



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS  
AVANZADOS DEL IPN

Unidad Distrito Federal

Departamento de Matemática Educativa

Niveles de Razonamiento Probabilístico ante una Situación Binomial por  
Estudiantes de Bachillerato

Tesis que presenta

Miguel Napoleón Medina Delgado

Para obtener el Grado de  
Maestro en Ciencias  
Especialidad Matemática Educativa

Director: Dr. Ernesto Sánchez Sánchez

## TABLA DE CONTENIDO

	Página
INTRODUCCIÓN	1
1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	4
1.1 Introducción	4
1.2 Planteamiento del problema	4
1.3 Objetivo	5
1.4 Preguntas de investigación	6
2. REVISIÓN DE LA LITERATURA	8
2.1 Introducción	8
2.2 Estudios sobre Aleatoriedad	8
2.3 Estudios sobre Variabilidad	10
2.4 Estudios sobre Distribución	12
2.5 Estudios sobre Espacio muestral	19
2.6 Estudios sobre Inferencia Informal	20
2.7 Estudios con estudiantes de nivel medio superior y superior	23
3. MARCO CONCEPTUAL DE TRABAJO	24
3.1 Introducción	24
3.2 Contenido probabilístico y estadístico	24
3.2.1 Aleatoriedad	24
3.2.2 Variabilidad y variación	25
3.2.3 Modelo de probabilidad (Espacio muestral, eventos, probabilidad)	25
3.2.4 Distribución y variable aleatoria	26
3.2.5 Inferencia Estadística Informal (IEI) y Razonamiento Inferencial Informal (RII)	27
3.3 Un modelo de desarrollo cognitivo	29
4. METODOLOGÍA	31
4.1 Introducción	31
4.2 Participantes	31
4.3 Instrumento	31

4.4	Procedimientos	32
5.	PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LOS DATOS	33
5.1	Introducción	33
5.2	Informe de la Pregunta inicial	33
5.3	Informe de la Pregunta 1	42
5.4	Informe de la Pregunta 2	49
5.5	Informe de la Pregunta 3	55
5.6	Informe de la Pregunta 4	61
5.7	Informe de la Pregunta 5	67
5.8	Informe de la Pregunta 6	73
5.9	Informe de la Pregunta 7	84
5.10	Informe de la Pregunta 8	90
5.11	Informe de la Pregunta 9	102
5.12	Informe de la Pregunta 10	112
5.13	Informe de la Pregunta 11	118
5.14	Informe de la Pregunta 12	124
5.15	Informe de la Pregunta 13	130
6.	CONCLUSIONES	136
6.1	Introducción	136
6.2	Sentido de aleatoriedad y variabilidad	136
6.3	Interpretación de la distribución	137
6.4	Valores de la variable aleatoria y espacio muestral	138
6.5	Inferencias estadísticas informales	140
6.6	Aporte de la investigación	140
6.7	Propuesta para el aula	141
7.	Anexo	143
8.	Referencias bibliográficas	147

Agradezco al CONACYT, por el apoyo económico brindado para realizar mis estudios de Maestría.

## **Agradecimientos**

Un especial agradecimiento a mi asesor el Dr. Ernesto Sánchez por su invaluable apoyo, consejos y enseñanzas que me brindó para realizar este trabajo; pero sobre todo por su excelente calidad como ser humano.

A mis sinodales, Dra. Claudia Acuña y Dr. Miguel Mercado que por su tiempo, recomendaciones y comentarios ayudaron a mejorar esta tesis.

A Jaime García por su gran ayuda para la realización del trabajo.

A mis profesores por su dedicación e incansable labor al transmitirme sus conocimientos.

A Adriana Parra y Norma Cruz por su excelente atención y trato siempre que recurrí a ellas.

A mis compañeros de generación por los momentos que pasamos juntos.

A mis padres, Miguel y Rita por su apoyo incondicional en todos sentidos para la culminación de este trabajo.

A mi esposa Elizabeth por las palabras de aliento para comenzar estos estudios, y por el ánimo durante todo el camino.

A mi hija Michelle por su amor y paciencia.

*A mis padres por su ejemplo*

*A mi esposa por su amor*

*A mi hija por ser la luz de mi vida*

## Resumen

El presente trabajo de investigación explora los razonamientos probabilísticos y las conjeturas que realizan estudiantes de nivel bachillerato cuando enfrentan una tarea que involucra la versión más simple de la distribución binomial ( $n=2$ ,  $p=1/2$ ). Se tuvo en cuenta tanto para el diseño de la actividad como en el análisis de las respuestas, la presencia de conceptos de suma importancia en la Probabilidad y Estadística, como son: la *aleatoriedad* y *variabilidad*, *distribución*, *variable aleatoria*, *espacio muestral* e *inferencias informales*. El objetivo principal es proponer una jerarquía de razonamiento con base en la taxonomía SOLO (Bigg y Collis, 1982) y en el análisis de las respuestas de los estudiantes.

La tarea propuesta formula mediante un *test* diagnóstico de 14 preguntas, la cual lleva por nombre *¡A LA SUERTE!*, y se administró a un grupo de 46 estudiantes de nivel medio superior (bachillerato) que cursaban el primer año escolar en el Colegio de Ciencias y Humanidades Plantel Vallejo, de la UNAM. Los estudiantes no contaban con antecedentes o preparación alguna respecto a los contenidos de la asignatura. Sus respuestas se a cada pregunta se transcribieron y clasificaron en los niveles preestructural, uniestructural, multiestructural, relacional y abstracto extendido de acuerdo a la presencia de componentes de conocimiento y sus relaciones.

En las conclusiones se describen características presentes en las respuestas de los estudiantes a la tarea, organizadas en cuatro aspectos del razonamiento probabilístico, a saber: 1) El sentido de aleatoriedad y variabilidad, 2) La interpretación de la distribución, 3) Los valores de la variable aleatoria y la percepción del espacio muestral y 4) La inferencias probabilísticas informales. Para cada una de los anteriores aspectos, se proponen varios descriptores de los cinco niveles de razonamiento que conforman la jerarquía correspondiente.

## **Abstract**

This work of research explore the probabilistic reasoning as well as the conjectures formulated by high-school students when they face a task involving the simplest version of the BINOMIAL DISTRIBUTION ( $n=2$ ,  $p=1/2$ ). The concepts of randomness and variability, distribution, random variable, sample space and informal inferences, all of which are of great importance in probability and statistics, were considered for both the design of the activity and the analysis of the answers. The main objective is to propose a hierarchy of reasoning based on the SOLO taxonomy (Bigg & Collis, 1982) and on the analysis of the answers given by the students.

The proposed task is formulated through a diagnosis test of 14 questions and it is named BY CHANCE! It was administered to a group of 46 students in their first year of high-school at Colegio de Ciencias y Humanidades - Plantel Vallejo, UNAM. None of the students had previous knowledge or any preparation on the contents of the subject. Their answers to each question were transcribed and classified according to the presence of knowledge components and their relationship into five levels: pre-structural, unistructural, multistructural, relational, and extended abstract.

In the conclusions, the characteristics in the answers provided by the students are described and organized according to the four aspects of probabilistic reasoning: 1) the sense of randomness and variability; 2) the interpretation of distribution; 3) the range of the random variable and the perception of the sample space; and 4) the informal statistical inferences. For each of these aspects several descriptions of the five levels of reasoning which compose the corresponding hierarchy are proposed.



## **Introducción**

En el programa oficial de Probabilidad y Estadística de nivel bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM se incorporan contenidos obligatorios de estas dos disciplinas; sin embargo, en la práctica, las temáticas y estrategias de enseñanza – aprendizaje propuestas se enfocan en la identificación de conceptos desde el punto de vista formal, o en el uso y manipulación de modelos desde una perspectiva puramente aritmética. Estos enfoques, lejos de favorecer la adecuada apropiación de los principios de la Probabilidad y Estadística, origina en los estudiantes equivocadas nociones que incluso se conservan más allá de las aulas, en sus futuros ambientes laborales y en su vida diaria.

En diversos trabajos de investigación se han explorado los conceptos de *aleatoriedad*, *variabilidad*, *distribución*, y en menor número, los relacionados con *variable aleatoria* y *espacio muestral*; no obstante, es necesario que se analicen estas nociones desde la perspectiva del Razonamiento Inferencial Informal (RII), que Pfannkuch (2006) define como la habilidad de interconectar ideas de distribución, muestreo y centro, dentro de un ciclo de razonamiento empírico. En este caso, el análisis del RII de los estudiantes se lleva a cabo teniendo en cuenta dos componentes características de la Inferencia Estadística Informal (IEI), seleccionadas del trabajo de Makar y Rubin (2009):

- 1) Conclusión más allá de los datos. Hacer juicios, afirmaciones, o predicciones acerca de la población (en este caso la población es la distribución), pero sin los procedimientos y métodos estadísticos formales.
- 2) Uso de datos como evidencia. Aquí se pretende observar la explicación, es decir, la articulación de argumentos y justificaciones para hacer los juicios, afirmaciones, o predicciones sobre la población (distribución).

En este trabajo de tesis, para identificar la apropiación de algunas de las ideas y nociones anteriores, se utilizó como instrumento un test diagnóstico (ver Anexo). Además, se analizaron los resultados mediante un modelo de evaluación que permite valorar el nivel de razonamiento probabilístico de los alumnos cuando se encuentran ante una situación de

incertidumbre. El modelo taxonómico SOLO (Structure of the Observed Learning Outcome) desarrollado por Bigg y Collis (1991) permite clasificar las respuestas de los estudiantes según su nivel estructural.

En concreto, la actividad consistió en un test diagnóstico de nombre *¡A LA SUERTE!*, el cual cuenta con catorce preguntas sobre predicciones y argumentaciones de frecuencias asociadas a la posesión del control de un televisor por parte de los miembros de una familia (Ana, Beto y Carlos), vía un sorteo generado por el lanzamiento de dos monedas, en el que subyace una distribución binomial simple ( $n=2$ ,  $p=1/2$ ,  $X$ =número de águilas). La asignación del control remoto descansa en el éxito de cada participante al obtener en los volados un número determinado de águilas: 0 para Ana, 1 para Beto y 2 para Carlos. Las predicciones por parte de los estudiantes se realizan de manera hipotética, tabular o gráfica para diferentes periodos de tiempo –corto, mediano y largo plazo-, además de argumentar y justificar dichas predicciones. Con esta tarea se pretende conocer y evaluar la noción de los estudiantes acerca de los conceptos ya mencionados: *aleatoriedad, variabilidad, distribución, variable aleatoria y espacio muestral*. Así mismo, la capacidad de realizar inferencias estadísticas informales como una generalización probabilística (no determinista) de datos (Makar y Rubin, 2009); en este sentido, se está considerando que las IEI se representan mediante enunciados, mientras que el RII es el proceso que hay detrás de las afirmaciones presentes en esos enunciados.

Este trabajo de tesis está organizado en seis capítulos. El primer capítulo consiste en el planteamiento del problema de investigación, así como en un panorama del contexto en el cual se formularon los objetivos y las preguntas de investigación. En el segundo, se revisará la literatura y trabajos de investigación que sirven como antecedentes necesarios para este estudio. El tercero, cuenta con las bases y fundamentos de esta investigación, mediante su ubicación dentro de un marco conceptual de trabajo, donde se presentan las ideas y contenidos fundamentales de la Probabilidad y Estadística, que sirvieron de cimiento a esta tesis, así como un modelo de desarrollo cognitivo. En el cuarto se ofrece un cuadro general de la metodología utilizada en este estudio, en el que se especifican los participantes de la actividad, los instrumentos utilizados para hacerse de datos y la manera en que se procedió

a su análisis. El análisis de los resultados se encuentra en el capítulo cinco, tomando como base la taxonomía SOLO ya mencionada. Por último, en el sexto se presentan las conclusiones finales del estudio, así como algunas aportaciones de la investigación y una propuesta básica de aprendizaje para el aula.

## **Capítulo 1. Problema de Investigación**

### **1.1 Introducción**

En este capítulo se introduce el planteamiento del problema para ubicar el contexto en el cual formular el objetivo y la pregunta de investigación del trabajo. Inicialmente se plantea la importancia del razonamiento probabilístico de los estudiantes, a continuación se especifica el objetivo general, y finalmente se presentan las preguntas que dieron origen a nuestra investigación.

### **1.2 Planteamiento del Problema**

La probabilidad es un tema de las matemáticas y de la estadística cuya importancia ha venido creciendo en los últimos años. El estudio de temas de probabilidad se prescribe en los programas de bachillerato dentro del curso de Probabilidad y Estadística, 5° y 6° semestre (asignatura de carácter optativa). Por otro lado, algunos autores consideran que un ciudadano educado debe saber probabilidad para entender muchos de los fenómenos que ocurren en la vida moderna. Por ejemplo, Gal (2004) considera que un buen manejo de probabilidad debe ser parte de las competencias que debe poseer una persona adulta. Aunque la enseñanza de la probabilidad ha estado presente en los currículos escolares de México (y del mundo) desde hace más de 40 años, durante la mayoría de ese tiempo se recomendaba un enfoque formal (los argumentos y razonamientos utilizan un lenguaje formal o simbólico, como el utilizado dentro de la escuela producto de la enseñanza formal). Aún hoy, en el nivel bachillerato sigue predominando esta idea; resulta entonces importante explorar nuevas perspectivas en el bachillerato.

Batanero (2001) menciona que cuando se sugiere introducir un nuevo enfoque en la enseñanza de la probabilidad y/o la estadística es necesario estudiar los niveles de razonamiento de los estudiantes con el fin de evaluar las condiciones desde las que hay que partir para desarrollar el nuevo rumbo a seguir, así como para detectar las creencias y falsas concepciones que se deben tener en cuenta y combatir. Los estudiantes de bachillerato

llegan a los cursos de estadística y probabilidad con conocimientos, creencias y concepciones acerca de la probabilidad. Los estudiantes aprenden no sólo en el aula, sino en su entorno social y familiar y los nuevos conceptos que aprenden en la escuela deben tener en cuenta esta circunstancia. El presente es un estudio exploratorio con el propósito de informarse acerca del razonamiento informal de los estudiantes.

Este trabajo es la continuación de un trabajo presentado en la tesis de Maestría de Edgar Jaimes Carvajal cuyo título es: *Niveles de Razonamiento Probabilístico con énfasis en la Noción de Distribución de Estudiantes de Secundaria en Tareas de Experimentación y Simulación Computacional*. En dicho trabajo se formularon las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cómo podrían desarrollar los estudiantes la comprensión de la ley de los grandes números con ayuda de la noción de distribución en un ambiente de aprendizaje con tecnología?
- ¿Cómo evaluar las respuestas de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas de interpretación, predicción, argumentación y proposición?
- ¿Cómo evaluar el diseño de instrucción basado en un ambiente de aprendizaje probabilístico?

Como se observa, en dicho trabajo el énfasis se puso en la creación de ambientes de enseñanza en los cuales desarrollar la *ley de los grandes números* con ayuda de tecnología. Después de estudiar este trabajo se notó que el instrumento utilizado también era conveniente para mirar el razonamiento de los estudiantes no tanto en la ley de los grandes números sino en otras nociones que juegan un papel importante como las de *variabilidad* y *distribución*.

### **1.3 Objetivo**

En este trabajo se reelaboró el instrumento utilizado por Jaimes (2011), que consistía en un test diagnóstico de catorce preguntas, y dos actividades de experimentación, física y

computacional. Se eliminaron algunas partes de su instrumento y se reformularon algunas preguntas. Los objetivos fueron los siguientes:

- Explorar la percepción de la aleatoriedad y variabilidad de los estudiantes de bachillerato expresada por ellos en sus respuestas a una tarea de probabilidad en la que subyace una distribución binomial simple ( $n=2$ ,  $p=1/2$ ,  $X$ =numero de águilas).
- Explorar la forma en que los estudiantes determinan informalmente la distribución binomial a partir del análisis de la situación problema.
- Observar cómo los estudiantes relacionan los valores de una la variable aleatoria binomial mencionada con el espacio muestral del modelo probabilístico de la situación.
- Enmarcar los razonamientos de los estudiantes como parte del desarrollo de su razonamiento inferencial informal, es decir, dar cuenta de los razonamientos informales que les permiten avanzar en la solución del problema y en las respuestas de las preguntas.

#### **1.4 Pregunta de investigación**

Con base en la problemática planteada y el objetivo general de explorar los niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato, se establecen las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Qué papel juega la aleatoriedad y la variabilidad en el razonamiento de los estudiantes cuando enfrentan una situación de probabilidad?

Esta pregunta tiene la intención de observar hasta qué punto los estudiantes en una situación informal expresan sus ideas de aleatoriedad y variabilidad. Las preguntas de predicción logran detectar algunas de las ideas de los estudiantes sobre estos aspectos. Por ejemplo, si se les pide que describan o inventen una secuencia aleatoria, los rasgos que se puedan identificar en la secuencia dada indicarán si consideran la aleatoriedad o no.

2. ¿Los estudiantes identifican la distribución que modela la situación y realizan inferencias estadísticas informales del fenómeno a largo plazo?

Al estudiar una situación de incertidumbre surgen factores como la aleatoriedad –los fenómenos que tienen resultados individuales impredecibles pero que presentan un patrón regular cuando se realizan muchas repeticiones (Moore, 1990)– y la variabilidad –una característica, propensa a variar, de una entidad observable (Reading y Shaughnessy, 2004) – estos elementos deben reflejarse en la distribución asociada a tal situación, al mismo tiempo una buena interpretación de la distribución permitirá realizar inferencias a largo plazo acerca del fenómeno probabilístico. En este sentido, en las actividades de aprendizaje deben incorporarse preguntas que involucren asignaciones de distintas frecuencias a través del tiempo, para favorecer la apropiación del concepto de distribución.

3. ¿Los estudiantes identifican los valores de la variable aleatoria y los elementos individuales del espacio muestral, y logran relacionarlos de manera adecuada?

Ante un fenómeno sujeto al azar, los estudiantes deben generar el conjunto de elementos individuales que forman el espacio muestral asociado al fenómeno, al mismo tiempo es importante que identifiquen el valor numérico que se asigna a cada evento de este espacio muestral, es decir, los valores de la variable aleatoria. Una adecuada relación entre estos dos conceptos, favorecerá la determinación de la distribución de probabilidad. Por tales motivos se deben presentar cuestionamientos que generen estos razonamientos en los estudiantes.

4. ¿Qué inferencias estadísticas informales realizan los estudiantes al enfrentarse a la situación-problema?

Una verdadera comprensión de los conceptos de *aleatoriedad*, *variabilidad*, *distribución*, *variable aleatoria* y *espacio muestral*, deberá propiciar inferencias estadísticas informales adecuadas cuando se les presenta a los estudiantes una situación-problema como estrategia de aprendizaje de los contenidos de Probabilidad y Estadística en el salón de clase. Con la actividad presentada en esta investigación se pretende estudiar y generar los razonamientos informales a partir de una situación de incertidumbre.

## **Capítulo 2. Revisión de la Literatura**

### **2.1 Introducción**

En el presente capítulo se mostrarán algunos trabajos de investigación que analizan el comportamiento de los estudiantes frente a situaciones de aleatoriedad, variabilidad, distribución, espacio muestral e inferencial informal.

### **2.2 Estudios sobre Aleatoriedad**

En el estudio de la probabilidad el concepto de aleatoriedad es fundamental, por lo que se considera necesario que los estudiantes se acerquen a una comprensión de este concepto para avanzar en el campo del cálculo de probabilidades (Batanero, Serrano y Green, 1998). No obstante su importancia, es poco lo que se trabaja sobre la aleatoriedad en la enseñanza pues, por un lado la percepción de la aleatoriedad parece ser algo que se presenta espontáneamente, pero por otro, formular y entender proposiciones acerca de la aleatoriedad ofrece grandes dificultades. Es por esto que se reconoce que la aleatoriedad es un concepto muy complejo, por lo que ha sido objeto de estudios epistemológicos y psicológicos que permiten desvelar sus características y relaciones (Batanero y Serrano, 1995). En esta sección se mencionan algunos de esos estudios.

Las primeras investigaciones ampliamente conocidas sobre aleatoriedad se deben a Piaget e Inhelder (1951). Caracterizan a la aleatoriedad en el mundo físico, como los resultados inesperados producidos por la interacción de múltiples procesos causales independientes. La adquisición de la noción de azar y aleatoriedad por parte del niño presupone las nociones de interacción e independencia, además de la percepción de que los fenómenos aleatorios son diferentes (de hecho complementarios) a los fenómenos descritos por relaciones de causa-efecto. Una comprensión de las interacciones presupone razonamientos combinatorios. Todo lo anterior, los lleva a afirmar que es sólo después de que son capaces de entender relaciones de causa-efecto y combinatorias que podrán aprender probabilidad;



por tanto, ubican que esto se produce en la etapa de las operaciones formales (mayores de 14 años).

Estos resultados han sido cuestionados por Fischbein (1975), quien considera que, la intuición primaria del azar, es decir, la distinción entre fenómeno determinista y aleatorio sin instrucción previa, está presente en la conducta diaria de cada niño, incluso antes de la edad de 7 años. El azar es equivalente a no-predictibilidad y cuando el número de posibilidades es pequeño el niño de preescolar razona correctamente. Fischbein afirma que la síntesis entre lo formal y lo deducible no se realiza espontánea y completamente al nivel de las operaciones formales, sino que surgen influenciados por el medio social, en particular la educación juega un papel crucial.

Más recientemente Metz (1998) indica que las principales dificultades que los conceptos de azar y aleatoriedad presentan a los estudiantes son: a) fallos al interpretar los patrones resultantes de muchas repeticiones de un suceso; b) la ocurrencia de que una persona o dispositivo puede controlar un suceso y c) la creencia de que algún tipo de orden o propósito subyace a los sucesos.

Desde el enfoque subjetivo de la probabilidad, según Hawkins, Jolliffe y Glickman (1992) muchas personas creen que los ejemplos más apropiados de la aleatoriedad son los “resultados desordenados”. Estos sesgos en la percepción subjetiva de la aleatoriedad se muestran en la tesis de Serrano (1996), quien encuentra que los alumnos comprenden bien las tendencias en las secuencias de resultados aleatorios, pero no perciben la variabilidad intrínseca de los mismos, o al menos la subestiman.

Los experimentos aleatorios tienen dos características importantes, la primera es su no-predictibilidad; que es bien reconocida por los sujetos como ha quedado de manifiesto en investigaciones con niños pequeños (Green, 1982, 1989, 1991), con alumnos de secundaria (Toohey, 1995; Serrano, 1996) y adultos (Falk, 1981). La segunda característica es la repetitividad de los experimentos aleatorios, que como afirman Batanero y Serrano (1995), un experimento aleatorio sólo tiene interés para el cálculo de probabilidades si es posible, al

menos imaginariamente, repetirlo en idénticas condiciones. Steinbring (1991) indica que, desde el punto de vista formal, la idea central del concepto de azar es la de sucesión de resultados de un mismo experimento realizado de forma repetida e independientemente. En la exigencia de repetitividad del experimento se halla implícita la concepción frecuencial de probabilidad (Fine, 1973).

La aleatoriedad, según Zabell (1992), contiene ideas distintas, que se refieren al proceso de generación de los resultados aleatorios, a cada resultado aislado y al patrón obtenido en una serie de resultados de dicho proceso. El proceso de generación es lo que denominamos experimento aleatorio; los posibles resultados de este proceso son los sucesos aleatorios y la sucesión obtenida en una serie de ensayos particulares es lo que conocemos como secuencia aleatoria. Aunque parezca que estos aspectos están relacionados, esto no es siempre así. Un ejemplo son los números pseudoaleatorios producidos por calculadoras y ordenadores usando algoritmos deterministas, pero que se toman como aleatorios en las aplicaciones estadísticas.

Konold y cols. (1991) consideran que el término “aleatoriedad” se puede ver como una familia de conceptos, que incluye la idea de experimento, suceso, espacio muestral, probabilidad, etc. Por ello, la aleatoriedad la podemos percibir como un modelo abstracto que se puede aplicar a situaciones muy variadas.

### **2.3 Estudios sobre Variabilidad**

En el modelo de pensamiento científico de Wild & Pfannkuch (1999) se pone de relieve el papel central que la variación y las causas de la variación tienen en el pensamiento estadístico. Estos autores afirman que la variación es la razón de ser de la estadística, sin variación no habría necesidad de estadística. Konold & Higgins (2003) después de destacar que los estudiantes tienen contacto constante con fenómenos variables, señalan que el punto fundamental en la descripción y análisis de datos es medir la variabilidad:

*Anticipar y observar la variabilidad dentro de un grupo no es difícil. Lo que es difícil es lograr cuantificar la variabilidad y percibir y caracterizar a un grupo como un todo cuando los individuos en el grupo difieren uno de otro. (p. 202)*

Shaughnessy (2003), incluye en su artículo sobre investigación sobre la comprensión de los estudiantes de la probabilidad, cinco “pensamientos” sobre su enseñanza, el tercero es el siguiente:

*Hacer conexiones entre probabilidad y estadística. En particular, conectar la noción del espacio muestral en probabilidad con el concepto de variación en estadística (p. 224)*

Moore (1990) propuso cinco ideas fundamentales de la estadística y encabezando su lista consideró a la variación, señalando que el pensamiento estadístico es ante todo conciencia de la variabilidad.

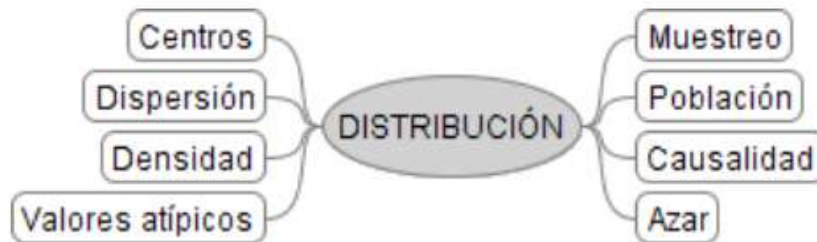
Las anteriores observaciones sugieren que los conceptos relacionados con la variabilidad son fundamentales para la estadística, sin embargo, como Shaughnessy (1997) observó, en la literatura de investigación no había habido informes que dieran cuenta de la comprensión de los estudiantes sobre las nociones de dispersión y variabilidad.

Como hemos señalado, la situación ha comenzado a cambiar en los últimos años y actualmente podemos observar un incipiente pero robusto interés de los educadores estadísticos por estudiar la variabilidad, sobre todo en Estados Unidos, Inglaterra y Australia. Los autores de estos países están interesados en acumular experiencias y conocimientos que les permitan hacer sugerencias para modificar y enriquecer sus respectivos currículos nacionales. Actualmente no es tarde para que México también haga aportaciones a nivel internacional de conocimientos sobre este tópico y, a su vez, se desarrollen aquí los elementos que permitan intervenir en el currículo mexicano, que dicho sea de paso, está actualmente en un proceso de reforma. El desarrollo del presente proyecto tiene el objetivo de colaborar para que México participe en esta línea de investigación.

## 2.4 Estudios sobre Distribución

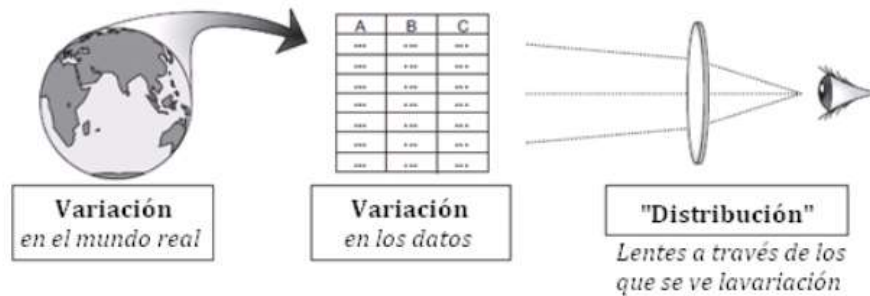
Pfannkuch y Reading (2006) sugieren que la discusión acerca de la naturaleza de las distribuciones involucra dos aspectos, uno *conceptual* y otro *operacional*. El primero consistiría en clarificar las nociones en las que se basa el concepto de distribución y por qué esas nociones son importantes; el segundo, sobre el proceso de recoger datos, presentarlos y manipularlos a través de las distribuciones.

*“Razonar sobre distribuciones involucra interpretar una estructura compleja que no sólo incluye el razonamiento acerca de las características como medidas de tendencia central, dispersión, densidad, curtosis y valores atípicos (outliers), sino que también involucra otras ideas como la de muestreo, población, causalidad y azar. Estas otras ideas llevan a conectar datos empíricos con nociones probabilísticas, lo que lleva naturalmente a desarrollar los conceptos de distribuciones teóricas y distribuciones empíricas” (p. 4).*



Mapa conceptual de la noción de distribución

Pfannkuch y Reading (2006) revelan que la comunidad de educadores estadísticos actualmente están tratando de entender y responder las preguntas ¿Cómo razonan los estudiantes sobre las nociones de variación y distribución estadística? ¿Cómo se desarrollan esos dos tipos de razonamiento? Y es que – argumentan – *“la variación está en el corazón del pensamiento estadístico; pero el razonamiento sobre la variación sólo es posible a través de su representación en diagramas o gráficas que ‘representan intuitivamente la realidad original vía la intervención de una estructura conceptual’ tales como gráficas y diagramas de frecuencias de datos” (p. 4).*



En la literatura revisada, se han encontrado pocos estudios empíricos de investigación sobre enseñanza-aprendizaje de la distribución binomial en bachillerato; en contraste, son más frecuentes las propuestas de enseñanza o lecciones en las que se introduce o sugiere el uso de esta distribución (e.g., Rouncefield, 1990; Gross, 2000; Chalikias, 2009). Dentro de las investigaciones teóricas relacionadas con el aprendizaje de la binomial se menciona el trabajo de Steinbring (1984) y Pluvinage (2005); entre las investigaciones empíricas vinculadas con el tema y estudiantes de nivel medio superior o universitarios, están las de Kahneman y Tversky (1972), Tversky y Kahneman (1982), Fischbein y Schnarch (1997), Colín (1998), Van Dooren, De Bock, Depaepe, Janssens y Verschaffel (2003), Alvarado y Batanero (2006), Abrahamson (2009), Bill, Watson y Gayton (2009) y Maxara y Biehler (2010). A continuación se exponen brevemente algunas ideas de estos estudios.

Steinbring (1984) plantea una epistemología educacional, de acuerdo con la cual deberían ser detallados marcos de desarrollo para los conceptos de la matemática escolar; es decir, deberían ser construidos sistemas apropiados de medios de actividad y representación que requieran una interacción de elementos teóricos y experimentales. En el caso del concepto de probabilidad (el cual incluye dentro de los conceptos fundamentales de la educación en los grados 1-10), Steinbring considera que la educación matemática general no debe estar basada sólo en una interpretación particular de dicho concepto sino que, su caracterización dual (la experimental, que considera la probabilidad como un valor estimado con base en la frecuencia relativa; y la teórica, en que la probabilidad es determinada por una porción relativa) llega a ser útil para la adquisición del concepto. También señala:

El concepto emerge desde el involucramiento activo del sujeto con la relación entre el objeto y el signo matemático, en la aplicación mutua de la definición matemática respectiva y el caso concreto de aplicación. Para el concepto de probabilidad, los medios de representación [como el diagrama de árbol] median entre la situación aleatoria concreta y el modelo matemático (pp. 76-77).

Finalmente, Steinbring (1984) menciona la máquina de Galton (quineux) o tablero de probabilidad, como un recurso que sirve para ejemplificar estas consideraciones, por su doble rol de ser al mismo tiempo modelo estocástico (expresado en la fórmula de distribución binomial) y caso individual especial (como herramienta para experimentación).

Pluinage (2005) aborda la representación de situaciones probabilistas y cálculo de probabilidades con ayuda de árboles. Toma de Duval el concepto de *unidad diofántica*, que consta de eventos o resultados, transiciones y probabilidades. El autor considera que para resolver un problema se debe aplicar una sucesión conveniente de las reglas básicas de probabilidad (menciona las de la suma, inversión y producto); que una vez admitidas tales reglas y con apoyo de árboles, la resolución de los problemas se hace comparable a la que ocurre, por ejemplo, en álgebra.

Kahneman y Tversky (1972), con intención de estudiar el uso y características de la “heurística de representatividad”, aplicaron un cuestionario a 1500 estudiantes israelitas de bachillerato. En el artículo se muestra que la gente, que sigue esta heurística, juzga consistentemente el evento más representativo como más probable, sea ello cierto o no. A los estudiantes se les pidió resolver algunas tareas vinculadas con la binomial como la siguiente (p. 432):

Todas las familias en una ciudad fueron encuestadas. En 72 familias el orden exacto de nacimientos de niños y niñas fue GBGBBG.

¿Cuál es tu estimación del número de familias encuestadas en las cuales el orden exacto de nacimientos fue BGBBBB?

En este ejemplo, Kahneman y Tversky (1972) mencionan que aunque ambas secuencias son igualmente probables, la mayoría de la gente concuerda en que no son igualmente representativas de la población (donde cada sexo aporta cerca del 50% de los nacimientos), por lo que 75 de 92 estudiantes juzgaron la secuencia BGBBBB como menos probable que la secuencia GBGBBG.

Además de caracterizar los rasgos que, de acuerdo con quienes aplican esta heurística, debe cumplir un evento o muestra para ser representativo de una población, Kahneman y Tversky (1972) caracterizan otras falsas concepciones probabilísticas (vinculadas con esta heurística) como la “falacia del jugador”<sup>1</sup> y el ignorar el efecto del tamaño de la muestra cuando se hacen juicios de probabilidad subjetiva.

Tversky y Kahneman (1982), para confirmar sus hipótesis relativas a la “heurística de disponibilidad”, realizaron diez estudios con aproximadamente 1500 estudiantes de universidades estadounidenses (voluntarios) y estudiantes israelitas de bachillerato. En uno de tales estudios muestran cómo, ante dos formulaciones diferentes de un mismo problema binomial, los estudiantes pueden utilizar diferente heurística: “la frecuencia de una clase es probable de ser juzgada por disponibilidad si los ejemplos individuales son enfatizados y por representatividad si las características genéricas son resaltadas” (p. 220).

Fischbein y Schnarch (1997) estudiaron la evolución con la edad (estudiantes de grados 5°, 7°, 9°, 11° y college) de falsas concepciones probabilísticas; diseñaron un cuestionario con problemas conocidos en la literatura (4 de los 8 problemas se relacionan con situaciones binomiales). Algunos de sus resultados fueron: en los problemas que evalúan la representatividad y el “efecto de novedad positiva”<sup>2</sup>, se encontró que las frecuencias de las falsas concepciones típicas disminuyeron con la edad; por otro lado, en los problemas que evalúan el efecto del tamaño de la muestra, se encontró que las frecuencias de las falsas

---

<sup>1</sup> Kahneman y Tversky (1972, p. 434-435) consideran que la *falacia del jugador* (creencia de que las proporciones de dos resultados deben ser preservadas en segmentos cortos: por ejemplo, que una serie grande de águilas debe ser seguida por un sol, para restaurar el balance) es una manifestación de la creencia en la representatividad local, que a su vez es una propiedad general que parece capturar la noción intuitiva de aleatoriedad.

<sup>2</sup> Tal efecto consiste en predecir, por ejemplo, que caerá águila en un tercer volado, después de una racha de 2 águilas en dos lanzamientos de una moneda.

concepciones típicas aumentaron con la edad, excepto en el caso de los estudiantes universitarios.

Colín (1998) realizó un estudio empírico, bajo un marco conceptual de los niveles epistemológicos del conocimiento estocástico de Steinbring y las ideas estocásticas fundamentales de Heitele, con estudiantes universitarios (divididos en un grupo con enseñanza tradicional y otro experimental). A partir del análisis de las respuestas a pretest y un postest, que tienen 7 problemas comunes, se investiga la comprensión de los conceptos involucrados en la binomial. Entre sus resultados encuentra que, aunque ambos grupos tuvieron casi el mismo % de respuestas correctas en el problema binomial, el grupo experimental usó mayor variedad de estrategias y representaciones correctas.

Van Dooren y cols. (2003) exploraron, en el contexto del razonamiento probabilístico, la presencia de un sesgo que llamaron *la ilusión de la linealidad*. Éste consiste en la “tendencia a aplicar modelos lineales o proporcionales, aún en situaciones donde ellos no son aplicables” (p. 113); por ejemplo, en geometría, tener la creencia de que el área de un cuadrado de lado 2 es dos veces el área de un cuadrado de lado 1. Los autores muestran que estudiantes de bachillerato, a pesar de la instrucción en probabilidad, caen en este sesgo también, cuando se les plantean problemas de distribución binomial de probabilidad, cuyo enunciado contiene datos que aparentan ser o son proporcionales.

Alvarado y Batanero (2006) analizaron la comprensión teórica y práctica de la aproximación normal a la distribución binomial alcanzada por un grupo de estudiantes de ingeniería después de un experimento de enseñanza apoyado en tres tipos de configuraciones: manipulativa, computacional y algebraica. Para recolectar datos utilizan un cuestionario de 4 ítems de opción múltiple, uno de F-V y un problema abierto. Entre sus conclusiones, los autores mencionan que la heurística de representatividad no mejoró en esos estudiantes, a pesar del uso de la simulación y que posiblemente se requieran situaciones específicas en las que se confronte explícitamente a los estudiantes con esta heurística si queremos mejorar sus intuiciones y no sólo el conocimiento formal sobre el tema.



Abrahamson (2009) realizó tres estudios de caso sobre el razonamiento de estudiantes universitarios frente a una situación simple de probabilidad hipergeométrica (la cual es casi-binomial). Se propone mostrar cómo un enfoque semiótico ilumina el proceso y el contenido del razonamiento de los estudiantes y, haciéndolo, explica y mejora posiblemente la metodología de la investigación basada en el diseño. Para conseguirlo, se propone a los estudiantes trabajar con tres tipos de dispositivos de mediación: una pala para extraer 4 canicas, un arreglo de columnas de cuadrados que representan permutaciones organizadas en un arreglo de torres y una distribución experimental de resultados obtenidos mediante simulación en la computadora. Muestra cómo los estudiantes se apropian de los medios que se les proporcionan al materializar, comunicar y elaborar su razonamiento acerca de la distribución en cuestión.

Bill, Watson y Gayton (2009) realizaron un estudio donde se examina un problema binomial con base en tres enfoques: clásico, el triángulo de Pascal y un enfoque frecuentista que usa Fathom. El énfasis fue puesto en cómo 19 estudiantes de grado 10 integran y comparan el mérito relativo de los tres enfoques. Los datos fueron colectados a través del pre-test y post-test aplicados bajo condiciones de examen tradicional; los ítems comunes al pre-test y al post-test permitieron una evaluación (con base en la taxonomía SOLO) del desarrollo de la comprensión de los conceptos por los estudiantes. El post-test mostró que 16 (84%) de los estudiantes estuvieron procedimentalmente correctos en al menos un método para resolver la tarea 3; 12 (63%) fueron competentes en los tres métodos. Fathom proveyó un rol de respaldo y una tercera perspectiva sobre el tema y pareció ser más valorado por los estudiantes menos hábiles que por los más competentes en procedimientos.

