Centro de Investigación y de Estudios
Avanzados del Instituto Politécnico
Nacional

Unidad Distrito Federal
Departamento de Matemática Educativa

Uso de recursos en la resolución de problemas no rutinarios: estudio con profesores de matemáticas de bachillerato

Tesis que presenta

Clara Mayo Juárez

Para obtener el grado de

Maestra en Ciencias

en la especialidad de Matemática Educativa

Director de Tesis: Dr. José Guzmán Hernández

México, D.F. Diciembre de 2012

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología
(CONACYT) por el apoyo financiero que he recibido
durante mis estudios de maestría por medio
de la beca otorgada con el número de
registro 250516.

AGRADECIMIENTOS

Mis sincero agradecimiento a mi director de tesis, Dr. José Guzmán Hernández por sus valiosas observaciones y recomendaciones durante la realización de esta investigación, así como de su tiempo y paciencia dedicado.

Agradezco a mis sinodales los doctores: Ernesto Sánchez e Isaías Miranda por sus valiosas observaciones que favorecieron el mejoramiento de esta tesis.

Agradezco a mis compañeros y amigos por su amistad y sus valiosas observaciones, las cuales contribuyeron al mejoramiento de este trabajo de investigación.

DEDICATORIAS

Con admiración, respeto y cariño a César por su apoyo incondicional y por haberme alentado en todo momento a conseguir este logro profesional.

A mis padres y hermanos por la confianza brindada.

ÍNDICE

RESUMEN

Con el empleo de problemas no rutinarios, en esta investigación se trató de ver el uso de recursos matemáticos y la problemática de la falta de conocimiento matemático de los profesores de nivel medio superior, al resolver problemas fuera del salón de clases. En el presente estudio se utilizaron teorías como: *Teoría de Campos Conceptuales* de Verganud (1990), Teoría *Antropológica de lo Didáctico* de Chevallard (1999) y el *Enfoque Documental* de Gueudet y Trouche (2009), con la finalidad de obtener un marco referencial, que permitió alcanzar los objetivos planteados en la presente investigación.

Debido al interés de esta investigación, se utilizó un método de indagación de tipo cualitativo. Para la recolección de datos, se recurrió a entrevistas video-grabadas y audio-grabadas aplicadas a diez profesores de matemáticas de nivel medio superior, al resolver problemas. El análisis de los datos obtenidos a través de las entrevistas, permite ver las dificultades de los profesores al hacer uso de recursos matemáticos (teoremas-en acto y conceptos-en-acto) al resolver problemas no rutinarios.

El estudio muestra que los recursos utilizados por el profesor, al resolver problemas, son teoremas y conceptos-en-acto; algunos correctamente usados y otros erróneamente utilizados, y la influencia que dichos recursos en conjunto tienen en la solución de los problemas. La investigación permite ver la carencia de conocimiento matemático de los profesores, a través de las dificultades mostrada al hacer uso de recursos con el propósito de resolver problemas.

ABSTRACT

By means of the use of non-routine problems, this research aimed at trying to see the use of mathematical resources and the issues related to the lack of mathematical knowledge of high school teachers, when it came to solving problems outside the classroom. In the present study theories such as Verganud's Theory *of Conceptual Fields* (1990), Chevallard's *Anthropological Theory of Didactics* (1999) and the *Documentary Approach* of Gueudet and Trouche (2009), were used with the objective of obtaining a referential framework, which enabled us to reach the objectives established in this research.

Due to the nature of this research, a qualitative method of making inquiries was used. The collection of data was carried out by means of video-recorded and audio-recorded interviews which were applied to ten high school teachers, when solving problems. The analysis of the data obtained as a result of the interviews, allows to highlight the difficulties teachers have making use of the mathematical resources (in-act theorems and in-act concepts) when solving non-routine problems.

This study shows that the resources used by the teacher, when solving problems, are theoremes and in-act concepts; some appropriately used and some mistakenly used, and also the influence that such resources have on the solution of problems. The research allows to highlight the lack of mathematical knowledge of teachers, by means of the difficulties shown when making use of the resources with the purpose of solving problems.

PRESENTACIÓN

El presente trabajo de investigación, titulado: "Uso de recursos en la resolución de problemas no rutinarios[1]: estudio con profesores de matemáticas de bachillerato", reporta el desarrollo y los resultados de dicho estudio. Éste se llevó a cabo durante una serie de sesiones, en las que profesores[2] de nivel medio superior resolvieron, de manera individual, problemas que involucran diversos contextos; con ayuda únicamente de recursos materiales como: lápiz, papel y de una calculadora para fines prácticos de cálculos matemáticos, y de recursos no materiales como el conocimiento matemático que posee cada profesor. El propósito de este trabajo fue analizar y documentar los diferentes recursos matemáticos utilizados por los profesores al resolver problemas donde no se cuenta con un método de solución anticipado, sino que se requiere buscar alguna o algunas técnicas para dar solución al problema. A continuación, se describe *grosso modo* el contenido de cada capítulo de la presente investigación, con el propósito de dar al lector un panorama general.

El Capítulo 1 está dedicado a describir de manera detallada el problema de investigación, los propósitos y preguntas de investigación, así como la pertinencia del estudio. También, se mencionan los trabajos de investigación ya existentes que tratan la problemática aquí abordada. En el Capítulo 2, se hace una revisión de la literatura referente al problema de investigación; se toman en cuenta trabajos relacionados con los recursos, conceptos y teoremas-en-acto, conocimiento matemático, técnicas institucionales. Posteriormente, en el Capítulo 3, se hace la descripción de la metodología utilizada en el trabajo de investigación; en este capítulo son descritas las características de los participantes en la investigación; elaboración y aplicación de los instrumentos, así como las tareas resueltas por cada uno de los profesores durante las entrevistas.

En el Capítulo 4, se aborda el análisis de los datos; también, se discuten los resultados obtenidos al entrevistar a los profesores de matemáticas de nivel medio superior. Los

---

[1] De acuerdo con Selden, Mason y Selden (1994), se entiende como problema no rutinario o novedoso como aquel que al leer el enunciado no viene a la mente un procedimiento algorítmico a seguir; es decir, son problemas cognitivamente no triviales, y donde es necesario buscar diferentes métodos para dar solución al problema.

[2] En este estudio los términos docente, profesor y maestro son utilizados como sinónimos.

aspectos principales discutidos en este capítulo son los recursos matemáticos[3] vistos como (conceptos-en-acto y teoremas-en-acto[4]), utilizados por el profesor al resolver problemas. Estos “conceptos-en-acto” y “teoremas-en-acto” son discutidos en el Capítulo 2 donde se definen con detalle, de acuerdo con Vergnaud (1990) en su teoría de Campos Conceptuales. Así mismo, se hace un análisis cualitativo de los recursos matemáticos utilizados, a través de la justificación mostrada por cada uno de los profesores. También, se hace un análisis general de los resultados obtenidos por los docentes que participaron en la investigación.

El Capítulo 5 aborda lo referente a las conclusiones de lo más relevante encontrado en la investigación en función de los objetivos planteados inicialmente; también, se describe cómo fueron contestadas las preguntas de investigación. Los datos recogidos y el análisis de estos ponen de relieve la importancia que tienen los recursos matemáticos en la resolución de problemas. Por último, se menciona lo referente a las futuras investigaciones sobre el uso de los recursos en la práctica del profesor[5] en ejercicio.

[3] En la presente investigación, el término recurso matemático se refiere a los conceptos-en-acto y teoremas-en-acto; dicho recurso matemático es el conocimiento implícito manifestado en la acción del sujeto.
[4] Terminología tomada de Vergnaud (1990), discutida en el Capítulo 2 de esta tesis.
[5] La práctica del profesor es entendida como la actividad que lleva a cabo dentro del salón de clases (Rogalski, 2003).

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Introducción

Actualmente, existen trabajos de investigación (e.g., Adler, 2000; Ball, Thames & Phelps, 2008; Cohen, Raudenbush & Ball, 2002; Gueudet & Trouche, 2009; Hill, Rowan, & Ball, 2005; Shulman, 1986, entre otros) donde se resalta la necesidad de centrar las discusiones en torno a la práctica del profesor, en cuanto a sus recursos y el conocimiento matemático utilizado en la práctica del mismo. Ello, con la finalidad de intentar comprender lo que sucede en los salones de clase.

Shulman (1986) en su investigación plantea la necesidad de indagar sobre el desarrollo del conocimiento del docente en la enseñanza. Este investigador afirma que no sólo intervienen en la práctica del profesor las formas de su comportamiento, sino también su pensamiento. Toda actividad educativa tiene como respaldo una serie de creencias y teorías implícitas que forman parte del pensamiento docente, y que orienta sus ideas sobre el conocimiento, su enseñanza y sobre cómo se construye éste, o bien, sobre cómo se aprende. En ese mismo artículo, Shulman distigue tres tipos de conocimiento que afectan la práctica del profesor, y que, posteriormente, extiende a siete.

De acuerdo con Shulman (1987), un docente puede transformar la comprensión, las habilidades de desempeño y valores o actitudes, en acciones y representaciones pedagógicas. Por ello, indica que la docencia se inicia cuando el docente reflexiona en qué debe ser aprendido y cómo será aprendido por los estudiantes. Shulman (1987) propuso que la persona dedicada a la docencia tiene un conocimiento base que, al menos, incluye siete categorías: el conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico general, conocimiento del currículo, conocimiento pedagógico del contenido, conocimiento de los alumnos y sus características, conocimiento de los contextos educativos y conocimiento de los objetivos.

La investigación de Hill et al. (2005) se enfoca al conocimiento del profesor; estos autores discuten cómo el conocimiento matemático de los profesores contribuye a las ganancias del rendimiento en matemáticas de los estudiantes. Uno de los objetivos de su estudio fue demostrar que el rendimiento estudiantil no sólo depende del conocimiento del profesor usado en la enseñanza de las matemáticas, sino de otras posibles medidas de calidad de los maestros, tales como: la certificación de los maestros, cursos de educación y experiencia. En su estudio, estos autores encuentran que el conocimiento matemático de los docentes estuvo significativamente relacionado con el rendimiento de los estudiantes.

Ball et al. (2008) centran su investigación en el trabajo relacionado con la enseñanza; ello, con el fin de conceptualizar el conocimiento matemático y las habilidades necesarias que requieren los profesores. En su artículo, los autores centran su atención en el conocimiento de los contenidos para la enseñanza basada en la noción de conocimiento pedagógico de Shulman (1986). En su investigación, Ball y cols., utilizan los estudios de la práctica docente para analizar las exigencias de la enseñanza matemática y, sobre la base de estos análisis, desarrollaron un conjunto de hipótesis comprobables sobre la naturaleza del conocimiento matemático para la enseñanza[6]. Estos autores mencionan que en particular, estos estudios los han llevado a la hipótesis de algunas mejoras en el concepto popular del conocimiento del contenido pedagógico y el concepto más amplio de conocimiento de contenido para la enseñanza.

Shulman (1987) así como Ball y cols., no sólo se preocupan por el conocimiento para la enseñanza que debe tener cada profesor, sino también, sobre el conocimiento de la materia misma que se debe enseñar. Un profesor no sólo debe conocer los temas que deben enseñarse y la organización; como ésta debe presentarse a los estudiantes, sino que debe tener un dominio de los conceptos y teorías que justifican cada una de las técnicas procedimentales utilizadas en la enseñanza, muchas de las veces, manifestado a través de la resolución de problemas. Existen trabajos, como los de Adler, 2000; Gueudet y Trouche, 2009, entre otros, donde es considerado el conocimiento de conceptos y teorías como un recurso importante dentro de la práctica del profesor.

Gueudet y Trouche (2009) al igual que Adler (2000) centran su investigación en el uso de recursos. Adler señala la importancia que se le debe dar a los recursos en la práctica de los profesores y cómo influyen estos en el aprendizaje de las matemáticas; por lo que esta autora menciona que los recursos utilizados en la práctica deben convertirse en un foco de

[6] Mathematical Knowledge for Teaching (MKT). Ball et al. (2008) se refieren al MKT como el "conocimiento matemático necesario para llevar a cabo el trabajo de enseñanza de las matemáticas". (p.395)

atención, y argumenta que a través de una clara comprensión de los recursos, los profesores pueden elaborar su práctica a través de un uso más transparente de estos dentro del aula y así permitir el acceso y el cambio de las matemáticas escolares.

En el trabajo de Cohen et al. (2002) se argumenta que el aprendizaje se ve afectado por la cantidad de recursos (libros, tamaño de clase, las prácticas, modalidades de organización, estrategias, conocimientos, habilidades, etc.) que se utilizan en la instrucción, no por su mera presencia o ausencia, sino por cómo estos son usados por el profesor. Los diferentes efectos de los recursos dependen de las diferencias de uso que se le den a estos. Estos autores señalan que el conocimiento de los profesores, las habilidades y acciones estratégicas pueden ser vistos como recursos, al igual que las experiencias de los estudiantes, los conocimientos, normas y enfoques de aprendizaje. Cohen et al. (ibídem), señalan que la calidad de la enseñanza no se puede crear simplemente con un conjunto de recursos convencionales, tales como libros, dinero o profesores con grados cada vez más altos. Tampoco la calidad surge con las instalaciones o los planes de estudio. La calidad de la enseñanza depende del equilibrio complejo entre conocimientos y prácticas, acciones colectivas y recursos convencionales. Esto indica que hay tipos de recursos y que su relación y su uso son cruciales en los efectos sobre el aprendizaje y la enseñanza.

En el trabajo de Gueudet y Trouche (2009), los autores definen el concepto de recurso y la importancia que tiene en el proceso de documentación del docente; ellos se centran más concretamente en lo que llaman el trabajo de documentación de los profesores: en busca de recursos, la selección/diseño de tareas matemáticas, la planificación de su sucesión y la gestión del tiempo asociado, etc. Ellos señalan que la documentación se refiere a las complejas y variadas formas en que los maestros trabajan con los recursos, en su clase y fuera de clase, de forma individual, pero también de manera colectiva. Los autores sostienen que los profesores, en su actividad profesional, interactúan con una amplia gama de recursos; estas interacciones y sus consecuencias ocupan un lugar central en el desarrollo profesional de los docentes. Es importante mencionar que Gueudet y Trouche (ibídem) consideran el conocimiento de los profesores en su conjunto, sin usar una clasificación de sus diferentes tipos como lo maneja Shulman (1986); este conocimiento dentro del trabajo de Gueudet y Trouche es nombrado como recurso.

La presente investigación centra su atención en el profesor y su conocimiento, a través de la utilización de sus recursos matemáticos en la resolución de problemas no rutinarios. Este interés en los recursos matemáticos del profesor se debe por su papel que tiene como generador de situaciones de aprendizaje a través del uso de recursos, y donde dichos recursos son cruciales para la enseñanza y aprendizaje.

Para llevar a cabo dicha investigación, se realizó un estudio sobre los recursos matemáticos utilizados al resolver problemas no rutinarios y la influencia que tienen estos en la solución del problema, así como las dificultades presentadas por los profesores. Se eligió este tipo de problemas debido a que permiten, más convenientemente, indagar sobre la problemática del conocimiento matemático del profesor, a través de la utilización de los recursos al resolver problemas novedosos. Un profesor, al enfrentarse a un tipo de situación[7] o situaciones, utiliza diferentes recursos matemáticos para poderlos resolver, pero esta amplia variedad de recursos empleados depende de la consolidación de su conocimiento matemático y de la habilidad que dicho profesor posea para poder aplicarlo en diferentes problemáticas.

1.2 Identificación del problema

Desde hace ya algunas décadas, el estudio sobre el uso del conocimiento del profesor en la práctica docente ha atraído la atención de algunos investigadores (Ball, 1990; Ball, Thames & Phelps, 2008; Shulman, 1986, 1987, entre otros). En la actualidad, es posible encontrar diversos trabajos sobre el conocimiento del profesor utilizado en su práctica docente. Especialistas en educación matemática han empezado a conceptualizar el conocimiento de los profesores para la enseñanza, argumentando que los efectos docentes en el rendimiento estudiantil son impulsados por las capacidades de los docentes para entender y usar el conocimiento de la materia y llevar a cabo las tareas de enseñanza (e.g., Ball, 2008; Hill et al., 2005; Shulman, 1986, entre otros).

Un trabajo pionero sobre esta temática es el de Shulman (1986). En éste, el autor discute el carácter de diversos tipos de conocimientos que afectan la práctica del profesor de matemáticas. Él plantea que para ubicar el conocimiento de los profesores, habría que distinguir tres tipos de conocimiento:

[7] En esta investigación, situación es sinónimo de problema.

a) conocimiento del contenido temático de la materia,
b) conocimiento pedagógico del contenido,
c) conocimiento curricular.

De acuerdo con Shulman (1986), el conocimiento del contenido temático se refiere a la cantidad y organización de conocimiento del tema *per se* en la mente del profesor. Para pensar apropiadamente acerca del conocimiento del contenido se requiere ir más allá del conocimiento de los hechos o conceptos; se requiere entender las estructuras del tema. El segundo es el que ha recibido más atención, tanto en el campo de la investigación, como en el de la práctica. Sobre el conocimiento pedagógico del contenido (PCK, por sus siglas en ingles) Shulman menciona que es el conocimiento que va más allá del tema de la materia, este conocimiento es algo más amplio; es decir, es el conocimiento del tema de la materia para la enseñanza. El último, el conocimiento curricular, dice Shulman que:

> Está representado por el abanico completo de programas diseñados para la enseñanza de temas particulares disponibles en relación con estos programas, al igual que el conjunto de características que sirven tanto como indicaciones como contraindicaciones para el uso de currículos particulares o materiales de programas en circunstancias particulares. (1986, p. 10)

Shulman (1987) extiende la noción del conocimiento básico con que el profesor debe contar, incluyendo al menos las siguientes siete Categorías del conocimiento:

- Conocimiento del contenido;
- Conocimiento pedagógico general, teniendo en cuenta especialmente aquellos principios y estrategias generales de manejo y organización de la clase que trascienden el ámbito de la asignatura.
- Conocimiento del currículo, con un especial dominio de los materiales y los programas que sirven como “herramientas para el oficio” [*comillas en el original*] del docente.
- Conocimiento pedagógico del contenido: esa especial amalgama entre materia y pedagogía que constituye una esfera exclusiva de los maestros, su propia forma especial de comprensión profesional.
- Conocimiento de los alumnos y de sus características.

- Conocimiento de los contextos educativos, que abarcan desde el funcionamiento del grupo o de la clase, la gestión y financiación de los distritos escolares, hasta el carácter de las comunidades y culturas.
- Conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educativos, y de sus fundamentos filosóficos e históricos. (p. 8)

Entre las Categorías antes mencionadas, el conocimiento pedagógico del contenido es de especial interés, ya que en éste se identifican los conocimientos para la enseñanza. Éste representa la mezcla de contenido y la pedagogía en la comprensión de cómo los temas particulares, problemas o temas son organizados, y cómo son adaptados y representados en la instrucción de los estudiantes. Shulman (1987) planteó estos tipos de conocimiento que requiere el docente para conseguir un óptimo desempeño profesional.

Las Categorías propuestas por Shulman (1987) fueron retomadas por Grossman (1990) y clasificadas en cuatro categorías: conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico general, conocimiento pedagógico del contenido (conocimiento de la comprensión de los estudiantes, currículo y estrategias para la instrucción) y el conocimiento del contexto.

Otro trabajo que no debe pasar desapercibido, en torno a la problemática aquí discutida, es el de Ball et al. (2008). En este estudio, los autores señalan que el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT, por sus siglas en inglés) comprime dos de las categorías del conocimiento definido por Shulman y sus colegas: conocimiento pedagógico del contenido (PCK, Pedagogical Content Knowledge) y el conocimiento de contenido (CK, Content Knowledge). Estos autores mencionan que el conocimiento del contenido de Shulman (1986) puede ser dividido en conocimiento común del contenido y conocimiento especializado de ese contenido, mientras que el conocimiento pedagógico del contenido puede ser dividido en conocimiento del contenido y de los estudiantes y, conocimiento del contenido y su enseñanza. Por lo que, Ball et al. (2008, p. 400) señalan que el conocimiento común del contenido (CCK, por sus siglas en inglés) es simplemente calcular una respuesta o más generalmente resolver correctamente problemas matemáticos. Es definido como el conocimiento y habilidades matemáticas usadas en otros contextos de enseñanza.

El conocimiento común es un tipo de conocimiento usado en una amplia variedad de contextos; en otras palabras, no es únicamente para la enseñanza, de acuerdo con Ball et al. (2008) el conocimiento especializado del contenido (SCK, por sus siglas en inglés): son los conocimientos y habilidades matemáticas únicas para la enseñanza. También definen el conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS, por sus siglas en inglés) como: el conocimiento que combina conocimiento sobre los estudiantes y conocimiento sobre las matemáticas y el conocimiento de contenido y enseñanza (KCT, por sus siglas en inglés) como: la combinación del conocimiento sobre la enseñanza y conocimiento sobre las matemáticas (p. 401).

Ball et al. (2008) afirman que el conocimiento matemático para la enseñanza está constituido por cuatro tipos de elementos: SCK, KCS, KCT y CCK, que sólo los profesores necesitan conocer. En su artículo, los autores se refieren por conocimiento matemático para la enseñanza, como el conocimiento matemático necesario para llevar a cabo el trabajo de enseñanza de las matemáticas.

Estos trabajos sobre el conocimiento del profesor han surgido debido a la evidencia mostrada por los maestros, respecto de la carencia de los conocimientos esenciales para la enseñanza de las matemáticas (e.g., Ma, 1999; citado en Hill et al., 2005, entre otros) y porque las evidencias existentes en la literatura mencionan que los recursos intelectuales del profesor afectan el aprendizaje de los estudiantes. Es importante mencionar que las recientes investigaciones no sólo se limitan a los efectos que tiene el conocimiento del profesor en el aprendizaje de los estudiantes, sino también sobre el tipo de conocimiento de los maestros para generar aprendizaje de los estudiantes.

Desde finales de 1980 y principios de los noventa, estudiosos (e.g., Ernest,1989; Fennema & Franke, 1992; Thompson, 1984; Shulman, 1986, entre otros) han acumulado pruebas sustanciales de que la enseñanza de los profesores dentro del aula afecta los logros de los estudiantes. A pesar de este gran interés y preocupación hecha por los investigadores, para indagar sobre el conocimiento para la enseñanza y cómo se relaciona éste con el rendimiento estudiantil, hasta el momento ha sido insuficiente, y falta mucho por esclarecer.

Hill et al. (2005) mencionan que el rendimiento de los estudiantes se relaciona, significativamente, con el conocimiento que el profesor posee dentro de su práctica. En este sentido, la actividad del profesor dentro y fuera del salón de clases es fundamental para el aprendizaje de los estudiantes; por tal razón, un elemento crucial asociado con la competencia matemática del profesor es que desarrolle diversas técnicas que le permitan resolver problemas que requieran cierto grado de creatividad. Así, un profesor debe tener un amplio conocimiento de lo que enseña.

El conocimiento matemático para la enseñanza, va más allá de los cursos de matemáticas tomados por el profesor o de las habilidades matemáticas básicas. Conocer y hacer matemáticas no sólo es calcular correctamente, sino también, saber cómo utilizar imágenes o diagramas para representar conceptos matemáticos, así como saber recurrir a procedimientos matemáticos adecuados al resolver problemas y poder ser capaz de analizar las soluciones encontradas (Hill et al., 2005). La eficacia de la enseñanza no reside simplemente en el conocimiento personal del profesor, sino también cómo este conocimiento es utilizado en su práctica. Por tal razón, un objetivo importante de este estudio es analizar y documentar los diferentes recursos matemáticos (conceptos y teoremas-en-acto) utilizados por el profesor, al resolver problemas no rutinarios fuera del salón de clases, con ayuda únicamente de recursos materiales como papel, lápiz y calculadora.

Adler (2000) señala que la eficacia de los recursos para el aprendizaje de las matemáticas radica en su uso; es decir, en el aula en un contexto de enseñanza y aprendizaje. Esta misma autora también propone que el profesor de matemáticas debe prestar más atención a los recursos, por lo que son y cómo funcionan, como una extensión de la práctica docente. En este sentido, se requiere que dentro de la práctica del profesor se dé mayor importancia a la utilización de los recursos, considerando estos como elementos indispensables dentro y fuera del aula.

Por otra parte, en el trabajo de Gueudet y Trouche (2009) se introduce una perspectiva general para el estudio de la evolución profesional de los docentes, donde la atención de los investigadores se centra en los recursos, la apropiación y la transformación de estos por el profesor o por un grupo de maestros que trabajan juntos. Ellos mencionan que temas similares ya han sido investigados por Adler (2000). Estos autores señalan que el conjunto de recursos no se limita a materiales curriculares, sino que incluye todo aquello que interviene en el trabajo de documentación de los docentes: los debates entre profesores, por vía oral y en línea, las hojas de trabajo de los estudiantes, los libros de texto, etc. Esta investigación centra su atención en la actividad docente fuera del salón de clases.

De acuerdo con Cohen et al. (2002), la variación en el uso de recursos también se debe, en parte, a las versiones de los conocimientos, la enseñanza y el aprendizaje en juego en la práctica del profesor. Si el conocimiento es utilizado como algo fijo por los profesores y alumnos, el uso de los recursos se centra en los hechos, algoritmos y fórmulas. Pero si se trata como algo que los estudiantes deben re-inventar, ellos usan recursos para las interpretaciones del tema, descubren relaciones, y aplican conocimientos en situaciones nuevas. Este último es más complejo y abre más la incertidumbre, mientras que el primero permite a los profesores usar, simplemente los materiales que aparecen, como secuencias de comandos o tareas. Por otra parte, Adler (2000) señala que: "los recursos usados en las matemáticas de la escuela van más allá de los recursos básicos y recursos humanos e incluye una amplia gama de recursos materiales, así como la matemática, cultural y los recursos sociales" (p. 210). Adler propone una distinción entre los recursos materiales, humanos y socio-culturales.

Debido a que el estudio sobre los recursos es amplio, en esta investigación se aborda la exploración de los recursos matemáticos de los que hace uso el profesor al resolver problemas no rutinarios y la contribución de dichos recursos en la solución del problema, así como, las dificultades presentadas por el profesor al resolver los problemas. En este sentido, los recursos matemáticos son considerados como “conceptos-en-acto” y “teoremas-en-acto”, utilizados por el profesor en la resolución de los problemas propuestos.

1.3 Problema de investigación

El conocimiento matemático usado por el profesor en su práctica es importante para su éxito y el buen desempeño de sus estudiantes. Por tal razón, en esta investigación se pretende conocer sobre los recursos matemáticos utilizados por el profesor al resolver problemas no rutinarios fuera del aula para, posteriormente, documentar la problemática del conocimiento matemático a través de la utilización de dichos recursos, la cual afecta el rendimiento estudiantil.

1.4 Propósitos

Fuera del aula, interesa conocer la problemática del conocimiento matemático del profesor a través de la utilización de los recursos matemáticos y la influencia que tienen estos en la solución de problemas, así como la justificación que da sobre el porqué de su uso de dichos recursos, cuando se les propone resolver problemas no rutinarios; es decir, donde el profesor no cuente con un método de solución conocido, sino que necesite hacer uso de sus recursos matemáticos para resolverlos. Es importante mencionar que los problemas propuestos a los profesores no están fuera de sus alcances para ser resueltos, pues dichos problemas están diseñados para estudiantes de nivel medio superior. Para especificar un poco más la investigación se establecen los siguientes objetivos:

a) Identificar y analizar, a través de la resolución de problemas, los diferentes recursos matemáticos que utilizan los profesores de matemáticas de nivel medio superior, cuando se enfrentan a problemas fuera del salón de clases, y la manera en cómo estos influyen en la solución del problema.

b) Documentar la problemática del conocimiento matemático, de los profesores en la resolución de problemas no rutinarios.

El propósito general de este trabajo, por tanto, consiste en investigar con mayor profundidad los recursos matemáticos utilizados por los profesores al momento de resolver problemas únicamente con ayuda de lápiz y papel y fuera del salón de clases, en un ambiente donde sólo se encuentre el profesor y el entrevistador; esto, con la finalidad de indagar sobre la problemática del conocimiento matemático del profesor.

1.5 Preguntas de investigación

En educación matemática se reconoce que la práctica del profesor es compleja, pues incluye diversos elementos, como: el conocimiento curricular, conocimiento del contenido a enseñar, conocimiento didáctico de esos contenidos, conocimiento de sus alumnos, etc. Debido a la abundancia y complejidad de tanto contenido, esta investigación se centra en la investigación sobre los recursos matemáticos (teoremas y conceptos-en-acto) que utilizan los profesores al resolver problemas no rutinarios, visto esto como el conocimiento común al que se refiere Ball et al. (2008) y, que todo profesor debe poseer. Con lo dicho anteriormente, la investigación se orienta a la obtención de datos que permitan responder las siguientes preguntas:

a) ¿Qué recursos matemáticos utilizan los profesores de matemáticas de nivel medio superior al resolver problemas no rutinarios utilizando únicamente papel y lápiz?
b) ¿Cómo influyen los recursos matemáticos del profesor de matemáticas de nivel medio superior, en la solución del problema utilizando papel y lápiz?
c) ¿Cuáles son las dificultades del conocimiento matemático de los profesores en la resolución de problemas no rutinarios?

Para dar respuesta a estas preguntas, la investigación se llevó a cabo mediante entrevistas video-grabadas y audio-grabadas, a profesores previamente seleccionados, al momento de resolver problemas fuera del salón de clases, en un ambiente donde sólo se encontraba el profesor y el entrevistador. Las entrevistas permitieron obtener evidencias sobre las diferentes formas de resolver los problemas propuestos con ayuda de recursos matemáticos y, sobre las dificultades mostradas por el profesor.

1.7 Pertinencia del estudio

La presente investigación se ubica en el nivel medio superior, específicamente, el estudio se llevó a cabo con profesores de matemáticas con formaciones profesionales distintas. De acuerdo con Shulman (1986), los profesores deberían tener un profundo conocimiento de las matemáticas que enseñan a sus estudiantes. Ello requiere ir más allá de conocer los hechos y conceptos; requiere entender la estructura de la materia. Este mismo autor también señala que el profesor debe mostrar un dominio de la materia como prerrequisito para la enseñanza, pues aunque el conocimiento de las teorías y métodos de enseñanza es importante, juegan un segundo papel en sus competencias. Por otra parte, Ball et al. (2008) señalan que todo profesor debe contar con un conocimiento común del contenido (CCK); es decir, un profesor debe saber resolver correctamente problemas matemáticos, así como hacer uso adecuado del conocimiento y habilidades matemáticas usadas en otros contextos de enseñanza.

Dentro y fuera del salón de clases, es necesario e indispensable que los profesores cuenten con un conjunto amplio de recursos matemáticos; que le permitan de manera adecuada poder abordar los problemas matemáticos que se le presenten. Por esta razón, un elemento importante asociado con la competencia matemática del profesor es que desarrolle diversas técnicas que le permitan resolver problemas que requieran cierto grado de creatividad.

No importa qué tan bien preparados estén los profesores cuando inician en la profesión, ellos necesitan mantener un continuo desarrollo profesional para ofrecer a sus estudiantes una educación matemática de alta calidad. Ellos deberían continuar aprendiendo contenidos matemáticos nuevos o adicionales, estudiar cómo los estudiantes aprenden matemáticas, analizar temas de la enseñanza de las matemáticas y usar nuevos materiales y tecnología (NCTM, 2000, p. 370).

En gran parte de las investigaciones en educación matemática se documenta la forma de resolución de problemas, por parte de los estudiantes de distintos niveles educativos, pero aún son pocas las investigaciones dirigidas a indagar el conocimiento del profesor a través de la resolución de problemas fuera o dentro del salón de clases; ésta es muestra de una de las relevancias del presente estudio, así como de su aportación de evidencias de cómo algunos profesores, a partir de sus recursos matemáticos (concepto-en-acto y teoremas-en-acto), hacen uso de estos para resolver problemas novedosos; es decir, donde no cuentan con una técnica de solución inmediata, sino que tiene que buscar dentro de todo su repertorio de conocimientos alguna o algunas técnicas que le permitan continuar con la resolución del problema y donde además se tenga que justificar su utilización de acuerdo con el conocimiento que dicho profesor posea.

CAPÍTULO 2

BASES TEÓRICAS Y CONCEPTUALES

2.1 Introducción

En este capítulo, se presentan algunas reflexiones correspondientes a los trabajos de investigación relacionados con educación matemática, específicamente, sobre la temática de los recursos y el trabajo de documentación, vistos desde el *Enfoque Documental de lo Didáctico* propuesto por Gueudet y Trouche (2009). Posteriormente, se realiza una revisión de la literatura referente a las técnicas institucionales (Chevallard, 1999), así como de los conceptos-en-acto y teoremas-en-acto (Vergnaud, 1990), conceptos base de la *Teoría de Campos Conceptuales*. Al final de este capítulo, se mencionan los elementos teóricos tomados en cuenta en esta investigación; de cada uno de los trabajos antes mencionados, y la manera de cómo estos fueron relacionados con la finalidad de alcanzar los objetivos de la presente investigación.

Este estudio se apoyó en el trabajo de Gueudet y Trouche (2009), llamado Enfoque Documental de lo Didáctico, para tratar de indagar sobre los recursos matemáticos utilizados por el profesor de la materia al resolver problemas no rutinarios fuera del salón de clases y, después, documentar la problemática del conocimiento matemático de los profesores.

2.3 Orígenes del enfoque documental de lo didáctico

En el estudio de Gueudet y Trouche (2009) se distingue entre lo que es un *recurso* y un *documento* elaborado por el profesor a través del proceso de *génesis documental*. Estos autores mencionan que tanto los recursos como los documentos van más allá de la distinción hecha por Rabardel (1995) entre *artefactos* e *instrumentos*. De acuerdo con Rabardel (1995), un artefacto es un medio cultural y social para la actividad del ser humano, utilizado con el propósito de mediar la actividad humana; por ejemplo, un pizarrón, un palo de golf, una computadora, un cuaderno de notas, una determinada lengua, etc. Mientras que un instrumento es el resultado de un proceso llamado *génesis instrumental*, a través del cual el sujeto construye sus esquemas de utilización de los artefactos, cuando resuelve una determinada *clase de situaciones*. El instrumento se construye a través de la actividad del sujeto con el artefacto. Se dice entonces, que un instrumento está formado de dos componentes: un artefacto, material o simbólico, producido por el sujeto que lo utiliza o por otros, y un esquema de utilización construido por el mismo sujeto. Donde un *esquema,* como Vergnaud (1990) lo definió a partir de Piaget, es una organización invariante de la actividad de una determinada clase de situaciones. De acuerdo con Vergnaud, estos invariantes son el conocimiento implícito construido a través de la utilización de los artefactos en diferentes contextos.

Dentro del proceso de génesis instrumental, se encuentran anidados dos procesos dialécticos: la *instrumentalización* y la *instrumentación*, donde de acuerdo con Rabardel (1995) la instrumentalización va del sujeto hacia el artefacto; es decir, el sujeto que utiliza dicho artefacto, en cierto sentido, debe apropiarse de éste, conociendo sus propiedades, funcionamiento y todo lo que respecta al artefacto. En tanto que la instrumentación es el proceso que va del artefacto al sujeto; es decir, la influencia que tiene el artefacto en la actividad del sujeto de acuerdo con las limitaciones y posibilidades del artefacto y que dicho usuario posea y cómo estos –los artefactos– repercuten en la evolución de los esquemas de utilización al construirlos o reconstruirlos.

A medida que el sujeto interactúa con un artefacto, éste lo irá explorando y, por consiguiente, conociendo. Este hecho permite que el sujeto organice sus esquemas de utilización para un determinado tipo de situación; sin embargo, la relación entre un artefacto y su usuario es un proceso lento y requiere tiempo para que pueda darse una evolución. Durante este proceso, el sujeto puede construir diferentes instrumentos; incluso, con los mismos artefactos y con los mismos problemas. La transformación de artefactos a instrumentos para la misma situación puede variar entre cada sujeto, dependiendo del conocimiento de uso de cada usuario. Un instrumento puede transformarse en un nuevo artefacto y a su vez este último puede nuevamente transformarse en un instrumento.

2.3 Conceptos básicos del enfoque documental de lo didáctico: recursos y documentos

El trabajo de Gueudet y Trouche (2009) va más allá del enfoque instrumental, mostrando que los conceptos de origen: instrumentación e instrumentalización son relevantes para establecer un enfoque documental educativo; dichos autores mencionan que la evolución actual de los recursos disponibles para los maestros parece requerir un enfoque que amplíe el enfoque instrumental.

