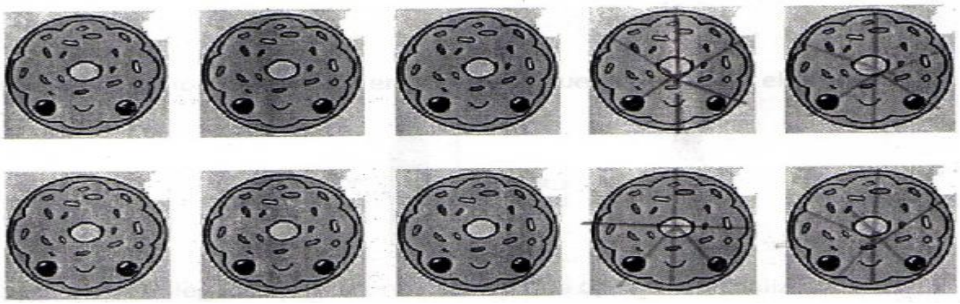
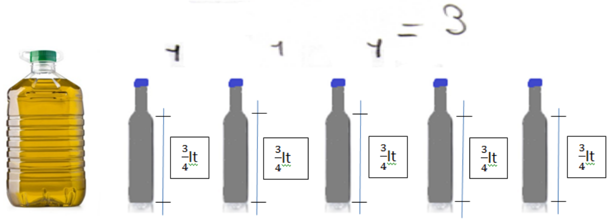


Tabla 9.3b. Tarea de división cuotativa del cuestionario inicial resuelta por Martha

Tarea 10
División cuotativa. Empleo de algoritmo de división de fracciones, determinación del sobrante.

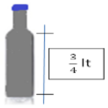
En un Restaurante de comida rápida, el dueño compra garrafas de aceite de $2\frac{3}{4}$litros para la elaboración de los alimentos que preparan. Ellos llenan botellas de $\frac{3}{4}$ de litro para su uso. ¿Cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ de litro se pueden llenar con una garrafa? En el siguiente dibujo, marca las botellas que se llenarían con la garrafa.



¿Sobró algo de aceite?

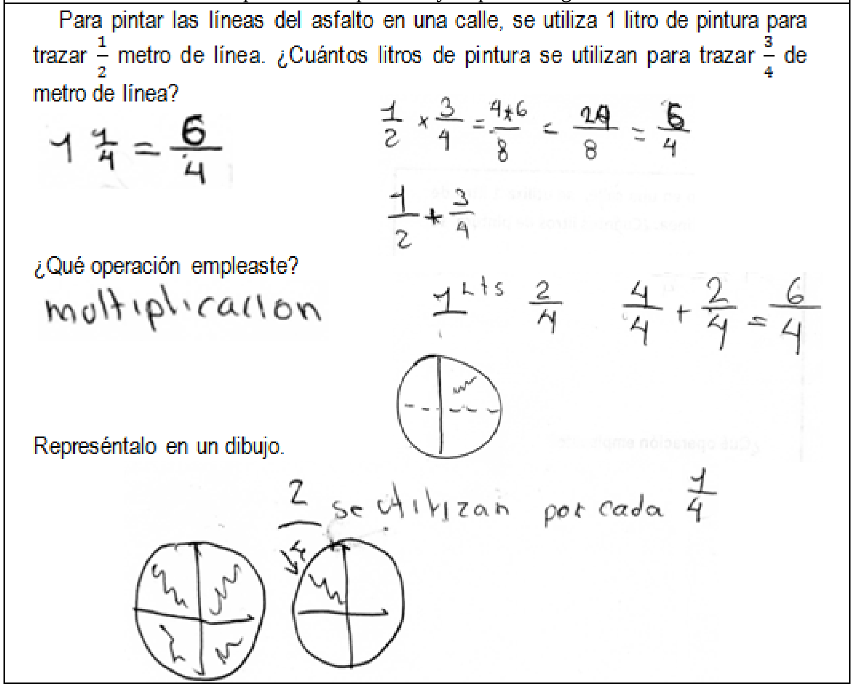
De ser así, ¿cómo calculaste qué fracción de una botella se llena con el sobrante?

Dibuja la fracción que queda en la botella que se llena con el sobrante.



Explica cómo llegaste a esa conclusión y que operación realizaste

Tabla 9.4. Tarea del taller exploratorio de división de fracciones, resuelta por Martha

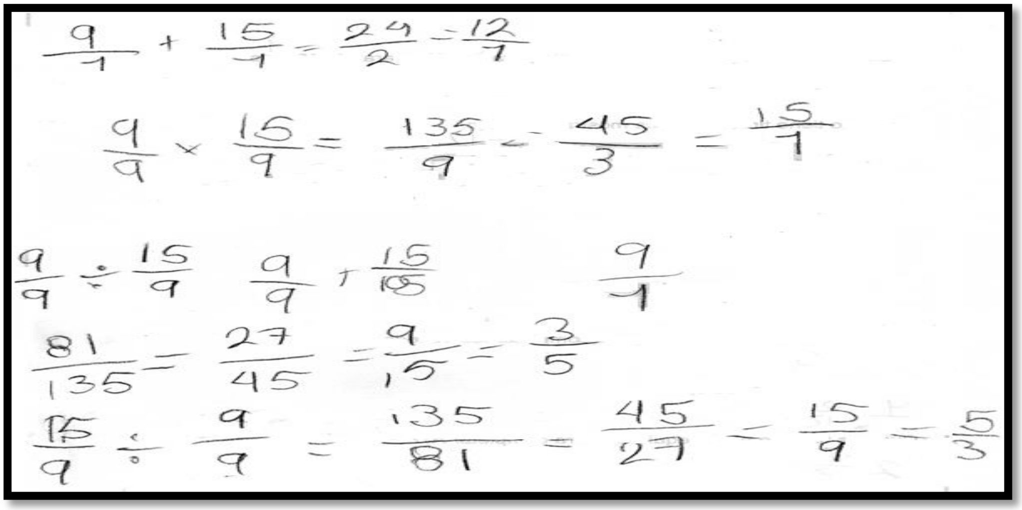
TALLER EXPLORATORIO **RESPUESTA DE MARTHA**
Tarea del taller División de fracciones mediante el empleo de una razón asociada al isomorfismo de medida. Representación pictórica y empleo de algoritmo.
 Para pintar las líneas del asfalto en una calle, se utiliza 1 litro de pintura para trazar $\frac{1}{2}$ metro de línea. ¿Cuántos litros de pintura se utilizan para trazar $\frac{3}{4}$ de metro de línea? $1\frac{1}{4} = \frac{6}{4}$ $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{4 * 6}{8} = \frac{24}{8} = \frac{6}{4}$ $\frac{1}{2} * \frac{3}{4}$ ¿Qué operación empleaste? multiplicacion 1^{Lts} $\frac{2}{4}$ $\frac{4}{4} + \frac{2}{4} = \frac{6}{4}$ Represéntalo en un dibujo. $\frac{2}{}$ se utilizan por cada $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$

En la entrevista con Martha, además de las tareas empleadas con Fernando y Brenda, decidimos agregar algunas tareas más de división de fracciones, una de ellas involucraba la comparación multiplicativa planteada por Flores (2014) y expresada por Vergnaud (1991) como clasificación de un solo espacio de medida, considerando que este tipo de tareas no son abordadas en el currículo escolar. El propósito de la elaboración de dicha tarea era observar si su resolución implicaba dificultades en Martha, ya que no había tenido acercamiento a tales tareas.

En algunas de las resoluciones de Martha que se muestran a continuación, se presentan algunos altibajos, es decir, en momentos se observaba que Martha comprendía bien y en momentos se perdía en las respuestas, sobre todo en las primeras sesiones de entrevista. Consideramos que eso se debió a que Martha respondía de inmediato, sin detenerse a reflexionar el problema o que en ocasiones mostraba cierta inseguridad y comportamientos de respuesta erráticos. Cuando se le cuestionaba sobre algo que había realizado con el objetivo de guiarla a un siguiente paso, ella entendía que estaba equivocada y lo modificaba aunque estuviese bien hecho y eso ocasionaba que se prolongara más el trabajo realizado para finalmente darse cuenta que lo que había hecho antes estaba bien. Pero aunque se prolongaron las sesiones, finalmente se lograron los resultados esperados. En otras tareas una vez que logró comprender, su respuesta era inmediata.

Se trabajó con ella reparto, equivalencia, suma de fracciones y partes de partes, en particular modelo de área, empleando los materiales manipulativos así como un acompañamiento guía que le permitiera corregir el manejo de los algoritmos. En esta investigación presentaremos solamente las tareas elaboradas por Martha que conducen a identificar el significado de división de fracciones, para ello trabajamos tareas adicionales que involucran división cuotativa, inverso del producto de medida y comparación multiplicativa.

Cuando Martha logró comprender el significado de la multiplicación, decidimos introducir la Tarea adicional 4 que nos permitió acercar a Martha al significado de la división de fracciones, cuya resolución se muestra en la Figura 9.1. En dicha tarea se puede observar una solución adecuada de manera intuitiva y el manejo adecuado de las fracciones, sin embargo cuando se le pregunta qué operación cree que resolvería el problema lo que hace es realizar un recorrido por todas las operaciones hasta encontrar la operación que le da la respuesta obtenida en la solución intuitiva, como se muestra en la Figura 9.2. Una vez identificada la operación expresa que es la división la que resuelve el problema. Nos llama la atención que recurre a anotar en una pequeña libreta los algoritmos de las operaciones para que no se le olviden porque a pesar de que expresa haber comprendido, observamos que tiende a olvidar fácilmente los procedimientos algorítmicos.



$$\frac{9}{1} + \frac{15}{1} = \frac{24}{2} = \frac{12}{1}$$

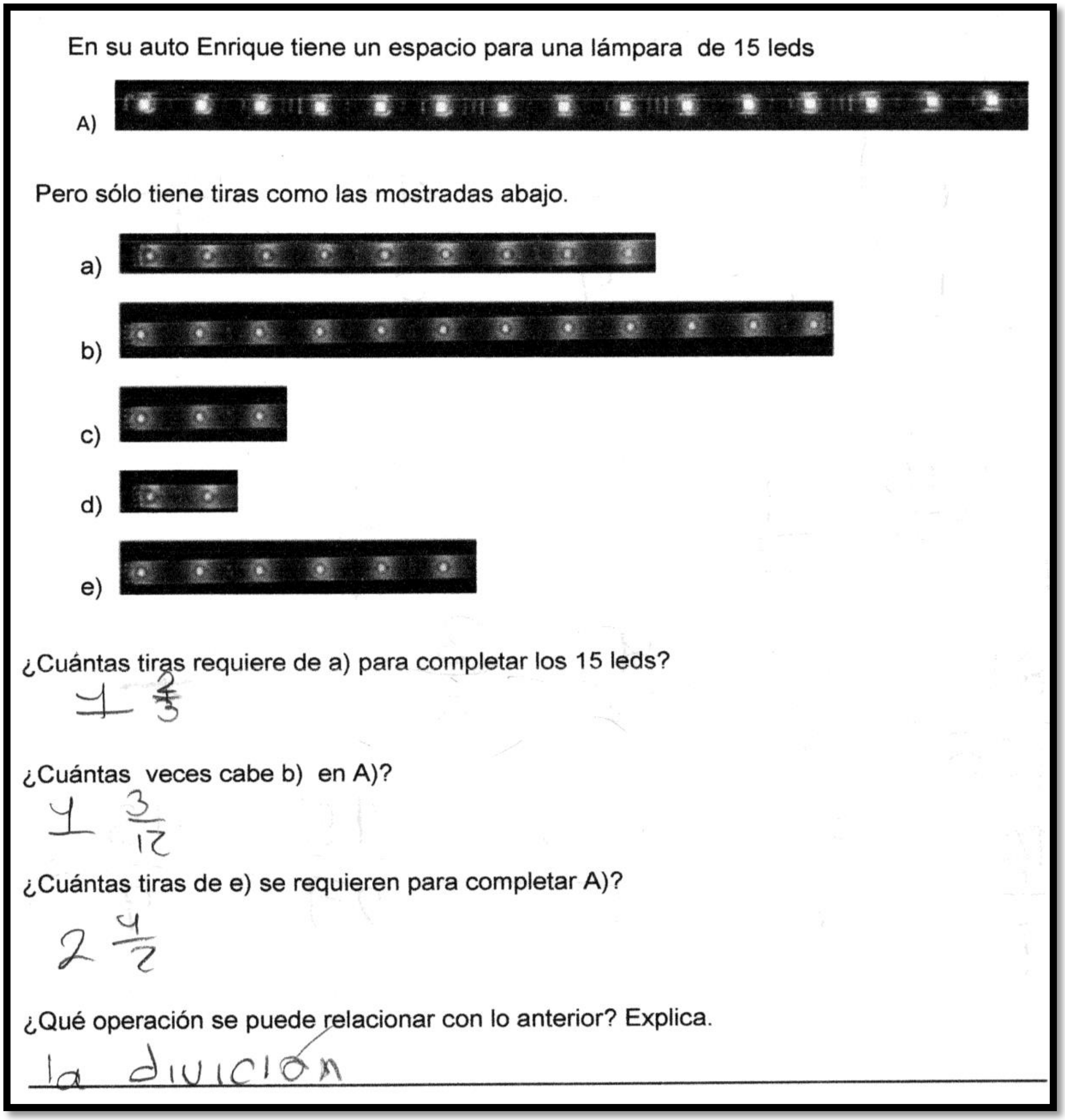
$$\frac{9}{9} \times \frac{15}{9} = \frac{135}{9} = \frac{45}{3} = \frac{15}{1}$$

$$\frac{9}{9} \div \frac{15}{9} \quad \frac{9}{9} + \frac{15}{135} \quad \frac{9}{1}$$

$$\frac{81}{135} = \frac{27}{45} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{15}{9} \div \frac{9}{9} = \frac{135}{81} = \frac{45}{27} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

Fig. 9.2. Operaciones realizadas por Martha para resolver la Tarea adicional 4.



En su auto Enrique tiene un espacio para una lámpara de 15 leds

A)

Pero sólo tiene tiras como las mostradas abajo.

a)

b)

c)

d)

e)

¿Cuántas tiras requiere de a) para completar los 15 leds?

1 $\frac{2}{3}$

¿Cuántas veces cabe b) en A)?

1 $\frac{3}{12}$

¿Cuántas tiras de e) se requieren para completar A)?

2 $\frac{4}{2}$

¿Qué operación se puede relacionar con lo anterior? Explica.

la divición

Fig. 9.1. Tarea adicional 4 que permite el acercamiento al significado de división de fracciones.

Finalmente, logra identificar el significado de la división de fracciones, cuando se le pregunta qué fue lo que hizo para resolver el problema. A continuación, se muestra un fragmento de la conversación con Martha.

I: ¿Qué procedimiento seguiste para contestar el problema?
M: [Observa las preguntas del problema] Ver cuántos elementos se requieren para completar otro.
I: ¿Qué fue lo que hiciste para contestar la primera pregunta?
M: Ver cuántas veces cabe una tira de leds en otra.

I: ¿Qué representa una tira de leds?
M: Una fracción.
I: Por lo que acabas de hacer, ¿podrías decir para ti qué significa dividir fracciones?
M: [Pensativa]. Ver cuántas veces cabe una fracción en otra fracción.

En cuanto logró identificar el significado de la división de fracciones, las demás tareas se le fueron haciendo más sencillas, algunas las realizó sin contratiempos, identificando de inmediato la operación que debía emplear, reconociendo mediante los pictogramas, el número de agrupamientos y el residuo, además de realizar una correcta reunitización favorecida por el uso del material manipulativo, como se puede observar en la elaboración de la Tarea 11 del cuestionario y las Tareas adicionales 7, 8 y 9.

De inicio, Martha soluciona la Tarea 11 identificando número de agrupamientos y un residuo, pero no lo proporciona en función del divisor, sino del dividendo. Para lograr que expresara su respuesta en función del divisor, empleamos nuevamente el material de leds (Fig. 9.3), con el objetivo de que identificara que la unidad se modifica, ya que al ser el divisor el que se compara para determinar cuántas veces cabe en la otra fracción, entonces el divisor es la nueva unidad. Ella menciona *"Ah, entonces la unidad ya no es $2\frac{3}{4}$, ahora es $\frac{5}{4}$ ".* En ese momento usamos el material de leds como se observa en la Figura 9.4 y logra identificar el residuo correcto al comparar considerando la nueva unidad. La solución a dicha tarea se muestra en la Figura 9.5. A continuación un fragmento del diálogo al momento de realizar la comparación.

I: ¿Cuánto se repite el divisor en el dividendo?
M: [Realiza la comparación deslizando la segunda tira de leds] Cabe dos veces y …
I: ¿qué parte del sobrante cabe?
M: $\frac{1}{5}$.
I: ¿Cuál es la respuesta?
M: $2\frac{1}{5}$.
I: Bien ¿y qué operación resuelve el problema?
M: Una división.

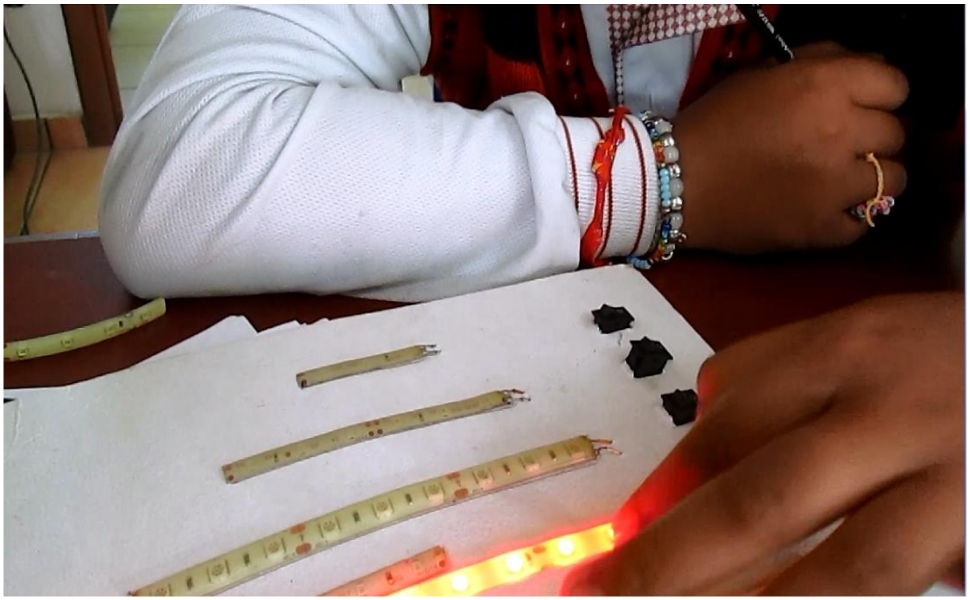
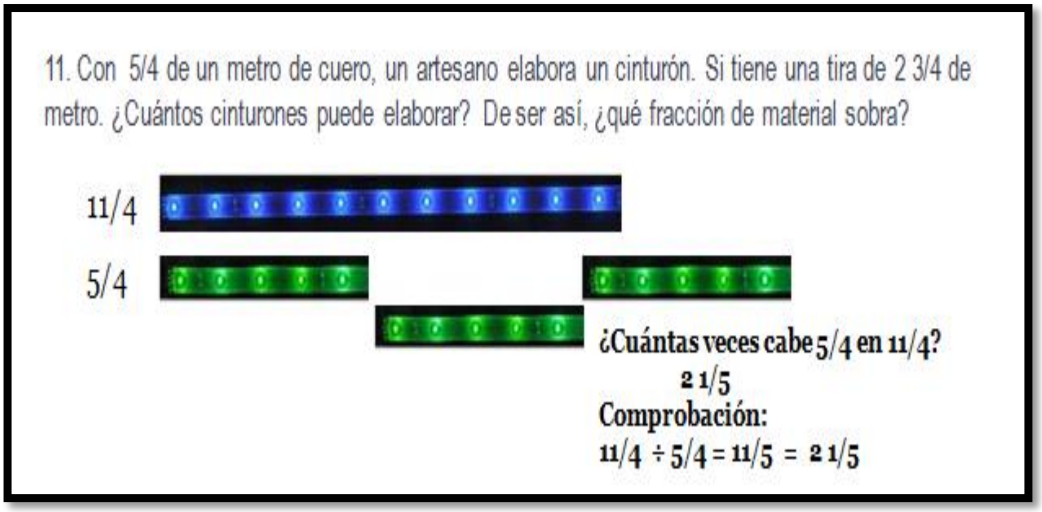


Fig. 9.3. Martha empleando el material visual manipulativo para solucionar la tarea 11.



11. Con 5/4 de un metro de cuero, un artesano elabora un cinturón. Si tiene una tira de 2 3/4 de metro. ¿Cuántos cinturones puede elaborar? De ser así, ¿qué fracción de material sobra?

¿Cuántas veces cabe 5/4 en 11/4?

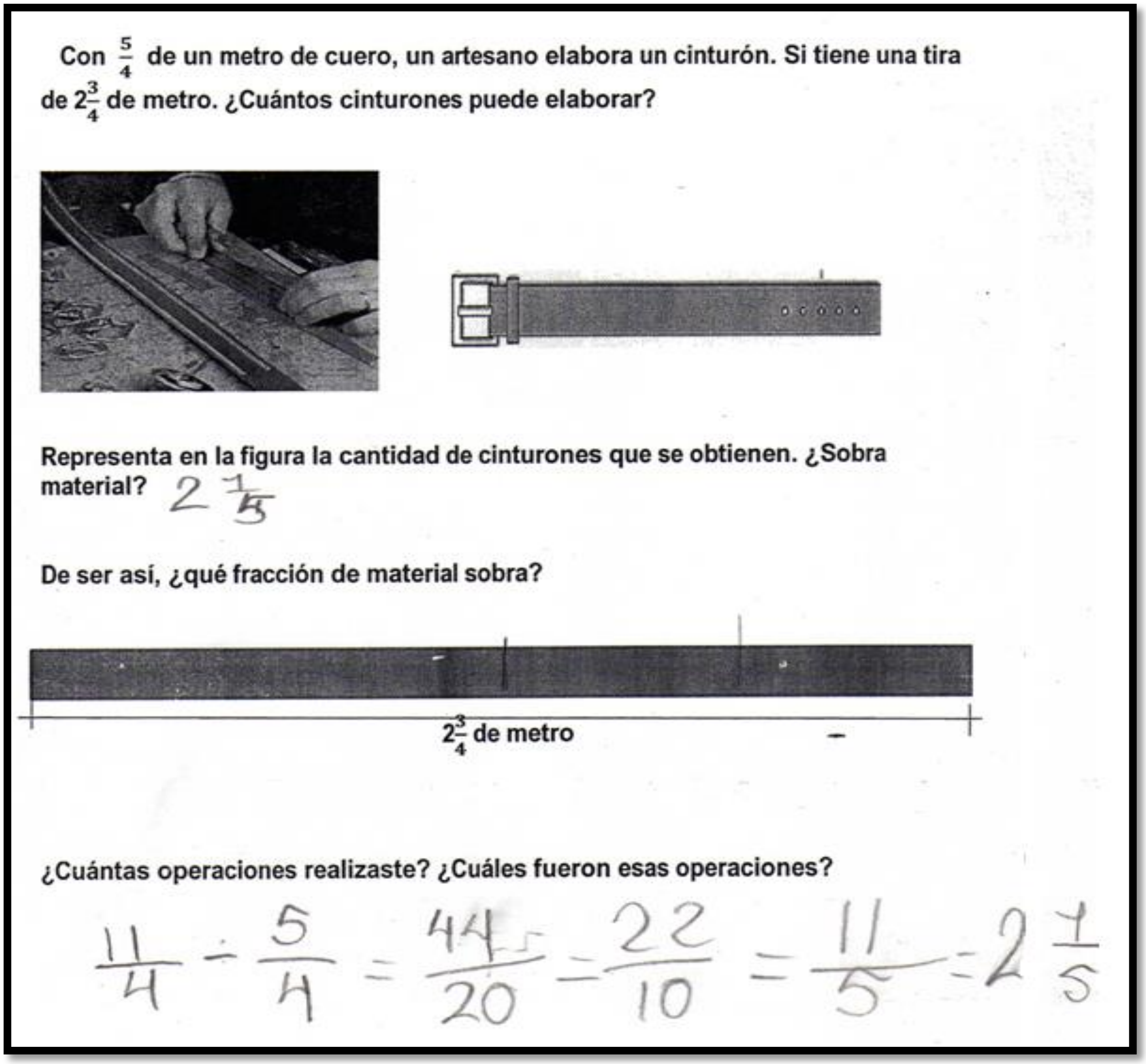
2 1/5

Comprobación:

$11/4 \div 5/4 = 11/5 = 2\,1/5$

Fig. 9.4. Proceso empleado para solucionar la tarea 11 mediante el material de leds. Modelo de conmensuración.

Se observa a Martha identificar la operación ya sin contratiempos, lo que nos permite afirmar que le ha dado sentido y significado a la división de fracciones. Procede a realizar la operación, la cual resuelve aplicando el algoritmo sin dificultad.



Con $\frac{5}{4}$ de un metro de cuero, un artesano elabora un cinturón. Si tiene una tira de $2\frac{3}{4}$ de metro. ¿Cuántos cinturones puede elaborar?

Representa en la figura la cantidad de cinturones que se obtienen. ¿Sobra material? $2\frac{1}{5}$

De ser así, ¿qué fracción de material sobra?

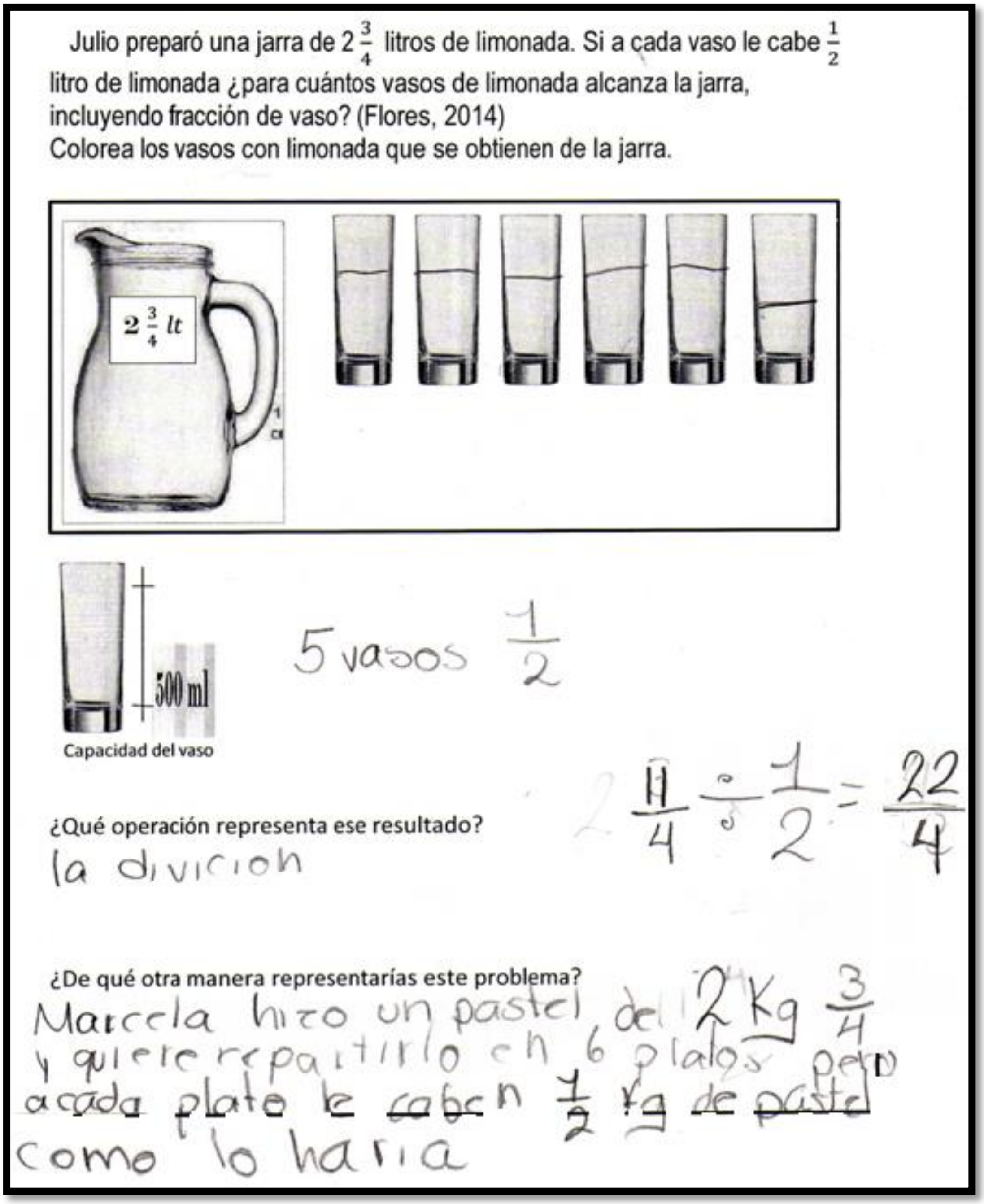
$2\frac{3}{4}$ de metro

¿Cuántas operaciones realizaste? ¿Cuáles fueron esas operaciones?

$$\frac{11}{4} \div \frac{5}{4} = \frac{44}{20} = \frac{22}{10} = \frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}$$

Fig. 9.5. Elaboración de la tarea 11 resuelta por Martha en entrevista empleando material visual manipulativo.

Después de resolver la Tarea 11, se observa mucha facilidad en Martha para resolver la división de fracciones, por lo que se le presentan las Tareas adicionales 7, 8 y 9 de división cuotativa que resuelve sin contratiempos e identifica rápidamente la operación a emplear, al mencionar incluso en la Tarea adicional 7, similar a la Tarea 10 del Cuestionario inicial, que "*se emplea la división de fracciones porque lo que se pide es determinar cuántos vasos de agua caben en una jarra".* Martha puede incluso plantear un problema de división de fracciones sin problemas, como se observa en la Figura 9.6.



Julio preparó una jarra de $2\frac{3}{4}$ litros de limonada. Si a cada vaso le cabe $\frac{1}{2}$ litro de limonada ¿para cuántos vasos de limonada alcanza la jarra, incluyendo fracción de vaso? (Flores, 2014)
Colorea los vasos con limonada que se obtienen de la jarra.

