Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco
Departamento de Matemática Educativa

Título
Caracterización del pensamiento matemático de alumnos y alumnas de ingeniería, relativo al origen de la variable compleja. El caso de logaritmos de números negativos.

Tesis que presenta

Francisco Javier Martínez Jiménez

Para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias

En la especialidad de Matemática Educativa

Directora de la Tesis

Dra. Rosa María Farfán Márquez

Ciudad de México, México noviembre de 2017

TABLA DE CONTENIDO

TÍTULO

Caracterización del pensamiento matemático de alumnos y alumnas de ingeniería, relativo al origen de la variable compleja. El caso de logaritmos de números negativos.

AGRADECIMIENTOS A INSTITUCIONES

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt), por otorgarme el apoyo económico para la realización de mis estudios de maestría.

Francisco Javier Martínez Jiménez

Número de becario 712971

AGRADECIMIENTOS PERSONALES

Con el presente trabajo, concluye un ciclo más de mi vida que me deja bastantes aprendizajes. Seguir estudiando me permitió un contexto que me hizo ver las cosas académicas desde diferentes perspectivas, práctica que he llevado a la vida misma. En este andar, existen personas que han sido causales, y me han encaminado donde estoy ahora, por lo que vale mencionarlas y se agradece su presencia porque su acción, provocaron la emergencia de un nuevo reto.

Se lleva todo mi respeto y admiración, la Dra. Rosa María Farfán, pues mi asesora con sutileza es la que más ha puesto a trabajar mi mente, abriéndola a nuevas ideas, a nuevas formas de ver la vida. La manera tan gentil, formal, técnica y determinante en su persona académica y también como persona en sí, me han inspirado. Agradezco infinitamente todo lo aprendido en estos dos años.

Agradezco Dr. Ricardo Cantoral y a la Dra. Gisela Montiel, sus cátedras, sus ideas tan innovadoras, su humildad, su sinergia y su liderazgo, me han motivado en la vida académica.

A mis colegas y amigos de generación; Zule, Karina, Cristina, Kristel, Gaby, Gerardo, Sergio, Uzziel, Susana y Cristian, que siempre han estado ahí para hacer la carga de trabajo más ligera. Gracias por los comentarios y buenas pláticas. Cabe mencionar también a Selvin, Melvin, Luis Mi, Fabiola, Roger y Natalia. A todos, gracias.

Por supuesto también, con mucho aprecio a Mayra, María, Nayelica, Cinty, Doña Laura, Fabián, Brecaro, Vero, Wendolyne, Jorge y Eduardo, sus aportaciones y pláticas en general, me han hecho aprender en diversos terrenos, no sólo académicos. Un especial agradecimiento a Fabián, es un hombre del que he aprendido mucho. A la gran señora, gracias por compartir, la echaré de menos.

Agradezco a mis compañeros del fut-bol, por los buenos momentos que espero sean más. No pueden faltar tampoco Claudio O, Lalo, Angie, Mario C, Jesús, Don Juve, Diana, la Ing. Marta, Rodolfo, Dr. Cordero y Dra. Acuña, María Antonieta, Eliazar y por supuesto Adriana, sin ella muchas cosas en Cinves se complicarían.

Gracias a Kiara, Brenda y demás familia postiza por el apoyo y caminos brindados. A mi familia directa e indirecta que me han *problematizado* y puesto en jaque; mi padre, madre, tía, hermano, sobrina y abuela. Y a los que han sido como obstáculos, también gracias, sin ellos y ellas no tendría valentía.

A todos, sin que se dieran cuenta, absorbí como esponja aprendizajes que me dejaron. Todos y cada uno de ustedes han sido parte fundamental de este proyecto, sin ustedes no hubiera podido, de corazón, gracias.

DEDICATORIA

A mi hija amada, quien me ha sensibilizado a poner atención a los detalles de la vida, quien me ha abierto el corazón y me ha hecho reflexionar sobre las simplezas que son tan básicas pero tan necesarias. Para quien ha sido un espejo que me recuerda mi niñez, a quien sólo deseo cuidar y proteger. Aquella persona que ha ocupado mi mente y sin saberlo me ha dado verdaderas cátedras de vida.

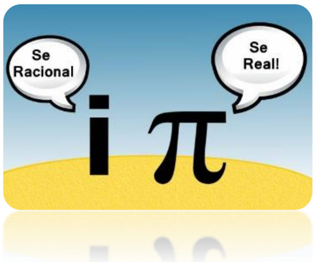
Por toda la historia que nos antecede, por las lágrimas, por los sinsabores tan intensos, los altibajos, las heridas y las cicatrices, quiero que sepas que este humilde trabajo, lo dedico a ti. Porque cuando yo lo escribía, tú me necesitabas, porque al orientar mi tiempo hacia otras cosas y no precisamente la escuela, cambié tu destino y tú, siempre estuviste ahí con tu ternura, con tus ojitos llenos de amor, para hacerme ver que lo verdaderamente importante estaba frente a mí, a un abrazo de distancia. Tú te convertiste en la sanación de todo, y ante mis tropiezos, no supiste juzgarme.

A ti, que te deseo que crezcas feliz y que motives a muchas personas como lo hiciste conmigo, porque tienes mucho que enseñar a este mundo, te dedico este trabajo, porque tienes una madurez y un corazón lleno de ideas, valentía y bondad, el mundo te necesita.

Porque cada que te pienso me devuelves lo que todo ser humano anhela, lo que todo el mundo desea. Cada vez que estoy contigo, o simplemente pensándote, me trasladas un sinfín de emociones, me doy cuenta que si soy de carne y hueso, sentir y vivir, es fantástico.

Deseo que algún día, leas esto, será garantía que las preocupaciones, ha quedado atrás y que tú, has crecido.

Gracias por ser luz en mi vida, por ser una pieza indispensable en mí, fuente de inspiración para continuar con mis metas. Naty, gracias por compartir, gracias por todo.



El sello de la casa…

Las contradicciones en la vida, como en las matemáticas, suelen pasar de largo. Sólo son resueltas haciendo un esfuerzo por explicarlas. Así, el mundo está en relativo orden y en paz. Eso me hace recordar que la gente "mala" no es tan mala, sino los "buenos" que hacen nada.

RESUMEN

La variable compleja es indispensable en la formación de Ingenieros en Comunicaciones y Electrónica[ICE], carrera del Instituto Politécnico Nacional. Desde esta perspectiva, se pretende caracterizar la construcción del conocimiento matemático de estudiantes de ICE y llevar la significación de la teoría desde su contexto de origen, bajo la idea del logaritmo de un número negativo. La ingeniería didáctica y la Socioepistemología respaldan este trabajo, y permiten rediseñar la situación de aprendizaje original dada por Cantoral y Farfán (2008), así, mediante la problematización del saber, se explicitan los obstáculos epistemológicos [OE] en la construcción de la teoría, así como también, orquestar la superación de los mismos. De la puesta en escena, se destaca al OE como intrínseco al saber matemático y necesario de confrontar en la construcción de conocimiento, la influencia del discurso Matemático Escolar en la aceptación de un resultado en matemáticas y en la forma de abordar los objetos matemáticos.

ABSTRACT

The complex variable theory is necessary during the education of engineers in areas such as comunications and electronics in IPN, this topic is part of the curricula. Based on this finding, it is proposed to caracterized the construction of mathematics knowledge and use the meaning of this theory since the context of its origin, under the idea of the alghoritm of a negative number. The didactic engineering and the theoretical framework of the socioepistemology validates this work and allows to redesign the original learning situation proposed by Cantoral y Farfán (2008), thus, through the problematization of knowledge, the epistemological obstacles [EO] are explained in the construction of theory and doing in this way to guide the overcoming of the epistemological obstacle (Bachelard, 2000). It emphasizes the EO as intrinsic to the mathematical knowledge and necessary to confront in the construction of knowledge as well as the influence of the dME in the acceptance of a result in mathematics and in the way to approach the mathematical objects, where the male and female engineers in training exhibit a mathematical practicality, where the calculator is a great referent.

JUSTIFICACIÓN

Este trabajo nace de una experiencia y por ello hablare en primera persona.

Durante mi formación académica en la ingeniería en comunicaciones y electrónica [**ICE**] en la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica [ESIME] del Instituto Politécnico Nacional [IPN], cursé variable compleja [VC] y tuve dudas de esta materia, no comprendí el porqué de su estudio en mi carrera, quién la había inventado y por qué razón. Sin embargo, en semestres posteriores, en el curso de otras materias, me di cuenta que la variable compleja era utilizada como base, en general, para simplificar el análisis de problemas afines a la ingeniería; por ejemplo, reduciendo ecuaciones intregrodiferenciales a simples ecuaciones algebraicas, para el caso concreto del análisis de circuitos.

Buscando en libros y preguntando a compañeros y profesorado, no encontraba una respuesta que aclarará por completo mis dudas, no sabía aun, por qué se utilizaba a i como una variable y reducía una ecuación integro-diferencial, o bien, en su forma *usurpadora* de s, para el concepto de transformada de Laplace; me intrigaba cómo el uso de la variable compleja permitía entender el comportamiento de una señal dada en tiempo, mediante su dominio en *frecuencia*. Por charlas y comentarios de colegas, sabía que no era el único que tenía esas dudas.

Esa intriga, hoy en día termina (¡¡¡ al fin…!!!). Ya que este trabajo dio claridad a la mayoría de mis interrogantes y en consecuencia, pretende que quien lo lea, aclare también sus dudas del tema o bien, le surja el interés por tan bella teoría. Que descubran el origen de la variable compleja, la importancia en la carrera de la **ICE** y la respuesta de este campo de estudio al conocer su contexto de origen.

Así, este trabajo pretende caracterizar el pensamiento matemático de estudiantes de ingeniería, cuando se les confronta al contexto de origen de la variable compleja bajo la idea de la extensión del significado del logaritmo de un número negativo; cabe mencionar que dicha teoría en la **ICE** es fundamental, pues se emplea de forma explícita o implícita en al menos cinco de nueve semestres que tiene la carrera en su formación de tronco común (aprox., en 11 materias), y en siete semestres totales, para el caso particular de la especialidad en acústica.

Se pretende que este trabajo aporte un granito de arena a la *democratización de las matemáticas*, sensibilizando al respecto de qué matemáticas necesitan estos ingenieros e ingenieras en formación de carrera de **ICE**. Estoy seguro de que después de haber participado en este proceso, la población de estudio, platicará a sus colegas, profesores, familiares, amigos, compañeros de trabajo (cuando egresen) acerca del logaritmo de un número negativo, y su relación con el origen de la variable compleja, de Euler, Leibniz y Bernoulli, además de las materias que estuvieron en condiciones de entender gracias al acercamiento didáctico en el que participaron. Espero que, en esas pequeñas charlas e intercambio de ideas, alguien se haya visto motivado en estudiar un posgrado, relacionado a la matemática, o matemática educativa (y así, seguir creciendo como comunidad) para dar claridad a un tema más, de tantos en ingeniería, que requieren de una perspectiva flexible a la tradicional. Como lo retomo yo.

MOTIVACIÓN

Que el alumnado de **ICE** desarrolle el pensamiento matemático en torno al origen de la variable compleja de acuerdo con su contexto epistemológico, y en consecuencia, los estudiantes estén en condiciones de entender las materias y temas que utilizan a la teoría como base: análisis de circuitos, transformada de Laplace, Z y Fourier, serie trigonométrica de Fourier, etc.

INTRODUCCIÓN

El plan de estudios de la **ICE** unidad Zacatenco del IPN tiene por columna vertebral a la teoría de variable compleja; desde esa perspectiva, nace esta investigación que aplica una situación de aprendizaje [***SA***] a los estudiantes de **ICE** y caracteriza sus resultados bajo el marco Socioepistemológico. Esta ***SA*** contiene los elementos epistemológicos que construyeron a la teoría de variable compleja en el siglo XVIII, debido a un intercambio de ideas sobre la extensión del significado del logaritmo de un número negativo[1] que generó Leibniz, Euler y Bernoulli. Este debate dio lugar a un ambiente de confusiones, incertidumbres y de problemáticas, todas enfiladas a descubrir un hallazgo importante, que dio luz a una época *compleja*, donde se involucraba al número complejo (su uso, su significado y su aceptación).

Ahora bien, puesto que las matemáticas no fueron creadas para enseñarlas, se presentan a los estudiantes como segmentadas y desnaturalizadas de sus orígenes a fin de involucrarse en contenidos matemáticos en la escuela, omitiendo en consecuencia, los elementos epistemológicos y marginando el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante.

La teoría socioepistemológica permite dar cuenta de qué elementos cognitivos, epistemológicos y didácticos, permeados por los elementos socioculturales, caracterizan y predicen las producciones de los estudiantes al confrontar la SA, que son extremadamente similares a las de Euler, Leibniz y Bernoulli. Estos elementos aunados a la noción de superación de los obstáculos epistemológicos (**Bachelard (2000)**) permiten encaminar a los estudiantes a la superación misma, que epistemológicamente sólo logro Euler, pues supero el obstáculo de lo real y de lo logarítmico (como relación entre progresiones y como modelizador de fenómenos físicos); como resultados, se evidencia en

[1] El logaritmo de un número negativo será lo mismo que escribir $\ln(-x)$, pues tiene una finalidad en el trabajo y es no confundir sobre otras bases posibles del logaritmo. En consecuencia, se tomará como base al número e.

las producciones de los estudiantes de ingeniería, la influencia del discurso matemático escolar [**dME**] y en el trato hacia los objetos matemáticos inmersos en la SA, además del uso de la calculadora como referente importante en la justificación de sus respuestas.

CAPÍTULO I. CONSIDERACIONES INICIALES

ANTECEDENTES

En este capítulo se pretende ilustrar una síntesis de investigaciones, que abordan directa o indirectamente problemáticas comunes, a fin de llevar a cabo una reflexión y extracción de constructos esenciales para guiar el presente trabajo

*El número complejo (i) en el origen de la variable compleja **[VC]***

Es importante hacer mención del rol de los números complejos en la utilización de la presente investigación; **Trujillo (2005)** menciona que su consideración es importante puesto que pertenecen al dominio de la ***VC***. Desde esa obviedad, es menester involucrarlos y describir su papel para el desarrollo y origen de la misma.

Para esto se identifican tres *momentos epistemológicos* que son secuenciados y que tienen que ver con la *aparición*, *manipulación (o uso)* y *significación de* $\sqrt{-1}$, respectivamente, su aparición como ente despreciable; su manipulación como número y en ese sentido su utilidad al manipularlo ya como variable (interpretación mediante el uso); y finalmente la significación, con apoyo del contexto geométrico, digamos que su aceptación social.

Primer momento: $\sqrt{-1}$ aparece como algo inexistente, ya que en el siglo XVI encontramos matemáticos que se refieren a las raíces negativas de una ecuación como *ficticias, absurdas o falsas* (**Nahin, 1998, p. 30**). En las primeras apariciones de la raíz de un número negativo, independientemente al personaje matemático y a la época, se tiende a *rechazarlo.*

Segundo momento: Intentos de interpretar $\sqrt{-1}$, primero, con base en “manipulaciones ciegas, sin una sola tentativa seria de interpretar o comprender” **(Bell, 1985, p. 185)**. Esta maestría en el uso, poco a poco ya no se centra en estudiar la naturaleza o razón de ser de $\sqrt{-1}$ (el punto filosófico) sino es perfeccionada debido a su *uso* o *utilidad* **(Bell, 1985; Cajori, 1983)** por lo que permite aclarar y articular que ese dominio de números ya no es propio de la variable real.

Tercer momento: Se refiere al hecho de significar e interpretar por completo a i, al grado de desarrollar formalmente, una nueva teoría. Se destaca la interpretación geométrica de $\sqrt{-1}$ pues este registro gráfico, logra lo que se buscó en el seno filosófico, la interpretación y entendimiento de i. Trabajo realizado principalmente por **Caspar Wessel** (**Nahin, 1998**).

Descripción de los tres momentos epistemológicos.

Al intentar determinar el área de una pirámide trunca, se tenía que saber el valor del tronco interno de la misma (esta podía calcularse por una ecuación de segundo grado); es en este quehacer que **Herón de Alejandría** en su *Estereometría* ($100\ d.C.$), fue el primero en escribir $\sqrt{81-144}$ cuando quiso calcular el valor de dicho tronco, y también fue el primero en rechazar $\sqrt{-1}$, intercambiando raíces negativas, re-escribiendo $\sqrt{144-81}$ (**Nahin, 1998, p. 28**).

Muchos años antes, **Diofanto** habría rechazado también la raíz de un número negativo cuando en su *Aritmética* plasmo la resolución de los lados de un triángulo rectángulo, escribiendo la ecuación $336x^2+24=172x$, que en términos actuales mediante la *fórmula general* implica raíces negativas. **Diofanto** escribió que la resolución “no era posible*”* (**Nahin, 1998, p. 30)**.

Por otro lado, en lo referente a la solución de las ecuaciones de tercer grado, es que raíz de un número negativo encontró un desenlace significativo hacia la interpretación; se superaban los obstáculos en torno a la cuestión filosófica de i, pero se creaban nuevos retos.

Así, hacia el término del siglo XV, **Luca Pacioli** afirmaba que estas ecuaciones (de tercer grado) no tenían solución, pero los trabajos de Del Ferro y contemporáneos apuntaban lo contrario (**Nahin, 1998)**. Siendo a mediados del siglo XVI que **Gerolamo Cardano** publica en su *Ars Magna* el *método de solución de Tartaglia*, donde redescubre un método para la solución de la *cúbica reducida* (ecuación cúbica sin término cuadrático y con coeficientes positivos), haciendo también un aporte hacia la manipulación de $\sqrt{-1}$, manipulación que sus antecesores habían ignorado. Cardano entonces, al determinar su método (método de Cardano), manipuló $\sqrt{-1}$ hasta deducir y observar no solo raíces reales, sino también raíces que involucraban soluciones en el dominio complejo. Cabe mencionar que en aquel tiempo se decía que un polinomio de tercer grado tenía al menos una raíz real **(Martínez y Antonio, 2009: Nahin, 1998)**, en consecuencia, sólo con tener al menos una solución real de ese tipo de ecuaciones era suficiente.

Aunque no pudo calcular las soluciones que involucraban raíces de números negativos, este aporte de Cardano, consistió en la ecuación $y^3 = 15x + 4$ ($y^3 + px = q$, llamado el caso irreducible), que dados los coeficientes y sustitución en la fórmula:

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \qquad \textbf{(1)}$$

(Martínez y Antonio, 2009: Nahin, 1998).

Se tienen la siguiente simplificación, que fue hasta donde pudo llegar Cardano**:**

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} \qquad \textbf{(2)}$$

(Martínez y Antonio, 2009: Nahin, 1998).

A Cardano lo desconcertó que la implicación de raíces de números negativos, en la solución de ecuaciones cúbicas dieran por resultado números reales **(Nahin, 1998, p. 42)**. Cabe mencionar que Cardano posiblemente observó que la ecuación del caso irreducible con raíces negativas, tiene por raíz $x = 4$.

Cardano escribió también es su *Ars Magna* el problema de encontrar dos números que divididos sean 10 y multiplicados 40, problema alusivo a la solución de $x^2 + 10x + 40$, y quizá de ahí su familiaridad para *manipular* $\sqrt{-1}$; en general, Cardano ahonda en el campo complejo, dejando de lado (en cierta medida) la naturaleza de la concepción y juicios alrededor de i. Se podría decir que Cardano entendió la naturaleza de i con base en su utilidad y el problema se veía que resolvía, siendo lo más destacado que "se aceptó la existencia de la raíz cuadrada de números negativos, junto a su operatividad" (**Martínez y Antonio, 2009, p. 4**). Este contexto es el referente al *segundo momento*, pues hace alusión a la maestría en cuanto a la manipulación que ya se usaba en el corpus matemático acerca del número complejo, aunque con cierto recelo, esto significó un avance para un sistema (aun no claro) de números complejos.

Después de Cardano, **Rafael Bombelli** abordó el problema del *caso irreducible* y en su obra ***Álgebra*** dio solución a esa ecuación **(2)** sabiendo que una de las raíces era real $y = 4$ (idea que también tuvo Cardano, pero no concluyó), utilizó lo que hoy se conoce como *complejo conjugado*, pues dedujo que debía existir dada la solución, términos opuestos que sumados dieran $y = 4$. Es decir que de la ecuación anterior **(2)**, se iguala con 4 y se tiene;

$$4 = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} \qquad \textbf{(3)}$$

Bombelli determinó que: $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = \boldsymbol{a} + \sqrt{-\boldsymbol{b}}$ y $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = \boldsymbol{a} - \sqrt{-\boldsymbol{b}}$ (**Canal, 2012: Nahin, 1998**). Así la ecuación del llamado *caso irreducible* **(3)** se convertiría en:

$$4 = \left(a+\sqrt{-b}\right) + \left(a-\sqrt{-b}\right) \qquad \textbf{(4)}$$

$$x = 2a = 4 \qquad \textbf{(5)}$$

Así, Bombelli pudo expresar el germen del álgebra actual de los números complejos, teniendo congruencia procedimiento y resultado, confirmando y desarrollando el aporte al campo complejo que Cardano había comenzado; poco a poco significar a i a través del *uso*. "*El gran aporte de Bombelli al álgebra, fue el de aceptar sin reserva la existencia de* $\sqrt{-1}$*, como un número…"* **(Canal, 2012, p. 11)**. Se comenzó a ver a i como un número útil y no inútil.

En ese orden de ideas, se hace alusión a la entrada al *tercer momento* y se refiere al enigma en torno a los números negativos durante el siglo XVIII en torno al logaritmo de números negativos, que tendría como explicación coherente la utilización y manipulación de los números complejos. Esta interrogante de $ln(-x)$ fue controversial e irónica, pues si se buscaba desde el siglo I, que los números negativos se contrastaran con la realidad, los números complejos se perfilaban entonces como una utopía. Sin embargo, de estos últimos dependía el replantear y reconceptualizar el orden y consolidación de lo que la matemática en aquel siglo XVIII no tenía muy claro, a través de la respuesta al $ln(-x)$, en torno de las contradicciones habidas para números negativos y para los números complejos **(Kleiner, 1988)**.

El estudio de $\ln(-x)$, ilustra que la maestría en la manipulación de i, al fin tuvo éxito, pues se llegó casi por completo a interpretar y comprender el significado de i, ya no sólo por la utilidad como número, ahora tambien como variable, además de generarse ya la necesidad de una nueva teoría. Los números complejos dejaron de ser vistos como entes operables y respondían a la necesidad de operar y explicar $\ln(-x)$. Este proceso se torna como una transición entre el segundo y el tercer momento, pues fue clave para la formalidad de la ***VC*** en la matemática y culminación del segundo momento.

Finalmente, el *tercer momento* se refiere a la interpretación y comprensión, al fin de los números complejos. Se destaca la interpretación geométrica de Wessel, en 1797 (**Canal, 2012: Nahin, 1998**). Determinando el cierre de la era *compleja* en el sentido que se asentó la existencia, formalidad, significado e interpretación total de los números y variables complejas, dando así más aportes a la consolidación de la teoría misma, y detallando un campo excelso y abstracto de la matemática. Por ejemplo, "Gauss obtuvo la demostración correcta del teorema fundamental del álgebra en su tesis doctoral de 1797 "**(Kleiner, 1988, p. 714)**. Posteriormente "…en 1831, publica un trabajo donde expone con claridad las propiedades de los números de la forma $a + bi$" **(Canal, 2012, p. 13)**.

Wessel da una interpretación geométrica a partir de la manipulación algebraica (podría llamársele el cambio entre registros gráficos y algebraicos de $\sqrt{-1}$). Y establece una cierta relación entre la variable real y la variable compleja pues: "$\sqrt{-1}$ es el segmento dirigido de longitud unitaria que apunta directamente hacia arriba del eje x…" (**Nahin, 1998, p. 74**).

Síntesis

Las concepciones de quién se confrontó con $\sqrt{-1}$, no se entendían con explicaciones de números reales y de ahí su rechazo; incongruencias de la forma de $\ln\sqrt{-1}$ o $\sqrt{81-144}$ se tornaban relativamente claras en cuanto al uso y manipulación de i, dejando un poco de lado el significado filosófico o intento de contrastación con la realidad. Es en esta maestría que radica la significación misma y la consolidación de la teoría de ***VC*** desde el número i, convirtiéndose en variable y asentándose por completo mediante su representación geométrica, para delimitar así e ir desarrollando una nueva teoría, donde ciertos entes y nociones matemáticas, quizá comunes entre variable real y compleja, ya no tienen la misma validez.

Cabe mencionar que los momentos epistemológicos descritos, son eventos secuenciados que quizá podrían ser característicos como construcción social de la teoría de ***VC*** o para describir un nivel de complejidad mental en torno a $\sqrt{-1}$ y la ***VC***.

El proceso del rol del número complejo destacó la importancia de la necesidad de una nueva teoría en matemáticas, hecho que **Trujillo (2005)** ilustra como una problemática del sistema escolar, pues no se considera dicho proceso, destacando que los números complejos son presentados en ecuaciones de segundo grado. A lo que concluye que no son suficientes los elementos previos para abordar la teoría de variable compleja.

Por otro lado, **Bagni (2001)** también destaca el respeto del orden cronológico en la presentación de los números complejos, ya que en su investigación, introduce a $\sqrt{-1}$ de dos formas, con ecuaciones de segundo y de tercer grado, reportando un *éxito* cuando estos números son presentados siguiendo la línea epistemológica de origen en el proceso de presentación que conlleva ecuaciones cubicas. El *éxito* radica en que la ecuación de segundo grado no tiene respaldo epistemológico, sólo existió históricamente pero no hubo un desarrollo conceptual. Por ejemplo, el indicio con **Herón de Alejandría**, cuando encontró raíces negativas en una raíz cuadrada no formuló una solución al respecto, sólo se quedó en el rechazo de $\sqrt{-1}$. Es así que son representativos los *momentos epistemológicos* pues consideran la cronología de eventos sobre $\sqrt{-1}$ y el desarrollo de los saberes matemáticos implícitos.

Esta investigación, enfocándose en el debate que se produjo en el siglo XVIII sobre el $\ln(-x)$, respeta la cronología epistemológica y se tiene la premisa que los alumnos y alumnas población (estudiantes de **ICE**), han pasado la primera etapa de *rechazo*, pues conocen a $\sqrt{-1}$ debido a su primer semestre en donde han cursado la materia de fundamentos de álgebra, llevando a cabo operaciones aritméticas con números complejos. En ese sentido, se abordará el *segundo momento* y el *tránsito* al *tercer momento epistemológico*, pues se espera que de las manipulaciones hechas en el sistema escolar sobre $\sqrt{-1}$, puedan considerarlo en la explicación de $ln(-x)$ y en las posibles incongruencias que deriven; así, se puede expresar la necesidad de teoría de la que habla **Trujillo (2005)**.