En el enfoque documental de lo didáctico se usa el término recurso para destacar la variedad de artefactos que se deben tener en cuenta: libros de texto, lenguaje, hojas de trabajo de los estudiantes, herramientas tecnológicas (computadoras, calculadoras, software, entre otros), tiempo de trabajo, etc. Un recurso puede ser tanto material (notas de clase, lápiz, pizarrón, computadora, normas educativas, software, por mencionar algunos), como no material (conocimiento del profesor, discusión entre colegas, diálogo entre profesor y estudiante, etc.). Desde la perspectiva del enfoque documental de lo didáctico, entre los recursos puede darse una interacción; una discusión entre profesor-alumno, por ejemplo; mientras que desde el punto de vista del enfoque instrumental no existe tal interacción entre artefactos, esto es algo que marca la diferencia entre un recurso y un artefacto.

Respecto al documento, dentro del enfoque documental se señala que éste es originado a través de un proceso de génesis documental; en este proceso el profesor construye sus propios esquemas de utilización de un conjunto de recursos para la misma clase de situaciones a través de una variedad de contextos de uso. De manera que la relación entre recurso y documento puede ser representada como:

$$\boxed{\textit{Documento} = \textit{recurso} + \textit{esquema de utilización}}$$

Figura 2.1. Representación de documento
(Tomado de Gueudet & Trouche, 2009, p. 205).

Gueudet y Trouche (2009) sostienen que un esquema de utilización de un conjunto de recursos implica tanto una parte observable como aspectos no observables. Estos últimos son los ya nombrados por Verganaud (1990) como *invariantes operatorios*[8]; es decir, la estructura cognitiva que guía la acción del sujeto. Por otro lado, la parte observable corresponde a las regularidades de acción del profesor para la misma clase de situaciones en diferentes contextos. A esto es a lo que llaman usos, cuando un profesor se basa en un

[8] De acuerdo con Vergnaud (2009) a los conceptos-en-acto y teoremas-en-acto, se les puede denominar de manera global como invariantes operatorios; estos invariantes son el conocimiento implícito del sujeto al resolver una situación.

recurso un par de veces sin desarrollar un comportamiento estable para una determinada clase de situaciones.

La Figura 2.2 ilustra el proceso de génesis documental propuesta por Gueudet y Trouche (2009)

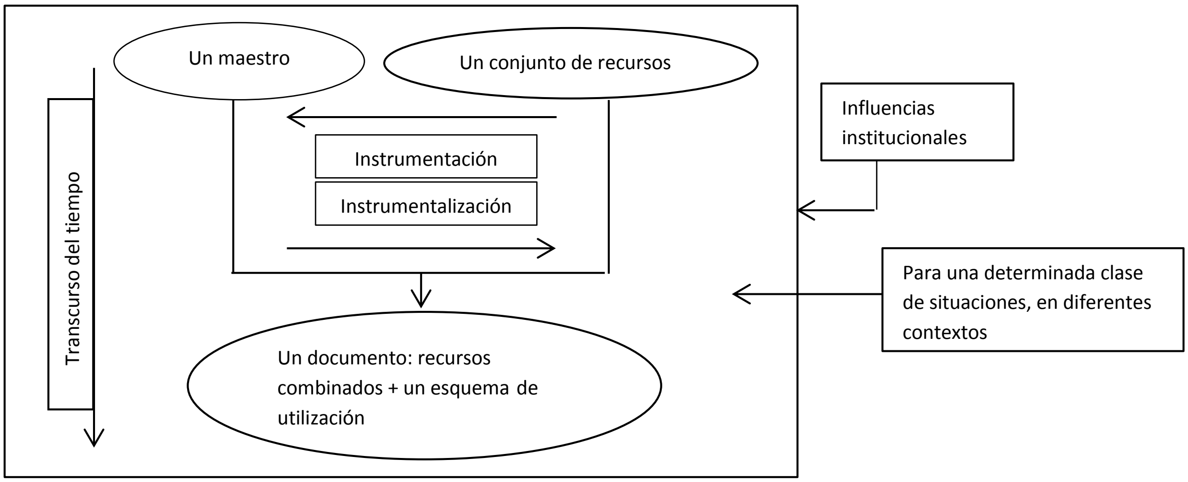


Figura 2.2. Representación esquemática de la génesis documental (Tomado de Gueudet & Trouche, 2009, p. 206).

De acuerdo con estos autores, la génesis documental debe ser considerada como un proceso continuo de transformación, donde un conjunto de recursos se combinan y transforman a través de esquemas de utilización de quien los emplea para dar lugar al documento, que es la salida del proceso. Así, el documento elaborado puede ser considerado como un nuevo recurso, por lo tanto, un recurso no es algo aislado, sino que pertenece a un conjunto de recursos. De esta manera, un recurso evoluciona, se modifica, se combina mediante un proceso de génesis documental. En la Figura 2.3 se puede observar esta relación dialéctica entre los recursos y el documento.

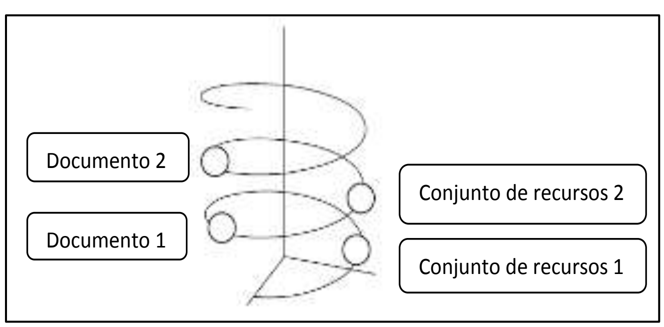


Figura 2.3. Los recursos/documento, relación dialéctica (Tomado de Gueudet & Trouche, 2009, p. 206).

En el estudio de Jita (1998, citado en Adler, 2000) realizado en Sudáfrica se identifican cinco tipos de recursos que interactúan para dar forma a las prácticas de los profesores y que al mismo tiempo tengan éxito dentro del aula: recursos humanos (profesores, alumnos, padres de familia), conocimiento (de la ciencia, de la enseñanza de la ciencia, y el programa de estudios), tiempo, sentido de misión y compromiso, así como materiales de texto. Es importante señalar que los recursos que Jita identifica van más allá de los recursos materiales, para incluir los culturales como: tiempo y emocional (compromiso). Así, los recursos para las matemáticas escolares se extienden más allá de recursos humanos y materiales para anexar una gama de recursos como: conocimiento de la materia y su pedagogía, recursos sociales (la comunicación de los alumnos durante la clase), el lenguaje, entre otros.

Una investigación importante a considerar, dentro de la temática de los recursos y el efecto que estos tienen en el aprendizaje, es la de Cohen et al. (2002). En ese estudio, los autores proponen una visión integral de los recursos y los agrupan en: convencionales, personales, sociales. Los convencionales incluyen: libros, instalaciones, tamaño de la clase y el tiempo, los personales incluyen a los profesores, estudiantes, la habilidad y el conocimiento. Los recursos sociales se refieren a la dirección del estado para la instrucción, las normas académicas y programas de estudio. Estos autores señalan que la mejora en el aprendizaje de los estudiantes depende del conocimiento y habilidades de uso de los recursos para la enseñanza. Dentro de la investigación en educación matemática, éste es un reto importante que requiere prestarle mayor interés.

Debido a la amplia cantidad de recursos que pueden ser utilizados por los profesores dentro de su práctica y a la gran variedad de clasificaciones propuestas (e.g., Adler, 2000; Cohen et al., 2002, entre otros), esta investigación pretende convenir sobre los recursos matemáticos, vistos propiamente como el conocimiento matemático que poseen los profesores al resolver problemas fuera del salón de clases. En esta indagación, los recursos matemáticos corresponden a los conceptos-en-acto y a los teoremas-en-acto, desde la perspectiva de Vergnaud (1990), utilizados en la resolución de problemas y donde estos últimos –teoremas-en-acto– dentro de esta investigación son llamados también técnicas institucionales (Chevallarad, 1999).

2.4 Teoría antropológica de lo didáctico: técnicas institucionales

Para poder entender las técnicas institucionales, aquí es bosquejada una parte del trabajo propuesto por Chevallard (1999) referente a su teoría, acompañado, en algunos casos, de ejemplos con la finalidad de que se alcance una mejor comprensión de dichos conceptos.

2.4.1 La noción de praxeología: elementos básicos

En la *Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)* de Chevallard (1999), se parte del principio de que el saber matemático se construye como respuesta al estudio de problemáticas. El proceso de estudio, que conduce a la construcción o reconstrucción de conocimiento matemático, forma parte de la actividad matemática del profesor. De acuerdo con este autor, la TAD sitúa la actividad matemática y, en consecuencia, la actividad del estudio en matemáticas, en el conjunto de las actividades humanas y de instituciones sociales.

Referirse a didáctica de las matemáticas, dice Chevallard (1999), supone hablar primeramente de matemáticas y después, de los alumnos, los profesores, los libros de texto, etc. En la TAD se identifica lo didáctico con todo lo relativo al estudio, tomando la palabra estudio en un sentido amplio que engloba las nociones de enseñanza y aprendizaje, comúnmente utilizadas en la cultura pedagógica referente a todo aquello que se hace en una determinada institución para llevar a cabo las tareas complejas que se plantean. La resolución de problemas, como actividad matemática, ya ha sido considerada importante por varios estudiosos (e.g., Schoenfeld, 1985; Polya, 2008; Santos, 2007, entre otros) del tema para el profesor dentro de su práctica. En las últimas décadas, esta problemática ha tomado una posición significativa dentro de las actividades matemáticas para la enseñanza.

En la TAD se señala que "toda actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo único, que se resume con la palabra *praxeología*[9]" (Chevallard 1999, p. 2). Éste menciona que la praxeología más sencilla y que designa como "puntual" está compuesta por cuatro elementos que él denomina: *tipo de tarea* (*T*), *técnica (ô)* o manera de llevar a cabo las tareas del tipo T, de una *tecnología* (*θ)* o discurso razonado (del

[9] De acuerdo con Chevallard (1999) la noción de praxeología resulta de la unión de los dos términos griegos *praxis* y *logos*; es decir, la *praxis* o *saber-hacer* los tipos de problemas o tareas y las técnicas para resolverlos. La parte descriptiva, organizadora y justificadora de la actividad, llamada *logos* o, simplemente *un saber* engloba los conceptos de tecnología y teoría.

griego *logos*) sobre la técnica (del griego *tekhnê*). Este discurso con el objetivo de hacer clara la técnica como medio para realizar el tipo de tarea, y de un componente *teórico (Θ)* que rige la propia tecnología, aportando elementos descriptivos y justificativos de los demás componentes de la praxeología. El autor divide a una praxeología en dos bloques: uno de ellos el práctico-técnico [T,ô], es decir, la *praxis* (o "saber hacer"), y el bloque tecnológico-teórico [θ,Θ], el *logos*, (o "saber"). Una praxeología puntual, dice Chevallard, está compuesta por los cuatro elementos [T/ô/θ/Θ].

Para entender a qué se refiere este autor con los términos tipo de tarea, técnica, tecnología y teoría, a continuación se describe de manera breve cada término, y apoyados en algunos casos con ejemplos de acuerdo con la TAD; ello con el objetivo de aclarar al lector lo concerniente a dichos términos y a lo que llama técnicas institucionalmente reconocidas.

Tipos de tareas (T)

Chevallard apunta que tanto la *tarea t* como el tipo de tarea T forman parte de la raíz de lo que él llama praxeología. Para él estos dos elementos se encuentran asociados con un verbo: como *calcular* el área de un círculo, *escribir* un libro de ciencia ficción, *derivar* la función $x^2 cosx$, *sumar* dos funciones polinómicas de tercer grado, *lavar* el auto de Juan, etc. Las expresiones anteriores son tipos de tareas[10]; tales tipos suponen un objeto relativamente preciso. *Lavar el auto de Juan*, es un tipo de tarea, *lavar*, simplemente, no lo es, así como *calcular el área de un cuadrilátero*, es un tipo de tarea, pero *calcular* no lo es. Para Chevallard, lavar y calcular son verbos que piden un determinativo.

El tipo de tarea va acompañado de la tarea, esta última siempre enriquece, al paso del tiempo, de nuevos tipos de tareas. Por ejemplo, primero se aprende a calcular la adición, después a calcular el producto, más tarde a calcular la raíz cuadrada de un número y así por el estilo. Lo mismo se repetirá, por supuesto, con los verbos dividir, demostrar, dibujar, etc. Chevallard menciona que las tareas y los tipos de tareas, son "artefactos"; es decir, construcciones institucionales, cuya reconstrucción en una *institución I* dada, y por lo tanto en una clase, es un problema, siendo el objetivo de la didáctica.

[10] En el Anexo A, se pueden observar los ejemplos de tipos de tareas aplicados a los profesores en la presente investigación.

Técnica (ô)

Si se tiene un tipo de tarea, entonces una praxeología relativa a este tipo de tarea requiere, de inicio, "una manera de realizar" las tareas que pertenezcan a ese tipo de tarea. A una determinada "manera de hacer", se le da el nombre de técnica. Por ejemplo, para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, un individuo puede utilizar diferentes maneras de resolver este tipo de tarea determinado, como utilizar las técnicas: de sustitución, igualación o regla de Cramer. Chevallard (1999) señala que una técnica tiene éxito solamente sobre una parte de las tareas del tipo T a la cual es relativa, y que se denomina alcance de la técnica. Tal caso se observa en el siguiente problema: *En una serie aritmética, la suma de los primeros 50 términos es 200, y la suma de los siguientes 50 términos de la misma serie es 2700. ¿Cuál es el primer término de la serie?* Hay una parte del problema donde se encuentran dichas series reducidas a sus expresiones más simples; al resolverlo se obtiene el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (Anexo A problema 6):

$$50x + 1225a = 200 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$50x + 3725a = 2700 \dots\dots\dots (2)$$

Figura. 2.4. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Este sistema de ecuaciones permite encontrar la solución del problema al aplicar la técnica de suma y resta; sin embargo, utilizar alguna técnica para resolver este sistema de ecuaciones por sí sola no tendría éxito para resolver el problema completo, si no se cuentan con otros elementos que permitan llegar a tal sistema. Así, el alcance de la técnica es sólo sobre una parte del problema.

Si la técnica tiende a fracasar en la solución de una parte del tipo de tarea, se puede decir que no se sabe, en general, realizar las tareas de ese tipo. Chevallard (1999) señala que en una institución, donde se presenta un tipo de tareas dado, existe, en general, una sola técnica que permite resolverlo, y en ocasiones un pequeño número de técnicas institucionalmente reconocidas; debido a que son consideradas dentro de la institución las más adecuadas y en ocasiones excluyendo algunas técnicas alternativas posibles, que pueden estar en otras instituciones donde allá sí las consideran importantes.

Las técnicas algebraicas como las de sustitución, igualación, regla de Cramer, etc., son ejemplos de técnicas institucionalmente reconocidas para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas; sin embargo, habrá instituciones que consideren todas como adecuadas para resolver dicho sistema y otras instituciones que sólo consideran una o algunas de ellas como apropiadas.

Tecnología (θ)

De acuerdo con la TAD, se entiende por tecnología al discurso racional (el logos) sobre la técnica, el cual tiene como primer objetivo justificar "racionalmente" la técnica, con el propósito de asegurarse de que permite llevar a cabo las tareas del tipo T y, por tanto, encontrar lo pretendido. La forma de racionalidad empleado varía, por supuesto, tanto en el espacio institucional como entre instituciones, de tal forma que una racionalidad institucionalmente dada puede ser vista como poco racional en otra institución. Chevallard (1999) sostiene que "en una institución I, cualquiera que sea el tipo de tareas T, la técnica ô relativa a T está siempre acompañada de al menos un vestigio de tecnología θ" (p. 4).

Otra de las funciones de la tecnología es la de exponer porqué ésta es correcta; es decir, la tecnología trata de explicar, de hacer evidente, que dicha técnica es la adecuada; por ejemplo: se sabe que para calcular el lado de un triángulo, dados dos de sus lados (a y b) y el ángulo que forman (θ), para encontrar el lado (c) se puede utilizar la ley de cosenos $c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\theta$. Se puede explicar esta ley con ayuda de la tecnología, usando vectores[11]. Chevallard (1999) menciona que, en muchos de los casos, algunos elementos tecnológicos están contenidos en la técnica; tal es el caso: "Si 8 caramelos cuestan 10 Francos, 24 caramelos, o sea, 3 veces 8 caramelos, costarán 3 veces más; es decir, 3 veces 10 Francos" (p. 4).

Una tercera función de la tecnología, y que no se debe pasar por alto, es la producción de técnicas. En la TAD se señala que generalmente se cuentan con tecnologías potenciales que no son tecnologías de alguna técnica o son de muy pocas técnicas; por lo que hay que explotar estas tecnologías buscando nuevas técnicas.

[11] En el Anexo B se muestra cómo, usando vectores (tecnología) se justifica la técnica (ley de cosenos).

Teoría (Θ)

Se habla de una teoría, Θ, cuando el discurso tecnológico contiene afirmaciones, más o menos explícitas, de las que se puede pedir conocer. Cuando esto ocurre, dice Chevallard (1999), se pasa a un nivel superior de justificación-explicación-producción, el de la teoría, que retoma, en relación con la tecnología, el papel que esta última toma respecto a la técnica, por ejemplo: para justificar la tecnología de los vectores, y donde a su vez esta tecnología sirvió para justificar la técnica de la ley de los cosenos para encontrar el lado de un triángulo, se utiliza la teoría del análisis vectorial para hacer evidente que dicha tecnología es correcta.

2.4.2 Reflexiones sobre la teoría antropológica de lo didáctico

Dentro de la actividad del profesor de matemáticas se encuentran las *praxeologías matemáticas y didácticas* las cuales son referentes a lo que se debe enseñar. De acuerdo con la TAD, las praxeologías pueden ser puntuales, locales o regionales. Se dice que son *praxeologías puntuales* cuando se centran en un tipo de tarea específico y que, generalmente, se asocian con un conjunto pequeño de técnicas como: integrar una función lineal, calcular el área de un triángulo, resolver una ecuación de segundo grado, factorizar una ecuación de segundo grado, etc. Las *praxeologías locales* son un poco más complejas; éstas se dan cuando el bloque práctico-técnico se articula con un discurso tecnológico común. Algunos ejemplos son los temas en que se estructura la enseñanza, como: estudio de las cónicas, semejanza de figuras, polígonos, razones trigonométricas, etc. Por otra parte, las praxeologías regionales son aquellas praxeologías locales justificadas con una teoría, como las matemáticas escolares, designadas generalmente por bloques temáticos; por ejemplo: la probabilidad, la geometría, la estadística, trigonometría, etc. Dentro de la práctica del profesor, la profundidad con la que éste enseñe una tarea determinada, dependerá del discurso tecnológico o teórico que él exponga a sus estudiantes; para ello se requiere de contar con un conocimiento amplio que le permita dar una justificación razonada de la técnica utilizada.

Bosch y Gascón (2009) emplean el término *equipamiento praxológico* para referirse a los conocimientos y capacidades que una persona posee y, por tanto, varían entre cada individuo. Es decir, este equipamiento no es más que un conjunto de praxeologías con las que cada individuo cuenta y que tiene a su disposición en el momento en que las requiera utilizar, naturalmente, bajo ciertas condiciones y restricciones dadas de acuerdo con la situación propuesta. Tener un amplio equipamiento praxeológico es un proceso lento que requiere tiempo y varía entre cada individuo de acuerdo con las experiencias y asimilaciones de cada uno de ellos.

La escasez praxeológica es distinta entre cada sujeto y ésta se da por la falta de técnicas que no permiten saber cómo realizar o resolver cierto tipo de tareas. Una de las ocupaciones importantes del profesor es combatir esta escasez a través del empleo y la producción de técnicas que le permitan afrontar ciertos problemas; esta producción se da, sobre todo, en problemas nuevos que no se sabe aún cómo resolver, por lo que es importante poner atención a esta parte. Así, resulta pertinente mencionar que para poder llevar a cabo su práctica, el profesor de matemáticas debe contar con un amplio equipamiento praxeológico que le permita actuar frente a problemáticas que se le presenten dentro o fuera del salón de clases.

En la TAD, se asume que el valor institucional que se le dé a las praxeologías depende de las instituciones donde éstas se presenten. En la teoría, una institución es vista como un órgano social en el que internamente viven distintas praxeologías; es decir, las maneras de hacer y de pensar, acordadas dentro de esa institución, y en donde los sujetos que comparten estas maneras de hacer, pensar y llevar a cabo actividades colectivas forman parte de dicha institución. Desde el punto de vista de la TAD, una técnica institucional es aquella praxeología acordada dentro de esa u otras instituciones que comparten las mismas maneras de hacer y de pensar. Dentro de la actividad del profesor de matemáticas, estas técnicas institucionales son utilizadas, ya que son recursos matemáticos indispensables para poder llevar a cabo su enseñanza, generalmente, a través de la resolución de problemas.

En la TAD, hablar de *organización praxeológica matemática* o simplemente *organización matemática* es hablar de un modelo básico para describir el conocimiento matemático. Este modelo concibe el trabajo matemático como el estudio de tipos de problemas o tareas; las técnicas empleadas para resolverlos y las justificaciones de su empleo. Por lo que el *saber matemático* aparece así organizado en dos niveles: la praxis o saber-hacer y la parte descriptiva que justifica la actividad, el saber. Dentro de la actividad del profesor, es importante tener conocimiento matemático y saberlo usar mediante técnicas, ya sean institucionales o no institucionales; justificarlas mediante el discurso explicativo del porqué de su uso, cuando resuelven problemas donde no se cuenta con una solución de antemano anticipada.

2.5 Conocimiento-en-acto: conceptos-en-acto y teoremas-en-acto

Un concepto no puede ser reducido a su definición, al menos si se está interesado en su aprendizaje y enseñanza (Vergnaud, 1990). Él menciona que es a través de las situaciones que se pretenden resolver como un concepto adquiere sentido para quien los resuelve. De acuerdo con este autor, se pueden distinguir dos clases de situaciones:

> a) Clases de situaciones para las cuales el sujeto dispone en su repertorio, en un momento dado de su desarrollo y bajo ciertas circunstancias, de competencias necesarias para el tratamiento relativamente inmediato de la situación.
>
> b) Clases de situaciones para las cuales el sujeto no dispone de todas las competencias necesarias, lo que le obliga a un tiempo de reflexión y de exploración, de dudas, tentativas abordadas, y le conduce eventualmente al éxito, o al fracaso. (p. 2)

El concepto de esquema es importante para ambas clases de situaciones; sin embargo, no funciona de la misma manera en ambos casos. En el primero, se observa, para una misma clase de situaciones, conductas automatizadas, organizadas por un esquema único; en el segundo, se observará la sucesión de varios esquemas que pueden entrar en competencia y que, para llegar a la solución buscada, por parte de quien los use, estos deben ser acomodados, separados y combinados entre sí.

De acuerdo con la Teoría de Campos Conceptuales, se llama *esquema* a la organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dada. Es decir, los elementos cognitivos que permiten la acción del sujeto. Un esquema genera acciones y debe contener reglas; sin embargo, estas secuencias de acciones y reglas varían dependiendo de la situación. Un esquema es universal para una gama de situaciones y puede generar diferentes secuencias de acción. Hay esquemas perceptivo-gestuales, como el de contar objetos, o de hacer un gráfico, pero hay también esquemas verbales como el de hacer un discurso, también los algoritmos matemáticos son ejemplos de esquemas, cuando estos se utilizan repetidamente para tratar las mismas situaciones. Para entender mejor el concepto de esquema, y que a su vez ha sido inspirado de Piaget, he aquí algunos ejemplos:

> El esquema del reparto de una colección pequeña para un niño de 7 años varía en sus formas cuando se trata de repartir dulces, canicas, o juguetes, a pesar de que se da esta variación de repartición no deja de haber una organización invariante para el funcionamiento del esquema: los movimientos de ojos y manos así como de los gestos de quien reparte; la pronunciación que emite el repartidor: uno, dos, tres,…, etc. esta organización invariante se presenta independientemente de cómo se realice la repartición.

Figura 2.5. Esquema de reparto (Vergnaud 1990, p.2).

> El esquema de resolución de la ecuación cuadrática de la forma $ax^2+bx+c=0$ es alcanzado rápidamente en los alumnos de preparatoria, cuando a, b y c tienen valores reales distintos de cero, y por lo tanto presenta dos soluciones llamadas raíces. La fórmula que determina esas dos raíces es $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, llamada fórmula para resolver una ecuación cuadrática. Si el discriminante de la ecuación $b^2-4ac<0,$ no posee soluciones reales; pero si complejas y conjugadas cuando los coeficientes de la ecuación son valores reales; si el discriminante $b^2-4ac=0,$ tiene dos raíces reales e iguales; si el discriminante es $b^2-4ac>0,$ tiene dos soluciones reales distintas. La gráfica de la función cuadrática es una parábola; ésta abrirá hacia arriba si el valor de a es positivo y abre hacia abajo si el valor de a es negativo, etc. La forma de escribir las soluciones de la ecuación cuadrática, por parte de los alumnos, muestra claramente una organización invariante de la acción.

Figura 2.6. Esquema de resolución de la ecuación cuadrática.

Es natural que los esquemas usados varíen entre niños y adultos en determinadas clases de situaciones, debido a que su estructura de esquemas de los adultos está más consolidada por los conocimientos adquiridos a través de la acción de los sujetos al resolver situaciones.

Cuando un sujeto emplea inadecuadamente un esquema en la solución de una cierta situación, su experiencia lo conduce, ya sea a cambiar de esquema o a modificarlo. Así, los esquemas son recursos adaptables; es decir, se asimilan las nuevas situaciones al acomodarse a ellos. En los esquemas siempre existe un conocimiento implícito; el cual generalmente es utilizado de esa manera. Un sujeto al resolver una cierta tarea se apoya en algoritmos; estos, generalmente, se presentan como un conjunto de reglas. “Explicitar estas reglas es difícil y casi imposible para los sujetos, aunque sí sean capaces de realizar la serie de operaciones” (Vergnaud, 1990, p. 3).

En la Teoría de Campos Conceptuales (TCC) se designa la expresión concepto-en-acto y teorema-en-acto a los conocimientos contenidos en los esquemas o invariantes operatorios. Dentro de la teoría, los conceptos de: número, simetría, bisectriz, tangente, congruencia, radio etc., son ejemplos de conceptos implícitos dentro de la actividad del sujeto que los usa y son denominados conceptos-en-acto. Es importante decir que el grado de sofisticación de uso de los conceptos y teoremas-en-acto varía dependiendo de los conocimientos y la experiencia con los que cuenta cada sujeto. A continuación, se presentan algunos ejemplos propuestos a manera de complemento para tratar de dejar claro a qué se refiere con dichos conceptos.

Dentro de la TCC hablar de teoremas-en-acto es hablar de *Invariantes del tipo“proposiciones”*, donde estos son susceptibles de ser verdaderos o falsos. Por ejemplo:

> Entre la edad de 8 y 10 años los niños, naturalmente con un éxito variable, comprenden que el costo total de una cantidad de objetos comprados al mismo precio, podría ser calculado fácilmente al multiplicar la cantidad de objetos por el precio unitario del artículo; es decir, el costo total será igual al costo unitario por los n productos comprados. Este conocimiento se puede expresar por un teorema-en-acto $f(nx) = nf(x)$ para un n entero.

Figura 2.7. Teorema-en-acto implícito en la actividad de los niños (Vergnaud 1990, p. 5).

De la misma manera, hablar de conceptos-en-acto dentro de esta misma teoría es hablar de *Invariantes del tipo “función proposicional”*, donde esta función proposicional a diferencia de las teoremas-en-acto sólo puede ser verdadera o falsa, y también constituyen las piezas indispensables para la construcción de proposiciones. Algunos ejemplos son: el concepto de simetría, tangente, bisectriz, número, etc. Estos conceptos utilizados en la resolución de problemas son raramente explicitados por los sujetos que los usan; incluso aunque son construidos por ellos mismos en la acción.

Los conceptos-en-acto no son de hecho conceptos, ni un teorema-en-acto es un teorema. En la ciencia, los conceptos y los teoremas son explícitos y se puede discutir, pero los teoremas y conceptos-en-acto son implícitos y son usados sin llegar a explicitarlos. Para poder hablar de estos invariantes operatorios integrados en los esquemas es necesario la ayuda de las categorías del conocimiento explícitas: proposiciones y funciones proposicionales.

2.6 Marco referencial relacionado con la teoría antropológica de lo didáctico, teoría de campos conceptuales y el enfoque documental de lo didáctico

Para llevar a cabo la presente investigación, se retomaron algunos elementos de las tres teorías antes mencionadas en este capítulo: Teoría Antropológica de lo Didáctico, Teoría de Campos Conceptuales; así como el enfoque documental. Estos elementos son los llamados: teoremas y conceptos-en-acto, técnicas institucionales y los recursos. Estos términos están relacionados, y fueron ajustados a los fines que esta investigación demanda.

Retomando las ideas de Chevallard, y a su vez ajustándolas al presente estudio de investigación, se establece que una "técnica matemática" es aquella que el sujeto va construyendo durante un proceso de resolución de problemas, para una determinada clase de situación; es decir, es una organización matemática desarrollada por el sujeto de acuerdo con lo que él cree pertinente emplear durante la resolución del problema matemático. En esta investigación, las técnicas matemáticas son los procesos de solución utilizados para resolver problemas como: resolver un sistema de ecuaciones lineales, factorizar una expresión algebraica, encontrar el área de un cuadrilátero irregular, de un triángulo, etc., junto con los métodos (algebraico, geométrico, aritmético, etc.) de solución empleados. Ello, debido a que no cuenta en el momento con una técnica de solución que le permita abordar la situación o tarea a la que se enfrenta y, por tanto, se ve obligado a ir desarrollando su propia técnica (no necesariamente verdadera), sin olvidar como menciona Chevallard (1999) de acompañar a dicha técnica matemática relativa al tipo de tarea que se le presenta, con al menos un vestigio de "tecnología". El término tecnología de la que habla Chevallard en la presente investigación es llamada simplemente justificación matemática; es decir, el discurso matemático que da el sujeto al resolver problemas para justificar la utilización de sus técnicas, apoyado de los teoremas y conceptos-en-acto con los que cuenta.

Por otra parte, Chevallard señala que la enseñanza de las matemáticas se identifica a menudo con una tecnología determinada (teorema de Herón, teorema de Pitágoras, etc.) o, más bien, implícitamente, con el bloque de saber, tecnológico-teórico, correspondiente; dado que esta tecnología permite producir y justificar las técnicas relativas a distintos tipos de tareas.

En la presente investigación, se establece que una “técnica matemática institucional”, es aquella que ha sido reconocida y, por tanto, establecida por una comunidad matemática, como la mejor manera de actuar para un determinado tipo de tarea y, por tanto, no exige justificación. Los teoremas, fórmulas y leyes matemáticas utilizadas por los profesores al resolver problemas son llamados en este estudio técnicas institucionales, debido a que estos, desde el punto de vista matemático, han sido ya justificados por medio de las exigencias demostrativas y, por tanto, explicitados y aceptados como algo verdadero; algunos ejemplos son: Teorema de Pitágoras, Teorema de Tales, Ley de los senos, Ley de Herón, Ley de los cosenos, razones trigonométricas, fórmulas para calcular el área de un triángulo, etc.

Por otra parte, Verganaud (1990) señala que la expresión concepto-en-acto y teorema-en-acto son los conocimientos contenidos en los esquemas y se les puede designar también por la expresión global de invariantes operatorios; donde este último término es el conocimiento implícito del sujeto. Los conocimientos-en-acto, dice Vergnaud, son los elementos cognitivos que permiten la acción del sujeto ser operatoria y señala que el “conocimiento” debe entenderse como el saber-hacer y como los saberes expresados.

En este trabajo, se tomaron a los teoremas-en-acto como las técnicas institucionales y a los conceptos-en-acto como los conceptos matemáticos en acción, es decir, como los elementos necesarios para justificar el proceso de solución; por ejemplo: eje de simetría, bisectriz, concepto de recta tangente, concepto de triángulo equilátero, rectángulo, etc. A este conjunto de elementos (teoremas-en-acto, conceptos-en-acto y técnicas matemáticas) dentro de la presente investigación son nombrados recursos matemáticos (el término recurso es tomado del trabajo de Gueudet & Trouche, 2009) que utilizan los profesores al resolver problemas y más específicamente recursos matemáticos por tratarse de problemas de tipo matemático.

CAPÍTULO 3
METODOLOGÍA

3.1 Introducción

La metodología utilizada en esta investigación muestra, a través del trabajo empírico, los recursos matemáticos utilizados por el profesor de matemáticas al resolver problemas no rutinarios. A continuación, se presenta una descripción del tipo de investigación, de sus participantes en el estudio, del escenario donde se llevó a cabo, así como del instrumento que se utilizó para la recolección de la información.

3.2 Tipo de investigación

Debido a que el interés de la presente investigación está centrado en analizar y documentar los recursos matemáticos utilizados por el profesor de matemáticas al resolver problemas, fuera del salón de clases, en un ambiente donde no hay intercambio de ideas o consultas de información, y donde lo único con lo que cuenta para resolverlo es: el enunciado del problema, papel, lápiz, calculadora, y el conocimiento matemático propio de cada profesor, fue conveniente utilizar un método de indagación de tipo cualitativo.

De acuerdo con Hernández, Fernández y Baptista (2008) las investigaciones de tipo cualitativo se basan en descripciones y explicaciones fundamentadas y desarrolladas en ambientes naturales de los participantes (en este caso, escuelas), las cuales son extraídos de los participantes y no son reducidos a valores numéricos. Miles y Huberman (1984) mencionan que en este tipo de estudios se puede utilizar diversos métodos para obtener información (e.g., entrevistas, estudio de casos, diarios, grabaciones de audio y video-grabaciones) que realizan las personas, ya sea individualmente o en grupo. De esta manera, la naturaleza de esta investigación es de tipo cualitativo, ya que se quiere analizar y documentar los recursos que el profesor de matemáticas utiliza en la acción; es decir, en el momento en que resuelve problemas no rutinarios de esta disciplina.

3.3 Participantes en la investigación

La muestra elegida para esta investigación está comprendida por 10 profesores de nivel medio superior, con formación en matemáticas o áreas afines a éstas; dichos profesores contribuyeron con su disponibilidad y colaboración al buen éxito de la toma de datos.

Para la selección de los profesores, se procuró que estos fueran de distintas escuelas de nivel medio superior, tanto privadas como de tipo oficial. La selección de esta población no toma en cuenta el estatus, debido a que el contenido matemático de los problemas se encuentra presente en cada uno de los planes de estudio de dichas escuelas; además, porque este contenido matemático se encuentra al alcance de los profesores por ser necesario para los estudiantes y, por tanto, básico para los mentores. En la Tabla 3.1 se muestra el perfil de cada uno de los participantes.

Tabla 3.1. Perfil académico de los participantes en la investigación

Perfil y años de experiencia del profesor				
Profesor	*Nivel de estudios*	*Años de experiencia*	*Institución donde laboran*	*Institución de egreso*
César	Lic. Ing. Físico	2	UVM, campus Toluca	UAM-Azcapotzalco
Cristina	Lic. Ing. Químico	17	Cecytem-Metepec	UAEM
Patricia	Lic. Ing. Industrial	12	Cecytem-Metepec	ITT
Ezequiel	Lic. Educación Media con Especialidad en Matemáticas	4	Conalep, Iztapalapa 3	Escuela Normal Superior de México
Claudio	Lic. Ing. Químico industrial	19	CCH-Azcapotzalco	UNAM
Valentín	Lic. Ing. Computacional	3	Preparatoria oficial No. 26, Edo. Méx.	UNAM
Lourdes	Lic. Educación Media con Especialidad en Matemáticas	14	Conalep, Iztapalapa 3	Escuela Normal Superior de México
Yasminne	Lic. Ing. Electrónica. Maestría en educación.	9	UVM, campus Toluca	ITT
Jorge A.	Lic. Ing. Mecánica	15	CCH-Azcapotzalco	UNAM
Jorge	Lic. Ing. Agrónomo Industrial	4	Preparatoria oficial No. 26, Edo.Méx.	UAEM

CCH: Colegio de Ciencias y Humanidades
CECYTEM: Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de México
CONALAEP: Colegio Nacional de Educación Profesional Técnica
ITT: Instituto Tecnológico de Toluca
UAEM: Universidad Autónoma del Estado de México
UAM: Universidad Autónoma Metropolitana
UNAM: Universidad Nacional Autónoma de México
UVM: Universidad del Valle de México

3.4 Escenario donde se efectuó la investigación

La implementación de la serie de problemas a los profesores sirvió para recolectar los datos y, posteriormente, poder analizarlos y documentarlos. Ésta se llevó a cabo fuera de clase, en un ambiente donde sólo se encontraba el sujeto a entrevistar y el investigador, con la finalidad de observar y preguntar sobre las acciones del docente. Todo lo anterior fue video-grabado y audio-grabado con el objetivo de recabar la mayor evidencia posible sobre los recursos matemáticos utilizados por los profesores al intentar resolver los problemas. Todas las aplicaciones de los problemas fueron dentro de las escuelas donde laboran los profesores; específicamente, en lugares como: bibliotecas, laboratorios y oficinas, pero tratando de evitar la menor distracción posible del profesor.