5 vasos $\frac{1}{2}$

$\frac{11}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{22}{4}$

¿Qué operación representa ese resultado?

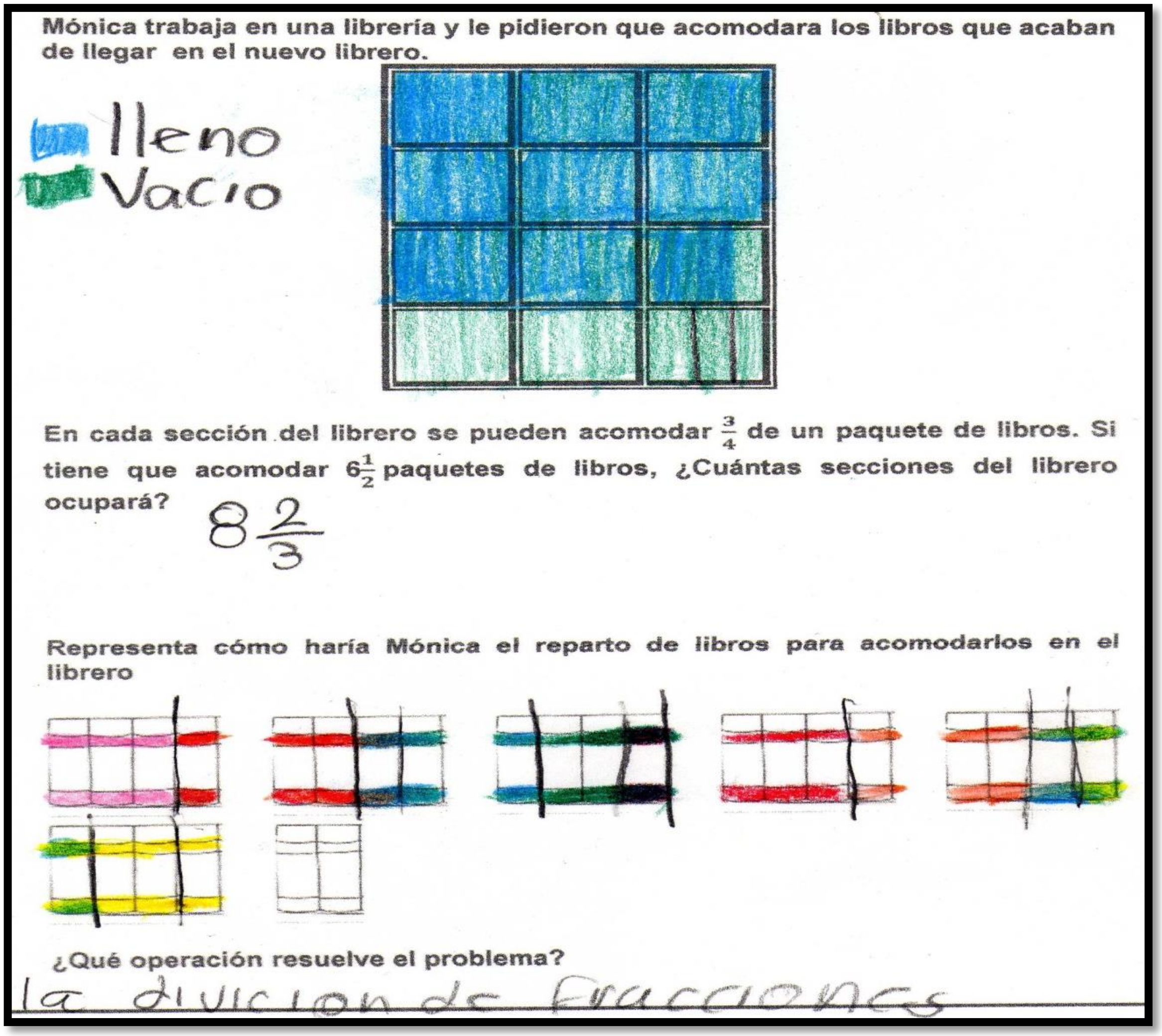
la divicion

¿De qué otra manera representarías este problema?

Marcela hizo un pastel de 2 Kg $\frac{3}{4}$ y quiere repartirlo en 6 platos pero acada plato le caben $\frac{1}{2}$ Kg de pastel como lo haria

Fig. 9.6. Tarea adicional 7 de división cuotativa resuelta por Martha.

En la resolución de la Tarea adicional 8 y 9, se pide a Martha emplear el material de acetatos con el objetivo de comprobar que dicho material se puede emplear incluso en fracciones mayores que la unidad y se puede identificar el número de agrupamientos y residuo sin contratiempos (Fig. 9.7 y 9.8).



Mónica trabaja en una librería y le pidieron que acomodara los libros que acaban de llegar en el nuevo librero.

🟦 lleno
🟩 Vacio

En cada sección del librero se pueden acomodar $\frac{3}{4}$ de un paquete de libros. Si tiene que acomodar $6\frac{1}{2}$ paquetes de libros, ¿Cuántas secciones del librero ocupará?

$8\frac{2}{3}$

Representa cómo haría Mónica el reparto de libros para acomodarlos en el librero

¿Qué operación resuelve el problema?

la divicion de fracciones

Fig.9.7. Tarea adicional 8 de división cuotativa elaborada por Martha.

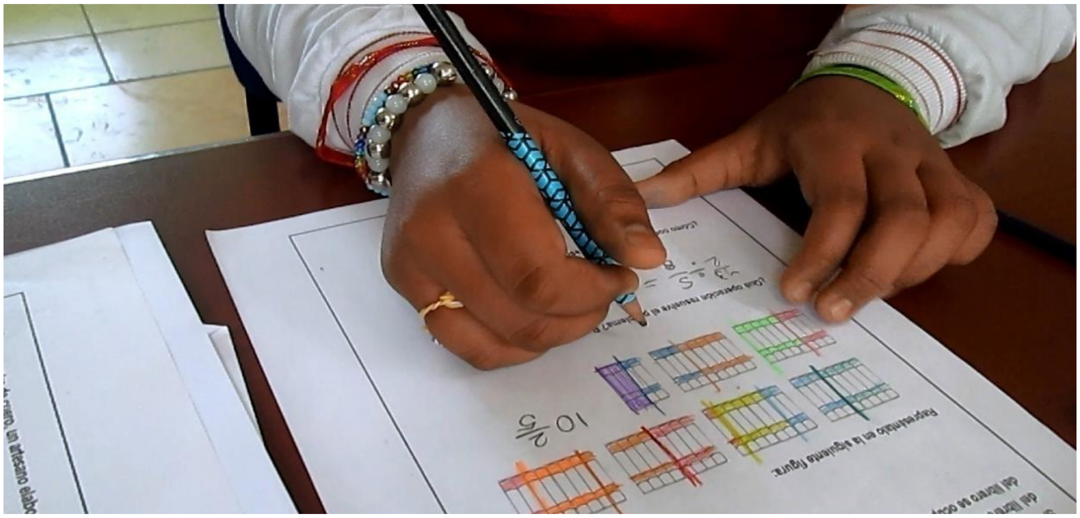
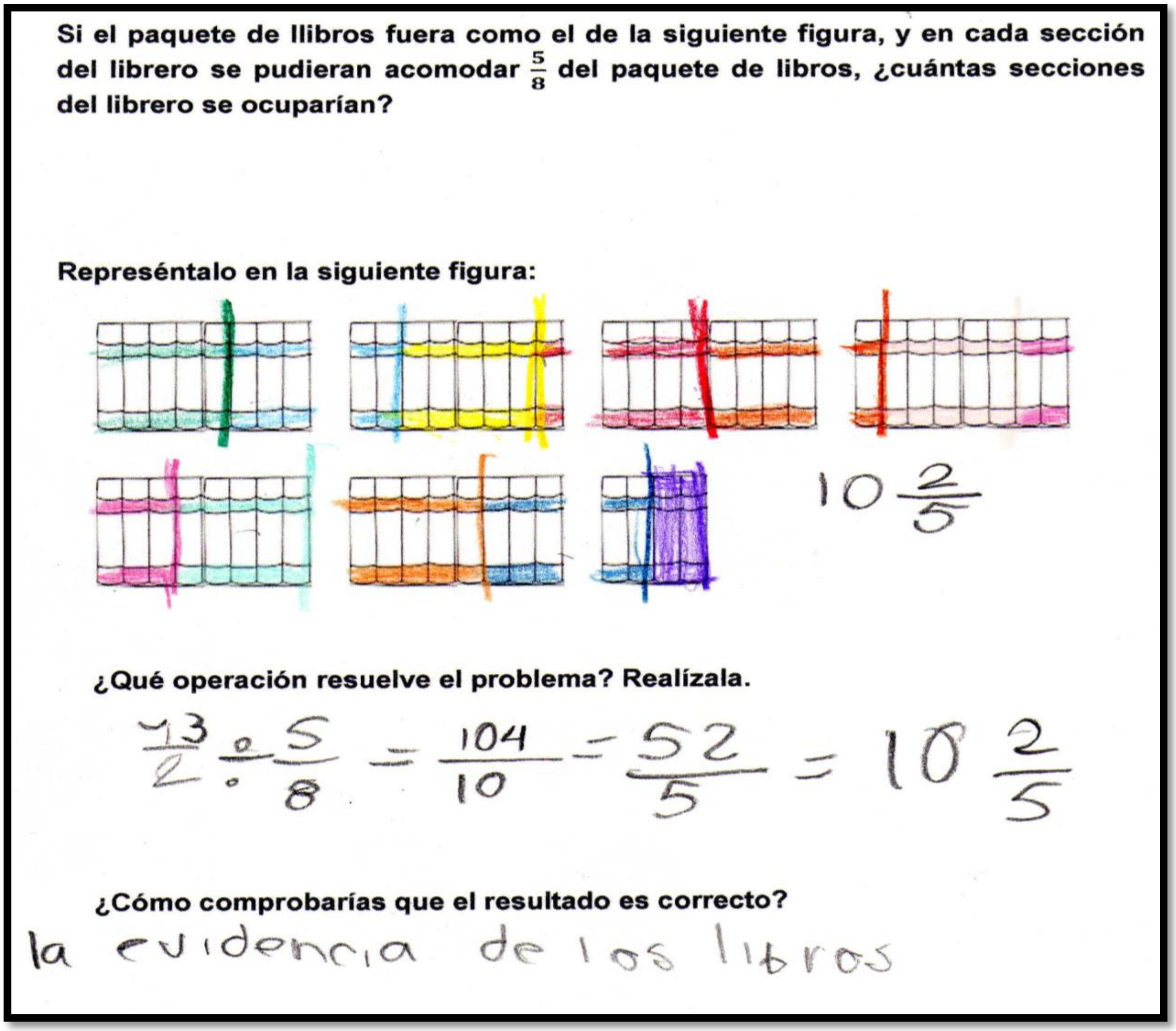


Fig.9.7a. Elaboración de la tarea adicional 8 de división cuotativa.



Si el paquete de llibros fuera como el de la siguiente figura, y en cada sección del librero se pudieran acomodar $\frac{5}{8}$ del paquete de libros, ¿cuántas secciones del librero se ocuparían?

Represéntalo en la siguiente figura:

$10\frac{2}{5}$

¿Qué operación resuelve el problema? Realízala.

$$\frac{13}{2} \div \frac{5}{8} = \frac{104}{10} = \frac{52}{5} = 10\frac{2}{5}$$

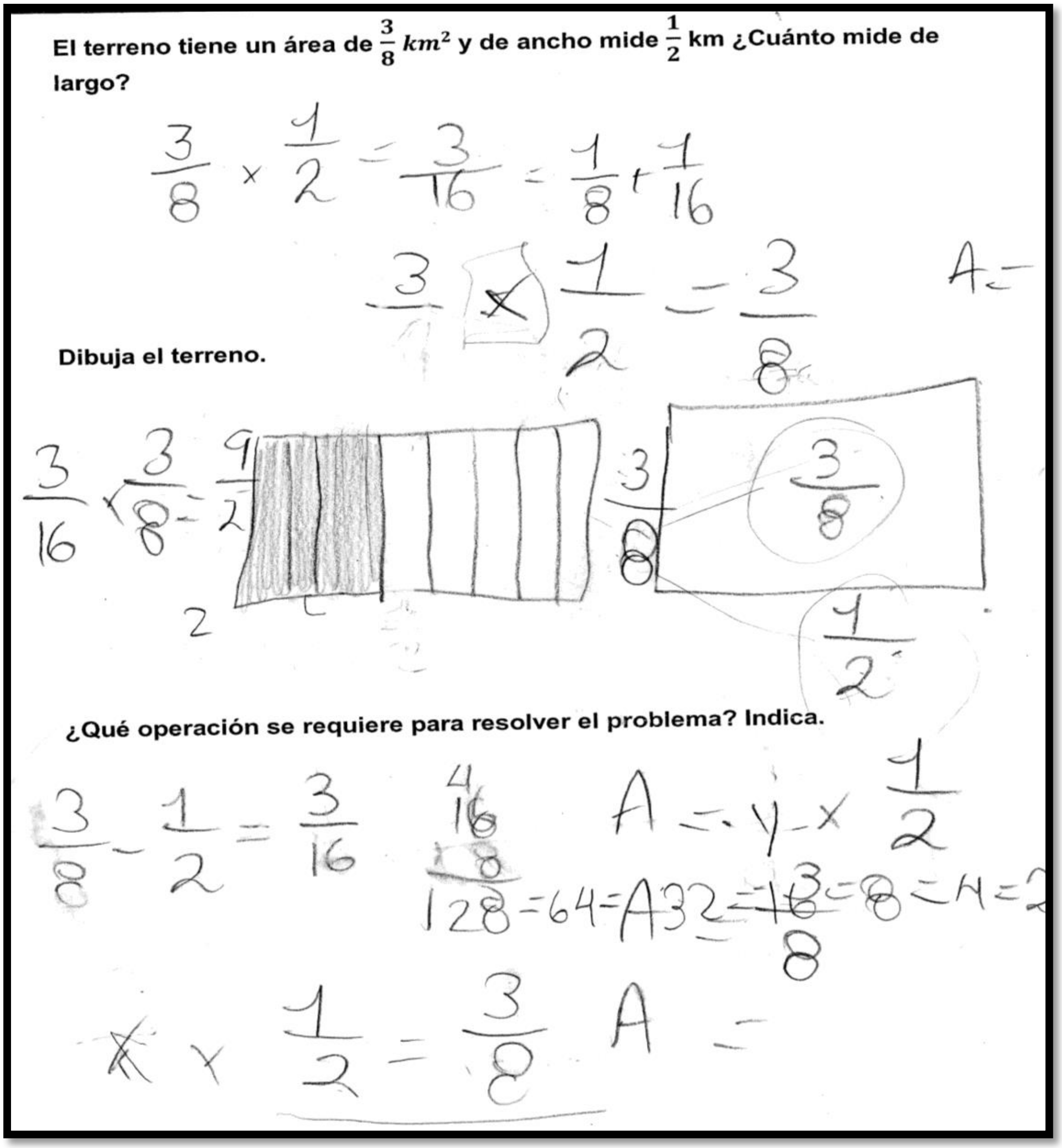
¿Cómo comprobarías que el resultado es correcto?

la evidencia de los libros

Fig. 9.8. Tarea adicional 10 elaborada por Martha en entrevista.

Fig. 9.9. Empleo de material de acetatos para la resolución de la tarea 8 y 9.

En la penúltima sesión de entrevista con Martha, se trabajó el inverso del producto de medida, pero a diferencia de Brenda, con ella el acercamiento fue más difícil, su desempeño en esta sesión fue errático, se le notaba distraída y no lograba concretar una partición acorde del terreno, la investigadora debe ayudarle para determinar cómo debe realizarlo. Fue difícil incluso la selección del algoritmo a emplear (Fig. 9.10). Sin embargo esto nos permitió abordar la conmutatividad, mediante la comparación de las operaciones que realizó y mostrar que en la multiplicación es posible emplearla, pero no así en la división (Fig. 9.11).



El terreno tiene un área de $\frac{3}{8}$ km^2 y de ancho mide $\frac{1}{2}$ km ¿Cuánto mide de largo?

$\frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$

$\frac{3}{} \boxed{\times} \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ A =

Dibuja el terreno.

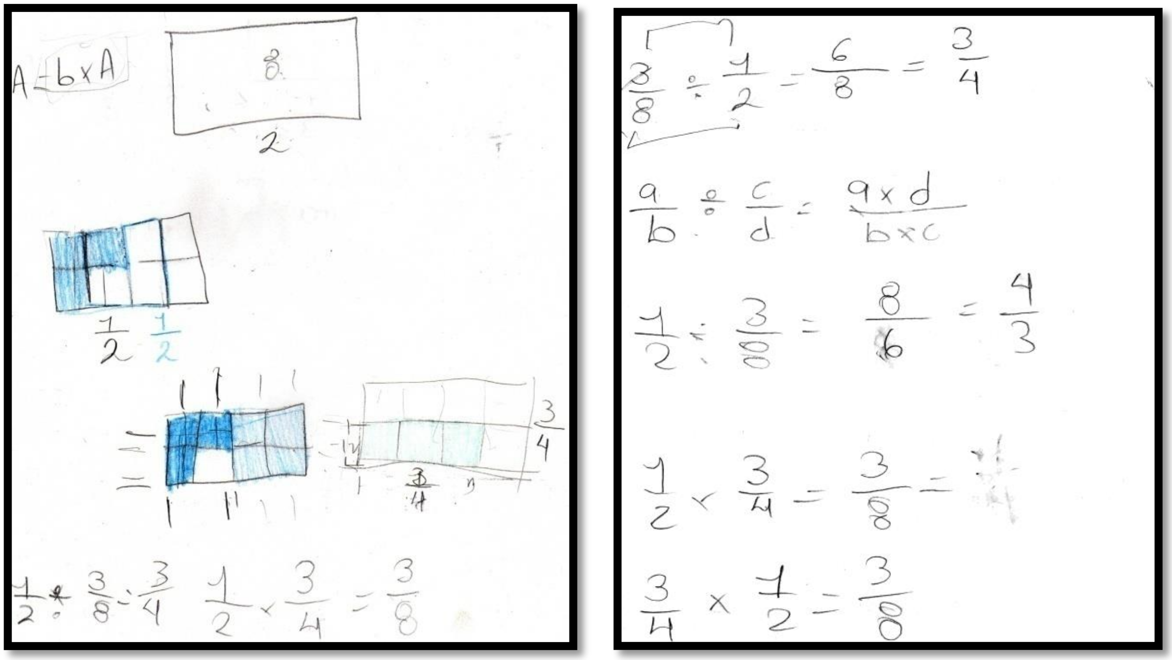
¿Qué operación se requiere para resolver el problema? Indica.

$\frac{3}{8} - \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$ $\frac{4}{16}$ A = y × $\frac{1}{2}$

$128 = 64 = A\,32 = \frac{~~16~~\,3}{8} = 8 = 4 = 2$

$x \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ A =

Fig. 9.10. Elaboración de la tarea adicional 6 donde se aplica el inverso del producto de medida.



$A = b \times A$

$\frac{1}{2} \div \frac{3}{8} = \frac{3}{4} \quad \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

$\frac{3}{8} \div \frac{1}{2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}$

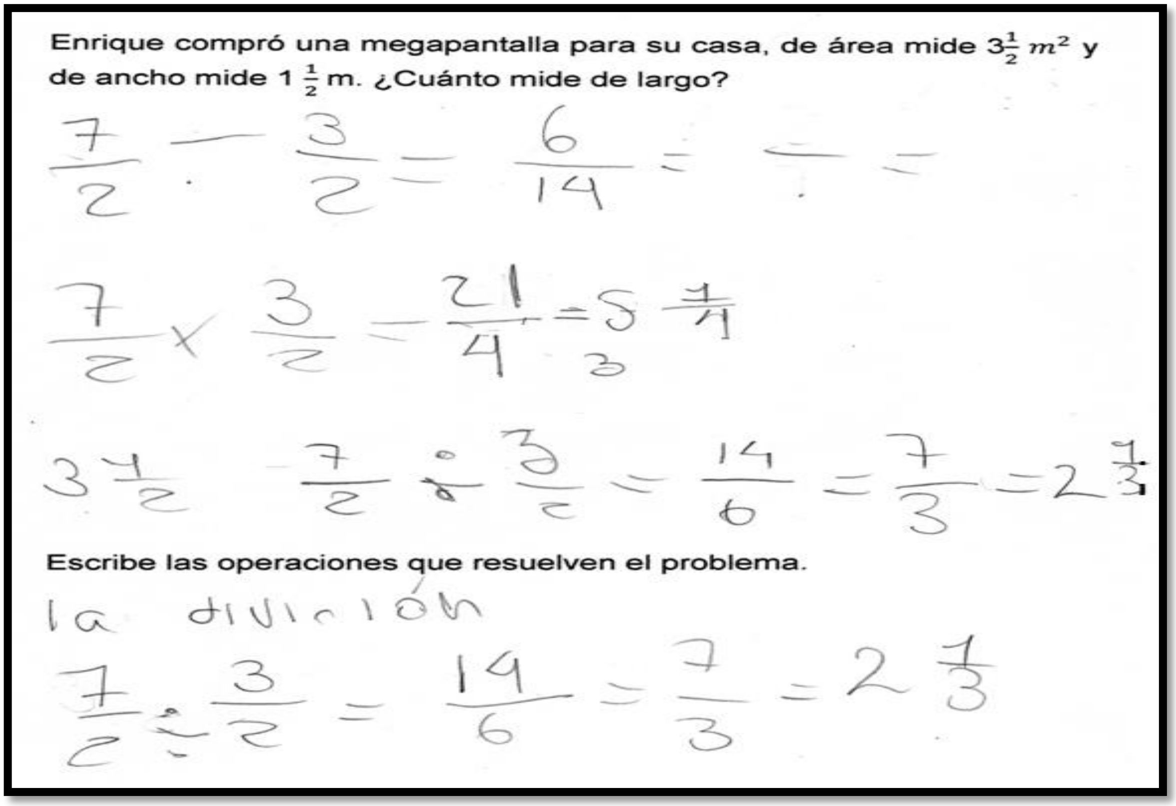
$\frac{1}{2} \div \frac{3}{8} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8} =$

$\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

Fig. 9.11. Procedimientos algorítmicos empleados por Martha en la resolución de la tarea adicional 6.

Se le presenta una segunda tarea del inverso del producto de medida, pero en ella solamente emplea el algoritmo para resolverla y evita la representación pictórica (Fig. 9.12).



Enrique compró una megapantalla para su casa, de área mide $3\frac{1}{2}\ m^2$ y de ancho mide $1\ \frac{1}{2}$ m. ¿Cuánto mide de largo?

$\frac{7}{2} - \frac{3}{2} = \frac{6}{14} = - =$

$\frac{7}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{21}{4} = 5\ \frac{1}{4}$

$3\frac{1}{2} \quad \frac{7}{2} \div \frac{3}{2} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$

Escribe las operaciones que resuelven el problema.

la división

$\frac{7}{2} \div \frac{3}{2} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$

Fig. 9.12. Tarea adicional 13 involucrando el inverso del producto de medida.

En dicha tarea, al observar que está aplicando el algoritmo de manera equivocada, se le pregunta si lo que está haciendo es correcto y lo que hace es cambiar a multiplicación, se recurre nuevamente al material y logra identificarlo y finalmente realiza el algoritmo correctamente. Se le pide comparar ambos y menciona que el primero lo hizo al revés.

En la última sesión se le presenta la Tarea adicional 10 es similar a una de las tareas del taller en el que se aplica el isomorfismo de medida y el empleo del material de leds para su resolución y la Tarea adicional 11 en la que introduce la comparación multiplicativa. Nuevamente se observa muy distraída y cometiendo errores incluso de cálculo en el que se había observado que no tenía ningún problema.

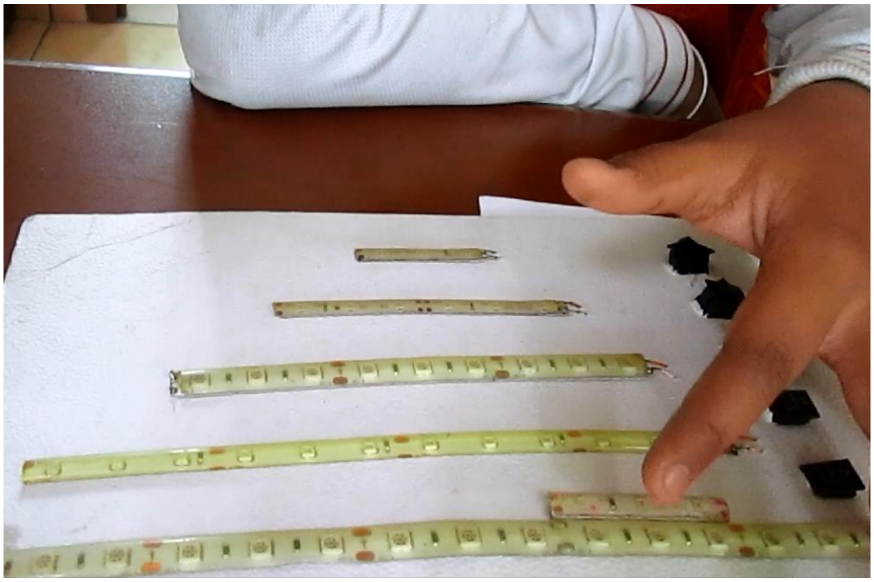
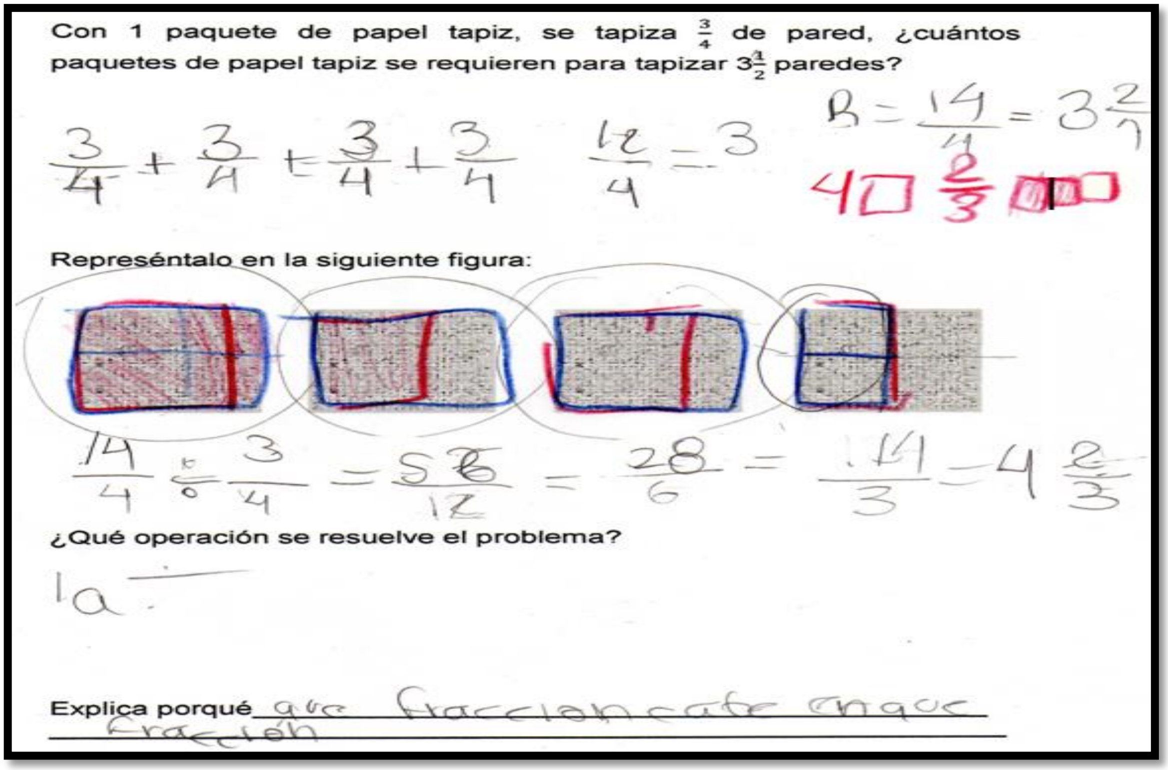


Fig. 9.13. Empleo del modelo de conmensuración para la resolución de la tarea adicional 10.

En la Tarea 10 de inicio se confunde y lo que hace es descomponer el dividendo en cuartos, determina cuántos son y eso proporciona como respuesta. Le presentamos la Tarea 8 que había resuelto para que recordara en qué consistía y con el empleo del material de leds (Fig. 9.13) pudo concretar la respuesta adecuadamente, por supuesto lo asoció de inmediato a la división de fracciones (Fig. 9.14).



Con 1 paquete de papel tapiz, se tapiza $\frac{3}{4}$ de pared, ¿cuántos paquetes de papel tapiz se requieren para tapizar $3\frac{1}{2}$ paredes?

