CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

# ¿Certeza implica comprensión?: Un estudio etnográfico con adultos en el contexto de un foro virtual.

Tesis que presenta:

**Benjamín Martínez Navarro**

Para obtener el grado de

**Maestro en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa**

Director de Tesis: Dra. Mirela Rigo Lemini

México, Distrito Federal. Agosto de 2014

# ÍNDICE

CAPÍTULO 4 RECONSTRUCCIÓN ETNOGRÁFICA DEL ARTÍCULO ¿CERTEZA IMPLICA COMPRENSIÓN?

RESUMEN

En el documento se examinan cualitativamente algunos aspectos de las relaciones entre la certeza que experimentan agentes de clase en torno a hechos de las matemáticas, y su comprensión; los sujetos que intervienen en el estudio participan en un diplomado de enseñanza de las matemáticas en línea. Para el análisis se ha tenido que diseñar un marco interpretativo en el que se proponen diversos instrumentos de interpretación, el cual aquí se expone. En el segundo capítulo se muestra el caso de una estudiante-asesora que acompañaba y retro-alimentaba su certeza en los hechos de las matemáticas con su comprensión conceptual. Se podría esperar que todos los alumnos presentaran relaciones epistémicas semejantes. En el tercer capítulo se presenta un caso histórico en el que certezas extra-matemáticas llevan a razonamientos matemáticos inválidos y se compara con un caso semejante que se dio en el ámbito de la educación virtual. En el cuarto capítulo se aportan evidencias de que la certeza, o estados altos de presunción, pueden también ir de la mano de la comprensión procedimental, o que incluso pueden ir asociados a la casi total ausencia de comprensión conceptual. Se sugiere la necesidad de que educadores tomen conciencia de que las certezas en hechos de las matemáticas no siempre están basadas en comprensiones matemáticas.

ABSTRACT

This document examines qualitatively some aspects of the relationship between certainty and understanding of mathematics facts by agents in the classroom. The subjects of the study were participants in an online teaching diploma course. A interpretive framework was designed for the analysis, for which various interpretive tools, described in the paper, are proposed. In the second chapter, the case of a student-advisor who feedback his certainty in the facts of mathematics with conceptual understanding was shown. One might expect that all students submit similar epistemic relations. In the third chapter an historical case is presented in which extra-mathematical certainties lead to invalid mathematics reasonings, and this is compared to a similar case that arose in the area of virtual education. In the fourth chapter evidence that certainty, or higher states of presumption can also go hand in hand with the procedural understanding, or may even be associated with the virtual absence of conceptual understanding are given. The document argues that certainty does not always imply understanding; it is essential that teachers take this into account, since many of their decisions in the classroom are based on displays of what they interpret as the students' certainty.

# INTRODUCCIÓN

La investigación cuyos resultados aquí se exponen se centra en el análisis de estados internos como el convencimiento, la convicción, la certeza, la presunción o la duda en torno a hechos de las matemáticas (los que se representan a través de afirmaciones de contenido matemático) que vivencian agentes de clase, específicamente, estudiantes-asesores (i.e., asesores en formación) que participan en un foro virtual. En particular, se analizan las relaciones entre la comprensión y esos estados internos. Consecuentemente, en esta investigación se reconoce la importancia de que en la educación matemática se promueva certeza y estados de convencimiento en torno a enunciados de las matemáticas, siguiendo siempre criterios de esta disciplina (pertinentes al nivel educativo y al tema).

PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Las preguntas generales que surgieron a lo largo de la investigación fueron las siguientes:

¿Cómo se pueden examinar y sugerir de forma sustentada los estados internos que experimentó un participante en un foro virtual en torno a hechos de las matemáticas?

¿Qué relaciones se pueden encontrar entre la certeza que experimentó un participante que participó en un foro virtual y su comprensión en torno a hechos de las matemáticas?

¿Qué patrones se pueden encontrar en las relaciones entre la certeza que experimentó un participante y su comprensión?

¿Qué consideraciones didácticas se pueden desprender de esas relaciones?

OBJETIVOS GENERALES

Para responder a las preguntas de investigación se plantearon los siguientes objetivos:

Estudio de casos en el que se analizaron las relaciones entre los estados internos que experimentó una persona en el contexto de un foro virtual y su comprensión en torno a hechos de las matemáticas.

Elaboración y aplicación de un marco teórico interpretativo que permitió sugerir los estados internos que experimentó una persona en un foro virtual y su comprensión en torno a hechos de las matemáticas.

Recurrir a la historia de las matemáticas con el fin de encontrar casos que ayudaron a sugerir y comprender la generalidad de los fenómenos encontrados.

ORGANIZACIÓN DEL DOCUMENTO

Los resultados de la investigación fueron publicados en tres artículos enviados a congresos con arbitraje internacional: el primero de ellos a las memorias del I Congreso de educación Matemática de América Central y del Caribe (I Cemacyc), el segundo de ellos a la Joint Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 38) and the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education (PME-NA 36) y el tercero al XVIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

En cada uno de los capítulos se realiza una reconstrucción etnográfica de esos artículos con el fin de explicitar el proceso mediante el cual se llegó a los resultados. De acuerdo a Bertely (2000) mostrar cómo el investigador construyó sus afirmaciones y tejidos interpretativos incide en la consistencia y fortaleza de sus descubrimientos.

En el Capítulo 1 se delimita el referente empírico de estudio describiendo el escenario y los actores que se eligieron para realizar la investigación.

En el Capítulo 2 se realiza una reconstrucción etnográfica del artículo Criterios de certeza en el contexto de un foro virtual. En esa reconstrucción se muestra un primer nivel de análisis: *el registro* del fragmento que contiene las participaciones de los estudiantes que se utilizaron para la elaboración de ese artículo tal y como quedaron registradas en la plataforma Moodle; en el apartado de la *interpretación del tutor* se muestran las dificultades a las que me enfrenté en mi labor como tutor que derivaron en las primeras preguntas, inferencias y conjeturas de la investigación; en los apartados correspondientes a la *primera y segunda revisión bibliográfica* se muestran las categorías teóricas que surgieron de revisiones bibliográficas y que conformaron un primer marco teórico para el análisis de las participaciones de los estudiantes; en el apartado correspondiente a *la triangulación* se muestran los cuadros que incluyen la triangulación entre las categorías del intérprete, de los autores y de la estudiante que derivaron en la propuesta del instrumento teórico-metodológico para sugerir los posibles estados internos que experimentaron los participantes en un foro virtual; en el apartado *Modelo 3UV* se muestra la primera revisión bibliográfica que finalmente se utilizó para analizar la comprensión de los estudiantes en torno al uso de la variable; en el apartado *Versión publicada del artículo* se muestra la versión tal y como aparece en las memorias del I Congreso Internacional de América Central y del Caribe y finalmente, en el apartado *Triangulación entre pares* se da a conocer la revisión del árbitro del congreso.

En el Capítulo 3 se realiza una reconstrucción etnográfica del artículo "Certezas matemáticas en la historia y en la educación a distancia". En esa reconstrucción se muestra un segundo nivel de análisis: en el apartado *El caso de Mariana* se muestra el registro del episodio que aparece en el artículo tal y como se publicó en la plataforma Moodle, el apartado *Interpretación del tutor y de los investigadores* muestra un primer análisis de este nuevo registro que junto con algunas categorías teóricas derivaron en una nueva pregunta de investigación que se recoge en el apartado *Una nueva pregunta de investigación*, en el apartado *Una nueva revisión bibliográfica* se detectó una nueva posibilidad de triangulación teórica para sugerir la generalidad del fenómeno del caso empírico. En el apartado *El caso de Jeymi* se analiza la intervención de Jeymi en el episodio para sugerir patrones de certeza en la estudiante. Finalmente se incluye un apartado en el que se muestran las valoraciones de los árbitros como parte de la *triangulación entre pares*.

En el Capítulo 4 se muestra la reconstrucción etnográfica del artículo "¿Certeza implica comprensión?" que forma parte del segundo nivel de análisis. En el apartado *El registro* se muestran las participaciones tal y como quedaron registrados en la plataforma Moodle y que derivaron en un nuevo análisis que se incluye en el apartado *Interpretación de los investigadores,* análisis que permitió valorar la pertinencia de las primeras categorías de análisis y que derivó en la emergencia de una nueva *revisión bibliográfica* de la que surgieron nuevas categorías; en el apartado *surgimiento de un nuevo marco teórico* se explicita la triangulación entre esas nuevas categorías teóricas, las categorías de los investigadores y las categorías de la estudiante que condujeron a un nuevo marco teórico con el que se analizó el nuevo episodio.

Cada uno de los artículos forman parte del tercer nivel de análisis que sugiere Bertely: la escritura de informes finales.

Como el lector se puede percatar, la estructura de este documento no es la que suele darse comúnmente a una tesis en el que los antecedentes, el marco teórico y el análisis de resultados se organizan de forma separada. Debido a las características etnográficas del estudio esos apartados se amalgaman en cada uno de los capítulos que conforman este documento. Estas características etnográficas se dan a conocer en el siguiente apartado.

# CAPÍTULO 1

# CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS GENERALES

## 1.-LA INVESTIGACIÓN ETNOGRÁFICA

Este documento se inserta dentro de la perspectiva etnográfica aplicada a la investigación educativa que según Bertely (2000) se introduce en México de manera sistemática a finales de la década de los setenta del siglo XX. Bajo esta perspectiva, continúa la autora, el etnógrafo educativo debe hacer explícito el proceso de auto comprensión que experimentó al interpretar, narrar y producir un texto acerca de la cultura escolar. Cultura escolar que según la autora se configura a partir de la triangulación permanente entre tres tipos de categorías: las categorías sociales definidas como representaciones y acciones sociales inscritas en los discursos y prácticas lingüísticas y extralingüísticas de los actores, las categorías de quien interpreta, que se desprenden de la fusión entre su propio horizonte significativo y el del sujeto interpretado, y las categorías teóricas producidas por otros autores relacionadas con el objeto de estudio en construcción.

Para Bertely la perspectiva etnográfica de educación incorpora distintos enfoques significativos (el enfoque de los actores, el de los autores de la bibliografía y el del intérprete) y se inicia a partir de la inscripción e interpretación de subjetividades. La definición de un documento etnográfico, dice la autora, muestra cómo el investigador construyó sus afirmaciones y tejidos interpretativos, reconstrucción que incide en la consistencia y fortaleza de sus descubrimientos. Las tareas implicadas en la elaboración de un documento etnográfico, dice Bertely, están relacionadas con distintos niveles de análisis correspondientes a unidades descriptivas e interpretativas subsecuentes, relacionadas con una menor o mayor profundidad analítica, y expresadas en conceptos cada vez más abstractos y distintos del nivel empírico que les da forma y contenido. En un primer nivel de análisis ella propone que el etnógrafo educativo requiere:

Elegir un campo problemático

Establecer las dimensiones que intervienen (curricular, institucional o social)

Delimitar el referente empírico de estudio (contexto, escenario, actores y comportamiento)

Realizar registros de observación y entrevista.

Subrayar lo sobresaliente en la columna de inscripción.

Preguntar, inferir, conjeturar, e identificar patrones emergentes en la columna de interpretación.

Crear listas de patrones emergentes.

Estructurar cuadros de categorías que incluyan los patrones emergentes y faciliten el acceso a los datos empíricos que les dan contenido.

Realizar lecturas teóricas que le permitan identificar conceptos y hallazgos relacionados con su campo problemático.

Entre el primer y segundo nivel de análisis, continúa Bertely, el etnógrafo construye un primer puente analítico con el objeto de replantear su campo problemático. A partir de la elaboración de esquemas depura sus preguntas y dimensiones de análisis e identifica la relación entre sus primeras categorías analíticas, los patrones emergentes y los conceptos teóricos producidos por otros autores.

En un segundo nivel de análisis la autora sugiere que el etnógrafo puede:

Realizar observaciones o entrevistas focalizadas en una segunda etapa de trabajo de campo.

Analizar los nuevos registros de observación y entrevista.

Valorar la pertinencia de las primeras categorías de análisis y patrones emergentes.

Organizar la información a partir de su último marco de categorías.

Analizar a profundidad los patrones emergentes vinculados con sus categorías.

Detectar nuevas posibilidades de triangulación teórica.

Entre el segundo y tercer nivel de análisis, para Bertely se construye otro puente analítico con el objeto de redefinir las relaciones entre el campo problemático, las categorías analíticas, los patrones emergentes y los conceptos teóricos. Los distintos niveles de profundización y abstracción, aplicados a los diversos conceptos e interpretaciones, comienzan a aparecer en la elaboración de los nuevos esquemas. El tercer nivel de análisis para la autora tiene nexos muy específicos con la escritura de ensayos e informes finales, definidos como textos etnográficos.

La explicitación de algunos o todos los aspectos anteriores deja ver que, en palabras de Bertely, la vida del etnógrafo se determina más por lo que sucede en el camino que por sus planes y proyectos iniciales y quizá por ello la evidencia de que se experimentó este proceso es mostrar cómo sus hallazgos dieron cuenta de una realidad bastante distinta a lo que había previsto. En lo que sigue se trata de dar cuenta de este proceso que derivó en la publicación de tres artículos en congresos internacionales con arbitraje: el I Congreso de Educación Matemática de América Central y del Caribe (I Cemacyc) , la Joint Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 38) and the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education (PME-NA 36) y el XVIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (XVIII SEIEM).

2.-SUJETOS

El estudio se llevó a cabo en el Diplomado en Línea de Temas Fundamentales de Álgebra. El propósito del Diplomado es fortalecer la formación de asesores que enseñan algebra a adultos. Los asesores son personas solidarias, que cuentan con secundaria o preparatoria, que desean ayudar a jóvenes y adultos en su aprendizaje. Los requisitos necesarios que los participantes debieron cubrir para presentar una solicitud de ingreso al Diplomado fueron: tener una antigüedad de colaboración en el Instituto de al menos 1 año, conocer y manejar la computadora y el internet a nivel básico, disponer del tiempo necesario para estudiar los módulos del Diplomado, tener acceso a un equipo de cómputo con conectividad óptima a internet y contar con una cuenta de correo electrónico vigente. Por su rol de asesor en el INEA y el de estudiantes en el Diplomado me referiré a estas figuras como estudiantes-asesores.

3.-ESCENARIO

Las actividades de aprendizaje, retroalimentación, apoyo y evaluación del Diplomado, se realizan a distancia mediante el uso de la plataforma Moodle. El Diplomado está organizado en un módulo introductorio y cuatro módulos de contenido matemático, que se estudian en forma secuenciada. El objetivo del Módulo Introductorio es establecer las bases para que el participante se familiarice con la plataforma, identifique al tutor como una figura que lo apoyará durante el desarrollo del diplomado y se integre, paulatinamente en una comunidad de aprendizaje. En el Módulo I se revisan temas de conteo y medición, así como algunas relaciones numéricas básicas. En el Módulo II los estudiantes descubren regularidades y reconocen patrones, a partir de lo cual se desarrolla el estudio del lenguaje algebraico. En el Módulo III se presentan situaciones en las que un cambio o variación depende de otro factor o variable. Finalmente, en el Módulo IV se presentan problemas que involucran el planteamiento de una ecuación lineal con una incógnita y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. En cada módulo el participante resuelve problemas matemáticos, revisa conceptos y definiciones clave, y realiza una serie de actividades y tareas encaminadas a la reflexión sobre las dificultades que se presentan en los procesos de enseñanza-aprendizaje del álgebra elemental. Las interacciones entre los participantes se establecen principalmente en foros virtuales. Estos foros son un espacio de comunicación formado por cuadros de diálogo en los que se van incluyendo mensajes que se van clasificando temáticamente (Sánchez, 2005). La comunicación en este espacio tiene la particularidad de que los mensajes de las personas que participan en él quedan registrados en la plataforma Moodle de la siguiente forma: nombre del participante que publicó el mensaje, la fecha y hora en la que lo publicó.

4.-EL TUTOR

Me desempeñé como tutor del diplomado en el año 2012 por segundo año consecutivo. El tutor es la figura que apoya a los estudiantes-asesores durante el desarrollo del diplomado. En los foros virtuales el tutor plantea actividades que los estudiantes-asesores deben resolver, retroalimenta a los estudiantes y promueve la interacción entre todos los participantes.

5.-EL MODELO 3UV EN EL DIPLOMADO

En lo que sigue se realiza un análisis de la estructura del Diplomado de acuerdo al Modelo 3UV.

Tabla 1 Aspectos de la variable en el Diplomado

| Módulo | Temas | Aspectos de la variable que se enfatizan en cada tema. |
|---|---|---|
| Módulo 1 | Semana 1: Cantidades continuas y cantidades discretas. | Transición de la aritmética al álgebra. |
| | Semana 2: Propiedades de áreas y perímetros. | |
| | Semana 3: Las fracciones y su relación con la multiplicación. | |
| | Semana 4: Las fracciones decimales y su relación con los números decimales. | |
| Módulo 2 | Semana 1: Reconocimiento de patrones y regularidades | Ver el patrón en sucesiones numéricas y de figuras.<br>Expresar el patrón en sucesiones numéricas y de figuras. |
| | Semana 2: Expresión general del | Registrar el patrón. |

| | | |
|---|---|---|
| | término enésimo de una sucesión. | Obtener la expresión general del término enésimo.<br>Verificar la formulación. |
| | Semana 3: Expresión general del término enésimo de una sucesión 2. | Estrategias para obtener la expresión general del término de sucesiones numéricas o de figuras. |
| | Semana 4: Representación de regularidades numéricas. | Ver el patrón.<br>Expresar el patrón.<br>Registrar el patrón.<br>Obtener la expresión general del término de una sucesión.<br>Verificar la formulación.<br>Simbolizar enunciados. |
| | Semana 5: Representación de regularidades mediante expresiones algebraicas. | Operar con la variable. |
| Módulo 3 | Semana 1: Situaciones que involucran la relación entre dos variables y sus aplicaciones. | Reconoce la dependencia de las variables. |
| | Semana 2: Funciones. | Reconoce la dependencia de las variables.<br>Simboliza la relación funcional de distintas formas. |
| | Semana 3: Funciones lineales. | Reconoce la dependencia entre las variables.<br>Simboliza la relación funcional de distintas formas.<br>Determina los valores de la variable independiente dados los de la dependiente.<br>Determina los valores de la variable independiente dados los de la dependiente. |
| | Semana 4: La proporcionalidad como un caso particular de la función lineal. | Reconoce distintos tipos de funciones. |

| | | |
|---|---|---|
| Módulo 4 | Semana 1: Ecuaciones de primer grado. | Reconoce e identifica la presencia incógnitas.<br>Simboliza la incógnita. |
| | Semana 2: Ecuaciones de primer grado II. | Reconoce e identifica la presencia de incógnitas.<br>Simboliza la incógnita.<br>Plantea la ecuación. |
| | Semana3: Ecuaciones de primer grado III. | Reconoce e identifica la presencia de incógnitas.<br>Simboliza la incógnita.<br>Plantea la ecuación.<br>Obtiene el valor de la literal.<br>Comprueba sus resultados. |
| | Semana 4: Sistemas de ecuaciones de primer grado I. | Reconoce e identifica la presencia de incógnitas.<br>Simboliza la incógnita.<br>Plantea la ecuación. |
| | Semana 5: Diferentes métodos de resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado. | Reconoce e identifica la presencia de incógnitas.<br>Simboliza la incógnita.<br>Plantea la ecuación.<br>Obtiene el valor de la literal.<br>Comprueba sus resultados. |
| | Semana 6: Sistemas de ecuaciones de primer grado II. | Reconoce e identifica la presencia de incógnitas.<br>Simboliza la incógnita.<br>Plantea la ecuación.<br>Obtiene el valor de la literal.<br>Comprueba sus resultados. |

# CAPÍTULO 2

## RECONSTRUCCIÓN ETNOGRÁFICA DEL ARTÍCULO CRITERIOS DE CERTEZA EN EL CONTEXTO DE UN FORO VIRTUAL

En lo que sigue se realiza una reconstrucción del proceso de elaboración del artículo "Criterios de certeza en el contexto de un foro virtual" y se explicita la perspectiva teórica que subyace ese proceso.

### 1.-EL REGISTRO

El artículo "Criterios de certeza en el contexto de un foro virtual" contiene la interpretación de cuatro mensajes que formaron parte del foro virtual con título ¿Cuántas incógnitas tiene? correspondiente a la cuarta semana de actividades del Módulo IV. Estos son los mensajes tal y como fueron publicados en el foro y que quedaron registrados para su posterior análisis.

Imagen 1 Intervención del tutor

**¿Cuántas incógnitas tiene?**
de Benjamín Martínez Navarro - lunes, 8 de julio de 2013, 17:43

ACTIVIDAD 1

Bienvenidos a una nueva semana de actividades!. Hemos visto problemas que se pueden resolver con una sola ecuación. Analicemos los siguientes problemas y respondamos las preguntas que los acompañan:

**1. En un salón de clases hay 61 alumnos. El número de mujeres excede al de hombres en 7.¿Cuál es el número de hombres y mujeres?**

a) ¿Cuántas incógnitas tienes?

b) ¿Cuáles son las literales que asignaste? ¿Qué significan?

c) ¿Te hacen falta datos para dar solución al problema?

d) Trata de plantear las ecuaciones que resuelven el problema

**2. El río Amazonas tiene una longitud del doble de la del río Bravo más 332 km. Si la suma de la longitud de los dos ríos es de 9 434 km, ¿cuál es la longitud de cada río?**

a) ¿Cuántas incógnitas tienes?

b) ¿Cuáles son las literales que asignaste?

c) ¿Te hacen falta datos para dar solución al problema?

d) Trata de plantear las ecuaciones que resuelven el problema

Cada compañero puede elegir un problema distinto y contestar las preguntas correspondientes. Después de publicar su respuesta,lo importante es comentar, enriquecer o corregir las respuestas de nuestros demás compañeros. No solamente debemos quedarnos con nuestra solución.¡Adelante!

Editar | Borrar | Responder

Imagen 2 Primera intervención de Patricia

**Re: ¿Cuántas incógnitas tiene?**
de Patricia [redacted] - viernes, 14 de septiembre de 2012, 08:11

Hola Benjamin y compañeros

**1. En un salón de clases hay 61 alumnos. El número de mujeres excede al de hombres en 7.¿Cuál es el número de hombres y mujeres?**

---

a) ¿Cuántas incógnitas tienes? 2 el numero de hombres y de mujeres

---

b) ¿Cuáles son las literales que asignaste? ¿Qué significan? "h" hombres y "m" mujeres.

---

c) ¿Te hacen falta datos para dar solución al problema?

no

---

d) Trata de plantear las ecuaciones que resuelven el problema

---

h+m=61

m+7=h

Mostrar mensaje anterior | Editar | Partir | Borrar | Responder

Imagen 3 Primera intervención de Jeymi

**Re: ¿Cuántas incógnitas tiene?**
de JEIMY - viernes, 14 de septiembre de 2012, 12:30

Hola Hola patricia

en mi opinion creo que tus respuestan no coinciden con las mias asi que aqui las dejo va

primeramente hay que analizar muy bien los datos que se nos dan

datos

salon de clases 61 alumnos

x hombres

x + 7 mujeres

por lo cual hay 2 datos desconocidos pero de uno se resuelve el otro y tenemos una incognita denominda "X"que significa hombres. y no faltan datos para resolver el problema ahora plantearemos la ecuacion

x + (x + 7) = 61

x+x+7=61 sumamos las x y nos queda 2x+7=61

2x+7=61 pasemos el 7 al extremo de la derecha y nos queda asi 2x+7-7=61-7

se hacen las operaciones correspondientes y nos queda asi 2x=54 ahora vamos a dejar sola la x y para eso hay que dividir entre 2 ambos miembros

2x/2=54/2 y nos queda x=27.

hombres X =27

mujeres X + 7 = 27+7= 34 por lo tanto hay 34 mujeres

en el salon de clases tenemos 27 hombres y 34 mujeres dando un total de 61 alumnos.

saludos . . .

Mostrar mensaje anterior | Editar | Partir | Borrar | Responder

Imagen 4 Segunda intervención de Jeymi

**Re: ¿Cuántas incógnitas tiene?**
de JEIMY - sábado, 15 de septiembre de 2012, 09:12

hola hola benjamin

1.-¿Por què asignar la literal "x" al nùmero de hombres y no al de mujeres, si al final de cuentas desconocemos ambas cantidades?

porque primero tenemos que encontrar el numero de hombres y despues sumarle 7 para encontrar el numero de mujeres ya que este excede en 7.
2.-¿Còmo podemos verificar que tu resultado es correcto?pues sustituyendo los resultados (el numero demujeres y elnumero de hombres) en la ecuacion planteada que quedaria

x+(x+7)=61

27+(27+7)=61

27+34=61

61=61 de estamanera nos da la igualdad quiere decir que los resultados son correctos
2.-Tu soluciòn es excelente.Ahora ¿Còmo se puede plantear un sistema de ecuaciones tomando en cuenta las ideas de tu procedimiento? ¿Coincide con el sistema de ecuaciones que propuso Paty para resolver el problema? no coincide ya que bueno vamos a tomar a m como el numero de mujeres y h el numero de hombres entonces sabemos que la suma de las dos cantidades nos da 61 seria

h+m=61

pero tambien sabemos que el numero de mujeres excede en 7 alnumero de hombre esto seria

h+7=m aunque mi compañera paty lo tiene m+7=h y creo que no es correcto ya que el numero de mujeres son las que exceden a el numero de hombres

bueno por lo tanto nuestro sistema de ecuaciones seria

h+m=61

h+7=m creo jeje

saludos...

## 2.-LA INTERPRETACIÓN DEL TUTOR

En mi labor como tutor he tenido que enfrentarme a la tarea de interpretar los mensajes que publican los estudiantes en el foro virtual. Bertely (2000) explicita las tareas que están implicadas en ese proceso interpretativo: subrayar lo que llama la atención del mensaje, preguntar, inferir y conjeturar. En lo que sigue se muestra ese proceso en la segunda columna de cada tabla para cada una de las dos intervenciones de Jeymi que aparecen en el documento “Criterios de certeza en el contexto de un foro virtual”.

Tabla 1 Interpretación del tutor en la primera intervención de Jeymi

| Respuesta del estudiante | Interpretación del tutor |
|---|---|
| **primeramente hay que** analizar muy bien los datos que se nos dan | “Primeramente…” puede indicar el “primer paso” de un procedimiento en el que basa su certeza. El uso de la expresión “hay que” puede ser un indicador de su certeza. |
| **datos**<br>salon de clases 61 alumnos<br>x hombres<br>x + 7 mujeres | El colocar, efectivamente, los datos del problema tal como lo indicó. ¿Es muestra de su certeza? |
| por lo cual hay 2 datos desconocidos **pero de uno se resuelve** el otro y tenemos una incognita denominda "X" que significa hombres | Jeymi explicita la identificación de dos incógnitas al inicio y sustenta el uso de una incógnita después para plantear una ecuación y no un sistema de ecuaciones. ¿Es muestra de su certeza? |
| **Ahora** plantearemos la ecuacion | “Ahora” puede indicar el siguiente paso del procedimiento que está siguiendo y que posiblemente le da seguridad. |
| x + (x + 7) = 61 y **nos queda asi** 2x=54 | Su acción después de indicar el paso. ¿Es muestra de su certeza? El uso de la expresión “Nos queda asi…”. ¿Es muestra de su certeza? |
| **ahora** vamos a dejar sola la x | “Ahora” puede indicar el siguiente paso de un procedimiento que está siguiendo y que le da seguridad. |
| y para eso **hay que** dividir entre 2 ambos miembros | ¿La expresión “hay que” puede ser un indicador de su certeza en el procedimiento que Jeymi está siguiendo? |
| 2x/2=54/2 | Su acción después de indicar el paso. ¿Es signo de su certeza? |
| y **nos queda** x=27. | ¿La expresión “nos queda” puede ser un indicador de la certeza de Jeymi? |
| mujeres X + 7 = 27+7= 34 en el salon de clases **tenemos** 27 hombres y 34 mujeres | ¿La palabra “tenemos” puede ser un indicador de su certeza? |
| **dando** un total de 61 alumnos. | ¿La comprobación de su resultado es muestra de su certeza? |

Tabla 2 Interpretación del tutor en la segunda intervención de Jeymi.

| Respuestas del estudiante | Interpretación del tutor |
|---|---|
| ya que **bueno vamos** a tomar a m como el numero de mujeres y h el numero de hombres | A diferencia de su primera intervención Jeymi utiliza la expresión "bueno vamos" que genera una sensación de duda. |
| entonces sabemos que la suma de las dos cantidades nos da 61 | El dejar implícitamente los pasos que siguió para plantear la primera ecuación. ¿Es muestra de su duda? |
| **seria** h+m=61 | La expresión "sería" al plantear la primera ecuación del sistema que propuso puede ser un indicador de duda. |
| pero tambien sabemos que el numero de mujeres excede en 7 al numero de hombre | El dejar implícitamente los pasos que siguió para plantear la primera ecuación. ¿Es muestra de su duda? |
| esto **seria**<br><br>h+7=m | La expresión "sería" al plantear la primera ecuación del sistema que propuso puede ser un indicador de duda. |
| **bueno** por lo tanto nuestro sistema de ecuaciones **seria** | Las palabras "bueno" y "sería" pueden ser muestra de su duda. |
| h+m=61 h+7=m | El plantear el sistema de ecuaciones sin resolverlo. ¿Es muestra de su duda? |
| **creo jeje** | La expresión "bueno jeje" al concluir su intervención dejó en el tutor una sensación general de duda. |

En primera instancia los procedimientos y respuestas en las dos intervenciones de Jeymi me parecían correctos. Lo que llamó mi atención fue que en una de sus intervenciones ella parecía experimentar duda mientras que en la otra ella parecía experimentar certeza. Mi labor como tutor me permitió experimentar de primera mano las dificultades para establecer de manera sustentada los estados internos que experimentó Jeymi al publicar dos procedimientos correctos a una misma situación problemática Al comparar las dos intervenciones había indicios que me permitían inferir esos estados. En su primera intervención ella acudió a palabras como "hay que" o "tenemos" que denotaban certeza mientras que su segunda intervención estaba teñida de expresiones como "bueno vamos" o "creo jeje". Adicionalmente, en su primera intervención ella explicitó los pasos de un procedimiento en el que parecía sostener su certeza mientras que en su segunda intervención obviaba los pasos de su procedimiento. Por ejemplo, en su primera intervención ella enunció "hay que analizar muy bien los datos" antes de asignar la literal a la incógnita del problema mientras en su segunda intervención planteó directamente las ecuaciones sin realizar un análisis similar. Por otra parte, en su primera intervención la estudiante resolvió la ecuación que planteó mientras que en su segunda intervención ella dejó sin resolver el sistema de ecuaciones. En suma, las palabras que usó, el nivel de explicitación y la forma en que actuaba conforme a lo que decía me permitieron inferir los estados internos de Jeymi. Con estas conjeturas publiqué en el foro la siguiente respuesta a Jeymi:

Tabla 3 Respuesta del tutor ante la duda de Jeymi

| Respuesta de Benjamín | Interpretación |
|---|---|
| Muy bien Jeimy La **comprobación** es una forma de **asegurarnos** que nuestro resultado es correcto. | Como tutor deseaba fundamentar la certeza de que su sistema resolvía el problema en la comprobación de sus resultados. |
| 1.-Entonces ¿Por qué al final **dudas** que el sistema de ecuaciones que resulve el problema sea el siguiente:<br><br>h+m=61<br><br>h+7=m ? | La intención de la pregunta era que Jeymi explicitara las causas a las que atribuía su duda que como tutor había inferido previamente. |
| 2.-¿Podrías explicar el por qué utilizamos la literal "x" al número de hombres utilizando lo que hemos visto en módulos anteriores (variable independiente,variable dependiente y **relación funcional**)?<br><br>Si hay dudas podemos expresarlas. Un saludo! | La intención de la pregunta era que Jeymi explicitara la relación funcional que previamente había intuido al explicitar "pero de uno se resuelve el otro". |

Ante esta intervención del tutor Jeymi respondió:

Tabla 4 Respuesta de Jeymi a las preguntas del tutor

| Respuesta de Jeymi | Interpretación del tutor |
|---|---|
| Hola hola benjamín lo que pasa es que no es que no crea que existe otra forma sino que como **mi compañera paty** tiene las literales alrevez no estaba segura si yo estaba bien jeje | Jeymi supedita su certeza a la autoridad de Paty. |
| y pues asignamos X al numero de hombres es por que es la variable independiente y Y la variable dependiente ya que depende del valor de Y para saber su valor saludos... | Interpreta a las literales en una relación funcional. |

En primera instancia interpreté la duda de Jeymi como muestra de la posible autoridad que Patricia representaba para ella y descarté cualquier dificultad de Jeymi en la resolución del problema. En un intento por promover la certeza de Jeymi en sus procedimientos y resultados publiqué el siguiente comentario. El propósito era que derivara su certeza del hecho de que el sistema de ecuaciones propuesto por ella resolvía finalmente el problema y no el de Patricia.

