CENTRO DE INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS

AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

¿ES EL CERO EL MISMO NÚMERO PARA TODOS?

TESIS

Que presenta

DANIEL MÉNDEZ SÁNCHEZ

Para obtener el grado

MAESTRO EN CIENCIAS EN LA

ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA.

Directoras de la tesis

DRA. AURORA GALLARDO CABELLO
DRA. ALICIA BRUNO CASTAÑEDA

Ciudad de México. OCTUBRE, 2016.

Resumen

En este trabajo se realizó una investigación sobre los distintos significados que los estudiantes de secundaria le atribuyen al cero a partir de la resolución de problemas. Para dar sustento a nuestra investigación, recurrimos a un análisis histórico de la emergencia del cero en distintas épocas. Se hizo un recorrido de la emergencia del cero en la Cultura China, se reconoció el evitamiento de este número importante dentro de la Cultura Griega y el manejo del cero durante la Edad Media con Simon Stevin.

En dicho recorrido observamos el vínculo tan estrecho que existe entre los objetos matemáticos y el imaginario colectivo en el que se desarrollan. Así, el contexto cultural de China, basado en la relación de los opuestos, dio paso a la emergencia y manejo del cero y la negatividad en la resolución de problemas de la vida cotidiana. En el caso de la Cultura Griega, el principio de no contradicción y la demostración por reducción al absurdo serían los elementos que inhibirían el uso del cero y la negatividad. Por su parte Simon Stevin lograría establecer un nuevo concepto de número, lo cual daría paso a la concepción del cero como el punto de referencia e inicio de la recta numérica.

Este acercamiento histórico, junto con las diversas investigaciones realizadas por Gallardo (2002) y Gallardo y Hernández (2005, 2006, 2008 y 2009), nos permitieron comprobar la importancia del cero en la comprensión de los enteros, lo que nos llevó a plantearnos la existencia de diversos significados atribuidos a este concepto matemático.

Al utilizar el método histórico-critico, pudimos contrastar las diversas concepciones del cero en distintos momentos de la historia con las explicaciones que los estudiantes de secundaria dan al resolver problemas. De este movimiento recurrente de ida vuelta pudimos definir tres significados atribuidos al cero: el cero Griego, el cero Chino y el cero de Stevin.

El acercamiento a las explicaciones que los estudiantes hacen del cero, permitió situar al cero como un concepto cambiante, que requiere un tratamiento especial en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Abstract

In this dissertation a research was made on the different meanings that secondary students assign to the number zero based on problem solving. In order to support our research, we turn to an historical analysis on how the zero emerged in different times. A journey through the emerge of the zero in the Chinese Culture was made, the avoidance of this important number in the Greek Culture was recognized, and a review on how the zero was handled during the Middle Ages by Simon Stevin was carried out.

In the aforementioned journey, we observe the strong bond that exists between the mathematical objects and the collective imagination in which they are developed. Thus, China's cultural context, based in the *unity of opposites, yield to the emergence and handle of the zero, and the negativity in problem solving on everyday life. Regarding the Greek Culture,* the *principle* of *non-contradiction and the reductio ad absurdum method of demonstration would be the elements that would inhibit the use of the zero and the negativity. For his part, Simon Stevin, would have managed to establish a new concept of the number, which would have been a prelude to the idea of the zero as the point of reference and beginning of the number line.*

This historical approach, along with the various researches carried out by Gallardo (2002) and Gallardo and Hernandez (2005, 2006, 2008 y 2009), allowed us to verify the importance of the zero in the understanding of whole numbers, which enabled us to contemplate the existence of diverse meanings conferred to this mathematical concept.

By using the historical-critical method, we were able to contrast the various conceptions about the zero in different moments of history with the explanations that secondary students provided when solving problems. Parting from this recurrent back and forth movement, we could define three meanings conferred to the zero: the Greek zero, the Chinese zero, and Stevin's zero.

The closeness to the explanations that students offered about the zero, allowed us to place it as a changing concept, which requires a special treatment in the teaching and learning process.

Introducción

El estudio e investigación de los conceptos matemáticos nos invita a abrir la “caja de Pandora”, pues en el desarrollo de la humanidad, estos conceptos se han mostrado y transformado de formas multifacéticas, generando un alto grado de complejidad en su comprensión.

Uno de estos conceptos “cambia-formas” es el cero. A lo largo del desarrollo de diversas culturas, se puede seguir un rastro de la emergencia de dicho concepto y de las variadas concepciones que se han tenido de él a partir del imaginario colectivo donde se manifiestan.

No obstante, tal seguimiento requiere, cuando no exige, un acercamiento al pasado del concepto para comprender su presente, el cual se muestra de múltiples formas en las interpretaciones y concepciones que hacen los estudiantes del mismo.

En diversos estudios, Gallardo (1994-2002) hace un acercamiento a profundidad de las formas y sentidos de uso que los estudiantes de secundaria manifiestan del cero y los negativos. En estos estudios deja al descubierto la profunda relación que existen entre ambos conceptos y resalta la importancia de hacer un recorrido histórico de la emergencia del cero y los negativos para comprender las distintas manifestaciones de los estudiantes en la resolución de problemas.

Este énfasis histórico ya lo manifiesta Lizcano (1993), señalando que en diversas culturas antiguas, la emergencia del cero y la negatividad se han hecho presentes en distintos momentos y lugares del planeta. De igual forma estas manifestaciones matemáticas han estado imbuidas de las creencias y concepciones que rodean a una cultura en el espacio y en el tiempo. Dicho conocimiento logra trascender gracias a que los conceptos matemáticos hacen sentido en la vida cotidiana donde son usados. Y es allí mismo donde resulta necesario indagar la trascendencia del cero.

Considerando lo anterior, en esta investigación se hizo una revisión histórica de la emergencia del cero. Dicha revisión nos llevó a considerar el peso ideológico que han tenido dos de las distintas culturas antiguas en el desarrollo de la ciencia. Aunque el cero se manifestó en culturas tan diversas como la cultura Hindú, la cultura Egipcia o la Cultura Maya, la revisión histórica nos permitió comprender el choque cognitivo que generó el cero en la Cultura Griega y en la Cultura China.

Por un lado, los griegos clásicos, basados en el principio de no contradicción y las demostraciones por reducción al absurdo, negaron y evitaron al cero y los negativos, limitando el conocimiento y aceptación de los mismos. Debido a la gran influencia de la Cultura Griega en el desarrollo de la humanidad, dicho evitamiento permanecería por siglos hasta que Hankel en el siglo XIX establece la extensión del dominio numérico.

Por su parte, la Cultura China intentaría comprender el mundo basado en la relación existente de todos los opuestos. Así el “Dao” (representación simbólica del ying y el yang) agruparía a todos los pares dialécticos que hacen mover al mundo. Y entre estos pares dialécticos encontraríamos a los nombres *zheng* y *fu*, los cuales estarían vinculados a partir de *wu*. Lo anterior, en términos actuales no sería sino la representación de lo positivo y lo negativo que se encuentran relacionados a partir del cero. Es decir, mientras que en la Cultura Griega existe un evitamiento del cero y la negatividad, la Cultura China tendría como principio básico aceptar y manejar la negatividad a partir del pivote que nosotros consideraríamos el cero.

Debido a la importancia que tienen las distintas concepciones que manifiestan los estudiantes, para esta investigación se recurrió al método histórico-crítico para tratar de comprender las expresiones de los estudiantes en torno al cero. Este viaje constante de ida y vuelta nos encaminó en la construcción de este trabajo.

Así, en el capítulo uno se presenta un acercamiento al contexto institucional en el que se desarrolla la enseñanza de las matemáticas: la Escuela Secundaria en México. Se hace un recorrido por su historia y por la situación en la que se encuentra la enseñanza del cero en los tres grados de la educación secundaria.

En el capítulo dos se realiza una revisión histórica del concepto cero, para ello, y basándonos en Lizcano (1993), se describe la situación del cero en la Cultura China y la Cultura Griega. Se hace énfasis en las diferencias existentes entre ambas culturas. De igual forma se indaga sobre la aparición del cero en la recta numérica, lo cual será un aporte de Simon Stevin en el siglo XVI.

Para el tercer capítulo se recurre a una revisión de diversos estudios previos en torno al cero. En ellos se trata de describir de manera general los hallazgos que otros investigadores han tenido con respecto al cero y los negativos. De igual manera se enfatizan los distintos sentidos de uso que manifestaron los estudiantes en el manejo del cero al resolver distintos problemas matemáticos.

A partir de lo anterior, el capítulo cuatro establece los objetivos de esta investigación. Para ello se hace una descripción de los elementos teórico-metodológicos que dan sustento a nuestro trabajo. Se establecen las categorías de análisis, resultado de la revisión histórica de la emergencia del cero y de las distintas expresiones que manifiestan los estudiantes ante la resolución de problemas.

En el capítulo cinco se realiza el análisis de las respuestas de dos estudiantes de nivel secundario: Guadalupe, estudiante mexicano que recibió sus estudios en una Telesecundaria en un ambiente de alta marginación. De igual forma se presenta el análisis de la entrevista de Héctor, un estudiante de un Instituto de Educación Secundaria (IES), de Tenerife, España.

Por último, en el capítulo seis, se muestran las conclusiones del estudio con respecto a los objetivos planteados. Se pone de relieve la importancia que tienen las distintas concepciones del cero que manifiestan los estudiantes y como están relacionadas con las distintas manifestaciones del cero mostradas a lo largo de la historia. También se muestra la preeminencia de algunos significados del cero como resultado de los procesos de enseñanza.

En general, este trabajo pretende agregar el “pequeño grano de arena” para la discusión sobre la importancia que tiene ir a las explicaciones de los estudiantes, donde los conceptos matemáticos tienen y hacen sentido. Se espera que de alguna manera, esta investigación aporte elementos para enriquecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de algo que se ha considerado tan trivial como lo es el cero.

Capítulo I Descripción del contexto institucional

1.1 Los subsistemas de secundaria y las matemáticas: Secundaria Técnica, Secundaria General y Telesecundaria

La educación es uno de los elementos de mayor relevancia de cada país para lograr el mejoramiento y transformación de las sociedades. En México, la educación tiene el peso actual de las políticas internacionales para cumplir con expectativas de orden mundial y así estar a la par de los países avanzados, para ello, el desarrollo de competencias en el nivel básico es de vital importancia.

El nivel de Educación Básica en nuestro país está integrado por la Educación Preescolar (de los 3 a los 6 años), la Educación Primaria (de los 6 a los 12), la Educación Secundaria (de los 12 a los 15 años) y con las últimas reformas al Art. 3 Constitucional, la Educación Media Superior (de los 15 a los 18 años). En este espectro de los dieciocho años de educación obligatoria, nos centramos en el estudio y las características del nivel de Secundaria y lo que respecta a sus principales modalidades: la Secundaria General, la Secundaria Técnica y la Telesecundaria.

Para comprender grosso modo esta parte del nivel educativo es necesario escribir brevemente acerca del desarrollo de la Secundaria en México, así como las características de las modalidades que se imparten a lo largo y ancho del país.

1.1.1 La Escuela Secundaria en México: un acercamiento a su historia

El desarrollo de la secundaria en nuestro país se remonta a los primeros años del siglo XX, donde a partir del Congreso Pedagógico de Veracruz en 1915 se regula de manera formal la educación secundaria (Santos, 2000)[1], sin embargo, el establecimiento de la educación secundaria se daría desde

1 Santos del Real, A. (2000). *La Educación Secundaria: Perspectivas de su demanda.* Aguascalientes: Universidad Autónoma de Aguascalientes. Tesis del Doctorado Interinstitucional en Educación.

1865, con una estructura semejante al Liceo francés y con un plan de estudios de 8 años.

Con el congreso de 1915, la educación secundaria se desliga de la educación universitaria (la cual estaba dirigida al nivel profesional); la secundaria es considerada como un nivel propedéutico intermedio de los conocimientos entre la primaria y la universidad. La aplicación de los resultados del congreso se haría en 1916, aunque no se logran establecer de manera clara los propósitos y los objetivos de dicho nivel.

A pesar de lo anterior y de la corta duración de los alcances del congreso (solo duró dos años y después se replantearon los objetivos), sí sentó un precedente, pues será en 1923 ante el Consejo Universitario, que el subsecretario de educación Bernardo Gastelúm propone reorganizar los estudios preparatorios. Tal y como lo señala Zorrilla (2004),en términos concretos, sugería la necesidad de establecer una clara distinción de la escuela secundaria, concibiéndola como ampliación de la primaria y cuyos propósitos fueran: realizar la obra correctiva de los defectos y desarrollo general del estudiante; vigorizar la conciencia de solidaridad con los demás; formar hábitos de cohesión y cooperación social, así como ofrecer a todos gran diversidad de actividades, ejercicios y enseñanzas, a fin de que cada cual descubriese una vocación y pudiese cultivarla. Al igual que en la propuesta de Veracruz el periodo de estudios sería de tres años y se enseñarían las materias establecidas en el plan reformado en 1918[2].

Es en diciembre de 1923 cuando se da luz verde al proyecto promulgado por el entonces Secretario de Educación Pública José Vasconcelos; a partir de esta fecha y poco tiempo después sería Moisés Sáenz quien crearía el departamento de escuelas secundarias, que tendría a cargo inicialmente solo 5 planteles. Corriendo el año de 1925 se dan a conocer dos decretos presidenciales por los cuales se establece la creación de escuelas

---

2 Zorrilla, M. (2004). La educación secundaria en México: al filo de su reforma. *REICE Revista Electrónica Iberoamericana sobre Calidad, Eficiencia y Cambio en Educación*, *12*(1).

secundarias en el país a cargo de la Secretaria de Educación Pública, así como el paso para la creación de la Dirección General de Escuelas Secundarias, que controlaría la organización y desarrollo de las escuelas secundarias.

De acuerdo con Zorrilla (2004)[3], la Educación Secundaria se concibió desde entonces como una prolongación de la Educación Primaria con énfasis en una formación general de los alumnos, es decir, su naturaleza se definió como estrictamente formativa. Mientras que, en otros países la Educación Secundaria fue concebida como un antecedente al Bachillerato y a la Educación Superior, en México se pensó como un paso necesario para continuar estudiando, “una escuela para la escuela”.

Un año después de los decretos presidenciales, se inaugura la primera secundaria nocturna. Con esto se nota una clara valoración de la educación pública. Moisés Sáenz (1923)[4], en uno de sus discursos establecería lo siguiente: La secundaria resolverá un problema netamente nacional, el de difundir la cultura y elevar su nivel medio a todas las clases sociales, para hacer posible un régimen institucional y positivamente democrático. La secundaria implica escuelas flexibles en sus sistemas de enseñanza, diferenciadas y con diversas salidas hacia distintos caminos de actividad futura. Con esta apreciación se entendería que tiempo después surgieran las distintas modalidades de la educación secundaria, como una manera de establecer esas *“escuelas flexibles en sus sistemas de enseñanza, diferenciadas y con diversas salidas hacia distintos caminos de actividad futura”.*

Con los debates que se suscitaban a nivel mundial con respecto a la educación secundaria, México convoca en 1926 a una asamblea general de estudios y problemas de la educación secundaria y preparatoria, donde se

3Zorrilla (Op. Cit.)
4 En Zorrilla (Op.Cit)

llegan a acuerdos que actualmente deberían hacer eco en las políticas educativas. Estos acuerdos son (Santos 2000)[5]:

a) Los planes y programas deben ajustarse de manera que sean útiles y aplicables.

b) Deben escucharse las opiniones de maestros, padres, delegados estudiantiles y gremios para realizar las modificaciones al plan de estudios.

c) La secundaria debe incluir en sus programas de estudio contenidos vocacionales de acuerdo con el medio en que funcione cada escuela, para establecer un vínculo entre la secundaria y la enseñanza técnica.

Aunado a estas conclusiones, se establecía que los alumnos de secundaria debían desarrollar actividades artísticas, deportivas, cívicas y científicas de forma extraescolar. Sin embargo, los acuerdos alcanzados en la asamblea generaron críticas fuertes, pues se consideraba que lo planteado estaba más enfocado a la lógica de las ciencias haciendo inflexible el trabajo en las aulas, de la misma manera se señalaba que este currículo no permitía la atención pertinente y a la medida de las características de los estudiantes. Este sería un problema que la Educación Secundaria arrastraría desde sus inicios, pues se le consideró, y se le sigue considerando, como una pos-primaria y no como el eslabón entre la educación elemental y la educación profesional.

A partir de 1930 la educación secundaria se empieza a concebir eminentemente social, por lo que se trata de establecer un vínculo entre lo que hace la escuela secundaria con las características de la sociedad, por ello se empieza a ofrecer en las escuelas generales elementos de capacitación para el trabajo. En 1932 se hacen cambios en los planes de estudio, así como los objetivos sociales y vocacionales con lo que se busca la articulación entre la Primaria y la Secundaria. De la misma manera se trata

5 Santos del Real, A. (2000). *La Educación Secundaria: Perspectivas de su demanda.* Aguascalientes: Universidad Autónoma de Aguascalientes. Tesis del Doctorado Interinstitucional en Educación

de darle importancia a la Educación Secundaria considerándola como la etapa en la que los alumnos aprenden los métodos y estrategias para continuar sus estudios.

Ya en 1934, con las reformas de Lázaro Cárdenas se establece la idea socialista como un elemento más que rige a la educación. De la misma manera se agrega un sentido de responsabilidad social y solidaridad para con la clase trabajadora, de modo que al finalizar la Educación Secundaria, se orientaba a los estudiantes hacia el trabajo comunitario. En 1935 la educación secundaria pública y privada queda bajo la jurisdicción de la SEP, con lo cual se prohíbe que particulares ofrezcan este servicio sin el permiso correspondiente de la secretaria[6]. Un año después se crea el Instituto de Preparación del Profesorado de Secundaria. Con estas modificaciones, en 1937 la educación secundaria se establece como gratuita y se vuelven a hacer modificaciones al plan de estudios.

Entre 1930 y 1940 el Departamento de Educación Secundaria se convierte en la Dirección General de Segunda Enseñanza y con ello se establece el modelo base de lo que hoy se conoce como la modalidad de secundaria general: una escuela de tres años de estudio[7](Meneses, 1988).

Un aspecto importante que hay que señalar es el desarrollo del consejo consultivo, actualmente el consejo técnico escolar, órgano en el que la participación del director, los docentes, los padres de familia y los alumnos ayudan a desarrollar los planes de trabajo de cada escuela. Esta realidad muchas veces queda relegada al formalismo que reside en un papel.

Con la llegada de Jaime Torres Bodet a la Secretaria de Educación Pública en 1943, se produce la modificación a las leyes correspondientes para eliminar todo lo que tuviera que ver con el socialismo, aunado a lo anterior, se empieza a dar modificaciones en torno al proceso de enseñanza

---

6 Diario Oficial de la Federación, 13 de marzo 1935.

7 Meneses, E. (1988). Tendencias educativas oficiales en México 1934-1964. Centro de Estudios Educativos-UIA, México.

buscando superar el nivel memorístico, para que la escuela se convierta en una institución formadora acorde a las necesidades de los alumnos y no solo como un centro de capacitación para la vida profesional.

Hasta 1958 en México solo existió una escuela secundaria, la escuela secundaria general, sin embargo en ese mismo año se da el nacimiento de la escuela secundaria técnica, la cual, además de ofrecer una educación en ciencias y humanidades, incluyó actividades tecnológicas a fin de promover una preparación para el trabajo.

Con el crecimiento demográfico a partir de mediados de 1965 y con la demanda de los estudiantes egresados de primaria, Agustín Yáñez, en ese entonces secretario de educación, promueve la creación de la Telesecundaria con la intención de llevar educación a las personas que se localizaban en lugares alejados del país. El nacimiento de la Telesecundaria se da en 1968 de manera experimental (pues primero de aplico el programa piloto), y un año después es integrada formalmente al sistema educativo nacional[8]. Esta modalidad de la Secundaria se ubica en comunidades rurales principalmente, donde un docente se hace cargo de todas las asignaturas apoyado por los programas de televisión y los libros de texto.