Cabe mencionar que junto a Euler, Leibniz y Bernoulli protagonizaron el debate epistemológico sobre el $ln(-x)$, estos dos últimos, no se entendían en sus argumentaciones al respecto de $ln(-x)$, y aunque ambos conocían a los números complejos y su posible involucración, no lograron concluirlo, pues decían que no había nada que lo comprobase **(Cajori, 1983)**. Es Euler quien integra los números complejos y así demostrar que el $ln(-x)$ tiene infinitos valores imaginarios y ningún valor real, mientras que el logaritmo de un número positivo tiene infinitos valores imaginarios y uno real (**Gómez, Pardo y Pastor, 2003: Cajori, 1983: Cantoral y Farfán, 2008**).

Es entonces, un obstáculo evidente en Diofanto, Herón de Alejandría, Leibniz, Bernoulli y Cardano, la dificultad a salir del campo real, para operar en el campo complejo; el desconcierto de que un proceso con números reales tenga por resultado una cantidad compleja. Mientras que de Euler, Wessel y Bombelli, podría decirse que superaron este obstáculo. Todos los anteriores podrían caracterizarse en los momentos epistemológicos planteados:

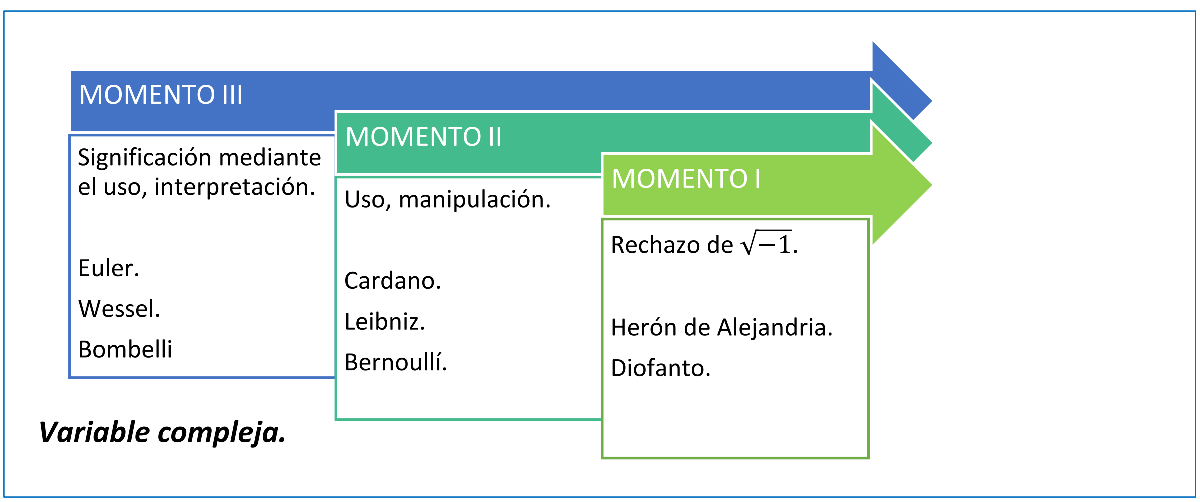


Figura 1. Los tres momentos epistemológicos, sus precursores y su etapa característica.

El obstáculo epistemológico

El devenir de la teoría de variable compleja, enfocándonos en el logaritmo de un número negativo exhibe ciertas dificultades, problemáticas e ideas, en general, elementos epistemológicos, que desempeñan un papel fundamental en la construcción del conocimiento y que tuvieron que confrontar, y superar los personajes de la época.

Una forma de caracterizar estas dificultades es mediante la noción de *obstáculos epistemológicos [**OE**]*. **Bachelard (2000)**, explica que es el historiador quien narra los hechos que suceden a través del tiempo, pero es el epistemólogo quien extrae las ideas que acontecieron a esos hechos. Es él quien deja ver la tendencia en cuanto a las ideologías/idiosincrasias que acontecieron al confrontar una idea. Y la superación de los ***OE***, es una manera de construir conocimiento.

> El epistemólogo tendrá, pues, que esforzarse en captar los conceptos científicos en efectivas síntesis psicológicas; vale decir, en síntesis, psicológicas progresivas, estableciendo, respecto de cada noción, una escala de conceptos, mostrando cómo un concepto produce otro, cómo se vincula con otro. Entonces tendrá cierta posibilidad de apreciar una eficacia epistemológica. Y de inmediato el pensamiento se presentará como una dificultad vencida, como un obstáculo superado. **(Bachelard, 2000, p.20)**

Es así, de suma importancia las prácticas que llevaron a la confrontación de los obstáculos epistemológicos; el proceso de socialización sobre el $ln(-x)$.

Esta confrontación permitirá observar dificultades, conflictos cognitivos, creencias y modos de argumentación al respecto de la construcción de la variable compleja, en los estudiantes de ingeniería, que se espera argumenten cómo sucedió epistemológicamente con Euler, Bernoulli y Leibniz.

En este sentido, el eje conductor de la presente se determinará por el trabajo de **Cantoral y Farfán (2008)** que diseñan la situación de aprendizaje y aplican en el trabajo de **Soto (1988)**, cabe mencionar que en este último trabajo, estudiantes que se preparaban para ser docentes en el nivel medio superior, exhibieron lógicas de razonamiento similar a los matemáticos antes mencionados.

Las investigaciones en *matemática educativa* consideran a los ***OE*** como inherentes al saber matemático, además, de representar una "pieza de conocimiento" (**R. M. Farfán, comunicación personal, 16 de marzo, 2016**). Es decir, que su confrontación y superación es la que permite la construcción del saber. Para la superación como lo plantea **Bachelard**, se plantea que las nociones importantes son; la integración de los números complejos a la explicación de $\ln(-x)$ y en consecuencia, la delimitación de teorías, es decir que $\ln(-x)$ no es real, sino complejo. A lo largo de esta investigación, se pondrá énfasis en estos dos conceptos, delimitación de teorías y que el $\ln(-x)$ es alusivo a $\ln|x|$, además de considerar que lo real es un obstáculo para la construcción del $\ln(-x)$ y en consecuencia para el origen de la ***VC***, de acuerdo a lo estudiado en *el rol del número complejo*.

*Sobre el debate del logaritmo de un número negativo y las nociones importantes en términos de **OE**.*

El intercambio epistolar entre Leibniz, Bernoulli y Euler sucedió primero entre Leibniz y Bernoulli, y después entre Bernoulli y Euler (**Cajori, 1983**) y de esa controversia epistolar, se derivan fecundas investigaciones.

Gómez, Pardo y Pastor (2003) explican el razonamiento de aquellos matemáticos al confrontar el $ln(-x)$, y su estrecha relación con los números complejos, comprueban además las dificultades derivadas pueden reproducirse hoy en día en estudiantes. Su campo de aplicación en el nivel básico es una razón para quedarse únicamente con la mirada en el significado del número complejo, no siendo necesario el enfoque en sí, a la teoría de ***VC***. Estudian, lo que hemos denominado la *etapa de rechazo* pues se enfocan al estudio de las dificultades en matemáticos y estudiantes que genera el $\ln(-x)$, dado $\ln\sqrt{-1}$. Exhibiendo una idea principal que radica en las *incongruencias* dentro del campo real dadas estas últimas nociones matemáticas, que **Gómez y Pardo (2007)** destacan que para evitarlas, es necesaria la advertencia de significados propios del campo real, pues de no hacerlo se producen ambigüedades debido a la manipulación de $\sqrt{-1}$ y en consecuencia un arraigo a la variable real.

Por otro lado, específicamente de la correspondencia de Bernoulli a Leibniz el 7 de junio de 1713, se observa que el primero intenta refutar a Leibniz para que evite al $\ln\sqrt{-1}$ y en consecuencia a los números complejos, argumenta que la mitad de cualquier logaritmo no es necesariamente el logaritmo de la raíz cuadrada sino la media proporcional. Bernoulli añade también lo siguiente:

> La media proporcional entre -1 y -1 es $\sqrt{(-1)(-1)}$ = +$\sqrt{+1}$ o $-\sqrt{+1}$. No hay nada de absurdo en esto. Segundo: yo niego que $2^0 = \sqrt{-1} = \sqrt[4]{-1}$, etc. Pues justo vengo a explicar que $2^0 = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{(-1)(-1)(-1)(-1)}$, etc. Todos estos radicales son iguales a $\sqrt{+1}$ ó ± 1. No hay desacuerdo en este resultado… **(Cantoral y Farfán, 2008, p. 250)**

Esta forma de manipulación de Bernoulli, también la podemos considerar como una inconsistencia; presente epistemológicamente y que sigue reproduciéndose en estudiantes, son lógicas de razonamientos similares, Observado en **Cantoral y Farfán (2008); Gómez y Pardo (2007); Gómez, Pardo y Pastor (2003); Soto (1988)**.

Que para el caso concreto de las aulas, **Gómez y Pardo (2007)** le adjudican al sistema escolar el manejar las reglas para operar radicales positivos de variable real, a raíces de números negativos que son parte de expresiones imaginarias. Así, ya no se sabe cuándo están permitidas dichas reglas y cuando no, lo que lleva a concluir, que sólo son válidas en variable real, la necesidad de reconceptualizarlas y delimitar teorías.

Se destaca entonces una característica importante del obstáculo epistemológico; si sucedió históricamente, y también sucede en estudiantes actuales se dice que es un obstáculo epistemológico (**R. M. Farfán, comunicación personal, 25 de mayo, 2016**).

Por otro lado, **Buhlea y Gómez (2007)** describen que en la construcción del concepto de números complejos, existen en los estudiantes dificultades que pueden deberse al sistema de enseñanza, además de las dificultades intrínsecas generadas como consecuencia directa de la complejidad del concepto. Aquellas dificultades derivadas del sistema de enseñanza, por omisión del contexto epistemológico, crea en el estudiante las incongruencias al operar $\sqrt{-1}$ **(**observado en **Cantoral y Farfán, 2008; Bagni, 2001; Gómez y Pardo, 2007; Gómez, Pardo y Pastor, 2003; Kleiner, 1988; Soto, 1988)** pues estos siguen con las reglas y métodos de la variable real.

Un ejemplo de obstáculo didáctico y que genera en el alumnado *obstáculos de tipo conceptual*, se reporta en **Romero (2016)** cuando se hace mención de que la génesis histórica de la serie trigonométrica de Fourier no considera el estudiar la periodicidad de una función, presentándose esto como un obstáculo de tipo didáctico, ya que "no afecta el cálculo de las series de Fourier, pero si a la argumentación de los estudiantes respecto a poder calcular la serie de cualquier función, dado el discurso Matemático Escolar predominante" **(Romero, 2016, p. 6)**.

Lo anterior, permite inferir la posibilidad que el sistema de enseñanza en el nivel superior de la **ESIME** no considere la delimitación de teorías entre variable compleja y variable real, siendo esta necesaria. En este orden de ideas, **Kleiner (1988)** describe como las reglas de operación sobre $\sqrt{-1}$ afectaron al sector pedagógico (e inclusive a otras áreas del conocimiento); al respecto de instituciones educativas, estas consideraban que las matemáticas eran un paradigma del pensamiento racional, por lo que las deficiencias evidentes en la justificación y lógica de las operaciones con números negativos y complejos bajo ese paradigma, se hizo insostenible, operaciones con $\sqrt{-1}$ no tenían una respuesta satisfactoria. En la Universidad de Cambridge en 1830, se llevaban a cabo esfuerzos por establecer reglas formales para operar con los imaginarios y que dieran coherencia con la matemática (**Kleiner, 1988, p. 714, 715**).

La enseñanza tradicional bajo esta inercia y antecedente, puede no advertir de significados al logaritmo de números negativos, fuera del dominio de la variable real, como se observa en los trabajos de **Cantoral y Farfán (2008); Gómez y Pardo (2007); Gómez, Pardo y Pastor (2003)**, hecho a comprobar en el campo ingenieril.

La no delimitación de teorías hace que los alumnos y alumnas confundan acciones y resultados hacia los objetos matemáticos que involucran raíces negativas, como el ejemplo que para radicales negativos, consecuencia de la costumbre didáctica. Mientras que la dificultad a salir del campo real es el obstáculo epistemológico a confrontar.

La situación de aprendizaje y su aplicación. El logaritmo de un número negativo.

Cantoral y Farfán (2008) extraen de la controversia epistolar del siglo XVIII, elementos que desempeñan un papel fundamental en la construcción del conocimiento de la variable compleja, bajo la idea del $ln(-x)$ y diseñan la ***SA***. El trabajo de **Soto (1988)** aplica la situación de aprendizaje y su idea radica en la conjugación *heurística – histórica*, pues indica que superando contradicciones, entablando analogías, entre otras, la población de alumnos y alumnas lograrán comprender el origen de la variable compleja, mediante el proceso de enseñanza y aprendizaje por descubrimiento. La ***SA*** es aplicada a una población de alumnos y alumnas en formación de la carrera de docencia en matemáticas para el nivel superior, en el estado de San Luis Potosí, México, en 1988; con ciertas características entre la que destaca, no haber cursado antes variable compleja.

La ***SA*** en esencia, plantea argumentaciones donde se hace posible que $ln(-x) = ln(x)$ y en consecuencia $ln(-1) = 0$. Después, los estudiantes que creían esta posibilidad, o al menos dudaban de ella, se confrontaban a la última parte donde posteriores argumentaciones concluían que $ln(-1) = \pi i$. Esta última, era una contradicción que plantea $\pi i = 0$, en tanto que $\pi \neq 0$ e $i \neq 0$.

Esta contradicción no fue aceptada por los estudiantes de docencia-matemática, de tal manera que al intentar explicarla, aceptaran la validez de logaritmos de números negativos y dieran cuenta que la contradicción se debe a que es necesaria una construcción en otro campo de números. Por el contrario, estos estudiantes se arraigaron a su persistente postura de negación, y advertían que en dado caso, para la existencia de $ln(-x)$ debía reconstruirse la teoría.

En esta investigación, se denomina como la *contradicción mayor* a $ln\,(-1) = \pi i = 0$, importante para estar en condiciones de delimitar teorías pues, el $ln(-1) = \pi i$, en ***VC***, mientras que es $ln(-1) = ln(1) = 0$, en ***VR***.

En **Cantoral y Farfán (2008)** se enfatizó si la población podría explicar o explorar la construcción de Euler, cuando, $\boldsymbol{ln\,(-1) = \pi i + 2n\pi}$; ningún alumno o alumna logro una construcción así. Se destaca sin embargo la diversidad de argumentaciones como principio y aportación socioepistemológica y no por el enfoque hacia la aceptación o negación como lo haría Bernoulli y Leibniz respectivamente. La idea es en dado caso explicar el porqué de los caminos tomados; ninguno es erróneo ni correcto, solo conceptualmente distintos, cabría mencionar además, el por qué no existió un Euler que representara un sector de la población participante; Una posible explicación se enfoca en lo que se ha dicho hasta el momento, es decir, que la enseñanza tradicional no advierte de la existencia de logaritmos de números negativos, por ello no se reconoció que el argumento de la ***SA*** hacía $ln(-x) = ln(x)$ es alusivo al $\ln|x|$. Hecho que bien pudiera significar una posibilidad para no trabajar ya en el dominio real (pues ahí no se encuentra la respuesta) e indagar quizá a un campo de números distinto, integrando así a los números complejos y superando el obstáculo epistemológico de que procesos reales dan como resultado cantidades complejas. Sin embargo, esta integración de i, tampoco es del todo sencilla y se afecta en la medida que el número complejo se descontextualiza en su presentación en el sistema escolar.

Hecho que concuerda con un par de predicciones hecha por **Gómez y Pardo (2007)**, cuando los alumnos interpretan el logaritmo de un número negativo:

> El estudiante está anclado en una idea de los logaritmos que es propia de los números reales. Esto le induce a creer que las reglas aprendidas con los reales son válidas siempre. Si no se le advierte de que esto no es así y el por qué, difícilmente podrá salir de esta creencia por sí sólo. **(Gómez y Pardo, 2007, p. 9)**
>
> Si no se le advierte que con los complejos hay que reconceptualizar la noción de logaritmo y revisar sus reglas de cálculo, podemos esperar que incurra en contradicciones. **(Gómez y Pardo, 2007, p. 10)**

Reconceptualizar, hace alusión a reinterpretar y reflexionar acerca de lo que es conocido e institucionalizado, además de mostrarse abierto a otras posibilidades. En ese sentido, Euler reflexionó, exploró y en consecuencia reinterpretó, los argumentos de Bernoulli y Leibniz para superar lo real, como obstáculo epistemológico ante la construcción de la variable compleja.

Aplicación de la situación de aprendizaje, relativo al origen de la VC.

Ahora bien, **Soto (1988)** encuentra relaciones entre dificultades y lógicas de razonamiento en los dos momentos históricos, 1988 y siglo XVIII (siglo en que Euler, Leibniz y Bernoulli confrontaban $ln\ (-x)$), al respecto de la existencia del $ln(-x)$.

Ejemplo de estas lógicas de razonamiento similares son:

Intercambio de ideas, debate epistolar. Leibniz a Bernoulli: (julio 28, 1713)	**Por un alumno, en la situación aplicada en** Soto (1988)
“[…] llamo más natural, no al que es más usual sino aquel que esté más cerca de la naturaleza y es más simple.” **(Cantoral y Farfán, 2008, p. 250).**	*Gustavo: “El logaritmo de un número negativo no existe, no se encuentra en nuestro campo de trabajo. ¿En qué campo quiere la respuesta?... porque en el de los reales no existe…”* **(p. 33).** *“…si no se encuentra en nuestro universo de trabajo los logaritmos de números negativos, no podemos considerar tales igualdades.”* **(p. 58).**

Tabla 1. Relación entre lógicas de razonamiento. 1988 y siglo XVIII.

Nota: *“Tales igualdades”, hace alusión a* $ln(-x) = ln(x)$.

En ambos casos se encuentran en las mismas condiciones, conflictos cognitivos y lógicas de razonamiento similares, todas convergentes al arraigo a lo único y mayormente conocido. Es visible que no hay una definición del concepto de logaritmo de un número negativo en la *cultura del momento*, tanto en el momento del debate como en el momento del estudio en 1988, no se sabe, no se conoce de ellos. Lo que hace que estudiantes y matemáticos tengan arraigo a lo real. Es probable que quien se encuentre en estas condiciones, tendrá también lógicas de razonamientos similares.

Cantoral y Farfán (2008) que retoman el trabajo de **Soto (1988)**, explican que la población optó por dos caminos principales; el primero que decía que los logaritmos de números negativos son el reflejo de los logaritmos de los positivos, pero con la observación que se tendría que reconstruir la teoría pues, de qué manera un número con base positiva sería igual a un número negativo. El segundo grupo, es el que negó sistemáticamente a aceptar tratar con los logaritmos de números negativos. Porque los logaritmos de los negativos no estaban definidos **(p. 269, 270)**.

Lo que permite observar la tendencia de negar la existencia del logaritmo de un número negativo. O bien, aceptarlo, pero con arraigo al dominio real, pues advierten que debe reconstruirse la teoría.

El discurso matemático escolar.

Cabe aclarar que en **Cantoral y Farfán (2008)**, se retoman los datos generados de **Soto (1988)**, con las diferencias siguientes:

- Se lleva a cabo el estudio con una metodología específica, el de la *ingeniería didáctica robusta* y se suma un análisis didáctico y aspectos socioculturales.

    - Reportándose los tres tipos de acercamiento didáctico de la función logaritmo; como *progresión geométrica y aritmética*, como la *integral de la hipérbola equilátera* en la rama positiva o como la *inversa de la función exponencial* y la *estructuralista* **(Cantoral y Farfán, 2008, p. 257)**.

    - En los aspectos socioculturales se habla del rol de cada interlocutor en el debate epistolar, rol de naturaleza social. Y también la manera en que el **dME** influyen en las producciones de los alumnos y alumnas.

Cantoral y Farfán (2008) denominan a un fenómeno observado cómo, *sensibilidad a la contradicción*, es decir, cuando los estudiantes se arraigan a un solo paradigma (a lo único conocido), pese a argumentaciones matemáticas coherentes sobre la existencia de

$ln(-x)$, los estudiantes no cambian su postura y se arraigan a la definición escolar de logaritmos, evidenciando la costumbre didáctica.

Ahora bien, **Cantoral y Farfán (2008)** comentan que la pregunta sobre el $ln(-x)$ planteó un proceso de incertidumbre en el siglo XVIII, pues no había una ruta de acción lógica para confrontar y explicar tal cuestionamiento, porque los logaritmos de números positivos eran los que estaban consolidados en el corpus matemático, eran conocidos como facilitadores de engorrosos cálculos y posteriormente como modelizadores de fenómenos de la naturaleza (**Farfán y Ferrari, 2001c**).

Es así que la población de estudiantes de docentes-matemáticos no exploran ante el discurso sobre el $ln(-x)$, ante un saber no institucionalizado se limitan en sus reflexiones, la ruta de incertidumbre les causó desconcierto, por lo que se basaron en el discurso matemático escolar para justificar sus respuestas. Se destaca de **Cantoral y Farfán (2008)** que el **dME**, impone que la aceptación de un resultado en matemática no depende sólo de una lógica matemática, sino que intervienen elementos socioculturales; es decir, se debe considerar quién plantea la pregunta, si un investigador o un profesor (el primero no tiene consideraciones puesto que no tiene un rol escolar de jerarquía). También se destaca que el **dME**, devela medianamente cuestionamientos de orden teórico, provocando en los estudiantes recelo o incertidumbre cuando un elemento completamente teórico es reformulado para los estudiantes, dejando en estos últimos, limitaciones para explorar nuevos objetos matemáticos, pues no los conocen pese a que medianamente los identifiquen. El **dME**, no genera discursos que confronten al estudiante, "*únicamente devela ciertos aspectos teóricos que tienden a controlar o a limitar lo que se supone debe conocer el alumnado*" **(Cantoral y Farfán, 2008, p. 281).** Los alumnos y alumnas de estudio en **Soto (1988)** e interpretados en **Cantoral y Farfán (2008)** conocen el logaritmo, sin embargo, no el que implica variables negativas, en consecuencia en ellos prevalece la definición escolar hegemónica ($\boldsymbol{log_a b = N}$, cuando $\boldsymbol{a^N = b}$) y por ende coartan la posibilidad de explorar, conocer y aceptar a $\ln(-x)$, o bien, de dar cuenta que el logaritmo del valor absoluto permite $\ln(-x)$ en el dominio real.

En ese sentido, otro hallazgo determinado, es que los estudiantes de docencia-matemática intentan refutar el discurso argumentativo hacia $ln(x) = ln(-x)$, aludiendo sus argumentos al concepto del $ln|x|$ sin embargo, no lo hicieron explícito, y se observa además, cierta necesidad de rigor matemático en su negación de la existencia de $ln(-x)$ con base en la fórmula de $\boldsymbol{log_a b = N}$**,** cuando $\boldsymbol{a^N = b}$, quizá por la costumbre didáctica, basada en demostraciones matemáticas.

Involucrando dichos elementos socioculturales, **Cantoral y Farfán (2008)** establecen categorías de análisis que expresan y determinan la forma hegemónica del **dME.**

Categorías en Cantoral y Farfán (2008)	***Interpretación***
Preguntas no escolares y sensibilidad a la contradicción: cuando el tema no se ha visto en los libros ni en clases.	Hace referencia a que los alumnos y alumnas, niegan la existencia del logaritmo de un número negativo, porque no está institucionalizado, los estudiantes niegan esta posibilidad pues se arraigan a lo único conocido.
Extensión de las operaciones y sensibilidad a la contradicción: cuando la algoritmia permite refutar el enunciado.	Una vez que los alumnos y alumnas vislumbran una posibilidad de reflexionar sobre la existencia del logaritmo de un número negativo, son limitados por una enseñanza escolar: la algoritmia, lo que hace que vuelvan al carácter operatorio y mecánico, sin la *heurística* de la que habla **Soto (1988)**, que tendería a desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes, favoreciendo la diversidad de argumentaciones.

Una deducción plausible y sensibilidad a la contradicción: cuando la definición produce divergencias fruto de la deducción.	Se refiere a que el **dME** permite de cierta manera, controlando y limitando a los alumnos y alumnas, analizar el saber matemático únicamente en lo que ellos y ellas reconocen como legítimo y coherente (lo institucionalizado), derivado de una enseñanza en el dominio real que no advierte de la existencia del logaritmo de un número negativo. Al presentar argumentos a favor del logaritmo de un número negativo basándose en el positivo, pueden medianamente explorar, puesto que les parece conocido.
Las primeras muestras de adhesión y aceptación del contrato.	Cuando se presenta el logaritmo de un número negativo, el alumnado tenderá a rechazarlo, empero logran *negociar* y entrar a un nuevo *contrato didáctico* (únicamente quien acepte el reto de explorarla sin arraigo a lo institucionalizado). Esta aceptación o rechazo del logaritmo de un número negativo, depende de la formación de identidades sociales, dado las relaciones de poder, entre alumnado y profesorado. Es decir que el estudiante es limitado por la enseñanza de libros y profesorado, que no incluyen el logaritmo de un número negativo. El criterio de verdad sobre la existencia del logaritmo de un número negativo proviene de una convención institucional, para cubrir tiempos y programas de estudio en los cursos de formación académica, consecuencia de desnaturalizar al saber matemático. Los estudiantes en su mayoría debido al rigor matemático niegan la existencia del $\ln(-x)$.

De la aceptación escolar al argumento matemático: sobre la contradicción en matemáticas y un dilema docente	Expresan que, se buscó "Encontrar formas argumentativas típicas de clase, a fin de buscar su aceptación por parte de los alumnos y alumnas" **(Cantoral y Farfán, 2008, p. 279).** Dicho de otro modo, que aprendiesen a como están acostumbrados, permeados por el **dME**. Si alumnos y alumnas percibían argumentaciones de acuerdo con sus conocimientos escolares, ello posiblemente les crearía una certidumbre mayor a la existencia del logaritmo de números negativos, *venciend*o así al **dME**. Esto se conjugo con el hecho que serían futuros docentes, así, los estudiantes después de resolver la ***SA*** tenían ahora que verbalizar si esos argumentos se usarían para enseñar el mismo tema, en su clase, pudiendo confrontarlos nuevamente y recoger una conclusión global.

Tabla 2. Categorías de análisis con base en el dME (Cantoral y Farfán, 2008).

Este análisis de las producciones de los estudiantes confirma y predice (para la población de **ICE**) de forma generalizada la inercia de los estudiantes a no aceptar el logaritmo de un número negativo, porque no está *institucionalizado*, puesto que la enseñanza es permeada e impuesta por el **dME**, que es probable que no haga el reconocimiento de logaritmos de variables negativas; omitiendo la advertencia de su existencia en otro dominio de números distinto al real, pero sin explicitar que en este último, es alusivo al logaritmo del valor absoluto. Es probable entonces, que los estudiantes de ingeniería recaigan sobre estas categorías.