$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}$ $\frac{12}{4}=3$ R $=\frac{14}{4}=3\frac{2}{7}$

$4\ \frac{2}{3}$

Represéntalo en la siguiente figura:

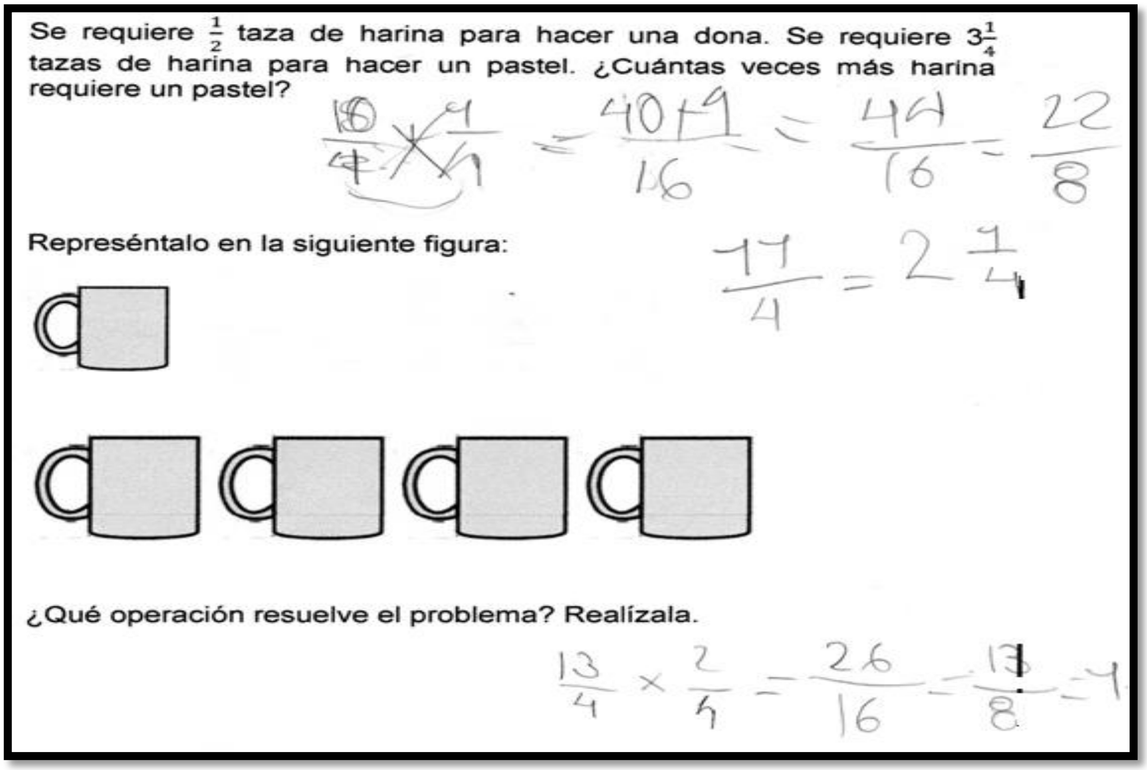
$\frac{14}{4}\div\frac{3}{4}=\frac{56}{12}=\frac{28}{6}=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}$

¿Qué operación se resuelve el problema?

la

Explica porqué que fraccion cabe en que fracción

Fig. 9.14. Tarea adicional 10, problema de razón que involucra el isomorfismo de medida. División cuotativa.



Se requiere $\frac{1}{2}$ taza de harina para hacer una dona. Se requiere $3\frac{1}{4}$ tazas de harina para hacer un pastel. ¿Cuántas veces más harina requiere un pastel?

$\frac{10}{4}\times\frac{4}{4}=\frac{40+4}{16}=\frac{44}{16}=\frac{22}{8}$

Represéntalo en la siguiente figura:

$\frac{11}{4}=2\frac{1}{4}$

¿Qué operación resuelve el problema? Realízala.

$\frac{13}{4}\times\frac{2}{4}=\frac{26}{16}=\frac{13}{8}=1$

Fig. 9.15. Tarea adicional 11 de comparación multiplicativa en la que se considera la búsqueda de una medida.

En la Tarea adicional 11 se plantea la división de fracciones mediante la comparación multiplicativa, lo que Vergnaud (1991) y Ivars & Fernández (2016) llaman un solo espacio de medida en la que se considera la búsqueda de una medida. Se decide proponer esta nueva tarea para observar la dificultad que representa para Martha su resolución, debido a que no es un tipo de tarea común en el currículo escolar.

Nuevamente observamos a Martha distraída, inicia la resolución determinando una suma con datos que no es claro de dónde obtiene, en dónde su primer dato es $\frac{5}{2}$ que convierte a cuartos e incluso aplicando el método de la carita feliz, como se observa que marca en la tarea, (Fig. 9.15). Cuando le preguntamos por qué suma, inmediatamente responde, sin reflexionar, "*Ah no, es una multiplicación*", le preguntamos si recuerda qué significa multiplicar fracciones y sólo menciona "*es que me robaron mi libreta de anotaciones*", le mostramos entonces una de las tareas de multiplicación que había resuelto para que recordara qué significaba la multiplicación de fracciones y recuerda que una multiplicación significa tomar una fracción de una fracción. Se le pregunta si eso es lo que requiere en la resolución del problema, ella lee nuevamente el problema y determina que se requiere determinar "*cuánto cabe* $\frac{1}{2}$ *en* $3\ \frac{1}{4}$", sin embargo cuando se le pregunta con qué operación lo resuelve, realiza una multiplicación en la que ya identifica correctamente la fracción.

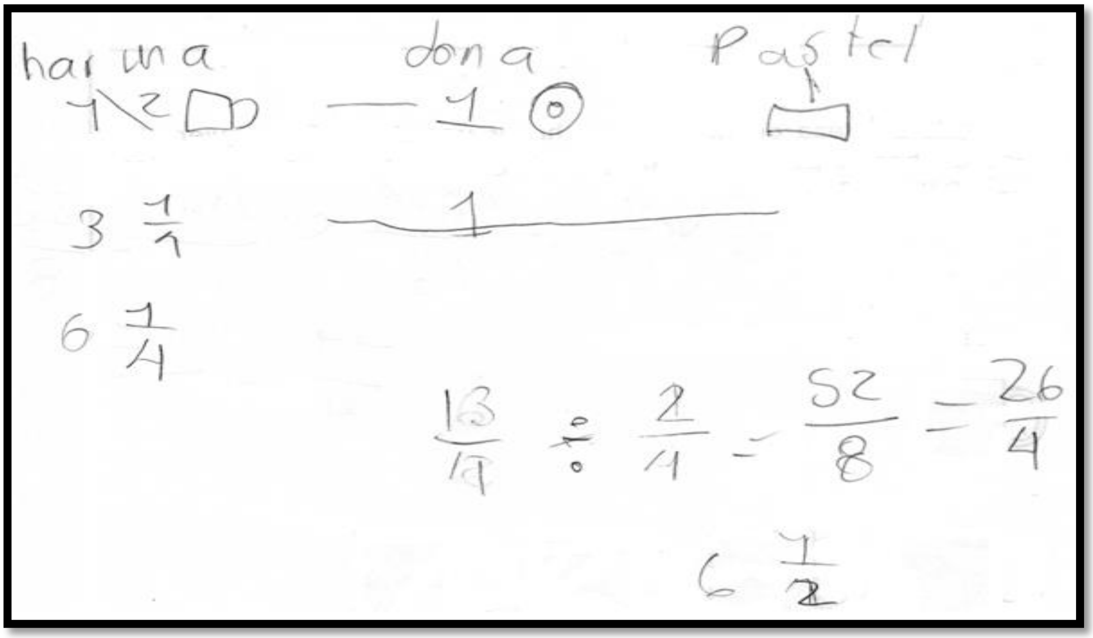


Fig. 9.16. Tabla de datos de la tarea adicional 11

Para guiarla le pedimos que elabore una pequeña tabla en la que exprese los datos del problema, indicando cuánta harina se requiere para una dona y cuánta para un pastel, como se muestra en la Figura 9.16. Mediante preguntas se le guía nuevamente a la solución.

I: ¿Cuánta más harina tiene el pastel en comparación con la dona? ¿Cuántas veces es más grande $3\ \frac{1}{4}$ *que* $\frac{1}{2}$ *?*
M: 6 veces.
I: 6 veces y un poco más ¿cuánto más?
M: $6\frac{1}{4}$ *.*
I: ¿Qué operación resolvería entonces el problema? ¿La multiplicación que hiciste la resuelve?
M: No. ¿Sería la división? [Realiza una división con los datos]. Sí sería una división y el resultado es $6\frac{1}{2}$ *.*

9.2. Cuestionario final

La aplicación de este cuestionario nos permitió determinar si se observaba un avance en las elaboraciones de Martha. Como se mencionó antes, la resolución la efectuó de manera individual, con sus propios medios, sin apoyo por parte de la investigadora y ahora sin el empleo de material manipulativo.

A pesar de que en la realización de la entrevista Martha mostró un avance sustancial, en la realización del cuestionario final su desempeño fue deficiente resolviendo correctamente sólo dos de los cinco problemas. Las soluciones del cuestionario final realizada por Martha se presentan en la Tabla 9.5.

Fue evidente en Martha una actitud distraída y sin el interés que había mostrado en los demás instrumentos metodológicos. Al indagar el porqué de su actitud, descubrimos que el papel de la profesora de grupo fue fundamental, ya que a pesar de que había mostrado mucha disposición para el apoyo a nuestra investigación, con los estudiantes no fue condescendiente y no brindó oportunidad a Martha para ponerse al corriente en las actividades de las clases a las que no asistió por participar en la entrevista, lo que ocasionó que Martha tuviera una evaluación reprobatoria, eso generó el desinterés en Martha para concluir con la entrevista, y aunque hablamos con la profesora para que le brindara una oportunidad de recuperación, no logramos que la profesora cambiara de opinión. Consideramos que tal suceso provocó que Martha se viese afectada en su desempeño.

Tabla 9.5. Cuestionario final elaborado por Martha

CUESTIONARIO FINAL Elaboraciones de Martha	
No. DE TAREA Significado asociado	PROBLEMA VERBAL DIVISION DE FRACCIONES
1 División cuotativa. Problema de razón asociado al isomorfismo de medida	Un auto recorre $\frac{1}{6}$ del camino de Pachuca a Tula en 1 hora. ¿En cuánto tiempo recorrerá $\frac{3}{8}$ del camino? $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$ 3 horas $\frac{9}{24} = \frac{3}{6}$ ¿Qué operación resuelve el problema? Realízala. Fraccion Equivalentes Inventa un problema similar que emplee los datos del problema anterior. Un metrobus recorre $\frac{1}{6}$ de Pachuca a Tula en 1 hrs Cuanto recorre en $\frac{3}{8}$
2 Problema de área. División como el inverso del producto de medida.	Enrique quiere cambiar la cubierta de su escritorio. La cubierta tiene un área de $\frac{5}{20}$ m^2 y de largo mide $\frac{3}{4}$ m. ¿Cuánto mide de ancho la cubierta? $\frac{5}{20} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{80} = \frac{3}{16}$ ¿Qué operación resuelve el problema? × Mottiplicacion Inventa un problema similar y resuélvelo. Marcelina D J (la vecina) nesecita cambiar retirada mente la cubierta de so real silla que de Area mide $\frac{5}{20}^2$ y de largo $\frac{3}{4}$ m^2
3 División partitiva Reparto equitativo y exhaustivo.	Laura tiene en el refrigerador $5\frac{1}{2}$ flanes napolitanos, los repartirá de manera equitativa entre ella y sus 7 vecinos. ¿Cuánto recibirá cada uno? $\frac{11}{2} \div \frac{14}{2} = \frac{22}{28}$ **Inventa un problema similar al anterior.** Mia compro $5\frac{1}{2}$ pasteles individuales y les va a dar a 7 amigos ¿Qué operación lo resuelve? Explica. divición

4 Comparación multiplicativa (búsqueda de un escalar)	Margarita ocupó $\frac{1}{4}$ Kg de jamaica para hacer agua. Azucena preparó más agua y ocupó $2\frac{3}{8}$ kg de jamaica. ¿Cuántas veces más jamaica ocupó Azucena? $\frac{5}{4}\ \frac{1}{8} = 1\frac{3}{8} = \frac{11}{8}$ $\frac{11}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{11}{32} = 2\frac{10}{11}$ ¿Qué operación se emplea para resolver el problema? ¿Por qué? fraccion X Mult. Inventa un problema similar y resuélvelo.
5 Comparación multiplicativa (búsqueda de una medida)	Laura empleo 3 veces más tela de la que empleó Estela para hacer sus cortinas. Si Laura empleó $2\frac{3}{4}$ m, ¿cuánta tela empleó Estela para hacer sus cortinas? $\frac{11}{4} \div \frac{3}{x}$ $\frac{11}{4} \div \frac{3}{1} = \frac{11}{12}$ ¿Por qué lo resolviste así? Explica. Porque me parece que haci se hace Inventa un problema similar. Mia tiene 3 veces más paletas que laura $Mia = 2\frac{3}{4}$ $Lau = X$

En el problema 1, se observa un intento por resolver de manera intuitiva, Martha recurre al empleo de fracciones equivalentes, convierte al equivalente adecuado cada fracción y termina igualando ambas fracciones a sextos, realiza una comparación de ambas fracciones en sextos y determina que la diferencia entre ambas es 3 y esa es su respuesta, sin embargo no detecta que comete un error al igualar $\frac{9}{24} = \frac{3}{6}$, lo que la lleva a proporcionar una respuesta errónea. No logra determinar que debe emplear una división de fracciones.

En la pregunta 2 identifica que es un problema de área, pero no lo interpreta correctamente y recurre a la multiplicación de fracciones para solucionarlo; sin embargo, se observa un manejo adecuado del algoritmo. Consideramos que su error fue por distracción en el que no se detuvo a reflexionar sobre lo que el problema solicitaba y sólo aplicó la fórmula del área al multiplicar lo que ella consideró que era lado por lado.

El problema 3 lo resuelve sin contratiempos, identificando el algoritmo correcto y resolviendo adecuadamente.

En el problema 4 se vuelve a equivocar al convertir a fracción impropia, considerando sólo un entero y no dos, y nuevamente selecciona el algoritmo de solución incorrecto, lo que nos permite confirmar nuevamente que estaba distraída y eso le lleva a proporcionar una respuesta equivocada.

El problema 5 lo resuelve correctamente al identificar sin contratiempos la operación a emplear y aplicando correctamente el algoritmo, identificando adecuadamente el divisor y dividendo y utilizando el elemento neutro.

En lo referente a la invención de problemas, se observa que inician bien pero que quedan inconclusos.

9.3. Análisis de resultados

Analizando mediante el método interpretativo de Valdemoros (2004) las elaboraciones de Martha podemos expresar lo que a continuación se detalla.

En el Plano semántico

En general se observa que Martha hizo un uso correcto de las fracciones, interpretando el significado de la fracción adecuadamente, aunque en entrevista tuvo un manejo correcto de la equivalencia y la conversión a número mixto, en el cuestionario final se detectan errores. Creemos que la enseñanza mecanicista que recibió en clase omitió los contenidos semánticos de las operaciones lo que generó confusión en Martha al no poder identificar en qué momento emplear una operación. Consideramos que la resolución de las tareas presentadas en entrevista y el empleo del material visual manipulativo, le permitieron lograr avances e identificar dichos contenidos semánticos de las operaciones, en particular de la división de fracciones, en dónde pudo expresar que dividir significa determinar “cuánto se repite una fracción en otra”, en la que se pudo observar que logró identificar en la división cuotativa, el número de agrupamientos, interpretar el residuo y expresarlo en función del divisor, realizando una correcta reunitización, y en la división partitiva, logró identificar el tamaño del agrupamiento y el residuo adecuadamente, realizando un reparto equitativo y exhaustivo.

Además de que logró trabajar con los distintos significados de la división, expuestos por Vergnaud (1991) y Flores (2014). Es importante mencionar que el uso de la fracción como medida fue fundamental para lograr avances. Sin embargo su desempeño en el cuestionario final fue errático, lo que consideramos fue debido al incidente con su profesora de grupo lo que ocasionó desinterés y desanimo para continuar realizando un buen trabajo. A pesar de ello, podemos decir que se observaron avances en su desempeño al observar que en los problemas del cuestionario que resolvió correctamente identificó adecuadamente la operación a emplear, así como cuál era el dividendo y cuál era el divisor.

En el plano de la traducción

Este plano se refiere al paso de un lenguaje a otro, en el que se observa que en el cuestionario Martha logra una correcta interpretación de los elementos de los problemas, considerado esto por el lenguaje empleado y sus representaciones pictóricas, en este sentido observamos que recurre mucho a las representaciones circulares, sin embargo es en el procedimiento a emplear en dónde presenta complicaciones.

En el plano sintáctico

Se observa dificultad en el manejo de los algoritmos, al realizar multiplicación en lugar de división y viceversa o modificar el procedimiento a seguir, incluso al simplificar las fracciones. Lo que consideramos se debió a la excesiva mecanización de los algoritmos sin considerar la semántica de las operaciones, lo que interfirió en la construcción de significado y sentido de la operación, de acuerdo con Streefland (1993), Freudenthal (1983) y Valdemoros & Ruiz (2008). Sin embargo, posterior a la entrevista se observaron avances en la aplicación de los algoritmos, en dónde a pesar de que en algunos problemas eligió el algoritmo incorrecto, su aplicación es correcta.

En el plano de la escritura aritmética

De acuerdo al lenguaje utilizado, se observa que recurre a un continuo manejo de signos y símbolos, en especial cuando a la pregunta “qué operación empleaste para resolver el problema”, responde con lenguaje aritmético (÷), en lugar de emplear lenguaje verbal, o emplea las dos representaciones (x multiplicar). También se observa en el cuestionario mezcla de signos aritméticos y lingüísticos, por ejemplo cuando responde “1 tarta y media”.

En la entrevista con Martha, se procuró que superara las dificultades cognitivas que enfrentaba, en particular, en la comprensión del sentido y significado de la división de fracciones y en el manejo de los algoritmos. En dicha entrevista, el uso del material visual manipulativo fue de mucha ayuda para guiarla en el proceso y aunque con algunos tropiezos, se logró que Martha lograra transitar por los distintos significados de la división de fracciones, en los que abordamos la división partitiva y cuotativa, a través del isomorfismo de medida, comparación multiplicativa y producto de medida, con resultados favorables. Consideramos que Martha hace evidente cierta inseguridad en su propio actuar, además de que tiende a distraerse fácilmente, lo que afecta su desempeño. Creemos que con un adecuado acompañamiento por parte del profesor se potenciaría su pensamiento aritmético.

Capítulo 10

Análisis general y Conclusiones

En este capítulo realizaremos un análisis general de los resultados obtenidos en el trabajo realizado con los estudiantes y las conclusiones a las que se llega al término de esta investigación, para determinar si se lograron los objetivos planteados al inicio de su desarrollo. Se incluyen también sugerencias para la enseñanza que sirvan de apoyo al profesor en el aula.

10.1. Análisis general

Realizaremos el análisis de cada uno de los instrumentos metodológicos empleados a lo largo de la investigación, partiendo de la observación, los resultados obtenidos en la aplicación del cuestionario y en el taller, así como del resultado del trabajo realizado en las entrevistas.

10.1.1. De la observación

La observación en clase y la observación indirecta del cuaderno de apuntes de un estudiante nos permitió darnos cuenta de que los estudiantes enfrentaban una enseñanza mecanicista basada solamente en la aplicación de algoritmos sin un contexto, con escasa resolución de problemas verbales con una notable ausencia de aplicaciones a la vida real, con el empleo de un sistema memorístico como es el uso del método de la carita feliz que se enfoca en la aplicación memorizada de un algoritmo, sin el acercamiento a la semántica de las operaciones, sin la reflexión que permitiera la abstracción, lo que llevó a los estudiantes a tener una aprendizaje frágil y sin sentido que no logró incorporarse a su estructura cognitiva y que sólo les ocasionó confusión, Freudenthal (1983), Streefland (1993), Valdemoros y Ruiz (2008).

10.1.2. Cuestionario inicial de exploración

El cuestionario inicial fue un instrumento de gran valía que nos permitió identificar las dificultades que enfrentaban los estudiantes (no sólo de secundaria sino también de Conalep) en el manejo de las fracciones, en particular de la división de fracciones, en que pudimos identificar que la clase que la profesora les impartió sobre división de fracciones no los acercó a la compresión del significado y sentido de dicha operación, por lo que las tareas, a las que no estaban familiarizados, para ellos fueron complicadas, sin embargo pudimos observar que la resolución de problemas empleando pictogramas les permitió resolver de manera intuitiva correctamente, en el mejor de los casos, tanto la división partitiva, realizando un reparto equitativo y exhaustivo, identificando el tamaño del agrupamiento y en la división cuotativa identificando el número de agrupamientos pero sin determinar adecuadamente el residuo, observamos también que en sus procesos de resolución recurrieron en ocasiones a la suma iterada. Ninguno de los estudiantes pudo asociar el residuo al divisor ni realizar el proceso de reunitización. El análisis de los resultados del cuestionario nos permitió establecer categorías de acuerdo a los aciertos y errores encontrados, tanto en la división partitiva como en la cuotativa, las cuales se resumen de la siguiente forma:

En la división partitiva

- Identificación de tamaño del agrupamiento.
- No se identifica el tamaño del agrupamiento.

En la división cuotativa

- Identifica el número de agrupamientos, identifica residuo pero no se proporciona en función del divisor.
- Identifica número de agrupamientos. No se identifica residuo.
- No identifica número de agrupamientos ni residuo.

10.1.3. Taller inicial exploratorio

El taller nos permitió introducir la resolución de problemas, primero de forma individual y posteriormente en equipo, mediante trabajo colaborativo y el empleo de material visual manipulativo, al que no estaban familiarizados. Fue necesario dejar que se familiarizaran con el material para posteriormente iniciar la resolución de los problemas, esto dio la oportunidad de llevar a cabo un intercambio de ideas entre los estudiantes, lo que permitió que pudieran expresar libremente sus pensamientos y explicar si entendían o no. Es importante mencionar que el uso de pictogramas les permitió expresar sus ideas en torno a la solución que planteaban. Los resultados obtenidos de este instrumento fueron enriquecedoras observando de primera mano las serias dificultades que tenían los estudiantes en la aplicación de los algoritmos en dónde se pudo observar excesiva confusión, sin conocer en qué momento ocupar uno u otro algoritmo o modificando y mezclando los procedimientos y el continuo uso del método de la “carita feliz”, al que recurrían aunque no fuese necesario, e incluso se observaron dificultades en la construcción numérica, lo que en general podemos interpretar como un retroceso en el manejo de las fracciones, de acuerdo a Freudenthal (1983) y un procedimiento que lleva a respuestas aprendidas pero no comprendidas, coincidiendo con Dienes (1972). Al finalizar el taller, se observó que las tareas de división las resolvieron intuitivamente pero no pudieron emplear el algoritmo correcto ni identificar qué operación resolvía los problemas. Fue necesario acercar el significado de la división de fracciones a los estudiantes, al que no lograron arribar por cuenta propia, a través de una reflexión colectiva y el uso del material visual manipulativo. Finalmente se reforzó dicho conocimiento a través de la aplicación del juego de fracciones que les acercó al significado de dicha operación de manera lúdica, del que podemos decir que el modelo de área resultó ser práctico y fácilmente comprendido.

10.1.4. De las entrevistas

Las entrevistas fueron el instrumento fundamental en el desarrollo del estudio de los tres casos. En ellas fue posible explorar el pensamiento de Fernando, Brenda y Martha. La recreación de las tareas y el enfoque constructivista de las entrevistas, así como el empleo del material visual manipulativo y el empleo de representaciones pictóricas, les permitió alcanzar logros sustanciales en los contenidos semánticos de la división de fracciones, pudimos observar como a través de su desarrollo ellos fueron corrigiendo sus errores y modificando sus respuestas.

Lograron identificar los modos de reparto, obtención de partes de partes, así como la identificación del tamaño del agrupamiento en la división partitiva y el número de agrupamientos en la división cuotativa, también la identificación adecuada del residuo, acercándolos al significado de la división de fracciones. En el caso de Brenda y Martha, lograron determinar adecuadamente el producto de medidas y su inverso. Y con Martha pudimos trabajar también la comparación multiplicativa.

Todo eso se pudo lograr mediante el apoyo de la resolución de problemas empleando representaciones pictóricas y el uso del material visual manipulativo desarrollado por la investigadora.

Finalmente, este logro nos llevó a determinar una nueva categoría de análisis, ***“Identifica número de agrupamientos, identifica residuo y lo proporciona en función del divisor***”, además de asociar sus respuestas al algoritmo de la división, lo que da cuenta de la asignación de sentido que dan a la operación.

10.2. De las dificultades cognitivas encontradas en los estudiantes

El empleo del cuestionario inicial de exploración y el taller exploratorio fueron los instrumentos fundamentales para la identificación de las dificultades encontradas en los estudiantes, dificultades como recurrencia continua al uso de los naturales evitando usar las fracciones, dificultad para realizar un reparto exhaustivo, ordenan fracciones considerando los números naturales, dificultad en las representaciones pictóricas, aplicación errónea de los algoritmos (problema muy recurrente), conversión errónea de decimales a fracciones, igualación de dos tipos de representaciones distintas (fracciones y decimales), inversión de denominadores, dificultad para representar fracciones en la recta numérica, además de no poder resolver adecuadamente la multiplicación y división de fracciones y no identificar el significado y sentido de la operación, asociando su respuesta a una suma o resta de fracciones.

El trabajo en las entrevistas nos permitió obtener avances en la disminución de esas dificultades, sin embargo, no lograron superarse todas como fue en el caso de Brenda y Martha que en la elaboración del cuestionario final aún presentaron dificultades en la simplificación de fracciones. Sin embargo en lo que respecta a la división de fracciones se logró que lograran la asignación de significado y sentido, como pudo constatarse en el cuestionario final.

10.3. De las preguntas de investigación

En este punto nos planteamos si el desarrollo y los resultados obtenidos en esta investigación nos permiten responder a las preguntas de investigación planteadas inicialmente.

Con respecto a la pregunta (1) ¿Qué tipo de dificultades cognitivas y de cálculo enfrentan los alumnos de primer grado de secundaria en la resolución de problemas con división de fracciones?, podemos decir que los instrumentos empleados nos permitieron identificar las dificultades que enfrentaron los estudiantes en la resolución de problemas de división de fracciones, como se describe en el párrafo anterior, en las que asocian la respuesta a una suma o resta de fracciones por no tener clara la semántica de dicha operación y en las que además presentan dificultades de cálculo al hacer evidente una confusión en el uso de los algoritmos. La identificación de esas dificultades nos llevó a establecer categorías que identifican esas dificultades.

En lo referente a la pregunta (2) ¿Qué rol jugó el profesor en las sesiones de enseñanza de la división de fracciones, y qué peso tuvo su presentación en el aprendizaje de los estudiantes?, podemos decir, por lo observado, que su enseñanza de la división se limitó a responder una lección del libro en el que la profesora les inducía la respuesta, en dónde no existió una reflexión sobre la semántica de la operación, que no se asoció a situaciones problemáticas y que sólo se limitó a presentar el algoritmo a los estudiantes sin que antes hubiesen comprendido su composición numérica, significado y sentido, lo que dio pie a una enseñanza frágil que no les permitió lograr un conocimiento perdurable, Kieren (1988). Además de ello, la introducción del algoritmo de la suma, presentado por la profesora, como el modelo de la “carita feliz”, generó confusión en los estudiantes al momento de aplicar los algoritmos que llegó el momento en que mezclaron procedimientos entre el algoritmo de suma, multiplicación y división, que les impedían llegar a una respuesta correcta o que les complicaban el proceso al emplear el modelo en dónde no era necesario. Consideramos entonces que eso impidió que al resolver los problemas de división de fracciones, pudieran asociarlos al algoritmo de la división, a pesar de que sólo habían pasado unos días de esa sesión de enseñanza. Por lo que podemos decir que las sesiones de la profesora generaron un retroceso en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los alumnos.

Finalmente en lo que respecta a la pregunta (3) ¿El uso de modelos didácticos visuales y manipulativos en la enseñanza-aprendizaje de la división de fracciones favorece su comprensión?, podemos decir que el uso de pictogramas y el material manipulativo les fue de gran ayuda permitiéndoles la construcción de ideas matemáticas y contribuyendo a la formación y comprensión del concepto de la división (Kieren 1988, Valdemoros 1993, Luna 1999), el modelo les permitió encontrar las relaciones matemáticas existentes entre las fracciones involucradas y les permitió comprender la relación abstracta, en particular el proceso de reunitización y la identificación del número de agrupamientos y el residuo en la división cuotativa y en los casos en que hubo retroceso, les permitió retomar el rumbo adecuado.

10. 4. En torno a los objetivos

Con respecto al objetivo general:

> Elaborar un breve diseño didáctico que promueva la comprensión de los contenidos semánticos de la división de fracciones en estudiantes de primero de secundaria, desde un enfoque realista, apoyado en materiales visuales didácticos y manipulativos, que permita minimizar los errores y dificultades que enfrentan los alumnos en la resolución de problemas.

Podemos decir que el diseño didáctico elaborado mediante la resolución de problemas y apoyado con el material visual manipulativo, como fue el material de acetatos y el tablero de leds, permitió a los estudiantes, detectar sus errores y corregirlos, así como desarrollar en ellos, las ideas matemáticas involucradas en la división de fracciones, lograr comprender el significado y sentido de la operación, lo cual se hace evidente en las respuestas del cuestionario final, en el que sin el apoyo de la investigadora y sin el empleo de representaciones pictóricas, les fue posible responder adecuadamente los problemas y darle sentido a la operación. Además de que pudieron inventar problemas similares adecuadamente, lo que a decir de Valdemoros (1993), eso da cuenta de que ha logrado comprender.

En cuanto a los objetivos específicos, fueron cuatro los que nos propusimos lograr y que se presentan a continuación.

- Elaborar y aplicar un cuestionario que sirva como instrumento de diagnóstico para evaluar las condiciones preliminares en las que se encuentran los alumnos, en cuanto al manejo de las fracciones, en particular las estrategias de solución de la división de fracciones.

Se logró diseñar un cuestionario que involucraba los diferentes usos de la fracción y la división de fracciones y su aplicación nos permitió determinar las condiciones preliminares del grupo, así como la identificación de las estrategias empleadas en la resolución de los problemas y las dificultades que enfrentaban.

- Favorecer la construcción de significado y sentido de la división de fracciones en los estudiantes de secundaria mediante la resolución de problemas verbales.

Partir de la resolución de los problemas verbales para introducir la división de fracciones, con un enfoque realista, es decir que involucrara situaciones de la vida cotidiana del estudiante favoreció la construcción de ideas matemáticas que lo llevaron a desarrollar el significado y sentido de dicha operación, en los que se observó que el empleo de pictogramas le permitió desarrollar intuitivamente la respuesta.

- Constatar si el empleo de material visual manipulativo contribuye a que el estudiante logre superar sus dificultades cognitivas al confrontar sus errores y reelaborar sus tareas de división de fracciones.

El empleo del material visual manipulativo fue de mucha ayuda a los estudiantes para identificar y comparar las fracciones involucradas, el visualizar la fracción representada mediante el material, le permitió construir el objeto mental adecuado que lo condujo a la respuesta, o incluso detectar sus errores mediante esa comparación. El uso del material favoreció la comprensión de la reunitización ya que fue mucho más claro al comparar visualmente las fracciones, lo que ayudó a la construcción semántica de la operación.

- Verificar, mediante la aplicación de un cuestionario final y estudio de casos, si el trabajo realizado en la investigación permitió que el alumno afianzara los conocimientos y adquiera el significado y sentido de la división de fracciones.