Para finales de 1970 y como resultado de los hechos violentos de 1968, el Presidente Luis Echeverría señala que la educación no estaba cumpliendo con las necesidades de los alumnos, por lo que era necesario hacer modificaciones. Se realiza una consulta por el Consejo Nacional Técnico de la Educación (CONALTE) y como resultado se acuerda que la Secundaria al igual que la Primaria se organizará por áreas de conocimiento: Matemáticas, Español, Ciencias Naturales (que estaba integrado por Biología, Física y Química), Ciencias Sociales (Historia, Geografía y Civismo), además de las

8 Santos del Real, A. (2000). La Educación Secundaria: Perspectivas de su demanda. Aguascalientes: Universidad Autónoma de Aguascalientes. Tesis del Doctorado Interinstitucional en Educación

materias tecnológicas, la Educación Física y la Educación Artística. Esta reforma estuvo vigente hasta los primeros años de 1990.

En 1977, el entonces secretario de educación, Porfirio Muñoz Ledo propone que la escuela secundaria se declare obligatoria, aunque esta propuesta no surtiría efecto hasta 1993. Durante 1991, la CONALTE señala la necesidad de establecer un nuevo modelo educativo en el que a los alumnos se les brinden las herramientas necesarias para que continúen aprendiendo a lo largo de su vida. Esto solo se lograría dando mayor importancia al desarrollo de actitudes, métodos y destrezas en el desarrollo del currículo. Esta propuesta se reprodujo en algunas escuelas, sin embargo, no se logró consolidar porque las políticas educativas y el discurso político estaban encaminados hacia otra vertiente.

Durante el transcurso del año 1992, el Sindicato Nacional de Trabajadores de la Educación, el Gobierno Federal y los Estados firman el Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica (ANMEB), con el fin de combatir las desigualdades dentro del sistema educativo así como para elevar la calidad de la educación. Se fijan tres estrategias fundamentales, conocidas como las tres "erres"[9] (Zorrilla, 2002):

a) Reorganizar el sistema educativo,

b) Reformulación de contenidos y materiales,

c) Revaloración social de la función magisterial.

La reorganización del sistema educativo fomentó la "federalización descentralizadora" con la cual el Gobierno Federal transfirió a los Estados los recursos y la responsabilidad para operar los niveles de Educación Básica. La reformulación de contenidos y materiales, deja de lado la organización de las materias por áreas y regresa a las asignaturas, se amplían y diversifican

9 Zorrilla, F.M., & Velasco, J. M. (2003). Diez años después del Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica en México: Retos, tensiones y perspectivas. *Revista Electrónica de investigación educativa*, *4*(2).

los materiales educativos y se da gran peso al trabajo pedagógico a partir del enfoque constructivista. Esta reforma inicia su aplicación en el ciclo escolar 1993-1994.

Como se señaló anteriormente, el ANMEB trajo consigo que la secundaria se declarara obligatoria y así, la Educación Básica pasaría a ser de seis a nueve años de escolaridad.

Un aspecto importante a señalar es la formación de los docentes que imparten clases en el nivel básico. Hasta antes de 1984, los profesores que impartían clase en primaria cursaban la “normal básica” consistente en cuatro años posteriores a la educación secundaria, lo que implicaba el ingreso a la normal en edades de 14 y 15 años. Para dar clases en el nivel Secundaria, se debía ingresar a la “Normal Superior”, la cual otorgaba un título de licenciatura. Muchos docentes de Primaria ingresaban a la Normal Superior después de trabajar durante varios años en el nivel de Primaria.

Para 1984 se eleva el nivel de formación docente a licenciatura, ingresando los estudiantes a las normales de 18 años, lo que trae una fuerte modificación a la preparación de los profesores, aunque se siguen conservando los títulos de Normal Básica y Normal Superior, respectivamente.

Es importante señalar que, después de la reforma de 1993, no se hacen modificaciones a los planes y programa de estudio de las escuelas normales. Estas modificaciones no se realizan hasta el año 2000 y la primera generación con estas modificaciones egresa en el 2004[10], provocando un desfase de 10 años en la formación docente y por ende en el trabajo con los alumnos[11].

---

10 Zorrilla, M. (2004). La educación secundaria en México: al filo de su reforma. *REICE Revista Electrónica Iberoamericana sobre Calidad, Eficiencia y Cambio en Educación*, *12*(1).

11 Resulta importante señalar que para durante el año 2006 aparece otra reforma a los planes y programa de estudio de la educación secundaria, que reafirma las disparidad entre la formación docente y las necesidades de los alumnos planteadas por el Sistema Educativo Nacional.

En general, a lo largo y ancho del país se trabaja con tres modalidades de la escuela secundaria: la escuela secundaria general que es más parecida al bachillerato, la secundaria técnica que conserva la enseñanza de tecnologías específicas para que los alumnos se incorporen en un futuro al campo laboral y la telesecundaria.

1.1.2 Caracterización de las modalidades de educación secundaria[12]

Como se ha mencionado anteriormente, en México la Educación Secundaria se imparte en varias modalidades, las tres primeras son la secundaria general, la secundaria técnica y la telesecundaria, aunque existe la secundaria comunitaria y para trabajadores. Estas modalidades fueran creadas con un propósito general: dar servicio a los jóvenes egresados de primaria para continuar sus estudios y así, seguir su formación hacia la educación media superior y superior.

Las modalidades escolarizadas pretenden objetivos de formación comunes, pues ofrecen a sus estudiantes un mismo currículo (Plan y Programa de estudios nacionales propuestos por la SEP); no obstante, las modalidades guardan algunas diferencias respecto a su estructura y forma de organización. Por ejemplo, en las escuelas secundarias generales y técnicas cada asignatura suele ser impartida por un solo docente, aunque en la secundaria técnica se ofrecen materias adicionales para la educación tecnológica y se cuenta con el personal adecuado para impartir dichas actividades. En lo que respecta a la Telesecundaria, todas las asignaturas son impartidas por un profesor en cada grado, además que, dadas las características de las escuelas (pequeñas y situadas en contextos rurales), se comisione a uno de los docentes para asumir las funciones directivas, lo que no suele ocurrir en otros servicios.

En el caso de las escuelas comunitarias, este servicio es nuevo pues comienza a operar en 2002 y quedó a cargo del Consejo Nacional de

---

12 Tomado de Annette Santos del Real., Aguilar, R., Miguel, Á., & Vázquez, D. F. (2009). El aprendizaje en tercero de secundaria en México: Informe sobre los resultados del EXCALE 09, aplicación 2008 Español, Matemáticas, Biología y Formación cívica y ética. *México, DF: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación*.

Fomento Educativo (CONAFE). Este tipo de escuelas se localizan en comunidades alejadas donde el número de habitantes es reducido y la matrícula es pequeña para poder crear algún centro educativo oficial.[13] En general, estas escuelas se abren donde se localiza un centro comunitario (servicio de primaria prestado por CONAFE), que nutre la matrícula de la secundaria.

Además de las diferencias existentes entre estas modalidades podemos resaltar algunas otras que resultan relevantes para el desarrollo de los adolescentes de acuerdo con su contexto. En el sistema educativo, los planteles de secundaria son aproximadamente 33 mil 697 escuelas, de las cuales poco más de la mitad son Telesecundarias, aproximadamente una tercera parte pertenece a la modalidad de Generales, un 13.1% son Técnicas y un 3.3% comunitarias.

Aunado a lo anterior, es importante señalar que la escuela pública en el nivel secundaria abarca el 88% de los planteles mientras que el 12% restante pertenece al sector privado. De este, doce por ciento, el 92.4 % pertenecen a la modalidad de General y el resto a la modalidad de Técnicas.

Con respecto a la matricula, de los más de siete millones de jóvenes, uno de cada dos asiste a una secundaria general, el 28% a una secundaria técnica y la quinta parte a una telesecundaria. En la escuela comunitaria y para trabajadores encontramos menos del 1% de la matricula total. De cada 100 estudiantes, 92 cursan su educación secundaria en una escuela pública.

Como se señaló en el apartado anterior, la educación secundaria se establece como obligatoria en el año de 1993, surgiendo un incremento en la matrícula, que es captada mayormente por la modalidad de telesecundaria con un incremento de 123.3%.

Con respecto a la cobertura en los Estados, las modalidades tienen variaciones importantes, por ejemplo mientras que en Oaxaca, Chiapas,

13 Consideramos aquí como oficial el que el plantel esté a cargo de la SEP o de la secretaria de educación de los Estados

Guerrero y Nayarit el 95% de las escuelas pertenecen al sector público, en el Distrito Federal y Morelos, el sector privado opera en 35 y 27 % de las escuelas respectivamente. Así mismo en Zacatecas, San Luis Potosí, Guanajuato, Veracruz, Puebla, Chiapas, Hidalgo y Oaxaca, siete de cada diez escuelas son telesecundarias; mientras que en el Estado de México, Nuevo León, Baja California y el Distrito Federal, la mitad de las escuelas secundarias pertenecen a la modalidad de generales.

Otro aspecto que resulta importante señalar es la cantidad de alumnos que captan cada una de las modalidades. Por ejemplo, en siete de cada diez escuelas generales y en tres de cada cuatro escuelas secundarias técnicas asisten más de 200 alumnos, el 62% de las telesecundarias y el 99.6% de las escuelas comunitarias tienen menos de 66 estudiantes; en lo que respecta a los colegios privados el 68% no atiende a más de 120 estudiantes.

Como podemos observar, las características de cada modalidad nos mueven a pensar sobre el servicio que se recibe. Así, mientras que en secundarias generales y técnicas hay un profesor para cada asignatura, lo que permite quizá una mayor profundización en los temas, en las escuelas telesecundarias y comunitarias[14] un solo docente debe impartir todas las asignaturas además de atender actividades administrativas. Todo lo anterior nos sitúa en un contexto determinado para cada uno de las modalidades, sin embargo, resulta importante señalar algunas características de las poblaciones de las distintas modalidades.

14 En el caso de las escuelas comunitarias, el trabajo no lo realiza un docente sino un instructor comunitario, quien es un joven que va de los 14 a los 29 años de edad con la secundaria terminada o la carrera inconclusa.

1.1.3 Algunas características de las poblaciones de las distintas modalidades

Además de las características de operación de cada modalidad, resulta interesante conocer la población que nutre a estas modalidades. Un primer ejemplo es el tipo de localidad. Dos de cada tres Secundarias Públicas Generales brindan sus servicios en grandes centros urbanos mayores a 15 mil habitantes. Su presencia en comunidades rurales con menos de 2500 habitantes es limitada. Por otro lado, la escuela Secundaria Técnica tiene gran presencia en los centros urbanos, aunque una cuarta parte de sus planteles se encuentran establecidos en poblaciones rurales.

En Telesecundaria, el 90% de sus planteles se encuentran localizados en comunidades con menos de 2500 habitantes y casi la totalidad de las escuelas comunitarias se ubican en este mismo entorno. Las escuelas privadas, que no suelen ser de gran tamaño, se encuentran en localidades urbanas con más de 15 mil habitantes mientras que solo el 2.9% brinda servicios en poblaciones rurales.

De lo anterior podemos deducir que mientras las Escuelas Secundarias Generales y Técnicas brindan sus servicios en localidades con baja y muy baja marginación, seis de cada diez Telesecundarias y el 83% de las escuelas comunitarias se desarrollan en comunidades de alta y muy alta marginación. Esto determina en mucho las condiciones de vida de los estudiantes de cada modalidad.

Así, por ejemplo, de los estudiantes de Telesecundaria, 7% de los hogares no tienen baño, uno de cada dos carece de teléfono, 53% de automóvil y 95% de acceso a internet. En el caso de las escuelas Generales y Técnicas, éstas muestran un similitud en cuanto a las características de las viviendas, pero nunca comparable con las condiciones desfavorables de los alumnos de la Telesecundaria ni con las condiciones favorables de los alumnos de escuelas privadas.

Otro aspecto que resulta importante es el apoyo que el gobierno les da a los alumnos. Uno de los programas que apoya a las familias en condiciones de pobreza extrema para mejorar sus condiciones de salud, alimentación y educación es el programa *Oportunidades*. En este programa encontramos que tres de cada cuatro alumnos de Telesecundaria son beneficiarios de este programa, mientras que el 30% de las familias de escuelas Técnicas y el 25% de las escuelas Generales reciben este apoyo. La mayoría de los alumnos de Telesecundaria accede a programas de salud gracias a este programa, que de otra manera no les sería posible.

Un indicador más que resulta interesante es el capital sociocultural de la familia. Con respecto al número de libros que los alumnos poseen en casa, se marcan dos extremos. Por un lado, de los alumnos de escuelas privadas, el 34% reporta tener más de 100 libros, mientras que uno de cada 5 alumnos de Telesecundaria reportan tener un solo libro diferente a los textos escolares. Con la escolaridad de los padres pasa algo similar, pues aproximadamente un 46% de las madres de familia no fue, o no terminó, la primaria. En lo que respecta a las madres de familia de alumnos en generales y técnicas, un séptimo del total cuenta con licenciatura o posgrado, lo que no se compara con escuelas privadas, en las que una de cada dos ha logrado lo anterior.

Hasta aquí hemos podido observar algunas de las características del entorno de los alumnos que transitan la secundaria en sus diferentes modalidades. Los indicadores nos permiten establecer algunas ideas que pueden influir en el desarrollo y alcance de los alumnos a lo largo de su educación y del apoyo que pueden ofrecerle sus padres para obtener mejores resultados. Ahora observemos de manera general los antecedentes y expectativas escolares de los alumnos de las diversas modalidades.

1.1.4 Antecedentes y expectativas escolares de los estudiantes

La escuela secundaria en México se inicia una vez concluidos los seis años de primaria. Al finalizar la primaria, los alumnos con una edad 11 o 12 años están ingresando a alguna de las modalidades antes descritas. Sin embargo, ¿qué sucede cuando encontramos alumnos en primer grado con edades mayores a los doce años? Podemos pensar que iniciaron tardíamente la Escuela Primaria, reprobaron algún año o no comenzaron la Secundaria inmediatamente después de terminar la primaria.

De lo anterior encontramos que es en las escuelas privadas, donde la posibilidad de reprobación y extra edad son mínimas, no se encuentran muchos alumnos con estas características (aproximadamente un 5% de reprobación en algún grado de primaria y con un 16% en edades mayores a 12 años). No así en la Telesecundaria, donde más del 20% repitió uno o más grados de primaria y con un 35.6% de los alumnos ingresando con edades por arriba de los 12 años.

De la misma manera no resulta sorprendente que los alumnos que iniciaron la Educación Secundaria en una escuela pública provengan de una Primaria de las mismas características, pero llama la atención que una quinta parte de la matrícula de alumnos de escuelas privadas declare haber cursado la Primaria en una institución pública (aproximadamente el 23%).

Con respecto a su procedencia, nueve de cada 10 estudiantes de escuelas privadas y el 60% de los estudiantes de generales y técnicas estudiaron en una primaria urbana, mientras que el 77% de los estudiantes de telesecundaria manifiestan haber cursado la primaria en una escuela rural.

Considerando los resultados de los EXCALE[15] de Español y Matemáticas aplicados en 2007[16], estos revelan que los estudiantes de Escuelas Primarias Indígenas están en franca desventaja respecto a los alumnos de escuelas públicas rurales, a su vez, estos tienen peores resultados que los estudiantes de Escuelas Primarias públicas urbanas y estos últimos muestran bajos resultados con respecto a las escuelas privadas.

15 Examen de la Calidad y el logro Educativo.

16 Aunque es posible que exista información actualizada al respecto, la tendencia que marca esta prueba se ha mantenido por años.

El 95% de los estudiantes egresados de Primaria continúan la Secundaria y con los datos arriba mencionados se establece una brecha en los niveles de aprendizaje de los distintos alumnos al inicio de la Secundaria, como es el caso de los alumnos de Primarias rurales que van a la Telesecundaria con respecto a los estudiantes egresados de Primarias urbanas que asisten a escuelas Generales o Técnicas.

Lo anterior también marca la expectativa de estudio manifestado por los alumnos para el futuro. En las escuelas Generales y Técnicas, solo el 3% no desea seguir estudiando, la cuarta parte aspira al Bachillerato, un 30% quisiera cursar alguna licenciatura y cuatro de cada diez les gustaría cursar un posgrado. Con la Telesecundaria y las escuelas privadas se dan nuevamente dos extremos. Mientras que el 15% de los alumnos de Telesecundaria no quiere continuar su educación y el 40% aspira solo a lograr la Educación Media Superior, en la escuela privada el 27% aspira a estudiar una licenciatura mientras que dos terceras partes aspiran a un posgrado.

Hasta aquí hemos mostrado algunas características que resultan interesantes para conocer de manera muy general el entorno de la Secundaria en México. No se trata de desalentar los resultados que se puedan alcanzar en la investigación, sino que da elementos para contextualizarlos. Situar los resultados en un determinado contexto nos permitirá establecer diversas relaciones que nutran el trabajo. Ahora veremos de qué manera el tema del que trata esta tesis está ubicado en el currículo escolar, para ello revisaremos lo mencionado en el Plan y Programa de Estudios 2011.

1.2 Situación de los enteros en el Currículo de Educación Básica en México

1.2.1 Elementos que integran el Plan y Programa de Estudios 2011

El desarrollo del Plan y Programas de Estudio de Educación Básica en México han sido resultado de varias reformas iniciadas en el 2006 y consolidadas con la creación de un currículo que abarcara la Educación Básica (Preescolar, Primaria y Secundaria), estableciendo así la articulación entre los sistemas que lo integran.

Lo anterior nos permite comprender la existencia de un currículo para la educación básica y que cada uno de los Programas de Preescolar, Primaria y Secundaria busquen el desarrollo de las mismas competencias, aunque adaptadas al nivel y el grado de avance de los alumnos, de acuerdo con su edad y escolaridad.

De esta manera, el Plan y Programa de Estudios establece cuatro competencias a desarrollar durante los doce años de Educación Básica:

- **Resolver problemas de manera autónoma**: Se espera que los alumnos sepan identificar planear y resolver diferentes tipos de problemas utilizando más de un procedimiento, reconociendo cuál o cuáles son más eficaces.

- **Comunicar información matemática:** Aquí se comprende la posibilidad de que los alumnos, a partir de diferentes formas de representar la información cualitativa y cuantitativa expresen e interpreten información matemática contenida en una situación o fenómeno.

- **Validar procedimientos y resultados:** A partir de su actuar, los alumnos adquieran la confianza suficiente para explicar y justificar los procedimientos y soluciones encontradas.

- **Manejar técnicas eficientemente:** Se trata del uso eficiente de procedimientos y formas de representación que hacen los alumnos al efectuar cálculos, con o sin apoyo de la calculadora. Esta competencia no se limita a usar de forma mecánica las operaciones aritméticas, sino que apunta principalmente al desarrollo del significado y uso de los números y de las operaciones.[17]

De lo anterior podemos percatarnos que de manera general, la intención de la enseñanza de las matemáticas en educación básica tiene como premisa fundamental que los alumnos sepan resolver problemas utilizando diversas herramientas y que puedan manifestar de qué manera las utilizaron. Esta postura concuerda mucho con lo que señala Nadine Bernard[18] sobre como la enseñanza ha privilegiado la resolución de problemas, sin embargo se ha dejado de lado el aspecto de la transición entre la aritmética al algebra, y solo se hace énfasis en un algebra descontextualizada.

Para que se dé el logro de las competencias antes mencionadas, se establecen modificaciones en la forma de trabajar tanto del maestro como del alumno. Para ello se requiere que el alumno esté inmerso en un ambiente de aprendizaje que le permita expresar sus ideas y probar sus propios métodos para resolver problemas, mientras que el docente debe dejar de lado la forma de enseñanza, entendida ésta como una forma de transferencia entre un experto y un novato.

Para que el enfoque didáctico permita lo anterior, se considera que los temas deben ser tratados a partir de secuencias de situaciones didácticas que despierten el interés de los alumnos. Este interés debe estar enfocado en la búsqueda de diversos caminos que le permitan resolver situaciones

17 Programa de Estudios 2011. Guía para el maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas. Pag.23
18 La aparición y el desarrollo del algebra como una herramienta de solución de problemas: Continuidad y discontinuidad con aritmética, Nadine Bernartz, et al.

problemáticas, aplicando sus conocimientos previos y reformulándolos para avanzar en el aprendizaje.