Estas categorías de **Cantoral y Farfán (2008)** permiten concluir lo siguiente:

> Como se ve en el fragmento anterior, los puntos de vista sobre la aceptación de un nuevo resultado en la clase de matemáticas no son únicos. Estas formas de aceptación no provienen de la lógica interna de la deducción matemática, sino por el contrario, son el producto de una verdadera formación de identidades sociales de las personas, tal es el caso de las relaciones de poder tradicionales, maestro – alumno, texto – maestro, así como las situaciones de resistencia se construyen a través de la negociación de los significados en el ámbito escolar. La aceptación o la resistencia son más bien, el fruto de la interacción y de las relaciones de poder entre los y las participantes en su juego con el saber […] La definición de logaritmo de número negativo no había aparecido en ninguno de los libros a los que los alumnos y las alumnas habían tenido acceso. El criterio de verdad no proviene entonces, de la discusión propiamente matemática, sino de la convención institucional en curso de constitución **(Cantoral y Farfán 2008, p. 277)**.
>
> No bastó pues, la insistencia de la maestra, ni la serie de deducciones matemáticas que estaban en condiciones de entender. La inexistencia de ese resultado en el corpus visible de las y los estudiantes, hace suponer que el conocimiento matemático escolar, no sólo es el fruto de la deducción, no constituyen un sistema ordenado de proposiciones derivadas de principios, sino también y sobre todo, son la consecuencia de múltiples y complejos procesos de aceptación social **(Cantoral y Farfán, 2008, p. 279)**.

Es decir que la aceptación de un resultado en matemáticas no depende solo de la lógica matemática misma, sino de los elementos inmersos en el curso de constitución debido a la enseñanza tradicional, es decir, que es visible la influencia del **dME** en el trato y forma de manipular los objetos matemáticos. Fenómeno que a los estudiantes les impide explorar en su totalidad la situación de aprendizaje y expresar un arraigo a la no existencia del $\ln(-x)$. El **dME** no revela eficazmente la teoría de la variable real, en este caso, no advierte de la existencia del logaritmo de un número negativo, solo se restringe al caso de los positivos.

DEFINICIÓN DEL PROBLEMA, OBJETIVOS E HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN.

Se sabe que la teoría de variable compleja es una materia indispensable en la formación del ingeniero **(Rivaud, 2004)**, puesto que su estudio permite una simplicidad en cuanto al estudio de problemas afines a la ingeniería, hablando en especial en la carrera de ingeniería en comunicaciones y electrónica. Se ha descrito que esta materia está en al menos 5 de nueve semestres, sin contar las especialidades en general de la carrera (2 semestres posteriores) que seguramente también hacen uso de ella, siendo la especialidad de acústica donde se ocupa con certeza en los siguientes semestres. La aplicación de la situación de aprendizaje en el estudio de **Cantoral y Farfán (2008)** permite introducir a dicha teoría a través de la extensión del significado del logaritmo de un número negativo, considerando los obstáculos epistemológicos omitidos en la enseñanza tradicional del nivel superior, pero siendo más importante, la omisión de la práctica misma que llevo a esos ***OE***; un proceso de socialización, enmarcado por un debate donde las nociones matemáticas fueron discutidas y posteriormente, aceptadas. La confrontación con los obstáculos epistemológicos son clave para el entendimiento de la teoría, pues producen discusiones, debates y conflictos cognitivos, baste revisar el trabajo citado.

Aplicado a dos campos distintos en condiciones similares; ambos en nivel superior y dado que se habla de la misma ***SA*** (en esencia será la misma), es obligado cuestionarse si a 29 años de la primer aplicación de la ***SA*** y aproximadamente 3 centurias de origen epistemológico de la extensión del significado del logaritmo de números negativos, la población de **ICE** tendrá lógicas de razonamiento similares, por ejemplo saber si lograrán ser sensibles a la contradicción y explicar aquella forma propuesta por Euler, cuando $\boldsymbol{ln(-1) = \pi i}$; también vale cuestionarse si existen entre poblaciones en formación, docentes-matemáticos e ingenieros, relación en cuanto a sus mecanismos institucionales y formas de construcción de pensamiento, anticipando que la población de docentes-matemáticos recurre al rigor matemático.

O bien, saber si podrán dar cuenta o no, y por qué, que el logaritmo del valor absoluto, hace referencia a la existencia del logaritmo de un número negativo por extensión de los positivos $ln(-x) = ln(x)$, si darán cuenta del reclamo e importancia de la necesidad de una nueva teoría diferente a la real; ¿se creará una *resistencia o arraigo* de los estudiantes, a explorar solo el campo real?

Un cuestionamiento perseguido por esta investigación es aquel de orden sociocultural, que permite involucrar al **dME**, por ello observar la influencia de este en cuando al tipo de construcción del pensamiento expresada por los alumnos de **ICE**, también es importante para su caracterización.

Que a resumidas ideas se deberá poner énfasis si las argumentaciones esgrimidas en las y los participantes, dependen de los aspectos socioculturales además de su propia lógica de razonamiento, tal como sucedió en la población de **Soto (1988)**. Entonces se ha planteado el objetivo general y específicos, que se cree dan respuesta a los cuestionamientos generados, respectivamente son:

Caracterizar la construcción conocimiento matemático en estudiantes de *ingeniería en comunicaciones y electrónica* respecto del logaritmo de un número negativo, mediante la aplicación de una situación de aprendizaje.

El objetivo general es alcanzable mediante los siguientes objetivos específicos:

Caracterizar los resultados obtenidos de la ***SA*** diseñada por **Cantoral y Farfán (2008)**, mediante el marco Socioepistemológico.

Explicar cómo influye el **dME** en las producciones de los alumnos y alumnas de **ICE**.

Adaptar la ***SA*** diseñada por **Cantoral y Farfán (2008)** de manera tal que se pueda articular la superación de los obstáculos epistemológicos planteada por **Bachelard (2000)**. Y que tenga como énfasis la introducción de la ***VC*** como la construyó epistemológicamente Euler.

A lo que responden, las siguientes hipótesis.

- La enseñanza tradicional en el nivel superior de la **ICE** está enmarcada por el **dME**, que no advierte de la existencia del logaritmo de un número negativo, por ello el alumnado tendrá una tendencia de negación a dicho concepto. Remitiéndose en sus argumentaciones, al campo real.

- La diversidad de argumentos o juicios esgrimidos del alumnado de **ICE** dependerán de una lógica de razonamiento *controlada* por el **dME**, más que de su propia lógica de razonamiento, debida a su pensamiento matemático.

- La formación *institucional* de la población de **ICE**, hace referencia a los cursos de constitución en el alumnado, marcados por el **dME**, y que derivan de una *convención institucional* de no reflexionar acerca de la existencia del logaritmo de un número negativo. Ello conllevara a lo siguiente:

    - Dos caminos de aceptación en el alumnado que caracterizan la construcción del pensamiento matemático al respecto del logaritmo de un número negativo.

        - Argumentos similares a los de Bernoulli, evitando el trato con los números complejos, o no viendo la relación con ellos, y posiblemente, aceptando la existencia del logaritmo de un número negativo por extensión del logaritmo positivo. Sin dar cuenta que de lo que se habla es del $ln\,|x|$ en el dominio del campo real.

    - A la negación de la existencia del logaritmo de un número negativo, dado que *no existe* o no está definido institucionalmente.

      En ambos casos, se producirá una negación a explorar una propuesta nueva y desconocida, al menos en primera instancia previa a una reflexión derivada de los dos puntos anteriores. Dicha negación es dada por su pensamiento matemático, puesto que el razonamiento que les *permite* el **dME** es limitado y los remite a los puntos anteriores.

  - Si *institucionalmente* se habla del logaritmo de un número negativo, los alumnos y alumnas tendrían otro tipo de formación frente a la pregunta lanzada, es decir, estarían en condiciones de explorar un camino similar a aquel, determinado por Euler, sin restricciones de ahondar solo en el campo real. Y quizá, vencer los obstáculos epistemológicos.

- La forma de construcción del conocimiento en el alumnado de **ICE** dependerá del discurso oficial que no es tendencia al arraigo del rigor matemático, hecho que en los estudiantes de ingeniería se reflejara en la exploración total de la ***SA***.

- La forma de construcción del conocimiento en el alumnado de **ICE** dependerá de la definición escolar de $\boldsymbol{log_a b = N}$, cuando $\boldsymbol{a^N = b}$, puesto que es el acercamiento didáctico más cercano por la población. Será el argumento más socorrido, al igual que la población en **Soto (1988)**. Así, $\boldsymbol{log_a b = N}$, cuando $\boldsymbol{a^N = b}$, es clave para explicar la contradicción de Euler, puesto que deja entrever que al aplicar la función inversa del logaritmo a la forma $\mathbf{ln}(-\mathbf{1}) = \boldsymbol{\pi i}$, se llega a $\boldsymbol{e^{\pi i}} = -\mathbf{1}$. Este hallazgo es destacado en **Soto (1988),** puesto que, en los resultados reportados el alumnado niega un exponente y una base que dé como resultado un número negativo.

- Hacer énfasis en la instrucción de graficar $\mathbf{ln}(-\boldsymbol{x}) = \mathbf{ln}(\boldsymbol{x})$ en la ***SA***, puede confrontar e incentivar a la reflexión del alumnado a determinar que se hace alusión al $\mathbf{ln}|\boldsymbol{x}|$, derivando la no exploración del campo real, pudiendo remitir al campo complejo, es decir, esa instrucción podrá coadyuvar en la delimitación de teorías.

CAPÍTULO II. LA TEORÍA SOCIOEPISTEMOLÓGICA DE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA.

Bases teóricas

Cantoral y Farfán (2003) describen como un quehacer de la mayor importancia para la sociedad contemporánea, incorporar las matemáticas y la ciencia en la sociedad con afán de que se favorezca entre la población una visión científica del mundo. Las instituciones, principalmente tienen dicha labor.

En ese quehacer de *culturización científica*, comentan, se ha tenido la necesidad de implementar modificaciones educativas en el campo específico de las matemáticas, con base en diseños mejor adaptados a las prácticas escolares.

Detrás de los párrafos anteriores, hay un sinfín de esfuerzos en investigaciones para caracterizar los fenómenos relativos a la enseñanza y aprendizaje, específicamente de la matemática; y de esa problemática se cuenta una evolución al respecto (**Cantoral y Farfán (2003)**). Evolución que concluye con el fenómeno de estudio en la disciplina de la matemática educativa.

Se puede sintetizar y mencionar de **Cantoral y Farfán (2003)**, que la enseñanza de la matemática no consideraba en sus inicios ninguna *flexibilización* para su enseñanza y esta labor se dejaba a los *expertos,* es decir, a los matemáticos puros. La enseñanza en la matemática dependía de los métodos que el profesor plasmará de acuerdo con su criterio y reflexión (**una didáctica sin alumnos**), pues de cierta manera eran ellos los que dominaban los temas y quizá sabían en ese sentido, explicarlos mejor.

Posteriormente, se incluye la idea de cómo aprenden las personas, lo que da paso a una aproximación cognitiva involucrando ahora las concepciones de estudiantes (**una didáctica sin escuela**) en contraste a la obvia *omisión* de las consideraciones al alumnado en la **didáctica sin alumnos**. Se revela en esta etapa que las interpretaciones de los estudiantes no son únicas, y también que la *institución* permea los procesos de pensamiento. El término institución ya se interpreta en un sentido más amplio, haciendo alusión al ámbito en donde el individuo aprende: la familia, la clase, la escuela, etc., **(Cantoral y Farfán, 2003, p.33)**.

Otro hallazgo se determina cuando se concluye que existen *piezas* que componen un saber matemático, que bien pueden ser bastante complejas y que requieren de habilidades para su comprensión, que no son desarrolladas en el aula. La complejidad radica también en que requieren de una serie de objetos construidos previamente, confirmando que la enseñanza de los saberes no puede ser lineal en el sistema escolar. Dicho de otro modo, existen saberes matemáticos que son tan complejos que no dependen de la maestría en la enseñanza, estos deben cuidadosamente involucrarse en un plan de estudios pues la complejidad es propia y natural de los saberes, en ese sentido la matemática, debe al menos ser considerada en su misma enseñanza. En este sentido **una didáctica en la escuela, pero sin escenarios** revelo la importancia del estudio *histórico-conceptual* en la matemática, mediante el estudio de los *fenómenos de calor*, pues la complejidad del contexto exhibía las debilidades y las omisiones tan importantes de tipo conceptual (fenomenologías y constructos característicos) que se ponen en práctica cuando se introduce el saber al aula (segmentarlo en partes iguales y aparentemente secuenciadas para facilitar su enseñanza).

Es así como se puede observar un constante cambio de paradigma en la *caracterización de fenómenos relativos a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*; se observaba ya, algo que sería determinante y que fungía como núcleo estable; la influencia y determinación del *contexto* en dicha caracterización. Es decir, considerando escenarios socioculturales en la construcción del conocimiento matemático.

Eso implicó mirar a la matemática como una *práctica humana*; estas intervienen activamente y construyen al objeto matemático (sin una definición escolar de por medio).

Estas *prácticas humanas* pueden observarse en el devenir del tiempo y en sociedad, y su papel activo y primordial en la construcción de saberes matemáticos. Así se tiene entonces una elección metodológica para mejorar la caracterización de los fenómenos didácticos matemáticos, la *descentración del objeto*.

Otra importante reconceptualización fue incorporar un polo más al triangulo didáctico tradicional del cual se basaban los estudios en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; *Alumno - Profesor – Saber* (**Cantoral, 2013, p. 45**). El estudio del entorno sociocultural permite observar también las dinámicas entre los 3 polos anteriores y el *medio*, para así incorporar otros cuestionamientos al cómo enseñar, ahora también se indagaba sobre “qué enseñar, a quién, cómo y por qué enseñar” (**Cantoral, 2013, p. 46**).

En conclusión, un individuo en interacción en su medio social siempre es susceptible de aprender (y enseñar) algo nuevo; y de quien lo aprende (la sociedad interactuante) también está en condiciones de aprendiz y mentor. Nótese que, en dicho proceso puedan no dar cuenta de ello. Esta concepción y reestructuración de paradigmas se perfila para explicar la construcción del conocimiento matemático y atañe elementos sociales y culturales. Y entiende que la *institución* adquiere un significado más amplio y que tiene influencia directa con el modo de socialización del conocimiento que enmarca los procesos de pensamiento involucrados. (**Cantoral, 2013, p. 44**).

Esta tendencia de que la construcción social del conocimiento matemático es fuertemente apoyada en el entorno sociocultural, es la teoría Socioepistemología de la matemática educativa.

La sección de **matemática educativa** en el **Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional**, se fundó en el año de 1975, para el estudio sistemático para localizar los fenómenos que caracterizan a la enseñanza de la matemática y su mejora progresiva **(Cantoral y Farfán, 2003, p. 28)**.

Cabe mencionar (por lo que se ha descrito) que en nuestra disciplina se tiene por entendido que parte de las problemáticas, son inherentes a la matemática misma y no a la educación, de lo contrario se llamaría Educación Matemática. Esto nos distingue de otras disciplinas.

Esta visión característica de nuestra disciplina ha tenido sistemáticamente un fuerte desarrollo en México, hablando de investigación, estudios, divulgación, publicaciones, haciendo comunidad y cuyo fruto importante entre otros ha sido el fortalecimiento de la misma disciplina.

La teoría Socioepistemológica de la matemática educativa es un gran referente para hablar de matemática educativa ya que es una teoría que atiende y propone explicar la problemática de caracterizar los fenómenos relativos al aprendizaje y enseñanza de la matemática. Cuyo fin y objeto de estudio es la **construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional**, el cual pretende coadyuvar para el objetivo mismo de la matemática educativa; **democratizar el aprendizaje de las matemáticas**.

Ahora bien, la Socioepistemología establece que existen formas de pensamiento dentro y fuera del salón de clases, unas más visibles que otras pero que radican en las prácticas de la actividad humana. Esto, no se reconoce por el paradigma clásico, es decir, la matemática no está en forma de ecuación o integral. Sin embargo, si se hace un análisis meticuloso, (digámoslo así) encontramos matemáticas en cada momento de nuestra vida. Por ejemplo, las ecuaciones de tiro parabólico pueden ser vistas de dos maneras hipotéticas: 1) un jardinero que a base de experimentación logra regar sus plantas más lejanas, cuando acomoda a 45° la manguera de riego. 2) Representando el tiro parabólico en lápiz y papel, mediante un dibujo, y las ecuaciones escritas para el cálculo, manipulando los “signos clásicos de la matemática” (cantor videófono). Digamos que la primera es la representación real y la segunda es ideal, sin embargo, en ambos casos está inmersa la matemática.

Para este tipo de concepciones y no entrar en conflicto al respecto de que es matemáticas o no, la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa **[TSME]** (**Cantoral, 2013**) integra las formas sociales de pensamiento antes descritas, amplia y reconoce 3 formas de saber matemático: el **saber científico** (culto o sabio), el **saber técnico** y el **saber popular**.

> El **saber culto** es aquel del que hablábamos, ese que se observa y se **usa** en la escuela con definiciones y demostraciones, axiomático y digamos, "irreconocible fuera de los signos" (**Grupo Didáctica y Nuevas Tecnologías, 2004**).
>
> El **saber técnico** es referido a aquel aplicado a situaciones concretas, quizá para entender la realidad y dar cuenta que los saberes, no solo viven en ideal de papel y lápiz. La Socioepistemología reconoce entonces que la ingeniera hace matemática, porque la **usa** implícitamente para explicarse el comportamiento de un circuito. Lo mismo para el abogado, el contador, el mecánico automotriz, u otro profesionista o técnico.
>
> Por último, el **saber popular** es aquel saber que se reconoce en el ámbito de la gente en su faceta más común, fuera del ámbito profesional o técnico. Pertenece al futbolista, al plomero, al albañil, a quien va mercado y requiere hacer las cuentas. Todos ellos también elaboran de alguna forma una matemática que la *teoría socio*, reconoce y la integra en la construcción social de conocimiento matemático y su difusión institucional.

Es así como la matemática está en toda actividad humana, y por tanto tiene un enfoque social y cultural.

Surge un cuestionamiento por demás obvio, es relevante que de alguna manera exista *un cómo,* que nos explique la realidad que se vive en torno a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas**,** un estudio sistémico para explicar, entender y entonces intervenir, a los fenómenos relativos.

Es así como la Socioepistemología para explicar su objeto de estudio, hace énfasis en analizar un saber matemático desde una unidad socioepistemológica en cuatro ejes primordiales, a la que llama, *problematización del saber* cuyo eje conductor es el de la búsqueda de la *practica social*, o bien, buscar al rol sociocultural en la construcción social del conocimiento. (**Grupo Didáctica y Nuevas Tecnologías, 2004)**. Teniendo en mente comprender la naturaleza social del saber matemático.

Problematización del saber:

Estos componentes de los que se habla, están interrelacionados y por ello su estudio visto como un sistema. Es complicado en ese sentido delimitar exactamente entre una y otra, puesto que la integración de las 4, conforman una unidad de análisis Socioepistemológico. En particular la componente sociocultural, permea explícita o implícitamente y de diversas formas en las otras 3 y es la de mayor dificultad para determinar y delimitar. En concreto, esta componente tiene lo que articula el objeto de estudio de *la socio*, es decir, la *práctica social*. Se requiere de un análisis que se enfoque en aquello que sistémicamente es común y norma el accionar de la construcción social del conocimiento. Las componentes con base en **Cantoral (2013),** son:

Epistemológica: Es quizá, haciendo una reflexión, la componente más amplia y extensa puesto que su pilar, es el devenir del tiempo. Habla de las formas en que se puede encontrar al saber, o bien, al objeto matemático; como emergió y a través de las circunstancias que lo hicieron posible, pero centrándonos en la actividad humana. El hecho no es histórico, sino conceptual, ya que según **Bachelard (2000)** el estudio del epistemólogo recoge obstáculos epistemológicos, es decir, aquello que se tuvo que confrontar para conceptualizar a la noción de estudio. Aunado a la teoría socio, nos remitimos a las practicas humanas generadoras de los ***OE***. Si bien es la confrontación del

OE lo que permite la construcción del saber, el enfoque sociocultural nos hace orientarnos a las prácticas. Esta dimensión puede estar conjugándose con las demás, es decir hacer un análisis epistemológico – cognitivo, explorando en dos épocas diferentes, concepciones de un objeto matemático.

Didáctica: Este componente estudia la naturaleza del saber cómo objeto *institucional* en ambientes escolares o no; simplemente donde se puede reproducir su enseñanza o puede ser aprendido, independientemente del método. Si la Socioepistemología involucra sociedad y cultura, aquí es más claro el porqué del segundo término. Pues el método depende de la cultura en donde se produzca y reproduzca el saber.

Se ha dicho que la sociedad y la actividad humana influyen en la construcción del conocimiento, sin embargo, la cultura como características de principios que diferencian entre grupos sociales interviene en este componente en el sentido que un nativo y residente de una cultura A, puede tener problemas al adaptarse a una cultura B. Puesto que cada cultura maneja y hereda principios, hábitos, costumbres e ideologías distintas. Sin duda un proceso largo puede hacer que ambos miembros convivan. Este hecho tan natural pero tan cierto, es la dinámica de la *costumbre didáctica*, que es propia de los modos específicos de una enseñanza particular y guían la transmisión del conocimiento, desarrollado en una sociedad sí, pero con una cultura especifica. Esta puede ser plasmada en discursos, libros, apuntes de clase, revistas, dibujos, etc.

Puesto que se habla de enseñanza, se entiende que el saber matemático se ha adecuado a un sistema de enseñanza, por lo que esta componente también evidencia cómo es ese saber y cómo ha mutado, en qué ha cambiado, en qué se ha convertido, cómo se explica en la escuela, cómo lo definió la escuela y por qué. Es decir, que esta dimensión atiende a la matemática y la matemática escolar. Se hacen contrastes por ejemplo entre, como se explicó en las instituciones en sus orígenes epistemológicos y como se explica ahora. En otras palabras, podemos decir que es la que estudia más de cerca al **dME**.

Cognitiva: Esta dimensión es alusiva a cuando una persona a nivel de estructura mental está en la acción de aprender, tanto dentro como fuera del salón de clases. Por tanto, puede formar una concepción en primera instancia y ser modificada conforme el individuo interactúe y relacione dicha concepción en sociedad (conforme viva ese saber en sociedad). Por lo tanto, está en un proceso de significación progresiva a nivel mental.

Las dificultades o facilidades en cuanto a concepciones de un saber matemático, sus representaciones diversas y en tránsito entre ellas, y qué prácticas permiten este ir y venir mental, contrastar las concepciones en tiempo actual o pasado, etc., son todos motivos de estudio en esta categoría. La Socioepistemología no se centra en las múltiples representaciones de un objeto, sino más bien, estudia qué prácticas llevan a representar al objeto, cómo se representa, en este sentido acepta que el conocimiento depende de las experiencias vividas que a su vez modifica las percepciones y creencias e incluso identidad de los individuos.

Sociocultural: Es la categoría que se encuentra de manera explícita o implícita en las otras tres dimensiones, y es referente para situar en su dominio la problematización del saber, pues esta categoría tiene una amplia influencia en las otras. Es por ello que delimitarla suele ser complicado, sin embargo, guía sistémicamente en el objetivo de la teoría Socioepistemológica. De ella se infiere el rol y la norma de cada actor en la **CSCM** y naturaleza del saber matemático en ese rol. El mecanismo social dicho o rol, podrá interpretarse como la búsqueda de consensos, adaptación de instrumentos mediadores, conformación de tradiciones, etc. Este mecanismo se localiza en el ejercicio articulado de prácticas intencionales y normadas. Y se identifican como prácticas "el medir, predecir, modelar y convenir" **(Cantoral, 2013, p. 62)**. Aquella que norma a determinado grupo de prácticas, se llama práctica social y cumple determinadas características, por ejemplo, normar el accionar de todos los elementos involucrados en y para entender la construcción social de conocimiento matemático. Esta dimensión se enfoca a "delimitar el papel que juega el escenario histórico, cultural e institucional en la actividad humana" **(Cantoral, 2013, p. 62)** obviamente tomando a la matemática como parte de esta última.

La inferencia de la componente sociocultural implicaría concepciones orientativas de las prácticas humanas al respecto de la emergencia de un objeto matemático, además del entorno cultural del cual emerge la concepción; si es en la práctica de un matemático, un ingeniero, o un artesano, etc., denominando a estas orientativas, prácticas de referencia.

CAPÍTULO III. LA INGENIERÍA DIDÁCTICA COMO METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN.

En este capítulo se describe quien lleva la organización de la investigación y también permite articular el marco teórico. Hablamos de la metodología de la ingeniería didáctica [***ID***] que, por tradición, es bien conocida junto a la teoría Socioepistemológica, puesto que “los diseños en ingeniería son usados con frecuencia para la construcción de situaciones de aprendizaje” **(Cantoral, 2013, p. 174)**.

Cabe señalar que la ***ID*** presenta ciertas modificaciones respecto de sus orígenes en la escuela didáctica francesa en los años 80´s, con el fin de coadyuvar en la evidencia del modelo de la construcción social del conocimiento matemático que propone la teoría Socioepistemológica.

La ***ID*** surge como un producto de políticas gubernamentales y de grupos de investigación, ambos dedicados a atender los problemas suscitados de la didáctica de la enseñanza en Francia (**Rincón, 2015**). Entre sus objetivos principales de creación, **Artigue (1995)** destaca que se tenía la intención que esta metodología fuese a separar, en términos generales, la investigación de la acción **(p. 35, 36)**. Investigación por cómo generar elementos teóricos para intervención en el aula a través de una metodología que realmente *atrapase* la complejidad del sistema estudiado, articulando investigación y acción para así no entorpecer la labor de alguna de ellas (ambas importantes), afirmando así la posibilidad de una acción racional sobre el sistema (educativo). En ese sentido la intervención racional en el aula daba paso a una práctica investigativa que creaba a su vez, elementos teóricos elaborados por la ***ID***, y que nuevamente volvían a ser motivo de práctica educativa, es decir, de intervenciones en aula e influencia en el sistema. Así, la ***ID*** se constituye como una metodología de investigación que “se aplica tanto a los productos de enseñanza basados o derivados de ella; pero también como una metodología de investigación para guiar las experimentaciones en clase” (**Farfán, 1997, p.13**). Lo anterior quiere decir que la ***ID*** crea diseños para la experimentación e intervención en el aula, al mismo tiempo que guía toda la investigación en sí (es dual, al tiempo que crea diseños, es también una metodología de investigación).

El nombre de esta metodóloga es particular puesto que se hace una analogía al quehacer del ingeniero e ingeniera, Michèle Artigue menciona:

> Se denominó con este término a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los objetos depurados de la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo. (**Artigue, 1995, p. 33**)

Retomando y ampliando esta idea, se puede explicar que el ingeniero posee un conocimiento científico, y que ciertos fenómenos de estudio que experimenta en su campo de aplicación, la ciencia aun no los retoma ni estudia, sin embargo, se les tiene que hacer frente, ya que probablemente representan una problemática en sociedad. Es así que los conocimientos científicos del campo ingenieril permiten que los fenómenos a los cuales se enfrentan se puedan ir caracterizando y estudiando. En analogía con el docente, quiere decir que el profesorado en el aula experimenta una serie de fenómenos y dinámicas expresadas por sus estudiantes, para cualquier tipo de intervención didáctica que pueda aplicar para propiciar el aprendizaje en sus alumnos y alumnas. Sin embargo, debido a sus conocimientos, sean empíricos o no, puede comprender o al menos hacer frente a dichos fenómenos, hasta teorizar o caracterizar, y volver a empezar.

Fases de la metodología de investigación.