Al finalizar las entrevistas y posterior a la aplicación del cuestionario final, Fernando y Brenda mostraron un avance considerable en la identificación de significado y sentido de la división de fracciones, en los que se observó una correcta identificación de la operación a emplear y un excelente manejo del algoritmo. En Martha, sin embargo, se detectaron dificultades en su respuesta final, que no así en la entrevista, consideramos que posiblemente se debió a la situación enfrentada en el aula con su profesora, lo que influyó en su estado anímico y por supuesto en su desempeño.

10.5. Conclusiones

En la presente investigación logramos identificar las dificultades cognitivas y de cálculo de los estudiantes de primer grado de secundaria, en particular de Fernando, Brenda y Martha. Fue posible a través de la implementación, en la entrevista que les realizamos, de un diseño didáctico basado en la resolución de problemas empleando material manipulativo, que lograran salvar dichas dificultades, como pudimos constatar en las tareas que realizaron en el cuestionario final.

Es posible además afirmar que el uso de materiales manipulativos en la resolución de problemas puede contribuir positivamente en la superación de obstáculos asociados a las operaciones con fracciones y el uso de pictogramas dan claridad al manejo de las fracciones y permiten un acercamiento a la determinación de los contenidos semánticos y a la identificación de los procedimientos algorítmicos.

Por otro lado y tras concluir la investigación, pudimos constatar que el reparto es un punto de partida importante para el acercamiento a la división de fracciones, así como la interpretación de la fracción como medida porque se interpreta el residuo en términos de la unidad utilizada para medir. También observamos la pertinencia del modelo de conmensuración empleado para lograr el acercamiento al significado y sentido de la división de fracciones.

Podemos establecer que la excesiva enseñanza mecanicista que omite los contenidos semánticos y conceptuales genera en los estudiantes la realización de notaciones vacías de sentido y confusión que llevan a un retroceso en la enseñanza como menciona Freudenthal (1983). La comprensión profunda de la semántica de las operaciones les permitirá ser competentes para resolver problemas que involucren el uso o manejo de las fracciones, por tanto, es pertinente ayudarles a construir su propio conocimiento matemático a través de contextos de enseñanza apropiados, Flores (2014).

10.6. Sugerencias para la enseñanza

El algoritmo de división es sencillo pero no así su comprensión, que resulta ser más complicado que la suma y resta. La enseñanza mecanicista genera que los alumnos resuelvan los problemas sin comprender, lo que genera dificultad, debido a que olvidan los procedimientos y al tratar de resolver, comenten errores.

Consideramos que las reflexiones presentadas en esta investigación sobre las elaboraciones realizadas por los estudiantes en la resolución de problemas de división de fracciones empleando material manipulativo, así como el diseño de los problemas planteados en situaciones reales, podrían ofrecer a los maestros una ruta a seguir en el proceso de instrucción. Es importante mencionar que se debe establecer una conexión entre el problema desarrollado en contexto y el algoritmo de la división de fracciones, cuestión que resulta complicada para el estudiante y que requiere de constante práctica.

De los resultados obtenidos en esta investigación, se puede partir para considerar en futuras investigaciones la consideración de ampliar los conceptos de comparación multiplicativa en los estudiantes, que aquí fueron abordados de manera breve.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Balbuena, H. C., (1988). *Análisis de una secuencia didáctica para la enseñanza de la suma de fracciones en la escuela primaria.* CINVESTAV- IPN (TESIS)

Bisquerra, R. (1989). *Métodos de Investigación educativa. Guía Práctica.* Barcelona, España. Ediciones CEAC. ISBN: 84-329-9228-3

Clark, M. R., Berenson, S. B. & Cavey, L. (2003). A comparison of ratios and fractions and their roles as tools in proportional reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior. Vol. 22. No. 3* pp. 297-317.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K., (2007). *Research Methods in Education*. Sixth edition. Ed. Routledge. London y New York, NY. ISBN 0-203-02905-4 Master e-book ISBN

Corbalán, F. (2002). *Juegos Matemáticos para Secundaria y Bachillerato.* Madrid. Editorial Síntesis, S.A.

Cramer, K., Wyberg, T., y Leavitt, S. (2008). The Role of Representations in Fraction Addition and Substraction. *Mathematics Teaching in the Middle School.* Vol. 13, No. 8, pp. 490-496. April 2008

Dienes, Z. P., (1972). *Fracciones.* Teide. 248p.

Flores, A. (2014). División de fracciones como comparación multiplicativa a partir de los métodos de los alumnos*. Educación Matemática, Esp. 25 años*, 227-244.

Freudenthal, H., (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel.* 1 Traducción de Luis Puig, publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001.

Gallardo, J., González, J., y Quispe, W., (2008). Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración. Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2008), 11(3)*: 355 – 382

Hart, K., (1981). *Children'sUnderstanding of Mathematics: 11-16.* 11ª. Ed. Anthony Rowe Publishing.

Ji-Won Son, Crespo, S. (Agosto, 2009).*El razonamiento y la respuesta de futuros profesores a la estrategia no tradicional del estudiante al dividir fracciones.* Journal of Mathematics Teacher Education. Vol. 2, Núm. 4, pp 235-261. Doi: 10.1007/s10857-009-9112-5

Kieren, T. (1988). *Conocimiento individual de números racionales. Su desarrollo intuitivo y formal.* Universidad de Alberta. Traducción de Olimpia Figueras. CINVESTAV.

Llinares, S. y Sánchez, M. (2000). *Las fracciones: diferentes interpretaciones*, *Capítulo 3 tomado del libro Fracciones.* Editorial Síntesis. Madrid.

Meel. D. (Noviembre, 2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática y la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol. 6, Núm. 3*. Pp 221-271.

Meneses, F., (1991). *Las fracciones un dominio de significación múltiple. Análisis de una colección de problemas de multiplicación y división de fracciones elaborados por profesores-alumnos de la Escuela Normal Superior de México.* CINVESTAV – IPN (Tesis de Maestría).

Olguín, E. (2009). *Estrategias empleadas por los niños en la resolución de problemas de reparto con fracciones*. Tesis de maestría. Matemática Educativa – Cinvestav, México.

Perera P. y Valdemoros M. (2009, Abril). Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado*. Educación Matemática, Vol. 21(1),* 29-62.

SEP, (2011). *Plan y programas de estudio. Guía para el Maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas.* Dirección General de Desarrollo Curricular (DGDC) y Dirección General de Formación Continua de Maestros en Servicio (DGFCMS), que pertenecen a la Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública. 1ª. Edición. México, D. F.

SEP, (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral. Matemáticas. Educación secundaria. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación*. Dirección General de Desarrollo Curricular. 1ª. Edición. Ciudad de México.

Streefland, L., (1993). *Las fracciones: un enfoque realista. In rational Numbers: An Integration of Research.* Edited by Carpenter, Th. et al. L. Erlbaum, 1993, pp 90-104.

Taylor,S.J. Bogdan, R. (1992). *Introducción a los métodos cualitativos en investigación. La búsqueda de los significados.* Ed. Paidós, España, pp. 100 -132.

Valdemoros, M. (1993). *"La construcción del lenguaje de las fracciones y de los conceptos involucrados en él"*. CINVESTAV – IPN. TESIS DOCTORAL.

Valdemoros, M. (2001). Las fracciones, sus referencias y los correspondientes significados de unidad: Estudio de casos. *Educación Matemática*. Volumen 13, No. 1, pp. 51-67.

Valdemoros, M., (2004). Lenguaje, fracciones y reparto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* Vol. 7, No. 3, pp. 235-253.

Valdemoros, M., & Ruiz, F., (2008). El caso de Lucina para el estudio de las fracciones en la escuela de adultos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* Vol. II(1).127-157.

Vergnaud, G. (1991), *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*, Capítulo 11 Problemas de tipo multiplicativo, Ed. Trillas. p. 197.

Bell, A. (1986). Enseñanza por diagnostico. Algunos problemas sobre números enteros. Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham. *Enseñanza de las ciencias,* Vol. 4 (3), 199-208. Recuperado de https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/50895/92796 fecha de consulta abril 2018.

Block, D., (2008). El papel de la noción de razón en la construcción de fracciones en la escuela primaria. Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoamericano. P. 495-512. *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C*. Díaz de Santos. S.A. Recuperado de http://www.die.cinvestav.mx/Portals/die/SiteDocs/Investigadores/DBlock/EstudiosDidNRFD/2-3-2008elPapeldela.pdf fecha de consulta febrero 2018

Bruce, C., Bennett, S. & Flynn, T. (2014). *Fractions Operations: Multiplication and Division Literature Review.* Trent University. Editorial Support: Shelley Yearley, Trillium Lakelands DSB, on assignment with Ontario Ministry of Education. Recuperado en http://www.edugains.ca/resourcesMath/CE/LessonsSupports/Fractions/FractionsOperations_MultDiv_AODA.pdf fecha de consulta abril 2018.

Centeno, J. (1988). *Números decimales ¿por qué? ¿para qué?. Capítulo 9 Dificultades, errores, conflictos y obstáculos*. Editorial Síntesis. España. Recuperado de https://es.slideshare.net/ahernandezz/centeno-numeros-decimales fecha de consulta diciembre 2018.

Chapouille, M. V. (Febrero, 2007). "La importancia del juego en el proceso educativo". *Reflexión Académica en Diseño y Comunicación No. VIII*, Vol. 8, p. 64-65. Buenos Aires, Argentina. http://fido.palermo.edu/servicios_dyc/publicacionesdc/vista/detalle_articulo.php?id_articulo=1388&id_libro=10

Coll, C. (1988). Significado y sentido en el aprendizaje escolar. Reflexiones en torno al concepto de aprendizaje significativo. *Infancia y Aprendizaje*. (41)131-142. Universidad de Barcelona. Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/48298.pdf Fecha de consulta diciembre 2018.

Egg E. A. (1999) *El taller una alternativa de renovación pedagógica*, Rio de la Plata: Editorial magisterio. Recuperado de https://uacmtalleresliterarios.files.wordpress.com/2011/02/el-taller-como-sistema-de-ensec3b1anza-aprendizaje.pdf fecha de consulta febrero 2018.

Fishbein, Deri, Nello, Marino, (1985). *The Role of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division*. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 16, No. 1 (Jan., 1985), pp. 3- 17 Recuperado de https://www.jstor.org/stable/748969 fecha de consulta noviembre 2017.

Godino, J. (octubre, 2004). *Didáctica de las matemáticas para Maestros*. Proyecto Edumat-Maestros. Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada. http://www.ugr.es/local/jgodino/fprofesores.htm/ (Fecha de consulta 19/07/17)

Gómez, P. (septiembre, 2000). Una comprensión de la comprensión en matemáticas. *Una empresa docente. Sierpinska Revista EMA, v. 2.* Universidad de los Andes. Bogotá, Colombia. Recuperado de https://core.ac.uk/download/pdf/12341001.pdf fecha de consulta febrero, 2018.

González, D., (2015). *Errores comunes en el aprendizaje de las fracciones. Un estudio con alumnos de 12/13 años en Cantabria*. Máster en formación del profesorado de educación secundaria. Facultad de Educación. Universidad de Cantabria. Recuperado de https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/6903/GonzalezdelOlmoDario.pdf?sequence=1 julio 2018.

Ivars, P. & Fernández, C. (2016). *Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años.* Educación Matemática, vol. 28, núm. 1 http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v28n1/1665-5826-ed-28-01-00009.pdf Recuperado mayo 2018

Kieren, T. (1976). *On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers.* University of Alberta.
Recuperado de: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED120027.pdf#page=108 fecha de consulta enero 2018.

Lamon, J. S., (2012). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding*. *Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers*. 3rd. Ed. New York, USA: Routledge. Recuperado: https://issuu.com/tsangkinfun/docs/_susan_j_lamon__teaching_fractions__9d426028713c75 fecha de consulta agosto 2017.

Luna V.(Noviembre, 1999). *Desarrollo de la habilidad de elaborar gráficas, esquemas y diagramas en el aprendizaje de las matemáticas.* Universidad Autónoma de Nuevo León. Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas. Tesis de Maestría. Recuperado de: http://eprints.uanl.mx/7653/1/1020130141.PDF fecha de consulta 20 agosto 2017

Maceratesi, M. I. (1999) http://redescubrir.blogspot.com/2007/06/qu-es-un-taller.html

Mejora tu escuela. org. Conoce tu escuela. http://www.mejoratuescuela.org/compara#?entidad=15&municipio=676&localidad=27445&p=3&sort=Sem%C3%A1foro%20de%20Resultados%20Educativos&type_test=planea&schoolStatus=1&niveles=13 Recuperado septiembre 2018.

Montes, M., (2017). *Materiales manipulativos para el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en Educación primaria.* Facultad de letras y de la Educación. Universidad de la Rioja, España. Tesis de Licenciatura. Recuperado de https://biblioteca.unirioja.es/tfe_e/TFE002387.pdf fecha de consulta Enero 2018.

Nillas, L., (2003). Division of Fractions: Preservice Teachers' Understanding and Use of Problem Solving Strategies. *The Mathematics Educator 2003, Vol.7, No. 2, pp. 96 – 113.* Recuperado de http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.522.6027&rep=rep1&type=pdf fecha de consulta marzo 2018.

Novillis, L. C.(1976). *Seventh-Grade Students' Ability to Associate Proper fractions with Points on the Number Line.*Mathematics Education Reports.Clearinghouse for Science, Mathematics wand Environmental Education The Ohio State University. College of Education. p. 151-166 Recuperado de https://eric.ed.gov/?id=ED212463 fecha de consulta noviembre 2017.

Planea en Educación Básica 2017. http://planea.sep.gob.mx/content/general/docs/2017/RESULTADOS_NACIONALES_PLANEA2017.pdf recuperado septiembre 2018

Puig, L. y Cerdan, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares. Capítulo 4. Problemas de una etapa: multiplicación y división.* Ed. Síntesis. Recuperado de https://www.uv.es/puigl/lpae4.pdf fecha de consulta agosto 2018.

Quintero, A., (2006). Interpretación de las fracciones. Recuperado de https://juliobaigorria.files.wordpress.com/2016/04/interpretacic3b3n-de-las-fracciones.pdf

Rico, L. (1995). *"Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas".* Didáctica de la Matemática. Licenciatura de Matemáticas. 5º. Curso. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/486/1/RicoL95-100.PDF (fecha de consulta 16/07/17).

Sánchez, F. (2012). *Propuesta para la enseñanza de la conversión de números decimales a fraccionarios y viceversa en el conjunto de los racionales, para estudiantes de grado 7 de educación básica.* Universidad Nacional de Colombia. Trabajo de Maestría. Bogotá, Colombia. http://bdigital.unal.edu.co/8673/1/franciscoalejandrosanchezacero.2012.pdf Recuperado 03/07/18.

Sánchez, F. (2017). *Matemáticas I. Construcción del pensamiento*. Fernández Editores. México. CONALITEG pp 90-93. Recuperado de https://libros.conaliteg.gob.mx/content/restricted/libros/carrusel.jsf?idLibro=2119#page/32 fecha de consulta febrero 2018.

Sinicrope, R., Mick, H., & Kolb, J., (2002). Interpretation of fraction Division. *Making Sense of Fractions, Ratios and Proportions, 2002,* Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Edited by Bonnie Litwiller. Pp. 153-161. Reston, Va. Recuperado de http://teachers.henrico.k12.va.us/math/HCPSCourse1/6-4/TN-interpFracDiv.pdf Fecha de consulta abril 2018.

Valdemoros, M., Ramírez, M. y Lamadrid, P. (2015). "Núcleos de significación y pensamiento" en la enseñanza de fracciones. *XIV CIAEM-IACME, Chiapas, México, 2015.* Recuperado de http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/826/347 fecha de consulta abril 2018.

Valdemoros, M., Ramírez, M. y Lamadrid, P. (2017). . "The future teacher, multiplication and division of fractions". *Proceedings of the Thirty-Ninth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Synergy at the Crossroads: Future Directions for Theory, Research, and Practice*. Indianapolis, IN USA, Octubre 2017 pp. 901-904. Recuperado de https://www.conf.purdue.edu/landing_pages/pme-na/docs/PMENA39_2017_Proceedings.pdf fecha de consulta octubre 2018.

Vigotsky, L. (1995). *Pensamiento y Lenguaje. Teoría del desarrollo cultural de las funciones psíquicas.* Traducido por María Margarita Rotger. Ediciones Fausto. Recuperado de http://abacoenred.com/wp-content/uploads/2015/10/Pensamiento-y-Lenguaje-Vigotsky-Lev.pdf Fecha de consulta diciembre 2018.

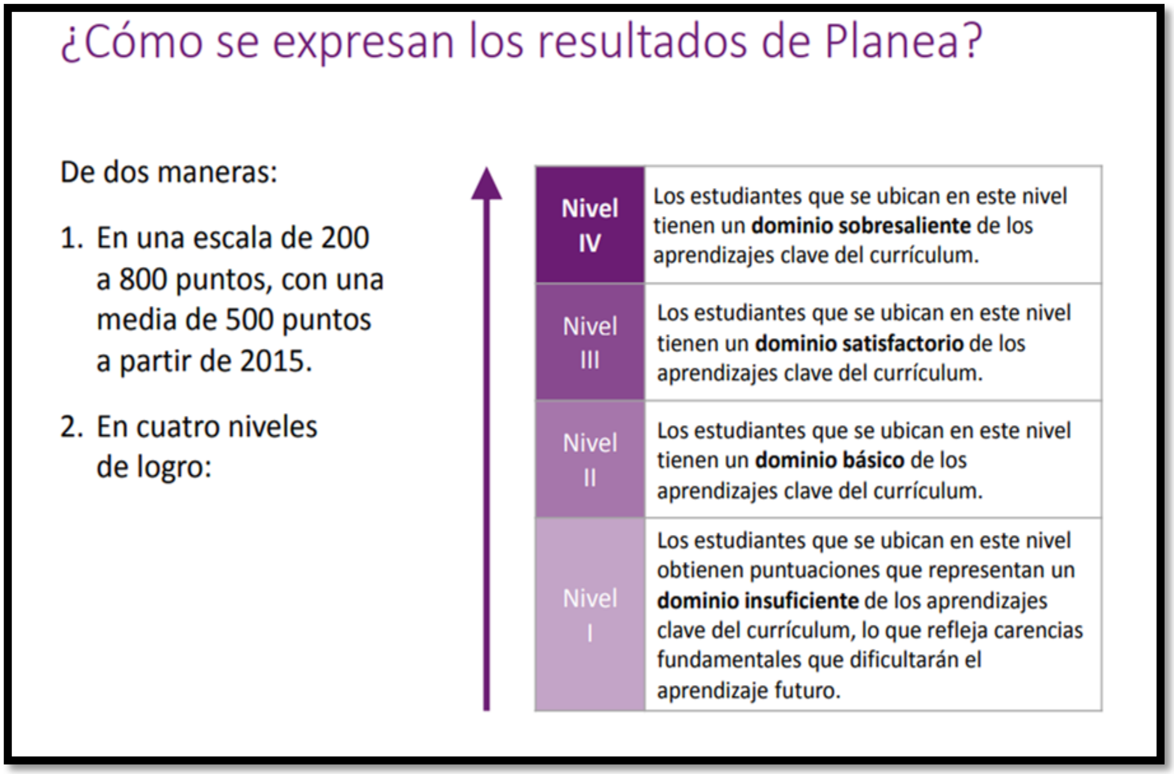
Warrington, Mary Ann. (Mayo, 1997). "*How children think about división with fractions".*Mathematics Teaching in the Middle School 2. Pp 390-395. Recuperado de http://teachers.henrico.k12.va.us/math/HCPSCourse1/6-4/TN-KidthinkFracDiv.pdf consulta realizada 18/08/17

APÉNDICE A

Resultados de prueba PLANEA (Plan Nacional para la Educación de los Aprendizajes) 2017

En este apéndice se aborda información sobre la prueba Planea, que es una prueba cuyo objetivo principal es conocer en qué medida los estudiantes logran dominar un conjunto de aprendizajes esenciales al término de los distintos niveles de la educación obligatoria, proporcionando un diagnóstico del aprendizaje en la educación básica que permita favorecer el mejoramiento de la práctica pedagógica. Se exploran los aprendizajes clave en Español y Matemáticas.

Planea agrupa los resultados obtenidos por los estudiantes en cuatro niveles de logro. Es importante señalar que estos niveles van del I al IV en orden progresivo, es decir, el nivel más bajo es el I y el más alto es el IV. Además, son acumulativos, ya que los estudiantes que se ubican en el nivel II cuentan con los aprendizajes del nivel previo (I) y así sucesivamente. En la figura A.1 se presenta la descripción genérica de los niveles de logro.



¿Cómo se expresan los resultados de Planea?

De dos maneras:

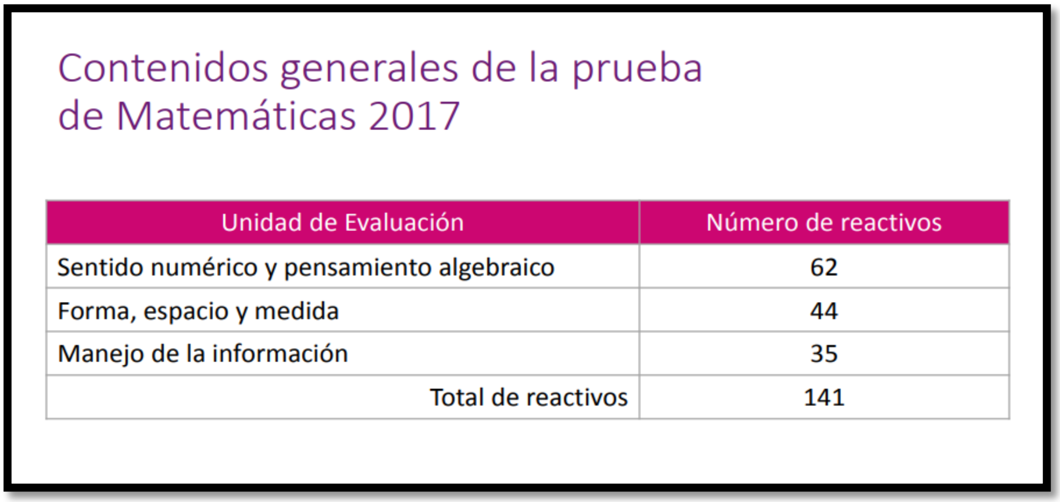
1. En una escala de 200 a 800 puntos, con una media de 500 puntos a partir de 2015.
2. En cuatro niveles de logro:

Nivel IV	Los estudiantes que se ubican en este nivel tienen un **dominio sobresaliente** de los aprendizajes clave del currículum.
Nivel III	Los estudiantes que se ubican en este nivel tienen un **dominio satisfactorio** de los aprendizajes clave del currículum.
Nivel II	Los estudiantes que se ubican en este nivel tienen un **dominio básico** de los aprendizajes clave del currículum.
Nivel I	Los estudiantes que se ubican en este nivel obtienen puntuaciones que representan un **dominio insuficiente** de los aprendizajes clave del currículum, lo que refleja carencias fundamentales que dificultarán el aprendizaje futuro.

Fig. A.1. Descripción de niveles de logro de la prueba Planea.

Esta modalidad informa sobre los resultados que obtienen Escuelas Multigrado y si se encuentran en condiciones de marginalidad alta, media y baja. Esto de acuerdo a la evaluación que realizan del contexto, en el que consideran los diferentes factores y circunstancias que intervienen en los resultados de aprendizaje. Pueden ser de tipo personal, familiar, escolar, socioeconómico e inclusive ambiental. Para ello toman en cuenta la zona escolar, para ver si en general tienen acceso a servicios, si el entorno familiar es aceptable, cuál es el número de personas en el hogar que comparten un cuarto y si cuentan con trabajo remunerado en casa, agua dentro de la casa, la escolaridad de los padres y supervisión de tareas, entre otros.

Aquí abordaremos solamente los resultados concernientes a la prueba Planea en Matemáticas en el nivel de secudaria. Los contenidos considerados en la prueba se muestran en la figura A.2.

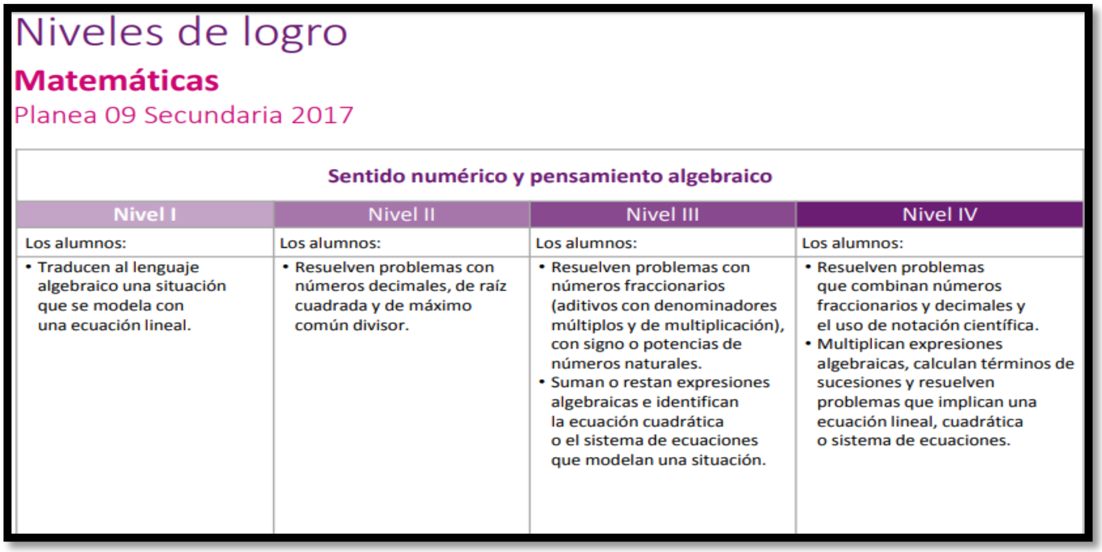


Contenidos generales de la prueba de Matemáticas 2017

Unidad de Evaluación	Número de reactivos
Sentido numérico y pensamiento algebraico	62
Forma, espacio y medida	44
Manejo de la información	35
Total de reactivos	141

Fig. A.2. Contenidos de Matemáticas considerados en la prueba Planea.

Se evalúa cada uno de los contenidos generales y los resultados se presentan por niveles. El contenido que nos interesa en esta investigación es el que involucra el tema de problemas con números fraccionarios y ese se concentra en la unidad de evaluación “Sentido numérico y pensamiento algebraico”. Los niveles de logro que se evalúan, en secundaria, respecto a ese tema se muestran en la figura A.3.



Niveles de logro

Matemáticas

Planea 09 Secundaria 2017

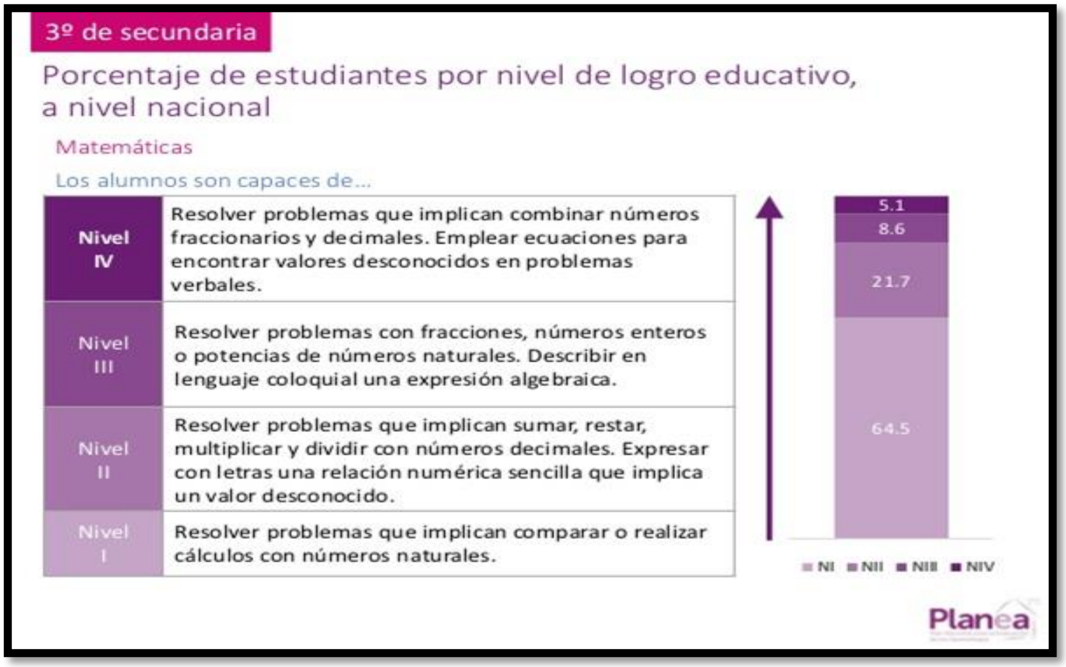
Sentido numérico y pensamiento algebraico

Nivel I	Nivel II	Nivel III	Nivel IV
Los alumnos:	Los alumnos:	Los alumnos:	Los alumnos:
• Traducen al lenguaje algebraico una situación que se modela con una ecuación lineal.	• Resuelven problemas con números decimales, de raíz cuadrada y de máximo común divisor.	• Resuelven problemas con números fraccionarios (aditivos con denominadores múltiplos y de multiplicación), con signo o potencias de números naturales. • Suman o restan expresiones algebraicas e identifican la ecuación cuadrática o el sistema de ecuaciones que modelan una situación.	• Resuelven problemas que combinan números fraccionarios y decimales y el uso de notación científica. • Multiplican expresiones algebraicas, calculan términos de sucesiones y resuelven problemas que implican una ecuación lineal, cuadrática o sistema de ecuaciones.

Fig. A.3. Niveles de logro en Matemáticas en el área de Sentido numérico y pensamiento algebraico.

Como se observa en la tabla, los problemas con números fraccionarios se consideran en el nivel de logro III y IV, lo que indica que los estudiantes que comprenden el uso de dichos números, deberán encontrarse en esos niveles.

Sin embargo, de acuerdo a los resultados obtenidos por Planea a nivel Nacional, el porcentaje de alumnos que alcanzan el Nivel III es muy reducido, de acuerdo a la figura A.4, apenas el 8.6 %.



3º de secundaria

Porcentaje de estudiantes por nivel de logro educativo, a nivel nacional

Matemáticas

Los alumnos son capaces de...