3.5 Elaboración del instrumento para la recolección de datos

En este apartado se muestra los puntos considerados para la selección de los problemas que conformaron el instrumento de recolección de datos; las fuentes de donde fueron tomados, así como los propósitos del instrumento de recolección de datos y la entrevista.

El instrumento de investigación se diseñó en relación con los propósitos que se pretendía alcanzar en la presente investigación. A continuación, se describen los criterios tomados en cuenta para la selección de los problemas y que conformaron el instrumento:

- ✓ Que el contexto de los problemas fuera matemático.
- ✓ Que los problemas puedan resolverse usando conceptos y teorías de los recursos matemáticos básicos y fundamentales, contemplados en los contenidos preuniversitarios.
- ✓ Que tuvieran cierto grado de dificultad, pero accesibles.
- ✓ Que permitieran diferentes métodos de solución.
- ✓ Que algunos incluyeran varias soluciones.
- ✓ Que condujeran a reflexiones; es decir, que no se puedan resolver instantáneamente.
- ✓ Que la serie de problemas fuera resuelta alrededor de tres horas de trabajo continuo.

Algunos de estos criterios fueron contemplados considerando la propuesta, a este respecto, por Santos (2007).

Las fuentes de donde se tomaron los problemas, de acuerdo con los criterios de selección, fueron los siguientes: del Yearbook de álgebra, 1988; del Yearbook de geometría, 1987; del libro de John Mason-Leonel Burton y Kaye Estacey, 1989; y de las olimpiadas mexicana de matemáticas, 2000. Los problemas están planteados para ser resueltos por estudiantes de nivel medio superior, dado el grado de dificultad y por el contenido matemático implícito, por lo que un profesor de este nivel no debería presentar mayor dificultad en su resolución.

El contenido matemático de los problemas seleccionados, se encuentra contemplado dentro del programa de estudios de las escuelas donde los profesores participantes laboran. Por lo que el instrumento (problemas) estuvo conformado por ocho problemas de contenido matemático variado en cada uno de ellos; algunos son aritméticos o algebraicos, otros son geométricos, o de trigonometría o combinación de ellos. En el Anexo A se pueden consultar los problemas propuestos a los profesores. Se consideraron ocho problemas, debido a que el tiempo de resolución piloto en promedio equivalió a tres horas de trabajo continuo.

El propósito del instrumento de recolección de datos fue establecido de acuerdo con los objetivos de la investigación; es decir, conforme a lo que se quería investigar. La serie de problemas permitió conocer, a través del trabajo escrito, los diferentes recursos matemáticos (fórmulas, ecuaciones, operaciones, figuras geométricas, etc.), empleados por los profesores en la resolución del problema.

3.6 Implementación de los problemas mediante entrevista

Antes de ser implementado el instrumento (la serie de problemas) a los diez profesores, éste fue “piloteado” con la finalidad de saber si la redacción, el lenguaje y las instrucciones de los problemas era comprensible, y si el tiempo de resolución de los ocho problemas correspondía a tres horas, aproximadamente, de trabajo continuo. Una vez “piloteado” y verificado lo anterior se procedió a implementar los problemas mediante entrevista.

Observar a los sujetos trabajar en problemas propuestos de manera cercana permite obtener mayor evidencia posible y, de esta manera, documentar el fenómeno en estudio. En este sentido, para esta investigación se utilizó la entrevista, como herramienta importante, para la captura de la información en el momento en que cada profesor resuelve los problemas.

Davis (1990) describe la entrevista de acuerdo con una tarea (problema o situación) como a continuación se menciona:

> Un estudiante se sienta en una mesa y se le proporciona papel y bolígrafo, y se le pide al alumno que resuelva algunos problemas matemáticos específicos. Para recoger los datos, uno o más adultos pueden estar presentes. La forma exacta de la sesión puede variar considerablemente, por un lado puede que haya mucha o poca participación de los observadores, la participación puede que sea poca y dejar a los estudiantes que resuelvan los problemas sin la intervención de los observadores. Las intervenciones de los observadores puede ser con el objetivo de corregir algún error o incluso para motivar o alentar al estudiante. Durante la resolución se le solicita al estudiante que hable en voz alta explicando a detalle o lo más que sea posible lo que esta haciendo. La sesión puede ser audio-grabada y video-grabada de lo que el alumno ha hecho en el papel. El observador puede ir escribiendo notas adicionales durante la sesión o incluso inmediatamente después de ésta para agregar algunos comentarios. (pp. 87-88)

Los ocho problemas propuestos a los profesores y que sirvió para recolectar los datos, fueron aplicados inesperadamente; esto es, sin previo aviso sobre el tipo de problema o del contenido matemático presente en cada uno de estos. Ello, con la finalidad de no dar oportunidad a consultas anticipadas referentes a la temática. La aplicación de los problemas fue hecha mediante entrevista donde los maestros fueron video-grabados y audio-grabados en el momento de la resolución, con el propósito de conocer a detalle los recursos matemáticos que el profesor consideraba pertinente utilizar para la resolución del problema y el porqué de su uso. La entrevista permitió obtener información, muchas de las veces no mencionada o mostrada por parte de los profesores, pero que reforzaban las explicaciones y las acciones realizadas por ellos.

Los ocho problemas fueron resueltos por algunos profesores en una sesión y hubo quien requirió de dos o tres, dependiendo de la capacidad o del conocimiento de cada uno de los docentes. Antes de la resolución, se le dio al profesor una serie de instrucciones de cómo resolver el problema; posteriormente, se le fue dando de problema en problema conforme iba terminando de resolverlos.

Durante el proceso de resolución de los problemas, los profesores fueron explicando en voz alta todos los cálculos matemáticos y técnicas que iban desarrollando, mientras que la función del entrevistador, fue hacer preguntas[12] para tratar de que la explicación dada por parte del profesor quedara lo más clara posible; para resolver el problema se les proporcionó una calculadora (*casio fx-82MS*), por si llegaran a requerirla para facilitar los cálculos. De esta manera, los datos fueron tomados en la acción ya que de acuerdo con lo que dice Schön (1992) el conocimiento está en la acción, y es revelado a través de ejecuciones espontáneas, y es mediante la observación y reflexión de las acciones que se puede describir el conocimiento implícito en ellas. Por otra parte, Schön menciona que las descripciones son siempre construcciones; es decir, "son siempre intentos de poner en forma explícita y simbólica un tipo de inteligencia que comienza siendo tácita y espontánea" (p. 36).

3.7 Descripción de los problemas implementados durante la entrevista

Algunos métodos de resolución de los problemas del instrumento son sugeridos en el Anexo A. Es importante mencionar que estos métodos no son exhaustivos, ni se esperaba que los profesores eligieran necesariamente alguno de ellos en la resolución de dichos problemas. El proceso que el docente utilice para resolver el problema es libre y puede incluir el uso de representaciones (diagramas, gráficas, trazos geométricos), para representar la información del problema o como recurso explicativo. Así, puede incluir el uso de métodos algebraicos, aritméticos, trigonométricos, o de la combinación de estos para facilitar la resolución. A continuación, se muestra cada uno de los problemas y lo que se esperaba que el profesor planteara y utilizara en su resolución.

Problema 1:

Tomado y modificado de: Antolín. O. Bagnoli, F. Bulajich, R. Gómez, J. A. y Rechtman, A. (Eds.). 2000, p. 7.

El triángulo ABC es equilátero (como se muestra en la figura) y sus lados AC y BC son tangentes a la circunferencia cuyo centro es O, y cuyo radio es $\sqrt{3}$. *¿Cuál es el área del cuadrilátero AOBC?*

[12] En el Anexo C se encuentra el protocolo de entrevista que utilizó el entrevistador durante la resolución de problemas..

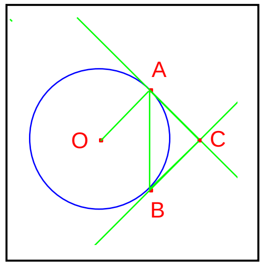


Figura. 3.1. Las rectas tangentes como parte del cuadrilátero AOBC.

En este problema, se esperaba que el profesor identificara el cuadrilátero al que se le pedía obtener el área y luego lo seccionara en dos triángulos, para facilitar el cálculo del área, en un equilátero y un isósceles, o bien en dos triángulos rectángulos. Posteriormente, se esperaba que el profesor con ayuda de los datos del enunciado del problema identificara otros recursos, como el concepto de tangente, eje de simetría, bisectriz y las propiedades de los triángulos referentes a ángulos y lados, para encontrar los elementos que permitieran hallar el área de cada uno de los triángulos y, de esta manera, obtener el área del cuadrilátero buscado. Se esperaba que el profesor diera como resultado $3\sqrt{3}$ unidades cuadradas.

Problema 2:

Tomado de: Mason, J. Burton, L. y Stacey, K., 1989, p. 183.

Caminando por mi ciudad hace algunos años, me di cuenta de que llevaba en mi trabajo un cuarto de mi vida. Quizá porque en aquel momento estaba algo desanimado, lo cierto es que inmediatamente me pregunté ¿cuánto tiempo pasaría hasta que hubiese estado en mi trabajo un tercio de mi vida?

Para facilitar la resolución de este problema, se esperaba que el profesor utilizara recursos como variables (incógnitas); esto es, pusiera la información del enunciado en términos de éstas como a continuación se expresa:

v = *vida en años*

t = *tiempo de trabajo en años*

x = *tiempo hasta que cumpla un tercio de mi vida en el trabajo*

Posteriormente, que relacionara los términos numéricos mencionados en el enunciado del problema con las variables sugeridas (v, t, x), para encontrar dos ecuaciones en términos de estas variables ($t=\frac{v}{4}$; y, $t=\frac{v-2x}{3}$), las cuales posteriormente tenía que relacionar, para encontrar la variable x buscada en términos de v. El resultado que se esperaba que los profesores encontraran es $x=\frac{v}{8}$.

A diferencia del Problema 1, este problema contiene pocos recursos matemáticos de los que se puede echar mano para resolverlo, debido a la naturaleza de su planteamiento. Puede decirse que es un problema aparentemente sencillo, porque no requiere de una gran cantidad de recursos matemáticos complejos; pero sí de un razonamiento que para algunos sujetos lleva tiempo desarrollar.

Problema 3:

Tomado y modificado de: Guzmán, H. A. 1992, p. 71.

A partir de los lados de un triángulo se construyen 3 cuadrados, como se muestra en la figura, cuyas áreas respectivas son 169, 225, 196 (unidades cuadradas). ¿Cuál es el área del triángulo?

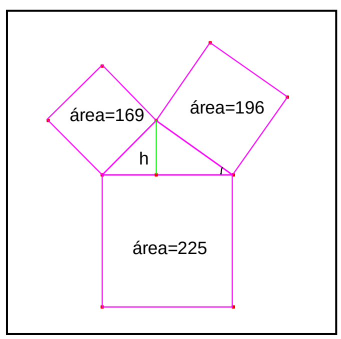


Figura 3.2. El triángulo.

Para resolver este problema, se esperaba que el profesor encontrara el valor de cada uno de los lados del triángulo, usando los valores de las áreas de los cuadrados dados en el problema. Posteriormente, que encontrara uno de los ángulos internos con ayuda del recurso matemático ley de cosenos $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\theta$, así como de la identidad trigonométrica ($\cos^2\theta+sen^2\theta=1$). Ello, con la finalidad de utilizarlo –el ángulo– para encontrar la altura *h* del triángulo. Teniendo la altura y la base del triángulo, se esperaba que encontrara su área igual a *84* unidades cuadradas, aplicando la fórmula para encontrar el área de un triángulo.

Problema 4:

Tomado de: Coxford, A. F. y Shulte, A. P. (Eds.), 1988, p. 19.

Encuentre todos los valores de x *que satisfacen:* $(x^2 - 5x + 5)^{x^2 - 9x + 20} = 1$

Para este problema, se esperaba que el profesor identificara los tres casos para los cuales la ecuación se cumple; es decir, cuando:

1. El exponente sea igual a cero, ya que cualquier número diferente de cero elevado a la cero potencia es igual a uno es decir: $x^0 = 1$; $x \neq 0$.

Solución: $x = 5$ *y* $x = 4$

Puede ser verificando que los valores $x = 5$ *y* $x = 4$ no son raíces de $x^2 - 5x + 5$, ya que si esto pasa la condición: $x^0 = 1$, con $x \neq 0$ no se cumpliría.

2. La base sea igual a 1, ya que 1 elevado a cualquier potencia siempre es igual a 1.

$1^n = 1$ *Donde n es un número real*

Solución: $x = 1$ *y* $x = 4$

3. La base sea igual a -1 y que el exponente sea un número par, ya que -1 elevado a cualquier potencia par también es igual a 1.

$-1^{2n} = 1$ *Donde n es un número entero*

Solución: $x = 3$ *y* $x = 2$

Posteriormente, con los casos anteriores se esperaba que identificara las ecuaciones que al resolverlas dieran los valores de x para los cuales los tres casos se cumplen. Se esperaba que los profesores encontraran las soluciones para x.

Como se puede observar, los únicos recursos matemáticos necesarios para resolver el problema son las leyes de los exponentes y la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado. Parece ser un problema sencillo, pero requiere de un poco de reflexión para poder identificar los casos que cumplen las condiciones del problema.

Problema 5:

Tomado y modificado de: Antolín. O. Bagnoli, F. Bulajich, R. Gómez, J. A. y Rechtman, A. (Eds.)., 2000, p. 1.

En un cuadrado ABCD de lado 1 (como se muestra en la figura), la diagonal BD se divide en 4 partes iguales, tal que DF es una cuarta parte de DB. ¿Cuál es el área del triángulo CFD?

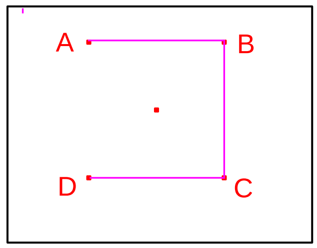


Figura 3.3. El cuadrado.

En este problema, se esperaba que el profesor dibujara el triángulo al que se le pedía encontrar el área; esto a través del trazo de bisectrices de los ángulos del cuadrado para luego dividir la bisectriz que va de B a D en cuatro partes iguales; ello, para localizar el punto F el cual es uno de los vértices que conforman el triángulo al que se quiere encontrar su área. Una vez identificado el triángulo, al cual se le pedía hallar el área, se esperaba que calculara el valor de la distancia que va del vértice C al centro del cuadrilátero (G), ya que este valor corresponde a la altura del triángulo CFD. Si en este triangulo la base es tomada como DF, y por ser un cuadrado de lado 1, los valores CG Y DF son fáciles de calcular. Teniendo la base y la altura, se esperaba que el profesor obtuviera, con ayuda de la fórmula para calcular el área del triángulo, un valor de $\frac{1}{8}$.

Problema 6:

Tomado de: Coxford, A. F. y Shulte, A. P. (Eds.), 1988, p. 77.

En una serie aritmética, la suma de los primeros 50 términos es 200, y la suma de los siguientes 50 términos de la misma serie es 2700. ¿Cuál es el primer término de la serie?

Para resolver este problema, se esperaba que el profesor tuviera conocimiento de lo que es una serie aritmética y cómo se representa. También, era necesario que conociera la fórmula para calcular la suma de los primeros n enteros positivos consecutivos, ya que estos son los recursos necesarios para resolver el problema. Lo que se esperaba es que el profesor:

primero representara la suma de los primeros 50 términos como: $x+(x+a)+(x+2a)+...+(x+49a)$ y agrupar para encontrar: $50x+a(1+2+3+...+49)$, segundo, utilizando el recurso $\frac{n(n+1)}{2}$ para calcular la suma de la serie $1+2+3+...+49$ y obtener la primera serie reducida a su expresión más simple $50x+1225a=200$. De esta manera, hacer lo mismo con la serie dos para encontrar $50x+3725a=2700$. Posteriormente, se esperaba que el profesor resolviera las dos ecuaciones encontradas como un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y así encontrar el valor del primer término de la serie igual a -20.5.

Problema 7:

Tomado de: Montgomery. L. M., 1987, p. 178.

En la figura A, B, C Y D, son los vértices de un rectángulo; $EFGH$ es un cuadrado; $AH=GF=ED=1$; $CD=2$; I es equidistante de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$; e I es equidistante de $\overline{BC}$ y $\overline{GF}$. Si J es un punto seleccionado al azar dentro del polígono $ABCDEFGH$, ¿cuál es la probabilidad de que $\overline{IJ}$ no esté completamente dentro del polígono?

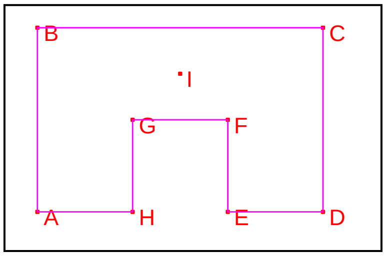


Figura 3.4. Polígono.

En la resolución de este problema, se esperaba que el profesor dividiera el polígono en cinco cuadrados congruentes de lado 1. Posteriormente, que trazara segmentos IJ para encontrar el área donde dicho segmento no se encuentra completamente dentro del polígono. Se esperaba que a través de las proporciones de área, encontrara la probabilidad igual a $\frac{1}{5}$.

Problema 8:

Tomado de: Coxford, A. F. y Shulte, A. P. (Eds.), 1988, p. 90.

Dado $2^x=8^{y+1}$ *y* $9^y=3^{x-9}$, *encuentre el valor de* x *e* y.

Se esperaba que en la resolución de este problema el profesor cambiara la ecuación $2^x = 8^{y+1}$ en términos de bases iguales, para obtener la siguiente expresión $2^x = (2^3)^{(y+1)}(2^3)$ y luego hacer lo mismo con la expresión $9^y = 3^{x-9}$ para obtener $(3^2)^y = 3^{x-9}$; con esto, darse cuenta de que como las bases son iguales entonces los exponentes también lo son. Posteriormente, resolver las dos ecuaciones $x-3y=3$ y $x-2y=9$ como un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas para encontrar $x=21$ y $y=6$. Si no lograba ver que si las bases son iguales, entonces los exponentes también son iguales, se esperaba que aplicara logaritmo a ambos lados de la ecuación y aplicara álgebra básica para eliminar las bases y, de esta manera, obtener el sistema de ecuaciones que dan la solución al problema.

Como se puede percibir, mediante estos problemas, los recursos matemáticos que el profesor debe utilizar para resolverlos son pocos y estos están relacionados con la aplicación de álgebra básica, uso de algoritmos y de alguna técnica para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE DATOS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

4.1 Introducción

En este capítulo, son analizados los datos obtenidos con la implementación del instrumento (serie de problemas). Para el análisis de los datos, se puso atención en los teoremas-en-acto y los conceptos-en-acto usados por los diez profesores, vistos como recursos. La entrevista, como un instrumento metodológico, permitió reconocer estos elementos de interés durante la resolución de los problemas llevada a cabo por los profesores.

4.2 Recursos matemáticos a observar durante la resolución de problemas

Para el análisis de la solución de cada problema, se tomaron en cuenta los recursos matemáticos más importantes (teoremas y conceptos-en-acto) que permiten resolverlos, independientemente del camino seguido por el profesor, debido a que lo que se pretendió observar con este estudio es el conocimiento matemático implícito; es decir, el conocimiento del profesor y de los cuales él hace uso; incluso, muchas veces sin mencionarlo o sin justificarlo al resolver problemas. Dicho conocimiento es manifestado a través del uso de recursos como: los teoremas-en-acto, conceptos-en-acto y las técnicas utilizadas por los profesores para resolver cada uno de los problemas seleccionados.

Una vez identificado estos recursos, en los procesos de resolución usados por cada uno de los profesores, se procedió a ver qué conceptos-en-acto fueron los que dieron lugar al uso de teoremas-en-acto y la manera en que estos dos influyeron en la solución del problema. Lo anterior, permitió ver a través de las dificultades exhibidas en cada uno de los docentes la problemática del conocimiento matemático del que disponen al resolver problemas no rutinarios. Las técnicas institucionales, los conceptos y teoremas-en-acto fueron definidos y discutidos en el Capítulo 2 del presente trabajo de investigación.

4.2.1 Análisis y resultados globales de la solución del Problema 1

A continuación se presenta el Problema 1, y los recursos matemáticos utilizados por los profesores al resolver dicho problema. En este apartado, se muestra algunas partes de las hojas de trabajo de los docentes, acompañadas con los argumentos mencionados durante la entrevista. Es importante señalar que en este problema sólo cinco de los diez profesores llegaron a la solución correcta del problema.

Problema 1:

El triángulo ABC es equilátero (como se muestra en la Figura 4.1) y sus lados AC y BC son tangentes a la circunferencia, cuyo centro es O, y cuyo radio es $\sqrt{3}$. *¿Cuál es el área del cuadrilátero AOBC?*

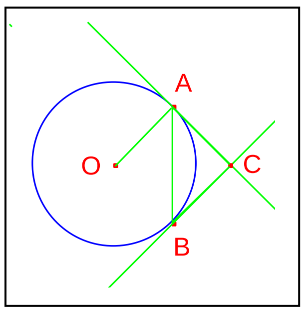


Figura. 4.1. Las rectas tangentes como parte del cuadrilátero AOBC.

Del análisis comparativo realizado a los 10 profesores, sobre los recursos más utilizados para resolver este problema, se encontraron entre los más significativos: las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) para un triángulo rectángulo, la fórmula para calcular el área de un triángulo, teorema de Pitágoras y el teorema que dice que una recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que une el punto de tangencia con el centro. Independientemente, de los diferentes caminos utilizados para resolver el problema, los profesores tuvieron la necesidad de hacer uso de algunos de estos recursos para poder encontrar otros que les ayudarían a llegar a la solución del problema. Por lo que, estos recursos son necesarios para resolver el problema, y sin algunos de ellos no sería posible hacerlo. Entre los conceptos matemáticos más importantes se encuentran: las propiedades básicas de los triángulos (equiláteros, isósceles y rectángulos) referentes a los ángulos y lados, así como, el concepto de radio, área, eje de simetría y recta tangente.

4.2.1.1 Técnicas matemáticas institucionales (teoremas-en-acto)

Al hacer la comparación con los diez profesores sobre los teoremas-en-acto en los cuales se apoyaron para resolver el problema, se encontraron dentro de los más importantes por su utilización en la mayoría de los profesores: las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente), la fórmula para calcular el área de un triángulo, teorema de Pitágoras y el teorema que dice que la tangente en un punto de la circunferencia y su radio son siempre perpendiculares. Es importante señalar que gran parte de los profesores entrevistados, manifestaron la presencia de estos teoremas al utilizarlos implícitamente en la resolución del problema.

a) Razones trigonométricas para un triángulo rectángulo: seno, coseno y cotangente

Para mostrar el uso de estas técnicas institucionales –razones trigonométricas– se recurre a un extracto de la hoja de trabajo del Profesor 1, como se muestra en la Figura 4.2 y de un extracto de la entrevista, donde se manifiestan dichas técnicas.

Profesor 1: Problema 1

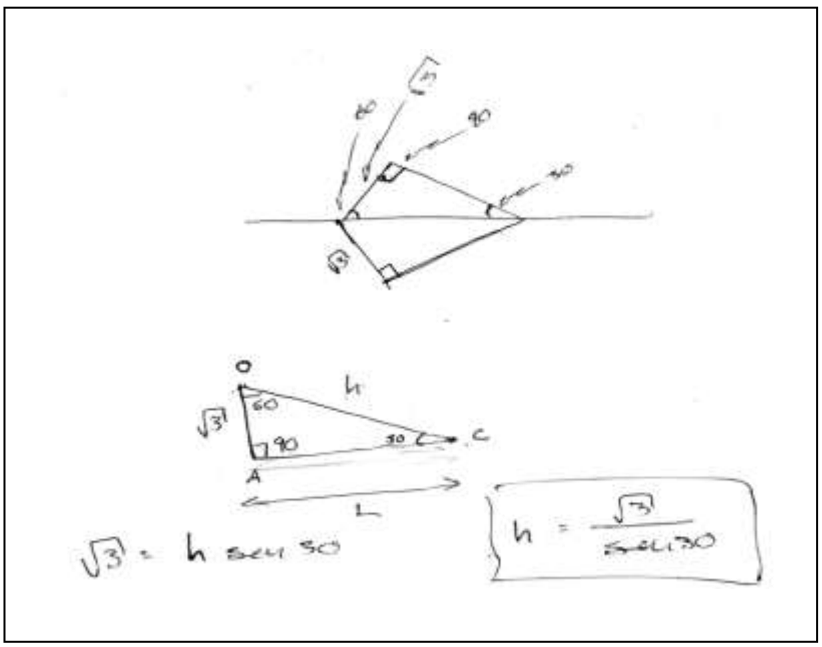


Figura 4.2. Razón trigonométrica seno, planteada por el Profesor 1 para resolver el Problema 1.

E: Entrevistador P$_1$: Profesor 1 L$_i$= Línea i

L$_1$P$_1$: Tenemos que estos dos ángulos miden noventa [*marca en la figura los ángulos retos*], y éste, como lo habíamos dicho, mide sesenta, pero como está partido en dos, entonces este ángulo mide treinta [*escribe el ángulo de 30° en la figura*]. Bueno, ya para completar la figura, como los ángulos internos de [*pausa y escribe el ángulo de 90° en la figura*] de un triángulo miden… bueno suman ciento ochenta, entonces, necesariamente este ángulo [*lo marca en la figura*], ciento ochenta menos ciento veinte, que es la suma [*señala el ángulo de 90° y el de 30°*], entonces son sesenta, entonces, este angulito que está aquí [*escribe en el triángulo 60°*], va a valer sesenta grados. Sesenta más treinta son noventa más noventa son ciento ochenta. Entonces, esto se reduce nada más ¡ah! vamos a tratar de encontrar esta área de este triángulo rectángulo [*señala el área del triángulo*] y lo multiplicamos por dos y ahí ya obtenemos el área de todo el cuadrilátero [*pausa*], también otro dato que teníamos es que este lado [*señala el lado en el triángulo*] mide raíz de tres [*escribe* $\sqrt{3}$], o aquí también mide raíz de tres [*escribe* $\sqrt{3}$]. Entonces, vamos a poner el triángulo más derechito [*dibuja un triángulo rectángulo*], éste mide treinta [*escribe 30°*], éste mide sesenta [*escribe 60°*], nada más estoy pasando uno de estos triangulitos para acá.

L$_2$E: Ok.

L$_3$P$_1$: Esto mide noventa [*escribe 90°*] y este lado mide raíz de tres [*escribe* $\sqrt{3}$].

En este extracto de la entrevista, se pueden observar los conceptos-en-acto que dieron lugar a que el profesor se viera en la necesidad de resolver el problema, utilizando un triángulo rectángulo, entre ellos: eje de simetría y ángulo recto.

L$_4$E: Profesor, ¿podría poner los vértices así como está originalmente en la figura?

L$_5$P$_1$: ¿Cuáles vértices?

L$_6$E: Sí, del triángulo para que se puedan ver quién es *A*, *B*, *C*.

L$_7$P$_1$: ¡Ah¡ ya, entonces aquí, *A* sería éste [*escribe A*], sería éste [*escribe O*] y éste sería… éste sería *C* [*escribe C*]. Pues aquí el problema ya está resuelto nada más aplicar un poquito de trigonometría mmm… De la trigonometría sabemos que el cateto opuesto [*pausa*], es igual a la hipotenusa. Bueno, vamos a utilizar otra relación mejor mmm… [*Pausa*], a la hipotenusa le voy a poner *h* [*escribe h*], entonces, sabemos que el cateto opuesto, o sea raíz de tres es igual a *h* por el seno de treinta, por el seno del ángulo [*escribe* $\sqrt{3} = hsen30$], entonces de aquí, bueno… pero… Nos interesaría aquí saber el cateto adyacente mejor para sacar el área, como base por altura entre dos. Entonces el cateto adyacente [*pausa*], al igual nos sirve, voy a calcular el valor de *h* para después utilizarlo.

L_8E: Ok.

L_9P_1: Entonces *h* es igual a raíz de tres entre el seno de treinta, entonces aquí ya tenemos el valor de *h*. Y también sabemos que el cateto adyacente es igual. Vamos a ponerle [*señala el lado AC*], con el nombre de *L* [*escribe L*]. *L* va a ser igual a *h* por el coseno de treinta. Bueno, las relaciones que estoy manejando aquí son de la trigonometría elemental. Bueno, entonces ya tenemos que *L* es igual a *h* por el coseno de treinta, pero ya tenemos el valor de *h*, así que *L* es igual a raíz de tres entre el seno de treinta por el coseno de treinta, de aquí ya para terminar *L* es raíz de tres, queda coseno entre el seno; ésta es la cotangente, cotangente de treinta, entonces este es el valor de *L*.

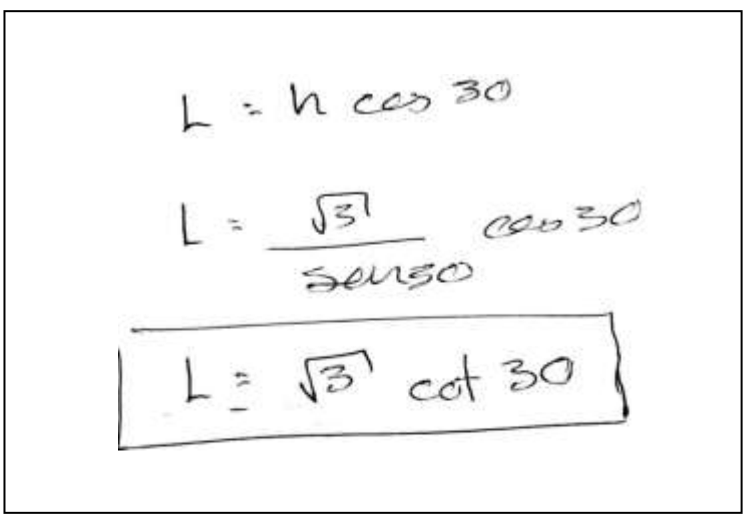


Figura 4.3. Razones trigonométricas: coseno y cotangente usadas por el Profesor 1 para resolver el Problema 1.

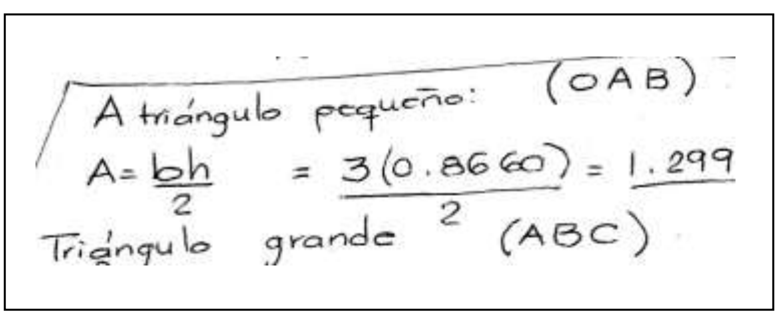
En esta parte del trabajo (del Profesor 1), se observa el uso de algunos conceptos-en-acto como: triángulo rectángulo, hipotenusa, catetos adyacentes y opuestos, que dieron lugar a la utilización de las razones trigonométricas, como: el seno, el coseno y la cotangente. En L_7P_1 se puede observar cómo el profesor hace uso de los conceptos cateto adyacente y cateto opuesto para usar trigonometría y, de esta manera, tratar de usar el seno de treinta grados. El cateto opuesto es tomado por el profesor como el radio del círculo con valor de raíz de tres. Apoyándose en la razón trigonométrica del seno, el profesor trata de encontrar el valor de la hipotenusa *h* del triángulo rectángulo *AOC* que formó al seccionar el cuadrilátero, mediante el eje de simetría (Figura 4.2).

En L_9P_1 el profesor encuentra el valor de la hipotenusa *h* en términos del seno. Posteriormente, con ayuda del coseno de treinta grados y el valor de *h* en términos del seno, el profesor encuentra el valor del cateto adyacente al que él denomina *L*; que posteriormente, con ayuda de la trigonometría transforma a cotangente (Figura 4.3). De esta manera, el profesor, con la ayuda de recursos como: el triángulo rectángulo, el cateto opuesto y el ángulo opuesto a este cateto, puede apoyarse de otros recursos como: el seno, el coseno y la cotangente del ángulo para ir encontrando nuevos recursos, que le permitieron resolver el problema.

b) Fórmula para calcular el área de un triángulo

Otra de las técnicas institucionales utilizada por los profesores y, por tanto, fundamental para que muchos de ellos pudieran resolver el Problema 1, fue la fórmula para calcular el área de un triángulo. Este recurso permitió, de alguna manera, que la mayor parte de los profesores pudieran encontrar el área del cuadrilátero que se les pedía.

Profesor 2: Problema 1


A triángulo pequeño: (OAB)

$A = \frac{bh}{2} = \frac{3(0.8660)}{2} = 1.299$

Triángulo grande (ABC)

Figura 4.4. Fórmula para calcular el área de un triángulo utilizada por el Profesor 2 al resolver el Problema 1.

E: Entrevistador P$_2$: Profesor 2 L$_i$= Línea i

L$_1$P$_2$: Entonces, yo cómo calcularía el área del pequeño, a ver: área del triángulo pequeño, el área del triángulo pequeño sería base por altura sobre dos.

L$_2$E: Ahí, ¿cuál sería el triángulo pequeño?

L$_3$P$_2$: El triángulo pequeño para mí sería, es que no puse… el triángulo pequeño sería esta parte [*señala el triángulo que dibuja en su hoja de trabajo*] el triángulo pequeño vamos a definirlo como *O*, *A* y *B* [*escribe OAB*], y entonces, la base de ese triángulo pequeño, que sería la distancia de este lado [*señala en el triángulo de A a B*], ya dijimos que es tres, entonces, sería tres [*escribe 3*] por la altura que sería este pedacito [*señala en el triángulo que dibujó*], que es el cateto opuesto que yo encontré, ajá, que es de punto ochenta y seis [*escribe 0.8660*] entre dos [*escribe 2 y hace cálculos en la calculadora*] sería tres por punto ochenta y seis sesenta, entre dos [*en la calculadora escribe* $\frac{(3)(0.8660)}{2}$] y esto me da uno punto veintinueve, nueve (1.299) y ésta sería el área del triángulo uno punto tres (1.3) más o menos. Ahora, el área del triángulo grande, necesito conocer la altura, el triángulo grande para mí sería *A*, *B*, *C*. Visto de esta manera [*dibuja un triángulo con vértices A, B y C*] mal dibujado, pero esto es un triángulo equilátero *A*, *B* y *C*. Bueno, yo sé que el lado *AB* mide tres, bueno cualquiera de los lados mide tres [*escribe 3 en cada lado del triángulo*] es lo que yo encontré.

L$_4$E: ¿Por qué cualquiera de los lados mide tres?

L$_5$P$_2$: Porque es un triángulo equilátero y sus tres lados son iguales y yo encontré que este pedacito [*señala en el triángulo*] mide uno punto cinco, entonces, uno punto cinco por dos, viene siendo tres.