Tabla 5 Nuevas preguntas del tutor a Jeymi

| Respuesta de Benjamín | Interpretación |
|---|---|
| Hola Jeimy ¿Entonces cómo le hacemos para saber **cuál de los dos** sistemas resuelve el problema? | El propósito de esta pregunta era que resolviera los dos sistemas de ecuaciones para decidir que el suyo resolvía el problema y no el de Patricia. |
| ¿Por qué crees que **insisto** tanto en la **seguridad** de nuestras respuestas? | Mostré mi interés porque Jeymi se percatara de la importancia que era asociar su certeza al correcto planteamiento de su sistema de ecuaciones. |

A lo que Jeymi, finalmente respondió:

Tabla 6 Respuestas de Jeymi a las nuevas preguntas del tutor

| Respuesta de Jeymi | Interpretación del tutor |
|---|---|
| holahola<br>pues los dos sistemas resuelven el problema y lo sabemos al momento de **realizarlos** y al momento de **comprobarlos**.<br><br>creo que insistes para que quedemos **convencidos** de que si se pueden realizar de las dos formas y que al momento de estar frente a nuestros educandos aya respuesta para cualquier duda que tengan saludos... | En el foro me pareció suficiente que Jeymi explicitara las acciones en las cuales ella debía fundamentar su certeza: realizar (actuar) y comprobar. |

Pasé por alto el hecho de que Jeymi consideró que el sistema de Patricia también resolvía el problema y centré la atención en la importancia que ella le confirió al hecho de que quedara convencida de sus procedimientos al resolver el sistema de ecuaciones y comprobar sus resultados.

PRIMERAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Hasta ese momento no contaba con una herramienta teórico-interpretativa que me permitiera sugerir de manera sustentada los estados internos que experimentó un participante en un foro virtual. De lo anterior surgieron las preguntas de investigación:

¿Es posible determinar de manera sustentada la certeza que experimentó una persona en un foro virtual? ¿Cómo se podría hacer esa investigación empírica?

¿Qué relaciones se pueden establecer entre la certeza que experimentó una persona y su comprensión en torno a hechos de las matemáticas?

¿Qué consecuencias puede tener el conocimiento de los estados internos y sus posibles relaciones con la comprensión?

## 3.-LA REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA. UN PRIMER MARCO INTERPRETATIVO.

Una vez que, siguiendo a Bertely, la voz y los actos de la estudiante se articulaban con mi interpretación surgió la necesidad de realizar una revisión bibliográfica que me permitiera extraer las categorías teóricas de otros investigadores. El primer acercamiento teórico lo experimenté con el marco de Rigo (2013[b]). En él se considera que los alumnos suelen sustentar sus afirmaciones o procedimientos de contenido matemático de modos diversos, como por ejemplo, cuando un estudiante explica el uso de un algoritmo recurriendo a su facilidad ("es más fácil resolverlo así") o a la autoridad del profesor ("porque me lo dijo la maestra"). Rigo (2013[b]) ha propuesto una taxonomía de estos recursos de sustentación a los que llama "esquemas epistémicos". En algunos casos, de acuerdo a la autora, los esquemas epistémicos se vertebran en torno a las razones matemáticas como los que se incluyen en la Tabla 7.

Tabla 7. Esquemas basados en razones

| ESQUEMAS EPISTÉMICOS BASADOS EN RAZONES | |
|---|---|
| *Esquemas deductivos* | Coinciden con toda clase de justificación matemática que posee una estructura lógica de tipo deductivo: incluye los que Balacheff define como ejemplo genérico y experimento de pensamiento (2000), o las instanciaciones y argumentos hipotético deductivos. |
| *Esquemas empíricos o perceptuales* | Surgen a partir de la acumulación de evidencia empírica con base en la cual se establecen inducciones o generalizaciones. Ejemplos son el empirismo ingenuo y el experimento crucial de Balacheff (2000) y los esquemas de prueba empíricos -los inductivos y los perceptuales- que describen Harel y Sowder (op. cit.) |

En otros casos, continúa Rigo (2013[b]), el soporte, implícito o tácito, en el que se sustenta la creencia en la verdad de un enunciado matemático obedece a los motivos de una persona y no al contenido del enunciado. En estos casos, lo que está en juego es un esquema epistémico, de tipo extra-racional, basado en motivos. En la Tabla 8 se describen los esquemas que se basan en la autoridad en los que se incluyen los esquemas operatorios fincados en la autoridad de las matemáticas.

Tabla 8. Esquemas basados en la autoridad

| ESQUEMAS EPISTÉMICOS EXTRA-RACIONALES | |
|---|---|
| *Esquemas epistémicos basados en motivos (autoridad)* | |
| *Esquema basado en la autoridad* | El profesor activa este mecanismo cuando respalda en su autoridad la veracidad de un enunciado matemático, ya sea siguiendo sus convicciones didácticas o pedagógicas (v. gr., para que sus alumnos dominen una cierta técnica) o bien, persuadido por sus necesidades de poder o de tipo emocional (e.g. de que los niños depositen su confianza en su persona). Los alumnos ponen en juego este mecanismo cuando apelan a la autoridad del profesor para respaldar su creencia en un hecho matemático; lo pueden hacer siguiendo sus convicciones didácticas (eg. de que el profesor es una guía confiable en sus aprendizajes) o persuadidos por necesidades emocionales (eg. de reconocimiento por parte del profesor). |
| *Esquema operatorio* | Se aplica el esquema operatorio cuando en clase se introducen directamente las fórmulas o los algoritmos de las matemáticas sin acompañarlas de justificación alguna. En estas condiciones, la credibilidad en los resultados que dichas herramientas operatorias arrojan no se fundamenta en razonamientos propios de las matemáticas, sino en (posibles) creencias sobre lo que es esta ciencia (que se suele considerar como integrada por 'verdades permanentes e incuestionables'). Son diversos los motivos que impulsan al profesor a aplicar los esquemas operatorios: ya sea por sus convicciones didácticas o pedagógicas (cuando e.g. él considera que la justificación de una regla, como la de los signos, no resulta didácticamente lo más provechoso) o bien, persuadido por otro tipo de necesidades afectivas o emocionales (e.g. por una actitud de comodidad o para que los niños no cuestionen lo que posiblemente no puede responder). |

Otros esquemas epistémicos, dice Rigo (2013[b]), se basan en la familiaridad (resultado de la repetición, la memorización y las costumbres) como mecanismo para sustentar la credibilidad. Mientras el esquema fundado en la repetición es resultado de procesos locales de corto alcance, el basado en la cultura escolar y en sus 'razones prácticas' proviene de costumbres institucionales que pueden llegar a tener alcance internacional. En la Tabla 9 se describen.

Tabla 9. Esquemas basados en la familiaridad

| ESQUEMAS EPISTÉMICOS EXTRA-RACIONALES<br>*Esquemas sustentados en la familiaridad* | |
|---|---|
| *Esquema basado en la repetición* | Cuando en una comunidad se reitera sistemáticamente alguna creencia, muchas personas acaban por creer en ella. En estas circunstancias, lo más probable es que su credibilidad la apoyen en un aprendizaje originado en la repetición y la memoria. La repetición como fuente de credibilidad ha sido una herramienta explotada por la propaganda o el Estado, pero también es muy común en las clases de matemáticas. Es frecuente que después de encontrar persistentemente una fórmula en el texto o escucharla en voz del profesor, los alumnos acaben por tomarla como válida quizás porque les resulta familiar. |
| *Esquema basado en 'razones prácticas'* | En la mayoría de las instituciones escolares se ha promovido una sub-cultura, a través del currículum, los libros de texto y las evaluaciones, integrada por una serie de creencias y 'razones prácticas' en torno a lo que deben ser las tareas de matemáticas que deben resolver los niños en clase; entre éstas está la idea de que las soluciones de los ejercicios son las más sencillas, son únicas y exactas y se pueden encontrar a través de las operaciones o estrategias recién enseñadas. Los agentes que participan en el aula suelen orientar y justificar sus resoluciones impulsados por estas 'razones prácticas', persuadidos por una actitud de facilismo o quizás porque confían en ellas por ser lo habitual. |

Asociados a sus esquemas epistémicos, según la autora, el sujeto experimenta estados internos de certeza (cuando le asocia el máximo grado de probabilidad a lo creído) o de presunción (cuando le asocia grados menores de probabilidad a lo creído). A estos estados internos Rigo (2013[b]) les llama "estados epistémicos". Este marco me permitió hablar de estados internos (como la duda o la certeza) asociados a los sustentos de los estudiantes. Usando la taxonomía de Rigo (2013[b]) y mi interpretación de los estados internos de la estudiante sugerí las formas en las que ella sustentó sus resultados en las dos intervenciones que llamaron mi atención:

Tabla 10 Esquemas Epistémicos en la primera intervención de Jeymi

| Numeral | Respuesta del estudiante | Interpretación |
|---|---|---|
| *(3.3)*<br><br>*(3.4)* | primeramente **hay que** analizar muy bien los datos que se nos dan<br><br>datos | Esquemas epistémicos basados en la familiaridad: "Primeramente analizar los |

| | | |
|---|---|---|
| | salon de clases 61 alumnos<br>x hombres<br>x + 7 mujeres | datos" es quizá el primer paso de un procedimiento al que la estudiante suele acudir para resolver situaciones problemáticas similares. |
| *(3.5)*<br><br>*(3.6)*<br><br>*(3.7)*<br><br>*(3.8)* | por lo cual hay 2 datos desconocidos pero de uno se resuelve el otro y tenemos una incognita denominda "X" que significa hombres | Esquemas epistémicos basados en razones: "De uno se resuelve el otro" es una razón matemática para plantear una ecuación y no un sistema de ecuaciones a pesar de que en primera instancia percibe dos incógnitas. |
| *(3.10)*<br><br>*(3.11)* | **Ahora** plantearemos la ecuacion<br><br>x + (x + 7) = 61 | Esquemas epistémicos basados en la familiaridad: "Ahora…" puede indicar el siguiente paso del procedimiento de la estudiante. |
| *(3.18)* | y nos queda asi 2x=54 | Esquemas operatorios: La estudiante reduce la expresión sin explicitar su procedimiento. |
| *(3.19)* | **ahora** vamos a dejar sola la x | Esquemas epistémicos basados en la familiaridad: "Ahora…" puede indicar el siguiente paso del procedimiento de la estudiante. |
| *(3.20)* | y para eso **hay que** dividir entre 2 ambos miembros | Esquemas epistémicos basados en razones: La razón que quizá subyace este paso de su procedimiento es la concepción del signo "=" como equilibrio entre dos expresiones algebraicas. |
| *(3.21)*<br>*(3.22)* | 2x/2=54/2<br><br>y **nos queda** x=27. | Esquemas operatorios: Realiza las operaciones correspondientes para finalmente obtener el valor de la literal. |

| | | |
|---|---|---|
| *(3.24)* | mujeres X + 7 = 27+7= 34 | Esquemas operatorios: Sustituye el valor de la literal para obtener el número de mujeres sin mayor explicación. |
| *(3.26)*<br>*(3.27)* | en el salon de clases **tenemos** 27 hombres y 34 mujeres **dando** un total de 61 alumnos. | Esquemas operatorios: Comprueba el valor que obtuvo para las literales sin mayor explicación. |

Tabla 11 Esquemas Epistémicos en la segunda intervención de Jeymi.

| Numeral | Respuestas del estudiante | Interpretación |
|---|---|---|
| *(5.17)*<br>*(5.18)*<br>*(5.19)* | ya que **bueno vamos** a tomar a m como el numero de mujeres y h el numero de hombres<br><br>entonces sabemos que la suma de las dos cantidades nos da 61<br><br>**seria** h+m=61 | Esquemas operatorios: Traducción literal del enunciado del problema para plantear la ecuación sin mayor explicación. |
| *(5.20)*<br>*(5.21)*<br>*(5.22)* | pero tambien sabemos que el numero de mujeres excede en 7 al numero de hombre<br><br>esto **seria**<br><br>h+7=m | Esquemas operatorios: Traducción literal del enunciado del problema para plantear la ecuación sin mayor explicación. |
| *(5.26)*<br>*(5.27)*<br>*(5.28)* | bueno por lo tanto nuestro sistema de acuaciones seria<br><br>h+m=61 h+7=m<br><br>**creo jeje** | Esquemas operatorios: Plantea el sistema de ecuaciones utilizando la traducción literal del enunciado del problema.<br><br>Esquemas basados en la familiaridad: La traducción literal del lenguaje común al algebraico quizá era un recurso utilizado por Jeymi para plantear sistemas de ecuaciones. |

## 4.-UNA SEGUNDA REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA. EL REGRESO A LAS FUENTES

Una vez que sugerí los posibles esquemas que movilizó Jeymi en sus intervenciones realicé una revisión bibliográfica para contar con las categorías teóricas de los autores. Realicé entonces una revisión bibliográfica que abarcó distintas disciplinas: de la filosofía (Wittgenstein, 1988), la psicología (Bloom, Hastings & Madaus, 1975), la sociología (Abelson, 1988), la lingüística (Boyero, 2012; Hyland, 1997; Hyland & Milton, 1998; Sánchez-Upegui, 2009) y la educación matemática (Rigo, 2013[a];Rigo, 2013[b]). ¿Qué entienden por certeza esos autores? Para Wittgenstein (1951) la certeza es un tono en el que se constata cómo son las cosas, Bloom, Hastings & Madaus (1975) entienden a la "certeza mas allá de toda duda" como una aceptación emocional firme de una creencia y para Rigo (2009) una persona experimenta certeza asociada a una creencia cuando le otorga a la creencia un grado máximo de probabilidad de verdad. De esta revisión surgieron distintas perspectivas que incluí en diferentes categorías de análisis.

*Longevidad*

Bloom, Hastings & Madaus (1975) consideran que la valorización de un objeto o fenómeno perdura a lo largo de un cierto período de tiempo y nunca es efímera. Sugieren que cuando se examina el grado de compromiso, el especialista debe recoger la evidencia disponible sobre cuánto tiempo se ha sostenido el hecho matemático en cuestión y cuáles son las posibilidades de su permanencia como valor sostenido. Abelson (1988) propone el ítem ¿Cuánto tiempo lleva sosteniendo sus ideas? para obtener información de la longevidad de las actitudes.

*Familiaridad*

Wittgenstein menciona que el que se considere a una proposición como algo verdadero con seguridad absoluta es una característica de una interpretación personal de la experiencia. Más adelante, el autor añade que si el fundamento de nuestra certeza es la experiencia, debe tratarse, obviamente, de la experiencia pasada. La experiencia, según Wittgenstein, nos enseña que después de un período bien determinado de entrenamiento, el juicio de un hombre merece confianza y que este hombre debe haberse visto sometido al aprendizaje durante mucho tiempo.

*Grados de compromiso*

De acuerdo a Rigo (2013[b]) en esta condición la persona se compromete directa y explícitamente con la verdad o validez del hecho de las matemáticas. Las siguientes dimensiones de análisis del metadiscurso interpersonal que propone Hyland (1998) pueden ser indicadores de ese grado de compromiso:

Mitigadores: indican la decisión que toma quien escribe de no comprometerse totalmente con la proposición expresada, de manera que la información puede ser presentada como una opinión y no como un hecho. Beke (2005) aclara que la mitigación en inglés según Hyland está dada por would y should y corresponde al morfema verbal –ía asociado al tiempo condicional en español; ambos, continúa el autor, desde el punto de vista pragmático, marcan distanciamiento del autor frente a su proposición.

Enfatizadores (boosters, emphatics): marcan la expresión de certeza y enfatizan la fuerza proposicional. Beke (2005), pone por ejemplo, las seudohendidas, estructuras que se construyen con el verbo Ser y sirven para poner foco sobre el constituyente que aparece a la derecha de ese verbo. Por ejemplo la estructura seudohendida "el *docente lo que tiene que hacer es crear actividades...*" deja poco espacio para que el lector asuma otro punto de vista.

*Fortaleza*

De acuerdo a Rigo (2013[a]) , la persona se refiere al hecho matemático de manera asertiva, directa, clara y precisa, utilizando un tono de voz firme que denota seguridad.

*Actitudes*

De acuerdo a Wittgenstein la completa seguridad sólo se relaciona con su actitud. Se empleará "actitud" en el sentido restringido al componente afectivo-valorativo de una disposición como lo hiciera Villoro (2009). Así entendida, la actitud se refiere a una predisposición aprendida a responder a un objeto dado de una manera consistentemente favorable o desfavorable. La actitud, dice Villoro, añade a la creencia una tendencia o pulsión (término que cubre toda clase deseos o quereres) de atracción o repulsión hacia el objeto creído. La forma en que se presente la pulsión determina el aspecto afectivo de la disposición delimitando las respuestas dinámicas posibles ante circunstancias cambiantes.

*Interés*

Bloom, Hastings & Madaus (1975) consideran que sostener una creencia durante un lapso prolongado no es, por sí mismo, evidencia suficiente de compromiso. También debe haber una inversión considerable de energía aplicada al objeto o fenómeno valorizado. Se tiene tanto interés que a menudo se le encuentra hablando de él y relacionándolo con muchas otras cosas. Para examinar este aspecto Bloom, Hastings & Madaus (1975) sugieren recoger evidencias de la perseverancia del sujeto o evidencias de que la prosecución de un objeto altamente valorizado satisface una necesidad profunda. Abelson incluye el ítem ¿Qué importancia tiene para usted el objeto x? como una de las dimensiones para valorar el convencimiento de una persona.

Por otro lado, la plataforma Moodle en la que se imparte el Diplomado registra la actividad de los sujetos en un periodo de tiempo determinado. El investigador puede diagnosticar cierto grado de interés tomando en cuenta en cada intervención (Boyero, 2012):

1.-Cantidad: Que su contribución sea todo lo informativa que se requiere. En el foro, se observará que el sujeto conteste todas las preguntas referidas a él de la manera más detallada posible.

2.-De cualidad: Que su contribución sea verdad. Se tomará un hecho matemático como verdadero si es congruente con lo que dicta la comunidad científica.

3.-De relación: Que su contribución sea relevante. En el foro, una contribución relevante implica activar esquemas epistémicos para aportar información que hasta ese momento no se había considerado. Expresiones como "Sí", "No" o "Estoy de acuerdo con…" como respuesta a una pregunta no se considera como relevante.

4.-De manera: Que su contribución sea clara.

Adicionalmente:

5.-El número de participaciones en el foro que se relacionan con el hecho matemático en comparación con el número total de intervenciones.

*Acción*

Wittgenstein afirma que podemos ver en las acciones que se cree firmemente en ciertas cosas, tanto si se expresan tales creencias como si no lo hacen. La proposición sólo tiene sentido a través del uso, dice Wittgenstein. Para Bloom, Hastings & Madaus (1975) debe haber acción a favor de la creencia que por su propia naturaleza implique compromiso. Bloom, Hastings & Madaus (1975) sugieren construir situaciones en las que no solamente se haga manifiesta la creencia sino que también dé información sobre la disposición a actuar del sujeto. Esto se debe a que si bien un estudiante puede estar comprometido con un punto de vista, no encuentra oportunidades para actuar en esa dirección.

*Valor*

De acuerdo a Rigo (2013[a]), en este criterio la persona muestra valor para sostener su creencia en el hecho de las matemáticas, a pesar de tener al colectivo en su contra o bien, tiene el valor de cambiar su posición frente al grupo. Bloom, Hastings & Madaus (1975) por su parte sugieren que el sujeto muy probablemente comunicará espontáneamente su punto de vista y se esforzará en convencer a otros de la verdad de su posición (seguridad subjetiva). Abelson incluye el ítem ¿Qué haría usted para defender x? como una de las dimensiones para entender el convencimiento.

*Elaboración cognitiva*

Según Rigo (2013[a]), en esta condición los sujetos elaboran constructos que permiten dar cuenta del tipo de justificaciones en las que, desde la perspectiva del investigador, basan ellos su confianza en enunciados matemáticos o promueven su credibilidad en otros. Estos constructos corresponden a distintas maneras de justificar o sustentar la creencia en un enunciado matemático. Bloom, Hastings & Madaus (1975) mencionan que la sola posesión de conocimiento es ya muestra de la valorización de un objeto.

*Afectos positivos*

De acuerdo a Rigo (2013[a]) la persona expresa directa o indirectamente emociones positivas de serenidad, gusto, placer estético, alegría o una disposición favorable a hablar o reflexionar sobre el hecho de las matemáticas.

## 5.-LA TRIANGULACIÓN

Después de contrastar las observaciones empíricas del tutor, las categorías teóricas y los datos (ver Tabla 12 Triangulación de las categorías teóricas, del intérprete y de la estudiante) finalmente se propuso el instrumento que permitió sugerir de manera sustentada los estados internos de una persona que participó en un foro virtual que aparece en el artículo "Criterios de certeza en el contexto de un foro virtual".

Tabla 12 Triangulación de las categorías teóricas, del intérprete y de la estudiante.

| Categorías | Categorías teóricas | Categorías del intérprete | Ejemplo en la publicación del estudiante |
|---|---|---|---|
| Elementos de habla | Uso de enfatizadores y mitigadores (Hyland ,1998)<br><br>Grados de compromiso (Rigo,2013[a]) | Acude a palabras o expresiones que denotan certeza. | **hay que** analizar muy bien los datos que se nos dan. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Acción | Acción a favor de la creencia (Bloom, Hastings & Madaus, 1975; Wittgensein,1988) | Actuar en consecuencia de lo que dice. | **datos**<br>salon de clases 61 alumnos<br>x hombres<br>x + 7 mujeres |
| Familiaridad | Longevidad de la creencia (Abelson, 1988 & Wittgenstein,1988) | Acudir a procedimientos que le son familiares. | **Ahora** plantearemos la ecuacion |
| Elaboración cognitiva | Esquemas epistémicos basados en razones matemáticas (Abelson,1988; Rigo,2013[a] & Bloom, Hastings & Madaus, 1975) | Explicita los sustentos que subyacen sus afirmaciones matemáticas. | por lo cual hay 2 datos desconocidos **pero de uno se resuelve** el otro y tenemos una incognita. |
| Determinación | Valor para sostener la creencia (Abelson,1988; Rigo,2013[a] & Bloom, Hastings & Madaus, 1975) | | en mi opinión creo que tus respuestas no coinciden con las mias |
| Interés | Grados de interés (Boyero, 2012 & Abelson, 1988) y Fortaleza (Rigo, 2013[a]). | | Resuelve todas las preguntas de la actividad, lee las respuestas de sus compañeros, responde las preguntas del tutor. |
| Consistencia | Actitud (Wittgenstein,1988) y Afectos positivos | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | (Rigo,2013[a]) | | |

6.-EL MODELO 3UV

Una vez que sugerí los posibles estados internos que experimentó la estudiante concluí que quizá tenía una dificultad cuando experimentó certeza. En primera instancia decidí acudir al Modelo 3UV para identificar posibles dificultades en el uso de la variable. De acuerdo a Ursini (2012) en los problemas cuya resolución requiere plantear y resolver sistemas de ecuaciones lineales sencillos el alumno tiene que ser capaz de interpretar las dos letras involucradas en cada expresión como dos variables que si bien en primera instancia pueden asumir cualquier valor , están relacionadas entre sí y pueden expresarse una en función de la otra. Desde la perspectiva del uso de las variables, continúa la autora, la resolución de un problema que involucra sistemas de ecuaciones lineales implica pasar entre distintas interpretaciones de las letras: en relación funcional primero y como incógnitas después; además, es necesario manipularlas sin preocuparse por sus posibles valores, y en otro momento, sustituirlas por valores. El análisis de las intervenciones de Jeymi utilizando el Modelo 3UV se muestra en el artículo.

7.-VERSIÓN PUBLICADA DEL ARTÍCULO

Varias versiones fueron escritas antes de la publicación del artículo con la finalidad de organizar la información en distintos apartados: antecedentes, marco teórico, consideraciones metodológicas, análisis de resultados y hallazgos principales. La versión publicada del artículo se incluye a continuación.

# Criterios de certeza en el contexto de un foro virtual

**Resumen**

Se analizan -con base en un instrumento que se diseñó en el marco del proyecto cuyos resultados parciales aquí se exponen-, los estados de certeza (o presunción) que, en torno a hechos de las matemáticas, experimentó un participante (asesor en capacitación) en un foro virtual al resolver un problema matemático. Dicho análisis permitió a los investigadores detectar las posibles dificultades del asesor en la comprensión de conceptos matemáticos involucrados y sugerir las formas mediante las cuales él sustentó sus afirmaciones; también permitió concluir que los estados de certeza o presunción que en torno a los hechos matemáticos él experimentó, están relacionados con su nivel de comprensión y sus formas de sustentar las afirmaciones implicadas.

*Palabras clave*: certeza y presunción, sustentos de enunciados matemáticos, comprensión, foro virtual, capacitación a distancia.

## Presentación

En la capacitación a distancia, como en todo proceso de aprendizaje, es necesario que la persona involucrada no sólo construya los conocimientos esperados sino que también experimente certezas en torno a esos conocimientos. En el caso de un foro virtual, lo anterior plantea el reto de contar con elementos teóricos e instrumentos analíticos que permitan distinguir los estados de certeza (en torno a los enunciados de contenido matemático que ahí surjan) que vivencian los alumnos inscritos. En consideración a esta problemática, en el documento se propone un instrumento teórico-metodológico para identificar en esos ámbitos educativos los estados de certeza (y otros estados internos, como la presunción) que eventualmente experimentan los involucrados. La aplicación del instrumento a un caso de estudio dejó ver que en esos ambientes de instrucción es posible suponer fundadamente los estados internos de certeza de la persona implicada; adicionalmente, el análisis de sus estados internos dio pauta para identificar la forma en que ella sustentó sus afirmaciones, y reconocer sus posibles dificultades en la comprensión de conceptos matemáticos comprometidos en el estudio.

## Antecedentes

Investigaciones diversas han centrado su atención en el papel que juega la certeza (y otros estados semejantes) tanto en el quehacer matemático como en el salón de clases. Por ejemplo, de acuerdo a Hersh (1993), en la investigación matemática el convencimiento es un propósito central de la prueba y es un criterio de demarcación: una justificación es una prueba sólo si convence a los jueces calificados. En contraste, él mismo supone que el objetivo de la prueba en el aula de matemáticas no es precisamente el de convencer o generar certezas sino el de estimular la comprensión de los estudiantes.

Al igual que Hersh, de Villiers (2010) encomia el valor explicativo de las pruebas en el aula, pero recupera para este ámbito su función de convencer. Conforme a lo que de Villiers sostiene, los matemáticos profesionales se convencen, durante la experimentación, de que sus procesos heurísticos de construcción de nuevos conocimientos van por buen camino; no obstante -continúa el investigador-, a los expertos en las matemáticas esos procesos empíricos casi nunca les suele generar certeza (absoluta) de sus resultados, en parte, porque el trabajo experimental no posee suficientes cualidades explicativas. Es por esto que recurren a las pruebas deductivas, las que para ellos representan la vía para sistematizar, comprender y explicar los resultados que generan. A nivel del aula, y de parecida manera a lo que sucede con los profesionales de las matemáticas, es este valor explicativo de las pruebas lo que -según de Villiers- probablemente genera mayor convencimiento en los estudiantes. Por ello, él sugiere que los profesores se esfuercen en exponer pruebas que expliquen ya que en el salón de clases, además de mostrar el carácter axiomático de la demostración, es muy importante aprovechar y potencializar el carácter explicativo de las demostraciones deductivas y las pruebas y el estado de certeza que puedan promover.

Con el objetivo de determinar la certeza (o presunción) que los autores de documentos escritos proyectan a través de ellos, Hyland (1998) se ha interesado por el análisis de textos, y en particular, en producciones redactadas por estudiantes. Él recurre a aspectos del lenguaje, que llama epistémicos, porque es mediante éstos que los escritores (consciente o inconscientemente) expresan su evaluación de las posibilidades de verdad de lo que afirman e indican el grado de confianza que experimentan en torno a ello. Atendiendo al hecho de que el compromiso del escritor puede ser expresado de acuerdo a una enorme variedad de formas y que estas expresiones pueden transmitir una amplia gama de significados Hyland y Milton (1997) ubicaron elementos léxicos utilizados por estudiantes en distintas categorías epistémicas (certeza, posibilidad o probabilidad).

En esta investigación se reconoce la importancia de que en la educación matemática se promueva certeza y estados de convencimiento en torno a enunciados de las matemáticas, siguiendo siempre criterios de esta disciplina (pertinentes al nivel educativo y al tema). Consecuentemente, y debido a que las personas que participaron en el trabajo empírico que aquí se analiza son miembros de un foro virtual, a los autores les interesa identificar los estados de certeza (o presunción) en torno a enunciados o hechos de las matemáticas que ellos posiblemente experimentan y que expresan de manera escrita. Esto da cuenta del interés y la necesidad del marco interpretativo que se expone en el siguiente apartado

## Marco interpretativo

Los alumnos suelen sustentar sus afirmaciones o procedimientos de contenido matemático de modos diversos, como por ejemplo, cuando un estudiante explica el uso de un algoritmo recurriendo a su facilidad (“es más fácil resolverlo así”) o a la autoridad del profesor (“porque me lo dijo la maestra”). Rigo (2013[a]) ha propuesto una taxonomía de estos recursos de sustentación a los que llama “esquemas epistémicos”. Ella propone que algunos sustentos se vertebran en torno a razones matemáticas, como los que poseen una estructura lógica de tipo deductivo (e.g. ejemplos genéricos o las instanciaciones) o los que surgen a partir de la acumulación de evidencia empírica (e.g. a partir del análisis de casos particulares), esquemas que pueden denotar cierta comprensión conceptual por parte de quien los aduce. En otros casos, continúa Rigo (2013[a]), los esquemas que una persona construye para sustentar la verdad de un enunciado matemático obedecen a sus motivos y no al contenido del enunciado, como los que se basan en la familiaridad, mismos que son resultado de la repetición, la memorización y las costumbres. Los esquemas que se basan en la repetición pueden provenir de reiterar sistemáticamente algún enunciado o hecho de las matemáticas, mientras que otros esquemas pueden provenir de costumbres institucionales en torno a lo que deben ser las tareas matemáticas que deben resolver los niños en la clase, como cuando los estudiantes sustentan el uso de un algoritmo por ser habitual o por su facilidad. En esta investigación se considera que, asociados a sus esquemas epistémicos, el sujeto experimenta estados internos de certeza (cuando le asocia el máximo grado de probabilidad a lo creído) o de presunción (cuando le asocia grados menores de probabilidad a lo creído). A estos estados internos Rigo (2013[a]) les llama "estados epistémicos".

**Criterios para distinguir estados epistémicos (de certeza y presunción): Propuesta de un instrumento de análisis**

Con base en las anteriores consideraciones, en lo que sigue se pone a la apreciación del lector el instrumento que permitió identificar (o suponer fundadamente, de acuerdo a las evidencias con las que contaban los investigadores) los estados epistémicos de los estudiantes que participaron en un foro virtual. En su diseño convergieron perspectivas provenientes de muy distintas disciplinas: de filosofía (Wittgenstein, 1988), la psicología (Bloom, Hastings & Madaus, 1975), la sociología (Abelson, 1988), la lingüística (Boyero, 2012; Hyland, 1997; Hyland & Milton, 1998; Sánchez-Upegui, 2009) y la educación matemática (Rigo, 2013[a]; Rigo, 2013[b]).

Partiendo del hecho de que la comunicación en un foro virtual se da a través del lenguaje escrito, para distinguir los estados de certeza o presunción de sus participantes resulta necesario recurrir al análisis de su meta-discurso (entendido éste como el que va más allá de su discurso explícito) con el fin de desvelar las intenciones comunicativas (muchas de ellas inconscientes) que ellos proyectan a través de su escritura. En esta investigación se considera que una persona (que participa en un foro virtual) vivencia un grado de certeza (o de presunción) en un enunciado matemático, cuando cumple con alguno(s) de los siguientes criterios.

*Elementos del habla.* La persona recurre a enfatizadores del lenguaje que pueden revelar un mayor grado de compromiso con la verdad de lo que dice, por ejemplo, cuando la persona usa perífrasis modales de obligación (e.g. tener que/deber/ haber de/haber que), el modo indicativo de los verbos (e.g. tengo, hago, saco) u otros elementos del habla que Hyland & Milton (1997) ubican dentro de la categoría epistémica de certeza (e.g. saber, pensar, en realidad, ciertamente). En caso de un menor grado de compromiso la persona recurre a mitigadores, por ejemplo, la persona usa el morfema verbal –ía que está asociado al modo condicional (e.g. sería, podría) u otros elementos del habla que Hyland & Milton (1997) ubican en las categorías de probabilidad (e.g. creer, parecer, probablemente) o posibilidad (e.g. poder, tal vez, posiblemente).