Nivel IV	Resolver problemas que implican combinar números fraccionarios y decimales. Emplear ecuaciones para encontrar valores desconocidos en problemas verbales.
Nivel III	Resolver problemas con fracciones, números enteros o potencias de números naturales. Describir en lenguaje coloquial una expresión algebraica.
Nivel II	Resolver problemas que implican sumar, restar, multiplicar y dividir con números decimales. Expresar con letras una relación numérica sencilla que implica un valor desconocido.
Nivel I	Resolver problemas que implican comparar o realizar cálculos con números naturales.

Fig. A.4. Niveles de logro en secundaria.

Y se presentan variación en los resultados, de acuerdo al tipo de escuela, como se observa en la figura A.5. En dónde las secundarias públicas alcanzan apenas un 8 % en el Nivel III y 4.1 % en el Nivel IV.

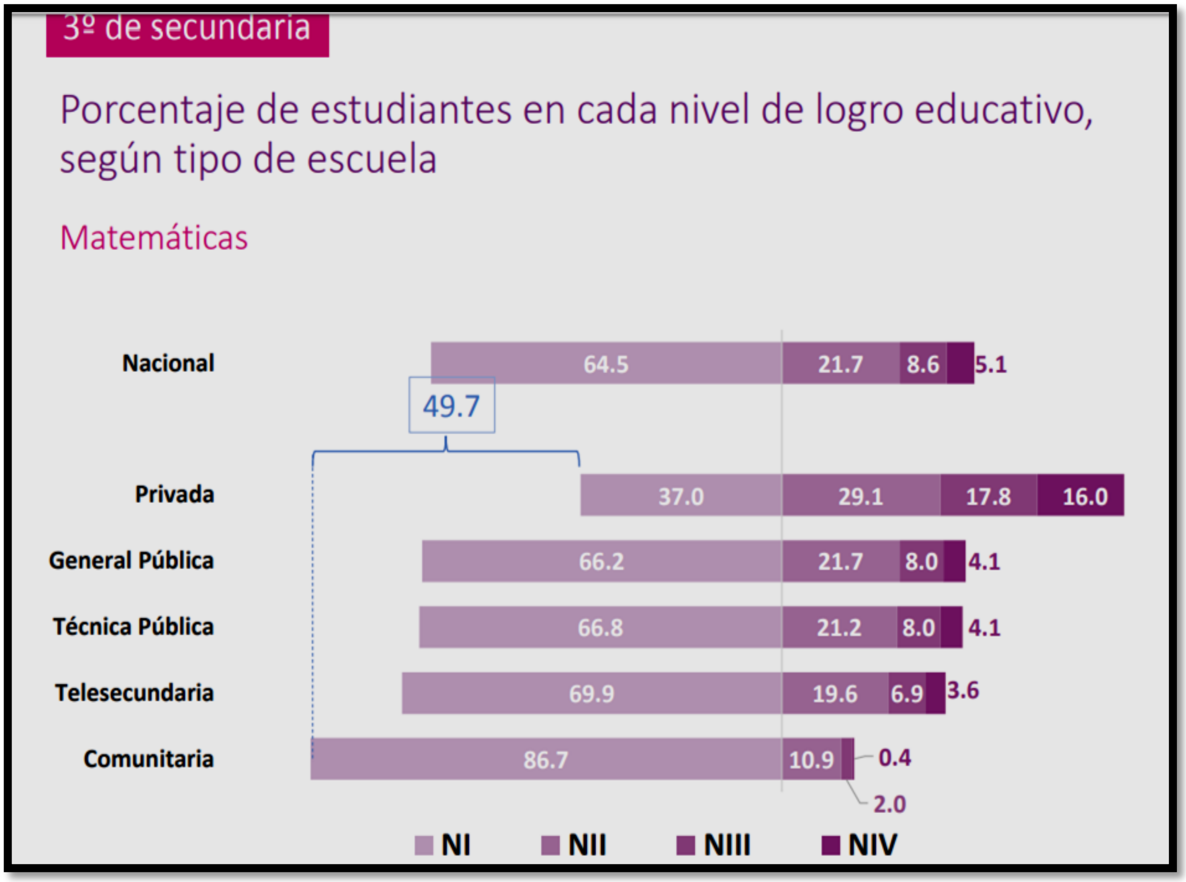


Fig. A.5. Niveles de logro de acuerdo al tipo de sencundaria.

Esto nos permite aceverar que hay aún mucho trabajo por hacer en el campo de los números fraccionarios para poder elevar el nivel de logro de los estudiantes.

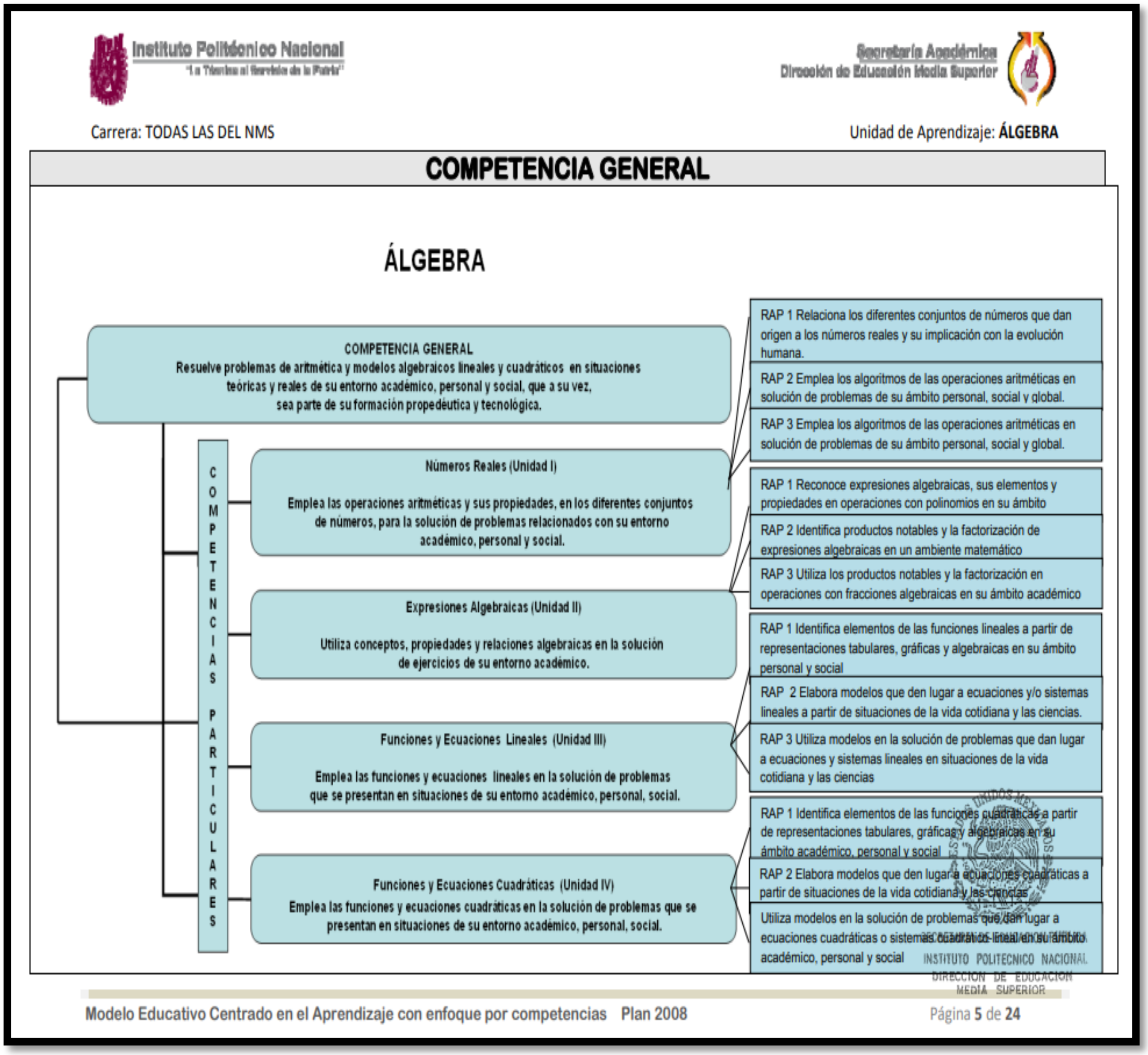
La información mostrada aquí es tomada de los resultados proporcionados por el Gobierno Federal y la Secretaría de Educación Pública (SEP) sobre Resultados Nacionales Planea en Educación Básica 2017.

http://planea.sep.gob.mx/content/general/docs/2017/RESULTADOS_NACIONALES_PLANEA2017.pdf Y Mejora tu escuela. org. Conoce tu escuela. http://www.mejoratuescuela.org/compara#?entidad=15&municipio=676&localidad=27445&p=3&sort=Sem%C3%A1foro%20de%20Resultados%20Educativos&type_test=planea&schoolStatus=1&niveles=13 Recuperados en septiembre 2018.

APÉNDICE B

Planes y programas de estudio de Nivel Medio Superior

Realizando una revisión de los programas de estudio de primer semestre de nivel medio superior, CCH y vocacional, observamos que incluyen una recapitulación de contenidos curriculares previos, antes de iniciar los programas propios del nivel, como puede observarse en el programa del CECYT 9 del IPN, en la figura B.1, B.2, B.3 y B.4, que muestran los contenidos que abordan en la unidad didáctica 1, y en los que se observa que antes de iniciar el tema de álgebra, abordan de manera general el conjunto de los números, las propiedades de las operaciones básicas y el uso de algoritmos.



Instituto Politécnico Nacional
"La Técnica al Servicio de la Patria"

Secretaría Académica
Dirección de Educación Media Superior

Carrera: TODAS LAS DEL NMS

Unidad de Aprendizaje: **ÁLGEBRA**

COMPETENCIA GENERAL

ÁLGEBRA

COMPETENCIA GENERAL
Resuelve problemas de aritmética y modelos algebraicos lineales y cuadráticos en situaciones teóricas y reales de su entorno académico, personal y social, que a su vez, sea parte de su formación propedéutica y tecnológica.

COMPETENCIAS PARTICULARES

Números Reales (Unidad I)
Emplea las operaciones aritméticas y sus propiedades, en los diferentes conjuntos de números, para la solución de problemas relacionados con su entorno académico, personal y social.

- RAP 1 Relaciona los diferentes conjuntos de números que dan origen a los números reales y su implicación con la evolución humana.
- RAP 2 Emplea los algoritmos de las operaciones aritméticas en solución de problemas de su ámbito personal, social y global.
- RAP 3 Emplea los algoritmos de las operaciones aritméticas en solución de problemas de su ámbito personal, social y global.

Expresiones Algebraicas (Unidad II)
Utiliza conceptos, propiedades y relaciones algebraicas en la solución de ejercicios de su entorno académico.

- RAP 1 Reconoce expresiones algebraicas, sus elementos y propiedades en operaciones con polinomios en su ámbito
- RAP 2 Identifica productos notables y la factorización de expresiones algebraicas en un ambiente matemático
- RAP 3 Utiliza los productos notables y la factorización en operaciones con fracciones algebraicas en su ámbito académico

Funciones y Ecuaciones Lineales (Unidad III)
Emplea las funciones y ecuaciones lineales en la solución de problemas que se presentan en situaciones de su entorno académico, personal, social.

- RAP 1 Identifica elementos de las funciones lineales a partir de representaciones tabulares, gráficas y algebraicas en su ámbito personal y social
- RAP 2 Elabora modelos que den lugar a ecuaciones y/o sistemas lineales a partir de situaciones de la vida cotidiana y las ciencias.
- RAP 3 Utiliza modelos en la solución de problemas que dan lugar a ecuaciones y sistemas lineales en situaciones de la vida cotidiana y las ciencias

Funciones y Ecuaciones Cuadráticas (Unidad IV)
Emplea las funciones y ecuaciones cuadráticas en la solución de problemas que se presentan en situaciones de su entorno académico, personal, social.

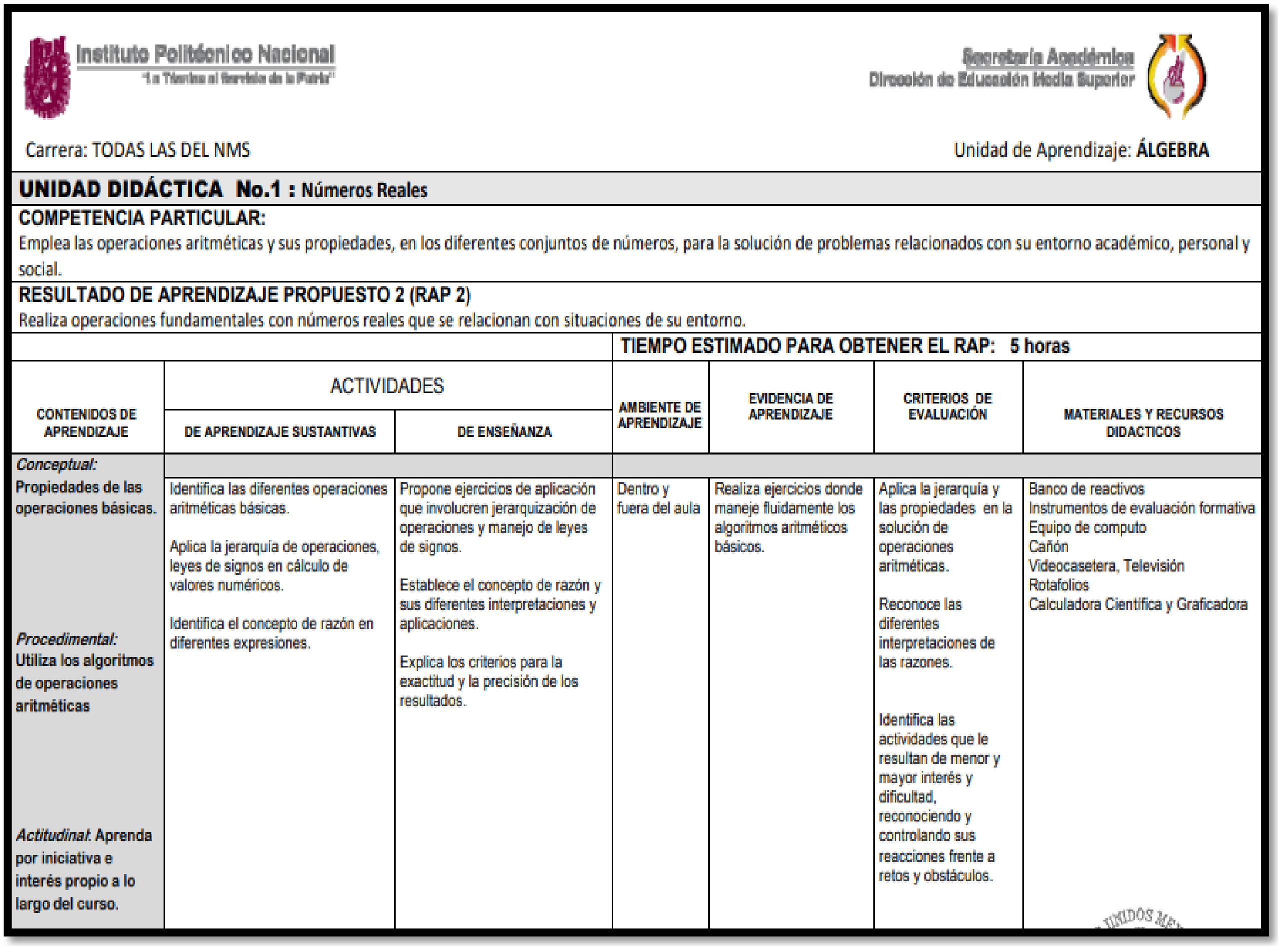
- RAP 1 Identifica elementos de las funciones cuadráticas a partir de representaciones tabulares, gráficas y algebraicas en su ámbito académico, personal y social
- RAP 2 Elabora modelos que den lugar a ecuaciones cuadráticas a partir de situaciones de la vida cotidiana y las ciencias
- Utiliza modelos en la solución de problemas que dan lugar a ecuaciones cuadráticas o sistemas cuadrático-lineal en su ámbito académico, personal y social

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
DIRECCION DE EDUCACION MEDIA SUPERIOR

Modelo Educativo Centrado en el Aprendizaje con enfoque por competencias Plan 2008

Página 5 de 24

Fig. B.1. Programa general de estudios de enseñanza del álgebra en CECYT 9 – IPN.



Instituto Politécnico Nacional
"La Técnica al Servicio de la Patria"

Secretaría Académica
Dirección de Educación Media Superior

Carrera: TODAS LAS DEL NMS

Unidad de Aprendizaje: **ÁLGEBRA**

UNIDAD DIDÁCTICA No.1 : Números Reales

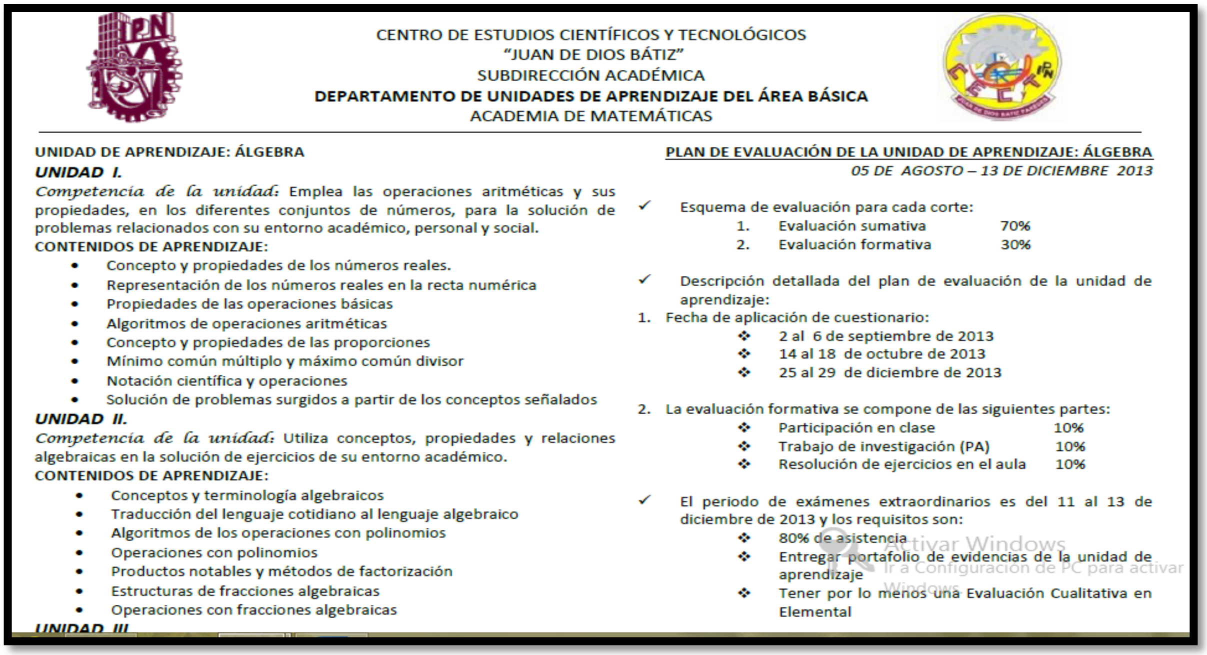
COMPETENCIA PARTICULAR:
Emplea las operaciones aritméticas y sus propiedades, en los diferentes conjuntos de números, para la solución de problemas relacionados con su entorno académico, personal y social.

RESULTADO DE APRENDIZAJE PROPUESTO 2 (RAP 2)
Realiza operaciones fundamentales con números reales que se relacionan con situaciones de su entorno.

TIEMPO ESTIMADO PARA OBTENER EL RAP: 5 horas

CONTENIDOS DE APRENDIZAJE	ACTIVIDADES		AMBIENTE DE APRENDIZAJE	EVIDENCIA DE APRENDIZAJE	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	MATERIALES Y RECURSOS DIDACTICOS
	DE APRENDIZAJE SUSTANTIVAS	DE ENSEÑANZA				
Conceptual: **Propiedades de las operaciones básicas.** *Procedimental:* **Utiliza los algoritmos de operaciones aritméticas** *Actitudinal:* **Aprenda por iniciativa e interés propio a lo largo del curso.**	Identifica las diferentes operaciones aritméticas básicas. Aplica la jerarquía de operaciones, leyes de signos en cálculo de valores numéricos. Identifica el concepto de razón en diferentes expresiones.	Propone ejercicios de aplicación que involucren jerarquización de operaciones y manejo de leyes de signos. Establece el concepto de razón y sus diferentes interpretaciones y aplicaciones. Explica los criterios para la exactitud y la precisión de los resultados.	Dentro y fuera del aula	Realiza ejercicios donde maneje fluidamente los algoritmos aritméticos básicos.	Aplica la jerarquía y las propiedades en la solución de operaciones aritméticas. Reconoce las diferentes interpretaciones de las razones. Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.	Banco de reactivos Instrumentos de evaluación formativa Equipo de computo Cañón Videocasetera, Televisión Rotafolios Calculadora Científica y Graficadora

Fig. B.2. Contenidos de la unidad didáctica 1 de álgebra del CECYT 9 – IPN.



CENTRO DE ESTUDIOS CIENTÍFICOS Y TECNOLÓGICOS
"JUAN DE DIOS BÁTIZ"
SUBDIRECCIÓN ACADÉMICA
DEPARTAMENTO DE UNIDADES DE APRENDIZAJE DEL ÁREA BÁSICA
ACADEMIA DE MATEMÁTICAS

UNIDAD DE APRENDIZAJE: ÁLGEBRA

UNIDAD I.

Competencia de la unidad: Emplea las operaciones aritméticas y sus propiedades, en los diferentes conjuntos de números, para la solución de problemas relacionados con su entorno académico, personal y social.

CONTENIDOS DE APRENDIZAJE:

- Concepto y propiedades de los números reales.
- Representación de los números reales en la recta numérica
- Propiedades de las operaciones básicas
- Algoritmos de operaciones aritméticas
- Concepto y propiedades de las proporciones
- Mínimo común múltiplo y máximo común divisor
- Notación científica y operaciones
- Solución de problemas surgidos a partir de los conceptos señalados

UNIDAD II.

Competencia de la unidad: Utiliza conceptos, propiedades y relaciones algebraicas en la solución de ejercicios de su entorno académico.

CONTENIDOS DE APRENDIZAJE:

- Conceptos y terminología algebraicos
- Traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico
- Algoritmos de los operaciones con polinomios
- Operaciones con polinomios
- Productos notables y métodos de factorización
- Estructuras de fracciones algebraicas
- Operaciones con fracciones algebraicas

UNIDAD III

PLAN DE EVALUACIÓN DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE: ÁLGEBRA

05 DE AGOSTO – 13 DE DICIEMBRE 2013

✓ Esquema de evaluación para cada corte:

1.	Evaluación sumativa	70%
2.	Evaluación formativa	30%

✓ Descripción detallada del plan de evaluación de la unidad de aprendizaje:

1. Fecha de aplicación de cuestionario:
   - 2 al 6 de septiembre de 2013
   - 14 al 18 de octubre de 2013
   - 25 al 29 de diciembre de 2013

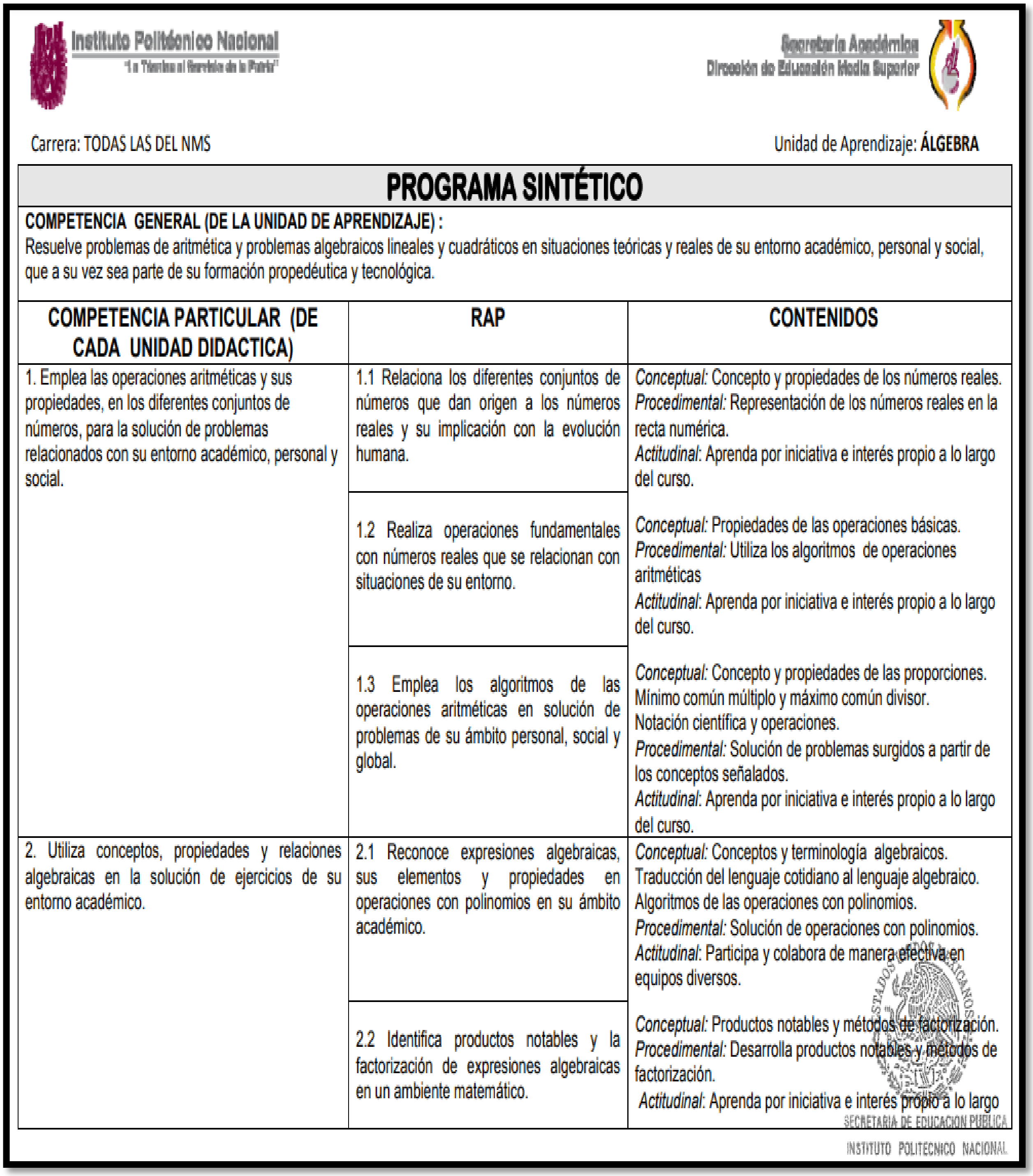
2. La evaluación formativa se compone de las siguientes partes:

Participación en clase	10%
Trabajo de investigación (PA)	10%
Resolución de ejercicios en el aula	10%

✓ El periodo de exámenes extraordinarios es del 11 al 13 de diciembre de 2013 y los requisitos son:

- 80% de asistencia
- Entregar portafolio de evidencias de la unidad de aprendizaje
- Tener por lo menos una Evaluación Cualitativa en Elemental

Fig. B.3. Unidad de aprendizaje CECYT 9 "Juan de Dios Bátiz" IPN



Instituto Politécnico Nacional
"La Técnica al Servicio de la Patria"

Secretaría Académica
Dirección de Educación Media Superior

Carrera: TODAS LAS DEL NMS

Unidad de Aprendizaje: **ÁLGEBRA**

PROGRAMA SINTÉTICO

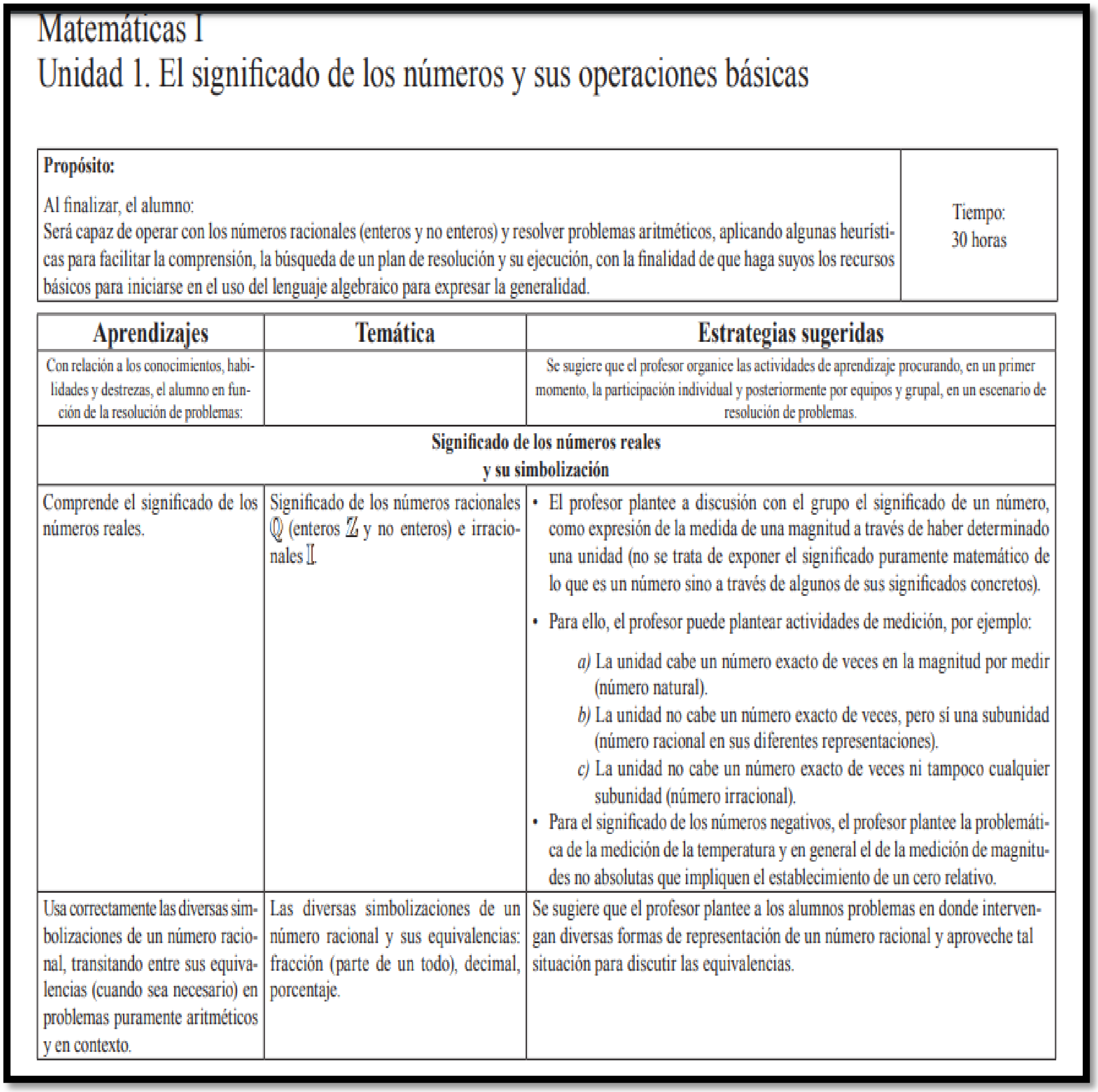
COMPETENCIA GENERAL (DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE) :
Resuelve problemas de aritmética y problemas algebraicos lineales y cuadráticos en situaciones teóricas y reales de su entorno académico, personal y social, que a su vez sea parte de su formación propedéutica y tecnológica.