Maxara y Biehler (2010), en un curso de estocásticos para futuros profesores de matemáticas, reportan que los estudiantes usaron el Fathom para el análisis de datos y simulación; se aplica un pre-test y post-test (que tuvieron las mismas tareas). Los autores se enfocan al análisis de tres tareas de entrevista (que fue posterior al curso y con 13 estudiantes voluntarios) y reportan sobre las intuiciones de los estudiantes sobre el rol del tamaño de la muestra en las dos tareas en los contextos de un casino y una encuesta y sobre

su comprensión del rol de  $n$  (tamaño de la muestra) y  $N$  (número de simulaciones) en distribuciones de muestreo en un contexto de lanzamiento de monedas. Los autores encontraron que las respuestas a las tareas dependieron bastante del contexto (seis de los estudiantes dieron una respuesta correcta a la tarea del casino y once de ellos una respuesta correcta a la tarea de la encuesta); observaron que los estudiantes quienes resuelven correctamente una tarea no necesariamente resuelven también correctamente otra tarea con la misma estructura matemática y confirmaron las dificultades intuitivas de los estudiantes al contestar este tipo de tareas.

En Landín y Sánchez (2010) se realizó un análisis *a priori* de los elementos conceptuales que sustentan el conocimiento de la distribución binomial (componentes de conocimiento) y los niveles SOLO fueron usados para diseñar una jerarquía hipotética de razonamiento. Luego, un test con cuatro problemas binomiales fue diseñado y aplicado a 66 estudiantes de bachillerato (17-18 años) después de que participaron en un curso de probabilidad con énfasis en conceptos binomiales. Finalmente, las respuestas fueron analizadas y clasificadas de acuerdo con la jerarquía.

Sánchez y Landín (2011) describieron el proceso seguido para incrementar la confiabilidad de tal jerarquía: a) la aplicación de una primera versión de la jerarquía para realizar 6 evaluaciones independientes al conjunto de respuestas a un cuestionario con problemas relacionados con la distribución binomial; b) la comparación y el análisis de las clasificaciones, sobre todo de las respuestas en cuya clasificación no hubo consenso, que llevaron a reestructurar la jerarquía con base en elementos de conocimiento y de ejecución (coherencia, componentes extraños, errores de cálculo, inexistencia de cálculos y respuestas parciales); c) el uso de la jerarquía reestructurada para realizar una segunda clasificación de las respuestas al mismo cuestionario, con el consecuente aumento en la frecuencia de clasificaciones con consenso.

## **2.5 Estudios sobre Espacio muestral**

Entre las ideas fundamentales de la probabilidad, según Heitele (1975), se encuentra el álgebra de sucesos de Kolmogorov, donde asigna a cada experimento aleatorio un espacio muestral de sucesos observables. Para construir un modelo probabilístico se comienza habitualmente con la descripción de todos sus posibles resultados o espacio muestral.

Hawkins y cols. (1992) indican que en la definición del experimento aleatorio hay dos aspectos claves: la clara formulación de las condiciones del experimento y la enumeración del espacio muestral correspondiente al mismo. La correcta enumeración depende de la formulación, ya que si el estudiante interpreta incorrectamente el experimento, llegará a un espacio muestral incorrecto. En opinión de estos autores no se presta suficiente atención en la enseñanza a estos dos aspectos y ello puede ser el origen de concepciones incorrectas en los estudiantes.

Jones, Langrall, Thornton y Mogill (1999) examinaron la habilidad de estudiantes de 8 y 9 años para identificar el espacio muestral en situaciones aleatorias, encontrando que 15 de los 37 estudiantes participantes no creían que todos los resultados podrían ocurrir en un experimento aleatorio simple. Según los autores puede ser debido a que piensan en el espacio muestral desde un punto de vista determinista, atribuyendo certeza donde no existe, y que este problema persistió en dos de los 15 estudiantes a pesar de realizar una instrucción con múltiples experiencias mediante generadores aleatorios discretos y continuos.

La dificultad para determinar el espacio muestral de un experimento aleatorio puede ser debida a una falta de razonamiento combinatorio como indican Batanero, Navarro-Pelayo y Godino (1997) o bien a que es un concepto poco tratado en los currículos escolares, según English (1993).

Shaugnessy (2003) destaca que los programas de instrucción deben implicar a los estudiantes en la determinación de los espacios muestrales en los experimentos aleatorios.

Según Jones, Langrall y Money (2007), si se quiere mejorar la enseñanza, los profesores deben tener en cuenta las características del pensamiento de los estudiantes sobre este concepto: a) la dificultad de parte de los niños para realizar una lista de los resultados de un experimento aleatorio, aunque sea simple; b) falta de herramientas sistemáticas para generar los resultados en un experimento compuesto, y c) imposibilidad de relacionar determinación del espacio muestral y probabilidad de los resultados.

Además del conjunto de todos los resultados (espacio muestral) y sus elementos (sucesos elementales), la teoría de la probabilidad se ocupa de los sucesos asociados al experimento. Se define un suceso como un subconjunto del espacio muestral. Esto es correcto para los espacios muestrales finitos, pero en los espacios muestrales infinitos, es necesario restringir la definición de probabilidad a conjuntos medibles (Borovcnik, Bentz y Kapadia, 1991).

## **2.6 Estudios sobre Inferencia Informal**

Ben Zvi (2006) analiza y desarrolla el razonamiento estadístico informal en estudiantes de 5to año dentro de un ambiente de aprendizaje con tecnología (TinkerPlots), encuentra que la mayoría de los estudiantes hacen inferencias y argumentos que tienen sentido para ellos. Una clara ventaja de la tecnología fue el uso del software como una herramienta argumentativa en la presentación de las ideas de los estudiantes en lugar de sólo una herramienta de representación. Por otro lado la visualización del software hace énfasis en los puntos (que representan los datos), esto provoca que los estudiantes vean los datos aisladamente obstaculizando el progreso espontáneo en algunos casos a la visualización de los datos como conjunto.

Pfannkuch (2005) utilizó una tarea que pedía a estudiantes (de 15 años) comparar conjuntos de datos de temperaturas diarias de dos ciudades en Nueva Zelanda, y hacer algunas inferencias informales más allá de los datos de la muestra. Encontró que los estudiantes tienen muchas dificultades para hacer inferencias y justificarlas. La razón de tales deficiencias las atribuye a que el plan de estudios no proporciona experiencias de aprendizaje para la transición entre el pensamiento deductivo formal e informal.

Pfannkuch (2006) desarrolla un modelo del RII al observar a un profesor de secundaria que compara dos gráficas de caja, y aplica este modelo para analizar el RII de los estudiantes (15 años) del profesor. Con este modelo conjetura una jerarquía del razonamiento de los estudiantes al comparar grafica de cajas y concluye que la mejora en el razonamiento puede depender de una mayor conciencia de las múltiples visualizaciones cuando se razona con diagramas de caja, el desarrollo de la comunicación de maestros y estudiantes, y dar más oportunidades a los estudiantes de experimentar el comportamiento de muestreo.

Watson (2008) con una ligera modificación en el marco conceptual creado por Pfannkuch (2006) y un modelo de desarrollo cognitivo (SOLO) analiza el RII mediante las respuestas de estudiantes (12-13 años) a problemas de comparar dos muestras de datos con ayuda de la tecnología (TinkerPlots). Con cuatro sesiones dentro de un ambiente de aprendizaje con tecnología muestra una mejora en el RII de los estudiantes. También indica que parece que la facilidad de crear representaciones con el uso de TinkerPlots puede contribuir al desarrollo de intuiciones acerca de lo que podría considerarse diferencia significativa.

Bakker y Derry (2011) utiliza estudiantes de 6° año de primaria para mostrar cómo el énfasis en el razonamiento inferencial proporciona una mejor perspectiva de los conceptos estadísticos y argumentan que el uso del contexto desarrolla el razonamiento inferencial informal de los estudiantes. Además propone un enfoque inferencial para el desarrollo del RII e ilustra el enfoque con ejemplos de clases de dos grupos de estudiantes.

Pfannkuch (2011) utiliza una clase de secundaria (14 años) para ilustrar los puntos clave sobre el papel del contexto en el desarrollo del razonamiento inferencial informal. Se demuestra que los estudiantes a veces se distraen por el contexto en el aprendizaje de los elementos más abstracto de los conceptos estadísticos.

Langrall, Nisbet, Mooney y Jansem (2011) se concentran en las formas en las que la experiencia del contexto puede mejorar el razonamiento de los estudiantes. Su trabajo empírico se basa en el razonamiento de estudiantes de secundaria en los Estados Unidos,

Australia y Tailandia. Sus resultados muestran que el conocimiento del contexto permite ir más allá de los datos disponibles, mostrar una tendencia a racionalizar los datos, es decir, generar razones por las cuales los datos son como son, y a reconocer que las conclusiones basadas en los datos pueden ser limitadas o que no son necesariamente las únicas que pueden extraerse.

Makar, Bakker, y Ben-Zvi (2011) buscan entender los procesos de razonamiento que llevan a la inferencia informal y a identificar los elementos críticos que apoyan y nutren la capacidad del alumno para hacer inferencias estadísticas informales, desarrollan un marco que sugiere cinco aspectos clave del entorno de aprendizaje que según ellos es crítico para el desarrollo del razonamiento inferencial informal de los alumnos y concluyen que la IEI debe estar integrada en el RII, nutrido por el conocimiento estadístico, sobre el contexto del problema, las normas y hábitos útiles desarrollados con el tiempo, y con el apoyo de un entorno basado en la investigación. El proceso de investigación debe ser un proceso de generación de sentido impulsado por las dudas y las creencias, dando lugar a inferencias y explicaciones. La muestra de su estudio son tres alumnos de 6to año dentro de un proyecto de dos años (grado 4-6) donde se les enseña conceptos estadísticos y el uso de un software (TinkerPlots).

Gil y Ben Zvi (2011) analizan el papel de las explicaciones de los estudiantes para darle sentido a los datos y para aprender a razonar de manera informal sobre la inferencia estadística. Siguió de cerca las explicaciones de alumnos de 12 años los cuales utilizan sus experiencias y conocimientos del contexto, herramientas estadísticas, y las ideas emergentes para apoyar su razonamiento inferencial informal. Estos autores proveen evidencia de que mientras se resuelve un problema estadístico, las explicaciones de los estudiantes a veces no están integrados en una sola información, ya sea estadística o contextual, sino más bien en una combinación de las dos. Y además creen que las explicaciones deben de ser tomadas con mucha mayor seriedad para desarrollar el RII.

### **2.7 Estudios con estudiantes de nivel medio superior y superior**

Rubin, Hammerman y Konold (2006) estudian el RII de profesores de secundaria y bachillerato y cómo la tecnología ayuda a desarrollar este razonamiento. Para esto utiliza el software “TinkerPlots” y en una serie de seminarios los profesores resuelven un problema de inferencia estadística. Encuentran una gran utilidad en la visualización de las graficas que ofrece el software, ya que con ellas los profesores tuvieron la habilidad para observar los datos con diferentes perspectivas y con ello hacer juicios tanto numéricos como visuales.

Dierdorp, Bakker, Eijkelhof y Maanen (2011) analiza cómo una estrategia de enseñanza y aprendizaje, basada en prácticas o tareas de la vida real a través de correlación y regresión, sustentan el desarrollo del razonamiento inferencial informal de estudiantes de bachillerato, encontrando que los estudiantes eran por lo general capaces de vincular la mayor parte de sus conceptos científicos y conocimientos estadísticos formales a los problemas contextuales al hacer inferencias estadísticas informales.

## **Capítulo 3. Marco Conceptual de Trabajo**

### **3.1 Introducción**

En este capítulo se sentarán las bases y fundamentos de esta investigación, planteando para ello un marco conceptual de trabajo. Dos puntos clave en este capítulo son:

- a) Contenido probabilístico y estadístico
- b) Un modelo de desarrollo cognitivo

### **3.2 Contenido probabilístico y estadístico**

#### *3.2.1 Aleatoriedad*

La aleatoriedad es un concepto difícil de definir pues no forma parte formal de las matemáticas. En muchos textos se asume como un concepto indefinido, como la noción de punto en geometría. Moore (1990, p. 98) caracteriza los fenómenos aleatorios como “los fenómenos que tienen resultados individuales impredecibles pero que presentan un patrón regular cuando se realizan muchas repeticiones...”; este patrón al que se refiere Moore es la distribución correspondiente a la experiencia aleatoria que genera los resultado, o simplemente la distribución de los resultados. Esta distribución en la probabilidad son distribuciones teóricas (Binomial, Poisson, etc.).

Un caso especial que interesa en este trabajo es el de las secuencias aleatorias: ¿Qué características presenta una secuencia aleatoria formada por dos posibles resultados? Por ejemplo, el lanzamiento de 100 veces una moneda. En este caso, hay dos estadísticos que ayudan a identificar cuándo una secuencia es aleatoria, uno es la frecuencia relativa de los resultados, la otra es la longitud de la racha más larga. En el primer caso la frecuencia relativa debe ser cercana a  $\frac{1}{2}$  (no se piense que debe ser exactamente la mitad, que es un error frecuente de los estudiantes); en el segundo caso, las rachas largas no son tan improbables como se cree. La exposición precisa y la demostración formal de estos hechos viene en Feller (1983). Estos resultados son utilizados en el análisis de las respuestas de los



estudiantes al evaluar qué tanto las secuencias que proponen tienen características de aleatoriedad.

### *3.2.2 Variabilidad y variación*

Las nociones de variabilidad y variación estadística son conceptos muy ligados a la aleatoriedad, no obstante, abarcan más aspectos, y al igual que ella es difícil su riqueza y complejidad con una definición. Reading y Shaughnessy (2004) señalan que “El término *variabilidad* se entenderá como la característica [de cambio] de la entidad que es observable y el término *variación* la descripción o medida de esa característica” (p. 202). La variabilidad es un fenómeno observable presente en cualquier parte y que afecta todos los aspectos de nuestras vidas (Wild y Pfannkuch, 1999), mientras que la *variación* está asociada a los conjuntos de datos generados esos fenómenos.

En el análisis que se realiza en este trabajo, se considera importante observar qué tanto los estudiantes consideran aspectos de la variabilidad cuando realizan predicciones. A veces una manera determinística de entender los conceptos probabilísticos lleva a los estudiantes a ignorar u omitir cualquier consideración de la variabilidad; por ejemplo, pueden decir que en una secuencia de 100 lanzamientos de una moneda, van a salir 50 águilas y 50 soles. Este es un error que no considera la variabilidad del fenómeno, pues es claro de la experiencia que no es plausible que dicha predicción ocurra; sin embargo, cuando un estudiante dice que va a 54 águilas y 46 soles, refleja que el estudiante piensa en la variabilidad, aunque no esté en lo correcto. La solución sería que predijera un intervalo “saldrán entre 40 y 60 águilas”. En este trabajo, observaremos qué tanto los estudiantes intentan considerar la variabilidad en sus respuestas.

### *3.2.3 Modelo de probabilidad (Espacio muestral, eventos, probabilidad)*

La noción de modelo probabilístico está relacionada con la descripción de los resultados posibles de una experiencia aleatoria que se va a modelar (Borovnik, Bentz y Kapadia, 1991), tal descripción se llama Espacio Muestral ( $\Omega$ ). A cada elemento del espacio muestral

se le asigna una probabilidad. En los casos discretos con dicha asignación se puede encontrar la probabilidad de cualquier evento de la experiencia aleatoria (es decir, cualquier subconjunto del Espacio Muestral).

Un modelo de probabilidad se refiere a una experiencia aleatoria y éste de acuerdo a Henry (1994) se caracteriza por tres condiciones:

1. Una experiencia aleatoria debe conducir a un conjunto de resultados posible bien definidos (Espacio Muestral)
2. Estos resultados no son predecibles antes de realizarse, ellos son al azar (Aleatoriedad)
3. Además, la experiencia debe ser repetible bajo condiciones similares.

Estos tres criterios son suficientes para caracterizar una experiencia aleatoria.

#### *3.2.4 Distribución y variable aleatoria*

En estadística se consideran dos tipos de distribuciones, una clase la forman las distribuciones empíricas que resultan de organizar un conjunto de datos, la otra clase la forman las distribuciones teóricas de probabilidad, por ejemplo, la distribución binomial. Las distribuciones empíricas indican la frecuencia con la que se presenta cada dato del conjunto de datos; las distribuciones teóricas indican la probabilidad de que ocurra un valor de una variable aleatoria. Una distribución teórica indica el patrón de variabilidad de los datos que se obtendrían de “sortear la variable aleatoria”. Formalmente una variable aleatoria se define cuando se tiene un modelo de probabilidad, en este caso se considera que su espacio muestral es discreto (Feller, 1983) y es una función del espacio muestral a los números reales; la distribución se define entonces así  $f(x) = P(X=x)$  donde  $X$  es la variable aleatoria. En este trabajo se explora una situación que genera una distribución binomial con parámetros  $n=2$ ,  $p=1/2$  y  $X$ =numero de águilas. No se trata de un estudio tradicional de la binomial, sino del intento de que el estudiante maneje la situación y vaya descubriendo características de la binomial. En particular, en las preguntas del cuestionario no se hace referencia directa a dicha distribución ni al espacio muestral asociado a la situación; suponemos que algunos de estos elementos emergerán en el proceso de solución del

cuestionario; en particular, observaremos si los estudiantes descubren la estructura del espacio muestral y con base en esta entienden la distribución y responden las preguntas.

### *3.2.5 Inferencia Estadística Informal (IEI) y Razonamiento Inferencial Informal (RII)*

La Inferencia Estadística Informal (IEI) es una generalización probabilística (no determinista) de datos (Makar y Rubin, 2009), y esta generalización es el producto final de un Razonamiento Inferencial Informal (Makar, Bakker y Ben-Zvi, 2011). En este sentido se está considerando que las IEI se representan mediante enunciados, mientras que el RII es el proceso que hay detrás de las afirmaciones presentes en esos enunciados.

A continuación se hace un resumen de lo que se entiende por RII basado en el trabajo de Zieffler, Garfield, delMas y Reading (2008).

*El RII es la manera en que los estudiantes utilizan su conocimiento estadístico informal para argumentar inferencias sobre poblaciones o distribuciones desconocidas con base en la observación de una muestra o de resultados de sortear la distribución (es decir, de llevar a cabo la experiencia aleatoria)*

El RII es un proceso que incluye:

- Razonamiento acerca de características posibles de una distribución (v. gr. Forma, centro, etc) con base en algunos resultados observados.
- Razonamiento acerca de posibles diferencias entre dos distribuciones con base en diferencias en los datos al sortear la distribución (v. gr. ¿Las diferencias se deben a una causa o se deben sólo al azar?).
- El razonamiento acerca de si o no un conjunto de resultados es probable que provenga de una distribución dada.

En resumen, el marco conceptual del RII tiene las siguientes componentes:

1. Formular juicios, afirmaciones o predicciones acerca de distribuciones con base en resultados observados, pero sin usar procedimientos y métodos estadísticos formales.
2. Utilizar e integrar conocimiento previo disponible (definición de probabilidad, operaciones aritméticas, etc.).
3. Articular la evidencia basada en argumentos para hacer juicios, afirmaciones o predicciones acerca de experiencias aleatorias y distribuciones.

Hay que notar que esta definición se refiere a RII como un proceso para hacer inferencias que no utilizan métodos formales de las inferencias estadísticas descritos al principio y que pueden o no incluir el uso de un lenguaje o conceptos estadísticos formales. Una pregunta interesante es: ¿Qué tipo de tareas pueden ser usada para estudiar el razonamiento estadístico informal y su desarrollo?

La literatura de investigación contiene ejemplos de dos diferentes enfoques que los investigadores han utilizado para estudiar el RII. Uno es sobre la naturaleza de este razonamiento o métodos intuitivos de razonamiento acerca de inferencias dada una información estadística determinada. Un objetivo de este tipo de estudios consiste en examinar cómo razonan los estudiantes sobre inferencias dado un problema particular sin haber sido enseñados los métodos formales de la inferencia. Un segundo enfoque es el examen del desarrollo de RII como una experiencia curricular de los estudiantes (i. e. un curso o unidad de enseñanza) diseñada para construir razonamientos. El objetivo de este tipo de estudio es a menudo ver cómo la naturaleza del RII cambia cuando se provee de recursos, herramientas y currículo. Ambos enfoques necesitan tareas bien diseñadas que permitan a los investigadores capturar y evaluar el RII. El presente estudio es del primer tipo; es decir, se explora el razonamiento de los estudiantes sin considerar enseñanza previa.

### **3.3 Un modelo de desarrollo cognitivo**

Cuando los estudiantes resuelven una tarea en matemáticas existen conexiones entre las representaciones (internas y externas) que ellos hacen, si es posible identificar estas conexiones, podríamos evaluar su nivel de comprensión.

Las representaciones externas como las verbales, gráficas, simbólicas y tabulares, son las que los estudiantes pueden manifestar por escrito y son susceptibles de análisis para inferir el tipo de conexiones en las representaciones internas o mentales que hacen. Por lo tanto, se hace necesario disponer de un instrumento que permita valorar las representaciones externas de los estudiantes cuando se enfrentan a una situación – problema, específicamente a una situación de incertidumbre, para evaluar el nivel de comprensión probabilístico.

El instrumento que se utilizó para valorar dichas representaciones externas en este estudio es el modelo Multimodal y la taxonomía SOLO desarrollados por Biggs y Collis (1991). La taxonomía SOLO se propuso para evaluar la calidad de los aprendizajes de los estudiantes, pero ha sido también una herramienta para elaborar jerarquías de desarrollo del razonamiento (Jones, Thornton, Langrall y Tarr, 1999). En esta investigación, el autor se ha interesado por el primero de los usos posibles. El modelo SOLO será una herramienta para caracterizar la evolución del razonamiento de los estudiantes a partir de las respuestas que den a las tareas que se les propondrán.

Existen cinco niveles de crecimiento y desarrollo cognitivo, lo que define la taxonomía SOLO (Structure of the Observed Learning Outcome - Estructura de las Respuestas de Aprendizaje Observadas), formando un ciclo. La siguiente tabla muestra estos niveles de razonamiento.

Modo	Nivel Estructural ( <i>SOLO</i> )	
Siguiente	5	<i>Abstracto extendido.</i> El estudiante generaliza la estructura para tomar más y nuevas características abstractas, representando un nuevo y más alto modo de operación.
	4	<i>Relacional.</i> El estudiante integra cada parte con las otras, de manera que el todo tiene una estructura coherente y significado.
Objetivo	3	<i>Multi-estructural.</i> El estudiante toma cada vez más aspectos relevantes o características correctas, pero no las integra.
	2	<i>Uni-estructural.</i> El estudiante está enfocado en el dominio relevante y toma sólo un aspecto para trabajar.
Previo	1	<i>Pre-estructural.</i> Se realiza la tarea pero el estudiante se distrae o se desvía con un aspecto irrelevante que pertenece a un modo o estado previo.

**Tabla 3.3.1.** Modos y Niveles de la Taxonomía SOLO

Cuando el sujeto comienza a aprender el conocimiento asociado a una tarea, generalmente enfoca su atención en uno sólo de los componentes que lo caracterizan o definen, en este caso, sus respuestas se clasifican como *uniestructurales*; éste es el primer nivel de una jerarquía. En el siguiente nivel, el sujeto aprecia dos o más componentes y puede ponerlos en juego al resolver la tarea, sin embargo, no es capaz de relacionarlos de manera conveniente; a este nivel se le llama *multiestructural*. El tercer nivel, llamado *relacional*, se caracteriza por que la respuesta considera más de un componente relacionado de manera correcta. Hay dos niveles adicionales, por debajo del uniestructural se encuentra el nivel *preestructural*, en el que se clasifican las respuestas que no tienen ninguna relación con el conocimiento que se pretende desarrollar. Por arriba se encuentra el nivel *abstracto extendido*, que representa una generalización del conocimiento adquirido en el nivel relacional y representa el inicio de un ciclo superior.

En particular, para este trabajo de investigación, se consideraron componentes de análisis para cada una de las tareas, en las que se buscaron las conexiones entre los conceptos de aleatoriedad y variabilidad, identificación e interpretación de la distribución empírica de frecuencias, y la descripción de la variable aleatoria y del espacio muestral.

## **Capítulo 4. Metodología**

### **4.1 Introducción**

Para analizar los efectos de un fenómeno estocástico sobre el razonamiento probabilístico de estudiantes de primer año de bachillerato, se utilizó una situación-problema de carácter diagnóstico, con la finalidad de identificar, describir, analizar y clasificar las respuestas aportadas bajo el modelo de desarrollo cognitivo SOLO. A partir de un este cuestionario diagnóstico, se analizaron características como aleatoriedad, variabilidad, distribución, variable aleatoria y espacio muestral; buscando indicios de inferencias informales de los estudiantes partiendo de un contexto de incertidumbre, bajo un esquema frecuencial de la probabilidad (informal), hacia la estabilización de la distribución de frecuencias como un reflejo de la aleatoriedad.

A continuación se ofrece un cuadro general de la metodología en el que se especifica quiénes participaron en el estudio, los instrumentos utilizados para hacerse de datos y la manera en que se procedió.

### **4.2 Participantes**

En esta investigación participaron 46 estudiantes (de entre 15 y 17 años) de dos grupos de primer grado de bachillerato Colegio de Ciencias y Humanidades Plantel Vallejo, de la Universidad Nacional Autónoma de México, y el profesor titular de los grupos aplicó la situación-problema, quien es el autor del presente trabajo. Los estudiantes no habían recibido ningún tipo de enseñanza formal de probabilidad y estadística; además, no recibieron información respecto al propósito del estudio.

### **4.3 Instrumento**

Se diseñó un cuestionario de 14 preguntas, sobre una situación-problema inscrita en el tema de variable aleatoria y distribución de probabilidades llamada *¡A LA SUERTE!*. El

problema era predecir el comportamiento de sorteos de tipo binomial ( $n = 2$ ,  $p = \frac{1}{2}$ ,  $X$ =numero de águilas) con el fin de observar si los estudiantes perciben y consideran aspectos de dos elementos principales, a saber: aleatoriedad y la distribución de los resultados (0, 1, 2). La situación-problema estaba relacionada con el sorteo del control de la TV en una familia de tres integrantes (Ana, Carlos y Beto) a través de un mecanismo aleatorio, el lanzamiento de dos monedas, de tal forma que si no salían águilas ganaba Ana, si salía una águila ganaba Beto y si salían dos águilas ganaba Carlos. La finalidad del problema era predecir el comportamiento de los sorteos para decidir si todos los miembros de la familia podían tener la misma frecuencia de éxito a largo plazo (Ver Anexo).

#### **4.4 Procedimientos**

El profesor, autor de este trabajo, presenta a sus estudiantes la situación-problema, les pide leerlas en forma individual y grupal, les permite que realicen algunos ensayos para propiciar una familiarización con la situación aleatoria y puedan opinar, hacer predicciones, argumentar y proponer ideas en el cuestionario. La aplicación duró 2 horas aproximadamente. A continuación se presentan cada una de las fases desarrolladas por los estudiantes.

**Fase 1.** Presentación de la actividad-problema *¡A LA SUERTE!*; lectura y explicación por parte del docente.

**Fase 2.** Resolución del test diagnóstico por parte de los estudiantes.

**Fase 3.** Recopilación y análisis de resultados.



## Capítulo 5. Presentación y Análisis de los Datos

### 5.1 Introducción

En el presente capítulo se describen y analizan los datos obtenidos a través de un cuestionario sobre una situación-problema llamada *¡A la Suerte!*. El problema consistía en predecir el comportamiento de sorteos de tipo binomial ( $n = 2$ ,  $p = \frac{1}{2}$ ), esto con el fin de observar si los estudiantes perciben y consideran tres aspectos primordiales subyacentes en la situación-problema: aleatoriedad, la distribución de los resultados (0, 1, 2) y los elementos del espacio muestral (AA, AS, SA, SS). Las respuestas se analizaron desde la Taxonomía SOLO, es decir, se organizan en cinco categorías: Prestructural, Uniestructural, Multiestructural, Relacional y Abstracto Extendido.

La exposición de esta actividad se muestra a partir de un informe por pregunta de la situación-problema; en cada uno de ellos se recuerda en qué consistió la pregunta, se presenta el objeto de estudio y el objetivo de la pregunta, las componentes de la respuesta, las categorías de análisis de las respuestas de los estudiantes, y se finalmente se agregan algunos comentarios analíticos de acuerdo al nivel de razonamiento probabilístico y a las componentes involucradas de cada pregunta.

### 5.2 Informe de la Pregunta Inicial

En este apartado describiremos los resultados de la pregunta inicial del cuestionario que realizaron los estudiantes.

#### ***¡A LA SUERTE!***

La familia Pérez, está compuesta por el señor Carlos, su esposa Ana y su hijo Beto. Todas las noches, por lo general, después de cenar se reúne la familia a ver la televisión, pero nunca están de acuerdo para ver un mismo programa. Al señor Carlos le gusta ver programas deportivos, a la señora Ana las películas y a Beto las caricaturas.



Como sólo hay un televisor en la casa, lo más sencillo sería que se turnaran el control de la televisión diariamente, pero Beto les propone a sus padres algo más divertido: “¡A la suerte!”.

Propone rifar el control jugando a los volados con dos monedas de la siguiente manera: Si no sale **ninguna águila** en los dos volados, gana la Sra. Ana; si sale exactamente **una águila**, gana el niño Beto; y si salen **dos águilas**, gana el Sr. Carlos. A los padres les parece justo y aceptan su propuesta.

Después de muchos días (un año, por ejemplo), ¿todos los integrantes de la familia Pérez tendrán el control de la televisión con la misma frecuencia? Explica ampliamente tu respuesta.

**Objeto de estudio:**

*Sentido de aleatoriedad*

**Objetivo:**

*Identificar la percepción de la aleatoriedad por parte del estudiante al interpretar el experimento del lanzamiento de dos monedas.*

**Componentes de la Respuesta:**

En esta tarea se tuvieron en cuenta las siguientes componentes para evaluar la respuesta de cada estudiante:

- a) Indica la aleatoriedad en los resultados a través del tiempo.
- b) Asignación de distintos valores (numérica o nominalmente) a la posibilidad de ganar de al menos un miembro de la familia.
- c) Menciona algún evento del espacio muestral (AA, AS, SA, SS) o del recorrido de la variable aleatoria (0, 1, 2).
- d) Menciona todo el espacio muestral (AA, AS, SA, SS) o el recorrido completo de la variable aleatoria (0, 1, 2).

**Categorías de Análisis de Respuesta y Ejemplos:**

A continuación se presenta una ejemplificación del tipo de respuestas dadas por los estudiantes de acuerdo al nivel de razonamiento, seguida de una breve justificación sobre esta clasificación.

Preestructural (P): No cumple con ninguna de las componentes de la tarea (a, b, c, d). Además responde con un claro desconocimiento del sentido de la pregunta.

<b>Ejemplo:</b>	<b>Justificación:</b>
E17: <i>No puesto que los días de la semana no son exactos y por oviedad si contamos todos los días que le va a tocar el control de la televisión a cada uno de los 3 integrantes de la familia tendrá mas suerte que otro</i>	En este caso el estudiante E17 respondió sin hacer referencia a alguna de las componentes indicadas (a, b, c o d), al mismo tiempo que muestra un desconocimiento del sentido de la pregunta.

Uniestructural (U): Se tiene en cuenta sólo una de las componentes de la tarea: “a”, “b”, “c”, ó “d”.

<b>Ejemplos de la Componente “a”:</b>	<b>Justificación:</b>
E4: <i>No porque no hay una probabilidad fija, por qué todos los juegos se harán al azar y no hay ninguna seguridad de quien ganará o quien perderá.</i>	Su respuesta únicamente hace referencia al sentido aleatorio del experimento, (... <i>se harán al azar...</i> ) y no presenta alguna otra componente
E7: <i>No tendrán frecuentemente el control por que es un juego de azar y nunca se sabe que caera puede ser que 3 días le toque a Beto, dos al Sr. Carlos y uno a la Sra. Ana y no tendrían la misma frecuencia.</i>	En su respuesta, el estudiante E7 no menciona alguna otra componente adicional a la “a”, sólo indica el carácter aleatorio del experimento (... <i>es un juego de azar y nunca se sabe que caera...</i> ).
E9: <i>No por que es a la suerte y uno puede tenerlo más veces que los otros dos o los otros dos pueden tenerlo más que el otro.</i>	En este otro ejemplo, la respuesta del estudiante E9 refiere correctamente el sentido aleatorio del experimento (... <i>por que es a la suerte...</i> ), aunque no manifiesta alguna componente adicional.
<b>Ejemplos de la Componente “b”:</b>	<b>Justificación:</b>
E23: <i>No, porque Beto tiene menor probabilidad que sus padres</i>	El estudiante E23 únicamente asigna en su respuesta un valor (nominal) a la oportunidad de ganar a un miembro de la familia (... <i>Beto tiene menor probabilidad...</i> ).

<p>E24: <i>No porque es mas probable de que el niño Beto gane porque tiene un 50% de probabilidad y sus padres 25%</i></p>	<p>El estudiante E24 responde asignando valores numéricos a la probabilidad de ganar de los miembros de la familia (...<i>Beto gane porque tiene un 50% de probabilidad y sus padres 25%</i>), siendo estos los valores esperados, aunque no presenta indicios de alguna otra componente.</p>
<p>E29: <i>si son 3 personas en la casa, si el año es bisiesto de 366, te toca a cada quien de 122 veces, ver el televisor</i></p>	<p>La respuesta del estudiante E29 sólo presenta indicios de la componente “b” al asignar un valor numérico a los integrantes de la familia Pérez (...<i>te toca a cada quien de 122 veces...</i>).</p>

Multiestructural (M): Se tiene en cuenta sólo dos de las componentes de la tarea: “a”, “b”, “c”, ó “d”.

<b>Ejemplo de la Componente “ac”:</b>	<b>Justificación:</b>
<p>E8: <i>No por que están al azar entonces no saben con exactitud a quien le tocara el control por que eso dependerá de la moneda si sale águila o sol</i></p>	<p>En este nivel de razonamiento, el estudiante E8 responde aludiendo la aleatoriedad del experimento (...<i>están al azar entonces no saben con exactitud...</i>), y adicionalmente menciona algún evento del espacio muestral del experimento (...<i>si sale águila o sol</i>).</p>
<b>Ejemplos de la Componente “ab”:</b>	<b>Justificación:</b>
<p>E13: <i>Podria ser puesto que hay 1/3 de probabilidad para cada uno pero seria muy difícil que tengan resultados esactos y además si un año se divide entre los tres no daría un resultado entero. No no tendrían.</i></p>	<p>La respuesta del estudiante E13, indica la aleatoriedad del experimento (...<i>seria muy difícil que tengan resultados esactos...</i>) y asigna un valor numérico a la probabilidad de ganar de los miembros de la familia (...<i>hay 1/3 de probabilidad para cada uno...</i>).</p>

<p>E35: <i>NO, porque no sabe cuantas veces lo va a tener cada integrante hasta que realicen los volados &amp; como Son al azar, además de que el niño Beto tiene mas posibilidad de ganar mas el control una mayor cantidad de veces.</i></p>	<p>En este otro tipo de respuesta, el estudiante E35 indica lo aleatorio del experimento (...<i>como Son al azar...</i>), y asigna un valor nominal a la posibilidad de ganar de Beto (...<i>el niño Beto tiene mas posibilidad de ganar...</i>).</p>
<p><b>Ejemplos de la Componente “ad”:</b></p>	<p><b>Justificación:</b></p>
<p>E12: <i>No se sabe, ya que puede que durante el año haya caído mas veces las 2 aguilas o 1 aguila o ninguna</i></p>	<p>La respuesta del alumno E12 presenta indicios de la aleatoriedad (...<i>No se sabe, ya que puede que durante el año haya caído mas veces...</i>) y menciona el recorrido completo de la variable aleatoria (... <i>2 aguilas o 1 aguila o ninguna...</i>).</p>
<p>E16: <i>No porque es algo al azar y así como puede caer más seguido un águila o 2, puede que no caigan y así</i></p>	<p>Esta respuesta alude al sentido aleatorio del experimento (...<i>es algo al azar...</i>) y especifica los valores que toma la variable aleatoria (...<i>un águila o 2, puede que no caigan...</i>).</p>
<p><b>Ejemplos de la Componente “bc”:</b></p>	<p><b>Justificación:</b></p>
<p>E30: <i>No porque hay mas probabilidad de que salga solo un agila asi que Beto tendría un 50% de probabilidad y cada uno de sus papás solo 25%</i></p>	<p>La respuesta del estudiante E30 asigna valores numéricos a los integrantes de la familia (...<i>Beto tendría un 50% de probabilidad y cada uno de sus papás solo 25%</i>) y menciona algún evento del espacio muestral (...<i>salga solo un agila...</i>).</p>
<p>E34: <i>no porque es un poco mas complicado que caigan iguales a que salga una diferente entonces el niño tendría una leve ventaja sobre sus papas ya que solo necesita una diferente para ganar y sus papas necesitan ser iguales</i></p>	<p>El estudiante E12 asigna un valor a la posibilidad de ganar a un integrante (...<i>el niño tendría una leve ventaja...</i>), y deja entrever los distintos eventos del espacio muestral (...<i>solo necesita una diferente para ganar y sus papas necesitan ser iguales...</i>).</p>

Relacional (R): Se tiene en cuenta tres de las componentes de la tarea: “a”, “b”, “c”, ó “d”.

<b>Ejemplos de la Componente “abc”:</b>	<b>Justificación:</b>
<p>E1: <i>No porque al cambiar los días tal ves unas se repitan y ya no sería la misma frecuencia por que va variando el resultado de las caras podrán caer más las águilas y así la de menos oportunidades sería la mamá o por el contrario pero no sería el caso de la frecuencia</i></p>	<p>La respuesta del estudiante E1 refiere el carácter aleatorio del experimento (...<i>va variando el resultado...</i>), menciona algún evento del espacio muestral (...<i>podrán caer más las águilas...</i>) y asigna un valor nominal a un miembro de la familia, en este caso la mamá (...<i>la de menos oportunidades sería la mamá...</i>).</p>
<p>E5-D: <i>No todos tienen la misma frecuencia. El chico Beto tiene el control del televisor mas veces. Puesto que es mucho más probable que salga una vez agila.</i></p>	<p>El estudiante E5 en su respuesta menciona el sentido aleatorio (<i>No todos tienen la misma frecuencia</i>); además, asigna a un integrante mayor oportunidad de ganar (...<i>Beto tiene el control del televisor mas veces</i>), y menciona algún evento del espacio muestral (...<i>es mucho más probable que salga una vez agila</i>).</p>
<p>E6: <i>Si pasan todos a tener el control pero no con la misma frecuencia, el que con mas frecuencia tendrá el control seria Beto ya que tenia mas posibilidad de que saliera solo una águila.</i></p>	<p>Esta respuesta incluye la aleatoriedad del experimento (...<i>pasan todos a tener el control pero no con la misma frecuencia...</i>); de igual forma, la asignación de un valor a la oportunidad de ganar en algún miembro de la familia está presente (...<i>el que con mas frecuencia tendrá el control seria Beto...</i>) y la componente de algún valor de la variable aleatoria se ve indicada (...<i>mas posibilidad de que saliera solo una águila</i>).</p>

<b>Ejemplo de la Componente “bcd”:</b>	<b>Justificación:</b>
E10: <i>No porq´ hay mayor probabilidad de q Beto gane por q hay 4 posibles resultados y de ellos el porcentaje es de 25% c/u y de los cuatro posibles (el 100%) veto tiene 2 posibles (50% de probabilidad) el Sr Carlos solo 1 no posible (25% de probabilidad) y la Sra. Ana Ino posible (25% de probabilidad) osea q beto tiene el doble de posibilidades</i>	El estudiante E10 asigna en su respuesta un valor numérico a la probabilidad de ganar de cada miembro de la familia (...el porcentaje es de 25% c/u y de los cuatro posibles (el 100%) veto tiene 2 posibles (50% de probabilidad) el Sr Carlos solo 1 no posible (25% de probabilidad) y la Sra. Ana Ino posible (25% de probabilidad)); adicionalmente refiere todos los eventos del espacio muestral al indicar “hay 4 posibles resultados” –aunque no de manera específica: AA, AS, SA y SS-.