*Acción.* El sujeto realiza acciones consecuentes con su discurso.

*Familiaridad.* La persona activa esquemas epistémicos basados en la familiaridad (resultado de la repetición, la memorización y las costumbres). Por ejemplo, la persona sustenta explícita o implícitamente el uso de un algoritmo aduciendo que es lo habitual o apelando a su facilidad.

*Elaboración cognitiva.* La persona activa esquemas epistémicos basados en razones matemáticas que pueden denotar cierta comprensión conceptual. Entre ellos se encuentran, por ejemplo, los esquemas epistémicos que poseen una estructura lógica de tipo deductivo (e.g. ejemplos genéricos o las instanciaciones) o los esquemas epistémicos que surgen a partir de la acumulación de evidencia empírica (e.g. a partir del análisis de casos particulares).

*Determinación.* La persona manifiesta de manera espontánea su adhesión a la veracidad de un enunciado matemático indicando algún grado de determinación. Este grado puede ser mayor cuando el sujeto sostiene una creencia en un hecho de las matemáticas, a pesar de tener al colectivo en su contra o bien, tiene el valor de cambiar su posición frente al grupo. Incluso puede llegar a esforzarse por convencer a otros de la verdad de su posición.

*Interés.* Las participaciones de una persona que interviene con interés en torno a un hecho matemático específico en un foro virtual son:

-Sistemáticas. Es decir, el sujeto contesta todas las preguntas dirigidas a él de la manera más detallada posible (Cantidad).

-Informativas. Sus afirmaciones, procedimientos y/o resultados son suficientemente informativos y correctos (Cualidad).

-Relevantes. En el foro, una contribución relevante implica activar esquemas epistémicos para aportar información que hasta ese momento no se había considerado pero que guardan relación con las demás participaciones (De relación).

-Claras y precisas.

-Numerosas, en relación a sus intervenciones en otros temas y a la partición de otros.

*Actitud.* La persona muestra consistencia en los criterios anteriores. Esta consistencia puede presentarse en una intervención o en un período de tiempo considerablemente mayor.

Las anteriores condiciones pueden ser suficientes para que una persona experimente certeza o grados altos de presunción; sin embargo no son necesarias.

## Consideraciones metodológicas

La investigación cualitativa que aquí se presenta está centrada en un estudio de caso de tipo interpretativo (Denzin & Lincoln, 1994) y se enmarcó en un proceso de investigación-acción (Harding, 1978), en el sentido de que los resultados que se presentan provienen en parte de la reflexión de uno de los autores sobre su propia práctica.

El estudio empírico se llevó a cabo en el Diplomado de Temas Fundamentales de Álgebra impartido por el Instituto Nacional para la Educación de los Adultos; el diplomado tiene el propósito de fortalecer la formación de personas que asesoran en temas de álgebra a adultos que se encuentran en proceso de obtener su certificado de secundaria. Incluye un Módulo Cero y cuatro Módulos de contenido matemático que se estudian de forma secuenciada. En el Módulo I se revisan temas de conteo y medición, así como algunas relaciones numéricas básicas, en el Módulo II los participantes descubren regularidades y reconocen patrones para estudiar el lenguaje algebraico, en el Módulo III se estudian relaciones funcionales y en el Módulo IV se presentan problemas que involucran el planteamiento de una ecuación lineal con una incógnita y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Cada Módulo está dividido por semanas en las que se revisa un tema en particular.

Las actividades de enseñanza se desarrollan a distancia mediante el uso de la plataforma Moodle a través de la cual los estudiantes reciben apoyo, evaluación y retroalimentación por parte de un tutor. En el marco de los módulos del diplomado los estudiantes participan en foros de discusión y realizan actividades y tareas que implican resolución de problemas matemáticos. La dinámica consiste en que el tutor propone un problema a resolver, los estudiantes publican en el foro sus soluciones al problema propuesto e interactúan entre ellos para enriquecer o corregir sus respuestas; la discusión que se genera es guiada por el tutor.

Para el análisis que aquí se expone se eligió el Módulo IV porque los estudiantes tendían a sustentar sus respuestas. Las participaciones de ese módulo se organizaron en episodios, mismos que están conformados por todas esas participaciones de los estudiantes y del tutor que giran en torno a una actividad iniciada por este último. Los episodios comienzan con la solicitud del tutor para responder a una tarea y finalizan con el acuerdo de los estudiantes en torno a una solución o conjunto de soluciones. Una vez que para propósitos del estudio se organizaron las participaciones en episodios, éstos se separaron en partes considerando las necesidades del análisis, asignándoles un numeral.

Para este reporte se seleccionaron tres participaciones: una de una estudiante, llamada Patricia, que abrió la discusión, y otras dos de otra estudiante, Jeymi, quien parece haber experimentado matices en sus estados epistémicos al exponer dos métodos de solución de un mismo problema, aparentemente correctos. Jeymi era una asesora que contaba con cuatro años y medio de experiencia cuando fue observada. Martínez fungió como tutor del grupo, quien deliberada y sistemáticamente instó a que sus estudiantes explicitaran los sustentos en los que apoyaban sus afirmaciones. En la edición de diplomado que aquí se analiza, él contaba con dos años de experiencia como tutor de asesores.

## Análisis de Resultados: Episodio "El problema del salón de clases"

El episodio "El problema del salón de clases" que se examina en lo que sigue trata sobre la resolución de un problema que se puede resolver con un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Comenzó con la solicitud del tutor para que los participantes en el foro resolvieran el siguiente problema:

En un salón de clases hay 61 alumnos. El número de mujeres excede al de hombres en 7.¿Cuál es el número de hombres y mujeres?

a) ¿Cuántas incógnitas tienes?

b) ¿Cuáles son las literales que asignaste? ¿Qué significan?

d) ¿Te hacen falta datos para dar solución al problema?

e) Trata de plantear las ecuaciones que resuelven el problema.

Para resolver el problema, de acuerdo al objetivo de la semana, se esperaba que los participantes reconocieran e identificaran la presencia de algo desconocido que se puede determinar; específicamente, que reconocieran como incógnitas del problema la cantidad de hombres y la cantidad de mujeres en el salón; que simbolizaran las incógnitas, por ejemplo, mediante las letras "x" y "y" y que relacionaran las incógnitas con los datos del problema para establecer un sistema de ecuaciones. En una semana posterior se pediría a los estudiantes realizar las operaciones necesarias para determinar el valor específico y sustituir en la ecuación el valor encontrado para comprobar que era correcto.

**Participación de Patricia**

La participación que abrió la discusión en el episodio bajo examen fue la de Patricia. Su respuesta desencadenó las participaciones de sus compañeros y en particular la de Jeymi. Su participación fue la siguiente:

*(2.3)* a) ¿Cuántas incógnitas tienes?
*(2.4)* 2 el numero de hombres y de mujeres
*(2.5)* b) ¿Cuáles son las literales que asignaste? ¿Qué significan?
*(2.6)* "h" hombres y "m" mujeres.
*(2.7)* c) ¿Te hacen falta datos para dar solución al problema?
*(2.8)* no
*(2.9)* d) Trata de plantear las ecuaciones que resuelven el problema
*(2.10)* h+m=7 m+7=h

En esta intervención, Patricia se limitó a contestar las preguntas que formuló el tutor. En (2.4) identificó como incógnitas al número de hombres y mujeres; posteriormente asignó la literal “h” al número de hombres y la literal “m” al número de mujeres (2.6) y finalmente relacionó esas incógnitas con los datos del problema para plantear un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas (2.10). Como se aprecia, la segunda ecuación del sistema es incorrecta porque la alumna considera al número de mujeres como la variable independiente y al número de hombres como la variable dependiente (2.10).

La primera participación de Jeymi se dio como respuesta a la participación de Patricia (ver Primera participación de Jeymi). En ella, Jeymi resolvió el problema utilizando una ecuación lineal con una incógnita: $x + (x + 7) = 61$. La alumna comenzó enunciando lo que consideró los datos del problema; identificó como incógnita el número de hombres y le asignó la literal “x”; posteriormente relacionó la incógnita con los datos del problema con base en lo cual planteó una ecuación lineal con una incógnita, la que después simplificó para obtener el valor de la incógnita “hombres”, el cual utilizó para calcular el valor de la otra incógnita. Finalmente, sumó la cantidad de hombres y de mujeres para verificar la cantidad total de alumnos en el salón.

La segunda participación de Jeymi (ver Segunda participación de Jeymi) se dio a petición del tutor. En esa oportunidad Jeymi sugirió un sistema de ecuaciones (h+m=61, m=h+7) que tuvo como base la asignación de la literal “h” al número de hombres y “m” al número de mujeres, y la traducción al lenguaje algebraico del enunciado del problema (expresado en lenguaje natural). El sistema, aunque de expresión correcta, Jeymi lo dejó sin resolver.

Los investigadores inicialmente centraron su atención en detectar el probable estado epistémico que experimentó Jeymi en sus dos participaciones. Los resultados del análisis se exponen en lo que sigue.

**Primera participación de Jeymi: sus (posibles) estados epistémicos**

*(3.3)* primeramente hay que analizar muy bien los datos que se nos dan
*(3.4)* datos
salon de clases 61 alumnos
x hombres

x + 7 mujeres
*(3.5)* por lo cual hay 2 datos desconocidos
*(3.6)* pero de uno se resuelve el otro
*(3.7)* y tenemos una incognita denominda "X"
*(3.8)* que significa hombres
*(3.10)* Ahora plantearemos la ecuacion
*(3.11)* x + (x + 7) = 61
*(3.18)* y nos queda asi 2x=54
*(3.19)* ahora vamos a dejar sola la x
*(3.20)* y para eso hay que dividir entre 2 ambos miembros
*(3.21)* 2x/2=54/2
*(3.22)* y nos queda x=27.
*(3.24)* mujeres X + 7 = 27+7= 34
*(3.26)* en el salon de clases tenemos 27 hombres y 34 mujeres
*(3.27)* dando un total de 61 alumnos.

En relación a su primera intervención los investigadores concluyeron que Jeymi probablemente experimentó certeza. Esto se derivó de la identificación en ella de distintos de los criterios que aparecen en el marco interpretativo de este documento. Se puede decir, en principio, que ella tuvo *determinación* para someter a juicio del grupo respuestas y procedimientos distintos a los que se habían publicado en el foro hasta ese momento; por ejemplo, Patricia planteó un sistema de ecuaciones pero no lo resolvió (2.10), mientras que Jeymi planteó una ecuación (3.11) y obtuvo el valor de las incógnitas (3.26). Su certeza también se puede inferir del uso de *enfatizadores*, específicamente, del hecho de haber recurrido al modo indicativo de los verbos para presentar reglas generales (3.10 y 3.19) o para hacer afirmaciones (3.5 y 3.7), llegando incluso a utilizar el enfatizador "hay que analizar" (3.3). Otros aspectos que hablan de la certeza de Jeymi son que *actuó* en consecuencia con los procedimientos que anunció, por ejemplo, cuando advirtió "ahora vamos a dejar sola a la "x" (3.19) y cuando realizó acciones consecuentes para efectivamente obtener su valor (3.20, 3.21 y 3.22); que activó *esquemas epistémicos* basados en la *familiaridad* al enunciar reglas como "hay que analizar muy bien los datos" o "ahora plantearemos la ecuación" que muy probablemente eran habituales para ella al resolver problemas rutinarios en su labor como asesora y que parecían darle confianza en sus respuestas; que ella aludió a *razones*, por ejemplo, al plantear una ecuación lineal con una incógnita en lugar de plantear las ecuaciones que se le solicitaron o en lugar de retomar el sistema de ecuaciones que había propuesto Patricia; sus razones también las dejó ver al declarar que "…[había] dos datos desconocidos" (3.5) y que "…de uno se [resolvía] el otro…" (3.6); además su domino conceptual quedó de manifiesto por los símbolos que introdujo en 3.7, en donde explicitó la interpretación que dio a la "x", o en 3.20, donde denotó cierta comprensión de las propiedades del signo "=" al realizar la misma operación a ambos lados de la igualdad. Su certeza también la dejó ver al mostrar *interés* por resolver el problema, al explicar detalladamente su solución, al contestar correctamente todas las preguntas del problema, al resolver el sistema que planteó sin que el tutor se lo solicitara,al exponer una solución distinta a la que se habían mostrado en el foro hasta ese momento y al ser clara en su exposición. Finalmente, Jeymi demostró su certeza al dejar ver *constancia* en la aplicación de las acciones recién descritas a lo largo de su intervención.

### Segunda participación de Jeymi: sus (posibles) estados epistémicos

*(5.17)* ya que bueno vamos a tomar a m como el numero de mujeres y h el numero de hombres
*(5.18)* entonces sabemos que la suma de las dos cantidades nos da 61
*(5.19)* seria h+m=61
*(5.20)* pero tambien sabemos que el numero de mujeres excede en 7 al numero de hombre
*(5.21)* esto seria
*(5.22)* h+7=m
*(5.26)* bueno por lo tanto nuestro sistema de acuaciones seria
*(5.27)* h+m=61 h+7=m
*(5.28)* creo jeje

La segunda participación de Jeymi se dio cuando el tutor le pidió cambiar su método de solución para resolver el problema. Pareciera que en esa oportunidad ella experimentó un estado de presunción porque, entre otras cosas, usó *mitigadores* tanto en su procedimiento como al rematar su participación; en ese proceso recurrió a estos elementos léxicos cuando tradujo literalmente cada enunciado del problema del lenguaje natural al lenguaje algebraico: por ejemplo, al traducir el enunciado "el número de mujeres excede en 7 al número de hombres" utilizó el mitigador "sería" (5.21) antes de plantear la ecuación correspondiente, "h+7=m" (5.22), a diferencia de su primera intervención en donde usó el enfatizador "nos queda" (3.18 y 3.22). Al finalizar su intervención ella utilizó el mitigador "creo jeje" (5.28) que da la impresión de que ella dejó abierta la posibilidad de error en el planteamiento de su sistema que, como ya se ha dicho, dejó sin resolver. Finalmente, parece que ella sólo activó esquemas epistémicos basados en la *familiaridad* porque para formular el sistema de ecuaciones no se apreció un sustento distinto a la traducción literal de los enunciados del problema al lenguaje algebraico, y no abundó sobre el significado conceptual de las letras o relaciones que ella introdujo, como lo hiciera en su primera intervención.

### Alerta de una posible dificultad conceptual

Del análisis de los posibles estados epistémicos que experimentó Jeymi al presentar distintos métodos de solución se concluyó, de acuerdo a lo que se explicó, que en su primera intervención Jeymi probablemente experimentó certeza, y que en cambio vivenció un estado de presunción en su segunda participación. Esto alertó a los investigadores y los llevó a suponer que en esa segunda participación, Jeymi quizá tenía alguna dificultad conceptual, específicamente con la variable, aún cuando sus procedimientos y resultados en primera instancia eran correctos. Se decidió entonces analizar sus procedimientos usando el Modelo 3UV[1] (Ursini, Escareño, Montes & Trigueros, 2005) en el que se caracterizan los tres usos de

---

[1] El Modelo 3UV
*La variable como incógnita*
I1 Reconocer e identificar, en una situación problemática, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.
I2 Interpretar la variable que aparece en una ecuación, como la interpretación de valores específicos.
I3 Sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero
I4 Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas, aritméticas o de ambos tipos.

I5 Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.
*La variable como número general*
G2 Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.
G4 Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.
*Las variables en una relación funcional*
F1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).
F2 Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.
la variable.

En su primera intervención Jeymi inicialmente identificó la presencia de dos incógnitas al explicitar "…hay 2 datos desconocidos…" (3.5) (aspecto I1 de la variable como incógnita) pero inmediatamente reconoció una correspondencia entre las variables al mencionar "…de una se resuelve el otro…" (3.6) (aspecto F1 de la variable en una relación funcional). Para obtener el valor de la incógnita "cantidad de hombres" (aspecto I4 de la variable como incógnita) ella le asignó la literal "x" (3.7), la interpretó como "hombres" (3.8) aunque del contexto se infiere que se refería a la "cantidad de hombres" (aspecto I2 de la variable como incógnita). Posteriormente, utilizó esa literal para plantear la ecuación correctamente, x+(x+7)=61 (3.11) (aspecto I5 de la variable como incógnita), simplificó esa expresión (3.18) y realizó la misma operación a ambos lados de la igualdad (3.18) (aspectos G2 y G4 de la variable como número general). Una vez que obtuvo la cantidad de hombres, Jeymi la sustituyó en la expresión con la que representó la cantidad de mujeres (3.24) para obtener la respuesta, 34 mujeres (aspecto F2 de la variable en una relación funcional). Finalmente, sumó las dos cantidades para verificar el total de alumnos en la clase (3.26), 61 alumnos (aspecto I3 de la variable como incógnita).

En su segunda intervención (cuando planteó el sistema de ecuaciones) Jeymi en (5.18) identificó dos cantidades: el número de mujeres y de hombres (no explicitó que se trataban de incógnitas), en (5.17) les asignó las literales "h" y "m" y tradujo literalmente del lenguaje común al lenguaje algebraico el enunciado del problema para plantear el sistema de ecuaciones (aspecto I5 de la variable como incógnita): en (5.19) del enunciado "la suma de dos cantidades es 61" obtuvo la ecuación h+m=61 y en (5.22) del enunciado "el número de mujeres excede en 7 al número de hombres" obtuvo la ecuación m=h+7. Su intervención finalizó con el planteamiento correcto del sistema en (5.27), que dejó sin resolver.

El análisis precedente dejó ver a los investigadores que cuando Jeymi utilizó la representación "x", mostró flexibilidad en el uso de la variable dejando ver que ella contaba con las habilidades necesarias para obtener su valor y verificarlo. Incluso, mostró cierta madurez en el manejo del signo igual al utilizar el método de la balanza para obtener el valor de la literal. Esta flexibilidad y habilidades no las manifestó cuando en su segunda intervención recurrió a una representación distinta (h y m). A diferencia del significado que le otorgó a "x", parece que Jeymi consideró esas literales "h" y "m" sólo como abreviaturas de las palabras "hombres" y "mujeres" perdiendo el significado de variables en toda su extensión; una muestra es que se refirió a esas literales como 'cantidades' (5.18). Adicionalmente, y posiblemente relacionado con lo anterior, ella no percibió la relación entre las ecuaciones del sistema que ella misma enunció y, al carecer de razones, ella sólo activó esquemas epistémicos basados en la familiaridad al dar cuenta de su sistema acudiendo únicamente al parafraseo del enunciado del problema. Por ejemplo, para explicar el planteamiento de la ecuación h+7=m (en lugar de m+7=h) ella sólo utilizó parte del enunciado del problema ("ya que el número de  mujeres son las que exceden a el número de hombres") y no hizo referencia al uso de las variables o a las relaciones funcionales entre variables, como lo hiciera en su primera intervención ("hay dos incógnitas" o "de una se resuelve la otra"). Todo ello probablemente le impidió resolver el sistema y determinar el valor de las incógnitas, que sí obtuvo cuando planteó una sola ecuación.

## Principales Hallazgos

En la investigación se pudo constatar la eficacia del instrumento para identificar los posibles estados epistémicos que experimentó el sujeto de este estudio al resolver un problema matemático en el contexto de un foro virtual. A partir de este análisis fue posible distinguir la forma en que ella sustentó sus afirmaciones y el nivel de comprensión del concepto de variable que presentó en cada planteamiento. Cuando ella experimentó certeza mostró una comprensión conceptual de la variable que no se vio reflejada cuando los investigadores detectaron un estado de presunción en ella. Esto permitió suponer que cuando esta estudiante vivenció un estado de presunción quizá sólo activó esquemas basados en la familiaridad que le alcanzaron sólo para plantear el sistema y que la posible ausencia de razones (derivada tal vez de la falta de comprensión conceptual que desencadenó una representación distinta de la variable)  le impidió continuar con la resolución.

Lo anterior deja ver que estudiar la trayectoria de los estados de certeza (o presunción) de los alumnos permite detectar posibles obstáculos conceptuales y determinar la forma en que ellos sustentan sus afirmaciones matemáticas. Esta conclusión puede ser útil en la práctica del tutor (y de cualquier docente de matemáticas) porque el análisis que él realice de los estados epistémicos que experimentan sus estudiantes puede ayudarle a identificar los posibles obstáculos que ellos tienen con algún concepto matemático. En el reporte que aquí se expone, fue posible identificar las dificultades que la profesora que se tomó como caso de estudio tenía con el concepto de la variable cuando experimentó un estado de presunción, a pesar de que sus resultados y procedimientos eran correctos (en primera instancia).

Lo antes dicho nos llevó a identificar otro fenómeno que se dio específicamente en el caso de Jeymi, la profesora del estudio: que su certeza está relacionada con sus niveles de comprensión y con la activación de esquemas epistémicos basados en razones, y que sus estados de presunción parecen estar asociados a razones operatorias y esquemas basados en la familiaridad, pero sobre todo a la ausencia de razones conceptuales. Puede resultar interesante para el lector saber que este escenario no parece ser el más frecuente, lo cual se mostrará en otros reportes que los autores están actualmente preparando.

## Referencias


Abelson, R. P. (1988). Conviction. *American Psychologist, 43(4)*, 267.

Bloom, B. S., Hastings, J. T., & Madaus, G. F. (1975). *Evaluación del aprendizaje*. Buenos Aires:

Ediciones Troquel.

Boyero, M. J. (2012). Aportación al estudio de los marcadores conversacionales que intervienen en el desarrollo del diálogo (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid, Madrid.

De Villiers, M. (2010). Experimentation and proof in mathematics. In G. Hanna, H. Niels & H. Pulte (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics* (pp. 205-221). USA: Springer.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (1994). Introduction: Entering the field of qualitative research. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1–18). California: Sage Publications.

Harding, J. (1978). What is action-research in schools? *Journal of Curriculum Studies, 10(4),* 355-357.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24(4)*, 389-399.

Hyland, K., & Milton J. (1997). Qualification and Certainty in L1 and L2 Students. *Journal of second Language Writing, 6(2)*, 183-205.

Hyland, K. (1998). Persuasion and Context: The pragmatics of academic metadiscurse. *Journal of Pragmatics, 30*, 437-455.

Rigo, M. (2013[a]). La convicción, la comprensión y las prácticas de racionalidad en la primaria. Estudio del profesor. En A. B. Alcaraz, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVII* (Pp. 460-466). Bilbao: SEIEM y Universidad del País Vasco.

Rigo, M. (2013[b]). Epistemic schemes and epistemic states. A study of mathematics convincement in elementary school classes. *Educational Studies in Mathematics, 84*(1), 71-91.

Sánchez-Upegui, A. (2009). Nuevos modos de interacción educativa: análisis lingüístico de un foro virtual. *Educación y Educadores*, *12*(2), 29-46.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., & Trigueros M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental: Una propuesta alternativa.* México: Editorial Trillas.

Wittgenstein, L. (1988). *Sobre la Certeza.* Barcelona: Editorial Gedisa.

## 7.-TRIANGULACIÓN ENTRE PARES

La revisión del árbitro fue la siguiente:

```
Benjamín Martínez Navarro:

Después de una detenida revisión de su original, "Criterios de Certeza en
el contexto de un foro virtual" ha sido considerada positivamente en I
Congreso de Educación Matemática de América Central y de El Caribe si se
realizan las siguientes revisiones.

Recuerde que debe incluir las observaciones de forma aquí indicadas y subir
la versión definitiva de su trabajo (ver página 15 del manual de autor),
antes del 20 de setiembre.

Observaciones del revisor:
El trabajo aporta elementos teóricos y prácticos para el estudio de la
solución de problemas.
Revisar la cita "Autor2" (2013)

Gracias por considerar su participación en este evento.

Ing. Alexa Ramírez
alexarv11@gmail.com
Ing. Alexa Ramírez
Comité Científico Internacional
```

El enviar el artículo de investigación para su evaluación a un congreso de nivel internacional me permitió:
-Compartir el trabajo con investigadores a nivel internacional.

-Realizar una triangulación entre investigadores que me permitiera disminuir posibles sesgos que pudiera tener al diseñar el instrumento e interpretar los datos.

-Contar con sugerencias que me permitieran enriquecer el trabajo.

## 8.-ALCANCES DE LA INVESTIGACIÓN Y NUEVAS PREGUNTAS

En el artículo se muestra que se logró diseñar un instrumento que permitió detectar los posibles estados internos que una persona experimentó en un foro virtual al resolver un problema matemático. Este análisis permitió sugerir las posibles dificultades del asesor con conceptos matemáticos involucrados. En particular, parece que la estudiante mostró una comprensión del concepto de variable cuando usó la literal x para representarla que no mostró cuando usó una literal distinta. Adicionalmente, se encontró que cuando Jeymi experimentó certeza mostró una comprensión del concepto de variable que no se vio reflejada cuando experimentó presunción.

Ante cada uno de los resultados de esta primer parte de la investigación surgieron otras preguntas:

¿Qué otras relaciones existen entre la certeza que experimentó una persona que participó en un foro virtual y su comprensión en torno a hechos de las matemáticas? ¿Qué consecuencias se desprenden de esas relaciones?

Jeymi experimentó certeza asociada a su comprensión y duda asociada a su incomprensión. ¿Cómo será su comportamiento en situaciones similares?

# CAPÍTULO 3

# RECONSTRUCCIÓN ETNOGRÁFICA DEL ARTÍCULO CERTEZAS MATEMÁTICAS EN LA HISTORIA Y EN LA EDUCACIÓN A DISTANCIA.

## 1.-EL REGISTRO

Para tratar de responder a las nuevas preguntas que surgieron del reporte de investigación "Criterios de certeza en el contexto de un foro virtual", se seleccionó un episodio en el que, por un lado, se pudieran distinguir otras relaciones entre la certeza y la comprensión y en el que participara Jeymi para sugerir posibles patrones de certeza, por el otro. Los mensajes fueron extraídos del foro virtual "Diferentes métodos de resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado" correspondiente a la quinta semana de actividades del Módulo 4. En lo que sigue se muestran esos mensajes tal y como quedaron registrados en la plataforma:

Imagen 1 Intervención del tutor

ACTIVIDAD 1

Bienvenidos compañeros! La semana pasada nos concentramos en plantear sistemas de ecuaciones. Esta semana lo importante será identificar el método más idóneo para resolver el sistema una vez que lo hemos planteado.

Para comenzar plantea el sistema que resuelve los siguientes problemas y contesta: ¿Qué método escogerías para resolver el sistema de ecuaciones que planteaste?

**1.-Las dos cifras de la edad de María suman 10. Si duplicamos la primera cifra y sumamos a ésta el doble de la segunda obtenemos 20.**

**¿Cuál es la edad de María?**

**a) Plantea el sistema de ecuaciones que resuelve el problema**

**b) ¿Qué método escogerías para resolver el sistema de ecuaciones que planteaste? ¿Por qué?**

2.-Obtendrás un millón de dólares si encuentras un número de dos cifras que cumpla las siguientes condiciones simultáneamente:

A.-Si a la primer cifra del número que buscamos le sumas el doble de la segunda cifra, el resultado es 5

B.-Si al doble de la primera cifra del número que buscamos le sumas el cuádruple de la segunda cifra, el resultado es 7

¿Cuál es el número con el que podrás ganarte el millón de dólares?

a) Plantea el sistema de ecuaciones que resuelve el problema

b) ¿Qué método escogerías para resolver el sistema de ecuaciones que planteaste? ¿Por qué?

**3. Un hotel tiene habitaciones dobles y sencillas. En total hay 45 habitaciones y 70 camas. ¿Cuántas habitaciones tiene de cada tipo?**

**a) Plantea el sistema de ecuaciones que resuelve el problema**

**b) ¿Qué método escogerías para resolver el sistema de ecuaciones que planteaste? ¿Por qué?**

Cada compañero puede escoger un problema distinto y responder las preguntas que lo acompañan. Adelate! Recordemo que lo importante es la interacción entre ustedes, es importantísimo que comentemos las respuestas de nuestros demás compañeros.

Editar | Borrar | Responder

Imagen 2 Primera intervención de Mariana

**Re: ¿Qué método elegir para resolver el sistema?**
de Mariana - miércoles, 26 de septiembre de 2012, 18:06

hola benja

Me refiero a la ecuación que hace Bety

Y es definitivo que no a todas las personas se les hace fácil dicha ecuación ya que todos somos diferentes, a demás algunos entienden solo viendo el problema, otros se les tiene que explicar el proceso, a otros se les tienen que plantear nuevos ejemplos donde vallas paso por paso explicándole a detalle el problema hasta que lo entienda, a algunos se les dificulta mucho mas y tienes que explicarle con otro procedimiento (corto ó largos) para que pueda realizar la actividad.

Y aquí les dejo el ejemplo me que me solicitas Benja espero que sea útil

**2.-Obtendrás un millón de dólares si encuentras un número de dos cifras que cumpla las siguientes condiciones simultáneamente:**

**A.-Si a la primer cifra del número que buscamos le sumas el doble de la segunda cifra, el resultado es 5**

**B.-Si al doble de la primera cifra del número que buscamos le sumas el cuádruple de la segunda cifra, el resultado es 7**

**¿Cuál es el número con el que podrás ganarte el millón de dólares?**

**a) Plantea el sistema de ecuaciones que resuelve el problema**

**b) ¿Qué método escogerías para resolver el sistema de ecuaciones que planteaste? ¿Por qué?**

X+2y=5

2x+4y=7

En este caso como la ecuaciones no contienen una incógnita igual se aplica el método de sustitución donde alguna de las dos ecuaciones se multiplique por algún número que nos sirva para eliminar una incógnita

2(x+2y)=2(5)

Quedándonos

2x+4y=10

Después de este paso ya puedes realizar la operación

2x+4y=10

2x-4y=7

4x+0=17

Separamos términos y despejamos "x"

4x=17

X=17

4

X=4.25

Obtenido el valor sustituimos en una de las 2 ecuaciones

2(4.25)+4y=7 realizamos la operación y posterior separamos términos y despejamos "y"

8.5+4y=7

4y=7-8.5

4y=1.5

Y=1.5

4

Y=0.375

Comprobamos

Primera ecuación

X+2y=5

4.25+2(0.375)=5

4.25-0.75=5

5=5

Segunda ecuación

2x-4y=7

2(4.25)-4(0.375)=7

8.5-1.5=7

7=7

Mostrar mensaje anterior | Editar | Partir | Borrar | Responder

Imagen 3 Intervención de José

**Re: ¿Qué método elegir para resolver el sistema?**
de José - miércoles, 26 de septiembre de 2012, 19:15

Que tal Mariana.
Realmente me sorprendiste. Serías la primer persona que ganaría el millón de dólares (¡Amiga!)
Pero tienes un pequeño detalle:

X+2y=5

2x+4y=7

En este caso como la ecuaciones no contienen una incógnita igual se aplica el método de sustitución donde alguna de las dosecuaciones se multiplique por algún número que nos sirva para eliminar una incógnita

2(x+2y)=2(5)

Quedándonos

2x+4y=10 Todo va bien hasta aquí

Después de este paso ya puedes realizar la operación

2x+4y=10

2x-4y=7 En este paso, ya le cambiaste el signo (debe ser **+4**y ó multiplicar por -1, pero toda la ecuación), ya no es la ecuación original

4x+0=17 Por lo tanto, éste no es el resultado

¿Qué opinas?

¡Saludos!

Mostrar mensaje anterior | Editar | Partir | Borrar | Responder

Imagen 4 Segunda intervención de Mariana

**Re: ¿Qué método elegir para resolver el sistema?**
de Mariana - viernes, 28 de septiembre de 2012, 15:01

Efectivamente tienes toda la razón se afecta a toda la ecuación pero el propósito de el sistema de ecuaciones es que se logre el resultado mediante la eliminación de alguna de las incógnitas si yo afecto a toda mi ecuación me quedaría en 3 y ya no tendría una incógnita para despejar pero al sustituir afectaría ya que no llegaría al resultado y en la segunda si se despeja la incógnita pero no da el resultado.

X+2y=5

2x+4y=7

En este caso como la ecuaciones no contienen una incógnita igual se aplica el método de sustitución donde alguna de las dos ecuaciones se multiplique por algún número que nos sirva para eliminar una incógnita

2(x+2y)=2(5)

Quedándonos

2x+4y=10 Todo va bien hasta aquí

Después de este paso ya puedes realizar la operación

2x+4y=10

-2x-4y=-7

40+0=3

Obtenido el valor sustituimos en una de las 2 ecuaciones

2(3)+4y=7 realizamos la operación y posterior separamos términos y despejamos "y"

6+4y=7

4y=7-6

4y=1

Y=1/4

Y=0.25

Comprobamos

Primera ecuación

X+2y=5

3+2(0.25)=5

3+0.50=3.50

Y no obtengo el 5

Segunda ecuación

2x-4y=7

2(3)-4(0.25)=7

6-1=5

Tampoco obtengo el 7 que se me pide

Por lo tanto solo afecte a 4y para no afectar toda la ecuación y mucho menos mi resultado talvez no lo vez correcto pero para mi si por que el objetivo es encontrar el valor correcto.