Como hemos visto, uno de los propósitos de la educación básica, de acuerdo con el programa de educación básica es que los niños y adolescentes:

- *Desarrollen formas de pensar que les permitan formular conjeturas y procedimientos para* ***resolver problemas****, y elaborar explicaciones para ciertos hechos numéricos o geométricos.*

Y a su vez:

- *Utilicen diferentes técnicas o recursos para hacer más eficientes los procedimientos de resolución.*

En este sentido, el trabajo que se hace en matemáticas debe permitirles a los alumnos comprender hechos numéricos y geométricos. En el caso de la educación secundaria, la mayor parte del trabajo desarrollado de séptimo a noveno grados está basado en el paso de la aritmética al álgebra, pasando del uso de los números naturales, los números fraccionarios a los números enteros.

Hay que señalar que los aprendizajes en el plan de estudios están organizados por Estándares curriculares, que de acuerdo con el Programa de Estudios (SEP, 2011), presentan la visión de una población que sabe utilizar los conocimiento matemáticos.

Así, los estándares curriculares en matemáticas son cuatro:

1. Sentido numérico y pensamiento algebraico
2. Forma, espacio y medida
3. Manejo de la información
4. Actitud hacia el estudio de las matemáticas

En el caso de esta investigación nos enfocaremos más al trabajo con el primer estándar curricular, pues en él se tratan los temas de los números enteros y la resolución de sistemas de ecuaciones.

De la misma manera al considerar el eje temático “sentido numérico y pensamiento algebraico”, éste se subdivide en cuatro temas que se abarcan a lo largo del ciclo escolar. Estos temas son:

1.1 Números y sistemas de numeración

1.2 Problemas aditivos

1.3 Problemas multiplicativos

1.4 Patrones y ecuaciones.

De lo anterior, se desprenden estándares curriculares, así el alumno:

1.1.1 Resuelve problemas que implican convertir números fraccionarios a decimales y viceversa

1.1.2 Resuelve problemas que implican calcular el mínimo común múltiplo o el máximo común divisor

1.2.1 Resuelve problemas aditivos que impliquen efectuar cálculos con expresiones algebraicas

1.3.1 Resuelve problemas multiplicativos con expresiones algebraicas a excepción de la división de polinomios

1.4.1 Resuelve problemas que implican expresar y utilizar la regla general lineal o cuadrática de una sucesión.

Hasta aquí podemos hacer hincapié para que el alumno, a lo largo de su estancia en el nivel básico y sobre todo en secundaria, aprenda a resolver problemas tanto de nivel aritmético como de nivel algebraico.

Sin embargo, no se mencionan los números enteros de manera directa así como el uso del cero. Aquí, moviéndonos en el terreno de las suposiciones, podríamos pensar en que implícitamente se le relacionan con los problemas algebraicos. En el caso del cero, solo lo consideramos como emergente en el uso de los números decimales o bien en la resolución de ecuaciones.

Para no quedarnos en este terreno, mostraremos los temas que se abordan de primero a tercero de secundaria donde podemos localizar, aunque de manera implícita, el uso de los enteros y en especial del cero.

1.2.2 El programa de estudios de educación secundaria: ¿En dónde está el cero y los negativos?

Aunque la intención de esta investigación es trabajar con alumnos de tercer grado, resulta pertinente destacar los temas que han precedido al trabajo con los números enteros, en particular la presencia del cero. Lo anterior con la intención de establecer qué conocimientos han desarrollado los alumnos al momento de llegar a tercer grado.

La asignatura de matemáticas en educación secundaria se imparte 5 horas a la semana y con la jornada ampliada (o escuelas de tiempo completo), el número de horas se aumentó a 7 semanales para cumplir 280 horas durante el ciclo escolar. Aquí debemos puntualizar que aunque se señalan las horas de trabajo, en la práctica cotidiana la clase dura 50 minutos (principalmente en las escuelas generales y técnicas), por lo que el tiempo de clases disminuye a lo largo del ciclo escolar.

La asignatura está dividida en 5 bloques trabajados de manera bimestral cada uno y en donde encontramos los cuatro ejes temáticos[19] repartidos en varias sesiones.

Primer grado de secundaria:

---

19 Resulta importante señalar que el eje temático “Actitud hacia el estudio de las matemáticas”, se encuentra presente en todos los bloques y trata sobre las actitudes que demuestran los alumnos ante el trabajo con la asignatura.

En el primer grado se inicia con la transición entre los contenidos de primaria y secundaria y, aunque en algunas situaciones los alumnos ya han trabajado los enteros en sexto grado, en este grado, en el bloque uno, se empieza a trabajar con la conversión de fracciones a números decimales además de que se trabajan estos mismos números situándolos en la recta numérica. Aquí encontramos la presencia del cero, quizás como un punto de referencia al establecer el punto neutro de la recta y de la misma manera como parte del sistema posicional para determinar la ausencia de cantidades.

En el bloque dos seguimos trabajando con los números fraccionarios y decimales pero ahora en la resolución de problemas aditivos, utilizando los algoritmos convencionales. En el bloque tres se inicia con problemas multiplicativos, aquí se resuelven problemas de multiplicación y de división de números decimales en diversos contextos. Además se empieza a trabajar con ecuaciones de la forma $x+a=b$; $ax=b$; $ax+b=c$, donde a, b y c son números naturales, decimales o fraccionarios.

Para el bloque cuatro, se trabaja con el planteamiento y resolución de problemas que impliquen la utilización de números enteros, fraccionarios o decimales positivos y negativos. Podemos pensar que tanto en el tercero como cuarto bloque se da la presencia del cero al interactuar los números enteros (positivos y negativos).

Para el quinto bloque, los alumnos trabajan con la resolución de problemas que implican la suma y resta de números enteros.

Segundo grado:

Durante el octavo grado, se da continuidad al trabajo iniciado en el grado anterior, pues de acuerdo con el Plan de Estudios, se continúa el trabajo con los números enteros. Para el inicio del segundo grado, en el bloque uno se retoma lo visto en el último bloque del curso anterior y ahora se resuelven multiplicaciones y divisiones con números enteros. De la misma manera se trabaja con productos y cocientes de potencias positivas y negativas.

En el bloque dos, los alumnos trabajan con problemas aditivos y multiplicativos con monomios y polinomios en la resolución de problemas. En el bloque tres se continua trabajando con la resolución de problemas que impliquen expresiones algebraicas, de la misma forma se inicia con el cálculo numérico a partir de la jerarquía de operaciones dando la opción de trabajar con números enteros decimales y fraccionarios.

Para el bloque cuatro, los números enteros se trabajan a partir de la construcción de sucesiones aritméticas y la obtención de la regla general. Se continua con la resolución de problemas que impliquen el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado de la forma ax+b=cx+d, donde los coeficientes son enteros.

En el quinto bloque se continúa con la resolución de problemas, pero ahora se da paso al planteamiento y resolución de sistemas de ecuaciones de 2 x 2. Aquí se hace énfasis en el uso del algún método pertinente (igualación, eliminación, sustitución o gráfico), donde los coeficientes son números enteros.

Tercer grado:

Al iniciar el ciclo escolar, durante el primer bloque, se inicia con la resolución de problemas que implique el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas. Además, se da paso a los productos notables, pero no se toca ningún momento el cero. En el segundo bloque se continúa con el uso de ecuaciones cuadráticas pero en particular su resolución se basa en el método de factorización. En este bloque aparece el cero al igualar la ecuación cuadrática, pero no se hace mención alguna del porqué de esta situación. Con respecto a la factorización, solo se hace mención que se deben buscar los valores que permitan como obtener como resultado cero, es decir, se hace mención del cero pero como resultado de una operación aritmética.

En el tercer bloque se sigue trabajando las ecuaciones cuadráticas y su resolución con la formula general, nuevamente aparece el cero como resultado de la expresión algebraica $ax^2+bx+c=0$, y solo se le da uso a este número cuando se trata de utilizar el discriminante de la formula general con la intención de definir cuantas soluciones tiene una ecuación de segundo grado.

El cuarto bloque nos presenta situaciones para la obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión, pero en este caso no se hace uso del número cero.

Para el último bloque se sigue haciendo énfasis en la resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Además, a partir de dichas ecuaciones formular problemas. Sin embargo, el único momento al que se recurre al cero es como resultado de una ecuación cuadrática o como uno número que puede ser sustituido en una variable dependiente.

Como podemos darnos cuenta, a lo largo de los estudios desarrollados en la escuela secundaria, se hace énfasis en la resolución de problemas, sin embargo no se hace mención alguna del uso del cero. Esto nos lleva a pensar que solo de manera implícita al trabajar con los números enteros se puede llegar a su uso.

Capitulo II

2.1 ALGEBRA Y NUMEROLOGÍA CHINAS: MANERAS DE NEGATIVIDAD RADICAL

Uno de los aspectos que resulta fascinante es como las diversas culturas han generado conocimiento a lo largo de la existencia humana, y como algunos de esos conocimientos han perdurado hasta nuestros días.

El vestigio escrito a través de textos nos advierten de las diferencias existentes en los significados atribuidos a determinados saberes, en este caso el del cero y la negatividad[20].

En el contexto de las matemáticas chinas, el ***Jiu Zhang suanshu*** (Nueve Capítulos del Arte Matemático) es el primer libro en donde encontramos una cierta forma de negatividad. Debemos precisar que se desconoce tanto el autor como la fecha de elaboración del texto.

En particular, el capítulo ocho del libro de los Nueve Capítulos del Arte Matemático nos muestra la forma de negatividad llamada ***zheng/fu/wu.*** En este capítulo nos presentan el método Fang Cheng donde aparecen palillos negros (fu) a los que podemos denominar de manera general e imprecisa como “números negativos”, con los cuales se hacen desaparecer (jin) palillos para construir vacíos (wu), lo que en la episteme griega sería toda una aberración. Este método de tipo algebraico resalta la carga simbólica que tienen los lugares, por lo que se le debería denominar como “álgebra simbólica”. Sin embargo como éste ya es un término acuñado en occidente para establecer la evolución o paso del “álgebra retórica” al “álgebra simbólica”, llamaremos al álgebra china como “álgebra instrumental”.

En el método Fang Cheng resulta importante resaltar que las reglas zheng/fu[21]no deben ser reducidas a un comportamiento de ganancia/pérdida. Podríamos hacernos una pregunta: Si el uso de los negativos en los chinos

20 Estas ideas han sido tomadas de Lizcano Fernández, E. (1993). Imaginario colectivo y creación matemática: la construcción social del número, el espacio y lo imposible en China y en Grecia. Gedisa.

21 Aquí manejamos a “zheng” como positivo y “fu” como negativo.

se reduce a una relación de pérdida y ganancia, ¿por qué en otras culturas no emerge esta negatividad? Esta interrogante se contestará más adelante.

Por otra parte, el hueco en el tablero de cálculo denota la existencia de un cero, indisociable a la concepción del espacio en términos de lugares cargados de significado. Este vacío con significado, el no-ser chino (wu) que es su cero será el punto vertebral de todo su campo numérico.

2.1.2 EL capítulo octavo del Jiu Zhang suanshu

Este capítulo es la clave para la comprensión de la negatividad. Llamado Fang Cheng, el texto muestra esa emergencia de la negatividad y Liu Hui su comentador, hace las siguientes observaciones:

"Cuando se consideran dos expresiones, podemos obtener resultados opuestos, para los que hemos de usar los nombres zheng y fu como designaciones. Para los números zheng usamos palillos de cálculo rojos, mientras que los números fu se representan con palillos negros…

… Si un numeral es rojo o negro está determinado en realidad por reducciones mutuas (xiang xiao). Para llevar a cabo la adición o sustracción de números que ocupan las correspondientes posiciones en diferentes columnas, hay dos reglas sobre tipos diferentes de adición y sustracción"

Las reglas, denominadas zheng fu shu son las siguientes y están divididas en reglas de sustracción y de adición:

Reglas de sustracción:

"Cuando los nombres son lo mismo, efectuar la sustracción; cuando los nombres son diferentes, efectuar la suma.

Un palillo zheng emparejado con wu se hace fu y un palillo fu emparejado con wu se hace zheng"

Y, simétricamente, la regla de adición nos dice:

“Cuando los nombres son diferentes, efectuar la sustracción; cuando los nombres son el mismo, efectuar la suma.

Un palillo zheng emparejado con wu se hace zheng y un palillo fu emparejado con wu se hace fu”.

El desarrollo de estas reglas determina cómo operar con estos números-nombre. Resulta importante señalar que ningún nombre, “zheng”, “fu” y “wu”, entre otros, tienen un significado preciso, pues las matemáticas chinas están inmersas en un uso cotidiano, pero a su vez enriquecidas con la cosmovisión que tenían del mundo.

A lo largo de los 18 problemas correspondientes a “sistemas de ecuaciones lineales” del capítulo octavo del libro Zhang Suanshu, encontramos la aplicación de las reglas zheng fu shu utilizando el método (shu) denominado Fang Cheng Shu.

Tal como sucede con otros términos señalados en el texto, los términos fang y cheng no son fáciles de precisar. En este sentido “fang” puede ser interpretado como “a derecha e izquierda” o “la forma de los números”. De hecho, la mayoría de otros autores se inclina por la traducción de “cuadrado o rectángulo” a causa del acomodo que sufren los elementos zheng y fu en el tablero de cálculo. De la misma manera, en el caso de “cheng”, Hui se inclina por la interpretación de “asignar”, “repartir”. De aquí que, de acuerdo con Li Ji[22], el método sería conocido como de “asignación a derecha y a izquierda”, lo que nos deja entrever esa simetría que caracteriza a la negatividad zheng/fu.

2.1.3 El cálculo con palillos en el tablero. La materia del número

Entre los sistemas de numeración más primitivos, los chinos contaban con uno sexagesimal y otro decimal. El primero era usado para medir los tiempos, y aún sigue vigente, el segundo conocido como jiuaguwen, no es

22 Song Li Ji, filólogo del s. XI

propiamente decimal, pues carecía de un elemento que representara el cero, el cual no se introdujo hasta la dinastía Ming (1368-1644).

A la par de estos dos sistemas de numeración, en China existía otro sistema de numeración decimal y posicional más antiguo en el que se usaban varillas o palillos, con los cuales se realizaban cálculos de tipo algebraico, usando el Fang Cheng Shu y aplicando las reglas zheng/fu/wu. Este tipo de cálculos se realizaba para la contabilidad y la adivinación. De acuerdo con el “manual matemático” del maestro Xiahou Yang, los criterios y elementos que regulan este sistema de numeración son los siguientes:

“Las unidades se mantienen verticales, las decenas horizontales, las centenas de pie, los millares tumbados.
Millares y decenas parecen los mismos,
Miríadas y centenas parecen los mismos.
Una vez sobrepasado el seis,
Cinco está arriba;
Seis no acumula,
Cinco no permanece solo”

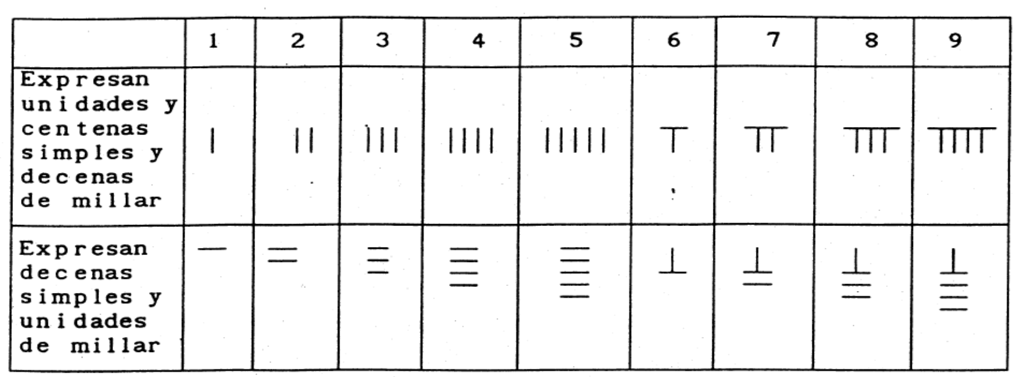


Figura 1 Representación de las varillas para hacer cálculos

Los números-nombre siempre se disponían en un tablero de cálculo, donde la diferencia radicaba en el color, pues los elementos zheng eran de color rojo y los fu eran de color negro (Figura 1). De la misma manera para representar cantidades como 302, encontraríamos esta expresión III II. Entre la expresión III y la expresión II se dejaba un espacio, en este caso considerado como el wu, o el espacio vacío para el caso de las decenas.

Como podemos ver, el uso de estos palillos y su distribución en el tablero de cálculo (fang cheng) parecían no presentar dificultad en cuanto al uso de cantidades negativas, algo que no sería concebido en occidente hasta el siglo XIX.

2.1.4 EL método Fang Cheng y el álgebra "instrumental". El arte de producir nada

Es en el Fang Cheng Shu donde se da la aplicación de las reglas zheng/fu/wu con la intención de resolver un sistema de ecuaciones lineales. Este método era usado por los chinos para resolver sistemas de ecuaciones de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5.

Para trabajar con este método, se fijan en el tablero tantas columnas como relaciones lineales. En esas columnas se hacen dos zonas: en la superior se dispone -de arriba hacia abajo- las cantidades de las "cosas" que intervienen, y en la parte inferior el término absoluto (shi), tal como se muestra en la figura 2:

	izquierda			derecha	
	$a_{n,1}$	$a_{n-1,1}$	$a_{2,1}$	$a_{1,1}$	*cosa* 1
	$a_{n,2}$	$a_{n-1,2}$	$a_{2,2}$	$a_{1,2}$	*cosa* 2
Sección superior	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$a_{n,n-1}$	$a_{n-1,n-1}$	$a_{2,n-1}$	$a_{1,n-1}$	*cosa* n-1
	$a_{n,n}$	$a_{n-1,n}$	$a_{2,n}$	a_{1n}	*cosa* n
Sección inferior	b_n	b_{n-1}	b_2	b_1	*shi*

Figura 2 El tablero y la forma de operar con el Método Fang Cheng.

A diferencia del manejo que hacemos de las ecuaciones o sistemas de ecuaciones en el mundo occidental, en el álgebra instrumental china encontramos que los palillos, tanto como su color, su inclinación y el lugar que ocupan, adquieren un significado, lo que para nosotros sería la representación de los símbolos de suma, resta, multiplicación, incógnita, igualdad, etc.

Aquí, el símbolo, al contrario de la tradición de herencia griega, no es el resultado de un proceso de abstracción, sino una cualidad de los lugares concretos en función de unos sistemas de referencia implícitos.

Otra diferencia está en la significación de los números dispuestos en el tablero. No hablamos de números absolutos, sino relativos, pues los números en cada columna son una colección ordenada de razones o relaciones entre números, lo que nos permite multiplicar una columna por un mismo número, sin alterar el significado de la misma. Las representaciones que encontramos en el tablero del Fang Cheng no son simples cantidades, representan cosas que a su vez guardan una relación con los elementos de su misma columna. El objetivo del Fang Cheng Shu es ir creando espacios vacíos (wu) a partir de multiplicaciones y sustracciones sucesivas, logrando un vaciamiento triangular del tablero en la parte superior, de tal manera que en una columna quede una “cosa” arriba y el shi abajo.