Abstracción Extendida (AE): Se tiene en cuenta las cuatro componentes de la tarea: “a”, “b”, “c”, y “d”; sin embargo, no se presentaron respuestas en esta categoría.

La siguiente tabla resumen presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes de acuerdo al nivel de razonamiento y a las componentes involucradas.

<b>TEST DIAGNÓSTICO - PREGUNTA PREVIA</b>															
<b>P</b>	<b>U</b>					<b>M</b>						<b>R</b>			<b>AE</b>
	<b>a</b>				<b>b</b>	<b>ab</b>		<b>ac</b>	<b>ad</b>	<b>bc</b>		<b>abc</b>		<b>bcd</b>	<b>abcd</b>
<b>E17</b>	<b>E2</b>	<b>E14</b>	<b>E28</b>	<b>E37</b>	<b>E23</b>	<b>E13</b>	<b>E26</b>	<b>E8</b>	<b>E12</b>	<b>E11</b>	<b>E30</b>	<b>E1</b>	<b>E27</b>	<b>E10</b>	
	<b>E4</b>	<b>E18</b>	<b>E31</b>	<b>E41</b>	<b>E24</b>		<b>E34</b>	<b>E40</b>	<b>E16</b>	<b>E20</b>	<b>E43</b>	<b>E5</b>	<b>E38</b>		
	<b>E7</b>	<b>E19</b>	<b>E32</b>	<b>E44</b>	<b>E25</b>		<b>E35</b>				<b>E46</b>	<b>E6</b>			
	<b>E9</b>	<b>E21</b>	<b>E33</b>	<b>E45</b>	<b>E29</b>		<b>E42</b>								
			<b>E36</b>		<b>E39</b>										
<b>NP</b>	<b>Los estudiantes E3, E15 y E22, no realizaron la actividad.</b>														

Tabla 5.2.1. Clasificación de las respuestas de la pregunta inicial

**Análisis parcial por nivel de razonamiento:**

Como se muestra en la tabla resumen, puede apreciarse que sólo un estudiante presenta una respuesta de tipo Prestructural. Mientras que el nivel de razonamiento predominante en las respuestas de los estudiantes a la pregunta inicial es el Uniestructural, con 22/46

estudiantes: 17/22 se enfocan en la componente *a* y 5/22 en la componente *b*. El segundo nivel de razonamiento que más se presentó es el Multiestructural, con 14/46 alumnos (poco menos de la tercera parte de los participantes), centrándose en las componentes *ab* y *bc*, 5/14 estudiantes en cada una; mientras que las componentes *ac* y *ad* se presentan en las respuestas de 2/14 estudiantes, respectivamente. El nivel de razonamiento que presentó poca fluencia en las respuestas de los estudiantes es el Relacional, con 6/46 estudiantes, siendo la componente *abc* la más frecuente en este nivel con 5/6 alumnos, mientras que en la componente *bcd* se presenta en una sola ocasión. El nivel de razonamiento Abstracto Extendido no presentó respuesta alguna. Cabe mencionar que 3/46 alumnos no dieron respuesta a esta pregunta inicial.



Figura 5.2.1. Clasificación por nivel de razonamiento de la pregunta inicial

**Análisis parcial por componente:**

En la siguiente tabla se muestra la clasificación de acuerdo al nivel de razonamiento y componente, de las respuestas de la pregunta inicial aportadas por los estudiantes.

Nivel	Componente(s)	Participantes	Total
Preestructural	----	1	1
Uniestructural	a	17	22
	b	5	
Multiestructural	ab	5	14
	ac	2	
	ad	2	
	bc	5	
	Relacional	abc	
bcd	1		
Abstracto Extendido	abcd	0	0
NP	----	3	3
<b>Total</b>		<b>46</b>	<b>46</b>

Tabla 5.2.2. Clasificación de acuerdo al nivel y componente de la pregunta inicial



Como se puede observar, 31/46 estudiantes aportaron respuestas relacionadas con la componente  $a$ , siendo esta la componente con mayor frecuencia en las respuestas. La componente  $b$  se manifiesta en 21/46 respuestas dadas por los estudiantes. Por otro lado, la componente  $c$  está presente en 13/46 respuestas de los alumnos. Finalmente, la componente  $d$  se encuentra en 3/46 de las respuestas que los estudiantes aportaron en pregunta inicial.

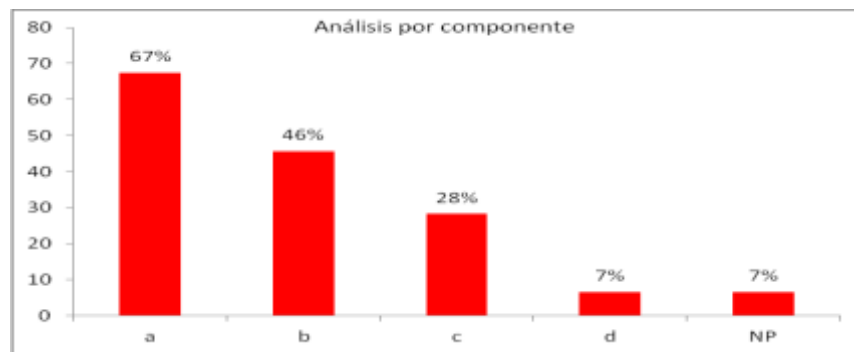


Tabla 5.2.3. Frecuencia de las componentes de la pregunta inicial

Como se muestra en el gráfico anterior, 67% de las respuestas aportadas por los estudiantes presentan la componente  $a$ ; es decir, identificaron adecuadamente el carácter aleatorio de la pregunta. La componente  $b$  se presenta en el 46% de las respuestas de los alumnos; a partir de esto podemos suponer entonces que casi la mitad de los estudiantes consideró algún ganador (lo que se traduciría como algún evento del espacio muestral o valor del recorrido de la variable aleatoria) para el experimento. Sin embargo, al observar los resultados para la componente  $c$ , 28%, podemos apreciar que menos de la tercera parte de los alumnos fue capaz de manifestar de forma explícita alguno de los eventos del espacio muestral o del recorrido de la V.A. Lo anterior explicaría el por qué sólo el 7% del total de los alumnos menciona todo el recorrido de la variable aleatoria o el espacio muestral completo. Cabe mencionar que de este 7% (3/46) dos de ellos, el E12 y E16 mencionaron todo el recorrido de la variable aleatoria (0, 1, 2) y el E10 fue capaz de hacer referencia al espacio muestral, pues si bien no lo indicó explícitamente, en el contexto de su respuesta permite inferirlo.

### 5.3 Informe de la Pregunta 1

En este apartado describiremos los resultados de la pregunta 1 del cuestionario que realizaron los estudiantes.

1. Escribe la secuencia de resultados que crees que pueda ocurrir al jugar durante los primeros 20 días. (Marca una <b>X</b> por cada sorteo en cada columna).																					
Día	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total
Gana																					
Ana																					
Beto																					
Carlos																					

**Objeto de estudio:**

*Sentido de aleatoriedad / Secuencia Aleatoria.*

**Objetivo:**

*Probar la percepción de la aleatoriedad del juego por parte del estudiante al generar una secuencia aleatoria.*

**Componentes de la Respuesta:**

En esta tarea de generar secuencias aleatorias se tuvieron en cuenta las siguientes componentes para evaluar la respuesta de cada estudiante:

- a) La elección de un sólo ganador por sorteo; verificar que en el total, la suma corresponda al número de sorteos; o bien, asignar mayor frecuencia al evento con mayor probabilidad (gana Beto).
- b) La consideración de las rachas. Una secuencia adecuada tiene al menos dos rachas de longitud 3, 4 ó más.
- c) Tiene en cuenta la aleatoriedad al proporcionar frecuencias, para cada miembro de la familia, muy cercanas al valor esperado (teórico).
- d) La no presencia de patrones determinísticos en la secuencia (sentido aleatorio).

**Categorías de Análisis de Respuesta y Ejemplos:**

A continuación se presenta una ejemplificación del tipo de respuestas dadas por los estudiantes de acuerdo a su nivel.

Preestructural (P): Genera secuencias no aleatorias, es decir, donde se puede percibir algún patrón o secuencia; no cumple con ninguna de las componentes de la tarea (a, b, c, d); o bien, responde con un claro desconocimiento del sentido de la pregunta.

**Ejemplo:**

E8:

Día \ Gana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total	
Ana		x						x			x		x				x					
Beto	x		x			x			x	x				x	x			x				x
Carlos					x							x				x				x	x	

**Justificación:**

El estudiante E8 en su respuesta no presenta alguna de las componentes “a”, “b”, “c” o “d”, pues no eligió algún ganador asignándole valor numérico, no indica un ganador por sorteo (en gris), tampoco manifiesta un sentido correcto de la aleatoriedad al no presentar secuencias correctas en su respuesta (al menos 2 rachas de longitud 3, 4 o más). Del mismo modo no asigna valores de frecuencia para los miembros de la familia, cercanos a los teóricos esperados, además de que sí presenta patrones determinísticos (en amarillo) en su secuencia.

Uniestructural (U): Tiene en cuenta sólo la componente “a” de la tarea.

**Ejemplo de la Componente a:**

E6:

Día \ Gana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total	
Ana			X			x		x			x		x			x		x				7
Beto	X				x				x			x			x				x			6
Carlos		x		x			x			x				x			x				x	7

E23:

Día \ Gana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total	
Ana	X			x			x			x			x			x			x			7
Beto		x			x			x			x			x			x				x	7
Carlos			x			x			x			x			x			x				6

**Justificación:**

En las dos secuencias anteriores, los estudiantes E6 y E23, sólo manifiestan la presencia de la componente “a” en sus respuestas en el sentido de que la suma corresponde al total de sorteos, así como la asignación de un solo ganador por sorteo. Las otras componentes de esta categoría no se presentaron al no considerar rachas adecuadas en sus secuencias, no asignar valores de frecuencia cercanos a los teóricos esperados y presentar claros patrones determinísticos (en amarillo).

Multiestructural (M): Tiene en cuenta sólo dos componentes de la tarea.

**Ejemplo de la Componente ac:**

E20:

Día Gana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total	
Ana	x							x	x					x	x	x					<b>6</b>	
Beto		x	x		x	x				x	x		x					x			x	<b>9</b>
Carlos				x			x					x						x	x			<b>5</b>

E42:

Día Gana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total
Ana	x				x						x						x				<b>4</b>
Beto		x	x			x	x		x	x		x	x		x	x		x	x		<b>12</b>
Carlos				x			x						x							x	<b>4</b>

**Justificación:**

En el caso de los estudiantes E20 y E42, asignan un solo ganador por sorteo, además que verifica que la suma coincida con el número total de sorteos, y tiene en cuenta la aleatoriedad al proporcionar valores de frecuencia cercanos a los teóricos esperados. Aunque presentan claros patrones determinísticos en sus secuencias.

**Ejemplo de la Componente ad:**

E3:

Día Gana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total
Ana			x	x				x	x		x		x					x	x		<b>8</b>
Beto	x	x			x	x								x	x	x	x			x	<b>9</b>
Carlos							x			x		x									<b>3</b>

E30:

Día \ Gana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total	
Ana			x				x			x		x								x		5
Beto	x			x	x				x				x	x	x		x	x			x	10
Carlos		x				x		x			x					x						5

**Justificación:**

En este caso, las respuestas de los estudiantes E3 y E30 presentan un solo ganador por sorteo y una frecuencia mayor al evento con mayor probabilidad. Si bien no se observan rachas adecuadas, si se percibe un sentido de aleatoriedad al no presentar algún patrón determinístico.

Relacional (R): Tiene en cuenta tres de las componentes de la tarea.

**Ejemplo de la Componente *abd*:**

E38:

Día \ Gana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total	
Ana	x						x		x				x				x					5
Beto		x	x		x	x		x		x	x			x	x	x						10
Carlos				x								x						x	x	x		5

**Justificación:**

El estudiante E38 presenta en su respuesta las componentes “abd”, ya que eligió a un sólo ganador por sorteo, la suma de los sorteos corresponde al total de estos, presenta dos rachas de tres sorteos en sus secuencias (en azul), y además no muestra algún patrón determinístico.

**Ejemplo de la Componente *acd*:**

E4:

Día \ Gana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total	
Ana						x		x								x					3	
Beto		x			x					x	x	x	x	x	x		x	x			x	11
Carlos	x		x	x			x		x											x		6

E25:

Día \ Gana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total	
Ana			x					x							x		x	x				5
Beto	x	x		x	x	x			x	x			x	x		x				x	x	12
Carlos							x				x	x										3

**Justificación:**

En las respuestas de los estudiantes E4 y E25, se identifican tres de las componentes de la clasificación, “acd”; ya que en ambos casos se eligió a un solo ganador y se verificó que la suma corresponde al total de los sorteos, se proporcionan frecuencias cercanas a los valores teóricos esperados y no se perciben patrones determinísticos en las secuencias.

Abstracción Extendida (AE): Tiene en cuenta las cuatro componentes de la tarea: “a”, “b”, “c”, y “d”.

**Ejemplo de la Componente abcd:**

E17:

Día \ Gana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total	
Ana									x	x	x	x		x						x		6
Beto	x			x	x	x	x	x					x				x				x	9
Carlos		x	x												x	x		x				5

E35:

Día \ Gana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total	
Ana	x					x						x	x		x	x	x					7
Beto			x	x	x				x	x	x								x		x	8
Carlos		x					x	x						x						x		5

**Justificación:**

Las respuestas obtenidas de los estudiantes E17 y E35 presentan las cuatro componentes de la tarea, ya que eligieron a un solo ganador por sorteo, la suma de los sorteos corresponde al total de estos, presentan cuando menos dos rachas con un mínimo de tres experimentos, consideran la aleatoriedad al asignar frecuencias cercanas a los valores teóricos esperados, y por último, no se identifican patrones determinísticos en sus secuencias.

La siguiente tabla resumen presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes de acuerdo al nivel de razonamiento y a las componentes involucradas.

TEST DIAGNÓSTICO - PREGUNTA 1													
P	U			M				R				AE	
	a			ac	ad			abd	acd			abcd	
E8	E9	E24	E40	E6	E2	E13	E28	E38	E1	E25	E34	E45	E17
	E10	E27	E44	E20	E3	E14	E30		E4	E31	E36	E46	E19
	E12	E29		E26	E7	E16	E41		E5	E32	E39		E35
	E23	E37		E42	E11	E18			E21	E33	E43		
NP	Los estudiantes E15 y E22, no realizaron la actividad.												

Tabla 5.3.1. Clasificación de las respuestas de la pregunta 1

### Análisis parcial por nivel de razonamiento:

Como se puede observar en la tabla, sólo 1/46 estudiantes presentó una respuesta en el nivel Preestructural; es decir, no presenta componente alguna. Mientras que en el nivel de razonamiento Uniestructural, considerando únicamente la componente *a*, se ubicaron 10/46 respuestas. Con respecto al nivel de razonamiento Multiestructural, donde se consideraron las respuestas que contenían dos componentes, se encuentran 15/46, dividiéndose en 4/15 para las componentes *ac* y 11/15 correspondientes a las componentes *ad*. El nivel de razonamiento Relacional, donde se presentan tres componentes, está formado por 15/46 respuestas, a saber: 1/15 y 14/15 consideran las componentes *abd* y *acd*, respectivamente. Por último, el nivel Abstracto Extendido se ve representado por 3/46 respuestas, recordando que éstas deben incluir las cuatro componentes *abcd*. El siguiente gráfico muestra un resumen de este análisis.



Figura 5.3.1. Clasificación por nivel de razonamiento de la pregunta 1

**Análisis parcial por componente:**

En la siguiente tabla se muestra la clasificación de acuerdo al nivel de razonamiento y componente, de las respuestas de la pregunta 1 aportadas por los participantes.

Nivel	Componente(s)	Participantes	Total
Preestructural	----	1	1
Uniestructural	a	10	10
Multiestructural	ac	4	15
	ad	11	
Relacional	abd	1	15
	acd	14	
Abstracto Extendido	abcd	3	3
NP	----	2	2
<b>Total</b>		<b>46</b>	<b>46</b>

Tabla 5.3.2. Clasificación de acuerdo al nivel y componente de la pregunta 1

Como se puede observar en la tabla anterior, 1/46 se ubicó en el nivel Preestructural, con una ausencia de cualquier componente de la clasificación; mientras que en 33/46 respuestas se identifica la presencia de la componente *a*; la componente *b* se percibe en 4/46 respuestas aportadas por los estudiantes; con relación a la componente *c*, ésta aparece en 21/46 del total de respuestas obtenidas; mientras que la componente *d*, se observa en 29/46 respuestas por parte de los alumnos.

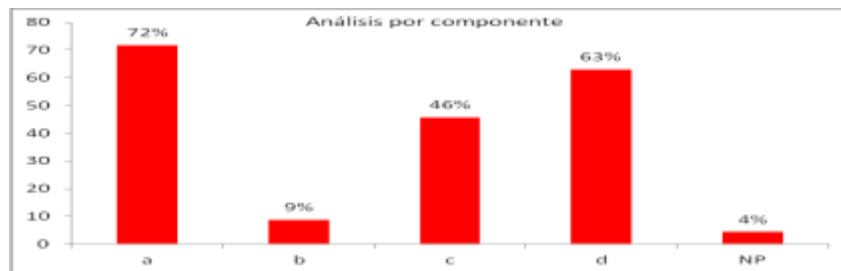


Tabla 5.3.3. Frecuencia de las componentes de la pregunta 1

El gráfico anterior muestra que el 72% (casi tres cuartas partes) de las respuestas aportadas por los alumnos contienen la componente *a*; es decir, que este porcentaje de estudiantes interpretaron acertadamente el sentido de la representación tabular de los resultados de los sorteos a 20 días, o bien asignaron correctamente una mayor frecuencia al evento con



mayores posibilidades de éxito (que gane Beto). Por otro lado, la componente  $b$  sólo se presenta en el 9% de las respuestas de los estudiantes; esto se interpreta como que el alumno no identifica que la existencia de secuencias con rachas grandes o cadenas de repeticiones son posibles, o en su defecto, no con la frecuencia con que realmente aparecen. Este aspecto no es de extrañar ya que este concepto requiere de un nivel de razonamiento probabilístico elevado y que ha sido señalado en un gran número de estudios. Con respecto a la componente  $c$ , podemos apreciar que casi la mitad –un 46%– mostró una buena interpretación de las posibilidades de éxito de cada miembro de la familia, esto podría interpretarse (cuando menos en un nivel básico) como que el alumno tiene una buena noción de la distribución de frecuencias para los resultados en los sorteos para los participantes en el experimento, al asignarles valores de frecuencia cercanos a los teóricos esperados. También resulta revelador que más del 60% de las respuestas mostraron otro aspecto importante del sentido de aleatoriedad de la tarea, al no seguir algún patrón de carácter determinístico en el desarrollo de las secuencias en los sorteos para los 20 días. Esto podría ser un indicio de una cierta percepción de la variabilidad del experimento.

#### **5.4 Informe de la Pregunta 2**

En este apartado describiremos los resultados de la pregunta 2 del cuestionario que realizaron los estudiantes.

2. ¿Cuáles son los posibles resultados del **número de águilas** que se obtienen en un sorteo de los dos volados?

##### **Objeto de estudio:**

*Recorrido de la variable aleatoria y/o los eventos del espacio muestral*

##### **Objetivo:**

*Observar si el estudiante identifica el recorrido de la variable aleatoria (V.A.), “número de águilas”, y/o algún evento del espacio muestral: “AA, AS, SA, SS”, relacionados con la situación.*

**Componentes de la Respuesta:**

En esta tarea de identificar el recorrido de la variable aleatoria y/o algún evento del espacio muestral, se tuvieron en cuenta las siguientes componentes para evaluar la respuesta de cada estudiante:

- a) Los elementos del recorrido de la variable aleatoria (número de águilas: 0, 1, 2).
- b) Los eventos del espacio muestral relacionado con la situación (AA; AS; SA; SS).

**Categorías de Análisis de Respuesta y Ejemplos:**

A continuación se presenta una ejemplificación del tipo de respuestas dadas por los estudiantes de acuerdo a su nivel.

Preestructural (P): Proporciona una respuesta diferente a cualquiera de las opciones correctas (“0, 1 o 2 águilas” o “AA, AS, SA, SS”), o que no está en relación con la pregunta, como una manifestación de la falta de comprensión de la pregunta.

<b>Ejemplos:</b>	<b>Justificación:</b>
E4: <i>“No tiene un orden de cuantas aguilas saldrán o no saldrán”</i>	Los estudiantes responden sin una verdadera comprensión de la pregunta, ya que hacen referencia al orden o al porcentaje de águilas, y no mencionan algún elemento del recorrido de la V.A. o del espacio muestral.
E23: <i>“50% de 100%”</i>	

Uniestructural (U): Identifica sólo UN elemento del recorrido de la variable aleatoria (número de águilas: 0, 1, 2), o bien, identifica UN sólo evento del espacio muestral (AA; AS; SA; SS) para el lanzamiento de dos monedas.

<b>Ejemplos de la Componente “a”:</b>	<b>Justificación:</b>
E12: <i>“que caiga mas veces 1 aguilas”</i>	Los estudiantes sólo mencionan la opción de 1 águila dentro del recorrido de la V.A. para el lanzamiento de los dos volados.
E26: <i>“un agila por cada sorteo”</i>	

E14: <i>“serian 2 por que son las únicas águilas que hay en las monedas”</i>	En este caso, las respuestas de los estudiantes proporcionan un valor diferente del recorrido de la V.A. de los ejemplos anteriores -2 águilas-; sin embargo, permanecen en el nivel Uniestructural al mencionar un solo valor.
E35: <i>“Solo pueden Salir dos aguilas porque Solo tengo o tendrían 2 monedas &amp; cada moneda Solo tiene 1”</i>	

Multiestructural (M): Identifica DOS de los elementos del recorrido de la V.A., o bien, DOS de los eventos del espacio muestral para el lanzamiento de dos monedas.

<b>Ejemplos de la Componente “a”:</b>	<b>Justificación:</b>
E6: <i>“Es posible que por cada volado caiga un águila pero al siguiente volado caigan 2 aguilas pero siempre es probable que caiga solo 1”</i>	Las respuestas de estos estudiantes contienen dos elementos del recorrido de la V.A., mencionan 1 águila y 2 águilas como las posibilidades, ignorando el valor de 0 para el recorrido. Como punto aparte, destaca la diferencia de contexto entre las dos respuestas; sin embargo, para fines de análisis la clasificación es la misma.
E18: <i>“1 o 2”</i>	
<b>Ejemplos de la Componente “b”:</b>	<b>Justificación:</b>
E21: <i>“Pues puede salir solo estas combinaciones águila-sol, águila-águila, sol-águila, sol-sol, 2 de 4”</i>	La respuesta del E21 indica el espacio muestral completo {(AS), (AA), (SA), (SS)}; considerando correctamente el criterio de orden de los eventos simples (AS) y (SA).

Relacional (R): Identifica los TRES elementos del recorrido de la variable aleatoria, o bien, identifica TRES de los eventos del espacio muestral relacionados con la situación: Águila-Águila, Águila-Sol, Sol-Sol (el alumno no tiene en cuenta el criterio de orden de los eventos simples).

<b>Ejemplos de la Componente “a”:</b>	<b>Justificación:</b>
E13: “tres 0,1 y 2”	En el caso de estos dos estudiantes, sus respuestas muestran el recorrido completo de la V.A., ya que mencionan con claridad las posibilidades para el número de águilas: 0, 1 y 2.
E34: “Pues un 50% de posible resulta que puede ser 2 aguilas o ninguna a solo una”	
<b>Ejemplos de la Componente “b”:</b>	<b>Justificación:</b>
E9: “que uno salga Aguila y el otro sol, que los dos Salgan Aguila o que los dos salgan sol”	Las respuestas de estos estudiantes hacen referencia a los eventos del espacio muestral. En ambos casos mencionan tres de los cuatro eventos posibles, el E9 indica {(AS), (AA), (SS)}, mientras que el E42 {(AA), (SA), (SS)}. Destaca que en ambos casos ignoran la posibilidad de ocurrencia de los eventos (SA) y (AS), respectivamente; es decir, el criterio de orden de los eventos simples.
E42: “1, aguilas, aguilas 2. sol aguilas, 3 sol, sol”	

Abstracción Extendida (AE): Identifica todos los eventos del espacio muestral para el lanzamiento de dos monedas (el alumno tiene en cuenta el criterio de orden de los eventos simples).

La siguiente tabla presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes de acuerdo al nivel de razonamiento y a las componentes involucradas.

TEST DIAGNÓSTICO - PREGUNTA 2														
P						U				M	R			AE
						a				a	a		b	b
E1	E5	E10	E23	E30	E39	E12	E17	E31	E37	E6	E13	E34	E9	E21
E2	E7	E11	E24	E32	E43	E14	E26	E33	E38	E18	E20	E41	E40	
E4	E8	E19	E25	E36	E46	E16	E27	E35	E45	E28	E29	E44	E42	
NP	Los estudiantes E3, E15 y E22, no realizaron la actividad.													

Tabla 5.4.1. Clasificación de las respuestas de la pregunta 2

**Análisis parcial por nivel de razonamiento:**

Con base en la tala anterior, la mayor parte de las respuestas dadas por los estudiantes se ubican en el nivel de razonamiento Prestructural, con 18/46; mientras que el nivel Uniestructural contiene 12/46 respuestas, particularmente de la componente *a*, mencionando un solo elemento del recorrido de la variable aleatoria. Por otro lado, el nivel de razonamiento Multiestructural sólo se presenta en 3/46 estudiantes, ya que sus respuestas incluyen dos elementos de la componente *a*. En un nivel Relacional se encuentran 9/46 respuestas aportadas por los alumnos: 6/9 mencionan todo el recorrido de la variable aleatoria (componente *a*), y 3/9 manifiestan tres elementos del espacio muestral (componente *b*), ya que no consideran el criterio de orden de los eventos simples (AS) y (SA). El nivel Abstracto Extendido sólo se presenta en 1/46 respuestas dadas por los estudiantes, al mencionar todos los eventos del espacio muestral, por lo que considera correctamente el criterio de orden de los eventos simples. El siguiente gráfico muestra un resumen de este análisis.

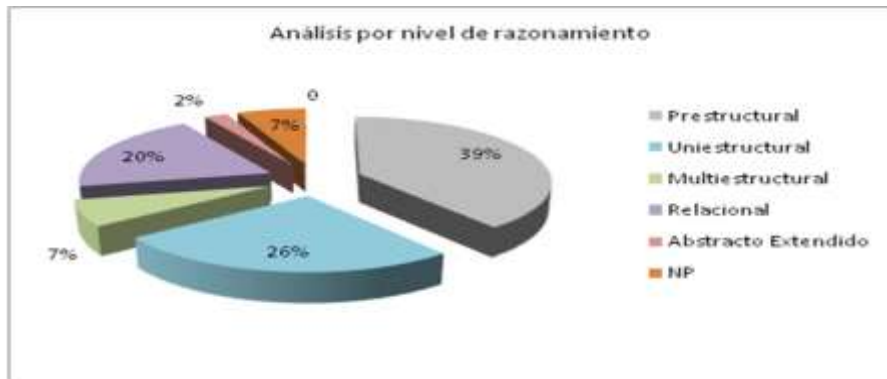


Figura 5.4.1. Clasificación por nivel de razonamiento de la pregunta 2

**Análisis parcial por componente:**

En la siguiente tabla se muestra la clasificación de acuerdo al nivel de razonamiento y componente, de las respuestas de la pregunta 2 aportadas por los 46 participantes.

Nivel	Componente(s)	Participantes	Total
Prestructural	----	18	18
Uniestructural	a	12	12
Multiestructural	a	3	3
Relacional	a	6	9
	b	3	
Abstracto Extendido	b	1	1
NP	----	3	3
<b>Total</b>		<b>46</b>	<b>46</b>

Tabla 5.4.2. Clasificación de acuerdo al nivel y componente de la pregunta 2

Como se puede observar, 18/46 respuestas no presentan componente alguna al no considerar algún elemento del recorrido de la variable aleatoria y/o algún evento del espacio muestral; 11/46 respuestas aportadas por los alumnos presentan la componente *a*, consideran al menos un elemento del recorrido de la variable aleatoria; mientras que la componente *b* se presenta en sólo 4/46 respuestas, es decir, pocos estudiantes mencionan algún evento del espacio muestral. El gráfico siguiente muestra un resumen de esta etapa del análisis.

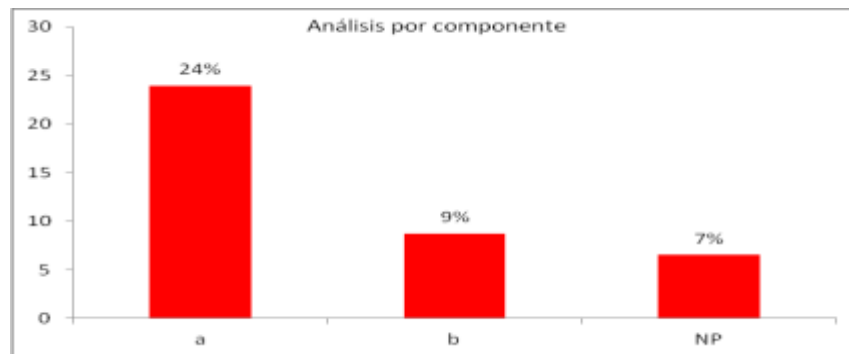


Tabla 5.4.3. Frecuencia de las componentes de la pregunta 2

Como puede verse en el gráfico anterior, el 46% (21/46) de las respuestas arrojadas por los alumnos contienen la componente *a*, es decir, en casi la mitad de las respuestas se identificó algún elemento del recorrido de la variable aleatoria. Sin embargo de este porcentaje, 15/21

respuestas pertenecen a los niveles Uniestructural y Multiestructural, esto es un reflejo de que identificaron o bien un solo valor del recorrido de la V.A. o cuando mucho dos de estos valores; solamente 6/21 respuestas mencionaron todo el recorrido de la V.A. Por otro lado, menos de la décima parte de las respuestas (9%) hacen referencia a algún evento del espacio muestral, lo que muestra que este concepto resulta más complicado para los estudiantes, en particular no consideran el criterio de orden de los eventos simples (AS) y (SA). También destaca que más de una tercera parte de las respuestas (39%) se ubican en el nivel Preestructural, lo que implica que no se tiene claro el recorrido de la variable aleatoria, o bien, no se logran relacionar los posibles resultados del experimento probabilístico con la asignación de algún valor numérico.

### **5.5 Informe de la Pregunta 3**

En este apartado describiremos los resultados de la pregunta 3 del cuestionario que realizaron los estudiantes.

3. ¿Te parece justo el juego que propone Beto? Explica tu respuesta.
--

#### **Objeto de estudio:**

*Decisión sobre la “justicia” del juego.*

#### **Objetivo:**

*Identificar el posible sesgo de equiprobabilidad o la interpretación del concepto de “justicia”.*

#### **Componentes de la Respuesta:**

En esta tarea de caracterizar las distintas interpretaciones de justicia respecto a la situación aleatoria planteada, se tuvieron en cuenta las siguientes componentes para evaluar la respuesta de cada estudiante:

- a) Relaciona la “justicia” con una situación de azar y no determinista. Alude a la suerte o incertidumbre. Aluden a la oportunidad de ganar de los tres participantes.

- b) Relaciona la “justicia” con la característica de equiprobabilidad de la situación (todos tienen la misma posibilidad de ganar o la misma frecuencia). Y la no “justicia” con la no equiprobabilidad (es decir, que uno de los eventos tiene mayor posibilidad de ganar o que tiene mayor frecuencia de ocurrir).
- c) Identifica el evento que tiene mayor posibilidad de ganar (Beto) o el valor de la variable aleatoria con mayor posibilidad de ocurrir (1 águila), o bien con mayor frecuencia; o identifica el evento relacionado con el espacio muestral asociado a un sorteo con mayor probabilidad (águila y sol).
- d) Su argumento se basa en el valor teórico de probabilidad del evento más probable o de la distribución completa. O bien, identifica totalmente el espacio muestral relacionado con la situación y/o el recorrido de la variable aleatoria.

**Categorías de Análisis de Respuesta y Ejemplos:**

A continuación se presenta una ejemplificación del tipo de respuestas dadas por los estudiantes de acuerdo a su nivel.

Preestructural (P): Da una respuesta positiva o negativa, pero justifica su respuesta de acuerdo a sus creencias, o bien, relaciona la justicia con una regla social de aceptar las condiciones del juego, sean o no equiprobables.

<b>Ejemplos:</b>	<b>Justificación:</b>
E12: <i>“Si, ya que asi nadie puede hacer trampa”</i>	Las respuestas de los estudiantes E12 y E29 hacen referencia de la “justicia” del juego; sin embargo, su justificación no se basa en algún criterio probabilista, más bien en una concepción idiosincrática.
E29: <i>“Pues si, si lo haceptaron sus padres, por que lo dejan al asar”</i>	

Uniestructural (U): Tiene en cuenta sólo una componente de la tarea: “a”, “b”, “c” o “d”.

<b>Ejemplos de la Componente “a”:</b>	<b>Justificación:</b>
E1: <i>“Si por que el resultado podría variar y</i>	Las respuestas de los estudiantes E1 y E37



<i>no siempre ser el mismo así ya habrá una variabilidad de los ganadores”</i>	muestran una relación entre la “justicia” del juego y lo azaroso del mismo; además de la aleatoriedad de los resultados o la oportunidad de ganar de los participantes.
E37: <i>“Si, por que ya seria al azar y saldrian diferentes resultados”</i>	
<b>Ejemplos de la Componente “b”:</b>	<b>Justificación:</b>
E2: <i>“No por que no es equitativo”</i>	En este caso, las respuestas refieren la condición de “justicia” del juego con la no equiprobabilidad de los resultados.
E28: <i>“Masomenos, por que por lo regular las caras caen desiguales”</i>	

Multiestructural (M): Tiene en cuenta dos de las componentes de la tarea: “a”, “b”, “c” o “d”.

<b>Ejemplos de la Componente “ab”:</b>	<b>Justificación:</b>
E17: <i>“Si es justo ya que nadie discute sobre el control es por suerte nadie tiene mas ni nadie tiene menos”</i>	Las respuestas de los estudiantes E17 y E31 refieren un sentido de aleatoriedad o suerte hacia los posibles resultados del juego; además, el E17 alude la equiprobabilidad del experimento y el E31 parece referir cierta ventaja en las oportunidades de ganar de algún participante.
E31: <i>“no tanto ya que la suerte puede ser mejor para algunos que para otros”</i>	
<b>Ejemplos de la Componente “ac”:</b>	<b>Justificación:</b>
E8: <i>“No por que es mas fácil que caiga una águila y después no por que es al azar”</i>	La respuesta anterior muestra una clara inclinación por el azar de la situación del juego, y hace referencia al evento que tiene mayor probabilidad de ocurrir –que salga un águila-.
<b>Ejemplos de la Componente “bc”:</b>	<b>Justificación:</b>
E6: <i>“No, deberían hacerlo con otra forma ya que esta forma beneficia mas a Beto”</i>	En estas respuestas se alude a la no “justicia” del juego, con una característica de no equiprobabilidad, e indican el evento con una mayor probabilidad de ocurrir.
E23: <i>“No porque el es el que tiene menos probabilidades”</i>	

**Relacional (R):** En sus argumentos relaciona tres de las componentes de la tarea: “a”, “b”, “c” o “d”.

<b>Ejemplos de la Componente “abc”:</b>	<b>Justificación:</b>
E32: <i>“No porque depende mucho de la suerte y es más probable que gane beto”</i>	La respuesta de este estudiante indica el sentido de aleatoriedad del experimento, así como la no “justicia” del experimento debido a la aleatoriedad del mismo, así como la no equiprobabilidad de los resultados al reconocer el evento que tiene mayor oportunidad de ocurrir, que es el que gane Beto.
<b>Ejemplos de la Componente “bcd”:</b>	<b>Justificación:</b>
E46: <i>“No, por que tiene un 50% de probabilidad de ganar Beto”</i>	El alumno E46 relaciona la condición de “justicia” con la no equiprobabilidad al asignar un participante ganador, al evento con mayor oportunidad de ocurrir –que gane Beto-; además que se basa en el valor teórico más probable.

**Abstracción Extendida (AE):** En sus argumentos relaciona las cuatro componentes de la tarea: “a”, “b”, “c” y “d”; sin embargo, no se presentaron respuestas en esta categoría.

La siguiente tabla presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes de acuerdo al nivel de razonamiento y a las componentes involucradas en esta pregunta.

TEST DIAGNÓSTICO - PREGUNTA 3															
P	U						M						R		AE
	a		B				ab	ac	Bc				abc	bcd	
E12	E1	E37	E2	E11	E21	E42	E17	E8	E6	E24	E30	E43	E32	E46	
E18	E7	E40	E4	E13	E28	E44	E31		E10	E25	E34		E33		
E29	E14		E5	E16	E36	E45	E35		E20	E26	E38				
			E9	E19	E41				E23	E27	E39				

**NP: Los estudiantes E3, E15 y E22, no realizaron la actividad.**

Tabla 5.5.1. Clasificación de las respuestas de la pregunta 3

**Análisis parcial por nivel de razonamiento:**

Como se observa en los datos de la tabla anterior, el nivel Preestructural se presenta en 3/46 respuestas de los participantes; el nivel Uniestructural es el más numeroso, dado que incluye 20/46 de las respuestas aportadas por los estudiantes, 5/20 respuestas se centran en la componente *a*, y 15/20 en la componente *b*; en el nivel Multiestructural se encuentran 17/46 respuestas, 3/17 se enfocan en la componente *ab*, 13/17 en la componente *bc*, y sólo 1/17 en la componente *ac*; mientras que en un nivel Relacional se ubican 3/46 de las respuestas, con 2/3 para la componente *abc*, y 1/3 para la componente *bcd*; finalmente, ninguna respuesta se presentó las características suficientes para considerarse en un nivel de razonamiento de Abstracto Extendido.

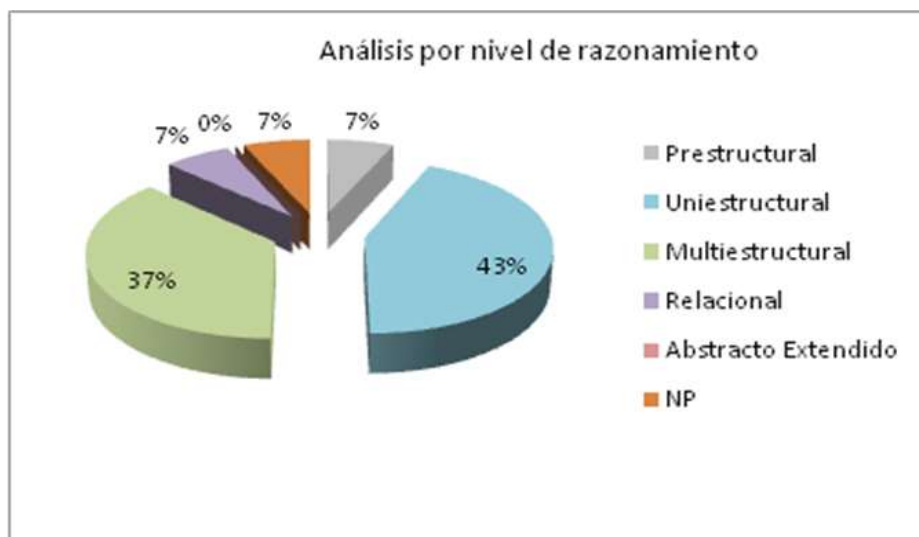


Figura 5.5.1. Clasificación por nivel de razonamiento de la pregunta 3

**Análisis parcial por componente:**

En la siguiente tabla se muestra la clasificación de acuerdo al nivel de razonamiento y componente, de las respuestas de la pregunta 3 aportadas por los 46 participantes.

