Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

DIFICULTADES DEL USO ALGEBRAICO DE LA VARIABLE EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR

Tesis que presenta

Arturo Emmanuel Meléndez Juárez

para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias en la

especialidad de Matemática Educativa

Directores de la Tesis: Dr. Eugenio Filloy Yagüe

M.C. Vicente Carrión Miranda

Ciudad de México, Junio, 2016

DEDICATORIA

A mis hermanos Cynthia, Daniel y Ángel, por su constante aliento; a mi ahijado Jorge, trato de ser un buen ejemplo para ti. Y en especial a mis padres Arturo y Consuelo por su amor y apoyo incondicional, infinitas gracias.

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Eugenio Filloy Yagüe, director de este trabajo de investigación, por su paciencia, recomendaciones e importantes enseñanzas a lo largo de la Maestría, sin su apoyo no hubiese sido esto posible.

Al Mtro. Vicente Carrión Miranda, por compartir sus amplios conocimientos sobre la Matemática, sus enriquecedoras recomendaciones para el presente trabajo y su valiosa amistad.

A los Dres. Teresa Rojano Ceballos, Montserrat García Campos y Armando Solares Rojas, por el tiempo invertido en la revisión de este trabajo y su participación como sinodales.

A los profesores pertenecientes al área de Ciencias de la Cognición y Tecnologías de la Información Aplicadas, el Mtro. Ignacio Garnica, la Dra. Ana María Ojeda y el Mtro. Héctor Chavez, por sus enseñanzas y dedicación durante los cursos impartidos.

Y a mis compañeros, Gerardo, Esmeralda, Rogelio, Leticia y Vicente, por el apoyo mutuo durante nuestra formación profesional y su sincera amistad.

AGRADECIMIENTO A CONACYT

Agradecimiento especial al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo brindado al otorgarme la beca para la realización de mis estudios de Maestría en el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN

Becario: 339571

Índice

Índice (Continuación)

DIFICULTADES DEL USO ALGEBRAICO DE LA VARIABLE EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR

Resumen

Este trabajo presenta resultados de una investigación centrada en la caracterización del desempeño de tres grupos de estudiantes de nivel medio superior y sus principales dificultades en la comprensión de conceptos algebraicos, específicamente los relacionados con ciertos usos del concepto de variable. El diseño y la realización de la investigación, de corte cualitativo, se fundamenta en el marco teórico-metodológico de los Modelos Teóricos Locales, propuesto por Filloy (1999). Además, se utilizan algunas técnicas cuantitativas para el tratamiento de los datos y la obtención de conclusiones. Se analiza el comportamiento de los estudiantes en el uso de símbolos al resolver problemas aritmético-algebraicos.

Abstract

This document presents results of an investigation centered in the characterization of the performance of three groups of middle-superior students and their main difficulties in the understanding of algebraic concepts, specifically, those related with certain uses of the concept of variable. The design and realization of the investigation, of qualitative method, is based in the theoretical-methodological framework of the Local Theorical Models, proposed by Filloy(1999). Also, some quantitative tecniques are used for the treatment of the data and the obtainment of conclusions. The behavior of the students is analized in the use of symbols during the resolution of arithmetic-algebraic problems.

Introducción

En la mayoría de los países la escuela tiene asignada la tarea de propiciar la adquisición de conocimientos, habilidades y actitudes de estudiantes en los diferentes niveles educativos. Al ser una tarea difícil es necesario investigar cuáles son principales las deficiencias y proponer acciones remediales para superar con éxito las dificultades.

Con las recientes reformas educativas impulsadas en México, en educación básica, media superior y superior, se han planteado lineamientos con un objetivo general: que los estudiantes adquieran conocimientos que les resulten significativos. Para ello, los nuevos planes y programas han sido modificados para plantear estándares curriculares que garanticen la apropiación de las competencias esperadas (SEP, 2011).

Una de las áreas de conocimiento que requiere atención es Matemáticas, ya que en la última prueba PISA, aplicada en el 2012, México obtuvo resultados poco alentadores; el alumno promedio obtuvo 413 puntos, mientras que el puntaje promedio en la OCDE es de 494, una diferencia que equivale a casi dos años de escolaridad (OCDE, 2013).

El presente trabajo está centrado en un área de las matemáticas que se ha considerado de suma importancia tanto en la educación como en la investigación en matemática educativa, ya que de su comprensión y dominio, depende el desempeño del estudiante en niveles posteriores de su trayectoria escolar, nos referimos al álgebra.

Algunos investigadores, por ejemplo Ursini (2005), afirman que es posible hablar de dominio del álgebra una vez que se ha comprendido el concepto de variable y los usos que ha tenido en su evolución, por tanto, es necesario estudiarlo y saber cómo su comprensión impacta en el desarrollo del pensamiento algebraico y cómo se relaciona con la transición del pensamiento aritmético a éste.

Investigaciones relacionadas con la transición del pensamiento aritmético al algebraico, por ejemplo los estudios de Gallardo y Rojano (1988) y de Filloy, Rojano y Puig (2008), han caracterizado las principales dificultades que los estudiantes enfrentan al transitar de la aritmética al álgebra; así como las dificultades al asignarle un uso específico a la variable, especialmente al trabajarla como incógnita.

En el trabajo, objeto de investigación, se analizan las actuaciones de estudiantes con el fin de caracterizar las dificultades que se presentan en el uso de números generalizados, incógnitas y variables en relaciones funcionales.

Se analizan resultados de la investigación enfocada en el estudio del desempeño de estudiantes de nivel medio superior y sus principales dificultades respecto a la comprensión de conceptos algebraicos.

El problema de investigación

Se centra la atención en la caracterización del desempeño y las principales dificultades que presentan estudiantes pertenecientes a educación media superior al enfrentarlos a la resolución de problemas que requieren el uso de conocimientos relacionados con el concepto de variable y sus aplicaciones.

En libros de texto de Cálculo de enseñanza media y superior se considera necesario y de importancia dominar la noción de variable; por ejemplo Ímaz y Moreno (2014) en *Cálculo: su evolución y enseñanza*, mencionan que el Cálculo es un edificio intelectual enorme articulado alrededor de dos ideas centrales: variación y acumulación.

No obstante, en los libros de texto también es común que la noción de variable se considere como un concepto ya dominado por los estudiantes, y por ello no se presta la atención debida; por lo general, se brinda una definición escueta e inmediatamente se inicia el trabajo de otras temáticas.

Las variables se usan generalmente en textos escolares sin proporcionar una experiencia introductoria que pudiera servir como una base sobre la cual la idea de variable pueda desarrollarse en sus diferentes significados (Ursini, 1993). Y esto es así en los diversos niveles escolares, por lo tanto al llegar a niveles superiores los estudiantes presentan graves dificultades.

Por lo anterior, es importante conocer el desempeño de los estudiantes de educación media superior y las posibles causas que originan deficiencias relacionadas con el dominio y usos del concepto, para conducir el diseño de acciones que conduzcan a un mejor aprendizaje del tema.

Se pretende dar respuesta a la siguiente pregunta, que sirve como guía principal del trabajo de investigación: ¿Cuáles son las características del desempeño algebraico del estudiante de nivel medio superior al resolver problemas relacionados con diversos usos de las variables?

Metodología

La investigación se desarrolló teniendo como marco teórico-metodológico el denominado Modelos Teóricos Locales, propuesto por Filloy (1999).

Se tomaron en cuenta algunas investigación relacionadas con la transición entre el lenguaje aritmético al algebraico, tema esencial para comprender la forma en que los estudiantes dan significado a diversos usos de la variable.

Para lograr la caracterización del desempeño de los estudiantes se diseñaron y aplicaron diferentes instrumentos en los que se plantearon problemas aritmético-algebraicos.

Se llevaron a cabo entrevistas clínicas semiestructuradas (videograbadas y transcritas en su totalidad), que condujeron al análisis de información para profundizar en aspectos relevantes. Finalmente, durante el proceso de investigación se hicieron observaciones en el aula.

Estructura de la tesis

El trabajo contiene siete apartados principales. En la Introducción se describen, de forma general, los momentos y el desarrollo de la investigación. En el Capítulo 1 se examinan algunos trabajos de investigación relacionados con el álgebra escolar y el concepto de variable. El Capítulo 2 registra el sustento teórico de la investigación. El Capítulo 3 contiene la organización y la metodología que orientan la conducción del trabajo. El Capítulo 4 se refiere al análisis de las respuestas que los estudiantes dan a preguntas surgidas de problemas relacionados con el tema que se indaga. El Capítulo 5 reporta el análisis de las entrevistas clínicas. Finalmente, el Capítulo 6 exhibe los resultados obtenidos en cada etapa de la experimentación, las observaciones pertinentes y las conclusiones.

Capítulo 1

Marco de referencia

Como antecedentes se consideran algunas investigaciones ligadas al paso del lenguaje aritmético al algebraico, y con dificultades que surgen durante ese proceso. Son importantes porque examinan la etapa en que los estudiantes comienzan a usar en forma rigurosa las variables.

Las investigaciones analizadas fueron: *El aprendizaje del álgebra desde una perspectiva psicológica* (Kieran y Filloy, 1989), *El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas* (Filloy, Puig y Rojano, 2008), *Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico* (Gallardo y Rojano, 1988) y *The learning and teaching of school algebra*, (Kieran, 1992).

En seguida se describen ideas fundamentales que componen cada uno de los trabajos considerados.

1.1. El aprendizaje del álgebra desde una perspectiva psicológica

En este trabajo, de Kieran y Filloy (1989), se describen algunas contribuciones de la investigación relacionadas con los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje del algebra de educación secundaria. De igual forma se discuten las tentativas que tiene algunos investigadores de establecer una teoría sobre la enseñanza del algebra.

El artículo está centrado en temas como: el marco de referencia aritmético, variables, expresiones y ecuaciones, resolución de ecuaciones, funciones y sus gráficas y enfoques que usan computadoras.

En el documento se menciona la extendida utilización de métodos informales por parte de los estudiantes de escuela elemental, esto es, los problemas se resuelven sin la necesidad de ser muy específicos en los procesos utilizados, puesto que la atención está centrada principalmente en obtener los resultados correctos de los planteamientos, que por lo general son numéricos.

En cambio, en el álgebra los estudiantes están obligados a formalizar los procesos a los cuales raramente habían prestado atención. Se menciona que los estudiantes no logran darse cuenta que el proceso a menudo es la respuesta. Por ejemplo, la respuesta de sumar b y 5, se enuncia como $5 + b$. Los estudiantes deben de superar la necesidad de obtener un número como respuesta y adquirir lo que Collins ha llamado “aceptación de la falta de cierre”.

Respecto al uso de variables el artículo refiere que los estudiantes en la escuela elemental recurren al uso de letras como etiquetas. Esto interfiere con la forma en cómo llegan a entender el significado de las variables en ecuaciones algebraicas.

El trabajo rescata los resultados de una investigación realizada por Küchemann (1981), en la cual se encontró que la mayoría de los estudiantes entrevistados trabajaban las letras como incógnitas específicas más que como números generalizados o variables.

Los autores citan los trabajos realizados por Filloy y Rojano (1985a, 1985b), en donde utilizan modelos concretos en experimentos de enseñanza de resolución de ecuaciones; se habla de un anclaje a dichos modelos, los estudiantes no otorgaban sentido a la relación existente entre las operaciones realizadas en el modelo y las operaciones algebraicas correspondientes; de igual forma, los estudiantes se mostraban dependientes de los modelos aunque ya no eran de utilidad.

1.2. El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas

En este trabajo, Filloy, Puig y Rojano (2008), exponen algunas de las ideas desarrolladas durante 25 años por este grupo de investigadores, respecto al Álgebra Educativa; se hace hincapié en la perspectiva semiótica que permea sus trabajos, y se presenta una serie de resultados sobre los procesos cognitivos de alumnos con los que se ha llevado a cabo la resolución algebraica de problemas.

Las investigaciones realizadas desde principios de 1980, dan cuenta del arraigo al pensamiento numérico y al uso de los significados coloquiales de las palabras que presentan los estudiantes al iniciar el trabajo con las literales y las expresiones algebraicas.

En el artículo se exponen ideas desarrolladas durante la puesta en marcha del estudio *Operación de la incógnita*, llevado a cabo por el equipo de trabajo ya mencionado, el cual constó de varias etapas.

Gracias a estos estudios fue evidente la dificultad que los estudiantes de educación secundaria enfrentan para darle significado a las oraciones y signos algebraicos.

Una observación más que expone este artículo es que el estudiante tiende a interpretar las expresiones abiertas como fórmulas geométricas o, en su defecto, tiende a cerrar las expresiones con el objetivo de encontrar un resultado asignando valores a las variables involucradas; en otras palabras, convierte las expresiones algebraicas en ecuaciones. Los autores mencionan que este tipo de acciones son la base para consolidar las competencias algebraicas y cuando esto se logra, se está en la posibilidad de comprender ideas más abstractas como las expresiones abiertas que representan números generales.

El trabajo aborda el tema sobre la relación existente entre el lenguaje natural y el lenguaje algebraico, retoma algunas ideas vygotskianas de Luis Radford (2000, 2001), quien sostiene que la cognición humana está atada al uso de signos e incluso que los signos forman parte de sistemas de signos pertenecientes a una cultura y por lo tanto trascienden las cogniciones individuales.

De igual forma, se mencionan algunas ideas sobre la estructura de los problemas aritmético-algebraicos y el método de análisis y síntesis utilizado para la resolución de este tipo de problemas, para lo cual se realiza la identificación de la incógnita principal del planteamiento, incógnitas auxiliares y cantidades conocidas, lo cual da como producto un conjunto de relaciones entre las cantidades del problema; al utilizar dichas relaciones se está en la posibilidad de construir un diagrama a modo de árbol denominado grafo del problema. Es necesario mencionar que a partir de un mismo problema se pueden obtener diversos grafos, dependiendo de las relaciones que se representen en estos.

En el artículo se aproxima a la componente de cognición perteneciente a los MTL; destaca los principales procesos cognoscitivos que se ponen en juego durante la activación del pensamiento matemático, por ejemplo, la precepción, el direccionamiento de la atención y sus relaciones con los procesos de comprensión, el uso cada vez más intensivo de la memoria, el desencadenamiento de procesos de análisis y síntesis cada vez más entrelazados con el uso de la lógica, las concepciones heurísticas utilizadas en la resolución de las situaciones problemáticas, en el aprendizaje, muy ligado a los procesos de generalización y abstracción.

Se habla sobre el esbozo lógico semiótico que realizan algunos sujetos al resolver ciertos problemas, descrito como un momento de reflexión, en el que los sujetos evalúan si son capaces de anticipar los pasos de la resolución, la identificación de lo desconocido y las relaciones centrales que intervienen en el problema utilizando algún estrato de un Sistema Matemático de Signos (SMS).

1.3. Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico

El estudio de Gallardo y Rojano (1988), en su conjunto tiene como propósito principal aislar y analizar los fenómenos de transición del pensamiento aritmético al algebraico. En una primera etapa se analizó el comportamiento pre-algebraico de los niños de alto nivel de aprovechamiento. En la segunda, se identificaron las áreas de dificultad comunes en el aprendizaje del álgebra que presentan los sujetos pertenecientes a estratos bajos de desempeño.

En el artículo se mencionan algunos trabajos que utilizan métodos históricos y epistemológicos, entre los cuales se menciona los estudios de H. Freudenthal, el cual se enfrenta con la problemática de convertir el álgebra simbólica, por medio de la enseñanza, en un lenguaje para ser aprendido y enseñado.

También se mencionan algunas ideas de S. Wagner, C. Kieran y G. Vergnaud. Wagner (1981), investiga las interpretaciones que adquieren las literales en las expresiones algebraicas, distingue tres componentes al referirse a las variables matemáticas, el símbolo, el contexto y el referente.

Los autores muestran una rápida descripción del método clínico utilizado para la confrontación de las hipótesis planteadas, utilizado en los MTL; otra observación importante es la relativa libertad que posee el entrevistado para responder de forma espontánea y el control moderado del entrevistador.

Gallardo y Rojano proporcionan una breve reseña sobre la naturaleza dual de la igualdad, la naturaleza de los números tanto positivos como negativos, la polisemia de la incógnita, esto es, las lecturas distintas que se le da a la variable dentro de una misma ecuación; hablan sobre las estrategias del tanteo y el uso de esquemas en la resolución de problemas, de la misma manera hacen mención de la semántica y la sintaxis del álgebra elemental y, por último, presentan una serie de conclusiones, entre las cuales destacan: el tanteo sistematizado, la tendencia a la generalización de los métodos de resolución de ecuaciones, la simplificación en los métodos escolarizados, la creación de códigos algebraicos y la utilización de diversos lenguajes en la resolución e invención de problemas.

1.4. La enseñanza y el aprendizaje del algebra escolar

Este artículo de Kieran (1992) empieza con un análisis histórico del desarrollo del álgebra, seguido de una descripción del contenido del álgebra escolar y de una discusión de las demandas psicológicas que debidas al contenido matemático del álgebra se exigen al aprendiz. Aporta una breve revisión de las perspectivas de enseñanza y discute los hallazgos más importantes de la investigación en aprendizaje y enseñanza del álgebra en relación con el marco histórico–psicológico de las secciones previas. El capítulo concluye con una síntesis basada en los puntos citados e incluye algunas sugerencias para futuras investigaciones.

En el análisis histórico destacan tres etapas en el desarrollo del algebra que son la etapa retórica, antes de Diofanto 250 a.C. Ésta se caracterizó por descripciones en lenguaje común del proceso de resolución de algunos problemas y la ausencia de símbolos para representar las cantidades desconocidas. Continúa la etapa lacónica (sincopada); ésta se inicia con Diofanto, quien introduce la utilización de letras para representar cantidades desconocidas, pero este trabajo, que va desde el siglo III al XVI, estaba enfocado en encontrar la identidad de las letras más que en representar lo general. Por último, viene la etapa simbólica, el trabajo de Diofanto influyó en Vieta, quien comenzó a utilizar las letras para las cantidades dadas y para las incógnitas. Se empiezan a expresar soluciones generales y a formular reglas para relaciones numéricas. El uso del simbolismo permite la discriminación de información poco trascendente y motiva la construcción de nuevo conceptos como el de función.

El trabajo presenta una descripción general del algebra escolar, descrita como la rama de las matemáticas que trata la simbolización de relaciones numéricas generales y de estructuras matemáticas, así como de la operación sobre estas estructuras.

Sostiene que con el transcurso de los años, los contenidos abordados en las asignaturas de álgebra han cambiado poco. A principio de siglo algunos temas versaban sobre la simplificación de expresiones, el planteamiento y la resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas, resolución de problemas y práctica con razones, proporciones, potencias y raíces. En las décadas posteriores se incluyeron aspectos prácticos y el uso de los métodos gráficos.

Kieran bosqueja una serie de consideraciones psicológicas y presenta un resumen de demandas cognitivas planteadas/propuestas a los estudiantes de álgebra, a saber:

- El tratamiento de representaciones simbólicas que tiene muy poco o ningún contenido semántico como objetos matemáticos y la operación sobre estos objetos con procesos que usualmente no arrojan resultados numéricos.
- La modificación de sus interpretaciones iniciales de ciertos símbolos.
- La inducción a representar las relaciones de situaciones enunciadas en palabras con operaciones que frecuentemente son las inversas a las que ellos usaban casi automáticamente.

Por último, se presentan una serie de conclusiones relacionadas con los tres factores considerados como más relevantes en las dificultades que tienen los estudiantes en el aprendizaje del algebra, esto es: contenido, enseñanza y aprendizaje.

Capítulo 2

Marco teórico metodológico

La investigación se apoya en el marco teórico-metodológico propuesto en Filloy (1999), introduciremos el concepto de Modelo Teórico Local en el que el objeto de estudio se enfoca en cuatro componentes interrelacionados:

a) Modelo de enseñanza
b) Modelo para los procesos cognitivos
c) Modelo de competencia formal y
d) Modelo de comunicación

Como mencionan Kieran y Filloy (1989), en lugar de centrar la atención en alguna de estas componentes es necesario diseñar *Modelos Teóricos Locales,* adecuados sólo a fenómenos específicos, pero capaces de incluir todas las componentes.

Este enfoque desvía la observación en matemática educativa de la competencia hacia la actuación de los usuarios, el objetivo es caracterizar el desempeño de los sujetos por medio de diseños experimentales pertinentes, que brinden información sobre las interrelaciones de los procesos y una observación rigurosa, tomando en cuenta los cuatro componentes ya mencionados.

Para lograr lo anterior es necesaria una noción de Sistema Matemático de Signos (SMS) lo suficientemente amplio para lograr las tareas ya descritas, y una noción de signo que abarque tanto el significado matemático formal como el pragmático (Kieran y Filloy, 1989).

También se requiere de una noción bastante eficaz de SMS para incorporar los SMS intermedios producidos por el aprendiz durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, los cuales tendrá que rectificar de manera que al final del proceso llegue a ser competente. Cabe mencionar que algunos de estos sistemas de signos intermedios no podrán ser considerados SMS, ya que no se pueden utilizar en un proceso de comunicación amplio debido a su falta de convencionalidad social; sin embargo, como investigador se debe de estar preparado para interpretar dichos códigos producidos por el aprendiz.

Cualquier modelo explicativo local teórico tiene que ocuparse de al menos cuatro fuentes de significado (Kaput, 1987 citado en Kieran y Filloy, 1989):

1. Como resultado de las transformaciones en el interior de un SMS sin referencia a ningún otro SMS.
2. Como resultado de las traducciones entre varios SMS.
3. Como resultado de las traducciones entre SMS y sistemas de signos no matemáticos, tales como el lenguaje natural, imágenes visuales y los sistemas de signos del comportamiento que usan los sujetos durante el proceso de enseñanza/aprendizaje. Los sistemas de signos del comportamiento nos permiten observar los procesos cognitivos de los aprendices y proponer, a partir de esos resultados psicológicos, nuevas hipótesis para un análisis didáctico matemático de los modelos de enseñanza implicados en el modelo teórico local bajo estudio.
4. Con la consolidación, simplificación, generalización y reificación de las acciones, procedimientos y conceptos de los SMS intermediarios creados durante las secuencias de enseñanza, esos SMS evolucionan hacia un nuevo SMS "más abstracto" en el que habrá acciones, procedimientos y conceptos nuevos que tendrán como referentes todas las acciones, procedimientos y conceptos de los SMS intermediarios para su uso en procesos de significación nuevos. Si se alcanzan los objetivos del modelo de enseñanza, la nueva etapa tiene un nivel de organización más alto y representa una nueva etapa en el desarrollo cognitivo del aprendiz.

Es importante mencionar que una de las riquezas de los MTL es su recursividad, ya que existe la posibilidad de retomar los resultados obtenidos para iniciar otro nuevo y así sucesivamente.

En diversos estudios fundamentados en los MTL se han encontrado tendencias cognitivas presentes en las actuaciones de diversos sujetos, a los que se les ha enfrentado a la resolución de cuestionamientos matemáticos de diversas temáticas. A continuación se mencionan algunas de ellas.

Tendencias cognitivas:

Uno. La presencia de un proceso de abreviación de los textos concretos para poder producir reglas sintácticas nuevas.

Dos. La dotación de sentidos intermedios.

Tres. El retorno a situaciones más concretas, cuando se presenta una situación de análisis.

Cuatro. La imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse momentos antes.

Cinco. Lecturas hechas en estratos del lenguaje que no permitirán resolver la situación problemática.

Seis. La articulación de generalizaciones erróneas.

Siete. La presencia de mecanismos apelativos que centran el desencadenamiento de procesos erróneos de resolución.

Ocho. La presencia de mecanismos inhibitorios.

Nueve. La presencia de obstrucciones provenientes de la semántica sobre la sintaxis y viceversa.

Diez. La generación de errores sintácticos debido a la producción de códigos personales intermedios, para dotar de sentidos a las acciones concretas intermedias.

Once. La necesidad de dotar de sentidos a las redes de acciones cada vez más abstractas hasta convertirlas en operaciones (Filloy, 1999).

Un elemento más de los MTL es el esbozo lógico semiótico. Los sujetos que formalmente son los más competentes, en general, usan los métodos cartesianos para resolver algunos tipos de problemas que se les presentan; sin embargo, en la resolución de ciertos problemas los sujetos pasan, primero, por un momento de reflexión, en el que ellos mismos evalúan si son capaces de anticipar los pasos de la resolución, esto es, en donde hacen un esbozo lógico/semiótico de la situación, en el que se realiza, entre otras cosas, la explicitación o la identificación de lo desconocido, y en donde se discriminan cuáles son las relaciones centrales que intervienen en el problema, utilizando para esto algún estrato de SMS, el cual -muchas veces- no es propiamente el sistema de signos requerido por el MC, sino algún estrato de SMS más concreto (Filloy, 1999).

Para bosquejar lo anterior, se puede partir de los datos y de ahí arribar al valor de la incógnita; o bien, puede darse un análisis lógico que implique el establecimiento de relaciones en el que se opere con lo desconocido, ya sea en forma particular, o que sea representado directamente mediante el SMS del MC.

A continuación se describe cada uno de los componentes que integran el Modelo Teórico Local de la presente investigación.

2.1. Teórico

2.1.1. Modelo de cognición y comunicación

Como ya se mencionó, un MTL consta de cuatro componentes interrelacionadas, las cuales cumplen un rol indispensable para llevar a cabo una investigación bien estructurada y fundamentada teórica y metodológicamente.

> Los procesos cognoscitivos que se ponen en acción para llevar a cabo las formas del pensamiento matemático y su comunicación (con códigos socialmente establecidos) van afinando los elementos complejos como los que se utilizan a) en la percepción (por ejemplo, en el caso del manejo de las formas geométricas y sus transformaciones), b) en el direccionamiento de la atención y sus relaciones con los procesos de comprensión, c) en el uso cada vez más intensivo de la memoria, d) en el desencadenamiento de procesos de análisis y síntesis cada vez más entrelazados con el uso de la lógica, e) en las concepciones heurísticas utilizadas en la resolución de las situaciones problémicas, f) en el aprendizaje, muy ligado a los procesos de generalización y abstracción, y que requiere de usos novedosos de los SMS de la matemática escolar, etc. (Filloy, 1999).

Para la conformación del modelo de cognición y el modelo de comunicación se utilizan ideas vygotskianas, tales como intersubjetividad, zona de desarrollo próximo, procesos psicológicos superiores, entre otras.

La estrategia general de Vygotsky consistía en examinar cómo las funciones psicológicas como la memoria, la atención, la percepción y el pensamiento aparecen en forma primaria para luego cambiar a formas superiores (Wertsch, 1978); para hacer una distinción clara entre funciones elementales y superiores él propone cuatro criterios principales:

> 1) el paso del control del entorno al individuo, es decir, la emergencia de la regulación voluntaria, 2) el surgimiento de la realización consciente de los procesos psicológicos, 3) los orígenes sociales y la naturaleza social de las funciones psicológicas superiores y 4) el uso de signos como mediadores de las funciones psicológicas superiores (Wertsch, 1978).

Un concepto que se considera relevante para la investigación es el de internalización, el cual según Vygotsky (citado en Wertsch, 1978) es un proceso donde ciertos aspectos de la actividad que se ha realizado en un plano externo pasan a ejecutarse en un plano interno.

Sin embargo, a diferencia de otros autores, Vygotsky proponía que la actividad externa estaba estrechamente ligada a procesos sociales mediatizados semióticamente y consideraba como necesario la aparición de dichos procesos para que se generara el funcionamiento interno, por lo tanto afirmaba que las funciones psicológicas superiores aparecen inicialmente en su forma externa debido a que surgen de procesos sociales.

Por lo anterior, durante la investigación, se presta especial importancia a la interacción entre los estudiantes, y las ideas que se desencadenan a partir del trabajo colaborativo, esto se considera durante las sesiones de observaciones dentro de los grupos y durante la implementación de entrevistas clínicas grupales.

Otro concepto a considerar es el de zona de desarrollo próximo, a la que definen como:

> la distancia entre el nivel de desarrollo real del niño tal y como puede ser determinado a partir de la resolución independiente de problemas y el nivel más elevado de desarrollo potencial tal y como es determinado por la resolución de problemas bajo la guía del adulto o en colaboración con sus iguales más capacitados (Wertsch, 1978).

Esta idea de la zona de desarrollo próximo es aprovechada y explotada durante la investigación, sobre todo en el momento de las entrevistas clínicas grupales con enseñanza, se observa las interacciones entre los estudiantes más competentes y los menos competentes y la forma en que éstos dialogan, como proponen y construyen ideas sobre los contenidos trabajados de forma conjunta.

2.1.2. Modelo formal

El modelo formal se compone, principalmente, por lo que se esperaría que un usuario competente lograra dominar al finalizar la implementación del modelo de enseñanza planeado para la investigación.

En este caso, el modelo formal se establece con base en tres textos relacionados con los diversos usos de la variable:

- Wagner, S. (1983). What Are These Things Called Variables,
- Schoenfeld, A. & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable y
- Küchemann, D., (1978). Children's Understanding of Numerical Variables.

A continuación se presentan las ideas y conceptos que consideramos importante estén incluidos en el modelo formal propuesto para la investigación, para tal objetivo, en seguida se realiza un resumen de los tres artículos arriba mencionados.

2.1.2.1. Qué son estas cosas llamadas variables

Wagner (1983) comienza mencionando que es común que surjan algunos problemas cuando los estudiantes de álgebra inician el trabajo con los símbolos literales o variables, dice que un motivo de confusión es el orden lineal tanto del alfabeto como de los números enteros. Comenta que hay varios factores por los cuales los símbolos literales son fáciles de usar pero difíciles de entender y los agrupa en dos grandes encabezados.

- Los símbolos literales son como los numerales, pero son diferentes
- Los símbolos literales son como palabras, pero son diferentes

Luego menciona una serie de características de las literales en sus diversos contextos, para presentar a continuación un resumen de las ideas más relevantes.

Primeramente se expresan las similitudes entre las literales y los numerales, una de éstas es su ordenamiento. Luego se menciona que algunas letras como e y π, actualmente son numerales porque son símbolos que representan números que no tienen una representación digital simple.

Una similitud más es que, por lo regular, tanto letras como números suelen aparecer juntos en sentencias matemáticas. Ponen algunos ejemplos de cómo suelen enfrentarse por primera vez los estudiantes con este tipo de situaciones, $n + 3 = 17$. Como se observa la literal aparece junto con números, signos que indican operaciones y signos que indican relaciones, por lo tanto parece que la letra debiera comportarse como número.

La similitud más grande entre literales y numerales es que, una letra puede servir temporalmente como un número, el símbolo que se encuentra perdido puede representar un número.

Luego se mencionan las diferencias existentes entre las literales y los numerales, la diferencia más significativa es que los numerales aluden a un sólo número, pero las letras pueden representar simultánea o individualmente, muchos números diferentes, como por ejemplo en $0 < n < 20$ o $y = 3x + 2$. Esta propiedad de representación simultánea es la que nos permite referirnos a los símbolos literales como variables; el uso que se le otorgue a las literales dependerá del contexto, puede representar números desconocidos e incluso constantes.

Esta característica de representación simultánea con otras características de los símbolos literales es lo que otorga al lenguaje matemático la capacidad de hacer declaraciones generales, como definiciones, axiomas, teoremas, fórmulas, de forma muy concisa y sin ambigüedades.

Otra diferencias entre las literales y los numerales que aparentemente pareciera una similitud en un principio, es que tanto literales como numerales pueden ser usados para representar diferentes tipos de objetos aparte de números, pero existe una ligera diferencia, generalmente los números se utilizan para etiquetar elementos específicos de un conjunto y los símbolos literales se usan para identificar elementos arbitrarios o variables.

Se argumenta que existen dos razones principales para utilizar letras más que numerales para representar elementos generales: 1. Las letras lucen como abreviaciones de nombres y esto lo hace más fácil, incluso para los estudiantes jóvenes. 2. Sabemos que, posteriormente, las letras se usarán para representar variaciones numéricas, así que no se debe vacilar en utilizarlas lo más pronto posible para nombrar otro tipo de elementos variables, siempre y cuando sea conveniente y razonable.

Otra diferencia presente es la convención de yuxtaposición que se usa tanto con las letras como con los numerales para indicar la multiplicación, como en $3mn$, en contraste con la interpretación del valor posicional que le damos a los numerales, como en 347. Es claro que la razón de esta diferencia es que tanto literales como numerales provienen de diferentes sistemas de simbolización, las letras pueden representar números con un solo dígito o con múltiples dígitos.