Para observar con mayor claridad estas diferencias y el proceso del Fang Cheng Shu consideremos el ejemplo del Problema 1 del capítulo octavo:

Problema 1 del capítulo octavo:

“Hay tres manojos de calidad superior, dos manojos de calidad media y un manojo de calidad inferior, resultando 39 dou [de grano] como shi; dos manos de calidad superior, tres manojos de calidad media y un manojo de calidad inferior dan 34 dou como shi; mientras que un manojo de calidad superior, dos manojos de calidad media y tres manojos de calidad inferior

dan 26 dou como shi. Encontrar la medida en dou contenida en cada una de las tres calidades de cereal”

Aplicando el Fang Cheng Shu y haciendo los acomodos, encontramos lo siguiente, a partir de lo que sugiere L. Lay- Yong y A. Tian-Se:

Paso 1: “Poner 3 manojos de cereal de calidad superior, 2 de calidad media y 1 de calidad inferior con su resultado, 39 dou en la columna de la derecha. Disponer las columnas central e izquierda del mismo modo que la derecha”

Utilizando los palillos se vería de la siguiente manera (Figura 3):

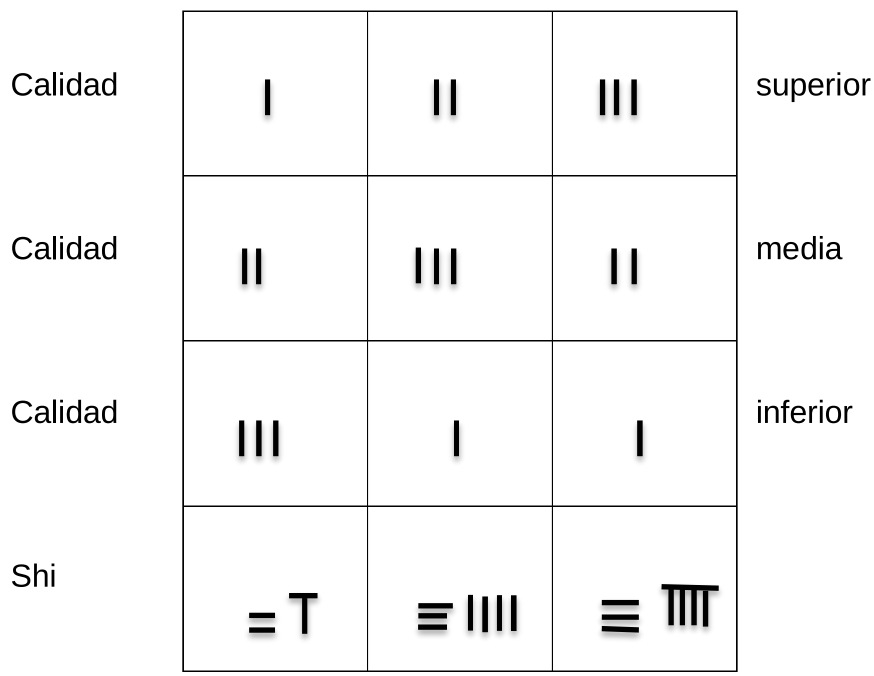


Figura 3 Resolución del problema 1 del capítulo octavo en el tablero de cálculo.

Si analizamos la instrucción, podemos añadir que nunca se nos menciona escribir el número, sino que se hace referencia a “poner 3 manojos”, lo que implica que las representaciones en el tablero no son abstracciones de un concepto, sino que representan en sí mismos las “cosas” descritas en el problema.

En el paso dos, se pide “tomar” (como si tuviéramos el objeto en el tablero) los cereales de lo alto de la columna derecha, para multiplicar por todas partes (bian chang) la columna central y proceder a sustracciones directas. En este caso se intenta hacer desapariciones (jin) de números a partir de equilibrar los términos (qi tong) entre las columnas, lo cual se vería de la siguiente manera:

Simbolizado: $C_2 \longrightarrow 3C_2 - C_1 - C_1$

$$C_2 = \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline 34 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{(3)} \begin{array}{|c|}\hline 6 \\ \hline 9 \\ \hline 3 \\ \hline 102 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{-C_1} \begin{array}{|c|}\hline 6-3 \\ \hline 9-2 \\ \hline 3-1 \\ \hline 102-39 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{-C_1} \begin{array}{|c|}\hline (6-3)-3 \\ \hline (9-2)-2 \\ \hline (3-1)-1 \\ \hline (102-39)-39 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline 5 \\ \hline 1 \\ \hline 24 \\ \hline \end{array}$$

Como podemos apreciar, al realizar la “multiplicación por todas partes” (bian chang) y realizar las sustracciones directas, creamos un wu en la columna central. Es aquí donde se observa el equilibramiento que los chinos realizan aplicando las reglas zheng/fu para obtener nada, algo que es ajeno, rechazado y negado en la episteme griega.

De esta manera, el tablero queda de la siguiente manera:

Calidad superior	𝍠		𝍢
Calidad media	𝍡	𝍩	𝍡
Calidad inferior	𝍢	𝍠	𝍠
Shi	𝍪𝍥	𝍪𝍣	𝍫𝍨

Ahora continuando con el paso tres, siguiendo análogamente al paso dos, se efectúa la siguiente operación: $C_3 \longrightarrow 3C_3 - C_1$, quedando lo siguiente:

Calidad superior			𝍢
Calidad media	𝍣	𝍩	𝍡
Calidad inferior	𝍧	𝍠	𝍠
Shi	𝍫𝍨	𝍪𝍣	𝍫𝍨

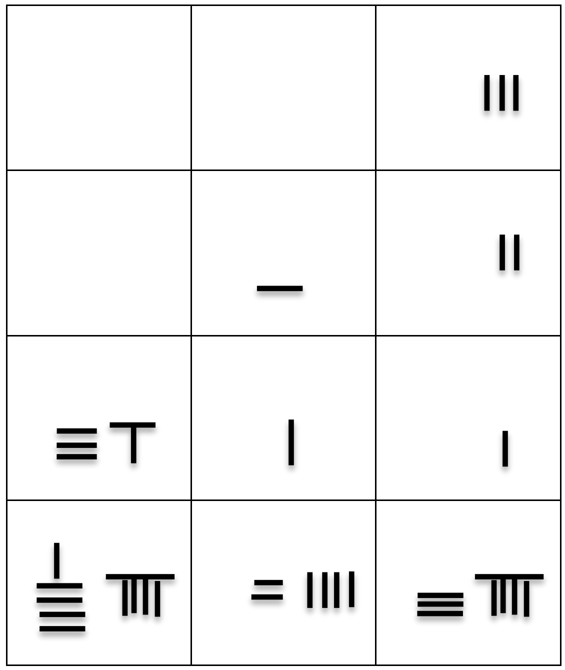
Aquí, al seguir el equilibramiento para llegar a hacer nada (wu), vemos como en la columna tres se hace otro espacio vacío, aplicando las reglas zheng/fu. Ahora procedemos a generar otro espacio vació (wu) en la segunda casilla de la tercera columna, siguiendo el siguiente orden: $C_3 \longrightarrow 5C_3 – C_2 - C_2 - C_2 - C_2$

Calidad superior

Calidad media

Calidad inferior

Shi



De esta manera creamos un tercer wu y logramos en la parte superior del tablero una triangulación de “espacios vacíos”, resultados de la equilibración entre las columnas. De la misma forma, que una “cosa” de la última columna se quedará con su shi. Ahora, a partir de sustituciones sucesivas podemos llegar a los resultados deseados, planteando las ecuaciones en el sistema algebraico siguiente:

3x + 2y +z = 39…. Ecuación 1

5y + z = 24………… Ecuación 2

36z = 99……………. Ecuación 3

El problema uno del capítulo octavo del Jiu Zhang suanshu nos permite establecer cómo podemos llevar la aplicación del Fang Cheng Shu a otros problemas.

Este método en términos generales, es el método que en el siglo XIX desarrollaría Gauss, con las diferencias propias de las matemáticas de occidente. Pasaron más de veinte siglos para lograr un método que permitiera el manejo de sistemas de ecuaciones.

Podríamos preguntarnos: ¿Por qué llevó tanto tiempo el desarrollo de este método en occidente? Nos aventuramos a decir que este desarrollo no se vio completado hasta que se alcanzó un avance en el manejo del cero y de las cantidades negativas, pilares en el desarrollo del Fang Cheng Shu.

2.1.5 Arraigo del álgebra instrumental en la lengua natural

Si observamos cómo se acomodan los palillos en el tablero de cálculo, encontramos que el método Fang Cheng sigue la forma en cómo se escribe en chino, es decir, va de arriba hacia abajo y de derecha a izquierda.

Otro aspecto que resulta importante es el manejo de "signos". En el álgebra de occidente, el paso del álgebra retórica al álgebra simbólica se dio por la traducción de cada uno de los elementos de la frase por signos formales (incógnitas, operadores, paréntesis, etc.). En el lenguaje clásico de China, las palabras, las sílabas y los caracteres gráficos tienden a confundirse, lo que determina que la escritura china esté respaldada por el contexto así como por la estructura total del párrafo, lo que hace que en cada expresión esté inmersa la lingüística de esta cultura.

Otro de las características en las expresiones matemáticas y que son propias de la lingüística, es el paralelismo sea este por simetría, antítesis o inversión. En este sentido encontramos en expresiones como "shang tian wu lu ru di wu men", que literalmente dice "subir-cielo-ningún-camino-bajar-tierra-ningún-puerta" una organización rítmica de dos grupos de cuatro elementos cada uno y simétricos dos a dos: subir/bajar, cielo/tierra, ningún/ningún, camino/puerta, de donde tenemos a partir de la simetría la siguiente oración "ningún camino para subir al cielo, ninguna puerta para entrar en la tierra".

Si notamos la estructura anterior y lo comparamos con el Fang Cheng Shu y las reglas zheng/fu, encontramos que tanto la dinámica de equilibración como las reglas para la adición y sustracción juegan un paralelismo simétrico, donde la interacción entre los elementos nos lleva a crear espacios wu. Además, tanto como en el lenguaje chino y sus ideogramas, los cuales tienen una variedad de significados de acuerdo con el contexto y la oración, los elementos (números zheng y fu), tienen una significación a partir del lugar que ocupan en el tablero al trabajar con el Fang Cheng Shu. Esto nos permite tener claro cómo influye el lenguaje en esta álgebra instrumental que no necesita de símbolos, pues los elementos que participan en los cálculos, ya están cargados de significados.

2.1.6 Las reglas zheng/fu (positivos/negativos)

Las matemáticas chinas están revestidas de un trasfondo cultural y social donde, la idea de método adquiere un carácter práctico y dúctil. De acuerdo con Liu Hui, el Fang Cheng Shu debe mirarse, como una herramienta que nos permita en todos los casos facilitar el trabajo y, se deben entender las reglas de sustracción y adición como instrumentos que nos facilitarán el camino para obtener los resultados, pues las implicaciones de estas reglas son llegar a eliminaciones por equilibración, tratando de crear espacios wu.

Así, los términos zheng, fu y wu son "nombres" que remiten a "ideas lingüísticas" y no remiten a la idea de número, pues estos "nombres" son determinados por su función y posición en el texto, de la misma manera que en el tablero. También se puede señalar que tanto zheng como fu, son resultados obtenidos de las operaciones realizadas en el tablero y tal como en la escritura, resultan ser nombres simétricos que no tienen una predilección salvo la diferencia del color que representa cada uno. Si recordamos, en occidente se privilegia una concepción especial e importante sobre los "negativos", se les considera "menos que nada".

Otras precisiones sobre las reglas de sustracción y adición son las siguientes:

a) Cuando analizamos ambas reglas podemos deducir que en las expresiones de (+n)- (+m) = + (n-m) y (-n) – (-m) = - (n-m), de la misma manera que para (+n) – (-m) = + (n + m) y (-n) – (+m) = - (n + m), tenemos que n > m.

b) Al manejar las reglas en su idioma original encontramos la utilización de menos caracteres para determinar dichas reglas.

c) Se aprecia en los enunciados la relación de simetría y construcción dialéctica de los elementos opuestos.

d) La determinación de zheng o fu, es resultado de las operaciones establecidas en el tablero de cálculo, pues, estos términos no tienen un significado preciso pero sí implicaciones de acuerdo con el contexto.

e) En relación con el término wu, al trasladarlo a nuestra "aritmética" lo consideramos como nada, aunque en la matemática china el término wu juega una función activa ya que puede "negativizar" al zheng o "positivizar" al fu, y viceversa.

f) Existe una relación directa de cómo están escritas las reglas zheng/fu con respecto a las formas poéticas chinas, de tal manera, que las relaciones entre los elementos zheng, fu, wu, ru determinan construcciones sintácticas paralelas, simétricas, inversas, etc.

Liu Hui señala que las reglas de adición y sustracción determinan cómo operamos los elementos zheng, fu y wu, pero siempre buscando obtener elementos wu triangulados en la parte superior de tablero y cada “cosa” con su shi.

2.1.7 El uso de las reglas zheng/fu en el contexto Fang Cheng

Para determinar la aplicación de las reglas zheng/fu es necesario respaldarse en alguno de los problemas que muestra el capítulo octavo de “Los Nueve Capítulos del Arte Matemático”, para ello se retoma el problema 8:

“Al vender 2 vacas y 5 cabras para comprar 13 cerdos, hay un superávit de 1000 monedas. El dinero obtenido de vender 3 vacas y 3 cerdos da justo para comprar 9 cabras. Al vender 6 cabras y 8 cerdos para cobrar 5 vacas, hay un déficit de 600 monedas. ¿Cuál es el precio de una vaca, una cabra y un cerdo?”

Al mostrar la disposición en el tablero, tenemos lo siguiente:

Vacas	-5	3	2
Cabras	6	-9	5
Cerdos	8	3	-13
Shi	-600	0	1000

Observamos algunas diferencias con respecto a lo que los griegos harían. Inicialmente encontramos en la distribución algunas cantidades “negativas” tanto en las “cosas” como en los shi. Éste hecho sería evitado por los griegos.

Otra característica es la presencia de un espacio wu en el shi de la segunda columna. En este sentido, la relevancia de este número radica en que se concede al cero suficiente identidad para llenar un espacio, algo que no pasaría en occidente hasta el siglo XVII.

Siguiendo la resolución del problema y buscando la equilibración para llegar a crear el espacio wu, se hace lo siguiente $2C_2 - C_1 - C_1 - C_1$, de lo cual obtenemos:

C3	C2	C1
-5	0	2
6	-33	5
8	45	-13
-600	-3000	1000

El siguiente espacio wu será resultado de la siguiente relación: $2C_3 - C_1 - C_1 - C_1 - C_1 - C_1$, y así obtenemos:

C3	C2	C1
0	0	2
37	-33	5
-49	45	-13
3800	-3000	1000

Para llegar al último espacio wu dentro del Fang Cheng aplicamos lo que Liu Hui nos dice, para evitar sustracciones sucesivas. Buscamos una equilibración del segundo término de la tercera columna: $33C_3 + 37C_2$

C3	C2	C1
0	0	2
0	-33	5
48	45	-13
14400	-3000	1000

El uso de las reglas nos permitió manejar los elementos zheng y fu para crear los espacios wu.

2.1.8 Irreductibilidad de la estructura zheng/fu al modelo ganancia/pérdida. La construcción social de la justicia matemática

La negatividad china evolucionó de una relación dialéctica ganancia/pérdida, tal como lo muestra el problema 8. A partir de esta reflexión surge la interrogante: ¿Por qué en esta cultura la negatividad se toma de manera natural y en otras no?

Si bien el desarrollo de la ganancia/pérdida está presente en algunos problemas, resulta relevante recordar la relación que existe entre los elementos zheng y fu dentro del Fang Cheng Shu y de cómo las reglas de sustracción y adición presentan un paralelismo y una simetría que refuerzan su existencia, de acuerdo a cómo se utiliza la lengua en los chinos.

Además de ser un reflejo de la lingüística china, la relación entre zheng y fu tiene un fundamento en la matriz de modelos yin yang, que abarca otros contextos más allá de la simple pérdida/ganancia. Esta relación de opuestos será considerada un nivel de justicia, alcanzado por el equilibrio entre zheng y fu.

En Grecia, Aristóteles fundaría el concepto de justicia sobre el modelo de la teoría matemática de las proporciones, con el cual no se llega a ninguna forma de negatividad, ya que no se plantea la posibilidad de quitar de donde no hay nada, siempre es necesario quitar de donde siempre hay.

2.1.9 La cuestión del cero en la matemática china. ¿Lugares que significan? Significados del cero en la matemática china

El espacio wu, que para nosotros es el cero, tiene un gran significado para la matemática china, pues no solo representa un espacio vacío inerte y pasivo, sino que es un elemento que permite la interacción entre los términos zheng y fu.

Martzloff (1988:189-93) señala que existen tres niveles del cero:

- El cero como un número que tiene el mismo status que los demás.
- El cero como símbolo que permite multiplicarlo por la base.
- El cero como símbolo que permite identificar la ausencia de cierto orden de unidades.

Martzloff señala que en las matemáticas chinas no se puede hablar de ninguno de los tres niveles. Sin embargo, al observar el manejo del espacio wu en el tablero, podemos ver que es este espacio vacío lo que da status a los elementos zheng y fu. Es ese espacio que representa la nada lo que se consideraría como el elemento neutro para la adición, dotando al conjunto de números zheng fu de lo que hoy llamamos “estructura de grupo”.

En lo que respecta a las otras dos concepciones del cero, aunque no como un signo, el espacio vacío se puede considerar como un cero virtual que permitía determinar las representaciones de cantidades a partir de la posición que ocupaba este espacio wu con respecto a los palillos.

Dentro de las matemáticas chinas no resulta relevante tener un signo o símbolo que determine el elemento neutro del conjunto, basta ver que el wu representa un espacio con un significado que da sentido a los elemento zheng y fu y es el pilar de la matemática china.

Es importante señalar que el peso del término wu radica en que no solo es concebido como un número o espacio vacío, por el contrario, ya se ha mencionado que este espacio es un elemento que está en movimiento. El termino wu, a partir de las reglas zheng/fu, puede ser considerado como **“el no tener con qué enfrentarse”,** con lo cual podríamos pensar en que existe una contradicción con las reglas zheng/fu, aunque son estas mismas reglas las que nos indican cómo operar con la “nada” y comprender que wu no solo es un número, sino que a su vez es un operador que une a la sustracción y la adición.

Podemos establecer que lo que define al cero-wu no es su ser o su no-ser, sino su relación singular para operar con los otros números-nombre, logrando mostrar a la sustracción y la adición como una misma operación (la sustracción se revela como la suma de su opuesto, como lo definen las reglas zheng/fu).

2.1.10 Zheng y fu en el lenguaje ordinario y en el imaginario cultural chino

A partir del texto podemos comprobar que lejos de ser un discurso filológico, el nacimiento de estos términos zheng y fu se encuentra en el modo de pensar chino. Lo anterior sobrepasa la cuestión de pérdida/ganancia que trata de definir al método, pues zheng y fu son conceptos que abarcan más significados.

Si consideramos el elemento “fu”, encontramos que el “diccionario español de la lengua china” presenta 7 acepciones, de las cuales la sexta apenas y hace referencia a una cuestión de “deuda, deber, adeudar”. Las otras acepciones son las siguientes:

1. Llevar una carga a la espalda, soportar
2. Ser derrotado, vencido
3. Apoyarse, confiar en
4. Contiguo, cercano
5. Volver la espalda, violar, ofender
6. Deber, deuda, adeudar.

Al ver estas connotaciones, podemos darnos cuenta que, remiten a una cierta positividad donde “Fu” es el reflejo, la sombra, la contra imagen o el complemento derivado. De esta manera, se pone en marcha un juego de tensiones opuestas que, reclamándose, se compensan. Así, la relación de esta negatividad que aparece en fu, solo puede existir si primeramente existe su opuesto positivo, lo cual lo complementa para poder construirse como entero, tal y como la pareja simbólica del Yin y el Yang, que se muestra como modelo general de donde parte la relación zheng/fu.

Si consideramos la representación de los nombres/números de manera tradicional (cuando no se hace a partir de la variación de color), encontramos que los palillos fu se encuentran expresados con una diagonal, como si fuera un carga que se lleva a la espalda, mientras que los elementos zheng se colocan derechos, que es la principal acepción del término zheng en lenguaje ordinario. Si lo entendiéramos a partir de los colores asignados a los elementos zheng y fu, encontraríamos que fu (color negro), representaría la "sombra" de los palillos zheng.

Números positivos (forma tradicional)[23]

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Vertical	〇	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
Horizontal	〇	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

Números negativos (forma tradicional)

	-0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
Vertical	〇̸	𝍠̸	𝍡̸	𝍢̸	𝍣̸	𝍤̸	𝍥̸	𝍦̸	𝍧̸	𝍨̸

Si retomamos el término zheng, encontramos en el diccionario las siguientes acepciones:

1. Derecho, recto

23 Sacado de http://es.wikipedia.org/wiki/Numeraci%C3%B3n_con_varillas, sin embargo, debido a lo señalado a lo largo del texto, se considera que el espacio para "cero" debe considerarse como un espacio vacío o wu, pues no existía una representación o signo para este número-nombre.