Nivel	Componente(s)	Participantes	Total
Prestructural	----	3	3
Uniestructural	a	5	20
	b	15	
Multiestructural	ab	3	17
	ac	1	
	bc	13	
Relacional	abc	2	3
	bcd	1	
Abstracto Extendido	abcd	0	0
NP	----	3	3
<b>Total</b>		<b>46</b>	<b>46</b>

Tabla 5.5.2. Clasificación de acuerdo al nivel y componente de la pregunta 3

Como podemos observar en la tabla anterior, en 11/46 estudiantes consideran la componente *a*; es decir, relaciona la “justicia” del juego con el azar, la suerte y/o la incertidumbre. Por otro lado, 34/46 perciben la componente *b*, relaciona la “justicia” con la característica de equiprobabilidad de la situación (todos tienen la misma posibilidad de ganar o la misma frecuencia), y la no “justicia” con la no equiprobabilidad (es decir, que uno de los eventos tiene mayor posibilidad de ganar o que tiene mayor frecuencia de ocurrir)”. Por su parte la componente *c*, es considerada por 17/46 participantes, ya que identifican el evento con mayor posibilidad de ganar (Beto), el valor de la variable aleatoria con mayor posibilidad de ocurrir (1 águila), o bien identifican el evento relacionado con el espacio muestral asociado a un sorteo con mayor probabilidad (águila y sol). Finalmente, la componente *d* se presenta con menor frecuencia en las respuestas de los participantes, sólo un estudiante basa su argumento en el valor teórico de probabilidad del evento más probable. El gráfico siguiente muestra en resumen el análisis de esta etapa.

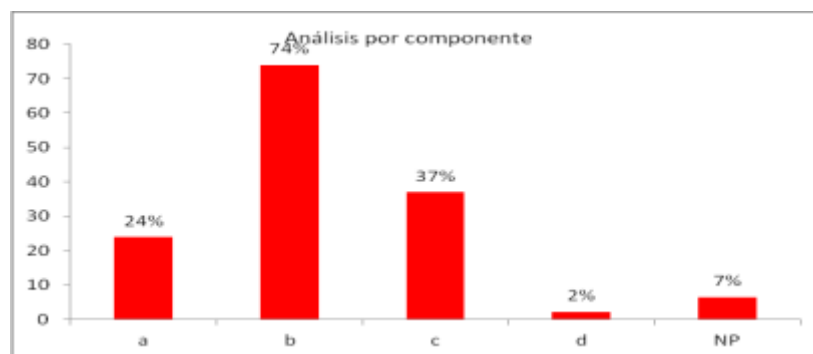


Tabla 5.5.3. Frecuencia de las componentes de la pregunta 3

Se puede observar que la componente  $a$  se presenta en casi una cuarta parte (24%) del total de las respuestas, es decir que este porcentaje de los estudiantes justificó la justicia del experimento basándose en el carácter aleatorio de la situación o bien a la incertidumbre en los resultados. En casi tres cuartas partes de las respuestas (74%) se relaciona a la componente  $b$ , es decir que justifican la posible justicia del juego con la equiprobabilidad en los resultados, esto no es de extrañar ya que en los estudiantes persiste la creencia (principalmente en un sentido idiosincrático) de que por el simple hecho de aceptar participar en determinado experimento entonces es justo o bien se relaciona con que el valor teórico (desde el punto de vista frecuentista) de la probabilidad de caer águila en cada volado es 50%. Del mismo modo se considera que al no tener la misma probabilidad de ocurrencia los distintos eventos, por ende no es justo el juego. Por otro lado, poco más de la tercera parte (37%) de los alumnos presentan en sus respuestas rasgos de la componente  $c$ , al argumentar que un evento tiene mayor probabilidad de ocurrir, o que la frecuencia con que caerá un águila es mayor. Mientras que la componente  $d$  sólo se presenta en un 2% de las respuestas de los participantes, lo que muestra una vez más que la concepción del espacio muestral se perfila como un reto importante para los estudiantes.

### **5.6 Informe de la Pregunta 4**

En este apartado describiremos los resultados obtenidos de la pregunta 4 del cuestionario que realizaron los estudiantes.

4. Si tuvieras que escoger entre estar en el papel de la Sra. Ana, Beto o el Sr. Carlos, ¿por quién te inclinarías para ganar el juego? ¿por qué?

**Objeto de estudio:**

*Toma de decisión en el juego asociada a la elección del evento más probable.*

**Objetivo:**

*Indagar sobre los argumentos de una medida de probabilidad, según la respuesta anterior, y ver si el estudiante relaciona esta medida con el espacio muestral, con el recorrido de la variable aleatoria, o con otros argumentos.*

**Componentes de la Respuesta:**

En esta tarea relacionada con la toma de decisiones bajo incertidumbre, se tuvieron en cuenta las siguientes componentes para evaluar la respuesta de cada estudiante:

- a) Identifica el evento con mayor posibilidad de éxito (Beto); su argumento se basa en que tiene mayor probabilidad sin proporcionar el valor teórico (probabilidad subjetiva).
- b) Identifica el evento con mayor posibilidad de éxito (Beto); su argumento se relaciona con el aspecto aleatorio de la situación.
- c) Afirma que el evento de obtener un águila y un sol tiene mayor probabilidad de ocurrir que los eventos águila-águila y sol-sol. Esto implica que relaciona el espacio muestral y el recorrido de la variable aleatoria: 0 Águilas como Sol y Sol, 1 Águila como Águila y Sol, 2 Águilas como Águila y Águila. O bien, identifica directamente el valor 1 del recorrido de la variable aleatoria (un águila) como más probable de ocurrir (relación de probabilidad entre los eventos del espacio muestral parcial: AA, AS y SS, o de los valores del recorrido de la variable número de águilas).
- d) Identifica el aspecto de conmutatividad de los eventos en el espacio muestral: AS y SA.

**Categorías de Análisis de Respuesta y Ejemplos:**

A continuación se presenta una ejemplificación del tipo de respuestas dadas por los estudiantes de acuerdo a su nivel.

Preestructural (P): No se decide por alguna de las tres personas; se decide por una de las personas con menos probabilidad de éxito (Ana o Carlos); se decide por las tres personas; o bien, argumenta su elección por la persona con mayor probabilidad de éxito (Beto) con base a un razonamiento subjetivo o de tipo idiosincrático (la suerte) no relacionados con el aspecto aleatorio de la situación.

<b>Ejemplos:</b>	<b>Justificación:</b>
E1: <i>“Por ninguno. por qué ninguno puede acertar con precisión quien ganaría”</i>	Las respuestas de los estudiantes no muestran un fundamento probabilístico

E23: <i>“Ana o Carlos porque son los que tienen la misma probabilidad de ganar”</i>	relacionado con el objeto de estudio. En el primer caso, el E1 no se decide por algún ganador, mientras que el E23 elige a los participantes con menos probabilidad de ganar el juego.
---	--

Uniestructural (U): Tiene en cuenta la componente “a” o “b”, pero no ambas, de la tarea.

<b>Ejemplos de la Componente “a”:</b>	<b>Justificación:</b>
E2: <i>“Beto por que pienso que tiene mas probabilidad”</i>	En ambos casos, las respuestas eligen correctamente al participante con mayor probabilidad de ganar; sin embargo, su fundamento es del tipo subjetivo, basado en sus creencias o formar de pensar.
E24: <i>“Beto porque tiene mas probabilidades”</i>	
<b>Ejemplos de la Componente “b”:</b>	<b>Justificación:</b>
E27: <i>“Escogeria el de Beto porque es mucho mayor la posibilidad de ganar el juego, aunque no siempre seria de esa manera”</i>	En este caso el estudiante responde correctamente al elegir al sujeto ganador; su argumentación se relaciona con la aleatoriedad de los resultados.

Multiestructural (M): Tiene en cuenta dos de las componentes: “a”, “b” o “c”.

<b>Ejemplos de la Componente “ac”:</b>	<b>Justificación:</b>
E1: <i>“Beto por que está apostando por solo una cara y tendrá mas posibilidad que los otros por 2 caras”</i>	En estas respuestas se identifica de forma acertada al sujeto con mayor probabilidad de ganar; basando su argumento en que son más probables los resultados impares Águila-Sol o Sol-Águila.
E26: <i>“por el de Beto por que se me hace mas probable que en la mayoría de los lanzamientos salgan conbinadas las monedas”</i>	

Relacional (R): En sus argumentos relaciona tres de las cuatro componentes de la tarea: “a”, “b” y “c”.

<b>Ejemplos de la Componente “abc”:</b>	<b>Justificación:</b>
E32: “Beto porque al azar es más probable que salga 1 aguila a que salgan 2 pares”	En esta respuesta se hace referencia al carácter aleatorio de la situación; elige al participante con mayor probabilidad de éxito; además de identificar correctamente el elemento más probable del recorrido de la variable aleatoria –1 águila–.

Abstracción Extendida (AE): En sus argumentos relaciona las cuatro componentes de la tarea: “a”, “b”, “c” y “d”; sin embargo, no se presentaron respuestas en esta categoría.

La siguiente tabla presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes de acuerdo al nivel de razonamiento y a las componentes involucradas en esta pregunta.

TEST DIAGNÓSTICO - PREGUNTA 4													
P				U			M					R	AE
				a		b	ac					abc	
E4	E16	E29	E44	E2	E24	E27	E1	E11	E26	E34	E41	E32	
E8	E18	E30		E7	E25		E5	E12	E28	E35	E42		
E13	E21	E38		E10	E39		E6	E19	E31	E36	E46		
E14	E23	E40		E17	E43		E9	E20	E33	E37			

NP: Los estudiantes E3, E15, E22 y E45, no realizaron la actividad.

Tabla 5.6.1. Clasificación de las respuestas de la pregunta 4

**Análisis parcial por nivel de razonamiento:**

Como se muestra en la tabla anterior, 13/46 respuestas proporcionadas por los estudiantes se ubican en un nivel de razonamiento Preestructural, dado que no presentan alguna de las componentes del análisis; el nivel Uniestructural se percibe en 9/46 de las respuestas, 8/9 respuestas consideran la componente *a*, y sólo 1/9 la componente *b*. La mayor cantidad de respuestas de los estudiantes (19/46) se ubican en el nivel de razonamiento Multiestructural, enfocándose en la componente *ac*; mientras que sólo 1/46 se presentó en el nivel Relacional, con la relación de componentes *abc*. En esta pregunta no se presentó



respuesta alguna que correspondiera al nivel de razonamiento Abstracto Extendido. El siguiente gráfico muestra un resumen de este análisis.



Figura5.6.1. Clasificación por nivel de razonamiento de la pregunta 4

**Análisis parcial por componente:**

En la siguiente tabla se muestra la clasificación de las respuestas de la pregunta 4 aportadas por los 46 participantes, de acuerdo al nivel de razonamiento y componente.

Nivel	Componente(s)	Participantes	Total
Preestructural	----	13	13
Uniestructural	a	8	9
	b	1	
Multiestructural	abc	19	19
Relacional	abc	1	1
Abstracto Extendido	abcd	0	0
NP	----	4	4
<b>Total</b>		<b>46</b>	<b>46</b>

Tabla 5.6.2. Clasificación de acuerdo al nivel y componente de la pregunta 4

Como se observó, 13/46 estudiantes no presentan componente alguna del análisis en sus respuestas; 28/46 estudiantes identifican correctamente al participante con mayor probabilidad de éxito (Beto), aunque su argumento es de tipo subjetivo y no con un fundamento plenamente probabilístico; asimismo, 21/46 estudiantes identifican el sujeto con mayor posibilidad de éxito (Beto), pero su argumento se relaciona con el aspecto aleatorio de la situación (componente *b*); por otro lado, 20/46 estudiantes mencionan que el evento

de obtener un águila y un sol tiene mayor probabilidad de ocurrir que los eventos águila-águila y sol-sol, esto implica que relacionan el espacio muestral y el recorrido de la variable aleatoria, o bien, identifican directamente el valor del recorrido de la variable aleatoria (un águila) como más probable de ocurrir (la componente  $c$ ); finalmente, ningún estudiante identifica el aspecto de conmutatividad de los eventos AS y SA del espacio muestral (componente  $d$ ). El gráfico siguiente muestra el porcentaje en que fue considerada cada componente.

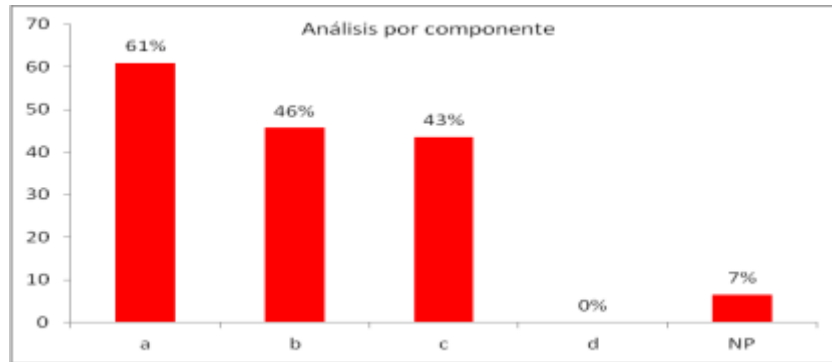


Tabla 5.6.3. Frecuencia de las componentes de la pregunta 4

La componente que más se presenta en el análisis es la  $a$ , es decir que su argumento se basa en que un participante tiene mayor probabilidad (subjetiva) de ganar, esto se da en un 61% de las respuestas de los estudiantes, lo que significa que la mayor parte de estos identificó correctamente al participante con mayor probabilidad de éxito, aunque su argumentación sea del tipo subjetivo y no con un fundamento plenamente probabilístico. Por otro lado, casi la mitad de las respuestas, un 46% presentaron la componente  $b$ , el argumento en este caso tiene que ver con el aspecto aleatorio de la situación. Un porcentaje ligeramente menor, 43% de respuestas hacen referencia a la componente  $c$ , esto implica que relaciona su respuesta con el espacio muestral o el recorrido de la V.A., desde el punto de vista de que 0 águilas representa el evento (SS), 1 águila a (AS) o (SA), sin considerar la conmutatividad de estos eventos; y finalmente que 2 águilas equivalen a (AA). O bien, identifica directamente el valor del recorrido de la V.A. 1 águila como más probable de ocurrir (relación de probabilidad entre los eventos del espacio muestral parcial: AA, AS y SS), esto significa que este porcentaje de alumnos respondieron aludiendo el evento con mayor oportunidad de éxito, o bien identificaron el valor del recorrido de la V.A. más probable, esto es un águila o que los eventos águila-sol, sol-águila (impares) son más

frecuentes que águila-águila y sol-sol (pares o repetidos). En ninguna respuesta se encontró la componente  $d$ , o dicho de otro modo, no se logra identificar el aspecto de conmutatividad de las opciones en el espacio muestral (AS) y (SA) puesto que esto implica un nivel de razonamiento más elevado.

### **5.7 Informe de la Pregunta 5**

En este apartado describiremos los resultados obtenidos de la pregunta 5 del cuestionario que realizaron los estudiantes.

5. ¿Quién crees que gane el primer día? ¿Quién el segundo día? ¿Quién el décimo día? ¿De qué crees que dependan estos resultados?

**Objeto de estudio:**

*Predicción de resultados individuales.*

**Objetivo:**

*Poner a prueba la percepción de la aleatoriedad del juego por parte del estudiante al predecir resultados individuales, o bien, si tiene algún sesgo hacia un pensamiento determinístico.*

**Componentes de la Respuesta:**

Para esta tarea de predicción de resultados individuales se tuvieron en cuenta las siguientes componentes para evaluar la respuesta de cada estudiante:

- a) Escoge el evento que tiene mayor probabilidad de ocurrir.
- b) Tiene sentido de la aleatoriedad al considerar en sus predicciones que en resultados individuales puede ganar cualquiera (Ana o Carlos).
- c) La dependencia de los resultados la relaciona con aspectos aleatorios (impredecibilidad o incertidumbre); o bien, la relaciona con aspectos probabilísticos (probabilidad subjetiva).

- d) En las predicciones no escoge un evento en particular (cualquiera puede ocurrir) y su argumento de dependencia tiene en cuenta los aspectos de aleatoriedad o de probabilidad.

**Categorías de Análisis de Respuesta y Ejemplos:**

A continuación se presenta una ejemplificación del tipo de respuestas dadas por los estudiantes de acuerdo a su nivel.

Preestructural (P): No escoge un evento en particular, su respuesta es “no saber”, lo que refleja su incapacidad para predecir resultados individuales; o bien, no da explicaciones de dependencia de sus resultados. Ninguna respuesta se incluye en esta categoría. No se presentaron respuestas en este nivel de razonamiento.

Uniestructural (U): Tiene en cuenta sólo una de las componentes “a” o “b” de la tarea.

<b>Ejemplos de la Componente “a”:</b>	<b>Justificación:</b>
E34: <i>“Primer día: Beto; Segundo día: Beto; Décimo día: Beto Un poco de la suerte y de quien eche los volados”</i>	Este tipo respuesta sólo contempla el evento con mayor probabilidad, esto es que gana Beto; sin embargo, no toma en cuenta la aleatoriedad del experimento, ni justifica su razonamiento con un aspecto probabilístico.
<b>Ejemplos de la Componente “b”:</b>	<b>Justificación:</b>
E16: <i>“Primer día: Carlos, Segundo día: Ana, Décimo día: Carlos. De la suerte”</i>	En estas dos respuestas no se consideran al evento más probable, aunque si tienen un sentido de aleatoriedad al indicar que puede ganar cualquiera; sin embargo, no justifican su respuesta de modo alguno.
E23: <i>“Primer día: Ana; Segundo día: Carlos; Décimo día: Ana. Suerte”</i>	

Multiestructural (M): Tiene en cuenta dos de las componentes: “a”, “b” o “c”.

<b>Ejemplos de la Componente “ab”:</b>	<b>Justificación:</b>
E4: <i>“Primer día: Beto, Segundo día: Ana, Décimo día: Carlos. De suerte”</i>	En estas respuestas se identifica el participante con más posibilidades de ganar, Beto, además que tienen un sentido de aleatoriedad al asignar otros posibles ganadores, Ana o Carlos; aunque no lo justifican con un argumento probabilista.
E33: <i>“Primer día: Sra Ana; Segundo día: Beto; Décimo día: Beto De la suerte de cada persona”</i>	
<b>Ejemplos de la Componente “ac”:</b>	<b>Justificación:</b>
E24: <i>“Primer día: Beto; Segundo día: Beto; Décimo día: Beto. De la suerte o el azar”</i>	En estas respuestas, además de considerar el evento con más posibilidades de éxito, si le asignan un carácter aleatorio al experimento –E24–, o lo relacionan con un aspecto probabilista de manera subjetiva –E25–.
E25: <i>“Primer día: Beto; Segundo día: Beto; Décimo día: Beto. De tener mas probabilidad de ganar y un poco de la suerte”</i>	
<b>Ejemplos de la Componente “bc”:</b>	<b>Justificación:</b>
E11: <i>“Primer día: Ana, Segundo día: Carlos, Décimo día: Carlos. Pues por el azar y el N. de águilas que necesita cada uno”</i>	Este tipo de respuesta contiene un sentido de aleatoriedad al asignar como ganador a cualquier participante, Ana y Carlos, relacionando esta predicción con el azar y con el número de águilas que se obtienen (frecuencia, aspecto probabilista)

Relacional (R): En sus argumentos relaciona tres de las cuatro componentes de la tarea: “a”, “b” y “c”.

<b>Ejemplos de la Componente “abc”:</b>	<b>Justificación:</b>
E1: <i>“Primer día: Beto, Segundo día: Carlos, Décimo día: Carlos. Con la frecuencia que cae la moneda en</i>	En estas dos respuestas aportadas por los estudiantes, se elige el evento más probable, que gana Beto y se manifiesta un carácter

<i>águilas”</i>	aleatorio al indicar como posibles ganadores a Ana y Carlos; además, en el caso del estudiante E1, su argumento hace referencia al aspecto frecuencial del número de águilas, y en el caso del estudiante E26, al aspecto aleatorio del experimento.
E26: <i>“Primer día: Beto; Segundo día: Carlos; Décimo día: Carlos. del azar por que no siguen un orde”</i>	

Abstracción Extendida (AE): Tiene en cuenta la componente “d” de la tarea, la cual engloba los aspectos primordiales de esta tarea.

<b>Ejemplos de la Componente “d”:</b>	<b>Justificación:</b>
E21: <i>“los 3 tienen misma oportunidad, No se sabe ya que es al azar, Es el azar puede ser cualquiera de los 3. De quien diga algo diferente o le caiga lo que eligio”</i>	El estudiante E21 no presenta un ganador para el juego, pues considera que todos tienen la misma oportunidad de hacerlo; además de que la relaciona su respuesta con la aleatoriedad.

La siguiente tabla presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes de acuerdo al nivel de razonamiento y a las componentes involucradas en esta pregunta.

TEST DIAGNÓSTICO - PREGUNTA 5															
P	U		M						R					AE	
	a	b	ab				ac	bc	abc					d	
	E34	E16	E4	E12	E18	E39	E44	E24	E11	E1	E10	E28	E32	E45	E21
		E23	E7	E13	E20	E40	E46	E25		E2	E19	E29	E37		
			E8	E14	E33	E41		E36		E5	E26	E30	E38		
			E9	E17	E35	E43				E6	E27	E31	E42		

**NP: Los estudiantes E3, E15 y E22, no realizaron la actividad.**

Tabla 5.7.1. Clasificación de las respuestas de la pregunta 5

**Análisis parcial por nivel de razonamiento:**

La tabla anterior muestra que ninguna respuesta proporcionada por los participante se ubica en un nivel de razonamiento probabilístico Preestructural; mientras que en el nivel Uniestructural se ubican 3/46 respuestas, 1/3 de relacionada con la componente *a* y 2/3 con

la componente *b*. Se registrados un mayor número de respuestas en el nivel Multiestructural, 22/46, 18/22 relacionaron las componentes *ab*, 3/22 las componentes *ac* y sólo 1/22 las componentes *bc*; por su parte, se ubicaron 17/46 respuestas en un nivel Relacional, relacionando las componentes *abc*. Finalmente, en el nivel Abstracto Extendido sólo se ubicó 1/46 respuestas, contemplando la componente *d*. El siguiente gráfico muestra el porcentaje de respuestas ubica en cada nivel.



Figura 5.7.1. Clasificación por nivel de razonamiento de la pregunta 5

**Análisis parcial por componente:**

En la siguiente tabla se muestra la clasificación de las respuestas de la pregunta 5 aportadas por los 46 estudiantes, de acuerdo al nivel de razonamiento y componente.

Nivel	Componente(s)	Participantes	Total
Preestructural	----	0	0
Uniestructural	a	1	3
	b	2	
Multiestructural	ab	18	22
	ac	3	
	bc	1	
Relacional	abc	17	17
Abstracto Extendido	d	1	1
NP	----	3	3
<b>Total</b>		<b>46</b>	<b>46</b>

Tabla 5.7.2. Clasificación de acuerdo al nivel y componente de la pregunta 5

La componente *a* fue considerada por 39/46 estudiantes, es decir, en sus predicciones escoge el evento que tiene mayor probabilidad de ocurrir; la componente *b* se presentó en 38/46 respuestas aludiendo a la aleatoriedad, esto al considerar en sus predicciones de resultados individuales en que puede ganar cualquiera (Ana o Carlos); 21/46 estudiantes consideraron la componente *c* en sus predicciones al relacionarlas con aspectos aleatorios (impredecibilidad o incertidumbre), o bien, con aspectos probabilísticos (probabilidad subjetiva); finalmente, la componente con menor presencia en las respuestas de los estudiantes fue la *d*, sólo un estudiante en sus predicciones no escoge un evento en particular (cualquiera puede ocurrir) y en su argumento de dependencia tiene en cuenta los aspectos de aleatoriedad. El gráfico siguiente muestra un resumen de esta etapa del análisis.

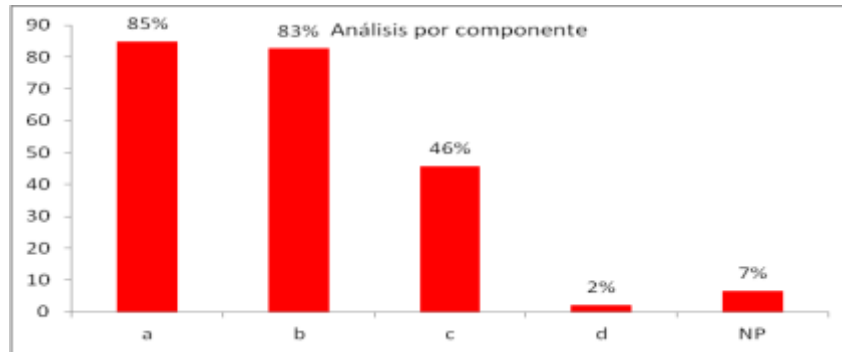


Tabla 5.7.3. Frecuencia de las componentes de la pregunta 5

La tabla nos indica que la componente *a*, se encuentra en la mayoría de las respuestas de los estudiantes (85%), esto es que en este punto del análisis les resulta claro a los estudiantes cuál es el participante que cuenta con la mayor probabilidad de ganar, asimismo la presencia de la componente *b*, con un 83% en las respuestas parece indicar que también un gran número de estos alumnos han percibido en cierto grado el azar o aspecto aleatorio del experimento puesto que si bien saben que Beto cuenta con las mayores posibilidades de éxito, esto no exenta a los demás participantes, Ana y Carlos, de salir ganadores en resultados individuales del juego. La presencia de la componente *c*, es notable al incluirse en un 46% de las respuestas, lo que habla de que casi la mitad de los alumnos relacionan sus resultados con algún tipo de aspecto aleatorio o con un sentido probabilístico, aunque sólo sea de forma subjetiva o de inferencial. Sin embargo, resulta también relevante la poca representación de la componente *d*, con sólo un 2% del total de las respuestas, esto demuestra que no es del todo claro para los estudiantes que la predicción correcta de



resultados individuales es aquella donde cualquiera de los participantes puede salir ganador, y que en este sentido lo menos importante es quien gane el primero, segundo o décimo sorteo, puesto que cualquiera puede hacerlo dado el carácter aleatorio de la actividad, sino más bien lo relevante se encuentra en el contexto de la respuesta; que es precisamente donde debe prevalecer el sentido que se tenga de la aleatoriedad o una inferencia sobre la distribución de las frecuencias de los posibles resultados.

### 5.8 Informe de la Pregunta 6

En este apartado describiremos los resultados obtenidos de la pregunta 6 del cuestionario que realizaron los estudiantes.

6. ¿Cómo piensas que serían los resultados para 40 días? Dibuja las barras de los posibles resultados en cada inciso, teniendo en cuenta la escala dada. Escribe el número de veces o el porcentaje, según sea el caso, sobre cada barra.

The image shows two blank bar chart templates for predicting results over 40 days. The left chart is for absolute frequency (Frecuencia) with a y-axis from 0 to 40. The right chart is for relative frequency (Porcentaje (%)) with a y-axis from 0 to 100. Both charts have an x-axis labeled 'Número de águilas en dos lanzamientos' with categories 0, 1, and 2. The title for both is 'Resultados de 40'.

**Objeto de estudio:**

*Predicción Gráfica de Frecuencias Absolutas y Frecuencias Relativas (%) a Corto Plazo.*

**Objetivo:**

*Que los estudiantes realicen predicciones, a corto plazo, sobre distribuciones de frecuencia en términos de valores absolutos y relativos (%) del experimento del lanzamiento de dos monedas.*

**Componentes de la Respuesta:**

Para esta tarea de predicción, a corto plazo, sobre distribuciones de frecuencia en términos de valores absolutos y relativos (%) se tuvieron en cuenta las siguientes componentes para evaluar la respuesta de cada estudiante:

- a) Distribuye las frecuencias teniendo en cuenta el número de sorteos (la suma de frecuencias es igual al tamaño de la muestra), y las frecuencias relativas (%) teniendo en el 100% (la suma de las frecuencias relativas es igual al 100%).
- b) Asigna mayor frecuencia absoluta y relativa (%) al evento con mayor probabilidad (1 águila) (probabilidad frecuencial).
- c) Asigna cuando menos dos distintas frecuencias absolutas y relativas (%) a los valores esperados de los eventos, considerando la aleatoriedad.
- d) Representa adecuadamente los valores de frecuencia absoluta y relativa (%) entre ambos gráficos, conservando la proporción de los resultados en las dos escalas.

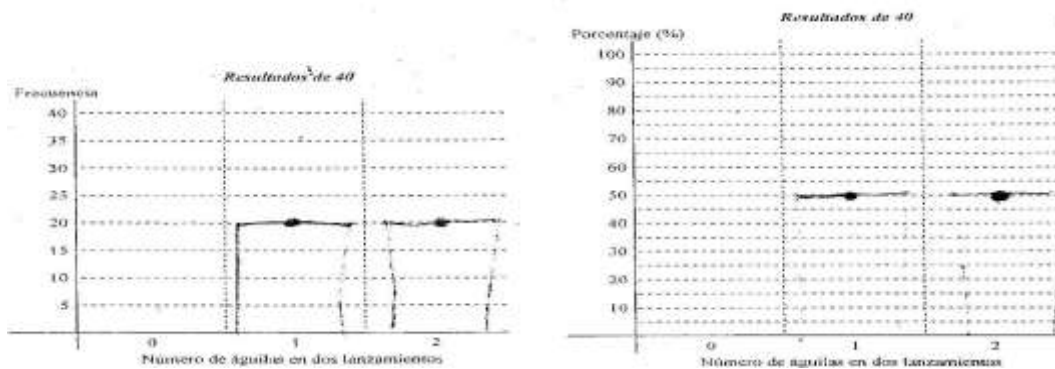
**Categorías de Análisis de Respuesta y Ejemplos:**

A continuación se presenta una ejemplificación del tipo de respuestas dadas por los estudiantes de acuerdo a su nivel.

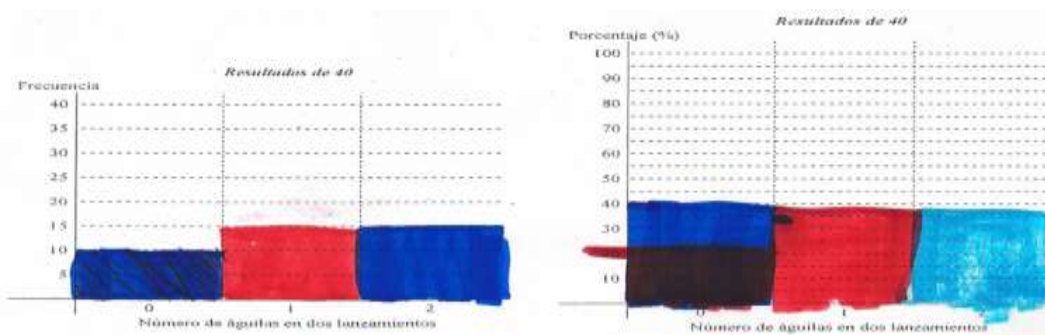
Preestructural (P): No tiene en cuenta ninguna de las componentes de la tarea.

**Ejemplo:**

E8:



E44:



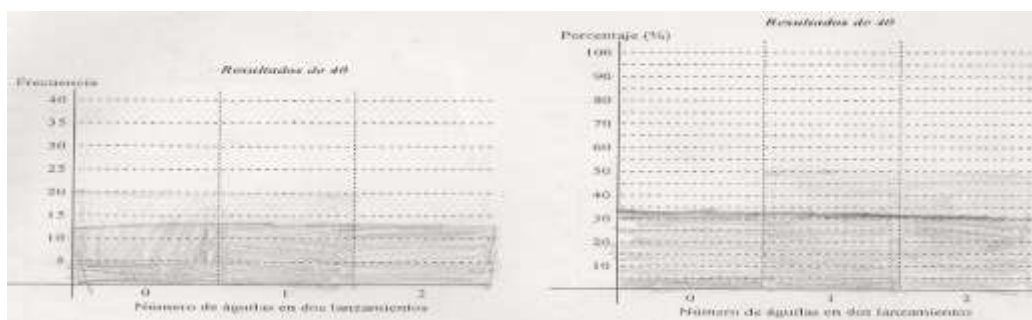
**Justificación:**

Las respuestas de los estudiantes E8 y E44 no presentan componente alguna del análisis. E8 no toma en cuenta el número total de sorteos para la frecuencia absoluta; en la respuesta del E44 podemos observar que el porcentaje total no correspondiente al valor de la frecuencia relativa para los tres elementos: 0, 1 y 2 águilas. En ambas respuesta no se elige el evento con mayor frecuencia. Por último, no representan los valores correctos para las frecuencias absoluta y relativa en cada par de gráficas.

Uniestructural (U): Tiene en cuenta sólo una de las componentes “a” “b”, “c” o “d” de la tarea.

**Ejemplo de la Componente a:**

E11:

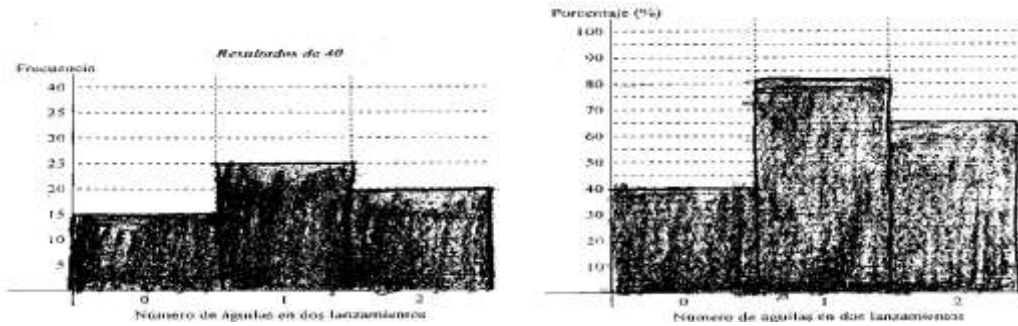


**Justificación:**

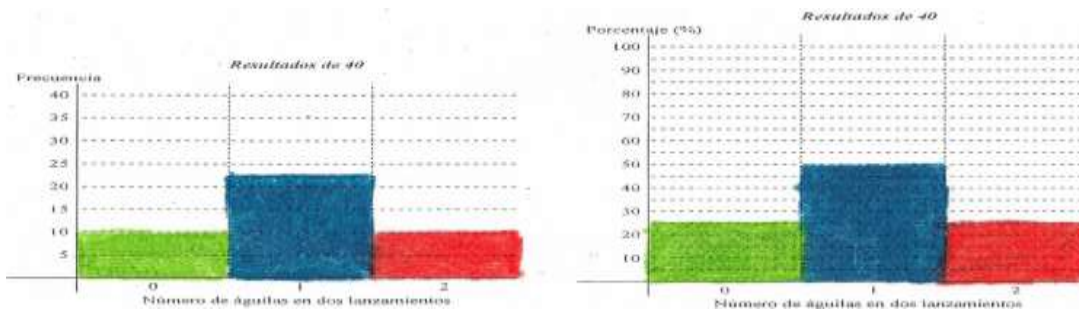
En este caso, E11 distribuye las frecuencias teniendo en cuenta el número total de sorteos (40 sorteos), y para las frecuencias relativas el 100%; sin embargo, ambas distribuciones son inadecuadas y no presenta alguna otra componente.

**Ejemplo de la Componente b:**

E1:



E28:

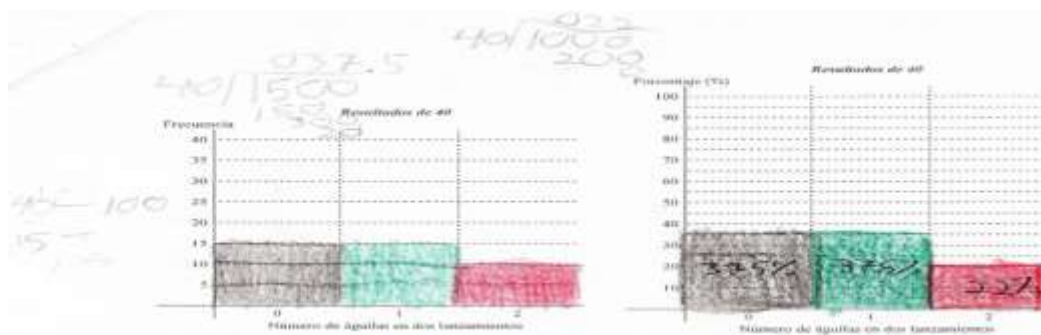


**Justificación:**

En estos dos ejemplos, se observa claramente que se asigna mayor frecuencia, absoluta y relativa (%), al evento con mayor probabilidad de ocurrir.

**Ejemplo de la Componente c:**

E36:



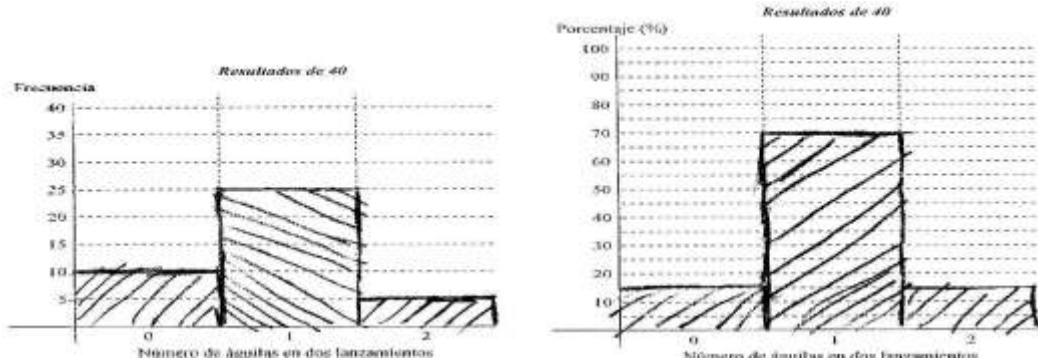
**Justificación:**

En esta respuesta sólo se asignan distintos valores para las frecuencias absolutas y relativas (%) de los elementos; además de no presentar alguna otra componente del análisis.

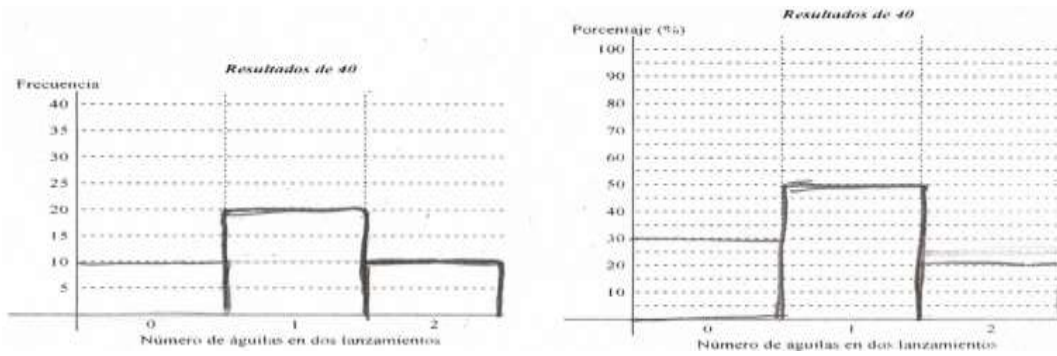
**Multiestructural (M):** Tiene en cuenta sólo dos de las cuatro componentes de la tarea “a”, “b”, “c” o “d”.