La última diferencia que se menciona en el texto es que los símbolos literales no siempre corresponden con sus valores como lo hacen los numerales. Esto es, que la x puede representar un valor negativo y $-x$ puede ser positivo, esto lleva al acercamiento de la definición de valor absoluto, donde $|x| = x$ si $x \geq 0$ y $|x| = -x$ si $x < 0$, la cual es virtualmente incomprensible para mucho estudiantes.

Después de mencionar las similitudes y las diferencias entre las literales y los numerales se presentan las similitudes y las diferencias entre las literales y las palabras, a continuación se presentan las ideas más relevantes.

Una de las principales similitudes entre las literales y las palabras es que ambas pueden actuar como *placeholders* en ciertas expresiones, por ejemplo en el enunciado "Él es un profesor de matemáticas", la palabra *él* pude ser reemplazada por nombres de personas para obtener sentencias falsas o verdaderas, tal como la x en $x^2 + 2x = 3$, que puede ser reemplazada por diferentes números para obtener sentencias falsas o verdaderas.

Es necesario que los estudiantes comprendan esta propiedad de los símbolos literales como *placeholders* para que logren apreciar la generalidad y flexibilidad de estos.

Una similitud más entre literales y palabras es que en ocasiones las letras pueden representar abreviaciones de las palabras que entran en juego en la resolución de cierto planteamiento o problema, lo cual se considera un buen recurso pedagógico para los estudiantes que inician el estudio del álgebra, sin embargo, también se menciona que esta misma característica acarrea problemas y genera cierta clase de errores, ya que los estudiantes suelen pensar que m representa manzanas, cuando en realidad m representa el número de manzanas.

Una tercera característica que comparten las letras y las palabras es que pueden significar distintas cosas dependiendo del contexto en el cual sean usadas.

Ahora expresaremos las diferencias mencionadas por el autor, entre literales y palabras. Una diferencia importante está relacionada con el uso contextual, por convención matemática, el significado y principalmente el valor asignado debe ser el mismo siempre y cuando aparezca en un contexto específico, por ejemplo en $3(x+2)+5=17-2x$, la x debe ser sustituida por el mismo valor cada vez que aparezca. Sin embargo, esto no ocurre con las palabras, en algunas sentencias una misma palabra aparece más de una vez pero ésta puede tomar significados distintos.

La diferencia más significativa entre los símbolos literales y las palabras es que las letras no están asociadas a un conjunto fijo de significados como las palabras. Dicho de otra forma, los símbolos literales usados en matemáticas tienen un sinnúmero de significados distintos, por lo tanto nosotros tenemos la libertad de delimitar el significado dependiendo del contexto en el que estemos trabajando, esto es a lo que se le llama la propiedad de *libertad de delimitación* y a su vez esta propiedad es la que brinda generalidad a los lenguajes matemáticos.

Sin embargo, no hay que olvidar que ciertas letras han adquirido connotaciones específicas en determinados contextos debido a los usos tradicionales. Como por ejemplo, por lo regular se considera a x como el término independiente y a la y como término dependiente en relaciones funcionales.

Para finalizar el artículo, el autor da una serie de recomendaciones para los docentes que estén involucrados con el trabajo de este tipo de ideas, la principal recomendación que da es la introducción paulatina de este tipo de ideas y sobre todo hacer conscientes a los estudiantes de las propiedades mencionadas anteriormente.

2.1.2.2. El significado de variable

El objetivo que se plantearon los autores Schoenfeld y Arcavi (1988) al elaborar este artículo fue el de reexaminar la noción que se tenía del concepto de variable y redescubrir su riqueza y sus múltiples significados, para así impactar y ayudar a remodelar la forma en que los docentes enseñan y usan este concepto en sus clases.

En primer lugar los autores comentan sobre un ejercicio que realizaron con personas de diversas ramas, matemáticos, profesores de matemáticas, informáticos, lingüistas y lógicos; ellos pidieron a los entrevistados que describieran con una sola palabra lo que es una variable.

En primera instancia encontraron una gama muy diversa de palabras: símbolo, placeholder, pronombre, parámetro, argumento, puntero, nombre, identificador, espacio vacío, vacío, referencia, instancia. Sin embargo, hacen notar que la palabra incógnita nunca apareció en el listado.

Dan una explicación breve sobre la connotación de incógnita al trabajar los símbolos literales, de esta forma se sabe que existe un valor fijo, sin embargo, este no se conoce aún. Por ejemplo en $3x + 2 = 5x - 4$, no se sabe lo que es x, pero no se puede considerar variable literalmente, ya que solo tendrá un valor. Consideran muy difícil que una gama tan amplia de significados puedan converger en un significado de lo que es variable, aun y si se discriminaran las palabras que no provienen de contextos puramente matemáticos sería complicado obtener una sola palabra que describa lo que es variable.

Por lo tanto, en la segunda parte de su trabajo, los investigadores se dan a la tarea de examinar algunas definiciones del término para así tratar de aproximarse a un significado que se pueda considerar apropiado. A continuación se presentan las diez definiciones que ellos plasman en su documento.

1. Del latín variabilis: variable.
2. Una cantidad que puede asumir cualquier valor de un conjunto específico. Un símbolo en una fórmula matemática representando una variable: reemplazo.

3. Cantidades variables … tienen que estar continuamente incrementando o decreciendo: y así hacer por el movimiento de su incremento o decrecimiento mencionados, generar líneas, áreas o sólidos.
4. Una cantidad o fuerza la cual a todo lo largo de un cálculo matemático o investigación es asumida para variar o capaz de variar en valor.
5. Una variable es un símbolo que puede ser remplazado por cualquier elemento de algún conjunto designado de números (u otras cantidades) llamado dominio de la variable. Cualquier miembro del conjunto es un valor de la variable. Si el conjunto solo tiene un miembro la variable se vuelve constante. Si un enunciado contiene dos variables relacionadas de tal forma que cuando el reemplazo es realizado para la primera variable, el valor de la segunda variable es determinado, la primera variable es llamada variable independiente, y la segunda es llamada variable dependiente.
6. Un propósito general del término en matemáticas para una entidad la cual toma varios valores en cualquier contexto particular. El dominio de la variable puede ser limitado a un conjunto particular de números o cantidades algebraicas.
7. Las variables las cuales son generalmente representadas por letras, representan un conjunto vacío en cual un elemento arbitrario (o su símbolo) de un conjunto dado puede ser sustituido… las variables son utilizadas en dos formas: facilitan enunciar leyes, y la solución de un problema expresado en términos de variables proporcionan el resultado de muchos casos arbitrariamente individuales sin nuevos cálculos, por una mera sustitución.
8. Una variable es una letra o cadena de letras usadas para denotar un número…en cualquier tiempo, una variable significará un número particular, llamado valor de la variable, el cual puede ser cambiado de vez en cuando…El valor de la variable puede cambiar millones de veces…Nosotros asociaremos a cada variable una caja de ventana. La variable asociada es garbada a lo alto de cada caja, dentro está una tira de papel con el presente valor de la variable escrita en ella. La variable es un nombre para el número que aparece constantemente adentro.
9. Una variable es llamada una entidad que posee un valor que puede cambiar durante la ejecución de un programa. Una variable está asociada con una memoria de localización específica y el valor de la variable está contenido en esa memoria de localización.
10. Cualquier símbolo cuyo significado no está determinado es llamado una variable, y las diferentes determinaciones de las cuales su significado es sensible es llamado valor de la variable. Los valores pueden ser conjuntos de entidades, proposiciones, funciones, clases o relaciones, según las circunstancias. Si un enunciado es realizado acerca de ‘Sr. A y Sr. B’, ‘Sr. A’ y ‘Sr. B’ son variables cuyos valores son asignados a hombres. Una variable puede tener un rango de valores asignado convencionalmente, o puede (en ausencia de cualquier indicación del rango de valores) tener como rango de sus valores todas las determinaciones que traduzca el enunciado en el cual lo significativo ocurre. (Schoenfeld & Arcavi, 1988, pp. 421 y 422).

Con el listado anterior se hace más evidente aun que los múltiples usos del término variable lo hace difícil de entender para los estudiantes. Sin embargo, proponen que para tener una idea más clara de lo que es una cosa y disminuir la dificultad de su comprensión es necesario conocer su uso. En el caso de las variables, son muy útiles para expresar y establecer leyes y para expresar la resolución de problemas en términos de variables y así evitar la realización de muchos casos individuales, en otras palabras, la variable es una herramienta formal al servicio de la generalización (Schoenfeld & Arcavi, 1988).

Ellos concluyen de este análisis, que el término variable es variable, que este se usa de diferentes formas en diferentes contextos y esto hace que sea difícil para que los estudiantes lo comprendan, para lograrlo se deben familiarizar con sus diversos usos.

Schoenfeld y Arcavi mencionan tres ideas que consideran relevantes y que sugieren se deben practicar con los estudiantes para que las dificultades se vean salvadas, la primera de ellas es verbalizar las generalizaciones observadas u obtenidas antes de expresarlas en lenguaje matemático (algebraico).

El concepto de variable puede ser estresante si no resulta significativo, por lo tanto es necesario incitar a los estudiantes a identificar en diversas situaciones las relaciones dinámicas existentes, como por ejemplo, el costo de la gasolina respecto a los litros solicitados, la temperatura de un espacio respecto al tiempo, la distancia recorrida de un objeto respecto al tiempo, entre otros. Esto brinda la oportunidad de hacer la noción de variable más significativa (Schoenfeld & Arcavi, 1988).

Y por último, los autores recomiendan que se enfrente a los estudiantes con situaciones problemáticas con las cuales logren observar la herramienta tan poderosa de generalización que resulta el uso de las variables en el lenguaje algebraico, al capturar la esencia matemática de las diversas situaciones.

2.1.2.3. La comprensión de los niños de la variable numérica

En este artículo Küchemann (1978) presenta los resultados de un estudio masivo que realizó con un total de 3,000 estudiantes pertenecientes a escuela secundaria, el estudio fue denominado Children´s understanding of generalised arithmetic.

Comienza explicando que los profesores, comúnmente, utilizan el término general “variable” para cualquier letra en la aritmética generalizada. Sin embargo, en $f = 3g + 1$ y en $g + 5 = 8$, en ambos casos, técnicamente, se puede aplicar el término variable para g; sin embargo, la demanda cognitiva en ambos casos es muy diferente y el término variable solo obscurece más la diferencia.

Para evitar lo anterior el autor propone redefinir el significado de variable y desarrollar la proposición de seis niveles para describir las diferentes formas en que las letras pueden ser usadas, tales niveles son, letra evaluada, letra ignorada, letra como objeto, letra como incógnita, letra como número generalizado y letra como variable. En seguida se presenta un esquema extraído directamente del texto donde ejemplifica cada uno de los distintos usos mencionados.

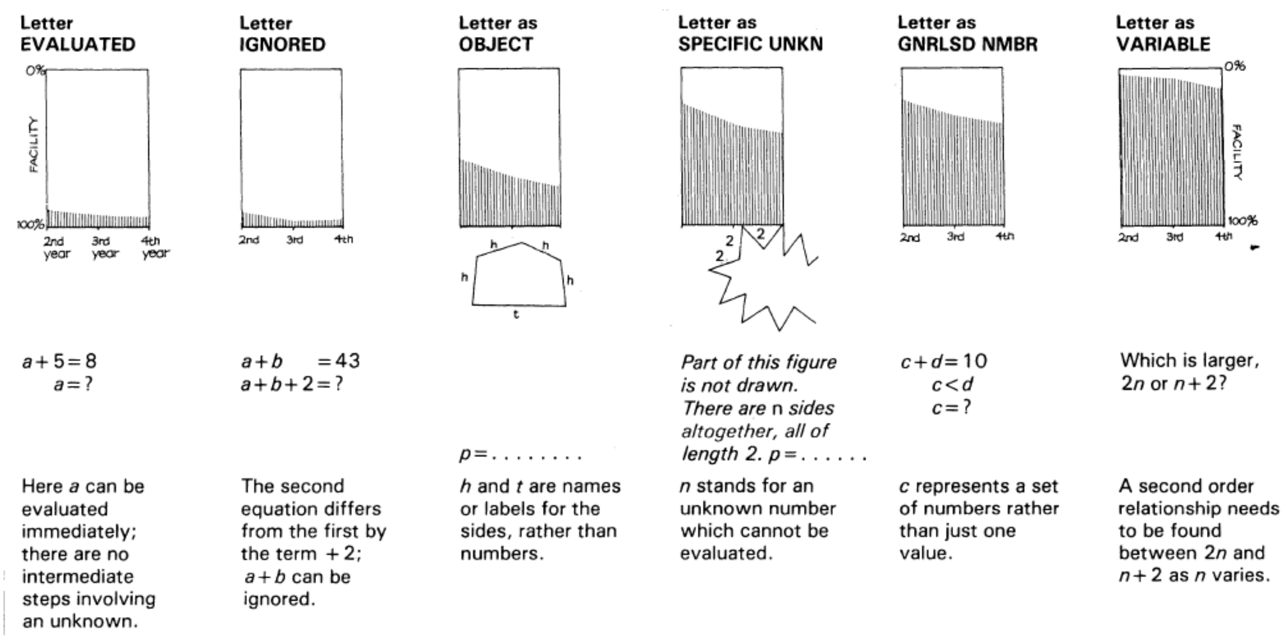


Figura 1. Niveles de uso de los símbolos literales (Küchemann, D., 1978)

Como se puede ver en la Figura 1, el nivel de dificultad va aumentando según los diversos usos de la variable, va desde el más sencillo que es el uso como letra evaluada, hasta el identificado como más complejo, que es la letra como variable, incluso el aumento de la dificultad se observa bastante estable según se avanza en los niveles.

El autor explica que cada nivel de uso de la variable está relacionado con alguno de los estadios del desarrollo propuesto por Piaget, ya sea con el concreto temprano, con el concreto tardío, con el formal temprano o con el formal tardío, él hace un análisis bastante riguroso de esto, así como con el porcentaje de ítems correctos y los tipos de respuestas obtenidas para cada tipo de planteamiento, según el uso que se da a la variable.

Luego hace una descripción más detallada de cada uno de los usos que puede tener la variable, en seguida las ideas más relevantes:

- Letra evaluada: el valor numérico de la literal puede ser determinado directamente por simple prueba y error. No se necesita de algún paso en la resolución, por lo tanto no se considera como incógnita.
- Letra ignorada: aquí no se necesita manipular, transformar o recordar la expresión involucrada, el estudiante solo requiere fijarse en las diferencias entre ecuaciones y aplicar las operaciones.
- Letra como objeto: en este nivel la letra puede ser operada sin la necesidad de ser evaluada, pero la letra no se considera como incógnita, sino como un objeto, un nombre o la abreviación de un objeto.
- Letra como incógnita: en este caso la letra es un número específico, aunque desconocido, puede ser operado.
- Letra como número general: este nivel difiere con respecto al de letra como incógnita, en que la letra puede tomar o representar una serie de valores en lugar de solo uno.
- Letra como variable: es este caso debe de existir cierto tipo de relación entre las letras, en la cual los valores cambian de una forma sistemática (Küchemann, 1978).

2.1.3. Modelo de enseñanza

El modelo de enseñanza está basado principalmente en el Modelo 3UV (3 usos de la variable) propuesto por Ursini (2005), en el cual se considera que para que un estudiante sea competente en la resolución de problemas algebraicos, éste tiene que dominar flexiblemente el trabajo de la variable como incógnita, como número general y como relación funcional.

Consideramos que la solución competente de los problemas algebraicos requiere un manejo flexible de los tres usos de la variable y de los aspectos que caracterizan a cada uno de ellos (Ursini *et al*., 2005).

• Para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucran *la incógnita* es necesario:

I1 Reconocer e identificar en una situación problemática la presencia de algo desconocido que puede ser determinado, considerando las restricciones del problema.
I2 Interpretar los símbolos que aparecen en una ecuación como la representación de valores específicos.
I3 Sustituir la variable por el valor o los valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.
I4 Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando las operaciones algebraicas o aritméticas.
I5 Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.

• Para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucran *el número general* es necesario:

G1 Reconocer patrones, percibir reglas y métodos en secuencias y en familias de problemas.
G2 Interpretar un símbolo como la representación de una entidad general indeterminada que puede asumir cualquier valor.
G3 Deducir reglas y métodos generales en secuencias y familias de problemas.
G4 Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.
G5 Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.

• Para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucran *variables en relación funcional* es necesario:

F1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).

F2 Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.

F3 Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.

F4 Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).

F5 Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.

F6 Simbolizar una relación funcional, con base en el análisis de los datos de un problema.

El modelo de enseñanza está integrado, básicamente, por una serie de textos, en este caso, una serie de problemas aritmético-algebraicos, diseñados con ciertas características específicas, con los cuales, durante su resolución, surgieran cuestiones de interés sobre el concepto de variable y sus usos (Anexos 3,4,5).

2.2. Metodológico

2.2.1. Planeación y desarrollo de la investigación

La investigación está organizada de acuerdo con el Esquema del diseño de la experimentación propuesta en los MTL (Filloy, 1999), en el cual se consideran los cuatro modelos mencionados anteriormente (ver Diagrama 1: "Esquema del diseño de la experimentación").

Preguntas de investigación: ¿Cuáles son las características del desempeño algebraico del estudiante de nivel medio superior cuando resuelve problemas relacionados con los diversos usos de la variable?

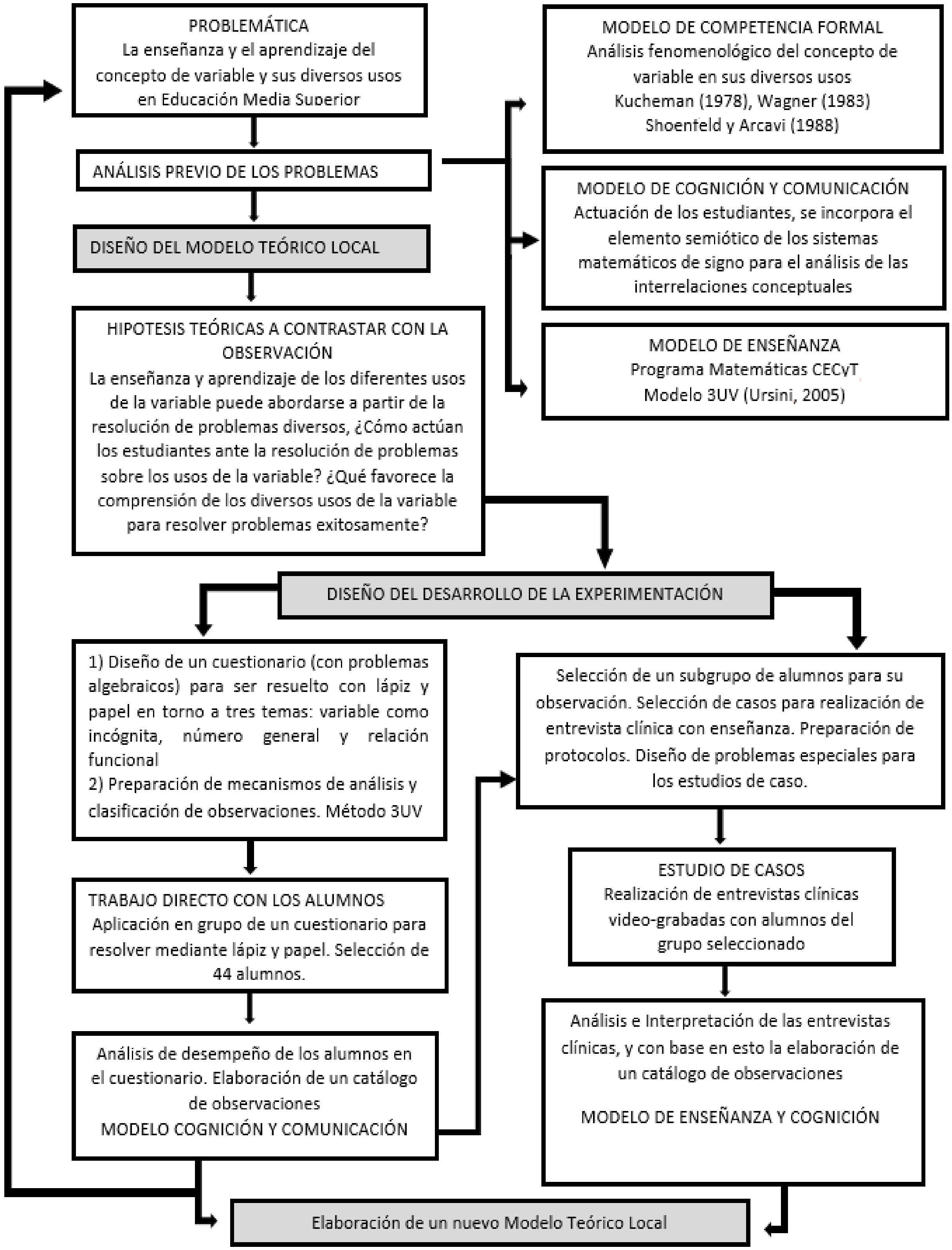
¿Cuáles son las principales dificultades que presentan los estudiantes al resolver problemas o ejercicios relacionados con los diversos usos de la variable?

¿Cuáles son las principales tendencias cognitivas presentes en los estudiantes al resolver problemas relacionados con los diversos usos de la variable?

Objetivo general: Caracterizar el desempeño algebraico de los estudiantes de educación media superior, asociada a la resolución de problemas donde es necesario llevar a cabo el uso de los diversos usos de la variable, como número general, relación funcional e incógnita.

Objetivo particular: Generar una caracterización de las principales tendencias cognitivas presentes en los estudiantes al resolver problemas relacionados con los diversos usos de la variable.

Diagrama 1:"Esquema del diseño de la experimentación"



2.2.2. Escenario y sujetos

El Departamento de Matemática Educativa (DME) del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav) del IPN y el Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos No. 4 Lázaro Cárdenas (CECyT), ubicados en la Ciudad de México, desarrollan, en común acuerdo, un proyecto interinstitucional que tiene como objetivo general: derivados de los procesos de enseñanza y aprendizaje desarrollados en el aula, estudiar las causas posibles de los problemas identificados y construir propuestas alternativas a los problemas en cuestión.

La población principal que ha participado en la investigación pertenece al primer semestre, grupo 1IM20 del CECyT 4 Lázaro Cárdenas, está conformado por un total de 46 estudiantes, quienes tienen un rango de edad de 15 a 17 años. De igual forma, se realizaron algunos trabajos, principalmente de diagnóstico, con el grupo 1IM2 integrado por 46 estudiantes del mismo rango de edad.

También se requirió de la participación del grupo 6IM13 perteneciente al sexto semestre del bachillerato técnico, conformado por 45 estudiantes, con un rango de edad de 17 a 19 años.

El objetivo de realizar la investigación con estudiantes de primer semestre y de sexto semestre fue establecer un comparativo entre los estudiantes que inician sus estudios de nivel medio superior y los que están por terminarlos, para así brindar información de interés a las instituciones involucradas.

2.2.3. Metodología e instrumentos

La metodología a seguir es de corte cualitativo, sin embargo, se recurrió a algunas estrategias cuantitativas para la obtención y el análisis de datos. Los distintos momentos correspondientes al desarrollo de la experimentación se muestran, de forma general, en el siguiente esquema (ver Diagrama 2: “Esquema del desarrollo de la experimentación”).

Como ya se mencionó, la presente investigación se desprende de un trabajo interinstitucional entre el CECyT 4 y el DME del Cinvestav, por lo tanto, en determinados momentos del proceso, por motivos externos al investigador en formación, fue necesario modificar ligeramente el transcurso de las acciones.

Como un primer acercamiento, se aplicaron dos instrumentos de diagnóstico, elaborados por docentes de matemáticas del CECyT 4 (Anexo 1 y 2), para abordaron una amplia variedad de contenidos matemáticos, dicha actividad se implementó con la totalidad de los grupos de primer semestre; sin embargo, para la presente investigación interesan los resultados obtenidos por los grupos 1IM20 y 1IM2, ya que es la población asignada para llevar a cabo la investigación. Se realizó un análisis cuantitativo de los datos obtenidos.

Para corroborar los resultados obtenidos en el primer momento, se decidió aplicar un instrumento en el que se plantearon problemas relacionados exclusivamente con diversos usos de la variable (Anexo 3). En esa ocasión el análisis fue cualitativo.

Con base en el diagnóstico inicial se realizó una clasificación de la población, se hizo un análisis cuantitativo y cualitativo de los resultados y se asignó un estrato de desempeño a cada estudiante, ya sea bajo, medio o alto. Fue un trabajo riguroso, del cual se obtuvo una caracterización preliminar de las principales dificultades identificadas.

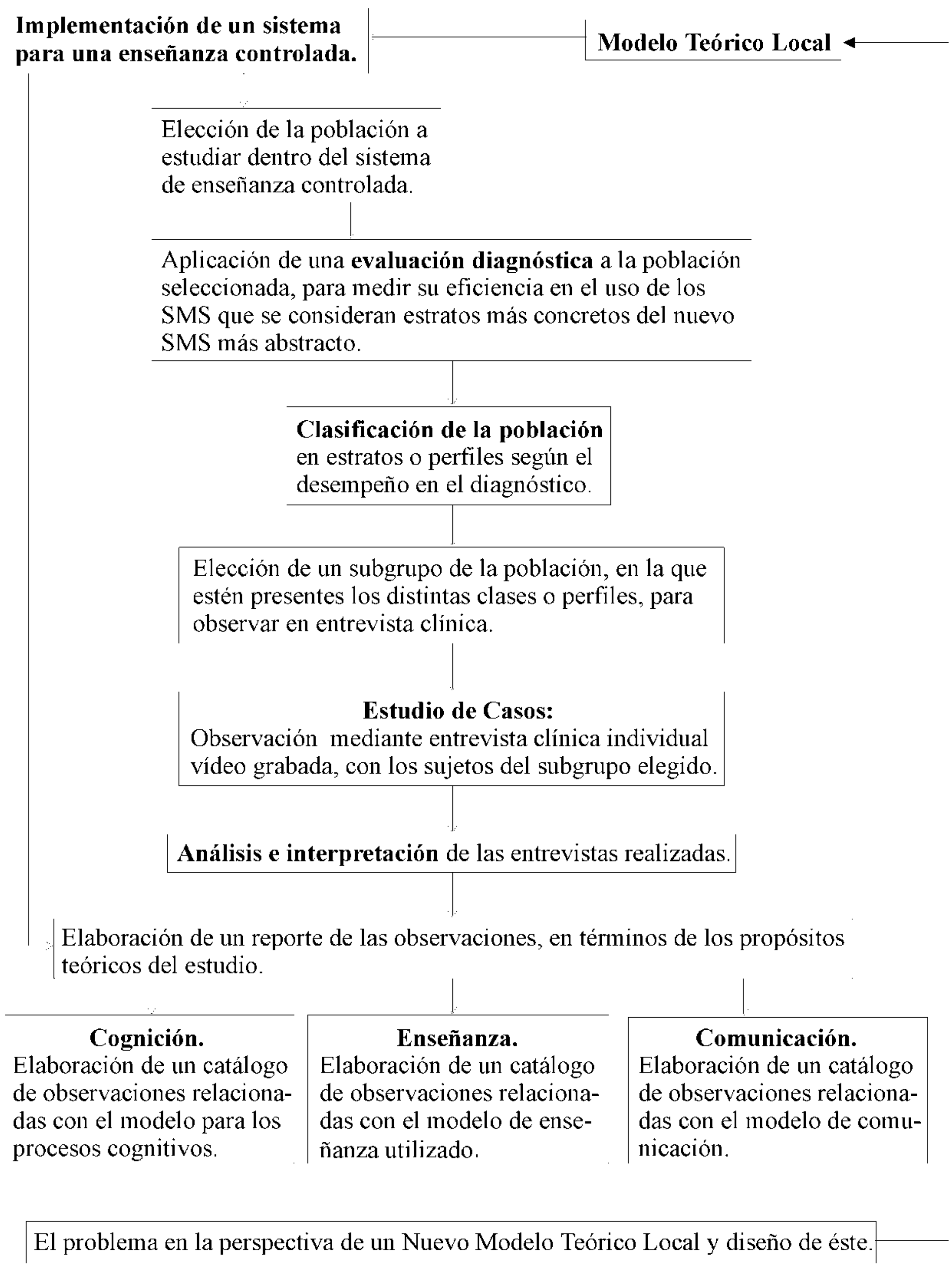
Como segundo acercamiento y con base en el diagnóstico inicial, se seleccionaron tres estudiantes clasificados en estratos bajo, medio y alto de desempeño para llevar a cabo la aplicación de entrevistas clínicas con el objetivo de profundizar y detectar de manera precisa las dificultades identificadas. Durante la entrevista se trabajaron planteamientos específicos para abordar el concepto de variable y sus diversos usos (Anexo 3). Los instrumentos de registro fueron la videograbación, hojas de control y transcripción de la totalidad de las entrevistas.

Con base en el análisis de las entrevistas clínicas se realizó la caracterización del desempeño de los tres estudiantes, rescatando lo más relevante.

Al culminar esta parte de la investigación, se llevó a cabo un segundo momento de entrevistas clínicas grupales, aplicando un nuevo instrumento pero ahora prestando mayor atención a la componente de enseñanza (Anexo 5), de igual forma se llevó a cabo el análisis correspondiente de éstas.

Todo lo anterior se realizó con estudiantes de primer semestre, al culminar dichas actividades se aplicó un instrumento (Anexo 4) a un grupo de estudiantes de quinto semestre para estar en la posibilidad de establecer un comparativo que brindará información de interés.

Diagrama 2: "Esquema del desarrollo de la experimentación"



Capítulo 3

Diagnóstico y clasificación de la población

La implementación de instrumentos diagnósticos pre-algebraicos, concebidos como una medición de la eficiencia y consistencia del dominio de los aspectos básicos de la materia (Rojano, 1985), pueden ser de gran utilidad en dos sentidos: en primer lugar son de utilidad para la preparación de estudios de carácter clínico, y segundo proporciona un mapeo de los perfiles de los estudiantes pertenecientes a un grupo.

Los cuestionarios diagnósticos se diseñaron con el objetivo de conocer los antecedentes escolares de los estudiantes, con lo cual se logró clasificarlos en los ejes sintáctico, semántico y usos de la variable.

- El eje sintáctico corresponde a las transformaciones (niveles de transformación o simbolización) sintácticas u operatorias que los estudiantes utilizan para encontrar el valor de lo desconocido en un problema o en una ecuación.
- El eje semántico describe la resolución de problemas (incluyendo la fase de traducción a una ecuación) y los problemas de representación simbólica de situaciones en contextos variados y con ello los significados que los estudiantes dan a los objetos pre-algebraicos y a los nuevos objetos algebraicos en construcción (Filloy, 1999).
- El eje Usos de la variable representa el nivel de dominio en la resolución de problemas y ejercicios que implican el trabajo con la variable en sus distintos usos, ya sea en la identificación y manipulación de una incógnita, en la representación generalizada de una cantidad o como relación funcional.

3.1. Diseño de los instrumentos

Los profesores responsables de los grupos de Matemáticas del CECyT 4 Lázaro Cárdenas diseñaron los dos cuestionarios iniciales de acuerdo con el proyecto interinstitucional Cinvestav-CECyT 4, al cual se incorporó la presente investigación.

Aunque el diseño de los instrumentos no estuvo a cargo del responsable de la presente investigación se consideró prudente utilizarlos para la clasificación de la población de estudio, ya que el contenido evaluado fue de diversas índoles, siendo la temática algebraica una de las más consideradas.

Como menciona Filloy (1999), para que no exista incertidumbre en las formas que se precisan para resolver un problema, es necesario avanzar en el uso de tácticas intermedias inmersas en los usos de expresiones algebraicas, de proporcionalidad, de por ciento, del manejo de los números negativos, etc., y en los mencionados instrumentos se consideran todas estas temáticas en diversos planteamientos y abordados de diferentes maneras.

Ambos instrumentos están integrados por problemas y ejercicios útiles en la clasificación y dan luz sobre el dominio de cuestiones pertenecientes al SMS aritmético (SMS1) y al SMS algebraico (SMS2).