COMPETENCIA PARTICULAR (DE CADA UNIDAD DIDACTICA)	RAP	CONTENIDOS
1. Emplea las operaciones aritméticas y sus propiedades, en los diferentes conjuntos de números, para la solución de problemas relacionados con su entorno académico, personal y social.	1.1 Relaciona los diferentes conjuntos de números que dan origen a los números reales y su implicación con la evolución humana.	*Conceptual:* Concepto y propiedades de los números reales. *Procedimental:* Representación de los números reales en la recta numérica. *Actitudinal*: Aprenda por iniciativa e interés propio a lo largo del curso.
	1.2 Realiza operaciones fundamentales con números reales que se relacionan con situaciones de su entorno.	*Conceptual:* Propiedades de las operaciones básicas. *Procedimental:* Utiliza los algoritmos de operaciones aritméticas *Actitudinal*: Aprenda por iniciativa e interés propio a lo largo del curso.
	1.3 Emplea los algoritmos de las operaciones aritméticas en solución de problemas de su ámbito personal, social y global.	*Conceptual:* Concepto y propiedades de las proporciones. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor. Notación científica y operaciones. *Procedimental:* Solución de problemas surgidos a partir de los conceptos señalados. *Actitudinal*: Aprenda por iniciativa e interés propio a lo largo del curso.
2. Utiliza conceptos, propiedades y relaciones algebraicas en la solución de ejercicios de su entorno académico.	2.1 Reconoce expresiones algebraicas, sus elementos y propiedades en operaciones con polinomios en su ámbito académico.	*Conceptual:* Conceptos y terminología algebraicos. Traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico. Algoritmos de las operaciones con polinomios. *Procedimental:* Solución de operaciones con polinomios. *Actitudinal*: Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
	2.2 Identifica productos notables y la factorización de expresiones algebraicas en un ambiente matemático.	*Conceptual:* Productos notables y métodos de factorización. *Procedimental:* Desarrolla productos notables y métodos de factorización. *Actitudinal*: Aprenda por iniciativa e interés propio a lo largo

SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA
INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

Fig. B.4. Programa sintético de unidad didáctica 1 de álgebra del CECYT 9 – IPN.

En el programa de CCH-UNAM, al igual en el programa del CECYT 9-IPN, se aborda en la primera unidad didáctica, la comprensión del significado de los números y sus operaciones básicas, en el que se agrega además, un apartado del manejo de operaciones con números racionales, como puede observarse en la figura B.5, B.6 y B.7. Lo que nos permite suponer que los alumnos que ingresan al nivel medio superior aún presentan deficiencias en cuanto al dominio de la aritmética básica, entre ellas el desarrollo de operaciones con fracciones y su respectiva comprensión.



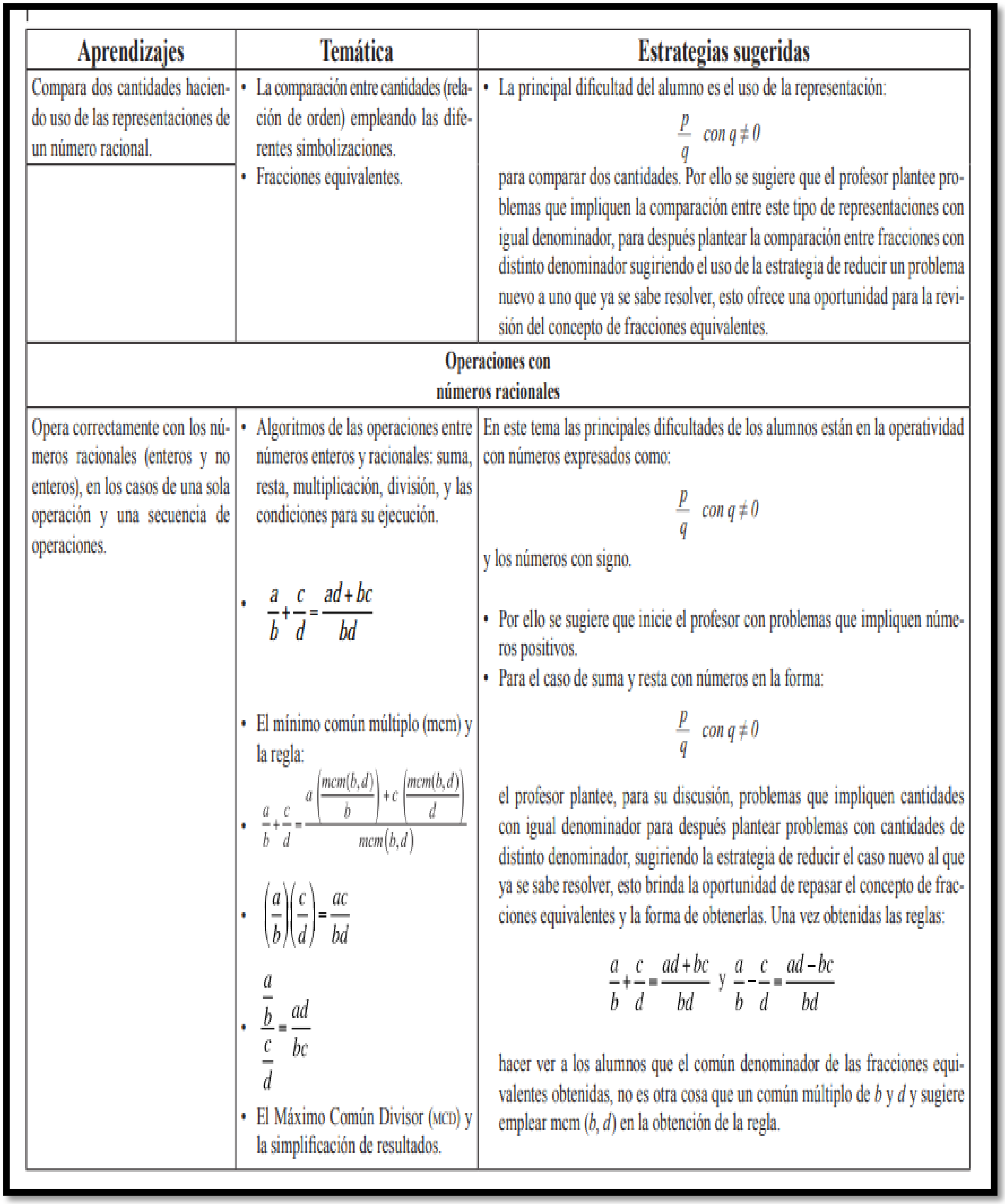
Matemáticas I

Unidad 1. El significado de los números y sus operaciones básicas

Propósito: Al finalizar, el alumno: Será capaz de operar con los números racionales (enteros y no enteros) y resolver problemas aritméticos, aplicando algunas heurísticas para facilitar la comprensión, la búsqueda de un plan de resolución y su ejecución, con la finalidad de que haga suyos los recursos básicos para iniciarse en el uso del lenguaje algebraico para expresar la generalidad.	Tiempo: 30 horas

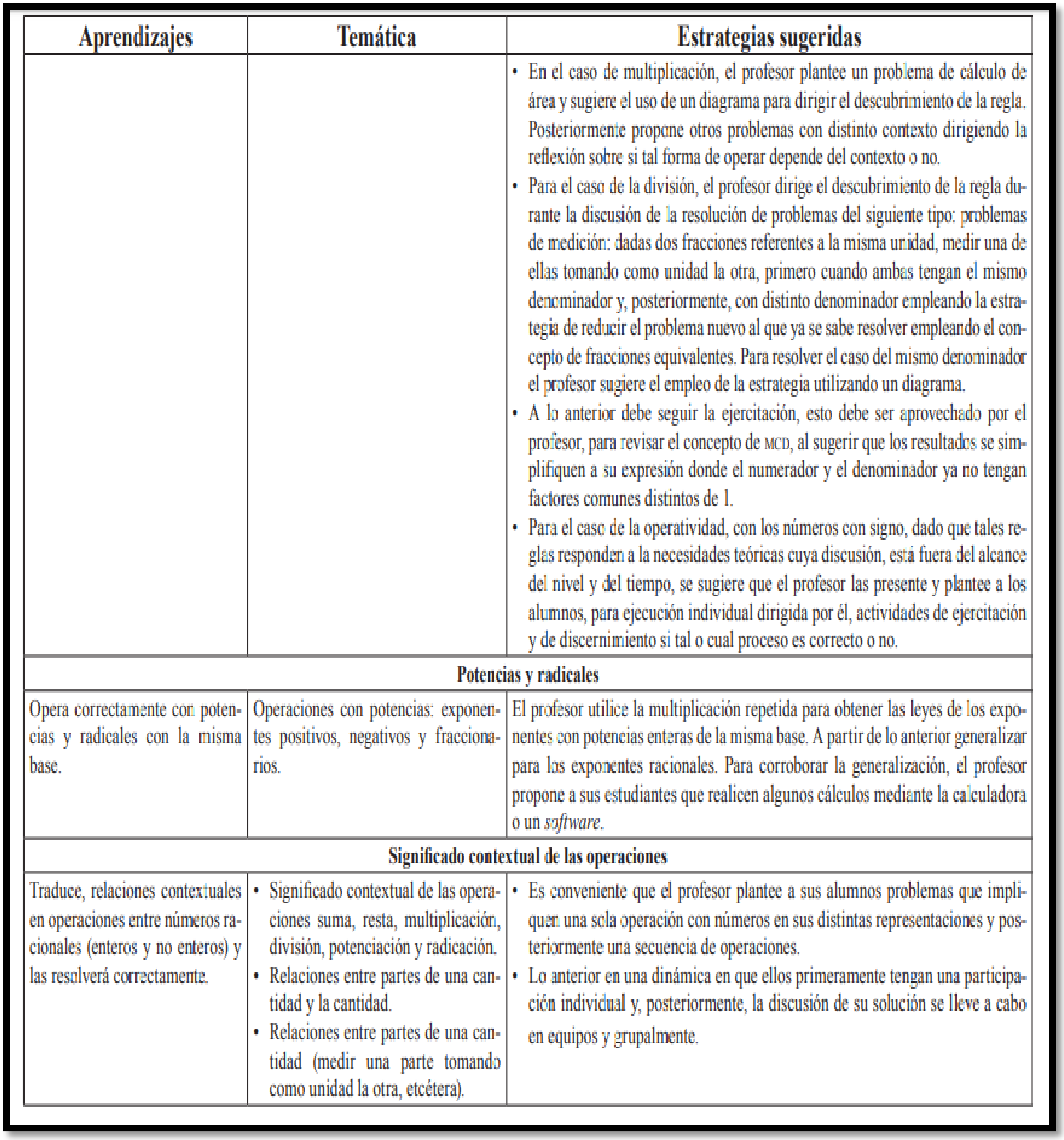
Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:		Se sugiere que el profesor organice las actividades de aprendizaje procurando, en un primer momento, la participación individual y posteriormente por equipos y grupal, en un escenario de resolución de problemas.
Significado de los números reales y su simbolización		
Comprende el significado de los números reales.	Significado de los números racionales $\mathbb{Q}$ (enteros $\mathbb{Z}$ y no enteros) e irracionales $\mathbb{I}$.	• El profesor plantee a discusión con el grupo el significado de un número, como expresión de la medida de una magnitud a través de haber determinado una unidad (no se trata de exponer el significado puramente matemático de lo que es un número sino a través de algunos de sus significados concretos). • Para ello, el profesor puede plantear actividades de medición, por ejemplo: *a)* La unidad cabe un número exacto de veces en la magnitud por medir (número natural). *b)* La unidad no cabe un número exacto de veces, pero sí una subunidad (número racional en sus diferentes representaciones). *c)* La unidad no cabe un número exacto de veces ni tampoco cualquier subunidad (número irracional). • Para el significado de los números negativos, el profesor plantee la problemática de la medición de la temperatura y en general el de la medición de magnitudes no absolutas que impliquen el establecimiento de un cero relativo.
Usa correctamente las diversas simbolizaciones de un número racional, transitando entre sus equivalencias (cuando sea necesario) en problemas puramente aritméticos y en contexto.	Las diversas simbolizaciones de un número racional y sus equivalencias: fracción (parte de un todo), decimal, porcentaje.	Se sugiere que el profesor plantee a los alumnos problemas en donde intervengan diversas formas de representación de un número racional y aproveche tal situación para discutir las equivalencias.

Fig. B.5. Programa de Unidad 1 de Matemáticas de primer semestre de CCH-UNAM.



Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Compara dos cantidades haciendo uso de las representaciones de un número racional.	• La comparación entre cantidades (relación de orden) empleando las diferentes simbolizaciones. • Fracciones equivalentes.	• La principal dificultad del alumno es el uso de la representación: $\frac{p}{q}$ *con* $q \neq 0$ para comparar dos cantidades. Por ello se sugiere que el profesor plantee problemas que impliquen la comparación entre este tipo de representaciones con igual denominador, para después plantear la comparación entre fracciones con distinto denominador sugiriendo el uso de la estrategia de reducir un problema nuevo a uno que ya se sabe resolver, esto ofrece una oportunidad para la revisión del concepto de fracciones equivalentes.
Operaciones con números racionales		
Opera correctamente con los números racionales (enteros y no enteros), en los casos de una sola operación y una secuencia de operaciones.	• Algoritmos de las operaciones entre números enteros y racionales: suma, resta, multiplicación, división, y las condiciones para su ejecución. • $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ • El mínimo común múltiplo (mcm) y la regla: • $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\left(\frac{mcm(b,d)}{b}\right)+c\left(\frac{mcm(b,d)}{d}\right)}{mcm(b,d)}$ • $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{ac}{bd}$ • $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}$ • El Máximo Común Divisor (MCD) y la simplificación de resultados.	En este tema las principales dificultades de los alumnos están en la operatividad con números expresados como: $\frac{p}{q}$ *con* $q \neq 0$ y los números con signo. • Por ello se sugiere que inicie el profesor con problemas que impliquen números positivos. • Para el caso de suma y resta con números en la forma: $\frac{p}{q}$ *con* $q \neq 0$ el profesor plantee, para su discusión, problemas que impliquen cantidades con igual denominador para después plantear problemas con cantidades de distinto denominador, sugiriendo la estrategia de reducir el caso nuevo al que ya se sabe resolver, esto brinda la oportunidad de repasar el concepto de fracciones equivalentes y la forma de obtenerlas. Una vez obtenidas las reglas: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ y $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$ hacer ver a los alumnos que el común denominador de las fracciones equivalentes obtenidas, no es otra cosa que un común múltiplo de *b* y *d* y sugiere emplear mcm (*b*, *d*) en la obtención de la regla.

Fig. B.6. Programa de CCH-UNAM que incluye operaciones con racionales en la unidad didáctica 1.



Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
		• En el caso de multiplicación, el profesor plantee un problema de cálculo de área y sugiere el uso de un diagrama para dirigir el descubrimiento de la regla. Posteriormente propone otros problemas con distinto contexto dirigiendo la reflexión sobre si tal forma de operar depende del contexto o no. • Para el caso de la división, el profesor dirige el descubrimiento de la regla durante la discusión de la resolución de problemas del siguiente tipo: problemas de medición: dadas dos fracciones referentes a la misma unidad, medir una de ellas tomando como unidad la otra, primero cuando ambas tengan el mismo denominador y, posteriormente, con distinto denominador empleando la estrategia de reducir el problema nuevo al que ya se sabe resolver empleando el concepto de fracciones equivalentes. Para resolver el caso del mismo denominador el profesor sugiere el empleo de la estrategia utilizando un diagrama. • A lo anterior debe seguir la ejercitación, esto debe ser aprovechado por el profesor, para revisar el concepto de MCD, al sugerir que los resultados se simplifiquen a su expresión donde el numerador y el denominador ya no tengan factores comunes distintos de 1. • Para el caso de la operatividad, con los números con signo, dado que tales reglas responden a la necesidades teóricas cuya discusión, está fuera del alcance del nivel y del tiempo, se sugiere que el profesor las presente y plantee a los alumnos, para ejecución individual dirigida por él, actividades de ejercitación y de discernimiento si tal o cual proceso es correcto o no.
Potencias y radicales		
Opera correctamente con potencias y radicales con la misma base.	Operaciones con potencias: exponentes positivos, negativos y fraccionarios.	El profesor utilice la multiplicación repetida para obtener las leyes de los exponentes con potencias enteras de la misma base. A partir de lo anterior generalizar para los exponentes racionales. Para corroborar la generalización, el profesor propone a sus estudiantes que realicen algunos cálculos mediante la calculadora o un *software*.
Significado contextual de las operaciones		
Traduce, relaciones contextuales en operaciones entre números racionales (enteros y no enteros) y las resolverá correctamente.	• Significado contextual de las operaciones suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación. • Relaciones entre partes de una cantidad y la cantidad. • Relaciones entre partes de una cantidad (medir una parte tomando como unidad la otra, etcétera).	• Es conveniente que el profesor plantee a sus alumnos problemas que impliquen una sola operación con números en sus distintas representaciones y posteriormente una secuencia de operaciones. • Lo anterior en una dinámica en que ellos primeramente tengan una participación individual y, posteriormente, la discusión de su solución se lleve a cabo en equipos y grupalmente.

Fig. B.7. Continuación del programa de la unidad 1 de CCH-UNAM sobre operaciones con números racionales.

Esta información fue tomada de la página electrónica del CECYT 9-IPN http://coatl.cecyt9.ipn.mx/ofertaEducativa/planes/basica/Algebra.pdf fecha de consulta septiembre-2017 y de la página electrónica del CCH- UNAM Programas de estudio

https://www.cch.unam.mx/sites/default/files/programas2016/MATEMATICAS-I-IV.pdf fecha de consulta diciembre-2017.

APÉNDICE C

Cuestionario de exploración aplicado a estudiantes del CONALEP

Tuvimos la oportunidad de aplicar a estudiantes del Colegio Nacional de Educación Profesional Técnica (CONALEP), el cuestionario inicial de exploración diseñado para la investigación en estudiantes de secundaria, al cual le hicimos algunas pequeñas modificaciones y agregamos tareas de división de fracciones, considerando que el nivel académico de los estudiantes era mayor.

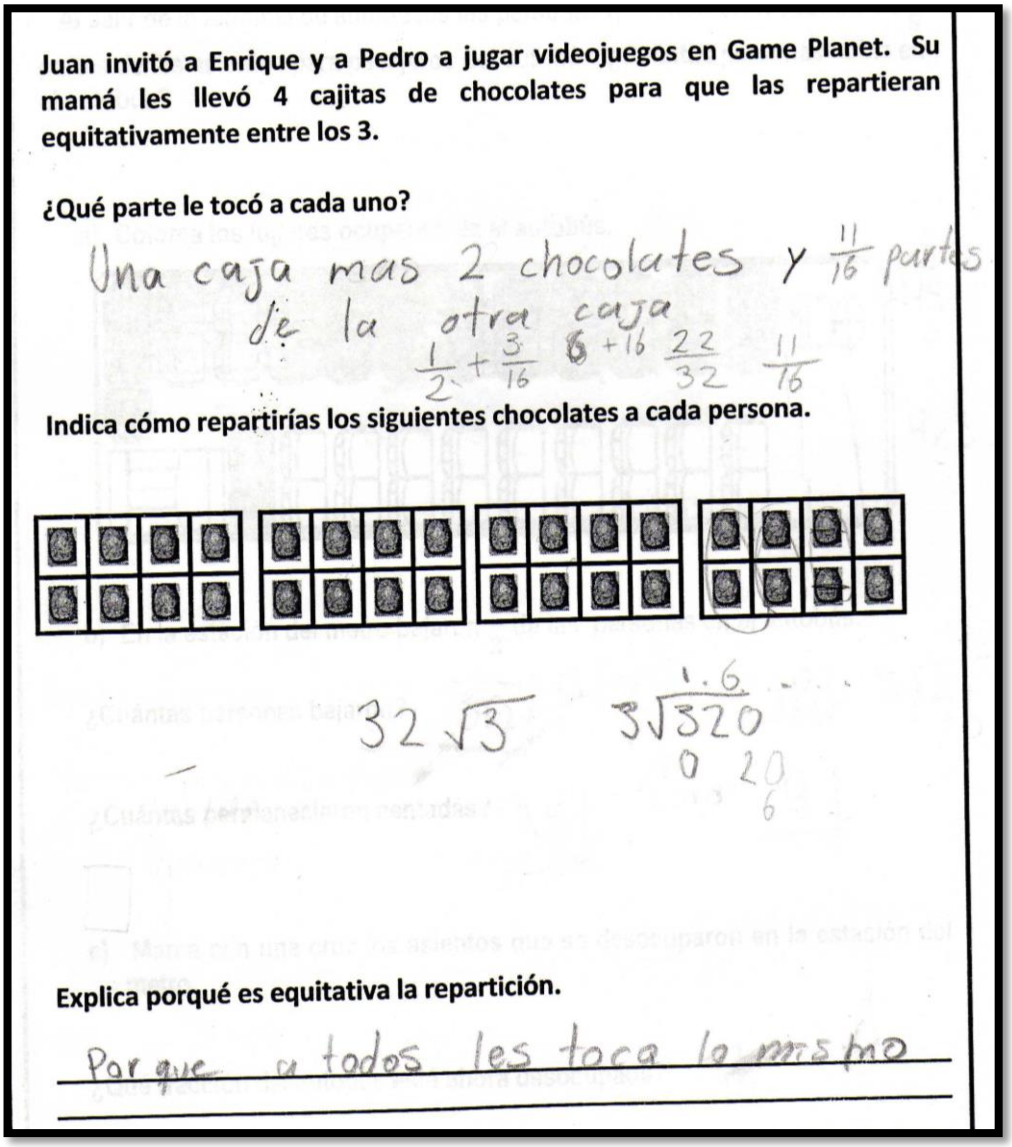
El objetivo de la aplicación era observar si los estudiantes de este nivel desarrollaban adecuadamente la resolución de problemas con números fraccionarios o si presentaban las mismas dificultades que los estudiantes de secundaria.

El cuestionario presentado a estos estudiantes se conformó de quince tareas, de las cuáles nueve fueron tomadas del cuestionario inicial de exploración y se agregaron seis tareas distintas, tomadas de los diseños realizados inicialmente, algunas de ellas consideradas con un nivel de dificultad mayor. De esas quince tareas, cuatro fueron de multiplicación y cinco de división de fracciones.

Se consideró realizar las mismas observaciones realizadas con los estudiantes de secundaria, se pretendía identificar lo siguiente:

- Modos de reparto.
- Reconstrucción del todo, representación pictórica de fracciones con diferentes denominadores.
- Equivalencia y orden.
- Representación pictórica de operaciones con fracciones.
- Empleo de algoritmos.
- Invención de problemas.
- Identificación de partes de partes mediante distintos modos de representación.
- Identificación de la preposición “de”
- División partitiva, empleando enteros que conduzcan a respuesta en fracción, resolución de división sin el empleo de un algoritmo.
- División cuotativa. Empleo de algoritmo de división de fracciones y determinación del sobrante.

Las tareas aplicadas y su resolución por parte de los estudiantes de CONALEP se muestran en las siguientes figuras, que consideran de la C.1, a la C.15, de acuerdo al orden en que se les presentaron a los estudiantes.



Juan invitó a Enrique y a Pedro a jugar videojuegos en Game Planet. Su mamá les llevó 4 cajitas de chocolates para que las repartieran equitativamente entre los 3.

¿Qué parte le tocó a cada uno?

Una caja mas 2 chocolates y $\frac{11}{16}$ partes de la otra caja

$\frac{1}{2} + \frac{3}{16}$ 6 + 16 $\frac{22}{32}$ $\frac{11}{16}$

Indica cómo repartirías los siguientes chocolates a cada persona.

32 $\sqrt{3}$

$3\overline{)320}$ 1.6

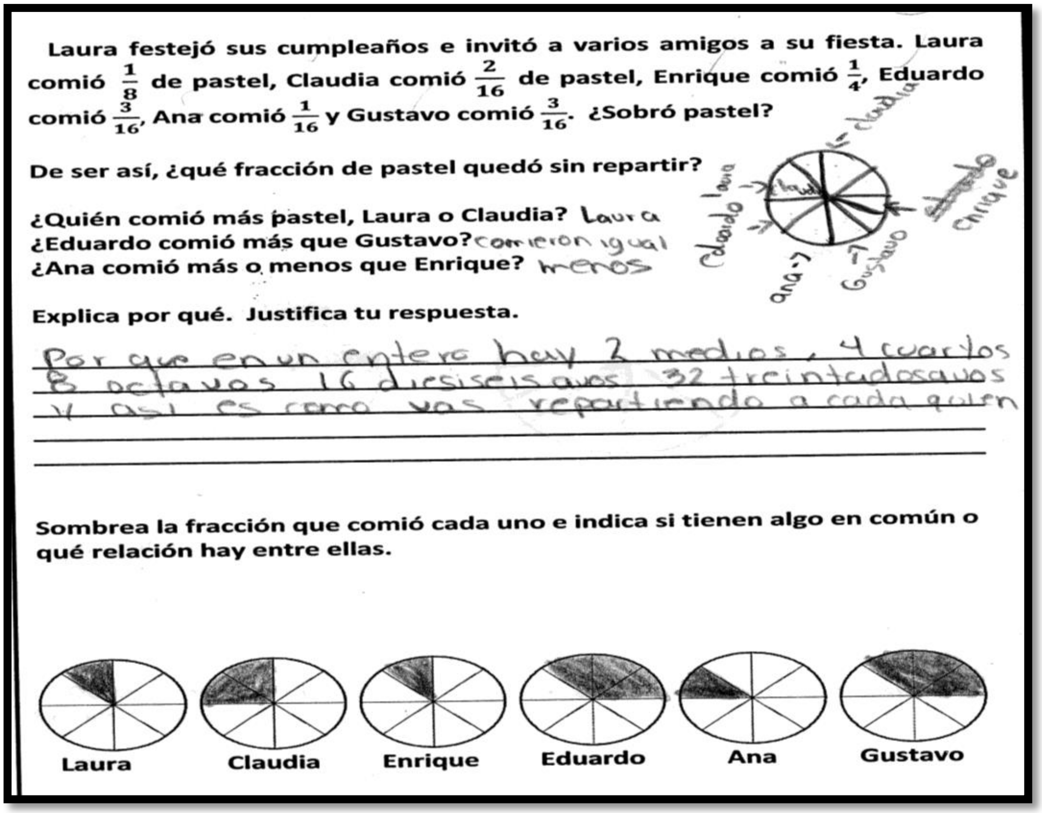
0 20

6

Explica porqué es equitativa la repartición.

Por que a todos les toca lo mismo

Fig. C.1. Problema de reparto del cuestionario presentado a estudiantes de CONALEP.



Laura festejó sus cumpleaños e invitó a varios amigos a su fiesta. Laura comió $\frac{1}{8}$ de pastel, Claudia comió $\frac{2}{16}$ de pastel, Enrique comió $\frac{1}{4}$, Eduardo comió $\frac{3}{16}$, Ana comió $\frac{1}{16}$ y Gustavo comió $\frac{3}{16}$. ¿Sobró pastel?

De ser así, ¿qué fracción de pastel quedó sin repartir?

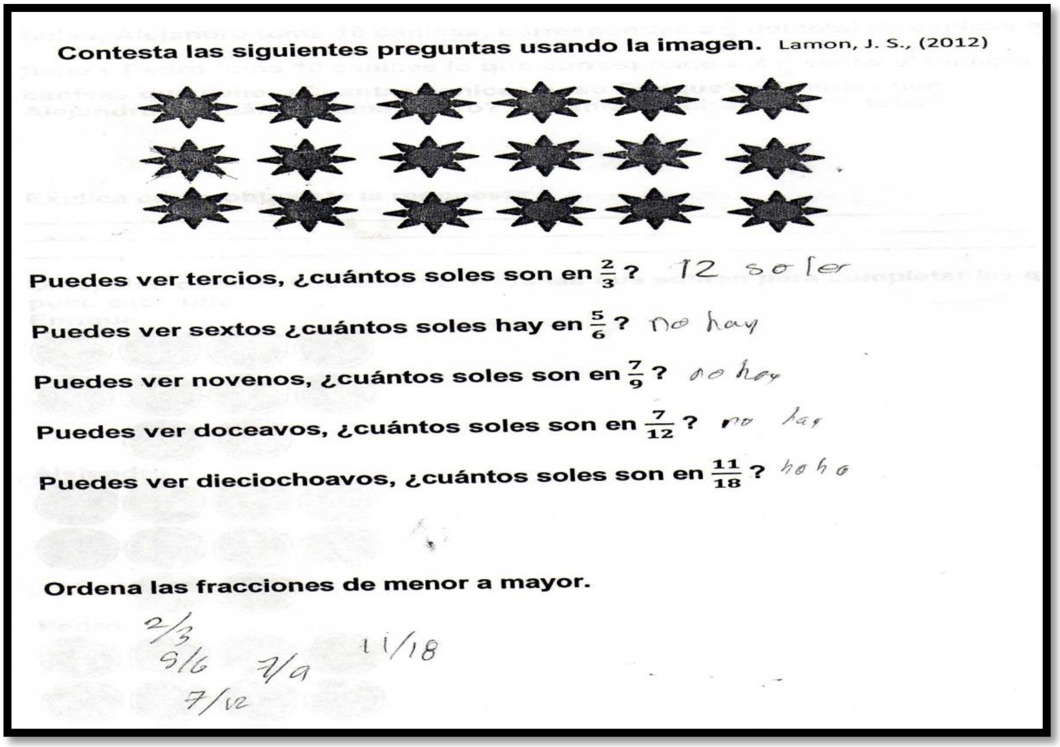
¿Quién comió más pastel, Laura o Claudia? Laura
¿Eduardo comió más que Gustavo? comieron igual
¿Ana comió más o menos que Enrique? menos

Explica por qué. Justifica tu respuesta.