Estas delimitan y esquematizan el proceso de trabajo de la ***ID***. En la literatura (es decir, en otras fuentes de información) en ocasiones cambian de nombre, pero conservan su esencia. Las fases según **Artigue (1995)** son: *análisis preliminar; concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería; experimentación; análisis a posteriori y evaluación*. Estas, se describen a continuación.

Análisis preliminar

Es una mirada preliminar a un saber matemático del cual se requiera un diseño de intervención en el aula. Cabe mencionar que la ingeniería didáctica, dada la problematización del saber, se entiende como ingeniería didáctica robusta pues en nuestra disciplina, se le añade el componente sociocultural al análisis preliminar. Pese a ello, el *análisis preliminar* se lleva a cabo en tres componentes; *cognitivo, didáctico y epistemológico*, siendo el componente *sociocultural* visible, inherente e influyente a los otros tres.

Para nuestro caso no hablamos específicamente del diseño de una *situación de aprendizaje*, sino de su adaptación, según los objetivos de esta investigación (note que se exhibe la característica de mejora continua o intervención en un diseño ya establecido de la ***ID***).

Por otro lado, las conclusiones o hipótesis determinadas en esta fase servirán para las siguientes, de acuerdo con las necesidades requeridas del rumbo que tomará la investigación. Se podría entender entonces que de estos análisis preliminares depende en gran medida el desarrollo de toda la investigación, por ejemplo, para las predicciones de los posibles comportamientos, devenires y consecuencias de los estudiantes que componen la población de estudio una vez aplicado el diseño de intervención en aula.

Es el marco teórico de la Socioepistemología que permite observar de manera sistémica y holística cómo se encuentra el saber matemático respecto de las componentes mencionadas, a modo de observar la construcción social del saber, o simplemente caracterizar en términos de la teoría.

Concepción y Análisis a priori

El *análisis a priori* es una fase donde se lleva a cabo una serie de predicciones con base en el *análisis preliminar*. Para ello es importante determinar indicadores que puedan medir, contrastar o bien, referenciar las predicciones hechas con lo que sucederá con la aplicación del diseño de intervención. Estas se denominan *variables de comando o de control*.

Variables macro didácticas y variables micro didácticas.

V. Macro-didácticas o globales: Son las que de manera general brindan orden al desarrollo de la ***ID*** y al diseño de intervención, puede ser una idea general.

V. Micro-didácticas o locales: Aquellas identificadas que cumplen una función particular. Puede ser una serie de pasos, o de ejercicios, preguntas, entre otras pero debidamente justificados, para lograr una finalidad en el estudiante de acuerdo con ciertas tareas que pueda realizar.

El desarrollo, uso y control de estas variables permite determinar posibilidades de intervención controladas, sobre el funcionamiento total del sistema o del diseño de intervención, frente a las concepciones e interpretaciones de los estudiantes.

Usualmente se definen primero las variables macro-didácticas y después las micro, pero ambas variables se relacionan entre sí. Por ejemplo, una idea global, puede analizarse mediante las condiciones que configuran las variables locales.

Es así como el *análisis a priori* puede y debe tener el control del significado; sincronizando y controlando la secuencia de tareas a trabajar para el estudiante.

Experimentación, observación y toma de datos.

Se refiere a la dinámica misma en la cual los estudiantes interactúan con el saber, mediante la resolución de la ***SA***. Como resultado se tienen una serie de datos de comportamientos y concepciones, mismos que tuvieron ya un antecedente descriptivo y predictivo en la etapa anterior. **Artigue (1995)** menciona que *"estos datos se completan con frecuencia con otros obtenidos de la utilización de metodologías externas, como cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, aplicadas en distintos momentos"* **(p.43)**.

En nuestro caso utilizamos una metodología externa; como es expresado por **Cantoral y Farfán (2008)**, se realizan entrevistas personales entre *investigador-alumno/alumna* con el objetivo que se agudice la variable macro-didáctica, alusiva a la *sensibilidad a la contradicción*.

En esta etapa, se debe poner especial atención en las interacciones de los alumnos y alumnas con el diseño, las retroalimentaciones que puedan aportar en forma de dudas o comentarios. También se debe estar atento con el rol del profesor; el investigador debe estar al tanto de la dinámica entre ellos, si es que el profesor inhibe, explica, intenta apoyar, etc., a sus estudiantes.

El trabajo de recolección de datos en esta etapa es materia prima para la etapa siguiente.

Análisis a posteriori y evaluación

En esta fase se destaca el análisis e interpretación de datos, generados en la etapa de *experimentación*. Estas interpretaciones de lo sucedido se contrastan con lo que se dijo que pasaría (hipótesis o predicciones) formuladas del *análisis a priori*. De aquí una característica importante, pues se dice que la ***ID*** es una metodología de validación interna. *La confrontación de los dos análisis… fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación…* (**Artigue, 1995, p. 48**)

Esto quiere decir que no se necesita de un grupo de control, de uso repetido, o bien, tampoco se requiere un grupo experimental, porque el hecho didáctico es por estudio de caso; además, esta confrontación de análisis se da entre análisis reconocidos, creados y entendidos sólo por la propia metodología de estudio, no por cuestiones externas a ella. Se afirma entonces que la ***ID*** se evalúa a sí misma. Cabe mencionar también que la configuración de control de significado (entre V. Macro y micro) – hipótesis (lo que se supone hará el estudiante) generan un tipo de *control interno* de la ***ID***; configuración misma de la que deriva en resultados, también internos.

Fases de la metodología aplicadas a la investigación.

Análisis preliminar. La problematización del saber.

La dimensión didáctica

El trabajo de **Ferrari (2001)** lleva a cabo un amplio estudio epistemológico y didáctico de lo logarítmico, expresando que ésta noción se presenta en el sistema escolar en escenarios que carecen de significación al respecto de su origen epistemológico, puesto que se han perdido a lo largo de su devenir en saber enseñable los elementos clave de origen que llevaron a su comprensión y emergencia.

Se han perdido los momentos de lo logarítmico; la relación entre progresiones (aritmética y geométrica), el uso de logaritmo como modelizador de fenómenos físicos y posteriormente, como objeto teórico, siendo indispensable los dos primeros momentos para la emergencia de su estudio como objeto en sí (**Farfán y Ferrari, 2001c**). Esta omisión de los momentos, excluye también constructos característicos y provoca una *dislexia* entre la noción logaritmo y su enfoque funcional, relativo al estudio de logaritmo como objeto teórico. Cabe mencionar que en el nivel superior el concepto de logaritmo es visto como objeto teórico, y en el nivel medio, es relativo al logaritmo como herramienta para la resolución de ecuaciones y también como operatorio, es decir, en el cálculo de números de acuerdo a la definición escolar, destacando que no hay una conexión y transición entre los momentos propuestos por **Farfán y Ferrari (2001)**, a modo que se favorezca la construcción del logaritmo como función. Se observa entonces, que en el sistema escolar del nivel superior, el logaritmo sólo aparece como "la estructura teórica siguiendo ideas de rigor y purismo matemático, de descontextualización y abstracción" **(Cantoral y Farfán, 2001a, p. 65)**.

Por otro lado, para **Farfán y Ferrari (2010)**, en su segundo momento de análisis, al respecto de lo logarítmico, mencionan lo siguiente:

> *"[…] el discurso matemático escolar involucra textos escolares, así como a profesores y alumnos, generadores de ciertas prácticas escolares, que nos permiten caracterizar herramientas logarítmicas utilizadas en aulas mexicanas de nivel medio superior y superior."* **(p. 55)**

Esto describe una especie de *círculo argumentativo* dado entre práctica escolar, alumnos, profesores y libros de texto; los alumnos y alumnas se arraigan a nociones escolares trabajadas con intensidad, siendo sus profesores formados en condiciones similares, fenómeno que también se plasma en libros de texto, provocando entonces el *círculo argumentativo*. Caso concreto del trabajo de **Soto (1988)**, cuando los estudiantes población muestran arraigo a la definición escolar de logaritmo de un número positivo, para invalidar así el $ln\,(-x)$. Al no ser un saber institucionalizado, no son sensibles a indagar sobre el $ln\,(-x)$, en consecuencia se quedan en el campo real, pues argumentan que tal concepto, no existe. Cabe mencionar que estos estudiantes de docencia-matemática en la ***SA*** aplicada sobre el logaritmo de un número negativo, infirieron sin hacer explícito que el $ln\,|x|$ permitía el $ln\,(-x)$, consecuencia que se ha dicho, se debe al carente estudio de la función logarítmica.

Entonces, en la población y cultura áulica de los estudiantes de **ICE,** es previsible el desconocimiento de los elementos previos de la noción de función logaritmo, y en consecuencia, cuando se les cuestione sobre el $\ln(-x)$, no lo reconocerán a través del $ln|x|$; esto en variable real. Confirmando que la enseñanza en la **ICE**, sobrevalora los aspectos formales de los logaritmos, tomados estos como objeto teórico; por ejemplo, para el uso en la materia de *ecuaciones diferenciales*, donde se les relaciona como función inversa de la exponencial, como objeto axiomático; donde redunda lo algebraico, desprovisto de significados gráficos, relativo al estudio del $ln|x|$; "lo cual redunda en la construcción de un universo restringido de formas gráficas y expresiones analíticas en la cultura áulica y por tanto en los saberes de los estudiantes y profesores" **(Farfán y Ferrari, 2001a, p.7)**. "Se requiere una concepción de función en tanto objeto que permita que otro procedimiento actúe a su vez sobre él, añadiéndosele un manejo eficiente de formas gráficas extenso y rico en significados" **(Farfán y Ferrari, 2001c, p. 7)**.

Por otro lado, **Bagni (2001)** y **Trujillo (2005)** muestran que los números complejos no son abordados satisfactoriamente para la construcción de la teoría de variable compleja; **Trujillo (2005)** exhibe también que los profesores desconocen el origen epistemológico de los números complejos, lo que trae como consecuencia que sean vistos en el sistema escolar como simples definiciones, además de ser presentados en ecuaciones de segundo grado. Esta presentación no apoya a la superación de lo real como obstáculo epistemológico del $ln\,(-x)$, pues carentes de significado, tanto los números complejos y el concepto de logaritmo con enfoque funcional, pueden no considerarse en la construcción de $ln(-x)$, y así, negar su existencia. Cabe recordar que en el desarrollo de la ***SA*** por parte de los estudiantes, tienen que explicar el por qué, $\ln(-1) = 0$ y $\ln(-1) = i\pi$.

Trujillo (2005) exhibe y aclara que la ***VC*** no es una generalización de la variable real; sin embargo en el sistema escolar se observa que la didáctica es tendiente a ese paradigma. Al respecto comenta que; "La nueva teoría llamada variable compleja surgió de la necesidad de ampliar el dominio de la función logaritmo de un número negativo, esta nueva teoría posee entonces toda una nueva serie de propiedades las cuales ya no las comparte del todo con la teoría matemática de variable real" **(Trujillo, 2005, p.47)**. Esto coadyuva en la inercia de los estudiantes al arraigo en la variable real.

Retomando nuevamente lo de **Farfán y Ferrari (2010)**, al respecto de su análisis del **dME**, se explicita también que los acercamientos principales para la enseñanza de los logaritmos son: como *exponente*, *como función inversa y como la primitiva*. **(Farfán y Ferrari, 2010, p.54.)**. Contrastantes con los 3 acercamientos didácticos que indican **Cantoral y Farfán (2008)** de la definición logaritmo; *progresión geométrica y aritmética* (como exponente), como la *integral de la hipérbola equilátera en la rama positiva* (la inversa de la función exponencial) y la *estructuralista*. **(p. 257)**. En común, se tiene que en el nivel superior en la **ICE**, se considera el logaritmo como *exponente* y se hace referencia también a la definición escolar de logaritmo, o bien a la que corresponde epistemológicamente a progresiones como sucesión de potencias (*progresión geométrica*), pero que responde escolarmente al *exponente al que hay que elevar un número, llamado base, para obtener otro número determinado;* $\boldsymbol{log_a b = N, a^N = b}$.

Por otro lado, en estudiantes de **ICE**, esa definición se asocia al *logaritmo como función inversa de la exponencial*, debido a que se emplea en segundo semestre en la materia de *ecuaciones diferenciales*, para resolver precisamente, ecuaciones diferenciales exactas con factores integrantes, presentándose en un acercamiento orientado a lo *funcional* pero que se restringe a lo algebraico

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}} = e^{\ln x} = x \qquad \textbf{(6)}$$

Factor integrante. Función exponencial como inversa del logaritmo.

Cabe mencionar que la materia de *ecuaciones diferenciales* es formativa para comprender en semestres posteriores, análisis de sistemas físicos afines a la ingeniería.

Algunas otras materias que hacen uso del concepto de logaritmo en la **ICE** en el plan de estudios son (hasta tercer semestre que es donde se cursa la materia de ***VC*** y que se piensa es el momento preciso para aplicar la ***SA***):

Semestre	***Materia***	***Tema y unidad***	***Objetivo de la unidad***
Primero	Cálculo diferencial e integral	*Funciones logarítmicas* Unidad II	El alumno manejará el concepto de función real en variable real y sus características principales.
Primero	Fundamentos de álgebra	Operaciones con logaritmos de números complejos Unidad I	El alumno resolverá ejercicios que involucren números complejos usando las operaciones básicas del álgebra.
Tercero (materia que se supone no	Variable compleja	Funciones complejas exponencial y logarítmica.	El alumno identificará las funciones complejas en sus diferentes formas y las podrá operar adecuadamente en el análisis y solución de problemas de la

será cursada por el estudiante)		Unidad I	física e ingeniería.

Tabla 3. Extracto del plan de estudios de la carrera ingeniería en comunicaciones y electrónica, ESIME Zacatenco, IPN, plan 2004.

No se observa ningún tipo de acercamiento planteado bajo la idea del logaritmo de un número negativo como introducción a la ***VC***, aunque quizá sea implícito en el logaritmo de números complejos, en la materia Fundamentos de álgebra (se consultó el programa de dicha materia). Sin embargo, el estudio del tema *Funciones logarítmicas*, puede aprovecharse en el primer semestre, para que los estudiantes puedan hacer explícito que $ln(-x)$ es alusivo a $ln\,|x|$, como dice su objetivo; "*…concepto de función real en variable real y sus características principales"*.

Ahora bien, determinar una serie de configuraciones para que los estudiantes de **ICE** confronten la problemática de $ln(-x)$ y puedan desarrollar sus argumentaciones hasta llegar a concluir $ln\,|x|$; de tal modo que se interese por explorar y reflexionar abiertamente el $ln(-x)$ hacia la ruta de la ***VC***, es una tarea de la presente investigación, así como la consideración de los números imaginarios.

En la presente investigación se aplicará la situación de aprendizaje diseñada por **Cantoral y Farfán (2008)**, al campo de estudiantes de ingeniería, previo al curso de variable compleja dado en tercer semestre, estas condiciones generan lo que se tiene planeado: Estar en condiciones, lo más cercanas a las epistemológicas e intentar que los estudiantes signifiquen la ***VC***, como lo hizo Euler, considerando todas las nociones involucradas para explicar $\ln(-1)$, es decir, la consideración de los números complejos y el reconocimiento de $\ln|x|$ dado el $\ln(-x)$. Ello sin afirmar que lo que sucede históricamente se repite pues nuestros estudiantes no son los personajes involucrados en la controversia.

La siguiente tabla explica la idea de llevar desde condiciones escolares, a las condiciones epistemológicas y que son objetivo a rediseñar en la ***SA*** original.

Condición epistemológica1.	Euler, Leibniz y Bernoulli, tenían reglas de operación de los números complejos, desconocían a la VC.
Objetivo para la *SA*.	Conocer a los números complejos, operarlos, pero a la vez, no conocer la **VC** al momento de resolver la ***SA***.
Condición escolar1: Primer semestre. Fundamentos de álgebra.	En esta materia se llevan a cabo operaciones básicas con números complejos, de hecho, se tiene el acercamiento donde se enseña al alumnado que una ecuación de segundo grado es la que propicia el origen de los mismos **(Martínez y Antonio, 2009; Bagni, 2001)**. No se enseña la teoría de ***VC***.
Condición epistemológica2.	Euler involucra a los números complejos en $\ln(-x)$, determina que es un logaritmo complejo, dando asi la introducción a la teoría de variable compleja. Pese a que no es documentado, es probable que haya dado cuenta que el logaritmo del valor absoluto permite la existencia de $\ln(-1)$ en el campo real.
Objetivo para la *SA*.	Que los alumnos y alumnas tengan los conocimientos adecuados para enfrentar una lógica de razonamiento que permita resolver las contradicciones.
Condición escolar2: **Segundo semestre. Operaciones con logaritmos de números complejos.**	Conjeturando que los estudiantes de ingeniería pueden usar la relación entre operaciones inversas de la función exponencial y logarítmica, esto les permitirá explorar sobre la existencia del logaritmo de un número negativo y explicar la contradicción mayor, cuando vean que el $\ln(-1) = \pi i = e^{\ln(-1)} = e^{\pi i}$ por tanto $e^{\pi i} = -1$. Cabe mencionar que la población de **Soto (1988)** se apoyó para negar la existencia del logaritmo de un número negativo, en que no sabían de un número que al elevar una potencia diera como resultado un número negativo. Es probable que si han operado logaritmos de números complejos sepan que el $\ln(-x)$ es complejo, en tal caso, lo demostrarán en la ***SA***.

Primer semestre. Fundamentos de álgebra. ***Funciones logarítmicas.***	Este uso de *función logarítmica* prevé un trato previo y conocimiento del estudio de logaritmo, que se puede emplear para el reconocimiento de $\ln\lvert x\rvert$ y en consecuencia concluir que $\ln(-x)$ es real.

Tabla 4. Condiciones escolares por conseguir con base en las condiciones epistemológicas.

Si bien es cierto que se opta por la diversidad de argumentaciones por parte de los estudiantes de **ICE**, se pretende que de ellas se encamine hacia la significación epistemológica realizada por Euler.

Por otro lado, sí los alumnos y alumnas de **ICE** han conocido *institucionalmente*, en sus *cursos de formación* el concepto de $\ln(-x)$, mediante el tema relacionado *Operaciones con logaritmos de números complejos* (***ver tabla 3***) en la materia de *fundamentos de álgebra*, están en condiciones de explorar abiertamente la interrogante y superar los elementos epistemológicos que plantea la situación de aprendizaje, puesto que no generaran ningún tipo de restricción o incertidumbre para explorar el logaritmo de un número negativo y sus diferentes argumentaciones:

$\frac{1}{2}\ln(-1) = \ln\sqrt{-1}$, no les generara mayor conflicto, pues lo reconocerán.

Del $\ln(-x) = \ln(x)$ Concluirán que es relativo a la variable real, dado que en primer semestre llevan la materia de fundamentos de álgebra, cuyo tema es *Funciones logarítmicas*.

Como se ha dicho, han cursado ecuaciones diferenciales donde se usa a la función logaritmo como inversa de la función exponencial, en consecuencia podrán asociar a la que quizá será la fórmula más socorrida por el alumnado de **ICE** (y más socorrida por la población en **Soto, 1988**) para negar o explicar la existencia del logaritmo de un número negativo, aquella que plantea que $\boldsymbol{log_a b = N,\ a^N = b}$, es decir, un número al cual se eleve a una base y dé como resultado un número negativo, pues esta es la definición escolar imperante, y en esa explicación se plantea lo que les permita resolver la contradicción mayor, la propuesta por Euler; $\ln(-1) = i\pi$ y $\ln(-1) = 0$, de acuerdo con $e^{\ln(-1)} = e^{\pi i}$ y por tanto $e^{\pi i} = -1$. (Ver **tabla 4**, condición escolar 2)

Cabe destacar que las afirmaciones mencionadas y basadas de los temas del plan de estudios, pueden no ser vistos por el docente o por los estudiantes mismos y en consecuencia no ser conocidos. Se está guiando y suponiendo estrictamente por la ruta del plan de estudios, que estos conocimientos se evidenciarán en los resultados de la ***SA*** y sin embargo, sólo habrán de considerarse como posibles conjeturas en la presente investigación.

Los puntos de partida que se han construido hasta el momento son: El **dME** no advierte de significados del $\ln(-x)$, haciendo distinción entre teoría real y compleja, además de que no se considera el proceso epistemológico de lo logarítmico, que se relaciona con estudio de la función logaritmo en consecuencia, no se reconoce al $\ln(-x)$ como parte de la función $\ln|x|$. Esto garantiza a los estudiantes de **ICE** ante una seria confrontación alrededor de $\ln(-x)$.

Cuando se aplique la ***SA*** propuesta por **Cantoral y Farfán (2008)**, se permitirá confirmar o negar, la determinación de conclusiones al respecto de estos puntos de partida y conjeturas; mediante las producciones de las y los estudiantes.

NOTA: Para la presente investigación se aplicó un pilotaje, del cual un alumno de maestría definió al logaritmo como valor absoluto, él afirmaba que su maestro le dijo siempre que; *el logaritmo de un número negativo es un complejo*, así daba cuenta que $\mathbf{ln}(-x) = \mathbf{ln}(x)$ referencia al $\mathbf{ln}\,|x|$. Su profesor hacia una especie de advertencia de significados. Cabe mencionar que el alumno tiene una formación distinta a la de la población de estudio; es profesor de matemáticas en su formación de licenciatura.

El discurso matemático escolar.

La influencia del **dME**, marca tendencia en el trato hacia los objetos matemáticos y el tipo de conclusiones que los estudiantes deben presentar debido a esa enseñanza, pues impone argumentaciones, unas por sobre otras. Por ejemplo, la población de **Soto (1988)**; la costumbre didáctica que gira en torno al lenguaje de símbolos sobre la definición escolar de logaritmos, coarto la exploración de los estuantes hacia el $\ln\,(-x)$.

El **dME** genera un tipo de jerarquía donde los estudiantes están por debajo de profesores y libros de texto, donde aprenden en el rol habitual del estudiante sentado y prestando atención a lo que expone el docente, donde se ha hecho creer a los estudiantes que la diversidad de argumentaciones, conceptualmente distintas a un fin escolar, son errores. Esto sesga las reflexiones de los estudiantes y conciben sus argumentaciones sin expresarlas, por miedo a equivocarse (**Cantoral y Farfán (2008)**).

El **dME**, y la sensibilidad a la contradicción están relacionados, pues el primero brinda elementos para el arraigo en sí mismo, sin la posibilidad de mirar a otros paradigmas, siendo evidente, que estos marcarán tendencia en las argumentaciones de los estudiantes.

La dimensión cognitiva

El trabajo de **Soto (1988)** reporta en gran medida los conflictos cognitivos que derivan de su población, estudiantes docencia-matemática, cuando se les confronta al logaritmo de un número negativo. Las concepciones de los estudiantes son caracterizadas principalmente, por la tendencia a negar la existencia de dicho saber. De la misma puesta en escena **Cantoral y Farfán (2008)** reportan dos grupos formados; aquellos que niegan la existencia del $\ln(-x)$, y aquellos que de aceptarlo, advierten que se debe reformular toda la teoría, puesto que no es posible concebir un exponente al cual una base sea elevada y dé como resultado un número negativo. Estas concepciones, de ambos grupos (más marcado en el segundo) exhiben un rigor matemático, que sólo confirmaba su postura de inicio, característico y producto de su costumbre didáctica (**dME**). El rigor matemático en esa población, consecuencia directa de sus *cursos de formación*, hizo que los estudiantes, intentarán refutar y *abstraer* cada sección del discurso argumentativo que se planteó en la ***SA***, haciendo críticas validas sobe el discurso gráfico y algebraico planteado***,*** pero sin reconocer explícitamente el $\ln|x|$. **Soto (1988)** hace mención a ello, diciendo que los alumnos tienen arraigo a la fórmula de la definición escolar de logaritmo; $\boldsymbol{log_a b = N}$**,** cuando $\boldsymbol{a^N = b}$, porque en sus cursos se cargan los contenidos de demostraciones matemáticas. Esta última se ha entendido de acuerdo a **Larios (2003**), como aquella que exhibe rigor matemático, es decir, que los resultados matemáticos son basados en deducciones y abstracciones. Otra consecuencia del rigor matemático, es que generó que los estudiantes no resolvieran en su totalidad la ***SA***; no exploraron abiertamente el $\ln(-1)$ (segunda parte de la **SA**).

De forma similar a los anteriores, se entienden argumentaciones de alumnos y alumnas del curso propedéutico de la Maestría en Docencia de las Matemáticas de Universidad Autónoma de Querétaro, México, cuando se les pregunta si observan relación alguna entre la demostración matemática y su carrera y en la matemática en general, ellos responden:

> “El poderle demostrar al alumno de dónde y cómo se llega a una fórmula. Con ella se logra el rigor de la atención esmerada hacia un tema, se obtiene claridad y precisión en el lenguaje. Para comprobar que los resultados obtenidos son los correctos. **(Larios, 2003, 166)**.

Los estudiantes en **Soto (1988)**, podrían haber concebido similarmente a la demostración matemática, bajo la relación entre su futuro quehacer de docentes-matemáticos.
Es precisamente de **Larios (2003)** que se interpreta que la demostración matemática en ciertos casos puede ser ambigua, y que no es formal de la matemática, es decir, no es obligada para la construcción de una determinada noción matemática (por eso se entenderá como rigor matemático). Por ejemplo, tan solo para hablar de demostración matemática, primero se tiene que considerar su devenir epistemológico y también observa que esta “no siempre ha tenido la misma función” **(Larios, 2003, p. 169)**. Se debe considerar además el nivel escolar de los estudiantes, y no considerarla como “monolítica e inmutable” **(Larios, 2003, p. 170)**. Limitarse a considerarla única en la matemática podría llevar a una marcada y rígida ruta deductiva de construcción de conocimiento, e intentar abstraer y tender a demostrar todo*.* Así, podemos entender el arraigo al rigor matemático de los estudiantes en la población de **Soto (1988)**:

> …no existe una concepción única e inmutable de la demostración, entonces no es posible esperar que, en la escuela, la demostración tenga una sola concepción y que ésta se encuentre ligada fuertemente a un rigor exagerado que, ocasionalmente, se funda en el desconocimiento (**Larios, 2003, p. 171**).

Una idea importante entonces es que la matemática no solo opta por la demostración para generar conocimiento, ya que se puede usar de distintos modos, para convencer, aclarar o ejemplificar. Es así que los homólogos ahora, ingenieras e ingenieros en formación, pueden inclusive hacer uso de la *demostración matemática* usando a esta última para alguna de sus usos, o bien, para simplemente explicarse el porqué de una proposición en la ***SA***. Entendiendo la demostración matemática desde su campo, tal como el campo de la matemática lo entiende, desde sí. **Pluvinage** (**citado en Larios, 2003**) dice; "lo que los matemáticos aceptan como demostración".

Se observa que la costumbre didáctica, trae en consecuencia que los estudiantes no sean sensibles a resultados matemáticos válidos que implican una contradicción debido a la enseñanza tradicional. Los estudiantes de docencia-matemática, no son *sensibles a la contradicción* en el sentido de **Cantoral y Farfán (2008)**, pues no exploran fuera del rigor matemático y se quedan en lo institucionalizado; dan una respuesta basada en su formación académica (quizá algo lógico), empero, lo interesante es que cuando esa respuesta encuentra una contradicción, matemáticamente valida también, siguen en su misma postura de inicio, no es tendencia en ellos pretender explicar la contradicción, ni cambiar el paradigma impuesto en el aula, lo que evidencia el **dME** imperante. Destacándolo en general, como elemento a considerar (además del razonamiento propio de la matemática) en la aceptación de un resultado matemático.