En un momento posterior, el responsable de la presente investigación diseñó y aplicó un tercer instrumento, con el cual se aborda contenido de los SMS1 y SMS2 exclusivamente, con el objetivo de refinar la información obtenida a partir de los dos instrumentos ya mencionados, la descripción de los planteamientos de cada instrumento se hace en las siguientes secciones.

3.2. Descripción de los resultados del diagnóstico

Con base en las respuestas a los cuestionarios de diagnóstico aplicados a los grupos 1IM20 (46 estudiantes) y 1IM2 (45 estudiantes), se concluye que los estudiantes de nuevo ingreso tienen un dominio deficiente de los contenidos matemáticos evaluados con ese instrumento, pues la mayoría de los ejercicios y problemas fueron contestados de manera errónea.

El cuestionario A (Anexo 1) fue aplicado a 22 estudiantes del grupo 1IM20 y a 23 del grupo 1IM2, mientras que el instrumento B (Anexo 2) se aplicó a 24 y 22 estudiantes, respectivamente.

La Figura 2 resume las frecuencias de respuestas correctas por reactivo del cuestionario A, proporcionadas por los estudiantes de los grupos 1IM20 y 1IM2. Es notorio que a cinco de los reactivos (2, 6, 7, 8 y 14) no se dio una sola respuesta correcta. Es importante señalar que las mayores dificultades se presentaron al contestar la primera parte del cuestionario (reactivos de preguntas abiertas), respecto a su segunda parte (reactivos de opción múltiple).

La Tabla 1 indica el contenido correspondiente a cada reactivo y el tipo de desempeño de los estudiantes, clasificado como Bueno (más del 80% de los estudiantes), Suficiente (entre 60% y 80% de los estudiantes) e Insuficiente (menos del 60% de los estudiantes) por su dominio en cada tema.

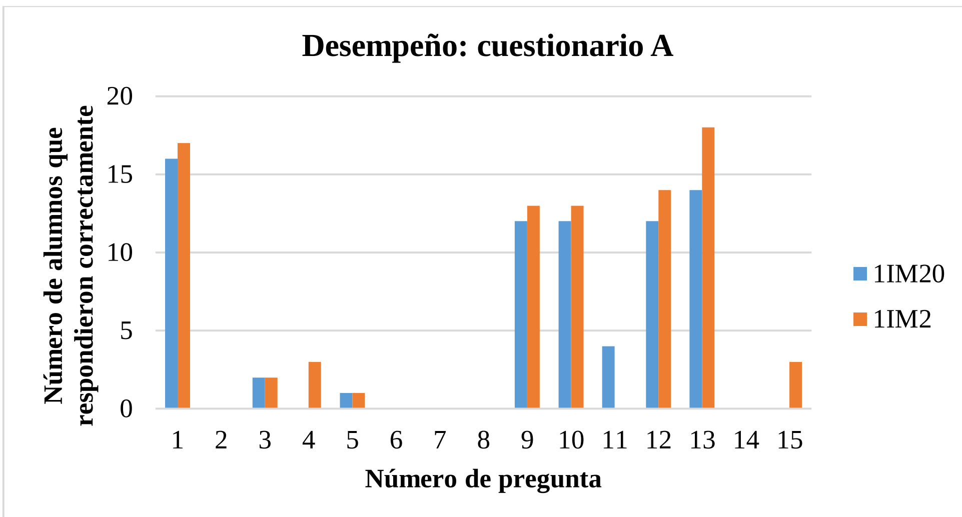


Figura 2. Resultados del cuestionario A Grupos 1IM20 y 1IM2.

Tabla 1. Resultados por contenido del cuestionario A Grupos 1IM20 y 1IM2.

Pregunta	Tema	Desempeño
1ª Parte		
1	Razones y proporciones	Suficiente
2	Operaciones con números racionales	Insuficiente
3	Problemas de conteo	Insuficiente
4	Representación de función lineal	Insuficiente
5	Propiedades de triángulos	Insuficiente
6	Medidas de tendencia central y dispersión	Insuficiente
7	Razones trigonométricas	Insuficiente
2ª Parte		
8	Resolución de ecuaciones cuadráticas	Insuficiente

9	Proporcionalidad inversa	Insuficiente
10	Máximo común divisor	Insuficiente
11	Operación de números racionales	Insuficiente
12	Porcentajes	Insuficiente
13	Proporcionalidad	Suficiente
14	Representación de reales en la recta numérica	Insuficiente
15	Frecuencia relativa de eventos	Insuficiente

La Figura 3 resume la frecuencia de respuestas correctas por reactivo del cuestionario B. La dificultad para responder a sus reactivos, todos de opción múltiple, se asemeja más a los de la segunda parte del cuestionario A.

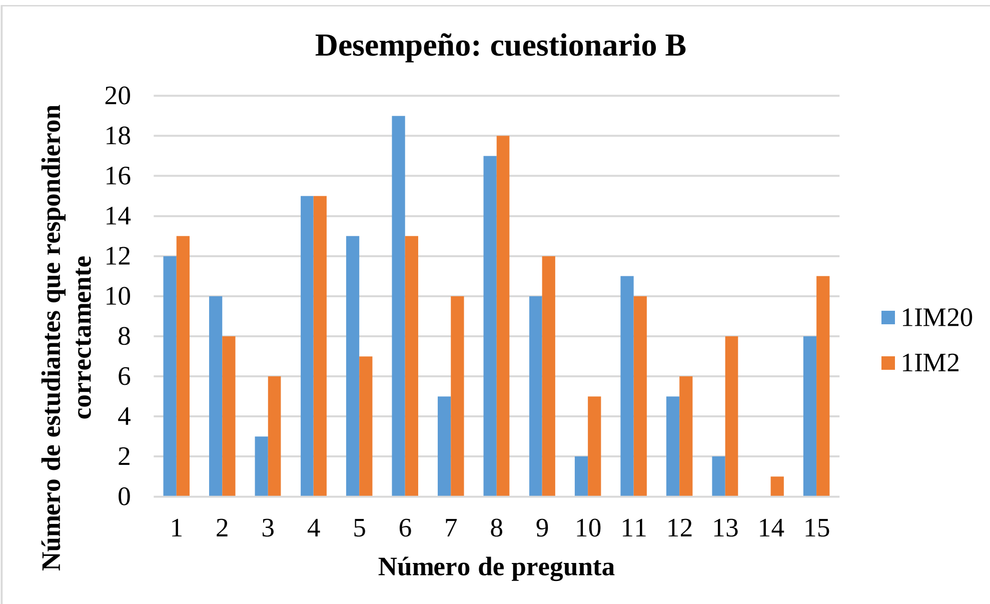


Figura 3. Resultados del cuestionario B Grupos 1IM20 y 1IM2.

La Tabla 2 especifica el contenido de cada reactivo del cuestionario B y el tipo de desempeño manifestado por los estudiantes, con la misma clasificación especificada para el cuestionario A por porcentajes de respuestas correctas.

Tabla 2. Resultados por contenido del cuestionario B Grupos 1IM20 y 1IM2.

Pregunta	**Tema**	**Desempeño**
1	Mínimo común múltiplo	Insuficiente
2	Operaciones con polinomios	Insuficiente
3	Operaciones con monomios	Insuficiente

4	Obtención de un término en una sucesión	Suficiente
5	Obtención de regla general de una sucesión	Insuficiente
6	Ecuación de primer grado	Suficiente
7	Criterios de congruencia	Insuficiente
8	Razones trigonométricas	Suficiente
9	Ecuación de primer grado	Insuficiente
10	Proporcionalidad inversa	Insuficiente
11	Porcentajes	Insuficiente
12	Representación de una función lineal	Insuficiente
13	Medidas de tendencia central	Insuficiente
14	Probabilidad de eventos	Insuficiente
15	Diagramas de Venn	Insuficiente

De las Tablas 1 y 2 se deduce que no hay contenidos en los cuales los alumnos presenten un buen desempeño y sólo en los temas de proporcionalidad directa, sucesiones y ecuaciones de primer grado alcanzan un desempeño suficiente.

Las Figuras 2 y 3 muestran que en la mayoría de las preguntas el desempeño de los estudiantes de los grupos 1IM2 y 1IM20 es similar. Con esto se concluye que incluso sus fortalezas y debilidades, referente a contenidos, son las mismas.

3.2.1. Puntuaciones por grupo

Asignamos un punto a cada respuesta correcta por reactivo, de manera que la máxima puntuación posible de la contestación a cada cuestionario fuera 15, el número total de reactivos en cada instrumento. Las Figuras 4 y 5 presentan la distribución de las puntuaciones obtenidas por el grupo 1IM20, así como su comportamiento promedio en el cuestionario A y en el cuestionario B, respectivamente.

# Estudiantes:	22
# Reactivos:	15
Media:	3.32
Mediana:	3
Moda:	2
DE:	1.4

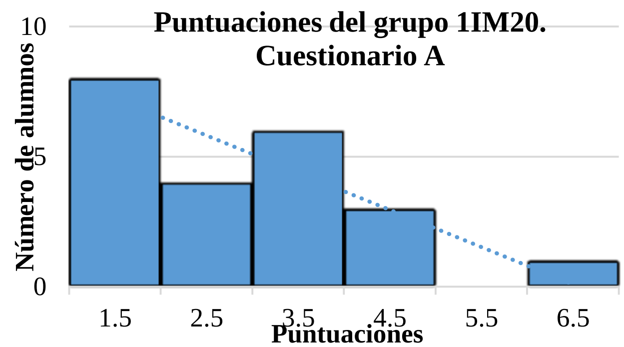
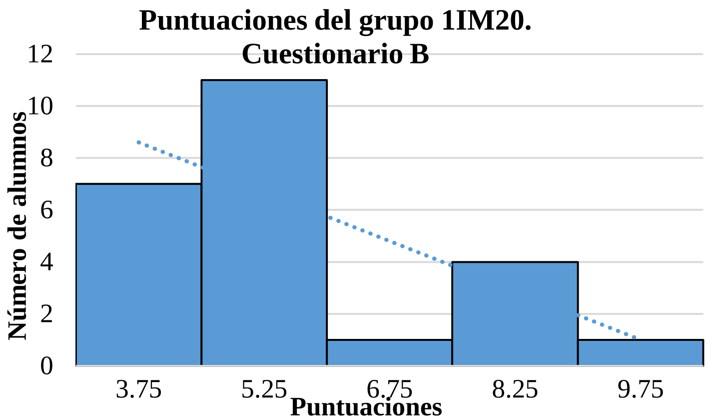


Figura 4. Puntuaciones del grupo 1IM20. Cuestionario A.



Estudiantes: 24
Reactivos: 15
Media: 5.54
Mediana: 5

Moda: 5
DE: 1.8

Figura 5. Puntuaciones del grupo 1IM20. Cuestionario B.

La distribución de los datos que muestran las Figuras 4 y 5 es irregular, no exhiben un patrón de comportamiento a partir del cual se pueda hacer cierta generalización. Incluso un análisis, mediante las desviaciones estándar y la campana de Gauss de los datos, no resulta en un comportamiento estable; los datos no se agrupan de la forma en que el gráfico lo establece, por lo cual la distribución no corresponde a una curva normal. Sin embargo, los datos de ambos grupos tienden a decrecer al acercarse a las puntuaciones altas. Para el cuestionario A la puntuación más alta fue 7 (de 15), obtenida por un solo estudiante. El promedio de las puntuaciones con este instrumento fue de 3.32 aciertos. Con el cuestionario B los resultados fueron ligeramente mejores: la puntuación más alta fue 10 (de 15) y una media de 5.54; esto se analiza con detalle más adelante.

El desempeño del grupo 1IM2 fue similar, como lo muestran las Figuras 6 y 7.

Estudiantes: 23
Reactivos: 15
Media: 3.65
Mediana: 4
Moda: 4
DE: 1.1

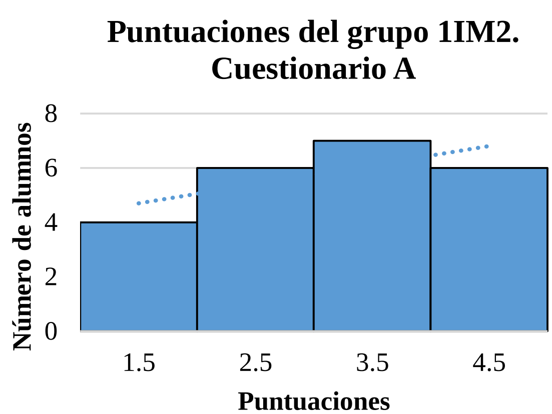
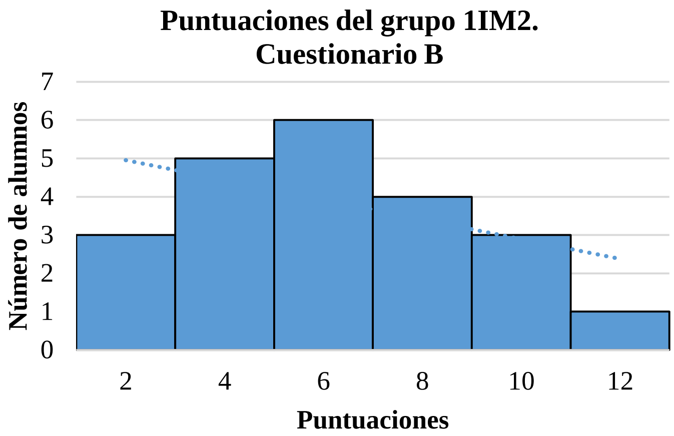


Figura 6. Calificaciones del grupo 1IM2. Cuestionario A.



Estudiantes: 22
Reactivos: 15
Media: 6.5
Mediana: 6
Moda: 6
DE: 2.8

Figura 7. Puntuaciones del grupo 1IM2. Cuestionario B.

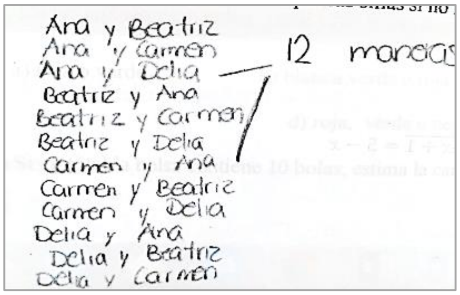
Las Figuras 6 y 7 muestran un comportamiento más estable del grupo 1IM2 respecto al exhibido por el grupo 1IM20. Sería interesante analizar esto con más detalle, ya que a ambos grupos se les aplicaron los mismos instrumentos de diagnóstico, aunque los resultados del primero son mucho más regulares que los del segundo.

De igual forma, las puntuaciones obtenidas con el cuestionario B, con un promedio de 6.5, son más altas que las obtenidas con el A, con una media de 3.65.

3.2.2. Tipos de errores

Varios tipos de errores se identificaron durante el análisis de las respuestas a los cuestionarios de diagnóstico A y B. Sin embargo, muchos de los estudiantes cometieron errores similares. Sería interesante dar seguimiento a los tipos de errores más relevantes.

a. Dificultades del lenguaje. Estos errores se derivan del uso incorrecto de los símbolos y desconocimiento de términos matemáticos, debido a una falta de comprensión semántica del lenguaje matemático (Abrate et al., 2006). Algunos alumnos no advirtieron información importante en los planteamientos. Como ejemplo de este tipo de error, véase la Figura 8.



El estudiante enlistó todas las posibilidades y obtuvo el resultado correcto; sin embargo, omitió la condición “sin importar el orden” y contó la misma pareja dos veces, con lo cual su respuesta fue errónea.

Figura 8. Dificultades del lenguaje.

b. Conocimientos deficientes. Estos errores ocurren por deficiencias en la aplicación de contenidos y procedimientos al realizar una tarea matemática e incluye el desconocimiento de algoritmos (Abrate et al., 2006). Fue el error más frecuente en los cuestionarios aplicados. Como ejemplos, véanse las Figuras 9 y 10.

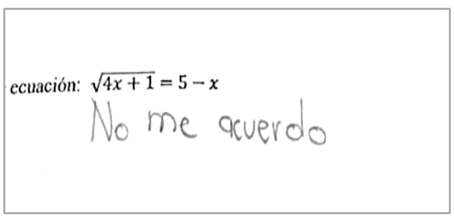
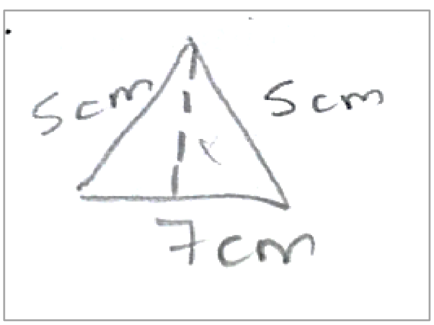


Figura 9. Conocimientos deficientes.

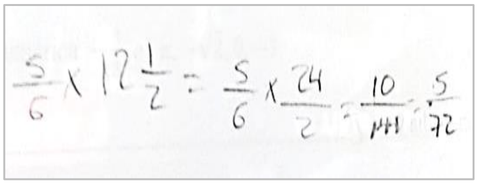
El estudiante hizo explícito su olvido de la forma de resolver la ecuación planteada. Su respuesta reveló su inadvertencia de la operación inversa a la radicación cuadrada y sugiere la concepción de que para él las matemáticas constituyen una lista de procedimientos resumidos por una “fórmula”, la cual sólo se tiene que memorizar y recuperar para seguirlos.



El enunciado del reactivo pedía obtener la altura de un triángulo isósceles. El estudiante trazó una figura correcta; sin embargo, pareció desconocer el teorema de Pitágoras o las funciones trigonométricas, pues no los aplicó para obtener la longitud respectiva.

Figura 10. Conocimientos deficientes.

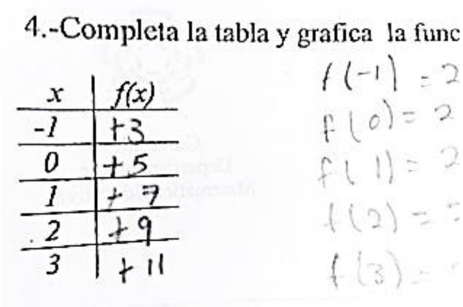
c. Asociaciones incorrectas. Con este tipo de errores se revela una “rigidez” de pensamiento, debida a una interferencia mutua entre conceptos u operaciones que no se han consolidado suficientemente y que vuelve a subrayar la ausencia de identificación de la operación inversa (Abrate et al., 2006). La Figura 11 presenta un ejemplo de las respuestas en que se incurrió en este tipo de error.



El estudiante planteó correctamente el problema para darle solución con una multiplicación de fracciones; sin embargo, al operarla la efectuó como una división de fracciones.

Figura 11. Asociaciones incorrectas

d. Dificultades de representación. Este tipo de error se comete cuando no se puede expresar alguna situación planteada en un formato dado en términos de otro, por ejemplo, en el gráfico, tabular, simbólico-algebraico, figural o de lenguaje común. Un ejemplo de este tipo de error puede verse en la Figura 12.



El estudiante representó correctamente una función lineal en su forma tabular para valores dados; sin embargo, no logró trazar la gráfica respectiva.

Figura 12. Dificultades de representación.

f. Datos mal utilizados. Este tipo de errores se cometen cuando se realizan cómputos sin sentido, principalmente cuando los estudiantes no saben cómo resolver los problemas y realizan cálculos al azar para dar una respuesta.

3.3. Clasificación de los resultados de la población en estudio

La aplicación de los instrumentos diagnósticos se hizo con la finalidad de clasificar a la población que participó en la investigación y así poder seleccionar a los sujetos que participaron en la observación con entrevistas clínicas. Como ya se ha mencionado, dicha población se clasifica en tres ejes, para esto se utilizan criterios cualitativos y cuantitativos, como resultado de lo anterior se obtiene el esbozo de los perfiles de los estudiantes participantes.

Cada uno de los ejes considerados para la clasificación (semántica, sintaxis y dominio de los diversos usos de la variable) y el correcto desempeño en cada uno de estos, resulta indispensable para poder hablar de un dominio competente del SMS2.

3.3.1. Modelo de clasificación

Para clasificar a los estudiantes se utilizó el modelo tridimensional, aplicado en otros estudios (Rojano, 1985; Rubio, 1994) que sigue un procedimiento dividido en 2 etapas:

1. Se relaciona la actuación de cada alumno en los cuestionarios con un punto (x, y, z) del espacio tridimensional, siendo x, y, z indicadores del nivel de competencia en cada eje de desempeño (sintáctica, semántica, usos de la variable).

2. Se definen como polos algunos puntos de interés en el espacio tridimensional y se agrupan en torno a ellos los puntos "cercanos", formándose así clases compuestas o clases de clases de alumnos (Huesca, 2006).

De una manera muy flexible y atendiendo a las características de los resultados de los cuestionarios, se eligieron tres puntos de corte para asignar el desempeño de los estudiantes en cada eje, tales puntos sirvieron como marca de estratificación para la definición de tres clases o estratos donde ubicar a los alumnos en la representación tridimensional, según su competencia en las clases correspondiente a cada eje.

De esta forma se coloca a cada estudiante en una clase de desempeño, ya sea Clase 1 (estrato bajo), Clase 2 (estrato medio) y Clase 3 (estrato alto), esto para cada eje.

3.3.2. Representación tridimensional de las clases

Una vez clasificada la población respecto a cada uno de los ejes, se estructuran las clases según un modelo tridimensional (un cubo), en el cual cada línea representa un eje y a cada alumno se le asignan tres coordenadas, a saber, los números de clase en donde queda ubicado en cada eje.

Grupo 1IM20 y 1IM2

De las 64 ternas ordenadas del modelo tridimensional, 20 correspondieron a clases no vacías. El número de alumnos que pertenecen a cada una de estas clases tridimensionales define el "peso relativo" de cada clase.

Clase	No. de alumnos
000	5
010	5
011	1
020	5
030	2
100	27
102	1
110	9
111	4
120	5
122	2
130	1
131	2
200	12
201	1
202	1
211	2
221	4
222	1
231	1

Representa un alumno.

Representa dos alumnos.

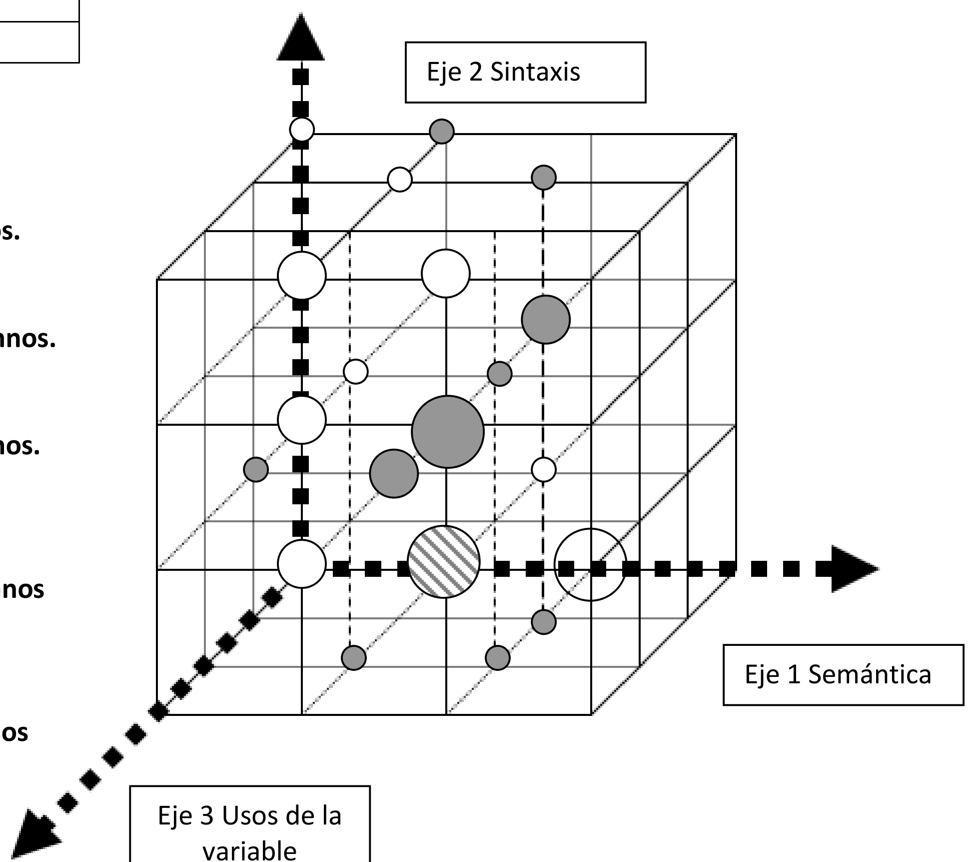
Representa cuatro alumnos.

Representa cinco alumnos.

Representa nueve alumnos

Representa doce alumnos

Representa veintisiete alumnos



Clases de clase

Finalmente, se forman "clases de clases" o "clases compuestas", es decir, las clases cercanas se agrupan bajo una misma clase. Se fijan como polos los ocho vértices del cubo y la "cercanía" a ellos se define operativamente de la siguiente manera:

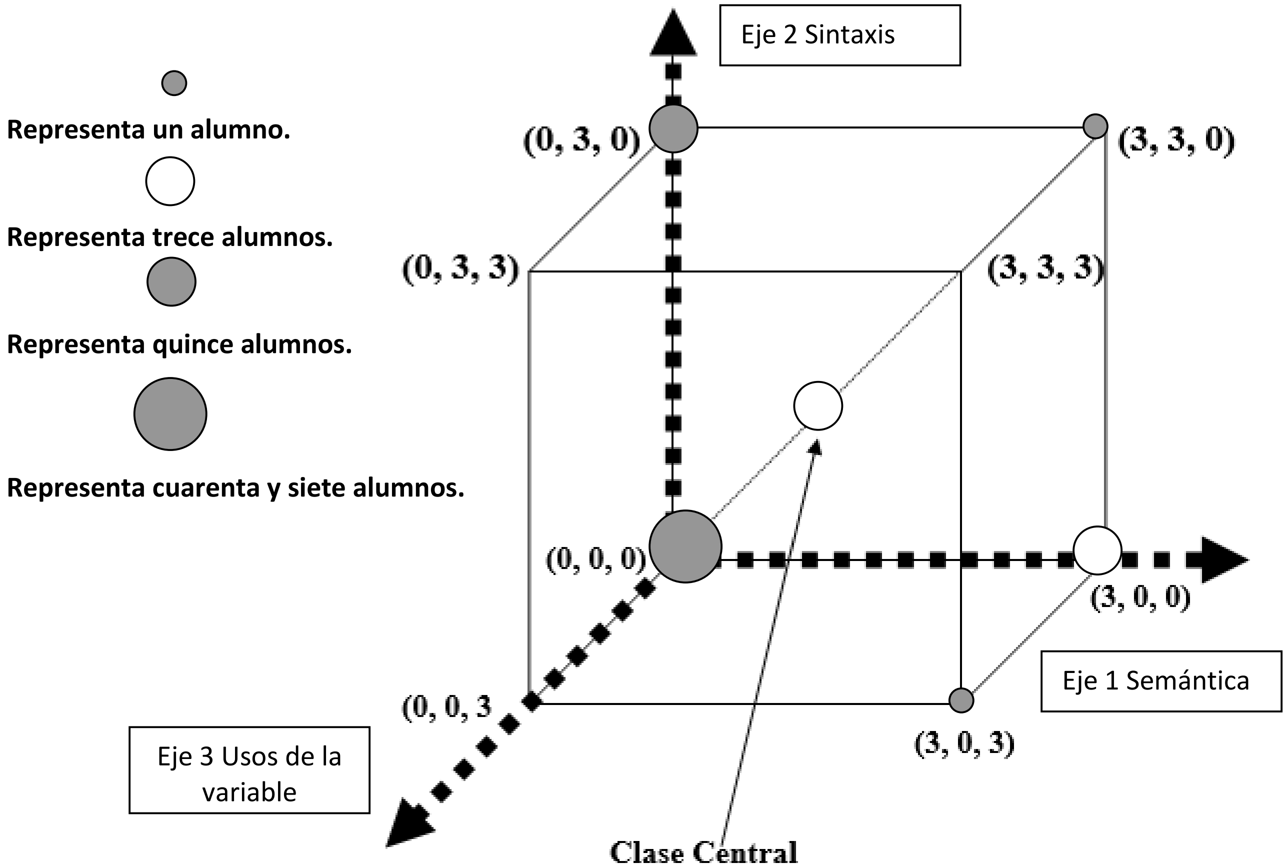
Una terna o punto A = (x_1, x_2, x_3) es cercano a un polo P = (a, b, c) (a, b, c $\in$ {0, 3}) si la distancia AP es tal que: AP $\leq \sqrt{2}$. (Rojano, 1985)

Esto reporta ocho clases extremas, dos de las cuales (0,3,3) y (3,3,3) son clases vacías. Una novena clase, la "Clase Central", se forma con los ocho vértices del cubo, cuya diagonal tiene por extremos los puntos (1, 1, 1) y (2, 2, 2). Así las clases de clases son:

(0, 0, 0) = { (000), (001), (010), (100), (011), (101), (110),}................................47
(3, 0, 0) = { (300), (200), (301), (310), (201), (210), (311), }...............................13
(0, 3, 0) = { (030), (130), (031), (020), (120), (021), 131), }................................15
(0, 0, 3) = { (003), (103), (002), (013), (113), (012), (102), }......................... 1
(3, 3, 0) = { (330), (230), (320), (331), (220), (231), (321), }........................ 1
(0, 3, 3) = { (033), (133), (032), (023), (132), (022), (123), }.............................vacío
(3, 0, 3) = { (303), (203), (313), (302), (213), (312), (202), }...............................1
(3, 3, 3) = { (333), (233), (323), (332), (232), (223), (322), }.............................vacío
Clase Central: { (111), (122), (121), (122), (211), (212), (221), (222) }..............13

Representación tridimensional de "Clases de clase"

Clase de clase	No. de alumnos
000	47
300	13
030	15
003	1
330	1
033	0
303	1
333	0
Central	13



3.4. Observaciones generales con base en el diagnóstico

Surgen varios aspectos que señalar a partir del análisis de los cuestionarios de diagnóstico aplicados a estudiantes de nuevo ingreso al CECyT 4 Lázaro Cárdenas. Nos referiremos a tres que parecen relevantes.

En primer lugar, es preocupante que los resultados sean tan bajos con los cuestionarios diagnósticos, pues muestran un dominio deficiente de conceptos matemáticos, que los estudiantes ya deberían haber aprehendido para aplicarlos en la resolución de problemas de una manera eficaz.

Con los dos instrumentos de diagnóstico se evaluaron alrededor de 30 temas, incluyendo algunos relacionados con cuestiones algebraicas, los cuales se estudian a lo largo de la educación secundaria. Sólo en tres de tales temas se mostró un dominio suficiente.

Aunque los estudiantes provengan de escuelas secundarias distintas, la mayoría exhibió un dominio insuficiente de los contenidos, lo que sugiere que la educación impartida a nivel secundaria en general, o por lo menos en el contexto del que provienen los jóvenes de nuevo ingreso al bachillerato, no cumple con los supuestos objetivos de la educación básica, esto es, preparar a los alumnos para continuar con una educación de bachillerato, ya sea ésta preparación para el trabajo o para continuar con estudios universitarios.

Particularmente, llama la atención que el Programa Sectorial de Educación 2013-2018 para el país establezca que "Un buen sistema educativo debe ser incluyente, favorecer la equidad y nunca un medio para mantener o reproducir privilegios." (Véase Diario oficial de la federación, Capítulo I), así como que entre los seis objetivos que se plantean en ese programa, estén los siguientes concernientes, directa o indirectamente, al bachillerato tecnológico:

> Objetivo 1: Asegurar la calidad de los aprendizajes en la educación básica y la formación integral de todos los grupos de la población.
>
> Objetivo 2: Fortalecer la calidad y pertinencia de la educación media superior, superior y formación para el trabajo, a fin de que contribuyan al desarrollo de México.
>
> …………………….
>
> Objetivo 6: Impulsar la educación científica y tecnológica como elemento indispensable para la transformación de México en una sociedad del conocimiento
>
> (Capítulo I, Diario Oficial de la federación; http://www.dof.gob.mx/nota_detalle_popup.php?codigo=5326569)

Sin embargo, dado que este estudio se realizó con un número muy reducido de estudiantes y con el recurso de dos instrumentos distintos para recopilar datos de sujetos de nuevo ingreso a un bachillerato tecnológico particular (del turno matutino) se tendría que diseñar un estudio a profundidad para dar una conclusión más apegada a la problemática, pues cabe cuestionar el mecanismo y los criterios de selección de los aspirantes al nivel medio superior, en particular al bachillerato tecnológico (COMIPEMS).