Para poder encontrar el área del triángulo *OAB*, como lo nombra el Profesor 2 en L$_3$P$_2$, hace uso de algunos conceptos-en-acto como: un lado del triángulo (lado AB) y su altura (cateto opuesto) y que anteriormente fueron numéricamente encontrados. Posteriormente, con estos valores numéricos y con ayuda de la fórmula para calcular el área de un triángulo, la cual pone de manera explícita como $A = bh/2,$ encuentra un valor numérico para el área del triángulo *OAB*, que le ayudó para encontrar el área del cuadrilátero buscado. En este extracto de la entrevista, se puede observar que con ayuda de recursos como: el lado de un triángulo y su altura se puede utilizar otros recursos; tal es el caso, de la fórmula para calcular el área de un triángulo.

c) Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras para la resolución del Problema 1, fue usado como un teorema-en-acto fundamental para que algunos de los diez profesores, llegaran a la solución del Problema 1. A continuación, se muestra un ejemplo del trabajo del Profesor 6, donde se pone de manifiesto el uso de dicho teorema.

Profesor 6: Problema 1

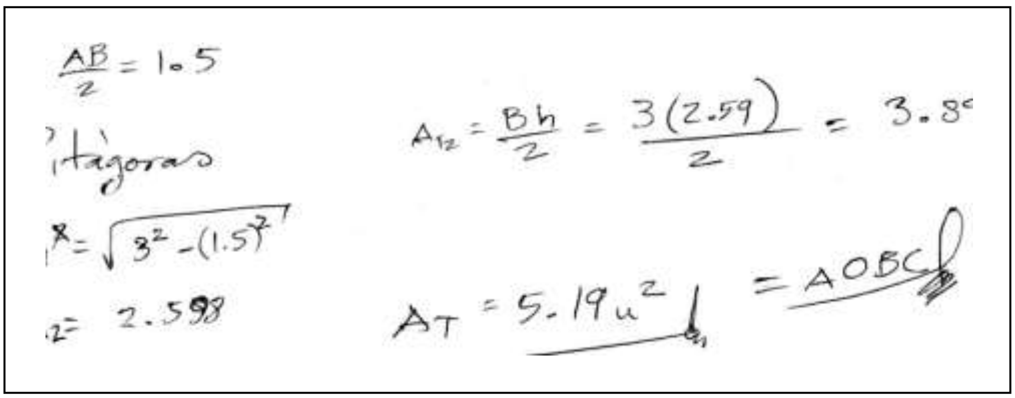


Figura 4.5. Teorema de Pitágoras utilizado por el Profesor 6 para resolver el Problema 1.

E: Entrevistador $\qquad$ P_6: Profesor 6 $\qquad$ L_i= Línea i

L_1P_6: Entonces, *AB* entre dos es igual a uno punto cinco. De ahí obtengo que, para obtener esta altura [*señala en el triángulo dibujado en su hoja de trabajo*], altura dos le voy a poner para que no nos confundamos. Sí, yo voy a utilizar a Pitágoras otra vez. Entonces, tengo que altura dos [*escribe h^2*] va a ser igual a la raíz cuadrada de lo que es el valor de tres, que es el lado elevado al cuadrado, restando el valor que está aquí [*señala el valor de 1.5*] que es el valor *AB* que sería uno punto cinco al cuadrado [*escribe la expresión* $h^2 = \sqrt{3^2 - 1.5^2}$] [*pausa*], estoy revisando que no me haya equivocado.

L_2E: Sí, está bien.

L_3P_6: Entonces, utilizando la calculadora [*desarrolla* $\sqrt{3^2-1.5^2}$ *en la calculadora*], nos da un valor de dos punto cincuenta y nueve; ese sería el valor de *h*. Voy a tachar este valor, porque me pasé por el cuadrado y aquí ya despejé [*tacha el cuadrado de h*]. Entonces, *h* va a ser igual a dos punto cincuenta y nueve ocho [*escribe 2.598*], tomo tres decimales, a medida que el error disminuya un poquito y entonces tengo el valor de esta altura [*señala la altura en el triángulo que anteriormente dibujó*], *h* dos, ok. Y aplico otra vez el área del triángulo dos, que es el triángulo equilátero que es igual a base por altura sobre dos y solamente sustituyo; la base sabemos que es tres, la altura en este momento salió como dos punto cincuenta y nueve entre dos, lo aplicamos en la calculadora [*desarrolla en la calculadora (3*2.59)/2*], tres punto ochenta y nueve siete, ésa es el área del triángulo dos. Y entonces ya sumando el área total para ya obtener el área de nuestro, este para el cuadrilátero que tenemos ahí, mmm…, sumamos ese tres punto ochenta y nueve siete [*escribe 3.897*] más el uno punto tres del área que teníamos anteriormente y nos da cinco punto diecinueve [*escribe 5.19*], unidades cuadradas.

L_4E: Ok, ¿ésa sería el área del cuadrilátero maestro?

L_5P_6: El área del cuadrilátero *A*, *O*, *B*, *C*.

En esta parte de la entrevista se manifiesta el uso del teorema de Pitágoras para encontrar la altura *h*, la cual pertenece a uno de los triángulos, y que él define como triángulo dos. Este triángulo dos no es más que el triángulo equilátero del que se menciona en el enunciado del problema. El profesor, anteriormente, encuentra que uno de sus lados de este triángulo mide tres unidades; con este recurso puede hacer uso del teorema de Pitágoras para encontrar la altura del triángulo equilátero (L_1P_6 y L_3P_6).

d) Recta tangente a la circunferencia

El radio de la circunferencia, en el punto de tangencia, es perpendicular a la recta tangente. Al igual que el teorema de Pitágoras, éste fue otro de los teoremas-en-acto utilizados por los profesores y en especial por P_1, P_2, P_4, P_5, P_6, P_7, y P_9. Este recurso permitió a los maestros continuar avanzando en la resolución del problema. En la Figura 4.6 se ejemplifica este teorema, con una parte del trabajo del Profesor 7, durante la entrevista.

Profesor 7: Problema 1

Figura 4.6. Recta tangente a la circunferencia utilizado por el Profesor 7 al resolver el Problema 1.

E: Entrevistador $\quad$ P_7: Profesor 7 $\quad$ L_i= Línea i

L_1E: ¿Y si dibuja mejor el otro triángulo, para que lo pueda analizar, como lo hizo con el triángulo equilátero?

L_2P_7: [*Dibuja el triángulo*]. Éste es *O, A*, éste es *B*, éste es *J* [*escribe O, A, B, pausa*].

L_3E: En el problema, no ha involucrado la parte donde dice que los lados *AC* y *BC* son tangentes a la circunferencia, ¿eso cómo podría relacionarlo?

L_4P_7: Mmm… [*Pausa*] *AC* y *BC*, [*pausa*] bueno lo que sabría es que *AC* es perpendicular a *AO*, eso sí lo sabría, porque si *AC* es una recta tangente es perpendicular al radio que pasa por el mismo punto, entonces, creo que estoy viendo una forma, sí éste. ¿Lo dibujo atrás?

L_5E: En otra hoja, por favor.

L_6P_7: Si yo trabajo con este triángulo [*dibuja el triángulo con vértices A, O, C*], es el *O, A, C*, este ángulo [*marca el ángulo*], es ángulo recto, este valor sé que es raíz de tres [*escribe* $\sqrt{3}$], podría saber entonces, esta… sé que este ángulo es de treinta grados [*escribe 30°*], eso, ya lo habíamos establecido, entonces, este ángulo es de sesenta grados; bueno, entonces, aquí ya podría calcular tal vez el valor de alguno de los lados. Lo anoto en otra posición: este es el triángulo, este es el punto *A*, este es el punto *O*, este es el punto *C*, este es el ángulo de treinta grados, este es el ángulo de sesenta grados y éste vale raíz de tres [*pausa*]. Tal vez este valor [*marca con una flecha*], es de… a ver, deje recordar, me falta algún elemento aquí.

En L_1E se puede leer cómo el entrevistador sugiere al profesor que dibuje otro triángulo y que lo analice, como lo hizo con el triángulo equilátero. El profesor trata de dibujar otro triángulo. Posteriormente, en L_3E el entrevistador menciona al profesor que no ha utilizado parte de la información que le dan en el enunciado del problema donde le dicen que los lados *AC* y *BC* son tangentes a la circunferencia. Con esta observación, el profesor en L_4P_7 manifiesta que se le ha ocurrido una nueva forma de resolver el problema al darse cuenta de que *AC*, por ser recta tangente, es perpendicular al radio de la circunferencia que pasa por el mismo punto. Con el recurso manifestado en L_4P_7, el profesor dibuja el triángulo *OAC* con un ángulo recto, con uno de sesenta grados, uno de treinta grados y un lado del triángulo con un valor igual a raíz cuadrada de tres (Figura 4.6). Con lo anterior, se puede observar cómo el recurso de las rectas tangentes da lugar a encontrar otros recursos como los ángulos del triángulo *OAC*.

4.2.1.2 Conceptos-en-acto

Entre los conceptos-en-acto más utilizados por los profesores, al resolver el Problema 1, independientemente de la forma en cómo ellos lo resuelven, fueron: triángulo equilátero, triángulo isósceles, triángulo rectángulo y recta tangente a la circunferencia.

a) Propiedades de los triángulos: equilátero, isósceles y rectángulo, referentes a ángulos y lados

En la Figura 4.7 se observa un ejemplo donde se muestra la utilización de las propiedades básicas de los triángulos (equilátero, isósceles y rectángulo) referentes a los ángulos y lados.

Para resolver este problema, el Profesor 4 se auxilió, primeramente, de la representación geométrica que se le dio inicialmente junto con el enunciado del problema. Posteriormente, analizó los datos del problema e identificó los ángulos rectos formados con las rectas tangentes y los radios de la circunferencia. Continuando con el proceso de solución, el profesor mencionó que podía dividir el cuadrilátero en dos triángulos y los dibujó. Al respecto, se muestra la evidencia de la hoja de trabajo del Profesor 4 y una parte de la transcripción de la entrevista donde hace alusión a lo antes comentado.

Profesor 4: Problema 1

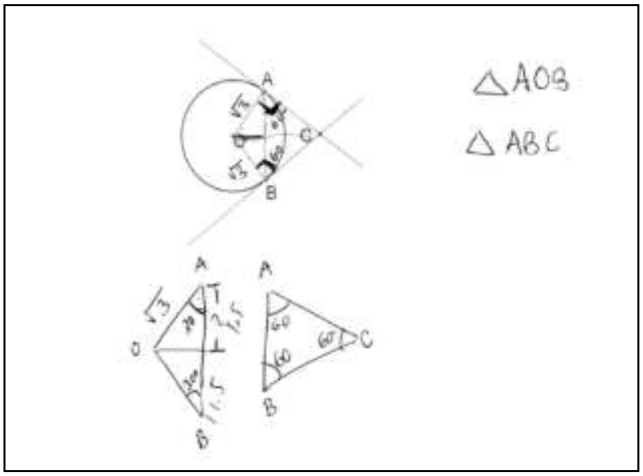


Figura. 4.7. Identificación de triángulos y sus propiedades referentes a ángulos y lados, por el Profesor 4 para resolver el Problema 1.

E: Entrevistador P$_4$: Profesor 4 L$_i$= Línea i

L$_1$P$_4$: Mmm… Pues lo podría fraccionar en triángulos y obtener el área parcial por triángulos, primero empezaría por éste [*señala el triángulo ABC*], en este caso dice que éste es tangente [*señala la recta AC*], éste [*señala el punto A*] éste es de noventa grados [*Pausa*].

L$_2$E: Si gustas puedes dibujarlo abajo, para que puedas ir marcando los ángulos que mencionas.

L$_3$P$_4$: Éste [*señala punto B*] tiene que ser de noventa grados [*marca el ángulo en el dibujo*], y éste también [*marca punto A*], porque dice que *AC* y *BC* son tangentes [*Pausa*]. A ver… mmm… Ok, empezaría por calcular esto [*señala AB*], pero este ángulo [*señala punto O*] no es de noventa grados, porque este triángulo [*señala AOB*] no es rectángulo, mmm…

Al analizar la entrevista, es fácil darse cuenta del recurso (rectas tangentes) que condujo al profesor a utilizar el concepto de triángulo rectángulo y equilátero. La técnica que utiliza el profesor para empezar a resolver el problema es la de dividir el cuadrilátero en dos triángulos; a primera vista, el profesor puede identificar que uno de ellos será un triángulo equilátero (triángulo ABC*)*. Esta información es conocida, puesto que es parte del enunciado del problema. Se puede deducir, de la entrevista, que el concepto-en-acto denominado triángulo equilátero, lo auxilió en la identificación de ángulos y lados que le permitieron continuar con la solución del problema. En esta parte de la entrevista, se puede observar que aunque el profesor identifica dos ángulos rectos en los vértices *A* y *B*, no es capaz de identificar los dos triángulos rectángulos formados (OAC y OBC), y que forman el cuadrilátero.

L_4E: Al inicio, mencionaste que podrías fraccionarlo en dos triángulos.

L_5P_4: Así es.

L_6E: ¿Cuáles serían esos dos triángulos? ¿Puedes dibujarlos?

L_7P_4: Estamos hablando del triángulo *AOB* y *ABC* [*escribe AOB y ABC*]. En este caso, el triángulo *AOB* es isósceles [*señala el triángulo*].

L_8E: ¿Y el triángulo *ABC*?

L_9P_4: Es equilátero. Éste es isósceles y éste es equilátero [*señala el triángulo ABC*], tiene todos sus lados iguales, necesito encontrar éste [*señala el segmento AB*].

Por otra parte, el profesor identifica que el triángulo *AOB* le ayudará a encontrar el área del cuadrilátero y, por tanto, forma parte de éste, no es un triángulo rectángulo, puesto que uno de sus ángulos no es de noventa grados. Después de la observación del profesor, auxiliada por el trazo de los triángulos a los que él nombra *AOB* y *ABC,* así como de los datos del problema, se puede dar cuenta de que el triángulo *AOB* es un triángulo isósceles; sin embargo, aquí el profesor no justifica las razones que da al afirmar que el triángulo formado es isósceles.

$L_{10}E$: ¿Qué otras características conoces de los triángulos equiláteros?

$L_{11}P_4$: Tiene todos sus ángulos iguales, sesenta, sesenta y sesenta. Entonces, éste mide treinta [*señala el ángulo OBA*]. Éste mide sesenta [*marca el ángulo en el dibujo del punto A*], éste mide sesenta [*marca el ángulo en el dibujo del punto B*].

$L_{12}E$: ¿Podrías hacer el triángulo más grande abajo? Ese triángulo que estás marcando.

$L_{13}P_4$: Sesenta [*marca los ángulos del triángulo*].

$L_{14}E$: ¿Sería ese el triángulo *ABC*?

$L_{15}P_4$: Sí [*escribe los vértices A, B y C*].

$L_{16}E$: Ok.

$L_{17}P_4$: Mmm… a ver, qué más puedo obtener de eso mmm… Necesitaría encontrar este lado [*señala AB*].

$L_{18}E$: Mencionaste también que el otro triángulo tenía treinta grados, ¿cuál sería esos treinta grados?

$L_{19}P_4$: Bueno, aquí, este triángulo [*señala AOB y dibuja abajo un triángulo*], este triángulo *AOB*, este ángulo [*escribe 30° en el vértice A*] sería de treinta grados y éste también [*escribe 30° en el vértice B*], por lo que es tangente [*pausa*]. Bueno, lo que puedo hacer [*traza un recta del vértice O al lado AB*], si quiero conocer éste [*señala una distancia y marca una incógnita y escribe* $\sqrt{3}$ *al lado del segmento OA*], ubicar, esta es la hipotenusa [*señala* $\sqrt{3}$], entonces tengo este ángulo [*señala 30° en el vértice A*], y necesito saber el cateto adyacente sobre hipotenusa.

En esta parte de la entrevista, se puede observar que el profesor hace un reconocimiento de los triángulos que conforman el cuadrilátero, en este caso, del triángulo equilátero y del isósceles, así como de algunas de sus características básicas como: ángulos iguales y lados iguales. También, se puede observar que para encontrar el lado de uno de los triángulos, el profesor se tiene que apoyar en un triángulo rectángulo para poder encontrar lo que denomina cateto y el cual marca con un signo (Figura 4.7).

Otro ejemplo, donde se puede percibir la utilización de los conceptos de triángulo rectángulo, equilátero e isósceles es en el trabajo del Profesor 2, mostrado en la Figura 4.8. El Profesor 2 utiliza estos conceptos para auxiliarse en la resolución del Problema 1.

Profesor 2: Problema 1

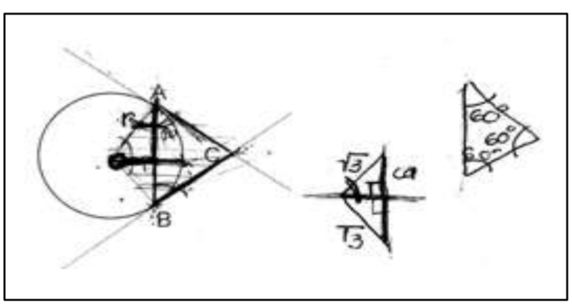


Figura 4.8. Triángulo equilátero, isósceles y rectángulo utilizado por la Profesor 2 para resolver el Problema 1.

E: Entrevistador P$_2$: Profesor 2 L$_i$= Línea i

L$_1$P$_2$: Ok, lo que queremos encontrar es toda esta área [*señala el área del cuadrilátero en el dibujo*], entonces lo que tenemos que hacer es encontrar el área de este triángulo equilátero [*dibuja un triángulo*] más esta área pequeña [*dibuja otro triángulo*] que está dentro de la circunferencia y que sería dos triángulos rectángulos [*divide este último triángulo en dos triángulos rectángulos*] de alguna manera, éste es raíz de tres, éste raíz de tres, estoy conociendo básicamente toda la hipotenusa y conociendo bueno todo el segmento de aquí acá [*señala en el dibujo*] pudiera yo conocer los dos [*señala en el dibujo*] porque aquí estos ángulos son ángulos rectos [*marca el ángulo en el triángulo*]. Y para conocer el área de un triángulo equilátero es… base por altura sobre dos, elemental, pero necesitaría conocer éste [*pausa*], las distancias que están aquí, o sea, ésta y ésta [*remarca las distancias en el dibujo*].

En esta parte de la entrevista, el profesor hace un reconocimiento de los recursos –triángulos– que le permiten encontrar el área del cuadrilátero; de antemano sabe que uno de ellos es equilátero, pero no reconoce que el otro es isósceles, y lo que hace es dividir a éste en dos triángulos rectángulos (Figura 4.8).

L$_2$E: Y con los datos que tiene, ¿cree poder encontrar esa distancia? ¿Qué le falta para poder encontrar esa distancia?

L$_3$P$_2$: Bueno, aquí me hace falta, porque de alguna manera conozco éste [*señala* $\sqrt{3}$] y conozco éste [*señala* $\sqrt{3}$]. Sería el cateto [*pausa*] sería raíz de tres; también, pero no sería raíz de tres porque aquí está seccionado [*señala en el dibujo*].

L$_4$E: Sí, está más pequeño.

L$_5$P$_2$: Entonces [*pausa*], no la verdad no le encuentro. Ajá, si conozco este ángulo [*marca el ángulo en el triángulo*].

L$_6$E: De aquí [*señala el triángulo*] del triángulo que usted acaba de dibujar y que usted lo seccionó en dos triángulos rectángulos. ¿Qué le faltaría a usted para calcular ese lado? De hecho, lo seccionó en dos triángulos rectángulos.

L_7P_2: Sí, bueno aquí, me faltaría alguno de los lados [*señala un lado del triángulo*] porque tengo un ángulo y tengo un lado, tengo la hipotenusa y tengo un ángulo.

L_8E: ¿Podría calcular un lado?

L_9P_2: Alguno de los lados, pues sí, pudiéramos calcular, por ejemplo, aquí el cateto opuesto [*escribe co*].

$L_{10}E$: Sí calcula ese cateto opuesto.

$L_{11}P_2$: Cateto opuesto sería igual a hipotenusa por el seno del ángulo, porque éste no sería el cateto opuesto [*señala co en el triángulo*] si éste es el ángulo, entonces éste sería el cateto adyacente [*corrige co por ca*] porque éste sería el ángulo [*marca el ángulo en el triángulo*].

$L_{12}E$: ¿El que usted está buscando?

$L_{13}P_2$: Sí, el que yo estaría buscando, exacto [*pausa*]. Bueno, pero este ángulo sería de cuarenta y cinco grados, ¿se podría considerar de cuarenta y cinco grados? [*Pausa*].

En este extracto de la entrevista se observa que con recursos como: el valor del radio de la circunferencia y el seno de uno de los ángulos, el profesor trata de encontrar la medida de uno de los lados del triángulo; al que nombra cateto adyacente. Sin embargo, no la puede calcular debido a que no conoce el valor de dicho ángulo.

$L_{14}E$: Las rectas tangentes ¿cómo influirían?

$L_{15}P_2$: Si es tangente es porque forman aquí un ángulo de noventa grados [*señala el ángulo en el punto A*] noventa y si este ángulo mide sesenta [*señala el ángulo en el triángulo ABC*] entonces, éste mide treinta [*señala el ángulo en el triángulo AOB*]. Si, si son rectas tangentes, todo este ángulo mide noventa y este pedacito vale treinta grados, perdón, sesenta grados, porque es uno de los ángulos del triángulo equilátero, o sea, cada uno de estos ángulos vale sesenta grados, sesenta, sesenta y sesenta *[escribe 60 en cada ángulo del triángulo*]. Entonces, si esta recta [*señala AC en el dibujo*] es tangente, me está dando un ángulo de noventa, y a ese ángulo de noventa le quitamos sesenta por lo tanto este pedacito viene siendo de treinta grados.

$L_{16}E$: ¿Puede marcarlo mejor?

$L_{17}P_2$: Podríamos hacer este triángulo pequeñito [*dibuja un triángulo*] este ángulo es de treinta grados, éste es raíz de tres, que es el radio, bueno puedo conocer, éste sería el ángulo, cateto opuesto, no cateto adyacente, bueno y me interesaría conocer en todo caso el cateto adyacente a este ángulo. Si tengo la hipotenusa, entonces podríamos utilizar el coseno.

En esta parte de la entrevista, el profesor es capaz de identificar los ángulos del triángulo con dos lados igual a raíz cuadrada de tres y que dividió en dos triángulos rectángulos. Esta identificación la logra con ayuda de la información que le dan el enunciado del problema y la cual es mencionada por el entrevistador en $L_{14}E$. Posteriormente en $L_{15}P_2$ se observa cómo el profesor va identificando dichos ángulos.

4.2.1.3 Resultados del Problema 1

A continuación, se muestran los resultados obtenidos de los trabajos de los diez profesores, para el Problema 1. En la Tabla 4.1, se exponen los cuatro teoremas-en-acto apropiados para resolver el problema de acuerdo con las técnicas de solución manifestadas por los maestros. En dicha tabla, se puede observar que no todos profesores hacen uso de los cuatro recursos; debido a que no para todos fueron necesarios por la técnica de solución utilizada. Algunos de ellos, pudieron encontrar la solución al problema con sólo tres de los cuatro recursos aquí señalados.

Tabla 4.1. Teoremas-en-acto utilizados por los profesores para resolver el Problema 1.

Profesores	Teoremas-en-acto utilizados por los profesores					
	Razones trigonométricas			Fórmula para calcular el área de un triángulo	Teorema de Pitágoras	Recta tangente a la circunferencia
	Seno	Coseno	Cotangente			
P_1	*	*	*	*		*
P_2	*			*	*	*
P_3				*		
P_4		*		*		*
P_5	*			*	*	*
P_6	*	*		*	*	*
P_7	*			*	*	*
P_8				*		*
P_9	*	*				*
P_{10}	No identifica ningún de los teoremas-en-acto					

Para resolver el Problema 1, de los diez profesores que lo resolvieron, sólo cuatro profesores (P_2, P_5, P_6, P_7) utilizaron los cuatro teoremas-en-acto antes ya analizados. Los profesores P_2, P_5 y P_7 sólo hicieron uso del seno y el Profesor P_6 utilizó el seno y el coseno.

Los profesores: P_1 y P_4 sólo hicieron uso de tres de los cuatro teoremas-en-acto; el teorema que no utilizaron fue el de Pitágoras. Las técnicas de solución fueron distintas para estos profesores: P_1 hizo uso de tres razones trigonométricas (seno, coseno y cotangente) y P_4 sólo utilizó el coseno. Los profesores: P_8 y P_9 hicieron uso de dos teoremas-en-acto. P_3 utilizó la fórmula para calcular el área de un triángulo y el concepto de recta tangente a la circunferencia. P_9 hizo uso de las razones trigonométricas seno y coseno y el concepto de recta tangente a la circunferencia). P_3 sólo usó la fórmula para calcular el área de un triángulo. P_{10} no identificó ninguno de los teoremas-en-acto.

Los conceptos-en-acto, utilizados por cada uno de los diez profesores, se muestran en la Tabla 4.2. En esta tabla, se observa cómo algunos profesores no hicieron uso de las propiedades de los tres triángulos (rectángulo, equilátero e isósceles); sin embargo, más adelante se explica cómo algunos profesores con sólo utilizar las propiedades de dos de los tres triángulos resuelven el Problema 1; esto se debe a la técnica de solución utilizada para resolver el problema.

Tabla 4.2. Conceptos-en-acto utilizados por los profesores para resolver el Problema 1.

Profesores	Conceptos-en-acto utilizados por los profesores		
	Propiedades básicas de los triángulos		
	Equilátero	Isósceles	Rectángulo
P_1	*		*
P_2	*	*	*
P_3	*	*	
P_4	*	*	*
P_5	*	*	*
P_6	*	*	
P_7	*	*	
P_8	*		
P_9	*	*	
P_{10}			

En la Tabla 4.2, se ve cómo los profesores P_2, P_4 y P_5 reconocieron las propiedades de los tres triángulos. P_1 aunque no utiliza el triángulo isósceles mencionó sus propiedades en la entrevista. Los profesores P_3, P_6, P_7 y P_9 reconocieron sólo dos, P_8 sólo uno y P_{10} no reconoce ninguno de los tres triángulos ni de sus propiedades.

Comentarios:

P_1: Llegó a la solución del problema con sólo utilizar dos teoremas-en-acto y dos conceptos-en-acto. La técnica de solución fue la de seccionar el cuadrilátero en dos triángulos rectángulos.

P_2: Llegó a la solución del problema utilizando los tres teoremas-en-acto y los tres conceptos-en-acto. La técnica de solución utilizada fue la de seccionar el cuadrilátero en dos triángulos (un equilátero y un isósceles).

P_3: Manifestó que para encontrar la solución del problema tenía que dividir el cuadrilátero en dos triángulos (equilátero e isósceles), posteriormente, encontrar sus lados y sus alturas que sirvieron para encontrar sus áreas, aplicando la fórmula para calcular el área de un triángulo. El profesor identificó la fórmula para calcular el área de un triángulo, el triángulo isósceles por tener dos lados iguales y el equilátero por tener los lados iguales; con estos recursos para el profesor no le fue posible encontrar la solución al problema.

P_4: Los teoremas y conceptos-en-acto utilizados por el profesor fueron tres. La técnica de solución fue la de dividir el cuadrilátero en dos triángulos (un equilátero y un isósceles). El profesor llegó a la solución del problema utilizando dichos recursos matemáticos.

P_5: Usó cuatro teoremas-en-acto y tres conceptos-en-acto. La técnica de solución fue la de dividir el cuadrilátero en dos triángulos (un equilátero y un isósceles). El profesor llegó a la solución del problema con estos recursos.

P_6: Utilizó cuatro teoremas-en-acto y tres conceptos-en-acto. La técnica que usó fue la de dividir el cuadrilátero en dos triángulos (un equilátero y un isósceles). El profesor llegó a la solución del problema.

P_7: Para este problema, el profesor utilizó cuatro teoremas-en-acto y tres conceptos-en-acto. La técnica que utilizó fue la de dividir el cuadrilátero en dos triángulos (un equilátero y un

isósceles). El profesor no llegó a la solución del problema, porque tuvo dificultades conceptuales con la razón trigonométrica seno.

P_8: Identificó dos teoremas-en-acto y un concepto-en-acto y trató de relacionarlos para darle solución al problema: dividió el cuadrilátero en dos triángulos, un equilátero y un oblicuángulo. El profesor no tenía claro qué técnica utilizar, por lo que no encontró la solución al problema.

P_9: Identificó dos teoremas-en-acto y dos conceptos-en-acto. La técnica que utilizó fue la de formar un rectángulo con el área del cuadrilátero y, de esta manera, encontrar su altura. El profesor no encontró la solución al problema por errores en los cálculos matemáticos.

P_{10}: No identificó ninguno de los teoremas y conceptos-en-acto. La técnica de solución fue encontrar el área de un círculo. El profesor no llegó a la solución del problema.

4.2.2 Análisis y resultados globales de la solución del Problema 2

Los recursos necesarios para resolver este problema son: álgebra básica y el empleo de números y letras, para nombrar el tiempo de vida, el tiempo de trabajo, etc. Este problema tiene como características de representar un suceso en tiempo pasado, y además de no presentar datos numéricos explícitos, como en los otros siete problemas de la serie. Estas dos características, provocaron dificultades en la mayor parte de los profesores al momento de resolver el problema. A continuación, se presenta parte de los trabajos de los profesores 1, 2 y 6, con la intención de mostrar los recursos y las dificultades que tuvieron.

Problema 2:

Caminando por mi ciudad hace algunos años, me di cuenta de que llevaba en mi trabajo un cuarto de mi vida. Quizá porque en aquel momento estaba algo desanimado, lo cierto es que inmediatamente me pregunté cuánto tiempo pasaría hasta que hubiese estado en mi trabajo un tercio de mi vida.

Debido a que los recursos requeridos, para resolver el problema, son pocos, sólo se tomó en cuenta el tiempo transcurrido, como un concepto-en-acto importante, para resolver el problema.

4.2.2.1 Conceptos-en-acto

a) Tiempo transcurrido

Para resolver el Problema 2, parte de los diez profesores utilizaron el tiempo transcurrido durante un periodo de tiempo, como un recurso importante y por lo tanto necesario para resolver el problema.

Profesor 1: Problema 2

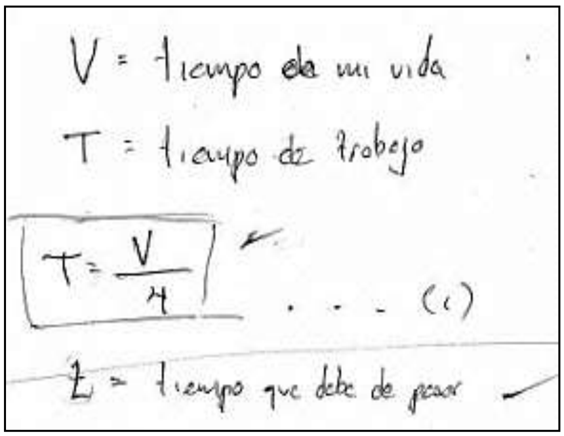


Figura 4.9. El tiempo de vida y de trabajo usado por el Profesor 1 para resolver el Problema 2.

E: Entrevistador P$_1$: Profesor 1 L$_i$= Línea i

L$_1$P$_1$: Bueno, aquí en este problema no se ven cosas geométricas y más que nada se ve como un problema un poquito algebraico. Entonces, nada más vamos a tratar de plasmarlo en términos algebraicos, para obtener una solución. También, otra cosa que se puede ver, es que no nos dan datos numéricos, ni nos dan datos concretos, nada más nos dan los conceptos, pero no tenemos valores. Entonces, por lo mismo se ve que es un problema y tendrá que quedar en términos de variables, por la forma del problema, pero pues así se está dando.

En esta parte de la entrevista, se observa cómo el profesor identifica las características del problema. Él menciona que no es un problema geométrico, sino más bien algebraico, donde por falta de valores numéricos tiene que hacer uso de variables (incógnitas).

L$_2$P$_1$: Bueno [*vuelve a leer el problema completo*]. Bueno, digamos que vamos a llamarle V a la cantidad en años de mi vida [*escribe* $V = tiempo\ de\ mi\ vida$] mmm… voy a ponerle T es igual al tiempo de trabajo [*escribe* $T = tiempo\ de\ trabajo$]. Bueno, aquí dice que en este momento, la persona se da cuenta que tiene un cuarto de su vida trabajando, entonces un cuarto de su vida, o sea que T es igual a V entre cuatro [*escribe* $T = \frac{v}{4}$], que el tiempo que tiene trabajando es igual a un cuarto de su vida. Entonces, de esta primera parte del problema obtenemos esta relación [*señala* $T = \frac{v}{4}$]. Inmediatamente, se pregunta que cuánto tiempo debería de pasar hasta que hubiese estado en mi trabajo un tercio de mí vida ¿cuánto tiempo pasaría hasta que hubiese estado en mi trabajo un tercio de mi vida? Bueno, aquí voy a manejar otra variable; voy a ponerle como *t* minúscula y va a ser el tiempo necesario que debe de pasar, a partir de ahorita para que yo tenga un tercio de mi vida en mi trabajo. Entonces mmm… [*Pausa*] entonces *t* es tiempo, como le ponemos, tiempo que debe pasar [*escribe* $t = tiempo\ que\ debe\ de\ pasar$], es el tiempo que debe de pasar para completar el tercio.

Para resolver el problema, se observa que el profesor empieza definiendo variables en términos del tiempo, con la finalidad de empezar a encontrar relaciones en función de estas variables. La primera relación que él encuentra es $T = \frac{v}{4}$, la cual, posteriormente, le sirvió para poder continuar con el proceso de solución del problema.

Profesor 7: Problema 2

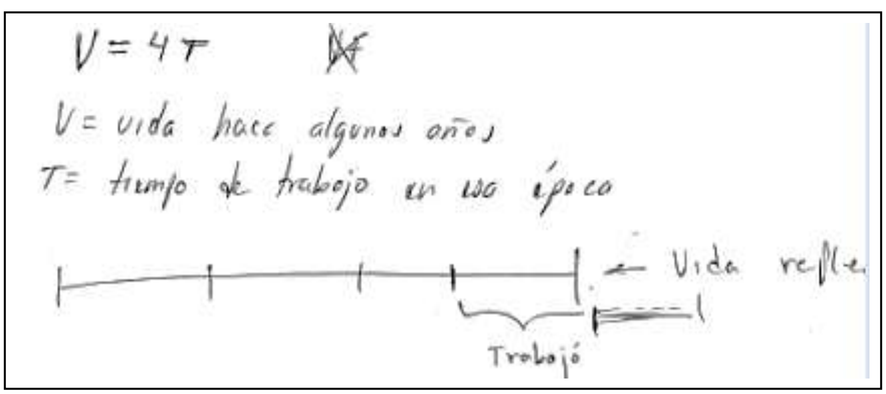


Figura 4.10. Representación del tiempo de trabajo usado por el Profesor 7 en su proceso de solución.

E: Entrevistador P$_7$: Profesor 7 L$_i$= Línea i

L$_1$P$_7$: Habría que plantear alguna ecuación [*pausa*] veamos algunas posibilidades [*vuelve a leer el problema*]. Bueno, habría que representar que el tiempo de trabajo. Bueno, la vida que tiene sería igual; dice que hace algunos años, era su vida cuatro veces el tiempo que llevaba trabajando [*escribe* $V = 4T$] y dice que en la actualidad, la vida que tenía más [*escribe algo y lo tacha*] no.

L$_2$E: ¿Puede definir qué es *V* y que es *T*?

L$_3$P$_7$: Bueno, a V la definimos como vida hace algunos años [*escribe* $V = vida\ hace\ algunos\ años$] y T el tiempo de trabajo en esa época [*escribe* $T = tiempo\ de\ trabajo\ en\ esa\ época$].

L$_4$E: ¿Sí entiende el problema maestro? ¿Sí entiende lo qué le están pidiendo?

L$_5$P$_7$: Sí, sólo este, ¿cuánto tiempo pasaría hasta que hubiese estado en mi trabajo un tercio de mí vida? [*Pausa*] a ver, a ver déjame averiguar qué es exactamente lo que nos están preguntando [*pausa*]. ¿Cuánto tiempo pasaría? Bueno, voy hacer una situación gráfica; se supone que cuando hizo la reflexión. Podríamos dividir su vida en cuatro partes [*dibuja una línea y la divide en cuatro partes*], suponiendo que la última parte, hubiese sido el tiempo que él trabajó.

En esta parte de la entrevista, se observa cómo el profesor hace uso del recurso tiempo; él se apoya en letras que al mismo tiempo define para empezar a generar relaciones entre los datos y las incógnitas. El profesor identifica lo que le están pidiendo en el problema, y menciona que entiende lo que le piden. Para empezar a dar respuesta, se apoya en un gráfico (*segmento de recta que divide en cuatro partes iguales*) con esto y con lo que él define como *V* y *T* empieza a resolver el problema.