**Ejemplo de la Componente ab:**

E7:



E10:

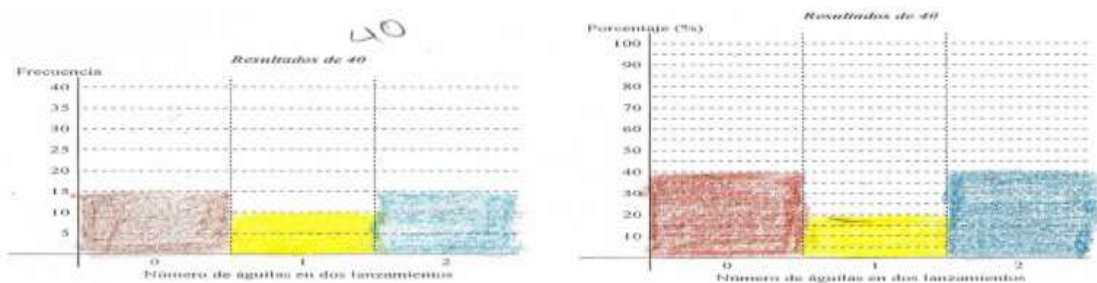


**Justificación:**

Las respuestas anteriores consideran los valores adecuados para la frecuencia absoluta y relativa, en cuanto al número de sorteos y el porcentaje total; además, se asignan valores mayores al elemento con mayor probabilidad de ocurrir, que sala 1 águila.

**Ejemplo de la Componente ac:**

E23:

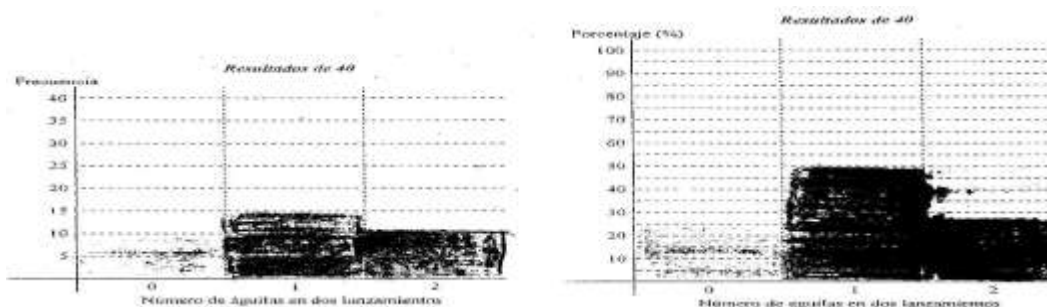


**Justificación:**

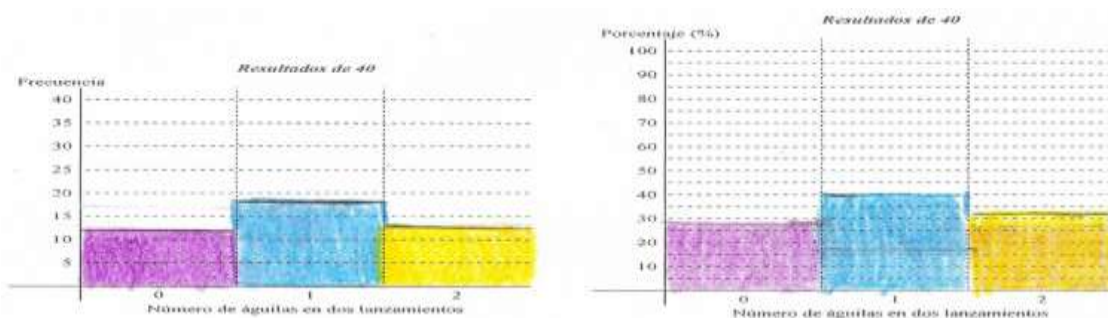
El estudiante E23 proporciona en su respuesta una distribución adecuada con respecto a las frecuencias absolutas y relativas para el número de sorteos; además, aludió la aleatoriedad en sus resultados al considerar cuando menos dos distintas frecuencias absoluta y relativas a los valores esperados.

**Ejemplo de la Componente bc:**

E6:



E26:



**Justificación:**

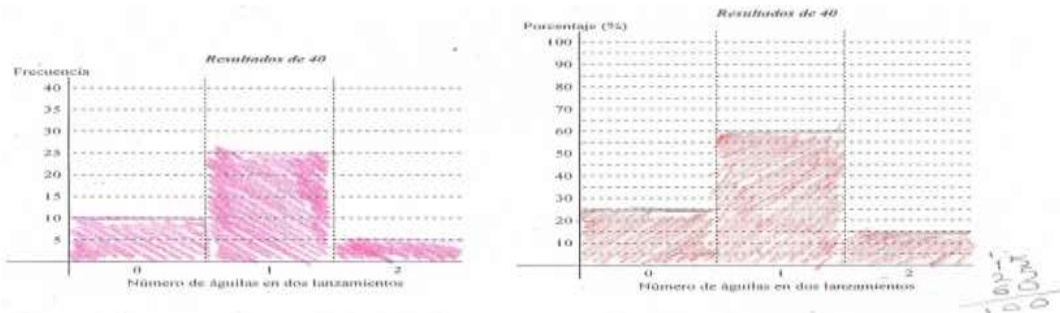
En este caso, las respuestas presentan adecuadamente el elemento con mayor probabilidad de ocurrencia; así como aluden la aleatoriedad del experimento al asignar cuando menos un par de valores distintos a las frecuencias absoluta y relativa.

Relacional (R): Tiene en cuenta sólo tres de las cuatro componentes de la tarea “a”, “b”, “c” o “d”.



**Ejemplo de la Componente abc:**

E27:

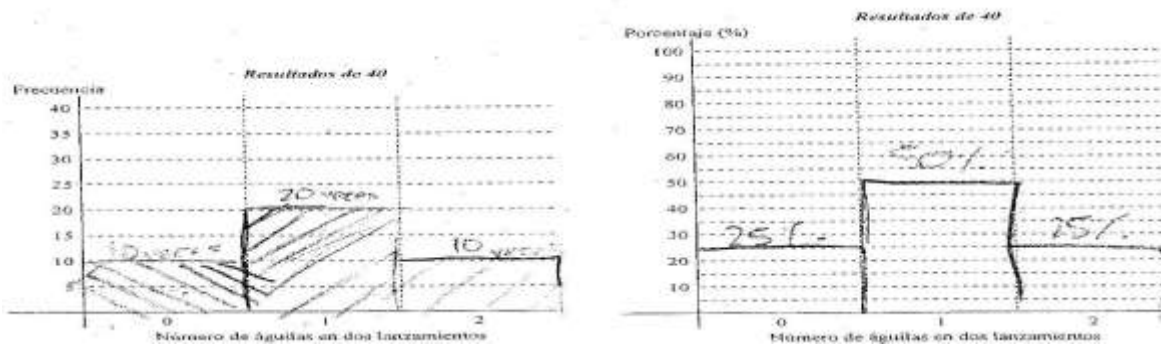


**Justificación:**

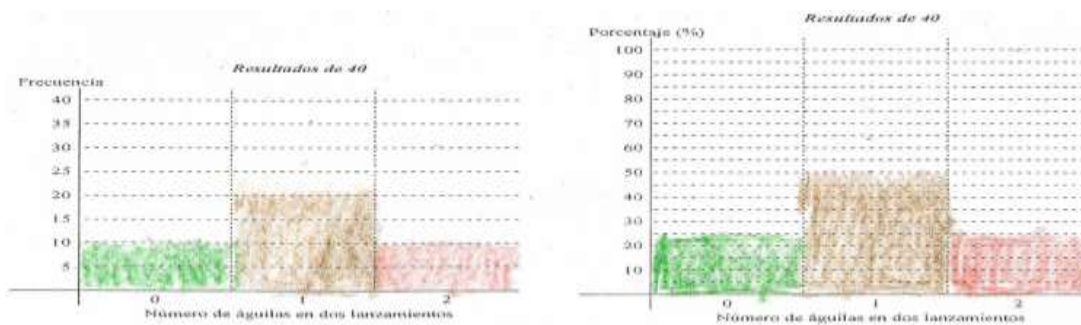
En esta respuesta, se considera tanto los valores adecuados a las distribuciones de frecuencias absoluta y relativa para el número de sorteos, como al elemento con la mayor probabilidad de ocurrir; asimismo, se alude a la aleatoriedad al asignar distintos valores a los esperados en las frecuencias absolutas y relativas de los elementos de la variable aleatoria.

**Ejemplo de la Componente abd:**

E4:



E24:

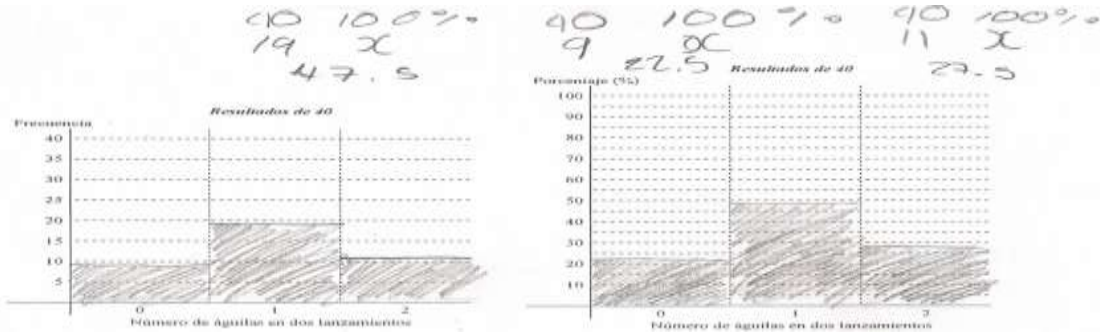


**Justificación:**

En estos dos ejemplos, se presentan distribuciones de frecuencia apropiadas –absolutas y relativas–, indicando el elemento con mayor probabilidad de ocurrir y con valores adecuados en ambas escalas, conservando la proporción entre las mismas.

**Ejemplo de la Componente bcd:**

E41:



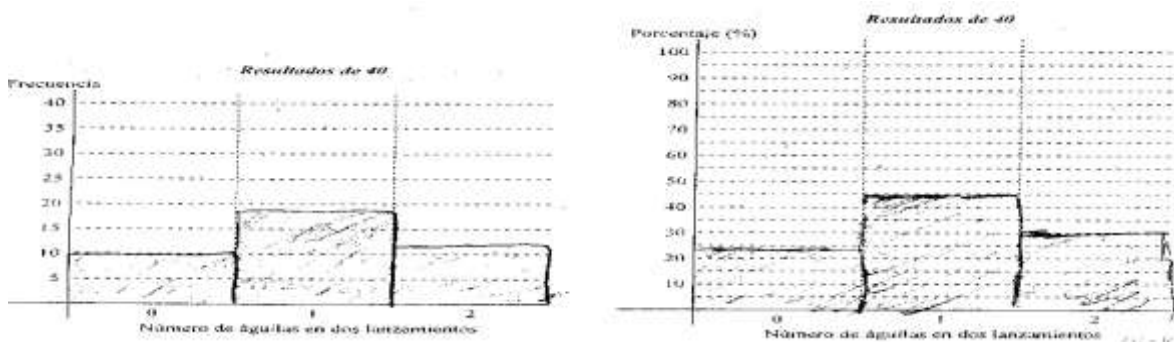
**Justificación:**

En la respuesta proporcionada por el estudiante E41 se observa que se indicó correctamente el elemento con la mayor probabilidad de éxito, aludiendo a la aleatoriedad al asignar distintos valores de frecuencia absoluta y relativa en cada uno de los elementos del número de águilas obtenidas en dos lanzamientos; asimismo, estos valores conservan la proporción correcta entre ambas escalas.

Abstracción Extendida (AE): Tiene en cuenta las cuatro componentes de la tarea “a”, “b”, “c” y “d”.

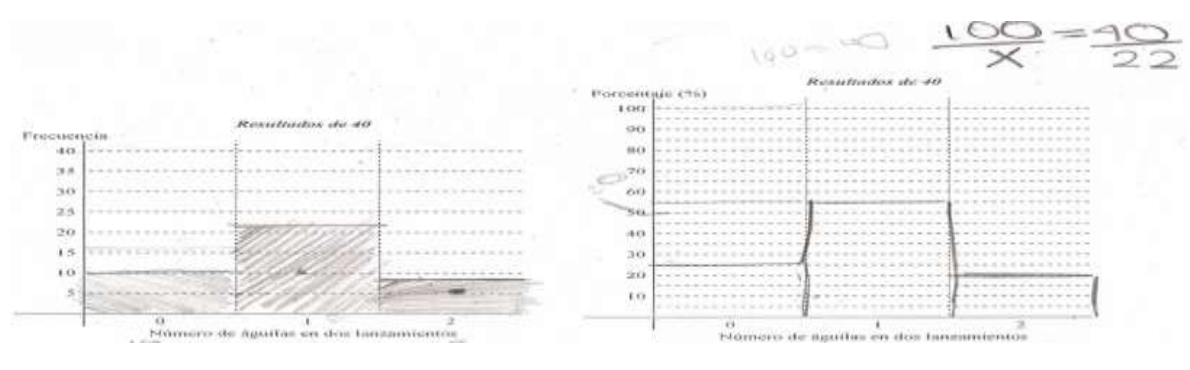
**Ejemplo de la Componente abcd:**

E2:





E43:



**Justificación:**

Los alumnos E2 y E43 tomaron en cuenta el número de sorteos para determinar las distribuciones de frecuencia absoluta y relativa del experimento, eligieron al elemento con la mayor probabilidad de ocurrencia, consideran la aleatoriedad al proponer distintos valores a las frecuencias de los elementos; y finalmente representan de manera apropiada la proporción en ambos gráficos.

La siguiente tabla presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes de acuerdo al nivel de razonamiento y a las componentes involucradas en esta pregunta.

TEST DIAGNÓSTICO - PREGUNTA 6														
P		U					M			R			AE	
		a	b		c	ab	ac	bc	abc	abd	bcd	abcd		
E8	E21	E11	E1	E17	E35	E36	E7	E23	E6	E27	E4	E30	E41	E2
E9	E44	E16	E5	E18	E46	E37	E32		E26	E29	E10	E34		E14
E19	E45	E20	E12	E28		E40			E31		E24	E38		E43
			E13	E33					E39		E25	E42		

NP : Los estudiantes E3, E15 y E22, no realizaron la actividad.

Tabla 5.8.1. Clasificación de las respuestas de la pregunta 6

**Análisis parcial por nivel de razonamiento:**

Como se puede observar en la tabla anterior, 6/46 respuestas proporcionadas por los estudiantes se ubicaron en el nivel Preestructural; 16/46 respuestas en el nivel Uniestructural, 3/16 respuestas se centran en la componente *a*, 10/16 en la componente *b*, y 3/16 en la componente *c*; en el nivel Multiestructural se ubicaron 7/46 respuestas, 2/7 se enfocaron en la componente *ab*, 4/7 en la componente *bc*, y sólo 1/7 respuestas la componente *ac*; 11/46 respuestas se ubicaron en el nivel Relacional, 2/11 se centraron en la

componente *abc*, 8/11 en la componente *abd*, y únicamente 1/11 en la componente *bcd*; finalmente, en el nivel de razonamiento Abstracto Extendido, comprendido por la combinación de componentes *abcd*, se incluyeron 3/46 respuestas de los estudiantes. El siguiente gráfico muestra el porcentaje de respuestas ubicado en cada nivel.



Figura 5.8.1. Clasificación por nivel de razonamiento de la pregunta 6

**Análisis parcial por componente:**

En la siguiente tabla se muestra la clasificación de las respuestas de la pregunta 6 aportadas por los 46 estudiantes, de acuerdo al nivel de razonamiento y componente.

Nivel	Componente(s)	Participantes	Total
Preestructural	----	6	6
Uniestructural	a	3	16
	b	10	
	c	3	
Multiestructural	ab	2	7
	ac	1	
	bc	4	
Relacional	abc	2	11
	abd	8	
	bcd	1	
Abstracto Extendido	abcd	3	3
NP	----	3	3
<b>Total</b>		<b>46</b>	<b>46</b>

Tabla 5.8.2. Clasificación de acuerdo al nivel y componente de la pregunta 6

Como se puede observar en la tabla anterior, 19/46 estudiantes consideran la componente *a* en sus predicciones a corto plazo al distribuir frecuencias absolutas teniendo en cuenta el número de sorteos (la suma de frecuencias es igual al tamaño de la muestra), y frecuencias

relativas teniendo en cuenta el 100% (la suma de las frecuencias relativas es igual al 100%); 30/46 estudiantes consideran la componente *b* al asignar mayor frecuencia absoluta y relativa (%) al evento con mayor probabilidad (1 águila); 14/46 estudiantes tiene en cuenta la componente *c* al asignar cuando menos dos distintas frecuencias absolutas y relativas (%) a los valores esperados de los eventos, considerando el aspecto de la aleatoriedad; finalmente, 12/46 estudiantes la componente *d* al representar adecuadamente los valores de frecuencia absoluta y relativa (%) entre ambos gráficos, conservando la proporción de los resultados en ambas escalas. El gráfico siguiente muestra en resumen esta etapa del análisis.

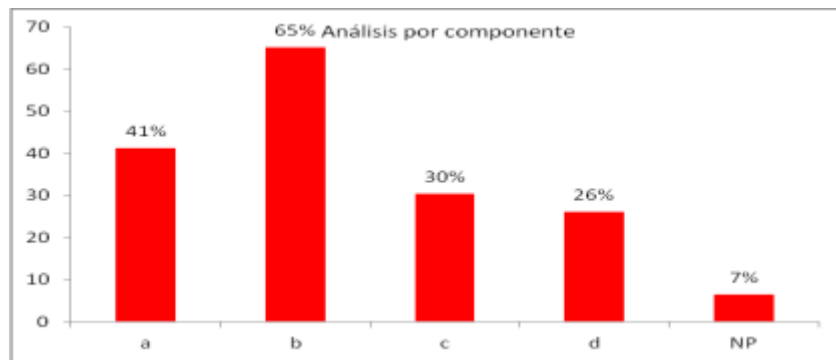


Tabla 5.8.3. Frecuencia de las componentes de la pregunta 6

El gráfico anterior muestra que 41% de las respuestas contienen la componente *a*; es decir, poco menos de la mitad de los participantes relacionó de manera adecuada el número de sorteos en las dos representaciones gráficas solicitadas, tanto en términos absolutos y relativos, esto significaría en otras palabras, que menos de la mitad de los estudiantes logró relacionar el número de sorteos y el número de águilas obtenidas en dos lanzamientos de una moneda (0, 1 y 2). Por otro lado, la componente *b* se ubica con un 65% de las respuestas. Es importante este aspecto ya que como en otras de las preguntas analizadas con anterioridad, los alumnos en esta etapa de la actividad identificaron con cierta facilidad el elemento que tiene la mayor probabilidad de éxito, tanto en la escala absoluta como en la relativa, aunque la proporción no siempre fue la correcta, comparada con la teórica esperada. La gráfica también nos muestra que un 30% de las respuestas contienen la componente *c*, en este sentido resulta mucho más complicado para los estudiantes no sólo identificar (como en el caso de otras preguntas) la variabilidad del experimento, sino yendo todavía más adelante, representar esta variación en los resultados, a través de una gráfica. Pocos de los alumnos asignaron distintas frecuencias a los posibles resultados de los

eventos, y los pocos que lo hicieron no lo relacionaron correctamente con la suma de las frecuencias (número de sorteos) o con la suma de las frecuencias relativas (100%); por lo que no es posible relacionar estas respuestas con un razonamiento probabilístico adecuado. La componente que resultó con menos presencia, poco más de una cuarta parte de las respuestas (26%) es la *d*, lo anterior puede entenderse si se considera que aunque los alumnos tienen un cierto sentido de los posibles resultados de la actividad, o de las posibilidades de éxito de cada participante, lo que representa un verdadero reto para ellos es entender su comportamiento a través del tiempo, es decir comprender el sentido del gráfico de la distribución de frecuencias, para con esto ser capaces de inferir los resultados para cualquier lapso de tiempo.

### **5.9 Informe de la Pregunta 7**

En este apartado describiremos los resultados obtenidos de la pregunta 7 del cuestionario que realizaron los estudiantes.

7. ¿Por qué piensas que los resultados anteriores son razonables?

**Objeto de estudio:**

*Argumentación respecto a la Predicción Gráfica de Frecuencias Absolutas y Relativas (%).*

**Objetivo:**

*Evaluar los argumentos de los estudiantes para justificar las distribuciones de frecuencia en términos absolutos y relativos (%).*

**Componentes de la Respuesta:**

En esta tarea de argumentación respecto a la predicción de distribuciones de frecuencias absolutas y relativas (%), se tuvieron en cuenta las siguientes componentes para evaluar la respuesta de cada estudiante:

- a) Alude el aspecto de impredecibilidad, incertidumbre o aleatoriedad de la situación

(cualquier cosa puede pasar, es posible que sea así).

- b) Alude al aspecto de oportunidad, posibilidad o probabilidad de la situación.
- c) Hace alusión a sus resultados proporcionados en su predicción: tabla de la tarea 1 y/o distribuciones de la tarea 6. Es decir, relaciona correctamente su argumentación con la representación gráfica de la distribución de frecuencias.
- d) Su argumento se basa en que Beto tiene la mayor probabilidad de ganar o de obtener exactamente un águila (probabilidad subjetiva). Es decir, elige el elemento con mayor probabilidad de éxito.
- e) Su argumento hace alusión a que el evento de un águila y un sol tiene mayor probabilidad de ocurrir que los eventos águila-águila, y sol-sol. Esto implica que relaciona el espacio muestral y los elementos de la variable aleatoria (0 Águila = Sol y Sol, 1 Águila = Águila y Sol, 2 Águilas = Águila y Águila).
- f) Identifica el aspecto conmutativo de las opciones en el espacio muestral AS y SA.

**Categorías de Análisis de Respuesta y Ejemplos:**

A continuación se presentan los diferentes ejemplos de respuesta clasificadas según sus componentes. En los casos en que se hace necesario se escriben los valores de las frecuencias absolutas y relativas asignadas para la gráfica de 40 sorteos, en estricto orden de los eventos (0 águilas, 1 águila y 2 águilas).

Preestructural (P): Su argumento está basado en creencias personales o subjetivas no relacionadas con la aleatoriedad, o bien argumentos incorrectos.

<b>Ejemplo:</b>	<b>Justificación:</b>
E4: <i>“Sería de analizar las jugadas”</i>	Las respuestas de los estudiantes no se relacionan con el objeto de estudio de esta pregunta; además, no presentan alguna de las componentes de la tarea.
E32: <i>“Porque es el numero de águilas que pueden salir”</i>	

Uniestructural (U): Tiene en cuenta sólo una de las componentes *a*, *b*, o *c* de la tarea.

<b>Ejemplos de la Componente “a”:</b>	<b>Justificación:</b>
E9: <i>“porque el juego es al azar y cualquiera puede ganar”</i>	En estas respuestas sólo se percibe el sentido de aleatoriedad o incertidumbre del experimento, sin que se relacione con otra componente de análisis.
E29: <i>“Por que el asar es impredecible solo hay probabilidades”</i>	
<b>Ejemplos de la Componente “b”:</b>	<b>Justificación:</b>
E2: <i>“por que concuerdan con las probabilidades que cada uno tiene”</i>	En estas respuestas, sólo se alude a la posibilidad o probabilidad de ganar, sin que se logre justificar adecuadamente este argumento.
E23: <i>“Creo que si lo vemos por probabilidad seria algo razonable”</i>	
<b>Ejemplos de la Componente “c”:</b>	<b>Justificación:</b>
E26: <i>“por que es mas o menos el calculo de los resultados”</i>	En este caso, E26 hace alusión a sus resultados proporcionados en su predicción anterior.

Multiestructural (M): Tiene en cuenta alguna de las componentes *d*, *e* o *f* de la tarea.

<b>Ejemplos de la Componente “d”:</b>	<b>Justificación:</b>
E5: <i>“Por que veto gana el 50% de todas las veces y lo demás se Reparte de acuerdo a la probabilidad”</i>	Estas dos respuestas hacen referencia al participante con mayor probabilidad de ganar, aunque no se mencionan los posibles resultados del recorrido de la V.A. o eventos del espacio muestral.
E41: <i>“Pues como ya mencione anteriormente es mas probable que Beto gane mas el control que sus padres. Ahora tambien para que me salieran use calculadora”</i>	
<b>Ejemplos de la Componente “e”:</b>	<b>Justificación:</b>
E1: <i>“Por que hay más posibilidad de que caiga solo un águila”</i>	En estas respuestas se presenta el evento con mayor probabilidad de ocurrir, esto es, el que caiga un águila en el lanzamiento de dos monedas.
E27: <i>“Porque obtener una águila siempre será mayor”</i>	

Relacional (R): Tiene en cuenta dos de las componentes *d*, *e* y *f* de la tarea.

<b>Ejemplos de la Componente “de”:</b>	<b>Justificación:</b>
E34: <i>“Porque Beto tiene mas posibilidades ya que solo tiene que caer una vez aguila y no 2 como sus papas”</i>	En esta respuesta, se menciona el participante con mayores posibilidades de éxito, así como el evento más frecuente, el obtener un águila.

Abstracción Extendida (AE): Tiene en cuenta las componente *d*, *e* y *f* de la tarea. En este nivel, no se presentó respuesta alguna.

La siguiente tabla presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes de acuerdo al nivel de razonamiento y a las componentes involucradas en esta pregunta.

TEST DIAGNÓSTICO - PREGUNTA 7														
P		U							M				R	AE
		a		b			c		d	e			de	def
E4	E40	E9	E29	E2	E14	E24	E26	E42	E5	E1	E21	E30	E34	
E16	E44	E13	E37	E7	E19	E25	E33	E43	E10	E6	E27	E31		
E32	E45	E17		E8	E20		E35	E46	E12	E18	E28	E38		
E39				E11	E23		E36		E41					

NP : Los estudiantes E3, E15 y E22, no realizaron la actividad.

Tabla 5.9.1. Clasificación de las respuestas de la pregunta 7

**Análisis parcial por nivel de razonamiento:**

La tabla muestra que 7/46 respuestas de los participantes se encuentran en el nivel de razonamiento probabilístico Preestructural; ya que no mostraron relación alguna con las componentes del análisis. El nivel Uniestructural se presenta en la mayoría de las respuestas de los estudiantes, 22/46, donde 5/22 se enfocan a la componente *a*, 9/22 a la componente *b*, y 8/22 a la componente *c*. En el nivel de razonamiento Multiestructural se ubicaron 13/46 respuestas, 4/13 relacionadas con la componente *d* y 9/12 con la componente *e*. Por último, el nivel Relacional contiene sólo 1/46 respuestas, con la combinación de componentes *de*, mientras que el Abstracto Extendido no presenta respuesta alguna.

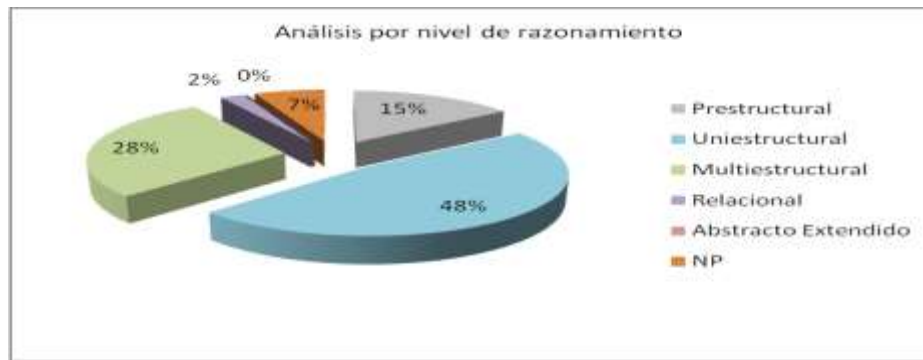


Figura 5.9.1. Clasificación por nivel de razonamiento de la pregunta 7

**Análisis parcial por componente:**

En la siguiente tabla se muestra la clasificación de las respuestas de la pregunta 7 aportadas por los estudiantes, de acuerdo al nivel de razonamiento y componente.

Nivel	Componente(s)	Participantes	Total
Preestructural	----	7	7
Uniestructural	a	5	22
	b	10	
	c	7	
Multiestructural	d	4	13
	e	9	
Relacional	de	1	1
Abstracto Extendido	def	0	0
NP	----	3	3
<b>Total</b>		<b>46</b>	<b>46</b>

Tabla 5.9.2. Clasificación de acuerdo al nivel y componente de la pregunta 7

La tabla anterior nos muestra que la componente *a* se encuentra presente en 5/46 respuestas, la componente del análisis *b* en 10/46 respuestas, y la componente *c* en 7/46 respuestas. En lo que respecta a la componente de análisis *d*, 5/46 respuestas presentan dicha componente; y finalmente, la componente *e* en 10/46 respuestas proporcionadas por los estudiantes. Cabe destacar, que la componente *f* no se encuentre presente en ninguna de las respuestas.

Es importante mencionar que en esta pregunta, la presencia de cualquiera de las componentes *a*, *b* o *c*, se clasificó dentro del nivel de razonamiento Uniestructural, ya que sólo alude a aspectos básicos como la incertidumbre, la posibilidad o a la mención de sus resultados anteriores. Por otro lado, la presencia de alguna de las componentes *d*, *e* o *f*



representa un avance en el razonamiento del estudiante, ya que involucra aspectos más profundos de análisis como la identificación del evento con mayor posibilidad de ocurrencia o el valor que toma la V.A con mayor probabilidad.

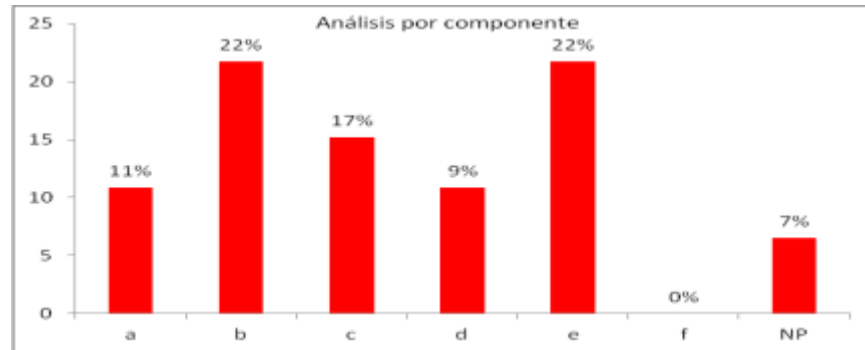


Tabla 5.9.3. Frecuencia de las componentes de la pregunta 7

Los resultados que se aprecian en el gráfico anterior, reafirman lo que en varias de las respuestas hasta ahora analizadas se presenta, esto en relación con referencia a la posibilidad o probabilidad de la situación (componente *b*); asimismo, la identificación del evento con mayor probabilidad de ocurrencia (componente *e*). Esto debido a que casi una cuarta parte de los estudiantes aportan respuestas relacionadas con estas dos componentes del análisis. Esto parecería indicar que, en esta etapa de la actividad, los alumnos tienen claro que en la situación está presente un factor de incertidumbre, lo que conlleva a la asignación de un posible valor para los resultados. Al mismo tiempo, los alumnos se percatan que esta asignación se encuentra relacionada con que el evento águila-sol o sol-águila -aunque no identifiquen plenamente la presencia de ambos-, es más probable que los eventos águila-águila o sol-sol, lo que da mayor oportunidad de ganar al participante Beto. Otro aspecto relevante es que aproximadamente el 17% de las respuestas involucran a la componente *c*, lo que indicaría que relacionaron adecuadamente su respuesta con la gráfica de la distribución de frecuencias de la pregunta anterior, aunque en esta etapa del análisis no está claro si es por una verdadera reflexión al respecto o simplemente por la inmediatez de dicha pregunta. También se encuentran presentes los aspectos de aleatoriedad y la identificación de Beto como el integrante con mayor probabilidad de ganar, con un 11% y 9% respectivamente (componentes *a* y *d*). Lo que sigue llamando la atención es la nula identificación del aspecto conmutativo de los eventos águila-sol y sol-águila (componente *f*), parece que los estudiantes no reconocen la presencia de estos dos eventos, al no hacer referencia a esta componente.

### 5.10 Informe de la Pregunta 8

En este apartado describiremos los resultados obtenidos de la pregunta 8 del cuestionario que realizaron los estudiantes.

8. Piensa y escribe la cantidad de veces que podrían ganar cada integrante de la familia Pérez para cada número de días o sorteos. Ten en cuenta que el total coincida con el número de días.

#Días \ Gana	20 días	40 días	60 días	120 días	240 días	1000 días
Ana (0 águilas)						
Beto (1 águila)						
Carlos (2 águilas)						

Explica el criterio o tus razones para distribuir los anteriores valores.

#### Objeto de estudio:

*Predicción Tabular de Frecuencias Absolutas a Corto, Mediano y Largo Plazo – Análisis de argumentación.*

#### Objetivo:

*Que los estudiantes realicen predicciones a corto, mediano y largo plazo, de seis experimentos con distribuciones de frecuencia en términos absolutos, y evaluar sus argumentos para justificarlas.*

#### Componentes de la Respuesta:

En esta tarea de predicciones a corto, mediano y largo plazo, de seis experimentos con distribuciones de frecuencia en términos absolutos, se tuvieron en cuenta las siguientes componentes para evaluar la respuesta de cada estudiante:

- Distribuye las frecuencias teniendo en cuenta el número de sorteos (Suma de frecuencias = Número de sorteos), en por lo menos 4 experimentos. Un error en hasta 2 experimentos no implicaría un desconocimiento del sentido de la pregunta.
- Asigna frecuencias próximas entre sí, para Ana, Beto y Carlos en varias de sus predicciones (3 o más), lo que puede reflejar, la consideración de la equiprobabilidad de los eventos.

- c) Asigna mayor frecuencia a Beto (de obtener exactamente un águila) en sus predicciones, (en por lo menos 4 experimentos), lo que puede reflejar la consideración de la distribución. O bien asigna frecuencias cercanas a la distribución teórica ( $\pm 10\%$ ) para los participantes (en por lo menos 4 experimentos).
- d) Asigna frecuencias próximas entre sí para Ana y Carlos en sus predicciones (4 o más), lo que puede reflejar, por lo menos de manera intuitiva, que es igualmente probable obtener 2 águilas, o bien 0 águilas en cada volado.

Para la tarea de argumentación, se consideraron las siguientes componentes:

- e) Su argumentación está relacionada correctamente con la predicción tabular.
- f) Su argumentación no se relaciona con la predicción tabular.

**Categorías de Análisis de Respuesta y Ejemplos:**

A continuación se presentan algunos ejemplos de cada nivel de respuesta y su correspondiente componente.

Preestructural (P): La mayoría de las frecuencias asignadas (3 o más) no cumplen con la suma correspondiente al número de días o sorteos. Asigna frecuencias que no tienen relación entre sí, es decir, no reflejan alguna característica de la distribución teórica. No hay un patrón consistente de distribución y aleatoriedad de las frecuencias. No hay argumentos, o sus argumentos son subjetivos, no muestran consistencia con su representación tabular. O bien, la respuesta no se encuentra en términos absolutos.

<b>Ejemplos:</b>						
E2:						
	20 días	40 días	60 días	120 días	240 día	1000 días
Ana (0 águilas)	x					
Beto (1 águila)			x	x	z	
Carlos (2 águilas)		x				
Argumentación: <i>“Por la probabilidad que tiene Beto”</i>						

E5:

	20 días	40 días	60 días	120 días	240 día	1000 días
Ana (0 águilas)						
Beto (1 águila)						
Carlos (2 águilas)						

Argumentación: No contestó

**Justificación:**

En el caso de estos dos ejemplos, se observa claramente que las predicciones no se realizaron de forma correcta (asignando valores absolutos), de hecho no se realizaron para todos los experimentos; motivo por el cual se ubicaron en este nivel de razonamiento.

Uniestructural (U): Tiene en cuenta una de las componentes “a”, “b”, “c” o “d”, y la componente “f”.

**Ejemplo de la Componente af:**

E7:

	20 días	40 días	60 días	120 días	240 día	1000 días
Ana (0 águilas)	<b>3</b>	<b>14</b>	<b>20</b>	<b>60</b>	<b>50</b>	<b>400</b>
Beto (1 águila)	<b>10</b>	<b>6</b>	<b>30</b>	<b>21</b>	<b>90</b>	<b>200</b>
Carlos (2 águilas)	<b>7</b>	<b>20</b>	<b>10</b>	<b>19</b>	<b>100</b>	<b>400</b>

Argumentación: “la ise al azar ya que no hay un valor fijo”

**Justificación:**

El ejemplo mostrado se relaciona con la componente a del análisis, ya que se verifica que la suma de frecuencias concuerda con el número de sorteos en por lo menos 4 experimentos, sin embargo su argumentación no se relaciona de manera apropiada con la predicción tabular.

**Ejemplo de la Componente *bf*:**

E12:

	20 días	40 días	60 días	120 días	240 día	1000 días
Ana (0 águilas)	<b>6</b>	<b>14</b>	<b>16</b>	<b>30</b>	<b>76</b>	<b>212</b>
Beto (1 águila)	<b>7</b>	<b>13</b>	<b>26</b>	<b>45</b>	<b>88</b>	<b>528</b>
Carlos (2 águilas)	<b>7</b>	<b>13</b>	<b>18</b>	<b>46</b>	<b>77</b>	<b>464</b>

Argumentación: *“Porque Beto tiene mayor posibilidad”*

**Justificación:**

En este ejemplo, la predicción guarda relación con la componente *b*, al asignar frecuencias próximas entre sí para los participantes en por lo menos 3 experimentos, lo que podría reflejar en cierto sentido la equiprobabilidad de los eventos. Además de que la justificación teórica no se encuentra correctamente relacionada con la tabla.

**Ejemplo de la Componente *cf*:**

E19:

	20 días	40 días	60 días	120 días	240 día	1000 días
Ana (0 águilas)	<b>5</b>	<b>10</b>	<b>12</b>	<b>24</b>	<b>48</b>	<b>222</b>
Beto (1 águila)	<b>8</b>	<b>16</b>	<b>24</b>	<b>48</b>	<b>96</b>	<b>424</b>
Carlos (2 águilas)	<b>6</b>	<b>12</b>	<b>18</b>	<b>36</b>	<b>72</b>	<b>338</b>

Argumentación: *“puse diferentes cantidades para que las probabilidades fueran diferentes”*

**Justificación:**

La respuesta presenta la componente *c* del análisis, al asignar mayor frecuencia absoluta a Beto en por lo menos 4 experimentos, aunque la justificación de su argumento no se relaciona de forma correcta con la predicción tabular.

**Multiestructural (M):** Tiene en cuenta una de las componentes “*a*”, “*b*”, “*c*” o “*d*”, y la componente “*e*”; o bien dos de las componentes “*a*”, “*b*”, “*c*” o “*d*”, y la componente “*f*”.

**Ejemplo de la Componente ae:**

E4:

	20 días	40 días	60 días	120 días	240 día	1000 días
Ana (0 águilas)	<b>5</b>	<b>12</b>	<b>17</b>	<b>30</b>	<b>70</b>	<b>300</b>
Beto (1 águila)	<b>7</b>	<b>9</b>	<b>20</b>	<b>46</b>	<b>70</b>	<b>200</b>
Carlos (2 águilas)	<b>9</b>	<b>19</b>	<b>23</b>	<b>44</b>	<b>100</b>	<b>500</b>

Argumentación: *“Al principio fue al azar pero el que tuviera mayor número de vencidas debía continuar”*

**Justificación:**

Esta respuesta se le relaciona con la componente *a*, al verificar que la suma de frecuencias concuerda con el número de sorteos en por lo menos 4 experimentos; además, su argumentación si está correctamente relacionada con la tabla.