Por lo anterior, es probable que resulte difícil para el profesor comenzar con el estudio de contenidos nuevos y más avanzados, si sus estudiantes carecen de las bases apropiadas. De manera que el docente habrá de buscar la forma de solucionar las deficiencias en conocimiento de sus estudiantes, para lograr que adquieran y comprendan los temas planteados en el plan de estudios de nivel medio superior.

La segunda cuestión que parece importante señalar es que los errores cometidos por los estudiantes son de diferente naturaleza; por incomprensión del lenguaje, por realizar erróneamente procesos mecanizados, errores de representación, entre otros. Sin embargo, los errores más frecuentes revelaron la ausencia del contenido matemático en el bagaje conceptual de los jóvenes. En muchos de los casos, los estudiantes simplemente admitieron no saber cómo contestar a los planteamientos o dejaron en blanco el espacio provisto para que resolvieran los problemas.

3.5. Selección del grupo de alumnos para entrevista clínica

La selección de los estudiantes con los perfiles adecuados para llevar a cabo las entrevistas clínicas se logró mediante la clasificación del desempeño mostrado en los instrumentos diagnósticos, lo cual facilitó la detección de perfiles que posean algún atributo que se desee estudiar a detalle, relacionado con alguno de los tres ejes contemplados durante el diagnóstico.

Para la presente investigación se considera de interés e importancia analizar el desempeño de estudiantes pertenecientes a los diferentes estratos, ya que a partir del análisis de cada uno de ellos se está en la posibilidad de obtener observaciones diversas que quizá no surgirían al analizar simplemente a los estudiantes pertenecientes a estratos altos de desempeño o de estratos bajos.

El propósito principal de la investigación es el de clasificar el desempeño mostrado por los estudiantes en la resolución de problemas algebraicos que involucren la utilización de variables en alguno de sus usos, esta es una razón más para observar, en el estudio clínico, estudiantes pertenecientes a los diversos estratos de clasificación.

Por otro lado, el proceso de selección de los estudiantes se complementó con la aplicación de un instrumento de diagnóstico más (Anexo 3), con el cual se obtuvo una observación más detallada del desempeño relacionado específicamente con la resolución de problemas que abordan el trabajo con la variable y sus diversos usos. Este instrumento y las respuestas de todos los estudiantes están descritas detalladamente en la siguiente sección.

Cabe mencionar que los resultados obtenidos en este instrumento concuerdan con los arrojados por el instrumento diagnóstico inicial.

Como resultado del tratamiento cuantitativo de los diagnósticos y el análisis cualitativo de los instrumentos específicos sobre los usos de la variable se seleccionaron siete estudiantes para la realización de las entrevistas clínicas, estos fueron: Abraham (Ab, 0,0,0), Merari (M, 0,0,0), Alejandro (Al, 3,0,0), Donaldo (D, 3,0,0), Samuel (S, 0,3,0), Taamara (T, 0,3,0) y Zyanyia (Z, 0,0,3).

Capítulo 4

Aplicación de instrumentos

Con el objetivo de refinar la selección de los estudiantes más adecuados para la implementación de entrevistas clínicas se diseñó un instrumento diagnóstico extra (ver Anexo 3); sin embargo, este instrumento tuvo una segunda función, la de comenzar a obtener información específica respecto al desempeño de los estudiantes al resolver problemas relacionados con los diversos usos de la variable.

Dicho instrumento tuvo ligeras modificaciones (ver Anexo 3) y se aplicó a un grupo de 5° semestre, con el objetivo de contrastar las contestaciones dadas por estudiantes de primer semestre con las de quinto semestre.

Ambos instrumentos constan de 15 reactivos distribuidos en 6 planteamientos y una pregunta abierta. En seguida se presenta una descripción detallada y un análisis breve de las respuestas de los estudiantes a cada uno de los reactivos.

4.1. Concepciones de los estudiantes

Una de las cosas que hace tan complejo el concepto de variable es su riqueza y diversidad de significados; esto lo tenían muy claro Schoenfeld & Arcavi, quienes en su trabajo *On the meaning of variable* (1988) realizaron algunos estudios con el objetivo de re-diseñar las formas de enseñar y usar el concepto de variable en clases.

Los autores investigaron las diferentes definiciones de variable encontradas en literatura de diversa índole y contextos; en el Capítulo 2 del presente documento (en el modelo formal) se pueden observar algunos ejemplos de una gran variedad de definiciones que encontraron.

Existen usos e interpretaciones para la variable, dependiendo del contexto en el que se utilice el concepto, en algunos casos se observa una tendencia a utilizar lenguaje conjuntista para tratar de definir el concepto; sin embargo, en ocasiones se hace referencia a la cardinalidad de los conjuntos, la cual se puede representar con un número determinado, dejando de lado la esencia del concepto de variable, que es la idea de cambio.

Durante la investigación se aplicó un instrumento que diera cuenta de las dificultades que se presentan al resolver problemas que requieran el uso específico de conceptos relacionados con los diversos usos de la variable, dicho instrumento consta de 6 problemas, en dos de ellos se propicia el uso de la variable como incógnita, en otros dos como número general y en los dos restantes como relación funcional. En total son 15 items a responder.

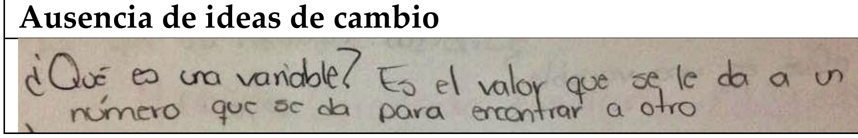
En el mismo instrumento, además de los seis problemas, se incluye la pregunta ¿Qué es una variable? Con el objetivo de que los estudiantes trataran de definir el concepto de variable o de proporcionar las ideas que tuvieran respecto a dicho concepto, las respuestas obtenidas fueron muy diversas.

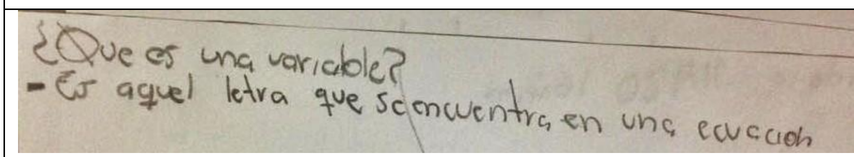
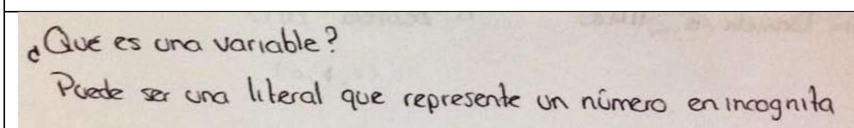
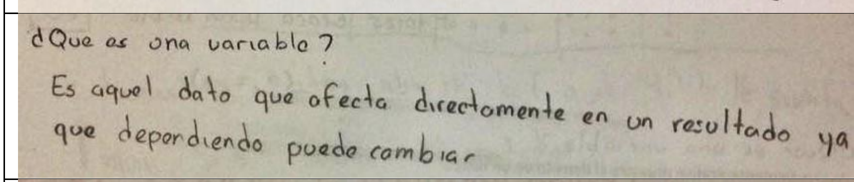
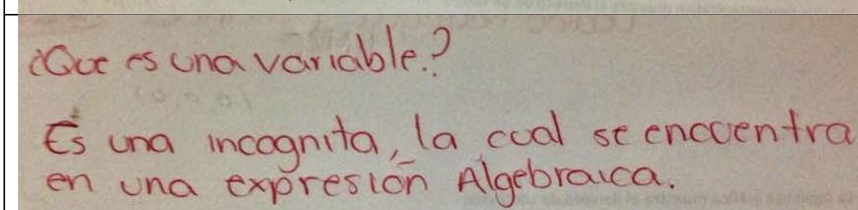
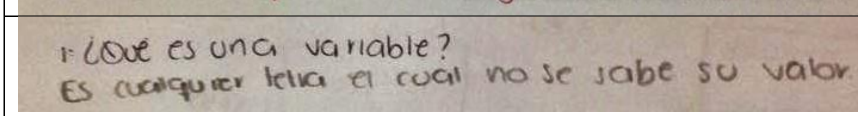
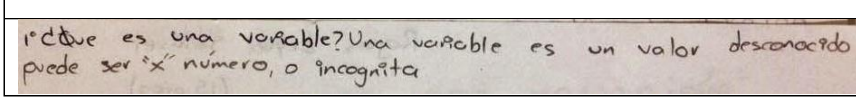
El objetivo es observar las principales características que los estudiantes le asignan al concepto y si las ideas que poseen sobre éste están impregnadas de una perspectiva de la variable como un ente cambiante.

Se les pidió que si no lograban proporcionar una definición exacta, que por lo menos escribieran las ideas que ellos consideraran importantes. La pregunta se planteó a estudiantes de primero y quinto semestres. A continuación se presenta un resumen de las principales ideas encontradas.

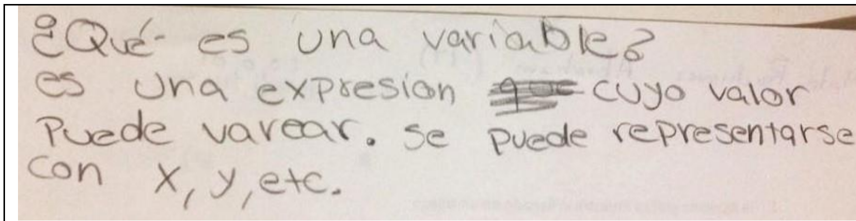
Concepciones de los alumnos del primer semestre

El cuadro siguiente muestra y clasifica algunas respuestas representativas de los estudiantes de primer semestre a la pregunta ¿Qué es una variable?, las respuestas se clasifican con base en la observación de si las contestaciones dadas poseen ideas de cambio y variación o están ausentes de estas.

Definición	Observaciones
Ausencia de ideas de cambio	
 ¿Qué es una variable? Es el valor que se le da a un número que se da para encontrar a otro	El estudiante hace referencias confusas,

	pues menciona que a un número se le da un valor, quizá la respuesta hace referencia a la asignación de un valor a una variable independiente para encontrar el valor de la dependiente correspondiente
 ¿Que es una variable? -Es aquel letra que se encuentra en una ecuacion	El estudiante hace referencia al uso de las literales en ecuaciones, las cuales llevan a la obtención de un valor especifico
 ¿Que es una variable? Puede ser una literal que represente un número en incognita	
 ¿Que es una variable? Es aquel dato que afecta directamente en un resultado ya que dependiendo puede cambiar	
 ¿Que es una variable.? Es una incognita, la cual se encuentra en una expresión Algebraica.	
 1: ¿Qué es una variable? Es cualquier letra el cual no se sabe su valor	En el comentario se encuentra implícito que el estudiante supone que la literal solo puede tomar un valor
 1° ¿Que es una variable? Una variable es un valor desconocido puede ser "x" número, o incognita	

¿Que es una variable? La variable es el valor que se le va a dar a la operación ¿?	
1. ¿Qué es una variable? Los posibles valores de algo.	Restringe el concepto a algunas posibilidades, no da la idea de cambio
1 ¿Que es una varaible? R= Una varaible es un dato que puede contener deferentes cantidades u opciones	
1 ¿Que es una variable? es un elemento o o cualquier numero asignado.	
Una variable es un numero cualquiera, una incognita	Con el uso de la palabra incógnita se da a entender que se observa a la variable como un valor a encontrar
Presencia de ideas de cambio	
1= ¿Que es una variable? R= Es un valor que cambia o Los posibles valores	Hace explicito el hecho de que la variable posee el atributo del cambio
¿Que es una variable? Es un numero que cambia costantemente ya sea lineal o no lineal	
¿Que es una variable? es aquella letra o incognito que esta en una exp. alg. que tiene un valor variable que no se sabe.	Aunque utiliza la palabra incógnita, expresa la posibilidad cambio
1 ¿Que es una Variable? Es una expresion collo valor puede variar o cambiar	



En seguida se muestra un gráfico que representa el porcentaje de estudiantes de primer semestre que expresaron ideas de cambio en su definición de variable, el porcentaje de ausencia y los que prácticamente no pudieron dar ninguna idea clara al respecto.

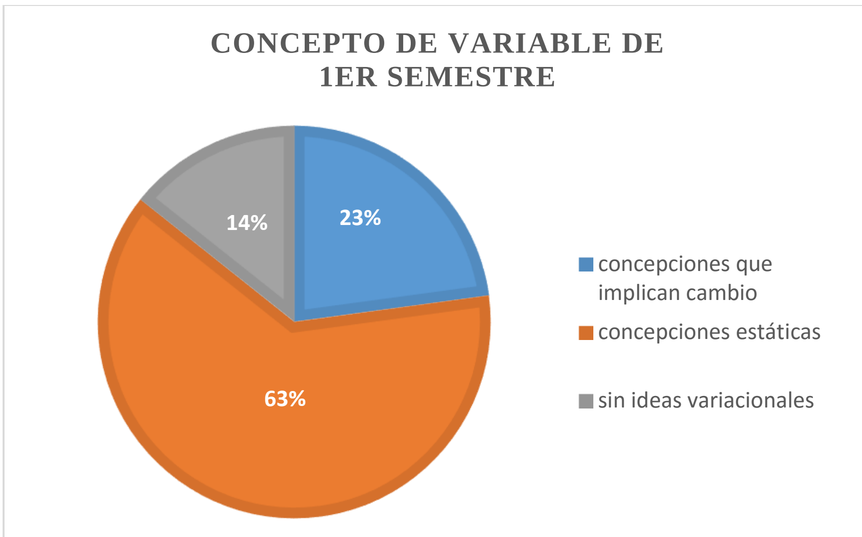


Figura 13. Porcentaje de tipo de concepción 1er. semestre

Como se puede observar la mayoría de los estudiantes poseen una concepción muy reducida del concepto de variable, muchos de ellos utilizan la palabra incógnita para definir la variable, dándole un sentido estático. De igual forma, una manera recurrente de definirla es como un valor desconocido, dejando de lado el atributo de cambio y reduciéndolo a "una" cantidad por conocer.

Aunque fue minoría, algunos estudiantes tuvieron presente el atributo de cambio al dar la definición de variable, la mayoría de ellos daban una definición un tanto confusa, pero al fin y al cabo mencionaban la posibilidad de ser más de un valor el que representa la literal.

Concepciones de estudiantes del quinto semestre

Ahora se muestran los resultados obtenidos por los estudiantes de quinto semestre con respecto a la pregunta ¿Qué es una variable? Se presenta el cuadro donde se caracterizan las principales contestaciones.

Definición	Observaciones
Ausencia de ideas de cambio	
Es una literal regularmente "x"	
Es el valor de un numero, representado por una letra.	Reduce a la variable a un número desconocido
Es una literal regularmente "x" ó "y" a la que se le asigna un valor numerico, o se le busca asignar un valor	
7- La variable es una letra que representa el (los) datos que se desconocen en el problema.	Se centra solo en el uso de la variable como incógnita, como un valor desconocido
es un símbolo que puede ser remplazado o que toma un valor numérico en una ecuación o expresión matemática en general	
Una variable es aquel valor que no conocemos	
Es un numero indeterminado en la ecuacion y es representado por una letra cualsea.	
Toma distintos valores valores numericos dentro de un conjunto de números especificado	El estudiante menciona que puede tomar valores dentro de un conjunto de números específico, esto puede ser cierto en algunos casos
¿Qué es una variable? Son símbolos en los términos algebraicos, una de ellas es la variable independiente	
es la constante la que no se tiene valor	El estudiante incluso utiliza el término constante, lo contrario a

	variable
¿Qué es una variable? Es una incognita en una ecuacion algebraica el cual utilizando despejes se puede resolver	Especifica el uso como incógnita
Presencia de ideas de cambio	
Una variable es un dato que desconocemos, pero sabemos en que rango esta.	Al usar la palabra rango, se sobre entiende que el estudiante comprende el atributo de cambio de la variable.
7.- Es un valor el cual puede ir cambiando positivamente o negativamente segun sea el caso.	
7 Se utiliza para describir un valor que no es fijo	El estudiante expresa implícitamente la posibilidad de que la literal puede adquirir diversos valores
7. ¿Qué es una variable? Es un número o literal que va cambiando o puede cambiar su valor.	
representacion de un simbolo el cual puede adquirir diferentes valores	
7) Una variable es un valor que cambia y por lo tanto sus resultados de la ecuación cambia	

En seguida, el gráfico que representa la presencia de ideas de cambio dentro de las definiciones expresadas por los estudiantes.

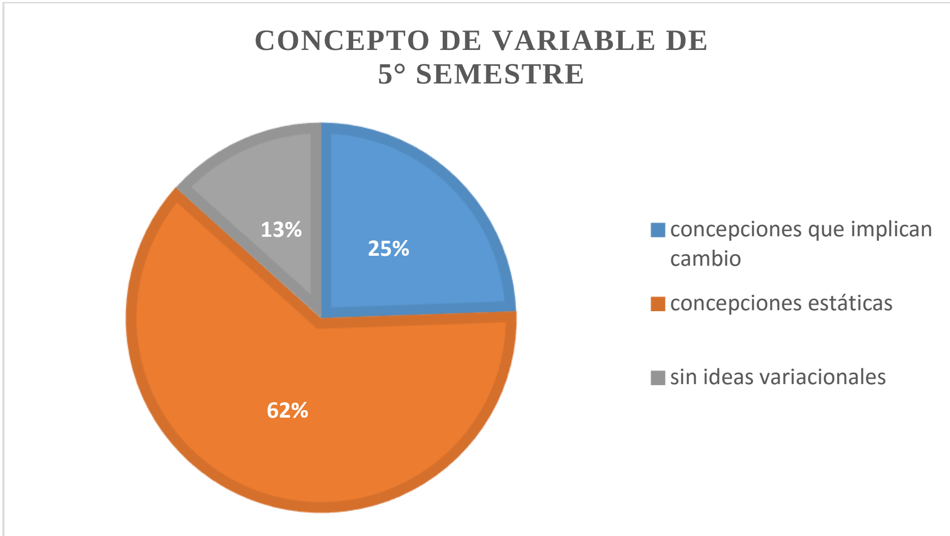


Figura 14. Porcentaje de tipo de concepción de estudiantes del semestre

Como se puede observar en los ejemplos de respuestas de los estudiantes del quinto semestre, las definiciones dadas fueron muy parecidas a las de primero; muchos de ellos utilizaron la palabra incógnita en las definiciones proporcionadas, de igual manera la mayoría de los estudiantes dan definiciones estáticas y sólo un 25% utiliza términos que se relacionan con el atributo de cambio.

Algo notable es que ningún estudiante, ni del primer semestre ni del quinto, se refirió a ésta como un objeto matemático que se puede utilizar de diferentes maneras, la mayoría la definió como una literal que puede representar un valor específico y algunos otros mencionaron que es una letra, cuyo valor puede cambiar; sin embargo, nadie mencionó esa doble manera de uso.

4.2. Análisis de reactivos

Como ya se mencionó, el instrumento aplicado contiene seis problemas en los que se requiere el trabajo con la variable en sus diversos usos (Anexo 3).

A continuación se analizan los resultados generales de los estudiantes del primero y quinto semestres y a su vez se lleva a cabo la clasificación de las respuestas dadas en cada item.

4.2.1. Análisis de reactivos de estudiantes de primer semestre

El instrumento contiene 15 items que los estudiantes debían responder, 6 relacionados con el uso de la variable como relación funcional, 5 relacionados con el uso como número general y 4 relacionados con el uso como incógnita.

Los resultados obtenidos por los estudiantes de primer semestre se representan mediante un gráfico de barras, los datos están agrupados; cabe mencionar que la calificación máxima es de 15 aciertos; sin embargo, ningún estudiante logró tal calificación.

El promedio grupal fue de 6.02 y la desviación estándar de 4.36.

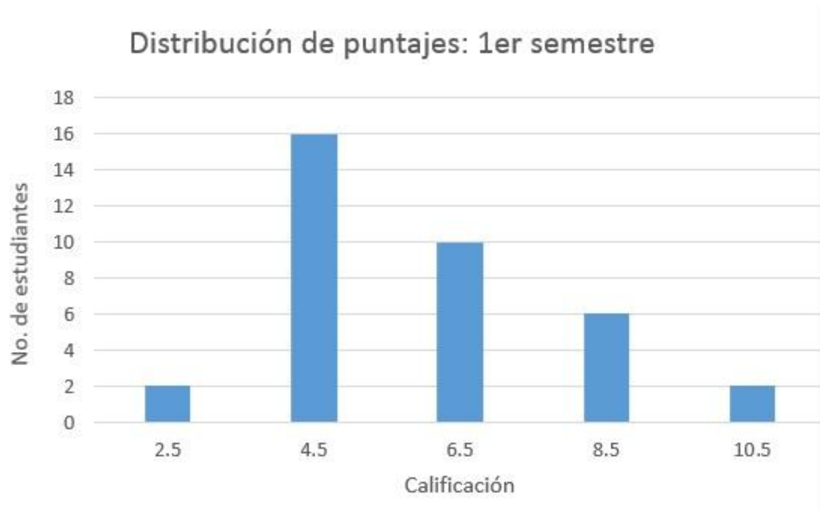


Figura 15. Distribución de puntajes de estudiantes del primer semestre

Ahora se presenta el puntaje obtenido en cada reactivo por la totalidad del grupo, de igual forma, la representación se hace mediante una gráfico de barras, el eje horizontal representa el número de reactivo evaluado, se agrega una pequeña etiqueta a cada uno para identificar el uso que se trabaja en cada reactivo. (RF-relación funcional, NG-número general e I-incógnita)

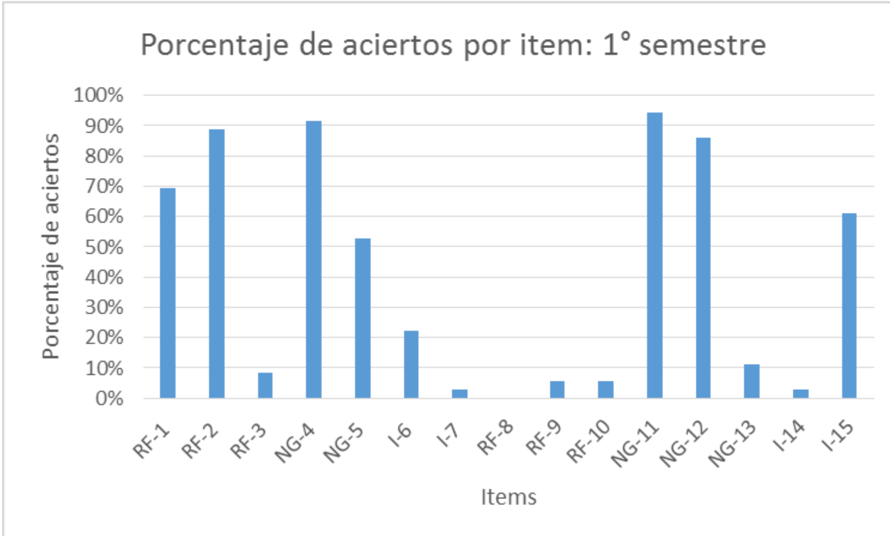


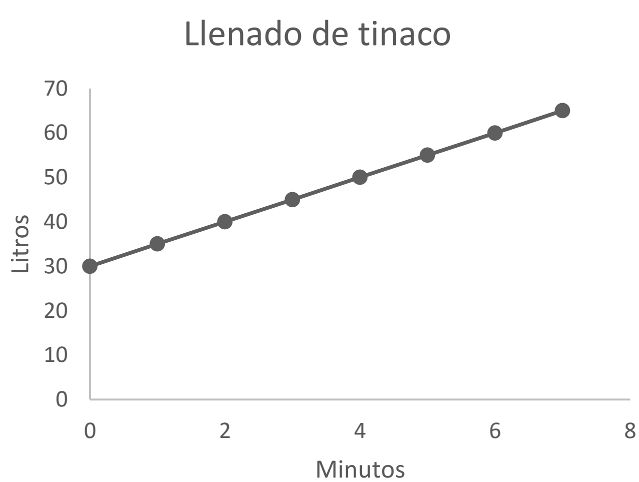
Figura 16. Porcentaje de aciertos por item del grupo del primer Semestre

Descripción de las respuestas por item

En seguida se presenta la clasificación de las respuestas dadas por los estudiantes en cada ítem para luego analizarlas y exponer una serie de observaciones.

Ítem 1 (perteneciente al planteamiento 1):

1. La siguiente gráfica muestra el llenado de un tinaco



a) Describe el gráfico que se te presenta

En la siguiente tabla se muestran las respuestas del primer ítem, clasificadas según el grado de descripción de los estudiantes.

Clasificación	Caracterización	Ejemplos	Frec.	%
1	No se proporciona ningún tipo de descripción	----	3	8.3
2	La descripción se realiza con una sola palabra o concepto	• Gráfica lineal • Ascendente • Continuo • Estadística	10	27.7
3	Se hace una descripción de la situación mencionando las variables involucradas	• Como se llena el tinaco respecto al tiempo	11	30.5
4	Se hace una descripción de las relaciones numéricas presentes en la situación	• Cada dos minutos se llena 10 litros • Por cada minuto aumenta 5 litros • Sube 5*l*/5 min	12	33.3
5	Se hace una descripción de la situación que incluye las variables involucradas y las relaciones numéricas	-----	0	0
		Total	36	100

Los principales errores cometidos se presentan en las respuestas agrupadas en la clasificación 2, los estudiantes tratan de hacer la descripción del grafico de forma muy vaga, utilizando conceptos poco precisos como lineal, ascendente, continuo, subiendo, etc.

Una observación más es que ningún estudiante mencionó que el tinaco ya contenía 30 litros de agua, lo cual afecta el comportamiento y ocasiona que la situación no se pueda considerar como de proporcionalidad.

Ningún estudiante proporcionó una descripción completa que contemple las relaciones numéricas y la descripción de las variables involucradas en el contexto del planteamiento.

Ítem 2 (perteneciente al planteamiento 1):

b) Realiza la representación tabular de dicha situación

A continuación se muestran algunos ejemplos de las diferentes representaciones tabulares que realizaron los estudiantes de primer semestre.

Min.	Litros
0	30
1	35
2	40
3	45
4	50
5	55
6	60
7	65

x	Y
0	30
1	35
2	40
3	45
4	50
5	55
6	60
7	65

litros	min
0	
10	
20	
30	0
40	2
50	4
60	6
70	8

litros	minutos
x	y
0	30
2	40
4	50
6	60
8	70

litros	Min.
30	0
35	1
40	2
45	3
50	4
55	5
60	6

litros	Min.
30	0
40	2
50	4
60	6

Como se observa, las representaciones de los estudiantes son variadas; logran presentar la información contenida en el gráfico, la principal diferencia encontrada en las tablas es la asignación del papel de variable independiente o dependiente a los litros o a los minutos indiscriminadamente. En total se diseñaron 11 tablas distintas, diferenciándose en el orden de las etiquetas de las columnas, el número en que inician las columnas y el incremento entre celdas.

Cabe mencionar que este es uno de los ítems que obtuvo un mayor porcentaje de respuestas correctas, llegando casi al 90%.

Ítem 3 (perteneciente al planteamiento 1):

c) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa esa situación?

La respuesta que se esperaba dieran los estudiantes en este ítem era la relación funcional $y = 5x + 30$, a continuación se presenta un concentrado de las diversas respuestas dadas.

Tipo de respuesta	Ejemplos	Frecuencia	%
Sin contestación	-----	15	41.6
Ecuación	• $x * 10L = ym$ • $2x = 30 + 5$ • $8x + 6 = 70$ • $30 + 2x = 40$ • $5 + 30 = x\ min.$ • $30 + x = 35$	6	16.6
Expresión general	• $5x + 30$ • $n + 5$ • $L + 30$ • $10 * 1\ min$ • $2a + 10$ • x	8	22.2
Relación funcional	• $x + 2 = y + 5$ • $x = 1m + 5L$ • $x(5y) = x$ • $x = 2 + y$ • $n + 5 = x$ • $tinaco = +30L + 2m(10l) = 65L$ • $t + 30L + 2m(10l) = 70L$	7	19.4
	Total	36	100

Este fue uno de los reactivos que tuvo un porcentaje alto de ausencia de respuestas, lo cual demuestra la dificultad que se presenta al obtener una expresión algebraica, a partir de un problema planteado en lenguaje común.

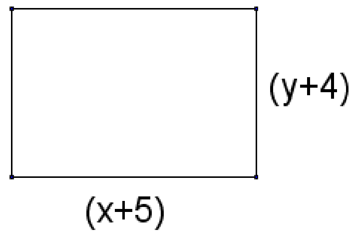
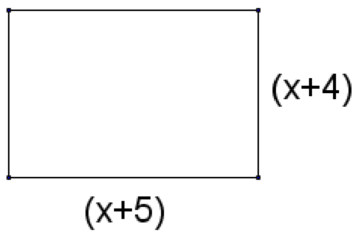
Las respuestas dadas fueron sumamente variadas; se esperaba que los estudiantes plantearan una relación funcional, en la cual expresaran la relación existente entre la cantidad de agua contenida en el tanque y el tiempo transcurrido; sin embargo, se obtuvieron expresiones de todo tipo, incluso hubo estudiantes que combinaron lenguaje común y lenguaje algebraico en una misma expresión.

Ítem 4 (perteneciente al planteamiento 2):

a) Construye un rectángulo en el que sus lados midan $(x + 5)$ y $(y + 4)$

Las siguientes representaciones son las dadas por lo estudiantes

Representación	Frecuencia	%
Sin representación	3	8.3

	30	83.3
	3	8.3
Total	36	100

La mayoría de los estudiantes representaron gráficamente de forma correcta el planteamiento, la única confusión que se presentó fue la de ignorar que se involucraban dos literales distintas para los lados del rectángulo.

Item 5 (perteneciente al planteamiento 2):

b) ¿Cuánto mide su área?

En este reactivo se pide que obtengan el área del rectángulo representado en el ítem anterior, a continuación las respuestas dadas.

Tipo de respuestas	Ejemplos	Frecuencia	%
Sin respuesta	---	4	11.1
Numérica	20	1	2.7
Número general	• $xy + 4x + 5y + 20$	18	50.0
	• $(x+5)(x+5)$ $\quad (y+4)(y+4)$ $x^2 + 5x + 5x + 25$ $\quad y^2 + 4y + 4y + 16$ $10x + x^2 + 25 + y^2 + 8y + 16$ $x^2y^2 + 18xy + 41$		
	• $x + 5 + x + 5 + y + 4 + y + 4 =$ $10x + 8x$		
	• $(x+5)(y+4)$		
	• $x + 9 + y$		
	• $(x+5)(y+4) = xy + 4x + 5y + 20 =$ $xy + 9xy + 20$		
	• $(x+4)(x+5) = x^2 + 5x + 4x + 20 =$ $x^2 + 9x + 20$		

Relación funcional	• $A = xy + 4x + 5y + 20$ $A = 10xy + 20$ • $R = x^2 10 \quad y^2 8$ $R = 18x^2y^2$ • $A = b * h$ $A = (x+5)(y+4)$ $A = xy + 4x + 5y + 20$ • $A = 20xy$ • $R = xy + 5xy + 4x + 20$	12	33.3
Ecuación	• $(x+5)(y+4) = xy + 4x + 5y = 20$	1	2.7
	Total	36	100

En este ítem se pide la obtención del área del rectángulo mencionado, la cual se esperaba fuera enunciada mediante una expresión algebraica, como se puede observar, se obtuvo una gama de respuestas muy variada. Algo notable en las respuestas dadas por los estudiantes son las dificultades de sintaxis presentadas.

Item 6 (perteneciente al planteamiento 3):

El valor del área de un cuadrado más 16 es igual a 2 veces el valor de su perímetro. Ramón propuso la siguiente ecuación para resolver el problema $4x + 16 = 2x$ ¿Te parece correcto lo que planteó?

a) Argumenta tu respuesta construyendo tu propia expresión.

En la siguiente tabla se muestran las expresiones algebraicas construidas por los estudiantes para dar respuesta al planteamiento.