Profesor 3: Problema 2

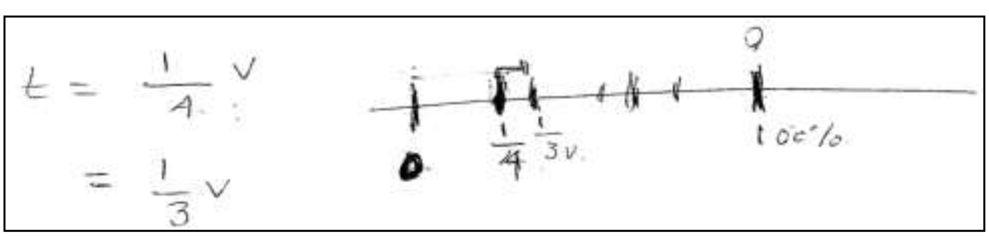


Figura 4.11. "Línea de vida" usada por el Profesor 3 en sus intentos de resolución del Problema 2.

E: Entrevistador P_3: Profesor 3 L_i= Línea i

L_1P_3: Bueno, vamos a ir leyendo parte por parte para ir entendiendo el problema. Entonces, dice que llevaba en mi trabajo un cuarto de mi vida [*escribe* $\frac{1}{4}v$] ahí va, y esto lo llevaba en mi trabajo, quizá porque en aquel momento estaba algo desanimado, lo cierto es que inmediatamente me pregunté ¿cuánto tiempo pasaría hasta que hubiese estado en mi trabajo un tercio de mi vida? [*Pausa*] Va de nuevo el problema, caminando por mi ciudad hace ahora algunos años, quiere decir que hace algunos años iba caminando por la ciudad, y se dio cuenta que llevaba en su trabajo [*escribe* $t = \frac{1}{4}v$] quizá porque en el momento estaba desanimado. Lo cierto es que inmediatamente me pregunté ¿cuánto tiempo pasaría hasta que hubiese estado en mi trabajo un tercio de mi vida? [*Escribe* = $\frac{1}{3}v$], [*pausa*] No le entiendo, hasta aquí va bien. Llevaba en mi trabajo un cuarto de mi vida que es, esta parte [*señala* $t = \frac{1}{4}v$] un cuarto de mi vida, que esta persona llevaba en su trabajo, quizá porque en esa época estaba algo desanimado, ¡ah tiempo pasado! Lo cierto es que inmediatamente me pregunté, en ese momento se preguntó.

En el extracto de la entrevista, se observa que el profesor empieza por definir relaciones en función de la variable v. Él no define las variables de manera explícita; sin embargo, pareciera que para él son claras. Posteriormente, reconoce los sucesos que están en tiempo pasado y empieza por analizarlos.

4.2.2.2 Resultados del Problema 2

Para resolver el Problema 2, sólo hubo dos profesores que llegaron a la solución que se esperaba, cinco dieron soluciones, pero no fueron las adecuadas y tres intentaron aplicar alguna técnica, pero no llegaron a nada concreto.

De los siete profesores que utilizaron el tiempo transcurrido como un concepto-en-acto, sólo cuatro de ellos lo definieron y lo explicitaron y los tres profesores restantes empezaron a resolver el problema involucrando únicamente las variables (incógnitas), sin antes definirlas.

Tabla 4.3. Concepto-en-acto utilizado por los profesores para resolver el Problema 2.

Profesores	Concepto-en-acto utilizados por los profesores
	Tiempo transcurrido
P_1	*
P_2	*
P_3	*
P_4	*
P_5	
P_6	
P_7	*
P_8	*
P_9	*
P_{10}	

Comentarios:

P_1: Los recursos que el profesor utilizó, para resolver el problema, fueron las incógnitas que él definió como: tiempo de vida, tiempo de trabajo y tiempo que debe pasar, las cuales relacionó entre sí, para obtener dos ecuaciones que le permitieron llegar a la solución esperada del problema. La técnica fue utilizar variables (incógnitas) y definirlas; de esta manera, fue construyendo más recursos (técnicas) para resolver el problema; la solución quedó en términos de variables.

P_2: Con la información que le daban al profesor en el enunciado del problema, él definió dos variables; las cuales relacionó para encontrar una ecuación que, posteriormente, resolvió para encontrar un valor numérico que él determinó como la solución al problema. La técnica que utilizó fue apoyarse en representaciones gráficas y en variables. El profesor no llegó a la solución que se esperaba.

P_3: Con los datos del enunciado del problema, el profesor intentó, a través del uso de variables, obtener algunas ecuaciones que le permitieran resolver el problema. También, se apoyó en una representación gráfica para dar una solución. El profesor no llegó a la solución esperada.

P_4: Empezó definiendo variables (incógnitas) con la información que le daban en el enunciado del problema; posteriormente, con las variables estableció una ecuación que al resolverla le dio un valor numérico para una de ellas; él consideró este valor como la solución del problema. El profesor se apoyó en una representación grafica para intentar comprender el problema; resolvió el problema, pero no llegó a la solución esperada.

P_5: Leyó un par de veces el problema, tratando de encontrar una técnica que le permitiera resolver el problema; sin embargo, no llegó a nada concreto y terminó por no resolverlo.

P_6: Para resolver el problema, el profesor identificó los datos que le daban en éste, él mencionó que tenía que utilizar variables las cuales definió como tiempo de trabajo y como tiempo de vida, las cuales tenía que relacionar para encontrar una ecuación, pero que no sabía cómo hacerlo por lo que terminó por abandonar el problema.

P_7: Utilizó un gráfico para apoyarse y entender el problema, así como de las variables que el definió como tiempo de vida y como tiempo de trabajo. Con estos recursos, el profesor encontró algunas relaciones que lo llevaron a la solución que se esperaba del problema.

P_8: Para resolver el problema, el profesor se apoyó en los datos numéricos del problema; él señaló que la incógnita que tenía que encontrar era el tiempo; sin embargo, no definió a ésta como variable (incógnita). Con ayuda de representaciones gráficas y con los datos numéricos, realizó operaciones como: suma y resta de fracciones para llegar a un resultado. La solución que el profesor dio al problema no fue la esperada.

P_9: Definió cuatro variables, las cuales relacionó para obtener ecuaciones que le permitieran llegar a la solución del problema. La solución a la que él llegó la dejó expresada como una ecuación en términos de una variable.

P_{10}: Con los datos numéricos del problema, el profesor realizó operaciones y conversiones de unidades (años a horas), el resultado que generó lo tomó como la solución al problema. Con esta técnica, el maestro no llegó a la solución esperada del problema.

4.2.3 Análisis y resultados globales de la solución del Problema 3

Para resolver el Problema 3, se requería de recursos matemáticos como: la ley de cosenos, la fórmula para calcular el área de un triángulo, la razón seno del ángulo; o bien, del teorema de Herón para encontrar el área de un triángulo. Pareciera ser un problema un tanto complejo por el tipo de recursos que se requieren, pero en realidad no es así, sólo se necesitaba de un poco de análisis y del conocimiento de dichos recursos.

Problema 3:

A partir de los lados de un triángulo se construyen 3 cuadrados, como se muestra en la figura, cuyas áreas respectivas son 169, 225, 196 (unidades cuadradas). ¿Cuál es el área del triángulo?

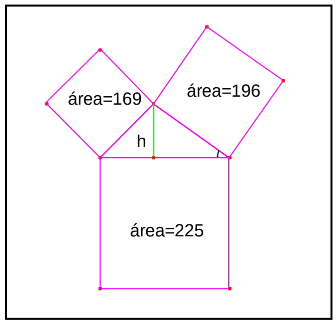


Figura 4.12. Representación geométrica del Problema 3.

4.2.3.1 Técnicas matemáticas institucionales (teoremas-en-acto)

Los trabajos de los profesores 2 y 7 muestran el uso de recursos como: la ley de los cosenos, la función seno o el teorema de Herón y la fórmula para calcular el área de un triángulo; a continuación se muestra parte del trabajo de los profesores.

a) Ley de cosenos

Profesor 2: Problema 3

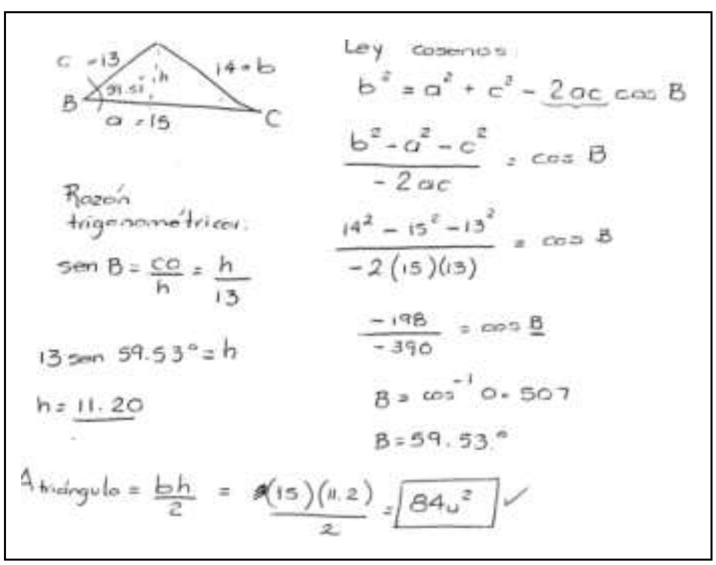


Figura 4.13. Ley de cosenos. Técnica usada por el Profesor 2 para resolver el Problema 3.

E: Entrevistador $\quad$ P_2: Profesor 2 $\quad$ L_i= Línea i

L_1P_2: Yo, conociendo sus lados podría conocer uno de sus ángulos con la ley de cosenos y utilizando la ley de cosenos, también podría encontrar alguno de los ángulos y fácilmente un lado y un ángulo podría conocer este lado de *h* [*señala h en el triángulo*]. A ver, vamos a hacerlo de esa manera, para ver qué tan alejados estábamos de la realidad, como que una solución mucho más compleja [*dibuja un triángulo; traza la altura con línea punteada y escribe h*] el área vale doscientos veinticinco; por lo tanto, su lado mide quince [*escribe 15 en el triángulo*] esta área vale ciento noventa y seis [*señala en el triángulo*] por lo tanto su lado vale catorce [*escribe 14*] y éste, que es ciento sesenta y nueve, por lo tanto vale trece [*escribe 13*] [*pausa*]. Si recordamos la ley de los cosenos nos dice que *b* cuadrada es igual *a* cuadrada más *c* cuadrada menos *ac* por el coseno de *B* [*escribe* $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$].

El profesor utiliza la ley de cosenos para obtener una solución del problema. Él menciona que para ver qué tan alejado estaba de la realidad; él dice esto porque anteriormente ya había resuelto el problema utilizando otro método y que le pareció ser complejo. También, en la Figura 4.13 se muestra cómo el profesor hace uso de recursos como: el seno del ángulo para encontrar la altura del triángulo y la fórmula para calcular el área de un triángulo.

b) Teorema de Herón

Profesor 7: Problema 3

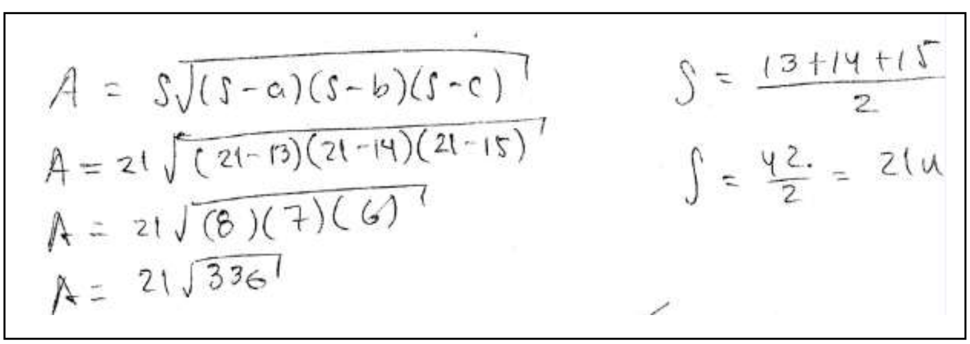


Figura 4.14. Teorema de Herón utilizado por el Profesor 7
en la solución del Problema 3.

E: Entrevistador P$_7$: Profesor 7 L$_i$= Línea i

L$_1$P$_7$: Insisto, no sería necesario el uso de la altura, porque el área también es igual al semiperímetro por la raíz [*pausa*] déjeme recordar la fórmula de Herón, sino tendría que calcular la altura [*pausa*] [*escribe* $A = s\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}$]. Esta es una de las opciones cuando ya tengo el valor de los tres lados [*señala los lados del triángulo*]. Sí, porque esto no se cumple: quince al cuadrado es igual a trece al cuadrado más catorce al cuadrado [*escribe* $15^2 = 13^2 + 14^2$]; entonces esto no es cierto [*tacha con una cruz* a $15^2 = 13^2 + 14^2$] porque ciento sesenta y nueve más ciento noventa y seis no es doscientos veinticinco, entonces esto no es cierto. Semiperímetro sería trece más catorce más quince sobre dos [*escribe* $S = \frac{13+14+15}{2}$], el semiperímetro sería trece, catorce sería, treinta sería cuarenta y dos [*realiza operaciones mentales* y *escribe* $S = \frac{42}{2} = 21u$] el perímetro sería veintiún unidades.

L$_2$E: ¿Ese sería el perímetro?

L$_3$P$_7$: Perdón, el semiperímetro, el semiperímetro. El perímetro sería evidentemente cuarenta y dos y vuelvo a la misma circunstancia que tenía. Si la fórmula está bien, esto sería, mi semiperímetro por el semiperímetro menos el lado *a* que sería de trece, por el semiperímetro por el lado *b* que sería de catorce, por el semiperímtero menos el lado *c* que sería de quince [*escribe* $A = 21\sqrt{(21-13)(21-14)(21-15)}$], esto sería veintiuno por veintiuno menos trece *es ocho por veintiuno por menos catorce es siete por veintiuno menos quince es seis* [*escribe* $A = 21\sqrt{(8)(7)(6)}$]. El área sería entonces, ocho por siete, cincuenta y seis por seis trecientos treinta y seis [*multiplica en la calculadora 56*6 y escribe* $A = 21\sqrt{336}$] el área sería veintiuno raíz de trecientos treinta y seis [*en calculadora escribe* $\sqrt{336}$] el área sería veintiuno por dieciocho punto treinta y tres [*escribe* $A = 21(18.33)$ *y realiza esta operación en la calculadora*] el área según este cálculo sería trescientos ochenta y cuatro punto nueve unidades cuadradas.

Evidentemente, se observa que el profesor intenta utilizar el teorema de Herón para calcular el área del triángulo, pero al parecer él duda de que la fórmula sea la correcta, como lo manifiesta en L_3P_7. El profesor utiliza el semiperímetro del triángulo y los lados de éste para encontrar un valor numérico para el área del triángulo. El profesor señala en L_1P_7, que no es necesario conocer el valor de la altura del triángulo, para calcular su área, él utiliza el teorema de Herón y, de esta manera, evita utilizar la altura del triángulo.

4.2.3.2 Resultados del Problema 3

Para resolver el Problema 3, no hubo un solo profesor que intentara evadirlo para resolverlo, los diez profesores desarrollaron alguna técnica que les permitió llegar a una solución. Los profesores 2 y 3 fueron los únicos que llegaron a la solución que se esperaba para el problema; los ocho profesores restantes dieron respuestas del problema, pero no fueron las adecuadas por el tipo de técnica utilizada.

Tabla 4.4. Teoremas-en-acto utilizados por los profesores
en la solución del Problema 3.

Profesores	Teoremas-en-acto			
	Ley de cosenos	Seno del ángulo	Fórmula para calcular el área del triángulo	Teorema de Herón para calcular el área del triángulo
P_1	*	*	*	
P_2	*	*	*	
P_3	*	*	*	
P_4				*
P_5				
P_6		*		
P_7				*
P_8	*		*	
P_9				*
P_{10}				

Comentarios:

P_1: Utilizó recursos como: ley de cosenos, la razón trigonométrica del seno y la fórmula para calcular el área del triángulo, y resolver así el problema. La técnica que utilizó fue la

adecuada; sin embargo, no llegó a la solución correcta del problema por errores de cálculo que cometió.

P_2: Empezó resolviendo el problema como si fuera un triángulo rectángulo por lo que utilizó como recurso, el teorema de Pitágoras. Posteriormente, se dio cuenta de que era incorrecto su planteamiento y propuso otra técnica para resolverlo. Él dividió el triángulo en dos triángulos rectángulos y calculó su altura para cada uno de ellos en términos de la variable (incógnita) x, dichas alturas las igualó y resolvió utilizando la fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado. Con el resultado obtenido, calculó la altura y, utilizando la fórmula para calcular el área del triángulo, encontró su área. Terminando de resolver el problema, el profesor manifestó que pudo haberlo hecho también utilizando la ley de cosenos por lo que empezó a resolverlo con este recurso, para ver qué tan lejos estaba del resultado. Los recursos que utilizó fueron la ley de cosenos, el seno del ángulo y la fórmula para calcular el área del triángulo. Utilizando ley de cosenos, el profesor llegó a la solución esperada del problema.

P_3: Empezó resolviendo el problema, utilizando recursos como: el seno, coseno y tangente del ángulo para un triángulo rectángulo, y terminó por descartarlos. Posteriormente, señaló que utilizaría la ley de cosenos para encontrar uno de los ángulos del triángulo. El profesor utilizó otros recursos como: el seno del ángulo y la fórmula para calcular el área de un triángulo y, de esta manera, llegó a la solución correcta del problema.

P_4: Para resolver este problema, el profesor empezó como si fuera un triángulo rectángulo, después de verificar que, efectivamente, éste no era rectángulo, señaló que podría resolverlo con el teorema de Herón, pero que no recordaba exactamente la fórmula. El profesor no llegó a la solución esperada del problema.

P_5: El recurso que utilizó el profesor para resolverlo fue la fórmula para calcular el área de un triángulo; consideró que era un triángulo rectángulo y fue de esta manera que lo resolvió, pero no obtuvo la solución esperada del problema.

P_6: Empezó resolviendo el problema utilizando recursos como: la ley de los senos, pero al darse cuenta de que no contaba con todos los recursos decidió no utilizarla; posteriormente, intentó utilizar la ley de los cosenos, pero dijo que no recordaba cómo se expresaba matemáticamente. Después de analizar el problema, terminó considerando uno de los ángulos del triángulo de cuarenta y cinco grados; con este ángulo, un lado del triángulo y la función seno obtuvo la altura, la cual le permitió, junto con otro lado del triángulo, encontrar el área del triángulo. El profesor no llegó a la solución esperada del problema.

P_7: Empezó resolviendo el problema como si fuera un triángulo rectángulo, pero después de verificar que no era así decidió utilizar el teorema de Herón para encontrar el área del triángulo sin tener que encontrar su altura. El profesor no logró recordar la fórmula, por lo que llegó a una solución que no fue la correcta.

P_8: Los recursos que utilizó para resolver el problema, fueron: la ley de cosenos para encontrar la altura del triángulo. La técnica que utilizó fue la adecuada, pero no logró llegar a la solución esperada por error en los cálculos numéricos y algebraicos.

P_9: El recurso que utilizó fue: la fórmula par calcular el área de un triángulo. Él consideró que se trataba de un triángulo rectángulo y, de esa manera lo resolvió. Posteriormente, señaló que pudo resolverlo utilizando el teorema de Herón el cual expresó matemáticamente, pero no desarrolló. El profesor no llegó a la solución correcta del problema.

P_{10}: Encontró la altura del triángulo utilizando el teorema de Pitágoras, posteriormente, aplicó la fórmula para calcular el área de un triángulo, la solución a la que llegó fue errónea.

4.2.4 Análisis y resultados globales de la solución del Problema 4

Uno de los problemas que causó dificultad al resolverlo por no tener una, sino cuatro soluciones fue el Problema 4. Este problema fue resuelto por algunos profesores de manera incompleta; es decir, sólo se limitaron a encontrar algunas de las cuatro soluciones esperadas. Hubo dos profesores que encontraron tres soluciones, seis que encontraron dos soluciones, uno que lo resolvió incorrectamente y uno que dejó el problema en blanco. A continuación, se presenta el Problema 4 y los recursos matemáticos utilizados por los profesores al resolver dicho problema.

Problema 4:

Encuentre todos los valores de x que satisfacen: $(x^2-5x+5)^{x^2-9x+20}=1.$

Para resolver este problema, se tomaron en cuenta los teoremas-en-acto: las leyes de los exponentes y la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado. A primera vista, pareciera ser un problema complejo; sin embargo, el número de recursos matemáticos necesarios para poder resolverlo son pocos y básicos para el conocimiento matemático del profesor.

4.2.4.1 Técnicas matemáticas institucionales (teoremas-en-acto)

a) Leyes de los exponentes

En el trabajo del Profesor 1, se puede observar el uso de algunas leyes de los exponentes que le permitieron encontrar tres de las cuatro soluciones esperadas.

Profesor 1: Problema 4

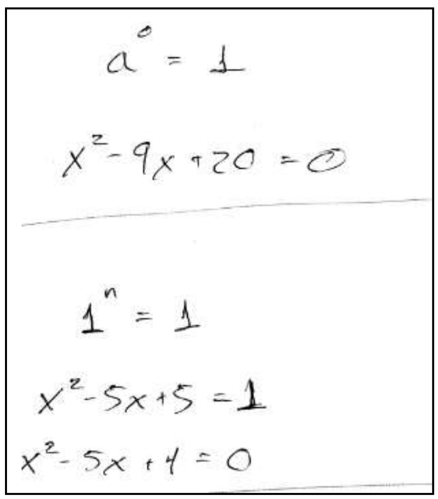


Figura 4.15. Uso de la expresión $x^0 = 1, x \neq 0$ por el Profesor 1 para hallar parte de la solución del Problema 4.

E: Entrevistador P$_1$: Profesor 1 L$_i$= Línea i

L$_1$P$_1$: Encuentre todos los valores de *x* que satisfacen la ecuación. Es una ecuación exponencial [*pausa*] de aquí lo que vamos a aplicar es que eh… [*Pausa*], pues cuando estudias las leyes de los exponentes, se sabe que cualquier número [*pausa*] cualquier número *a* elevado a la cero es igual a uno [*escribe* $a^0 = 1$]. Entonces, para que esta expresión [*señala la ecuación del enunciado del problema*] sea igual a uno, necesariamente el exponente debe ser igual a cero; o sea que *x* cuadrada menos nueve *x* más veinte tiene que ser igual a cero [*escribe* $x^2 - 9x + 20 = 0$], mientras esto sea igual a cero cualquier número que le pongamos aquí [*señala a*] siempre me va a dar uno.

En esta parte de la entrevista, el Profesor 1 hace uso de la ley de los exponentes con la finalidad de saber cuánto tiene que valer *x* para que la expresión $x^2-9x+20$ sea igual a cero. En esta parte, el profesor señala que de la expresión $a^0=1$, a puede tomar cualquier valor; sin embargo, no siempre es así, ya que la expresión 0^0 no es igual a uno.

L_2P_1: Entonces, también se podría considerar otro caso en el que, a ver [*pausa*]. Si yo tengo que uno elevado a cualquier número *n* [*escribe* $1^n=1$] debe ser igual a uno, entonces, sí también se cumple esto, si yo le meto. Si esto [*señala en la ecuación del enunciado del problema a:* x^2-5x+5] es igual a uno, puede valer lo que sea y siempre va a ser igual a uno, entonces también de aquí escribiríamos que *x* cuadrada menos cinco más cinco es igual a 1 [*escribe* $x^2-5x+5=1$ *y abajo escribe* $x^2-5x+4=0$], entonces de estas dos ecuaciones [*señala a*: $x^2-9x+20=0$ y $x^2-5x+5=1$] que hemos obtenido se debe de, si se cumple ésta [*señala* $x^2-9x+20=0$]; o también si se cumples ésta [*señala* $x^2-5x+5=1$] toda la expresión es también igual a uno. Entonces, recordando la teoría de conjuntos sería una unión de los dos conjuntos soluciones; o sea, la unión del conjunto solución de esta ecuación [*señala* $x^2-9x+20=0$] y la unión del conjunto solución de esta ecuación [*señala* $x^2-5x+4=0$]. Entonces, esto es lo que vamos a tratar de resolver; de hecho, esto ya está resuelto porque son ecuaciones de segundo grado, y ya nada más le aplicamos la fórmula general.

En este extracto de la entrevista, el profesor manifiesta otro caso donde aplicando la ley de los exponentes se cumple la ecuación del enunciado del problema. Y, por último, expresa que la solución del problema es un conjunto de soluciones de las dos ecuaciones $x^2-9x+20=0$ y $x^2-5x+4=0$ y que aplicando la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado, puede encontrar el conjunto solución.

b) Fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado

La fórmula general para resolver la ecuación de segundo grado, fue utilizada por tres de los ocho profesores que dieron al menos dos de las cuatro soluciones esperadas. Los otros cinco profesores utilizaron la factorización para encontrar las soluciones. En el trabajo del Profesor 9, se nota el uso de la fórmula general como un recurso matemático importante.

Profesor 9: Problema 4

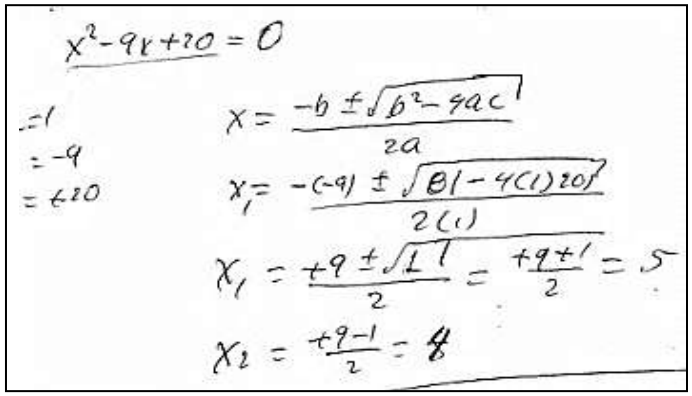


Figura 4.16. Fórmula general para resolver la ecuación de segundo grado usada por el Profesor).

E: Entrevistador P$_9$: Profesor 9 L$_i$= Línea i

L$_1$P$_9$: Entonces, esto es cero [*señala* $x^2-9x+20=0$] y esto lo podemos resolver por ecuación general, donde a vale uno [*escribe* $a=1$], b vale menos nueve [*escribe* $b=-9$] y c vale más 20 [*escribe* $c=+20$]. Entonces, nos queda que *x* es igual a menos *b* más menos raíz cuadrada de *b* cuadrada menos cuatro *ac* sobre *2a* [*escribe* $x=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$]. Esto, para el primer caso, sería x_1 igual a menos, –9 más menos raíz cuadrada, nueve al cuadrado sería ochenta y uno menos cuatro que multiplica a veinte sobre dos que multiplica a uno [*escribe* $x_1=\frac{-(-9)\mp\sqrt{81-4(1)(20)}}{2(1)}$], x_1 es más nueve más menos raíz cuadrada de raíz de uno sobre dos, pero como raíz de uno es uno aquí nos queda más nueve, más uno sobre dos [*escribe* $x_1=\frac{+9+\sqrt{1}}{2}=5$] equivale a cinco, x_2 equivale a más nueve menos uno sobre dos igual a cuatro [*escribe* $x_2=\frac{+9-1}{2}=4$].

Como se observa en esta parte de la entrevista, el profesor encontró dos valores para x que cumplen con la solución del problema; a través de la utilización de la fórmula general para resolver una ecuación cuadrática.

c) Descomposición en factores

Cinco de los ocho profesores, que encontraron al menos dos soluciones del Problema 4, utilizaron factorización como recurso matemático para resolver una ecuación de segundo grado. A continuación, se muestra el trabajo del Profesor 8, donde usa factorización.

Profesor 8: Problema 4

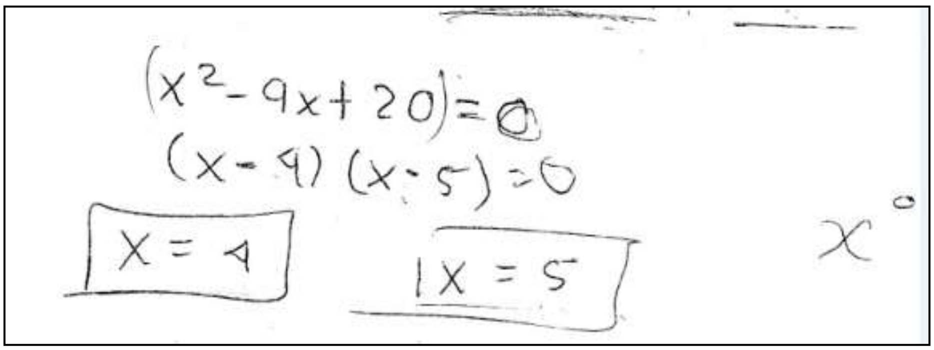


Figura 4.17. Factorización utilizada por el Profesor 8 en la solución de la ecuación cuadrática.

E: Entrevistador $\quad$ P_8: Profesor 8 $\quad$ L_i= Línea i

L_1P_8: Aquí, habría que utilizar [*pausa*] leyes de los exponentes [*pausa*] mmm… ¿Qué te dé uno? Aquí a lo mejor sería que todo esto me diera cero [*señala*: $x^2 - 9x + 20$ *en la ecuación del problema*], porque cualquier número elevado a la cero me daría uno. Sería la primera opción, y ¿qué valores? Tendría que encontrar que *x* cuadrada menos nueve *x* más veinte me dé igual a cero [*escribe* $x^2 - 9x + 20 = 0$]. Independientemente de lo que me dé aquí [*señala* $x^2 - 5x + 5$] me va dar uno. Ahora dos números que multiplicados me den veinte, serían cuatro y cinco, nada más que aquí [*señala* $x^2 - 9x + 20$] tiene signo más, ¡ah! sí [*escribe* $(x-4)(x-5)$]. Entonces, *x* sería igual a cuatro y *x* sería igual a cinco [*escribe* $x = 4$ y $x = 5$].

Se observa, en esta parte de la entrevista, que como se trata de una ecuación cuadrática sencilla, el profesor puede ver rápidamente los factores que multiplicados entre sí le den la misma ecuación cuadrática.

4.2.4.2 Resultados del Problema 4

Tabla 4.5. Teoremas-en-acto utilizados para resolver el Problema 4.

Profesores	Teoremas-en-acto utilizados por los profesores			
	Leyes de los exponentes		Fórmula general para resolver una ecuación cuadrática	Factorización
	a^0	1^n		
P_1	*	*	*	
P_2	*			*
P_3	*			*
P_4	*			*
P_5	*	*	*	
P_6	*			*
P_7	No resuelve el problema			
P_8	*			*
P_9	*			*
P_{10}	No utiliza ningún teorema-en-acto			

En la Tabla anterior, se muestra los teoremas-en-acto que utilizó cada uno de los profesores para resolver el Problema 4. Gran parte de los maestros usaron estos teoremas; sin embargo, eso no fue suficiente para encontrar la solución completa al problema.

Cometarios:

P_1: Para resolver el problema, el profesor utilizó leyes de los exponentes; esto le permitió, con ayuda de la fórmula general, encontrar tres de las cuatro soluciones esperadas. La técnica que utilizó fue la de igualar: $x^2 - 9x + 20$ a cero, e igualar $x^2 - 5x + 5$ a uno y resolver las ecuaciones. El profesor señaló que cualquier número elevado a la potencia cero es uno; sin embargo, cuando este número es cero, esto no ocurre.

P_2: Sólo utilizó una de las leyes de los exponentes, lo que le permitió encontrar únicamente dos soluciones al problema. Resolvió la ecuación cuadrática, usando factorización. El profesor señaló que cualquier número elevado a la potencia cero es uno; sin embargo, cuando este número es cero esto no ocurre.

P_3: Utilizó el hecho de que $x^0 = 1$ [faltó agregar la condición de que $x \neq 0$] y la factorización. Con estos recursos determinó dos de las cuatro soluciones para la ecuación del problema. La técnica que utilizó fue de igualar la expresión $x^2 - 9x + 20$ a cero y la

resolvió factorizando para encontrar dos soluciones de x. El profesor manifestó que cualquier número elevado a la potencia cero es uno.

P$_4$*:* Para resolver este problema, el profesor utilizó la factorización y el hecho de que $x^0 = 1$ [faltó agregar la condición de que $x \neq 0$] el profesor manifestó que todo número elevado a la potencia cero es uno. La técnica para resolver el problema consistió en igualar la expresión $x^2 - 9x + 20$ a cero, y, posteriormente resolverla. Sólo encontró dos de las cuatro soluciones del problema original.

P$_5$*:* Utilizó propiedades de los logaritmos; esto le permitió ver que la expresión $x^2 - 9x + 20$ tenía que ser igual a cero, y que la expresión $x^2 - 5x + 5$ tendría que ser igual a uno. Para encontrar la solución de las dos ecuaciones, utilizó la fórmula general; de esta manera encontró tres soluciones del problema original.

P$_6$*:* Utilizó el hecho de que $x^0 = 1$ [faltó agregar la condición de que $x \neq 0$]. La técnica que aplicó fue la de igualar $x^2 - 9x + 20$ a cero y factorizar para encontrar los valores de x que satisfacen la ecuación.

P$_7$*:* El profesor, después de leer el problema y pensar un rato en cómo resolverlo, manifestó que no se le ocurría nada para intentar atacarlo y terminó por dejarlo sin resolver.

P$_8$*:* En este problema, el profesor sólo encontró dos soluciones igualando la ecuación $x^2 - 9x + 20$ a cero y factorizando, y, posteriormente, encontrar los valores de x que satisfacen la ecuación.

P$_9$*:* Utilizó como recursos la expresión $x^0 = 1$ [faltó agregar la condición de que $x \neq 0$] y la fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado. Su técnica fue la de utilizar logaritmos; primeramente, esto le ayudó a ver que la expresión $x^2 - 9x + 20$ tenía que valer cero por lo que la igualó a cero y resolvió la ecuación para x, sólo encontró dos soluciones del problema original.

P$_{10}$*:* El planteamiento que el profesor hizo inicialmente fue de tomar las dos expresiones: $x^2 - 9x + 20$ y $x^2 - 5x + 5$, e intentar resolverlas como un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Este planteamiento lo dejó incompleto por lo que no encontró ninguna solución del problema original.

4.2.5 Análisis y resultados globales de la solución del Problema 5

El Problema 5 fue el más resuelto por los profesores; siete de ellos llegaron a la solución correcta del problema.

Problema 5:

En un cuadrado ABCD de lado 1 (como se muestra en la figura), la diagonal BD se divide en 4 partes iguales, tal que DF es una cuarta parte de DB. ¿Cuál es el área del triángulo CFD?

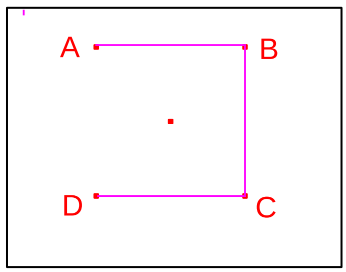


Figura 4.18. El cuadrado.

Los teoremas y conceptos-en-acto utilizados por los profesores para resolver este problema son analizados en seguida.

4.2.5.1 Técnicas matemáticas institucionales (teoremas-en-acto)

a) Seno del ángulo

Sólo dos de los diez profesores hicieron uso de este teorema; el uso de éste les facilitó resolver el problema. A continuación, se presenta el trabajo del Profesor 1 donde se manifiesta el uso dicho teorema-en-acto.

Profesor 1: Problema 5

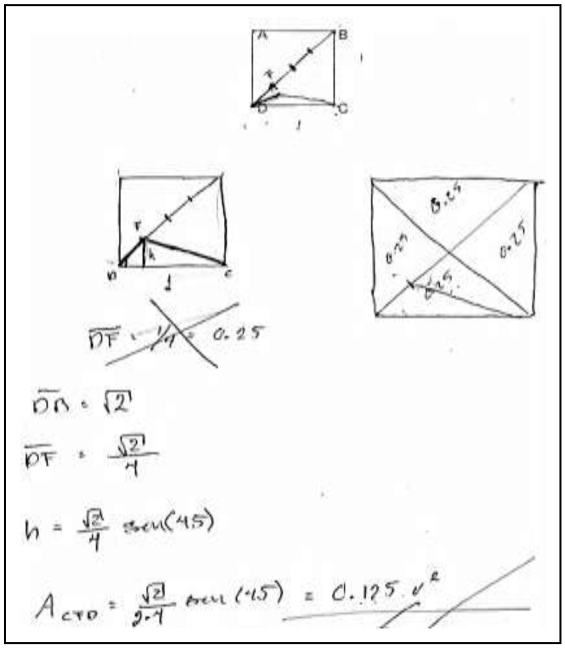


Figura 4.19. Triángulo CFD trazado por el Profesor 1 en la solución del Problema 5.