**Ejemplo de la Componente ce:**

E6:

	20 días	40 días	60 días	120 días	240 día	1000 días
Ana (0 águilas)	<b>6</b>	<b>12</b>	<b>18</b>	<b>38</b>	<b>64</b>	<b>200</b>
Beto (1 águila)	<b>10</b>	<b>20</b>	<b>40</b>	<b>58</b>	<b>98</b>	<b>600</b>
Carlos (2 águilas)	<b>4</b>	<b>8</b>	<b>2</b>	<b>25</b>	<b>58</b>	<b>300</b>

Argumentación: *“A Beto le puse números que fueran la mita o cercanos a la mitad de día y de ahí sacaba lo demás”*

**Justificación:**

El estudiante E6 en esta respuesta hace referencia a la componente *c*, al asignar mayor frecuencia absoluta a Beto en por lo menos 4 experimentos; al mismo tiempo que su argumentación teórica si la relaciona adecuadamente con la tabla.

**Ejemplo de la Componente *abf*:**

E11:

	20 días	40 días	60 días	120 días	240 día	1000 días
Ana (0 águilas)	<b>6</b>	<b>14</b>	<b>18</b>	<b>36</b>	<b>72</b>	<b>270</b>
Beto (1 águila)	<b>7</b>	<b>13</b>	<b>21</b>	<b>42</b>	<b>84</b>	<b>515</b>
Carlos (2 águilas)	<b>7</b>	<b>13</b>	<b>21</b>	<b>42</b>	<b>84</b>	<b>315</b>

Argumentación: *“Por que todos tienen el mismo porcentaje de que salgan águilas”*

**Justificación:**

Este tipo de respuesta presenta las componentes *ab* en la predicción tabular, al verificar que la suma de frecuencias concuerda con el número de sorteos en por lo menos 4 experimentos y asignar frecuencias próximas entre sí para los participantes en por lo menos 3 experimentos; sin embargo, la justificación de su argumento teórico no lo relaciona correctamente con la tabla.

**Ejemplo de la Componente *acf*:**

E21:

	20 días	40 días	60 días	120 días	240 día	1000 días
Ana (0 águilas)	<b>6</b>	<b>12</b>	<b>18</b>	<b>36</b>	<b>72</b>	<b>300</b>
Beto (1 águila)	<b>8</b>	<b>16</b>	<b>24</b>	<b>48</b>	<b>96</b>	<b>400</b>
Carlos (2 águilas)	<b>6</b>	<b>12</b>	<b>18</b>	<b>36</b>	<b>72</b>	<b>300</b>

Argumentación: *“Como son casi mismas posibilidades pues es justo”*

**Justificación:**

En este ejemplo se perciben las componentes *ac*, al verificar que la suma de frecuencias concuerda con el número de sorteos en por lo menos 4 experimentos y se asignan mayores frecuencias absolutas a Beto en por lo menos 4 experimentos; sin embargo, no se consigue relacionar correctamente la argumentación con la predicción tabular.

Relacional (R): Tiene en cuenta dos de las componentes “*a*”, “*b*”, “*c*” o “*d*”, y la componente “*e*”; o bien tres de las componentes “*a*”, “*b*”, “*c*” o “*d*”, y la componente “*f*”.

**Ejemplo de la Componente ace:**

E1:

# Días Gana	20 días	40 días	60 días	120 días	240 días	1000 días
Ana (0 águilas)	5	10	15	45	35	310
Beto (1 águila)	9	18	27	48	60	360
Carlos (2 águilas)	6	12	18	27	45	330

Argumentación: *“Por que para lo que yo pienso tiene más probabilidad de ganar Beto después su papa y al último mamá por las veces que caerían las aguilas”*

**Justificación:**

Esta respuesta presenta la misma combinación de componentes *ac*, que el ejemplo anterior (E21); sin embargo, se ubica en este nivel de razonamiento probabilístico debido a que si se relaciona adecuadamente la predicción tabular con la argumentación teórica.

**Ejemplo de la Componente abe:**

E20:

# Días Gana	20 días	40 días	60 días	120 días	240 días	1000 días
Ana (0 águilas)	<b>7</b>	<b>13</b>	<b>20</b>	<b>40</b>	<b>80</b>	<b>333</b>
Beto (1 águila)	<b>7</b>	<b>14</b>	<b>20</b>	<b>40</b>	<b>80</b>	<b>333</b>
Carlos (2 águilas)	<b>6</b>	<b>13</b>	<b>20</b>	<b>40</b>	<b>80</b>	<b>334</b>

Argumentación: *“Porque los 3 tienen las mismas posibilidades exepctuando a Beto que siento que tiene un 3% mas”*

**Justificación:**

Al igual que el caso del E11, este ejemplo presenta las componentes *ab*, al verificar que la suma de frecuencias concuerda con el número de sorteos en por lo menos 4 experimentos y asigna frecuencias próximas entre sí para los participantes en por lo menos 3 experimentos. Por otro lado, si se consigue relacionar la predicción tabular con la argumentación.



**Ejemplo de la Componente *cde*:**

E45:

# Días \ Gana	20 días	40 días	60 días	120 días	240 días	1000 días
Ana (0 águilas)	6	12	24	48	96	192
Beto (1 águila)	8	16	32	64	128	256
Carlos (2 águilas)	6	12	24	48	96	192

Argumentación: “*Po multiplicación*”

**Justificación:**

Este tipo de respuesta presenta las componentes *cd*, al asignar mayor frecuencia absoluta a Beto en por lo menos 4 experimentos, y frecuencias próximas entre sí para Ana y Carlos en por lo menos 4 experimentos; al mismo tiempo, la justificación de su argumento teórico si se relaciona con la tabla.

**Ejemplo de la Componente *acdf*:**

E24:

# Días \ Gana	20 días	40 días	60 días	120 días	240 días	1000 días
Ana (0 águilas)	5	10	15	30	60	250
Beto (1 águila)	10	20	30	60	120	500
Carlos (2 águilas)	5	10	15	30	60	250

Argumentación: “*Dependiendo el numero de dias es como se reparte entre los 3*”

**Justificación:**

E24 muestra en su respuesta las tres componentes *acd*, ya que la suma de frecuencias concuerda con el número de sorteos en por lo menos 4 experimentos, se asignan valores mayores de frecuencia absoluta para Beto en por lo menos 4 experimentos, y se observan frecuencias próximas entre sí para Ana y Carlos en por lo menos 4 experimentos; sin embargo la argumentación no logra relacionarse adecuadamente con la predicción tabular.

Abstracción Extendida (AE): Tiene en cuenta tres componentes “*a*”, “*b*”, “*c*” o “*d*”, y la componente “*e*”.

**Ejemplo de la Componente *acde*:**

E28:

# Días \ Gana	20 días	40 días	60 días	120 días	240 días	1000 días
Ana (0 águilas)	5 <sup>r</sup>	10	15	30	60	250
Beto (1 águila)	10	20	30	60	120	500
Carlos (2 águilas)	5	10	15	30	60	250

Argumentación: “Que el número de veces que sólo cae un águila es el doble de cuando caes 2 o ninguna”

**Justificación:**

Las respuestas que se ubicaron en el nivel de Abstracción Extendida, como en este ejemplo, también presentan la combinación de componentes *acd*, como el ejemplo anterior del estudiante E24; sin embargo, se ubican en este nivel de razonamiento porque si relacionaron correctamente su argumentación con su predicción tabular.

La siguiente tabla presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes de acuerdo al nivel de razonamiento y a las componentes involucradas.

TEST DIAGNÓSTICO - PREGUNTA 8														
P		U			M				R				AE	
		af	bf	cf	Ae	ce	abf	acf	abe	ace	cde	acdf	acde	
E2	E23	E7	E12	E19	E4	E6	E11	E21	E20	E1	E33	E45	E24	E28
E5	E44	E13		E40		E36		E26	E29	E8	E34		E25	E30
E9		E14		E41		E37				E17	E35		E38	E32
E10		E16								E27	E43			E39
		E18								E31	E46			E42

NP: Los estudiantes E3, E15 y E22 no realizaron la actividad.

Tabla 5.10.1. Clasificación de las respuestas de la pregunta 8

**Análisis parcial por nivel de razonamiento:**

El análisis realizado en esta pregunta descansa en dos factores de interés, el primero relacionado con la predicción tabular de las frecuencias absolutas a corto, mediano y largo plazo, a través de seis experimentos para distinto número de días; y el segundo, es la argumentación que el estudiante lleva a cabo sobre la distribución de frecuencias absolutas a través del tiempo. Es por este motivo que sobre la predicción tabular se definieron las componentes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ , del análisis, y las componentes  $e$  y  $f$ , están relacionadas con la argumentación teórica de los estudiantes. En particular la componente  $e$  se refiere a que la argumentación está relacionada correctamente con la predicción tabular; por el contrario la componente  $f$ , se refiere a que su argumentación no se relaciona con la predicción tabular. Es decir, que si una determinada respuesta se ubica en cierto nivel de razonamiento por las componentes que refiera, pero su argumentación teórica incluye la componente  $e$ , se colocará en el nivel de razonamiento inmediato superior; por otro lado, una respuesta que incluya en su argumentación la componente  $f$ , no se verá favorecida y se mantendrá en el nivel correspondiente.

Continuando con el análisis, la tabla anterior muestra que el nivel de razonamiento Preestructural incluye 6/46 respuestas, mientras que el nivel Uniestructural está integrado por 9/46 respuestas, con 5/9 enfocadas en las componentes  $af$ , 1/9 en las componente  $bf$  y 3/9 en las componentes  $cf$ . Por su parte, en el nivel de razonamiento Multiestructural se encuentran 7/46 respuestas, con 1/7 centrada en las componentes  $ae$ , 3/7 en las componentes  $ce$ , 1/7 en las componentes  $abf$  y 2/7 en las componentes  $acf$ . El nivel con mayor frecuencia es el Relacional, al incluir 16/46 respuestas, 2/16 consideran las componentes  $abe$ , 10/16 las componentes  $ace$ , 1/16 las componentes  $cde$ , y 3/16 las componentes  $acdf$ . Finalmente, el nivel de razonamiento Abstracto Extendido se relaciona con 5/46 respuestas aportadas por los estudiantes, con las componentes de análisis  $acde$ .



Figura 5.10.1. Clasificación por nivel de razonamiento de la pregunta 8

**Análisis parcial por componente:**

En la siguiente tabla se muestra la clasificación de las respuestas de la pregunta 11 aportadas por los estudiantes, de acuerdo al nivel de razonamiento y componente.

Nivel	Componente(s)	Participantes	Total
Preestructural	----	6	6
Uniestructural	af	5	9
	bf	1	
	cf	3	
Multiestructural	ae	1	7
	ce	3	
	abf	1	
	acf	2	
Relacional	abe	2	16
	ace	10	
	cde	1	
	acdf	3	
Abstracto Extendido	acde	5	5
NP	----	3	3
<b>Total</b>		<b>46</b>	<b>46</b>

Tabla 5.10.2. Clasificación de acuerdo al nivel y componente de la pregunta 8

En la tabla anterior se observa que la componente *a*, se encuentra en 29/46 respuestas, mientras que la componente *b*, se ubica con 4/46 respuestas. La componente *c*, la podemos identificar en 27/46 respuestas y la componente *d* se encuentra en 9/46 respuestas. Las componentes *e* y *f* se ubican en 22/46 y 15/46 respuestas respectivamente.

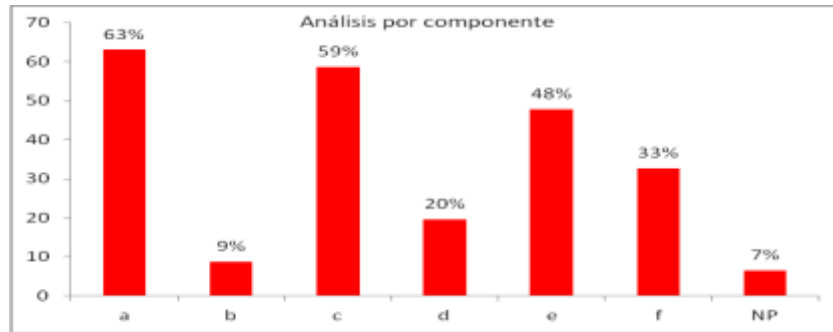


Tabla 5.10.3. Frecuencia de las componentes de la pregunta 8

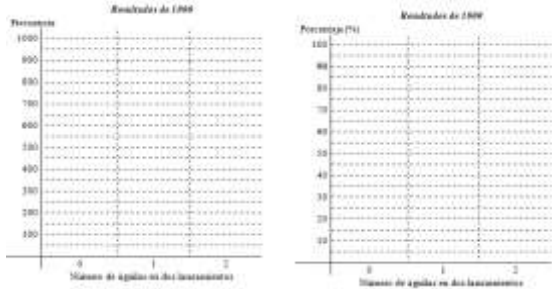
Se observa que el 63% de las respuestas hacen referencia a la componente *a*; es decir, tomaron en cuenta que el número de sorteos debe coincidir con la suma de las frecuencias absolutas en al menos cuatro de los seis experimentos que se consideraron, ya que un error en hasta dos experimentos se puede adjudicar a factores externos que no afectan sustancialmente el sentido de las respuestas. Una componente más importante desde el punto de vista del razonamiento probabilístico es la *b*, ya que refleja la comprensión del comportamiento de la distribución de frecuencias para los distintos resultados de los sorteos, que si bien esta componente hace referencia a la equiprobabilidad, se esperaría que a medida que pasa el tiempo –mediano y largo plazo- se estabilizaría la distribución de frecuencias, dando lugar a valores más cercanos a los teóricos esperados. Sin embargo, sólo el 9% de las respuestas se ubicó relacionado con esta componente. El porcentaje de respuestas que se vinculan con la componente *c* es del 59%, el cual no es de sorprenderse, ya que tiene que ver con la asignación de Beto como el participante con mayor probabilidad de éxito, por lo que se le asignaron valores mayores a las frecuencias absolutas de este participante. El mismo resultado se viene conservando en la mayoría de las respuestas analizadas. También es revelador que una quinta parte (20%) de las respuestas hacen referencia a la componente *d*, la que se vincula con la asignación de valores de frecuencia absoluta cercanos entre sí, para Ana y Carlos, que a pesar de no encontrarse en la mayoría de los casos tan próximos a los teóricos esperados, si muestran –cuando menos de manera intuitiva– que es igualmente probable la obtención de cero águilas (Ana) que la obtención de dos águilas (Carlos). Que si bien, de manera informal, representaría que son igualmente probables los eventos (SS) y (AA). De igual forma es importante resaltar que casi la mitad de las respuestas (48%) se relaciona correctamente la argumentación sobre la asignación de

los resultados con la predicción tabular para los distintos experimentos, ya que este porcentaje alude a la componente  $e$  del análisis. Mientras que una tercera parte (33%) de los estudiantes aportaron respuestas donde no se relacionó adecuadamente la predicción tabular con la justificación de la distribución de los resultados, por lo que incluyen la componente  $f$  en su clasificación.

### 5.11 Informe de la Pregunta 9

En este apartado describiremos los resultados obtenidos de la pregunta 9 del cuestionario que realizaron los estudiantes.

9. ¿Cómo piensas que serían los resultados para 1000 días? Dibuja las barras de los posibles resultados en cada inciso, teniendo en cuenta la escala dada. Escribe el número de veces o el porcentaje, según sea el caso, sobre cada barra.



**Objeto de estudio:**

*Predicción Gráfica de Distribuciones de Frecuencia Absolutas y Relativas a 1000 días.*

**Objetivo:**

*Que los estudiantes realicen predicciones, a largo plazo, sobre distribuciones de frecuencia en términos de valores absolutos y relativos (%) del experimento del lanzamiento de dos monedas.*

**Componentes de la Respuesta:**

En esta tarea de predicción de resultados individuales, se tuvieron en cuenta los siguientes componentes para evaluar la respuesta de cada estudiante:

- a) Distribuye las frecuencias teniendo en cuenta el número de sorteos (la suma de frecuencias es igual al tamaño de la muestra), y las frecuencias relativas (%) teniendo en el 100% (la suma de las frecuencias relativas es igual al 100%).
- b) Asigna mayor frecuencia absoluta y relativa (%) al evento con mayor probabilidad (1 águila) (probabilidad frecuencial); aproximada al valor esperado.
- c) Asigna cuando menos dos distintas frecuencias absolutas y relativas (%) a los valores esperados de los eventos, considerando la aleatoriedad.
- d) Conservan la proporción de los resultados ambos gráficos.

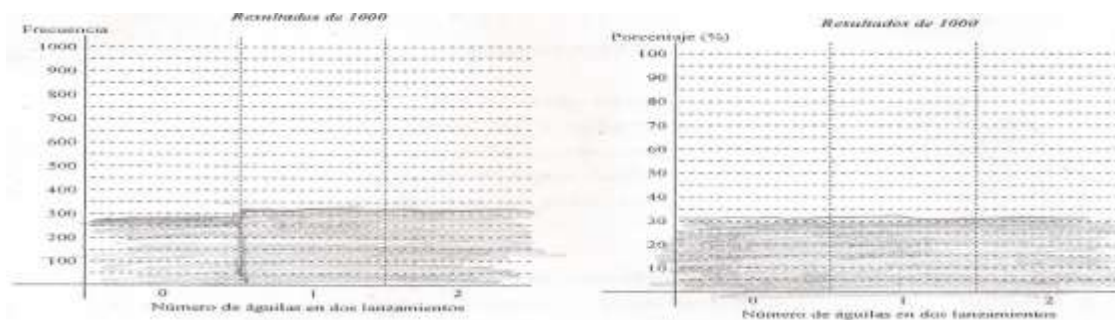
**Categorías de Análisis de Respuesta y Ejemplos:**

A continuación se presenta una ejemplificación del tipo de respuestas dadas por los estudiantes de acuerdo a su nivel.

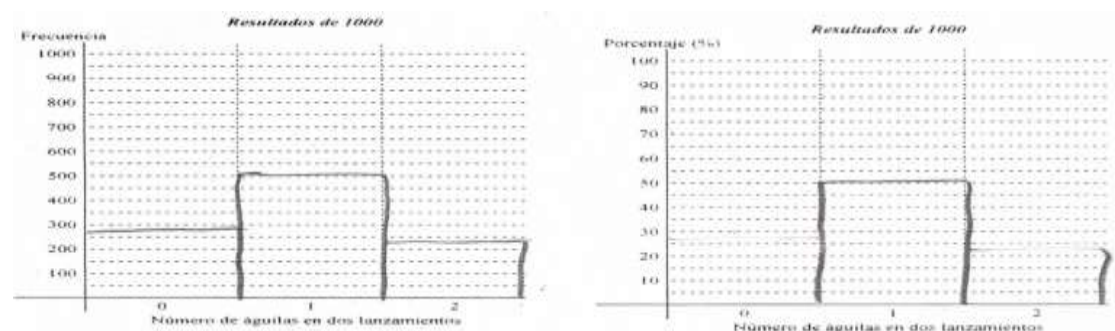
Preestructural (P): No tiene en cuenta ninguna de las cuatro componentes de la tarea: “a”, “b”, “c” o “d”.

**Ejemplo:**

E11:



E32:



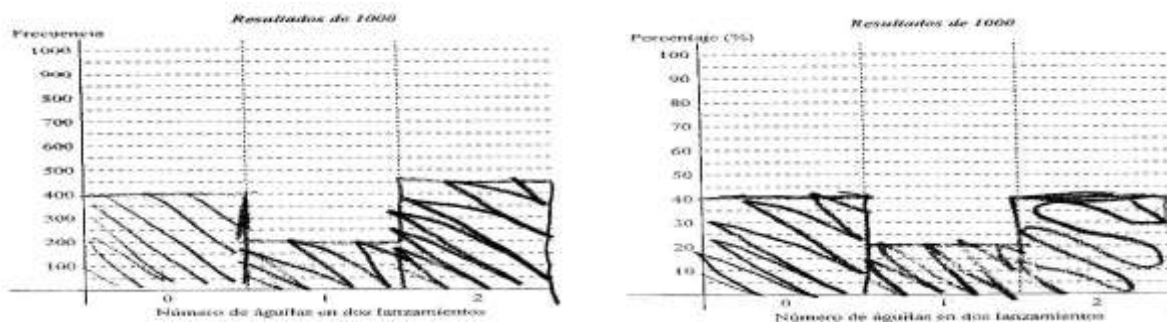
**Justificación:**

Las respuestas de los estudiantes E11 y E32 no presentan componente alguna del análisis.; por mencionar, en ambas respuesta no se elige el evento con mayor frecuencia; en la respuesta del E32 podemos observar que el porcentaje total no correspondiente al valor de la frecuencia relativa para los tres elementos: 0, 1 y 2 águilas; o bien, el E11 presenta una distribución no adecuada de la situación, además de que no distribuye las frecuencias relativas (%) teniendo en cuenta el 100% (la suma de las frecuencias relativas es igual al 100%).

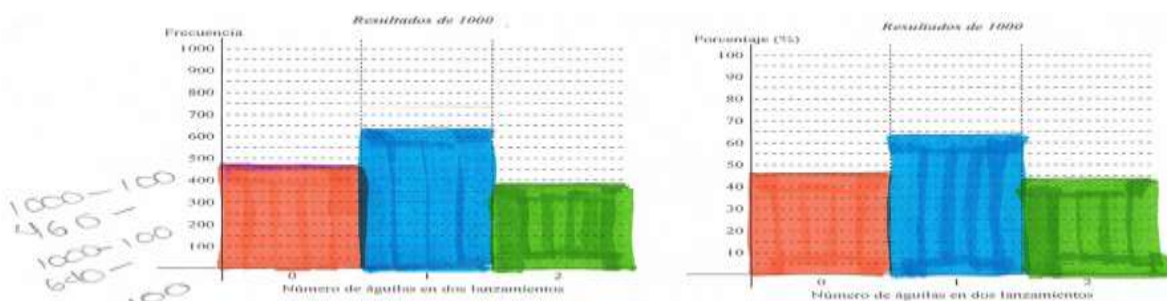
Uniestructural (U): Tiene en cuenta sólo una de las componentes de la tarea: “a”, “b”, “c” o “d”.

**Ejemplo de la Componente c:**

E7:



E35:



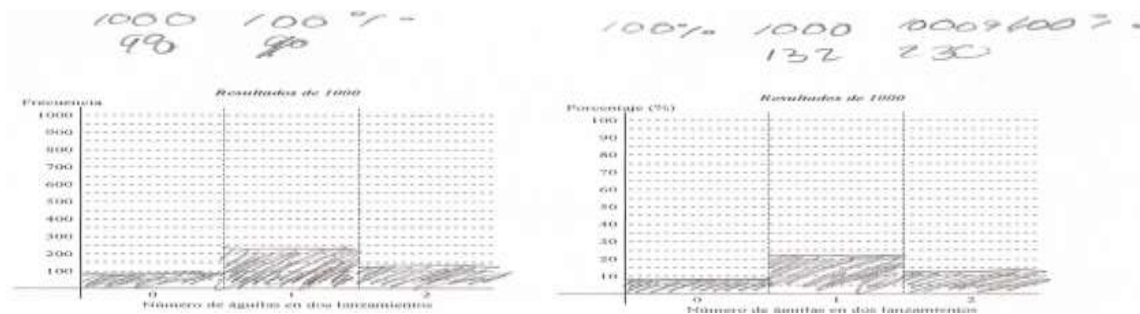
**Justificación:**

En este tipo de respuestas, se observa que los estudiantes E7 y E35 asignan cuando menos dos distintas frecuencias absolutas y relativas (%) a los valores esperados de los eventos, aludiendo el sentido de la aleatoriedad.



**Ejemplo de la Componente d:**

E41:



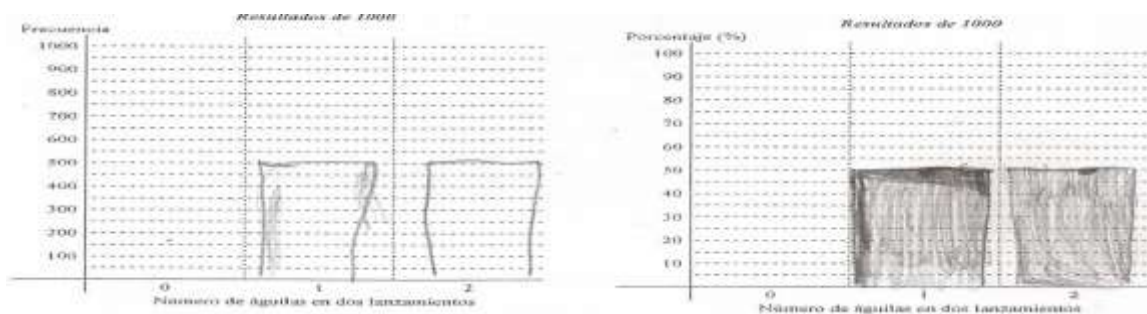
**Justificación:**

En esta respuesta, podemos observar que los gráficos proporcionados por el E41 conservan proporción en los resultados.

Multiestructural (M): Tiene en cuenta dos de las componentes de la tarea: “a”, “b”, “c” o “d”.

**Ejemplo de la Componente ad:**

E8:

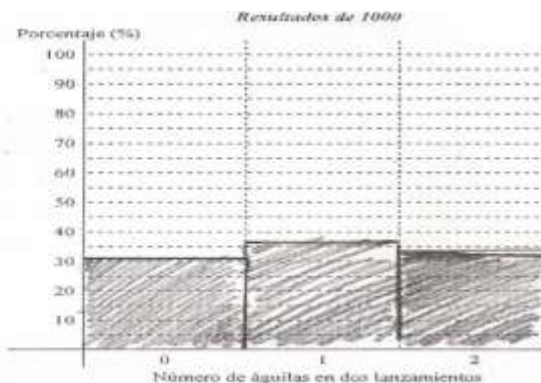
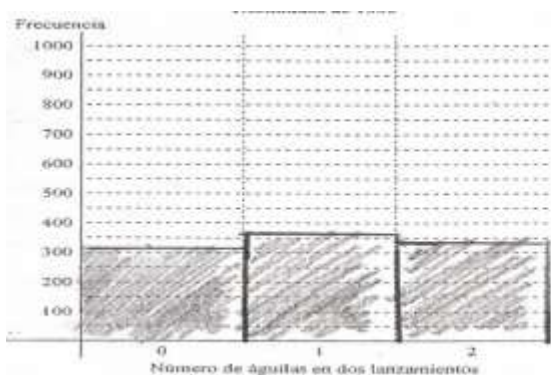


**Justificación:**

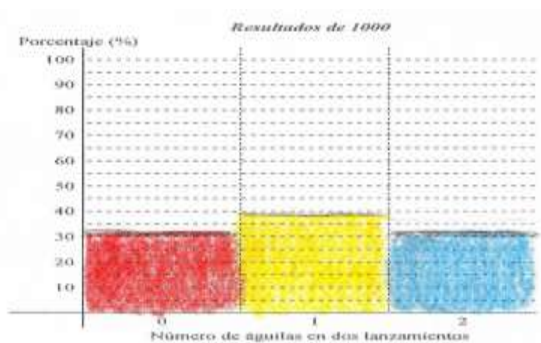
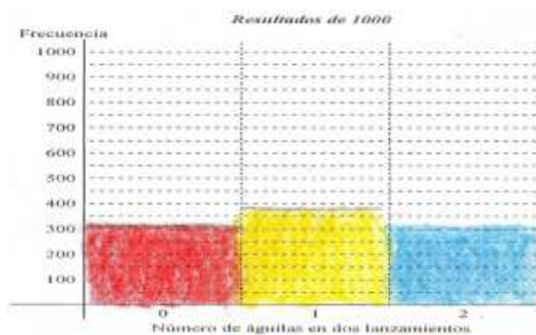
En este caso, el E8 distribuye las frecuencias absolutas y relativas teniendo en cuenta el número de sorteos y el 100%, respectivamente, y conservan proporción los resultados ambos gráficos; sin embargo, cabe destacar que la distribución de los datos que el estudiante presenta, no es la adecuada a esta situación.

**Ejemplo de la Componente *cd*:**

E1:



E26:

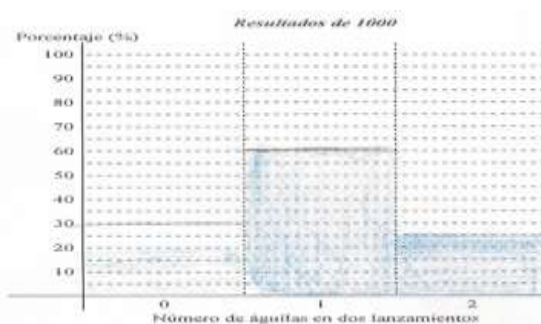
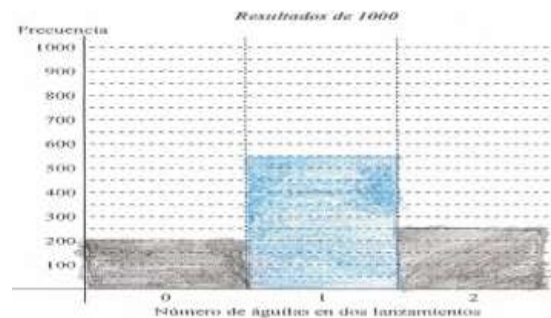


**Justificación:**

En ambas respuestas, se asignan cuando menos dos distintas frecuencias absolutas y relativas (%) a los valores esperados de los eventos, considerando la aleatoriedad de la situación; y ambos gráficos conservan proporción en sus resultados.

**Ejemplo de la Componente *bc*:**

E33:



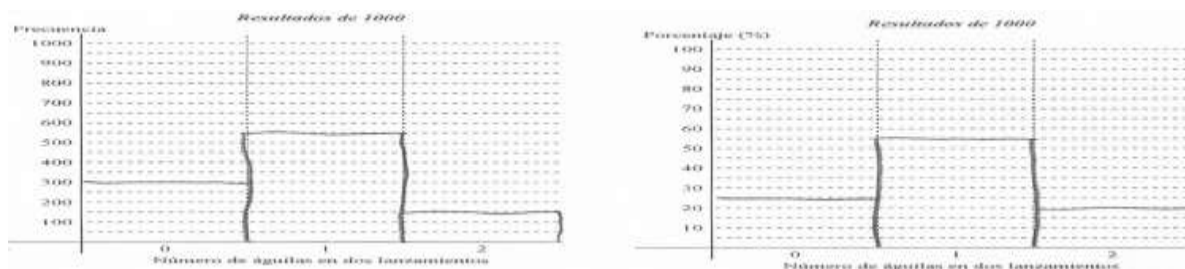
**Justificación:**

En esta respuesta, el E33 asigna mayor frecuencia absoluta y relativa (%) al evento con mayor probabilidad (aproximada al valor esperado), y asigna cuando menos dos distintas frecuencias absolutas y relativas (%) a los valores esperados de los eventos, considerando la aleatoriedad.

Relacional (R): Tiene en cuenta tres de las componentes de la tarea: “a”, “b”, “c” o “d”.

**Ejemplo de la Componente abc:**

E31:

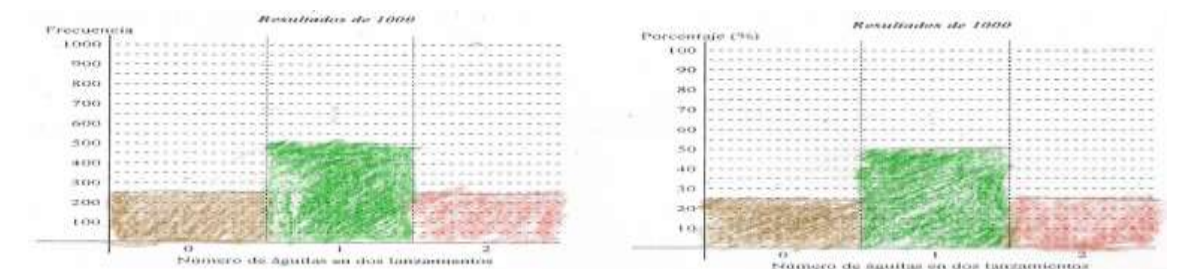


**Justificación:**

En este caso, E31 distribuye adecuadamente las frecuencias absolutas y relativas; asigna mayor frecuencia absoluta y relativa al evento con mayor probabilidad (aproximada al valor esperado); y finalmente, asigna cuando menos dos distintas frecuencias absolutas y relativas a los valores esperados de los eventos, considerando la aleatoriedad.

**Ejemplo de la Componente abd:**

E24:



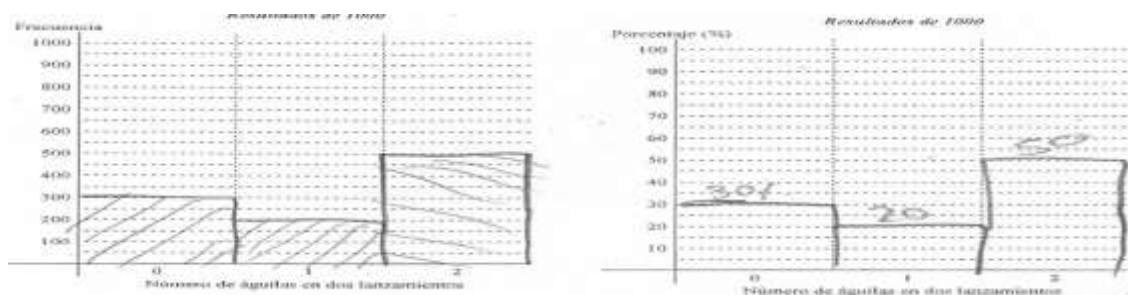
**Justificación:**

En esta respuesta, E24 distribuye adecuadamente las frecuencias absolutas y relativas; y

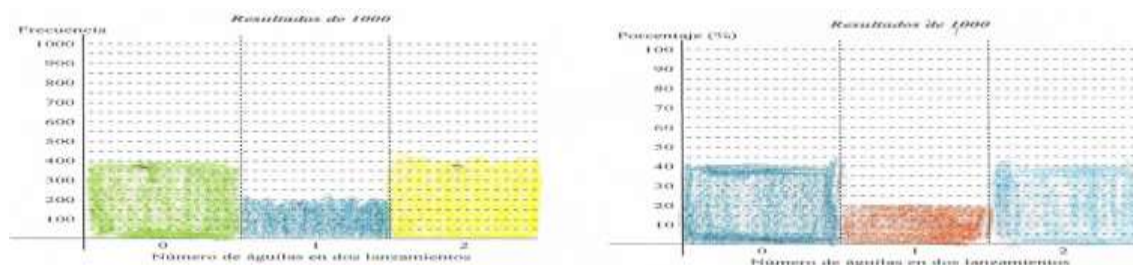
asigna mayor frecuencia absoluta y relativa al evento con mayor probabilidad (aproximada al valor esperado); conservando la proporción de los resultados en ambos gráficos.

**Ejemplo de la Componente *acd*:**

E4:



E23:



**Justificación:**

En las respuestas de los estudiantes E4 y E23 se observa que distribuyen adecuadamente las frecuencias absolutas y relativas; asignan cuando menos dos distintas frecuencias absolutas y relativas a los valores esperados de los eventos, considerando la aleatoriedad; y conservan la proporción de los resultados ambos gráficos.

**Ejemplo de la Componente *bcd*:**

E2:



**Justificación:**

En esta respuesta, E2 asigna mayor frecuencia absoluta y relativa al evento con mayor

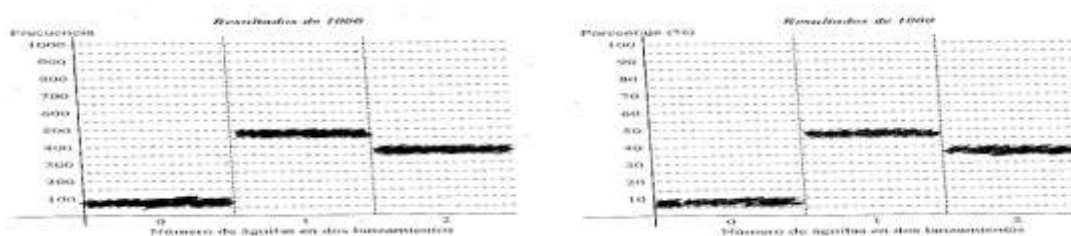


probabilidad (aproximada al valor esperado) y asigna cuando menos dos distintas frecuencias absolutas y relativas a los valores esperados de los eventos; conservando la proporción de los resultados en ambos gráficos.

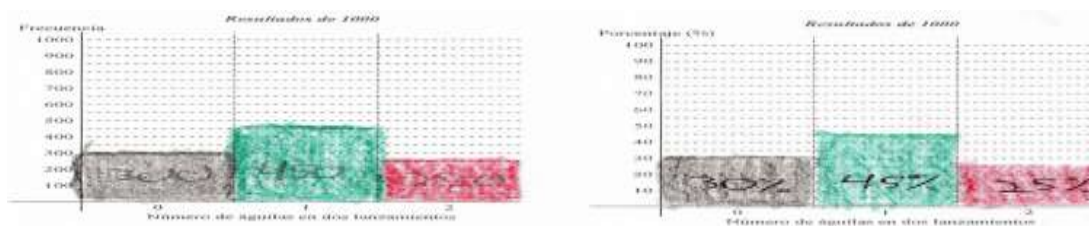
Abstracción Extendida (AE): Tiene en cuenta las cuatro componentes de la tarea: “a”, “b”, “c” y “d”.

**Ejemplo de la Componente abcd:**

E5:



E36:



**Justificación:**

En este tipo de respuestas, los estudiantes E5 y E36 distribuyen las frecuencias absolutas y relativas teniendo en cuenta el número de sorteos y el 100%, respectivamente; asignan mayor frecuencia, en ambos casos, al evento con mayor probabilidad (1 águila); asignan cuando menos dos distintas frecuencias absolutas y relativas a los valores esperados de los eventos, aludiendo la aleatoriedad de la situación; y finalmente, sus gráficos conservan proporción en sus resultados.

La siguiente tabla presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes de acuerdo al nivel de razonamiento y a las componentes involucradas en esta pregunta.

TEST DIAGNÓSTICO - PREGUNTA 9															
P	U			M			R						AE		
	c		d	ad	bc	cd	abc	abd		acd			bcd	abcd	
E11	E7	E35	E41	E8	E33	E1	E31	E24	E30	E4	E20	E29	E2	E5	E42
E32	E17	E40				E9		E25	E37	E13	E21	E34	E6	E10	E43
E45	E19					E26		E28	E38	E14	E23	E39	E12	E36	E46
										E16	E27				

NP: Los estudiantes E3, E15, E18, E22 y E44 no realizaron la actividad.

Tabla 5.11.1. Clasificación de las respuestas de la pregunta 9

**Análisis parcial por nivel de razonamiento:**

Como se observa en la tabla anterior, 3/46 de las respuestas aportadas por los alumnos se ubicaron en el nivel de razonamiento probabilístico Preestructural; 6/46 en el nivel Uniestructural, 5/6 se enfocaron en la componente *c*, y 1/6 en la componente *d*; 5/46 en el nivel Multiestructural, 3/5 consideraron las componentes *cd*, 1/5 las componentes *ad* y *bc*, de manera exclusiva; 21/46 en el nivel Relacional, siendo este el que cuenta con un mayor número de respuestas, 1/21 relaciono las componentes *abc*, 6/21 las componentes *abd*, 11/21 las componentes *acd*, y 3/21 la combinación *bcd*; finalmente, el nivel Abstracto Extendido está representado con 6/46 respuestas, donde se incluyen todas las componentes del análisis, *abcd*.



Figura 5.11.1. Clasificación por nivel de razonamiento de la pregunta 9

**Análisis parcial por componente:**

En la siguiente tabla se muestra la clasificación de las respuestas de la pregunta 9 aportadas por los estudiantes, de acuerdo al nivel de razonamiento y componente.