Tipo de respuesta	Ejemplos	Frecuencia	%
Sin respuesta	----	9	25.0
Ecuación	• $4x + 16 = x^{16}$ • $x^2 + 16 = 2(4x)$ • $l^2 + 16 = 2(4l)$ • $(a)^2 + 16 = 2(a)$ • $4x + 16 = 2x$ • $(x)(x) + 16 = 2(4x)$ • $x^2 + 16 = 2x$ • $x + 16 = 2x$	16	44.4
Número general	• $x^2 + 16 + 20$	3	8.3
Relación funcional	• $A + 16 = x^2$ • $x^2 + 16 = 2y$ • $4x + 16 = 2y$ • $x + 16 = 2b$	8	22.2

	• $a + 16 = 2p$ • $a + 16 = 2x$		
	Total	36	100

Item 7 (correspondiente al planteamiento 3):

En este caso el ítem siete se tomó como la resolución de la ecuación planteada por los estudiantes, como no se pide formalmente en el planteamiento la mayoría de los estudiantes no lo realizaron; sin embargo, a continuación se muestran algunas de las respuestas de los estudiantes que lo hicieron.

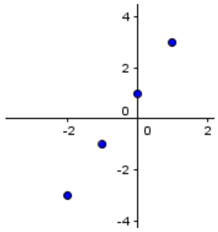
Proceso	Observaciones
$x^2 + 16 = 2x$ $x^2 - 2x + 16$	
$2x - 4x = 16$ $2x = 16$ $x = \frac{16}{2}$ $x = 8$	
$x^2 + 16 = 2(4x)$ $x^2 + 16 = 8x$ $x^2 - 8x = -16$ $x^2 - x = -\frac{16}{-18}$ $x^2 - x = 2$	
$x^2 + 16 = 2(4x)$ $4^2 + 16 = 2(16)$ $32 = 32$ $x = 4$	
$4x + 16 = 2x$ $2x - 4x = \frac{16}{2}$ $x = 8$	

Item 8 y 9 (pertenecientes al planteamiento 4):

a) Dada la ecuación de la recta $y = 2x + 1$ ¿Están los puntos (3,7) y (2,8) en la recta?

Se consideraron dos ítems separados, ya que el punto (3,7) sí está en la recta y el punto (2,8) no está. Las siguientes fueron las respuestas obtenidas.

Respuesta	Frecuencia	%
Sin respuesta	34	94.4

x | y -2 | -3 -1 | -1 0 | 1 1 | 3 2 | 5  No están los puntos (3,7) y (2,8)	1	2.7
No están los puntos (3,7) y (2,8)	1	2.7
Total	36	100

Ítem 10 (perteneciente al planteamiento 4):

b) El valor de *y* de un punto de esta recta es $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es el valor correspondiente de *x*?

Respuesta	Frecuencia	%
Sin respuesta	27	75
$x = 1$	2	5.5
$x = \frac{1}{4}$	1	2.7
$x = 3$	1	2.7
$y - 1 = 2x$ $\frac{y-1}{2} = x$ $x = 2$	1	2.7
$y = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} = 2x + 1$ $1 = 2x + \frac{1}{2}$ $x = -1$	1	2.7
$2x + 1 = .5 - 1$ $2x = .5$ $x = \frac{.5}{2}$ $x = .25$	1	2.7
$y = 2x + 1$ $\frac{1}{2} = 2x + 1$ $\frac{1}{2} - 1 = 2x$ $-\frac{1}{2} = 2x$ $-\frac{\frac{1}{2}}{2} = x$ $x = -\frac{1}{4}$	1	2.7
x | y -2 | 5 -1 | 3	1	2.7

0 | 1 1 | 3 2 | 5 $x = 3$		
Total	36	100

Ítems 11 (perteneciente al planteamiento 5):

1. Observa las siguientes figuras

Número de puntos	**1**	**4**	**9**

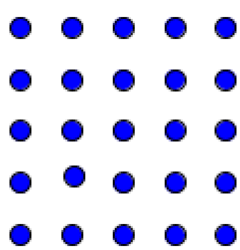
a) ¿Cuántos puntos habrá en la figura 4?

A continuación se presentan las respuestas dadas por los estudiantes

Respuesta	Frecuencia	%
16	34	94.4
7	1	2.7
14	1	2.7
Total	36	100

Ítems 12 (perteneciente al planteamiento 5):

b) Dibuje la figura 5 y dé el número total de puntos

Respuesta	Frecuencia	%
Sin respuesta	1	2.7
 25 puntos	32	88.8
20	1	2.7
32	1	2.7
36	1	2.7
Total	36	100

Ítem 13 (perteneciente al planteamiento 5):

a) Imagina que puedes seguir dibujando figuras hasta la figura m ¿Cuántos puntos en total tendrá esa figura?

Tipo de respuesta	Respuesta	Frecuencia de respuesta	Frecuencia de tipo de respuesta	%
Sin respuesta	-----	10	10	27.7
Lenguaje común	Infinito	5	9	25.0
	El cuadrado de m	1		
	La figura que quieras	1		
	m= cualquier número	1		
	No puede existir	1		
Numérica	36	4	12	33.3
	169	2		
	36 o 49	1		
	56	1		
	225	1		
	62	1		
	49	2		
Algebraica	m^2	4	5	13.8
	x^2	1		
		Total	36	100

Ítems 14 y 15 (pertenecientes al planteamiento 6):

1. Inventa y resuelve un problema con base en la siguiente ecuación $2x + 180 = 5x$

En la siguiente matriz se muestran los resultados obtenidos por los estudiantes de primer semestre, en la cual se relacionan la resolución de la ecuación dada y el planteamiento de una situación problemática.

	Ecuación resuelta correcta	Ecuación resuelta incorrecta	Sin resolución de ecuación	Total
Problema bien diseñado	1	0	0	1
Problemas mal diseñado	5	2	3	10
Sin planteamiento de problema	9	6	10	25
Total	15	8	13	36

A continuación se muestran los procesos de resolución que llevaron a cabo los estudiantes para resolver la ecuación planteada

Proceso de resolución	Frecuencia	%	Observaciones
Sin propuesta	13	36.1	
$2x + 180 = 5x$ $180 = 5x - 2x$ $180 = 3x$ $x = \frac{180}{3}$ $x = 60$	13	36.1	
$2x + 180 = 5x$ $2x - 5x + 180 = 0$ $-3x = -180$ $x = \frac{-180}{-3}$ $x = 60$	2	5.5	
$2x + 180 = 5x$ $2x - 5x = 180$ $-3x = 180$ $x = \frac{180}{-3x}$	2	5.5	
$2x + 180 = 5x$ $180 = 7x$ $\frac{180}{7} = x$ $x = 25.71$	1	2.7	
$2x + 180 = 5x$ $2x - 5x = -180$ $-3x + 180 = 0$ $x = \frac{180}{-3}$ $x = -60$	2	5.5	
$2x + 180 = 5x$ $2 + 180 = \frac{5x}{x}$ $2 + 180 = 5$ $182 = 5$	1	2.7	
$2\left(\frac{1}{4}x\right) + 180 = 5(x)$ $2(10) + 180 = 5(40)$ $20 + 180 = 200$ $200 = 200$ $\frac{1}{4}x = 10$	1	2.7	

$2x + 180 = 5x$ $2x - 5x = -180$ $-3x = 180$ $x = \frac{-180}{-3}$ $x = -60$	1	2.7	
Total	36	100	

4.2.2. Análisis de reactivos de quinto semestre

En seguida se muestran los resultados obtenidos por los estudiantes de quinto semestre; de igual forma, los datos están agrupados y se representan mediante un gráfico de barras.

En este caso el promedio grupal fue de 7.3 con una desviación estándar de 6.3

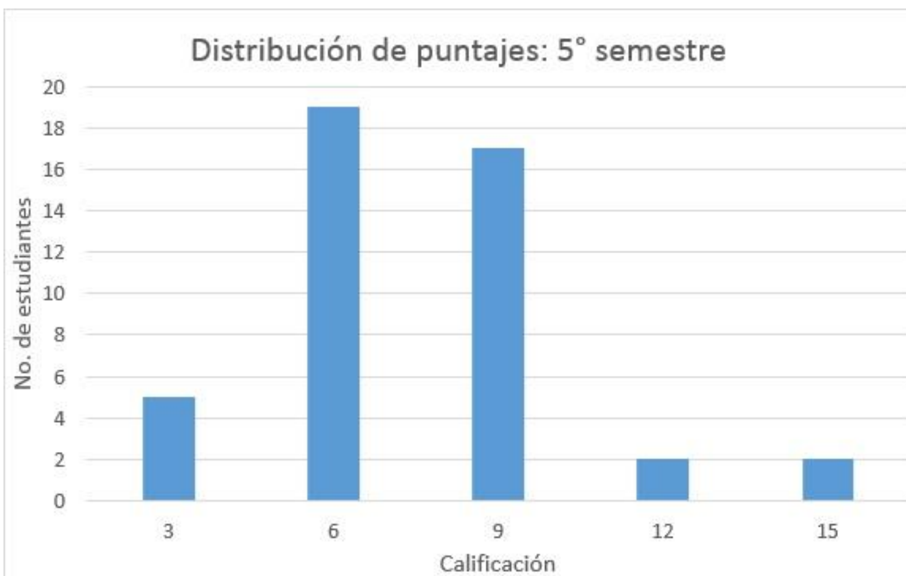


Figura 17. Distribución de puntajes 5° semestre

Ahora se presenta el puntaje obtenido en cada uno de los ítems, asimismo se presentan las mismas etiquetas en cada uno de los ítems indicando a que categoría corresponde.

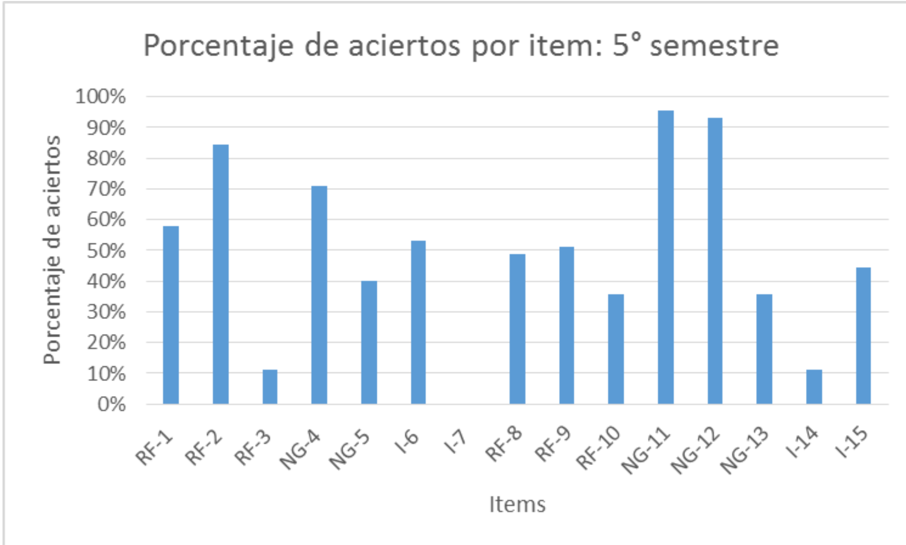


Figura 18. Porcentaje de aciertos por ítem del grupo de quinto semestre

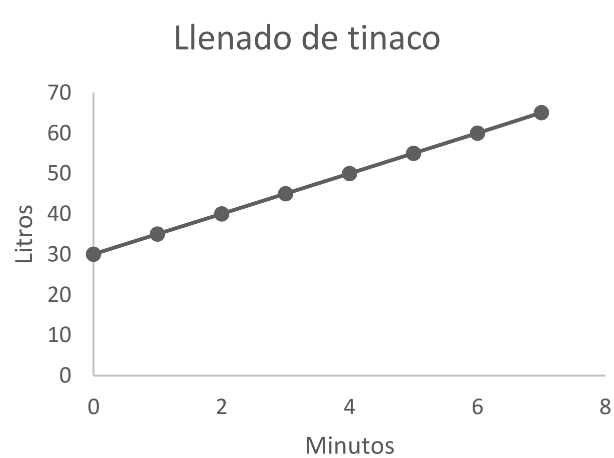
Descripción de las respuestas por ítem

Al igual que en el apartado anterior, a continuación se describen y clasifican las respuestas de los estudiantes en cada ítem.

Ítem 1 (perteneciente al planteamiento 1):

El primer ítem es exactamente el mismo que el planteado a los estudiantes de primer semestre, donde se pide que describan un gráfico que representa el llenado de un tinaco. La indicación es la siguiente:

d) Describe el gráfico que se te presenta



En la siguiente tabla se muestran las respuestas del primer ítem, clasificadas según el grado de descripción de los estudiantes.

Clasif.	Caracterización	Ejemplos	Frec.	%
1	No se proporciona ningún tipo de descripción	----	10	22.2
2	La descripción se realiza con una sola palabra o concepto	• Gráfica lineal • Constante • Crecimiento • Proporcional • Ascendente • Continuo • Uniforme • Decantación	13	28.8
3	Se hace una descripción de la situación mencionando las variables involucradas	• Como se llena el tinaco respecto al tiempo	9	20.0
4	Se hace una descripción de las relaciones numéricas presentes en la situación	• Cada dos minutos se llena 10 litros • Por cada minuto aumenta 5 litros • 10 *l* / 2 min, inicia en 30 *l*	11	24.4
5	Se hace una descripción de la situación que incluye las variables involucradas y las relaciones numéricas	• El llenado es constante, cada dos minutos aumenta en 10 litros e inicia en 30 litros.	2	4.4
		Total	45	100

En las respuestas dadas por los estudiantes de quinto semestre se observa la utilización de una mayor cantidad de conceptos que los utilizados por los estudiantes de primero; sin embargo, esto puede ser causa de que el porcentaje de respuestas correctas sea menor, ya que tratan de relacionar conceptos que se relacionan con la situación planteada, pero que no corresponden con ésta. El ejemplo más claro es la utilización de la palabra *decantación*.

Sin embargo, también se observa que hay estudiantes que logran realizar una descripción más precisa de la situación representada con el gráfico.

Ítem 2 (perteneciente al planteamiento 1):

a) Realiza la representación tabular de dicha situación

En seguida se presentan algunas de las representaciones tabulares realizadas por los estudiantes de quinto semestre de la situación planteada.

Min.	Litros
0	30
1	35
2	40
3	45
4	50
5	55
6	60
7	65

x	y
0	30
1	35
2	40
3	45
4	50
5	55
6	60
7	65

y	x
0	30
1	35
2	40
3	45
4	50
5	55
6	60
7	65

x	litros
0	x(35)
1	x(20)
2	x(15)
3	x(17.5)
4	x(11)
5	x(10)
6	x(4.5)
7	65

y	x
litros	Min.
30	0
35	1
40	2
45	3
50	4
55	5
60	6
65	7

litros	Min.
30	0
38	1
40	2
45	3
50	4
52	5
58	6
60	7

Al igual que el caso de los estudiantes de primer semestre, éste es uno de los reactivos con mayor porcentaje de respuestas correctas; no obstante, algunos estudiantes no lograron la representación adecuada de la situación. Algunos de los principales errores fueron generados por la confusión entre las variables dependiente e independiente. Incluso hubo estudiantes que no lograron obtener la información correcta a partir de la representación gráfica.

Ítem 3 (perteneciente al planteamiento 1):

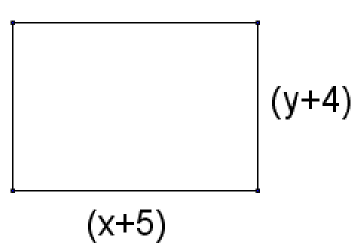
a) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa esa situación?

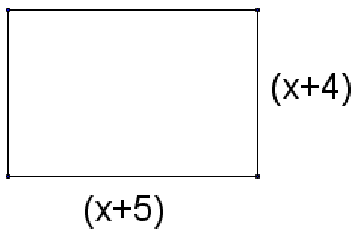
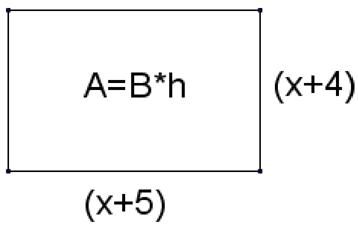
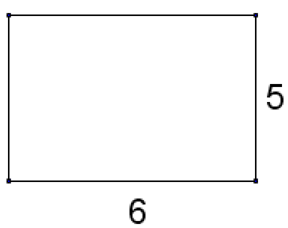
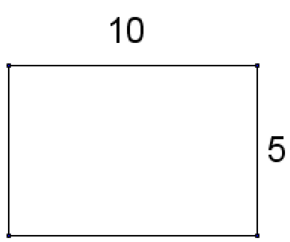
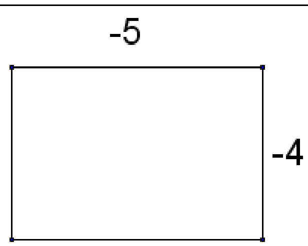
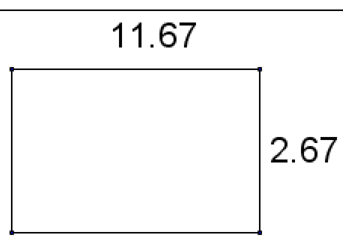
Tipo de respuesta	Ejemplos	Frecuencia	%
Sin contestación	-----	23	51.1
Ecuación	• $5(x) + 30 = 0$	1	2.2
Expresión general	• $x + 30$ • $x(x + 1)$ • $30 + (x(5))$ • $(x + y)$ • $(x + 30)(y + 7)$ • $x + 5$ • $x + 8$ • $30 + x(5)$ • $2x$	10	22.2
Relación funcional	• $m = l + 5$ • $y = x + 5$ • $1x = 5y$ • $2x = y + 10$ • $Litros = (5 * x) + 30$ • $L = n + 5$ • $f(x) = x$ • $NL + N = N + L$ • $1 + x = 5 + y$ • $L = m + (l + 5)$	11	24.4
	Total	45	100

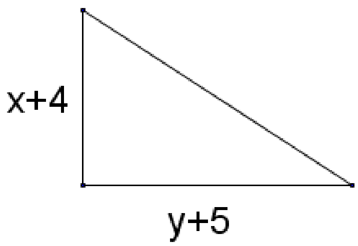
Ítem 4 (perteneciente al planteamiento 2):

a) Construye un rectángulo en el que sus lados midan $(x + 5)$ y $(y + 4)$

Las siguientes representaciones son las dadas por lo estudiantes

Representación	Frecuencia	%
Sin representación	7	15.5
	30	66.6

	2	4.4
	1	2.2
	1	2.2
	1	2.2
	1	2.2
	1	2.2

	1	2.2
Total	45	100

Item 5 (perteneciente al planteamiento 2):

a) ¿Cuánto mide su área?

En este reactivo se pide que obtengan el área del rectángulo representado en el ítem anterior, a continuación las respuestas dadas.

Tipo de respuestas	Ejemplos	Frecuencia	%
Sin respuesta	----	5	11.1
Numérica	• $xy + 4x + 5y + 20$ $yx + 9xy + 20 = 9 + 20 = 29$	9	20
	• $(x + 5)$ $\quad$ $(y + 4)$ $x + 5 = 0$ $\quad$ $y + 4 = 0$ $x = 5$ $\quad$ $y = 4$ $= x * y = (5) * (4) = 20$		
	• $A = (2 + 5)(2 + 4) = (7)(6) = 42cm^2$		
	• $20\ m^2$		
	• $A = 169$		
	• $a = 30$		
Número general	• $xy + 4x + 5y + 20$	12	26.6
	• $(x + 4)(x + 5)$ $x^2 + 5x + 4x + 20$ $x^2 + 9x + 20$		
	• $(x + 5)(y + 4) = xy + 4x + 5y + 9 =$ $xy + 9xy + 9$		
Relación funcional	• $a = (x + 5)(y + 4)$ $a = xy + 5y + 4x + 20$	13	28.8
	• $A = (x + 5)(y + 4) = 4x + 5y + 20$		
	• $A = b * h$ $A = (x + 5)(y + 4)$ $A = xy + 4x + 5y + 20$		
	• $A = (x + 5)(y + 4) = xy + 20$		
Ecuación	-----	0	0
Combinaciones	• $(x + 5)(x + 4) = (5x)(4y) = 20x$ $x = 20$	6	13.3

	• $A = (x+5)(y+4) = xy + 4x + 5y + 20 = 0$ $xy + 9xy + 20 = 0$ $10xy + 20 = 0$ $10xy = -20$ $xy = -\frac{20}{10}$ $xy = 2$		
	• $x+5,\ y+4 \qquad 2.67 + y + 9 = 0$ $x + y + 9 = 0 \qquad 2.67 + y = 9$ $x = 2.67 \qquad y = 11.67$		
	• $A = \frac{b*h}{2} = \frac{(x+5)(y+4)}{2} = \frac{xy+5y+4x+20}{2} = \frac{1}{2}xy + 2.5y + 2x + 10$ $\frac{1}{2}xy + 2.5y + 2x + 10 = 0$ $\frac{1}{2}y + 2.5y = \frac{-2x-10}{\frac{1}{2}x}$ $3y = -1 - \frac{5}{x}$		
	• $A = (x+5)(y+4) = 15$		
	• $A = b * h = 7 * 6$		
	Total	45	100

Item 6 (perteneciente al planteamiento 3):

El valor del área de un cuadrado más 16 es igual a 2 veces el valor de su perímetro.

a) Representa algebraicamente el enunciado.

En la siguiente tabla se muestran las expresiones construidas por los estudiantes para dar respuesta al planteamiento.

Tipo de respuesta	Ejemplos	Frecuencia	%
Sin respuesta	----	2	4.4
Ecuación	• $x^2 + 16 = 2x$ • $L^2 + 16 = 8L$ • $16 = 2x$ • $x + 16 = 2x$ • $x + 16 = 2\sqrt{x}$ • $x^2 + 16 = 8x$ • $16 + 16 = 2p$ • $x + 16 = 2(4x)$ • $x + 16 = 2$	13	28.8
Número general	• $X + 16 + 2(X + 16)$	1	2.2
Relación funcional	• $x + 16 = 2y$ • $a + 16 = 2p$	29	64.4

	• $\frac{x+y}{2} = 2y$ • $x + 16 = 2y + x$ • $A = x + 16 = 2y$ • $C + 16 = 2P$ • $(x + 16) = 2p$ • $y + 16 = 2(4x)$ • $a + 16 = 2x$		
	Total	45	100

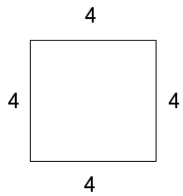
Item 7 (perteneciente al planteamiento 3):

b) ¿cuánto mide el lado del cuadrado

En este caso, el ítem siete corresponde a la resolución de la expresión algebraica obtenida a partir del planteamiento, con el objetivo de dar la medida del lado del cuadrado involucrado. En seguida se presentan las diversas estrategias de resolución que algunos de los estudiantes de quinto semestre exhibieron.

Procedimiento	Observaciones
$y + 16 = 2x$ $16 = 2x - y$ $14x = y$ $14 = y$	
$x + 16 = 2y$ $x - 2y + 16 = 0$ $x_1 = 4$ $4 - 2y + 16 = 0$ $20 - 2y = 0$ $20 = 2y$ $\frac{20}{2} = y$ $y = 10$	
$a = 40 + 16 = 56$ $a = 56$ $p = \frac{56}{2} = 28$	
$x^2 + 16 = 2x$ $x^2 + 16 - 2x = 0$ $x^2 - 2x + 16 = 0$ $x_1 = -2.935$ $x_2 = -4.935$	
$a + 16 = 2x$ $a + 16 - 2x = 0$	

$x^2 + 16 - 2x = 0$ $x^2 - 2x + 16 = 0$	
$A = 4 * 4 = 16 + 16 = 32$ $P = 4 + 4 + 4 + 4 = 16 * 2 = 32$	
$x + 16 = 2x$ $16 = x$	
$x + 16 + 2(x + 16)$ $2x + x + 32$ $L = 2x^2 + 32$	
$16 + 16 = 2p = \frac{32}{2} = 16$ $L = 4$	
$C + 16 = 2P$ $CP = (16)(2) = 32$	
$8L = L^2 + 16$ $L^2 - 8L + 16 = 0$ $L^2 - 8L = -16$ $L^2 - L = -\frac{16}{-8}$ $L^2 - L = 2$ $L^2 = 2 + 6$	
$x + 16 = 2p$ $x + 16 - 2p = 0$ $x - 2p + 16 = 0$ $x - 2p = -16$ $x - p = -\frac{16}{-2}$ $x - p = -8$	
$2x = 16$ $x = 8$	
El lado mide 4 $A = L * L = 4 * 4 = 16$ $16 + 16 = 32$	
$y + 16 = 2(4x)$ $y = 16$	
$x + 16 + 2(x + 16) = 0$ $x = 2x + x + 32$ $= 2x^2 + 32$	
$A + 16 = 2(p)$ $16 + 16 = 32\, u^2$ $2(16) = 32\, u^2$ $A = 4 * 4 = 16\, u^2$	
$L * L + 16 = 2(L4) = L^2 + 16 = 2(L4)$ $\frac{L^2+16}{2(4)} = L = \sqrt{\frac{16}{8}} = 1.41$	

 $A + 16 = 2p$ $16 + 16 = 2(16)$ $32 = 32$	
R=9	Respuesta sin argumentación
R=2.25	Respuesta sin argumentación
R=4	Respuesta sin argumentación

Ítem 8 y 9 (perteneciente al planteamiento 4):

a) Considera la expresión $y = -x + 5$. Si los valores de x varían entre -4 y 5 ¿Cuándo alcanza y su valor máximo? ¿Cuándo alcanza y su valor mínimo?

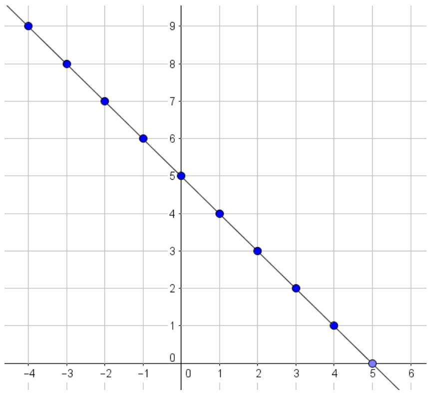
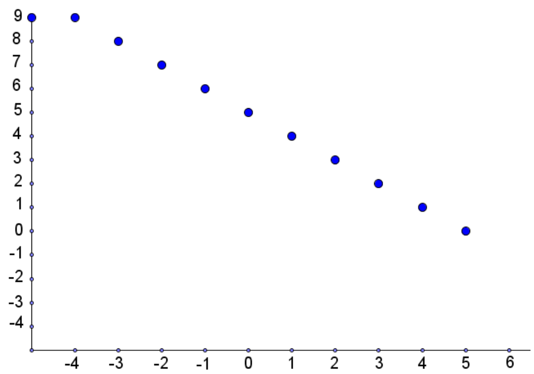
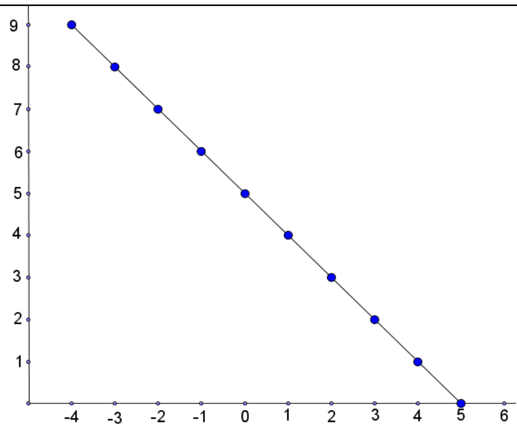
Respuesta	Frecuencia	%
Sin respuesta	6	13.3
Max $x = -4, y = 9$ Min $x = 5, y = 0$	5	11.1
Max $x = 5$ Min $x = -4$	1	2.2
$y = -4 + 5 = -1$ (valor mínimo) $y = 5 + 5 = 10$ (valor máximo)	1	2.2
Cuando "-x" tiene un valor de 5, cuando "-x" tiene valor de -4	1	2.2
Cuando x=-4 alcanza el valor máximo, cuando x=5 alcanza el valor mínimo	5	11.1
$y = -x + 5$ $y = -(-4) + 5$ $y = -(5) + 5$ $Max\ y = 9$ $Min\ y = 0$	7	15.5
Máximo = 10 Mínimo = 1	2	4.4
$y = -x + 5$ $y = -(-4) + 5$ $y = -(-5) + 5$ $y = 9$ $y = 10$	1	2.2
$y = 5 + 5$ $y = -4 + 5$ $y = 10$ $y = 4$	1	2.2
Max $-5 + 5 = 0$ Min $-4 + 5 = 1$	1	2.2
V max = 9 V min = 0	2	4.4
Max 4 cuando vale -4 Min7 cuando vale 15	1	2.2

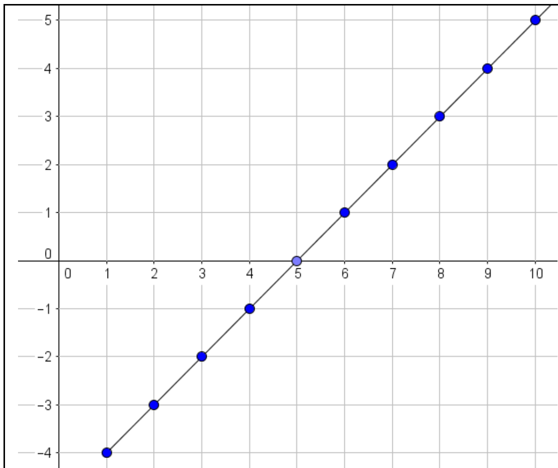
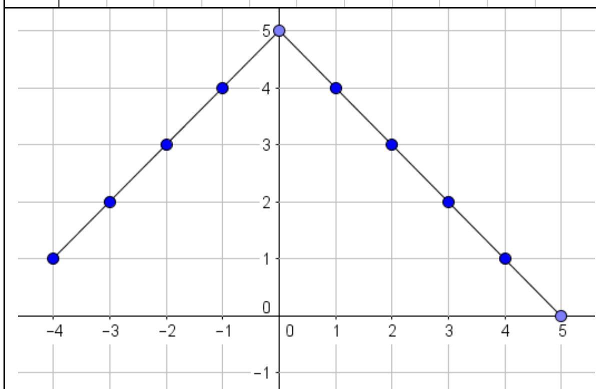
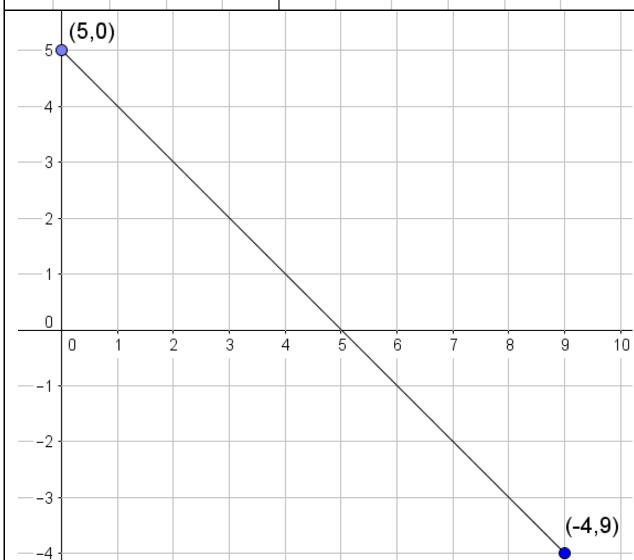
<table>
<tr>
<td>
<table>
<tr><td>x</td><td>y</td><td></td></tr>
<tr><td>-4</td><td>$-(-4)+5=9$</td><td>Máximo</td></tr>
<tr><td>-3</td><td>$-(-3)+5=8$</td><td></td></tr>
<tr><td>-2</td><td>$-(-2)+5=7$</td><td></td></tr>
<tr><td>-1</td><td>$-(-1)+5=6$</td><td></td></tr>
<tr><td>0</td><td>$-(0)+5=5$</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>$-(1)+5=4$</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>$-(2)+5=3$</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>$-(3)+5=2$</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>$-(4)+5=1$</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>$-(5)+5=0$</td><td>Mínimo</td></tr>
</table>
</td>
<td>9</td>
<td>20.0</td>
</tr>
<tr>
<td>
<table>
<tr><td>x</td><td>y</td></tr>
<tr><td>$-4+5$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$-3+5$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$-2+5$</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$-1+5$</td><td>4</td></tr>
<tr><td>$0+5$</td><td>5</td></tr>
<tr><td>$1+5$</td><td>6</td></tr>
<tr><td>$2+5$</td><td>7</td></tr>
<tr><td>$3+5$</td><td>8</td></tr>
<tr><td>$4+5$</td><td>9</td></tr>
<tr><td>$5+5$</td><td>10</td></tr>
</table>
</td>
<td>1</td>
<td>2.2</td>
</tr>
<tr>
<td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-x+5$</td><td></td></tr>
<tr><td>-4</td><td>$-(-4+5)=-1$</td><td>Máximo</td></tr>
<tr><td>-3</td><td>$-(-3+5)=-2$</td><td></td></tr>
<tr><td>-2</td><td>$-(-2+5)=-3$</td><td></td></tr>
<tr><td>-1</td><td>$-(-1+5)=-4$</td><td></td></tr>
<tr><td>0</td><td>$-(-0+5)=-5$</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>$-(1+5)=-6$</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>$-(2+5)=-7$</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>$-(3+5)=-8$</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>$-(4+5)=-9$</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>$-(5+5)=-10$</td><td>Mínimo</td></tr>
</table>
</td>
<td>1</td>
<td>2.2</td>
</tr>
<tr><td>Total</td><td>45</td><td>100</td></tr>
</table>

Ítem 10 (perteneciente al planteamiento 4):

b) Arguméntalo utilizando una representación gráfica

Representación	Frecuencia	%

Sin representación	23	51.1
	14	31.1
	3	6.6
	1	2.2

	2	4.4
	1	2.2
	1	2.2
Total	45	100

Ítems 11 (perteneciente al planteamiento 5):

2. Observa las siguientes figuras

Número de puntos	**1**	**4**	**9**

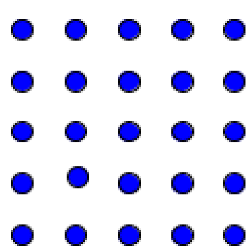
c) ¿Cuántos puntos habrá en la figura 4?