Por que en un entero hay 2 medios, 4 cuartos 8 octavos 16 diesiseisavos 32 treintadosavos y así es como vas repartiendo a cada quien

Sombrea la fracción que comió cada uno e indica si tienen algo en común o qué relación hay entre ellas.

Fig. C.2. Identificación de fracciones con distinto denominador y reconstrucción del todo.



Contesta las siguientes preguntas usando la imagen. Lamon, J. S., (2012)

Puedes ver tercios, ¿cuántos soles son en $\frac{2}{3}$? 12 soler

Puedes ver sextos ¿cuántos soles hay en $\frac{5}{6}$? no hay

Puedes ver novenos, ¿cuántos soles son en $\frac{7}{9}$? no hay

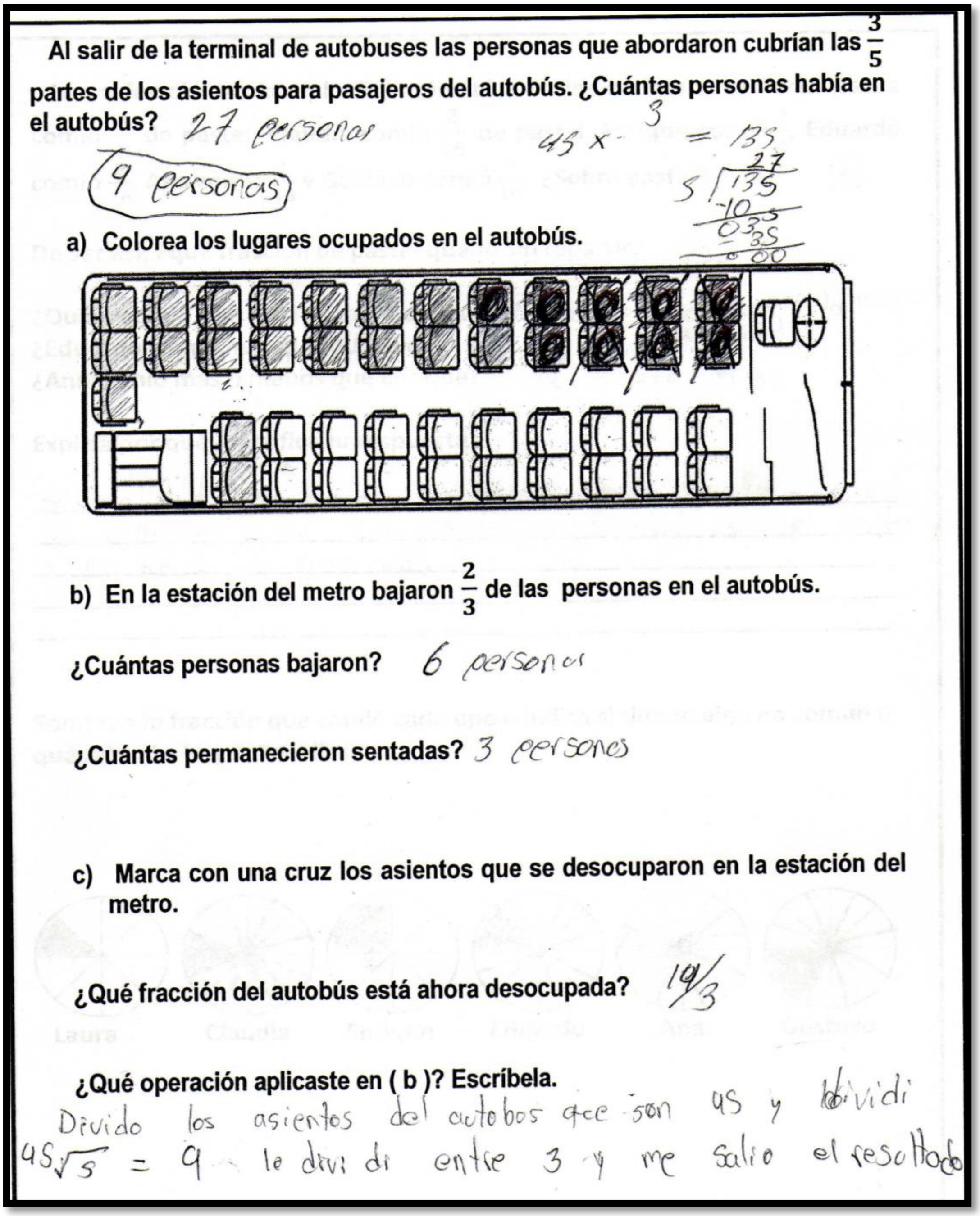
Puedes ver doceavos, ¿cuántos soles son en $\frac{7}{12}$? no hay

Puedes ver dieciochoavos, ¿cuántos soles son en $\frac{11}{18}$? hoho

Ordena las fracciones de menor a mayor.

2/3
5/6 7/9 11/18
7/12

Fig. C.3. Identificación de fracciones modificando la unidad.



Al salir de la terminal de autobuses las personas que abordaron cubrían las $\frac{3}{5}$ partes de los asientos para pasajeros del autobús. ¿Cuántas personas había en el autobús? 27 personas

9 personas

$45 \times 3 = 135$

$$\begin{array}{r} 27 \\ 5\overline{)135} \\ -10 \\ \hline 035 \\ 35 \\ \hline 00 \end{array}$$

a) Colorea los lugares ocupados en el autobús.

b) En la estación del metro bajaron $\frac{2}{3}$ de las personas en el autobús.

¿Cuántas personas bajaron? 6 personas

¿Cuántas permanecieron sentadas? 3 personas

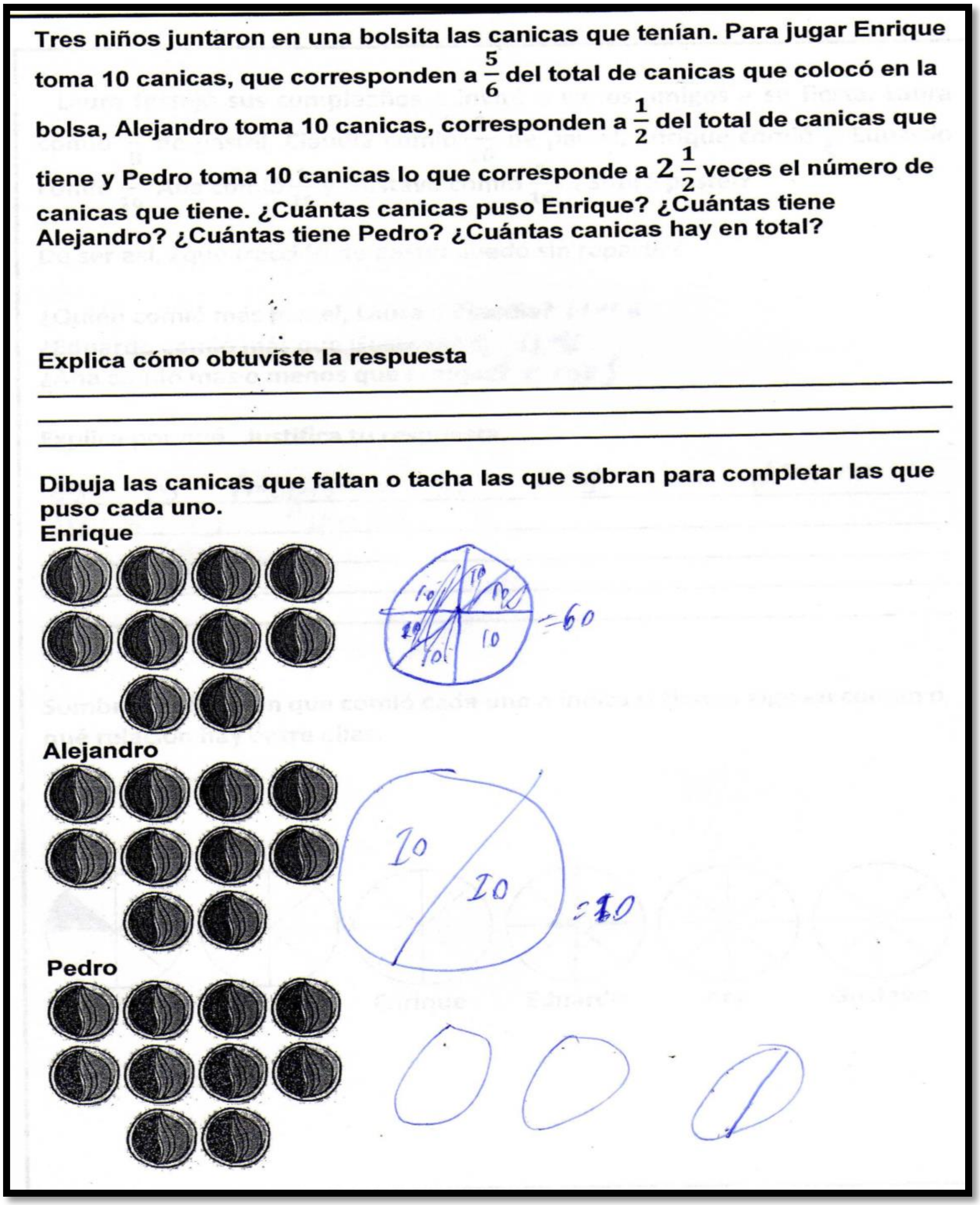
c) Marca con una cruz los asientos que se desocuparon en la estación del metro.

¿Qué fracción del autobús está ahora desocupada? 19/3

¿Qué operación aplicaste en (b)? Escríbela.

Divido los asientos del autobos que son 45 y dividi
$45\sqrt{5}$ = 9 le dividi entre 3 y me salio el resultado

Fig. C.4. Identificación de fracciones, suma, resta y reconstrucción del todo.



Tres niños juntaron en una bolsita las canicas que tenían. Para jugar Enrique toma 10 canicas, que corresponden a $\frac{5}{6}$ del total de canicas que colocó en la bolsa, Alejandro toma 10 canicas, corresponden a $\frac{1}{2}$ del total de canicas que tiene y Pedro toma 10 canicas lo que corresponde a $2\frac{1}{2}$ veces el número de canicas que tiene. ¿Cuántas canicas puso Enrique? ¿Cuántas tiene Alejandro? ¿Cuántas tiene Pedro? ¿Cuántas canicas hay en total?

Explica cómo obtuviste la respuesta

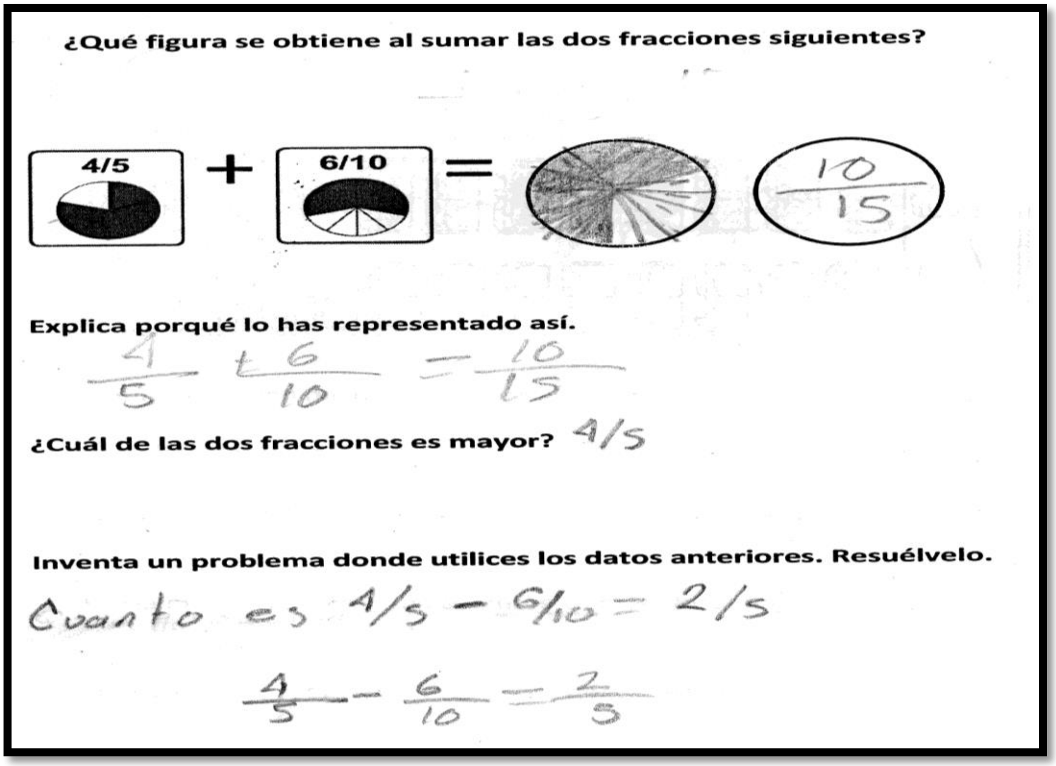
Dibuja las canicas que faltan o tacha las que sobran para completar las que puso cada uno.

Enrique

Alejandro

Pedro

Fig. C.5. Modificación de la unidad. (Reunitización).



¿Qué figura se obtiene al sumar las dos fracciones siguientes?

Explica porqué lo has representado así.

$\frac{4}{5} + \frac{6}{10} = \frac{10}{15}$

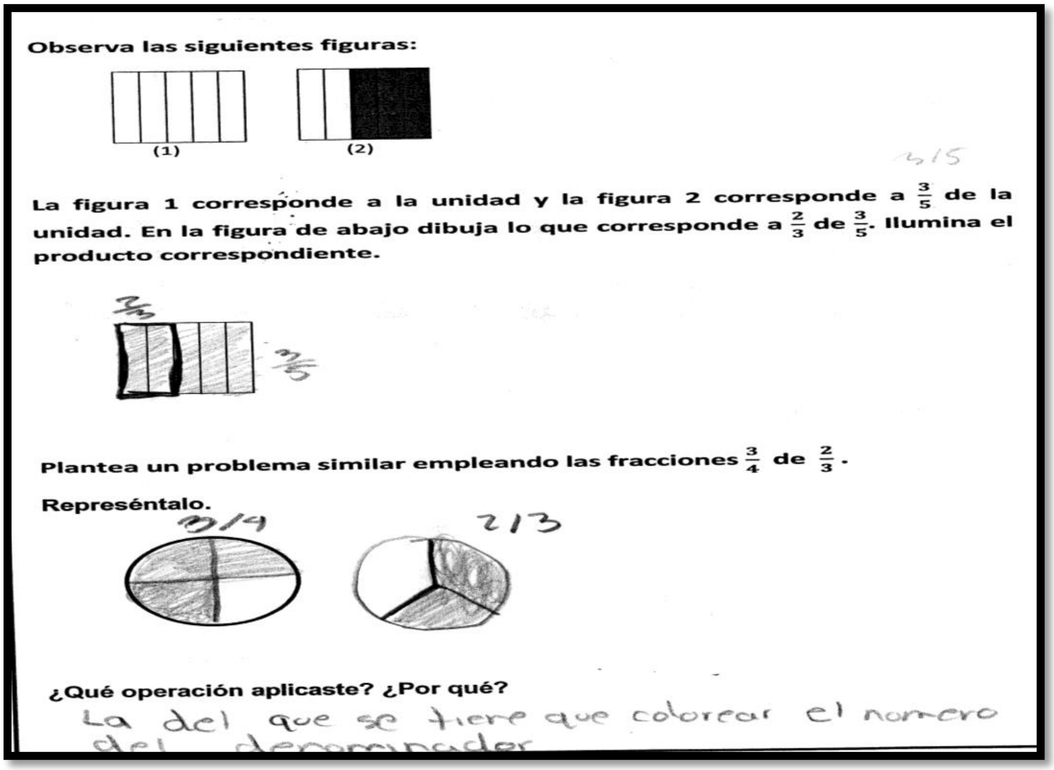
¿Cuál de las dos fracciones es mayor? 4/5

Inventa un problema donde utilices los datos anteriores. Resuélvelo.

Cuanto es 4/5 - 6/10 = 2/5

$\frac{4}{5} - \frac{6}{10} = \frac{2}{5}$

Fig. C.6. Suma de fracciones y su representación pictórica. Invención de problemas.



Observa las siguientes figuras:

La figura 1 corresponde a la unidad y la figura 2 corresponde a $\frac{3}{5}$ de la unidad. En la figura de abajo dibuja lo que corresponde a $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{5}$. Ilumina el producto correspondiente.

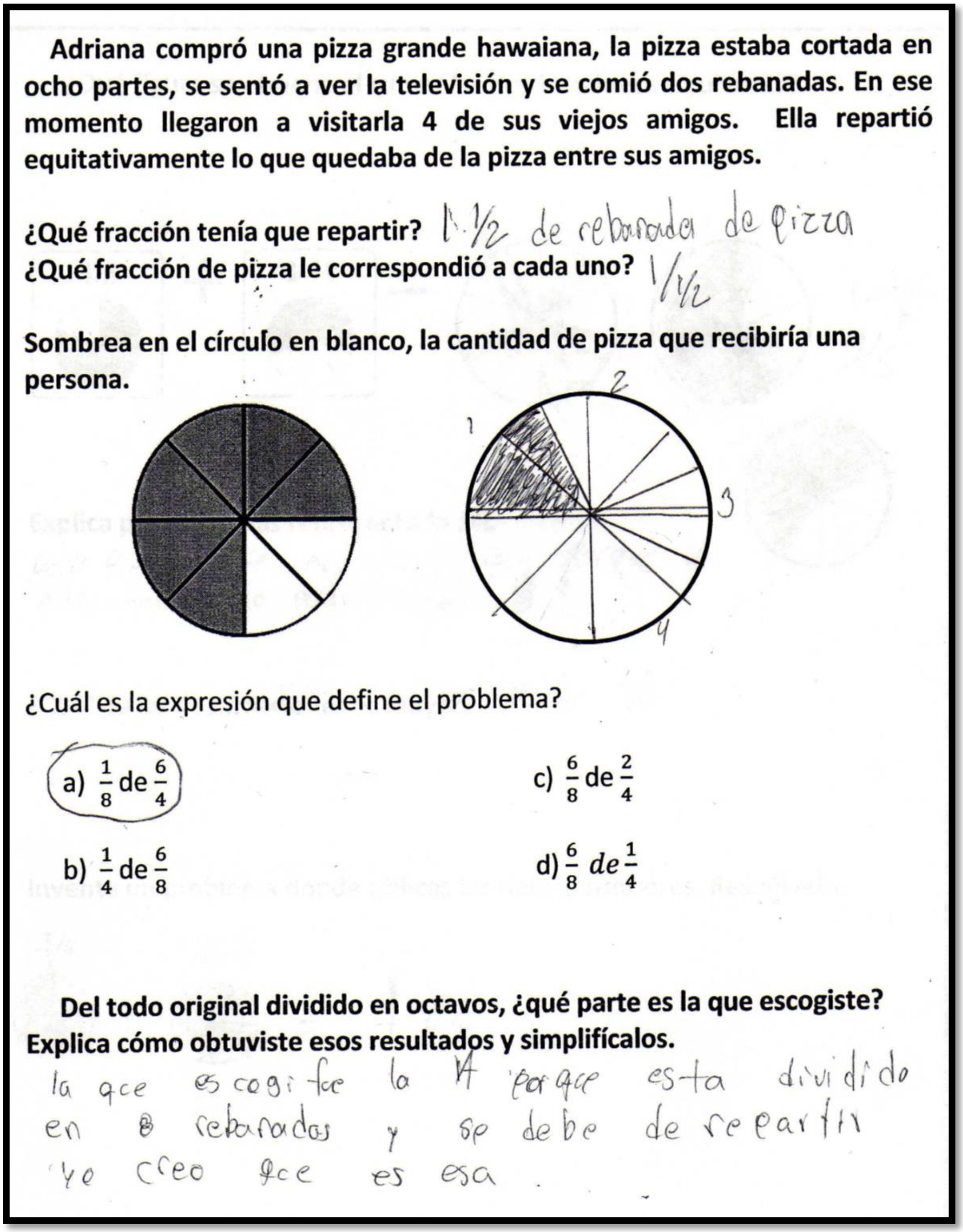
Plantea un problema similar empleando las fracciones $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$.

Represéntalo.

¿Qué operación aplicaste? ¿Por qué?

La del que se tiene que colorear el numero del denominador

Fig. C.7. Multiplicación de fracciones. Identificación de partes de partes y su representación pictórica.



Adriana compró una pizza grande hawaiana, la pizza estaba cortada en ocho partes, se sentó a ver la televisión y se comió dos rebanadas. En ese momento llegaron a visitarla 4 de sus viejos amigos. Ella repartió equitativamente lo que quedaba de la pizza entre sus amigos.

¿Qué fracción tenía que repartir? 1.1/2 de rebanada de pizza

¿Qué fracción de pizza le correspondió a cada uno? 1/1/2

Sombrea en el círculo en blanco, la cantidad de pizza que recibiría una persona.

¿Cuál es la expresión que define el problema?

[✓ a) $\frac{1}{8}$ de $\frac{6}{4}$]

c) $\frac{6}{8}$ de $\frac{2}{4}$

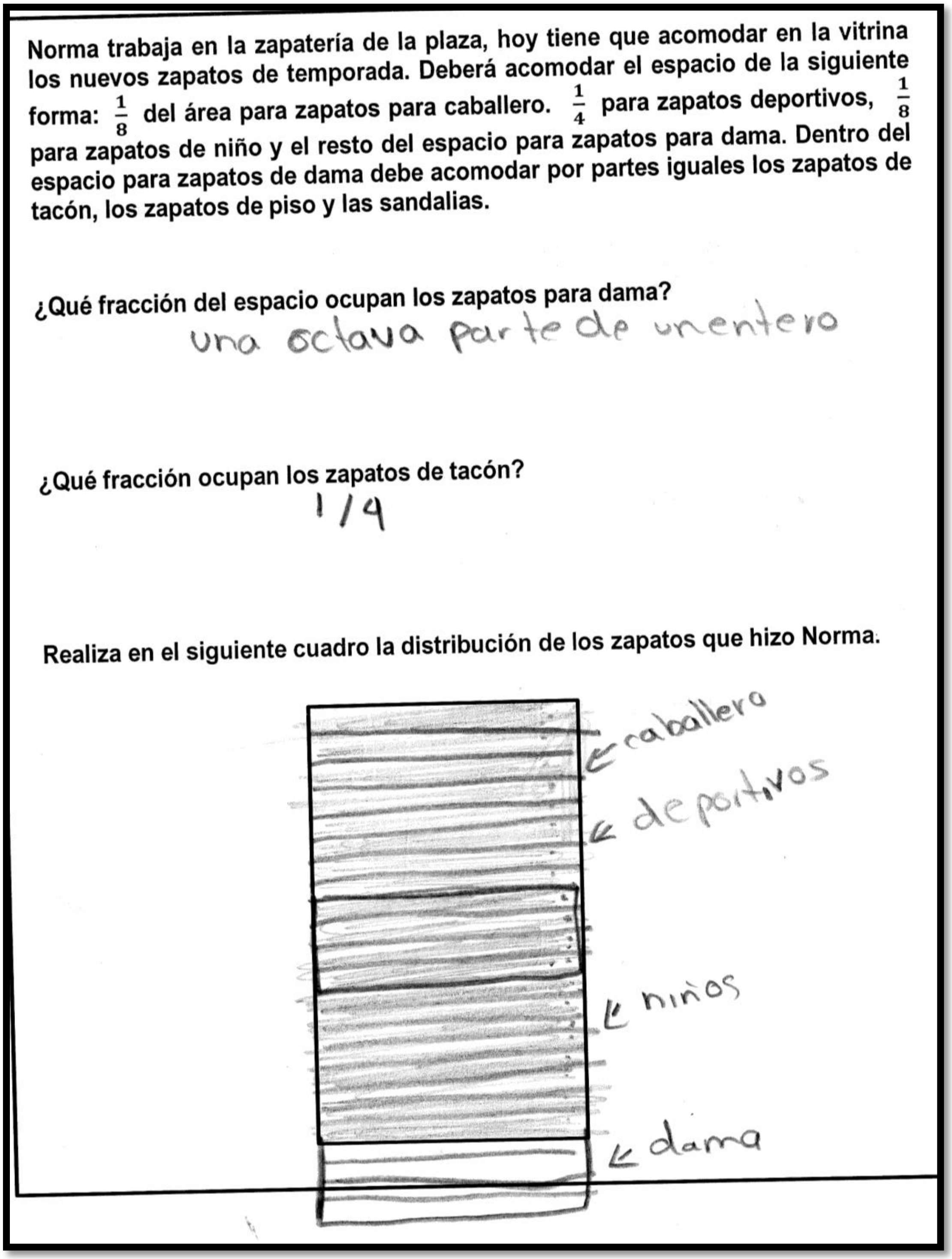
b) $\frac{1}{4}$ de $\frac{6}{8}$

d) $\frac{6}{8}$ $de\frac{1}{4}$

Del todo original dividido en octavos, ¿qué parte es la que escogiste? Explica cómo obtuviste esos resultados y simplifícalos.

la qce escogi fue la 1/4 porqce esta dividido en 8 rebanadas y se debe de repartir yo creo qce es esa .

Fig. C.8. Multiplicación de fracciones. Identificación de la preposición "de".



Norma trabaja en la zapatería de la plaza, hoy tiene que acomodar en la vitrina los nuevos zapatos de temporada. Deberá acomodar el espacio de la siguiente forma: $\frac{1}{8}$ del área para zapatos para caballero. $\frac{1}{4}$ para zapatos deportivos, $\frac{1}{8}$ para zapatos de niño y el resto del espacio para zapatos para dama. Dentro del espacio para zapatos de dama debe acomodar por partes iguales los zapatos de tacón, los zapatos de piso y las sandalias.

¿Qué fracción del espacio ocupan los zapatos para dama?

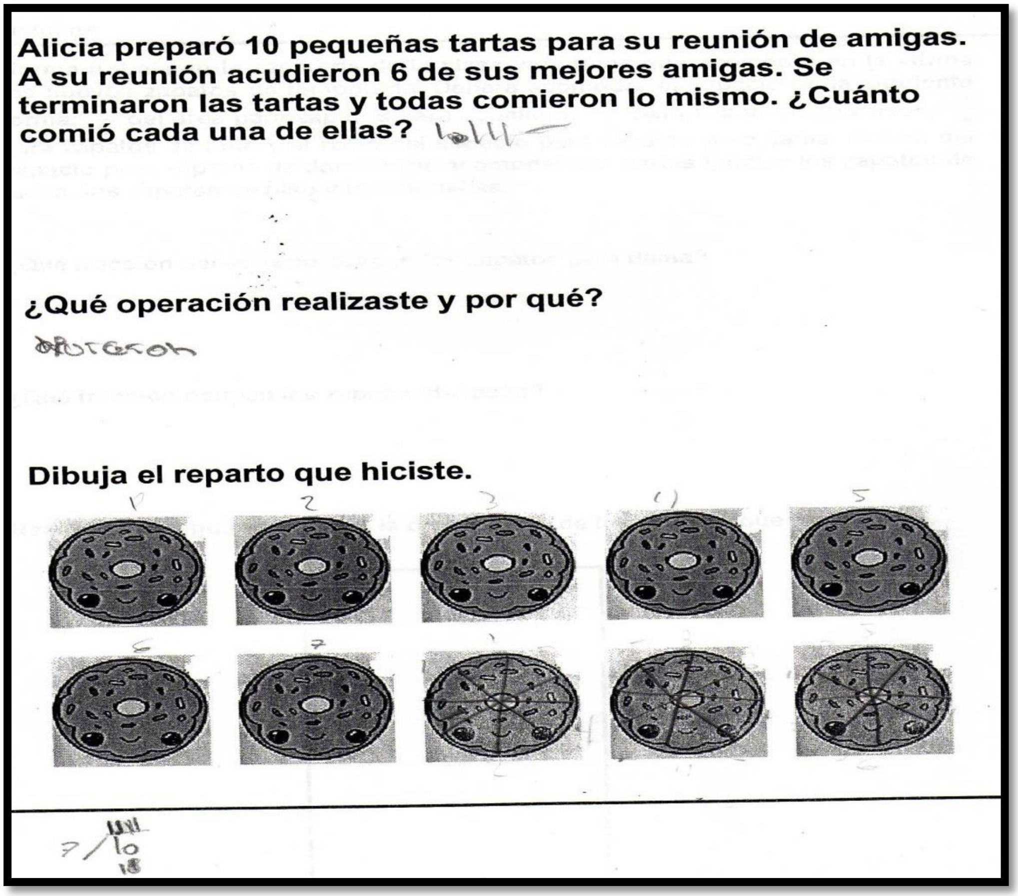
una octava parte de unentero

¿Qué fracción ocupan los zapatos de tacón?

1/4

Realiza en el siguiente cuadro la distribución de los zapatos que hizo Norma.

Fig. C.9. Multiplicación de fracciones mediante modelo de área.



Alicia preparó 10 pequeñas tartas para su reunión de amigas. A su reunión acudieron 6 de sus mejores amigas. Se terminaron las tartas y todas comieron lo mismo. ¿Cuánto comió cada una de ellas? 1 111

¿Qué operación realizaste y por qué?