Jejejej me equivoque en el signo

Comprobamos

Primera ecuación

X+2y=5

4.25+2(0.375)=5

4.25-0.75=5 error de dedo jeje pero es así 4.25+0.75=5

5=5

cuando subi la informacion que me corregiste.

Mostrar mensaje anterior | Editar | Partir | Borrar | Responder

## 2.-INTERPRETACIÓN DEL TUTOR Y DE LOS INVESTIGADORES

En mi papel como tutor detecté que los procedimientos de Mariana eran incorrectos e intuí su estado de certeza asociado a su incomprensión. Llamó mi atención el hecho de que a pesar de que José había hecho ver sus errores a Mariana ella no cambió su posición. Entonces decidí incluir una actividad en la que todos los participantes del foro resolvieran “el problema del millón de dólares” utilizando el método de graficación con el fin de que Mariana utilizara un método distinto al de sustitución. En ese momento creí que cuando ella obtuviera rectas paralelas concluiría que el sistema de ecuaciones no tenía solución. Pero nuevamente, ella pasó por alto reglas del álgebra para defender su posición.

¿A qué se debía el hecho de que Mariana experimentara certeza a tal punto de defender procedimientos distintos a los de de sus demás compañeros (procedimientos que por cierto eran incorrectos)?Como tutor no me fue posible responder a la pregunta y mi último intento para hacerle ver su error a Mariana fue cuestionarla: ¿Cómo convencerías a los demás compañeros de que has encontrado la solución? La estudiante no respondió. Como estudiante de maestría estas fueron mis interpretaciones.

Tabla 1 Compromisos ontológicos de Mariana

| *Numeral* | Respuesta de la estudiante | Interpretación de los investigadores |
|---|---|---|
| *(3.1)* | Efectivamente tienes toda la razón **se afecta a toda la ecuación** | Enuncia la siguiente regla: para que una igualdad se conserve deben afectar todos los términos de la ecuación. |
| *(3.2)* | pero el propósito de el **sistema de ecuaciones** es que **se logre el resultado** mediante la eliminación de alguna de las incógnitas | Enuncia su caracterización del sistema de ecuaciones: un medio para **lograr el resultado.** |
| *(3.3)* | si yo afecto a toda mi ecuación me quedaría en 3 y ya **no tendría una incógnita** para despejar | Enuncia una consecuencia de abandonar su caracterización del sistema de ecuaciones: No tendría una incógnita. |
| *(3.4)* | pero al sustituir afectaría ya que **no llegaría al resultado** y en la segunda si se despeja la incógnita pero **no da el resultado**. | "No llegaría al resultado" como consecuencia de abandonar su caracterización del sistema de ecuaciones. |
| *(3.5)* | $X+2y=5$<br>$2x+4y=7$ | |
| *(3.6)* | En este caso como la ecuaciones no | Regla para aplicar el |

| | | |
|---|---|---|
| | contienen una incógnita igual | método de sustitución: las ecuaciones no contienen una incógnita igual. |
| *(3.7)* | se aplica el **método de sustitución** donde alguna de las dos ecuaciones se multiplique por algún número que nos sirva para **eliminar una incógnita** | Caracterización del “método de sustitución” como medio para eliminar una incógnita. |
| *(3.8)* | 2(x+2y)=2(5) | Aplica la regla correspondiente al método de sustitución: multiplicar alguna de las ecuaciones por algún número que sirva para eliminar una incógnita. |
| *(3.9)* | Quedándonos | |
| *(3.10)* | 2x+4y=10 Todo va bien hasta aquí | La obtención de la ecuación es congruente con la regla: multiplicar alguna de las ecuaciones por algún número… |
| *(3.11)* | **Después** de este paso **ya puedes** realizar la operación | “Después ya puedes” quizá indica el seguimiento de reglas. |
| *(3.12)* | 2x+4y=10<br>-2x-4y=-7<br>40+0=3 | |
| *(3.13)* | Obtenido el valor sustituimos en una de las 2 ecuaciones | Pasa por alto la afirmación que hizo en (3.3) al interpretar4(0)+0=3 como x=3. |
| *(3.14)* | 2(3)+4y=7 | No se percata de su |
| *(3.15)* | realizamos la operación y posterior | |

| | | |
|---|---|---|
| | separamos términos y despejamos "y" | error al interpretar 4(0)+0=3 como x=3 y continúa con los siguientes pasos de su procedimiento. |
| *(3.16)* | 6+4y=7<br>4y=7-6<br>4y=1<br>Y=1/4<br>Y=0.25 | |
| *(3.17)* | Comprobamos<br>Primera ecuación<br>X+2y=5<br>3+2(0.25)=5<br>3+0.50=3.50<br>Y no obtengo el 5<br>Segunda ecuación<br>2x-4y=7<br>2(3)-4(0.25)=7<br>6-1=5 | Utiliza un sistema de ecuaciones distinto al original para comprobar que se obtienen desigualdades al sustituir los valores obtenidos. |
| *(3.18)* | Tampoco obtengo el 7 que se me pide | |
| *(3.19)* | Por lo tanto solo afecte a 4y **para no afectar toda la ecuación y mucho menos mi resultado.** | Pasa por alto las reglas que enuncia en (3.1) y (3.7)con tal de mantenerse fiel a (3.2) |
| *(3.20)* | talvez no lo vez correcto pero **para mi si por que el objetivo es encontrar el valor correcto** | Insiste en mantenerse fiel a la caracterización del sistema de ecuaciones que explicitó en (3.2). |
| *(3.21)* | Jejejej me equivoque en el signo | |
| *(3.22)* | Comprobamos<br>Primera ecuación<br>X+2y=5<br>4.25+2(0.375)=5<br>4.25-0.75=5 error de dedo jeje pero es | Sustituye su resultado sólo en la primera ecuación del sistema original. Pasa por alto el hecho de que al |

| | | |
|---|---|---|
| | así 4.25+0.75=5<br>5=5 cuando subí la información que me corregiste. | sustituir sus resultados en la otra ecuación del sistema original debe cumplirse la igualdad. |

En primera instancia nos percatamos de que Mariana conocía las reglas del álgebra: se afecta a toda la ecuación (3.1) o si se afecta a toda la ecuación me quedaría en 3 y ya no tendría una incógnita para despejar (3.3). Reglas que pasó por alto con tal de ser fiel sus compromisos ontológicos (e.g. el propósito de el sistema de ecuaciones es que se logre el resultado mediante la eliminación de alguna de las incógnitas (3.2) o el objetivo es encontrar el valor correcto (3.20)). Incluso explicitó las consecuencias que se derivarían si abandonara esos compromisos (e.g. no llegar al resultado (3.4)). Adicionalmente, al aplicar el instrumento para detectar posibles estados internos de una persona que participó en un foro virtual fue posible sugerir de manera sustentada que Mariana experimentó certeza como se muestra en el apartado "Análisis de resultados" del artículo "Certezas matemáticas en la historia y en la educación a distancia". Todo lo anterior permitió concluir que Mariana soportó su certeza en compromisos ontológicos. Compromisos de los que quizá Mariana no podía dudar porque soportaba en ellos su idea de las matemáticas.

*Una nueva pregunta de investigación*

Por otro lado, mientras yo leía a Kline (2009) y a Lobachevski (1974) en mis cursos de maestría, me percaté de que los matemáticos a lo largo de la historia soportaban su certeza en una idea establecida de los objetos matemáticos que a veces los llevaba a resultados incorrectos. Esto me condujo a una nueva pregunta de investigación:¿Qué casos se podrían encontrar en la historia de las matemáticas que derivaran en resultados matemáticos erróneos como consecuencia de sostener una idea de lo que son los objetos matemáticos?

## 3.-UNA NUEVA REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA. COMPROMISOS ONTOLÓGICOS EN LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

Realicé una revisión bibliográfica que me permitió concluir que en la historia de las matemáticas se podían encontrar casos en los que los compromisos ontológicos habían derivado en resultados erróneos. Tymoczko (1986) explicita esos compromisos en los que los matemáticos basaron su certeza en distintos periodos de la historia (ver Tabla 2). Lobachevski (1974) por su parte también dio cuenta de los compromisos ontológicos a los que desde su punto de vista algunos matemáticos habían sido fieles y que los llevó eventualmente a razonamientos incorrectos. Por ejemplo, expuso, criticó y demostró que algunas de las demostraciones del postulado de Euclides hechas por Legendre estaban equivocadas. Concluyó que, probablemente los prejuicios, a favor de la posición aceptada por todos en ese momento, indujeron a Legendre a precipitar sus conclusiones o añadir lo que aún no era lícito de admitir en las nuevas hipótesis. Kline (2009) comenta que durante 2000 años el mundo intelectual en su totalidad aceptó la doctrina griega de que los axiomas de la geometría euclidiana y de las matemáticas en general eran verdades sobre el mundo físico, verdades tan claras y evidentes que nadie en su sano juicio se pondría a discutir. El cuerpo entero de la geometría euclidiana constituía una colección de verdades incontrovertibles sobre objetos idealizados y fenómenos del mundo físico. Atado a este compromiso ontológico Saccheri, continúa el autor, al extraer la conclusión de que la afirmación de Euclides sobre las paralelas era consecuencia necesaria de los otros nueve axiomas, sólo consiguió mostrar que cuando un hombre se pone a establecer algo de lo que ya está convencido, se satisfará aunque su demostración no tenga que ver nada con los hechos.

Tabla 2 Compromisos ontológicos en la historia de las matemáticas

| | *Geometría Euclidiana* | *Logicismo* | *Formalismo* |
|---|---|---|---|
| *Compromisos ontológicos* | Las propiedades del universo son exactas, eternas, y se pueden conocer con certeza por la mente humana. | La lógica de la teoría de conjuntos podría servir como base para todas las matemáticas. | -Se considera a las pruebas matemáticas como secuencias de símbolos formales, reordenados y transformados de acuerdo a ciertas reglas que corresponden a las reglas del razonamiento matemático.<br>-Los axiomas de la teoría de conjuntos nunca llevaría a una contradicción.<br>- El significado de los símbolos se convierte en algo extra-matemático. |
| *Referencias a la certeza en los compromisos ontológicos.* | -La geometría había servido, desde la época de Platón, como el ejemplo supremo de la posibilidad de certeza en el conocimiento humano. | -La seguridad es más probable que se encuentre en las matemáticas que en otras partes. | -A las matemáticas se les daría una base-en el sentido de una garantía de consistencia seguro-.<br>-El objetivo es establecer de una vez por todas la certeza de los métodos matemáticos. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Causas de la pérdida de certeza en compromisos ontológicos.* | -El surgimiento de las nuevas geometrías.<br>-La pérdida de la certeza en la geometría era filosóficamente intolerable, ya que implicaba la pérdida de toda certeza en el conocimiento humano. | -Se descubrió que muchas demostraciones matemáticas estaban llenas de falacias.<br>-Si la seguridad fuera realmente visible en matemáticas, sería en un nuevo campo de las matemáticas, con bases más sólidas. | -Los teoremas de incompletitud de Gödel demostraron que cualquier sistema formal sería incapaz de probar su propia consistencia. |

En el artículo que nos ocupa se profundizó en el caso de la geometría euclidiana para mostrar la generalización del fenómeno: así como en la investigación empírica se encontró un caso (Mariana) que siendo fiel a sus compromisos ontológicos pasó por alto reglas del álgebra, en la historia de las matemáticas se encontró un caso (Saccheri) que al ser fiel al punto de visto aceptado por todos admitió lo que aun no era lícito de admitir. La versión en español del artículo se pone a continuación a disposición del lector.

## 4.-VERSIÓN PUBLICADA DEL ARTÍCULO

En lo que sigue se muestra la versión en inglés del artículo "Certezas matemáticas en la historia y en la Educación a Distancia". Una versión en español puede encontrase en el Anexo 1.

# MATHEMATICAL CERTAINTIES IN HISTORY AND DISTANCE EDUCATION

Benjamín Martínez Navarro Mirela Rigo Lemini

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav), Mexico

*An historical case is presented in which extra-mathematical certainties lead to invalid mathematics reasonings, and this is compared to a similar case that arose in the area of virtual education. A theoretical-methodological instrument is proposed for analysis of certainties. The article suggests the need for teachers to be aware that certainties of mathematics facts are not always based on mathematics understandings.*

## BACKGROUND AND OBJECTIVES OF THE PAPER

In Euclid's *Elements*, the author supported his theory of the parallels in the Fifth Postulate; there he established that two lines that are not equally inclined in relation to a third line will always have to intersect. Said proposal engages a behavior in the infinite (Kline & Helier, 2012), hence throughout history mathematicians resorted to different means to convince themselves of their truth –states Lovachevski (1974, pg. 2). Saccheri, for instance, decided to establish that truth by resorting to a double reduction to the absurd: denying the existence (no parallel to *l* crosses *P*), and denying unicity (more than one line crosses *P*). Denial of the existence produced a contradiction. From the second possibility, Saccheri deduced theorems that, albeit contradiction-free, seemed odd to him. This was sufficient for him to reject the second possibility, from which he derived the veracity of the Fifth Postulate as the sole possible option. According to Kline & Helier (2012, pg. 508), "when Saccheri concluded that the Fifth Postulate was the necessary consequence of the others, he was only able to show that when a person intends to establish something of which s/he is already convinced, s/he will be satisfied even if his/her demonstration has nothing to do with the facts."

Another attempt to demonstrate the parallels postulate arises in Legendre. In 1800, he published, according to descriptions by Lovachevski, that the sum of the angles of a triangle cannot be greater than 180°. He moreover argued that said sum could not be less than 180°. From his analysis, Lobachevski deducted that Legendre's reasons were incorrect and that "the biases in favor of the position accepted by all had probably induced him at each step to precipitate his conclusions or add what was still not legitimate to admit in the new hypothesis” (1974, pg. 3).

In a critical reading of history, Lovachevski questioned the absence of logical rigor of the demonstrations of the Fifth Postulate; he objected to the ontology and idealistic epistemology that was the foundation of those attempts, by suggesting that “the concepts themselves did not encompass the truth that he wanted to demonstrate” (1974, pg.1) and by raising an empirical route as the alternative proof, by way of astronomical observations. With an open spirit, he built hyperbolic geometry, admitting with it “the existence of Geometry in a broader sense than what Euclid has presented” (1974, pg. 1).

This passage through history illustrates how biases –taken on by Saccheri or Legendre- can disturb mathematics reasoning, and how certainty and convincement of mathematics facts can be strongly tied to extra-mathematical sources, such as ontological or epistemological commitments. The subsequent text contains arguments based on empirical evidence derived from a case study (Mariana), that that historical phenomenon associated with convincement and certainty also arises in mathematics instruction processes. The regularity of that phenomenon in such dissimilar arenas suggests, in one way or another, its generality, and raises the need for teachers to have knowledge of it and consider it in their didactic practices.

Research on certainty and convincement has been directed toward the professional arena of mathematics, such as that of the teaching of the subject. For the mathematician, convincement and certainty are drivers that boost its activity in the stages of heuristic development, and a guide for certifying its findings during proof processes (Tymoczko, 1986). The mathematics education community has carried out different studies that implicitly use the point of departure that, like what happens with mathematics, certainty is also important in building mathematics knowledge in the classroom. Some of those works have been recreated in extra-class environments and have focused either on the students (e.g., in Balacheff, 2000) or on the teachers (e.g., in Harel & Sowder, 2007); others, developed in classroom environments with intervention, have basically focused on the students (e.g., in Krummheuer, 1995). Unlike any of the foregoing, in this work the point of departure is an historical phenomenon associated with the building of certainties so as to take it as an epistemological laboratory that enables explaining the presence of the very phenomenon in current training environments using a virtual forum. This raises the challenge of having theoretical elements and analytical instruments that make it possible to distinguish states of certainty (with respect to the statements of mathematics contents that arise there) experienced by the students enrolled and that they express in writing. Below, the authors of this paper propose the instrument of analysis that has been developed for that purpose.

## PROPOSAL OF AN INSTRUMENT TO DISTINGUISH EPISTEMIC STATES OF CERTAINTY AND OF PRESUMPTION OR DOUBT

This research deems that, associated with their assertions of mathematics content, subjects can experience internal states of certainty (when they associate the highest degree of probability to what they believe in) or of presumption (when they associate lower degrees of probability to what they believe in). Such states are known as "epistemic states" in Rigo (2013).

In the design of the theoretical-methodological instrument proposed below, there is a convergence of perspectives from different disciplines, namely: from philosophy (Wittgenstein), psychology (Bloom, Hastings & Madaus) and sociology (Abelson). Of particular relevance to this study was the contribution of linguistics works, such as those of Hyland (1998), which made it possible to resort to analysis of the meta-discourse of the participants in the virtual forum so as to reveal the communicative intentions (many of which are unconscious) that they project through their writings.

The authors of this research consider that a person (who takes part in a virtual forum) experiences a degree of certainty, or of presumption or doubt, in a mathematics statement when one or more of the criteria that appear in Table 1 are met. Said criteria are sufficient, albeit not necessary.

| | |
|---|---|
| *Elements of speech* | The person resorts to language emphasizers that can reveal a greater degree of commitment to the truth of what he is saying; for instance, when the person uses the indicative mode of verbs (e.g., I have). |
| *Action* | The subject carries out actions that are consistent with his discourse. |
| *Familiarity* | The person resorts to forms of sustentation based on familiarity (result of repetition, memorization and customs). |
| *Cognitive formulation* | The person resorts to forms of justification based on mathematics reasons. |
| *Determination* | The person spontaneously and determinedly expresses his adherence to the veracity of a mathematics statement, indicating some degree of determination. That degree may be higher when the subject maintains a belief, in spite of having the collective against him. He may even make efforts to convince others of the truth of his position. |
| *Interest* | The participations of a person who shows interest concerning a |

| | |
|---|---|
| | specific mathematics fact in a virtual forum are: |
| | -*Systematic*. That is to say, the subject answers all questions addressed to him in the most detailed manner possible. |
| | -*Informative*. His assertions, procedures and/or results are sufficiently informative. |
| | -*Clear and precise*. |
| *Consistency* | The person's varying interventions show consistency. |

Table 1. Theoretical-methodological instrument for distinguishing states of certainty.

## METHODOLOGICAL ASPECTS

The qualitative research reported here focuses on an interpretative-type case study (Denzin & Lincoln, 1994). The empirical study was carried out in the Diploma Program on Fundamental Themes of Algebra, the purpose of which was to strengthen the training of people who provide advice on algebra topics to adults in the process of obtaining their secondary school certificates. The teaching activities are carried out remotely by using the Moodle platform, through which the students receive support, are assessed and given feedback by a tutor. The episode analyzed here pertains to Module IV. It was selected due to the fact that the advisors tended to use sustentation in their responses. The episodes begin with the tutor asking the students to complete a task and they end with the agreement of the students on the solution to the task. For this report, the participations of three students were chosen given that those students appear to have experienced very different epistemic states when faced with the task proposed, despite the fact that none of the three answered the task correctly.

## EPISODE: "THE MILLION DOLLAR PROBLEM"

The episode dealt with resolution of the following problem: You will get one million dollars if you can find a two digit number that simultaneously meets the following conditions: a) If you add to the first digit of the number we seek, a figure that is twice the second figure, the result is 5; b) If you add four times the second figure to double the first digit of the number we seek, the result is 7. The students were expected to conclude that no number could meet the problem's conditions, and that they would see that this was the case when they charted the equations in a graph that would produce two parallel lines.

### 1st Fragment. Mariana's first intervention. Presence of certainties

Mariana started with the following participation:

1.1 $x+2y=5$; $2x+4y=7$

1.2-1.6 ... Since the equations do not contain an equal unknown, the substitution method is applied … to eliminate one unknown, which leaves us with 2x+4y=10. After that step, you can do the operation.

1.7 2x+4y=10
<u>2x-4y=7</u>
4x+0=17

1.8-1.9. We separate the terms and solve for “x”. [So]... x=4.25

1.10-1.11 Obtaining the value, we substitute in one of the 2 equations: 2(4.25)+4y=7

1.12-1.13 We do the operation, separate the terms and solve for “y”. 8.5+4y=7; 4y=7-8.5; 4y=1.5; y=0.375

1.14-1.15 We prove. First equation: 4.25+2(0.375)=5; 5=5. Second equation: 2x-4y=7; 2(4.25)-4(0.375)=7; 8.5-1.5=7; 7=7

During her resolution, Mariana used different equation systems. The first came from the translation from common to algebraic language (1.1); then she obtained an equivalent equation (at 1.5), and after that, at 1.7, she obtained a modified equation, by changing a sign (of the term 4y from the second equation). To obtain the value of x, she used the first equation at 1.7, and to obtain the value of y, she began with the second equation in 1.1 and ended with the second equation in 1.7. To prove the operation, she used the first equation from 1.1 and the second from 1.7.

In her resolution, Mariana liberally applied the rules of algebra, by capriciously changing the signs of the terms of the equations and by indistinctly using the equations that appear in those systems and combining them in an *ad hoc* manner, as they suited her purposes. It would seem that this responded to a specific objective, namely: to obtain values for literals *x* and *y*, an objective that may possibly have been derived from an interpretation of the literal only as an unknown, excluding the variable’s other uses.

During this process, it would seem that Mariana experienced high degrees of presumption and even of certainty. Amongst other reasons, this is because of her *determination* to be the first to submit her answers and procedures to the judgment of the group; her use of *emphasizers*, specifically due to the indicative mode of the verbs (at 1.2 or 1.14); because her *actions* were the result of the procedures that she was announcing, for example when she announced that the substitution method was to be applied (1.2), all of her subsequent actions were aimed at trying to apply rules that she believed belonged to that method; because she sustained her assertions in *schemes* based on *familiarity* (such as the addition and subtraction method), at 1.7, or what she called the ‘substitution method’, at 1.2. She also demonstrated her certainty by showing *interest* in resolving the problem, by explaining her solution in a detailed manner, answering all of the questions in the problem, resolving the system raised without the tutor requesting it, and by presenting her resolution clearly.

### 2nd Fragment. José's questioning

José expressed the following to refute Mariana's answer:

| | |
|---|---|
| 2.1-2.2 | Hello Mariana. You really surprised me. But you've [missed] a small detail. |
| 2.9-2.11 | 2x-4y=7. In that step, you changed the sign (it should be ***+4***y or multiply by -1, but the entire equation), that's no longer the original equation. What do you think? |

José realized that Mariana had not correctly applied the rules of algebra (changing the sign in the system at 1.7), and that that had consequences ("that's no longer the original equation", 2.9), and he informed her of it, waiting for her reaction.

### 3rd Fragment. Mariana's reply. Explicitation of reasons and ontological commitments, and strengthening certainty.

Below is Mariana's reply

| | |
|---|---|
| 3.1-3.4 | You are indeed completely right [José], the entire equation is affected. But the purpose of the system of equations is to arrive at the result by eliminating one of the unknowns. If I affect my entire equation, I would be left with 3 and I would not have an unknown to solve. |
| 3.5-3.10 | x+2y=5; 2x+4y=7. In this case, since the equations do not have one same unknown, the substitution method is applied where one of the two equations is multiplied by a number that serves to eliminate one unknown. 2(x+2y)=2(5), leaving us with 2x+4y=10. All is well so far. |
| 3.11-3.12 | After that step, you can do the operation<br>2x+4y=10<br><u>-2x-4y=-7</u><br>40+0=3 |
| 3.13-3.16 | Once the value has been obtained, we substitute in one of the two equations: 2(3)+4y=7. We do the operation, and solve for "y"... y=0.25. |
| 3.17-3.18 | We prove it. First equation: x+2y=5; 3+2(0.25)=5 and I don't get 5.<br>Second equation: 2x-4y=7; 2(3)-4(0.25)=7; 6-1=5; nor do I get the 7. |
| 3.19-3.20 | So I only affect 4y, in order to not affect the whole equation, and much less my result. You may not see it as correct, but it is [correct] for me because the objective is to find the correct value. |
| 3.22 | Let's prove it. First equation: x+2y=5; 4.25+2(0.375)=5; 5=5. |

At the beginning of the fragment (from 3.1 to 3.4), Mariana told José that he was right. Yet she subordinated those reasons to what she thought should be obtained from a system of equations: "to arrive at the result". This was probably because she believed that absurdities would be derived from her classmate's answer (such as "I would not have an unknown to solve" and "I would be left with 3", possibly referring to 3.12). At a second point (from 3.4 to 3.18), she followed José's suggestion, perhaps with the idea of 'mathematically showing him his error' by letting a contradiction arise from his suggestion: "I don't get 5" and "nor do I get the 7", without realizing that the mistake did not come from the resolution, but from the arbitrary nature of her manipulation of algebraic language (e.g., by assuming at 3.12-3.13 that x=3 or using the system of equations that best suited her ends). At the third point (3.19-3.20), she once again sustained the advisability of her method, once again subjecting it to the obtainment of her objectives: "to find the correct value" (3.20), and at the fourth (3.22) she proved its validity without realizing that she needed to substitute the values in the two equations at 1.1 and not just in the equation that best suited her interests.

In Mariana's second intervention, she very likely strengthened her epistemic states of certainty by being able to make her objectives and arguments explicit, and 'demonstrating' her classmate's error and the validity of her principles and her method, all of which she did with *determination* and *with a consistent attitude*. Her certainty can also be inferred from the use of emphasizers (not just due to the assertiveness of her language, but also due to the use of the indicating mode in "I [don't] get", at 3.18, "it is" at 3.2 or "much less" at 3.19). Her *interest* can moreover be seen in her reiteration of her resolution, clarification of her points of view, and public refute of her classmate despite her understanding that he was right, to a certain extent.

### 4th Fragment. Jeimy's participation. Doubt

| | |
|---|---|
| 4.2-4.4 | I think I have a problem too. I'm trying to do the second exercise and cannot find the value for x or for y. My equations are: x+2y=5; 2x+4y=7 |
| 4.5 | Then I change the sign in the first equation. |
| 4.6-4.8 | -x-2y=-5<br>2x+4y=7<br>x+2y=2; x=2-2y. Substituting in the first equation (2-2y)+2y=5 [so] 2=5 |
| 4.9 | And I don't get any value ??????????????? What's going on? Help! ... |

By rigorously applying the rules of algebra, Jeimy arrived at an absurdity that made her doubt her work. Without presupposing anything, she simply detected it and asked for help.

## MAJOR FINDINGS

The case of Mariana is interesting. Although she shows her knowledge of some of the rules of algebra (see 3.5 to 3.12), her ontological commitments concerning the characteristics that must be possessed by mathematics tasks and, particularly by systems of equations –of having an unknown to solve and a precise and numerical solution that can be found- they appear to represent an obstacle that prevent her from fully applying those rules.

Mariana, like Saccheri or Legendre, was faithful to her ontological principles (or biases) and, just like them, those commitments and certainties lead her to "admit demonstrations that had nothing to do with the facts" and "they lead her to precipitate her conclusions or add things that were not legitimate" (see pg. 1 of this text).

Jeimy, like Mariana, faced a problem that jeopardized her beliefs (of the existence of a numerical and sole solution to all mathematical tasks) and her algebraic knowledge. But while Marianna obstinately held on, with not a trace of doubt, to an ideal of the mathematics object, subjecting the rules of algebra to those ontological commitments, Jeimy preferred to maintain her logical rigor –like Lovachevski did, taking due distance- by scrupulously following the rules of algebra. Unlike Mariana, Jeimy allowed herself to doubt the results obtained –like Lovachevski did-, recognize her lack of knowledge and ask for help –a metacognitive openness that placed her in a position to learn.

An important didactic consideration stems from the analysis presented. And it has to do with the help that can be given to Mariana. José's participation reveals that it was not enough to demonstrate her algebraic errors because in one way or another she was already aware of them. What Mariana appears not to have realized, and perhaps she would need some help with this, is that her beliefs and ontological commitments (that she probably took as unquestionable and unmovable truths) lead her to lose logical rigor in application of algebraic rules and, in the final instance, represented an obstacle to moving forward in her learnings.

This texts show that certainty of mathematics facts can have deep roots in extra-mathematical considerations, such as ontological commitments, and that certainty is not always or necessarily tied to mathematical comprehension. Given the information presented here, it is important that teachers and their professors become aware of the phenomenon because it has significant consequences in the learnings of students.

## References

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas (Proof processes among mathematics students*). Bogotá: Universidad de los Andes.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (1994). Introduction. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1-18). California: Sage.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspective on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Charlotte, NC: NCTM.

Hyland, K. (1998). Persuasion and context: The pragmatics of academic metadiscourse. *Journal of Pragmatics*, *30*, 437-455.

Kline, M. & Helier, R. (2012). *Matemáticas para los estudiantes de humanidades*. México: Fondo de Cultura Económica.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-270). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lombardo-Radice, L. (1974). Lobacevskij, matemático-filosofo. In N. I. Lobacevskij. *Nuovi Princípi della Geometria, con una teoria completa delle parallele* (pp. 13-54). Universale Scientifica Boringhieri (Trad. S. Ursini, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México).

Rigo, M. (2013). Epistemic schemes and epistemic states. A study of mathematics convincement in elementary school classes. *Educational Studies in Mathematics, 84*(1), 71-91.

Tymoczko, T. (1986). The four-color problem and its philosophical significance. In T. Tymoczko (Ed.), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp. 243-266). Boston: Birkhäuser.

5.-EL CASO DE JEYMI

Con el propósito de sugerir posibles patrones de certeza en Jeymi en lo que sigue se muestra la resolución completa de la estudiante al problema del millón de dólares y el análisis de los investigadores:

(4.2) creo que yo tambien me encuentro en un problema jeje

(4.3) estoy intentando hacer el segundo ejercicio y no obtengo valor de "x" ni de "y"

(4.4) mis ecuaciones son:
x+2y=5
2x+4y=7

(4.5) enseguida le cambio de signo a la primera ecuacion

(4.6) -x-2y=-5
2x+4y=7
________
x+2y=2
x=2-2y

(4.7) ahora sustituye en la primera ecuacion el valor de x hasta ahorita

(4.8) (2-2y)+2y=5

2=5

(4.9) y no tengo ningun valor ???????????????q pasa auxilio jeje

Para comenzar a resolver el problema Jeymi planteó el sistema de ecuaciones correctamente en (4.4) (x+2y=5, 2x+4y=7).Para resolver el sistema, ella trató de aplicar el "método de eliminación" al "cambiar el signo" a todos los términos de la ecuación x+2y=5 en (4.6) y al operar obtuvo el valor de la literal x en función de y (x=2-2y). En (4.8) sustituyó su valor (2-2y) en la ecuación x+2y=5 quizá esperando obtener el valor de la literal y. Sin embargo, tuvo dificultades para interpretar la desigualdad que obtuvo (2=5).Jeymi explicitó esta dificultad en (4.3) "no obtengo el valor de x ni de y" y en (4.9) "no obtengo ningún valor…".

Cuando los investigadores analizaron los estados internos de Jeymi se concluyó que experimentó presunción. Ella explicitó ese estado en (4.2) "…me encuentro en un problema" y en (4.9) "…que pasa auxilio", adicionalmente utilizó los mitigadores "?????" y "jeje" en (4.9).A lo largo de su intervención ella activó esquemas epistémicos basados en la familiaridad al enunciar reglas para tratar de resolver el sistema como en (4.5) "enseguida le cambio de signo a la primera ecuación" y en (4.7) "ahora sustituyo en la primera ecuación el valor de x". Su ausencia de razones matemáticas las dejo ver, en parte, al no explicitar la interpretación de esas reglas (por ejemplo, interpretar la regla "le cambio el signo a la primera ecuación" como la obtención de una ecuación equivalente) y en general, de los objetos que usa (por ejemplo, no abundó sobre el significado de las literales).

El comportamiento de Jeymi que se identificó en el episodio del problema del salón de clases parece que se mantuvo al tratar de resolver el problema del millón de dólares: sus estados de presunción parecen estar asociados a razones operatorias y esquemas basados en la familiaridad, pero sobre todo a la ausencia de razones conceptuales.

6.- REVISIÓN POR PARES

En lo que sigue se muestra el resultado de las revisiones que los árbitros del PME hicieron llegar a los autores.