Cantoral y Farfán (2003) reportan otro caso de *Sensibilidad a la contradicción* pues explican el por qué los estudiantes dan respuestas diferentes y contradictorias de un mismo problema ejemplificando que ante un par de ejercicios de comparar los números .999 y 1, y mostrar que podrán ser equivalentes si se manipulan términos asociados a una serie geométrica, los estudiantes no corrigen que 0.999 y 1, podrían ser lo mismo. *"Niegan a considerar como iguales a funciones matemáticamente equivalentes, pero definidas por procesos diferentes."* (**Cantoral y Farfán, 2003, p. 207).** Se podría inferir que el tránsito de representaciones de objetos matemáticos favorece la visión crítica del estudiante, pues claramente se observa que esta es coartada por la costumbre didáctica.

Se puede inferir entonces que debido a sus *cursos de formación*, los estudiantes de ingeniería, no sólo optarán por el rigor matemático para la construcción de conocimiento sobre el $\ln(-x)$, lo que bien puede desencadenar que estos resuelvan en su totalidad la ***SA*** o al menos aceptarán *el reto de explorarla*; pues al estar inmersos en otro **dME**, interpretan y abordan los objetos matemáticos de diferente forma. Lo que hará que intenten explicar la contradicción, siendo posible la *sensibilidad a la contradicción*, pues la culminación de la ***SA*** involucra la pregunta del por qué $\ln(-1) = \pi i$ y $\ln(-1) = 0$,

Por otro lado, es conocido que el devenir del saber en objeto enseñable de la noción logaritmo (**Ferrari, 2001**) no contempla la existencia del logaritmo de un número negativo, puesto que epistemológicamente esta noción surge para simplificar cálculos y de la relación entre progresiones (aritmética y geométrica). La misma autora menciona que en el nivel superior la noción logaritmo se emplea como objeto teórico, es decir, desligado de sus orígenes, omitiendo el proceso que lo llevo a posicionarse, epistemológicamente como objeto en sí. Destacando también que en el nivel bachillerato son vistos como definiciones que sirven para resolver ecuaciones, donde impera la algoritmia:

> "Efectivamente, en una primera instancia los logaritmos aparecen en el currículo del bachillerato, en México, enfocados a problemas aritméticos, sin dar cuenta de los elementos que permiten la construcción de la función logaritmo" **(Farfán y Ferrari, 2001b, p. 417)**

Esto hace pensar que la reflexión de los estudiantes de **ICE** acerca de la significación de lo logarítmico sea limitada, al respecto de su estudio como función, no reconociendo que $\ln(-x)$ es alusivo a $\ln|x|$, sin saber de su potencialidad en la simplificación de cálculos y conociéndole como una noción de carácter operatorio y algorítmico. Cabe mencionar que parte del estudio de la función logaritmo, permite vislumbrar su parte gráfica. Se puede concluir que el enfoque algorítmico y de objeto abstracto (objeto teórico) del logaritmo, son una característica importante y presente del **dME**, que genera un carácter operatorio y carente de significado, donde solo las reglas de operación y uso predominan.

En este sentido, el tránsito entre registro algebraico-analítico a gráfico, en torno a $\ln(-x)$ puede ser esencial para lograr el reconocimiento de la función $\ln|x|$ en la ***SA***; asociando la gráfica de $\ln(-x) = \ln(x)$ al concepto y definición de valor absoluto.

Por otra parte, estudios como **Bagni (2001); Kleiner (1988); Trujillo (2005); Martínez y Antonio (2009)**, permite inferir que no se considera en el sistema escolar, el ambiente *histórico-conceptual* de los números complejos (siendo fundamental su rol), desde su aparición en raíces cúbicas. Esto trae como consecuencia, que los estudiantes no miren la necesidad de una nueva teoría y la implicación de los números complejos en ella, además de ver a estos últimos como simples definiciones; punto a favor para que los estudiantes de **ICE**, no consideren a i en para la explicación de $\ln(-x)$ en la ***SA***. Epistemológicamente Euler fue el único en integrar estas dos concepciones. Matemáticos de la talla de Bernoulli y Leibniz, no lograron demostrarlo. Evidenciando que integrar a los complejos, no es una sencilla tarea cognitiva.

La dimensión epistemológica

De la etapa de correspondencias en el siglo XVIII con Leibniz y Bernoulli, Leibniz tenía una tesis fundamental que radicó en rechazar los logaritmos de números negativos con apoyo de las reglas establecidas para los logaritmos de números positivos, pues deducía que $\frac{1}{2}\ln(-1)$ implica el $\ln\sqrt{-1}$ o bien $\log i$, algo que en consecuencia, consideraba una imposibilidad, o bien un logaritmo imaginario en el sentido que, "no existía" (**Cajori, 1983, p. 43)**. Empero si reconocía a $\sqrt{-1}$, como un campo de números relativamente nuevo y en proceso de aceptación, de los que se tenían reglas de operación; pero no los supo involucrar a la explicación de $\ln(-x)$. Leibniz pensaba que no podía ser posible un resultado en raíces negativas, dado el uso configurado de su análisis basado en números reales y las propiedades establecidas para los logaritmos de números positivos; similar a Cardano quien no pudo entender que ecuaciones cúbicas con raíces negativas dieran por resultado una cantidad real.

Bernoulli por su lado, también, ya había visto relación del logaritmo con el número i, (**Cajori, 1983**), esto permite concluir que tanto Leibniz como Bernoulli, evitaban el trato con $\sqrt{-1}$; Leibniz negaba sistemáticamente $\ln(-x)$ y Bernoulli pensaba que era real, pues se basaba en la idea del $\log|x|$, aquel que por definición permite que $\ln|x| = \begin{cases} \ln(-x), & x < 0 \\ \ln(x), & x \geq 0 \end{cases}$, cayendo sus argumentos en un tipo de *recurrencia*, pues esta definición brinda los mismos valores para ambos ejes.

De estas tesis, se observa lo real como un obstáculo epistemológico en la construcción de la variable compleja (observado con Diofanto, Herón de Alejandría y Cardano, cuando les salieron raíces negativas en la resolución de ecuaciones cúbicas) concretamente con Bernoulli y Leibniz cuando abordan el $\ln(-x)$.

Mientras que el hecho de no dar cuenta que $\ln(-x)$ es alusivo a $\ln|x|$ en variable real, radica en que el estudio del logaritmo hasta el siglo XVIII, se pensaba como facilitador de engorrosos cálculos y como modelizador de fenómenos físicos; bajo estas intuiciones, es que Leibniz y Bernoulli, no pudieron ahondar más en la transición de facilitador de cálculos y modelizador a objeto teórico del logaritmo (**Farfán y Ferrari, 2001c**). Estas dificultades sobre abordar el $\ln(-x)$ en relación al $\ln|x|$, existen tanto en estudiantes (**Pardo y Pastor, 2003; Soto, 1988**) y epistemológicamente en el siglo XVIII, inclusive en diferentes geografías, lo que enfila a lo logarítmico (análisis de la función logaritmo derivado de su transición a objeto teórico) como obstáculo epistemológico en la construcción de la variable compleja. Recordemos que es un obstáculo epistemológico, si sucedió históricamente y también sucede en estudiantes (**R. M. Farfán, comunicación personal, 25 de mayo, 2016**).

Es Euler quien integra las posturas de Leibniz y Bernoulli, para concluir que el $\ln(-x)$ tiene su explicación en el campo complejo, donde los números imaginarios permiten determinar su significado, superando lo real como obstáculo epistemológico. Mientras que en el tránsito formal hacia objeto teórico del logaritmo, logra dejar de lado las intuiciones del mismo, que concebían Bernoulli y Leibniz.

> Consideramos entonces, que la mayoría de las exploraciones del siglo XVII, quizás el más prolífico en ideas y formulaciones en torno a las funciones logaritmo y exponencial, giran alrededor de las relaciones entre las progresiones aritméticas y geométricas, en tanto que la fuerza de la misma para conjeturar y determinar relaciones de tipo logarítmico pierde vigencia en siglos posteriores, opacada por otras ideas más acordes al regreso a la rigurosidad y purismo matemático que logra su esplendor en el siglo XIX con Cauchy habiendo comenzado en el siglo XVIII con Euler y su búsqueda de algebrizar los conceptos y de determinar la analiticidad de los entes que se estaban desarrollando y utilizando. (**Farfán y Ferrari, 2001c, p. 14**)

Este nuevo acercamiento de estudio al logaritmo, le da el estatus de objeto en sí, requerido para reflexionar en el $\ln(-x)$ en otro dominio de números y en consecuencia, reconocerlo en $\ln|x|$ para la variable real.

Esta superación de los obstáculos epistemológicos por Euler, corresponde a la superación de acuerdo con la postura de **Bachelard (2000)**, pues se lleva a cabo la interrelación entre conceptos para la emergencia de una determinada noción; cerrando el ciclo que toma al logaritmo como relación de progresiones y como modelizador, donde no es permisible el $\ln(-x)$ porque no tiene contratación con la realidad, dando la entrada al logaritmo como objeto teórico, haciendo plausible reconocer a $\ln|x|$ y considerar a los números imaginarios en el $\ln(-x)$, destacando así la importancia de crear una teoría nueva. Es por ello que la cuestión sobre el logaritmo de un número negativo, es una reflexión teórica en el corpus matemático.

Por otro lado, **Soto (1988)** menciona que el defender una creencia, genera desestabilización en la forma de actuar ante una nueva situación, y esto hace agregar o quitar elementos a una argumentación. A los alumnos de docencia-matemática, les hace cometer errores, mientras que, en el siglo XVIII, a Bernoulli le hace agregar un término a su fórmula del sector circular de radio a, "consideraciones fuera de lo normal" **(Soto, 1988, p. 101).** Las lógicas de razonamiento son similares invalidar o validar la existencia de

$\ln(-x)$, ya que parece que no aceptan en lo más mínimo los argumentos contrarios a lo que piensan, parece que defienden más una creencia que una estructura lógica de razonamiento.

> Para evitar la contradicción propuesta por Euler, es decir, para justificar su razonamiento o, mejor dicho, creencia. La resistencia a salir del campo real provoca desestabilización, se cambian desarrollos se quitan o se agregan nuevos elementos. **(Soto, 1988, p. 99).**

Significó entonces un reto, el abordaje de la pregunta teórica sobre el $\ln(-x)$, pues no mostraba una ruta de acción lógica, e implicaba a números negativos y sus raíces. Además, los criterios de validez no eran contrastantes con la realidad, por lo que suscitan convenciones o búsqueda de consensos, mediante la discusión e intercambio de ideas en torno a una noción matemática.

De este proceso epistolar de intercambio de ideas y de socialización entre Leibniz, Bernoulli y Euler, que bien tiene atribuido el término *complejo*, que otros llaman amigable y hasta tortuoso, se pueden destacar la tesis que proponía y defendía cada personaje (***Tabla 5***), que seguramente, expresará la población de **ICE**, con las respectivas dificultades, dados los obstáculos epistemológicos planteados sobre el $\ln(-x)$:

Bernoulli	Leibniz	Euler
Acepta la existencia del $\mathbf{ln}(-\boldsymbol{x})$. Piensa en el campo real, hace alusión al logaritmo del valor absoluto de $\boldsymbol{x}$**,** aunque no explícitamente. No concibe o no da cuenta de la necesidad de considerar a los números complejos en la explicación de $\mathbf{ln}(-\boldsymbol{x})$, para salir del campo real.	No explora otro dominio numérico donde pueda existir tal logaritmo. Niega la existencia del logaritmo de un número negativo, pues aceptarlo, implica el logaritmo de un número complejo, no sabe o no puede considerarlo a la existencia del $\ln(-x)$.	Concluye que el logaritmo de un número negativo, en particular, $\ln(-1)$, no es real, sino complejo. Introduce al dominio de la variable compleja integrando a los números complejos en la explicación de $\ln(-x)$. Explora características del logaritmo como función, relativo al tratamiento como objeto teórico; para poder concluir lo anterior.

Tabla 5. Discursos argumentativos tipo, que se espera, expresara la población de **ICE***.*

Recalcando el tránsito de representaciones de objetos matemáticos que favorece la visión crítica del estudiante, y el aporte de Bernoulli para inferir en el campo real sobre $\ln(-x)$ mediante el pensamiento basado en la idea de simetría.

El rol de los interlocutores en el debate epistolar.

Para el origen de la ***VC***, relativo a la extensión de la definición del logaritmo de un número negativo, varias nociones matemáticas obstaculizan la concepción de la teoría (**Cantoral y Farfán, 2008, p. 253 y 254)**;

- La noción de número negativo (se resistía a un tratamiento plenamente articulado y de significado con el resto del cuerpo teórico).

- La teoría de razones y proporciones, (no estaba completamente aceptada).

- Los números imaginarios (que no contaba tampoco con una clara noción de su significado y el papel de las operaciones realizadas con estos).

Todos tambaleantes al respecto de servir como *herramientas de validación* para consolidar una nueva teoría. (**Cantoral y Farfán, 2008, p. 253 y 254).** Por lo que emergió una *práctica* entre los interlocutores; la *búsqueda de consensos*, siendo esta crucial en el debate, pues en un ambiente de intercambio de ideas y discusión, se fue puliendo el camino de acuerdos, pues al no tener mecanismos de validación con la realidad circundante, la aceptación del concepto del $ln(-1)$ dependió del debate mismo.

Existe entonces de manera general un *conocimiento situado*, que se presenta en cada actor durante el debate. Ya que la calidad de los juicios esgrimidos por parte de los matemáticos de la época, no provienen del todo de una lógica de razonamiento matemática, sino más bien dependen del *saber cultural* hasta el momento conocido, de lo que su contexto les ha presentado como existente y válido, evidenciando entonces, que las nociones matemáticas surgen y se forman, cuando son discutidas, en un proceso de interacción social, en el que "la crítica profunda permite la consolidación de un saber social y culturalmente establecidos" **(Cantoral y Farfán, 2008, p. 253)**.

El debate epistolar acerca del origen de la variable compleja se emplea en investigación en **Gómez y Pardo, 2009: Gómez, Pardo y Pastor, 2003: Cantoral y Farfán, 2008: Cajori, 1983: Soto, 1988, Kleiner, 1988;** y se evidencia que la matemática es una actividad humana **(Cantoral, 2013)**, ya que, de un intercambio de ideas, de una búsqueda de consensos, está la razón de ser de un saber matemático. Incluso en otro origen de la variable compleja que es dado por Cardano, también hubo correspondencia y debates, relativo a que Cardano, se confrontaba entre pares para resolver problemas matemáticos, siendo la resolución de las cúbicas un tema para tal fin (**Nahin, 1998**).

Síntesis

Se retomó la problematización del saber con base en el modelo propuesto por **Buendía y Montiel** (**citado en Cantoral, 2013**) como una guía, explicación y descripción de esta investigación después de haber hecho, la problematización del saber.

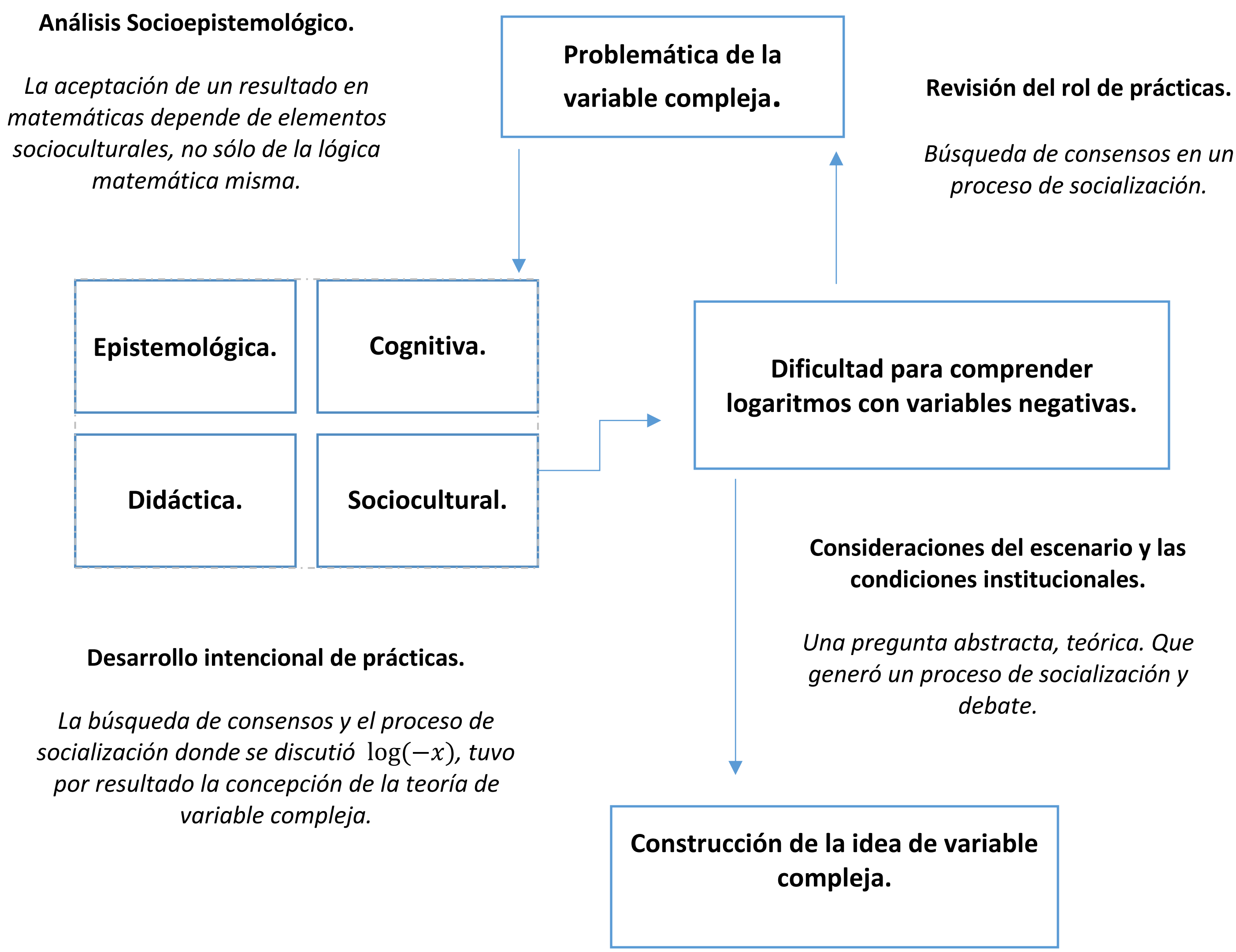


Diagrama 1. Problematización del saber de la teoría de variable compleja. En cursivas: aportaciones de esta investigación.

- **Epistemológica.**

  Análisis de correspondencia, explicitación de argumentos y dificultades por cada interlocutor debido a la confrontación de los ***OE*** al respecto de $ln(-x)$. (Euler, Leibniz, Bernoulli).

  Retomar la idea de Bernoulli, cuando analiza las curvas del logaritmo (**Cajori, 1983, p. 43**), es decir, bajo la idea de simetría que favorecerá el tránsito entre registros algebraicos-analíticos a gráficos, a fin de reconocer a $ln|x|$.

  Lo real y lo logarítmico, son obstáculos epistemológicos necesarios en la construcción de la teoría de variable compleja; donde la consideración de los números complejos y lo logarítmico como objeto teórico, juegan un papel determinante.

- **Didáctica.**

  La enseñanza tradicional al respecto de $\sqrt{-1}$, no advierte que es parte de otro campo de números, donde las nociones matemáticas no tienen la misma validez que en variable real.

  Impera la definición escolar sobre los logaritmos, aquella que los considera como objetos teóricos. $\boldsymbol{log_a b = N}$, cuando $\boldsymbol{a^N = b}$. O bien, con carácter operatorio, donde impera la algoritmia.

  No se reconoce la función $\ln(-x)$ como parte de $\ln|x|$. La enseñanza de la población no está cargada de rigor matemático.

  Se reconoce el aspecto operacional de los logaritmos y como objeto teórico carece de significado.

La población ingenieril tendrá un peculiar manejo de los objetos matemáticos presentes en la ***SA***, por estar inmersos en un **dME** diametralmente opuesto al de los docentes-matemáticos.

- **Cognitiva.**

  Considerar a los números complejos en $\ln(-x)$, es una tarea cognitiva compleja pues se depende de la maestría en el uso de i, el hecho de que serán presentados como definiciones, los hace carecer de sentido y menos probable su consideración, para explicitar la delimitación entre teorías. en variable compleja.

  Mientras que el $\ln|x|$, es probable que no se infiera sobre ella, no se reconozca, debido a su carente estudio en el sistema escolar, para reconocer al $\ln|x|$ que permite $\ln(-x)$ en variable real, la idea de simetría del argumento de Bernoulli, favorece el registro hacia lo gráfico para dar cuenta que $\ln|x| = \begin{cases} \ln(-x), & x < 0 \\ \ln(x), & x \geq 0 \end{cases}$.

Esta síntesis de las dimensiones, son las que permiten en el siguiente capítulo inferir las predicciones e hipótesis de diseño para el rediseño en la ***SA***, además de la configuración de significados para la superación de los obstáculos epistemológicos.

Diseño y análisis a priori

Rediseño de la situación de aprendizaje.

Los cambios realizados se reportan con detalle a continuación, y tienen la finalidad de sintetizar, esquematizar y rediseñar la ***SA*** de acuerdo con lo que se ha estudiado hasta ahora, sin demeritar el objetivos de origen (introducir a la ***VC***), sino por el contrario, enriquecerlos; por ejemplo, con la posible superación de los ***OE*** de acuerdo con la noción teórica de **Bachelard (2000)**. Debido a un pilotaje con alumnos y alumnas de maestría en el **Departamento de Matemática Educativa** el **Cinvestav, unidad Zacatenco**, se determinó el tiempo estimado, pues estos la resolvían en un tiempo aproximado de 2 horas.

Previendo que los alumnos y alumnas de la población actual tienen una formación académica inicial, con respecto a los alumnos y alumnas de maestría, se determinó que pudieran resolver la situación de aprendizaje en dos sesiones de 1.5 horas. Considerando una hora más para la sesión de debate. Así la situación de aprendizaje sería resuelta en dos días, y el debate en un día más. De esa manera, las clases en los horarios escolares se verían menos afectados. A diferencia de **Soto (1988)**, se entrevistó a todos los alumnos y alumnas, sin que fuese necesario la condición de que aceptaran el $ln(-x)$.

La ***SA*** final y objetivo de cada inciso que la compone, así como la predicción de las respuestas de los estudiantes, son explicados más adelante en este capítulo.

Por tanto, el diseño se guía con la pregunta **¿a qué es igual el logaritmo de un número negativo?** Y tiene por objetivo generar una *sensibilidad a la contradicción* en los estudiantes, dado que es probable que ellos no conocen el logaritmo de un número negativo, en consecuencia, la pertinencia de la ***SA*** radica en demostrar que puede existir, se pretende que reconozcan a $\ln|x|$, además de que con la *contradicción mayor* ($\ln(-1) = \pi i = 0$) se establece el sentido de necesidad de delimitar teorías..

Las variables Globales y locales.

Variable Macro-didáctica o Global: Organizará la situación de aprendizaje en forma general. En cualquier momento se puede observar su influencia. Por ejemplo, en nuestro diseño se destaca la *sensibilidad a la contradicción o* simplemente *la idea de contradicción*, como una variable macro-didáctica. Que es visible en la investigación en general y también, guía la ***SA***.

Por ejemplo, en **Romero (2016)** se determina que el *ambiente fenomenológico* de la *Serie Trigonométrica de Fourier* [**STF**] dada su construcción social, hace pertinente no llevar tal objeto matemático mediante sus prácticas a su *génesis original* en una situación de aprendizaje. Por lo que se desarrolla una *génesis artificial* que tiene como contexto el modelo del movimiento planetario propuesto por los astrónomos alejandrinos (323 a. C. – 30 a. C.). (**Romero, 2016, p. 90**). Es así como en el diseño de su situación de aprendizaje se observa la tendencia hacia lo *gráfico* en vez de lo analítico y algorítmico para la construcción de la **STF**. El tipo de variable global en este caso es dar prioridad a lo gráfico.

Puesto que el alumnado esta frente a argumentos presentados acerca del logaritmo de un número negativo, la idea de contradicción se espera emerja, de cierta manera el discurso mostrado será congruente y reconocerán procedimientos conocidos, pero suponemos no han sido presentados para el $\ln(-1)$. Además, se podría determinar un momento clave para la ***SA*** y se presenta cuando el $\ln(-1)$, tiene dos valores posibles, lo que representa inevitablemente una contradicción, la que llamamos *contradicción mayor*.

Variable Micro-didáctica o local: Organización de la situación de aprendizaje en un nivel local. Es la que va marcando paso a paso el devenir de la situación de aprendizaje.

Dentro de este tipo de variables puede estar la justificación cada pregunta, puesto que se tiene por conocimiento, dado el *análisis preliminar*, de qué es lo que puede responder el estudiante. En el siguiente apartado se especifica la finalidad de cada pregunta en la ***SA***, sin embargo, se puede decir que el diseño considera que cada pregunta tiene un grado de confrontación o de contradicción frente al alumnado. Y es ahí donde encuentran su justificación las preguntas, puesto que generan contradicciones. Cada inciso marca la ruta de superación de los ***OE***.

Modificaciones generales de la situación de aprendizaje

1) Se dividió la situación de aprendizaje en 3 partes (introducción, primera y segunda parte), de acuerdo con **Cantoral y Farfán (2008)**, contemplando *secuencia didáctica de exploración*, *secuencia didáctica definitiva* y la *secuencia didáctica preliminar*.

2) Se omitieron ciertas palabras que no quitan la esencia de la ***SA***, por ejemplo; “es claro que … consideremos …”. Simplemente con la intención que la situación tenga menos texto. También se omitió la repetición de los enunciados referentes a las actuales **preguntas 1-4** de la primera parte y enunciadas en las 3 secuencias en **Cantoral y Farfán (2008)**. Estos enunciados reiteran e incitan a los alumnos y alumnas, que recuerden de forma resumida la primera parte de la experiencia, previo a resolver la segunda parte de la misma. Pero prestando las hojas donde respondan las **preguntas 1-4**, ellos recordaran sin la necesidad de hacer más extensa la ***SA*** (por ello la omisión de los enunciados). Así se tendrá el mismo fin que mencionan los autores, que los alumnos y alumnas consulten sus producciones escritas para analizar en detalle los argumentos que habían propuesto. Si es que lo requieren.

Se apoyó en la resolución, con el desarrollo de algunos procedimientos algebraicos, que no realizan la tarea total al alumnado, con el fin que las actividades no sean tan extensas y se tenga la respuesta en un tiempo moderado. Esto se realizó para la **pregunta 1,** de la segunda parte y **pregunta 3** de la primera parte.