2. Exacto, justo, preciso, correcto, recto, imparcial
3. Tomar por norma
4. Rectificar, enderezar, corregir
5. Regular, normal, legitimo
6. Principal, titular
7. Justamente, precisamente
8. Puro
9. Anverso
10. Presidir, gobernar, jefe
11. Ejecutar, castigar.

Observamos que para cada una de las acepciones existe su opuesto, es decir, no podemos considerar algo derecho sin tomar como referencia lo curvo, y de la misma manera no podemos dejar a un lado las derivaciones dialécticas que se dan entre los elementos, así, lo curvo se subordina a lo derecho, lo excepcional a lo normal, lo híbrido a lo puro, etc.

Con respecto a Wu, el elemento vacío se convierte en el eje del cual pivotan los elementos zheng y fu, que en wu se anulan recíprocamente y desde él se engendran el uno del otro. Wu representa un estado de movimiento que permite el paso de zheng a fu y de fu a zheng, y en ese espacio vacío alcanzan un equilibrio donde reside un “todo” y una “nada” (es decir, el ser y el no-ser).

De esta manera, para los chinos “wu” no es una indiferencia inmanejable ni “fu” es la “magnitud negativa” es ese “aún menos que nada” de Pascal (1976:68). Sin embargo, aquí encontramos una relación directa con el uso y significado que se le da a wu en función de zheng y fu en occidente. Si wu es el eje de simetría que determina a izquierda y derecha los elementos zheng y fu, entonces podemos apreciar su representación a partir de la recta numérica o del plano cartesiano.

El manejo de los elementos zheng/fu/wu proviene de una idea de transformación constante basada en una de las máximas chinas: "lo único inmutable es la mutación". Así, mientras los griegos tratan de encajar los fenómenos en una sola caja (llámese demostración, justificación, etc.), y lo que no se adapta al modelo es rechazado (como el cero y las cantidades negativas); los chinos, por su parte, agrupan los fenómenos en una caja con todas las regularidades pero se dan la oportunidad de considerar aun las irregularidades.

Solo por citar un ejemplo, encontramos que para la oposición masculino/femenino, dentro del Tao Te Ching[24], lo femenino es el origen del movimiento, la vida y la unidad de las cosas, mientras que para los pitagóricos era la fuente del mal, la corrupción y la multiplicidad. Los pitagóricos identifican en lo masculino la causa de la forma y el ser, el Tao Te Ching lo asigna a lo femenino.

Una de las mayores diferencias entre el pensamiento griego y el chino es la posibilidad de los chinos por considerar de manera natural las relaciones de simetría/inversión que dan la posibilidad de la existencia de wu, respaldado por una gran carga cultural.

2.1.11 Otros modos de negatividad

Aunque el Fang Cheng Shu es, dentro del Jiu Shang Suanshu el texto predilecto para mostrar la emergencia de la negatividad en el pensamiento de las matemáticas chinas, no es el único presente ni el más antiguo.

Así, la primera aplicación del término fu como elemento matemático se encuentra en las tablillas de bambú descubiertas en Ju Yan, donde se

24 Conocido como "El libro del camino y la virtud", y se le atribuye su autoría a Lao Tse. En http://es.wikipedia.org/wiki/D%C3%A0o_D%C3%A9_Jing

señalan los castigos aplicados a los soldados por su negligencia y eran expresados en términos de "fu yi suan" (menos una cuenta o una cuenta fu). De la misma manera encontramos que en el Shushu jiuzhang o "Nueve capítulos de escritos sobre cálculo", Qin Jiushao utiliza para la extracción de una raíz n-sima, un método semejante al "método de Horner" o "regla de Ruffini" para la división de polinomios. En este método se hace uso de términos/nombres cong/yi que hacen referencia a zheng y fu respectivamente.

De la misma manera, con la llegada de los misioneros a China para tratar de introducir el álgebra, estos encuentran tropiezos y dificultades tanto en la terminología como en el simbolismo y los instrumentos. Así nace el jiegenfang de donde se desprenden los términos duo/shao que también hacen referencia a zheng y fu. Sin embargo, hay que aclarar que el uso de estos términos dependía del contexto del método en el que aparecían.

Como podemos observar, no se puede hablar de una sola negatividad, sino que los chinos, en cada situación concreta, afloraban una negatividad de forma natural. De lo anterior vemos cómo el contexto determinaba en mucho el sentido y la precisión del uso de las expresiones como zheng/fu, duo/shao, cong/yi.

Es inevitable que, para comprender el uso de estos términos, sea necesario recurrir al imaginario cultural chino que dio paso a las distintas formas de negatividad. En este sentido, dos de los núcleos que nutrieron estas ideas fueron el formalismo simbólico del Yijing y las elaboraciones taoístas en torno a la terna yin yang/tao.

2.1.12 El dao y el cero, goznes opuestos. La construcción imaginaria de lo imposible

El eje que da sentido a la relación dialéctica de yin y yang es el Tao, sin embargo, los taoístas más que definir que es Tao, tratan de decir que no es el Tao. Así, el Tao parece ser a la vez el ser y el no ser: el no ser se refiere a la esencia, y el ser a la función.

Para la cultura china, Tao es el eje, el centro donde confluyen todas las fuerzas opuestas que permiten la evolución giratoria del universo. Esta concepción es lo que le da sentido a ese espacio vacío, a ese wu, como lo podemos ver en la siguiente expresión:

“Treinta radios convergen en el centro de una rueda, pero es su hueco lo útil para el carro. De la arcilla se fabrican las vasijas, pero es su vacío lo que hace posible su uso. Se agujerean muros y ventanas en los muros de una casa, pero es su vano lo que permite habitarla. Así, pues, en el ser centramos nuestra atención, pero es en el no ser (wu) donde reside la utilidad”

De esta manera, Dao (tao), no es pensable, no es perceptible, no es una cosa, si algo es Dao, es wu.

2.2 La cultura griega: La imposibilidad de la nada

Como hemos visto anteriormente, el desarrollo de la matemática en China está basado en la terna zheng/fu/wu, que nace de la relación yin/yang/tao. Es en este contexto donde emerge la negatividad y el concepto de vacío como elemento que transforma y equilibra a los elementos zheng y fu. Sin embargo, esto no sucedería así en occidente, es decir, en la civilización griega. El impedimento para la emergencia de la negatividad y el uso del cero en los griegos radica principalmente en las ideas que gobernaban su cultura[25].

Mientras en la cultura china yin y yang abarcan todos los campos del conocimiento, dentro de la episteme griega se regirán por la oposición ser/no ser. Debemos señalar que aunque podríamos pensarlo desde un punto de vista dialéctico, el pensamiento clásico griego fuerza al campo numérico a

25 Lizcano Fernández, E. (1993). Imaginario colectivo y creación matemática: la construcción social del número, el espacio y lo imposible en China y en Grecia. Gedisa.

albergarse en uno solo de los lados de la barra, en el del ser; con ello, los números podrán considerarse solo como positivos.

Dentro de la cultura griega, el ser /no ser, regidos por principios como el de no contradicción (que enuncia: "es imposible que algo sea y no sea al mismo tiempo y en el mismo sentido"), serán la base de todo su pensamiento, bloqueando toda forma de negatividad y de vacío. A pesar de este bloqueo, se pueden apreciar formas de estas emergencias en la logística y en el álgebra geométrica. En la primera, la libertad y pragmatismo con que se maneja lo numérico permitirá una manipulación práctica de cosas como el “cero” o los “números negativos”, no obstante, se hará presente la carga cultural de donde surgen.

En el caso del álgebra geométrica, el método de aplicación de áreas, planteará problemas semejantes a las ecuaciones de segundo y tercer grado, donde podrían aparecer modos de negatividad, que, serán la base de las “magnitudes imaginarias”, sin embargo también estarán condicionadas a la posibilidad o imposibilidad de una respuesta que haga cierto el problema.

Podríamos preguntarnos ¿Qué es lo que hace imposible la emergencia de la negatividad y del cero? Lizcano (1993)[26] establece dos elementos: el primer momento hace referencia al espacio de representación como un espacio extenso, donde todo tendrá sentido si es representable y visible, por lo que podemos decir que existe; el segundo caso está determinado por el modo de pensar denominado abstracción, que estará basado en lo percibido por los sentidos. Este proceso de abstracción será lo que ordene al mundo en géneros y especies. Y es aquí donde encontramos uno de los límites de la episteme griega, pues todo aquello que no sea parte de esa realidad, por el principio de no contradicción, será declarado inexistente.

El desarrollo del conocimiento griego, estaba basado principalmente en lo que los sentidos percibían, lo que indudablemente les confería una “realidad”

26 ídem

limitada al ser, a lo positivo. Esta postura los hacia buscar caminos para evitar aquello para lo que no hay palabras, pues aun atreverse a considerarlo era un absurdo.

Así, la aparición de los "irracionales" en la episteme griega causarían una escandalosa irrupción que la obligaría a repensar los límites de su racionalidad, tratando de evitar lo innombrable, lo indefinido. Un ejemplo de ello, nos dice Lizcano (1993)[27], es el abandono de la teoría pitagórica de las proporciones, que en su procedimiento nos llevaría a magnitudes inconmensurables[28]. Esta aversión al acercamiento a dichas magnitudes, mostrarían el obstáculo que recae sobre los griegos: El miedo a considerar algo sin límites. Y será en estos límites donde la negatividad no será ni aun cuestionada, pues pasará inadvertida, ya que, no solo en la matemática sino en la cultura misma, la negatividad no tendrá un discurso, una manera de nombrarse.

De esta manera, la mayoría de los problemas que se resuelven en la matemática griega, como los problemas algebraicos[29] que, de acuerdo con Bourbaki (1972), citado en Lizcano (1993), resuelve Euclides, en sus Elementos, se limitan a cuestiones de tipo positivas.

Otro aspecto del modo de pensar griego, que será la base de la matemática actual y que resultaría relevante para el evitamiento de la emergencia de la negatividad y el cero, será el nivel de perfección y rigor que se utilizan en las demostraciones sobre determinado conocimiento. Sin embargo, veremos que con el paso del tiempo, el debilitamiento del pensamiento euclidiano permitirá el franquear las fronteras entre lo posible y lo imposible, lo cierto y lo falso, lo natural y lo artificial, lo negativo y positivo, dando paso a nuevos significados. Y aun en estas brechas, veremos que la negatividad emergerá de tal forma que aun el pensamiento se verá a forzado a verlo de manera negativa.

27 ibídem
28 Aquí hablamos de números irracionales.
29 Ibídem

Ejemplo de ello, nos menciona Lizcano (1993), será el tratamiento de los números negativos, como si se tratasen de números “imaginarios para Descartes, “anfibios entre el ser y no ser” para Leibniz, “fantásticos porque solo existen en la imaginación” para Euler, “absurdos” para Carnot, “ininterpretables” para Booler, “sin sentido” para Cauchy, “una impensable no cosa” para Lambert.[30]

Como podemos ver, y de acuerdo con Lizcano (1993), observamos los diferentes adjetivos asignados a los negativos, y podríamos decir que también al cero, que pertenece a diferentes ámbitos semánticos: el psicológico (imaginarios), el lógico (absurdos), el ontológico (no ser, no cosa), el estético (fantásticos), el hermenéutico (ininterpretables, sin sentido), el gnoseológico (impensables) y hasta el biológico (anfibios). Todo lo anterior nos hace pensar en la fuerza que tiene la episteme que dio paso a tales formas de concebir a la negatividad y al cero.

2.2.1 La oposición parmenídea “no ser/ser” y la creencia en el principio de no contradicción

Como hemos visto anteriormente, el desarrollo del pensamiento en China estaba dado por la acción entre los elementos zheng y fu gracias al pivote wu, que permitía se llevaran a cabo las operaciones. En el caso de los griegos, encontramos que la base de su pensamiento se encuentra orientado bajo la raíz de pensamiento “ser/no ser”.

Aquí podemos pensar que, en el sentido que se muestra el par dialéctico “ser/no ser”, se encontraría una gran semejanza con las ideas que permitirían la emergencia del cero y la negatividad en China. Sin embargo, y como lo señala Lizcano (1993)[31], encontramos que tanto “yin” (negativo) como “wu” (cero, nada) pierden su carácter determinado (que los hace discernibles entre sí) y determinante (de oposiciones formales) para ingresar en el ámbito de la indeterminación en la cultura Griega. Esta idea permitiría centrar el

30 Ibídem, pág. 154

31 Ibídem, pág. 154

pensamiento en la parte positiva del todo, en la parte del ser, mientras que los negativos y el cero, así como el vacío físico y la nada aritmética se confundirán en la indefinición del no ser.

Como observamos, la episteme griega está respaldada por la idea de lo positivo, donde todo se determina a partir de géneros y especies, mientras que el "no ser" se sitúa en un espacio donde no hay determinaciones, donde no se puede pensar, pues no existe la razón de los sentidos. Así, a lo largo del pensamiento griego encontraremos variadas formas en que se niega la existencia misma del "no-ser", tanto como la posibilidad del tránsito entre lo pensable e impensable. De la misma manera, no se considerará un quicio o gozne que permita una articulación o relación entre lo definido y lo indefinido.

Una muestra de lo anterior será lo que Lizcano (1993)[32] nos señala como la columna vertebral del pensamiento griego, que será citado por Parménides:

"Ea, y yo te diré (guarda tú la palabra que oigas)
las vías que solas ver como vías de búsqueda cabe:
la una, la de que es y que no puede ser que no sea,
es ruta de fe y de fiar (pues la verdad la acompaña);
la otra, la de que no es y que ha de ser que no sea,
esa -te aviso- es senda de toda fe desviada:
que lo que no es ni podrás conocerlo (eso nunca se alcanza)
ni en ello pensar"

La idea anterior nos permite resaltar que no se trata un mero pensamiento, por el contrario nos encontramos con una creencia, algo que no tiene objeción alguna, pues de esta misma creencia parte todo lo que puede y no puede ser pensado. Y esta convicción, casi dada por los dioses, se reafirma en la siguiente cita:

32 Ibídem, pág. 155

"debe ser cosa el decir y el saber: pues cabe ser algo;
más no ser nada no cabe; en lo cual meditar te aconsejo;
pues de esa vía de busca te rechace la primera"[33]

Vemos entonces que, para la episteme griega el pensar y el decir solo encontraban sentido en el ser, en lo positivo, en lo pensable. Fuera de ese límite se encontraba aquello que no tenía forma ni discurso, y entre esas cosas estaba la negatividad y el cero.

Esta creencia tan arraigada en el conocimiento griego, tanto como la terna yin/yang/ tao en los chinos, daría lugar al principio de no contradicción, principio que en Aristóteles alcanzaría un estatus de incuestionado e incuestionable. Las características anteriores no serían solo elementos surgidos del pensamiento aristotélico, sino como una creencia firmemente arraigada en el imaginario cultural, así en palabras de Ortega y Gasset (1979 pág. 242)[34]:

"el carácter convincente o impositivo – cataléptico- de las sensaciones y de ciertas proposiciones máximas venía a aquellas y éstas de que era opinión reinante, lugar común, creer en los sentidos y creer en el principio de no contradicción. Eran estos dos verdades tradicionales, dos usos colectivos. De aquí que se aceptasen como evidentes precisamente porque nadie se hacía cuestión de ellos"

Y será el mismo Aristóteles en su Metafísica donde debate la imposibilidad de comprobar el principio de no contradicción:

"Nosotros acabamos de asumir (nyn eiléphamen) como imposible que el ente sea y justamente no sea, y mediante esto (dià toûto) hemos mostrado (edeíxamen) que es el principio más seguro de todos" (IV, 3, 1006 3-5)[35]

33 Ibídem, pág. 156
34 Citado en Lizcano (1993), pág. 157.
35 Citado por Ortega en Lizcano (1993), pág. 158.

Para Aristóteles no hay motivo por el cual deba probarse dicho principio, pues para él, este principio es necesario para conocer cualquier cosa. Así, cuando se enfrenta a quien, como Heráclito, pone de manifiesto la evidencia de dicho principio, le acusa de no decir lo que piensa, por lo tanto miente y más aún, lo compara con una planta (hómoios y phytói), en forma despectiva[36].

Aunque no es la intención de este texto, es importante señalar que a la larga (como lo señala Lizcano 1993), Aristóteles violaría este mismo principio muchas veces, aunque sin demostrarlo. Sin embargo, sería del principio de no contradicción que nacerían los razonamientos por *reductio ad absurdum,* que se encargarían de demostrar la evidente imposibilidad de "algo menor que nada". Por ejemplo, D´Alembert jugará con esta imposibilidad al resolver ecuaciones. Si las ecuaciones dan como resultado un número negativo o imaginario, no cabrá más que declarar el enunciado como directamente absurdo.

En este sentido, el desarrollo de la episteme griega solo permitirá contemplar aquello que es visible, aquello que es real bajo el principio de no contradicción. Más allá de esos límites se encontrará en un espacio indeterminado, donde, en palabras de Parménides "los mortales no saben nada… y en sus pechos la falta de tino les traza la idea derecha torcida"…

2.2.2 El juego de las oposiciones. Su posibilidad y anonadamiento en el pitagorismo

El conocimiento del ser en la cultura griega parte de dos perspectivas, la de Parménides y la de Aristóteles. En el primer caso, éste llega al ser a partir de la reiterada negación del no-ser y de las cosas sensibles. En el segundo caso, se retoma desde la abstracción de las atribuciones de las cosas sensibles. De acuerdo con Ortega, este proceso de conocimiento será determinado como "sensualismo" griego. Esta forma de apreciar las cosas

---

36 Ortega y Gasset (1979) citado por Lizcano (1993) pág. 183.

será la base que excluya toda negatividad, salvo que negándose a sí mismo, reafirme al ser.

Tal como lo señala Lizcano (1993)[37], muchos matemáticos se enfrentarán al dilema de la negatividad a partir de las concepciones sensualistas y del “no ser del no ser”. La negatividad y el cero emergerán a partir de la lucha contra estos prejuicios, sin derrumbar el soporte formal de esta episteme.

Y dentro de esta lucha encontraremos a varios personajes como Anaximandro con los pitagóricos, a Platón y los atomistas, los cuales muestran una cierta influencia oriental. Del pensamiento oriental estos personajes, como nos señala Lizcano (1993)[38], comparten algunas cosas:

a) Comparten una cierta concepción de la negatividad frente al culto que se seguía a la positividad en su tiempo. Esta idea de negatividad les permite apreciar desde otro punto de vista el cosmos.

b) Frente a la estaticidad y la geometrización del cosmos clásico, estos personajes lo construirán a partir del tiempo y de sucesiones de opuestos.

c) Los conceptos fundamentales que manejan estarán definidos negativamente

d) Tendrán un influjo de las formas orientales del pensamiento.

Lo anterior se puede apreciar en el siguiente fragmento de Anaximandro:

“Principio y elemento de todas las cosas es lo ápeiron (…) El nacimiento a los seres existentes les viene de aquello en lo que se convierten al perecer, según la necesidad; pues se pagan mutua pena y retribución por su injusticia según el orden del tiempo”[39]

37 Ibídem, pág. 161
38 Ídem.
39 Ibídem. Pág. 162

Como podemos apreciar, la negatividad y el cero están dadas por un cambio en la forma de apreciar la organización del cosmos, sin embargo, no hay que olvidar el peso que tienen las construcciones sociales y culturales de cada episteme en un tiempo determinado.

En Anaximandro encontramos la posibilidad del juego de opuestos, la interacción de formas dialécticas. Así, para este autor, la imagen de los contrarios brotaría desde la propia in-determinación (que de acuerdo con Aristóteles y Parménides, será un territorio que solo los “tontos” se atreverán a surcar). En este sentido, Anaximandro considerará el ausentarse un proceso tan operativo como el presentarse, y así, la negatividad será simétrica y de signo opuesto a la positividad, donde ambas se correlacionan y se generan mutuamente. Esta generación mutua se determinará por “exceso” o por “defecto”, sin dar privilegio a una u otra parte.

Esta idea tendrá sentido, no será el juego entre ambos, sino la tensión que genera su anulación recíproca, esa anulación que determinará el *ápeiron*[40]. Un *ápeiron* que, por ser principio, relanza incesantemente el juego de los excesos, defectos y anulaciones que también sin cesar en él se resuelven.