*Revisión 1*

**Review 1**

**Evaluation of thecontribution**

| Rationale&researchquestion | Theoreticalframework&literature | Methodology | Results | Clarity | Relevance | *Total points (out of 4)* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **3** (20%) | **3** (20%) | **3** (20%) | **3** (20%) | **3** (10%) | **4** (10%) | **3.1** |

**Reviewer'scommentsonthecontribution**

***Rationale & research question:*** **3 - Meets the standard**
This is an interesting paper on the development of a theoretical/methodological instrument to analyse certainties in mathematical reasonings. The use of the instrument has been well illustrated with an empirical example of an online conversation between student teachers. My only criticism is that the authors need to justify better why their study is different to those in, for example, mathematical proof - that is, what is the role of historical episodes in building their instrument (see more below).

***Theoretical framework & literature:*** **3 - Meets the standard**
The authors might want to look at the work of Inglis, Weber and/or Mejia-Ramos on argumentation, conviction, etc. in mathematics and the implications of their results on theories of epistemic cognition.
I acknowledge the author's argument that they depart from an historical phenomenon to elaborate their instrument but I can't see why this is different from other studies in the area - perhaps this point should be made clearer in the presentation.

***Methodology:*** **3 - Meets the standard**
The use of the instrument is clear as well as the example given, which illustrates the epistemic stages in "Mariana's" reasoning and how her pre-convictions (arosen perhaps

from a cultural-historical conception that in mathematics "you always have an answer") led her to erroneous conclusions.

***Results:*** **3 - Meets the standard**

The results are clearly presented and make reasonable claims substantiated in the case presented.

***Clarity:*** **3 - Meets the standard**

The paper is in general very clear - the main points are well conveyed.

***Relevance:*** **4 - Excellent standard**

The paper is interesting and important for teacher education, so it will be of interest to the PME audience.

***Final Recommendation:*** **Accept as Research Report**

***Reasons for recommendation:***

The paper is interesting and well written, as well as important for teacher education. My only recommendation is that the connection between the instrument and the historical view of mathematics should be made clearer in the presentation - that is, the argument that this paper is making a contribution that is different from those studies in the area of mathematical proof.

*Revisión 2*

**Review 2**

**Evaluation of thecontribution**

| Rationale&researchquestion | Theoreticalframework&literature | Methodology | Results | Clarity | Relevance | *Total points (out of 4)* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **4** (20%) | **4** (20%) | **3** (20%) | **4** (20%) | **4** (10%) | **4** (10%) | **3.8** |

**Reviewer'scommentsonthecontribution**

***Rationale & research question:*** **4 - Excellent standard**

a very inspiring use of history of mathematics!

***Theoretical framework & literature:*** **4 - Excellent standard**

Clearly articulated in the limited place of 8 pages

***Methodology:*** **3 - Meets the standard**

examples for Table 1 would increase the clarity of the employed methods

***Results:*** **4 - Excellent standard**

an open-eye way of analyzing the episode

***Clarity:*** **4 - Excellent standard**

good English, coherent structure of paper

***Relevance:*** **4 - Excellent standard**

by combining math history with distance education you provided a uniqe contribution.

***Final Recommendation:*** **Accept as Research Report**

***Reasons for recommendation:***

while showing table 1, provide examples

En la revisión 1 el árbitro mostró su inquietud por conocer la forma en que fue utilizado el caso histórico para construir el instrumento teórico metodológico. El apartado histórico pretendía ilustrar un caso en el que compromisos ontológicos derivaron en resultados erróneos como se mostró anteriormente. Se eligió el caso de la geometría euclidiana porque permitía mostrar la generalidad del fenómeno. El instrumento teórico metodológico se derivó de la triangulación entre las categorías del intérprete, las categorías del estudiante y las categorías de los autores como se indica en el capítulo anterior.

Por otro lado árbitro de la revisión 1 sugirió a los autores la revisión de Tall& Mejía-Ramos (2009). Estos autores centran su atención en la prueba y distinguen entre distintos mundos que corresponden a diferentes órdenes de verdad: en el mundo encarnado, el individuo comienza con experimentos físicos a encontrar cómo las cosas encajan entre sí, por ejemplo, cuadrados encajan entre sí para formar una patrón que cubre una mesa plana, de forma que las cuatro esquinas hacen una vuelta completa. En el mundo simbólico, continúan los autores, los argumentos comienzan con cálculos de números específicos y se convierten en la prueba de identidades algebraicas por la manipulación simbólica .En el mundo formal, la forma deseada de la prueba es por deducción formal, tales como el teorema de valor intermedio demostró usando el axioma de completitud. Estas diferentes líneas de desarrollo podría formar parte de las razones matemáticas que distingue Rigo (2013[b]). A diferencia de Tall & Mejía-Ramos, Rigo (2013[b]) distingue entre sustentos matemáticos y extra-matemáticos y propone una taxonomía de esos sustentos. Adicionalmente, Tall& Mejía-Ramos también reconocen que en la construcción de una prueba, los argumentos pueden usarse en diversos momentos con diferentes niveles de confianza. A diferencia de estos autores, Rigo (2013[b]) afirma que la persona experimenta distintos estados asociados a sustentos tanto matemáticos como extra-matemáticos. Además de las diferencias mencionadas , en este trabajo interesa contar con un con instrumento teórico metodológico que permita sugerir los estados internos que experimentó un persona que participó en un foro virtual para analizar las distintas relaciones entre esos estados internos y niveles de comprensión y las posibles consecuencias didácticas que de esas relaciones. Queda pendiente una revisión bibliográfica más profunda de los autores.

# CAPÍTULO 4

## RECONSTRUCCIÓN ETNOGRÁFICA DEL ARTÍCULO ¿CERTEZA IMPLICA COMPRENSIÓN?

1.-EL REGISTRO

En el artículo "Criterios de certeza en el contexto de un foro virtual" se mostró el caso de una estudiante-asesora que acompañaba su certeza en los hechos de las matemáticas con su comprensión conceptual. En el artículo "Certezas matemáticas en la historia y en la educación a distancia" se mostró un caso que sustentaba su certeza en compromisos ontológicos. En el artículo que nos ocupa se aportan evidencias de que la certeza, o estados altos de presunción, pueden también ir de la mano de la comprensión procedimental, o que incluso pueden ir asociados a la casi total ausencia de comprensión conceptual. Para este artículo se tomaron participaciones de la segunda semana del Módulo 4. A continuación se muestran tal y como quedaron registradas en la plataforma.

Imagen 1 Primera intervención del tutor

**Re: Las matemáticas son divertidas**
de Benjamín Martínez Navarro - domingo, 2 de septiembre de 2012, 23:32

ACTIVIDAD 4

Compañeros! En la actividad 3 hemos visto que podemos guiar a nuestros educandos con preguntas útiles para plantear la ecuación que resuelve el problema.

¿Cómo guiarían a sus educandos para plantear la ecuación que resuelve los siguientes problemas?

1.-Un padre tiene 35 años y su hijo 5. ¿Al cabo de cuántos años será la edad del padre tres veces mayor que la edad del hijo?

2.-En una reunión hay doble número de mujeres que de hombres y triple número de niños que de hombres y mujeres juntos. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay si la reunión la componen 96 personas?

El primer compañero en ingresar puede compartirnos una estrategia para guiar a nuestros educandos en el planteamiento de la ecuación que resuelva el primer problema. El siguiente puede compartirnos una estrategia para plantear la ecuación que resuelva el segundo problema.Los demás compañeros podemos dar una estrategia diferente y corregir o enriquecer las respuestas de nuestros demás compañeros. Ojo! sólo necesitamos plantear la ecuación. Adelante!

Imagen 2 Primera participación de Patricia y respuesta del tutor

**Re: Las matemáticas son divertidas**
de Patricia [redacted] - lunes, 3 de septiembre de 2012, 00:09

Hola compañeros
les dejo la respuesta al primer problema y la explicación a los educandos.
3(5 +X) = X +35

15 + 3X = X+35

3X - X = 35 -15

2X = 20

X = 10
colocaremos X a los años que transcurriran para que el padre cumpla el triple de edad que el hijo. ya sabemos la edad que tienen actualmente ambos asi que podemos realizar una igualdad con los datos que tenemos.

3 ( 5 + X) = X +35

Tres veces la edad del niño más X años que deben transcurrir deben ser igual a la edad del padre , a su vez sumar la edad del padre a esa misma cantidad X años debe ser la edad del hijo.
espero no confundir.

Mostrar mensaje anterior | Editar | Partir | Borrar | Responder

**Re: Las matemáticas son divertidas**
de Benjamín Martínez Navarro - lunes, 3 de septiembre de 2012, 22:04

Hola Paty, compártenos qué significado tiene cada una de las siguientes expresiones en la ecuación que propusiste para resolver el problema de acuerdo al contexto del problema:

A) 3(5+x)
B) x+35
C) 5+x

Luego compártenos ¿Por qué tuviste que multiplicar (5+x) por 3?

Un saludo!

Imagen3 Segunda intervención del tutor

**Re: Las matemáticas son divertidas**
de Benjamín Martínez Navarro - martes, 4 de septiembre de 2012, 14:27

Seguimiento

Hola compañeros

Es de llamar la atenciòn que pocos compañeros hayan resuleto el siguiente problema de la actividad 4:

1.-Un padre tiene 35 años y su hijo 5. ¿Al cabo de cuántos años será la edad del padre tres veces mayor que la edad del hijo?

Sólo Paty propuso la siguiente ecuación para resolver el problema:

3(x+5)=x+35

a) ¿Estàn de acuerdo que dicha ecuaciòn solucionarìa el problema? ¿Por què?
b) ¿Què significa x+5 en la ecuaciòn que propuso?
c)¿Què significa x+35 en la ecuaciòn que propuso?
d) ¿Por què multiplicar por 3 la expresiòn (x+5) y no la expresiòn (x+35)?
e) ¿Còmo creen que un educando intentarìa resolver el problema si se le dificulta el Àlgebra? ¿Còmo lo orientarìan hacia el planteamiento de una ecuaciòn?

2.-Para plantear la ecuación que resolviera el problema anterior se requería un esfuerzo mayor que sólo traducir del lenguaje común al lenguaje algebraico enunciado por enunciado. Cada compañero deberá plantear un problema que considere complicado de traducir del lenguaje común al lenguaje algebraico para que nuestros demás compañeros planteen la ecuación que lo resuelva.

Adelante!

Imagen 4 Segunda intervención de Patricia y preguntas del tutor

**Re: Las matemáticas son divertidas**
de Patricia - martes, 4 de septiembre de 2012, 19:03

Hola compañeros

les comparto el procedimiento espero estar bien

3(5 + 10 ) = 10 + 35

x + 35 15 + 30 = 45

15 + 3x = x + 35 45 = 45

3x - x = 35 - 15

2x = 20

x 20 /2 x = 10

Mostrar mensaje anterior | Editar | Partir | Borrar | Responder

**Re: Las matemáticas son divertidas**
de Benjamín Martínez Navarro - miércoles, 5 de septiembre de 2012, 00:20

Hola Paty

1.-Si entendí bien , estás comprobando que con tu expresión se obtienen las edades que cumplen con las condiciones del problema. ¿O primero obtuviste las edades que cumplían con las condiciones del problema y luego obtuviste la ecuación?

2.-Ahora por favor, explícanos qué significa en tu ecuación las expresiones:

A) 5+x
B) x+35

3.-Laura propuso nla siguiente ecuación para resolver el problema:
3(x-5)=x-35. ¿Estas de acuerdo con que la ecuación resuelve el problema? ¿por qué?

Un saludo!

Mostrar mensaje anterior | Editar | Partir | Borrar | Responder

Imagen 5 Tercera intervención de Patricia y primera intervención de Laura

**Re: Las matemáticas son divertidas**
de Patricia - miércoles, 5 de septiembre de 2012, 13:26

Hola Benjamin
ofresco disculpas en mi casa hubo un fallecimiento y no me fue posible responder en el tiempo que lo pediste espero compresión.

Pasando al problema primero se determina la ecuación para poder obtener la incognita.
La incognita es en cuantos años tendrá el padre el triple de la edad del hijo
la incognita es la cantidad de años que deben transcurrir para que el padre tenga el triple de la edad del hijo.
2.-Ahora por favor, explícanos qué significa en tu ecuación las expresiones:

A) 5+x esto significa que 5 años son la edad que tiene el hijo y le debemos sumar la cantidad de años que deben transcurrir.
B) x+35 esto significa que a la cantidad de años que deben transcurrir se le sumara la edad actual del padre.

Y las personas solo pueden aumentar de edad es decir sumamos edad jamas restamos años a nuestra vida.
Por lo tanto si le resto como menciona la ecuación de Laura no me dará buen resultado.
Si resto 3(10-5)=10-35
comenzando por que al restar un numero menor a un numero mayor mi resultado será negativo es decir -25

Mostrar mensaje anterior | Editar | Partir | Borrar | Responder

**Re: Las matemáticas son divertidas**
de LAURA - miércoles, 5 de septiembre de 2012, 21:33

HOLA PATI!
Tienes toda la razón del mundo, no podemos restar años a la vida humana, y después cuando Benjamín me pregunto como resolví la ecuación que yo propuse, ya no supe como la había hecho antes, total que al final termine echa bolas, hasta que leí tu comentario, y con tu aclaración ya encontré mi error, resulta que yo solo calcule cual podría ser el valor de "x" en ambos lados pero al final encontré que el numero de años que tienen que transcurrir eran 30, son muchos porque el padre tendría 90 y el hijo 30, y aunque cumple con el requisito de ser el triple de la edad del hijo el procedimiento no es correcto, y a continuación les comparto lo que yo hice:
3(x-5)=x-35, aquí calcule cual podría ser el valor de "x", nunca despeje ni lo busque en los datos que tenia, simplemente calcule y sustituí, ese fue mi gran error, ademas de usar resta en lugar de suma.

MIL GRACIAS POR LA ACLARACIÓN Y TU COMENTARIO. APRENDÍ MUCHO.

SALUDOS A TODOS DESDE EL CONTAMINADO Y SIEMPRE GRIS, DF.

2.-INTERPRETACIÓN DE LOS INVESTIGADORES

En un principio los investigadores aplicaron el Modelo 3UV para identificar los aspectos de la variable que manejaban las estudiantes en cada una de sus intervenciones.

Tabla 1 Los aspectos de la variable en la primera intervención de Patricia

| *Numeral* | Respuesta de la estudiante | Interpretación de los investigadores |
|---|---|---|
| *(1.1)* | Hola compañeros<br>les dejo la respuesta al primer problema y la explicación a los educandos. | |
| *(1.2)* | 3(5 +X) = X +35 | Planteó la ecuación (aspecto I5 de la variable como incógnita). |
| *(1.3)* | 15 + 3X = X+35<br>3X - X = 35 -15<br>2X = 20 | Manipuló la variable (aspectos G2 y G4 de la variable como número general). |
| *(1.4)* | X=10 | Obtuvo el valor de la literal (aspecto I5 de la variable como incógnita) |
| *(1.5)* | colocaremos X a los años que transcurriran para que el padre cumpla el triple de edad que el hijo. ya sabemos la edad que tienen actualmente ambos asi que podemos realizar una igualdad con los datos que tenemos. | Identificó la variable (aspecto I1 de la variable como incógnita) y le asignó la literal (aspecto I5 de la variable como incógnita). |
| *(1.6)* | 3(5+X)=X+35 | Planteó la ecuación (aspecto I5 de la |

| | | |
|---|---|---|
| | | variable como incógnita). |
| *(1.7)* | Tres veces la edad del niño más X años que deben transcurrir deben ser igual a la edad del padre, a su vez sumar la edad del padre a esa misma cantidad X años debe ser la edad del hijo. espero no confundir. | Traducción literal del lenguaje común al lenguaje algebraico. |

Cuando los investigadores analizaron esta primera intervención de Patricia se concluyó que ella había manejado todos los aspectos de la variable como incógnita a excepción de comprobar su resultado (aspecto I3). Este aspecto Patricia lo puso en juego en una intervención posterior:

Tabla 2 Los aspectos de la variable en la segunda intervención de Patricia

| *Numeral* | Respuesta de la estudiante | Interpretación de los investigadores |
|---|---|---|
| *(1.1)* | Hola compañeros<br>les comparto el procedimiento espero estar bien | |
| *(1.2)* | 3(5 + 10 ) = 10 + 35<br>x + 35 15 + 30 = 45<br>15 + 3x = x + 35 45 = 45 | En principio el tutor percibió desorganización en el procedimiento de Patricia. Después de analizarlo concluyó:<br>La expresión 3(5+10)=10+35 se obtuvo de sustituir 10 por x en la expresión 3(5+x)=x+35.<br>La expresión 15+30 =45 es el resultado de |

| | | |
|---|---|---|
| | | realizar las operaciones de la igualdad 3(5+10)=10+35.<br>La expresión 15+3x=x+35 45=45 quiere decir que al sustituir el valor de la literal en la ecuación original se obtiene una igualdad.<br>Aspecto I3 de la variable como incógnita. |
| *(1.3)* | 3x - x = 35 - 15<br>2x = 20<br>x 20 /2 x = 10 | La estudiante volvió a manipular la variable y a obtener el valor para la literal. |

En suma, se concluyó que Patricia finalmente puso en juego todos los aspectos de la variable como incógnita. Pero la falta de explicitación en los mensajes de Patricia no permitió concluir a los investigadores que ella tenía un manejo de la variable como incógnita. Esta idea se acrecentó al analizar los aspectos de la variable en una intervención posterior:

Tabla 3 Dificultades de Patricia en su tercera intervención

| *Numeral* | Respuesta de la estudiante | Interpretación del tutor |
|---|---|---|
| *(4.5)* | Y las personas solo pueden aumentar de edad es decir sumamos edad jamas restamos años a nuestra vida. | |
| *(4.6)* | Por lo tanto si le resto como menciona la ecuación de Laura no me dará buen resultado. | |

| | | |
|---|---|---|
| *(4.7)* | Si resto 3(10-5)=10-35 | Patricia sustituyó su resultado en la ecuación de Laura para mostrar que se obtiene un "mal" resultado. |
| *(4.8)* | comenzando por que al restar un numero menor a un numero mayor mi resultado será negativo es decir -25 | Patricia consideró -25 como resultado de la desigualdad 3(10-5)=10-35. |

El hecho de que Patricia sustituyera su resultado en la ecuación de Laura y que considerara -25 como resultado de una desigualdad me permitieron concluir que Patricia no tenía un total manejo de la variable como incógnita. Me parecía que en su tercera intervención la estudiante tenía dificultades con la interpretación de la comprobación (para comprobar el resultado obtenido debe sustituirse en la ecuación de la que se obtuvo) y con la interpretación de la igualdad como un equilibrio entre dos expresiones. La pregunta que surgió entonces fue ¿Estas dificultades también podían inferirse en su primera intervención?En su primera intervención Patricia obtuvo el valor de la literal usando la trasposición de términos al colocar las literales al lado de izquierdo de la igualdad y los términos independientes del lado derecho. Este procedimiento aunado a lo que se concluyó de su tercera intervención me permitió conjeturar que Patricia podría tener dificultades con la interpretación del signo igual. Adicionalmente, en su primera intervención Patricia mostró de forma desordenada la comprobación del resultado que obtuvo para el problema quizá como consecuencia de una dificultad con este aspecto de la variable.

*Nueva revisión de la bibliografía*

En suma, a los investigadores nos parecía que el identificar los aspectos de la variable en cada intervención no bastaba para decidir su nivel de comprensión. Entonces realicé una nueva revisión de la bibliografía que nos permitiera explicar el fenómeno.

En un principio tomé como referencia el "Modelo Heurístico" de la persuasión (Petty&Briñol, 2010) para rescatar elementos teóricos que me permitieran explicar el caso de estudio. El modelo heurístico coincide con el bajo nivel de elaboración del "Modelo de la probabilidad de elaboración". En ese modelo, la persuasión no se produce como resultado de un análisis del mensaje, sino como consecuencia de alguna característica superficial de éste (la longitud del mensaje, el número de argumentos, una afirmación universal extra-matemática), del emisor del mensaje (su atractivo o su experiencia) o de las reacciones de otras personas que reciben el mismo mensaje. Este modelo es aplicable a situaciones concretas (Petty & Briñol, 2010): cuando la motivación (entendida como la implicación del receptor en el asunto del mensaje o la relevancia e importancia del tema para el receptor) o la capacidad para comprender el mensaje por parte del receptor es baja o cuando los elementos externos del propio mensaje son muy llamativos (e.g. cuando el emisor es muy atractivo). Se enlistan a continuación las variables que Salcedo (2007) toma en cuenta para el fenómeno de la persuasión y se caracterizan de acuerdo al "Modelo Heurístico" y al bajo nivel de elaboración del "Modelo de la probabilidad de elaboración".

Tabla 4 Variables de la persuasión

| Variables de la persuasión | Características |
|---|---|
| Emisor del mensaje | El emisor del mensaje muestra *credibilidad*. Es decir, el emisor argumenta contra sus propios intereses o asume errores cometidos. |
| | El emisor del mensaje parece o es *atractivo*. Es decir, el emisor tiene actitudes y valores similares al receptor del mensaje persuasivo, pertenece al mismo grupo social que el receptor, tiene experiencias previas de cooperación con él y/o capacidad para recompensarlo. |
| | El emisor del mensaje muestra *poder*: Es decir, el emisor tiene la capacidad de sanción o autoridad investida por el entorno. |
| El mensaje persuasivo propiamente dicho | La *parte racional* del mensaje persuasivo tiene las siguientes características:<br>-Contiene afirmaciones extra-matemáticas comunes con las que todos muestran acuerdo.<br>-Puede contener ejemplos particulares que son más accesibles a las personas(contrario a la enunciación de teoremas). |

| | |
|---|---|
| | El mensaje tiene una *parte emocional*, en particular, *evoca miedo* procurando mostrar las consecuencias temidas y la manera de evitar esas consecuencias. Adicionalmente, la persona a quien va dirigido el mensaje persuasivo es capaz de llevar a cabo las acciones necesarias para evitar esas consecuencias. |
| El receptor del mensaje | **Diferencias individuales**<br>*Bajo autocontrol.* |
| | **Motivos**<br><br>-El receptor del mensaje experimenta *ansiedad*. Es decir manifiesta una necesidad afectiva (e.g. tener la respuesta correcta, quedar bien con el profesor, sentido de pertenencia al grupo, abandonar el estado de presunción). |
| | **Habilidades (Capacidad)**<br>-El receptor tiene una *baja probabilidad de elaboración*:<br>La persona realizará un examen menos laborioso de la información relevante o uno muy laborioso de menos información relevante (por ejemplo, examinando el primer argumento pero no los siguientes).<br>La persona pensará menos sobre la calidad de los argumentos y centrará su atención en una característica superficial de éste (e.g. el número de argumentos: si hay 5 argumentos a favor entonces debe ser cierto o la extensión del mensaje o fija su atención en un argumento extra-matemático muy llamativo).<br>-El receptor manifiesta un *"Sesgo de exploración"*: La persona pensará en todos los argumentos posibles, y al mismo tiempo tenderá a evitar pensamientos críticos o negativos hacia ese punto de vista por resultar irrelevantes para la tarea asignada.<br>-El receptor cumple con la *"Regla de la desmemoria"*: La persona preferirá más información y menos reflexión. |
| | **Discurso expresivo**<br>El receptor del mensaje prioriza un *discurso expresivo* que denota sus emociones y sentimientos. El Discurso |

| | |
|---|---|
| | Expresivo presenta los siguientes rasgos característicos:<br>- Subjetividad.<br>- Uso frecuente de la 1ª persona del singular (YO).<br>- Uso de oraciones desiderativas, exclamativas y dubitativas.<br>- Uso de vocablos que denoten sentimientos.<br>- Uso abundante de interjecciones. |
| El contexto del mensaje | -Relajado o serio.<br>-Agradable o desagradable. |

Algunos de los elementos que aparecen en la tabla parecían tener presencia en los mensajes de las estudiantes. Por ejemplo, en la tercera intervención de Patricia la proposición de que las personas solo pueden aumentar de edad y que jamás podremos restar años a nuestra vida es una *afirmación extra-matemática universalmente aceptada fuera del contexto del problema*. Sin embargo, un valor negativo de la literal podría interpretarse en el contexto del problema como un hecho ocurrido en el pasado. Adicionalmente, Laura no supuso la cantidad de años como negativa, en todo caso lo que supuso negativo fueron las edades iniciales de las personas. Otra característica es que *el mensaje evoca el miedo* hacia la obtención de un resultado negativo: Primero Patricia mencionó en (4.6) que si procedía como Laura no se obtendría un "buen resultado", en (4.7) sustituyó su resultado en la ecuación de Patricia para mostrar en (4.8) que obtendría el "temido" valor nagativo. La referencia a creencias matemáticas erróneas como el rechazo a la obtención de un resultado negativo (4.8) o que para resolver un problema primero se debe plantear la ecuación (4.1) aunado al uso de símbolos matemáticos para demostrar a Laura la obtención de un resultado negativo (aunque de forma errónea) son factores que pudieron aumentar el efecto persuasivo del mensaje.

3.-SURGIMIENTO DE UN NUEVO MARCO TEÓRICO

Nuevamente, la triangulación entre la interpretación de los investigadores, los referentes bibliográficos y las producciones de la estudiante permitieron diseñar el marco teórico que se detalla en el artículo. Por un lado se descubrieron nuevos esquemas epistémicos:

Tabla 3 Nueva triangulación entre las categorías teóricas, del intérprete y de la estudiante

| Categorías teóricas | Categorías del investigador | Categorías del estudiante |
|---|---|---|
| El emisor del mensaje parece o es | La persona activa | Tienes toda |

| | | |
|---|---|---|
| *atractivo.* | esquemas epistémicos basados en la autoridad entre pares. | la razón del mundo… |
| La *parte racional* del mensaje contiene afirmaciones extra-matemáticas comunes con las que todos muestran acuerdo. Puede contener ejemplos particulares que son más accesibles a las personas (contrario a la enunciación de teoremas). | La persona activa esquemas epistémicos basado en afirmaciones incontestables ajenas al argumento. | Y las personas solo pueden aumentar de edad es decir sumamos edad jamas restamos años a nuestra vida. |
| El mensaje tiene una *parte emocional*, en particular, *evoca miedo* procurando mostrar las consecuencias temidas y la manera de evitar esas consecuencias. | La persona activa esquemas epistémicos para evitar consecuencias inesperadas. | Por lo tanto si le resto como menciona la ecuación de Laura no me dará buen resultado. |
| El receptor del mensaje experimenta *ansiedad*. Es decir manifiesta una necesidad afectiva (e.g. tener la respuesta correcta, quedar bien con el profesor, sentido de pertenencia al grupo, abandonar el estado de presunción). | La persona activa esquemas para evitar estados de incertidumbre. | Total que al final termine echa bolas, hasta que leí tu comentario, |

Por otro lado, se encontraron algunos indicadores de la incomprensión:

Tabla 4 Indicadores de incomprensión

| Categorías teóricas | Categorías del investigador | Categorías del estudiante |
|---|---|---|
| El receptor del mensaje acude a sus motivos. | La persona activa esquemas epistémicos basados en motivos. | |
| El receptor tiene una baja probabilidad de elaboración. | Bajos niveles de elaboración. | Tienes toda la razón del mundo, no |

| | | |
|---|---|---|
| | | podemos restar años a la vida humana. |
| El receptor manifiesta un "Sesgo de exploración". | Sesgo de exploración. | Entonces el padre tendría 90 y el hijo 30 y cumple con el supuesto del problema. |
| "Regla de la desmemoria" | Dificultad para elaborar contraejemplos. | Por lo tanto si le resto como menciona la ecuación de Laura no me dará buen resultado. |
| "Regla de la desmemoria" | Dificultad para explicar su propio punto de vista. | Yo encontré que la ecuación puede ser: 3(x-5)=x-35. |

Todo lo anterior llevó al surgimiento del marco teórico que se explicita en el artículo "¿La certeza implica comprensión?".

4.-LA REPUESTA DE JEYMI

En la versión publicada del artículo no se incluyó la respuesta de Jeymi. En este trabajo se incluye para tratar de contestar la pregunta: ¿Se dan patrones entre las relaciones de certeza y la comprensión? Esta fue la respuesta de Jeymi.

(7.1) holahola ya me confundi
mejor lo explico como yo lo entendi va
Un padre tiene 35 años y su hijo 5. ¿Al cabo de cuántos años será la edad del padre tres veces mayor que la edad del hijo?

(7.2) edad del padre 35 años
edad del hijo 5 años
tiempo que pasara=x

(7.3) edad que tendra el padre 3(x+5) o bien x+35
entonces 3(x+5)=x+35

(7.4) despejamos x para saber el tiempo que pasara para que la edad del padre sea 3 veses mayor que la edad del hijo
3(x+5)=x+35
3x+15=x+35
3x-x=35-15 pasamos la x del lado der. al izq. restando y el 15 del izq. al der. restando
tenemos 3x-x=35-15
2x=20
x=20/2

(7.5) x=10 tiempo que pasara para que la edad del padre sea 3 veces mayor a la del hijo

(7.6) comprobamos
3(x+5)=x+35
3(10+5)=10+35
30+15=45
45=45

(7.7) entonces
para la edad del hijo era
x+5=10+5=15 edad del hijo
edad del padre 3(x+5)
3(10+5)=30+15=45 edad del padre

(7.8) por lo tanto al pasar 10 años el padre tendra 45 años que es el triple de 15 que en este caso es la edad del hijo.
espero estar en lo correcto y no confundirlos jeeje
saludos...

*Comprensión procedimental en Jeymi*

Para comenzar, en (7.2) Jeymi identificó la incógnita del problema (aspecto I1 de la variable como incógnita) y le asignó una literal (aspecto I5 de la variable como incógnita), en (7.3) planteó correctamente la ecuación que resolvía el problema, en (7.4) manipuló la variable para obtener su valor que interpretó correctamente en (7.5) (aspecto I4 de la variable como incógnita) y en (7.6) comprobó que su resultado era correcto (aspecto I3 de la variable como incógnita). Finalmente en (7.7) calculó la edad del padre y del hijo para comprobar que se cumplían las condiciones del problema.Lo anterior es muestra de su comprensión procedimental. La falta de explicitación de razones matemáticas diferencian esta comprensión procedimental de la comprensión conceptual.

*Altos niveles de presunción en Jeymi*

En (7.1) Jeymi explicitó su confusión al leer las respuestas de Patricia y Laura pero a diferencia de Laura, Jeymi decidió exponer su propio procedimiento y obtuvo el resultado correcto. En relación a su intervención los investigadores concluyeron que Jeymi experimentó altos niveles de presunción. Esto se derivó de la identificación en ella de distintos de los criterios que aparecen en el marco interpretativo de este documento. Se puede decir, en principio, que ella tuvo*determinación* para someter a juicio del grupo sus propios procedimientos y respuestas para el problema. Su alto nivel de presunción también se puede inferir del uso de *enfatizadores,* específicamente, del hecho de haber recurrido al modo indicativo de los verbos para presentar reglas generales (7.4 y 7.6). Otros aspectos que hablan de el alto nivel de presunción de Jeymi son que *actuó* en consecuencia con los procedimientos que anunció, por ejemplo, cuando advirtió "comprobamos" en (7.6) actuó en consecuencia; que activó *esquemas epistémicos* basados en la *familiaridad*al enunciar reglas como "despejamos" o "comprobamos" que muy probablemente eran habituales para ella al resolver problemas rutinarios en su labor como asesora y que parecían darle confianza en sus respuestas.Su alto nivel de presunción también la dejó ver al mostrar *interés* por resolver el problema, al explicar detalladamente su solución, al contestar correctamente todas las preguntas del problema, al resolver el sistema que planteó sin que el tutor se lo solicitara, al exponer su propia solución y al ser clara en su exposición. Finalmente, el mitigador "espero estar en lo correcto" en (7.8) diferencia su alto nivel de presunción del estado de certeza.En un primer reporte se mostró que Jeymi acompañaba su certeza con comprensión, en un segundo reporte se sugirió que ella dudó cuando no comprendió y en esta intervención se detectó que Jeymi asoció a su comprensión procedimental altos niveles de presunción.

## 5.-EL MODELO 3UV Y LA NECESIDAD DE DISTINGUIR ENTRE LA COMPRENSIÓN PROCEDIMENTAL Y CONCEPTUAL EN ÁLGEBRA

De acuerdo a Ursini (2005) la mayoría de los alumnos aprenden a resolver ecuaciones, pero esto no implica que no tengan problemas con la interpretación de las variables y su manipulación, sino que recurren a la memorización de los métodos. En algunas investigaciones recientes, continúa la autora, se informa que pueden formarse alumnos que en pruebas de álgebra estandarizadas obtengan muy buenos resultados, sin que necesariamente estos resultados signifiquen que los estudiantes han comprendido lo que están haciendo y por qué lo hacen. En la mayoría de los casos han memorizado lo que se les enseñó, pero sin comprenderlo. Según Ursini se espera que los estudiantes, desde los primeros acercamientos al álgebra, empiecen a:

-Diferenciar entre los distintos usos de la variable.