Nivel	Componente(s)	Participantes	Total
Preestructural	----	3	3
Uniestructural	c	5	6
	d	1	
	ad	1	
Multiestructural	bc	1	5
	cd	3	
	abc	1	
Relacional	abd	6	21
	acd	11	
	bcd	3	
	abcd	6	
Abstracto Extendido	----	5	5
NP	----	5	5
<b>Total</b>		<b>46</b>	<b>46</b>

Tabla 5.11.2. Clasificación de acuerdo al nivel y componente de la pregunta 9

La tabla muestra que la componente *a* fue considerada en 25/46 respuestas de los alumnos y la componente *b* en 17/46 respuestas. Por otro lado, las componentes con mayor presencia en las respuestas de los estudiantes son las componentes *c* y *d*, 30/46 y 31/46 respuestas, respectivamente.

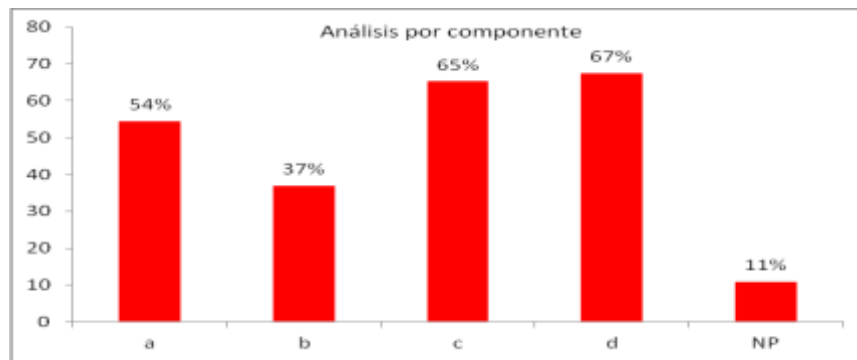


Tabla 5.11.3. Frecuencia de las componentes de la pregunta 9

La grafica nos muestra que más de la mitad de los estudiantes (54%) aportaron su respuesta teniendo en cuenta que el número de sorteos coincidiera con el valor que asignaban a la frecuencia absoluta –componente *a*- , es claro que a esta altura de la actividad, los alumnos tienen una mejor noción (intuitiva) de lo que representa la frecuencia de los posibles resultados. Por su parte, la componente *b* se ubica en poco más de la tercera parte del total de respuestas analizadas (37%), lo que robustece la idea de que los alumnos tienen claro cuál es el evento con mayor probabilidad de éxito, por lo que le asignan una mayor frecuencia absoluta al número de sorteos ganados por el participante Beto, al igual que en la gráfica de frecuencias relativas (%). También se debe destacar que un 65% de los alumnos realizan su representación gráfica considerando cuando menos dos distintos valores para las frecuencias absolutas –componente *c*–, que si bien no siempre son tan cercanos a los

valores esperados, sí nos muestran que tienen (aunque no de manera formal) una idea de la variabilidad en los resultados, esto podría aludirnos un avance en la noción que tienen los estudiantes con respecto a lo que sucede con sucesos probabilísticos a través del tiempo. Asimismo, resulta relevante la componente *d*, referente a la correcta relación entre los gráficos de frecuencias absolutas y relativas, es decir, la proporción que deben guardar entre ellas. Este resultado representa un considerable avance, si se toma en cuenta que en las respuestas de la pregunta 6 (Predicción Gráfica de Frecuencias Absolutas y Frecuencias Relativas (%) a Corto Plazo – 40 días –) la componente relacionada con este rubro sólo se ubicó en 12/46 respuestas, lo que representó un 26% aproximadamente; contrastando con el 67% para esta pregunta (31/46 respuestas).

### **5.12 Informe de la Pregunta 10**

En este apartado describiremos los resultados obtenidos de la pregunta 10 del cuestionario que realizaron los estudiantes.

10. ¿Por qué piensas que los anteriores resultados son razonables?

#### **Objeto de estudio:**

*Argumentación Respecto a la Predicción Gráfica de Distribución de Frecuencias Absolutas y Relativas a Largo Plazo.*

#### **Objetivo:**

*Evaluar los argumentos de los estudiantes para justificar las distribuciones de frecuencia en términos absolutos y relativos (%), a largo plazo.*

#### **Componentes de la Respuesta:**

En esta tarea de argumentación respecto a la predicción de distribuciones de frecuencias absolutas y relativas (%), se tuvieron en cuenta las siguientes componentes para evaluar la respuesta de cada estudiante:

- a) Alude el aspecto de impredecibilidad, incertidumbre o aleatoriedad de la situación



- (cualquier cosa puede pasar, es posible que sea así).
- b) Alude al aspecto de oportunidad, posibilidad o probabilidad de la situación.
  - c) Hace alusión a sus resultados proporcionados en su predicción: tabla de la tarea 8 y/o distribuciones de la tarea 9. Es decir, relaciona su argumentación con la representación gráfica de la distribución de frecuencias.
  - d) Su argumento se basa en que Beto tiene la mayor probabilidad de ganar o de obtener exactamente un águila (probabilidad subjetiva). Es decir, elige el elemento con mayor probabilidad de éxito.
  - e) Su argumento hace alusión a que el evento de un águila y un sol tiene mayor probabilidad de ocurrir que los eventos águila-águila, y sol-sol. Esto implica que relaciona el espacio muestral y los elementos de la variable aleatoria (0 Águila = Sol y Sol, 1 Águila = Águila y Sol, 2 Águilas = Águila y Águila).
  - f) Menciona el valor de la probabilidad teórica que tiene cada integrante de la familia Pérez de ganar el control del televisor.
  - g) Identifica el aspecto conmutativo de las opciones en el espacio muestral AS y SA.

**Categorías de Análisis de Respuesta y Ejemplos:**

A continuación se presentan los diferentes ejemplos encontrados de respuesta clasificadas según sus componentes. En los casos en que se hace necesario se escriben los valores de las frecuencias absolutas y relativas asignadas para la gráfica de 40 sorteos, en estricto orden de los eventos (0 águilas, 1 águila y 2 águilas).

Preestructural (P): Su argumento está basado en creencias personales o subjetivas no relacionadas con la aleatoriedad o con la posibilidad de éxito de cada integrante de la Familia Pérez; o bien, sus argumentos son incorrectos.

<b>Ejemplos:</b>	<b>Justificación:</b>
E14: <i>“por que tienen un total común o un resultado igual al sumarlos”</i>	Las respuestas de estos estudiantes no están basadas en argumentos de carácter probabilístico, más bien en puntos de vista personales o subjetivos.
E26: <i>“es mi punto de vista de los resultados”</i>	

Uniestructural (U): Tiene en cuenta sólo una de las componentes *a*, *b*, o *c* de la tarea.

<b>Ejemplos de la Componente a:</b>	<b>Justificación:</b>
E9: <i>“por que es solo un juego al azar”</i>	Este tipo de justificaciones aluden al carácter aleatorio e incierto de la situación mostrada.
E40: <i>“Por la manera en que va variando el resultado de los volados”</i>	
<b>Ejemplos de la Componente b:</b>	<b>Justificación:</b>
E1: <i>“Por que van de acuerdo a la probabilidad de las águilas”</i>	En este caso, las justificaciones presentadas por los estudiantes E1 y E23, aluden a la posibilidad de obtener ningún águila, un águila y dos águilas, sin mencionar la probabilidad teórica de cada evento.
E23: <i>“Por las posibilidades que tienen”</i>	
<b>Ejemplos de la Componente c:</b>	<b>Justificación:</b>
E4: <i>“Por que tienen coherencia con lo de la tabla”</i>	En estas respuestas, se percibe la referencia hacia las representaciones gráficas de las frecuencias (absoluta y relativa) de la pregunta 9; es decir, que los estudiantes se justifican plenamente con las características de su distribución propuesta.
E28: <i>“Si, por que coinciden con la tabla anterior”</i>	

Multiestructural (M): Tiene en cuenta alguna de las componentes *d*, *e* o *f* de la tarea.

<b>Ejemplos de la Componente d:</b>	<b>Justificación:</b>
E6: <i>“Por que sin importar el numero de días Beto ganara la mitad de ellos”</i>	Las respuestas aportadas por estos estudiantes refieren al evento con la mayor probabilidad de ocurrencia (es decir, al participante con las mayores posibilidades de éxito) o al evento de que caiga 1 águila.
E27: <i>“A mayor transcurso de los días mayor la probabilidad de 1 águila, por lo tanto el porcentaje es proporcional”</i>	
<b>Ejemplos de la Componente f:</b>	<b>Justificación:</b>
E11: <i>“Porque todos tienen un 33.33% de</i>	En este caso, los estudiantes justifican al

<i>probabilidad de ganar”</i>	asignar valores a las distintas probabilidades que tiene cada participante; aunque no necesariamente coinciden con los teóricos esperados, tal es el caso del estudiante E11.
E25: “ <i>Por que se divide Sra. Ana 25%, Beto 50% y Sr. Carlos 25%”</i>	

Relacional (R): Tiene en cuenta dos de las componentes *d*, *e* y *f* de la tarea.

<b>Ejemplos de la Componente <i>df</i>:</b>	<b>Justificación:</b>
E10: “ <i>Por q el porcentaje q tiene veto es 25% mas al de sus padres q es solo de 25%”</i>	En estas respuestas, la justificación de los estudiantes se basan en la combinación de las componentes que hacen referencia al evento con mayor probabilidad de ocurrir y que asignan valores a las posibilidades de los otros participantes; en particular para estos dos ejemplos de respuestas, dichos valores coinciden con los teóricos esperados.
E24: “ <i>Porque Beto tiene mas oportunidad es 50% contra 25% y 25%”</i>	

Abstracción Extendida (AE): Tiene en cuenta las componente *d*, *e* y *f* de la tarea.

No se cuentan con ejemplos de este tipo de nivel.

La siguiente tabla presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes de acuerdo al nivel de razonamiento y a las componentes involucradas.

TEST DIAGNÓSTICO - PREGUNTA 10														
P		U								M			R	AE
		a	b				c			d	f	df	def	
E14	E26	E9	E1	E13	E20	E45	E4	E33	E41	E6	E32	E11	E10	
E17	E29	E40	E2	E16	E23		E5	E36	E43	E12	E34	E25	E24	
E21	E35		E7	E18	E38		E28	E39	E46	E27	E37	E30	E31	
			E8	E19	E42									

NP: Los estudiantes E3, E15, E22 y E44 no realizaron la actividad.

Tabla 5.12.1. Clasificación de las respuestas de la pregunta 10

**Análisis parcial por nivel de razonamiento:**

Como se puede observar en la tabla anterior, 6/46 de las respuestas analizadas se encuentran ubicadas en el nivel de razonamiento Preestructural; mientras que el nivel Uniestructural resultó con el mayor número de respuestas, 24/46, donde 2/24 corresponden a la componente *a*, 13/24 a la componente *b*, y 9/24 a la componente *c*; por otro lado, en el nivel Multiestructural se clasificaron 9/46 resultados a esta pregunta, 6/9 referentes a la componente de análisis *d* y 3/9 a la componente *e*; por su parte, en el nivel Relacional se situaron 3/46 de las respuestas aportadas por los estudiantes, con la combinación de componentes *df*; finalmente, en el nivel Abstracto Extendido no se ubicó respuesta alguna.

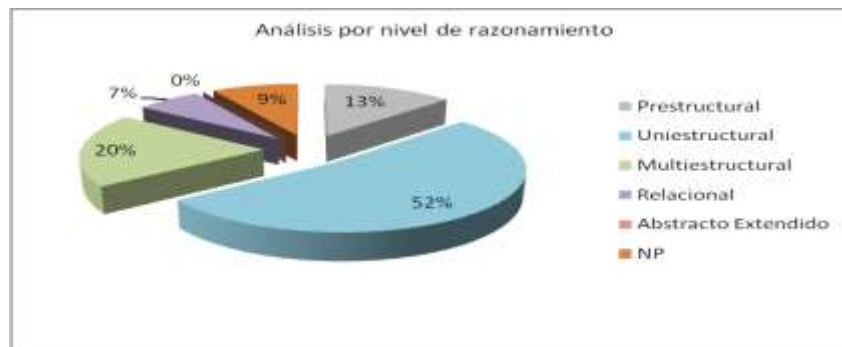


Figura 5.12.1. Clasificación por nivel de razonamiento de la pregunta 10

**Análisis parcial por componente:**

En la siguiente tabla se muestra la clasificación de las respuestas de la pregunta 10 aportadas por los estudiantes, de acuerdo al nivel de razonamiento y componente.

Nivel	Componente(s)	Participantes	Total
Preestructural	----	6	6
Uniestructural	a	2	24
	b	13	
	c	9	
Multiestructural	d	6	9
	f	3	
Relacional	df	3	3
Abstracto Extendido	def	0	0
NP	----	4	4
<b>Total</b>		<b>46</b>	<b>46</b>

Tabla 5.12.2. Clasificación de acuerdo al nivel y componente de la pregunta 10

En la tabla anterior se aprecia que la componente *a* fue considerada por sólo 2/46 estudiantes; mientras que la componente *b* por un mayor número, 13/46. Por otro lado, la componente *c* y la componente *d* por el mismo número de participantes, 9/46. Finalmente, la componente *f* está relacionada en 6/46 respuestas del análisis.



Tabla 5.12.3. Frecuencia de las componentes de la pregunta 10

En la tabla anterior podemos identificar que la componente *b* se vio reflejada en un mayor número de respuestas, con un 28%, esto indica que poco menos de la tercera parte de los estudiantes aludieron en su respuesta a las posibilidades o bien al aspecto probabilístico del experimento; sin embargo, se ubicaron en un nivel de razonamiento Uniestructural porque no aportaron un valor numérico o una justificación sobre dicha naturaleza. Las componentes *c* y *d* se presentaron con la misma frecuencia de las respuestas (20%); sin embargo, en el primer caso, componente *c*, pertenece al nivel de razonamiento Uniestructural, porque si bien los alumnos justificaron sus respuestas con sus datos proporcionados con la gráfica de la pregunta anterior (distribución de frecuencias absolutas y relativas), no lograron establecer claramente las razones por las que les parecen razonables sus resultados. Por el contrario, las pertenecientes a la componente *d*, se ubicaron en el nivel de razonamiento Multiestructural, ya que identificaron con cierta claridad al participante con la mayor probabilidad de ganar, es decir, se puede inferir que su perspectiva de los posibles resultados a través del tiempo, específicamente a largo plazo (1000 días), les permite conservar a Beto como el participante con mayor probabilidad de éxito. Se destaca que este porcentaje se vio incrementado de un 9% con respecto a la pregunta 7 (argumentación de la predicción gráfica para una distribución de frecuencias en 40 sorteos) a un 20% en la presente pregunta. También, cabe destacar que sólo en un 13%

(6/46) respuestas se logra asignar un valor numérico a la posibilidad que tiene cada integrante de la familia; sin embargo, es importante comentar que de estos 6 estudiantes, 4 de ellos asignaron los valores teóricos esperados para las correspondientes probabilidades. Lo anterior nos dice que aunque logren tener claro quién ganará en un mayor número de ocasiones, o en otras palabras, quien es el evento más probable, no consiguen relacionar la certidumbre hasta aquí lograda respecto del ganador con la asignación de un valor numérico para dicha condición.

### **5.13 Informe de la Pregunta 11**

En este apartado describiremos los resultados obtenidos de la pregunta 11 del cuestionario que realizaron los estudiantes.

11. ¿Crees que después de muchos días, todos los miembros de la familia tendrían el mismo número de veces el control del televisor? Justifica tu respuesta.

**Objeto de estudio:**

*Juicio de la Situación Aleatoria a Largo Plazo.*

**Objetivo:**

*Evaluar el juicio emitido por el estudiante de la situación aleatoria a largo plazo.*

**Componentes de la Respuesta:**

En esta tarea de juicio de la situación aleatoria a largo plazo, se tuvieron en cuenta las siguientes componentes para evaluar la respuesta de cada estudiante:

- a) Manifiesta el sentido de estabilidad o aproximación de las frecuencias a largo plazo.
- b) Identifica el evento que tiene mayor probabilidad de ocurrir (obtener 1 águila o que gane Beto). O bien los eventos menos posibles. Hace alusión a la frecuencia mayor o menor.
- c) Construye su argumento con base al conocimiento de la distribución teórica (de manera implícita o explícita).
- d) Construye su argumento con base a alguna característica del recorrido de la variable

aleatoria y/o del espacio muestral.

- e) Manifiesta la característica de la situación como no equiprobable.
- f) Manifiesta la característica de la situación como equiprobable.

**Categorías de Análisis de Respuesta y Ejemplos:**

A continuación se presentan una ejemplificación del tipo de respuestas dadas por los estudiantes en los diferentes niveles según sus componentes.

Prestructural (P): Su respuesta es positiva o negativa y su argumento es incoherente, subjetivo o de tipo idiosincrático. No hay argumento. Expresa una posición errónea de la situación como mencionar la variabilidad de las frecuencias, hace alusión a la incertidumbre, o bien escoge de manera incorrecta el evento menos probable. Su argumento no relaciona la existencia de un patrón en los resultados globales a largo plazo.

<b>Ejemplos:</b>	<b>Justificación:</b>
E4: “No”	Las dos respuestas se ubican en este nivel de razonamiento ya que el argumento de su negativa, o bien no existe (E4) o alude a la variación sin justificarla correctamente, es decir, no la relaciona con el patrón de resultados a largo plazo (E26).
E26: “no por que siempre va a variar”	

Uniestructural (U): Tiene en cuenta sólo una de las componentes *a, b, c, d, e* o *f* de la tarea.

<b>Ejemplos de la Componente a:</b>	<b>Justificación:</b>
E41: “Pues yo creiria que no por los resultados que obtube pero podría pasar que si pero dentro de mucho tiempo”	La respuesta hace referencia a la tendencia de la estabilización de las frecuencias a largo plazo, es decir, una vez que se lleva a cabo un gran número de veces el experimento, los resultados tenderían a estabilizarse.

<b>Ejemplos de la Componente b:</b>	<b>Justificación:</b>
E5: <i>“No aun asi veto sige ganando, aunque su papa tenga casi el mismo numero de veces”</i>	En el caso, el estudiante E5 considera al participante con la mayor ocurrencia de éxitos; mientras el estudiante E24 alude a los participantes con menor posibilidad de éxito –los padres de Beto–.
E24: <i>“No a esepcion de los padres que tienen el mismo po”</i>	
<b>Ejemplos de la Componente d:</b>	<b>Justificación:</b>
E7: <i>“no por que no hay la misma posibilidad de que salgan águilas”</i>	Estas respuestas basan sus argumentos aludiendo al valor numérico “1” de la V.A., ya sea a su posibilidad de ocurrencia como el E7, o bien, que los resultados águila-sol y sol-águila (impares, cuando menos de forma implícita) son más probables, como la respuesta del E42.
E42: <i>“no, ya que la provavilidad de impar es mayor a las demás”</i>	
<b>Ejemplos de la Componente e:</b>	<b>Justificación:</b>
E1: <i>“No sería muy mínima la diferencia que habría pero serían diferentes los días”</i>	Estas respuestas aluden a la no equiprobabilidad del experimento al dejar entrever que los resultados pueden variar a través del tiempo.
E35: <i>“No, porque en ocaciones ganarian mas o perderian mas cada uno de los integrantes”</i>	
<b>Ejemplos de la Componente f:</b>	<b>Justificación:</b>
E11: <i>“Si por que todos tienen la misma probabilidad de ganar”</i>	Las respuestas de estos estudiantes se relacionan con la característica de equiprobabilidad para el experimento, al suponer que las frecuencias de ocurrencia son iguales para todos participantes.
E21: <i>“Sip por que seria casi igual”</i>	

Multiestructural (M): Tiene en cuenta dos de las componentes *a, b, c, d, e* o *f* de la tarea.



<b>Ejemplos de la Componente bc:</b>	<b>Justificación:</b>
E6: <i>“No, Beto es el que ganara la mitad de días dejándole lo sobrante de días a su poder”</i>	En este caso, las dos respuestas refieren a Beto como el evento más probable o con mayor probabilidad de éxito; además de que de forma implícita reconocen valores de la distribución de frecuencias de los resultados del experimento.
E10: <i>“no por q veto tiene mas posibilidades q sus padres de hecho tiene el doble”</i>	
<b>Ejemplos de la Componente bd:</b>	<b>Justificación:</b>
E12: <i>“No, bueno, puede ser, aunque como dije, es mas probable que caiga 1 vez águila”</i>	Estos estudiantes indican que el evento más probable es que gane Beto, o que caiga un águila; además, construye su argumento con base en alguna característica del recorrido de la variable aleatoria.
E27: <i>“Es posible, pero generalmente el numero de probabilidades de una águila para Beto será mayor”</i>	
<b>Ejemplos de la Componente ce:</b>	<b>Justificación:</b>
E20: <i>“No, porque es probable que algunos días no caiga ningún águila o al contrario”</i>	La justificación de esta respuesta se basa en la no equiprobabilidad de los resultados del experimento; además de que hace referencia, aunque sea de manera implícita, a la distribución de frecuencias para el número de águilas que caen.

Relacional (R): Tiene en cuenta tres de las componentes *a, b, c, d, e* o *f* de la tarea. No se cuentan con ejemplos de este tipo de nivel.

Abstracción Extendida (AE): Tiene en cuenta cuatro de las componentes *a, b, c, d, e* o *f* de la tarea. No existen respuestas en este nivel de razonamiento.

La siguiente tabla presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes de acuerdo al nivel de razonamiento y a las componentes involucradas.

TEST DIAGNÓSTICO - PREGUNTA 11															
P			U								M			R	AE
			a	b			d	e		f	bc	bd	ce		abcd
E4	E26	E33	E41	E5	E28	E39	E7	E1	E19	E11	E6	E12	E20		
E9	E29	E36		E17	E34	E43	E16	E2	E23	E21	E10	E27			
E13	E31	E40		E24	E37		E42	E8	E35	E30	E46				
E14	E32	E45		E25	E38			E18							

**NP: Los estudiantes E3, E15, E22 y E44 no realizaron la actividad.**

Tabla 5.13.1. Clasificación de las respuestas de la pregunta 11

**Análisis parcial por nivel de razonamiento:**

La tabla anterior muestra que 12/46 respuestas aportadas por los estudiantes se ubican en el nivel de razonamiento probabilístico Preestructural, mientras que en el nivel Uniestructural se encuentran 24/46 respuestas, 1/24 enfocada en la componente *a*, 10/24 en la componente *b*, 3/24 en la componente *d*, 7/24 en la componente *e*, y finalmente 3/24 en la componente de análisis *f*. En el nivel de razonamiento Multiestructural se clasificaron 6/46 respuestas, 3/6 centradas en las componentes *bc*, 2/6 en las componentes *bd*, y únicamente 1/6 en las componentes *ce*. Por último, ninguna respuesta presentó las características de los niveles Relacional y Abstracto Extendido para clasificarse en alguno de los dos niveles.

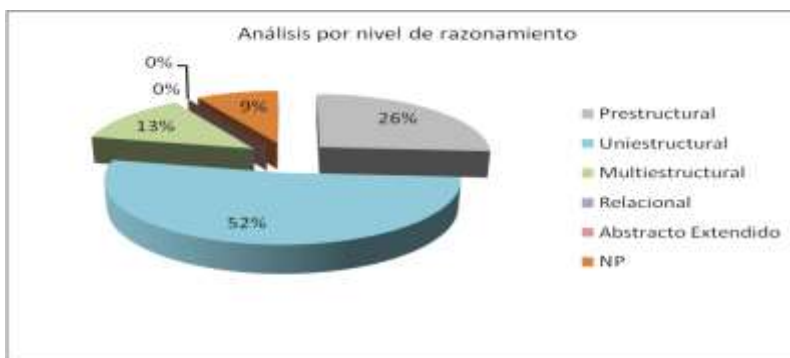


Figura 5.13.1. Clasificación por nivel de razonamiento de la pregunta 11

**Análisis parcial por componente:**

En la siguiente tabla se muestra la clasificación de las respuestas de la pregunta 11 aportadas por los estudiantes, de acuerdo al nivel de razonamiento y componente.

Nivel	Componente(s)	Participantes	Total
Preestructural	----	12	12
Uniestructural	a	1	24
	b	10	
	d	3	
	e	7	
	f	3	
	Multiestructural	bc	
	bd	2	6
	ce	1	
NP	----	4	4
<b>Total</b>		<b>46</b>	<b>46</b>

Tabla 5.13.2. Clasificación de acuerdo al nivel y componente de la pregunta 11

Se puede observar que la componente *a* se presenta en sólo 1/46 respuestas de los estudiantes; mientras que la componente *b* con una mayor frecuencia, en 15/46 respuestas. Con relación a la componente de análisis *c*, esta se presentó en 4/46 de las respuestas; la componente *d* en 5/46 respuestas; y las componentes *e* y *f* se encuentran referidas en 8/46 y 3/46 respuestas, respectivamente.

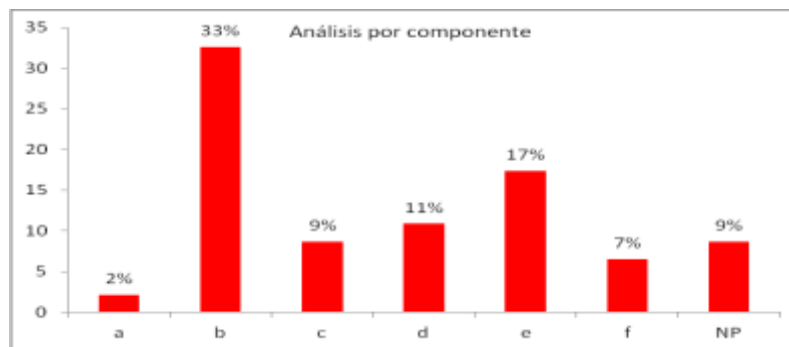


Tabla 5.13.3. Frecuencia de las componentes de la pregunta 11

Resulta revelador que sólo el 2% del total de las respuestas de los estudiantes hacen referencia a la componente *a*, relacionada con la estabilización de los resultados del experimento a través del tiempo, o bien con la aproximación de los resultados para las frecuencias de los resultados de los sorteos. Esto significaría que los estudiantes no alcanzan a inferir el comportamiento que tiene la distribución de frecuencias a largo plazo. Contrastando con esto, resulta importante mencionar que casi una décima parte de los estudiantes elaboraron su argumentación basándose en el comportamiento de la distribución

teórica aunque no de forma explícita (componente *c*); sin embargo, si hacen alguna referencia sobre la ocurrencia de las águilas en el experimento, lo que supondría una cierta perspectiva sobre dicha distribución. Este resultado es muy similar al de la componente *d*, el 11% de los alumnos aportaron argumentos que de algún modo tienen que ver con alguna característica del recorrido de la variable aleatoria, en particular con la ocurrencia de 1 águila o de resultados impares (valor 1 de la V.A.). Nuevamente el mayor porcentaje de los resultados (33%) recae en el reconocimiento del evento con mayor probabilidad de ocurrencia (componente *d*), aunque esto ha sido una constante en las últimas respuestas analizadas, no deja de ser importante el que se conserve esta idea en los alumnos. Poco menos de una quinta parte del total de los resultados (17%) consideran que en la situación planteada la no equiprobabilidad (componente *e*), puesto que asignan o sugieren distintos valores al número de veces que tendrá el control del televisor cada integrante de la familia; mientras que el 7% de los estudiantes se manifestaron a favor de la equiprobabilidad de éxito (componente *f*), considerando la misma probabilidad que tienen cada participante de ganar.

#### **5.14 Informe de la Pregunta 12**

En este apartado describiremos los resultados obtenidos de la pregunta 12 del cuestionario que realizaron los estudiantes.

12. ¿Consideras que existe alguna forma de conocer con anticipación las posibilidades que tiene cada integrante de la familia Pérez de tener el control del televisor? Si es así, ¿cuál sería esa forma?

**Objeto de estudio:**

*Juicio sobre la inferencia de las distintas posibilidades de los resultados en los sorteos.*

**Objetivo:**

*Indagar sobre la capacidad de inferir los posibles resultados de los sorteos y del proceso para dicha inferencia.*

**Componentes de la Respuesta:**

Para esta tarea sobre la inferencia de los posibles resultados de los sorteos, se tuvieron en cuenta las siguientes componentes para evaluar la respuesta de cada estudiante:

- a) Asigna un integrante de la familia como el de mayor posibilidad de ganar los sorteos con o sin justificación.
- b) Indica la incapacidad de inferir las posibilidades de los resultados en los sorteos, aludiendo la naturaleza aleatoria del experimento.
- c) Indica la capacidad de inferir las posibilidades de los resultados en los sorteos, aludiendo de manera formal o informal la definición de la probabilidad clásica o teórica; o bien, aludiendo a algún patrón o técnica.
- d) Muestra la capacidad de inferir los posibles resultados con base en la identificación el espacio muestral oculto; o bien, los valores teóricos de probabilidad de cada participante.
- e) Muestra la capacidad de inferir los posibles resultados con base en la identificación de las posibilidades o probabilidades de los eventos.

**Categorías de Análisis de Respuesta y Ejemplos:**

A continuación se presentan una ejemplificación del tipo de respuestas dadas por los estudiantes de acuerdo a su nivel de razonamiento.

Preestructural (P): Indica la capacidad de inferir las posibilidades de los resultados en los sorteos, o bien la incapacidad de hacerlo, sin justificar la respuesta. O bien, su justificación es incoherente, subjetiva o de tipo idiosincrático.

<b>Ejemplos:</b>	<b>Justificación:</b>
E4: “No porque no hay forma”	Los estudiantes E4 y E28 manifiestan incapacidad de inferir los posibles resultados para los miembros de la familia; sin embargo, su justificación no se encuentra en el sentido del objeto de estudio.
E28: “No”	

Uniestructural (U): Su argumento se basa en una de las componentes de la tarea: *a* o *b*.

<b>Ejemplos de la Componente <i>a</i>:</b>	<b>Justificación:</b>
E18: <i>“yo creo que Beto tendría el control más”</i>	Indica al participante con la mayor cantidad de éxitos en los sorteos; sin embargo, no se encuentra justificada de modo alguno.
<b>Ejemplos de la Componente <i>b</i>:</b>	<b>Justificación:</b>
E1: <i>“No por que variaría el resultado poco pero tal ves”</i>	Las respuestas muestran la incapacidad de inferencia sobre las posibilidades de éxito de cada integrante; sin embargo, en la justificación se alude al carácter aleatorio del experimento, sin relacionarlo con alguna otra componente.
E29: <i>“No por el asar”</i>	

Multiestructural (M): Su argumento se basa en una de las componentes de la tarea: *c*, *d*, o *e*.

<b>Ejemplos de la Componente <i>c</i>:</b>	<b>Justificación:</b>
E2: <i>“Haciendo un diagrama de árbol”</i>	En este caso, los estudiantes muestran capacidad de inferir los posibles resultados para los sorteos; además, su argumentación alude alguna técnica de conteo o al cálculo de proporciones, referentes a conceptos de la probabilidad clásica.
E25: <i>“Si, Dividar en porcentaje las combinaciones que existen y el que tenga control sobre mayor N. de combinaciones”</i>	
<b>Ejemplos de la Componente <i>d</i>:</b>	<b>Justificación:</b>
E26: <i>“la única que se es que tiene mas posibilidades de que salga la mitad”</i>	Indica capacidad de inferencia de los resultados; además, alude (en cierta forma) que es más probable que caigan la mitad de águilas (o soles) en lugar de obtener únicamente águilas o soles, de manera excluyente.

<b>Ejemplos de la Componente e:</b>	<b>Justificación:</b>
E23: <i>“Si, ver la posibilidad que tiene cada uno de la familia”</i>	En este caso, el estudiante justifica su capacidad de inferencia aludiendo a la posibilidad que tiene cada miembro de la familia, sin dar otro tipo de característica.

Relacional (R): Su argumento se basa en dos componentes de la tarea: *a, b, c, d* o *e*.

<b>Ejemplos de la Componente ae:</b>	<b>Justificación:</b>
E24: <i>“Beto un 50% de las veces Carlos un 25% y Ana 25%”</i>	En este caso, además de identificar al participante con mayor probabilidad de éxito en los sorteos, E24 y E27 asignan los valores esperados de probabilidad, o bien, aluden de manera intuitiva el espacio muestral oculto {(SS), (AS), (SA), (AA)}.
E27: <i>“Sí, sería posible de 4 caras 2 posibilidades Beto, 4 caras 1 posibilidad Ana, 4 caras 1 posibilidad Carlos”</i>	
<b>Ejemplos de la Componente bd:</b>	<b>Justificación:</b>
E42: <i>“no, porque tiran al azar, pero es más probable que salga impar”</i>	Esta respuesta aunque indica la incapacidad de inferir los posibles resultados de los sorteos, se justifica mencionando el carácter aleatorio del experimento, pero además alude al hecho de que son más probables los eventos SA y AS, que los eventos SS y AA; con lo que manifiesta cierto conocimiento del espacio muestral.

Abstracción Extendida (AE): Su argumento se basa en tres o más componentes de la tarea: *a, b, c, d* o *e*. No existen respuestas en este nivel de razonamiento.

La siguiente tabla presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes de acuerdo al nivel de razonamiento y a las componentes involucradas.

TEST DIAGNÓSTICO - PREGUNTA 12															
P				U					M				R		AE
				a	b				c		d	e	ae	bd	
E4	E13	E28	E45	E18	E1	E29	E35	E39	E2	E19	E26	E23	E24	E42	
E7	E17	E30			E6	E31	E36	E40	E8	E25			E27		
E11	E20	E34			E14	E32	E37	E46	E9	E41					
E12	E21	E43			E16	E33	E38		E10						

NP: Los estudiantes E3, E5, E15, E22 y E44 no realizaron la actividad.

Tabla 5.14.1. Clasificación de las respuestas de la pregunta 12

**Análisis parcial por nivel de razonamiento:**

En la tabla anterior se observa que el nivel de razonamiento probabilístico Preestructural se ubica con 13/46 respuestas; mientras que en el nivel Uniestructural se ubicaron 16/46 de las respuestas, 1/16 enfocada en la componente *a*, y 15/16 en la componente *b*. Por otro lado, en el nivel Multiestructural se situaron 9/46 respuestas, 7/9 centradas en la componente *c* y las componentes *d* y *e*, con 1/9 respectivamente. Finalmente, el nivel de razonamiento Relacional se presentó en 3/46 respuestas aportadas por los estudiantes, con 2/3 para las componentes *ae* y 1/3 para las componentes *db*. El nivel Abstracto Extendido no presentó respuesta alguna.

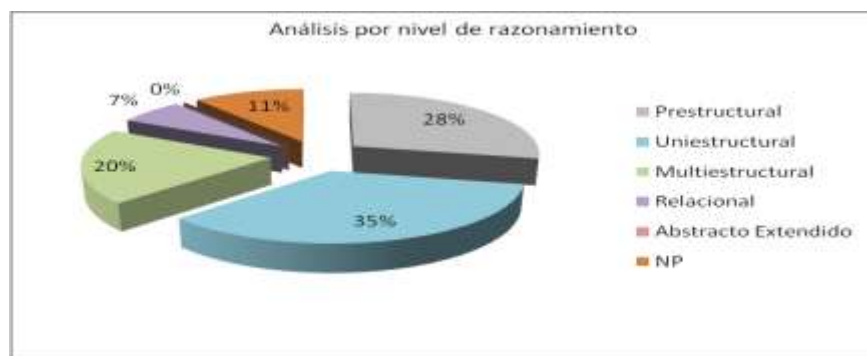


Figura 5.14.1. Clasificación por nivel de razonamiento de la pregunta 12

**Análisis parcial por componente:**

En la siguiente tabla se muestra la clasificación de las respuestas de la pregunta 12 aportadas por los estudiantes, de acuerdo al nivel de razonamiento y componente.



Nivel	Componente(s)	Participantes	Total
Preestructural	----	13	13
Uniestructural	a	1	16
	b	15	
Multiestructural	c	7	9
	d	1	
	e	1	
Relacional	ae	2	3
	bd	1	
Abstracto Extendido		0	0
NP	----	5	5
<b>Total</b>		<b>46</b>	<b>46</b>

Tabla 5.14.2. Clasificación de acuerdo al nivel y componente de la pregunta 12

En la tabla anterior se observa que la componente *a* se presentó en 3/46 respuestas, la componente *b* en 16/46 respuestas, la componente *c* en 7/46 respuestas, la componente *d* en 2/46 respuestas, y finalmente, la componente *e*, se le utilizó como argumento en un total de 3/46 respuestas por parte de los estudiantes.

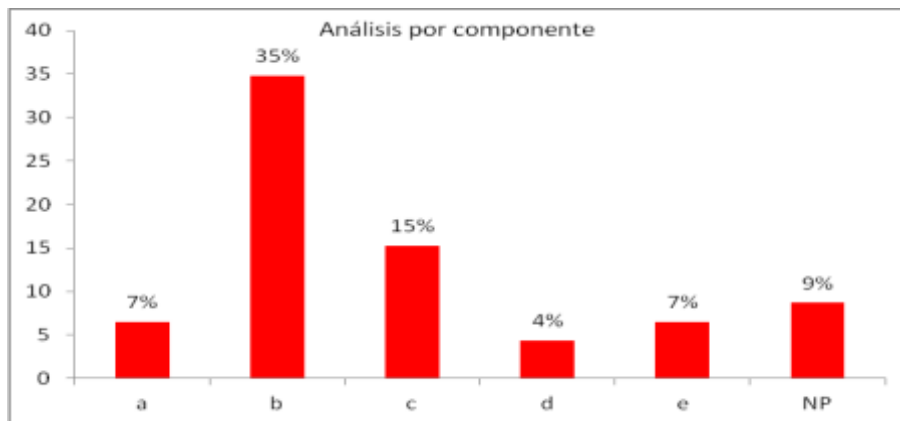


Tabla 5.14.3. Frecuencia de las componentes de la pregunta 12

Como se puede observar en el gráfico anterior, menos de la décima parte de los estudiantes (7%) eligen a un participante de la familia como el de mayor posibilidad de ganar los sorteos (componente *a*); esto puede explicarse debido al sentido de la pregunta, ya se les cuestionaba sobre la capacidad o incapacidad de inferir resultados a largo plazo, y sobre el proceso para realizar dicha inferencia; y no tanto acerca del valor de sus probabilidades. Cabe resaltar que un 35% de las respuestas relacionan su argumentación con la componente *b* de la tarea, esto indica que se inclinaron por la incapacidad de inferir los posibles resultados de los sorteos, aludiendo al aspecto aleatorio del experimento. Esto puede leerse

de dos formas, la primera –la mejor de estas– es que los estudiantes identifican hasta cierto punto la variabilidad en el experimento y por esto no podrían predecir los resultados de los sorteos, algo así como “cualquiera puede ganar”, lo cual es efectivamente cierto si se consideran sorteos o lanzamientos de las dos monedas individuales; y la segunda es que la incapacidad de inferencia radica en que no logran identificar (aunque están presentes la aleatoriedad y variabilidad en el experimento) la distribución de frecuencias de los resultados, es decir, el número de veces que se gana el sorteo tiende a estabilizarse conforme aumentan los días (repeticiones) y que por tanto si es posible inferir las posibilidades de cada participante. Todavía menor es el porcentaje de respuestas que incluyen a la componente del análisis *c*, 15%, puesto que no sólo se refiere a la posibilidad de inferir los resultados de los sorteos, sino además, a su justificación por medio de algún tipo de referencia de la probabilidad clásica o teórica, o bien, de incluir algún patrón o técnica para lograr dicha inferencia, por lo que muy pocos estudiantes consiguieron relacionar la componente mencionada. Un porcentaje más pequeño (4%) de respuestas incluyeron la componente *d*, referente al espacio muestral oculto y a los valores teóricos de probabilidad de cada participante. Esto no sorprende si consideramos que en todas las respuestas de la actividad las componentes que relacionan a la identificación, descripción o influencia del espacio muestral fueron las que en menor grado se presentaron. Finalmente, la componente *e* se presentó en un 7% de las respuestas, ya que en este caso la inferencia se justifica con la identificación de los resultados de cada participante a través de las probabilidades de cada evento, y este factor nuevamente representó gran dificultad para los alumnos.