De acuerdo con Lizcano (1993)[41], los pitagóricos pudieron determinar un tipo de negatividad formal muy semejante a la desarrollada por los chinos debido principalmente a dos factores: la primicia concedida a la aritmética sobre la geometría y el libre juego de oposiciones en el que se articula y define el concepto de número. En el caso del primer factor, Arquitas de Tarento (428-365 a.C.) señala que solo la aritmética puede suministrar demostraciones satisfactorias. Esta idea, que será retomada en Diofanto habría permitido la

40 Desde la perspectiva filosófica, el ápeiron es la materia infinita, indeterminada, exenta de cualidad y que se halla en eterno movimiento. Toda la multiplicidad sin fin de las cosas, todos los mundos han surgido por desprendimiento de contradicciones (calor y frío, húmedo y seco) que arrancan del ápeiron y por la lucha de tales contradicciones. El concepto de «ápeiron» constituye un importante logro del antiguo materialismo griego en comparación con las representaciones acerca de la identidad entre la materia y determinada sustancia concreta (agua, aire). En el pitagorismo, el ápeiron es un principio sin forma, sin límite y junto con su contrario -el «límite»- constituye la base de todo lo existente. http://www.filosofia.org/enc/ros/apeiron.htm

41 Ibídem, pág. 162

emergencia de la negatividad si no fuera por el evitamiento de los inconmensurables y la aversión de los procedimientos atomistas.

Los pitagóricos se atreven a considerar a los números no como el "número de" o "medida de" un algo, sino como los números en su esencia. Así lo par es a todo y cada una de las agrupaciones donde encontramos dos elementos, términos, etc., pero difiere en si misma con respecto a otros *eidos,* como es la trialidad. Este número responde, como dice Lizcano (1993)[42], al criterio de equivalencia manejado por los chinos, más allá que al criterio de abstracción que en Grecia fuerza al número a ser número de algo.

Esta consideración de número se verá emerger años posteriores en Diofanto, Chuquet o Cardano. Sin embargo, aun el pensamiento pitagórico no llegará a construcciones negativas semejantes a las chinas, pues el peso del pensamiento dominante (principio de no contradicción), no se apartará de esta forma de pensar griega.

Con respecto al segundo rasgo, el juego de los opuestos, los pitagóricos tratan de amoldar su pensamiento para cumplir una exigencia y completitud de una estructura numérica. Así cuando piensan en los cuerpos celestes, dan cuenta que solo es posible observar 9 cuerpos, por lo que añaden un cuerpo, la anti-tierra. Esta construcción resulta negativa en primera instancia porque atenta contra lo que es visible (algo que sería de gran importancia para el pensamiento griego, solo lo que se puede percibir, se puede pensar), y es negativa por la misma oposición a la tierra, como ente positivo.

Como podemos apreciar, la construcción de este argumento (la anti-tierra), sobrepasa el formalismo de la demostración, pero no quita un ápice de rigor a la deducción formal. Es aquí donde encontramos nuevamente el tratamiento dinámico que le da Anaximandro al cosmos como el juego de oposiciones entre el ser y el no ser. Como lo señala Lizcano (1993)[43], *el ápeiron es así condición de posibilidad del ser de las cosas como del pensar*

42 ídem

43 Ibídem, pág. 165

y, por lo tanto, en sí mismo es tanto pura nada como mero impensable: el vacío. Un vacío que sirve para "distinguir las naturalezas, de modo que es una separación y división de las cosas que están unas junto a otras"

Sin embargo, a diferencia de la episteme china, aquí no existiría una simetría entre los opuestos, pues a partir de un proceso de anonadamiento, se daría con todo su esplendor la positividad, mientras que el lado negativo se reduciría a nada. Como podemos ver, mientras que para la episteme griega el concepto de número se mueve en el ámbito positivo, en lo que está determinado, la negatividad y el cero se establecerían en el pozo de lo indistinto, lo fuera de toda medida: el vacío inmenso, una región desmesurada y, por tanto, impensable. (Lizcano 1993)[44]

Así, a pesar del atrevimiento de los pitagóricos o de Anaximandro entre muchos otros, la episteme griega no reconocerá más allá del ser, de lo sensible, como resultado del principio de no contradicción. El no-ser, donde encontraremos a lo negativo y al cero en el mismo plano, solo podrá "existir" en el terreno de la indeterminación, y su existencia negada solo reafirmará las características de lo positivo.

2.2.3 Donde Aristóteles tropieza con el "cero" y asume (que no decide) su imposibilidad

Como hemos visto, el desarrollo de la negatividad y el cero tenía una cierta latencia dentro del pensamiento de los pitagóricos, pero será con Heráclito cuando encontraremos su expresión más profunda. Para este filósofo, no se puede concebir la presencia sin la ausencia, la identidad sin la alteración, el suceder sin el sucederse, la determinación sin su falta: el ser sin el no-ser. (Lizcano 1993)[45]

Para Heráclito, de acuerdo con Lizcano (1993)[46], la negatividad no es aquí mera falta, carencia o defecto (de esa determinación de la que surge la

44 Ibídem, pág. 166
45 Ibídem, pág. 168.
46 Ídem

distinción como presencia necesariamente positiva) sino el fundamento mismo del presente, la propia fuente de la positividad, con la que comparte idéntico dinamismo y cualidades.

De lo anterior surge la idea del dinamismo que guarda el mundo cuando, a partir de los opuestos se genera movimiento a través de la contraposición de fuerzas. Y será este movimiento que, de acuerdo con Heráclito, se forme la más bella armonía a partir de la discordia.

Esta idea no convencerá a Platón, pues para él, no se puede generar la armonía a partir de elementos divergentes, lo cual sería un absurdo. Y así, desde Aristóteles, Heráclito será un dos cabezas, de lo misma manera que la episteme china lo es, pues ellos considerarán de igual forma el movimiento como el resultado de la acción de fuerzas opuestas, mientras que para los griegos, lo natural es el reposo, la perseverancia en el ser y la permanencia, por lo cual su mayor dificultad será explicar el movimiento, la alteración y el cambio.

Y esta idea de movimiento como resultado de fuerzas opuestas se verá reafirmada a partir de la idea de Galileo:

"La cesación del movimiento se debe a una fuerza opuesta. Si no hay fuerza opuesta, el movimiento nunca se detendrá. Esto es cierto como que una vaca no es un caballo"[47]

Con lo anterior podemos deducir la idea del equilibrio a partir de las fuerzas opuestas. Si bien se genera movimiento, el equilibrio entre dos fuerzas opuestas de iguales magnitudes determinará lo que podríamos considerar un cero.

Sin embargo será, en Platón y Aristóteles donde se rechace el no ser como elemento que genera movimiento, pues para ellos, el no ser se encuentra en la indeterminación, la indefinición, por lo que allí no hay episteme, pues no es

47 Citado por J. Piaget y R. García (1982:232), en Lizcano (1993:170)

algo observable ni pensable. Y así, esa forma de negatividad que es el vacío parece repugnar de manera especial a la episteme griega.

Con respecto a Leucipo y Demócrito, estos navegarán en la oposición del ser y no ser, considerando este último como una contra-afirmación del ser. En este sentido, el vacío, como forma negativa, será la negación de las características del ser. Aristóteles argumentará la imposibilidad de este vacío basándose en la imposibilidad de la nada, que a juicio Lizcano (1993), podría ser concebido como un cero, algo que no podría ser considerado en la aritmética griega.

El argumento que manejará Aristóteles será la siguiente:

"Pero no hay ninguna razón en la que el vacío (Kenón) sea excedido por los cuerpos, igual que nada (medén) no está en razón alguna con un número. Pues 4 excede a 3 en 1, y a 2 en más, y a 1 en todavía más de lo que excede a 2; pero cuando llegamos a nada (medenós) no hay razón alguna en la que 4 lo exceda, pues el número que excede debe dividirse en el exceso y el número que es excedido, así que 4 debería ser la suma del exceso y nada (oudén). Por esto, tampoco una línea excede a un punto, porque no está hecha de puntos. Similarmente el vacío no puede estar en razón alguna con lo lleno"

En este sentido, Aristóteles piensa en una cantidad y establece las razones aditivas que lo exceden, es decir:

4= 3+1

4=2+2

4=1+3

Pero cuando llega a la idea de la relación de 4 y nada (medén), podríamos pensarlo de la siguiente manera:

4=nada + 4

Sin embargo, para este autor, no hay razón lógica que permita pensar en que un número esté en razón con nada. Y esta idea sería llevada de la misma forma al “álgebra geométrica”, donde no tendrá sentido sustraer un segmento de nada o de un segmento menos extenso que él. Esta imposibilidad resulta contraria a la episteme china, que como ya hemos visto, considera el hueco, la nada como un elemento operable, que puede emparentarse con los números, sean estos positivos o negativos.

Siguiendo la línea de pensamiento aristotélica, podemos observar que a esta “nada” no se le da siquiera un tratamiento matemático, por el contrario, al considerarse impensable, se le rechaza, porque no tiene razón de ser (Lizcano, 1993)[48]. Esto tiene sentido en el uso de los términos medén y oudén, que son regularmente traducidos como “cero”, pero que en su contexto son solo partículas negativas como “no”, “no hay” o “tampoco”.

En el imaginario colectivo, pensar siquiera a medén y oudén como “nombres” o sustantivos sería darles una existencia misma, un cuerpo en el discurso que nos dejara pensarlos como algo existente. Por el contrario, su “existencia” se limita a llevar al vacío, la nada, al terreno de la indeterminación, luego entonces, la nada no merece tener nombre.

Y así, aunque algunas corrientes como los atomistas se atreverán a darle cierta positividad a ese no ser, tanto como la logística tendrá esa libertad de operar los números con mayor libertad, ambas no se podrán escapar de los prejuicios propios de esta episteme, que no les dejará pensar más allá de lo que existe, de lo que se puede percibir con los sentidos, de lo que tiene un espacio.

2.2.4 Los “números tazones” de la logística. Los lugares y los cuerpos

Otra de las ramas de la episteme griega que podría fomentar la emergencia de la negatividad y del cero sería la logística. La logística o cálculo práctico, son considerados como cuestiones técnicas, propias de la gente común.

48 Ibídem, pág. 176.

Esta asignación parte de la profundidad con la que los filósofos tratan las cuestiones matemáticas (las ideas y conceptos), mientras que la logística se remite a cálculos cotidianos, de hecho, es de aquí de donde se hereda las formas de realizar las operaciones básicas actualmente.

Se puede pensar en la posibilidad de la emergencia de la negatividad en esta rama porque en ella se permitirá la libertad de violentar varios de los presupuestos o prejuicios del conocimiento griego, como la esencia indivisible de la unidad. Ejemplo de ello es el número uno, el cual no es considerado como número ni en los pitagóricos o el platonismo, pero en la logística no solo es considerado como tal, sino que lo hace susceptible de división, obteniendo fracciones unitarias. (Lizcano, 1993)[49].

Otro aspecto que sobresale es la manera en como la logística logra tener "éxito".

Considera los "números tazones" (pensando en el objeto que ocupa un espacio), recordándonos la idea que prevalecía en China, que de acuerdo con Laozi, "de barro se hacen las vasijas, pero es de su oquedad de lo que depende su uso". Así, para los griegos la importancia de las "cosas" radica en su existencia y en lo visible de ellas, denotando la importancia de lo "positivo" de los objetos, mientras que en la episteme china, la existencia solo es la mitad que define a un objeto, la otra mitad, que es fundamental, es considerada en términos de oquedad, vacío, abismo (Lizcano, 1993)[50].

Partiendo de la idea de los "números tazones", vemos la importancia que para Aristóteles tiene el ser: "así como todo cuerpo está en algún sitio, así en cualquier sitio hay algún cuerpo" "si ese cuerpo crece, el sitio debe crecer solidariamente con él". Entonces, para considerar la existencia de la "cosa", ésta debe ocupar un lugar en el espacio y este espacio está en relación con el objeto. En el caso del vacío, nos dice que "el vacío no es un lugar concebible sin el cuerpo que lo ocupa", "el lugar se define por la cosa que lo

49 Ibídem, pág. 177.
50 Ibídem, pág. 179.

habita y se agota en ella", "Incluso los objetos matemáticos necesitan de un lugar, que es el lugar de algún cuerpo"[51].

La nada no es considerada como un lugar donde se da la existencia, pues la ausencia de los objetos nos permite afirmar la ausencia del espacio. Aquí podemos ver la diferente carga imaginaria que se atribuye a los objetos, pues mientras que en los griegos, las cosas existen porque son visibles, en los chinos (que utilizan números-nombre), podrán pensarlos en la posibilidad de ser positivos y de moverse en el plano negativo, más aun, el hueco en el tablero del Fang Cheng, tendrá una existencia, un significado.

2.2.5 El "álgebra geométrica": un espacio inhóspito para la negatividad

A partir del desarrollo de la logística se transforma la manera de pensar pitagórico-platónico, lo que lleva a un cambio de concepción de la matemática. Por ello, se transita de la representación del número discreto y sus relaciones internas, a las percepciones basadas en la continuidad.

Este cambio en la manera de hacer matemáticas llevaría a considerar a los objetos tanto como a las operaciones a la lógica de la extensionalidad euclidiana (Lizcano, 1993)[52], con ello, la ausencia de la negatividad, no podrá ni pensarse.

Es así, como a partir del "algebra geométrica" nace el método canónico de resolución por "aplicación de áreas", que dejará de lado en esta episteme la resolución algorítmica formal de las ecuaciones cuadráticas por parte de los babilonios.

De lo anterior podemos decir que, dada la episteme en que se desenvuelve el método, los resultados que se buscarán para satisfacer el problema se moverán en el entorno positivo, bloqueando cualquier emergencia de negatividad. Sin embargo, encontramos que al aplicarse el "álgebra geométrica" utilizando los Elemento de Euclides, se trata de dar solución a

51 Citas de Physica IV.I 208ª 27-209ª 30. En Lizcano (1993), pág. 180
52 Ibídem, pág. 183.

ecuaciones cuadráticas que tienen una raíz negativa, pero ante estos casos, los griegos transformaban dicha ecuación en otra que tuviera una raíz positiva, cambiando –x por x.

Es a partir de estas características que se pueda dar el concepto de *"diorismoi",* que de acuerdo con Proclo, en sus comentarios sobre Euclides, le atribuye el origen del término a León, discípulo de Neoclides, del cual nos dice: "Él inventó los diorismoi, cuyo objeto es determinar cuándo el problema que se investiga es de posible solución y cuándo es imposible", y más adelante nos lo define así: "es un criterio para saber si lo que se busca es imposible o posible y hasta dónde realizable y de cuántos modos"

Con estos diorismoi, se dejará claro que cuando se resuelve un problema, primero se determinan las condiciones para su solución y la posibilidad de resolverlo. Si, por ejemplo, el problema puede llegar a una solución negativa o al cero, se modifican las condiciones para que el resultado pueda llegar a una solución positiva. Y tal como lo señala Lizcano (1993)[53], *"la matemática griega clásica es esencialmente estática, ceñida a la figura/imagen/idea (eidos) de contornos fijos y nítidamente definidos, del todo solidaria con las precisas determinaciones que perfila la percepción visual (eidon= "yo vi"), una matemática que evita cualquier consideración que suponga movimiento o indeterminación".*

2.2.6 Aphairesis: pensar "por abstracción" y operar "por sustracción". Los primeros principios o los límites del sentido común griego

Como se ha señalado, dentro de la episteme griega existen obstáculos que no permiten la emergencia de la negatividad y el cero, y estos obstáculos se dan a partir de dos características: el pensar por a) abstracción y b) que todo se hace a partir de las cosas sensibles (lo que Ortega determinará como "sensualismo" griego).

53 Lizcano (1993, pág. 191)

Desde el modo de pensar aristotélico-euclídeo, aphairéo como verbo, da lugar a la diferencia específica y a la diferencia de magnitudes. Se sustrae magnitudes como se abstrae el género de la especie: separando algo de donde, necesariamente, había más (Lizcano 1993)[54]. En este sentido, para los griegos sustraer es sinónimo de abstraer y se reafirma la idea de una actividad positiva, así, no se puede sustraer de donde no hay, como tampoco se puede sustraer más de lo que ya hay.

De esta manera, la base del pensamiento griego está dada en la abstracción e imbricación en géneros y especies a partir del carácter "sensualista" y "cosista[55]" de los objetos. Aquí podemos decir que a partir de la percepción podemos identificar "ciertas cosas" en los objetos de los cuales extraemos los conceptos a partir de lo que tienen en común. Lizcano (1993)[56] nos dice, a manera de ejemplo, *¿Cómo determinar que lo común a una colección de triángulos es su triangularidad y no, por ejemplo, su color? O, la primera definición de Euclides: "Punto es lo que no tiene partes o lo que no tiene magnitud". Ninguna de esas dos definiciones permite distinguir el punto de cualquier otra cosa que no tengan partes o magnitud, como el alma, Dios o "lo que no hay".*

Es donde surge el carácter sensualista, pues se requiere de lo que vemos para poder determinar o definir las cosas, y aunado a lo anterior, se precisa un consenso o un uso generalizado del concepto (aquí vemos el peso del colectivo social que en Grecia, por ejemplo, tendrá el principio de no contradicción). Así este requisito sensualista de visibilidad no se limita al conocimiento filosófico y científico griego, en matemáticas, Aristóteles nos dice: *"Si la línea es lo que reconocemos que es a partir de nuestra* ***intuición visual****, entonces el ángulo suma de un triángulo es dos ángulos rectos"*[57].

54 Ibídem, pág. 194.

55 Lo podemos entender desde un significado filosófico como la doctrina filosófica que sostiene que todos los existentes son objetos concretos, negando la realidad de los entes de razón, tal como las relaciones o propiedades. En términos de la lingüística lo entendemos como el uso exageradamente frecuente del sustantivo cosa en lugar de otros más específicos

56 Ibídem, pág. 195.

57 Cita de Physica (II.9. 200ª 16-19), en Lizcano (1993) pág. 195

Otro ejemplo que nos da Aristóteles, y que tendrá un peso en la consideración de la negatividad es el siguiente:

“Fuera de las magnitudes sensibles, nada existe separadamente; es en las formas sensibles donde se encuentran los inteligibles, lo que se dice en abstracción, todos los estados y propiedades de las cosas sensibles”[58].

Esta idea se sustenta en el significado de las palabras, pues aphairesis como sustantivo proviene del verbo aphairéo que tiene como acepciones “sacar”, “extraer” algo de algo, “separar” algo de una cosa, “arrancar”, “privar”, etc., por lo que siempre resultará importante, dentro del colectivo griego clásico, el tener para poder sustraer. Gardies (1989:66) nos muestra un ejemplo de cómo se maneja la abstracción:

“… [la abstracción] permite pasar del concepto de “león” al de “cuadrúpedo vivíparo”, de éste al de “animal sanguinario”, y de éste al de “animal”, por la doble razón de que estos conceptos son homogéneos (pues como diríamos hoy , todos ellos corresponden a conjuntos de individuos o a predicados de individuos) y que, al tener los primeros una comprensión más rica de los siguientes, el paso de los unos a los otros resulta cada vez de una suerte de extracción”[59].

El proceso de abstracción requiere de un elemento conocido, del cual se *extraen* ciertas características que son comunes a los individuos. Para el caso de la sustracción se sigue un procedimiento similar, donde se requiere que los números o magnitudes sean homogéneos uno de otro y que el primer número sea mayor que el segundo. Así, tomando el ejemplo de Lizcano (1993) [60] , *si de la especie “hombre” (= “animal racional”) abstraigo/sustraigo el género “animal” queda como residuo o exceso la diferencia especifica: el ser racional*. Esta misma idea se aplica a las matemáticas: de 5 sustraigo/abstraigo 4 queda como residuo o exceso la

58 De Anima, II.11.432ª 3-6), en Lizcano (1993), pág. 196.
59 Cita de J. L. Gardies (1989:66), en Lizcano (1993) pág. 197.
60 Ibídem, pág. 197

diferencia 1. Aquí, tanto abstracción como sustracción se podrán visualizar como sinónimos.

De lo anterior encontramos porqué Aristóteles llega a la conclusión de que emparentar un número con nada (oudén), es ilógico (ver página 34). Entonces, si consideramos una sustracción donde el primero número es menor que el segundo tenemos lo siguiente:

“cinco” – “seis” = ¿? , o sea, “cinco” = “seis” + ¿?