E: Entrevistador $\quad$ P_1: Profesor 1 $\quad$ L_i= Línea i

L_1P_1: Considerando lo anterior, ponemos la diagonal [*traza la diagonal BD*], dividimos en cuatro partes iguales [*divide la diagonal BD en cuatro partes*]. Y lo que nos piden es el área de [*escribe D, C y F en el cuadrado*], este es el área del triangulito [*remarca el triángulo CFD*]. [*Pausa*]. Nos piden el área, entonces otra vez vamos a aplicar base por altura [*pausa*] lo que ya tenemos es la base que mide uno [*señala del punto D a C*]. Como ya nos están diciendo que todos los lados del cuadrado miden uno [*escribe 1 entre el punto D y C*], entonces la tarea es encontrar *h*, la altura [*marca la altura y escribe h dentro del triángulo*]. Pero bueno, aquí [*pausa*] es algo parecido al primer problema, vamos a tratar de encontrarlo por medio de trigonometría. Sabemos que el *DF*, el segmento *DF* es igual a un cuarto [escribe $\overline{DF} = \frac{1}{4} = 0.25$] porque de entrada me dijeron que lo partiera [*pausa*] no perdón no es un cuarto, porque esta diagonal mide raíz de dos.

L_2E: ¿Cuál diagonal?

L_3P_1: Esta diagonal [*señala de D a B*] el segmento *DB* [*escribe* $\overline{DB} = \sqrt{2}$] que es raíz de dos, usando el teorema de Pitágoras que dice que para un triángulo rectángulo [*señala los puntos D, C y B*] el cuadrado de la suma de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa, entonces uno al cuadrado es uno más uno al cuadrado; o sea son dos el cuadrado de la hipotenusa, pasando la raíz queda como raíz de dos [*escribe* $\overline{DF} = \sqrt{2}$]. Entonces esta diagonal mide raíz de dos [*señala de D a B*], este pedacito DF [*señala de D a F*] tachamos [*tacha con una cruz lo que había escrito como* $\overline{DF}$], entonces *DF* debe de medir raíz de dos entre cuatro [*escribe* $\overline{DF} = \frac{\sqrt{2}}{4}$]. Entonces la altura [*escribe h*] va a medir [*pausa*]; también como es un cuadrado sabemos que este ángulo [*marca el ángulo en el triángulo*] debe de medir cuarenta y cinco porque es la mitad de noventa [*señala el lado AD y DC del cuadrado*]. Como la diagonal lo está partiendo en dos, este pequeño ángulo [*señala el ángulo en el triángulo*] mide cuarenta y cinco grados, entonces la altura va ser raíz de dos entre cuatro por el seno de cuarenta y cinco [*escribe* $h=\frac{\sqrt{2}}{4}sen\,(45°)$]. Finalmente, tenemos que el área del pequeño triángulo del que nos están pidiendo, el área [*escribe* A_{CFD}] es igual a la base por la altura, la base por la altura entre dos, la base ya la tenemos y es uno y la altura es raíz de dos entre cuatro seno de cuarenta y cinco entre dos [*escribe delante de* $A_{CFD}=\frac{\sqrt{2}}{(2)(4)}sen(45°)$] y si quieres un valor numérico lo metemos a la calculadora [*escribe en la calculadora* $\frac{\sqrt{2}}{(2)(4)}sen(45°)$] y queda que el área mide cero punto ciento veinticinco unidades cuadradas y esa sería la solución.

En esta parte de la entrevista, se puede observar cómo el profesor hace uso del seno del ángulo para encontrar la altura del triángulo al que se le pedía encontrar el área (L_3P_1). En esta misma línea, también se manifiesta el uso del teorema de Pitágoras y de la fórmula para calcular el área de un triángulo, los cuales le sirvieron para resolver el problema.

b) Teorema de Pitágoras

En el trabajo del Profesor 5 se puede observar el uso de este teorema.

Profesor 5: Problema 5

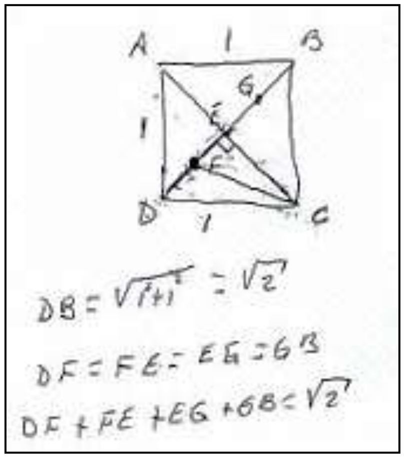


Figura 4.20. Teorema de Pitágoras utilizado por el Profesor 5 para resolver el Problema 5.

E: Entrevistador P_5: Profesor 5 L_i= Línea i

L_1P_5: Entonces, como que cambio el orden, tengo mi cuadrado [*dibuja un cuadrado*]. Dice, se divide en cuatro partes iguales tales que *DF* es una cuarta parte de *DB* [*traza la diagonal de D a B, marca los puntos F, D, A, B y C*] *A, B, C, D* [*señala los puntos A, B, C y D*] mejor le pongo aquí *E* [*escribe E*] F y G [*escribe F y G*]. El problema me está diciendo que *DF* es la cuarta parte de la diagonal y luego me preguntan cuál es el área del triángulo *CDF* [*señala los puntos C, F y D en el cuadrado*]. Bueno y luego como es un triángulo rectángulo [*señala los puntos B, A, D y escribe 1 entre A y B, y también escribe 1 entre A y D*] *DB* va a ser igual a la raíz cuadrada de uno más uno. Bueno, uno al cuadrado más uno al cuadrado [*escribe* $DB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$] igual a la raíz cuadrada de dos.

En esta parte de la entrevista, se observa que el profesor utilizó de forma implícita el teorema de Pitágoras, para encontrar la hipotenusa en un triángulo rectángulo.

c) Fórmula para calcular el área de un triángulo

En el trabajo del Profesor 6, se manifiesta el uso de la fórmula para calcular el área de un triángulo.

Profesor 6: Problema 5

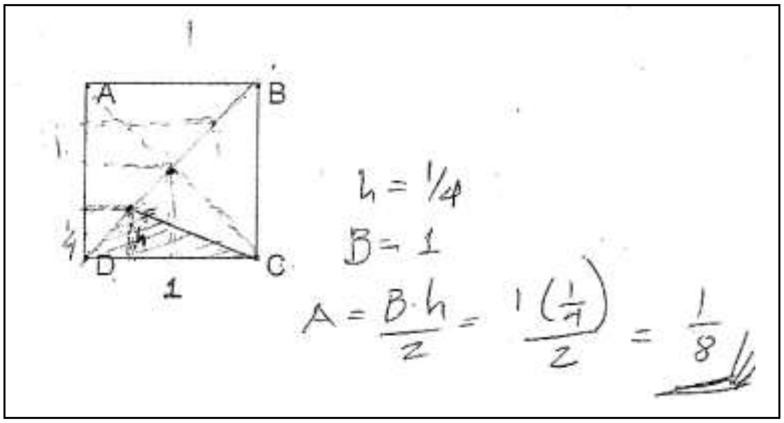


Figura 4.21. Fórmula para calcular el área de un triángulo utilizado por el Profesor 6 para resolver el Problema 5.

E: Entrevistador $\qquad$ P_6: Profesor 6 $\qquad$ L_i= Línea i

L_2E: ¿Con qué datos cuenta maestro y qué le faltaría para encontrar el área de ese triángulo?

L_3P_6: Cuento con el dato que es el lado [*señala 1*] y con el otro dato que nos está diciendo que la diagonal está dividida en cuatro partes iguales. La diagonal, la medida de la diagonal la podemos encontrar utilizando Pitágoras, ya que tenemos dos lados iguales; tenemos, también, dos ángulos iguales que son de cuarenta y cinco grados. Lo que me falta encontrar es precisamente esta altura que es la que me va ayudar a encontrar el área. Bien, si la diagonal está dividida en cuatro partes iguales, al dividir yo la diagonal en cuatro partes iguales y poder proyectar los puntos paralelos a cada uno de los lados [*traza líneas punteadas paralelas al lado AB*] podemos notar también que los lados de nuestro cuadrado se van a dividir también en partes iguales [*traza líneas punteadas paralelas al lado BC*] de ahí que yo obtengo triángulos semejantes, entonces, yo puedo obtener triángulos semejantes [*señala en la figura el triángulo*] que es este triángulo pequeñito, el cual me va a dar el mismo valor de la altura que es el que necesito. Entonces, lo único que necesito es tomar el valor de mi lado [*señala el valor de 1*] y dividirlo en cuatro partes; quiere decir que esto valdría [*escribe* ¼] un cuarto y como es paralelo a la altura, ese valor de un cuarto sería nuestra altura [*escribe h=1/4*], la base que es uno [*escribe B=1*] y lo único que hay que hacer es utilizar la fórmula del área: área igual a base por altura entre dos [*escribe* $A=\frac{B\cdot h}{2}=\frac{1\frac{1}{4}}{2}=\frac{1}{8}$] que sería igual a un octavo.

4.2.5.2 Conceptos-en-acto

Para resolver el Problema 5, sólo se tomaron en cuenta dos conceptos-en-acto: la bisectriz de un ángulo recto y el concepto de altura de un triángulo. Estos recursos fueron necesarios, independientemente de la técnica utilizada para resolver el problema; debido a que tuvieron que ser trazados e identificados para calcular su valor numérico. A continuación, se muestran estos dos conceptos-en-acto usados por los profesores 3 y 7.

a) Bisectriz del ángulo

El Profesor 3 usa la bisectriz del ángulo para resolver el Problema 5. A continuación, se muestra un extracto de la entrevista y parte del trabajo, donde se puede constatar lo antes dicho.

Profesor 3: Problema 5

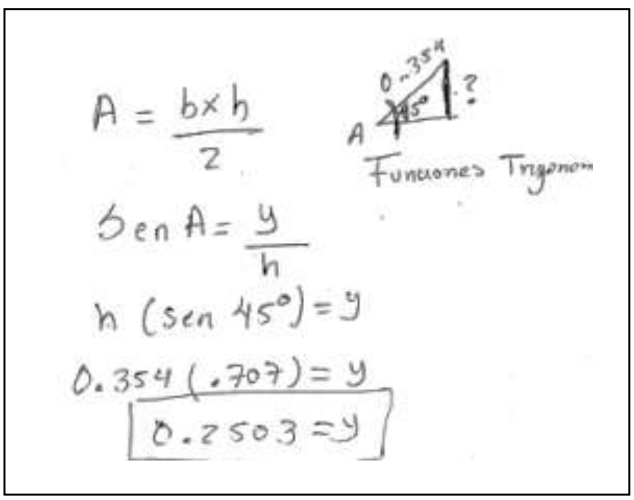


Figura 4.22. Bisectriz del ángulo utilizado
por el Profesor 3 para resolver el Problema 5.

E: Entrevistador P_3: Profesor 3 L_i= Línea i

L_1E: ¿Es para calcular la altura?

L_2P_3: Ajá, es para calcular la altura. La otra forma que se me ocurre es que [*dibuja un triángulo con un ángulo de 45°*] este ángulo vale cuarenta y cinco grados, esta distancia que yo tengo aquí [*señala de D a F*] tengo que vale la distancia de *D* a *F* que es de cero punto trecientos cincuenta y cuatro [*escribe 0.354*] y lo que me interesa es conocer automáticamente es este valor desconocido [*marca un signo de interrogación el lado del triángulo*].

L_3E: ¿Por qué considera que es de cuarenta y cinco grados ese ángulo maestra?

L_4P_3: Ajá, porque estamos hablando de un cuadrado [*señala el cuadrado*], porque me está diciendo que es un cuadrado *ABCD*. Entonces, como es un cuadrado nosotros tenemos que nos vale noventa grados [*traza un ángulo recto en el cuadrado*] por este ángulo que yo tengo aquí, éste me vale cuarenta y cinco grados que es la mitad de noventa. Estamos hablando de un cuadrado donde sus ángulos son de noventa; noventa y noventa grados y entonces automáticamente se considera que este nos mide cuarenta y cinco grados [*señala 45° en el triángulo*]. Si lo manejo entonces por funciones trigonométricas para conocer la altura, entonces tengo que conozco lo que vendría siendo la hipotenusa [*señala 0.354 en el triángulo*] y quiero conocer el cateto adyacente [*señala el signo de interrogación ?*]. Entonces, la fórmula que me puede servir es la de [*escribe* $sen\ A = \frac{y}{h}$] seno de *A* que es igual a *y*, cateto opuesto sobre hipotenusa, conociendo éste entonces está dividiendo, pasa multiplicando por el seno de cuarenta y cinco grados, en este caso el ángulo *A* [*escribe A en el triángulo*] nos vale cuarenta y cinco grados [*escribe h (sen 45°) = y*] y sería el valor de la altura. Sustituyendo el valor de *h* que es el valor de la hipotenusa [*escribe 0.354*] por el seno de cuarenta y cinco grados [*calcula el seno de 45° en la calculadora*] que es igual a cero punto setecientos siete [*escribe 0.354(.707) = y*] esto sería igual entonces a [*escribe 0.2503 = y*] que sería el valor de *y*.

En este problema, se puede observar cómo el Profesor 3 hace uso de la bisectriz de manera implícita; él considera que como se trata de un cuadrado por lo que sus ángulos tienen que ser de noventa grados. De esta manera, el Profesor 3 determina que el ángulo *BDC* vale cuarenta y cinco grados. El profesor no justificó que la diagonal *DB* es bisectriz del ángulo D; sin embargo, es evidente que así lo manejó (L_4P_3).

b) Altura de triángulo

Otro recurso importante, para resolver el Problema 5, fue conocer la altura del triángulo; este recurso fue usado por la mayor parte de los profesores durante la resolución del problema. La forma de cómo fue trazado dependió de la manera en que fue considerada la base del triángulo. El cálculo de la altura del triángulo, permitió a los profesores encontrar el área del triángulo solicitado en el problema. A continuación, se muestra el trabajo del Profesor 7 donde se muestra el uso de dicho recurso.

Profesor 7: Problema 5

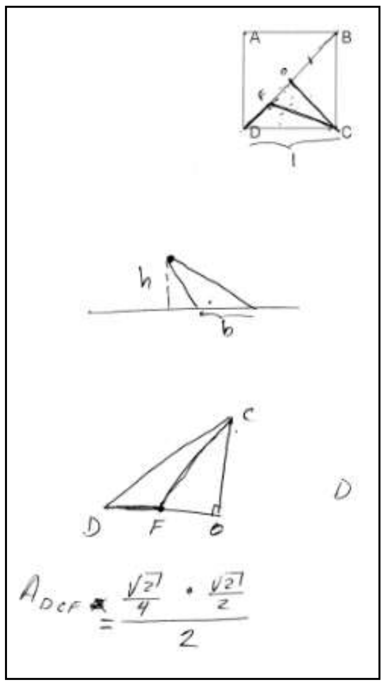


Figura 4.23. Altura del triángulo utilizado por el Profesor 7 para resolver el Problema 5.

E: Entrevistador P_7: Profesor 7 L_i= Línea i

L_1P_7: ¡Ya está! Voy a explicar primero y utilizar el concepto de altura para un triángulo. En un triángulo, la altura es un segmento perpendicular a la base [*dibuja un segmento de recta y sobre éste un triángulo con una línea punteada*] al vértice opuesto [*señala el vértice y lo remarca*] a la base, en este caso la base para el ejemplo que estoy marcando; ésta sería la base [*escribe b*] y ésta sería la altura [*escribe h a un lado de la línea punteada*] la atura estaría afuera del triángulo. Si yo me ubico en el triángulo en el cual estamos trabajando, ésta sería la base [*señala del punto D a F*], las diagonales de un cuadrado son perpendiculares entre sí.

L_2E: ¿Por qué tomar ésa como la base?

L_3P_7: Porque yo necesito uno de los segmentos para apoyarme; en este caso cualquiera de los lados de un triángulo puede ser considerado base. Voy a tratar de justificarlo, tratando de explicar porqué ésta me conviene. Las diagonales de un cuadrado son perpendiculares entre sí; si este segmento, el segmento *DB* [*señala de D a B*] es perpendicular al segmento *OC* [*señala de O a C*] entonces, el segmento *OC* es digamos la altura del triángulo que tendría la base *DB*, sería la altura, pero también sería la altura del triángulo que tendría la base *DO*.

L_4E: ¿Cuál sería ese triángulo?

L_5P_7: Bueno, voy a dibujarlo [*dibuja un triángulo*] éste es *D*, éste es *O* y éste es *C* [*escribe D, O y C en el triángulo*] yo sé que *DO* es perpendicular a *OC*; esto sí lo sé porque ambos son parte de las perpendiculares del cuadrilátero. Aquí, a la mitad de *DO* existe un punto *F* [*escribe F en el triángulo*], que me genera un triángulo *DCF*; al generar este triángulo, si yo considero la base como del segmento *DF*, el segmento *OC* sería la altura de ese triángulo y, entonces, el área del triángulo *DCF* sería igual a la base. La base sabemos que *DF*, ya lo teníamos es raíz de dos entre cuatro por la altura. La altura en este caso es un medio de la diagonal, el segmento *OC* es igual a raíz de dos entre dos, porque es la mitad de la diagonal, entonces esto es [*escribe* $A_{DCF} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4} x \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$].

En esta parte de la entrevista (L_1P_7), se manifiesta cómo el profesor hace uso del concepto de altura de un triángulo, y qué le sirvió para poder encontrarla. Posteriormente, con el valor de la altura y la base del triángulo encontradas, el profesor determina el área del triángulo, del cual se le pedía encontrar su área.

4.2.5.3 Resultados del Problema 5

A continuación, se muestran los resultados obtenidos de los diez profesores de acuerdo con los teoremas y conceptos-en-acto utilizados para resolver el Problema 5; en las Tablas 4.6 y 4.7 se muestran dichos teoremas y conceptos-en-acto utilizados.

Tabla 4.6. Teoremas-en-acto utilizados por los profesores para resolver el Problema 5.

Profesores	Teoremas-en-acto utilizados por los profesores			
	Razones trigonométricas		Teorema de Pitágoras	Fórmula para calcular el área del triángulo
	Seno	Coseno		
P_1	*		*	*
P_2			*	*
P_3	*		*	*
P_4				
P_5			*	*
P_6				*
P_7			*	*
P_8			*	*
P_9		*		*
P_{10}				*

En la Tabla 4.6, se observa que los profesores 1 y 3 utilizaron los tres teoremas-en-acto, mientras que los profesores 2, 5, 7 y 8 sólo utilizaron dos (teorema de Pitágoras y la fórmula para calcular el área de un triángulo). Los profesores 6, 9 y 10 utilizaron sólo uno (fórmula para calcular el área de un triángulo) y el Profesor 4 ninguno de los tres.

Tabla 4.7. Conceptos-en-acto utilizados por los profesores para resolver el Problema 5.

Profesores	Conceptos-en-acto utilizados por los profesores	
	Bisectriz	Altura del triángulo
P_1	*	*
P_2	*	*
P_3	*	*
P_4	*	
P_5	*	*
P_6	*	*
P_7	*	*
P_8	*	*
P_9	*	*
P_{10}	*	*

Se puede observar en la Tabla 4.7, cómo nueve de los diez profesores hicieron uso de los dos conceptos-en-acto que se consideraron en el problema, a diferencia del Profesor 4 que sólo se apoyó de la bisectriz, pero que fue suficiente para poder resolver el problema.

Comentarios:

P_1: Llegó a la solución del problema, utilizando tres teoremas-en-acto y dos conceptos-en-acto. La técnica que utilizó fue tomar la base del triángulo *CFD* como el lado *DC* y su altura como el segmento perpendicular que va de la base *DC* al punto *F*. Utilizó el seno del ángulo de cuarenta y cinco grados para encontrar la altura.

P_2: Sólo utilizó un teorema-en-acto (fórmula para calcular el área del triángulo) y dos conceptos-en-acto. El profesor trazó la diagonal *DB,* bisectriz del ángulo en el punto *D*; sin embargo, no pudo verla como bisectriz, lo cual impidió que identificara el ángulo de cuarenta y cinco grados; que podría servirle para resolver el problema. La técnica que utilizó fue la de calcular el área del triángulo que formó con los vértices *D*, *C* y el centro del cuadrado. Aquí, tomó como base el lado *DC* y la altura el segmento perpendicular que va de lado *DC* al centro del cuadrado. Posteriormente, el área que encontró la dividió en dos y este resultado lo tomó como el área buscada del triángulo *CFD*. El profesor llegó a la solución del problema, pero no justificó porqué el área del triángulo *CFD* es la mitad del área del triángulo que calculó primero.

P_3: Para resolver el Problema 5, este profesor utilizó tres teoremas-en-acto y dos conceptos-en-acto. La técnica utilizada para resolver el problema fue identificar el triángulo *CFD* y tomar la base como el lado *DC* y la altura como el segmento perpendicular que va del lado *DC* al punto *F*. Posteriormente, utilizó el seno del ángulo de cuarenta y cinco grados para hallar la altura, la cual sirvió para calcular el área del triángulo *CFD*.

P_4: La técnica utilizada por el Profesor 4 consistió en dividir el área del cuadrado en el área de dos triángulos rectángulos iguales; posteriormente, el área de uno de los dos triángulos rectángulos la dividió en cuatro triángulos, los cuales consideró con áreas iguales. Dicha consideración no fue justificada por el profesor, sin embargo, el resultado que obtuvo para el área fue correcto. La técnica que empleó, impidió el uso de teoremas-en-acto y el único concepto-en-acto que usó fue la bisectriz del ángulo, aunque este concepto no lo utilizó

para encontrar dos ángulos iguales, sí le sirvió para dividir el cuadrado en dos triángulos rectángulos congruentes.

P_5: Para resolver el problema, el profesor utilizó el teorema de Pitágoras y así encontrar el valor de uno de los lados del triángulo *CFD*; también, usó la fórmula para calcular el área del triángulo. Se apoyó en la bisectriz del ángulo para identificar el triángulo *CFD* del que le pedían hallar el área y del concepto de altura para poder encontrarla. La técnica que utilizó fue la de dividir el cuadrado en cuatro triángulos congruentes, posteriormente, calcular el área del triángulo que llamó *DEC* y a esta área le restó el área que calculó para el triángulo al que le llamó *FEC*. El profesor llegó a la solución correcta del problema.

P_6: Usó la fórmula para calcular el área de un triángulo, la bisectriz para encontrar triángulo *CFD* y el concepto de altura. La técnica que utilizó para resolver el problema, consistió en dividir el lado *AD* del cuadrilátero en cuatro partes iguales, e hizo lo mismo para el lado *DC*, posteriormente formar cuadrados. Con esta técnica el profesor llegó a la solución correcta del problema.

P_7: Los recursos institucionales que utilizó el profesor fueron: el teorema de Pitágoras y la fórmula para calcular el área de un triángulo. También, se apoyó en el concepto-en-acto como: la altura de un triangulo, y de la bisectriz del ángulo para encontrar el lado del triángulo *CFD*; aunque trazó la bisectriz, él no la reconoció como tal. La técnica que utilizó fue la de tomar la base del triángulo *CFD* como el lado *DF*, y su altura como el segmento que va del vértice *C* del cuadrado al punto que nombró como *O* (centro del cuadrilátero). Esta técnica permitió al profesor encontrar la solución correcta del problema.

P_8: Utilizó el teorema de Pitágoras y la fórmula para calcular el área del triángulo; trazó la bisectriz y reconoció el ángulo de cuarenta y cinco grados, pero no lo utilizó; posteriormente, encontró el triángulo *DFC* y tomó como altura el segmento perpendicular que va del lado *DC* al punto *F*. El profesor no pudo resolver el problema.

P_9: Utilizó la fórmula para calcular el área de un triángulo; teorema de Pitágoras y la función coseno para encontrar la altura del triángulo *CFD*. Dicha altura, la consideró como el segmento perpendicular que va del lado *DC* al punto *F*. El profesor trazó la bisectriz y se apoyó en el ángulo de cuarenta y cinco grados. Los valores de la altura y base del triángulo fueron correctos, pero al sustituir en la fórmula para calcular el área del triángulo, se confundió y tomó otros valores por lo que le impidió llegar al resultado correcto.

P_{10}: Tuvo dificultades para comprender el enunciado del problema, por lo que trazó inadecuadamente el triángulo *CFD* al que se le pedía encontrar el área. Utilizó la fórmula para calcular el área del triángulo, pero los valores que tomó como base y altura fueron incorrectos lo que le impidió resolver el problema correctamente.

4.2.6 Análisis y resultados globales de la solución del Problema 6

De los diez profesores que resolvieron el Problema 6, sólo uno llegó a la solución correcta; otro utilizó una técnica adecuada que pudo llevarlo a la solución correcta; sin embargo, eso no ocurrió debido a un cálculo matemático incorrecto. De los ocho profesores restantes, uno utilizó un procedimiento no adecuado para resolver el problema, y los otros siete, después de intentar buscar alguna técnica, manifestaron que no sabían cómo abordar el problema por lo que terminaron abandonándolo.

Problema 6:

En una serie aritmética, la suma de los primeros 50 términos es 200, y la suma de los siguientes 50 términos de la misma serie es 2700. ¿Cuál es el primer término de la serie?

Los recursos matemáticos necesarios para resolver este problema, son pocos y con un grado de complejidad mínimo; pese a esto, los profesores manifestaron tener dificultad para resolverlo. En el trabajo del Profesor 4, se muestran los conceptos y teoremas-en-acto necesarios para resolver el problema.

4.2.6.1 Técnicas institucionales (teoremas-en-acto)

a) La serie aritmética y la fórmula para calcular la suma de los primeros *n* enteros positivos consecutivos

Para resolver el Problema 6, únicamente dos (P_1 y P_4) de los diez profesores utilizaron recursos como: la expresión para representar una serie aritmética y la fórmula para calcular la suma de los primeros *n* enteros positivos consecutivos, dichos recursos permitieron que uno de los dos profesores llegara a la solución del problema.

Profesor 4: Problema 6

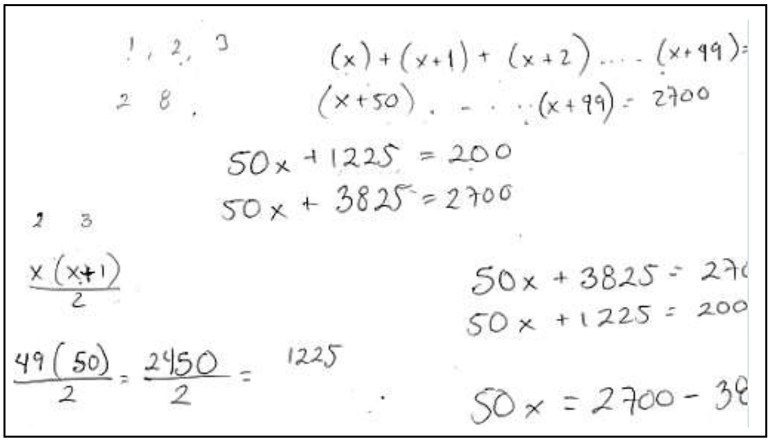


Figura 4.24. La serie aritmética usada por el Profesor 4 para resolver el Problema 6.

E: Entrevistador $\quad$ P_4: Profesor 4 $\quad$ L_i= Línea i

L_1P_4: Mmm… como una serie aritmética entiendo a uno más dos más tres o puede ser por ejemplo dos, ocho y así…

L_2E: ¿Recuerda cómo representar una serie aritmética?

L_3P_4: Claro, x más x más uno, más x más dos, más x más mmm… cuarenta y nueve [*pausa*]. Ok ya, igual a cincuenta [*escribe* $(x)+(x+1)+(x+2)...(x+49)=50$] [*pausa*].

En esta parte de la entrevista, se puede observar cómo el profesor hace uso de la serie aritmética, para obtener la suma de los primeros cincuenta términos de la serie.

L_4P_4: Tengo en total cincuenta equis [*escribe* $50x$], ahora tengo que sumar x por x menos 1 entre dos [*escribe* $\frac{x\,(x-1)}{2}$], voy a comprobar [*pausa*], no aquí es más [*escribe* $\frac{x\,(x+1)}{2}$]. La suma de los primeros naturales, la fórmula es ésta [*señala* $\frac{x\,(x+1)}{2}$]. Pero a ver, déjame ver, uno y dos sería tres, si sustituyo aquí sería dos, ajá esta es la fórmula de los primeros naturales [*señala* $\frac{x\,(x+1)}{2}$]. Entonces yo quiero los cuarenta y nueve primeros naturales, porque voy a tomar hasta cuarenta y nueve. Entonces, aquí sería cuarenta y nueve por cincuenta entre dos [*escribe* $\frac{49\,(50)}{2}$].

En esta parte de la entrevista, se observa cómo el profesor suma los cuarenta y nueve primeros números enteros consecutivos, iniciando desde uno, con ayuda de la fórmula que él establece como: $\frac{x(x+1)}{2}$.

4.2.6.2 Resultados del Problema 6

A continuación, se muestran los resultados del Problema 6. En la Tabla 4.8 se exponen los dos conceptos-en-acto que utilizaron dos de los diez profesores para resolver este problema.

Tabla 4.8. Teoremas-en-acto utilizados por los profesores para resolver el Problema 6.

Profesores	Teoremas-en-acto utilizados por los profesores	
	Serie aritmética	Fórmula para sumar los primeros *n* números enteros
P_1	*	*
P_2		
P_3		
P_4		
P_5		
P_6		
P_7	*	*
P_8		
P_9		
P_{10}		

En la resolución del Problema 6, sólo dos de los diez profesores utilizaron los teoremas-en-acto, pero sólo uno obtuvo la solución del problema correctamente. Los ocho profesores restantes no fueron capaces de resolver este problema.

Comentarios:

P_1: Los recursos institucionales que utilizó el profesor fueron: la serie aritmética y fórmula para calcular la suma de los primeros *n* enteros consecutivos. La técnica que utilizó fue la de representar la primera serie en términos de una serie aritmética con cincuenta sumandos; después redujo términos con ayuda de la fórmula para calcular la suma de los primeros *n* enteros consecutivos. Este mismo procedimiento lo hizo para la segunda serie y, de esta

manera, obtener dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, las cuales resolvió por el método de igualación. La técnica utilizada por el profesor fue adecuada, pero se equivocó en los cálculos numéricos, lo que provocó que no llegara a la solución correcta del problema.

P_2: Trató de escribir una ecuación donde la suma de los cincuenta primeros términos fuera igual a doscientos; pero no tuvo éxito, por lo que decidió abandonarlo.

P_3: Trató de expresar la primera serie como la sumatoria de *n* valores y la igualó a doscientos. Posteriormente, trató de encontrar cuánto debería valer cada uno de estos términos por medio de ensayos, como el profesor lo llama, después de varios intentos terminó por renunciar al problema.

P_4: Los recursos que utilizó el profesor fueron: la serie aritmética y fórmula para calcular la suma de los primeros *n* enteros consecutivos. La técnica que utilizó fue la de representar la primera serie en términos de una serie aritmética con cincuenta sumandos; después redujo términos con ayuda de la fórmula para calcular la suma de los primeros *n* enteros consecutivos. Esta misma técnica fue usada para plantear la segunda serie y, de esta manera, obtener un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, la cual resolvió y llegó al resultado que se esperaba que encontrara.

P_5: Trató de acordarse cómo representar una serie aritmética, pero no logró hacerlo, por lo que decidió abandonar el problema.

P_6: Trató de expresar la primera serie como la sumatoria de una función e intentó bosquejar su gráfica; sin embargo, no llegó a la solución y abandonó el problema.

P_7: El profesor leyó el problema un par de veces y trató de buscar alguna técnica que le ayudara a resolver el problema. Después de un rato de análisis mencionó que no se le ocurría nada para resolverlo, por lo que lo dejó sin resolver.

P_8: Después de leer el problema una vez, el profesor trató de escribir una expresión como una ecuación; después mencionó que no sabía cómo representar una serie aritmética por lo que intentaba hacerlo por ensayo y error. Después de pensar un momento, decidió no continuar intentando resolver el problema.

P_9: Utilizó como recurso la representación de una serie aritmética e intentó escribir la primera serie, pero en lugar de tomar cincuenta términos, como en el problema se especificaba, tomó cincuenta y uno; de esta misma manera lo hizo para la serie dos, por lo que no llegó al resultado correcto.

P_{10}: Empezó por escribir los datos del problema; posteriormente, trató de entenderlo y buscar alguna técnica que le ayudara a resolverlo, después de algunos intentos, mencionó que no sabía cómo resolverlo y terminó por abandonarlo.

4.2.7 Análisis y resultados globales de la solución del Problema 7

Los recursos requeridos para resolver el problema son de tipo geométrico y probabilístico, ambos básicos. El análisis de las soluciones dadas por los profesores es apoyado en extractos de las entrevistas de los profesores 1 y 6, debido a que en sus registros manifestaron el uso de dichos recursos.

Problema 7:

En la figura, A, B, C y D, son los vértices de un rectángulo; EFGH es un cuadrado; AH=GF=ED=1; CD = 2; I es equidistante de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$; e I es equidistante de $\overline{BC}$ y $\overline{GF}$. Si J es un punto seleccionado al azar dentro del polígono ABCDEFGH, ¿cuál es la probabilidad de que $\overline{IJ}$ no esté completamente dentro del polígono?

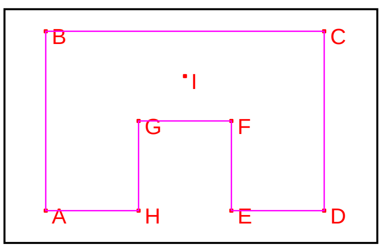


Figura 4.25. Polígono.

4.2.7.1 Conceptos-en-acto

a) Geométricos y probabilísticos

Para resolver este problema algunos de los profesores se basaron en conceptos geométricos, al identificar los cinco cuadrados congruentes que conforman el polígono. Otro concepto importante fue el probabilístico, al relacionar el área de cada cuadrado con una probabilidad la cual fue la misma para cada uno de los cuadrados por éstos congruentes.

Profesor 6: Problema 7

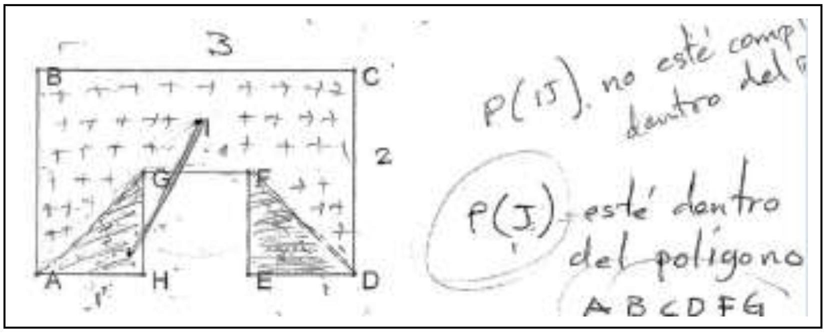


Figura 4.26. Probabilidad de que esté dentro del polígono: recurso utilizado por el Profesor 6 para resolver el Problema 7.

E: Entrevistador P_6: Profesor 6 L_i= Línea i

L_1P_6: Voy hacer un ejemplo rápido, que sería el punto *I* aquí [*señala el punto I*] y que el punto *J* estuviera aquí [*marca un punto y escribe J al lado*]. Entonces, se está generando el segmento *IJ* de esta manera [*traza un segmento de I a J*] de tal suerte que el punto está dentro del polígono, pero el segmento ya cruza por fuera del polígono. Eso es lo que nos están preguntando, una probabilidad de que el segmento *IJ* no esté completamente dentro del polígono [*escribe P(IJ) no esté completamente dentro del polígono*]. Eso es lo que nos están preguntando, y nos dan unas dimensiones. Veamos, entendamos el problema [*pausa*] voy a hacer unos trazos para ayudarme un poquito con el entendimiento [*traza líneas punteadas del punto A a G y de D a F*] [*pausa*]. Hice esos trazos, puesto que estoy tratando de hacerlo de manera imaginaria aquí en mi cerebro, con la finalidad de ver el segmento, pensemos que tenemos una cerca y que esto es un lazo que está puesto, tal vez, pensemos en un borrego, entonces el borrego se puede estar moviendo de acuerdo a lo que nos están pidiendo dentro del polígono. Pero va haber algún momento en que el borrego quiera ir hacia este lado [*señala el segmento de HG*] y no pueda llegar o tenga que pasar por encima de la cerca. La idea, entonces, que estoy tratando de lograr con esto del borrego y el lazo, es que en ningún momento el lazo puede hacer ningún doblez; entonces, el borrego pueda pasar libremente por acá [*señala el segmento AG*] y eso nos está llevando a entender que no debe salirse el segmento del área que tenemos aquí, del polígono que tenemos aquí en grande, y entonces, me lleva a una referencia de entender, que en estas dos áreas que están aquí no debe estar el punto *J*.