Este **punto 2** sintetizó la situación de aprendizaje.

3) El enunciado que hace referencia a la definición logaritmo por integración (**pregunta 6, parte 1**), se expone en **Cantoral y Farfán (2008)** como último enunciado de la secuencia escrita. Se ha cambiado ahora, a los argumentos a favor de $\boldsymbol{ln}(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ln}\ (\boldsymbol{x})$, en la primera parte de la actual situación. En vez de presentarse como último cuestionamiento previo a la sesión de debate, se integra en esta posición con el objetivo de obtener más elementos de persuasión para el alumnado, estableciendo las condiciones suficientes para que caiga en contradicción durante la segunda parte.

4) También, se respetan las preguntas relativas a la docencia, en la primera y segunda parte de la situación: *Les convencieron los argumentos expuestos a los alumnos y alumnas para explicarlos a alguien que les ha preguntado al respecto del logaritmo de un número negativo.* Pese a que la población de estudio no será profesor (relativamente), esto le apoya para crear argumentos y consolidar la conclusión que haya recogido de la situación de aprendizaje.

Situación de aprendizaje con respectivas hipótesis de diseño.

Se explica la estructura de la situación de aprendizaje y sus respectivas hipótesis. La situación de aprendizaje final y presentada a los estudiantes corresponde únicamente a los cuadros sombreados color gris.

Extracto de la Situación de aprendizaje. Hipótesis.

Las palabras de ***exploración, argumentos a favor de la variable real, aceptación o rechazo del*** $\boldsymbol{log}\ (-\boldsymbol{x})$***, conceptualización y reflexión de la función valor absoluto, devolver el juego a los estudiantes y la sensibilidad a la contradicción*** en ***cursiva-negritas*** son ideas que sirven para al final, establecer un diagrama de flujo de la ***SA***.

INTRODUCCIÓN. Se pretende que inicie el proceso de reflexión al respecto del $ln\,(-x)$ *"Ubicar a los y las estudiantes dentro del problema"* **(Cantoral y Farfán, 2008, p. 261)**. Se inicia la ***Exploración.***

INTRODUCCIÓN

Cuando se expone el tema de logaritmos en el aula, usualmente decimos dependiendo del nivel de escolaridad del alumnado, que si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son números positivos $\boldsymbol{log_a b} = \boldsymbol{N}$ si $\boldsymbol{a^N} = \boldsymbol{b}$ o bien, si el logaritmo es una función que a cada $\boldsymbol{x}$ positiva le asocia $\int_1^x \frac{dt}{t} = \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x})$ En ambas definiciones se establece tácitamente que el logaritmo sólo es aplicable a los números positivos, pero:

a) ***¿A qué es igual el logaritmo de un número negativo?***

b) **¿Cuál es la necesidad de considerar siempre sólo a los números positivos?**

INTRODUCCIÓN Podemos dar cuenta en esta etapa, si el estudiante acepta o rechaza el $\ln(-x)$ y en qué se basa para ello, si lo acepta argumenta como Bernoulli, y si lo rechaza, argumenta como Leibniz. Aquí también se podrá observar, el conocimiento previo del estudiante.

PRIMERA PARTE. Se presenta un discurso argumentativo que pretende que los estudiantes acepten el logaritmo de un número negativo, basándonos en el dominio real.

PRIMERA PARTE

1) Puesto que la función logaritmo se caracteriza principalmente por las propiedades siguientes: $\boldsymbol{ln}(\boldsymbol{xy}) = \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x^m}) = \boldsymbol{mln}(\boldsymbol{x})$. **¿Tales igualdades seguirán siendo válidas al considerar a $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ negativos?** Es decir, al aplicar el logaritmo a números negativos: $\boldsymbol{ln}(-\boldsymbol{x})(-\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{ln}(-\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{ln}(-\boldsymbol{x})$.

Si considera que seguirán siendo válidas, intente dar una demostración, en caso contrario exponga un contraejemplo.

INCISO 1) Se sabe que el concepto de logaritmos de números negativos, en variable real y en variable compleja tienen diferentes concepciones. Son válidas las reglas de los logaritmos de números positivos en los logaritmos negativos y en los logaritmos complejos, sin embargo, estos 2 últimos sólo son coherentes y existen en el dominio de la variable compleja. Como se ha dicho, en variable real el logaritmo $\ln(-x)$ es alusivo al $\ln|x|$.

El carácter operatorio de los logaritmos en los estudiantes puede hacer que involucren la *regla de los signos* limitando de cierta manera, la exploración o la reflexión del estudiante, pues de inmediato asociara que $\boldsymbol{ln}(-\boldsymbol{x})(-\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{ln}\,(\boldsymbol{xy})$ y expresará que no existen los logaritmos de números negativos, pues la duda sobre su existencia lo remite a los positivos.

A partir de aquí, se hacen explícitos los ***Argumentos a favor del*** $\boldsymbol{log}(-\boldsymbol{x})$ ***en variable real***.

2) Consideremos la siguiente argumentación, sabemos que $(-\boldsymbol{x})^{2} = (\boldsymbol{x})^{2}$, para cualquier $\boldsymbol{x}$, si aplicamos la función logaritmo a ambos miembros de la igualdad, tenemos;

$$\boldsymbol{ln}(-\boldsymbol{x})^{2} = \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x})^{2}$$
$$2\boldsymbol{ln}(-\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x})$$
$$\boldsymbol{ln}(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x})$$

De modo que el logaritmo de números negativos no solo se puede definir sino, además, hemos establecido $\boldsymbol{ln}(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x})$ mediante la argumentación anterior. **¿Está usted de acuerdo con este argumento? ¿Por qué?**

3) Es claro que $\frac{dx}{x} = \frac{-dx}{-x}$, que por integración se tiene:

$\int \frac{-dx}{-x}$	$\int \frac{dx}{x}$
$\int \frac{du}{u} = \ln u$	$\int \frac{du}{u} = \ln u$
$u = -x\,;\ du = -dx$	$u = x\,;\ du = dx$

$\int \frac{du}{u} = \int \frac{-dx}{-x} = \ ln\, u = ln\,(-x)$ $\int \frac{du}{u} = \ ln\, u = ln\,(x)$

En conclusión: $ln\,(-x) = ln\,(x)$

Con lo que se admite la existencia de los logaritmos de números negativos y además una manera de calcularlos es basándose en los ya conocidos y aceptados logaritmos de números positivos. Por ejemplo, si se desea conocer el $ln\,(-1)$ este es igual al $ln\,(1)$, el $ln\,(-2) = ln\,(2)$, etc. **¿Está usted de acuerdo con ese argumento? ¿Por qué?**

INCISO 2) Y 3). En esta sección se pretende que se acepte el logaritmo de un número negativo, debido a argumentos propios de la enseñanza en el dominio de los reales. Sin embargo, pueden no ser sensible a la contradicción, en consecuencia, también se espera que rechacen las aseveraciones.

En lo siguiente, podemos observar si existe la ***Aceptación o rechazo del $ln(-1)$***.

4) Estamos ya en condiciones de calcular el logaritmo de cualquier número negativo, en particular $ln(-1)$. Calcúlelo, $ln(-1) =$ ___.

INCISO 4) Mediante el cálculo del $ln(-1)$, dado el discurso argumentativo previo, se puede observar y confirmar si el alumno o alumna, ha aceptado $ln(-x) = ln\,(x)$.
Dada la respuesta se puede interpretar si el estudiante lo ha aceptado, rechazado o aún no sabe.
La respuesta, representa un quiebre en el desarrollo posterior de la ***SA*** porque si acepta el $ln(-x) = ln(x)$:

- Implica que calculará $ln(-1) = log(1) = 0$. Lo que asegura el mayor *conflicto cognitivo* deseado o bien, dar paso a explicar la contradicción mayor, ya que posteriormente los alumnos y alumnas determinaran que el $\boldsymbol{ln(-1)}$ tendrá otro valor ($\boldsymbol{\pi i}$).

- Implica que están en condiciones de realizar la gráfica del **INCISO 5)** que es la gráfica de $\boldsymbol{ln}\,|\boldsymbol{x}|$.

La siguiente pregunta lleva a una ***Conceptualización y reflexión acerca de la noción de valor absoluto***.

5) Grafique la función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ que hemos obtenido al considerar el logaritmo de números negativos. Explicite $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ para $\boldsymbol{x} < \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$

INCISO 5). Se puede recordar a los alumnos y alumnas la función de $\boldsymbol{ln}\,|\boldsymbol{x}|$ mediante la relación que aceptaron previamente, $\boldsymbol{ln}(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x})$**.**

Se espera que el alumnado obtenga la gráfica del $\boldsymbol{ln}\,|\boldsymbol{x}|$ y que además con la sugerencia de *Explicitar* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ *para* $\boldsymbol{x} < \mathbf{0}$ *y* $\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$, construya o asocie la definición del valor absoluto: $f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} -\boldsymbol{x}, & \boldsymbol{x} < \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x}, & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$

Este punto es requerido y necesario, cuando aparecen dos valores para $\boldsymbol{ln(-1)}$**.** Y remitir que uno corresponde a variable real, debido al $\boldsymbol{ln}\,|\boldsymbol{x}|$**.**

Un objetivo importante en la ***SA*** es que el alumnado de cuenta que, en variable real, $\boldsymbol{ln}(-\boldsymbol{x})$ es alusivo al $\boldsymbol{ln}\,|\boldsymbol{x}|$.

Anteriormente, la **pregunta 3**, **pregunta 4** y **pregunta 5** estaban en un solo cuestionamiento. Se han separado para explicitar;

Pregunta 5. La **función obtenida** y así, observar si alumnas y alumnos mediante la *visualización*, pueden dar cuenta que dicha función encontrada hace referencia al logaritmo del valor absoluto.

Pregunta 4. El cálculo de $\mathbf{ln(-1)}$, que llevará a una contradicción posterior.

Pregunta 3. Se afirmaba con el proceso de integración la determinación de $\boldsymbol{ln\,(-x) = ln\,(x)}$, pero no se preguntaba nada. Se ha agregado un par de preguntas para observar qué argumentan y poder concluir acerca de su razonamiento. Las preguntas son: **¿Está usted de acuerdo con este argumento? ¿Por qué?**

Nota: **Durante el pilotaje aplicado a los alumnos y alumnas de maestría, un alumno casi supera el obstáculo epistemológico que representa que Bernoulli habla del $\boldsymbol{ln\,|x\,|}$. El alumno de maestría al parecer, observó desde las preguntas 2 y 3, de la PRIMERA PARTE, que se hace referencia al logaritmo del valor absoluto, pero no relacionó conceptos entre sí para determinar que estas preguntas hablan del dominio real y concluir al respecto.**

Se pretende en lo siguiente, ***Devolver el juego a los estudiantes*** que aún no aceptan $ln\,(-x)$.

6) Intentemos dar otra argumentación a favor de $\boldsymbol{ln\,(x) = ln(-x)}$.

Sabemos que si $\boldsymbol{x > 0,\ ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}}$.

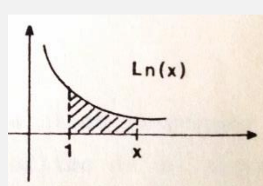


Figura. 1.

Intentemos extender esa definición a los números negativos.

Expresando $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$ para $\boldsymbol{x} < \mathbf{1}$ en intervalos de $-\boldsymbol{x}, -\mathbf{1}, \mathbf{0}\ \boldsymbol{y}\ \mathbf{1}$.

$$\int_{1}^{-x} \frac{1}{t} dt = \int_{1}^{0} \frac{1}{t} dt + \int_{0}^{-1} \frac{1}{t} dt + \int_{-1}^{-x} \frac{1}{t} dt \qquad \text{...Suma 1}$$

Graficando $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$ para $\boldsymbol{x} < \mathbf{1}$ e ilustrando las áreas de la gráfica que no corresponden a la definición de logaritmo, porque están entre 0 y 1.

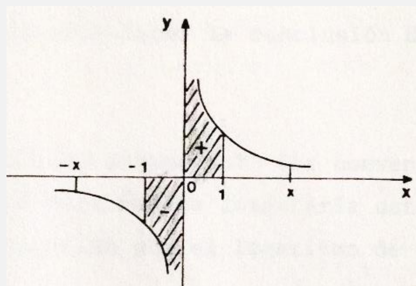


Figura. 2.

Se observa de la **figura 2** que:

$$\int_{1}^{0} \frac{1}{t} dt + \int_{0}^{-1} \frac{1}{t} dt = 0$$

Por ser un área positiva y la otra negativa, e iguales en magnitud, que sumadas son cero. Por lo tanto, se tiene la **suma 1**.

$$\int_{1}^{x} \frac{1}{t} dt = \int_{-1}^{-x} \frac{1}{t} dt$$

Luego:

$$\boldsymbol{ln}\,(-x) = \int_{-1}^{-x} \frac{1}{t} dt = \int_{1}^{x} \frac{1}{t} dt = \boldsymbol{ln}(x)$$

Ya que:

$$\int_{-1}^{-x} \frac{1}{t} dt = \int_{1}^{x} \frac{1}{t} dt$$

Corresponde también, a áreas iguales.

De donde se concluye que: $\boldsymbol{ln}\,(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x})$**.**

¿Le convenció este argumento?

¿Si usted fuera profesor, o bien, tenga que explicar el logaritmo de números negativos, usaría esos mismos argumentos?

¿Si no es así, de qué manera intentaría usted responder a quién le ha preguntado por el logaritmo de números negativos?

INCISO 6) Al igual que en **Cantoral y Farfán (2008)** y **Soto (1988)**, este inciso pretende persuadir [devolver el juego] a los estudiantes que aún no han aceptado la existencia de $\boldsymbol{ln}(-\boldsymbol{x})$. En esta parte se involucran elementos gráficos. Pasando de un registro analítico a un gráfico.

Se espera que el alumnado que no ha sido *sensible a la contradicción* finalmente acepte que $\boldsymbol{ln}(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x})$ así, estará en condiciones de generarse la *mayor contradicción*.

Las preguntas posteriores tienen como finalidad que los alumnos y alumnas después de las reflexiones, concreten y recojan una conclusión.

SEGUNDA PARTE. Dado que los estudiantes han atravesado por conflictos y contradicciones durante la resolución de la **PRIMER PARTE** se prevé que esta segunda etapa potencialice dichas contradicciones. Aquí aparece la que llamamos anteriormente, la mayor contradicción.

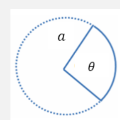
Al término de esta segunda parte, los estudiantes tendrán que explicar las *incongruencias* entre la **PRIMER** y **SEGUNDA PARTE** para obtener una coherencia matemática.

La sección siguiente es la que causará ***la sensibilidad a la contradicción***.

SEGUNDA PARTE

1) Verifiquemos ahora si los resultados obtenidos son consistentes con la matemática existente.

Del cálculo sabemos que el área de un sector circular de radio a es $\frac{a^2\theta}{2}$, pero



$$\frac{a^2\theta}{2} = \left[\frac{a^2\theta(2i)}{2(2i)}\right] = \left[\frac{2a^2\theta i}{4i}\right] = \left[\frac{a^2(2i\theta)}{4i}\right] = \left[\frac{a^2}{4i}[i\theta - (-i\theta)]\right]$$

$$= \left[\frac{a^2}{4i}[ln\left(e^{i\theta}\right) - ln\left(e^{-i\theta}\right)]\right] = \left[\frac{a^2}{4i}[ln\left(\cos\theta + isen\theta\right) - ln\left(\cos\theta - isen\theta\right)]\right]$$

$$= \left[\frac{a^2}{4i}[ln\frac{(\cos\theta + isen\theta)}{(\cos\theta - isen\theta)}]\right]$$

Esta fórmula fue dada por **Bernoulli**, en 1728, para representar el área de un sector circular de radio $\boldsymbol{a}$ y ángulo $\boldsymbol{\theta}$. Comparando y evaluando en $\boldsymbol{\theta} = \frac{\pi}{2}$.

$$\frac{a^2\theta}{2} = \left[\frac{a^2}{4i}[ln\frac{(\cos\theta + isen\theta)}{(\cos\theta - isen\theta)}]\right] = \left[\frac{a^2}{4i}[ln\frac{\left(\cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{2} - isen\frac{\pi}{2}\right)}]\right]$$

$$\frac{a^2(\frac{\pi}{2})}{2}=\left[\frac{a^2}{4i}[ln\frac{\left(isen\frac{\pi}{2}\right)}{\left(-isen\frac{\pi}{2}\right)}]\right]=\frac{a^2}{4i}[\ln(-1)]$$

$$\frac{a^2\pi}{4}=\frac{a^2}{4i}[\ln(-1)]$$

$$(\boldsymbol{Continue\ el\ procedimiento} \ldots)$$

$\boldsymbol{Resultado} =$

Pero anteriormente, con $\boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ln}\ (-\boldsymbol{x})$**,** habíamos obtenido $\boldsymbol{ln}(-\mathbf{1}) = \mathbf{0}$.

¿Cómo explica el resultado al que habíamos llegado $\ln(-1) = 0$ y este último resultado $\ln(-1) = \pi i$?

¿Constituye esto una contradicción? Explicite y argumente.

¿Se puede salvar esa contradicción, sin evadir? ¿Cómo?

Nota: (Se orienta para que los estudiantes no den vuelta a la hoja sin antes haber concluido $\boldsymbol{ln}(-\mathbf{1}) = \boldsymbol{\pi i}$. En algunos casos los estudiantes no llegaron a tal conclusión).

INCISO 1) Los alumnos y alumnas deben concluir que $\ln(-1) = \pi i$ y en consecuencia llegar a la contradicción $\pi i = 0$. Recordemos que previamente se había concluido $\boldsymbol{log}\ (-\mathbf{1}) = \mathbf{0}$. Ello pretende que el alumnado entre en una reflexión e intente salvar esta contradicción y cambia el esquema de las posibles concepciones de los estudiantes puesto que, cualquier camino por el que hayan optado en la **PRIMER PARTE** al respecto de $\ln(-x)$, tiene las siguientes observaciones:

Aceptación: Si el alumnado ha optado por aceptar la existencia de logaritmos de variables negativas (lo acepto en el **INCISO 4)** de la **PRIMER PARTE**) el resultado obtenido es una contradicción. Obtendrá que $\mathbf{ln(-1) = \pi i}$ y $\mathbf{ln(-1) = 0.}$

Negación: Si no lo ha aceptado, el resultado obtenido sigue siendo *incongruente* puesto que $\mathbf{ln(-1) = \pi i}$ y $\mathbf{ln(-1) = 0}$ mediante procedimientos totalmente válidos. Si el alumnado argumenta que no existe o no está definido el logaritmo de variables negativas, tendrá entonces que explicar el porqué de estos resultados.

No sabe: Si el alumnado no está aún en sintonía con la situación de aprendizaje y no logra comprender la dinámica de la misma, cabe señalar que un resultado en matemáticas puede tener dos caminos distintos pero un mismo resultado (al menos en el contexto en el que estamos trabajando). Es así como los estudiantes que no sepan que sucede en la situación de aprendizaje porque les resulta confuso, no estarán exentos tampoco de explicar tales resultados.

Se prevé que hagan intentos por explicar la contradicción y para ello es posible que involucren a la función exponencial como inversa de la función logaritmo a $\mathbf{ln(-1) = \pi i}$, como un recurso algorítmico puesto que ya han trabajado ese recurso en *segundo semestre* en la materia de *ecuaciones diferenciales*.

En esta etapa de la situación de aprendizaje es que pueden concluir que el $\mathbf{ln(-x)}$, existe en el campo complejo, usando a los números imaginarios en la explicación.

2) Las contradicciones obtenidas surgen de considerar simultáneamente la validez de la igualdad $\boldsymbol{ln}(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x})$ y la expresión del sector circular de radio $\boldsymbol{a}$; $\left[\frac{a^2}{4i}\left[ln\ \frac{(\cos\theta + isen\theta)}{(\cos\theta - isen\theta)}\right]\right]$ por tanto, alguna de las consideraciones, ¿es falsa?. **Revise.**

¿Le convencieron estos argumentos?

En esta pregunta, se cambió la parte que afirmaba que una consideración ***es falsa***, por una pregunta, ***¿es falsa?*** Considerar la afirmación puede orientar el argumento posterior del alumno o alumna.

También se desarrolló el proceso algebraico de sustitución, en la fórmula de Bernoulli (como apoyo en tiempos), al evaluar $\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}$, dejando una indicación para que el alumnado continúe y concluya el resultado, en un tiempo moderado.

INCISO 2) En esta última sección se pretende que los estudiantes revisen los procedimientos que llevaron a la obtención de sus respectivos resultados. Intentando observar las particularidades de cada procedimiento, tanto de la **PRIMER** y **SEGUNDA PARTE**. Que den cuenta que se utilizan números complejos en un procedimiento y en otro no, relacionando que se deben a campos de números distintos. Y así dar cuenta que de explicar la contradicción es pertinente la creación de una nueva teoría, o bien, destacar la importancia de la delimitación entre teorías y sus restricciones.

Se ha mencionado que la *mayor contradicción* deviene gracias a que el estudiante acepta que $\mathbf{ln}(-\boldsymbol{x}) = \mathbf{ln}(\boldsymbol{x})$, debido a eso, calculara que $\mathbf{ln}(-\mathbf{1}) = \boldsymbol{ln}(\mathbf{1}) = \mathbf{0}$. Y posteriormente obtendrá que $\mathbf{ln}(-\mathbf{1}) = \boldsymbol{\pi i}$, en consecuencia llegará a la contradicción $\boldsymbol{\pi i} = \mathbf{0}$. Es esa la ruta trazada para puntualizar la importancia de la necesidad de una nueva teoría y la superación de los ***OE***. Además de intentar que el alumno y alumna asocie la función valor absoluto ($\mathbf{ln}\,|\boldsymbol{x}|$) con la gráfica obtenida dado que acepta y gráfica $\mathbf{ln}(-\boldsymbol{x}) = \mathbf{ln}(\boldsymbol{x})$. Para finalizar con la conclusión que los argumentos en la **PRIMER PARTE** tienen validez en el dominio de la variable real, en tanto que el logaritmo de números negativos tiene dos concepciones distintas dependiendo de la teoría. Como puede observarse, si el estudiante no acepta la existencia del logaritmo de un número negativo, los objetivos previstos, conceptualmente adoptan otro rumbo. Dejando de lado la superación de los ***OE***. De no aceptar que $\mathbf{ln}(-\boldsymbol{x}) = \mathbf{ln}(\boldsymbol{x})$ puede no significar la gráfica, puesto que no existe para ellos. Así como tampoco puede significar del todo, obtener que $\mathbf{ln}(-\mathbf{1}) = \boldsymbol{\pi i}$ y $\mathbf{ln}(-\mathbf{1}) = \mathbf{0}$. Puesto que él está en una postura de negar el $\mathbf{ln}(-\boldsymbol{x})$. Sin embargo se prevé que no está exento de reflexiones pues los intentos de persuasión (principalmente en la **PRIMER PARTE**), pueden hacer que cambie de postura.

Esquema de la Situación de aprendizaje en diagrama de flujo.

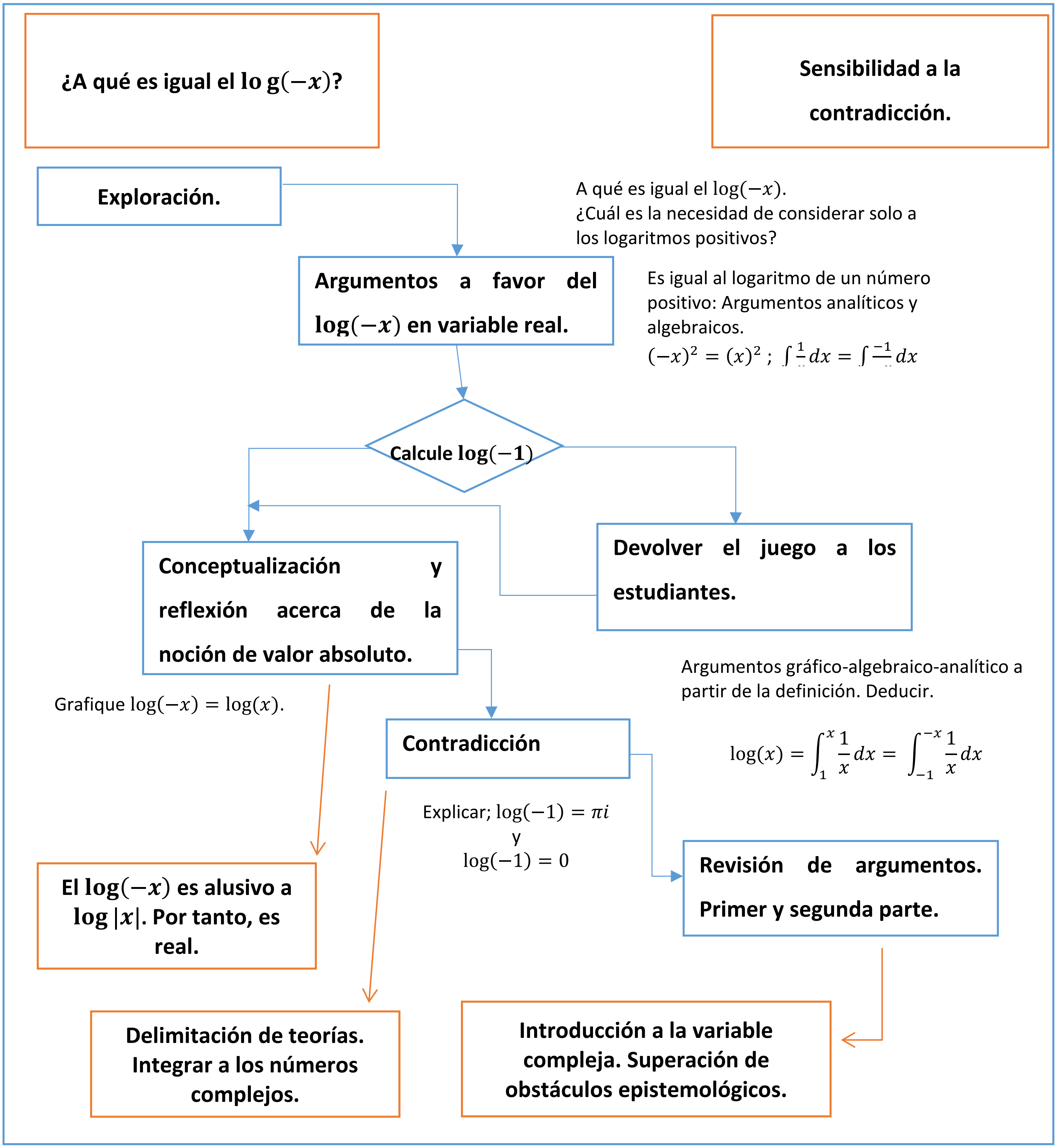


*Diagrama 2. Diagrama de flujo, esquema de análisis de la situación de aprendizaje y articulación de **OE**.*

Situación de aprendizaje final

La siguiente situación de aprendizaje fue aplicada a los estudiantes de **ICE**.