Para los griegos, lo anterior resultaría ilógico y absurdo, algo que no se podría pensar ni considerarse. En su caso contrario, para la episteme china el ejercicio anterior resultaría natural.

Como podemos apreciar, la clasificación por género y especie que hacen los griegos a partir de la visualización, no solo trascendería más allá de la creación misma de conceptos, sino que pasaría a ser parte del proceso de demostración[61]. Este concepto de demostración viene del verbo *deíknymi,* que en el pasado se interpretaba como “visualizar de modo concreto”. Los modos de demostración avanzarían y cambiarían con el paso del tiempo, volviéndose una especie de diorismoi, que determinará lo que es pensable, decible y demostrable en la matemática euclídea.

Entonces, resalta el carácter sensualista de la demostración, la necesidad de “ver” el objeto y a partir de sus relaciones (tomando los axiomas o ideas prevalecientes de acuerdo con la cultura), se podrá determinar lo que existe, lo que es real. Por ello, la negatividad y el cero no podrán emerge en este contexto, pues serán impedidos por su falta de representación, de existencia, de uso en el colectivo griego, lo que en China, será todo lo opuesto. Y más aún, se muestra la diferencia entre el pensamiento clásico griego y el pensamiento moderno, pues los primeros, de acuerdo con Ortega

61 Demostración entendida como “poner a la vista”, “exhibir”

(1979:109), piensan desde el ser, mientras que los segundos, comenzando con Descartes, piensan desde el pensar, desde las ideas.

En general, las ideas surgidas en la episteme griega mostrar un gran obstáculo para concebir la negatividad y el cero. Su esfuerzo por reafirmar el ser, relegará el resto al mundo de la indeterminación, donde no es posible pensarlo y por tanto aceptarlo.

Así mismo, los prejuicios de no contradicción y el método de reducción al absurdo serían elementos aceptados sin objeción alguna, y en estos fundamentarán todo el conocimiento, del cual somos herederos.

2.3 Simon Stevin: Una nueva noción de número que da paso al cero como origen

El desarrollo del conocimiento en occidente sentaría sus bases en el legado dejado por los griegos, lo que hizo que muchas de sus concepciones se desarrollaran varios siglos después de su desaparición. Así, las ideas y conceptos matemáticos afianzados en la Grecia clásica perdurarían durante varios siglos sin algún cambio aparente.

En el siglo XVI, se daría un punto de inflexión en el desarrollo de la noción de número, gracias a los trabajos aritméticos de Simon Stevin, el cual rompe la concepción griega establecida en la “matemática teórica” y propone un nuevo concepto que integra las operaciones de contar y medir.

Este nuevo concepto seria trabajado por Stevin en su libro *L´Arithmetique*, publicado en 1585, donde en su apartado *La Disme*, explicaría de manera simple y sin complicaciones teóricas la notación decimal y su operatividad.

2.3.1 Número y magnitud en la matemática teórica griega

Como ya se ha señalado, el concepto de número establecido en el imaginario cultural griego presentaba determinadas características:

- Los griegos carecían de una visión conjunta de las cantidades, de tal forma que existían dos conceptos, uno para las cantidades discretas (propias de la aritmética) y otro para las cantidades continuas (que solo se trabajaban en la geometría).

- No se contemplaban cantidades menores a la unidad (lo que incluía la ausencia del cero).
- La naturaleza de los números partían del reflejo de la naturaleza, donde solo se exhibe lo positivo, lo contable.
- En la aritmética, los números tienen como límite de la división a la unidad, pues nada puede ser dividido más allá de la unidad, de lo contrario se perdería la esencia del objeto.
- Las magnitudes, propias de la geometría, se pueden dividir de manera infinita.

Lo anterior se mantendría durante varios siglos como la base del conocimiento matemático.

2.3.2 La definición de número de Stevin

Para la construcción del nuevo concepto de número, Stevin parte de la experiencia cotidiana y profesional, pues para él, las necesidades prácticas determinan el tipo de matemática que se debe desarrollar. (Waldegg, 1996). Esto nos hace pensar en la necesidad de ver los conceptos matemáticos no solo desde la teoría, sino desde el lugar donde se llevan a la práctica.

No obstante, para dar una fundamentación teórica y formalización de acuerdo con los griegos, Stevin resuelve el aspecto operatorio en La Disme, en donde presenta una sistematización de la notación decimal, mientras que para la formalización, será en L´Arithmétique, a partir de la identificación de magnitud y numero, donde atribuirá propiedades numéricas a las cantidades continuas y propiedades de continuidad a los números (Waldegg, 1996)

Para Stevin, el concepto de número se construye a partir del reconocimiento de un isomorfismo operatorio, es decir, el reconocimiento de que se puede operar con los números como las cantidades continuas y discretas, algo que en la matemática griega sería imposible.

Así, la definición de Stevin establece: *"El número es aquello por lo cual se expresa la cantidad de cada cosa" (Stevin, 1585 citado en Waldegg, 1996).* Es aquí donde Stevin señala al número como un medio para hacer evidente la cantidad. Con esto se borra la dicotomía continuo-discreto de la cantidad al negar la "discretez" del número como una característica de su esencia.

Por ello, cuando se ve al número como entidad aislada, se entiende como "continuo", pues es posible dividirlo indefinidamente sin que pierda su esencia, y en todo caso hereda la característica de la continuidad o discretez de la "cosa" que está cuantificando.

2.3.3 Una definición de número asociado a cantidades continuas y discretas

En la matemática griega, el número es parte de la cantidad y se construye a partir de la oposición entre lo discreto y lo continuo; en Stevin cantidad y número son dos dominios diferentes. En el caso de la cantidad corresponde a una abstracción sobre un contexto empírico, mientras que el número se sitúa en un nivel puramente simbólico (Waldegg, 1996)

No obstante, de acuerdo con Waldegg, este nuevo concepto presentaría dificultades al tratar de justificar la relación entre número y cantidad. Uno de los problemas es que las cantidades continuas no disponen de una "unidad natural", sino que se le asigna a la cantidad por medio de una unidad convencional. A saber, aquella que se eligió como unidad de medida; lo que no hace claro si se está operando con "números verdaderos", con símbolos o con la "cantidad numerada".

Para ello, Stevin define al número aritmético como "el número que se expresa sin adjetivo de magnitud" (Stevin, 1585, citado en Waldegg, 1996), es decir, un número como el 9 puede ser considerado como una cantidad lineal, pero también puede representar el área de un cuadrado.

Entonces, el número es, como lo dice Waldegg, homogéneo, en el sentido que éstos se independizan de sus orígenes y, por lo tanto, se puede operar con ellos sin referirse a las cantidades de donde surgieron. (Waldegg, 1996, pág 11)

2.3.4 La ampliación del dominio numérico a consecuencia del nuevo concepto de número

Como hemos visto, el desarrollo del concepto de número por parte de Stevin tuvo consigo algunas dificultades, pues estas ideas trastocaban los que por siglos habían imperado en el colectivo imaginario.

Con respecto a la idea de las cantidades numerables, Euclides establece las siguientes propiedades:

a) La unidad para numerar no es divisible

b) La unidad para numerar no es un número (el 1 no es número)

c) Las razones entre cantidades numerables no son números. (las fracciones no son números) (Waldegg, 1996)

Para darle sentido al nuevo concepto de número, Stevin atribuye explícitamente propiedades que lo diferencian del número griego:

a) La unidad (numérica o geométrica) es un número

b) La unidad es divisible ilimitadamente

c) Las partes de la unidad, son a su vez, números.

Con estas premisas, Stevin logra ampliar el dominio numérico, incluyendo a la unidad y a las fracciones de ella. Y no solo eso, sino que generaliza el dominio numérico a los resultados de las extracciones de raíces, incorporando a los racionales e irracionales. (Waldegg, 1996)

Para darle validez a sus premisas, Stevin se dará a la tarea de mostrar que a cada magnitud corresponde un número y a cada número le corresponde una magnitud. Él parte de la idea que en la identificación griega, las potencias de un número quedan restringidas a ciertas magnitudes geométricas (x^2 es una superficie, x^3 es un volumen y no hay otra posibilidad). Para lograr su propósito, muestra el siguiente ejemplo:

“Supongamos que tenemos un segmento de longitud 2. Si formamos un cuadrado con él, el área será 2^2=4 y si ahora construimos un cubo, su volumen será 2^3= 8. Hasta aquí el razonamiento coincide con el griego: la primera potencia es lineal, la segunda es cuadrada y la tercera es cúbica. Si ahora apilamos dos de estos cubos, el volumen del prisma resultante será 2^4=16, con lo que le habrá dado un significado geométrico a la cuarta potencia y, de manera análoga a todas las subsiguientes” (Stevin 1585, citado en Waldegg, 1996)

Con este ejemplo Stevin pretende fundamentar la homogeneidad del dominio numérico y la naturaleza de su “número aritmético, con lo que concluye que “cualquier numero puede ser cuadrado, cúbico, etc. Así como cualquier raíz es un número. (Stevin 1585, citado en Waldegg, 1996)

2.3.5 El significado de las operaciones aritméticas en la evolución del número

El sentido del trabajo de Stevin nos llevaría a considerar a los números y las magnitudes en un solo concepto. Este concepto tendría sentido a partir de las operaciones que se pueden hacer con ellos. En su trabajo Stevin le daría realidad a los números a partir del campo operatorio, y esto lo llevaría indudablemente a considerar el cero.

El sentido de operatividad de los números que darían justificación y soporte al nuevo concepto formulado por Stevin sería manifestado en tres momentos, donde se destacaría el peso de la realidad física para dar sustento a los conceptos matemáticos.

a) "La esencia del número está en sus operaciones"

En este primer momento, Stevin resalta la idea de que el número está condicionado por las operaciones que se pueden realizar con él, afirmando que negar la divisibilidad de la unidad es limitar la naturaleza del número.

De la misma forma, Waldegg (1996) señalaría el sustento de las operaciones aritméticas para la existencia operatoria del número expresando una posible respuesta de Stevin:

"El número expresa la cantidad de cada cosa.
Las operaciones aritméticas, como relaciones y transformaciones de números, expresan las acciones y transformaciones que se hacen con las cosas (en tanto cuantificables)"
(Waldegg, 1996, p. 13)

Así, de acuerdo con Waldegg (1996), serán las acciones que se realizan con las cantidades las que darán sustento a las operaciones aritméticas y éstas, a su vez, las que constituyen la esencia del número.

Como podemos percatarnos, es en la operatividad con el número cuando este toma sentido, pues con él se ha llevado a cabo el propósito de facilitar las actividades matemáticas del hombre.

b) Cerradura del domino numérico respecto a las operaciones algebraicas.

Si el número está condicionado a su operatividad, Stevin consideraría que los resultados de las operaciones (aritméticas y algebraicas) realizadas con números, son a su vez números. Para llegar a esta conclusión, Waldegg (1996) señala que Stevin utilizaría dos formas de argumentación: la primera basada en la práctica de la medición; la segunda forma tendría un carácter fuera de la lógica, donde se mostrarían niveles de abstracción ambiguos, pasando de los objetos físicos a los objetos matemáticos. Veamos la afirmación que hace Stevin al afirmar que la unidad es un número:

Que la unidad es número.
La parte de la misma materia que su todo
La unidad es una parte de la multitud de unidades
Entonces, la unidad es la misma materia que la multitud de unidades
Pero la materia de la multitud de unidades es un número
Entonces, la materia de la unidad es número
(Stevin,1585; citado en Waldegg, 1996).

En esta afirmación vemos como Stevin pasa de objetos materiales (“la parte es la de la misma materia que su todo”), hacia objetos matemáticos (“la unidad es parte de una multitud de unidades”). Como podemos percatarnos, Stevin afirma que de un número, al operar con él se deberá obtener otro número, así como al partir el pan se obtiene pan. (Waldegg, 1996).

Aunque Stevin lograría dar un salto con respecto al concepto de número, logrando vencer los obstáculos establecidos por las concepciones griegas, sería en las magnitudes donde no se lograría unificar estas con una representación única. Esto solo se lograría mediante la introducción de la geometría analítica de Descartes (Waldegg, 1996).

c) La elección de la unidad

Será en este aspecto donde Stevin haría énfasis en el manejo de una unidad que unifica al número con la magnitud, para ello identifica una unidad “natural” –la numérica- con una unidad arbitraria- la métrica. Stevin no argumentaría por una única unidad de medida, pues reconoce que se deberá tomar aquella que sea usual en cada región, siempre que se generalice la práctica de dividirla en subdivisiones decimales y para ello dice:

“… *se partirán de todas las medidas, ya sea de longitud, líquidos, secos, monedas, etc., por las anteriores progresiones de décimos y cada una de* *estas famosas especies se llamará* ***Comienzo (Commencement)****; por ejemplo el Marco, Comienzo de pesos; la libra Gruesa de Flandes, la libra Esterlina en Inglaterra, el Ducado de España, y así cada Comienzo de monedas.* (Stevin, 1585. Citado en Waldegg, 1996).

Así, todas y cada una de las unidades de medida, no importando su naturaleza la denomina Comienzo y señala como su símbolo ⓪. Con ello, Stevin resalta que la unidad no es solo una abstracción sobre los objetos en tanto cantidades, sino una abstracción realizada sobre las acciones coordinadas en el proceso de medir objetos.

Lo anterior sería relevante, pues dentro de La Disme, Stevin haría diversos señalamientos con respecto a que no es la unidad aritmética lo que juega un papel análogo al punto de la geometría, sino el cero. Y dice: "El número y la magnitud son tan semejantes y tienen tantas cosas en común que parecen casi idénticos, consecuentemente, debe haber algo en el número que corresponda al punto en las magnitudes, pero no es, como se creía en la antigüedad, que la unidad sea el principio del número tal y como el punto es el principio de la magnitud, este papel le corresponde al cero. (Stevin, 185 citado en Waldegg, 1996). Esto sería un paso relevante para la identificación punto-número en la recta de Descartes.

La importancia de esta asociación entre el punto y el cero como inicio será de relevancia para la construcción de la recta numérica, pues ya no se partiría de la unidad (aspecto heredado del imaginario colectivo griego), como resultado de la abstracción de la naturaleza, sino desde la aceptación del cero como el comienzo de todo, algo que desde el imaginario cultural chino permitiría considerar las cantidades positivas y negativas en todo momento.

Capítulo III.

Estudios previos sobre los sentidos de uso del cero

El estudio de lo cero y la negatividad ha sido documentado en diversas investigaciones de tipo didáctico. Estas investigaciones permiten el análisis del tratamiento del cero y los negativos en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

A continuación presentamos algunos de los trabajos que se han realizado en torno al estudio del cero y los negativos y que dan sustento al desarrollo de este trabajo de tesis de maestría.

3.1 La extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros

En este trabajo, mediante el modelo de enseñanza llamado Modelo de Bloques (MB a partir de ahora) como recurso de investigación, Gallardo y Hernández, (2006) analizan la sustracción de enteros en estudiantes de secundaria. Utilizar el modelo de enseñanza durante entrevistas clínicas individuales, permitió reconocer las condiciones en las que se podría alcanzar la extensión numérica.

La determinación de utilizar un modelo de enseñanza para la introducción de los números negativos está sustentado en el trabajo de Freudenthal (1983), Glaeser (1981), Bell (1982, Janvier (1985), Fischbein (1987), Vergaud (1989), Bruno y Martinón (1994), Gallardo (2002) y Vlassis (2001 y 2002) entre otros. Estas investigaciones permitieron afirmar que en los procesos de enseñanza-aprendizaje de los enteros del nivel elemental, es necesario recurrir a modelos, pues muchas veces no basta con las explicaciones formales y para los estudiantes es necesario vincular modelos reales o manipulativos con los conceptos matemáticos.

3.1.1 El estudio

Esta investigación mostró los resultados de un grupo de estudiantes de segundo grado de secundaria, los cuales utilizaron el modelo concreto MB, con el fin de desarrollar contenidos relacionados con los números enteros. La secuencia metodológica utilizada fue la siguiente:

- Se observaron a 5 grupos de segundo de secundaria de México, para conocer las formas de enseñanza del profesor, la dinámica del trabajo del grupo e identificar las estrategias desarrolladas por los alumnos al resolver las situaciones problemáticas que se planteaban.
- Se aplicó un cuestionario diagnóstico a los cinco grupos, con tareas que involucraban los números signados.
- Con el grupo de bajo desempeño académico se realizó una fase de enseñanza, con el objetivo de que utilizaran el Modelo de Bloques.
- Después de la fase de enseñanza, se diseñó y aplicó un cuestionario final a 16 alumnos para detectar a los que tenían mucha dificultad, los que mostraban una comprensión media y los que habían avanzado en la comprensión de contenidos.
- Se realizaron 16 entrevistas video-grabadas para conocer los procesos en la comprensión de los números signados.

3.1.2 Descripción del modelo de enseñanza

El Modelo de Bloques es una representación de los números enteros cuyo fundamento se basa en su similitud con los objetos. Es a partir de su experiencia con el modelo que los estudiantes "dan sentido" a sus reglas de funcionamiento para posteriormente extenderlas al conjunto de los enteros. Este modelo es de neutralización o de equilibrio, denominado así por Janvier (1985) porque se da la existencia de entidades opuestas que se neutralizan entre sí, es decir, a partir de la unión de un bloque de color con otro sin color en una operación, se aparean convirtiéndose en elementos nulos (principio fundamental del Modelo).

Es importante señalar que al trabajar con este modelo, no aparece la sustracción como "completar a", sino que posibilita una representación alterna de los números, lo cual permite considerar a los números como el resultado de la adición de una cantidad dada más un número infinito de ceros, es decir: a= a+0= a+0+0=…

De acuerdo con Gallardo y Hernández (2006), el cero juega un papel dual, como elemento nulo y como elemento compuesto por opuestos. Esta dualidad del cero, de ser nada o ser totalidad, lo convierte en un elemento privilegiado que ayuda o dificulta el proceso de comprensión de los números negativos.

3.1.3 Algunas conclusiones de esta investigación

Para presentar los resultados de este estudio, se trabajó solo con los datos de los estudiantes del llamado nivel bajo. Es a partir de las justificaciones ante los problemas planteados que se llegan a diversas conclusiones.

Al realizar el análisis de las entrevistas, se comprobó que los modelos de enseñanza no son paradigmáticos, pues aunque resulta un apoyo para fomentar la comprensión de conceptos matemáticos, dependen en mucho de las tendencias cognitivas que manifiestan los estudiantes.

Otro de los aspectos que se concluye de la investigación a partir del análisis sistemático de las entrevistas, es que la extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros se puede lograr cuando:

a) Se alcanzan los diferentes niveles de conceptualización de los números negativos propuestos por Gallardo (1994).

b) La sustracción de enteros debe ser comprendida en todos los casos por los estudiantes antes de la enseñanza de la multiplicación vía reglas de signos.

c) Cuando la igualdad se entiende como equivalente de expresiones.

No obstante, la extensión del dominio numérico se obstaculiza cuando:

a) Existe la centración en el signo binario (operatorio) y a su vez inhibición del signo unario.

b) Se presenta la no aceptación de la sustracción de enteros en todos los casos

c) Aparece una extrapolación de la sintaxis del MB a la sintaxis del lenguaje algebraico.

Como podemos apreciar en los resultados de esta investigación, el uso de modelos concretos no es determinante para unificar el ámbito aditivo y multiplicativo simultáneamente, tal como lo señala Glaeser (1981). No obstante esta investigación permita ver la importancia que tiene el cero para la comprensión de los enteros positivos y negativos.

3.2 La dualidad del cero en la transición de la aritmética al álgebra

Como una continuación del trabajo hecho en “La extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros”, Gallardo y Hernández (2007), se continúa la investigación para identificar las dualidades de la igualdad (operador-equivalente), del signo menos (unario-binario) y del cero (nulidad-totalidad), durante la transición de la aritmética al álgebra en estudiantes de 12 a 13 años.

En esta investigación se logró dar una respuesta parcial a las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo contribuye el cero a la extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros?
2. ¿Los estudiantes están conscientes de la naturaleza dual del cero?
3. ¿Los estudiantes entienden la suma, la sustracción, la multiplicación y la división entre cero?