A continuación se presentan las respuestas dadas por los estudiantes

Respuesta	Frecuencia	%
16	43	95.5
15	1	2.2
20	1	2.2
Total	45	100

Ítems 12 (perteneciente al planteamiento 5):

d) Dibuje la figura 5 y dé el número total de puntos

Respuesta	Frecuencia	%
 25 puntos	43	95.5
22	1	2.2
30	1	2.2
Total	36	100

Ítem 13 (perteneciente al planteamiento 5):

b) Imagina que puedes seguir dibujando figuras hasta la figura m ¿Cuántos puntos en total tendrá esa figura?

Tipo de respuesta	Respuesta	Frecuencia de respuesta	Frecuencia de tipo de respuesta	%
Sin respuesta	-----	4	4	8.8
Lenguaje común	Infinito	6	11	24.4

	El cuadrado de m	1		
	Igual a la suma de todos los números impares posibles	1		
	Depende del valor de m	1		
	Si m tuviera un valor, se le aumenta un punto a cada esquina	1		
	La multiplicación del número m por m	1		
Numérica	36	1	8	17.7
	169	5		
	100	1		
	$20 = 484$	1		
Algebraica	m^2	12	22	48.8
	m	2		
	$m * m$	2		
	$m = 2x + 1$	1		
	$m = (n * L)$	1		
	$1 + \alpha$	1		
	$2m + 2$	1		
	x^2	2		
		Total	45	100

Ítems 14 y 15 (pertenecientes al planteamiento 6):

1. Inventa y resuelve un problema con base en la siguiente ecuación $2x + 180 = 5x$

En la siguiente matriz se muestran los resultados obtenidos por los estudiantes de quinto semestre

	Ecuación resuelta correcta	Ecuación resuelta incorrecta	Sin resolución de ecuación	Total
Problema bien diseñado	4	0	1	5
Problemas mal diseñado	10	6	4	20
Sin planteamiento de problema	5	3	12	20
Total	19	9	17	45

A continuación se muestran los procesos de resolución que llevaron a cabo los estudiantes para resolver la ecuación planteada

Proceso de resolución	Frecuencia	%	Observaciones
Sin propuesta	17	37.7	
$2x + 180 = 5x$ $180 = 5x - 2x$ $180 = 3x$ $x = \frac{180}{3}$ $x = 60$	12	26.6	
$2x + 180 = 5x$ $2x - 5x + 180 = 0$ $-3x = -180$ $x = \frac{-180}{-3}$ $x = 60$	7	15.5	
$2x + 180 = 5x$ $180 = 7x$ $\frac{180}{7} = x$ $x = 25.71$	2	4.4	
$2x + 180 = 5x$ $5x - 2x = 180$ $3x^2 = 180$ $x^2 = 180 - 3$ $x^2 = 177$ $x = 13.30$	1	2.2	
$2x + 180 = 5x$ $180 = 5x - 2x$ $180 = 3x$ $\frac{180}{3} = x$ $90 = x$	1	2.2	
$x = \frac{5-180}{2}$ $x = \frac{175}{2}$ $x = 87.5$	1	2.2	
$2x + 180 = 5x$ $180 = \frac{5x-x}{2}$ $180 = \frac{4x}{2} - 180$ $x = 2 - 180$	1	2.2	

$x = 178$			
$2x + 180 = 5x$ $-5x + 2x + 180 = 0$ $-3x + 180 = 0$ $-3x = -180$ $x = -\frac{180}{3}$ $x = -60$	2	4.4	
$2x + 180 = 5x$ $2x + 180 - 5x = 0$ $-3x + 180 = 0$ $x = \frac{180}{-3} = -60$	1	2.2	
Total	45	100	

Capítulo 5

Estudio de casos

Durante el transcurso de la investigación se recurrió a la implementación de entrevistas clínicas semiestructuradas, con el objetivo de profundizar en la obtención de información recabada de los estudiantes, con respecto a las respuestas dadas a los planteamientos relacionados con los diversos usos de la variable.

Como menciona Zazkiz (1999), el término entrevista clínica aquí pertenece a una concepción amplia referida a un espacio controlado, similar al de un consultorio de salud, por lo general es una oficina fuera del hábitat natural de la educación de los entrevistados, tal como un salón de clase o un taller.

La connotación de semiestructurada significa aquí que se planifican las entrevistas por adelantado, mediante la elaboración de un guión, pero dependen de la respuesta del entrevistado, lo que permite continuar con preguntas imprevistas, con variaciones de preguntas planeadas y con preguntas aclaratorias (Zazkiz, 1999).

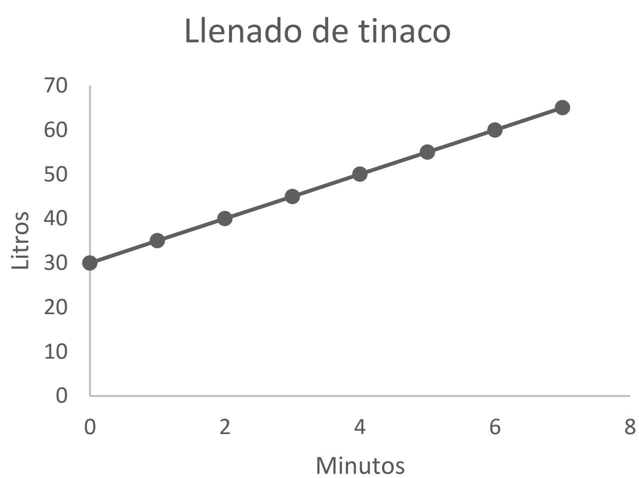
Las entrevistas aplicadas durante la investigación se llevaron a cabo en dos momentos, el primero fue después de la implementación de los exámenes de diagnóstico a los estudiantes de primer semestre del Cecyt 4. Se aplicaron tres entrevistas individuales.

El segundo momento de implementación de entrevistas fue posterior a la aplicación el instrumento específico sobre los diversos usos de la variable a la totalidad del grupo de primer semestre, dichas entrevistas se aplicaron de forma grupal a seis estudiantes, durante tres sesiones.

5.1. Entrevistas clínicas individuales

Las entrevistas clínicas individuales se llevaron a cabo con tres estudiantes distintos, las cuales tuvieron un promedio de duración de una hora y media. Los siguientes fragmentos son extractos de las entrevistas clínicas realizadas; la totalidad de las transcripciones se pueden observar en el Anexo 6, en el cual se incluyen los diálogos, tiempos y observaciones de la totalidad de las videograbaciones. En seguida se presenta un conjunto de extractos con sus respectivas observaciones, obtenidos a partir de dichas entrevistas.

Reactivo 1: *La siguiente gráfica muestra el llenado de un tinaco*



a) Describe el gráfico que se te presenta.
b) Realiza la representación tabular de dicha situación.
c) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa esa situación?

I: Al minuto 0 tenía 30 litros, entonces, al minuto 2 ¿cuántos litros le entraron?
A: Le entraron 10 litros.
I: ¿Cómo sabes eso?
A: Pues aquí lo muestra la gráfica [señalando el gráfico], 30 para llegar a 40 son 10.
I: Ok, y luego al minuto 4
A: Le entraron otros 10 litros.
I: ¿Y luego al 6?
A: Igual 10 litros

I: Y luego ¿qué significa aquí que la gráfica arranque del 30? [señalando el gráfico]
A: Que el tanque ya tenía 30 litros al minuto 0.
I: Ok, si yo te preguntara ¿Aquí en el minuto 6 cuánto tiene?
A: Aaaah, tiene 60 litros.
I: Y luego ¿en el minuto 8?
A: Tendría 70 ¿no?
I: Entonces tendríamos que considerar que el tinaco ya tiene 30 litros verdad. Tu razonamiento está bien a los 11 minutos el tinaco tiene 85 litros. Entonces ya más o menos viste la forma es la que podemos obtener eso, pero ahora si te pidieran a los 90 minutos ¿cómo le harías para sacar eso?
A: Aaaaah, multiplicar.
I: ¿Qué multiplicarías?
A: Yo me seguiría basando en el último minuto que dieron que es el 8, que ahí ya tiene 70

litros, entonces ya a partir de aquí me basaría… yo creo que mejor lo sacaría por hora que tiene 60 minutos, ammmm 5 por 60, sería 300 litro en una hora, en 60 minutos, y todavía quedaría media hora, (haciendo operaciones mentales) 300, 150, sería 450 litros. en una hora y media.

I: Ok, entonces, ¿qué fue lo que tú sacaste?
A: Sería una multiplicación
I: Tú dijiste "yo me basaría por hora", entonces planteaste los 60 minutos.
A: Sí, si cada litro es a cada minuto, entonces multiplicaría.
I: Ahí ya estás cambiando la información, cada litro no es equivalente a…
A: A no perdón, no, son 5 litros por cada minuto.
I: Entonces…
A: Entonces multiplico 5 por 60 y dan 300
I: Muy bien
A: Me pediste de 90 minutos, sería 30 minutos más, que son media hora, entonces si en una hora me dieron 300, la mitad de 300 son 150, igual a 450.
I: Y eso es lo que tendría el tinaco ¿cuándo?
A: A la hora y media
I: ¿Seguro?, si tú te das cuenta, estás considerando lo que aumentó cada minuto, acuérdate que horita habíamos dicho algo importante…
A: Aaaah, entones sería más 70 ¿no? Por los 8 minutos que ya tenía.
A: Ah no, más 70 y 30, por los 30 litros que ya tenía.
I: Tu cuando consideraste la hora y media, arrancaste desde el minuto 1 para hacer ese cálculo, tu dijiste en 90 minutos al tinaco le entran 450 litros, eso tú ya lo sabes, pero ¿qué más hay que considerar?
I: A parte de eso que le entró en la hora y media ¿qué más hay que considerar?
A: Lo que dice la tabla (señalando el gráfico) aquí ya tenía 30 litros.
I: Exactamente, lo que ya tenía el tinaco, entonces…
A: Serían 480, más treinta litros que ya tenía…

Como se puede observar, a partir de la situación planteada mediante una representación gráfica, el estudiante pudo extraer los datos relevantes y así calcular la cantidad de litros que contendría el tinaco en determinado tiempo; sin embargo, la dificultad surgió cuando el estudiante tuvo que calcular tiempos mayores; mostró ligeras dificultades para obtener una generalización simple que le ayudara a calcular rápidamente los litros contenidos en el tinaco. Ahora observemos que sucedió al pedirle que planteara una expresión algebraica que representara la situación.

A: ¿Cuál es la expresión algebraica que representa esta situación?
I: Ya con todo lo que me acabas de decir puedes llegar a la representación algebraica, si yo te diera determinado tiempo ¿cómo le harías para obtener los litros que tendría el tinaco?
A: Por ejemplo sería… de 70 minutos lo representaría, es igual a 5 por 1 minuto, entonces

esto sería, esto ya pasaría, esto es una…, bueno la incógnita, lo multiplicaría por 70 [Escribe: $70 = 5 * 1 = x * 70$]

I: ¿Y esa incógnita qué representa?

A: Representa el resultado de 5 litros por un minuto, esta incógnita representa la multiplicación que debo hacer o el resultado más bien, de 5 por 70, que sería 0, 350

I: Entonces, ¿esos 350 que serían?

A: Los litros que tuviera en 70 minutos

I: Ok, los litros que tendría en 70 minutos, pero tu nada más estás multiplicando 70 por 5, 70 minutos por 5 litros que entran por minuto y obtienes 350 ¿no se te está pasando otra cosa?

A: A si, los 30 litros que ya tenía [Completa: $70 = 5 * 1 = x * 70 + 30$]

El estudiante está inmerso en un proceso de abreviación de textos concretos para producir reglas sintácticas; sin embargo, se observan dificultades al pasar de lo específico a lo general. Una de las posibles causas es la poca claridad que manifiesta sobre el significado de la literal que está utilizando; expresa que es una operación y luego que es el resultado de la operación.

En seguida se propone al estudiante construir la representación tabular de la situación. Observemos que sucede.

I: Ok, entonces tienes la idea de lo que te estoy pidiendo, pero yo te estoy pidiendo así como una formulita ya resumida para obtener la cantidad de litros que habría en el tinaco en determinado tiempo, entonces ¿qué te parece si hacemos una tablita? Haz una tabla de doble entrada, aquí en la parte de la izquierda puedes plantear el tiempo y en el otro lado…

A: Litros

I: Entonces en un minuto… [Escribe 1 en la columna de los minutos y 5 en la de los litros]

I: ¿El tinaco tendría 5 litros?

A: En un minuto, si arrancamos desde cero…

I: No, según la gráfica, ¿en un minuto cuántos litros habría en el tinaco?

A: 35

I: Muy bien ¿cómo lo hiciste?

A: Porque ya tenía 30 litros el tinaco y cada minuto aumenta 5 litros

I: Muy bien, ¿al minuto 2?

A: Al minuto 2 ya tendría 40 litros

I: Ok, ¿al minuto 10?

A: Aquí ya pondría 10, y aquí ya multiplicaría… [Señalando la columna de los minutos. Se queda pensando]

I: ¿Cuánto le entra por minuto?

A: 5 litros

I: Ok, ¿entonces qué tendrías que hacer?

A: Una multiplicación ¿no?

I: Aja
A: Entonces sería…
I: 10 por…
A: Por 5 ¿no?
I: Ok, ¿cuánto te da?
A: 50 [lo escribe en la columna de los litros correspondiente a los 10 minutos]
I: Más…
A: Más los 30 que ya tenía 80 [sobre escribe un 80 sobre el 50]
I: Muy bien, si te das cuenta ya estamos llegando como a un proceso, ahora ponle 30 minutos ¿qué haces?
A: Ya sería multiplicar el tiempo más los tre…, el tiempo por los litros que serían 5 y sumarle los 30 litros que ya tenía, entonces la formula sería, tiempo por litros más los treinta que ya tenía [la escribe a un lado de la tabla]
I: ¿Tiempo por cuántos litros?
A: Por 5 litros [Escribe: $t * 5 + 30$]

Como se observa la utilización de la representación tabular ayudó en cierta forma al estudiante, logró visualizar de forma más clara el proceso que estaba llevando a cabo para obtener los litros en cada uno de los tiempos (casos específicos) y así llegar a la obtención de una expresión algebraica adecuada para la situación (caso general). Sin embargo, enseguida el entrevistador pidió al estudiante que en la columna de los minutos representara, de alguna manera, una cantidad de minutos cualquiera y el estudiante presentó mucha dificultad para llegar a plantearla mediante una literal, a pesar de haber obtenido ya la expresión $t * 5 + 30$.

Al final, representó los minutos con la literal x, pero para obtener la cantidad de litros correspondientes, el estudiante presentó un anclaje a conductas asociadas a la aritmética, ya que proponía valores específicos de x para poder obtener los litros (Véase transcripción completa del estudiante A en el Anexo 6).

Reactivo 2: *Construye un rectángulo en el que sus lados midan* $(x + 5)$ *y* $(y + 4)$ *¿Cuánto mide su área?*

I: Cada uno de estos valores representa cada uno de los lados del rectángulo. $(x + 5)$ va a ser un lado y $(y + 4)$ va a ser el otro lado, entonces dibuja tu rectángulo [señalando cada binomio]
A: [dibuja un rectángulo de dimensiones cualesquiera y al lado mayor lo nombra $x + 5$ y al menor $y + 4$]
I: Ya tienes ahí el planteamiento…
A: Del problema

I: Si, la representación gráfica, entonces la pregunta es ¿cuánto mide su área?
A: Tengo que saber cuánto miden bien sus lado ¿no? para poderlos multiplicar y sacar el área [señalando el rectángulo]
I: Pues adelante trata de resolverlo ¿qué es lo que harías?
A: La verdad no tengo ni idea de que hacer.

El estudiante propone "saber bien cuanto miden los lados", con esto se puede concluir que no logra interpretar el símbolo literal como una entidad general, la cual puede ser manipulada algebraicamente, él propone la obtención de valores numéricos, esto es, que prefiere el retorno a casos más concretos.

I: Si, entonces ¿cómo le harías para obtener el área del rectángulo de arriba?
A: Multiplicaría este por este ¿no? [señala cada binomio]
I: Ok, entonces trata de hacerlo
A: [Apunta la expresión $(x+5)(y+4)=$ Se le observa dudar]
I: Como tú puedas
A: Sería algo así [completa una ecuación de la siguiente manera $(x+5)(y+4)=20xy$]
I: ¿Ese es tu resultado?
A: Creo la verdad no creo que sea el resultado.
I: ¿Cómo le hiciste?
A: Multipliqué 5 por 4 y me dio el número "x" y "y"
I: Ok, ¿eso que obtuviste qué es entonces?
A: No sé.

En primer lugar se presenta un problema de sintaxis, ya que el estudiante obtiene el producto de los binomios de forma incorrecta; sin embargo, lo que consideramos más notable es la presencia de una obstrucción proveniente de la sintaxis sobre la semántica, ya que el estudiante no encuentra un sentido de sus acciones en relación con el problema.

Después de analizar con el estudiante, por un momento, la forma correcta de obtener el producto de binomios ocurrió lo siguiente.

A: Sería algo así [Termina escribiendo $xy+4x+5y+20$]
I: Muy bien, entonces ya sabemos que eso que obtuviste es el producto correcto de esta multiplicación, entonces ¿eso que obtuviste qué es? [señalando $(x+5)(y+4)=$]
A: Ya es el resultado de una multiplicación de binomios.
I: Si es el resultado de esa multiplicación, pero en el planteamiento ¿qué se te estaba preguntando? ¿De dónde salió esa multiplicación?
A: De lo que mide el lado y el lado del rectángulo [señala cada uno de los lados del rectángulo].
I: Si entonces con base en eso, ¿qué es lo que obtuviste?

A: Aaaa ya, cuánto mide cada lado [señala $4x$ y $5y$]
I: ¿Qué sería?
A: Mmmm creo que me equivoqué [se queda pensativo].
I: Di lo que estás pensando
A: x aquí en este lado sería igual a 4 [señala la x de $(x + 5)$]
I: ¿Por qué?
A: Porque aquí me salió esto [señala el $4x$ de $xy + 4x + 5y + 20$]
I: OK…
A: Y que y sería igual a 5 por esto [señala el $5y$ de $xy + 4x + 5y + 20$]
I: Ok, con base en esto que tú estás viendo aquí verdad [señala $xy + 4x + 5y + 20$]
A: Nada más en esto [subraya $4x + 5y$]
I: Entonces que más harías para obtener el área.
A: Sería [sustituye 4 en x] ya nada más sumar 4 + 5 que serían 9 y luego [sustituye 5 en y] 5 + 4 que sería 9 entonces 9 por 9 sería 81.

El estudiante presenta un mecanismo inhibitorio muy fuerte, está enfocado en encontrar las longitudes específicas de los lados del rectángulo, por lo tanto esto no le permite interpretar la expresión general como la solución al problema planteado.

Reactivo 3: *El valor del área de un cuadrado más 16 es igual a 2 veces el valor de su perímetro. Ramón propuso la siguiente ecuación para resolver el problema* $4x + 16 = 2x$ *¿Te parece correcto lo que planteó? Argumenta tu respuesta.*

B: [Lee el planteamiento en voz alta]
I: Entonces lee detenidamente el problema, analízalo bien y trata de proponer tu ecuación para que la compares con la de Ramón, para ver si son iguales.
B: [El estudiante dibuja un cuadrado y debajo escribe Ramón $4x + 16 = 2x$]
B: [El estudiante escribe $x + 16 =$, a un costado del cuadrado]
I: ¿En qué te atoraste?
B: En que no entiendo que dice “el valor del área de un cuadrado” cómo representaría esa parte.
I: Tu ahí dibujaste un cuadrado verdad, entonces te dicen “el valor del área del cuadrado” ¿cómo lo representaste tú en la ecuación?
B: Con una x [Señala la x del $x + 16 =$, que había escrito antes]
I: Y luego ¿Qué te dicen?
B: “Más 16”, si lo puse, “es igual a dos veces el valor de su perímetro”.
I: ¿Y eso no lo puedes representar o qué pasa?
B: Sí, eso no sé cómo
I: ¿Cómo crees que sería? o ¿por qué no puedes representarlo?
B: Porque si le pongo 2x sería la misma que estoy usando al principio [señalando la x]
I: Sí, muy bien, entonces tú ya sabes que no es válido poner x verdad porque estarías hablando de dos veces el área del cuadrado, eso es bueno que lo hayas identificado, entonces el dilema está en cómo representar ese perímetro verdad.
B: Si
I: ¿No puedes utilizar otra estrategia para realizar el planteamiento? Te voy a dar una

pista, a ese cuadrado ponle de longitud de lado x [El estudiante escribe x en un lado del cuadrado] entonces ahora si a partir de eso ¿cómo sería?, dice, el valor del área de un cuadrado ¿cómo sacarías eso?

El estudiante B manifiesta dificultades para pasar del lenguaje común al lenguaje algebraico, algo importante de observar es que él elige rápidamente un símbolo literal para representar uno de los valores desconocidos (en este caso el área del cuadrado) del planteamiento y comprende qué es lo que está tratando de representar; sin embargo, no se detiene a reflexionar un poco sobre la forma más adecuada de realizar la representación y la utilización de la variable, lo que le facilitaría llegar a una expresión adecuada y sencilla.

I: ¿No puedes utilizar otra estrategia para realizar el planteamiento? Te voy a dar una pista, a ese cuadrado ponle de longitud de lado x [B escribe x en un lado del cuadrado] entonces ahora si a partir de eso ¿cómo sería?, dice, el valor del área de un cuadrado ¿cómo sacarías eso?
B: Lado por lado [señala la x que colocó en un lado del cuadrado y otro lado]
I: Si ¿cuánto sería?
B: x^2
I: Entonces ahora sí, a partir de eso trata de hacer el planteamiento de tu expresión algebraica.
B: [B obtiene $x^2 + 16 = 4x$]
I: ¿Por qué?
B: Porque se suman sus 4 lados para el perímetro.
B: Serían $x^2 + 16 = 4x^2$ ¿no?
I: ¿Por qué?
B: Porque dice que es dos veces ese valor, que el valor de su perímetro dos veces.
I: Entonces ¿$4x^2$ sería dos veces eso?
B: Sería dos veces su perímetro
I: ¿Dos veces $4x$ es $4x^2$?
B: Mmm... no, no porque ahí es multiplicación ¿no? Sería $x^2 + 16 = 4x + 4x$ ¿no? Que representa la suma de sus 4 lados, porque si le pongo a la dos está multiplicando.
I: ¿Entonces puedes resumir eso?
B: ¿Esto de aquí? [Señala la expresión obtenida]
I: Si
B: O sea ¿cómo? ¿Qué lo escriba?
I: Si, ¿puedes hacer alguna otra cosa con esa expresión?
B: Si, sumar $4x$ más $4x$ ¿no?
B: [B escribe $x^2 + 16 = 8x$]

A pesar de cometer una serie de errores de traducción, al pasar del lenguaje común al algebraico y algunos errores de sintaxis, como por ejemplo decir que el doble de $4x$ es $4x^2$, el estudiante logra construir una expresión algebraica para el planteamiento e incluso logra argumentar el motivo por el cual la ecuación de Ramón está mal planteada, dando sentido a las expresiones planteadas tanto en el problema como en las propuestas.

Reactivo 4: *Considera la expresión* $y = -x + 5$. *Si los valores de* x *varían entre -4 y 5 ¿Cuándo alcanza* y *su valor máximo? ¿Cuándo alcanza* y *su valor mínimo? Arguméntalo utilizando una representación gráfica*

B: No, es que no entiendo lo de y, o sea, no entiendo cuándo alcanza y su valor mínimo
I: Ahí te están dando la información de que x puede variar entre -4 y 5, entonces cuando x valga -4 ¿cuánto va a valer y?
B: ¿5?
I: ¿Por qué? Si tú te das cuenta aquí tienes ya tu expresión algebraica verdad [I señala $y = -x + 5$] entonces a ti te están dando ya el valor de la x, puede variar entre un rango de -4 y 5, entonces si tú le das el valor de -4 a x ¿cuánto vas a obtener en y?
B: ¿1?
I: ¿Por qué?
B: Porque si -4 y más 5 no son signos iguales entonces se restan entonces 5 menos 4 pues da 1.
I: Ok, entonces escribe esa misma ecuación pero ahora sustituye la x por el -4.
B: [B escribe $y = -4 + 5$]
I: Si te das cuenta, con base en ese razonamiento que tu hiciste si sería correcto el resultado; sin embargo, aquí tú tienes un valor negativo [señalando $-x$] y aparte vas a meter en x un valor negativo, entonces esta expresión vuélvela a escribir abajo pero ahora si como debería de ser.
B: [B escribe $y = +4 + 5$]
I: Ok, tú ya lo resumiste verdad, si me entendiste el punto, aquí a un lado escríbela sin haberla resumido.
B: [B escribe $y = -4 -$]

De entrada, el estudiante no logra dar sentido a la relación funcional planteada, ya que no le da sentido al planteamiento del problema. Luego se observa una dificultad con el manejo de los signos, ya que no considera que al asignar un número negativo a la x negativa el resultado será positivo.

I: Ok, escribe esta misma expresión [señalando $y = -x + 5$], pero ahora en lugar de la x pon unos paréntesis.
B: [B escribe $y = -(\ ) + 5$]
I: Esto que escribimos es exactamente lo mismo que la primera expresión sólo que pusimos paréntesis para que ahí tu metas los valores que pueden ir, entonces sustituye por el primer valor que te dicen que puede ser.
B: [A escribe $y = -(-4\ ) + 5$]
I: Entonces si tú te das cuenta ahí queda menos por menos verdad, entonces es por eso que se transforma el positivo, entonces ¿cuál sería el primer valor de y?
B: Mmmmm
I: Pues ya tienes ahí que $y = +4 + 5$.

B: 9
I: Entonces si quieres aquí haz una tablita, ponle *x* y *y*, el primer valor que le diste a x ¿cuál fue?
B: -4
I: Entonces con ese -4 ¿cuánto quedó en y?
B: En 9 [B comienza a colocar los valores en la tabla]
I: Entonces ahora si te dicen que el rango de x puede ser desde -4 hasta 5 ¿cuál sería el siguiente número que tendrías que comprobar?
B: 5, ah, no -5.

El entrevistador recomienda al estudiante cambiar el símbolo literal por un *placeholder*, con el objetivo de facilitar la sustitución de los valores con los que se tienen que valuar la función, de esta forma el estudiante comienza a obtener los valores de la variable dependiente de forma correcta. Sin embargo, se presenta una pequeña dificultad al determinar los valores con los que se va a valuar la función, provenientes de la memoria a largo plazo.

B: [B completa la tabla con los valores obtenidos]
I: Entonces ya te di algunas ideas, vuelve a leer el planteamiento por favor.
B: [B lee el planteamiento en voz alta]
B: Ahora aquí ya no tendría que hacer las operaciones porque va descendiendo de uno en uno ¿no? [señalando la columna de y]
I: Ok, si es lo que tú piensas…
B: [B completa toda la tabla desde -4 hasta 5 en los valores de x y los de y correspondientes]
B: ¡Ah, ya! su valor máximo es con el -4 [señalando el -4 de la columna de x] y su valor mínimo es con el 5.

Al terminar de construir la tabla con los valores solicitados en el planteamiento, la relación entre las variables se vuelve más evidente para el estudiante y así logra darle sentido a la pregunta que se le hace, de esta manera logra dar el valor máximo y el mínimo para y dependiendo de x. Cabe mencionar una observación, aunque el estudiante logra obtener los máximos y mínimos solicitados, trabaja con un dominio discreto de valores, lo cual limita la potencialidad del uso de la variable como una relación funcional.

I: Fíjate, ya tienes la representación algebraica de la situación [señalando $y = -x + 5$] esta es la representación tabular [señalando la tabla que construyó] y ¿podrías hacer una representación gráfica?
B: Si [B traza dos ejes formando un solo cuadrante y les pone los valores que utilizó en la gráfica, traza los puntos y obtiene una línea recta]
I: Nada más que aquí sucede algo ¿Conoces los planos cartesianos?

B: Si
I: ¿Me puedes hacer uno por favor?
B: ¿Completo?
I: Si
B: [traza el plano cartesiano]
I: Ahora identifica los puntos que obtuviste con la tabla en ese plano cartesiano.
B: [A trata de identificar el primer punto]
I: [Se le instruye sobre cómo se identifican los puntos de forma correcta]
B: [Identifica todos los puntos en el plano cartesiano]
I: Muy bien, entonces lograste obtener la representación gráfica, la algebraica y la tabular.

Lo notable de este extracto de la entrevista clínica es que después de que el estudiante identifica los puntos en el plano cartesiano, une los puntos para obtener una línea recta, dando a entender que el dominio de la función es continuo. Y aunque el estudiante no lo hizo explícito es el germen de la idea, con lo cual se observa que cada texto, ya sea de tipo algebraico, tabular, gráfico o en lenguaje común aporta algo para la conformación de la idea de relación funcional.

Reactivo 5: *Observa las siguientes figuras*

	Figura 1	Figura 2	Figura 3
Número de puntos	**1**	**4**	**9**

a) ¿Cuántos puntos habrá en la figura 4?
b) Dibuje la figura 5 y dé el número total de puntos
c) Imagina que puedes seguir dibujando figuras hasta la figura m ¿Cuántos puntos en total tendrá esa figura?

C: [C analiza el planteamiento]
C: ¿Cuántos puntos habrá en la figura 4?
C: En la figura 1 hay 1, en la figura 2 hay 4, en la figura 3 hay 9 ¿cuántos puntos habrá en la figura 4?
C: ¿Estos son… cómo se llaman? ¿Raíces? ¿Estos números tienen raíces? En eso me podría guiar y el número que le sigue es 16, entonces creo que en la figura 4 habrá 16 puntos.
I: Muy bien
C: Dibuje la figura 5 y dé el número total de puntos, entonces sería la figura 4 y luego de 16 sigue 25, yo creo que si es la raíz más cercana, entonces la figura 5 tendrá 25 puntos [dibuja la figura 5, de 5 por 5 puntos]
C: Imagina que puedes seguir dibujando figuras hasta la figura m ¿cuántos puntos tendrá?

¿la figura m?
I: ¿A qué crees que se refiere con eso?
C: No sé, ¿cuántos puntos en total tendría esa figura? La figura m, no sabría cuál es la figura m
I: La figura 1 ¿Cuántos puntos tiene?
C: 1
I: ¿La figura 2?
C: 4
I: ¿Cómo le haces para sacar ese 4?
C: Pues es que bueno yo lo saqué como si fuera una raíz cuadrada, o sea esos números tiene… bueno su… tienen raíz cuadrada.