L_2E: ¿Cuáles áreas profesor?

L_3P_6: En las áreas que estoy generando como triángulos, en la parte de aquí [*rellena los triángulos AHG y EDF con líneas*]. Porque si el punto *J* cae dentro de esos puntos, ya no estaría completamente dentro del polígono.

En este extracto de la entrevista, se observa que el profesor, a través de pruebas realizadas con el trazo de segmentos de recta, puede identificar el área dentro del polígono donde no debe estar el punto *J*; dicha área la identifica como dos triángulos rectángulos.

L_4P_6: Ahora, nos vamos a la parte de probabilidades, ¿cuál es la probabilidad de que esté dentro de esa área? [*Pausa*] Bien, el área que tenemos aquí en el polígono [*señala los puntos ABCDEFGH*] sería nuestro cien porciento y entonces la probabilidad que esté dentro del área que voy a tachar aquí con crucecitas, que es el área donde nos va a ser permitido el punto *J*. Entonces, ¿cuál es la probabilidad de que *J* se encuentre dentro del polígono que estoy generando? sería [*escribe P(J) este dentro del polígono ABCDFG*].

Una vez que el profesor ha identificado el área donde no debe estar *J*, pasa a la parte probabilística, considerando el área total del polígono como el cien por ciento. A través del análisis de las áreas, el profesor termina por encontrar la probabilidad que le pedían en el problema.

Profesor 1: Problema 7

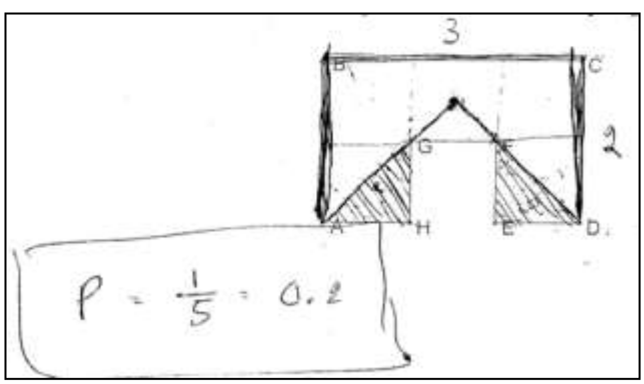


Figura 4.27. La probabilidad buscada, y determinada por el Profesor 1 en la solución del Problema 7.

E: Entrevistador P_1: Profesor 1 L_i= Línea i

L_1P_1: Digamos, vamos a partirlo en cuadritos [*divide en cuadros el polígono*] si *J* cae en este rectángulo [*señala tres cuadros del polígono*] siempre va a estar dentro del polígono. El problema va a ser cuando ande por aquí [*señala en el polígono un área*]; entonces, si yo dibujo una recta de aquí acá [*dibuja una recta del punto A a I*]. Como son cuadros de uno por uno todos, obviamente la diagonal de aquí acá [*señala del punto A al punto G*] va a tener que intersectar el punto *I*, esto por la geometría de la figura [*traza una línea del punto D al I*] [*pausa*]. Entonces, las únicas posibilidades que existen de que el segmento *IJ* no caiga o no esté dentro del polígono, es que el punto *J* se encuentre aquí [*señala un área*], en este triangulito o aquí [*señala los triángulos AHG y DEF y los rellena con líneas*] porque sí cae aquí [*señala los triángulos*] va a tener que cruzar por acá. Si consideramos la probabilidad de uno, en toda la figura; entonces, la suma de estos dos triangulitos forma un cuadro de uno por uno y la figura completa son cinco cuadritos de uno por uno. Uno, dos, tres, cuatro, cinco [*cuenta los cuadrados*], Entonces, la probabilidad, nos piden la probabilidad, de que *IJ* no esté completamente dentro del polígono, debe de ser la probabilidad igual a un quinto o sea cero punto dos [*escribe* $P = \frac{1}{5} = 0.2$]. Sí, porque la única posibilidad de que el segmento *IJ* no caiga dentro del polígono es sí el punto *J* cae en estas dos partes [*señala los triángulos AHG y DEF*] y estas dos partes son un cuadrito uno por uno y un cuadrito uno por uno es una quinta parte del polígono total, porque el polígono total mide cinco cuadritos de uno por uno.

Para encontrar la probabilidad que se pedía en el problema, el profesor divide el polígono en cinco cuadrados congruentes y, a través del análisis del punto *J* dentro del polígono, determina las áreas, donde el segmento *IJ* no se encuentra totalmente en el polígono. Posteriormente, él señala que esta área es la quinta parte del área total del polígono. De esta manera, el profesor llega a la solución del problema.

4.2.7.2 Resultados del Problema 7

De los diez profesores, sólo cuatro de ellos llegaron a la solución esperada del problema (profesores 1, 3, 6 y 8). Los profesores 2, 4 y 9 obtuvieron una solución que no fue la correcta; esto se debió a que no entendieron completamente el problema. Por otra parte, los profesores 5, 7 y 10 dejaron incompleta la solución del problema. En la siguiente tabla, se muestra los recursos que utilizó cada profesor para resolver el problema.

Tabla 4.9. Conceptos-en-acto utilizados por los profesores para resolver el Problema 7.

Profesores	Conceptos-en-acto utilizados por los profesores	
	Geométricos	Probabilísticos
P_1	*	*
P_2	*	*
P_3	*	*
P_4	*	*
P_5	*	
P_6	*	*
P_7	*	
P_8	*	*
P_9	*	
P_{10}		

Comentarios:

P_1: Los recursos que el profesor utilizó fueron de tipo geométrico y probabilístico; básicos los dos. La técnica que utilizó para resolver el problema fue la de dividir el polígono en cinco cuadrados congruentes y, a través del análisis del punto *J*, localizó el área y la probabilidad perteneciente a ésta.

P_2: Utilizó recursos de tipo geométrico, para dividir el polígono en cuadrados de uno por uno, y probabilísticos para encontrar la solución. El profesor no encontró la solución correcta del problema debido a que no comprendió lo que se le estaba pidiendo y terminó por calcular otra probabilidad.

P_3: Para resolver el problema, el profesor utilizó recursos geométricos y probabilísticos. Él encontró la solución esperada del problema.

P_4: En la solución de este problema, el profesor se apoyó en recursos geométricos; dividió el polígono en cinco cuadrados congruentes, y probabilísticos para encontrar una solución numérica del problema. La técnica que el profesor utilizó fue adecuada; sin embargo, no llegó la solución esperada.

P_5: Para resolver este problema, el profesor se apoyó en trazos geométricos, únicamente. No utilizó valores numéricos para dar la solución, sino que lo dejó expresado como la suma de áreas de tres triángulos y un cuadrado. No llegó a la solución adecuada del problema por falta de comprensión de lo que le pedían.

P_6: Los recursos que el profesor utilizó fueron de tipo geométrico y probabilístico. La técnica que utilizó fue la de identificar las áreas donde *IJ* no se encontraba completamente dentro del polígono y, posteriormente, encontró la probabilidad correspondiente a ésta. La solución a la que llegó fue la correcta así como el planteamiento desarrollado.

P_7: Para resolver este problema, el profesor intentó utilizar geometría como técnica que le permitiera resolverlo; sin embargo, no logró resolverlo.

P_8: Los recursos que el profesor utilizó fueron de tipo geométrico y probabilístico; la técnica que utilizó le permitió llegar a la solución esperada del problema.

P_9: Se auxilió de trazos geométricos para darle una solución al problema; sin embargo, no consiguió llegar al resultado correcto, debido a que su planteamiento no estuvo bien formulado.

P_{10}: Para resolver el problema, el profesor intentó entenderlo y, posteriormente, usar alguna técnica; el maestro no vio cómo hacerlo y terminó por dejar el problema sin resolver.

4.2.8 Análisis y resultados globales de la solución del Problema 8

Para resolver el Problema 8, sólo se requería contar con recursos matemáticos como: la ley de los exponentes y el manejo de operaciones con logaritmos. Parecen ser recursos básicos que cualquier profesor de nivel medio superior debería conocer; sin embargo, hubo quien tuvo dificultades para resolver este problema.

Problema 8:

Dado $2^x = 8^{y+1}$ *y* $9^y = 3^{x-9}$, *encuentre el valor de x e y.*

4.2.8.1 Técnicas institucionales (teoremas-en-acto)

Los recursos más importantes que sirvieron para que los profesores pudieran resolver el Problema 8 se encuentran las leyes de los exponentes y las propiedades de los logaritmos. A continuación se muestran parte del trabajo realizado por algunos de los profesores.

a) Leyes de los exponentes

Profesor 2: Problema 8

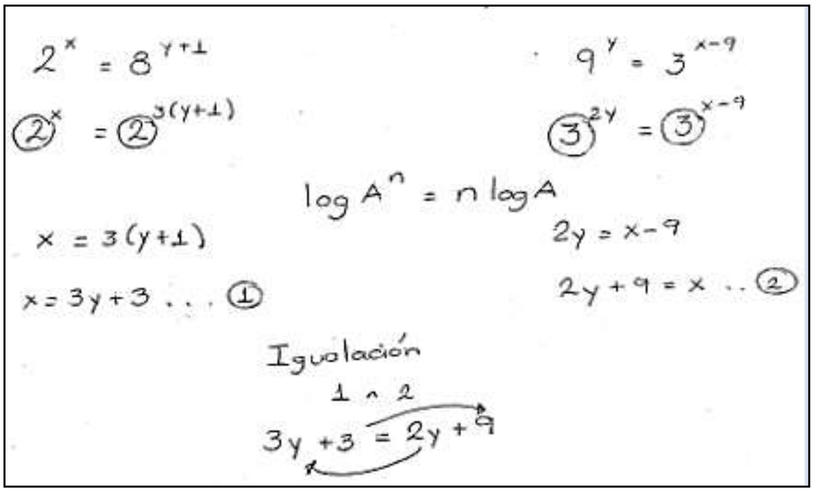


Figura 4.28. Leyes de los exponentes, usada por el Profesor 2 en la solución del Problema 8.

E: Entrevistador P$_2$: Profesor 2 L$_i$= Línea i

L$_1$P$_2$: Mmm… son dos ecuaciones exponenciales, a ver si me acuerdo. Bueno, no sé si estoy bien o no, pero a mí se me ocurre plantear dos ecuaciones con dos incógnitas para poder encontrar los valores de *x* y de *y*. Entonces, primero que nada vamos a trabajar la primera ecuación que dice que dos a la *x* es igual a ocho a la *y* más uno [*escribe* $2^x = 8^{y+1}$]. Ok y luego, por otro lado, tengo nueve a la *y* es igual a tres a la *x* menos nueve [*escribe* $9^y = 3^{x-9}$]. Yo, este nueve y este ocho los puedo expresar en exponentes similares para tener la misma base; es decir, si yo tengo dos a la *x*, esto es igual a dos a la tres por *y* más uno [*escribe* $2^x = 2^{3(y+1)}$] porque dos a la tres es igual a ocho, dos por dos cuatro por dos ocho y de este lado, este nueve lo puedo poner como tres a la dos igual a tres [escribe $3^{2y} = 3^{x-9}$] ¿por qué razón?

El profesor identificó que se trata de dos ecuaciones exponenciales y lo que se le ocurrió fue plantear dos ecuaciones con dos incógnitas; para esto el profesor empezó por transformar (escribir) las dos ecuaciones en términos de bases iguales.

L_2P_2: Porque si yo tengo estas bases [*encierra en un círculo a las bases dos y tres*] y si yo tengo aquí esta base, éstas son iguales, y cuando se tiene la misma base, no recuerdo bien si es aplicando esta propiedad de logaritmos [*escribe* $logA^n = nlog\ A$], el caso es que yo, en algún lugar remoto, me acuerdo que cuando tienes la misma base, no estoy segura si sea válido hacerlo, yo pongo x es igual a tres por y más uno [*escribe* $x = 3(y + 1)$] para que yo tenga la misma base en ambos lados, entonces yo puedo manejarlo así, y acá igual: dos y es igual a x menos nueve [*escribe* $2y = x - 9$] y aquí tendría dos ecuaciones con dos incógnitas, que es muy fácil resolver.

En este extracto de la entrevista, el profesor manifiesta que cuando dos expresiones exponenciales son iguales y las bases son iguales, entonces sus exponentes también lo son; sin embargo, el profesor no está seguro de cómo justificar esto, o si es con alguna propiedad de logaritmo.

a) Logaritmos

Profesor 3: Problema 8

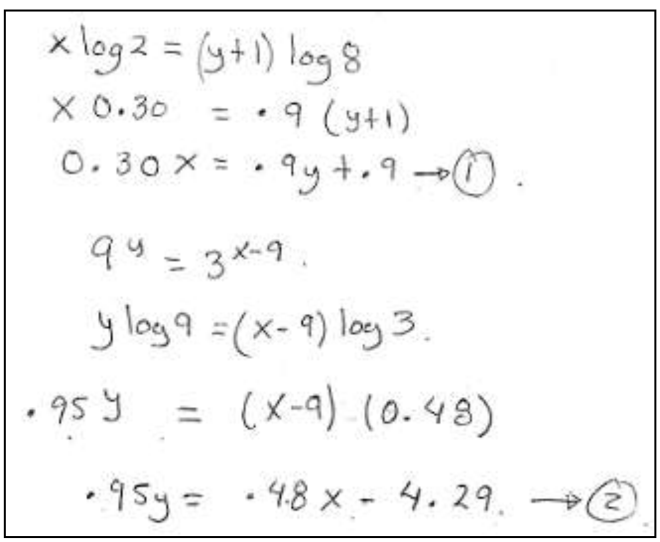


Figura 4.29. Operaciones con logaritmos utilizadas por el Profesor 3 en la solución del Problema 8.

E: Entrevistador P$_3$: Profesor 3 L$_i$= Línea i

L$_1$P$_3$: Se me ocurre primero sacarla por leyes de los logaritmos, y luego no sé, buscar una relación por ecuaciones para poder encontrar el valor de x y de y de suma y resta. Entonces, me quedaría que x por el logaritmo de dos igual a y más uno por el logaritmo de ocho [*escribe* $xlog2 = (y+1)log8$], si lo saco [*con la calculadora opera* $log2$] me queda x igual a punto treinta [*escribe* $x0.30$] bueno lo ubico [*escribe* $0.30x$] igual a logaritmo de ocho; que sería punto nueve [*escribe* $0.9(y+1)$] multiplicando punto nueve quedaría punto nueve por y más punto nueve [*escribe* $.9y + .9$) aquí tendría yo mi primera ecuación [*señala* $0.30x = .9y + .9$].

Se observa, en esta parte de la entrevista, cómo el profesor hace uso de los logaritmos para poder expresar la primera ecuación en términos de una ecuación lineal con dos incógnitas. El profesor manifestó que el procedimiento anterior le serviría para la otra ecuación y, posteriormente, buscaría la manera de relacionarlas como lo expresa en la entrevista.

4.2.8.2 Resultados del Problema 8

De los diez profesores que resolvieron el problema, sólo seis profesores (1, 2, 5, 7, 8, 9) llegaron a la solución correcta del problema. El Profesor 3 dio una solución aproximada y los tres restantes (4, 6, 10) dejaron incompleta la solución del problema.

Tabla 4.10. Teoremas-en-acto utilizados por los profesores en la solución del Problema 8.

Profesores	Teoremas-en-acto utilizados por los profesores para resolver el problema	
	Logaritmos	Leyes de los exponentes
P$_1$	*	
P$_2$	*	*
P$_3$	*	
P$_4$		
P$_5$	*	
P$_6$		
P$_7$	*	
P$_8$	*	
P$_9$		*
P$_{10}$		

Comentarios:

P_1: Los recursos que el profesor utilizó fueron las propiedades de los logaritmos. La técnica usada fue la de obtener dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y resolverlas como un sistema de ecuaciones. El profesor llegó a la solución correcta del problema.

P_2: Manejó las leyes de los exponentes para poner las bases iguales en ambas ecuaciones, y así obtuvo dos ecuaciones lineales con dos incógnitas; las cuales resolvió como un sistema de ecuaciones lineales, posteriormente obtuvo el resultado correcto del problema.

P_3: Resolvió el problema utilizando logaritmos en ambas ecuaciones; así obtuvo un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. El profesor llegó a una solución aproximada, debido a que fue manejando valores decimales en lugar de fracciones.

P_4: Para resolver este problema el profesor intentó utilizar la técnica de ensayo y error para encontrar los valores de x e y que cumplieran con las ecuaciones, pero después de algunos intentos de no conseguirlo terminó por abandonar el problema.

P_5: Utilizó logaritmos para encontrar un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, el cual resolvió y, de esta manera, obtuvo la solución esperada.

P_6: Después de leer el problema, el profesor intentó buscar alguna forma de cómo resolver el problema; sin embargo, no llegó a nada concreto y decidió no resolverlo.

P_7: Utilizó logaritmos en ambas ecuaciones para dejarlas como ecuaciones lineales con dos incógnitas y, posteriormente, resolver como un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas; de esta manera obtuvo la solución correcta del problema.

P_8: El recurso que utilizó este profesor fue logaritmos en ambas ecuaciones para conseguir obtener un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, el cual resolvió y encontró la solución correcta.

P_9: Para resolver el problema, el profesor puso en términos de bases iguales ambas ecuaciones; de esta manera pudo igualar los exponentes y resolverlas como un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y llegar la solución del problema.

P_{10}: Intentó hallar alguna técnica que le permitiera resolver el problema, después de un rato de búsqueda no tuvo éxito y decidió abandonarlo.

4.3 Resultados generales de la solución de los ocho problemas

Los diez profesores utilizaron teoremas y conceptos-en-acto, vistos como recursos para resolver los ocho problemas. De los ocho problemas planteados, el 5 fue el más resuelto por los profesores, 70% de ellos lo resolvió; es decir, siete de los diez (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7). Los teoremas y conceptos-en-acto utilizados para resolver este problema fueron básicos, pero necesarios, como: la fórmula para calcular el área de un triángulo y el concepto de altura para un triángulo. A pesar de que cada quien elaboró su propia técnica para resolverlo, los siete llegaron a la solución del problema. Para resolverlo, se apoyaron de la figura geométrica que se les dio en el problema original; esto les permitió ir obteniendo más recursos que sirvieron para llegar a la solución del problema.

El Problema 1 fue resuelto únicamente por 50% de los profesores (P_1, P_2, P_4, P_5, P_6), cuatro de ellos utilizaron la misma técnica de solución, aunque con pequeñas variaciones en el uso de los recursos. A pesar de que el Profesor 1 utilizó una técnica diferente de los demás, hubo algunos recursos que compartió con los otros profesores, como: el seno y el coseno del ángulo y la fórmula para calcular el área de un triángulo; por lo que estos recursos, independientemente, de la técnica utilizada, parecieran ser indispensables en la solución del problema.

De los ocho problemas, el que menos fue resuelto por los profesores fue el 6. Nueve de los diez profesores no llegaron a la solución del problema. El Profesor 4 utilizó los recursos: representación simbólica de una serie aritmética y la fórmula para sumar los *n* primeros números enteros consecutivos; así como de la técnica que le ayudó a resolver el problema. El Profesor 1 utilizó la misma técnica y los recursos que el Profesor 4, pero éste no llegó al resultado correcto por errores de cálculo. El resto de los profesores manifestó tener desconocimiento de los recursos que quizá les hubiera permitido resolver el problema.

Otro de los problemas poco resuelto por los profesores fue el 2, sólo dos de los diez profesores llegaron a la solución correcta; ambos por métodos distintos, pero utilizando algunos recursos en común como: el uso de variables (incógnitas) y la definición de éstas. Para empezar a resolver este problema, los profesores empezaron a crear sus propios recursos a partir de los que ya tenían. El resto de los profesores intentaron usar alguna técnica y generar recursos que le permitieran resolver el problema; sin embargo, su conocimiento se mostró limitado y, por tanto, escaso de recursos lo que les impidió continuar con la resolución.

Uno de los problemas resuelto por la mayor parte de los profesores, pero de forma incompleta, por el número variado de soluciones que presenta, es el 4. Sólo dos de los diez profesores manifestaron que no sabían cómo resolver el problema y lo evadieron (P_7 y P_{10}). Los ocho restantes encontraron algunas de las cinco soluciones que cumplen con el problema. Los profesores 1 y 5 encontraron tres de las cinco soluciones y los profesores 2, 3, 4, 6, 8, 9 sólo encontraron dos de las esperadas. La reflexión y el uso de recursos para resolver este problema pareció ser escaso, por lo que se limitaron únicamente a buscar sólo una de las cuatro soluciones del problema, sin prestar atención en todos aquellas variantes que cumplían también con la solución.

Los problemas 8, 7 y 3 fueron resueltos por 60, 40 y 30%, respectivamente, de los profesores. El uso de recursos fue manifestado de igual manera que con los otros problemas, a través de teoremas y conceptos-en-acto, como: uso de logaritmos, teorema de Herón, ley de cosenos, fórmula para calcular el área de un triángulo, seno y coseno del ángulo, altura, semiperímetro, etc. En la resolución de estos problemas, los profesores utilizaron recursos, pero con cierta duda o desconocimiento de si eran o no los adecuados, debido a las limitaciones conceptuales cada uno de ellos.

Para resolver el Problema 3, hubo cuatro profesores (P_1, P_2, P_3 y P_8) que utilizaron recursos, como: ley de cosenos y la fórmula para calcular el área de un triángulo. Los profesor 2 y 3 fueron los únicos que llegaron a la solución correcta del problema. Los profesores 2 y 8, pese a que contaban con los recursos necesarios para llegar a la solución, no lo hicieron. El Profesor 1 definió la expresión correcta de la ley de cosenos, así como cada uno de los lados del triángulo, pero al calcular la altura se confundió y tomó incorrectamente el valor del lado, por lo que obtuvo un resultado erróneo. El Profesor 8 expresó correctamente la ley de cosenos, pero al realizar los cálculos tuvo dificultades con el uso de los signos y con la manera en cómo tomar los ángulos internos del triángulo, por lo que no obtuvo la solución correcta del problema. Los profesores 4, 7 y 9 intentaron utilizar el teorema de Herón para encontrar el área del triángulo, pero los tres no usaron la fórmula adecuada; por lo que no llegaron a la solución correcta del problema. Los profesores 5 y 10 consideraron que se trataba de un triángulo rectángulo y lo resolvieron aplicando el teorema de Pitágoras. El Profesor 6 consideró que uno de sus ángulos era de cuarenta y cinco grados, y con ayuda del seno del ángulo y un lado del triángulo encontró la altura del triángulo, pero de forma incorrecta.

Para resolver el Problema 7, los profesores P_1, P_3, P_6 y P_8, usaron recursos que les permitieron llegar a la solución correcta del problema. Los profesores 2, 4 y 9 no entendieron el problema. Los profesores 5, 7 y 10 dejaron inconcluso el proceso de solución del problema. Estos últimos seis profesores manifestaron tener recursos y análisis débiles, al no comprender y resolver el problema.

El Problema 8 fue resuelto correctamente por seis de los diez profesores (P_1, P_2, P_5, P_7, P_8 y P_9). El recurso que utilizaron ellos, excepto el P_2, fue el uso de logaritmos, el cual les permitió encontrar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas; al resolverlo les dio la solución al problema. El Profesor 2 utilizó el recurso de igualar las bases en ambos lados de cada una de las ecuaciones; posteriormente, igualó los exponentes; también, de ambos lados y resolver como un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Este profesor manifestó no estar seguro de que su técnica fuera la adecuada o si era válido hacerlo. El Profesor 3 utilizó logaritmos, pero lo que impidió llegar al resultado fue la técnica de utilizar números decimales. Los profesores 4, 6 y 10 no llegaron a nada concreto; después de varios intentos de solución, optaron por abandonarlo.

De los diez profesores entrevistados, ocho de ellos tienen el grado de ingenieros. Uno de ellos tiene el grado de maestría en educación, y los dos restantes tienen el grado de licenciados en educación media con especialidad en matemáticas. El profesor que resolvió cinco de los ocho problemas es egresado de la UAM-azcapotzalco con el grado de ingeniero físico y con dos años de experiencia como docente. El profesor que resolvió cuatro de los ocho problemas es egresado de la UAEM, con el grado de ingeniero químico y con 17 años de experiencia. Los cinco profesores que sólo resolvieron tres de los ocho problemas son egresados de escuelas como: UNAM, Instituto Tecnológico de Toluca y Escuela Normal Superior de México con años de experiencia de tres, cuatro, doce, catorce y diecinueve años. El profesor que resolvió sólo dos problemas es egresado del Instituto Tecnológico de Toluca con grado de ingeniero en electrónica y maestría en educación con 9 años de experiencia. El profesor que resolvió sólo un problema es egresado de la UNAM, con el grado de ingeniero mecánico y con 15 años como docente; el último el profesor que no resolvió correctamente ningún problema es egresado de la UAEM con el grado de ingeniero agrónomo industrial y con cuatro años de experiencia como docente.

CAPÍTULO 5
CONCLUSIONES

5.1 Introducción

En torno a la práctica del profesor, es ya sabido que éste debe conocer y entender las matemáticas que enseña, así como de hacer uso de sus conocimientos cuando se presenta ante situaciones nuevas (Cohen et al., 2002). Un profesor debe contar con un conjunto amplio de recursos matemáticos que le permitan utilizar diferentes formas de resolver problemas. Tener conocimiento matemático no es suficiente, cuando no se sabe cómo utilizarlo y presentarlo, de tal manera que estos se entiendan (Hill et al., 2005).

Debido a que no existe un camino único para resolver problemas nuevos, los profesores utilizan distintos recursos con la intención de poder resolverlos y presentarlos, con el objetivo de que puedan ser comprendidos. De esta forma, se reconoce que los recursos que el profesor utilice para resolver problemas, dentro y fuera del salón de clases, pueden crear entornos que enriquezcan la comprensión, a través de una práctica reflexiva (Adler, 2000; Gueudet & Trouche, 2009).

Una de las preocupaciones, en educación matemática, y que en los últimos años ha tomado interés, está relacionada con el fortalecimiento del conocimiento matemático del profesor, a través del uso de recursos matemáticos en distinta situaciones, donde se permite la reflexión y construcción del conocimiento matemático (Hill, Blunk, Charalambous, Lewis, Phelps, Sleep & Ball, 2008; Gueudet & Trouche, 2009; Hill et al., 2005, entre otros). Por estas razones, la presente investigación, centró su atención en los recursos matemáticos y su uso por parte del profesor al resolver problemas no rutinarios.

Las conclusiones obtenidas de este trabajo de investigación, tratan de responder las preguntas de investigación planteadas en el Capítulo 1 de esta tesis, referente al uso de recursos matemáticos (teoremas y conceptos-en-acto) que utilizan los profesores al resolver problemas, así como la influencia que estos –los recursos– tienen en la solución del mismo. También, se trató de observar parte de la problemática del conocimiento matemático que tiene el profesor, mediante la exploración de su conocimiento, vía la resolución de problemas.

Este estudio pone de manifiesto, en primer lugar, el uso de diferentes recursos matemáticos como: teoremas y conceptos-en-acto, por parte de los profesores al resolver problemas; algunos correctamente usados y otros no. En segundo lugar, este estudio pone en evidencia la manera en cómo el uso y la conexión entre los recursos influyen en la solución de problemas. Mediante entrevistas a profesores, se detectaron dificultades que ellos tienen en la comprensión de problemas. La pobreza de recursos fue notoria en la selección y uso de estos que servirían para encontrar la solución del problema; los errores matemáticos y el inapropiado uso de recursos, pone de manifiesto una falta de conocimientos matemáticos por parte del profesor.

Algunas investigaciones (e.g., Hill et al., 2008) señalan que la falta de conocimiento matemático del profesor afecta considerablemente la instrucción, ya que estos responden, justifican y presentan información matemática imprecisa a los estudiantes. Por lo que, si un profesor tiene conocimientos débiles que le impiden resolver problemas fuera del salón de clases, probablemente, estos serán también exhibidos frente a grupo, al tratar de resolver y explicar problemas no rutinarios.

5.2 Conclusiones con base en los propósitos de investigación

Propósitos

a) Identificar y analizar a través de la resolución de problemas, los diferentes recursos matemáticos que utilizan los profesores de matemáticas de nivel medio superior, cuando se enfrentan a problemas fuera del salón de clases, y la manera en cómo estos influyen en la solución del problema.
b) Documentar la problemática del conocimiento matemático, que presentan los profesores en la resolución de problemas no rutinarios.

Los diez profesores participantes y reportados en esta investigación, usaron distintos recursos matemáticos como: teoremas-en-acto y conceptos-en-acto, al resolver problemas no rutinarios. Durante la resolución de problemas, los profesores inicialmente intentaron identificar qué se les pedía encontrar, así como los datos del problema, y que servirían como recursos para el profesor; posteriormente, con estos recursos y la combinación de ellos trataron de generar otros recursos que les permitiera llegar a la solución del problema.

La presencia de los recursos matemáticos (teoremas-en-acto y conceptos-en-acto) mostró ser parte importante en la resolución de los problemas, pero no del todo influyente en la solución de estos; debido a que el uso de los recursos está relacionado con alguna técnica de solución. Contar con estos recursos matemáticos no es suficiente para resolver un problema, se requiere también tener alguna o algunas técnicas de solución que permitan relacionarlos. En las entrevistas, se puede observa cómo algunos profesores hicieron uso de los recursos pertinentes para resolver el problema y, sin embargo, no llegaron a la solución correcta de éste por complicaciones de tipo operativo. Hubo problemas en los que el profesor identificó los datos y condiciones, y que utilizó como recursos; sin embargo, estos últimos fueron usados por él de forma errónea.

5.3 Conclusiones con base en las preguntas de investigación

Preguntas

a) ¿Qué recursos matemáticos utilizan los profesores de matemáticas de nivel medio superior al resolver problemas no rutinarios utilizando únicamente papel y lápiz?

Los recursos matemáticos exhibidos por los profesores, a través de su uso en la resolución de los ocho problemas, fueron: teoremas-en-acto y conceptos-en-acto. De acuerdo con el análisis de las entrevistas, estos recursos fueron débiles. Es decir, la noción que tienen sobre estos aún se encuentra poco consolidada, por lo que sus conocimientos fueron limitados y poco estructurados.

Entender los problemas no rutinarios y lo que se les pedía encontrar, así como saber qué conceptos y teoremas-en-acto debían utilizar como recursos, fue para algunos un tanto difícil; así como para otros fue problemático relacionar los teoremas y conceptos-en-acto con los que ya disponían para generar nuevos recursos y encontrar la técnica que les ayudaría a resolver cada uno de los problemas. Esto revela que, en algunas ocasiones, el profesor cuenta con una idea de cómo abordar el problema, pero desconoce parte de los conceptos y teoremas-en-acto que usará como recursos y los que cree conocer algunas veces los usan de manera incorrecta.

b) ¿Cómo influyen los recursos matemáticos del profesor de matemáticas de nivel medio superior, en la solución del problema utilizando papel y lápiz?

La influencia del uso de los teoremas y conceptos-en-acto, vistos estos como recursos matemáticos, en la solución de problemas, mostró ser importante en cada uno de ellos, pero no necesariamente primordiales por ser también importantes otros recursos, como las técnicas de solución. El conjunto de recursos necesarios para resolver el problema, demostró estar mutuamente relacionado entre sí, por lo que la falta de uno o algunos de ellos influyó de forma notoria en la generación de otros recursos por parte del profesor y, por tanto, en la solución del problema.

La articulación entre los recursos (teoremas-en-acto, conceptos-en-acto y técnicas de solución) en algunos casos, permitió al profesor obtener la solución del problema. Sin embargo, hubo también ocasiones en las que el profesor manifestó contar con los teoremas y conceptos-en-acto, pero le hacia falta una técnica que le permitiera relacionarlos y poderlos usar adecuadamente. También, hubo momentos, donde se sabía cómo atacar el problema, pero existían dificultades de tipo conceptual; lo que les impedía utilizar los recursos o en su defecto los utilizaban de manera incorrecta; es decir, de acuerdo con lo que el profesor creía que estaba bien. Un impedimento para los profesores fue que teniendo los recursos (teoremas-en-acto y conceptos-en-acto y las técnicas de solución) adecuados para llegar a la solución del problema, no lo hicieron; esto se debió a que la sintaxis operativa por ellos utilizada no fue la correcta.

Lo anterior, evidencia que para encontrar la solución del problema no basta contar únicamente con los recursos matemáticos (teoremas-en-acto y conceptos-en-acto), sino también hace falta saber cómo utilizarlos y relacionarlos mediante técnicas apropiadas, de tal manera que permita resolver y llegar a la solución del problema.

c) ¿Cuáles son las dificultades del conocimiento matemático que presentan los profesores en la resolución de problemas no rutinarios?

Los profesores tuvieron dificultades en el uso de recursos; gran parte de ellos, durante la resolución del problema, manifestaron el desconocimiento de los teoremas y conceptos-en-acto a utilizar; otros dijeron conocer parte de ellos, lo que a veces no fue suficiente para que pudieran resolver el problema. Hubo, también, quien manifestó saber cómo resolver el problema, pero expresó no recordar alguna fórmula que le sirviera para llegar a la solución del problema. La mayor parte de los profesores tuvo dificultades en la parte conceptual, al desconocer información esencial de cada uno de los conceptos-en-acto y teoremas-en-acto implícitos en los problemas.

Este estudio pone de manifiesto que el conocimiento común del contenido (CCK) mencionado por Ball et al. (2008) y con el que todo profesor debería contar no fue usado adecuadamente por los diez profesores entrevistados; ya que se presentaron dificultades al operar, y en el uso de técnicas en la resolución de problemas.

Debido a la falta de una técnica de solución anticipada, durante la resolución del problema, los profesores generaron sus propias técnicas; que les permitieron, en algunas ocasiones, hacer uso de los teoremas y conceptos-en-acto. En otros problemas, esta falta de técnicas generó dificultades en los profesores, las cuales están relacionadas con el hecho de que no podían ver o estructurar la técnica que les serviría para resolver el problema, tomando en cuenta el conjunto de recursos con los que contaba. Esto indica que existe una falta de conocimiento conceptual en los profesores, la cual lo limita al no poder relacionar una serie de teoremas y conceptos-en-acto, que se convertirían en sus recursos y darían lugar a nuevos, con el objetivo de alcanzar un fin. Si el conocimiento conceptual es pobre, es probable que el profesor no sea capaz de resolver problemas, apropiadamente en su práctica docente.

Existieron situaciones donde el profesor no presentó dificultades al relacionar los teoremas y conceptos-en-acto, mediante una técnica de solución adecuada; sin embargo, no llegó a la solución correcta del problema por errores de tipo operativo. De acuerdo con los resultados obtenidos de las entrevistas, aplicadas a los profesores, los años de experiencia como docentes parecen ser un factor no significativo en el buen manejo de los recursos. Los profesores 2, 3, 5, 7 y 9, con experiencia entre 12 y 19 años, resolvieron correctamente un número reducido de problemas: 4, 3, 3, 3 y 1, respectivamente, y los profesores 1, 4, 6, 8 y 10, con experiencia entre 2 y 9 años, resolvieron correctamente un número limitado de problemas: 5, 3, 3, 2 y 0, respectivamente. Estos resultados permiten decir que los años de experiencia no bastan para asumir el buen desempeño del profesor en el uso de recursos matemáticos al resolver problemas no rutinarios.

Este estudio muestra que los recursos matemáticos (teoremas-en-acto y conceptos-en-acto) exhibidos por los diez profesores de matemáticas de nivel medio superior, son débiles y, en algunos casos, carentes de sentido al resolver problemas. La falta de un uso apropiado de los recursos parece ser un factor importante en la resolución de los problemas no rutinarios, debido a que los profesores no logran recordar o deducir fórmulas, teoremas y conceptos que podrían ayudarle a resolver los problemas.