INTRODUCCIÓN

Cuando se expone el tema de logaritmos en el aula, usualmente decimos dependiendo del nivel de escolaridad del alumnado, que si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son números positivos $\boldsymbol{log_a b = N}$ si $\boldsymbol{a^N = b}$ o bien, si el logaritmo es una función que a cada $\boldsymbol{x}$ positiva le asocia $\int_1^x \frac{dt}{t} = \boldsymbol{ln(x)}$ En ambas definiciones se establece tácitamente que el logaritmo sólo es aplicable a los números positivos, pero:

c) ***¿A qué es igual el logaritmo de un número negativo?***

d) **¿Cuál es la necesidad de considerar siempre sólo a los números positivos?**

PRIMERA PARTE

1) Puesto que la función logaritmo se caracteriza principalmente por las propiedades siguientes: $\boldsymbol{ln(xy) = ln(y) + ln(x)}$ y $\boldsymbol{ln(x^m) = m ln(x)}$. **¿Tales igualdades seguirán siendo válidas al considerar a $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ negativos?** Es decir, al aplicar el logaritmo a números negativos: $\boldsymbol{ln(-x)(-y) = ln(-y) + ln(-x)}$.

   Si considera que seguirán siendo válidas, intente dar una demostración, en caso contrario exponga un contraejemplo.

2) Consideremos la siguiente argumentación, sabemos que $(-\boldsymbol{x})^2 = (\boldsymbol{x})^2$, para cualquier $\boldsymbol{x}$, si aplicamos la función logaritmo a ambos miembros de la igualdad, tenemos;

$$\boldsymbol{ln(-x)^2 = ln(x)^2}$$
$$\boldsymbol{2ln(-x) = 2ln(x)}$$
$$\boldsymbol{ln(-x) = ln(x)}$$

   De modo que el logaritmo de números negativos no solo se puede definir sino, además, hemos establecido $\boldsymbol{ln(-x) = ln(x)}$ mediante la argumentación anterior. **¿Está usted de acuerdo con este argumento? ¿Por qué?**

3) Es claro que $\frac{dx}{x} = \frac{-dx}{-x}$, que por integración se tiene:

$$\int \frac{-dx}{-x} \qquad\qquad \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln u \qquad\qquad \int \frac{du}{u} = \ln u$$

$$u = -x\,;\; du = -dx \qquad\qquad u = x\,;\; du = dx$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{-dx}{-x} = \ln u = \ln(-x) \qquad\qquad \int \frac{du}{u} = \ln u = \ln(x)$$

En conclusión: $\ln(-x) = \ln(x)$

Con lo que se admite la existencia de los logaritmos de números negativos y además una manera de calcularlos es basándose en los ya conocidos y aceptados logaritmos de números positivos. Por ejemplo, si se desea conocer el $\ln(-1)$ este es igual al $\ln(1)$, el $\ln(-2) = \ln(2)$, etc. **¿Está usted de acuerdo con ese argumento? ¿Por qué?**

4) Estamos ya en condiciones de calcular el logaritmo de cualquier número negativo, en particular $\ln(-1)$. Calcúlelo, $\ln(-1) =$ ___.

5) Grafique la función $f(x)$ que hemos obtenido al considerar el logaritmo de números negativos. Explícite $f(x)$ para $x < 0$ y $x > 0$

6) Intentemos dar otra argumentación a favor de $\ln(x) = \ln(-x)$.

Sabemos que si $x > 0$, $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$.

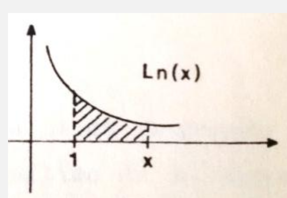


Figura. 1.

Intentemos extender esa definición a los números negativos.

Expresando $\boldsymbol{f(x)} = \frac{1}{x}$ para $\boldsymbol{x < 1}$ en intervalos de $\boldsymbol{-x, -1, 0\ y\ 1}$.

$$\int_1^{-x} \frac{1}{t} dt = \int_1^{0} \frac{1}{t} dt + \int_0^{-1} \frac{1}{t} dt + \int_{-1}^{-x} \frac{1}{t} dt \qquad \textbf{...Suma 1}$$

Graficando $\boldsymbol{f(x)} = \frac{1}{x}$ para $\boldsymbol{x < 1}$ e ilustrando las áreas de la gráfica que no corresponden a la definición de logaritmo, porque están entre 0 y 1.

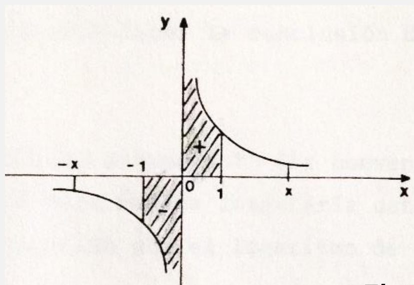


Figura. 2.

Se observa de la **figura 2** que:

$$\int_1^{0} \frac{1}{t} dt + \int_0^{-1} \frac{1}{t} dt = 0$$

Por ser un área positiva y la otra negativa, e iguales en magnitud, que sumadas son cero. Por lo tanto, de **suma 1**.

$$\int_1^{x} \frac{1}{t} dt = \int_{-1}^{-x} \frac{1}{t} dt$$

Luego:

$$\ln(-x) = \int_{-1}^{-x} \frac{1}{t} dt = \int_1^{x} \frac{1}{t} dt = \ln(x)$$

Ya que:

$$\int_{-1}^{-x} \frac{1}{t} dt = \int_1^{x} \frac{1}{t} dt$$

Corresponde también, a áreas iguales.

De donde se concluye que: $\boldsymbol{ln}\,(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x})$**.**

¿Le convenció este argumento?

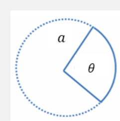
¿Si usted fuera profesor, o bien, tenga que explicar el logaritmo de números negativos, usaría esos mismos argumentos?

¿Si no es así, de qué manera intentaría usted responder a quien le ha preguntado por el logaritmo de números negativos?

SEGUNDA PARTE

1) Verifiquemos ahora si los resultados obtenidos son consistentes con la matemática existente.

Del cálculo sabemos que el área de un sector circular de radio a es $\frac{a^2\theta}{2}$, pero



$$\frac{a^2\theta}{2} = \left[\frac{a^2\theta(2i)}{2(2i)}\right] = \left[\frac{2a^2\theta i}{4i}\right] = \left[\frac{a^2(2i\theta)}{4i}\right] = \left[\frac{a^2}{4i}[i\theta - (-i\theta)]\right]$$

$$= \left[\frac{a^2}{4i}[ln\left(e^{i\theta}\right) - ln\left(e^{-i\theta}\right)]\right] = \left[\frac{a^2}{4i}[ln\,(\cos\theta + isen\theta) - ln\,(\cos\theta - isen\theta)]\right]$$

$$= \left[\frac{a^2}{4i}[ln\,\frac{(\cos\theta + isen\theta)}{(\cos\theta - isen\theta)}]\right]$$

Esta fórmula fue dada por **Bernoulli**, en 1728, para representar el área de un sector circular de radio $\boldsymbol{a}$ y ángulo $\boldsymbol{\theta}$. Comparando y evaluando en $\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}$.

$$\frac{a^2\theta}{2} = \left[\frac{a^2}{4i}[ln\,\frac{(\cos\theta + isen\theta)}{(\cos\theta - isen\theta)}]\right] = \left[\frac{a^2}{4i}[ln\,\frac{\left(\cos\frac{\pi}{2} + isen\,\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{2} - isen\,\frac{\pi}{2}\right)}]\right]$$

$$\frac{a^2(\frac{\pi}{2})}{2} = \left[\frac{a^2}{4i}[ln\ \frac{\left(isen\frac{\pi}{2}\right)}{\left(-isen\frac{\pi}{2}\right)}]\right] = \frac{a^2}{4i}[\ln(-1)]$$

$$\frac{a^2\pi}{4} = \frac{a^2}{4i}[\ln(-1)]$$

$$(\boldsymbol{Continue\ el\ procedimiento}\ \ldots)$$

$\boldsymbol{Resultado} =$

Pero anteriormente, con $\boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ln}\ (-\boldsymbol{x})$**,** habíamos obtenido $\boldsymbol{ln}(-\mathbf{1}) = \mathbf{0}$.

¿Cómo explica el resultado al que habíamos llegado $\ln(-1) = 0$ y este último resultado $\ln(-1) = \pi i$?

¿Constituye esto una contradicción? Explicite y argumente.

¿Se puede salvar esa contradicción, sin evadir? ¿Cómo?

2) Las contradicciones obtenidas surgen de considerar simultáneamente la validez de la igualdad $\boldsymbol{ln}(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x})$ y la expresión del sector circular de radio $\boldsymbol{a}$; $\left[\frac{a^2}{4i}[ln\ \frac{(\cos\theta+isen\theta)}{(\cos\theta-isen\theta)}]\right]$ por tanto, alguna de las consideraciones, ¿es falsa?. **Revise.**

¿Le convencieron estos argumentos?

Observaciones sobre la aplicación de la SA.

1) Se pretende aplicar la ***SA*** a estudiantes de **ICE**, que estarían cursando (iniciando) variable compleja en el tercer semestre de la carrera, ya cursadas las materias de ecuaciones diferenciales, fundamentos de álgebra y cálculo diferencial e integral (Ver Tabla 3).

2) Se indica en la situación de aprendizaje no borrar con la intención de rescatar al máximo los intentos de solución. Por otro lado, sigue siendo el logaritmo natural ($\boldsymbol{ln}$) al cual se hace mención en la situación, para generalizar el uso de la base ($\boldsymbol{e}$).

3) Al igual que en **Cantoral y Farfán (2008)**, la ***SA*** consta de *dos segmentos* y con las indicaciones previas.

El primero es la aplicación de la situación de aprendizaje.

Y el segundo, es con la sesión de debate si es que las respuestas en la situación de aprendizaje requieren discusión o aclaración, en condiciones donde el alumnado se sienta en confianza de participar sin mayor público. Y sin interferencias entre compañeros y compañeras, a fin de que no predispongan sus argumentos. Grabando y anotando lo que se suscite.

CAPÍTULO IV. RESULTADOS.

Realización, observación, y recolección de datos.

Una vez el rediseño de la situación de aprendizaje, orientada a la superación de los obstáculos epistemológicos, se puso en escena con estudiantes del IPN, de la escuela superior de ingeniería mecánica y eléctrica, unidad Zacatenco, en total fueron 13 estudiantes; 8 hombres y 5 mujeres. En las condiciones que se documentan en este trabajo; recién ingreso al tercer semestre y cursando la teoría de variable compleja, de hecho, fue en el horario de esta materia donde se llevó a cabo la puesta en marcha.

Se les explicó a los estudiantes que se analizaría un proceso de resolución de problemas matemáticos por descubrimiento, nada relacionado al fin que se tenía.

El papel del profesor fue explicar que el espacio se dedicaría a tal ejercicio y que tenía que ver con la materia (Se observa que esto no fue determinante para los estudiantes en la resolución de la ***SA***). Una alumna pensó que algo tenía que ver con los números complejos y la teoría de variable, pero comenta, que sólo se lo imagino, no integro a i, no hubo reflexiones por ella misma al respecto.

Los estudiantes resolvieron la situación de aprendizaje en total concentración, mediante dos sesiones de 1 ½ horas. Lo que se puede explicar como un interés y una aceptación en torno al $\ln(-x)$. En la primera sesión se realizó la **INTRODUCCIÓN** y la **PRIMER PARTE**, mientras que, en la segunda sesión, se resolvió la **SEGUNDA PARTE**. Lo anterior en papel y lápiz, siendo la sesión de debate la posterior etapa en una tercera sesión de 30 min aprox. También se les aclaró a los estudiantes que no investigaran al respecto, pues la situación de aprendizaje perdería objetividad.

Análisis a posteriori y evaluación. Resultados globales.

Se describen a continuación, ideas que se presentaron durante todo el proceso de la intervención didáctica. Aquí comienza el *análisis a posteriori y evaluación*.

Los estudiantes resolvieron la situación de aprendizaje en su totalidad. A diferencia de la primera puesta en marcha de la ***SA*** en docentes-matemáticos en 1988.

Al término de la ***SA*** o durante su proceso, los estudiantes exhibieron y expresaron la idea de contradicción, que se planteó en el diseño. Así como también consideraron a la mayor contradicción como un conflicto cognitivo. Todo fue agudizado en la etapa de debate. De hecho, durante la primera sesión, un estudiante lo hizo evidente, al preguntar que le parecía que todo era contradictorio.

En torno a esta idea de contradicción, los estudiantes de ingeniería optaron por seguir una ruta de exploración y continuar con el desarrollo de la situación de aprendizaje. A diferencia de los docentes-matemáticos que en todo momento querían refutar el discurso argumentativo. Los estudiantes de ingeniería que en primera instancia rechazaban al $\ln(-x)$, seguían desarrollando los demás incisos, y cuando debían aceptar $\ln(-x)$ para calcularlo, lo hacían. Parecían aceptar los resultados generados en tanto les resultaran explicables, sin importar que fuesen aparentemente incongruentes, por ejemplo, negaron que $ln(-x) = ln(x)$, y aún asi en el inciso **5**, se basaban en lo que negaron para responder a que es igual el $\ln(-1)$ y también para graficar.

Existieron dudas al respecto de los procedimientos desarrollados (que se dijo, para ahorrar tiempo), en donde también se les aclaró que no había elementos *capciosos*. Se les decía que podían corroborar dicho procedimiento. Este hecho limitó que algunos estudiantes no llegaran por si solos a la contradicción mayor. Sin embargo, en la etapa de debate se les explicó y permitió nuevamente que llegasen a resolver sus desarrollos incompletos o en los cuales tenían dudas. Así lograron seguir el rumbo que se deseaba.

Existieron obstáculos de tipo conceptual, ya que algunos estudiantes en la sesión de debate expresaron que aceptaban $-\ln(x)$, refiriéndose al $\ln(-x)$.

Los estudiantes de ingeniería buscaron un referente en sus respuestas y lo encontraron en el uso de la calculadora. Fue tendencia en ellos expresar que el $\ln(-x)$ “no existe porque la calculadora lo determina así”.

CAPÍTULO V. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Para la Socioepistemología, descrita en **Cantoral (2013)** el conocimiento es difiere al saber. El conocimiento es una información sin uso, y el saber es poner en uso útil al conocimiento. Que en relación al **dME**:

> "…el conocimiento matemático aparece de forma rígida […] tanto los profesores como sus estudiantes aparecen como comunicadores y aprendices de un conocimiento legítimo socialmente, pero sin la posibilidad de construirlo y modificarlo, […] sin valor de uso" **(Cantoral, 2013, p. 171 - 172).**

En las producciones de los alumnos y alumnas de la **ESIME** de la carrera **ICE** se observa la influencia del **dME**. Para caracterizar estas producciones, se hace uso de las categorías de análisis expresadas en **Cantoral y Farfán (2008)**, las cuales conservaron su adaptabilidad a otro campo de estudio. Todas influenciadas, unas más visible que otras por el **dME**. Este marco de análisis, también se apoya en el uso de la **sensibilidad a la contracción**, pues se cree que, si no son sensibles a la contradicción, son permeados por una enseñanza del **dME** que impone argumentos. El **dME** coadyuva al análisis pues los estudiantes los reconocen, y permite entonces configurarlo a modo de que estos expresen su pensamiento matemático. Dichos autores también comentan que las formas típicas de clase, donde los argumentos impositivos legitiman una respuesta conceptualmente distinta como un *error*; hace que los estudiantes dada una tarea tiendan a querer, no equivocarse, sintiendo recelo o expresando aún más, el arraigo a lo *institucionalizado* coartando sus posibilidades de exploración y reflexión (muy requeridas para el rediseño de la ***SA***). Fenómeno también observado en la caracterización de las producciones.

Las categorías de las cuales se habla son:

NOTA; Hombres -> ***H***

Mujeres -> ***M***

Investigador -> ***E* / texto en negritas**

Preguntas no escolares: cuando el tema no se ha visto en los libros ni en clases (Cantoral y Farfán, 2008)

Es aquella visiblemente influenciada por el **dME**, donde se observa que los actores en interacción con el saber, ocupan diferentes posiciones discursivas debido a roles del aula, de ahí la resistencia en aceptar como válida la pregunta sobre el $ln\ (-x)$, pues no ha sido institucionalmente presentada en clase. Es así como el pensamiento inicial de la población de estudio, es guiado por una reflexión que no señala una *ruta de acción lógica* donde el **dME**, propicia el arraigo a lo único conocido y limita la reflexión (cuando no advierte de la existencia de logaritmos de números negativos), reflexión caracterizada por la inseguridad de no haberse preguntado antes, tal cuestionamiento.

En general, la pregunta, ***¿a qué es igual el logaritmo de un número negativo?***, en la sección de **INTRODUCCIÓN**, les resulta legible y explicable dado que pueden utilizar formas verbales para argumentar, dadas por el **dME**.
Se observa el referente de la costumbre didáctica, inmediato a cualquier reflexión en el pensamiento de los alumnos y alumnas que se ve reflejado en sus argumentaciones con el uso de la calculadora.

Sin embargo, existe una parte de la población que expresa la aceptación del logaritmo de un número negativo desde esta primera pregunta. Esto quiere decir que el marco de referencia del **dME** no hace la aparición desde los primeros acercamientos, sino que es presente en incisos más delante de la ***SA***. Estos estudiantes que aceptan en primera instancia el logaritmo de un número negativo hacen alusión al $ln\,|x|$, sin dar cuenta de ello.

Evidencias.

E: ¿A qué es igual el logaritmo de un número negativo… Cuál es la necesidad de considerar solo a los números positivos?

H3: Se tiene entendido como un error matemático… ni la calculadora puede hacer esa operación.

H6: No existen los logaritmos de números negativos… siempre los logaritmos positivos y de hecho cuando lo meto a la calculadora me marca error….

H7: Es igual al logaritmo de un número positivo, pues me imagino que hace referencia gráficamente a la distancia que hay entre dos puntos o un punto y el origen, por lo que representa la misma magnitud.

M1: Simplemente metiendo el dato a la calculadora te marca error por lo que se deduce que no está definido, o en su defecto no existe…

M2: Lo que yo pensaba antes es que no existía el logaritmo…

M3: Pensaba que era cero … porque pensé que no se podía… vez que las raíces negativas a veces te dicen que no se pueden hacer… si lo metes a la calculadora te marca error… pero pues pensé que era así… entonces cero…

E: ¿Por qué meter el dato a la calculadora ?

M1: Para comprobar si existía… porque es más exacto el resultado… porque no se equivoca…

M2: Para no tener ninguna dificultad al momento de hacer las operaciones.

M3: Pues es que es como calcular raíces negativas…

H3: A finales de la secundaria y en todo bachillerato… si aparecía un numero negativo en un logaritmo te decían que tu procedimiento está mal porque obviamente al introducirlo a la calculadora de plano te iba a arrojar un error matemático… no nos decían porque, sólo que era error matemático…

H6: Pues es la que hace todo prácticamente, casi siempre te apoyas a la calculadora… cuando haces el examen pues agarras la calculadora; el profesor está dando clase, también agarras la calculadora, pues costumbre.

H7: Porque resulta más sencillo manejarlos a la hora de realizar operaciones…

Nota*. *M1*, *involucró a números complejos en su respuesta* **b)** *porque se imaginó que algo tenía que ver con la materia, sin embargo, solo fue una idea.

Extensión de las operaciones y sensibilidad a la contradicción: cuando la algoritmia permite refutar el enunciado (Cantoral y Farfán, 2008)

El universo discursivo de referencia e impuesto por el **dME**, propone el entorno escolar y las dinámicas en ella. Es así como se puede observar su influencia para para "lo que se dice y lo que se hace en el aula" **(Cantoral y Farfán, 2008, p. 273)**. Las formas verbales entonces no son las únicas sobre las que actúa el **dME**, este también lo hace sobre la representación en papel y lápiz.

Por ello en la pregunta **1)** de la **PRIMER PARTE** de la **SA**, basada en que *Leibniz* argumentaba la no existencia de logaritmos de números negativos tomando como referencia las propiedades de los logaritmos de números positivos, era un intento de reflexión centrado en una **exploración** que les permitiera cuestionarse y argumentar, si las propiedades en $\ln(-x)$ debían cumplirse en $\ln(x)$. **Cantoral y Farfán (2008)** expresan que Leibniz argumentaba que las propiedades eran las mismas, cómo si debieran cumplirse en ambos casos. Los estudiantes siguieron este desarrollo conceptual con relación a lo que sí reconocen y validan, es decir sobre las propiedades de los logaritmos de variables positivas y el uso de las leyes de los signos, cuando se dice que $(-)(-) = (+)$, *reglas y leyes* de la enseñanza tradicional. Este hecho produjo coherencia al **dME** y remitió a los estudiantes a su postura de inicio. Lo cierto es que no tenían por qué ver a este enunciado interrogativo como una regla.

Sin embargo, como existieron estudiantes que aceptaron el $ln(-x)$ o al menos dudaron de su existencia en la sección anterior, infirieron ciertas conclusiones derivadas.

Evidencias.

E: Puesto que la función logaritmo se caracteriza principalmente por las propiedades siguientes: $ln(xy) = ln(y) + ln(x)$ y $ln(x^m) = mln(x)$. ¿Tales igualdades seguirán siendo válidas al considerar a x e y negativos? Es decir, al aplicar el logaritmo a números negativos: $ln(-x)(-y) = ln(-y) + ln(-x)$. Si considera que seguirán siendo válidas, intente dar una demostración, en caso contrario exponga un contraejemplo.

M2: No creo que sean las mismas ya que no existen los logaritmos de un sólo número negativo, no se mucho sobre logaritmos pero puede que tenga muchas propiedades…no sabría decir si estoy bien, sería cuestión de aprender más sobre los logaritmos…

M4: Como que ignoré el signo, ves que por leyes de signos dos negativos dan un positivo, entonces a eso me fui de alguna manera… si porque realmente desconozco o desconocía si esto daba, a fin de cuentas lo mismo, y sólo me fui en signos …

H3: Teniendo en cuenta que los números negativos no existen en los logaritmos las igualdades ya no son válidas o no aplican.

H7: Sí el logaritmo de x es igual al logaritmo de menos x y el logaritmo de menos y es igual al logaritmo de y, entonces esto vendría siendo lo mismo….

Una deducción plausible y sensibilidad a la contradicción: cuando la definición produce divergencias fruto de la deducción (Cantoral y Farfán, 2008)

Hace referencia a que el saber matemático se adhiere al **dME**, cuando logra coherencia interna. “Es función del saber cultural institucionalizado, otorgar validez a los hallazgos matemáticos” **(Cantoral y Farfán, 2008, p. 274).** Por ello, a fin de que alumnos y alumnas justificaran y exploraran más ampliamente sus afirmaciones, hacer alusión a las reglas de diferenciación, uso de exponentes e integrales dotó de elementos conocidos y validados. Esto se refiere a los incisos **2)**, **3)** y **6)** de la **PRIMER PARTE** de la **SA**. Esto implicaba también que los estudiantes podían buscar una incoherencia al discurso argumentativo que se les presentaba, es decir, que quizá dieran cuenta que se hace referencia al logaritmo del valor absoluto de x; No hubo deducciones al respecto, y en su mayoría aceptaron sin mayor problema que $ln(-x) = ln(x)$, sin reconocer al $ln|x|$, y ya en el inciso **4)**, confirmaban y calculaban $ln(-1) = ln(1) = 0$, además de intentar graficar, la instrucción del inciso **5)**, que pretendía explícitamente dieran cuenta que la gráfica era de $ln|x|$ y, en consecuencia, concluir al respecto.

Se observa que no conocen la gráfica logarítmica pues se basan del inciso **6)** de la ***SA*** para construirla; fue un tanto *curioso* que se les preguntara si se habían basado en el inciso **6)**, (ya que se observan las gráficas muy semejantes) en su mayoría respondían que no. Este fenómeno puede atribuirse al *contrato didáctico*, en el sentido que, tenían que contestar y no dejar incisos vacíos; ya que si desconocían la gráfica podían pedir apoyo, imperó el rol del estudiante bajo el paradigma calificativo, pues dejar incisos sin contestar, resta posibilidades de aprobar.

Cabe mencionar que en la sesión de debate se trabajó el asociar la grafica $ln(-x) = ln(x)$ con el $ln|x|$; se reconoce a la función valor absoluto, peo no se asocia del todo la idea de simetría del logaritmo.

Evidencias.

M5: $\mathbf{log(-1) = log(1)}$ **;** $\mathbf{log(1) = 0 \therefore log(-1) = 0}$

M2: $\mathbf{log(-1) = log(1) = 0}$ **E: Entonces, ¿podemos calcular** $\mathbf{log(-1)}$**, con el** $\mathbf{log(1)}$**?**

M2: Si…

H6: $\mathbf{log(-1) = log(1) = 0}$ **E:** $\mathbf{log(-x) = log(x)}$**, ¿lo aceptas?**

H6: Pues si lo acepto ... ya mostro varios argumentos… que es verdadero …

H2: $\mathbf{log(-1) = log(1)}$ … se comprueba que el valor es el mismo.

$\mathbf{log(-2) = log(2)}$

….

$\mathbf{log(-n) = log(n)}$

H7: $\mathbf{log(-1) = log(1)}$

$\mathbf{log(1) = 0 \therefore log(-1) = 0}$

M4: Si…

$\mathbf{log(-1) = log(1) = 0}$

Cabe mencionar que la población de **Soto (1988)** si presento divergencias y radicaron en las críticas hacia el casi reconocimiento de $ln|x|$, como consecuencia, no avanzaron en la ***SA*** expresando una negación sistemática para el $ln(-x)$.

Las primeras muestras de adhesión y la aceptación del contrato (Cantoral y Farfán, 2008)

La diversidad de argumentaciones, tanto para la negativa o aceptación de $ln(-x)$ expresadas por los alumnos y alumnas deja en evidencia que la aceptación de un resultado en matemáticas no es única; la lógica matemática expresada en la ***SA***, reconocida por los estudiantes no es suficiente, sino que los estudiantes buscan el arraigo a lo institucionalizado. Estas formas de aceptación son el producto de una formación de identidades sociales que radica de la interacción entre estudiantes, libros de texto y profesores, con el saber socialmente establecido en una *institución* y que se explicitan y validan en la medida que los estudiantes se integren a esta dinámica de interacción (**Cantoral y Farfán, 2008**). “El criterio de verdad no proviene entonces, de la discusión propiamente matemática, sino de la convención institucional en curso de constitución” **(Cantoral y Farfán, 2008, p. 277).**

En este orden de ideas, los estudiantes de ingeniería a diferencia de los docentes matemáticos, no se arraigan a una idea de negación, se muestran en todo momento, dispuestos a explicar los planteamientos de la ***SA*** y en la etapa de debate, así, cada alumno y alumna presenta cierta resistencia en diferentes puntos de la situación, pues era lo que “ellos sabían”, pero no argumentaban matemáticamente coherente, más bien, solo tenían dudas que al ser aclaradas, se observa en ellos, el cambio de paradigma.

Evidencias.