Como se observa el estudiante C no tiene dificultades para obtener la cantidad de puntos en los casos particulares; sin embargo, él no identifica una relación entre el número de figura y el número de puntos correspondiente, lo que hace es suponer que la serie numérica que conforma el número de puntos de las figuras son números que tienen raíz cuadrada exacta, lo cual es cierto, pero dificulta la posibilidad de generalizar la situación. En la transcripción es notable que él no le otorga sentido a la asignación de una literal al número de figura.

I: Entonces si te vas a la inversa, si tú en vez de irte de los puntos a la figura, te vas de la figura a los puntos, ¿qué tienes que hacer con el número de figura para obtener el número de puntos?
C: Multiplicarlo por sí mismo.
I: Ok, ¿con la figura 3 cómo le harías?
C: Si tengo la figura 3 y si es sacar el doble, o sea 3 por 3, 9.
I: Entonces la figura m ¿cómo obtendrás su número de puntos?
C: Es que no sé qué significa con m, no me cuadra todavía.

A pesar de que C logra obtener el proceso de obtención del número de puntos de cada figura a partir de multiplicar el número de figura por sí mismo, continúa sin darle sentido a la utilización de la literal como representación general, por lo tanto esto imposibilita la obtención de la expresión general para el número puntos. Después de varios intentos:

C: A la figura m, es un número que multiplicado por sí mismo sea un valor, puede ser la figura m que sea 6 y tenga 36 puntos, puede ser la figura 7 y tenga 49 puntos, puede ser la 8 y que tenga 64 puntos.
I: Exactamente, entonces si no quieres establecer el valor de m y lo quieres dejar de forma general, ¿cuántos puntos tendrá esa figura?

C: Pues sería…
I: Fíjate, aquí tienes figura 4 y figura 5, ponle aquí m [señalando a un lado de 4 y 5] y tú abajo tienes los números de puntos correspondientes ¿qué iría aquí? [señalando debajo de la m]
C: 36
I: ¿Sí? ¿ m representa el 6?
C: Así sucesivamente sí, pero es que m puede ser tanto 9 como 8 como 7, bueno puede ser otros números, pero yo me baso del 1 al 10.
I: Exactamente, entonces si tú no quieres especificarlo, si lo quieres dejar como un número cualquiera ¿Abajo qué sería?
C: Bueno podría ser 36, 49 y 64 y 81 creo, sí.

A pesar de que C fue uno de los estudiantes clasificados dentro de los estratos más altos de desempeño de su grupo, durante la resolución de este planteamiento mostró tendencias a permanecer anclado en la utilización del SMS1 (aritmético), imposibilitando la obtención de una expresión general para representar el número de puntos de la figura m. Después de una explicación un tanto larga para que el estudiante comprendiera que la literal representa cualquier número dentro del conjunto de los Naturales, logró llegar a la expresión m^2.

Reactivo 6: *Inventa y resuelve un problema con base en la ecuación* $2x + 180 = 400$

A: Inventa y resuelve un problema con base en la siguiente ecuación $2x + 180 = 400$ [se ríe de forma nerviosa]
A: [comienza a escribir, borronea lo escrito]
A: [comienza a escribir de nuevo, vuelve a tacharlo]
I: ¿Qué? ¿No? ¿No se te ocurre nada?
A: No…
I: Entonces sólo resuelve la ecuación.
I: ¿Cuál sería el objetivo? Cuando yo te digo resuelve esa ecuación ¿Qué es lo que tienes que hacer?
A: Encontrar el valor de x para multiplicarlo por 2 y sumarlo con 180, que serían 400 ¿no?
I: Ok
A: Sería… [Comienza a realizar cálculos mentales.
Hace la división 220 entre 2 en las hojas de registro]
A: Ya está [apunta $x = 110$]
A: [Luego apunta $110 * 2 + 180 = 400$]
A: Ya, aquí dice que dos veces el valor de x más 180 te va a dar 400, 180 para 400 te da 220, 220 entre 2 te da 110, entonces dije, x puede ser 110 por 2 serían 220, más 180 te da 400.
I: Correcto

En la resolución de este planteamiento con el estudiante A (estudiante perteneciente a un estrato bajo de desempeño) se observa la presencia de obstrucciones provenientes de la sintaxis sobre la semántica; el estudiante no puede realizar el planteamiento de una situación problemática en lenguaje común a partir del texto algebraico. Sin embargo, logra la resolución de la ecuación, utilizando cálculos mentales (mediante desdoblamiento).

B: [Lee el planteamiento en voz alta]
B: Es que aquí no se.
I: ¿No? ¿Ni idea?
B: Estaba tomando como referencia el del cuadrado de 4x, pero no creo que ese me sirva, entonces estaba pensando en una escuela, entonces pensé si dos escuelas tienen…, es que ahí no sé qué poner, ¿voy escribiendo?
I: Tu sabes que con x… ¿qué vas a hacer tu con x?
B: Eeeh, un número cualquiera
I: Te va a representar un número cualquiera.
B: Ese es el que se puede mover.
B: ¿Y aquí en el problema tengo que usar a la x como variable o tengo que darle un valor?
I: ¿Tú qué crees? Si en el problema se te está presentando como un número desconocido…
B: Aquí si le tengo que dar un valor, si yo digo que sí.
I: Trata de plantearlo como tú puedas.
B: [B comienza a realizar operaciones aritméticas]
B : Es que ya lo de 180 no sabría en que usarlo.
I: Ok, entonces sólo trata de resolver la ecuación, por favor, bríncate lo de inventar el problema.
B: [B comienza a asignarle valores a x, para tratar de encontrar uno que haga válida la ecuación]
I: Tú estás tratando de resolver la ecuación proponiendo valores para x verdad, pero ¿no conoces otra manera de resolver la ecuación?
B: Es que me acuerdo que hay una que es cuando 2x pasa de este lado.
I: Ok, te acuerdas de un proceso que utilizabas para resolverlo, ¿verdad?
B: Si, recuerdo que la x es la incógnita y si está sumando pasaba restando…
I: A ver, inténtalo hacer así.
B: Es que no me acuerdo como va, como sería esto…
I: Sólo te acuerdas que cuando sumaba…
B: Si tenía un signo se pasaba del otro lado con el signo opuesto…
I: Ah, ok, pero no sabes por qué, sólo te acuerdas que de algo así se trataba, ¿si estaba multiplicando cómo se pasaba?
B: Dividiendo
I: Muy bien, entonces te voy a dar una pista el valor que buscas es mayor que 100.
B: [B siguió proponiendo valores para x al tanteo hasta que encontró el que satisfacía las condiciones de la ecuación]

Al igual que el estudiante A, el estudiante B (perteneciente a un estrato medio de desempeño) presentó dificultades para plantear un problema en lenguaje común a partir de la expresión algebraica. Este estudiante eligió resolver la ecuación mediante el método de tanteo (MIAS) ya que no recordó el método formal para su resolución (MC).

C: Inventa y resuelve un problema con base en la ecuación
C: Voy a resolver la ecuación, quiero resolver la ecuación para ver cuál es el valor específico [C resuelve la ecuación mediante el método sintáctico-viético]
I: Muy bien, ¿me puedes explicar cómo resolviste la ecuación?
C: Espero que no esté mal, pero por lo que se es despejar variables de números y, bueno, en la ecuación original $2x + 180 = 400$, entonces lo pasé restando [C escribió $2x = 400 - 180$] y 400 menos 180 me salieron 220 [C escribió $2x = 220$] entonces $2x$ está multiplicando tiene que pasar dividiendo y me da 110, ese es el valor de x. Pero ahora tengo que plantear un problema
I: Está bien esa forma de resolver al ecuación, pero me sorprende un poco que digas "si de este lado está sumando pasa restando" ¿Por qué?
C: Pues porque no jaja, bueno… porque la variable… yo lo que hice fue separar las incógnitas, separar los números de las letras y si el igual los está separando, siento que restando, no sé cómo explicarte el por qué
I: Muy bien, continúa
C: Inventa y resuelve un problema, esto me va a costar trabajo, siento que me va a costar trabajo
C: Creo que empezaría de lo más básico, de los problemas más básicos
I: Si, lo que se te ocurra
C: [C comienza a escribir]
C: [C concluye escribiendo el problema y tacha una parte de este, termina escribiendo "Ernesto fue a la tienda compró dos mochilas y un cargador de 180. Si el total fue de $400. ¿Cuánto costó cada mochila?
I: Muy bien
C: [C hace la comprobación de su planteamiento]

El estudiante C (perteneciente al estrato alto de desempeño), a pesar de que no logra explicar el porqué del método que utiliza (sintáctico-viético) para la resolución de ecuaciones, lo hace de forma correcta y aunque presenta ciertas dificultades para plantear la situación problemática a partir de la ecuación, concluye planteando una situación adecuada para la ecuación propuesta.

Observaciones

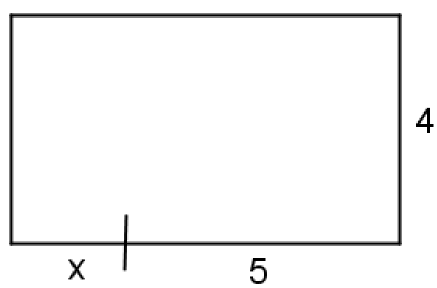
1. Los estudiantes no se detienen a observar qué tipo de expresiones se plantean o solicitan en los planteamientos y comienzan con la manipulación algebraica de forma indiscriminada.

2. Las soluciones algebraicas que los estudiantes proporcionan no reflejan las situaciones o relaciones mencionadas en los planteamientos.
3. Los estudiantes realizan manipulaciones algebraicas con el objetivo de proporcionar un resultado numérico a los planteamientos, aunque no sea necesario.
4. Hacer consientes a los estudiantes de los diversos usos que puede tener la variable, propició la presencia menos recurrente de lo descrito en la observación 3.

5.2. Entrevistas clínicas grupales

Al igual que en las entrevistas clínicas individuales, se realizaron las transcripciones de la totalidad de las grabaciones de las entrevistas clínicas grupales, las cuales se pueden observar en el Anexo 7, se incluye los planteamientos, los diálogos, los tiempos y una serie de observaciones. En seguida se presentan extractos de dichas transcripciones. Luego se presenta un listado de las principales observaciones obtenidas.

Reactivo: *Escribe una expresión para representar el perímetro del rectángulo:*



I: Al pasa y explícanos lo que tu hiciste.
Z: Lado más lado más lado más lado, es el perímetro.
I: A ver explícanos Al.
Al: [Escribe en el pizarrón $l+l+l+l$ y $x+5+x+5+x+4+4$] Para obtener el perímetro sumo lado más lado más lado más lado, una vez $x+5$ y el lado de arriba también es $x+5$, el lado derecho y el lado izquierdo miden 4 cada uno.
I: Muy bien y ¿qué más puedes hacer?
Al: Pues resolverlo [Escribe $2x+18$]
Z: ¿Sumaste todo de una vez?
Al: Si
I: Muy bien ¿qué más podemos hacer?
Ab: Equis es igual a 9, aah, pero no está igualado.
I: Lo que acaba de mencionar Ab pasó con mucha frecuencia en los exámenes.
I: Esto que tenemos [subraya $2x+18$] ya es la representación general del perímetro de

este rectángulo, entonces ¿cómo estaríamos trabajando aquí la variable? ¿Cómo incógnita?

M: Si

Z: Relación funcional

M: Es número general.

Z: Ah, sí perdón, es número general, no tiene una igualdad.

Como se puede ver, el estudiante Al no tiene dificultades para hacer la traducción del texto geométrico al algebraico, obteniendo correctamente la expresión correspondiente al perímetro del rectángulo; sin embargo, Ab manifiesta una necesidad de cierre al mencionar que x es igual a 9, con lo cual se puede deducir que no ha logrado conceptualizar una entidad general como una medida de algo a lo que él ha estado acostumbrado a ver con medidas más concretas.

Al final de la discusión, entre los estudiantes se presenta la dificultad de clasificar el uso que se está dando a la variable en este caso, aunque el uso que se da es número general y M lo menciona con bastante seguridad (sin dar argumentos), antes de eso Z menciona los otros dos usos.

Reactivo: *Considera* $x + 3 = y$
a) ¿La x *pude tomar un valor cualquiera?*
b) ¿La y *pude tomar un valor cualquiera?*
c) ¿La x *y la* y *pueden tomar un valor cualquiera al mismo tiempo?*

I: ¿Cuál es la principal característica del uso de la variable como incógnita?

Ab: Que es un valor exacto, no puedes poner los valores que tú quieras.

I: Muy bien, entonces ¿en este caso puede tomar sólo un valor la x?

Z: Pues si ¿no?

I: ¿Si Al?

Al: Sí

I: Si yo le asigno el valor de 1 a la x ¿Qué obtenemos en y?

Al: Cuatro

I: ¿Y si le asigno el valor de 2?

Z, Ab, M Cinco

I: ¿Y de tres?

Ab: Seis

I: Entonces ¿se le puede asignar un sólo valor o se le pueden asignar más valores a la x?

Ab: Bueno, a la x se le pueden asignar más valores, a la y no.

I: ¿Por qué no?

Ab: Porque la y depende de la x

Al: Es que a la y se le pueden agregar más valores, siempre y cuando no se le agreguen más

a la x.
I: ¿Cómo sería eso?
Al: Porque si le dejas la x así, sin ningún valor y cambias el de la y puedes despejar la x.
I: Sí, dame un ejemplo
Al: Si y es igual a 4, x es igual aaa… menos uno.
Ab: No, más uno.
Al: Aaah sí, es cierto.
I: ¿Entonces se dan cuenta? Lo que menciona Al es que si yo le asigno valores a y ya no le puedo asignar cualquier valor a la x, y si le asigno valor a la x…
Z: Por eso una depende de la otra
I: Sí, ¿cuál es la respuesta a la primera pregunta? ¿La x pude tomar un valor cualquiera?
Todos: Sí
I: Siempre y cuando…
Z: La y no tenga otro valor
I: ¿La y puede tomar un valor cualquiera?
Todos: Sí, siempre y cuando la x no tenga valor

Aunque los estudiantes manifestaron en un inicio que el uso que se daba al símbolo literal era como incógnita y afirmaban que la x solo podía tomar un valor, al hacerles unas serie de cuestionamientos lograron concluir que tanto la x como la y pueden variar. Se observa una interferencia entre textos, los estudiantes no conocen las características específicas de cada uno de los usos que tienen los símbolos literales dentro del álgebra.

I: Y la última ¿La x y la y pueden tomar un valor cualquiera al mismo tiempo?
I: ¿Cuál sería la respuesta M?
M: ¿O sea para las dos juntas?
I: Si
Z: No tendría que estar igualada, tendría que pasar de este lado [señala de derecha a izquierda]
I: Te refieres a despejar.
Al: Pero no importa la operación ¿no?
I: ¿Se puede hacer eso?
Al: No, porque si le pones a x cinco, bueno, vamos a suponer que cambia el signo de más por menos, ponle a x cinco y a y diez y resuelve la ecuación, sí se puede, pero no sale la ecuación.
I: No resulta, entonces ¿se puede o no se puede?
Z: No
I: Entonces ¿Aquí como se está usando la variable? ¿Es incógnita, número general o relación funcional?
Ab: Como incógnita ¿no?
Z, M No
M: ¿Relación funcional?
I: ¿Por qué?
Z: Porque no tiene resul… no

T: Si es relación funcional
I: ¿Por qué?
T: Porque la y siempre depende de la x, es una ecuación dependiente.

Z manifiesta que podrían variar ambas literales a la vez, siempre y cuando se iguale a cero la expresión, con lo cual se observa que no termina de comprender la dependencia que existe entre las variables utilizadas; sin embargo, con un ejemplo que propone Al (utiliza un caso particular), queda claro que no se pueden proponer valores arbitrarios para ambas variables a la vez. También podemos notar que a pesar de haber descrito previamente el uso de las literales como incógnita de forma correcta, siguen proponiendo que es el uso que se da en este planteamiento, no obstante haber aclarado la dependencia entre literales y la posibilidad de variar el valor de éstas.

Reactivo: *En una báscula, para cada kilogramo, la charola se desplaza cuatro centímetros.*
a) ¿Cuál es la relación entre el peso de la mercancía y el desplazamiento de la charola?
b) Si la charola se desplaza 10 centímetros ¿cuánto pesa la mercancía?

I: ¿Cuál es la relación entre el peso de la mercancía y el desplazamiento de la charola?
Al: Pues por cada kilo se recorre cuatro centímetros.
I: Muy bien y eso como lo plantearías…
Al: ¿La ecuación?
I: Si
Al: x o $1x$ es igual a cuatro.
I: A ver, pásale.
Al: [Anota en el pizarrón $x = 4y$] x es el número de kilos y y el número de centímetros.

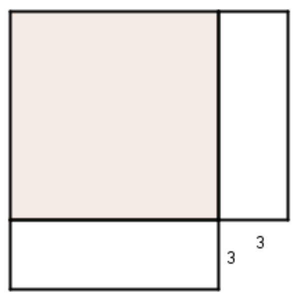
Aunque el estudiante extrae la información relevante del planteamiento, al plantear la expresión algebraica comete un error proveniente de la semántica; define las variables que está utilizando para su representación algebraica; sin embargo, ésta no obedece a las condiciones del problema.

Al: En vez de 4 son $16y$
I: [Escribe $1 = 16y$] Si se dan cuenta conforme a esto, si yo le asigno un kilo a las x obtendría un dieciseisavo… [Escribe $\frac{1}{16} = y$]
Z: De centímetro
I: ¿Y eso cuadra con el planteamiento?
M: No
I: No, ¿verdad?
M: ¿No sería $x * 4 = y$?

Z: No
I: Muy bien, Ella está proponiendo esto [Apunta $4x = y$]
I: Entonces si yo a la x le asigno 1 ¿Cuánto voy a obtener?
M: 4
I: ¿Cuadra con el planteamiento?
Todos: Si
I: ¿Si fueran dos kilos cuántos centímetros se recorrería?
Todos: 8

Como se observa, Al propone modificar la expresión que construyó anteriormente; sin embargo, la obstrucción semántica persiste; no logra identificar que el error fue colocar el coeficiente de 4 a la variable y. Pero uno más de los estudiantes se percata del error y propone la representación algebraica correcta del planteamiento.

Reactivo: *El área total de la figura es 27 ¿cuál es el área del cuadrado sombreado?*



Al: ¿Esta cantidad es solo de este lado? [Señalando uno de los lados de uno de los rectángulos que compone la figura marcado con un tres]
I: Si
Al: ¿Pero está muy grande esa cantidad para ese lado no? Porque vamos a suponer que el resto es 10, sería tres más diez, suponiendo que fuera solo cinco seria solo un poco más grande que ese [señalando el mismo lado de nuevo], y entonces éste es muy pequeño, seria cinco por cinco, veinticinco, entonces ya se pasó.
I: Bueno, eso es algo.
Z: Gráfico
I: Muy bien, eso es interesante, ustedes tratan de basarse en la construcción, en vez de utilizar la información que te dan en el planteamiento.
Al: Pero independientemente del tamaño, es un hecho que éste [señalando uno de los lados de la figura sombreada] es más grande que éste [señalando el lado que mide 3]
I: No lo sé, esa información no te la están dando en el planteamiento, pero si tú te dejas ir por esa información visual, quizá puedas cometer errores.

El estudiante comienza a hacer deducciones hipotéticas con base en las referencias visuales de la representación gráfica. Se observa que presenta un anclaje a la representación visual, obstruyendo la capacidad de obtener una representación algebraica, ya que ignora la demás información proporcionada.

Al: Pero entonces este también mide 3 por 3, es la misma medida para todos los lados.
I: ¿Por qué?
Al: Bueno, suponiendo que este lado también mide lo mismo [señalando uno de los lados largos del rectángulo] seria 9 también y como éste es un cuadrado [señalando la figura sombreada] también mediría 9, entonces todos los lados son iguales.
I: ¿Entonces cuánto le asignarías?
Al: Sería 3 en todos los lados
I: Entonces, cada parte de la figura tiene un área de 9, ¿verdad?
Z: ¿Y 9 por 3? 27
I: Muy bien, si cuadraría lo que está haciendo Al; entonces lo que está haciendo es asignar de forma hipotética esta cantidad [señalando un lado de la figura sombreada].
Al: Sí, porque si estos lados fueran de 4 [señalando los lados del cuadrado sombreado] sería 16, entonces faltarían 11 para que fuera 27, pero no se puede dividir 11 exactamente entre estos dos [señalando los dos rectángulos] y si fuera 5 pues ya se pasaría.

Al llega a la respuesta correcta haciendo un tanteo de los posibles resultados que satisfagan las condiciones del planteamiento (MIAS), al encontrar el valor que satisface el planteamiento refuerza su respuesta dando contraejemplos que no cumplen con las condiciones.

I: Entonces tú ya tienes el área del cuadrado que es x^2 más los $6x$ de los rectángulos es igual a cuánto.
Z: A 27.
I: Muy bien.
Z: [Apunta en el pizarrón $x^2 + 6x = 27$]
I: Muy bien, esa ecuación nos representa lo que se plantea en el problema, ¿alguien puede resolverlo?
Al: Si se puede, pero… se despeja la x, pero ese 27…
Z: ¿Igualaste a cero? [preguntándole a Al]
Al: No
Z: ¿Por qué no?
Al: ¿Cómo?
Z: O sea, en lugar de que sea igual a 27 que sea igual a cero.
Al: Aaah, pues sí.
Z: Y ya obtienes un cuadrado perfecto.
Ab: Waaaw
Z: Y ya eso sería el cuadrado del primero, más el doble del segundo, por el cuadrado del tercero ¿no?

Ab: Trinomio cuadrado perfecto.
Z: Eso sí lo recuerdo.
Al: Pero eso que dijimos es para…
Z: ¿Para qué?
T: ¿Qué no es más fácil la del chicharronero?
Al: Sí, ¿con la fórmula general no?
I: Muy bien, si se dan cuenta aquí pasa algo.
Al: ¿Es que la otra es para desarrollar no?

Después de un buen rato de discusión de ideas, donde principalmente se presentaron errores de sintaxis al multiplicar y sumar expresiones, los estudiantes llegan a la representación algebraica correcta del planteamiento. Como se puede observar, los estudiantes van proponiendo distintas ideas para resolver la ecuación de segundo grado, algunas de las cuales no corresponden con un proceso de resolución; sin embargo, surge como propuesta la utilización de la fórmula general, comúnmente conocida como "del chicharronero". El investigador decide profundizar en la primer propuesta, que si bien desarrolla un trinomio cuadrado perfecto, en este caso no conduce a la resolución del problema, existe relación con el posible camino de resolución.

I: Exactamente, lo que ustedes están mencionando, eso del cuadrado del primero, más el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo, es para desarrollar un cuadrado perfecto y Z está tratando de desarrollar eso [señalando $x^2 + 6x = 27$], o sea, lo que ya está desarrollado lo está tratando de desarrollar, entonces lo que ustedes pueden tratar de hacer es factorizar, o sea, lo contrario a desarrollar, entonces vamos a tratar de obtenerlo.
I: Ustedes ya dijeron algo importante, que había que igualar esto a 0, ¿cómo quedaría?
T: $x^2 + 6x - 27 = 0$
I: Muy bien, entonces para factorizar esta expresión, ustedes deben de buscar dos números…
Z: Aaaah si, ya me acordé, que sumados den…
T: Que sumados den 6 y multiplicados den 27.
I: Muy bien, eso es lo que tiene que hacer.
M: Serían 9 y -3.
I: Entonces cómo quedaría, factorícenlo.
T: Equis más nueve por equis menos tres
I: Vamos a ver si es cierto [Escribe $(x + 9)(x - 3) = 0$ en el pizarrón] sólo vamos a comprobarlo. [Escribe $x^2 + 9x - 3x - 27 = 0$] reduciendo obtenemos [escribe $x^2 + 6x - 27 = 0$]; entonces, ya comprobamos que sí nos lleva a donde mismo. Entonces ¿qué valores puede tener x? [Escribe $x_{1=}$ $x_{2=}$] se supone que nosotros le tenemos que asignar un valor a x para que nos de cero a la hora de multiplicar.
I: Para que aquí me quede 0 [señalando el primer factor] y multiplicarlo por éste [señalando segundo factor] me quede 0, ¿cuánto le tendría que asignar a la x?

Ab: Cero
Al: Menos nueve
I: Muy bien, menos nueve más nueve.
Z: Cero
I: [Apunta x_1=-9] Y para que de este lado me quede 0 [señalando el segundo factor] ¿cuánto tendría que asignar?
M: Mas tres
I: Muy bien, [escribe x_2=3] entonces los valores que cumplen con la ecuación son -9 y 3, ¿cuál creen que sea el correcto para este planteamiento?
T: Tres
I: ¿Por qué?
T: Porque es positivo.

En el extracto de la entrevista, se observa que los estudiantes aportaron las ideas necesarias para llegar a la obtención del lado desconocido del cuadrado, sin embargo, la ausencia del dominio del Método Cartesiano dificulta en gran medida las cosas.

Reactivo: *Juan es quince años mayor que Santiago. La suma de las dos edades es 41 ¿Qué edad tiene cada uno?*

Z: ¿Todo es en ecuación?
I: Como lo quieras hacer.
M: Es que yo nunca se hacer estos.
Z: Él tiene quince y el mayor tiene 26.
I: ¿Si?
Z: Ah, bueno, lo quieres con ecuación, ¿verdad?
I: No, como puedan.
Z: Es que está difícil, la suma de las dos edades es 41.
T: ¿Quieres hacer ecuación? [Le pregunta a M]
M: Sí, no sé.
I: ¿Ya está?
M: No puedo.
Z : Si se puede M.

Como en muchos de los planteamientos anteriores, los estudiantes prefieren comenzar el abordaje del problema, utilizando estrategias numéricas; también aparecen las dificultades para obtener la expresión algebraica a partir del lenguaje común.

I: Bueno, las edades de las dos personas están relacionadas en cierto modo ¿no?
M: Si
I: ¿Qué relación tienen?
M: En que la suma de las dos va a dar 41.

I: Muy bien, y tú ya sabes que una persona tiene…
M: Más
I: Muy bien, más que la otra, entonces ya con eso puedes hacer el planteamiento, pásale M.
I: ¿Quién es mayor?
M: Juan
Z: Juan es quince años mayor.
I: Entonces, ¿Santiago cuántos años tiene?
M: Quien sabe
I: Entonces ¿cómo le puedes poner?
M: Juan tiene quince años más [escribe J=] es que no sé cómo ponerlo, bueno y Santiago [escribe S=x]

Los estudiantes comienzan a percatarse de las relaciones planteadas en el problema; al intentar construir la representación algebraica utilizan los símbolos literales como meras etiquetas, abrevian los nombres de las personas involucradas utilizando las iniciales. Lo anterior podría dificultar el planteamiento de la ecuación esperada, ya que no están utilizando las literales como cantidades sino como objetos (en este caso personas).

I: La edad de Santiago más la de Juan es igual a 41, muy bien, ¿y planteándolo con lo que obtuviste antes?
M: [Se queda pensando]
I: Tú ya obtuviste que la edad de Juan es $x + 15$ y la de Santiago es x, entonces ¿Qué puedes hacer?
Al: La suma de las dos edades es igual a 41, suma las dos edades.
Z: Sale JS, jajajaja
Al: No sumes los nombres, suma las edades.
M: ¿Es equis más equis más quince?
I: Sí, muy bien.
M: [Escribe $x + x + 15 = 41$]
I: Muy bien, ya tienes la ecuación, entonces ahora resuélvela.

Como se observa, el uso que dan a las literales (etiquetas) –como abreviación de los nombre de las personas– provoca ciertas dificultades al expresar las relaciones mencionadas en el planteamiento. Incluso Al hace muy explícito que no se deben sumar las personas, sino las edades de las personas, esto último los conduce a la expresión correcta. Después de obtener la ecuación correcta se pide a los estudiantes que la resuelvan y que encuentren las edades. Después de una serie de errores sintácticos (al sumar y al despejar la x), que fueron corregidos entre ellos mismos, llegan al resultado correcto. Al obtener el resultado tratan de darle sentido dentro del contexto del problema y lo hacen de forma exitosa.

Después de obtener las edades de ambas personas, se cuestiona a los estudiantes sobre el uso que se da a la variable en este caso y rápidamente contestan que se utiliza como incógnita, ya que la literal solo puede tomar un valor específico. Sin embargo, se les comenta que al inicio de la resolución, al plantear algebraicamente las edades de las personas, se trabaja con la variable como números general.

Reactivo: *Calcula los valores que puede tener la letra en las siguientes ecuaciones.*

a) $13x + 27 - 2x = 30 + 5x$

b) $(x + 3)^2 = 36$

Z: ¿Incógnita?
M: Sí
Z : Sí, es incógnita.
Ab: Entonces el siguiente,
Al: ¿Y los valores que puede tener la x?
Ab: Ah, es verdad.
Al : Yo hice estas ecuaciones [Les muestra lo siguiente]

$a)\ 13x + 27 - 2x = 30 + 5x$
$13x - 2x - 5x = 30 - 27$
$13x - 7x = 3$
$6x = 3$
$x = \frac{3}{6}$
$x = .5$

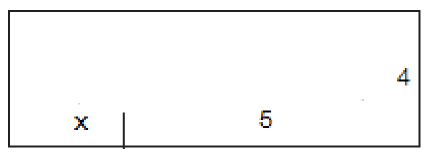
b) $(x + 3)^2 = 36$
$x^2 + 9 = 36$
$x^2 = 36 - 9$
$x^2 = 27$
$x = \sqrt{27}$
$x = 5.1$

Todos: [Lo dan como correcto]
D: [D tenía lo siguiente en sus apuntes
$(x + 3)^2 = 36$
$x^2 + 6x + 9 = 36$
$x^2 + 6x - 27$ …

Dos cosas se observan rápidamente, los estudiantes comienzan a identificar con mayor facilidad el uso que se da a la variable dentro de los planteamientos, lo cual es algo que puede beneficiar en la forma de abordarlos. Se realiza un esbozo lógico semiótico que conduce a tomar estrategias adecuadas.

Otro detalle que se observa es que el estudiante Al resuelve ambas ecuaciones y decide hacerlo mediante el MC; sin embargo, comete un error sintáctico en el proceso de resolución de la ecuación de segundo grado, al desarrollar el binomio cuadrado, sólo eleva al cuadrado ambos términos, lo cual lo conduce a una solución errónea. Al revisar las hojas de registro de D, se pudo observar que había comenzado la resolución de forma correcta, quizá si lo hubiera externado durante la entrevista hubiera generado una discusión de ideas para llegar al resultado correcto.

Reactivo: *Escribe una expresión para representar el área del rectángulo*



Z:	¿Número general? ¿O incógnita?
Ab:	Si es número general.
Al:	[Escribe $(x+5)(4)$]
Z:	¿Y por qué nada más por cuatro?
Al:	Porque el área es base por altura, entones la base es $x+5$ y la altura 4.
Z:	Aaah, si. ¿Pedía nada más el área?
Ab:	Si
Z:	Entonces sí está bien, pero yo creo que es número general.
Ab:	Era lo que estábamos viendo.
M:	Sí
Z:	Porque no te está pidiendo el valor de x, solo te está pidiendo la expresión.
M:	Sí
Z:	Es número general.
Al:	Ok

Los estudiantes muestran una mayor comprensión en los diversos usos de la variable, por lo regular cuando se les presentaba este tipo de planteamientos mostraban una necesidad de cierre y trataban de llegar a un resultado en específico. En este caso argumentan de forma clara el motivo de porqué se usa la variable como número general y obtienen la expresión que representa el área del rectángulo.

Reactivo: *Si el valor del área del rectángulo es de 40 u^2 ¿Cuál es el valor de x? (Seguimiento del planteamiento anterior.*

Ab: Aquí sí te está pidiendo el valor.
Z: Sí te está pidiendo el valor de x.
Ab: Si es una incógnita.
M, Ab Sí
Z: Y nada más es un resultado.
M: Y una variable
Z: Sí
Al: [Escribe que el valor de x es 5 y los demás no piden explicación alguna]

Como se observa, comentan rápidamente y sin dificultad el uso que se da a la variable, pero al obtener el valor de x Al no argumenta cómo es que obtuvo el valor de 5. Es muy probable que lo haya hecho mediante una deducción rápida, ya que la representación gráfica ayuda mucho.