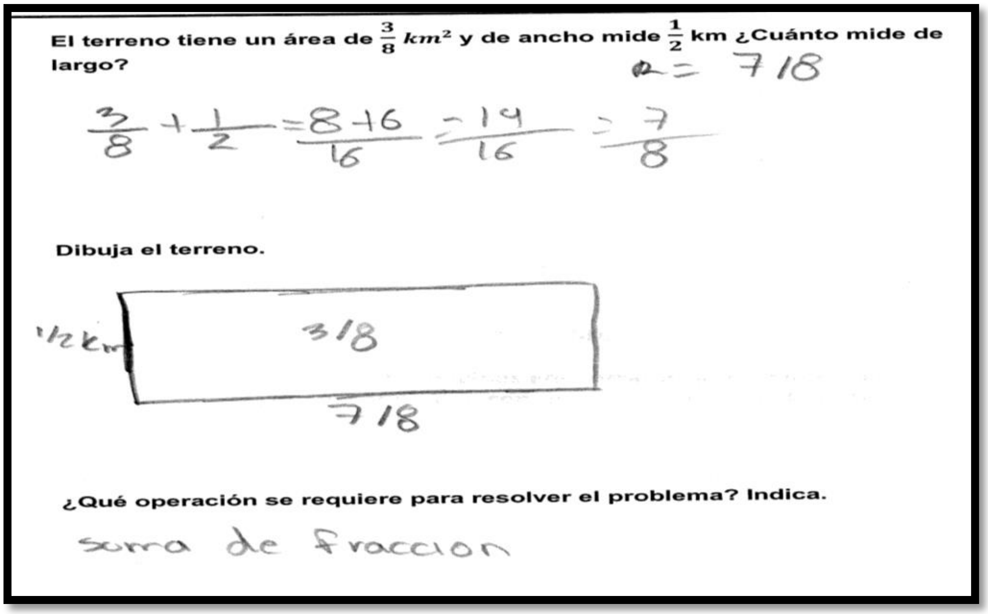
Division

Dibuja el reparto que hiciste.

7/10

18

Fig. C.10. División partitiva. Modos de reparto.



El terreno tiene un área de $\frac{3}{8}$ km^2 y de ancho mide $\frac{1}{2}$ km ¿Cuánto mide de largo? = 7/8

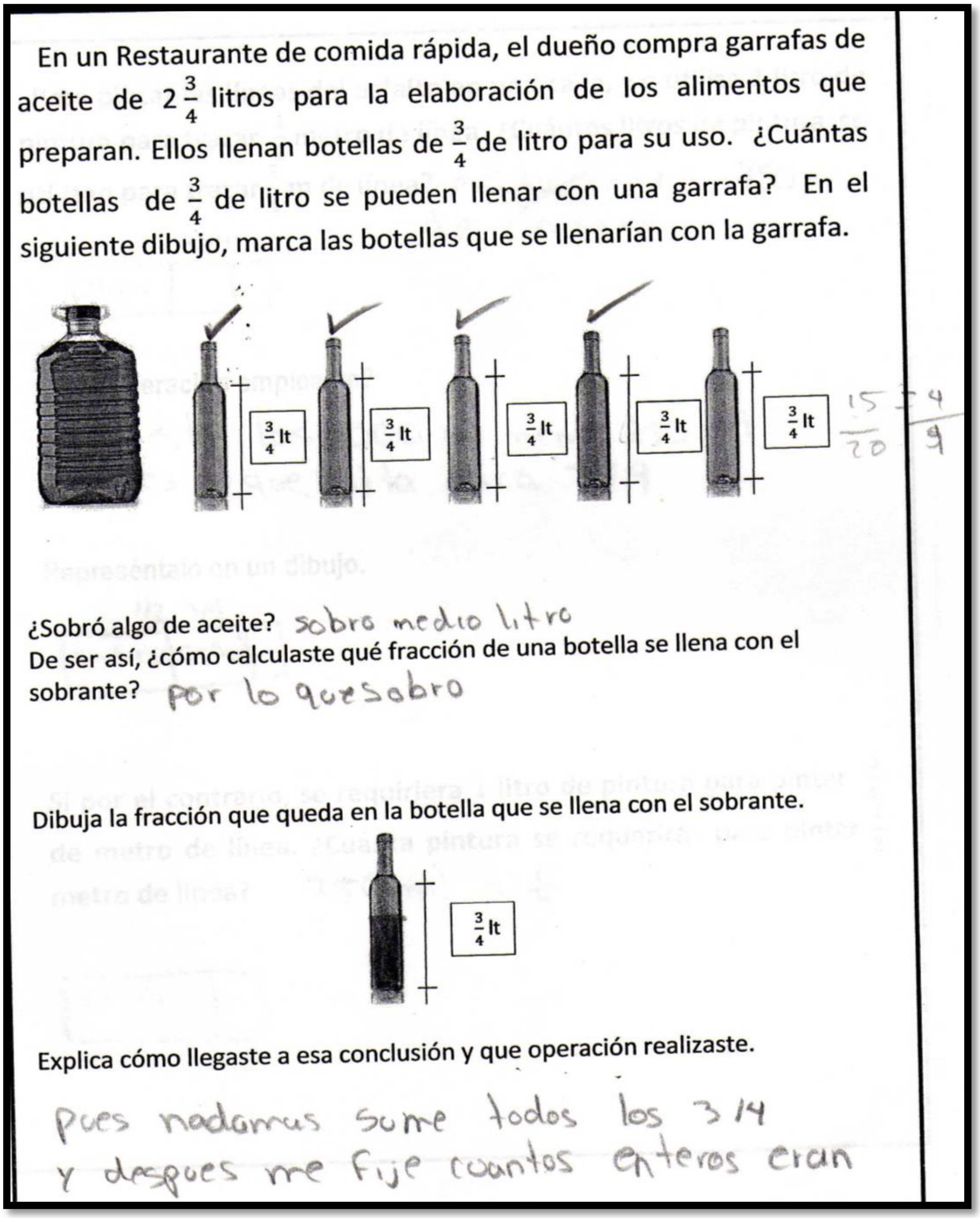
$\frac{3}{8}+\frac{1}{2}=\frac{8+16}{16}=\frac{14}{16}=\frac{7}{8}$

Dibuja el terreno.

¿Qué operación se requiere para resolver el problema? Indica.

suma de fraccion

Fig. C.11. División de fracciones considerando el inverso del producto de medida.



En un Restaurante de comida rápida, el dueño compra garrafas de aceite de $2\frac{3}{4}$ litros para la elaboración de los alimentos que preparan. Ellos llenan botellas de $\frac{3}{4}$ de litro para su uso. ¿Cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ de litro se pueden llenar con una garrafa? En el siguiente dibujo, marca las botellas que se llenarían con la garrafa.

$\frac{15}{20} \div \frac{4}{9}$

¿Sobró algo de aceite? sobro medio litro

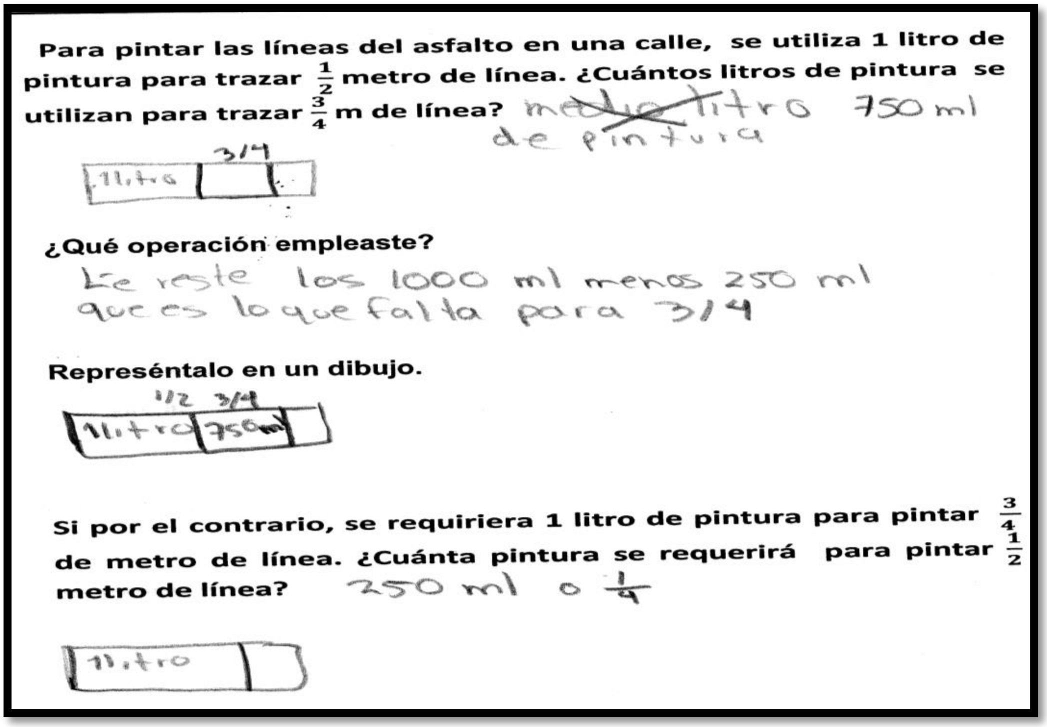
De ser así, ¿cómo calculaste qué fracción de una botella se llena con el sobrante? por lo quesobro

Dibuja la fracción que queda en la botella que se llena con el sobrante.

Explica cómo llegaste a esa conclusión y que operación realizaste.

pues nadamas sume todos los 3/4
y despues me fije cuantos enteros eran

Fig. C.12. División cuotativa. Identificación del residuo.



Para pintar las líneas del asfalto en una calle, se utiliza 1 litro de pintura para trazar $\frac{1}{2}$ metro de línea. ¿Cuántos litros de pintura se utilizan para trazar $\frac{3}{4}$ m de línea? ~~medio~~ litro 750 ml de pintura

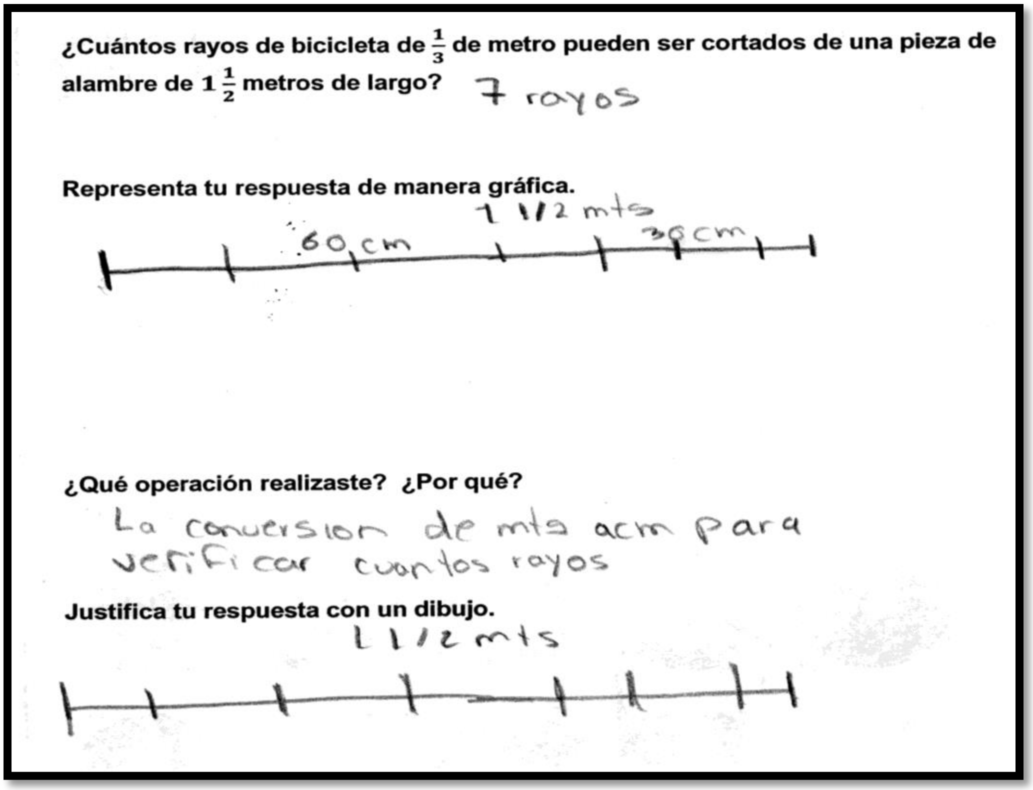
¿Qué operación empleaste?

Le reste los 1000 ml menos 250 ml que es lo que falta para 3/4

Represéntalo en un dibujo.

Si por el contrario, se requiriera 1 litro de pintura para pintar $\frac{3}{4}$ de metro de línea. ¿Cuánta pintura se requerirá para pintar $\frac{1}{2}$ metro de línea? 250 ml o $\frac{1}{4}$

Fig. C.13. Problema de división de fracciones empleando razón.



¿Cuántos rayos de bicicleta de $\frac{1}{3}$ de metro pueden ser cortados de una pieza de alambre de $1\frac{1}{2}$ metros de largo? 7 rayos

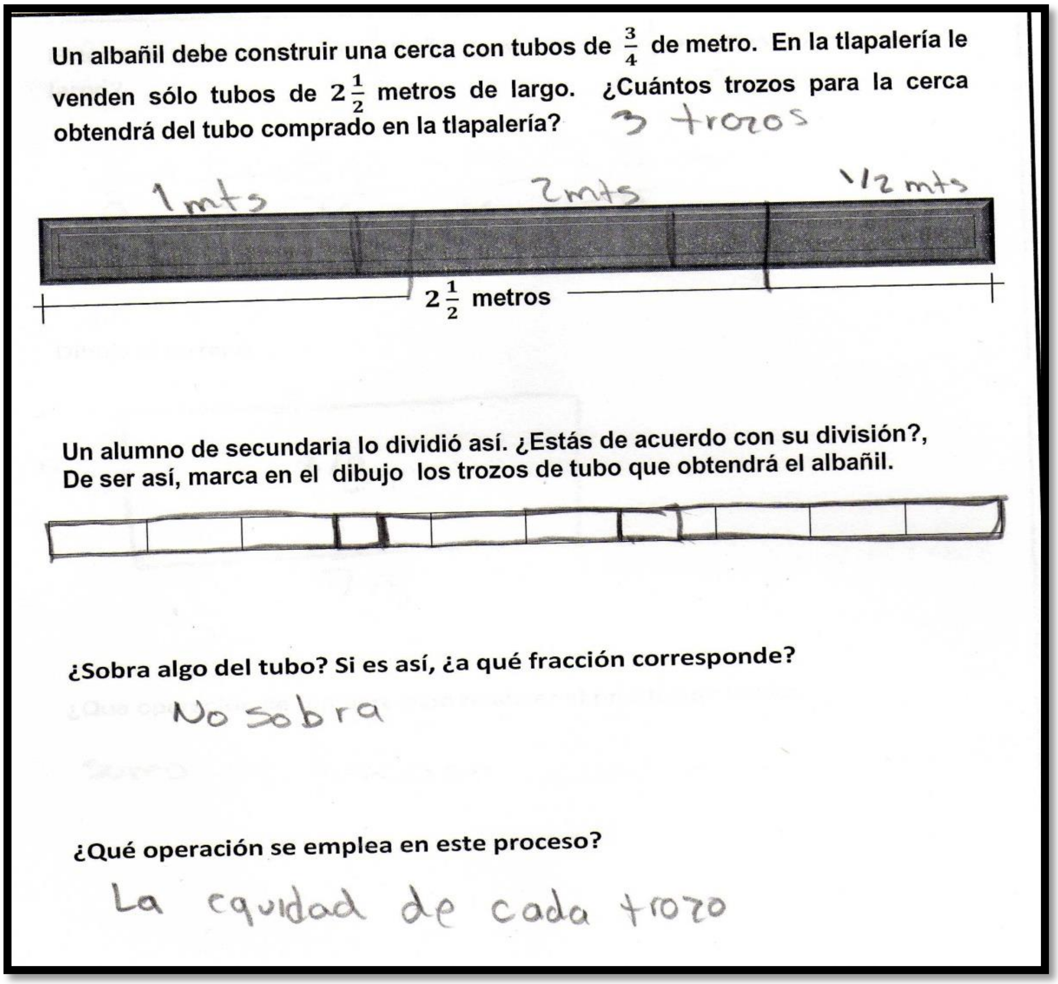
Representa tu respuesta de manera gráfica.

¿Qué operación realizaste? ¿Por qué?

La conversion de mts a cm para verificar cuantos rayos

Justifica tu respuesta con un dibujo.

Fig. C.14. División cuotativa, problema de razón.



Un albañil debe construir una cerca con tubos de $\frac{3}{4}$ de metro. En la tlapalería le venden sólo tubos de $2\frac{1}{2}$ metros de largo. ¿Cuántos trozos para la cerca obtendrá del tubo comprado en la tlapalería? 3 trozos

Un alumno de secundaria lo dividió así. ¿Estás de acuerdo con su división?, De ser así, marca en el dibujo los trozos de tubo que obtendrá el albañil.

¿Sobra algo del tubo? Si es así, ¿a qué fracción corresponde?

No sobra

¿Qué operación se emplea en este proceso?

La equidad de cada trozo

Fig. C.15. División cuotativa. Identificación del residuo. Representación pictórica

Posterior a la aplicación del cuestionario, se realiza un análisis general de las respuestas proporcionadas por los estudiantes de CONALEP, y se logra identificar que presentan dificultades similares a las observadas con los estudiantes de secundaria, en general se observa que tienen dificultad para realizar un reparto exhaustivo, ordenan fracciones considerando los números naturales, se observa imposibilidad para representar gráficamente la suma de fracciones, aplicación errónea de los algoritmos recurren al uso de naturales evitando las fracciones, dificultad para representar fracciones en la recta numérica, no logran realizar la reunitización, no identifican la preposición "de", dificultad en la división cuotativa y partitiva, no identifican tamaño ni número de agrupamientos no identifican el residuo, y los que lo identifican no lo expresan en función del divisor. Algunos llegan a responder de manera intuitiva solamente. En general no comprenden el significado y sentido de la multiplicación ni la división de fracciones.

APÉNDICE D

JUEGO DE FRACCIONES

INSTRUCCIONES

El jugador en turno hará girar la pirinola un par de veces para determinar 2 fracciones con las cuales deberá jugar, después lanzará el dado para determinar la operación a realizar, las opciones son suma (+), resta (-), multiplicación (x) o división (÷).

Una vez que se haya determinado las fracciones y la operación a realizar, tomará las diapositivas que correspondan a esas fracciones y procederá a realizar la operación indicada, como se explica a continuación:

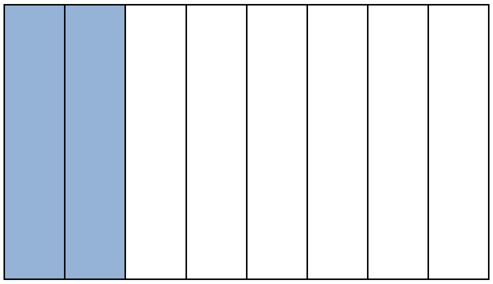
SUMA

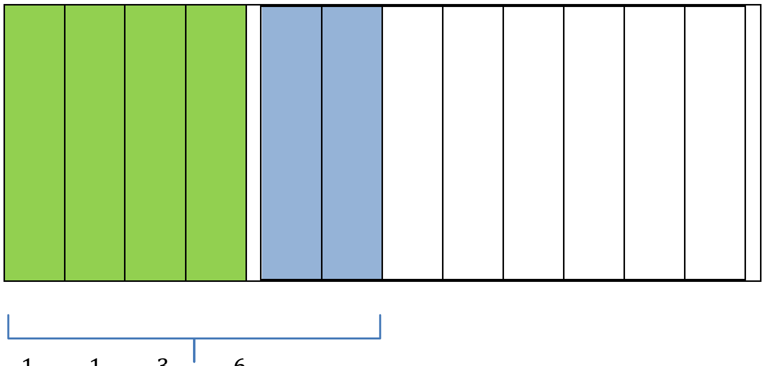
El jugador tomará las diapositivas marcadas en forma vertical de las fracciones que le corresponden, deberá colocar la segunda diapositiva sobre la primera, de manera que la segunda fracción empezará donde termina la primera y procederá a sumar ambas fracciones, como lo indica el siguiente ejemplo:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}$





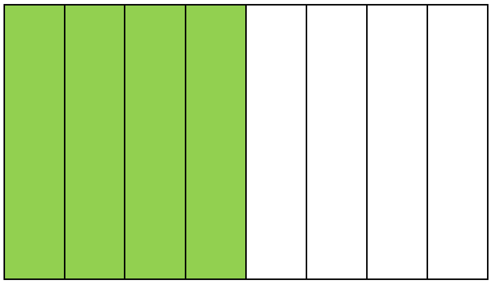
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad o \quad \frac{6}{8}$$

RESTA

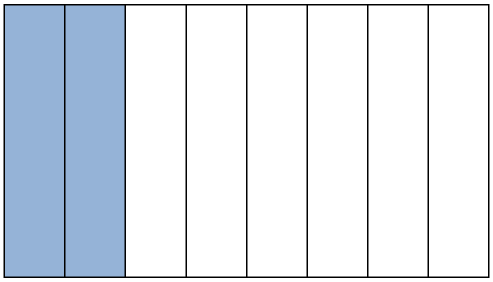
El jugador tomará las diapositivas marcadas en forma vertical de las fracciones que le corresponden, deberá colocar la segunda diapositiva sobre la primera, de manera que la segunda fracción se sobreponga sobre la primera y procederá a eliminar la parte en donde ambas fracciones se intersectan, como lo indica el siguiente ejemplo:

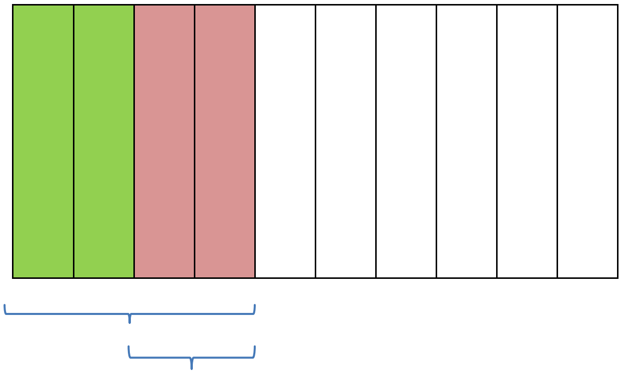
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$$

$\frac{1}{2}$



$\frac{1}{4}$





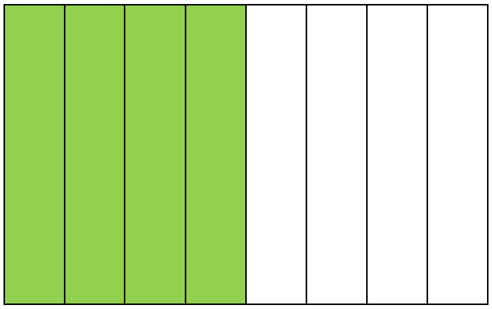
$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\ o\ \frac{2}{8}$

MULTIPLICACIÓN

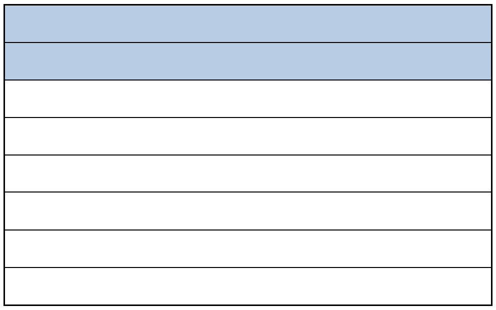
El jugador tomará la diapositiva de la primera fracción marcada en forma vertical y la diapositiva de la segunda fracción marcada en forma horizontal, deberá colocar la segunda diapositiva sobre la primera, de manera que la segunda fracción se sobreponga sobre la primera y el resultado de la multiplicación será la parte en donde ambas fracciones se intersectan, como lo indica el siguiente ejemplo:

$$\frac{1}{2}\ x\,\frac{1}{4}$$

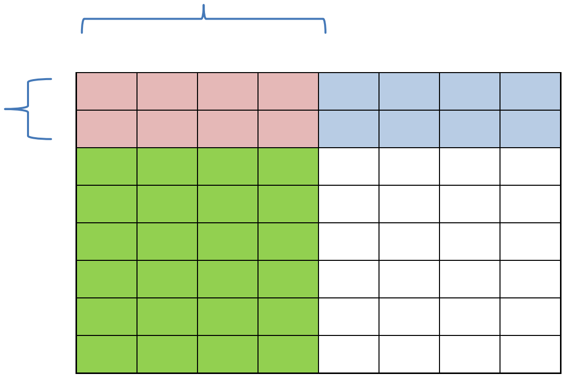
$\frac{1}{2}$



$\frac{1}{4}$



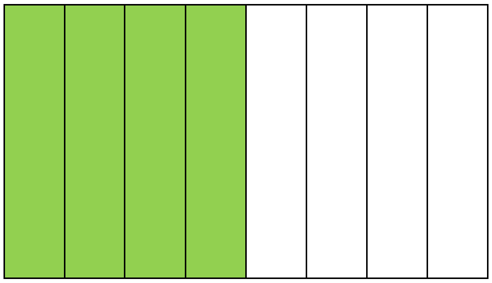
$\frac{1}{2}\ x\,\frac{1}{4}\ =\ \frac{1}{8}\quad o\quad \frac{2}{16}\ \text{o}\ \frac{8}{64}$



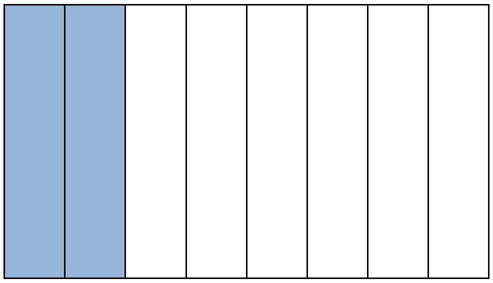
DIVISIÓN

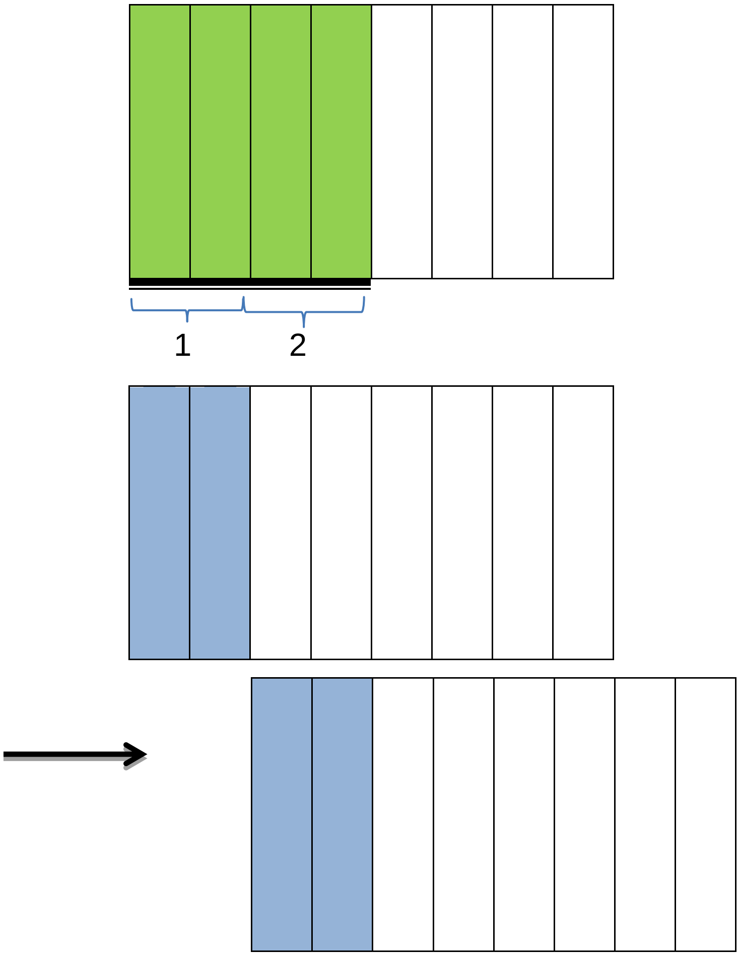
El jugador tomará las diapositivas marcadas en forma vertical de las fracciones que le corresponden, deberá colocar la segunda diapositiva sobre la primera y posteriormente ir deslizando hacia la derecha, de manera que pueda determinar cuántas veces cabe la segunda fracción en la primera, como lo indica el siguiente ejemplo: $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}$



$\frac{1}{4}$





$\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = 2$ o $\frac{4}{2}$ Cabe 2 veces la segunda fracción en la primera.

Cada jugador elegirá una ficha para avanzar en el tablero. El jugador que conteste correctamente, avanzará un lugar en las casillas del tablero (fig. D.1). La respuesta debe incluir la operación que comprueba el resultado y que deberá anotarse en la hoja de registro (fig. D.2). Ganará el jugador que llegue primero a la meta.

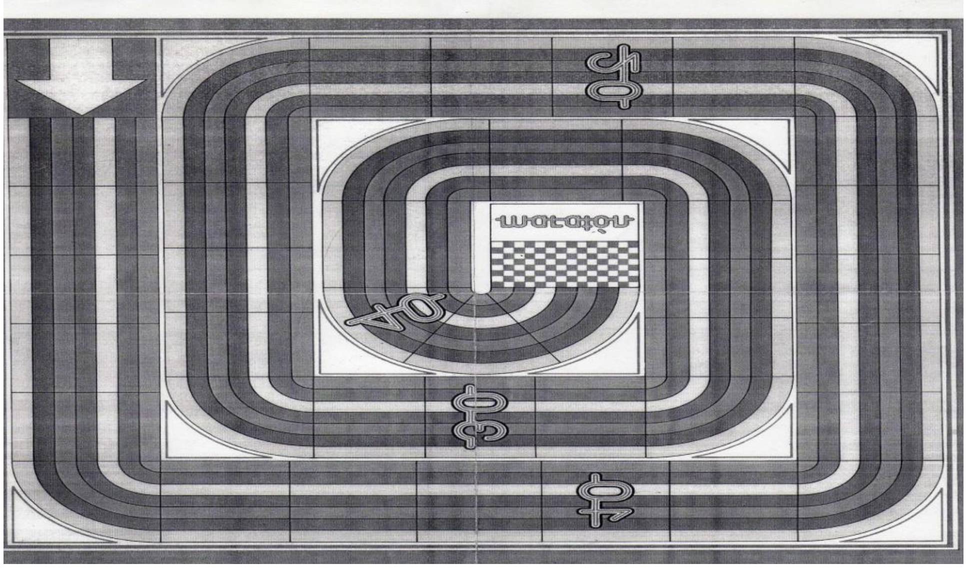


Fig. D.1. Tablero del juego de fracciones.

JUEGO DE FRACCIONES

PARTICIPANTE	OPERACIÓN	FRACCIÓN 1	FRACCIÓN 2	RESPUESTA EMPLEANDO MATERIAL	OPERACIÓN QUE COMPRUEBA LA RESPUESTA	AVANZA

Fig. D.2. Hoja de registro del juego de fracciones.