-Verbalizar las características de cada uso.

-Desarrollar la idea de variable como un concepto multifacético, pasando entre sus distintos usos con flexibilidad.

-Usar el lenguaje algebraico para expresarse.

Por otro lado, la autora, resalta la importancia que tiene para la adquisición de conocimientos nuevos el tipo de interacciones que se establecen en el salón de clases con el profesor y entre los alumnos. Todo lo anterior es congruente con el marco que se introdujo en el artículo ¿La certeza implica comprensión? y que se incluye a continuación.

## 6.-VERSIÓN PUBLICADA DEL ARTÍCULO

# ¿LA CERTEZA IMPLICA COMPRENSIÓN?

## Does certitude imply understanding?

Martínez Navarro Benjamín, Rigo Lemini Mirela

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados

**Resumen**

*En el documento se examinan cualitativamente algunos aspectos de las relaciones entre la certeza que experimentan agentes de clase en torno a hechos de las matemáticas, y su comprensión; los sujetos que intervienen en el estudio participan en un diplomado de enseñanza de las matemáticas en línea. Para el análisis se ha tenido que diseñar un marco interpretativo en el que se proponen diversos instrumentos de interpretación, el cual aquí se expone. En la comunicación se argumenta que la certeza no siempre implica la comprensión, lo que resulta imprescindible que el docente tome en cuenta, ya que muchas de sus decisiones de clase las basa en lo que él interpreta como muestras de certeza de sus alumnos.*

**Palabras clave**: *certeza y presunción o duda, comprensión, justificación, foro virtual*

**Abstract**

*This paper examines qualitatively some aspects of the relationship between certainty and understanding of mathematics facts by agents in the classroom. The subjects of the study were participants in an online teaching diploma course. A interpretive framework was designed for the analysis, for which various interpretive tools, described in the paper, are proposed. The paper argues that certainty does not always imply understanding; it is essential that teachers take this into account, since many of their decisions in the classroom are based on displays of what they interpret as the students' certainty.*

**Keywords**:*certitude and presumption or doubt, understanding, justification, online teaching.*

### ANTECEDENTES

La investigación cuyos resultados parciales aquí se exponen se centra en el análisis de estados internos como el convencimiento, la convicción, la certeza, la presunción o la duda en torno a hechos de las matemáticas (los que se representan a través de afirmaciones de contenido matemático) que vivencian agentes de clase, específicamente, estudiantes-asesores (i.e., asesores en formación) que participan en un foro virtual. En particular, en la investigación se analizan las relaciones entre la comprensión y esos estados internos, que aquí se les denominan 'estados epistémicos'. En un primer reporte se mostró el caso de una estudiante-asesora que acompañaba y retro-alimentaba su certeza en los hechos de las matemáticas con su comprensión conceptual. Se podría esperar que todos los alumnos presentaran relaciones epistémicas semejantes. En este documento se muestra que no siempre sucede así; se aportan evidencias de que la certeza, o estados altos de presunción, pueden también ir de la mano de la comprensión procedimental, o que incluso pueden ir asociados a la casi total ausencia de comprensión conceptual.

Investigaciones sobre los estados epistémicos se han orientado hacia el ámbito del profesional de las matemáticas como al de su instrucción. Para el matemático, el convencimiento y la certeza son motores que impulsan su actividad en las etapas de desarrollo heurístico, y una guía para certificar sus resultados durante los procesos de prueba (Tymoczko, 1986). La comunidad de educación matemática ha realizado diversos estudios que implícitamente parten del supuesto de que, a semejanza de lo que sucede con los matemáticos, la certeza también importa en la construcción del conocimiento matemático en el aula. Algunos de esos trabajos se han recreado en ambientes extra-clase y se han focalizado ya sea en los estudiantes (e.g., el de Balacheff, 2000) o bien en los profesores (e.g., el de Harel&Sowder, 2007); otros, desarrollados en ambientes intervenidos de clase, se han centralizado básicamente en alumnos (e.g., el de Krummheuer, 1995). A diferencia de esos estudios, en el presente se analizan específicamente los estados epistémicos que experimentan los participantes en un foro virtual y se examinan sus relaciones con sus niveles de comprensión.

## MARCO INTERPRETATIVO

### Los esquemas epistémicos

Los alumnos suelen sustentar sus afirmaciones o procedimientos de contenido matemático de modos diversos. Rigo (2009 &2013) ha propuesto una taxonomía de estos recursos de sustentación a los que llama “esquemas epistémicos”; ella sugiere que algunos de esos esquemas se organizan y orientan en torno a razones matemáticas, como los que poseen una estructura lógica de tipo deductivo (e.g., ejemplos genéricos o las instanciaciones, v. Balacheff, 2000), o los que surgen a partir de la acumulación de evidencia empírica (e.g., a partir del análisis de casos particulares). En otros casos -continúa Rigo(2013)-, los esquemas que una persona construye para sustentar la verdad de un enunciado matemático responden a consideraciones extra-matemáticas haciéndose a un lado el contenido disciplinar del enunciado, como por ejemplo, cuando un estudiante explica el uso de un algoritmo recurriendo a su facilidad (“es más fácil resolverlo así”), o a la autoridad del profesor (“porque me lo dijo la maestra”), en cuyo caso se está soportando la verdad de las aseveraciones en esquemas epistémicos basados en razones prácticas y en la autoridad, respectivamente. Otro tipo de esquemas basados en consideraciones extra-matemáticas son los que se basan en la familiaridad, mismos que son resultado de la repetición, la memorización y las costumbres. Los esquemas que se basan en la repetición pueden provenir de reiterar sistemáticamente algún enunciado o hecho de las matemáticas, mientras que otros esquemas pueden proceder de costumbres institucionales en torno a lo que deben ser las tareas matemáticas que deben resolver los niños en la clase, como cuando los estudiantes sustentan la validez de un algoritmo por ser habitual o por su facilidad.En lo que sigue se describen algunos esquemas epistémicos basados en consideraciones extra-matemáticas-distintos a los que ha reportado Rigo en sus trabajos- que han sido identificados en el marco de esta investigación; estos esquemas permiten explicar comportamientos de los agentes de clase relacionados con el argumento que aquí se pretende defender, y posibilitan de paso ampliar esa taxonomía.

### Definiciones de nuevos esquemas epistémicos

- *Esquema basado en la autoridad entre pares*. Se activa este esquema cuando el sujeto que escucha una afirmación matemática soporta su veracidad en la autoridad que para él tiene la persona que la enuncia, persona que comparte valores similares, pertenece al mismo grupo social o tiene experiencias previas de cooperación con el que oye. Se trata de un esquema activado por la confianza que se suele tener entre pares.

- *Esquema basado en afirmaciones incontestables ajenas al argumento*. Se moviliza este esquema cuando la verdad de un enunciado o justificación matemática se basa en una afirmación cuya veracidad resulta incuestionable pero no es de carácter matemático o aunque lo sea, su contenido no está directamente relacionado con lo que se arguye.
- *Esquema para evitar consecuencias inesperadas*. Este esquema se aplica cuando se sostiene una afirmación porque de otras opciones se desprenden consecuencias o resultados inesperados o incluso temidos (como un número negativo, el cero, un número imaginario, procesos actualmente infinitos, etc.).
- *Esquemas para evitar estados de incertidumbre*. Este esquema se pone en juego cuando los agentes de clase sostienen la verdad de una afirmación matemática con la idea de que así adquirirán certeza.

**Instrumento para distinguir estados epistémicos de certeza, presunción o duda.**

En la investigación se considera siguiendo a Villoro (2009) que, asociadas a sus aseveraciones de contenido matemático, los sujetos pueden experimentar estados internos de certeza (cuando le asocian el máximo grado de probabilidad a lo creído) o de presunción o duda (cuando le asocian grados menores de probabilidad a lo creído). A estos estados Rigo (2013) les llama "estados epistémicos", como se dijo. Para fijar ideas, en la investigación nos hemos constreñido sólo a los estados epistémicos aludidos (certeza y duda, dejando fuera el convencimiento, la convicción o la persuasión, entre muchos otros).

En el diseño del instrumento teórico-metodológico que se propone a continuación (v. Martínez &Rigo, 2013) convergieron perspectivas provenientes de distintas disciplinas: de la filosofía (Wittgenstein), la psicología (Bloom, Hastings &Madaus), la sociología (Abelson) y la educación matemática (Rigo, 2011). Particularmente relevante para el estudio resultó la aportación de trabajos lingüísticos como los de Hyland (1998), que permitieron recurrir al análisis del meta-discurso de los participantes en el foro virtual, con el fin de desvelar las intenciones comunicativas (muchas de ellas inconscientes) que ellos proyectan a través de su escritura.

En esta investigación se considera que una persona (que participa en un foro virtual) vivencia un grado de certeza, o bien de presunción o duda, en un enunciado matemático, cuando cumple con alguno(s) de los criterios que aparecen en la Tabla 1. Estos criterios son suficientes pero no necesarios.

Tabla 1. Instrumento para distinguir estados epistémicos de certeza y presunción o duda

| | |
|---|---|
| *Elementos del habla* | La persona recurre a enfatizadores del lenguaje que pueden revelar un mayor grado de compromiso con la verdad de lo que dice, por ejemplo, cuando la persona usa el modo indicativo de los verbos (e.g., tengo). |

| | |
|---|---|
| *Acción* | El sujeto realiza acciones consecuentes con su discurso. |
| *Familiaridad* | La persona recurre a esquemas epistémicos basados en la familiaridad (resultado de la repetición, la memorización y las costumbres). |
| *Determinación* | La persona manifiesta de manera espontánea y determinada su adhesión a la veracidad de un enunciado matemático indicando algún grado de determinación. Este grado puede ser mayor cuando el sujeto sostiene una creencia, a pesar de tener al colectivo en su contra. Incluso puede llegar a esforzarse por convencer a otros de la verdad de su posición. |
| *Interés* | Las participaciones de una persona que interviene con interés en torno a un hecho matemático específico en un foro virtual son: |
| | -*Sistemáticas*. Es decir, el sujeto contesta todas las preguntas dirigidas a él de la manera más detallada posible. |
| | -*Informativas*. Sus afirmaciones, procedimientos y/o resultados son suficientemente informativos. |
| | -*Claras y precisas*. |
| *Consistencia* | La persona muestra consistencia en sus distintas intervenciones. |

**Indicadores de comprensión**

En este documento y siguiendo a Schoenfeld, se establece una diferencia entre el conocimiento procedimental “basado en cómo hacer las cosas”, y el conocimiento conceptual “asentado en los racionales (*rationales*) intelectuales a través de los cuales se explica cómo las cosas funcionan juntas, y porqué así sucede” (2011, p. 26). De lo anterior y de otras consideraciones (provenientes de Rigo, 2013; Petty&Brinol, 2010, y Salcedo, 2007) se desprenden algunos indicadores de lo que en este escrito se entiende por comprensión conceptual, los que se describen en la Tabla 2.

Tabla 2. Indicadores de comprensión

| | |
|---|---|
| *Esquemas epistémicos basados en razones matemáticas* | El nivel de comprensión conceptual está relacionado con el tipo de esquema epistémico que se pone en juego: a comprensiones más profundas le corresponden esquemas epistémicos basados en razones matemáticas más generales (e.g. esquemas de tipo deductivo apoyado en axiomáticas abstractas) y a comprensiones de menor penetración le atañen esquemas de menor generalidad (como las instanciaciones o el análisis de casos particulares). Estos esquemas deben de converger o |

| | |
|---|---|
| | ser consistentes con los esquemas epistémicos de la matemática disciplinar o la matemática escolar. |
| *Refutación de argumentos* | La comprensión conceptual está relacionada con la posibilidad de refutar los argumentos o de encontrar contraejemplos. |
| *Conocimiento promedio* | La persona tiene más conocimiento que lo que posee el promedio. |
| *Facilidad* | A la persona le resulta fácil explicar sus puntos de vista. |

**Indicadores de comprensión disciplinar (en relación a la variable)**

Se utiliza el Modelo 3UV (Ursini, Escareño, Montes & Trigueros, 2005) en el que se caracterizan los tres usos de la variable. En la Tabla 3 se describen.

Tabla 3. Indicadores de comprensión disciplinar. El modelo 3UV

| | |
|---|---|
| *La variable como incógnita* | |
| *I1* | Reconocer e identificar la presencia de algo desconocido que puede ser determinado. |
| *I5* | Simbolizar las cantidades desconocidas y utilizarlas para plantear ecuaciones. |
| *I2* | Interpretar la variable que aparece en una ecuación como un valor específico. |
| *I4* | Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas. |
| *I3* | Sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero. |
| *La variable como número general* | |
| *G2* | Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor. |
| *G4* | Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica. |

**Indicadores de incomprensión conceptual** (Rigo, 2013; Petty & Brinol, 2010 y Salcedo, 2007)

Tabla 4. Indicadores de incomprensión conceptual

| | |
|---|---|
| *Activación de esquemas epistémicos basados en consideraciones extra-matemáticas* | Un indicador relevante de incomprensión lo da la ausencia de razones y la presencia contundente de esquemas extra-matemáticos. |
| *Bajos niveles de elaboración* | La persona examina el primer argumento pero no los siguientes de todos los que conforman un punto de vista del interlocutor. Ese argumento |

| | |
|---|---|
| | suele ser uno extra-matemático muy llamativo. Es una forma de adherirse a los argumentos de otro. |
| *Sesgo de exploración* | La persona fija su atención en un punto de vista personal -seguramente resultado de su historia- dejando de considerar otras opciones y evitando pensamientos críticos o negativos hacia dicho punto de vista. |
| *Dificultad para refutar otros puntos de vista* | La persona muestra dificultad para refutar otros puntos de vista y elaborar contraejemplos. |
| *Conocimiento menor que el promedio* | Se muestra menor conocimiento que el promedio. |
| *Dificultades para explicar un punto de vista* | Se muestran dificultades para explicar una postura. |

## ASPECTOS METODOLÓGICOS

La investigación cualitativa que aquí se presenta está centrada en un estudio de caso de tipo interpretativo (Denzin& Lincoln, 1994). El estudio empírico se llevó a cabo en el Diplomado de Temas Fundamentales de Álgebra impartido por el Instituto Nacional para la Educación de los Adultos (México); el diplomado tiene el propósito de fortalecer la formación de personas que asesoran en temas de álgebra a adultos que se encuentran en proceso de obtener su certificado de secundaria (estudiantes-asesores). El episodio que aquí se analiza pertenece al Módulo IV y su elección obedece a que ahí los estudiantes-asesores tendían a sustentar sus respuestas y asociados a esos sustentos parecían experimentar distintos estados epistémicos. Los episodios comienzan con la solicitud del tutor para responder a una tarea y finalizan con el acuerdo de los estudiantes en torno a una solución. Para este reporte se eligieron participaciones de dos estudiantes-asesoras, Patricia y Laura, porque parecían vivenciar distintos estados epistémicos a lo largo del episodio. Martínez fungió como tutor del grupo, quien deliberada y sistemáticamente instó a que sus estudiantes explicitaran los sustentos en los que apoyaban sus afirmaciones.

## ANÁLISIS DE RESULTADOS

En el episodio que se analiza el tutor solicitó a los estudiantes que plantearan la ecuación que resolviera el siguiente problema: Un padre tiene 35 años y su hijo 5. ¿Al cabo de cuántos años será la edad del padre tres veces mayor que la edad del hijo?

*Primera participación de Patricia: Certeza y comprensión procedimental*

La participación que abrió el episodio fue la de Patricia:

1.1 Hola. Les dejo la respuesta al primer problema y la explicación a los educandos.

1.2-1.4 $3(5 + X) = X + 35$; $15 + 3X = X+35$; $3X - X = 35 - 15$; $2X = 20$; $X = 10$

1.5 -1.6 Colocaremos X a los años que transcurrirán para que el padre cumpla el triple de edad que el hijo. Ya sabemos la edad que tienen actualmente ambos así que podemos realizar una igualdad con los datos que tenemos. $3(5 + X) = X + 35$

1.7 Tres veces la edad del niño más X años que deben transcurrir deben ser igual a la edad del padre, a su vez sumar la edad del padre a esa misma cantidad X años debe ser la edad del hijo. Espero no confundir.

*Comprensión procedimental*. En un primer momento, Patricia expuso lo que para ella era la respuesta del problema: planteó la ecuación (en 1.2) (aspecto I5 de la variable como incógnita, en adelante así aparecen los aspectos de la variable), manipuló la variable (1.3) (G2 y G4) y obtuvo el valor para la incógnita del problema (1.4) (I4). En un segundo momento ella compartió su explicación para los educandos. Ahí, ella identificó la incógnita adecuadamente (1.5) (I1), le asignó la literal (1.5) (I5) y explicó el planteamiento hecho previamente (1.6), explicitando la interpretación que dio a la 'x' (I.2). La puesta en juego de casi todos los aspectos de la variable como incógnita (con excepción de I3) es una muestra del conocimiento procedimental que posee Patricia en torno a ese tema.

*Certeza*. Es probable que en esta primera intervención Patricia experimentara certeza. Se puede decir, en principio, que ella tuvo *determinación* para ser la única en someter a juicio del grupo sus respuestas al problema. Su certeza también se puede inferir del uso de *enfatizadores*, específicamente, del hecho de haber recurrido al modo indicativo de los verbos a lo largo de su intervención (dejo, sabemos, tenemos). Otros aspectos que hablan de la certeza de Patricia son que *actuó en consecuencia* con los procedimientos que anunció, por ejemplo, en 1.6 planteó la ecuación que resolvía el problema de acuerdo a lo que enunció en 1.5; que activó esquemas epistémicos basados en la *familiaridad* en los procesos algebraicos antes descritos, los que muy probablemente eran procedimientos habituales para ella al resolver problemas rutinarios en su labor como asesora y que parecían darle confianza en sus respuestas. Su certeza también la dejó ver al mostrar *interés* por resolver el problema, al contestar correctamente todas las preguntas que le hizo el tutor, al resolver el sistema que planteó sin que el tutor se lo solicitara, al ser la única en dar solución al problema hasta ese momento y al ser *clara* en su exposición. Finalmente, Patricia demostró su certeza al dejar ver *constancia* en la aplicación de las acciones recién descritas a lo largo de su intervención.

El tutor se percató que Patricia había sido la única estudiante en resolver el problema de las edades por lo que puso a consideración del grupo sus procedimientos y su resolución. En lo que sigue se analiza la respuesta de Laura a los cuestionamientos del tutor.

*Primera intervención de Laura. Duda e incomprensión*

2.2 T: a) ¿Están de acuerdo que [la ecuación que propuso Patricia] solucionaría el problema?

L: No, porque cuando la intenté resolver no me salió.

| | | |
|---|---|---|
| 2.3 | T: | b) ¿Qué significa x+5 en la ecuación que propuso? |
| | L: | El número de años que no conocemos más la edad que tiene actualmente el niño. |
| 2.6 | T: | e) ¿Cómo creen que un educando intentaría resolver el problema si se le dificulta el Álgebra? |
| | L: | Seguramente se confundirá al momento de interpretar los datos, ya que tenemos todos los datos, lo único que no sabemos el número de años que tienen que transcurrir. |
| 2.7 | T: | ¿Cómo lo orientarían hacia el planteamiento de una ecuación? |
| | L: | Yo lo invitaría a que represente cada dato con una letra para que aprenda el lenguaje abstracto. |
| 2.8-2.9 | L: | Yo encontré que la ecuación puede ser: 3(x-5)=x-35. Corríjanme por favor. |

T: tutor; L: Laura

*Incomprensión*. De entrada, se puede vislumbrar en la participación de Laura su incomprensión conceptual, y su *conocimiento menorque el promedio*, que manifestó, por una parte, en las dificultades que tuvo para identificar la incógnita del problema (I1) (al interpretarla como "el número de años" sin especificar que era el "número de años que debían transcurrir para que la edad del padre fuese el triple que la edad del hijo") y que se manifestó también al plantear la ecuación de forma incorrecta (I5) (cambiando sólo el signo + por el signo - en la ecuación que propuso Patricia, en 2.8); todo ello muestra la imposibilidad de Laura para comprender el planteamiento de la ecuación en el mensaje de su compañera. Adicionalmente, su incomprensión se desprende de su *sesgo de exploración*, ya que al tratar de refutar el planteamiento de Patricia partió de la solución numérica del problema que ella previamente había encontrado (ver 5.3, 6.1 y 6.2), centrando su atención sólo en su punto de vista y su solución. De esto se desprende su *dificultad para elaborar contraejemplos* y sus*bajos niveles de elaboración* que dejó ver al focalizar su contra-argumento sólo en la ecuación que propuso Patricia, en lugar de considerar otros de los elementos conceptuales que ella ofreció en su exposición (como la traducción del lenguaje común al algebraico o su interpretación de la incógnita). Se observó también que Laura tuvo *dificultades para explicar* su punto de vista porque no justificó su propio planteamiento (en 2.8), el que posiblemente fue resultado de un intento por *evitar estados de incertidumbre* al plantear una ecuación distinta a la de su compañera pero sin soporte matemático y con sustento en *esquemas epistémicos basados en consideraciones extra-matemáticas*. En suma, los argumentos de Patricia no lograron que Laura comprendiera el contenido de sus explicaciones.

*Duda*. Si bien a lo largo de toda su participación Laura mostró bajos niveles de presunción al *noactuar en consecuencia*, al *no ser suficientemente informativa* (ya que dejó sin resolver la ecuación y no explicitó su procedimiento mediante el cual la planteó) y al utilizar *mitigadores* en sus intervenciones (como el del verbo poder en 2.8), su estado de duda se hizo todavía más evidente cuando al cerrar su participación pidió decididamente ayuda: “corríjanme por favor” (en 2.9).

Ante los hechos, y ante una pequeña participación de Patricia, el tutor la interpeló: a) Por favor, explícanos Patricia qué significa en tu ecuación las expresiones ‘5+x’ y ‘x+35’.b) Laura propuso la siguiente ecuación para resolver el problema: 3(x-5) = x-35 ¿Estás de acuerdo con que la ecuación resuelve el problema? ¿Por qué?

*Segunda respuesta de Patricia: Certeza e incomprensión conceptual*

Patricia respondió así a los cuestionamientos del tutor:

4.1 Pasando al problema, primero se determina la ecuación para poder obtener la incógnita.

4.2 La incógnita es en cuantos años tendrá el padre el triple de la edad del hijo la incógnita es la cantidad de años que deben transcurrir para que el padre tenga el triple de la edad del hijo.

4.3 [En relación a la pregunta b) del tutor Patricia respondió]: 5+x significa que 5 años son la edad que tiene el hijo y le debemos sumar la cantidad de años que deben transcurrir. x+35 significa que la cantidad de años que deben transcurrir se le sumará a la edad actual del padre.

4.5 Y las personas sólo pueden aumentar de edad es decir sumamos edad jamás restamos años a nuestra vida.

4.6 Por lo tanto si le resto como menciona la ecuación de Laura no me dará buen resultado.

4.7-4.8 Si resto 3(10-5)=10-35. Comenzando porque al restar un número menor a un número mayor mi resultado será negativo, es decir -25.

*Comprensión procedimental e incomprensión conceptual*. En su intervención, Patricia primeramente dejó ver su comprensión procedimental de la variable como incógnita, en consecuencia con su actuación previa. Pero muy poco después (a partir de 4.4) da muestras de su incomprensión conceptual. En principio porque no puede ahí *contra-argumentar* al razonamiento de Laura. Para hacerlo, es decir, para mostrar que la ecuación de Laura es incorrecta, utiliza implícitamente un argumento por reducción al absurdo: supuso que la ecuación de su compañera es correcta; sustituyó en esa ecuación el resultado (x=10) que se derivó de la ecuación planteada por Patricia (Sic!) y de ahí coligió lo que ella consideró era una contradicción: la aparición de números negativos (en lugar de considerar para ello la desigualdad que de esa sustitución se deriva 15 = -25). Pero esto no fue todo. La incomprensión conceptual de Patricia también se deja ver cuando ella activó diversos esquemas epistémicos basados en*consideraciones extra-matemáticas*: en principio, al movilizar el esquema basado en *afirmaciones incontestables* ajenas al argumento, lo que sucedió cuando afirmó que “las personas sólo puedan aumentar de edad y que jamás podremos restar años a nuestra vida” (4.5), afirmación que aunque es irreprochable en la vida práctica, no es aplicable en el marco del problema, ya que un valor negativo de la literal podría ahí interpretarse como un hecho ocurrido en el pasado; por lo demás, el error en el planteamiento de Laura no parece tener que ver con esa afirmación porque lo que en todo caso lo que Laura habría supuesto como negativo son las edades iniciales y no el valor de la literal. Aunado a lo anterior, Patricia puso en juego el *esquema para evitar consecuencias inesperadas* al evocar temor hacia la obtención de un resultado negativo, cuando previno en 4.6 que si se procediera como lo hizo Laura no se obtendría un ‘buen resultado’, refiriéndose seguramente al temido valor negativo (-25) con el que se topó al fin de su intervención.

*Certeza*. A lo largo de su participación es posible que Patricia haya experimentado certeza. Esto se puede inferir de su *determinación* para refutar la respuesta de Laura; de que utilizó *enfatizadores* a lo largo de su intervención (específicamente, el modo indicativo de los verbos, como en “significa”, “resto”, “dará” y el enfatizador “jamás” en 4.5); de que actuó en *consecuencia* con lo que anunció (e. g., en 4.7 y 4.8 trató de mostrar que al utilizar la ecuación de Laura no se obtendría un “buen resultado”) y de que activó esquemas epistémicos basados en la *familiaridad* (al explicitar en 4.8 la creencia de la imposibilidad de un resultado negativo producto quizá de la cultura escolar). Su certeza también la dejó ver al mostrar *interés* por resolver el problema; al tratar de contestar todas las preguntas que le hizo el tutor y al dejar ver *constancia* en la aplicación de las acciones recién descritas a lo largo de su intervención.

*Segunda intervención de Laura: Altos niveles de presunción e incomprensión*

Laura reaccionó así a la respuesta de Patricia:

5.1 Hola Pati! Tienes toda la razón del mundo, no podemos restar años a la vida humana,

5.2 y después cuando el tutor me preguntó cómo resolví la ecuación que yo propuse, ya no supe como la había hecho antes, total que al final terminé echa bolas, hasta que leí tu comentario,

5.3 y con tu aclaración ya encontré mi error, resulta que yo sólo calculé cual podría ser el valor de "x" en ambos lados pero al final encontré que el numero de años que tienen que transcurrir eran 30, son muchos porque el padre tendría 90 y el hijo 30, y aunque cumple con el requisito de ser el triple de la edad del hijo el procedimiento no es correcto,

5.4 y a continuación les comparto lo que yo hice: 3(x-5)=x-35, aquí calculé cuál podría ser el valor de "x", nunca despejé ni lo busqué en los datos que tenía, simplemente calculé y sustituí, ese fue mi gran error,

5.5 además de usar resta en lugar de suma.

5.6 Mil gracias por la aclaración y por tu comentario. Aprendí mucho.

Cuando posteriormente el tutor le preguntó a Laura lo que había aprendido, ella respondió:

6.1 Simplemente asigné un valor a "x", y se me ocurrió que si "x" valía 30, entonces el padre tendría 90 y el hijo 30 y cumple con el supuesto del problema.

6.2 Aprendí que debo poner mucha atención y sobre todo dar seguimiento a los pasos para encontrar la ecuación y no solo tratar de adivinar o suponer el valor, es posible que obtenga el mismo resultado pero no estoy aplicando el conocimiento como se debe.

*Incomprensión procedimental y conceptual*. El procedimiento de Laura consistió -como ella misma lo reconoció explícitamente en 6.1 y 6.2 e implícitamente en 5.3- en adivinar, suponer o calcular aritméticamente lo que ella consideró que era el valor de la x, que a su vez para ella constituía la solución del problema, solución por cierto, que con un *sesgo de exploración* y a pesar de los esfuerzos de su compañera por hacerla comprender, nunca dejó de pensar que era la correcta (e. g., en 5.3 y en 6.1 cuando afirma que su solución cumple con el supuesto del problema). En su participación Laura también otorgó dos significados a la incógnita: como la edad del hijo pero a la vez como el número de años que deben transcurrir. Pareciera que detrás de su procedimiento estaba la creencia de que la incógnita es equivalente a ‘algo que hay que adivinar’, y que esto se puede conseguir de manera aritmética y sin la necesidad de tomar en cuenta otras condiciones del problema. Con todo lo anterior Laura muestra no sólo *conocimiento bajo del promedio* sino un desconocimiento palmario en el manejo de la variable, especialmente en los criterios I.2, I.5 y G2, cosa que desde el inicio ella misma confesó: “encontrar la ecuación de un problema se me dificulta sobremanera”. La incomprensión de Laura también se deja ver a través de las causas a las que ella, con un *sesgo de exploración*, parece atribuir su error, sustentadas todas ellas en *consideraciones extra-matemáticas* y no en consideraciones disciplinares. Una de las posibles causas fue el no haber ‘aplicado el conocimiento como se debe’; otra causa a la que ella probablemente imputó sus errores fue el no haber considerado “que sumamos edad, jamás restamos años a nuestra vida” afirmación que hizo su compañera en 4.5 y que Laura aceptó enfáticamente (en 5.1) siendo fiel a un *esquema basado en afirmaciones incontestables*. Por cierto, Laura se adhirió a la verdad de esa afirmación posiblemente con el afán de evitar *estados de incertidumbre*, y conforme a *bajos niveles de elaboración*, ya que de todo el razonamiento que su compañera expuso de 4.5 a 4.8, Laura sólo consideró la afirmación expuesta en 4.5 (y no los errores en los que posteriormente incurrió su compañera, que ya antes analizamos). Otra causa que posiblemente Laura colocó en el origen de sus errores consistió en no haber “dado seguimiento a los pasos para encontrar la solución”, como lo hiciera su compañera Patricia, otorgándole así *autoridad* a ella por ser un *par*que a Laura le parecía confiable, y dejando ver su creencia de que el planteamiento de ecuaciones supone la aplicación de un algoritmo.

*Altos niveles de presunción.* Asociada a su incomprensión,Laura probablemente experimentó altos grados de presunción. En principio, ella tuvo *determinación* para cambiar su posición inicial y usó *enfatizadores* como la expresión “Tienes toda la razón del mundo” (5.1) y el modo indicativo de los verbos (encontré, cumple, es). No obstante, Laura también mostró cierta duda cuando a pesar de que ella enunció en 5.3 que debía seguirse un “procedimiento correcto” y que en 5.4 explicitó parte de ese procedimiento (“buscarlo en los datos, despejar la incógnita”), ella no actuó en consecuencia. Esta falta de acción permitió diferenciar el estado de certeza que Patricia experimentó en sus intervenciones del nivel de presunción que experimentó Laura.

En síntesis, Laura deja ver una evolución de un estado de duda hacia una relativamente alta presunción, que ciertamente no parece haber sido resultado de una mayor comprensión de los contenidos disciplinares incluidos en el problema sino que más bien podría estar cimentada en un fortalecimiento de sus creencias (e. g., sobre el origen de sus errores). Da la impresión que Laura sólo comprendió que en casos como los del diplomado no es aplicable el ‘método por adivinación’ que ella siguió, no porque arroje resultados incorrectos sino por su propia naturaleza, ya que ahí ‘no se aplica el conocimiento como se debe’ (6.2).

## CONCLUSIONES

En el documento se muestran aspectos de las complejas relaciones entre la certeza y la comprensión. Se podría pensar que existe una mutua determinación entre la certeza y la comprensión, es decir, que la comprensión implica certeza y recíprocamente, que la certeza supone la comprensión. Parece, sin embargo, que esto no siempre es el caso. Cuando Cantor le envió su famosa y sorprendente demostración a Dedekind sobre la correspondencia biunívoca entre el segmento unitario y el cuadrado unitario, signada con una de sus frases más célebres “¡lo veo pero no lo creo!” (Dauben, 1984, p. 242), él mostró una profunda comprensión del hecho, pero se trataba de una comprensión teñida de incredulidad.En este escrito, por otra parte, se han aportado evidencias empíricas de que, de modos diversos, la certeza puede estar asociada no sólo a bajos niveles de entendimiento, sino incluso a la incomprensión, es decir, que la certeza no lleva consigo ni incluye necesariamente al conocimiento. En el caso de Patricia se muestra que la certeza estuvo asociada sólo a un entendimiento procedimental pero a un desconocimiento conceptual. En el de Laura, se puede distinguir una transición de un estado de duda hacia un estado de presunción relativamente alto, transición que sin embargo no se vio acompañada ni sustentada en aumento de su comprensión. De hecho es un caso que muestra estados de incomprensión y desconocimiento asociados a estados de alta presunción. Las relaciones entre certeza y comprensión nos remiten a una vieja diatriba epistemológica sobre las relaciones que se dan entre creer y conocer, pero también a una problemática novedosa –en el sentido de que sólo últimamente se ha puesto en la mesa de la discusión- de conseguir, entre otras muchas cosas, que los docentes tomen conciencia de que las muestras de aparente certeza de sus alumnos –que mucho estimulan e incentivan a sus profesores y sobre las cuales toman muchas decisiones didácticas- no son a su vez expresiones de su comprensión.