Reactivo: *Considera la expresión* $40 - 15x - 3y = 17y - 5x$

a) ¿Cuál es el valor de y que corresponde a $x = 16$?

b) Para que el valor de y esté entre 1 y 5 ¿Entre cuáles valores debe estar el valor de x?

Ab: ¿Cuál es el valor de y que corresponde a $x = 16$?
Z: Ya te dieron el valor de y, nada más se tiene que tomar en cuenta uno ¿no?
Ab: Si
Z: ¿Es incógnita?
Ab: No, porque depende de x.
Z: Entonces es una relación funcional, sí.
Al: Aaah, ya le entendí, esta es la ecuación ¿no? [Señalando $40 - 15x - 3y = 17y - 5x$] entonces para saber cuál es el valor de y tenemos que sustituir el valor de x.
Z: Entonces sería por 16.
Al: Y aquí también [señalando $5x$], porque queremos saber el valor de y.
Z: $40 - 15(16) - 3y = 17y - 5(16)$, bueno ya lo sustituimos, ¿Qué prosigue?
Al: De un lado hay que dejar las y y del otro lado los valores numéricos.
Z: Entonces sería, ¿Qué pasamos? ¿El 80, no?
Z, Al, Ab [Entre los tres construyen
$40 - 15(16) - 3y = 17y - 5(16)$
$40 - 24 - 3y = 17y - 80$
$-3y - 17y = -80 + 24 - 40$
$-20y = 96$
$y = \frac{96}{-20}$
$y = -4.8$

D: [Revisa lo escrito y hace una corrección
$40 - 15(16) - 3y = 17y - 5(16)$
$40 - 240 - 3y = 17y - 80$

$$-3y - 17y = -80 + 240 - 40$$
$$-20y = 120$$
$$y = \frac{120}{-20}$$
$$y = -6$$

Z: ¿Entonces cuál es el valor de y?
M, Ab, D -6
Z: ¿Y es relación funcional, no?
D: Sí

A pesar de que el uso de la variable como relación funcional es el más complicado para los estudiantes, ellos lograron clasificarlo y proceder de forma correcta, haciendo la sustitución del valor específico en x y obteniendo el valor de y correspondiente. Aunque surgió un pequeño detalle en el proceso de resolución lograron identificarlo y corregirlo. Se observa claramente que todos aportaron ideas para la resolución del planteamiento.

Ab: Para que el valor de y esté entre 1 y 5 ¿Entre cuáles valores debe estar el valor de x?
Z: Esa no la entiendo.
D: Hay que despejar la x y le empezamos a asignar valores a x, ah, no, a y.
Z: Ya sustituimos más bien ¿no?
D: Pero es que éste es diferente
Z: No, es la misma.
D: Por eso es de la misma de acá arriba, aquí despejaron la y [señalando el ejercicio anterior].
Z: Ajá, es lo que acabamos de hacer.
D: Pero acá les decían que la x tenía un valor igual a 16.
Z: Por eso, la x era igual a 16, nosotros acabamos de despejar la y, que es igual a -6.
D: ¿Pero si el valor de la x fuera otro?
Al: D se refiere a que, por ejemplo, despejemos la x y van a quedar puras y; entonces ahora la x es igual a todo esto [señalando la expresión] a las y, todas esas y son igual a una x, ahora esas y hay que sustituirlas y resolverlo todo.
D: ¿Por qué crees que es relación funcional? Le podemos dar diferentes valores a x y a y, entonces hay que despejar y le tenemos que dar valores a y de 1 a 5.
Z: ¿O sea, que constantemente hay que estarla cambiando?
Al: Sí

Con este pequeño extracto de la entrevista clínica se observa que Z tiene dificultades para comprender la forma de proceder al momento de enfrentarse a esta situación que implica trabajar con la variable como relación funcional; sin embargo, con los aportes de Al y de D, queda claro lo que se tiene que realizar y la característica principal que hace que este problema sea clasificado como de relación funcional, ya que explicitan que el valor que le asignen a y va a tener que variar constantemente.

Al final, aunque no realizaron el despeje de la x por completo, ya que llegaron hasta la expresión $40 - 10x = 20y$, al momento de hacer las sustituciones encontraron el rango de valores entre los cuales estaría. Así, realizaron la sustitución de uno en uno, utilizando un dominio discreto; de igual forma, al expresar el codominio lo expresaron de forma discreta.

Observaciones

1. Al alentar la participación de los estudiantes y lograr que expresaran diversas ideas, se propició la reorganización de conocimientos y la complementación de textos, generando desempeños competentes.
2. Después de una secuencia de resolución de problemas se observa que los estudiantes prestan más atención al tipo de uso que toma la variable en cada planteamiento, lo cual conduce a actuaciones competentes.
3. Al realizar el esbozo lógico semiótico, los estudiantes tienden a elegir un camino de resolución donde el uso que se da a la variable es más concreto.

Capítulo 6

Resumen de observaciones

A continuación señalaremos una serie de observaciones generales obtenidas a lo largo de la investigación. La primera y más notable es la gran dificultad que tiene los estudiantes de primer semestre en la resolución de problemas algebraicos. Aproximadamente el 50% de los estudiantes no lograron contestar un solo reactivo del diagnóstico correctamente, por lo que resulta necesario realizar un análisis profundo de su desempeño.

Otro aspecto que resulta importante mencionar es que en los planes de estudio no se menciona los diferentes usos que se puede dar a una variable, ni se incluye como contenido que se tenga que trabajar, por lo tanto resulta razonable que los docentes no presten atención a dicho aspecto de la variable, que resulta de suma importancia para el dominio del álgebra. En el mejor de los casos se da un tratamiento conceptual.

La mayoría de los libros ofrece una definición escueta del término de variable y no se hace hincapié en esa concepción multifacética. Raramente se enfatiza en ese carácter cambiante o dinámico que posee.

Una observación más fue que al momento de realizar las entrevistas clínicas grupales los estudiantes lograron llegar a las respuestas correctas de los planteamientos, a diferencia de las entrevistas clínicas individuales. En las grupales, los muchachos compartían sus ideas respecto a la forma de abordar los problemas, incluso los sujetos pertenecientes a estratos bajos de desempeño hicieron aportaciones enriquecedoras.

Ahora, se realiza el resumen de las observaciones obtenidas específicamente respecto al concepto de variable y los usos dados por los estudiantes. En seguida se trata de dar una respuesta muy puntual a las preguntas de investigación planteadas en un inicio, después de haber analizado el trabajo de los estudiantes.

Preguntas de investigación

¿Cuáles son las características del desempeño algebraico del estudiante de nivel medio superior cuando resuelve problemas relacionados con los diversos usos de la variable?

Se pudo observar que la mayoría de los estudiantes, tano de primer semestre como de quinto, poseen una concepción muy reducida del concepto de variable, muchos de ellos utilizan la palabra incógnita para definir la variable, dándole un sentido estático. De igual forma, una manera recurrente de definirla es como un valor desconocido, dejando de lado el atributo de cambio y reduciéndolo a "una" cantidad por conocer.

Algo notable es que ningún estudiante, ni del primer semestre ni del quinto, se refirió a ésta como un objeto matemático que se puede utilizar de diferentes maneras, la mayoría la definió como una literal que puede representar un valor específico y algunos otros mencionaron que es una letra, cuyo valor puede cambiar; sin embargo, nadie mencionó esa doble manera de uso.

Ya se mencionó que todos los instrumentos que se usaron para obtener información del desempeño de los estudiantes estuvieron integrados exclusivamente por problemas, se pudo observar que para los estudiantes resultaba complejo analizar y extraer la información necesaria para su solución, incluso, en ocasiones extraían información irrelevante.

Una observación más es que, en muchos de los casos, al utilizar las representaciones tabulares como auxiliares para organizar y expresar la información de los planteamientos los estudiantes logran la obtención de las representaciones algebraicas de forma más rápida y fácil.

Al pedirles a los estudiantes que representaran mediante una expresión algebraica un problema determinado, se obtiene una conjunto de respuestas muy variado, que va desde ecuaciones, expresiones generales, hasta relaciones funcionales, siendo estas últimas las más complejas de expresar de forma correcta, de igual forma hay estudiantes que tienden a utilizar lenguaje sincopado para formular sus respuestas.

Algo notable es que en la mayoría de los planteamientos en los que se pedía al estudiantes que obtuviera una cantidad, cuya respuesta se tenía que formular mediante una expresión algebraica general, los estudiantes tendían a obtener una cantidad específica, realizando el planteamiento de una ecuación y la manipulación algebraica de esta, aunque esto no obedeciera al contexto del problema.

Se pudo observar que para los estudiantes fue complicado comprender lo que se les pedía o lo que se tenía que realizar en los planteamientos que involucraban relaciones funcionales.

En algunas ocasiones los estudiantes no lograron darle sentido a la utilización de las literales para representar cantidades generales, esto se puede observar con claridad en la obtención de reglas de sucesiones.

¿Cuáles son las principales dificultades que presentan los estudiantes al resolver problemas o ejercicios relacionados con los diversos usos de la variable?

Las tres principales dificultades identificadas son:

a) Un anclaje a la operatividad de la variable como incógnita, imposibilitando la obtención de expresiones generales.

b) Manipular la variable simbólica (simplificar, desarrollar).

c) Transitar entre diversos textos (representación algebraica, geométrica, tabular o lenguaje común).

¿Cuáles son las principales tendencias cognitivas presentes en los estudiantes al resolver problemas relacionados con los diversos usos de la variable?

a) La presencia de un proceso de abreviación de los textos concretos para poder producir reglas sintácticas nuevas.
b) El retorno a situaciones más concretas, cuando se presenta una situación de análisis.
c) La imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse momentos antes.
d) Lecturas hechas en estratos del lenguaje que no permitirán resolver la situación problemática.
e) La articulación de generalizaciones erróneas.
f) La presencia de mecanismos inhibitorios.

g) La presencia de obstrucciones provenientes de la semántica sobre la sintaxis y viceversa.

Con las observaciones anteriores se llega a la conclusión de que los objetivos de la investigación que fueron: caracterizar el desempeño algebraico de los estudiantes de educación media superior, asociada a la resolución de problemas donde es necesario llevar a cabo el uso de los diversos usos de la variable, como número general, relación funcional e incógnita y generar una caracterización de las principales tendencias cognitivas presentes en los estudiantes al resolver problemas relacionados con los diversos usos de la variable, se atendieron.

Bibliografía

Abrate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Primera ed. Universidad Nacional de Villa María. Buenos Aires, Argentina.

Huesca, B. (2006) *Resolución de Problemas Verbales Aritmético-Algebraicos con el Uso del CAS (Computer Algebra Systems) como Manipulador Simbólico. Estudio Clínico sobre la Relación Sintaxis-Semántica Algebraicas. Tesis doctoral.* CINVESTAV-IPN, México.

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México, Grupo Editorial Iberoamerica.

Filloy, E. y Kieran, C. (1989) El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, Vol. 7, No. 3, págs. 229-240.

Filloy E., Puig, L. y Rojano, T. (2008) El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, Vol. 26, No. 3, págs. 327-341.

Gallardo, A. y Rojano, T. (1988). Difficulties Areas in the Adquisition of the Arithmetics and Algebraic Language. *Recherches en Didàctiques des Mathèmatiques*, Vol. 9, No. 2, págs. 155-188. France.

Ímaz, C., y Moreno, L., (2014). Cálculo, su evolución y enseñanza. México. Trillas

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*

Küchemann, D., (1978). *Children's Understanding of Numerical Variables*. Mathematics in School, Vol. 7, No. 4, págs. 23-26.

OECD (2013) Informe de Resultados de PISA 2012.

Radford, L. (2000) *Signs and Meanings in Student´s Emergent Algebraic Thinking: A Semiotic Analysis*, Educational Studies in Mathematics.

Radford, L. (2001) *The Historical Origins of Algebraic Thinking*. En Sutherland, R., Rojano, T., Lins, R., Bell, A., (eds.) Perspectives on School Algebra, Dordretch, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Rojano, T. (1985) *De la aritmética al álgebra. Tesis doctoral*, CINVESTAV-IPN, México.

Rubio, G. (1994) *Modelos didácticos para resolver problemas verbales aritmético/algebraicos: Tesis teóricas y observación empírica. Tesis doctoral*, CINVESTAV-IPN, México.

SEP. (2011). *Guía para el maestro*. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas. México: SEP.

SEP. (2013). Programa sectorial de educación 2013-2018. Capítulo I, Diario Oficial de la Federación. http://www.dof.gob.mx/nota_detalle.php?codigo=5326569&fecha=13/12/2013

Schöenfeld, A. & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher*. 81 (6), 420-427.

Trigueros. M., S. Ursini y R. Quintero. (1996) Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra. *Enseñanza de las ciencias*, 14(3), 351-363.

Ursini, S., (1993) *Pupils' approaches to different characterizations of variable in Logo*. Thesis submitted in fulfilment of the requirement for the Ph. D. Degree of the University of London.

Ursini, S., F. Escareño, D. Montes y M. Trigueros. (2005) *Enseñanza del Algebra Elemental. Una propuesta alternativa.* México. Trillas.

Wagner, S. (1983) What Are These Things Called Variables? *Mathematics Teacher* 76. págs. 474- 479.

Wagner, S. (1981) *An analytical framework for mathematical variables*. Proceedings of the Fifth Conference of the Intemational Group for Psychology of Mathematics Education. Grenoble, Francia.

Wertsch, J. V. (1978). *Vygotsky y la formación social de la mente*. España: Paidós.

Zazkis, R. (1999) Interviewing in Mathematical Education Research. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(4), 429-565.

Anexos

Anexo 1 Instrumento diagnóstico A

IPN
CECyT No. 4
Lázaro Cárdenas del Río

Cuestionario A

Cinvestav
Departamento de
Matemática Educativa

Nombre del alumno: ____

Grupo: ________ Unidad de Aprendizaje: Matemáticas I Ciclo escolar: 2015-B

Instrucciones

Sección I.- Efectúa las operaciones correspondientes para encontrar el resultado.

1.- Según la escala en un mapa de carreteras, 3cm corresponden a 40km. Si en el mapa, dos ciudades están separadas 30cm, ¿cuál es la distancia real entre ellas?

2. Si en cada envase caben $\frac{5}{6}$ de litro, ¿cuántos litros hay en 12 envases y en la mitad de otro?

3.- Ana, Beatriz, Carmen y Delia están en una sala de espera en la que sólo hay dos sillas. ¿De cuántas maneras pueden ocupar las sillas si no nos interesa el orden

4.-Completa la tabla y grafica la función: $f(x) = 2x + 5$

x	*f(x)*
-1	
0	
1	
2	
3	

5.- Calcula la altura de un triángulo isósceles, si su base mide 7cm y cada uno de sus lados mide 5cm.

6.- Para los datos: 1, 3, 5, 2, 9, 12, 4, 5, calcula:

a) la media aritmética,

b) la mediana,

c) el rango,

d) la desviación media y

e) la moda.

7.- Una carretera tiene una pendiente de 4°30'.Calcula la distancia que se debe recorrer para alcanzar su altura máxima, que se encuentra a 150 m de altura.

8.- Resuelve la siguiente ecuación: $\sqrt{4x+1} = 5 - x$

Instrucciones

Sección II.- Subraya la respuesta correcta y anota todas las operaciones que efectúes en la hoja adjunta indicando el problema al que corresponden.

1.- Tres cuadrillas de piscadores levantan una cosecha en 10 días. ¿En cuántos días harían el mismo trabajo 15 cuadrillas ?

a) 5 b) 2 c) 4 d) 15

2.- ¿Cúal es el máximo común divisor de 72 y 90?

a) 6 b) 14 c) 22 d) 18

3.- Un ama de casa compró $4\frac{1}{2}$ m de tela para hacer trapos de cocina. Si para cada trapo utiliza $\frac{3}{4}$ m de tela, ¿cuántos trapos podrá hacer?

a) 8 b) $5\frac{1}{3}$ c) $5\frac{1}{4}$ d) 6

4.- Si la población de una ciudad es de 20 000 personas y 1600 son niñas, ¿qué porcentaje representa esta cantidad?

a) 18% b) 8% c) 12% d) 14%

5.- 3 es a 27 como

a) 5 es a 25 b) 27 es a 3 c) 8 es a 64 d) 4 es a 36

6.- Ubica en la recta numérica $-\frac{4}{3}, e, \pi, -\sqrt{2}, 0, -1$

7.- Una bolsa oscura y opaca contiene bolas blancas, rojas, verdes y negras. Se realizaron 100 extracciones al azar de una bola a la vez, la que se devolvía antes de hacer la siguiente extracción. El color blanco salió 32 veces, el rojo 21 veces, el verde 35 veces y el negro 12 veces.

I) De los siguientes eventos, ¿cuál tuvo la frecuencia relativa de 0.88 ?

a) roja o verde b) blanca,verde o roja c) blanca,verde y negra

d) roja, verde o negra

II) Si en total la bolsa contiene 10 bolas, estima la cantidad que hay de cada color.

Anexo 2 Instrumento diagnóstico B

Evaluación Diagnóstica

Cuestionario B

IPN
CECyT No. 4
Lázaro Cárdenas del Río

Cinvestav
Departamento de
Matemática Educativa

Nombre: ____ Grupo: _________ Fecha: _________

Instrucciones: efectúa las operaciones correspondientes para encontrar el resultado. Escribe con claridad en las hojas adicionales tus procedimientos. No borres, solo cruza lo que consideres incorrecto.

1. Hay tres líneas de autobuses que viajan de la ciudad de México a la ciudad de Cuernavaca. La línea *A* tienen salidas cada 20 minutos, la línea *B* cada 30 minutos y la línea *C* cada 45 minutos. Si en este momento está saliendo un autobús de cada una de las tres líneas, ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que nuevamente salgan autobuses de las tres líneas simultáneamente?
2. El área de un rectángulo está expresada por $24x^2 + 13x - 2$. Si uno de los lados mide $(3x + 2)$, ¿cuánto mide el segundo?
3. La afirmación: "Las diagonales del paralelogramo se cortan en su punto medio", se deduce a partir de las propiedades del paralelogramo. ¿Cuáles son las propiedades del paralelogramo? ¿Qué criterios o propiedades se requieren para justificar La afirmación?
4. Hay tres apilamientos. En el primero hay 5 piedras menos que en el segundo y en el tercero hay 15 más que en el segundo. En total hay 31 piedras. ¿Cuántas hay en cada apilamiento?

5. Un grifo llena un tanque de agua en dos horas, mientras que un segundo grifo lo llena en tres horas. Si ambos grifos se abren al mismo tiempo para llenar el tanque, ¿en cuánto tiempo se llena el tanque?

6. De una muestra aleatoria de estudiantes de secundaria se obtuvieron los siguientes datos:

Edad en *años*	12	13	14	15	16
Frecuencia	7	5	8	6	3

¿Cuáles son, respectivamente, la media, la mediana y la moda de estos datos?

7. De mediados de junio a la fecha, en una escuela secundaria de la delegación Miguel Hidalgo en el D.F., se han registrado los días de lluvia, obteniéndose la siguiente información:

Intensidad	Sin lluvia	Lluvia ligera	Lluvia moderada	Lluvia intensa
Frecuencia (días)	17	14	11	8

Tomando como base esta información para hacer un pronóstico inmediato, ¿cuál es la probabilidad de que el día de mañana no se registre lluvia intensa?

<u>Instrucciones: selecciona la opción correcta, marcando la letra correspondiente con × y en las hojas adicionales escribe con claridad tus procedimientos para elegir las respuestas. Si te equivocas, no borres, solo cruza lo que consideres incorrecto</u>.

8. El área de un rectángulo está expresada por $16x^2 + 6x - 1$. Si uno de los lados mide $(8x - 1)$, la medida que corresponde al perímetro del rectángulo es:

A) $20x - 3$ B) $20x$ C) $11x - 3$ D) $11x$

9. A continuación se muestran los tres primeros casos de una secuencia de figuras.

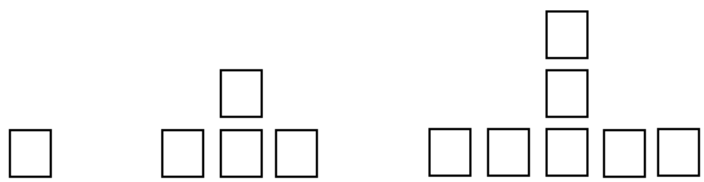


Figura 1 Figura 2 Figura 3

¿Cuántos cuadrados tendrá la figura número 10?

A) 27 B) 28 C) 29 D) 30

10. Si ahora n representa el número de figura, ¿cuál es la regla que corresponde a la cantidad de cuadrados en cada figura?

A) $3n$ B) $3n - 1$ C) $3n - 2$ D) $3n - 3$

11. El pie de una escalera está separada 2 metros de un muro. El ángulo que forma la escalera con el piso es de 76°. La expresión que corresponde a la longitud (L) de la escalera es:

A) $L = \frac{2}{\cos 76°}$ B) $L = \frac{1}{\cos 76°}$ C) $L = \frac{1}{2 \cos 76°}$ D) $L = \frac{4}{\cos 76°}$

12. Un naturalista realiza un estudio sobre cuatro especies de pinzones en una isla. Sus resultados para las cantidades de cada población son los siguientes:

- Hay 84 pinzones de la especie X.
- Por cada 7 pinzones de la especie X hay 4 de la especie Y.
- Por cada 2 pinzones de la especie Y hay 5 de la especie Z.
- Por cada 60 pinzones de la especie Z hay 8 de la especie W.

¿Cuántos pinzones hay de la especie W?

A) 12 B) 16 C) 22 D) 30

13. Seguramente has observado que al final de los partidos de futbol aparecen estadísticas con información importante sobre los equipos. La tabla representa algunos de los datos obtenidos en un partido jugado en el Estadio Azteca, inmueble ubicado en México, Distrito Federal, y que tiene una capacidad para 110 000 espectadores.

	México	España
Posesión del balón	38%	62%
Tiros de esquina	8	5
Tiros al arco	13	11
Amonestados	5	5
Faltas	15	16
Goles	3	2

De todos los tiros al arco que hizo México, 3 fueron goles. ¿Cuál es su porcentaje de efectividad?

A) 15.4% B) 17% C) 21.7% D) 23%

14. La siguiente tabla muestra el costo (*Q*) de la renta de un VW clásico en función de la distancia recorrida (*x*). ¿Cuál es la tarifa correspondiente?

Distancia (*x*) recorrida en kilómetros	0	150	250	450
Costo (*Q*) en pesos	150	322.5	437.5	667.5

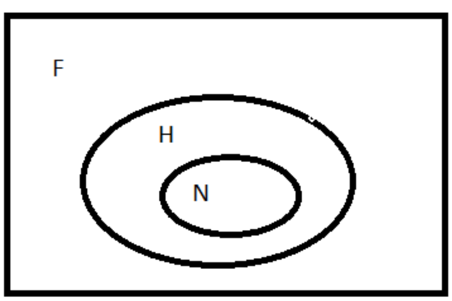
A) $Q = 1.15x + 125$ B) $Q = 1.15x + 150$ C) $Q = 1.25x + 125$ D) $Q = 1.25x + 150$

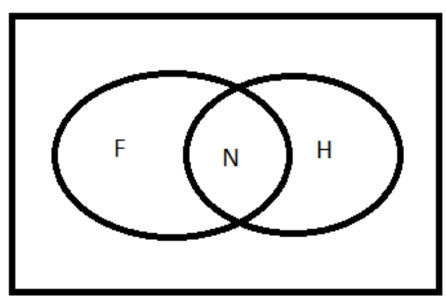
15. Considerando los eventos:

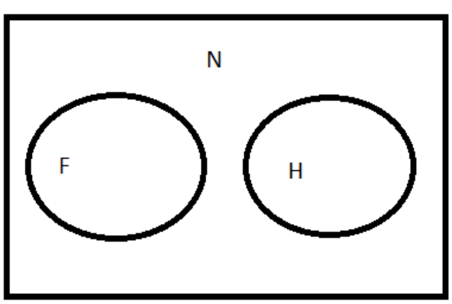
F = {"Que en la mañana no arranque el coche de Luis"}, H = {"Que Luis desayune hot cakes"} y

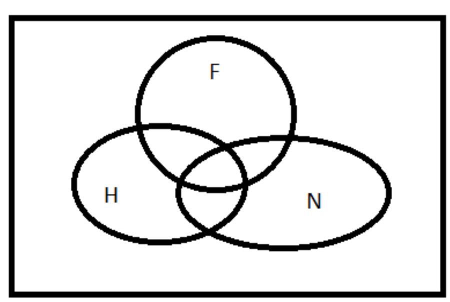
N = {"Que en la mañana no arranque el coche y que Luis desayune hot cakes"}

El diagrama que representa al evento N es:

A)


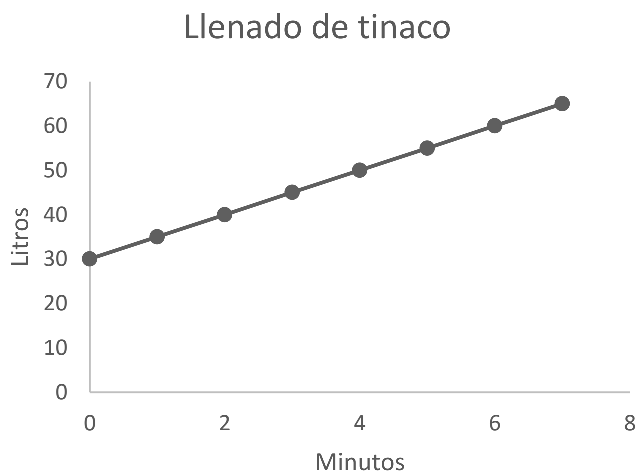
B)


C)


D)


Anexo 3 Instrumento variable 1°

1. La siguiente gráfica muestra el llenado de un tinaco



   d) Describe el gráfico que se te presenta
   e) Realiza la representación tabular de dicha situación
   f) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa esa situación?

2. Construye un rectángulo en el que sus lados midan $(x+5)$ y $(y+4)$ ¿Cuánto mide su área?

3. El valor del área de un cuadrado más 16 es igual a 2 veces el valor de su perímetro. Ramón propuso la siguiente ecuación para resolver el problema $4x+16=2x$ ¿Te parece correcto lo que planteó? Argumenta tu respuesta construyendo tu propia expresión.

4. Dada la ecuación de la recta $y=2x+1$ ¿Están los puntos (3,7) y (2,8) en la recta? El valor de *y* de un punto de esta recta es $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es el valor correspondiente de *x*?
5. Observa las siguientes figuras

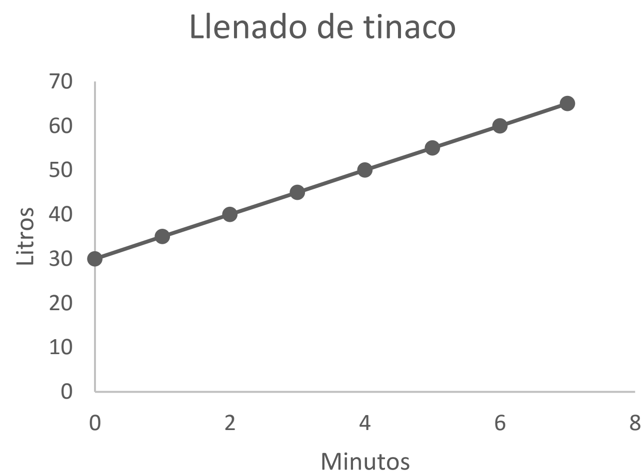
Número de puntos	**1**	**4**	**9**

d) ¿Cuántos puntos habrá en la figura 4?
e) Dibuje la figura 5 y dé el número total de puntos
f) Imagina que puedes seguir dibujando figuras hasta la figura m ¿Cuántos puntos en total tendrá esa figura?

6. Inventa y resuelve un problema con base en la siguiente ecuación $2x+180=5x$
7. ¿Qué es una variable?

Anexo 4 Instrumentos variable 5°

1. La siguiente gráfica muestra el llenado de un tinaco



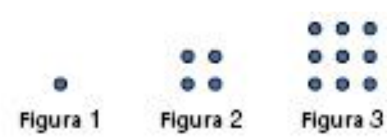
   a) Describe el gráfico que se te presenta
   b) Realiza la representación tabular de dicha situación
   c) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa esa situación?

2. Construye un rectángulo en el que sus lados midan $(x + 5)$ y $(y + 4)$ ¿Cuánto mide su área?

3. El valor del área de un cuadrado más 16 es igual a 2 veces el valor de su perímetro. Representa algebraicamente el enunciado y resuelve. ¿cuánto mide el lado del cuadrado?

4. Considera la expresión $y = -x + 5$. Si los valores de x varían entre -4 y 5 ¿Cuándo alcanza y su valor máximo? ¿Cuándo alcanza y su valor mínimo? Arguméntalo utilizando una representación gráfica

5. Observa las siguientes figuras



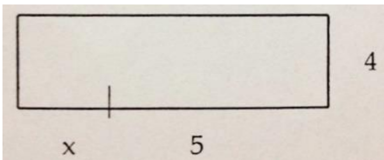
Número de puntos	**1**	**4**	**9**

g) ¿Cuántos puntos habrá en la figura 4?
h) Dibuje la figura 5 y dé el número total de puntos
i) Imagina que puedes seguir dibujando figuras hasta la figura m ¿Cuántos puntos en total tendrá esa figura?

6. Inventa y resuelve un problema con base en la siguiente ecuación $2x + 180 = 5x$
7. ¿Qué es una variable?

Anexo 5 Instrumento para entrevistas clínicas

1. Escribe cuantos valores puede tomar la letra en las siguientes expresiones
    a. $x + 2 = 2 + x$
    b. $3 + a + a + a + 10$
    c. $4 + x^2 = x(x + 1)$
2. Escribe una expresión para representar el perímetro del rectángulo (recuerda que para calcular el perímetro de un rectángulo se suman las longitudes de todos los lados):



3. Considera $x + 3 = y$

a) ¿La x pude tomar un valor cualquiera?

b) ¿La y pude tomar un valor cualquiera?

c) ¿La x y la y pueden tomar un valor cualquiera al mismo tiempo?

d) Si queremos que el valor de y sea mayor que 3 pero menor que 10 ¿Qué valores puede tomar x?

4. Observa estas dos expresiones: $n + 2$ $2 * n$

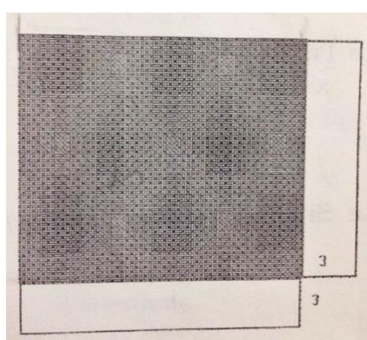
¿Cuál de las dos representa un valor más grande? Justifica tu respuesta

5. En una báscula, para cada kilogramo la charola se desplaza cuatro centímetros.

a) ¿Cuál es la relación entre el peso de la mercancía y el desplazamiento de la charola?

b) Si una charola se desplaza 10 centímetros ¿cuánto pesa la mercancía?

6. El área total de la figura es 27 ¿cuál es el área del cuadrado sombreado?



7. Juan es quince años mayor que Santiago. La suma de las dos edades es 41 ¿Qué edad tiene cada uno?
8. Reescribe en lenguaje matemático y especifica el uso que se le da a la variable

a) Un número desconocido multiplicado por la suma del mismo número más 12, es igual a 6

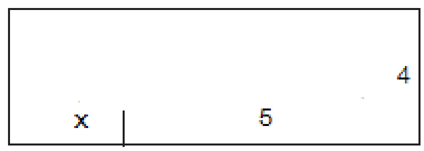
b) Un número desconocido dividido entre 10 y el resultado sumado a quince

9. Calcula los valores que pude tener la letra en las siguientes ecuaciones

a) $13x + 27 - 2x = 30 + 5x$

b) $(x + 3)^2 = 36$

10. Escribe una expresión para representar el área del rectángulo



a) Si el valor del área del rectángulo es de 40 u^2 ¿Cuál es el valor de x?

11. Considera la expresión $40 - 15x - 3y = 17y - 5x$

a) ¿Cuál es el valor de y que corresponde a $x = 16$?

b) Para que el valor de y esté entre 1 y 5 ¿Entre cuáles valores de estar el valor de x?