### 5.15 Informe de la Pregunta 13

En este apartado describiremos los resultados obtenidos de la pregunta 13 del cuestionario que realizaron los estudiantes.

13. Asigna un número a la posibilidad de que cada integrante de la familia Pérez tenga el control del televisor:

Posibilidad de Ana = \_\_\_\_\_

Posibilidad de Beto = \_\_\_\_\_

Posibilidad de Carlos = \_\_\_\_\_

**Objeto de estudio:**

*Valores Subjetivos de la Distribución de Probabilidad.*

**Objetivo:**

*Evaluar la asignación de valores subjetivos a la distribución de probabilidad del experimento.*

**Componentes de la Respuesta:**

Para esta tarea sobre la asignación de valores subjetivos a la distribución de probabilidad del experimento, se tuvieron en cuenta las siguientes componentes para evaluar la respuesta de cada estudiante:

- a) Asocia el valor de la posibilidad a un valor numérico absoluto o relativo (como el porcentaje).
- b) Tiene en cuenta la propiedad de probabilidad total para distribuir los valores para cada evento (suma 100%).
- c) Los valores asignados corresponden a los valores teóricos de la distribución o se aproximan notablemente en  $\pm 5\%$ .
- d) Asigna un valor mayor a Beto, el evento más probable.

**Categorías de Análisis de Respuesta y Ejemplos:**

A continuación se presentan una ejemplificación del tipo de respuestas dadas por los estudiantes de acuerdo al nivel de razonamiento.

Preestructural (P): Manifiestan una escala cualitativa para asignar la probabilidad a cada evento.

<b>Ejemplos:</b>	<b>Justificación:</b>
E13: “Ana =1/3; Beto =1/3; Carlos =1/# <i>POR TIRO</i> ”	Esta respuesta se encuentra incompleta, y adicionalmente utilizó argumentos no cuantitativos para un participante.

Uniestructural (U): Su argumento se basa en una de las componentes: “a”, “b”, “c” o “d”.

<b>Ejemplos de la Componente <i>a</i>:</b>	<b>Justificación:</b>
E4: “ <i>Ana =30; Beto =20; Carlos = 50</i> ”	E4 y E23 expresaron sus respuestas por medio de valores absolutos para cada participante, aunque no cumplen con alguna otra de las componentes del análisis.
E23: “ <i>Ana= 40; Beto= 20; Carlos= 40</i> ”	

Multiestructural (M): Su argumento se basa en dos de las componentes: “a”, “b”, “c” o “d”.

<b>Ejemplos de la Componente <i>ab</i>:</b>	<b>Justificación:</b>
E21: “ <i>Ana =400/1000; Beto =300/1000; Carlos =300/1000</i> ”	Este tipo de respuestas expresan en forma relativa (proporción o porcentaje) la posibilidad de cada integrante, y tienen en cuenta que el total coincide con la unidad o el 100%.
E45: “ <i>Ana= 33.3%; Beto= 33.3%; Carlos= 33.3%</i> ”	
<b>Ejemplos de la Componente <i>ad</i>:</b>	<b>Justificación:</b>
E7: “ <i>Ana =10; Beto =15; Carlos =5</i> ”	En este caso, el tipo de respuestas se expresan en forma absoluta, además de asignar un mayor valor al participante con mayor probabilidad de éxito.
E26: “ <i>Ana= 28; Beto= 40; Carlos= 32</i> ”	

Relacional (R): Su argumento se basa en tres de las componentes: “a”, “b”, “c” o “d”.

<b>Ejemplos de la Componente <i>abd</i>:</b>	<b>Justificación:</b>
E1: “ <i>Ana = 28%; Beto =40%; Carlos = 32%</i> ”	En este tipo de respuestas, la posibilidad de cada participante se representa en términos de porcentaje; además, se verifica que se cumple el 100% de probabilidad y se asigna un valor mayor a Beto.
E27: “ <i>Ana= 16%; Beto= 70%; Carlos= 14%</i> ”	

Abstracción Extendida (AE): Su argumento se basa en las cuatro componentes: “a”, “b”, “c” y “d”.

<b>Ejemplos de la Componente <i>abcd</i>:</b>	<b>Justificación:</b>
E2: “Ana = 30%; Beto = 50%; Carlos = 20%”	En este caso, además de las tres componentes del nivel de razonamiento anterior, se comprueba que los valores asignados corresponden a los valores esperados con una variación de $\pm 5\%$ .
E24: “Ana= 25%; Beto= 50%; Carlos= 25%”	

La siguiente tabla presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes de acuerdo al nivel de razonamiento y a las componentes involucradas.

TEST DIAGNÓSTICO - PREGUNTA 13												
P	U		M				R		AE			
	a		ab	ad			abd		abcd			
E13	E4	E31	E21	E7	E28	E37	E1	E20	E2	E9	E30	E42
	E11	E33	E45	E18	E29	E39	E12	E27	E5	E10	E34	E43
	E14	E40		E19	E32		E16		E6	E24	E36	E46
	E23	E41		E26	E35		E17		E8	E25	E38	
NP: Los estudiantes E3, E15, E22 y E44 no realizaron la actividad.												

Tabla 5.15.1. Clasificación de las respuestas de la pregunta 13

**Análisis parcial por nivel de razonamiento:**

En la tabla anterior se aprecia que en el nivel de Preestructural sólo se ubica 1/46 respuestas aportadas por los estudiantes; para el nivel Uniestructural, se presentó únicamente la componente *a*, con 8/46 de las respuestas; el nivel Multiestructural se presentó en 12/46 respuestas, 2/12 enfocadas en las componentes *ab*, y 10/12 en las componentes *ad*; por otro lado, el nivel Relacional cuenta con 6/46 respuestas, centrándose en las componentes *abd*; y finalmente, 15/46 de las respuestas analizadas se ubicaron en el nivel de razonamiento Abstracto Extendido, con la inclusión de las cuatro componentes *abcd*.



Figura 5.15.1. Clasificación por nivel de razonamiento de la pregunta 13

**Análisis parcial por componente:**

En la siguiente tabla se muestra la clasificación de las respuestas de la pregunta 13 aportadas por los estudiantes, de acuerdo al nivel de razonamiento y componente.

Nivel	Componente(s)	Participantes	Total
Preestructural	----	1	1
Uniestructural	a	8	8
Multiestructural	ab	2	12
	ad	10	
Relacional	abd	6	6
Abstracto Extendido	abcd	15	15
NP	----	4	4
<b>Total</b>		<b>46</b>	<b>46</b>

Tabla 5.15.2. Clasificación de acuerdo al nivel y componente de la pregunta 13

En la tabla anterior se aprecia que la componente *a* está relacionada con 41/46 de las respuestas analizadas, la componente *b* en 23/46 respuestas, la componente *c* en 15/46 respuestas, y finalmente, la componente de análisis *d* se presentó en 31/46 respuestas.

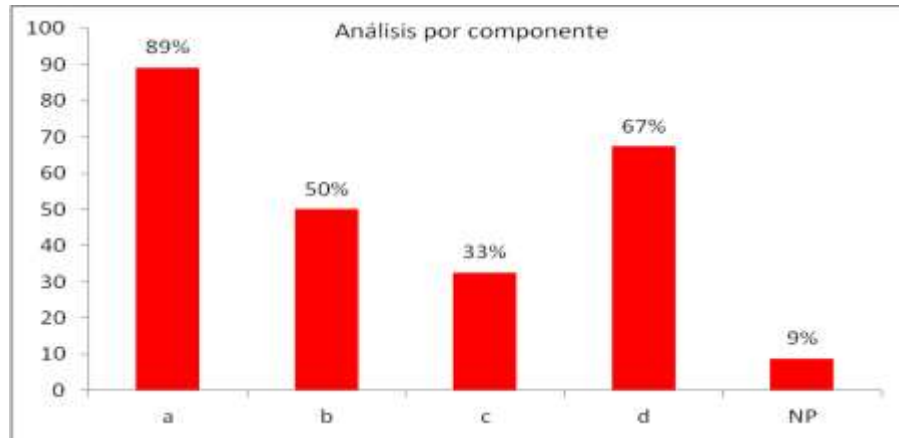


Tabla 5.15.3. Frecuencia de las componentes de la pregunta 13

En la tabla anterior se observa que un 89% de las respuestas analizadas contienen la componente *a*, es decir, casi la totalidad de los estudiantes asignaron correctamente un valor (absoluto – relativo) a la posibilidad de ganar los sorteos de cada participante del experimento; estos valores fueron en su mayoría absolutos, y los relativos se presentaron en proporción o porcentaje. La componente *b* se presentó en exactamente la mitad de las respuestas proporcionadas por los estudiantes, lo que significa que el 50% de estos verificó que se cumpliera con la condición de que la suma de los valores deben coincidir con el 100%, o en su caso con la unidad, si su representación fue en forma de proporción. Sin embargo, sólo una tercera parte de los estudiantes (33%) manifiestan un razonamiento más avanzado al relacionar de forma adecuada la componente *c*, con su argumentación; esta componente representa la identificación y asignación de los valores de probabilidad para cada miembro de la familia muy cercanos (variación de  $\pm 5\%$ ) o idénticos a los teóricos esperados. En este sentido, un resultado que considere una variación respecto a los teóricos, representaría una mejor respuesta, ya que tendrían en cuenta no sólo la distribución de las frecuencias, sino también la variabilidad como un factor preponderante en la distribución. Por último, observamos que un 67% de los alumnos asigna un porcentaje mayor a la oportunidad de éxito que tiene Beto (componente *d*); esto no es de extrañar, es un resultado que se viene repitiendo en varias respuestas ya analizadas, aunque la forma de representarlo en diferentes escalas resulta importante.

## **Capítulo 6. Conclusiones**

### **6.1 Introducción**

En este capítulo, se enuncian, en primer lugar, algunas afirmaciones sintéticas acerca de la comprensión y el razonamiento de los estudiantes del sentido de la aleatoriedad y variabilidad; en los conceptos de variable aleatoria y espacio muestral; y sobre inferencias estadísticas informales. Tales afirmaciones y comentarios avanzan en la respuesta a las preguntas de investigación formuladas en este estudio. En segundo lugar, se presentan algunos aportes primordiales de la investigación; y finalmente, una propuesta para el aula.

En lo siguiente daremos respuesta a las preguntas de investigación con base en los resultados obtenidos.

### **6.2 Sentido de aleatoriedad y variabilidad**

1. ¿Qué papel juega la aleatoriedad y la variabilidad en las respuestas de los estudiantes cuando enfrentan una situación de probabilidad?

El enfoque de las conclusiones del presente trabajo de tesis acerca de estos dos conceptos probabilísticos se basa en el análisis realizado a las respuestas de los estudiantes a la situación – problema del test diagnóstico, buscando las relaciones existentes entre el objeto de estudio y las componentes de dichas respuestas.

En concreto, la aleatoriedad representó un papel importante en las respuestas de los estudiantes en el sentido de que la perciben y la expresan en sus predicciones, no obstante, tienen dificultades para verbalizar dicha percepción; sin embargo, incluyen en sus argumentos el azar como premisa o idea explicativa.

Esta afirmación es plausible, porque la mayoría de los estudiantes (31/46) cuando se les pregunta si los integrantes de la familia tendrán con la misma frecuencia el control,



expresan que los resultados son impredecibles, es decir aluden al azar como justificación de la imposibilidad de conocer con anticipación el resultado del experimento asociado a este fenómeno aleatorio. En este mismo sentido, cuando se les pide a los alumnos elegir una secuencia posible en 20 sorteos, más de la mitad de estos (29/46) hacen su elección evitando repetir patrones determinísticos, lo que indica una correcta interpretación de la aleatoriedad.

La variabilidad también jugó un papel importante en las respuestas de los estudiantes, puesto que al asignar valores a la posibilidad de ganar el sorteo, para algún miembro de la familia, casi la mitad de los alumnos (21/46) aportaron distintos valores de frecuencia, además de que la mayor parte de los estudiantes (39/46) reconoce que cualquiera puede ganar, aludiendo una característica de propensión al cambio.

Muchos estudios clásicos de probabilidad (Fischbein, 1975) se enfocaban hacia la traducción e interpretación de enunciados probabilísticos, al cálculo o interpretación de probabilidades y a la comparación de probabilidades, sin tener en cuenta la aleatoriedad y la variabilidad. Pero estas nociones hacen la diferencia entre los problemas matemáticos y los problemas probabilísticos. La manera en que en este trabajo se consideran estos conceptos es una innovación que sólo recientemente se está considerando en la investigación (Shaughnessy, 2007).

### **6.3 Interpretación de la distribución**

2. ¿Los estudiantes identifican la distribución que modela la situación y realizan inferencias estadísticas informales del fenómeno a largo plazo?

Con respecto al concepto de distribución, el objetivo de la investigación fue su identificación, así como la interpretación de esta para realizar inferencias estadísticas informales a largo plazo.

En algunos casos si es posible que los estudiantes identifiquen la distribución que modeló el experimento, como por ejemplo cuando se les solicita que predigan una posible secuencia de 20 resultados, 21/46 estudiantes refieren una distribución cercana a la distribución teórica (Binomial,  $n=20$ ,  $p=1/2$ ,  $X$ =numero de águilas). Además, cuando se les pide que sugieran las frecuencias de éxito en 20, 40,..., 1000 sorteos, 29/46 de los estudiantes responde con frecuencias adecuadas, manteniendo la proporción 1, 2, 1 de la distribución teórica. Lo anterior indica que al llevar a cabo sus predicciones acerca de la población (distribución) la conclusión es que van más allá de los datos mismos al suponer cierto comportamiento a través del tiempo. Sin embargo cuando se les formula la pregunta de que si a un largo tiempo creen que todos los miembros de la familia tendrían el mismo número de veces el control del televisor sólo 4/46 alumnos aluden a la distribución teórica y únicamente un estudiante expresa en su respuesta la estabilidad de la distribución a largo plazo.

En conclusión, los estudiantes si logran identificar la distribución asociada al experimento, y en algunos casos predecir correctamente el comportamiento de la distribución, sin embargo no logran articular adecuadamente sus argumentos con la justificación que aportan, es decir no usan correctamente los datos como evidencia de su hipótesis. En este trabajo también se adoptó un acercamiento diferente a la exploración del pensamiento probabilístico de los estudiantes, pues en lugar de preguntar sobre probabilidades de resultados particulares se hicieron preguntas sobre toda una distribución, aunque esta fue una distribución muy simple.

#### **6.4 Valores de la variable aleatoria y espacio muestral**

3. ¿Los estudiantes identifican los valores de la variable aleatoria y los elementos individuales del espacio muestral y logran relacionarlos de manera adecuada?

El cuestionario de la situación – problema aplicada, se diseñó fundamentalmente con los propósitos de identificar el recorrido (los valores) de la variable aleatoria y los elementos individuales (o eventos simples) del espacio muestral; además de encontrar las relaciones

entre estos dos conceptos probabilísticos, a partir del valor del número de águilas que se presentan en el lanzamiento de dos volados.

En algunas preguntas los estudiantes logran identificar parcialmente los valores que toma la variable aleatoria o los elementos individuales del espacio muestral; por ejemplo, en la pregunta preliminar (13/46) y en la número 2 (21/46) de los alumnos reconocen algún valor de la V.A. o bien algún elemento individual (o evento simple) del espacio muestral. Al mismo tiempo 9 de los estudiantes consideran la equiprobabilidad entre los valores 0 y 2 de la variable aleatoria, aspecto importante al coincidir su respuesta con el valor teórico esperado para la ocurrencia de ningún águila y dos águilas en los sorteos.

No obstante la identificación de los valores de la V.A. y los elementos del espacio muestral, no logran relacionarlos del todo, pues sólo 20 de los 46 estudiantes reconocieron el evento simple águila-sol como el de mayor frecuencia, relacionándolo con el valor de ocurrencia 1 águila como el de mayor probabilidad.

En conclusión, los estudiantes logran la identificación parcial de los valores de la V.A. o de los eventos simples del espacio muestral, pero no los relacionan adecuadamente, por ejemplo al no reconocer el aspecto de conmutatividad de los eventos simples águila-sol y sol-águila (resultados nulos en preguntas 4, 7 y 13). En esta manera de analizar hay también una propuesta diferente al enfoque tradicional; en éste se define primero el espacio muestral, se calculan sus probabilidades y después se define la variable aleatoria; en cambio, la exploración aquí realizada primero hace preguntas sobre la variable y pide que se estimen las probabilidades, para que el estudiante lo asocie después al espacio muestral y verifique mediante este medio si las probabilidades que asignó a los valores de la variable son plausibles.

### **6.5 Inferencias estadísticas informales**

4 ¿Qué inferencias estadísticas informales realizan los estudiantes al enfrentarse a la situación-problema?

El elemento más representativo en este trabajo de investigación, sobre el tipo de inferencias estadísticas informales, se muestra al conseguir que los estudiantes identificaran el evento con mayor oportunidad de ocurrir –que gane Beto–, ya que se encuentran varios aspectos relevantes incluidos, como lo es una mayor probabilidad para el valor 1 de la V.A. que se relaciona directamente con la mayor probabilidad del evento simple águila-sol, o bien sol-águila. Aspecto que se aprecia en las respuestas de las preguntas 3, 4, 5, 8 y 13. Esto indica que las afirmaciones sobre el comportamiento de la población (distribución) a través del tiempo van más allá de los datos, y son realizadas sin utilizar procedimientos y métodos estadísticos formales.

Por otro lado, también se presentaron resultados donde abiertamente los alumnos expresaron su incapacidad para inferir los resultados del experimento; tal es el caso de la pregunta 12, con poco más de la tercera parte (16 de los 46 estudiantes). Lo que indica que no utilizaron adecuadamente los datos como evidencia para identificar el patrón de comportamiento de la distribución.

La idea de observar las inferencias estadísticas informales fue necesaria para apoyar el enfoque, pues lo que se observó tanto en las respuestas relacionadas con la aleatoriedad, la variabilidad y la distribución son los razonamientos informales de los estudiantes y no procedimientos formales.

### **6.5 Aporte de la investigación**

Los resultados de esta investigación aportan evidencias de que es plausible fomentar la introducción y desarrollo de conceptos tan importantes dentro de la Probabilidad y la Estadística, a saber: la aleatoriedad, variabilidad, distribución, variable aleatoria y espacio

muestral; estos a partir de razonamientos informales, con miras en lograr un acercamiento real a la formalidad de estas temáticas dentro de un curso ordinario de estas disciplinas.

No obstante se reconocen las limitantes del alcance de este trabajo, mismas que representan un complemento ideal de una investigación como esta; tales como: actividades de simulación física y computacional, discusiones *a posteriori*, entre otras, que favorezcan una noción más completa de los principios del razonamiento inferencial informal.

### **6.5 Propuesta para el aula**

La inferencia estadística ha sido definida formalmente de varias maneras, un ejemplo es “*la teoría, métodos y práctica de formar juicios acerca de los parámetros de una población, usualmente a partir de muestreos aleatorios*” (Collins, 2003); si bien es cierto que este concepto es propio de un curso formal de probabilidad y estadística, donde se pretende alcanzar temáticas como estimaciones puntuales o por intervalos, a partir de intervalos de confianza o pruebas de hipótesis, en diversos estudios se proponen estrategias de enseñanza a través de actividades previas (o lúdicas) donde se proponga un acercamiento informal a dichos conceptos.

En Zieffler, Garfield, delMas y Reading (2008), se propone que en las pruebas usadas para estudiar el Razonamiento Inferencial Informal (IIR) y su desarrollo dentro del aula, se cuestione a los alumnos sobre:

1. Estimar y trazar la gráfica de una población basándose en una muestra;
2. Comparar dos o más muestras de datos para inferir si hay una diferencia real entre las poblaciones de donde fueron muestreados; y
3. Juzgar cuál de dos modelos en comparación, es más probable que sea cierto.

A partir de este trabajo se propone como estrategia una situación – problema, donde se relacionen los conceptos de aleatoriedad y variación, distribución, variable aleatoria y espacio muestral; con el fin de realizar inferencias estadísticas informales a partir de un

contexto de incertidumbre. Sin duda, elaborar actividades y test eficaces y/o prácticos que involucren todos estos conceptos no es tarea fácil, tampoco se afirma que sea el camino a seguir, no obstante los resultados aquí mostrados apoyan la teoría de que es un buen principio para lograr un acercamiento a los conceptos formales de la Probabilidad y Estadística, a través de pruebas completamente informales.

Anexo

Nombre: \_\_\_\_\_

Edad: \_\_\_\_\_

Nº Lista: \_\_\_\_\_

**¡A LA SUERTE!**

La familia Pérez, está compuesta por el señor Carlos, su esposa Ana y su hijo Beto. Todas las noches, por lo general, después de cenar se reúne la familia a ver la televisión, pero nunca están de acuerdo para ver un mismo programa. Al señor Carlos le gusta ver programas deportivos, a la señora Ana las películas y a Beto las caricaturas.



Como sólo hay un televisor en la casa, lo más sencillo sería que se turnaran el control de la televisión diariamente, pero Beto les propone a sus padres algo más divertido: “¡A la suerte!”.

Propone rifar el control jugando a los volados con dos monedas de la siguiente manera: Si no sale **ninguna águila** en los dos volados, gana la Sra. Ana; si sale exactamente **una águila**, gana el niño Beto; y si salen **dos águilas**, gana el Sr. Carlos. A los padres les parece justo y aceptan su propuesta.

Después de muchos días (un año, por ejemplo), ¿todos los integrantes de la familia Pérez tendrán el control de la televisión con la misma frecuencia? Explica ampliamente tu respuesta.

---

---

---

---

---

---

---

---

### Test de Diagnóstico

Lee con atención las siguientes preguntas. Contesta en el mismo orden en que aparecen las preguntas. Existen múltiples respuestas, contesta de acuerdo a lo que tú piensas y no olvides **justificar** cada una de ellas.

1. Escribe la secuencia de resultados que crees que pueda ocurrir al jugar durante los primeros 20 días. (Marca una **X** por cada sorteo en cada columna).

Día \ Gana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total	
Ana																						
Beto																						
Carlos																						

2. ¿Cuáles son los posibles resultados del **número de águilas** que se obtienen en un sorteo de los dos volados?

\_\_\_\_\_

3. ¿Te parece justo el juego que propone Beto? Explica tu respuesta.

\_\_\_\_\_

4. Si tuvieras que escoger entre estar en el papel de la Sra. Ana, Beto o el Sr. Carlos, ¿por quién te inclinarías para ganar el juego? ¿por qué?

\_\_\_\_\_

5. ¿Quién crees que gane el primer día? \_\_\_\_\_

¿Quién el segundo día? \_\_\_\_\_

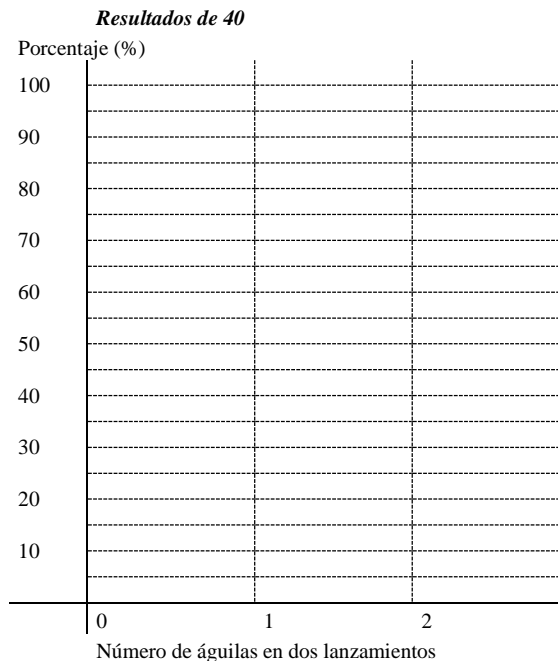
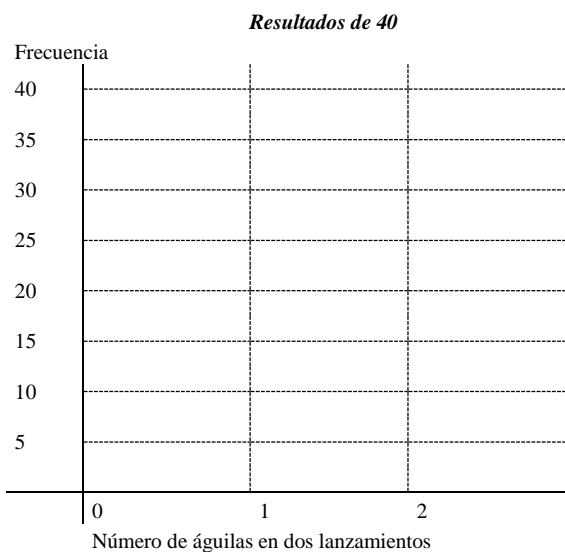
¿Quién el décimo día? \_\_\_\_\_

¿De qué crees que dependan estos resultados?

\_\_\_\_\_

6. ¿Cómo piensas que serían los resultados para 40 días? Dibuja las barras de los posibles resultados en cada inciso, teniendo en cuenta la escala dada. Escribe el número de veces o el porcentaje, según sea el caso, sobre cada barra.





7. ¿Por qué piensas que los resultados anteriores son razonables?

---

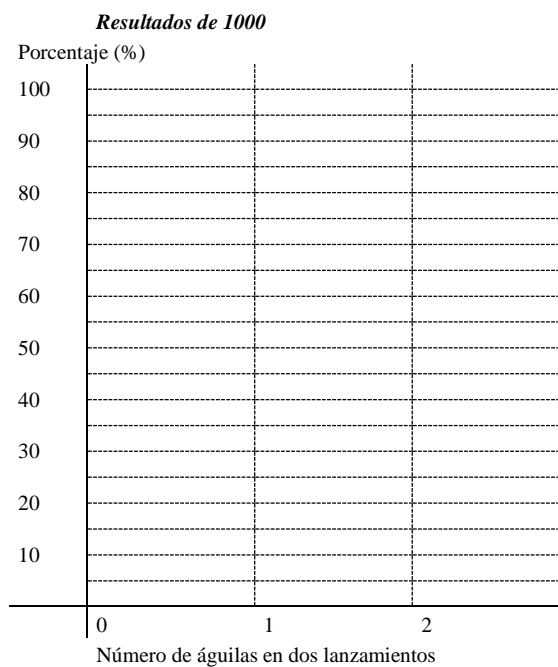
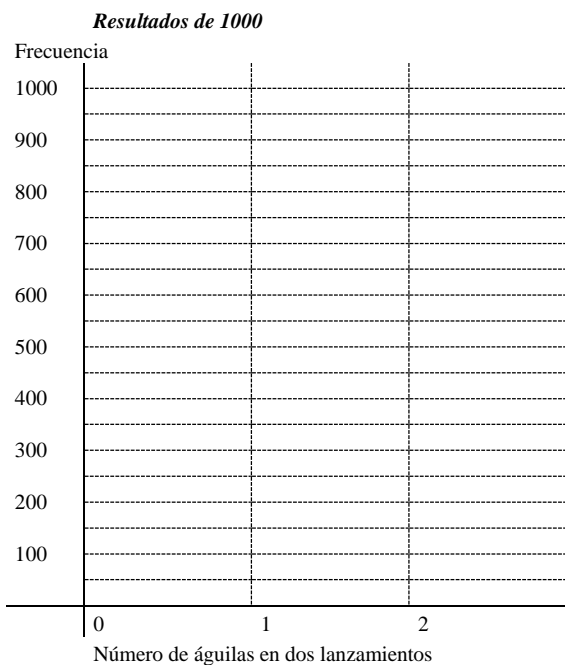
8. Piensa y escribe la cantidad de veces que podrían ganar cada integrante de la familia Pérez para cada número de días o sorteos. Ten en cuenta que el total coincida con el número de días.

# Días Gana	20 días	40 días	60 días	120 días	240 días	1000 días
Ana (0 águilas)						
Beto (1 águila)						
Carlos (2 águilas)						

Explica el criterio o tus razones para distribuir los anteriores valores.

---

9. ¿Cómo piensas que serían los resultados para 1000 días? Dibuja las barras de los posibles resultados en cada inciso, teniendo en cuenta la escala dada. Escribe el número de veces o el porcentaje, según sea el caso, sobre cada barra.



10. ¿Por qué piensas que los anteriores resultados son razonables?

---

11. ¿Crees que después de muchos días, todos los miembros de la familia tendrían el mismo número de veces el control del televisor? Justifica tu respuesta.

---

12. ¿Consideras que existe alguna forma de conocer con anticipación las posibilidades que tiene cada integrante de la familia Pérez de tener el control del televisor? Si es así, ¿cuál sería esa forma?

---

13. Asigna un número a la posibilidad de que cada integrante de la familia Pérez tenga el control del televisor:

Posibilidad de Ana = \_\_\_\_\_

Posibilidad de Beto = \_\_\_\_\_

Posibilidad de Carlos = \_\_\_\_\_

## Referencias

- Abrahamson, D. (2009). Orchestrating semiotic leaps from tacit to cultural quantitative reasoning –the case of anticipating experimental outcomes of a quasi-binomial random generator. *Cognition and instruction*, 27(3), 175–224.
- Alvarado, H. & Batanero, C. (2006). Designing a study process of the central limit theorem for engineers. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador (Bahia), Brazil: International Association for Statistical Education. CD ROM.
- Bakker, A. & Derry, J. (2011). Lessons from inferentialism for statistics education. *Mathematical thinking and learning*, 13(1–2), 15–26.
- Batanero, C. & Serrano, L. (1995). Aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. *UNO*, 15-28.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Grupo de Investigación en Educación Estadística Departamento de Didáctica de la Matemática Universidad de Granada. Recuperado 19–11–2010.
- Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. & Godino, J. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics* 32, 181-199; 1997
- Batanero, C., Serrano, L. & Green, D. (1998). Randomness, its meanings and implications for teaching probability. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 29 (1), 113-123.
- Ben-Zvi, D. (2006). Scaffolding students informal inference and argumentation. En A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Working cooperatively in statistics education: Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*, Salvador, Brazil. Descargado de:
- Biggs, J. B. & Collis, K. F. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligence behavior. En H. A. Rowe (Ed.) *Intelligence: Reconceptualization and measurement* (pp. 57 – 76). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Bill, Watson y Gayton (2009). Guessing answers to pass a 5-item true false test: solving a binomial problem three different ways. *Proceedings of the 32nd annual*

- conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, 1. pp. 57-64.
- Borovcnik, M., Bentz, H.J. & Kapadia, R. (1991). A probabilistic perspective. In R. Kapadia & M. Borovcnik (eds.), *Chance Encounters: Probability in Educación* (pp.27-73). Dordrecht: kluwer.
- Chalikias, M. (2009). The Binomial Distribution in Shooting. En R. Johnson, *Teaching Statistics*, 31(3), pp.87–89. Publicado en línea en:
- Colín, J. (1998). The learning of concepts of stochastic implied in the binomial distribution by means of the use of different representations and contexts. *Proceedings of the Twentieth Annual Meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 360-364. North Carolina State University, USA.
- Collins (2003). Collins English dictionary (6 Rev Ed edition). Collins.
- Dierdorp, A., Bakker, A., Eijkelhof, H. & Maanen, J. (2011). Authentic practices as contexts for learning to draw inferences beyond correlated data. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1–2), 132–151.
- English, L.D. (1993). Children's strategies in solving two- and three-dimensional combinatorial problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(3), 255–273.
- Falk, R. (1981). The perception of randomness. Proceedings of the V PME Conference. Grenoble, 222-229.
- Feller, W. (1983). *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones*. México: Limusa, S. A.
- Fine, T. L. (1973). *Theories of Probability: An examination of foundations*. New York: Academic Press.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- Fischbein, E., y Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 96-105.

- Gal, I. (2004). Statistical literacy: meaning, components, responsibilities. In D. Ben-Zvi and J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*. (pp. 47–78) Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Gil, E. & Ben-Zvi, D. (2011). Explanations and context in the emergence of students informal inferential reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1–2), 87–108.
- Green, D. (1982). Probability concepts in 11–16 years old pupil. Report of research sponsored by the social science research council. Loughborough, England: University of Technology.
- Green, D. R. (1991). A longitudinal study of children's probability concepts. En D. Vere Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 320 - 328). Dunedin: University of Otago.
- Green, D.R. (1989). Schools students' understanding of randomness. In R. Morris (Ed): *Studies in Mathematics education.v.7: The Teaching of Statistics* (pp. 27-39). París: Unesco.
- Gross, J. (2000). Sharing Teaching Ideas: A Bernoulli Investigation. *Mathematics Teacher*, 93 (9), p. 756.
- Hawkins, A., Jolliffe, F. y Glickman, L. (1992). Teaching statistical concepts. London: Longman.
- Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. En *Educational Studies in Mathematics*, 6, (187-205).
- Henry, M. (1994). *L'enseignement des probabilités – perspectives historiques, épistémologiques et didactiques*. Desancon: IREM de Besancon.
- <http://www.revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewArticle/4842>
- [http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/2D1\\_BENZ.pdf](http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/2D1_BENZ.pdf)
- <http://www.uruguayeduca.edu.uy/Userfiles/P0001/File/118didacticaestadistica.pdf>
- <http://www3.interscience.wiley.com/journal>.
- Jaimes, E. (2011). Niveles de Razonamiento probabilístico con énfasis en la Noción de distribución de estudiantes de secundaria en tareas de experimentación y simulación computacional. Tesis de Maestría, Cinvestav – IPN, D. F., México.

- Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A., Mogill, A. T. (1999). Students' probabilistic thinking in instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30, 487-519.
- Jones, G., Langrall, C. & Mooney, E. (2007). Research in probability. En F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, (909–955). Charlotte, NC, USA: Information Age-NCTM.
- Jones, G., Thornton, C., Langrall, C. & Tarr, J. (1999). Understanding students' probabilistic reasoning. En L.V. Stiff y F.R. Curcio, (Eds.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K–12* [1999 Yearbook]. Reston, VA: NCTM.
- Kahneman, D., y Tversky, A. (1972). Subjective probability: A judgment of representativeness. *Cognitive Psychology*, 3, 430-454.
- Konold, C. & Higgins, T. L. (2003). Reasoning about data. En J. Kilpatrick, W.G. Martin, D. Schifter (Eds.). *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*. Reston VA, USA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Konold, C., Lohmeier, J., Pollatsek, A. y Well, A. (1991). Novices views on randomness. Comunicación presentada en el XIII PME Conference.
- Landín, P. & Sánchez, E. (2010). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial. *Educação Matemática Pesquisa*, 12(3). On line:
- Langrall, C., Nisbet, S., Mooney, E. & Janssen, S. (2011). The role of context expertise when comparing data. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1–2), 47–67.
- Makar, K. & Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal*. 8(1), 82-105.
- Makar, K., Bakker, A. & Ben-Zvi, D. (2011). The Reasoning behind informal statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1–2), 152–173.
- Maxara, C. & Biehler, R. (2010). Students' understanding and reasoning about sample size and the law of large numbers after a computer-intensive introductory course on stochastics. En C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8, July, 2010. Ljubljana, Slovenia*. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

- Metz, K. E. (1998). Emergen understanding and attribution of randomness: Comparative analisis of reasoning of primary grade children an undergraduates. *Cognition and Instruction*, 16, 285-365.
- Moore, D. (1990). Uncertainty. El L. Steen (Ed.). *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy* (pp. 95–137). Washington, DC: National Academy Press.
- Ortiz, J., Batanero, C., & Serrano, L. (1997). Un estudio experimental de la presentación del concepto de la aleatoriedad en los textos de bachillerato [An experimental study of the presentation of randomness in secondary textbooks]. *Publicaciones de la Escuela de Magisterio de Melilla*, 25-26-27, 569-582.
- Pfannkuch, M. & Reading, Ch. (2006). Reasoning about distribution: a complex process. *Statistical Education Research Journal*, 5(2), pp. 4–9.
- Pfannkuch, M. (2005). Probability and statistical inference: How can teachers enable learners to make the connection? En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 267–294). New York: Springer.
- Pfannkuch, M. (2006). Informal inferential reasoning. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Working cooperatively in statistics education: Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*, Salvador, Brazil. Descargado de: [http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/6A2\\_PFAN.pdf](http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/6A2_PFAN.pdf)
- Pfannkuch, M. (2011). The role of context in developing informal statistical inferential reasoning: A classroom study. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1–2), 27–46.
- Piaget, J. & Inhelder, B. (1951). *The origin of the idea of chance in children*. New York: Norton. [Trabajo original en francés: *La Genese de l’idee de hasard chez l’enfant*, 1951].
- Pluvinage, F. (2005). Árboles de transiciones etiquetadas en cálculo de probabilidades. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8 (1), 91-99
- Reading, Ch. & Shaughnessy, J. (2004). Reasoning about variation. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 201–226). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Rouncefield, M. (1990). Classroom Practicals Using the Binomial Distribution. ICOTS 3. Publicado en línea en <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php>.

- Rubin, A., Hammerman, J. & Konold, C. (2006). Exploring informal inference with interactive visualization software. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Working cooperatively in statistics education: Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador, Brazil. Descargado de: [http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/2D3\\_RUBI.pdf](http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/2D3_RUBI.pdf)
- Sánchez, E. & Landín, P. (2011). Fiabilidad de una jerarquía para evaluar el razonamiento probabilístico acerca de la distribución binomial. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV*, Ciudad Real, España.
- Serrano, L. (1996). Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad. Tesis de doctorado. Granada: Universidad de Granada.
- Shaughnessy, J. (1997). Missed opportunities in research on the teaching and learning of data and chance. In F. Biddulph & K. Carr (Eds.), *People in mathematics education* (Proceedings of the 20<sup>th</sup> Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Vol. 1, pp. 6-22), Rotorua, New Zealand: MERGA.
- Shaughnessy, J. M. (2003). The Development of Secondary Student's Conceptions of Variability. Annual report year 1, NSF Grant No. REC 0207842. Portland, Oregon: Portland State University.
- Shaughnessy, J.M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. En F.K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 957-1009). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Steinbring, H. (1984). Mathematical Concepts in Didactical Situations as Complex Systems: The Case of Probability. En Steiner y Balacheff (Eds): *Theory of Mathematics Education*. ICME 5. Bielefeld: Institut für Didaktik der Mathematik, Universidad de Bielefeld.
- Steinbring, H. (1991). The theoretical Nature of probability in the classroom. In R. Kapadia & M. Borovcnik (eds.) *Chance Encounters: Probability in Education*. Coll. Mathematics Education Library, 135 – 167. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.



- Toohey, P. G. (1995). Adolescent perceptions of the concept of randomness. Unpublished Master Thesis. University of Adelaide.
- Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). On the psychology of prediction. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 69-83). Cambridge, MA: Cambridge University Press.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2003). The illusion of linearity: expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 53(2), 113–138.
- Watson, J. (2008). Exploring beginning inference with novice grade 7 students. *Statistical Education Research Journal*, 7(2), 59–82.
- Wild, C. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67, 223–265.
- Zabell, S. L. (1992). Randomness and statistical applications. En F. Gordon and S. Gordon (Eds.), *Statistics for the XXI Century*. The Mathematical Association of America.
- Zieffler, A., Garfield, J., delMas, R. & Reading, Ch. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 40–58.