## Referencias

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Universidad de los Andes.

Dauben, J. W. (1980). El desarrollo de la teoría de conjuntos cantoriana. En I. Grattan-Guines (Ed.), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*(pp. 235-282). Madrid: Alianza Editorial.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (1994). Introduction. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1-18). California: Sage.

Harel, G., &Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspective on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Charlotte: NCTM.

Hyland, K. (1998). Persuasion and context: The pragmatics of academic metadiscourse. *Journal of Pragmatics, 30*, 437-455.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229–270). Hillsdale:Lawrence Erlbaum Associates.

Martínez B. &Rigo M. (2013).Criterios de certeza en el contexto de un foro virtual. En A. Ramírez y Y. Morales (Eds.) *I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe* (I CEMACYC) (pp. 548-558). República Dominicana: ICMI.

Petty, R. E. &Briñol, P. (2010).Attitude change.In R. F. Baumeister & E. J. Finkel (Eds.), *Advanced social psychology: The state of the science* (pp. 217-259). Oxford: Oxford University Press.

Rigo, M. y otros (2009). Las prácticas de justificación en el aula de matemáticas. En González, M. J., González, M. T. & Murillo, J. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XIII*. Pp. 445-452. Santander, España: SEIEM.

Rigo, M. (2011). La convicción, la comprensión y las prácticas de racionalidad en la primaria. Estudio del profesor. En A.B. Alcaraz, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVII* (Pp. 460-466). Bilbao: SEIEM y Universidad del País Vasco.

Rigo, M. (2013). Epistemic schemes and epistemic states. A study of mathematics convincement in elementary school classes. *Educational Studies in Mathematics*, *84*(1), 71-91.

Salcedo , A. (2007). *Anatomía de la persuasión: de los clásicos a la programación neurolingüística*. Madrid: ESIC Editorial.

Schoenfeld, A.H. (2011). *How we think*. New York: Routledge.

Tymoczko, T., (1986). The four-color problem and its philosophical significance. In T. Tymoczko (Ed.), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp. 243-266). Boston: Birkhäuser.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., & Trigueros M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental: Una propuesta alternativa*. México: Editorial Trillas.

Villoro, L. (2009). *Creer, saber, conocer*. México: Siglo xxi.

## 7.-REVISIÓN POR PARES

En lo que sigue se muestra el resultado de las revisiones que los árbitros de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática hicieron llegar a los autores.

*Revisión 1*

Felicito a los autores por la investigación que están realizando. Los contenidos son altamente pertinentes y, además, se comunican de un modo claro y preciso. Dicho esto, solo tengo algunos comentarios mayoritariamente tipográficos que deberán atenderse antes de la publicación final del texto. Son los siguientes:

- Las referencias bibliográficas no están ordenadas alfabéticamente, imagino que por distracción. Nótese que falta Krummheuer (1995). Las siglas completas del nombre de Schoenfeld son A. H. y el título de su libro debe ser escrito en cursiva. No hay consistencia en la inclusión de países o estados que acompañen el lugar de edición, Charlotte lleva Carolina del Norte pero en cambio Boston no lleva Massachusetts. No hay tampoco consistencia en el modo de mencionar los editores de volúmenes, que a veces se citan como compiladores, e inclusive con el nombre de pila sin abreviar. Igualmente, la abreviatura para Univ. no está justificada ni los numerosos símbolos referidos a la lengua inglesa.

- Los autores no deberían ellos mismos adjetivar su marco interpretativo como "robusto", aunque en efecto lo sea.

- La noción de "estudiante-asesora" es algo difícil de interpretar en el contexto del estudio que se reporta; recomiendo una breve explicación al respecto.

- La identificación o mención de "estados de estrés" me parece controvertida. En la etiqueta del correspondiente esquema, no veo necesidad de recurrir a un escenario emocional sobre el que no se puede concluir. De un modo similar, veo controvertido el término "motivos" en el sentido usado en otra etiqueta.

- El modelo de Ursini y otros (2005) se denomina primero 3UV1 y luego 3UV. Desconozco si esto es un gazapo o tiene intencionalidad científica.

- La Tabla 4 tiene casillas incompletas; por otra parte, entre las que hay información, contrasta el estilo de escrita ("Y para elaborar contraejemplos").

- Una vez superado el proceso de anonimato, solicito que se incluya el país (¿México?) en la descripción del lugar donde se llevó a cabo el estudio empírico.

- El uso del vocablo "probabilidad" a lo largo del texto también me parece controvertido (e.g., "asocian el máximo grado de probabilidad a lo creído") puesto que tiene implicaciones cuantitativas de cálculo. Tal vez debería reemplazarse.

Quedo a la espera de escuchar la presentación del texto en Salamanca.

*Revisión 2*

La comunicación es aceptable en los términos que está presentada. Las sugerencias están dirigidas a proponer a los autores elementos que permiten profundizar más en la investigación en esta dirección.

- Se dan términos que deben ser caracterizados con más precisión: "hechos de las matemáticas", "Marco robusto", "Comprensión"…, aunque de la lectura total del documento se puede obtener una cierta delimitación.
- Se analiza una situación problemática en formato: "problema verbal aritmético algebraico", y se identifican hechos aislados como: traducción (habilidad Heurística), procedimental (operaciones) y conceptual (ecuación, letra como incógnita específica…)
- Por ejemplo, la conversión o cambio entre representaciones, Lenguaje natural(fuente) al Lenguaje algebraico (Imagen), es un "proceso" matemático relevante que en este caso se trata de una conversión entre representaciones no congruentes, como suele suceder con las situaciones que suponen pasado o futuro en las situaciones de edades.
- En resumen, la sugerencia es la necesidad de caracterizar con más precisión, como punto de partida, al menos los "hechos de las matemáticas" que se toman en consideración, desde las perspectivas epistemológicas, semióticas y fenomenológicas. Facilitan la precisión de términos como "la Certeza" y "la Comprensión" de los sujetos.

*Modificaciones a la versión original*

Se tomaron en cuenta las sugerencias del revisor y se realizaron los siguientes cambios a la versión original:

- Las referencias bibliográficas se ordenaron alfabéticamente. Se incluyó la cita de Krummheuer (1995). Se anotaron las siglas completas del nombre de Schoenfeld ( A. H.) y el título de su libro se escribió en cursiva. En el lugar de edición, se eliminó Carolina del Norte de Charlotte. Se mencionaron a los editores de volúmenes como editores (y no como compiladores) y se abrevió I. Grattan-Guines en la cita de Dauben (1980).No se utilizó la abreviatura Univ. , en cambio se utilizó University.

-Se suprimió el adjetivo de "robusto" para el marco interpretativo.

-En el apartado de los antecedentes se precisó el concepto de estudiantes-asesores como asesores en formación.

-Se modificó el término "esquemas epistémicos basados en motivos" por el término "esquemas epistémicos basados en consideraciones extra-matemáticas" y el término “esquemas para disminuir estados de estrés” por el término “esquemas para evitar estados de incertidumbre”. De esta forma, ya no se recurre a los términos “motivos” y “estrés” a lo largo del documento.

-Se corrigió el término 3UV1 por el término 3UV (como se denomina al modelo de Ursini y otros (2005)).

-Se corrigió el formato de la Tabla 4 completando las casillas vacías.

-Se incluyó el nombre del país en donde se llevó a cabo la investigación (México).

-La definición de certeza y presunción, apoyándose en grados de probabilidad la da Villoro (2009). Este lenguaje de probabilidades bien admite interpretaciones cualitativas, que son el tipo de interpretaciones que se espera se hagan en el contexto de las definiciones (hay poca probabilidad de lluvia; es muy probable que ella no vaya a la fiesta). La cita se incluyó en el documento. Siguiendo la recomendación del revisor, el término probabilidad ya no aparece en la Tabla 4, en lugar de bajas probabilidades de elaboración se habla ahora de bajos niveles de elaboración.

-Se da una caracterización del término comprensión a través de los indicadores que aparecen en la Tabla 2 (es una forma de definición); otra definición resultaría quizás redundante y/o pobre.

# CONCLUSIONES GENERALES

En la investigación se planteó el objetivo de estudiar las relaciones entre la certeza que experimentó un participante en un foro virtual y su comprensión en torno a hechos de las matemáticas. Para tal fin, se elaboró un instrumento que permitió identificar los posibles estados internos que experimentó una persona que participó en un foro virtual al resolver problemas matemáticas. A lo largo del documento se pudo constatar la eficacia del instrumento y en lo que sigue se enuncian las consideraciones que se desprendieron de su aplicación.

En un primer caso (Jeymi) fue posible sugerir que cuando la estudiante-asesora experimentó certeza mostró una comprensión conceptual de la variable que no se vio reflejada cuando los investigadores detectaron un estado de presunción en ella. Lo anterior deja ver que estudiar la trayectoria de los estados de certeza (o presunción) de los alumnos permite detectar posibles obstáculos conceptuales. Esta conclusión puede ser útil en la práctica del tutor (y de cualquier docente de matemáticas) porque el análisis que él realice de los estados epistémicos que experimentan sus estudiantes puede ayudarle a identificar los posibles obstáculos que ellos tienen con algún concepto matemático. En ese caso, fue posible identificar las dificultades que la estudiante-asesora tenía con el concepto de la variable cuando experimentó un estado de presunción, a pesar de que sus resultados y procedimientos eran correctos (en primera instancia). Lo antes dicho nos llevó a identificar otro fenómeno que se dio específicamente en el caso de Jeymi: que su certeza está relacionada con sus niveles de comprensión y con la activación de esquemas epistémicos basados en razones, y que sus estados de presunción parecen estar asociados a razones operatorias y esquemas basados en la familiaridad, pero sobre todo a la ausencia de razones conceptuales.

En un segundo caso (Mariana) se mostró que la certeza en hechos matemáticos no necesariamente está relacionada con la comprensión matemática. Esa certeza puede tener profundas raíces en consideraciones extra-matemáticas, como son los compromisos ontológicos. Es importante, que el profesor y los que lo forman tomen conciencia de este fenómeno, porque tiene significativas consecuencias en los aprendizajes de sus alumnos. Mariana, por ejemplo, mostró que conocía algunas reglas del álgebra pero sus compromisos ontológicos sobre las características que deben poseer las tareas matemáticas, y en particular, los sistemas de ecuaciones -de tener una incógnita que despejar y una solución precisa y numérica que encontrar-, parece que representaron un obstáculo que le impidieron aplicar dichas reglas a cabalidad. Adicionalmente, el análisis de casos en la historia de las matemáticas –el de Saccheri y Legendre- sugirió la generalidad del fenómeno: Saccheri y Legendre fueron fieles a sus pre-juicios ontológicos, y al igual que Mariana, esos pre-juicios los llevaron a "admitir demostraciones que no tenían que ver con los hechos" y los "indujeron a precipitar sus conclusiones o añadir lo que no era lícito".

En un tercer escrito se aportaron evidencias empíricas de que, de modos diversos, la certeza puede estar asociada no sólo a bajos niveles de entendimiento, sino incluso a la incomprensión, es decir, que la certeza no lleva consigo ni incluye necesariamente al conocimiento. En el caso de Patricia se mostró que la certeza estuvo asociada sólo a un entendimiento procedimental pero a un desconocimiento conceptual. En el de Laura, se pudo distinguir una transición de un estado de duda hacia un estado de presunción relativamente alto, transición que sin embargo no se vio acompañada ni sustentada en aumento de su comprensión. De hecho es un caso que muestra estados de incomprensión y desconocimiento asociados a estados de alta presunción. Las relaciones entre certeza y comprensión nos remiten a una problemática novedosa –en el sentido de que sólo últimamente se ha puesto en la mesa de la discusión- de conseguir, entre otras muchas cosas, que los docentes tomen conciencia de que las muestras de aparente certeza de sus alumnos –que mucho estimulan e incentivan a sus profesores y sobre las cuales toman muchas decisiones didácticas- no son a su vez expresiones de su comprensión.

Finalmente, para identificar posibles patrones de certeza se analizaron las participaciones de Jeymi en los episodios correspondientes a cada uno de los artículos. En el primer artículo se mostró que su certeza estuvo relacionada con sus niveles de comprensión y con la activación de esquemas epistémicos basados en razones, y que sus estados de presunción parecían estar asociados a razones operatorias y esquemas basados en la familiaridad, pero sobre todo a la ausencia de razones conceptuales. En el segundo artículo se mostró que Jeimy, como Mariana, se enfrentó a un problema que ponía en entredicho sus creencias (de la existencia numérica y única de toda tarea matemática) y sus conocimientos algebraicos. Pero mientras Mariana se aferró, sin asomo de duda, a un ideal del objeto matemático, supeditando a esos compromisos ontológicos las reglas del álgebra, Jeimy prefirió ajustarse al rigor lógico –como lo hiciera Lobachevski, tomando las debidas distancias- al seguir escrupulosamente las reglas del álgebra; Jeimy, a diferencia de Mariana, se dio el lujo de dudar de los resultados obtenidos, de reconocer su ignorancia y de pedir ayuda, apertura metacognitiva que la puso en condiciones de aprender. En este trabajo se incluyó la participación de Jeymi en el episodio que se analizó en el tercer artículo y se concluyó que experimentó altos niveles de presunción asociados a su comprensión procedimental. De lo anterior es posible concluir que Jeymi presenta patrones de certeza: parece convencerse sólo con razones matemáticas y duda cuando no comprende.

# REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


Abelson, R. P. (1988). Conviction.*American Psychologist*,*43(4)*, 267.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Universidad de los Andes.

Beke, R. (2005). El metadiscurso interpersonal en artículos de investigación. *Revista signos*, *38*(57), 7-18.

Bertely, M. (2000*). Conociendo nuestras escuelas. Un acercamiento etnográfico a la cultura escolar*.México DF: Paidós.

Bloom, B. S., Hastings, J. T., & Madaus, G. F. (1975). *Evaluación del aprendizaje*. Buenos Aires: Ediciones Troquel.

Boyero, M. J. (2012). Aportación al estudio de los marcadores conversacionales que intervienen en el desarrollo del diálogo (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid, Madrid.

Dauben, J. W. (1980). El desarrollo de la teoría de conjuntos cantoriana. En I. Grattan-Guines (Ed.), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica* (pp. 235-282). Madrid: Alianza Editorial.

De Villiers, M. (2010). Experimentation and proof in mathematics. In G. Hanna, H. Niels & H. Pulte (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics* (pp. 205-221). USA: Springer.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (1994). Introduction: Entering the field of qualitative research. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1–18). California: Sage Publications.

Harding, J. (1978).What is action-research in schools? *Journal of Curriculum Studies, 10(4),* 355-357.

Harel, G.(2007).Students´ proof schemes revisited .In P. Boero (Ed.),*Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp.65-78). Rotterdam: Sense Publishers.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspective on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Charlotte, NC: NCTM.

Hersh, R. (1993).Proving is convincing and explaining.*Educational Studies in Mathematics*, *24(4)*, 389-399.

Hyland, K., & Milton J. (1997).Qualification and Certainty in L1 and L2 Students.*Journal of second Language Writing*, *6(2)*, 183-205.

Hyland, K. (1998).Persuasion and Context: The pragmatics of academic metadiscurse. *Journal of Pragmatics, 30,* 437-455.

Kline, M. (2009). *Matemáticas para los estudiantes de humanidades.* México: FCE.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb, & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-270). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lombardo-Radice, L. (1974). Lobacevskij, matemático-filosofo. In N. I. Lobacevskij.*Nuovi Princípi della Geometria, con una teoria completa delle parallele* (pp. 13-54). Universale Scientifica Boringhieri (Traducción S. Ursini, disponible en Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México).

Martínez B. & Rigo M. (2013).Criterios de certeza en el contexto de un foro virtual. En A. Ramírez y Y. Morales (Eds.) *I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe* (I CEMACYC) (pp. 548-558). República Dominicana: ICMI.

Martínez B. & Rigo M. (2014).Mathematical certainties in history and distance education. En Liljedahl, P., Oesterle, S., Nicol, C., & Allan, D. (Eds.) *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36,Vol. 4*(pp. 177-184). Vancouver, Canada: PME.

Martínez B. & Rigo M. (2014). ¿Certeza implica comprensión?*Investigación en Educación Matemática XVIII*.Salamanca, España: SEIEM. (Aceptado)

Paradís, J., & Malet, A. (1989). *La génesis del álgebra simbólica. Los orígenes del álgebra: de los árabes al Renacimiento*. Barcelona: Promociones y Publicaciones Universitarias.

Paradís, J., Malet, A., & de Imperial, J. M. (1989). *La génesis del álgebra simbólica. El álgebra en el período renacentista. La recuperación de los clásicos griegos*. Barcelona: Promociones y Publicaciones Universitarias.

Petty, R. E. & Briñol, P. (2010). Attitude change. In R. F. Baumeister & E. J. Finkel (Eds.), *Advanced social psychology: The state of the science* (pp. 217-259). Oxford: Oxford University Press.

Rigo, M. y otros (2009). Las prácticas de justificación en el aula de matemáticas.En González, M. J., González, M. T. & Murillo, J. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XIII.* Pp. 445-452. Santander, España: SEIEM.

Rigo, M. (2011). La convicción, la comprensión y las prácticas de racionalidad en la primaria. Estudio del profesor. En A. B. Alcaraz, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVII* (Pp. 460-466). Bilbao: SEIEM y Universidad del País Vasco.

Rigo, M. (2013[a]). La convicción, la comprensión y las prácticas de racionalidad en la primaria. Estudio del profesor. En A. B. Alcaraz, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVII* (Pp. 460-466). Bilbao: SEIEM y Universidad del País Vasco.

Rigo, M. (2013[b]). Epistemic schemes and epistemic states. A study of mathematics convincement in elementary school classes. *Educational Studies in Mathematics*, *84*(1), 71-91.

Salcedo , A. (2007). *Anatomía de la persuasión: de los clásicos a la programación neurolingüística*. Madrid: ESIC Editorial.

Sánchez, L. P. (2005). El foro virtual como espacio educativo: propuestas didácticas para su uso. *Verista Quaderns Digitals Net*(pp. 1-18). Salamanca: Universidad de Salamanca.

Sánchez-Upegui, A. (2009). Nuevos modos de interacción educativa: análisis lingüístico de un foro virtual.*Educación y Educadores* (pp. 29-46). Bogotá: Universidad de La Sabana.

Schoenfeld, A.H. (2011). *How we think*. New York: Routledge.

Tall D. & Mejía-Ramos J.P. (2009).The long-term cognitive development of different types of reasoning and proof. En Hanna, G., Jahnke, H. N., & Pulte, H. (Eds.). *Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives* (pp. 1-13). New York: Springer.

Tymoczko, T., (1986). The four-color problem and its philosophical significance. In T. Tymoczko (Ed.), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp. 243-266). Boston: Birkhäuser.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., & Trigueros M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental: Una propuesta alternativa*. México: Editorial Trillas.

Villoro, L. (2009). *Creer, saber, conocer*. México: Siglo xxi.

Wittgenstein, L. (1988). *Sobre la Certeza.* Barcelona: Editorial Gedisa.

# ANTEPROYECTO DE DOCTORADO

PRESENTACIÓN

El documento está dividido en dos partes. En la primera se muestran los alcances de la tesis de maestría, los objetivos para continuar la investigación en el doctorado y un método para la consecución de esos objetivos. En la segunda se presenta la forma en la que se podría concretar ese método con el fin de continuar el trabajo iniciado en la maestría, y en cierta forma, se aprovecha también para mostrar los avances que en este sentido actualmente ya se tienen.

I. ANTECEDENTES, OBJETIVOS Y MÉTODO PARA LA CONSECUCIÓN DE LOS OBJETIVOS.

*Antecedentes*

En la tesis de maestría se examinaron los estados internos que experimentaron participantes en un foro virtual y las relaciones con su comprensión en torno al concepto de la variable como incógnita. Para tal fin se propuso un primer marco interpretativo en el que se diseñaron instrumentos, el cual se expuso a lo largo del documento. Como resultado se lograron identificar cuatro casos. Se sugirió que el primero de ellos (Jeymi) acompañaba su certeza con razones matemáticas y su duda con incomprensión. El segundo (Mariana) sostuvo su certeza en compromisos ontológicos. El tercero (Patricia) relacionó su certeza a una comprensión procedimental en una intervención y a su incomprensión en otra. Finalmente, el cuarto caso (Laura) acompañó su certeza con la total incomprensión del uso de la variable como incógnita.

*Objetivos del doctorado*

Para la investigación en el doctorado los objetivos son:

-Afinar los instrumentos que se propusieron en el documento de maestría para tener una mejor comprensión de las relaciones entre la certeza y la comprensión en torno a los usos de la variable.

-Regresar a los registros de los cuatro casos que se identificaron en la tesis de maestría para realizar un estudio longitudinal que permita analizar su comportamiento a lo largo del diplomado.

-Realizar revisiones bibliográficas con el fin de encontrar casos históricos que permitan comprender los casos encontrados en el estudio empírico.

*Método*

Para concretar los objetivos planteados se seguirá el método etnográfico según lo interpreta Bertely (2000) (una síntesis de ese método aparece en el apartado "La investigación etnográfica" dentro del capítulo "Consideraciones metodológicas generales" de la tesis de maestría). Adecuando el método expuesto por esta autora a los fines de este trabajo, se considera que en el segundo nivel de análisis, el etnógrafo i) puede realizar observaciones focalizadas o longitudinales en una segunda etapa de trabajo de campo; ii) re-visitar los primeros registros y analizar los nuevos registros de observación; iii) valorar la pertinencia de las primeras categorías de análisis y patrones emergentes; y iv) detectar nuevas posibilidades de triangulación teórica. Siguiendo estos pasos metodológicos, en lo que sigue se detalla cómo se procederá en el trabajo de doctorado.

*i) Observación focalizada*

Los casos que se presentaron a lo largo del trabajo de maestría resultaron particularmente interesantes y variados: Jeymi parecía asociar su estado de certeza a razones matemáticas y su estado de presunción o duda a la ausencia de razones conceptuales, se sugirió que Mariana sostuvo su certeza en compromisos ontológicos, se consideró que Patricia tenía dificultades conceptuales a pesar de mostrar un dominio procedimental y Laura parecía experimentar certeza aún cuando mostró total incomprensión. Estas conclusiones derivaron del análisis de fragmentos correspondientes a tres semanas del Módulo IV del Diplomado de Temas fundamentales de álgebra en donde el énfasis se centró en el concepto de la variable como incógnita.

*ii) Análisis de nuevos registros de observación*

Se cuenta con registros de la participación de los casos de estudio identificados en el apartado anterior en todos los foros a lo largo del Diplomado. Esto permite, analizar nuevos registros de observación y valorar la pertinencia de las primeras categorías de análisis y patrones emergentes. Lo anterior conduce a un objetivo general: analizar el comportamiento de los casos a lo largo del diplomado. Por un lado, sus estados epistémicos que experimentaron y su comprensión, por otro. En el análisis se espera responder de forma amplia las siguientes preguntas:

¿Cómo se puede distinguir entre la comprensión conceptual y la comprensión procedimental en álgebra?

¿Qué esquemas epistémicos activaron los estudiantes?

¿Cómo se puede distinguir entre razones matemáticas y razones escolares?

¿Qué patrones de certeza pueden encontrarse en las estudiantes a lo largo del diplomado?

¿Qué compromisos ontológicos soportan la certeza de las estudiantes?

*iii) Valoración de la pertinencia de las primeras categorías de análisis y patrones emergentes*

En un primer nivel de análisis se estableció un primer acercamiento a una noción de comprensión basado en la distinción entre comprensión conceptual y procedimental. En este segundo nivel de análisis se pretende hacer una distinción más fina sobre lo que es la comprensión recurriendo a la historia del álgebra con lo que se conseguirá replantear y afinar los instrumentos de análisis sobre este fenómeno. Se puede utilizar como guía las siguientes preguntas:

¿Cómo se puede caracterizar la comprensión en el álgebra?

¿Qué relaciones se pueden encontrar entre la certeza que experimentaron las estudiantes y su comprensión en álgebra?

*iv) Nuevas posibilidades de triangulación teórica*

Para los nuevos análisis se regresará a las fuentes bibliográficas con el fin de encontrar nuevas categorías teóricas. Las siguientes preguntas pueden utilizarse como guía:

¿Cómo se ha caracterizado la comprensión en álgebra?

¿Cómo se relaciona este trabajo con otros que han puesto énfasis en los estados internos de las personas y sus relaciones con la comprensión?

¿Qué otros casos se pueden encontrar en la historia que den cuenta de las relaciones entre su certeza y su comprensión en torno a hechos de las matemáticas? ¿Qué consecuencias derivaron de esas relaciones? ¿Se pueden encontrar casos similares en el contexto de un foro virtual?

En lo que sigue se desarrollan ejemplos empíricos para mostrar la viabilidad del estudio.

## II. EJEMPLOS DE CÓMO CONCRETAR LA METODOLOGÍA

### NIVELES DE COMPRENSIÓN

*i) Observación focalizada*

En el artículo "Criterios de Certeza en el contexto de un foro virtual" se analizó la comprensión de Jeymi en torno al uso de la variable como incógnita utilizando el Modelo 3UV. Ahí se concluyó que Jeymi determinó con certeza la cantidad desconocida (aspecto I4 de la variable como incógnita) que apareció en un problema correspondiente a la cuarta semana de actividades del Módulo IV:

*(3.11)* x + (x + 7) = 61

*(3.18)* y nos queda asi 2x=54

*(3.19)* ahora vamos a dejar sola la x

*(3.20)* y para eso hay que dividir entre 2 ambos miembros

*(3.21)* 2x/2=54/2

*(3.22)* y nos queda x=27.

En el capítulo 3 se mostró la resolución de Jeymi al problema de las edades correspondiente a la segunda semana de actividades del Módulo 4. En particular también se consideró que ella determinó con certeza la cantidad desconocida que apareció en el problema:

(7.3) edad que tendra el padre 3(x+5) o bien x+35
entonces 3(x+5)=x+35

(7.4) despejamos x para saber el tiempo que pasara para que la edad del padre sea 3 veses mayor que la edad del hijo
3(x+5)=x+35
3x+15=x+35
3x-x=35-15 pasamos la x del lado der. al izq. restando y el 15 del izq. al der. restando
tenemos 3x-x=35-15
2x=20
x=20/2

(7.5) x=10 tiempo que pasara para que la edad del padre sea 3 veses mayor a la del hijo

De entrada se observan diferencias en la manera de obtener el valor de las literales de la segunda a la cuarta semana de actividades del Módulo 4: mientras en (3.20) utilizó una propiedad de la igualdad para obtener el valor de la literal x en (7.4) utilizó la trasposición de términos para obtenerlo.

*i) Nuevos registros*

En la tercera semana de actividades del Módulo IV (que no se analizó en la tesis de maestría) a los estudiantes se les pidió resolver una ecuación utilizando las propiedades de la igualdad. Esta fue la respuesta de Jeymi:

(1.1)

| Lado izquierdo de la balanza<br><br>(Primer miembro) | Signo igual<br><br>(Equilibrio) | Lado derecho de la balanza<br><br>(Segundo miembro) |
|---|---|---|
| 2x-8 | = | 5x-2 |

(1.2) Para "dejar sola a la x" realizo lo siguiente:

1.-Sumo a ambos miembros. La ecuación nos queda:

| Lado izquierdo de la balanza<br><br>(Primer miembro) | Signo igual<br><br>(Equilibrio) | Lado derecho de la balanza<br><br>(Segundo miembro) |
|---|---|---|
| 2x | = | 5x |

(1.3) 2.-Sumo a los dos miembros 2.La ecuación nos queda:

| Lado izquierdo de la balanza<br><br>(Primer miembro) | Signo igual<br><br>(Equilibrio) | Lado derecho de la balanza<br><br>(Segundo miembro) |
|---|---|---|
| -6 | = | 3x |

(1.4) 3.-Divido a los dos miembros entre 3.La ecuación nos queda:

| Lado izquierdo de la balanza<br><br>(Primer miembro) | Signo igual<br><br>(Equilibrio) | Lado derecho de la balanza<br><br>(Segundo miembro) |
|---|---|---|
| -2 | = | x |

saludos...

Se puede observar que Jeymi determinó el valor de la literal, pero para obtenerlo no conservó las igualdades de un paso a otro. Por ejemplo, para pasar de la igualdad 2x-8=5x-2 a la igualdad 2x=5x sumó 8 unidades al miembro izquierdo y 2 al miembro derecho.

En suma, se observa que en los fragmentos (1.4), (7.5) y (3.22) correspondientes a la segunda, tercera y cuarta semana de actividades del módulo cuatro respectivamente Jeymi determinó la cantidad de desconocida que apareció en problemas o ecuaciones realizando operaciones algebraicas y aritméticas. Los procedimientos en cambio, son distintos: para llegar a (1.4) utilizó las propiedades de la igualdad de forma incorrecta, para obtener el valor de la literal en (7.5) utilizó la trasposición de términos y para llegar al valor en (3.22) utilizó una propiedad de la igualdad. En estos tres procedimientos ¿Se puede decir que Jeymi cumplió con el aspecto I4 de la variable como incógnita (obtener el valor de la literal)?

*ii) Nuevas posibilidades de triangulación teórica*

El lector puede dar diversas explicaciones al fenómeno, por ejemplo que la solución de Jeymi depende del contexto o de la dificultad de la ecuación propuesta. El estudio de la trayectoria de la estudiante-asesora a lo largo del Módulo IV puede aclarar esta situación. Independientemente de las causas por las que Jeymi resolvió las ecuaciones que aparecen en distintos problemas de diversas formas por lo pronto se sugiere el establecimiento de niveles en cada uno de los aspectos de la variable del modelo 3UV. Para este fin se propone recurrir a la historia del álgebra. En lo que sigue se muestran los avances de esta revisión histórica provenientes de Paradís & Malet (1989); Paradís, Malet, & de Imperial (1989) y Harel (2007):

Desde su inicio en Babilonia hasta su culminación en la tradición calculista del Renacimiento tanto el planteamiento del problema como su solución eran expresados completamente en un lenguaje natural. Los objetos matemáticos eran concebidos como idealizaciones de la realidad física.

Tabla 1 Aspectos de la variable como incógnita en la tradición calculista

| *La variable como incógnita* | | Desde Babilonia hasta la tradición calculista |
|---|---|---|
| *I1* | Reconocer e identificar la presencia de algo desconocido que puede ser determinado. | |
| *I5* | Simbolizar las cantidades desconocidas y utilizarlas para plantear ecuaciones. | Tanto el planteamiento del problema como los pasos para su solución son expresados completamente en lenguaje natural.<br>El planteamiento del problema y la ecuación para resolverlo son indistinguibles. |
| *I2* | Interpretar la literal que aparece en una ecuación como un valor específico. | La literal da nombre a un valor que es determinado a priori. |
| *I4* | Determinar la cantidad desconocida que aparece en | Se manipulan las incógnitas como si fuesen números conocidos. |

| | | |
|---|---|---|
| | ecuaciones o problemas. | Los procedimientos se desarrollan alrededor de características numéricas específicas de cada problema.<br>Ausencia de un lenguaje para aplicar procedimientos de una forma generalizada a los problemas pertenecientes a la misma clase o familia. |
| *I3* | Sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero. | |
| *La variable como número general* | | |
| *G2* | Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor. | La letra no es un símbolo en el sentido de que no es un objeto general.<br>La letra no simboliza un valor que puede variar. |
| *G4* | Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica. | La letra no se presta para ser un objeto que puede ser operado. |

El álgebra sincopada de Diofanto y la de Jordanus De Nemore tienen en común la evolución en la representación simbólica con respecto al periodo anterior. Pero mientras Diofanto debió recurrir a diversas estrategias para solucionar problemas similares, Vieta pudo encontrar estrategias generales para resolver la misma familia de problemas.