De lo anterior, se puede decir que un profesor quien posee pocos conocimientos y los que tiene no están bien consolidados, difícilmente podrá resolver de manera adecuada problemas no rutinarios, donde deba hacer uso de recursos matemáticos. Ser capaz de identificar los teoremas y conceptos-en-acto con los que se cuenta, y tratar de buscar una técnica que permita relacionarlos es una tarea que le compete, primeramente, al profesor. Ello, por ser el principal proveedor del conocimiento dentro del aula y de lograr que dicho conocimiento sea aprendido por los estudiantes.

5.4 Investigaciones futuras

En el trabajo de Gueudet y Trouche (2009), sobre los sistemas de documentación de maestros, señalan que no sólo estos permiten aprovechar los cambios traídos por los recursos digitales, sino que también constituyen una forma de capturar los cambios profesionales de los profesores. Este enfoque aborda la integración de la tecnología y la manera de cómo los profesores trabajan con ella. Esto conduce, en particular, al considerar las tecnologías como parte de una gama amplia de recursos didácticos disponibles.

La apropiación de las herramientas tecnológicas y la combinación con otros recursos, como papel y lápiz, es una tarea que compete al profesor dentro de su práctica docente. Sin embargo, seleccionar, combinar y adaptar los recursos a la práctica del profesor no es una tarea fácil; requiere tiempo y el uso de estos (Ball & Cohen, 1996).

En la actualidad, la eficacia en la enseñanza no reside simplemente en el conocimiento personal de un maestro, sino cómo este conocimiento es utilizado en las aulas ya no únicamente con papel y lápiz, sino con ayuda de la tecnología. Los maestros altamente competentes en matemáticas sólo podrán ayudar a otros a aprender matemáticas, si son capaces ellos mismos de utilizar su conocimiento para resolver tareas o problemas no rutinarios que se le presenten.

Trabajos como los de Hill, et al. (2005) señalan que el conocimiento del profesor se encuentra relacionado significativamente con el rendimiento estudiantil, por lo que éste afecta el aprendizaje. Esta investigación junto con otras, ponen de manifiesto la importancia que tiene el cocimiento del profesor, para los beneficios de la instrucción dentro del aula y el aprendizaje de los estudiantes.

Una investigación reciente sobre el conocimiento matemático para la enseñanza y los efectos de éste en la instrucción es la de Hill et al. (2008), donde se señala el impacto que tiene el conocimiento del profesor en la instrucción y, por lo tanto, en el rendimiento estudiantil. De acuerdo con estos autores, el "conocimiento matemático para la enseñanza" (MKT, por sus siglas en inglés) se refiere no sólo al conocimiento matemático común que todo profesor de matemáticas con profesiones diversas debe tener; sino también, al conocimiento de la materia que apoya la enseñanza; por ejemplo, por qué y cómo trabajar específicamente los procedimientos matemáticos, cuál es la mejor manera de definir un término matemático, etc. También, estos autores han introducido un nuevo término concerniente a la "la calidad de la instrucción matemática" (MQI, por sus siglas en inglés). Este término lo usan para referirse al rigor y la riqueza de las matemáticas en la instrucción, incluyendo la falta de matemáticas o presencia de errores, explicación y justificación matemática, representación matemática etc., de las que hace uso el profesor.

Actualmente en México, los profesores de matemáticas de nivel medio superior, no cuentan con una formación profesional adecuada de cómo éstas deben ser enseñadas a los estudiantes; es decir, ellos carecen de un conocimiento matemático para la enseñanza. Esto se debe, a que los profesores que se dedican a impartir clases de matemáticas en nivel medio superior son generalmente profesores con grados de licenciatura como: ingenieros con diferentes especialidades, matemáticos, físico-matemáticos o físicos, y en algunos casos profesores con títulos normalistas. Por lo que el conocimiento matemático básico con el que cuentan debería ser común por ser licenciaturas afines a las matemáticas; pero el problema reside en que no son formados especialmente como profesores para la enseñanza matemática. Las preguntas aquí serían ¿qué recursos matemáticos pueden fortalecer el conocimiento matemático común y para la enseñanza, de los profesores de matemáticas que no cuentan con una formación profesional docente?, ¿cómo utilizar los recursos matemáticos junto con los tecnológicos dentro del salón de clases, para mejorar la calidad en la instrucción matemática y, lograr un impacto positivo en el aprendizaje de los estudiantes?, ¿cómo usar los recursos tecnológicos para mejorar los sistema de documentación, y que existan cambios profesionales en la práctica del profesor? hay más interrogantes respecto a la problemática aquí abordada, pero bastan éstas para motivar a futuros investigadores interesados en responderlas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3***,** 205–224.

Antolín. O. Bagnoli, F. Bulajich, R. Gómez, J. A. & Rechtman, A. (Eds.). (2000). *Problemas para la 14° olimpiada mexicana de matemáticas (problemas introductorios)*. México. Recuperado de http://Articles/Public/ART37210550376542 6783.PDF.

Ball, D. L. Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. doi: 10.1177/00224 87108324554.

Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1996). Reform by the book: What is –or might be– the role of curriculum materials in teacher learning and instructional reform. *Educational Researcher*, *25*(9), 6–8 & 14.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques, (19)*2, 221–266.

Cohen, D. K., Raudenbush, S. W. & Ball, D. L. (2002). Resources, instruction, and research. *Evidence matters: Randomized trials in education research*, 80–119. Washington, DC: Brookings Institution Press.

Coxford, A. F. & Shulte, A. P. (Eds.). (1988). *The ideas of algebra, K-12*. EE.UU.: NCTM.

Davis, R. B. (1990). *Learning mathematics: The cognitive science approach to mathematics education*. (3^era ed.). New jersey: Ablex.

Ernest, P. (1989). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: A model. *Journal of Education for Teaching 15*(1), 13–33.

Fennema, E., & Franke, M. L. (1992). Teachers´ knowledge and its impact. *Handbook of research an mathematics teaching and learning*. In D. A. Grouws (Ed.)., 147–164. New York.

Grossman, P. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York, NY: Teachers College Press.

Gueudet, G. & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics*, *71*, 199-218. doi: 10.1007/s10649-008-9159-8.

Guzmán, H. A. (1992). Geometría y trigonometría. Publicaciones Cultural. México.

Hernández, S. R., Fernández, C.C., & Baptista, L.P. (2008). *Metodología de la investigación*. México. Ed. Mc Graw Hill, 4ta edición.

Hill, H. C., Rowan, B. & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers´mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, *42*(2), 371-406. doi: 10.3102/00028312042002371.

Lagrange, J.B., Artigue, M., Laborde, C., & Trouche, L. (2003). Technology and mathematics education: A multidimens ional study of the evolution of research and innovation. *In A.* Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education*, 239–271. Dordrecht: Kluwer.

Mason, J. Burton, L. & Stacey, K. (1989). *Pensar matemáticamente*. España: Ed. Labor. S.A.

Miles, M. B & Huberman, A. M. (1984). *Qualitative data analysis: a sourcebook of new methods*. United Kingdom: Sage Publications.

Montgomery. L. M. (1987). *Learning and teaching geometry, K-12*. Yearbook. EE.UU.: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Granada: Sociedad andaluza de educación matemática, Thales.

Polya, G. (2008). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instrumentscontemporains*. Recuperado de http://ergoserv.psy.univparis8.fr/Site/ Groupes/Modele/.

Rogalski, J. (2003). Y a-t-il un pilote dans la classe? Une analyse de l‟enseignant comme gestion d‟environnement dynamique ouvert. *Recherches en didactique des mathématiques*, 23, 343–388.

Santos, T. L. M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos fundamentos cognitivos.* México: Trillas.

Schön, D. A. (1992). *El profesional reflexivo: cómo piensan los profesionales cuando actúan*. España: Paidós.

Selden, J. Selden, A. & Mason, A. (1994). Even good calculus students can´t solve nonroutine problems. *Research Issues in Undergraduete Mathematics Learning*. Washington: the mathematical association of america, 33, 19–26.

Shoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* EE.UU.: Academic Press, INC.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1–21.

Thompson, A. G. (1984). The relationship of teacher´s conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics, 15*,105–127.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques, 10* (2, 3), 133–170. Recuperado de http://ipes.anep.edu.uy/ documentos/curso_dir_07/modulo2/materiales/didactica/campos.pdf.

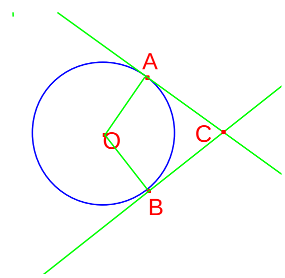
ANEXOS

ANEXO A

Soluciones esperadas de los problemas

Problema 1

El triángulo ABC es equilátero (como se muestra en la figura) y sus lados AC y BC son tangentes a la circunferencia cuyo centro es O, y cuyo radio es $\sqrt{3}$*. ¿Cuál es el área del cuadrilátero AOBC?*

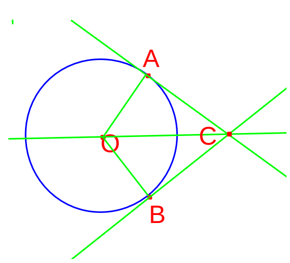


Contenido matemático: algebraico y geométrico (para este problema el profesor debería tener conocimiento las propiedades de los triángulos, semejanzas y congruencias).

Técnicas de solución:

Solución

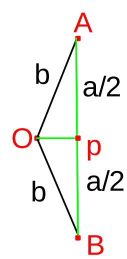
Trazando *OC*, que resulta ser la hipotenusa de los triángulos rectángulos *CAO* y *CBO*, como se muestra en la figura



También se sabe del triángulo que el ángulo $OAC = 90^{\circ}$ y en $ACB = 60^{\circ}$ por ser el triángulo ABC equilátero. Como el ángulo ACB se dividió a la mitad, por lo tanto, el ángulo $ACO = 30^{\circ}$ y el ángulo AOC es 60°.

Pero también se sabe que $AO = OB = \sqrt{3}$

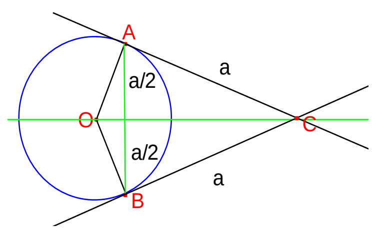
Ahora al trazar el triángulo ABO se tiene



Donde $b = \sqrt{3}$

De lo anterior se sabe que el ángulo AOC es 60° entonces

$a/2 = \sqrt{3} sen 60^{\circ} = 1.5$ por lo tanto $a = 3$



Por lo tanto el área del triángulo AOC será igual a

A_{AOC}= [(*base*) (*altura*)]/2; pero como la altura del triángulo rectángulo AOC es $\sqrt{3}$ y la base es igual a 3 entonces

$$A_{AOC} = \frac{bh}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Y el área del cuadrilátero será buscado

$$A_{AOBC} = \frac{2(3\sqrt{3})}{2} = 3\sqrt{3}$$

Por lo tanto el área buscada será igual a $3\sqrt{3}$

Punto clave para la solución del problema: conocer las características de un triángulo rectángulo y de un triángulo equilátero.

Problema 2

Caminando por mi ciudad hace algunos años, me di cuenta de que llevaba en mi trabajo un cuarto de mi vida. Quizá porque en aquel momento estaba algo desanimado, lo cierto es que inmediatamente me pregunté cuánto tiempo pasaría hasta que hubiese estado en mi trabajo un tercio de mi vida.

Contenido matemático: algebra básica. Para este problema el profesor debería ser capaz de realizar y representar operaciones numéricas que incluyen relaciones de cantidad, análisis de cambios empleando números, letras (variables).

Técnicas de solución:

Solución

Para resolverlo es poner todo en términos de variables

v = vida en años

t = tiempo de trabajo en años

x = tiempo hasta que cumpla un tercio de mi vida en el trabajo

Del problema se sabe que el tiempo de trabajo es un cuarto de la vida, esto se puede escribir de la siguiente manera

$\frac{t}{v} = \frac{1}{4}$ ó $t = \frac{v}{4}$ ....(1)

En el problema se pregunta inmediatamente cuánto tiempo pasaría hasta que hubiese estado en mi trabajo un tercio de mi vida

Lo anterior se puede expresar como

$$\frac{t+x}{v+x}=\frac{1}{3} \text{ ....(2)}$$

Simplificando (2) se tiene

$$t=\frac{v-2x}{3} \text{ ....(3)}$$

Al sustituir (1) en (3) se tiene

$$\frac{v}{4}=\frac{v-2x}{3}$$

Despejando x

$$x=\frac{v}{8}$$

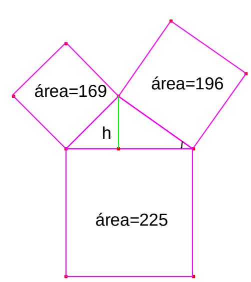
Por lo tanto, el tiempo necesario para que tenga un tercio de mi vida trabajando, es un octavo de mi vida actual.

Punto clave para la solución del problema: Identificar en el problema los tiempos que intervienen para la solución.

En este problema la dificultad radica en la comprensión de los tiempos que intervienen en el problema.

Problema 3

A partir de los lados de un triángulo se construyen 3 cuadrados, como se muestra en la figura, cuyas áreas respectivas son 169, 225, 196 (unidades cuadradas). ¿Cuál es el área del triángulo?



Contenido matemático: Geométrico y algebraico. Es necesario que tenga conocimiento de la ley de cosenos así como de la identidad trigonométrica $sen^2 x + \cos^2 x = 1$. Puede utilizar alguna representación geométrica para facilitar la solución. El profesor debe ser capaz de Identificar la relación que existe entre las áreas que se dan en el problema con los lados del triángulo.

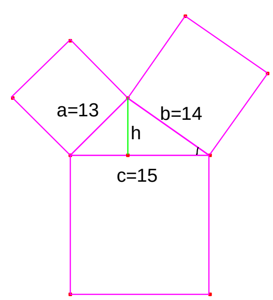
Técnicas de solución:

Solución

Como las áreas de los cuadrados son $LxL = L^2$ y el lado de los cuadrados es igual a los lados del triángulo entonces, se deduce que:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{169} = 13 = a \\ \sqrt{196} = 14 = b \\ \sqrt{225} = 15 = c \end{array}\right\} \text{ lados del triángulo}$$

De lo anterior se tiene que:



Donde h = altura del triángulo y θ es el ángulo entre c y b.

Se Utilizará la ley de los cosenos para determinar el ángulo θ, el cual servirá para determinar la altura h, y con esto encontrar el área del triángulo.

La ley de los cosenos dice que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$$

Despejando el coseno se tiene

$$\cos\theta = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad ....(1)$$

Sustituyendo valores en (1)

$$\cos\theta = \frac{196 + 225 - 169}{(2)(14)(15)} = 0.6$$

De la trigonometría se sabe que

$$\cos^2\theta + sen^2\theta = 1 \quad ....(2)$$

y

$$h = bsen\theta \quad ....(3)$$

Despejando el $sen\theta$ en (2) y sustituyendo el valor del $cos\theta$ se tiene

$$sen^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - 0.36 = 0.64$$

$$sen^2\theta = 0.64$$

$$sen\theta = 0.8$$

Sustituyendo en (3) se tiene

$$h = 14(0.8) = 11.2$$

$$h = 11.2$$

Con la altura se obtiene el área del triángulo

$$A = \frac{(c)(h)}{2}$$

$$A = \frac{(15)(11.2)}{2} = 84$$

Por lo tanto

El área del triángulo es igual a 84 unidades cuadradas

Punto clave para la solución del problema: Resolución de triángulos (Ley de los cosenos) e identidades trigonométricas elemental como es el $sen^2 x + \cos^2 x = 1$.

Si el profesor no conoce o no tiene bien clara la ley de los cosenos y las identidades trigonométricas podría tener dificultades para resolver el problema.

Problema 4

Encuentre todos los valores de x que satisfacen: $(x^2-5x+5)^{x^2-9x+20}=1.$

Contenido matemático: algebra básica. Para este problema el profesor debe conocer las leyes de los exponentes y también la fórmula general para ecuaciones de segundo grado.

Técnicas de solución:

Solución:

$(x^2-5x+5)^{x^2-9x+20}=1$ ....(1)

Para que la expresión (1) se cumpla, se tienen tres casos.

1. Que el exponente sea igual a cero, ya que cualquier número diferente de cero elevado a la cero potencia es igual a uno es decir: $x^0=1;\ \ x\neq 0$

2. Que la base sea igual a 1 ya que 1 elevado a cualquier potencia siempre es igual a 1

$1^n=1$ Donde n es un número real

3. Que la base sea igual a -1 y que el exponente sea un número par ya que -1 elevado a cualquier potencia par también es igual a 1

$-1^{2n}=1$ Donde n es un número entero

De los puntos anteriores se tiene

$x^2-9x+20=0$ ....(2) y $x^2-5x+5\neq 0$

$x^2-5x+5=1$ ....(3) y $x^2-9x+20=n;$ donde n es un número real

$x^2-5x+5=-1$ ....(4) y $x^2-9x+20=2n;$ donde n es un número entero incluyendo $n=0$

Resolviendo la ecuación (2) se obtiene

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{9\pm\sqrt{1}}{2}$$

$$x=\frac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4(1)(20)}}{2(1)}=\frac{9\pm\sqrt{1}}{2}$$

$$x=\frac{9\pm\sqrt{81-80}}{2}=\frac{9\pm\sqrt{1}}{2}$$

$$x=\frac{9\pm1}{2}$$

Por lo tanto

$x=5$ y $x=4$

Resolviendo $x^2-5x+5=0$ para encontrar los valores que no se deben tomar para que se cumpla

$$x^2-5x+5\neq0$$

Resolviendo entonces $x^2-5x+5=0$ se tiene

$$x_1=\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2=\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Donde x_1 y x_2 son los valores que no cumplen la desigualdad $x^2-5x+5\neq0.$ Por lo tanto x puede tomar cualquier valor real excepto $\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$

Resolviendo la ecuación (3) se obtiene

$$x^2-5x+5=1$$

$$x^2-5x+4=0$$

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(1)(4)}}{2(1)}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2}$$

De aquí que

$x = 4$ y $x = 1$

Resolviendo la ecuación (4) se obtiene

$x^2 - 5x + 5 = -1$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

Por lo tanto

$x = 3$ y $x = 2$

Nota: con estos valores de x se obtiene una base igual a -1 y un exponente par

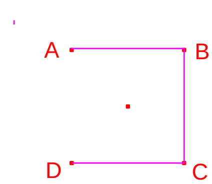
Por lo tanto los valores que satisfacen la expresión son los siguientes

$x = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Punto clave para la solución del problema: Conocimiento y aplicación de las leyes de los exponentes y de la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado.

Problema 5

En un cuadrado ABCD de lado 1 (como se muestra en la figura), la diagonal BD se divide en 4 partes iguales. Tal que DF es una cuarta parte de DB. ¿Cuál es el área del triángulo CFD?

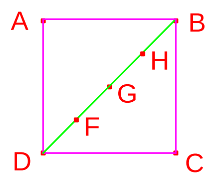


Contenido matemático: algebraico y geométrico (para este problema el profesor debería tener conocimiento de las propiedades de los triángulos, semejanzas y congruencias).

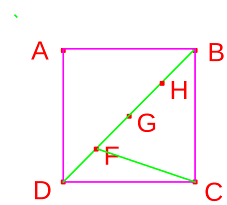
Técnicas de solución:

Solución 1

Solución se dibuja el cuadrado como se pide en el problema y se agregan los puntos *G* y *H* para diferenciar las cuartas partes, como se observa en el siguiente dibujo



Se traza la bisectriz del ángulo *DCB*, la intersección de la recta *DB* y la bisectriz será el punto *G* como se ve en la siguiente figura y que viene siendo el punto medio del segmento *DB*.



Comparando los triángulos formados *CFD* y *CDG*. Si pensamos que tienen sus bases sobre la diagonal BD, vemos que tienen la misma altura, pero la base del primero es la mitad del segundo. Por lo tanto $(CFD)=\frac{1}{2}(CDG)$. Como las diagonales del cuadrado *DB* y *CA* dividen al cuadrado en 4 triángulos congruentes a *CDG*, el área de dicho triángulo es un cuarto del área del cuadrado. Por lo tanto, $\acute{A}rea_{CFD}=\frac{1}{8}=\acute{A}rea_{ABCD}=\frac{1}{8}$.

Solución 2

Se sabe del enunciado del problema que el área del cuadrado de lado la unidad es 1. Por lo tanto la diagonal será $\sqrt{2}$

$$\overline{DB}=\sqrt{2}$$

Por lo tanto $\overline{GD}$ será la mitad de $\overline{DB}$ se tiene entonces

$$\overline{GD}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\overline{CG}$$

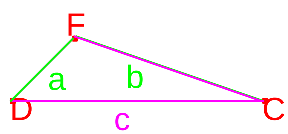
$\overline{DF}$ Será entonces la cuarta parte de $\overline{DB}$ de aquí que

$$\overline{DF} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} = \overline{GF}$$

De lo anterior decimos que

$$\overline{FC} = \sqrt{\left(\overline{CG}\right)^2 + \left(\overline{GF}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{8}}$$

Se construye el triángulo CFD para visualizar



Donde $a = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $b = \sqrt{\frac{5}{8}}$; $c = 1$

Aplicando ley de cosenos

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$ donde θ es el ángulo FCD

Despejando $\cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\frac{5}{8} + 1 - \frac{1}{8}}{2\sqrt{\frac{5}{8}}} = \frac{\frac{3}{2}}{2\sqrt{\frac{5}{8}}} = \frac{3}{4\sqrt{\frac{5}{8}}} = 0.948$$

$\cos\theta = 0.948$

Elevando al cuadro *cos θ*

$$\cos^2\theta = \frac{9}{10}$$

Utilizando la identidad trigonométrica

$\cos^2\theta + sen^2\theta = 1$ ....(1)

Despejando $sen^2\theta$ de (1)

$sen^2\theta = 0.1$

Entonces

$sen\theta = 0.316$

Considerando que h es la altura del triángulo se calcula utilizando la siguiente relación

$$h = \frac{bsen\theta}{2} = 0.24$$

Se sabe que el área de un triángulo es base por la altura entre 2. De la figura se tiene que la *base* = 1 y la altura que es *h* = 0.24, por lo tanto

El área del triángulo $= \frac{(B)(h)}{2}$ donde *B* = *c* = 1

$$Área = \frac{(1)(0.249)}{2} = 0.1245 \approx 1.25$$

$$1.25 = \frac{1}{8}$$

Por lo tanto el área es $\frac{1}{8}$

Solución 3

Sabiendo que el triángulo *DCB* es rectángulo donde *DC=1* es la hipotenusa y *BC=1*, entonces $DB = \frac{\sqrt{2}}{2}CG$, por lo que

$$DG = CG = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2$$

$DC = 1$

De lo anterior, tenemos que

$$CG = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Por lo tanto el área del triángulo *CDF* ($Área\Delta CDF$) será igual

$$Área_{\Delta CDF} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}(\frac{1}{\sqrt{2}})}{2} = \frac{1}{8}$$

Punto clave para la solución del problema: tener conocimiento de como obtener la altura de cualquier triángulo, saber que es una bisectriz y sus características.

Problema 6

En una serie aritmética, la suma de los primeros 50 términos es 200, y la suma de los siguientes 50 términos de la misma serie es 2700. ¿Cuál es el primer término de la serie?

Contenido matemático: Álgebra. Para este problema el profesor debe tener claro lo que es una serie aritmética y cómo se representa, así como conocer la forma de calcular la suma de los primeros n enteros positivos consecutivos.

Técnicas de solución:

Solución

Sea

x = primer término de la serie

a = diferencia entre dos términos consecutivos de la serie aritmética

Como es una serie aritmética, para los primeros *50* términos se tiene

$$x+(x+a)+(x+2a)+...+(x+49a)$$

Que es equivalente a poner

$$50x+(a+2a+3a+...+49a)=50x+a(1+2+3+...+49)$$

$$50x+a(1+2+3+...+49) \quad ....(1)$$

Dado que en (1) a se suma de la siguiente forma

$$a(1+2+3+4+...+49)$$

Aplicando la fórmula para la suma de los primeros *n* enteros consecutivos se tiene

$$\frac{n(n+1)}{2}=\frac{49(50)}{2}=49(25)=1225$$

Entonces

$$a+2a+3a+4a+...+49a=1225a$$

Con lo anterior, entonces se simplifica (1) de la siguiente manera

$$50x+1225a=200 \quad ....(2)$$

Suma de la siguiente suma de la serie

$$x+50a+x+51a+...+x+99a=50x+a(50+51+...+99)$$

$$50x+a(50+50+1+50+2+50+3+...+50+49)=50x+a[((50)(50))+1+2+3+...+49]=50x+3725a$$

$$50x+3725a \quad ....(3)$$

Acomodando (2) y (3) tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$50x+1225a=200 \quad ....(2)$$

$$50x+3725a=2700 \quad ....(3)$$

Resolviendo el sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas

Restando la ecuación (3) a la (2) se tiene

$$2500a=2500$$

Entonces $a=1$ sustituyendo en (3)

Se tiene que $x=-20.5$

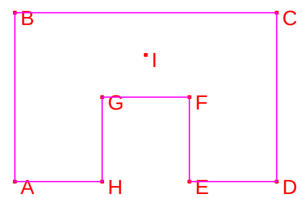
Donde $x=-20.5$ es el primer término de la serie.

Punto clave para la solución del problema: Conocimiento de como representare una serie aritmética, suma de los n primeros enteros positivos y saber establecer sistemas de ecuaciones para resolución de problemas.

Problema 7

En la figura A, B, C y D, son los vértices de un rectángulo; EFGH es un cuadrado;

AH=GF=ED=1; CD = 2; I es equidistante de $\overline{AB}$ *y* $\overline{CD}$*; e I es equidistante de* $\overline{BC}$ *y* $\overline{GF}$*. Si J es un punto seleccionado al azar dentro del polígono ABCDEFGH, ¿Cuál es la probabilidad de que* $\overline{IJ}$ *no esté completamente dentro del polígono?*

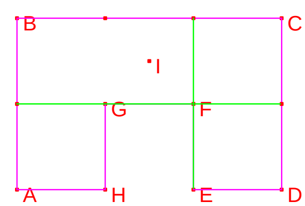


Contenido matemático: geométrico y probabilístico (el profesor debería ser capaz de seccionar en partes iguales el polígono y representar razones de proporcionalidad).

Técnicas de solución:

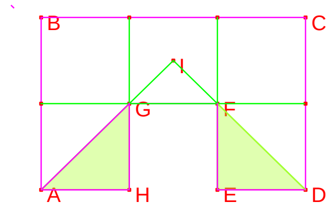
Solución

Empezamos a trazar segmentos de recta para subdividir el polígono, como se muestra en la figura siguiente



Se toma cualquier punto *J* dentro del polígono y se trazan segmentos que vayan de *J* a *I*, de esta manera se empieza a analizar cuando está dentro del polígono el segmento *IJ* completamente y cuando queda fuera.

Se observa que el segmento de recta *IJ* quedará fuera del polígono cuando éste se encuentre dentro del área sombrada que equivale a $\frac{1}{5}$ del área total del polígono. Por lo tanto la probabilidad de que *IJ* no esté completamente dentro del polígono es de $\frac{1}{5}$, como se muestra en la siguiente figura:



Punto clave para la solución del problema: dividir el polígono en partes iguales, y trazar un segmento de recta de I a J e ir moviendo J dentro de todo el polígono.

Problema 8

Dado $2^x = 8^{y+1}$ y $9^y = 3^{x-9}$, encuentre el valor de x e y.

Contenido matemático: algebraico (para este problema el profesor debe tener conocimiento de la ley de los exponentes y de operaciones con logaritmos).

Técnicas de solución:

Solución 1. Utilizando bases iguales

Resolviendo para $2^x = 8^{y+1}$	Resolviendo para $9^y = 3^{x-9}$
Poniendo a 8 en términos de base 8 tenemos $2^x = (2^3)^{y+1}$ Como se sabe que bases iguales tienen exponentes iguales entonces $x = 3(y+1)$ Acomodando términos $x - 3y = 3$ ....(1)	Poniendo a 9 en términos de base 3 tenemos $(3^2)^y = 3^{x-9}$ como sabemos que bases iguales tienen exponentes iguales entonces $2y = x - 9$ Acomodando términos $x - 2y = 9$ ....(2)

Resolviendo el sistema de ecuaciones con dos incógnitas (1) y (2) se tiene

$y = 6$ y $x = 21$

Solución 2. Utilizando logaritmos

Resolveremos simultáneamente ambas ecuaciones, el procedimiento que se sigue es similar para ambas:

ANEXO B

Los vectores utilizados como tecnología para justificar la ley de cosenos

Se sabe que para calcular el lado de un triángulo, dados dos de sus lados (a y b) y el ángulo que forman (θ), para encontrar el lado (c) se puede utilizar la ley de cosenos $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$ Se puede explicar este resultado con ayuda de la tecnología de los vectores. Sean a y b los vectores que forman el triángulo (véase Figura 1), donde $a = (a_1, a_2, a_3)$ y $b = (b_1, b_2, b_3)$. Sea el producto punto definido por $a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ y $a \cdot b = |a||b|\cos\theta.$ Sumando los términos necesarios a la expresión $a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ se obtiene que $a \cdot b = \frac{1}{2}[a_1^2 + a_2^2 + a_3^3 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - (a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2 - (a_3 - b_3)^2]$; simplificando se tiene $a \cdot b = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2 - |a-b|^2)$; despejando $|a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2a \cdot b;$ por lo tanto sustituyendo en la expresión anterior $|a||b|\cos\theta$ por $a \cdot b$ se tiene que $|a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\theta.$ Con lo anterior se puede observar que con ayuda de la tecnología de los vectores se puede justificar la ley de los cosenos para encontrar el lado de un triángulo.

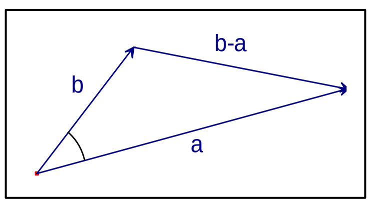


Figura 1. Triángulo

ANEXO C

Protocolo de entrevista

Nota: todas las preguntas planteadas y las respuestas fueron dichas en voz alta.

	Tipo de pregunta	*Ejemplo*
Preguntas generales sobre el entendimiento del problema	El entrevistador debe pedirle al profesor que lea el problema en voz alta y percatarse de que entendió el problema planteado.	¿Entiendes el problema? Si su respuesta es afirmativa; se le pedirá que explique de manera verbal en qué consiste, para saber si tiene claro que es lo que se busca resolver. Si su respuesta es que no, entonces se le pedirá que explique en dónde presenta dificultades que le causan confusión.
	Si el entrevistador nota que es difícil expresarlo verbalmente se le pedirá al docente que lo ejemplifique.	¿Puedes explicarlo apoyándote de algún dibujo?
	El entrevistador debe percatarse de que el profesor identifica todos los datos mencionados en el problema.	¿Qué datos y condiciones tiene el problema? ¿Puedes describirlos? ¿Necesitas alguna información que no se encuentra en el problema? Si o no ¿Cuáles?
Preguntas sobre las estrategias utilizadas	El entrevistador debe pedir al profesor que explique cuál fue el ó los procedimientos que siguió y que justifique por qué los utilizó.	¿Cuál fue la primera idea que se te ocurrió para resolver el problema? Una vez pensada la idea ¿Continuaste con ella o la descartaste? Si su respuesta es que la descartó ¿Cuál fueron tus razones?
	El entrevistador debe asegurarse si el procedimiento que el profesor utilizó es el único que pudo llevarlo a la solución del problema o pudo haberlo resuelto de diferente manera.	¿Puedes explicarme el o los procedimientos que seguiste? ¿Por qué utilizas ese o esos procedimientos?
	El entrevistador debe tener claro si el profesor sólo utilizó una técnica por falta de tiempo, porque es la solución más elegante, porque es la única que conoce etc. Aquí el docente tiene que manifestar sus motivos.	Para resolver el problema ¿Qué método utilizas, algebraico, geométrico, ambos u otros, haces uso de calculadora o sólo de papel y lápiz? Si sólo utilizó un método preguntarle si cree que sea el único o existen otras maneras de resolver el problema y si recuerda alguna otra.
	Si el entrevistador nota que el profesor dejó un problema incompleto, preguntar cuáles fueron sus razones.	¿Por qué te atoraste o dejaste incompleto el problema? ¿Tenías idea de cómo abordarlo, pero no recordabas alguna fórmula, teorema, etc. y eso impidió que continuaras?
	El entrevistador debe preguntar al profesor si recordó algún problema semejante para apoyarse y resolverlo o es un problema totalmente nuevo.	¿Habías ya resuelto un problema semejante o es totalmente novedoso para ti?
	Preguntar cuáles fueron los elementos matemáticos que utilizó (Teoremas, fórmulas, procedimientos, etc.).	¿De qué recursos matemáticos te apoyaste para resolverlo?
Preguntas sobre la solución y verificación del problema	El entrevistador debe preguntar sobre la solución y verificación del problema.	Si utiliza varios procedimientos, preguntar: ¿Llegaste al mismo resultado con los diferentes procedimientos? Si es no ¿a qué crees que se deba? ¿Estás seguro de que es la respuesta correcta al problema? Si no ¿Por qué? ¿Verificaste tu respuesta? ¿Crees que es importante verificar la respuesta? ¿Por qué?

Preguntas particulares para cada problema

	Tipo de pregunta	*Ejemplo*
Preguntas para el problema 1	De aclaración: para ayudar a los docentes, si es el caso, a entender esta pregunta, el entrevistador puede intervenir con preguntas como:	¿Qué elementos requieres para determinar el área de un triángulo? ¿Con qué datos cuentas y qué datos son los que te hacen falta? ¿Qué podrías utilizar para encontrar las incógnitas? ¿Cómo y por qué nombras de esa manera a las variables?
Preguntas para el problema 2	De aclaración: para ayudar a los docentes, si es el caso, a entender esta pregunta, el entrevistador puede intervenir con preguntas como:	Como no tienes datos ¿crees que sea necesario poner las incógnitas en términos de variables? ¿Cómo podrías escribir el tiempo de trabajo igual a un cuarto de tu vida? ¿Cómo podrías escribir el tiempo que transcurre hasta que hubieses estado en tu trabajo un tercio de tu vida? ¿Cómo y por qué nombras de esa manera a las variables?
Preguntas para el problema 3	De aclaración: para ayudar a los docentes, si es el caso, a entender esta pregunta, el entrevistador puede intervenir con preguntas como:	¿Recuerdas las leyes de los exponentes? ¿Qué condiciones consideras que debe cumplir el problema para que la ecuación sea igual a 1? ¿Recuerdas cómo resolver una ecuación de segundo grado?
Preguntas para el problema 4	De aclaración: para ayudar a los docentes, si es el caso, a entender esta pregunta, el entrevistador puede intervenir con preguntas como:	¿Sabes cómo representar una serie aritmética? ¿Cómo calcularías la suma consecutiva de los primeros n enteros positivos? ¿Qué significan las variables que estas utilizando?
Preguntas para el problema 5	De aclaración: para ayudar a los docentes, si es el caso, a entender esta pregunta, el entrevistador puede intervenir con preguntas como:	¿Recuerdas las leyes de los exponentes? ¿Crees que te pueda servir para resolver el problema? ¿Qué ocurre cuando las bases son iguales?
Preguntas para el problema 6	De aclaración: para ayudar a los docentes, si es el caso, a entender esta pregunta, el entrevistador puede intervenir con preguntas como:	Con los datos que te da el problema ¿Puedes calcular la diagonal de cuadrado? ¿Para qué te serviría?
Preguntas para el problema 7	De aclaración: para ayudar a los docentes, si es el caso, a entender esta preguntas, el entrevistador puede intervenir con preguntas como:	¿Consideras que bisectar el ángulo C te serviría para empezar a resolver el problema? ¿Qué sentido tendría bisectar el ángulo C? ¿Qué podrías conocer?
Preguntas para el problema 8	De aclaración: para ayudar a los docentes, si es el caso, a entender esta pregunta, el entrevistador puede intervenir con preguntas como:	¿Cómo te pueden servir las medidas que te dan del polígono? ¿Cuál es la finalidad? ¿Tendría sentido utilizarlas? ¿Cómo las utilizarías?