E: $\boldsymbol{(-x)^2 = (x)^2}$

$\boldsymbol{\ln(-x)^2 = \ln(x)^2}$ **;** $\boldsymbol{2\ln(-x) = 2\ln(x)}$

$\boldsymbol{\ln(-x) = \ln(x)}$

H2: $(-x)^2 = (x)^2$; $4(-x) = 4(x)$

Estoy en duda porque ya avanzando a este nivel, pues digo como que este concepto ya está viejo…, al presentarme usted esto, como que me hizo cambiar […] mi criterio va cambiando… esto no es lo que creí en la preparatoria, es totalmente diferente… si me entró como que un cambio radical en mi criterio sobre este tema de los números negativos…

H4: No porque no se podría eliminar el exponente ambos términos deberían tener $2\ln(-\mathrm{x})$ y $2\ln(\mathrm{x})$**.** Es que tuve una duda cuando bajo el exponente… **E: Sería de acuerdo con las propiedades de los logaritmos, siendo el exponente, puede ser coeficiente** **H4:** Ha ok ok… **E: ¿Estás de acuerdo?** **H4:** Si.

H1: En sí no está mal, se puede decir que es una forma de interpretarlo… hay que tener las bases para entenderlos y trabajarlos, habría que ver si se puede trabajarlos, ¿por qué no?

M1: ¿Cómo eliminas el dos para que pase aquí? **<se le explica igual que H4> E: Estás de acuerdo?** **M1**: pues si porque eliminas estos dos …y ya te queda el $\ln(x)$.

M2: $(-x)^2 = (x)^2$ …solamente aquí igual si se eleva al cuadrado un número negativo, queda positivo, ¿no? **<se le explica, igual que a M1>**

M2: Si, está bien…

El siguiente dialogo muestra notoriamente, el arraigo a una idea impuesta por el **dME**, donde el alumno tuvo confusión.

E: Obtenga la función obtenida dado $ln(x) = ln(-x)$.

H7 <se le pregunta por qué rayó y puso la palabra error> …empecé a darle valores a la función y cuando lo terminé de graficar, vi que estaba mal **E: ¿por qué?** porque la gráfica de los logaritmos… vienen siendo estas como curvas **<refiriéndose a la hipérbola, muy probablemente, lo vio en el inciso 6) de la SA>** entonces aquí no sé por qué me dio eso, siento que fue error mío… **<se le pregunto si se orientó de la SA, para graficar>** no… yo sabía que la gráfica de los logaritmos viene siendo así… pero cuando ya cuando empecé a darle valores a la función (en la calculadora) me salieron mal… **E: pero los resultados de la calculadora digamos que, son correctos <se le mostró la gráfica del logaritmo y se le dijo que es, precisamente como la que él dedujo, pero por la escala se veía así, posteriormente se le pregunta> ¿te salió algo diferente a lo que tu sabías y eso te hizo dudar?** aja… pues siempre nos han explicado que así es la gráfica de un logaritmo…

E: y ¿qué me dices ahora, con que grafica te quedas, sigues confundido? … me confunde… siempre nos han enseñado que un logaritmo se gráfica de esta manera… me causa confusión…
E: cual eliges, ¿por cuál optas? por la que ya nos han dicho…**E: ¿Por qué?** … porque es como la manera de explicar de los profesores **E: pero si hace un rato mencionabas que la calculadora era confiable, por qué no optas por la gráfica que tu dedujiste con la calculadora ¿no te contradices?** … ya te entendí … me iría por el valor de la calculadora, pero pues trataría de que el profesor me explicara por qué me da este resultado… **E: y ¿si te vuelven a decir que esa no es la gráfica?** … la calculadora no tiene error… **<por último se le vuelve a preguntar, cual grafica lo convence más, si la que el descubrió y referencio en la calculadora, o la que se acuerda que le han dicho los profesores>** seguiría optando por la de los profesores porque si ya te lo repite más de un profesor, como que ya … te quedas con la idea de que es cierto… que te lo hayan dicho desde la vocacional… pues tengo la idea de que esto es lo correcto…

De la aceptación escolar al argumento matemático: sobre la contradicción en matemáticas Cantoral y Farfán (2008)

Dado que la población de estudio en **Cantoral y Farfán (2008)** eran de algún modo, futuros docentes en matemáticas, esta sección enmarcó un ejercicio de reflexión al respecto de su futuro profesional, con objeto de conducir la percepción de los estudiantes sobre un hipotético alumno quien aceptaría sus justificaciones en clase.

En el presente estudio se retoma esta idea a modo de guiar a los ingenieros e ingenieras en formación hacia una reflexión global y sintetizada acerca del logaritmo de un número negativo, bajo el cuestionamiento de qué responderían si alguien les pregunta sobre el $ln\,(-x)$ ya con el desarrollo total de la ***SA*** del cual habían sido parte. Independientemente si el $\ln(-x)$ era una noción aceptada (o no), tenían que verbalizar y dar coherencia a las contradicciones suscitadas con una reflexión final. Esta conclusión se vio apoyada por la sesión de debate, ya que se volvió a enfatizar el $ln(-1) = -1$ en la **PRIMER PARTE**, para después llegar a $\ln(-1) = \pi i$; $\pi\mathrm{i} = 0$, con la **SEGUNDA PARTE**.

"se tiene la intencionalidad de permitir para la población el uso de formas argumentativas típicas de clase a fin de buscar su aceptación" (**Cantoral y Farfán, 2008, p. 279)** o bien, al menos su explicación, por ello se procuró guiar al alumnado hacia una conclusión que involucrara a los números complejos (conocidos por ellos) como explicación de los logaritmos de números negativos y también para que dieran cuenta que $\mathbf{ln}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{ln}(-\boldsymbol{x})$, hace alusión al $\mathbf{ln}\,|\boldsymbol{x}|$ (este último punto sucede, sólo en un caso).

Como alumnos y alumnas explican los resultados de la contradicción planteada y logran desde el punto de vista de esta investigación, delimitar teorías, se pensó que podrían quizá adjudicar en consecuencia que la primera parte hacía referencia a $ln|x|$, con esa idea, se les comento, que si $ln(-1) = \pi i$ es en un campo y $\ln(-1) = 0$ en otro, complejo y real respectivamente, por qué era entonces que $ln(-1) = ln(1)$; qué pasaba, por qué se tenía ese resultado. Se quiso orientar a que la pertinencia de $ln(-x) = ln(x)$, radicaba en lo real.

Cantoral y Farfán (2008) dan sentido a esta categoría orientado hacia el "dilema docente", en esta investigación, esta reflexión orienta para la superación de los obstáculos epistemológicos.

Evidencias

E: **Como explica el resultado al que habíamos llegado $\mathbf{ln(-1) = 0}$ y $\mathbf{ln(-1) = \pi i}, \therefore\ \boldsymbol{\pi i} = \mathbf{0}$, ¿Constituye una contradicción ?**

M4: Si, ¿no? ... **<se le recuerda lo que escribió y se le pregunta acerca de lo que escribió… >** podría ser, ¿no?... aja … un ejemplo, esto aplica para los reales ($\mathbf{log\ (-1) = 0}$) y esto para los imaginarios ($\mathbf{log\ (-1) = \pi i}$), bueno, para otro campo… podría decir que a lo mejor descubriste una identidad… **E: ¿entonces… a que es igual el $\mathbf{log(-1)}$?**

M4: Depende el campo, los reales o los complejos… si tú me dijeras en tal campo que no sea los reales sería… ah pues πi, si tu me dices los reales, ah!, es cero…

H8: Concluí que si hay una contradicción porque no puede haber dos resultados con el mismo procedimiento, podemos tener muchos procedimientos pero siempre obtener el mismo resultado sobre todo en matemáticas, fue ahí donde dije … tal vez alguno de estos dos argumentos, la primera parte o la segunda es incorrecta, porque no pueden dar dos resultados… y creí que como venía la i, dije, ah bueno, tal vez en el plano de los complejos, este resultado de $\log(-1)$ sea correcto… en el plano de los reales da un valor y en el plano de los complejos da otro… dije bueno tal vez pueda ser una transformación … o que en un plano de un valor y en otro, de otro…

E: **Entonces por qué parece que existe $\log(-x) = \log(x)$ … de considerar los reales, llegamos a eso…**

M4: A lo mejor solo es una extensión más de los logaritmos que por alguna razón no nos quieren dar ahorita y no se más adelante van a decir, el $\log(-x)$,era por esto por esto y por esto, ah y en cálculo, este, te decían que no existía porque te ibas a confundir o algo así…

H8: por medio de su gráfica, entonces, primero encontraríamos al logaritmo de un número positivo y encontramos que es cero y siguiendo las propiedades el $\log(-1) = \log(1)$ y tenemos que es cero … en esa parte podemos llegar en la parte de los reales y en la parte de los complejos, ah igual haciendo el desarrollo obtenemos que el $\log(-1) = \pi i$ y se obtienen dos valores o dos resultados distintos , porque son dos campos totalmente distintos, no son lo mismo… **E: ¿Y esta gráfica que particularidades me dijiste que tenía? (la del inciso 4)** ah, que se asemeja al valor absoluto… **E: en el inciso 4 para $x < 0$ y para $x > 0$ … ¿la función cuál es?** …el logaritmo de menos x… están tomando valores negativos de x… y seria logaritmo de… positivos de x… si hacemos el valor absoluto a los logaritmos o a los argumentos, entonces no importa en qué sentido vaya, siempre va a ser lo mismo… **E: recuerdas la definición del valor absoluto, me la mencionabas… esta no te parece una definición de valor absoluto** eh, sip… **E: y de que estamos hablando** de los logaritmos **E: entonces esto a qué es igual (la gráfica)** al logaritmo del valor absoluto de x, ¿no?...

El reflejo de los conocimientos culturalmente establecidos: la practicidad de la ingeniería y la demostración matemática

Dado que el saber matemático no ha sido creado para ser enseñado en la escuela **(Cantoral (2013))** cuando eso sucede, pierde su esencia y significado a fin de ser sintetizado y enseñable. Es así que la concepción del logaritmo de un número negativo como introducción a la teoría de variable compleja, es una cuestión totalmente desconocida para los estudiantes, tanto en 1988 y en 2017, producto de la enseñanza tradicional. La enseñanza de los logaritmos debiera involucrar una advertencia singular, y no una negación de existencia como lo expresa **Gómez, Pardo y Pastor (2003)** dado el análisis de un libro de bachillerato donde el libro niega indirectamente y evade el logaritmo de números negativos. Dadas las producciones de los estudiantes, se confirma que el **dME** al cual están inmersos, no advierte de la existencia de logaritmos de números negativos en otro campo de números, pero si niega la existencia en el dominio real (comentarios de algunos estudiantes).

En la población de **Soto (1988)**, se dedujo que sí existía el $ln(-x)$, podría responder a una nueva teoría, pero no se involucraron los números imaginarios. Ahora bien, parte de la población de ingenieros, logra involucrarlos, pero no logran dar cuenta que el logaritmo de un número negativo por extensión de los positivos es el valor absoluto de x, como casi lo realizan los primeros. Lo que confirma que el **dME** impone la tendencia hacia el trato de los objetos matemáticos. Sin embargo, los estudiantes de ingeniería logran mostrarse flexibles al **dME** pues siempre se muestran dispuestos a explorar el discurso planteado en la **SA**, al menos, parece que dudan de su **dME** e intentan seguir, en tanto lo puedan explicar. Esto se enfila como una paradoja, pues no se podría afirmar si esta característica de exploración es propia de esta población de estudio o bien, es aquella característica dada por el **dME** para salir del mismo **dME**.

Podría decirse que la *practicidad* de los ingenieros e ingenieras en formación es una característica dada por el **dME** pues es diferente a aquel cargado de rigor matemático exhibido por el análogo, en los docentes-matemáticos. En la población ingenieril, la se observa la calculadora, como un referente importante, parte de esta *practicidad*, pues argumentaron que el $\ln(-x)$ no existía, porque en la calculadora, no se podía determinar.

Evidencias

E:	**¿Cuál es la necesidad de considerar siempre sólo a los números positivos?**
H4:	Se hace más fácil el manejo de los números… bueno de los logaritmos, que si fueran negativos…
M2:	Para no tener ninguna dificultad al momento de hacer las operaciones.
M5:	Que es más fácil responder problemas y graficar, muchas veces me he confundido al momento de usar números negativos y siento que usando números positivos la operación es más exacta y rápida.
H7:	Se usan más los números positivos porque resulta más sencillo manejarlos a la hora de realizar operaciones…
M4:	La manera de manifestarlos en su aplicación resulta más sencilla de operar y verificar…
H3:	Esto quizás se deba en el uso y aplicación de logaritmos en la resolución de problemas, además que en todo el trayecto cuando aparece un número negativo en algún cálculo se nos indicaba que eso no era posible en un logaritmo por lo consiguiente había algún error en el procedimiento…

Síntesis

La *sensibilidad a la contradicción* es evidente en los estudiantes cuando pueden indagar rutas no claras al respecto del $\ln(-x)$ y no tener arraigo al **dME** imperante. Esta incertidumbre se vislumbraba como aquella que impediría avanzar y concretar la situación de aprendizaje en los estudiantes de ingeniería, puesto que ya hay un antecedente **(Soto (1988))**, sin embargo, en los estudiantes de ingeniería no se observó un arraigo a una forma explícita o implícita de conocimiento. Los estudiantes de ingeniería tienden a intentar explicar los resultados obtenidos. En dado caso este arraigo radicó en la consulta de la calculadora o bien, en el pensamiento que forma un **dME** que tiene por objetivo emplear a las matemáticas como un fin, únicamente para la resolución de problemas.

CONCLUSIONES

Explorar el pensamiento matemático en ingenieros e ingenieras en formación, permite concluir diversas conjeturas.

En la enseñanza tradicional de la ESIME Zacatenco no se consideran los elementos epistemológicos que dieron origen a la teoría de variable compleja, en consecuencia, no se desencadena el proceso de socialización, a fin que haga posible que esta teoría matemática sea debatida.

La confrontación a la situación de aprendizaje, deja claro que existen elementos intrínsecos y necesarios de confrontar para la construcción del conocimiento matemático acerca de logaritmos de números negativos, ya que los argumentos para responder a esta interrogante tienen una extrema similitud, en tres épocas, geografías y campos de estudio distintos; los matemáticos del siglo XVIII, los docentes-matemáticos en 1988 y los estudiantes de ingeniería en 2017.

Ahora bien, en torno a la interpretación y manejo hacia los objetos matemáticos sobre el discurso del $ln\,(-x)$, dan muestra de los constructos teóricos del acercamiento sociocultural, entre la racionalidad contextualizada y el relativismo epistemológico. En el campo ingenieril, se muestra arraigo a un concepto que se ha llamado *practicidad* matemática, pues se demostró que los estudiantes de ingeniería construyen conocimiento sin la necesidad de un rigor matemático, por el contrario, muestran que la tendencia del discurso oficial de clase se orienta hacia el cálculo de operaciones, donde destaca el uso de la calculadora como elemento importante, pues es un referente en las respuestas de los estudiantes, estos, muestran disposición a explorar la ***SA*** de la cual no tienen mayor complicación para aceptar y responderla en su totalidad. Infiriéndose que esta característica, es dada por el **dME**, pues la falta de rigor rompe la familiaridad con los signos matemáticos, dejando a los estudiantes de ingeniería en condiciones de basar su comprensión al terreno conceptual, sin expresiones matemáticas. Caso contrario a los docentes-matemáticos que pretendieron refutar cada pregunta planteada de la ***SA***, no mostrando flexibilidad a lo que no es demostrable en lenguaje matemático o bien, mediante el rigor de su **dME**. Así, los estudiantes de ingeniería y los docentes matemáticos, establecen un tipo de razón de acuerdo con su contexto y en consecuencia construyeron una introducción distinta a la variable compleja(relativismo epistemológico). Pues, la tendencia de los estudiantes de ingeniería radicó en la delimitación de teorías mientras que en los docentes-matemáticos, sobre la noción de $\ln|x|$. Es asi que la población estudiada es sensible a la contradicción en el sentido de **Cantoral y Farfán (2008)** para explicar un resultado contradictorio en el $ln(-1)$.

Esto también evidencia al conocimiento como situacional pues los *cursos de convención institucional* entre estudiantes de ingeniería y docentes-matemáticos, marcaron la introducción a la teoría, desde su formación académica. Los docentes-matemáticos expresaron que tenían que reconstruir la teoría (obviamente refiriéndose a la teoría de variable compleja) sin explicar las contradicciones. Mientras que los ingenieros lograron la introducción al concluir que $\ln(-1) = \pi i$ y $\ln(-1) = 0$ en variable compleja y variable real, respectivamente. Es decir, se basaron de las contradicciones.

El rediseño de la situación de aprendizaje articulando la superación de los obstáculos epistemológicos propuesta por **Bachelard (2000)**, se observa que los estudiantes siguieron la ruta planteada, y al menos uno, se cree [**H8**], logró la superación de los obstáculos epistemológicos, como lo realizó Euler, destacando que la idea de retomar el argumento de Bernoulli sobre curvas (**Cajori, 1983, p. 43**) o idea de simetría, coadyuva en el reconocimiento de $ln|x|$, favoreciendo la representación del registro analítico y algebraico, al registro gráfico del estudio de logaritmo como función.

De dicha ruta planteada, se observa la influencia del contrato didáctico, pues se evidencio cuando los estudiantes se basaron en graficar igual que lo que se había puesto en el inciso **6)**, que era la definición de logaritmo dado el área bajo la hipérbola equilátera, es decir, probablemente no sabían cómo graficar y sin embargo, contestaban, pues quizá por su rol de estudiante “no podían dejar en blanco una pregunta”. Cabe mencionar también que las respuestas de tipo didáctico por parte de los estudiantes, los remite a su rol impuesto, pues no se creen capaces de descubrir y crear conocimiento nuevo en su condición de estudiantes, confirmando que la postura es; el estudiante calla y el profesor enseña.

Se observa que el **dME** actuó de manera que limita la reflexión; pues no se estudia la función logaritmo de manera tal que se reconozca como aquella que permite la existencia del $\ln(-x)$, alusivo a $\ln|x|$. Además de que los números complejos en el sistema escolar no son debidamente presentados pues siguen la idea que epistemológicamente no tuvo un desarrollo conceptual.

Dichos constructos teóricos el contrato didáctico y el **dME** inhibieron la reflexión e imposibilitaron a los estudiantes; se pensó que al graficar $\ln(-x) = \ln(x)$ podrían asociar a $\ln|x|$, aspecto que no sucedió en su mayoría. También fue tendencia observar que no argumentan para contradecir el discurso argumentativo, y para el inciso **4)** ya habían aceptado la validez de $ln(-x)$ quien no lo aceptaba no sabía decir concretamente por qué, se observa de nuevo la influencia del contrato didáctico.

Cabe mencionar que la problematización del saber dio pautas para la adaptación de la situación de aprendizaje, que sigue generando argumentaciones tipo a las de Leibniz, Bernoulli y en esta investigación, ya también a las de Euler. Dicha problematización permitió identificar los obstáculos epistemológicos: que procesos reales determinen cantidades complejas y lo logarítmico bajo la intuición de relación de progresiones y como modelizador.

El proceso de confrontación de los obstáculos epistemológicos y de socialización al respecto del logaritmo de un número negativo generó en los estudiantes una diversidad de argumentos de los cuales, más que la aceptación o rechazo de los mismos, es determinante la integración de todas las variables para observar la constitución matemática de un concepto, postura teórica de **Bachelard (2000)**. En la medida que la matemática escolar involucre procesos de tal índole, dejará la postura de que favorece solo un tipo de razón al respecto de otra.

De acuerdo con la conclusión de **Cantoral y Farfán (2008)**, en el presente estudio se observa también que la aceptación de un resultado en matemáticas no depende exclusivamente de la lógica matemática, pues intervienen elementos adicionales de orden sociocultural como el **dME**, que permite el arraigo en sus argumentaciones (al igual que en la población de Soto, 1988), sin embargo en la población ingenieril no se muestra un arraigo contundente, muestra de ello son sus repentinos cambios de paradigma. Este arraigo se manifestó notoriamente, no sólo en la aceptación de $\ln(-x)$, caso concreto de **H7**, que construyo una gráfica que el mismo descubrió, pero que rechazo puesto que en sus cursos de formación le habían dicho que la gráfica no era así. Él se quedó con la última conclusión.

Con esta investigación, se sensibiliza sobre qué matemática y hasta qué punto, sirve a la formación del ingeniero. Pues es obligado cuestionarse si el rigor matemático en sus cursos de constitución es suficiente.

RECOMENDACIONES A FUTURO

Comparar resignificaciones progresivas.

Sería importante observar y dar seguimiento a las y los alumnos entrevistados. Comparar con aquellos que no se les aplicó la situación de aprendizaje. Ya en el curso de la carrera, observar en ambos casos la *resignificación progresiva*, en el sentido de si han estado en condiciones de entender las materias que se nutren de la teoría de variable compleja y que significaron de una manera epistemológica.

Contextualizar a las materias de la carrera de **ICE** que se nutren con la variable compleja.

Una vez aplicada la situación en tercer semestre, sería interesante observar y aplicar situaciones posteriores, que involucren una práctica de referencia del ingeniero en comunicaciones y electrónica. Ilustrando y significando la potencialidad de la teoría en ámbitos ingenieriles.

Mostrar al número imaginario como imposibilidad.

En el resultado de $ln(-1) = \pi i$ generado en la segunda parte de la ***SA***, dado el círculo de radio a, una interpretación sería que, no hay área que calcular. Tomando ideas de **Nahin (1998)** podría mostrarse que los números i pueden representar imposibilidades de realizar algún procedimiento. Ilustrando que entonces, el uso de i como una posibilidad de explicar un determinado proceso en condiciones concretas.

Superación de los obstáculos epistemológicos.

Quizá una manera de apoyar la superación de los obstáculos epistemológicos es que se les involucre en el diseño de la ***SA*** a las y los alumnos, lo que reflexionaba Cajori, citado en Cantoral y Farfán, 2008); el logaritmo de un número menor que uno es negativo, el logaritmo de un número mayor que uno es positivo, entonces, el logaritmo de un número negativo no puede tener como resultado un número positivo ni negativo, sino otra clase de números.

También, extender la situación de aprendizaje. Desde la significación de los números complejos, comprobando la etapa de rechazo y la posterior maestría en su manipulación, que diera por resultado integrarlos a la explicación de $\ln(-x)$, de una manera efectiva, desde el diseño mismo de la ***SA***. Por el lado de reconocer al $\ln|x|$ que permite $\ln(-x)$ en variable real, sería conveniente involucrar y resaltar la definición de logaritmo que involucra al área bajo la hipérbola en ambas ramas, para todo el eje x, haciendo uso de la argumentación geométrica que representaba Bernoulli para determinar si esta idea del valor absoluto, de alguna manera emerge. Cabe mencionar que el tránsito entre registros gráficos y analíticos-algebraicos, favoreció el reconocimiento de $\ln|x|$ por parte de un alumno.

La articulación de las prácticas sociales en la construcción social de la teoría de variable compleja.

Estudiar en concreto el accionar de los matemáticos de la época, los docentes-matemáticos y los estudiantes de ingeniería para determinar el esquema de anidación de prácticas que propone explicar la construcción social del conocimiento de la variable compleja. Comprobar si los momentos epistemológicos planteados coadyuvan en tal labor.

Aplicar la situación de aprendizaje a profesores.

Estudiar las producciones de los profesores bajo el mismo enfoque de esta investigación. A fin de caracterizar los resultados y sensibilizar a los docentes en su enseñanza.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, & P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la invención y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (págs. 33-59). México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Bachelard, G. (2000). *La formación del espíritu científico*. México: Siglo Veintiuno.

Bagni, G. (2001). La introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos. Una investigación experimental en la educación media superior. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, 4(1), 45-62.

Bell, E. T. (1985). *Historia de las matemáticas. (*2ª ed) México, Fondo de cultura económica.

Buhlea, C. y Gómez, B. (2007). La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos. Un estudio comparativo España-Rumanía. *Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación*, Nº. Extra 9, 2007, p. 15-22.

Cajori, F. (1913). History of the exponential and logarithmic concepts. *The American Mathematical Monthly,* Vol. 20, No. 2, 35 – 47.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2008). Socioepistemología de la contradicción. Un estudio sobre la noción de logaritmo de números negativos y el origen de la variable compleja. En Cantoral, R.; Covián, O.; Farfán, R.; Lezama, J.; Romo, A. (2008) *Investigaciones sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Un Reporte Iberoamericano*. (pp. 243-284) México: Clame A.C.-Díaz de Santos.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. España: Gedisa.

Farfán, R. y Ferrari, M. (2001a). *Una visión Socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo. Serie Antologías. N° 1, 249-291.* Programa Editorial. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Red de CIMATES.

Farfán, R. M., Ferrari, M. (2001b). *Ingeniería Didáctica. Un ejemplo construido para la función 2^x. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México. Grupo Editorial Iberoamérica, Volumen 14, 416-429.

Farfán, R. y Ferrari, M. (2001c). Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo. *Resumen ganador, Premio Simon Bolívar*, Cinvestav, Clame. México.

Ferrari, M; Farfán, R; (2010). Una socioepistemología de lo logarítmico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13() 53-68

Kleiner, I (1988). *Thinking the unthinkable: The story of complex number (with a moral). Mathematics Teacher*, October, 583–592.

Gómez, B., Pardo, T y Pastor, C. (2003). El caso de log (-1). *XI Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas (XI JAEM)*. Canarias: Consejería de Educación, Cultura y Deportes del Gobierno de Canarias. Dirección General de Ordenación e Innovación Educativa, 765-771 (o 779-785).

Grupo Didáctica y Nuevas Tecnologías (2004, diciembre 4). *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa - Ricardo Cantoral* [Vídeo]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=aslDmn_JOJ0

Larios, V. (2003). Si no demuestro... ¿enseño Matemática? *Revista Educación Matemática*, 15(2) 163-178.

Nahin, P. J. (1998). *Esto no es real. La historia de i*. México: CONACULTA y Libraria, SA de CV.

Martínez, G. y Antonio, R. (2009). Una construcción del significado del número complejo. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*. 4(1), 1-9.

Pardo, T. y Gómez, B. (2007). La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos: un estudio en el nivel universitario. PNA, 2(1), 3-15.

Promeipn (2011, septiembre 29). *Simposio en Matemática Educativa Conferencia Ricardo Cantoral* [Vídeo]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=byHKKFnAq5Y&t=99s

Reyes, D. (2016). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para la transformación y la mejora educativa.* Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav, México.

Reyes-Gasperini, D; Cantoral, R; Montiel, G; (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7() 91-116.

Rincón, J. A. (2015, septiembre 16). *001 Historia* [Vídeo]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=9R-_IAe3wvI

Romero, F. (2016). *Construcción Social de la Serie Trigonométrica de Fourier. Pautas para un Diseño de Intervención en el Aula.* Tesis de maestría no publicada. México DF, Cinvestav.

Soto Pérez, Miriam (1988). *Una experiencia de redescubrimiento en el aula: acerca de los logaritmos de números negativos y los orígenes de la variable compleja*. Tesis de maestría no publicada, México DF, Cinvestav.

Trujillo Martínez, Emilio (2005). *El surgimiento de la variable compleja y su conceptualización didáctica.* Tesis de maestría no publicada, México DF, Cinvestav.

ANEXOS