Tabla 2 Aspectos de la variable como incógnita en el álgebra sincopada.

| *La variable como incógnita* | | Álgebra sincopada (Diofanto) | Álgebra sincopada (Jordanus) |
|---|---|---|---|
| *I1* | Reconocer e identificar la presencia de algo desconocido que puede ser determinado. | | |
| *I5* | Simbolizar las cantidades desconocidas y utilizarlas para plantear ecuaciones. | Uso de abreviaturas taquigráficas para denotar la incógnita y sus potencias, la sustracción y la igualdad.<br>Se distingue el planteamiento del problema de la ecuación que lo resuelve. | Uso de literales que denotan tanto cantidades conocidas como desconocidas de una ecuación o sistema de ecuaciones. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *I2* | Interpretar la literal que aparece en una ecuación como un valor específico. | Interpretación de la incógnita como una multitud indeterminada de unidades. Pero es indeterminada sólo para los solucionadores. Un número completamente determinado existe a priori como solución de una ecuación o problema. | La literal denota tanto cantidades conocidas como desconocidas. |
| *I4* | Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas. | Se manipulan las incógnitas como si fuesen números conocidos.<br><br>Desarrollo de herramientas matemáticas ingeniosas diseñadas especialmente para la solución de cada problema.<br><br>Ausencia de métodos generales para la resolución de un problema. | Desarrollo de estrategias generales para la solución de problemas. |
| *I3* | Sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero. | Si los cálculos definitivos dan lugar a un número imposible entonces el problema es imposible. | |
| *La variable como número general* | | | |
| *G2* | Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, que puede asumir cualquier valor. | | Los coeficientes y los términos constantes son números generalizados. |
| *G4* | Manipular la variable simbólica. | | |

A mediados del siglo 16 se dio la construcción del álgebra simbólica en el que se crea un lenguaje matemático autónomo con el que es posible expresar problemas, teoremas y los pasos para su solución y pruebas respectivamente. Sin embargo, el álgebra simbólica de Vieta aún tiene raíces en la geometría griega mientras que el álgebra simbólica moderna se desconecta de cualquier referencia a ella.

Tabla 3 Aspectos de la variable en el álgebra simbólica

| *La variable como incógnita* | | Álgebra simbólica (Vieta) | Álgebra moderna |
|---|---|---|---|
| *I1* | Reconocer e identificar la presencia de algo desconocido que puede ser determinado. | | |
| *I5* | Simbolizar las cantidades desconocidas y utilizarlas para plantear ecuaciones. | La sintaxis algebraica se desconecta de los problemas en donde se origina.<br>La elección de símbolos literales que denotan tanto incógnitas como constantes es arbitraria pero la forma en la que estos símbolos son acomodados no lo es. | |
| *I2* | Interpretar la literal que aparece en una ecuación como un valor específico. | Los símbolos literales denotan tanto incógnitas como constantes. | |
| *I4* | Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas. | Uso de reglas que representan el primer sistema axiomático moderno en el sentido de que crean el contexto sistemático que define el objeto al cual las reglas se aplican.<br>Dicotomía entre dos tipos de representaciones del problema: el planteamiento y la ecuación que lo resuelven.<br>Sintaxis algebraica íntimamente relacionada con la geometría griega. | Los procedimientos son las reglas que constituyen la operación de un sistema axiomático que definen los objetos a los que se aplican.<br>Una persona es capaz de investigar las implicaciones de un conjunto axiomático.<br>Explicita el sistema axiomático. |
| *I3* | Sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | verdadero. | | |

Algunas consideraciones de estudios empíricos

Estudios empíricos (Gallardo, 1994) también han centrado la atención en el tipo de lenguaje que utilizan los estudiantes al resolver problemas algebraicos. Los estudiantes que recurren a métodos aritméticos no logran asegurarse de la unicidad de la solución a una ecuación lineal. El uso del lenguaje algebraico advierte la unicidad de la solución en el caso de los problemas modelados por ecuaciones lineales. Adicionalmente, la solución encontrada puede considerarse como imposible, solución que se considera posible por álgebra una vez que la solución es validada al ser sustituida en la ecuación o ecuaciones.

*iv) Triangulación entre categorías teóricas, del intérprete y de la estudiante*

La vuelta a la historia arroja primeras categorías que permiten ubicar a los procedimientos de Jeymi para obtener el valor de la literal en distintos niveles: en todos los procedimientos de la estudiante se distingue el enunciado del problema de la ecuación que lo resuelve (como en el álgebra simbólica de Vieta) pero en (7.4) la estudiante no explicitó las propiedades de la igualdad que conforman el sistema axiomático que subyace a sus acciones (como se haría en el álgebra moderna) y de (1.2) a (1.4) no utilizó adecuadamente esas propiedades.

Las primeras preguntas que se desprenden son ¿Qué estados internos experimentó Jeymi al obtener el valor de la literal con tres procedimientos distintos? ¿Qué esquemas epistémicos activó en cada uno de ellos? Un análisis de la trayectoria de los estados internos de Jeymi y su comprensión a lo largo del Módulo 4 puede dar una primera respuesta a estas primeras preguntas.

UN EJEMPLO QUE DERIVA EN NUEVAS PREGUNTAS PARA ESTUDIAR LA CERTEZA

El registro de las trayectorias de certeza los estudiantes pueden derivar en preguntas que en un inicio pudieron no ser contempladas. Por ejemplo, al dar seguimiento al caso de Laura se encontró la siguiente intervención en la tercera semana de actividades del Módulo IV ( que no se analizó en la tesis de maestría):

(1.1) -3x+3=4x-4

(1.2) Propiedad de igualdad: sumar un mismo numero a ambos miembros de la igualdad.

(1.3) -3x=x+8

(1.4) al sumar +6 -3x+6= x+8+6

(1.5) 3x = 14x

(1.6) Al restar -3x 3x-3x= 14x-3x

(1.7) x = 11x

(1.8) x/11=11x/11

(1.9) 0=x

(1.10) Entonces x= 0 !!!

Para resolver la ecuación de (1.1) Laura trató de utilizar las propiedades de la igualdad (sumar +6, restar -3) para obtener el valor de la literal, pero al hacerlo no se percató de que obtuvo desigualdades (3x=14x o x=11x). Finalmente el valor de la literal que obtuvo no hacía de la ecuación de (1.1) un enunciado verdadero.
Asociado a su incomprensión Laura pareció experimentar certeza. Se puede decir, en principio, que ella tuvo *determinación* para someter a juicio del grupo sus respuestas y procedimientos a una ecuación distinta a la de sus demás compañeros. Su certeza también se puede inferir del uso del *enfatizador* x=0!!! al final de su intervención (1.10). Otros aspectos que hablan de la certeza de Laura son que *actuó* en consecuencia con los procedimientos que anunció, por ejemplo, cuando advirtió "al restar -3x" ella efectivamente creyó haberlo hecho en (1.7). Su certeza también la dejó ver al mostrar *interés* por resolver el problema y al explicar detalladamente su solución. Finalmente, Laura demostró su certeza al dejar ver *constancia* en la aplicación de las acciones recién descritas a lo largo de su intervención.

La respuesta del tutor fue la siguiente:

(2.1) Hola Laura. Muy bien!

El tutor no se percató de los errores de la estudiante quizá movido por la expresión de certeza de Laura. Esto conduce a la siguiente pregunta: ¿Cómo influyen los estados internos de los estudiantes en las decisiones del tutor? El análisis de la trayectoria de los estados internos de los casos de estudio y su comprensión puede apoyar a contestar esta y otras preguntas que surjan a lo largo del análisis.

## BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA SOBRE ESTADOS EPISTÉMICOS


Abelson, R. P. (1988). Conviction.*American Psychologist*, *43(4)*, 267.

Beke, R. (2005). El metadiscurso interpersonal en artículos de investigación. *Revista signos*, *38*(57), 7-18.

Bloom, B. S., Hastings, J. T., &Madaus, G. F. (1975). *Evaluación del aprendizaje*. Buenos Aires: Ediciones Troquel.

Boyero, M. J. (2012). Aportación al estudio de los marcadores conversacionales que intervienen en el desarrollo del diálogo (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid, Madrid.

De Villiers, M. (2010). Experimentation and proof in mathematics. In G. Hanna, H. Niels& H. Pulte (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics* (pp. 205-221). USA: Springer.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, *24(4)*, 389-399.

Hyland, K., & Milton J. (1997).Qualification and Certainty in L1 and L2 Students.*Journal of second Language Writing*, *6(2)*, 183-205.

Hyland, K. (1998). Persuasion and Context: The pragmatics of academic metadiscurse. *Journal of Pragmatics, 30*, 437-455.

Rigo, M. y otros (2009). Las prácticas de justificación en el aula de matemáticas. En González, M. J., González, M. T. & Murillo, J. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XIII.* Pp. 445-452. Santander, España: SEIEM.

Rigo, M. (2011). La convicción, la comprensión y las prácticas de racionalidad en la primaria. Estudio del profesor. En A. B. Alcaraz, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVII* (Pp. 460-466). Bilbao: SEIEM y Universidad del País Vasco.

Rigo, M. (2013[a]). La convicción, la comprensión y las prácticas de racionalidad en la primaria. Estudio del profesor. En A. B. Alcaraz, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVII* (Pp. 460-466). Bilbao: SEIEM y Universidad del País Vasco.

Rigo, M. (2013[b]). Epistemic schemes and epistemic states.A study of mathematics convincement in elementary school classes.*EducationalStudies in Mathematics*, *84*(1), 71-91.

Villoro, L. (2009). *Creer, saber, conocer*. México: Siglo xxi.

Wittgenstein, L. (1988). *Sobre la Certeza.* Barcelona: Editorial Gedisa.

## BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA SOBRE COMPRENSIÓN

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Universidad de los Andes.

Gallardo, A. (1994). El estatus de los números negativos en la resolución de ecuaciones algebraicas. Tesis Doctoral, CINVESTAV.

Harel, G. (2007). Students´ proof schemes revisited .In P. Boero (Ed.),*Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp.65-78). Rotterdam: Sense Publishers.

Harel, G., &Sowder, L. (2007).Toward comprehensive perspective on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Charlotte, NC: NCTM.

Kline, M. (2009). *Matemáticas para los estudiantes de humanidades.* México: FCE.

Lombardo-Radice, L. (1974). Lobacevskij, matemático-filosofo. In N. I. Lobacevskij.*Nuovi Princípi della Geometria, con una teoria completa delle parallele* (pp. 13-54). Universale Scientifica Boringhieri (Traducción S. Ursini, disponible en Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México).

Paradís, J., &Malet, A. (1989). *La génesis del álgebra simbólica. Los orígenes del álgebra: de los árabes al Renacimiento*. Barcelona: Promociones y Publicaciones Universitarias.

Paradís, J., Malet, A., & de Imperial, J. M. (1989). *La génesis del álgebra simbólica. El álgebra en el período renacentista. La recuperación de los clásicos griegos*. Barcelona: Promociones y Publicaciones Universitarias.

Petty, R. E. &Briñol, P. (2010).Attitude change. In R. F. Baumeister& E. J. Finkel (Eds.), *Advanced social psychology: The state of the science* (pp. 217-259). Oxford: Oxford UniversityPress.

Salcedo , A. (2007). *Anatomía de la persuasión: de los clásicos a la programación neurolingüística*. Madrid: ESIC Editorial.

Schoenfeld, A.H. (2011). *How we think*. New York: Routledge.

Tall D. & Mejía-Ramos J.P. (2009).The long-term cognitive development of different types of reasoning and proof.En Hanna, G., Jahnke, H. N., & Pulte, H. (Eds.).*Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives* (pp. 1-13). New York: Springer.

Tymoczko, T., (1986).The four-color problem and its philosophical significance. In T. Tymoczko (Ed.), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp. 243-266). Boston: Birkhäuser.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., & Trigueros M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental: Una propuesta alternativa*. México: Editorial Trillas.

## Anexo 1 Versión en español del artículo Certezas matemáticas en la historia y en la educación a distancia

# CERTEZAS MATEMÁTICAS PRESENTES EN EL ÁMBITO HISTÓRICO Y EN EL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

Benjamín Martínez Navarro. Mirela Rigo Lemini.

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México

*Se presenta un caso histórico en el que certezas extra-matemáticas llevan a razonamientos matemáticos inválidos y se compara con un caso semejante que se dio en el ámbito de la educación virtual. Para el análisis de las certezas se propone un instrumento teórico-metodológico. Se sugiere la necesidad de que educadores tomen conciencia de que las certezas en hechos de las matemáticas no siempre están basadas en comprensiones matemáticas.*

## ANTECEDENES Y OBJETIVOS DEL PAPER

Euclides, en *Los Elementos,* apoyó su teoría de las paralelas en el V Postulado; ahí estableció que dos líneas que no están igualmente inclinadas con respecto a una tercera tendrán siempre que intersecarse. A lo largo de la historia los matemáticos recurrieron a diferentes medios para convencerse de la verdad de esta proposición –comenta Lovachevski (1974, p. 2); y es que, a diferencia de los otros cuatro, el V Postulado se compromete con un comportamiento en el infinito (Kline, 2009). Saccheri, por ejemplo, decidió establecer la verdad del Postulado acudiendo a una doble reducción al absurdo: negando la existencia (ninguna paralela a *l* pasa por *P)*, y negando la unicidad (por *P* pasa más de una recta). La negación de la existencia produjo una contradicción. De la segunda opción Saccheri dedujo varios teoremas que desde su perspectiva le resultaron extraños; aunque libres de contradicción, lo insólito de los resultados obtenidos le bastó para rechazar esa segunda posibilidad, de lo cual derivó la veracidad del V Postulado como única opción posible. Comenta Kline (2009, p. 508) que "cuando Saccheri concluyó que el V Postulado era consecuencia necesaria de los otros, sólo consiguió mostrar que cuando un hombre pretende establecer algo de lo que ya está convencido, se satisfará aunque su demostración no tenga que ver nada con los hechos". Otro intento por demostrar el postulado de las paralelas se le debe a Legendre; en 1800 él publicó que la suma de los ángulos de un triángulo no puede ser mayor que 180°, y argumentó que esta suma tampoco debe ser menor que 180°. De su análisis Lobachevski dedujo que las razones de Legendre eran incorrectas, y que "probablemente los prejuicios a favor de la posición aceptada por todos lo indujeron a cada paso a precipitar sus conclusiones o añadir lo que aún no era lícito de admitir en las nuevas hipótesis" (p. 3).

En una lectura crítica de la historia, Lovachevski cuestionó la carencia de rigor lógico de las demostraciones del V Postulado; objetó la ontología y la epistemología idealista que subyacía a esos intentos, al sugerir que "en los mismos conceptos no está encerrada esa verdad que se quería demostrar" (1974, p. 1) y al plantear como alternativa de comprobación un camino empírico, mediante observaciones astronómicas; y con espíritu abierto, construyó la geometría hiperbólica, admitiendo con ello "la existencia de la Geometría en un sentido más amplio del que presentó Euclides" (1974, p.1).

Este pasaje de la historia ilustra cómo los prejuicios –como los de Saccheri o Legendre- pueden perturbar los razonamientos matemáticos y cómo el convencimiento en hechos de la matemática puede estar fuertemente atado a fuentes ajenas a ella, como son los compromisos ontológicos o epistemológicos. En lo que sigue se argumenta con base en evidencias empíricas provenientes de un estudio de caso (de Mariana), que este fenómeno histórico asociado al convencimiento se da también en los procesos de instrucción de las matemáticas. La regularidad de ese fenómeno en ámbitos tan dispares, sugiere de alguna forma su generalidad, y plantea la necesidad de que los educadores lo conozcan y lo consideren en sus prácticas didácticas.

Investigaciones sobre convencimiento y certeza se han orientado hacia el ámbito del profesional de las matemáticas como al de su instrucción. Para el matemático, el convencimiento y la certeza son motores que impulsan su actividad en las etapas de desarrollo heurístico, y una guía para certificar sus resultados durante los procesos de prueba (Tymoczko, 1986). La comunidad de educación matemática ha realizado diversos estudios que implícitamente parten del supuesto de que, a semejanza de lo que sucede con los matemáticos, la certeza también importa en la construcción del conocimiento matemático en el aula. Algunos de esos trabajos se han recreado en ambientes extra-clase y se han focalizado ya sea en los estudiantes (e.g., el de Balacheff, 2000) o bien en los profesores (e.g., el de Harel&Sowder, 2007); otros, desarrollados en ambientes intervenidos de clase, se han centralizado básicamente en alumnos (e.g., el de Krummheuer, 1995). A diferencia de los anteriores, en este trabajo se parte de un fenómeno histórico asociado a la construcción de certezas para tomarlo como un laboratorio epistemológico que permita ayudar a explicar la presencia del mismo fenómeno en ambientes actuales de capacitación a través de un foro virtual. Esto planteó el reto de contar con elementos teóricos e instrumentos analíticos que permitieran distinguir los estados de certeza (en torno a los enunciados de contenido matemático que ahí surgen) que vivencian los alumnos inscritos y que expresan de manera escrita. Por ello, en lo que sigue se propone un instrumento que pretende cubrir esos fines.

## PROPUESTA DE UN INSTRUMENTO PARA DISTINGUIR ESTADOS EPISTÉMICOS DE CERTEZA Y DE PRESUNCIÓN O DUDA

En la investigación se considera que, asociadas a sus aseveraciones de contenido matemático, los sujetos pueden experimentar estados internos de certeza o duda (cuando le asocian el máximo grado de probabilidad a lo creído) o de presunción (cuando le asocian grados menores de probabilidad a lo creído). A estos estados Rigo (2013) les llama "estados epistémicos".

En el diseño del instrumento teórico-metodológico que se propone a continuación convergieron perspectivas provenientes de distintas disciplinas: de la filosofía (Wittgenstein), la psicología (Bloom, Hastings &Madaus), y la sociología (Abelson). Particularmente relevante para el estudio resultó la aportación de trabajos lingüísticos como los de Hyland (1998), que permitieron recurrir al análisis del meta-discurso de los participantes en el foro virtual, con el fin de desvelar las intenciones comunicativas (muchas de ellas inconscientes) que ellos proyectan a través de su escritura.

En esta investigación se considera que una persona (que participa en un foro virtual) vivencia un grado de certeza, o bien de presunción o duda, en un enunciado matemático, cuando cumple con alguno(s) de los criterios que aparecen en la Tabla 1, criterios que son suficientes pero no necesarios.

| | |
|---|---|
| *Elementos del habla* | La persona recurre a enfatizadores del lenguaje que pueden revelar un mayor grado de compromiso con la verdad de lo que dice, por ejemplo, cuando la persona usa el modo indicativo de los verbos (e.g. tengo). |
| *Acción* | El sujeto realiza acciones consecuentes con su discurso. |
| *Familiaridad* | La persona recurre a formas de sustentación basados en la familiaridad (resultado de la repetición, la memorización y las costumbres). |
| *Elaboración cognitiva* | La persona recurre a formas de justificación basados en razones matemáticas. |
| *Determinación* | La persona manifiesta de manera espontánea y determinada su adhesión a la veracidad de un enunciado matemático indicando algún grado de determinación. Este grado puede ser mayor cuando el sujeto sostiene una creencia, a pesar de tener al colectivo en su contra. Incluso puede llegar a esforzarse por convencer a otros de la verdad de su posición. |
| *Interés* | Las participaciones de una persona que interviene con interés en torno a un hecho matemático específico en un foro virtual son: |
| | -*Sistemáticas*. Es decir, el sujeto contesta todas las preguntas dirigidas a él de la manera más detallada posible. |
| | -*Informativas*. Sus afirmaciones, procedimientos y/o resultados son suficientemente informativos. |
| | -*Claras y precisas*. |
| *Consistencia* | La persona muestra consistencia en sus distintas intervenciones. |

Tabla 1. Instrumento teórico-metodológico para distinguir estados de certeza

## ASPECTOS METODOLÓGICOS

La investigación cualitativa que aquí se presenta está centrada en un estudio de caso de tipo interpretativo (Denzin & Lincoln, 1994). El estudio empírico se llevó a cabo en el Diplomado de Temas Fundamentales de Álgebra impartido por el Instituto Nacional para la Educación de los Adultos (México); el diplomado tiene el propósito de fortalecer la formación de personas que asesoran en temas de álgebra a adultos que se encuentran en proceso de obtener su certificado de secundaria. Las actividades de enseñanza se desarrollan a distancia mediante el uso de la plataforma Moodle a través de la cual los estudiantes reciben apoyo, evaluación y retroalimentación por parte de un tutor. El episodio que aquí se analiza pertenece al Módulo IV y su elección obedece a que ahí los asesores tendieron a sustentar sus respuestas. Los episodios comienzan con la solicitud del tutor para responder a una tarea y finalizan con el acuerdo de los estudiantes en torno a una solución. Para este reporte se seleccionaron participaciones de tres estudiantes quienes parecen haber experimentado muy distintos estados epistémicos ante la tarea propuesta, a pesar de que ninguna de ellas obtuvo el resultado correcto.

## EPISODIO "EL PROBLEMA DEL MILLÓN DE DÓLARES"

El episodio trató sobre la resolución del siguiente problema: Obtendrás un millón de dólares si encuentras un número de dos cifras que cumpla las siguientes condiciones simultáneamente: a) Si a la primer cifra del número que buscamos le sumas el doble de la segunda cifra, el resultado es 5; b) Si al doble de la primera cifra del número que buscamos le sumas el cuádruplo de la segunda cifra, el resultado es 7. Se esperaba que los estudiantes concluyeran que no había un número que cumpliera con las condiciones del problema y observaran que al graficar las ecuaciones se obtienen dos rectas paralelas.

### Fragmento 1o. Primera intervención de Mariana. Principios que guían la certeza

Mariana inició su participación del siguiente modo

| | |
|---|---|
| 1.1 | $x+2y=5; \quad 2x+4y=7$ |
| 1.2-1.6 | ... Como las ecuaciones no contienen una incógnita igual se aplica el método de sustitución ... para eliminar una incógnita, quedándonos 2x+4y=10. Después de este paso ya puedes realizar la operación. |
| 1.7 | $2x+4y=10$<br>$\underline{2x-4y=7}$<br>$4x+0=17$ |
| 1.8-1.9. | Separamos términos y despejamos "x". [Entonces]... x=4.25 |
| 1.10-1.11 | Obtenido el valor sustituimos en una de las 2 ecuaciones: 2(4.25)+4y=7 |
| 1.12-1.13 | Realizamos la operación, separamos términos y despejamos "y". |

8.5+4y=7; 4y=7-8.5; 4y=1.5; y=0.375

1.14-1.15 Comprobamos. Primera ecuación: 4.25+2(0.375)=5; 5=5.

Segunda ecuación: 2x-4y=7; 2(4.25)-4(0.375)=7; 8.5-1.5=7; 7=7

Durante su resolución, Mariana utilizó diferentes sistemas de ecuaciones. El primero resultó de la traducción del lenguaje común al algebraico (1.1); después obtuvo uno equivalente (en 1.5), y después, en 1.7, obtuvo uno modificado, al alterar un signo (del término 4y de la segunda ecuación). Para obtener el valor de x empleó la primera ecuación de 1.7, y para obtener el valor de y, comenzó con la segunda de 1.1 y terminó con la segunda ecuación de 1.7. Para comprobar utilizó la primera ecuación de 1.1 y la segunda de 1.7.

En su resolución ella aplicó libremente las reglas del álgebra, al modificar caprichosamente los signos de los términos de las ecuaciones y al emplear indistintamente las ecuaciones que aparecen en dichos sistemas y combinarlasde manera *ad hoc* según se adecuaran a sus fines. Pareciera que ello respondió a un objetivo específico: obtener valores para las literales *x* e *y*, objetivo que posiblemente pudo derivarse de una interpretación de la literal sólo como incógnita, excluyendo los otros usos de la variable.

Durante este proceso parece que Mariana experimentó altos grados de presunción e incluso de certeza. Entre otras razones, porque ella tuvo *determinación* para ser la primera en someter a juicio del grupo sus respuestas y procedimientos; por el uso de *enfatizadores,* específicamente, por el del modo indicativo de los verbos (en 1.2 o 1.14); porque *actuó* en consecuencia con los procedimientos que anunció, por ejemplo, cuando anunció la aplicación del método de sustitución (1.2) todas sus acciones posteriores se encaminaron a tratar de aplicar reglas que ella creyó pertenecían a ese método; porque sustentó sus afirmaciones en *esquemas* basados en la *familiaridad* (como el método de suma y resta, en 1.7, o lo que ella llamó el ‘método de sustitución, en 1.2). Su certeza también la dejó ver al mostrar *interés* por resolver el problema, al explicar detalladamente su solución, al contestar todas las preguntas del problema, al resolver el sistema que planteó sin que el tutor se lo solicitara, y al ser clara en su exposición.

### Fragmento 2º. El cuestionamiento de José

José publicó la siguiente participación para rebatir la respuesta de Mariana:

2.1-2.2 Que tal Mariana. Realmente me sorprendiste. Pero tienes un pequeño detalle.

2.9-2.11 2x-4y=7. En este paso, ya le cambiaste el signo (debe ser ***+4***y ó multiplicar por -1, pero toda la ecuación), ya no es la ecuación original. ¿Qué opinas?

José se percató que Mariana no había aplicado correctamente las reglas del álgebra (cambiar el signo en el sistema 1.7), que eso tenía consecuencias (“ya no es la ecuación original”, 2.9), y se lo hizo saber, esperando su reacción.

### Fragmento 3º. Réplica de Mariana. Explicitación de razones y fortalecimiento de la certeza

La réplica de Mariana fue la siguiente:

3.1-3.4 Efectivamente tienes toda la razón [José], se afecta a toda la ecuación. Pero el propósito del sistema de ecuaciones es que se logre el resultado mediante la eliminación de alguna de las incógnitas. Si yo afecto a toda mi ecuación me quedaría en 3 y ya no tendría una incógnita para despejar.

3.5-3.10 x+2y=5; 2x+4y=7. En este caso como las ecuaciones no contienen una incógnita igual se aplica el método de sustitución donde alguna de las dos ecuaciones se multiplique por algún número que nos sirva para eliminar una incógnita. 2(x+2y)=2(5), quedándonos 2x+4y=10. Todo va bien hasta aquí.

3.11-3.12 Después de este paso ya puedes realizar la operación
2x+4y=10
<u>-2x-4y=-7</u>
40+0=3

3.13-3.16 Obtenido el valor sustituimos en una de las 2 ecuaciones: 2(3)+4y=7. Realizamos la operación y separamos términos y despejamos “y”... y=0.25.

3.17-3.18 Comprobamos. Primera ecuación: x+2y=5; 3+2(0.25)=5 y no obtengo el 5.
Segunda ecuación: 2x-4y=7; 2(3)-4(0.25)=7; 6-1=5; tampoco obtengo el 7.

3.19-3.20 Por lo tanto solo afecte a 4y para no afectar toda la ecuación y mucho menos mi resultado. Tal vez no lo ves correcto pero para mí sí porque el objetivo es encontrar el valor correcto.

3.22 Comprobamos. Primera ecuación: x+2y=5; 4.25+2(0.375)=5; 5=5.

Al principio del fragmento (de 3.1 a 3.4) Mariana le concedió la razón a José, pero subordinó esas razones a lo que consideró se debe obtener de un sistema de ecuaciones: “lograr el resultado”, probablemente porque creyó que de la propuesta de su compañero se derivaban absurdos (como “no tener una incógnita que despejar” y “quedarse en 3”, refiriéndose posiblemente a 3.12). En un segundo momento (de 3.4 a 3.18) siguió la sugerencia de José, quizás con la idea de ‘demostrarle matemáticamente su error’ al desprender de dicha sugerencia una contradicción: “no obtengo el 5” y “no obtengo el 7”, sin percatarse de que dicho error no provenía de esa resolución sino de la arbitrariedad con la que ella manipuló el lenguaje algebraico (e.g. al suponer en 3.12-3.13 que x=3, o utilizar el sistema de ecuaciones que se ajustaba más a sus fines). En el tercer momento (3.19-3.20) sustentó de nuevo la conveniencia de su método, supeditándolo otra vez a la consecución de sus objetivos: “encontrar el valor correcto” (3.20), y en el cuarto (3.22) comprobó su validez, sin percatarse de que debía sustituir los valores en las dos ecuaciones de 1.1 y no sólo en la que se ajustara a sus intereses.

En su segunda intervención Mariana, muy probablemente, fortaleció sus estados epistémicos de certeza, al poder explicitar sus objetivos y argumentos, y ‘demostrar’ el error de su compañero y la validez de sus principios y su método, todo lo cual lo hizo con *determinación y con actitud consistente*; su certeza también se puede inferir del uso de *enfatizadores* (no sólo por la asertividad de su lenguaje sino por el uso del modo indicativo en “obtengo”, en 3.18, “es” en 3.2 o “mucho menos”, en 3.19); así como del *interés* por reiterar su resolución, aclarar sus puntos de vista, y rebatir públicamente a su compañero, a pesar de que entendía que él llevaba cierta razón.

**Fragmento 4º. Participación de Jeymi. La duda**

4.2- Creo que yo también me encuentro en un problema. Estoy intentando hacer el segundo
4.4 ejercicio y no obtengo valor de "x" ni de "y". Mis ecuaciones son: x+2y=5; 2x+4y=7
4.5 Enseguida le cambio de signo a la primera ecuación.
4.6- -x-2y=-5
48 2x+4y=7
x+2y=2; x=2-2y. Sustituyendo en la primera ecuación (2-2y)+2y=5 [de donde] 2=5
4.9 Y no tengo ningún valor ??????????????? ¿qué pasa? ... ¡auxilio!

Aplicando rigurosamente las reglas del álgebra, Jeimy llegó a un absurdo que la hizo dudar. Sin presuponer, simplemente lo distinguió y pidió ayuda.

**HALLAZGOS PRINCIPALES**

Interesante es el caso de Mariana porque aunque ella muestra que conoce algunas reglas del álgebra (ver 3-5 a 3.12), sus compromisos ontológicos sobre las características que deben poseer las tareas matemáticas, y en particular, los sistemas de ecuaciones -de tener una incógnita que despejar y una solución precisa y numérica que encontrar-, parecen representar un obstáculo que le impiden aplicar dichas reglas a cabalidad.

Mariana, al igual que Saccheri o Legendre, siguió sus pre-juicios ontológicos, y al igual que ellos, esos pre-juicios la llevaron a “admitir demostraciones que no tenían que ver con los hechos” y la “indujeron a precipitar sus conclusiones o añadir lo que no era lícito” (ver p.1 de este escrito).

Jeimy, como Mariana, se enfrentó a un problema que ponía en entredicho sus creencias (de la existencia numérica y única de toda tarea matemática) y sus conocimientos algebraicos. Pero mientras Mariana se aferró, sin asomo de duda, a un ideal del objeto matemático, supeditando a esos compromisos ontológicos las reglas del álgebra, Jeimy prefirió ajustarse al rigor lógico –como lo hiciera Lovachevski, tomando las debidas distancias- al seguir escrupulosamente las reglas del álgebra; Jeimy, a diferencia de Mariana, se dio el lujo de dudar de los resultados obtenidos, de reconocer su ignorancia y de pedir ayuda, apertura metacognitiva que la puso en condiciones de aprender.

Del análisis expuesto se desprende una importante consideración didáctica, que tiene que ver con la ayuda que se le puede prestar a Mariana. La participación de José deja ver que no bastó con mostrarle sus errores algebraicos, porque de alguna manera ella tenía conciencia de ellos. De lo que Mariana no parece haberse percatado, y quizás en esto sí que habría que auxiliarla, es que sus creencias y sus compromisos ontológicos (que probablemente los tomaba como verdades incuestionables e inamovibles) la llevaron a perder el rigor lógico en la aplicación de las reglas algebraicas, y en última instancia, le obstaculizaron el avance de sus aprendizajes.

En el escrito se muestra que la certeza en hechos matemáticos no necesariamente está relacionada con la comprensión matemática. Esa certeza puede tener profundas raíces en consideraciones extra-matemáticas, como son los compromisos ontológicos. Es importante por lo aquí expuesto, que el profesor y los que lo forman tomen conciencia de este fenómeno, porque tiene significativas consecuencias en los aprendizajes de sus alumnos.

## Referencias

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Universidad de los Andes.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (1994). Introduction. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1-18). California: Sage.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspective on the learning and teaching of proof.  In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Charlotte, NC: NCTM.

Hyland, K. (1998). Persuasion and context: The pragmatics of academic metadiscourse. *Journal of Pragmatics*, *30*, 437-455.

Kline, M. (2009).*Matemáticas para los estudiantes de humanidades.*México: FCE.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb, & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-270). Hillsdale, NJ: Lawrence ErlbaumAssociates.

Lombardo-Radice, L. (1974). Lobacevskij, matemático-filosofo. In N. I. Lobacevskij. *Nuovi Princípi della Geometria, con una teoria completa delle parallele* (pp. 13-54). Universale Scientifica Boringhieri (Traducción S. Ursini, disponible en Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México).

Rigo, M. (2013). Epistemic schemes and epistemic states. A study of mathematics convincement in elementary school classes. *Educational Studies in Mathematics*, 84(1), 71-91.

Tymoczko, T., (1986). The four-color problem and its philosophical significance. In T. Tymoczko (Ed.), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp. 243-266). Boston: Birkhäuser.