Para poder dar respuesta, se siguió utilizando el MB. Aquí se reconoce que el cero manifiesta su carácter dual, como elemento nulo: a=a+0=a+0+0… y como contenido de una de parejas de opuestos: a + (-a)=0. Como se observó en Gallardo y Hernández (2006), la dualidad del cero (nulidad-totalidad) es uno de los aspectos que contribuyen a la extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros.

A lo largo del análisis que se hace de cuatro casos particulares, se puede observar cómo el cero permite que los estudiantes doten de sentido a las operaciones de adición y sustracción de números enteros.

En el primer caso se muestra la sustracción vía el MB de -5+7=, donde la estudiante establece la operación 7-5. En este caso, se observa que la estudiante deja de lado la operación con números signados y prefiere trabajar con números naturales, dotando del sentido de sustraendo a -5.

En el caso número dos se plantea la operación (+8)-(+4)=, utilizando el MB, la estudiante escribe -8-+4 y afirma: “Es lo mismo que ocho menos cuatro, porque… más por menos es menos”. Al respecto, es notoria la aplicación mecánica de reglas pertenecientes al dominio multiplicativo, pero sin comprender su significado. De la misma forma, la estudiante vuelve a considerar una operación de números naturales evitando operar con los enteros.

Para el caso 3 se presenta mediante el MB la operación (-8)-(+7)=, la estudiante escribe -8-(+7)=-1 y verbaliza: “Es como si tuviera menos ocho más siete, es igual a menos uno”. El entrevistador indaga por qué no realizo la sustracción y ella explica que “no puede restar porque el siete es mayor que negativo ocho. Hice una suma” y escribe -8+7=-1-7+7=-1.

Es en este caso en donde podemos observar los estudiantes extrapolan lo aprendido en un modelo concreto, lo que le permita reconocer a los números signados, pero se resalta el evitamiento de sustraer un número mayor a uno menor.

3.2.1 Algunas conclusiones del estudio

A pesar de que se analizaron algunos otros casos, se observa que la alumna manifiesta ambigüedad entre la sustracción y el número negativo al escribir expresiones sintácticas. Aunado a lo anterior, cuando las operaciones presentan a la incógnita, se presentan problemas adicionales de comprensión de conceptos como número general e incógnita.

Nuevamente se enfatiza que durante la transición de la aritmética al álgebra el reconocimiento de la "dualidad del cero" puede ayudar a extender la adición de los números naturales a los enteros, además de que esta dualidad acaecida en el MB y transferida al lenguaje aritmético-algebraico, contribuye a reconocer la equivalencia entre adiciones y sustracciones en los enteros:

$$a-(-b)=a+b;\ -a-(-b)= -a+b, \text{ con } a, b \text{ naturales.}$$

De lo anterior se desprende que el cero como número permite que los estudiantes lleven a cabo las sustracciones donde a una cantidad menor se le resta una mayor.

3.3 El cero y la negatividad en estudiantes de secundaria

Estudios didácticos previos reportan que los alumnos manifiestan cinco sentidos de uso del cero en la resolución de tareas aritmético-algebraicas, a saber: el cero nulo, el cero implícito, el cero total, el cero aritmético y el cero algebraico, surgieron en forma simultánea a los sentidos de uso de los negativos encontrados por Gallardo (2002).

Basados en lo anterior, esta investigación trató de dar respuesta a la pregunta: ¿cómo se relaciona el cero con los sentidos de uso de los números negativos? Para ello se aplicaron cuestionarios y entrevistas clínicas individuales a 42 estudiantes de 10 a 16 años de edad. De estos estudiantes se seleccionó a la alumna de más alta rendimiento en el cuestionario y en la entrevista, pues fue la que proporcionó mayores explicaciones en lenguaje natural, escrito al resolver el cuestionario.

Es durante la resolución de los distintos problemas que la estudiante muestra y verbaliza el manejo que hace de los números negativos y el cero. En el ítem 1 se plantea la operación de adición y sustracción 67 + 34 + 29 – 34 =

Para resolver esta operación, la estudiante recurre a un Sistema Matemático de Signos (a partir de ahora SMS) vertical (propio de la aritmética), haciendo una reducción de los términos positivos y después se realiza la sustracción. Al cuestionarle sobre algún otro camino a seguir para la solución del problema, ella se percata de que +34 y -34 “son iguales, bueno uno es positivo y el otro negativo, al juntarlos da cero… es como si no estuviera”. Aquí se hace presente el cero como elemento nulo y a su vez como un elemento compuesto por opuestos.

Por citar otro ejemplo, en el ítem dos se propone la operación 81 - 39 + 21 + 16 – 79 =. Nuevamente la estudiante recurre a un SMS vertical y reduce los números signados positivos y los números signados negativos, después los confronta, teniendo como resultado cero. En este ejercicio la estudiante reconoce al cero como resultado de una operación aritmética.

Al llevar al estudiante a situaciones algebraicas, se plantea la sustracción (+5) – (+17) =. Es en este ejercicio donde la estudiante inicialmente presenta dificultades para obtener el resultado, pues evita el signo binario “-“, no obstante se da cuenta de su error y pasa de una sustracción de números signados a una sustracción de números naturales, logrando la sustracción de un número mayor a un número menor y explicita *“cinco menos diecisiete son menos doce… porque el cinco ya no tiene positivos después de quitarle los cinco, me queda menos doce”*

De acuerdo con los autores, la estudiante calculó mentalmente la expresión, apareciendo un cero implícito que no mencionó. Hay dos casos más en donde la estudiante trabaja con expresiones algebraicas y donde se identifica al cero como resultado de una operación algebraica.

De esta investigación, se identifican los distintos significados del cero, los cuales se nombran a continuación:

Cero nulo: Aquel que “no tiene valor”, “es como si no estuviera”

Cero implícito: Cuando no aparece escrito, pero que se utiliza durante el proceso de resolución de una tarea.

Cero total: El que está formado por números opuestos.

Cero aritmético: Surge como el resultado de una operación aritmética.

Cero algebraico: Considerado como el resultado de una operación algebraica o bien como solución de una ecuación.

3.3.1Conclusión de este estudio previo

Como se ha señalado, el desempeño de la estudiante nos llevó a los cinco sentidos de uso del cero asociados con los niveles de conceptualización de los negativos reportado por Gallardo (2002). Estos sentidos de uso se manifestaron a partir de diferentes SMS, pero se precisa que en el sistema aritmético vertical se asocia el cero nulo, el cero implícito y el cero relativo, mientras que en el sistema algebraico horizontal, el cero algebraico surge al mismo tiempo que los números relativos y el aislado.

Es importante señalar el vínculo indisociable que existe entre los negativos y el cero, pues como se ha visto, el cero permite extender el dominio numérico de los naturales a los enteros, pues el cero es un concepto que nos permite reconocer los sentidos de uso de los negativos.

3.4 El cero y la negatividad en la recta numérica

En “Sentidos de uso del cero y la negatividad en la recta numérica”, Gallardo y Hernández (2009) se realizó un estudio con 40 estudiantes, donde se manifiestan diferentes sentidos de uso del cero como origen, vía tres situaciones: como un punto fijo arbitrario localizado sobre la recta numérica;

segunda, un punto móvil arbitrario que cambia de ubicación; tercera, un punto fijo inamovible, esto es el punto medio de la recta numérica.

Para determinar estos sentidos de uso del cero, se recurre al modelo de la recta numérica que desde hace décadas ha sido sustentad por diversos autores como Janvier (1985), Resnick (1983), Peled (1991), Bruno y Cabrera (2005) entre otros.

Se propuso la resolución de problemas de adición y sustracción con números signados utilizando una recta graduada. En Gallardo y Hernández (2009) se reportaron los resultados de siete estudiantes que mostraron el desempeño típico de la mayoría de la población estudiantil.

A los estudiantes se les presentan las operaciones 15-7= y 6-15=. Cada uno de los resultados analizados muestra distintas formas de llegar al resultado. El estudiante E1 hace uso de flechas para determinar sentido de las cantidades positivas y negativas. Se coloca al cero como un punto arbitrario en la recta y como un punto de partida de las acciones realizadas para resolver el ítem planteado.

El estudiante E2 no hace uso de la recta para dar respuesta, sino que representa y realiza el conteo uno a uno. En este caso, el cero es considerado como el principio u origen de la recta, colocándolo a la izquierda cuando el resultado es positivo y a la derecha cuando el resultado es negativo.

El estudiante E3 hace una división de la recta numérica de manera simétrica, colocando el cero en el punto medio.

Para el estudiante E4, el uso de la recta se manifiesta constantemente para llegar a los resultados, sin embargo se manifiesta el “síntoma del evitamiento del cero”, es decir no es señalado en la recta numérica. Algo semejante hace el estudiante E6, sin embargo este no numera la recta y solo establece el resultado a partir de sus características, si el resultado es positivo se sitúa a la derecha y si es negativo se sitúa a la izquierda. Aquí nuevamente el cero es ignorado, pues el conteo empieza de uno.

3.4.1 Conclusiones de este estudio

A partir del análisis del trabajo de estos estudiantes, Gallardo y Hernández (2009) afirman que los sentidos de uso del cero como origen es reconocido vía tres situaciones: como un punto fijo arbitrario, como un punto móvil arbitrario que cambia de lugar dependiendo de los valores involucrados y como un punto fijo inamovible. Es importante destacar que se da el evitamiento del cero origen tanto para operar como al no ser simbolizado.

Con los resultados de esta investigación se llega a la identificación de otro significado del cero, el cero como origen, el cual se uno a los ya descritos por Gallardo (2002).

3.5 La numerología y el álgebra chinas en la enseñanza actual de las ecuaciones lineales

Vía el análisis histórico-critico, se reflexiona sobre la génesis de los números negativos y el cero, así como las primeras aplicaciones de un método de resolución de ecuaciones surgido en el álgebra de la antigua China.

El estudio presentado por Gallardo y Hernández (2008) es complementario de los tres anteriores, en él se buscó dar respuesta a la pregunta: ¿el realizar un análisis histórico-crítico sobre el cero y la negatividad, puede contribuir a comprender las dificultades que se presentan hoy en día con los estudiantes?

Es por ello que este estudio se recurre al análisis histórico-critico que se caracteriza por movimientos recurrentes entre el estudio de la historia de las matemáticas y el trabajo empírico realizado con sujetos del presente.

En la parte histórica se hace una revisión del texto chino “Jiuzhang suanshu” (Nueve capítulos sobre el arte matemático) en el cual se muestran las reglas de operación para la adición y la sustracción utilizando los conceptos zheng/fu/wu. De la misma forma se explica el método Fang cheng, el cual consiste en un arregla matricial donde se tiene como punto principal “crear” ceros.

3.5.1 El estudio empírico

En dicha investigación se trabajó con 40 estudiantes de 12 a 14 años de edad del segundo grado de secundaria. Se les aplicó un cuestionario que permitió elegir a tres estudiantes de alto, medio y de bajo desempeño escolar para realizar entrevistas clínicas.

Los instrumentos de recolección de datos constaron de operaciones de adición y sustracción en lenguaje aritmético-algebraico, así como de la resolución de ecuaciones lineales.

En el estudio se presentan seis ejercicios en los que la estudiante proporcionó una versión amplificada de las dificultades que la población estudiantil manifiesta en su conjunto.

El primer ejercicio a resolver fue (-5) – (+9) – (-8) – (-4) =, a lo cual la estudiante justifica:

“Supongo que tengo 5 palillos rojos, es como si tuviera negativo cinco y le tengo que quitar positivo nueve… primero voy a encontrar el resultado de negativo cinco menos positivo nueve (escribe): (-5) – (+9)=… no tengo para quitar positivo nueve, le tengo que agregar nueve ceros… sería (escribe):

-5+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1

… ahora sí puedo quitar los positivos nueve (Cancela los unos que son positivos)… quedan… negativo catorce (escribe): (-5)-(+9)=-14… de estos (-14) tengo que quitar negativo 8, y si tengo para quitarle… me queda negativo 6, esta es como si fuera una resta: catorce menos 8 es seis, pero de los negativos (escribe): (-14) – (-8) = -6… de aquí … le tengo que quitar negativo 4, también tengo para quitarle … (Escribe): (-6) – (-4) = -2… el resultado es dos negativo”.

Como podemos apreciar, la estudiante logra utilizar la numerología china, y destaca la nula dificultad para poder restar cantidades mayores a cantidades menores, además del manejo que hace de los negativos a partir del cero.

En ejercicios posteriores, la estudiante muestra durante todo el proceso la comprensión de la dualidad el cero, tanto en adiciones como en sustracciones de números signados. Sin embargo, al llevarlo a realizar ecuaciones de primer grado, trata de llevar este mismo procedimiento, lo que desencadena en un evitamiento de la negatividad al rechazar una solución negativa.

Otro aspecto que se resalta en este estudio es la respuesta que da la estudiante ante el siguiente problema:

Resolver: 3x + 14 = 14

En este caso, tal como se mencionó en párrafos anteriores, la alumna hace un uso adecuado de las reglas aprendidas del método Fang Cheng, pues equilibra el término independiente con su simétrico para crear un cero en ambos miembros de la igualdad. No obstante, cuando la estudiante llega a la expresión:

$$x = \frac{0}{3}$$

Manifiesta lo siguiente "… equis igual a cero,… y sí, porque acá… [3x], [3x + 14 = 14]… sería cero… me queda catorce igual a catorce… x=0… se me hace raro que la letra sea cero…

E: ¿Por qué se te hace raro?

C: ¿Cómo vamos a tener un número que le sumamos otro número y de todas maneras es cero?... se me hace raro.

En este caso, a pesar de que la estudiante verifica el resultado, tiende a dudar de que "una letra sea cero". Tal y como lo señala el estudio, es el álgebra en donde campos más complejos que el numérico, la presencia de la incógnita, aunada a la negatividad y el cero, complican la comprensión de las situaciones planteadas.

3.5.2 Conclusiones de este estudio

A partir del análisis que hacen los autores de los diálogos de la entrevista con la estudiante, pueden afirmar que la alumna da sentido al “cero nulo” y al “cero total”. De la misma forma, la aceptación de los números signados se da a partir de la formación de ceros, propio del método Fang Cheng.

Este método permitió a la estudiante el reconocimiento de la sustracción cuando el sustraendo es mayor que el minuendo. No obstante, al encontrar la presencia del cero, los negativos y la incógnita en una misma expresión, se convirtió en una dificultad para ella.

3.6 Estudio didáctico del cero

En Cataño (2013) se realizó una investigación a partir de la inquietud surgida durante los trabajos realizados con alumnos de los primeros grados de ingeniería. Su intención principal se centró en la interpretación y significados que le asignan los estudiantes del nivel medio superior al cero, el cual es un tema poco tratado en los planes de estudio de matemáticas.

El propósito de este trabajo es llevar a los estudiantes a manifestar los significados que asocian al cero en el contexto de la multiplicación y la división. Para ello se considera al cero como un número especial, el cual está dentro de los números enteros pero con ciertas particularidades en cuanto a su naturaleza y su manejo.

Para dar un sustento histórico al número cero, se da un breve recorrido por diversas culturas donde se resalta la presencia del cero.

En nuestro sistema de numeración, siempre empezamos a contar a partir del uno y seguimos el conteo con los números naturales, pero ¿qué sucede cuando hay nada? Esta es quizás una limitante del uso y comprensión del cero como origen del conteo, pues seguimos un patrón de considerar la existencia asociada a los objetos y despreciamos la nada.

Diversas culturas en la antigüedad destacan sobre el manejo del cero, así a los Mayas se les asocia la creación de un símbolo para este singular número, y en Occidente serán los hindúes quienes harían uso del cero en sus cálculos. Sin embargo, en Oriente los chinos tendrían la posibilidad de usar este número sin una representación concreta, sino como un espacio vacío con múltiples significados.

Para la realización de la investigación se aplicó un instrumento con seis ítems, los cuales a su vez fueron la base de la entrevista clínica.

De las diversas manifestaciones que tiene el cero en la resolución de problemas, la autora (Cataño, 2013) fija al cero como un número neutro (que sirve como elemento de transición entre los positivos y negativos), como un número contextual con múltiples significados de acuerdo con el contexto; y por último como elemento que demarca ausencia de una cantidad, (como elemento de una numeración posicional).

Entre las conclusiones se destaca que existe una relación o asociación entre ciertas palabras y la ausencia de valor. En términos de Chiu (2001), hablamos de metáforas que a los estudiantes les ayuda a comprender conceptos abstractos, aunque muchas veces puede significar también un obstáculo para la interpretación adecuada del cero dependiendo el contexto.

Capítulo IV

Elementos Teórico-Metodológicos del Estudio

Como se ha visto, en el desarrollo de las investigaciones en didáctica de tipo histórico, la problemática del estudio del cero y de los negativos puede verse desde varias perspectivas, acercándonos siempre a la idea de las dificultades que los estudiantes presentan para la comprensión y manejo de estos conceptos.

4.1 Planteamiento del Problema

El desarrollo de la Educación Básica en México está plasmado en el Plan y Programas de Estudio de Educación Básica 2011. Estos documentos oficiales son el resultado de diversas reformas (2004, 2006, 2009 y 2011) hechas a los planes y programas de Educación Preescolar, Educación Primaria y Educación Secundaria.

En estos documentos se encuentra respaldada la cultura de la resolución de problemas cuando se indica, que a lo largo de los niveles básicos, el alumno debe desarrollar herramientas para poder resolver distintas clases de problemas.

Esta perspectiva enfrenta a los estudiantes a nuevos saberes matemáticos. A lo largo de la Educación Primaria, los alumnos han desarrollado sus conocimientos bajo el cobijo de la aritmética y están habituados a resolver las situaciones planteadas a partir de los algoritmos aprendidos (la adición, la sustracción, la multiplicación y la división). Al llegar a la secundaria, se adentran en el mundo del álgebra, generando rupturas en los esquemas y significados de los símbolos.

Muchos autores, tanto en investigación como los dedicados al curriculum escolar, señalan que la educación ha privilegiado la resolución de problemas, sin embargo, en el tránsito de la aritmética al algebra, suele realizarse un énfasis en un álgebra descontextualizada.

Si los alumnos se enfrentan a situaciones de una matemática descontextualizada por un lado y por el otro, se pretende que sean buenos resolutores de problemas, llevar a los alumnos del terreno aritmético al terreno algebraico, nos permitirá indagar los distintos significados que le pueden dar al cero, a partir de la interacción con los números positivos y negativos, así como en contextos discretos y continuos.

Lo anterior es respaldado por las múltiples expresiones que coloquialmente utilizamos para referirnos a la ausencia de elementos, como la “nada”. También impactan las variadas relaciones y analogías que establecemos a partir de la ausencia del ser, como por ejemplo, la vida y la muerte.

En general, el tratamiento de los enteros y en particular del cero, desde una perspectiva histórica, nos ayudará a comprender los usos y la importancia de este número en el desarrollo del sistema de numeración que actualmente utilizamos. También nos permitirá llevar de manera empírica ejercicios donde los alumnos, a partir de su resolución y razonamiento nos den argumentos de la comprensión del cero en los distintos contextos en los que podemos encontrarlo.

Tal como lo hemos visto en el apartado histórico de esta tesis, la aceptación del cero y la negatividad sufrió de un proceso complejo a lo largo de siglos en el desarrollo de la humanidad. Con el auge y dominio de la cultura e imaginario griego, estos elementos fueron relegados al olvido y la indeterminación, lugares donde no tendría ni forma ni ser. Actualmente no se puede concebir el sistema de numeración posicional como en la aceptación y manejo de los números enteros positivos y negativos, sin el cero.

Al retomar investigaciones realizadas por Gallardo y Hernández (2006), encontramos que el desarrollo de los sentidos y usos del cero están asociados a los negativos, lo que nos hace pensar en la complejidad que prevalece para la comprensión de estos conceptos. Por ello, resulta importante recurrir a las explicaciones que dan los estudiantes al respecto de los significados que le atribuyen al cero, pues tal como lo señala Chiu (2001), el uso de metáforas (expresiones que guardan una relación de significado contextualizado) para explicar conceptos abstractos complejos, son recurrentes tanto en estudiantes como en profesionistas.

4.2 Objetivos de la Investigación

Para esta investigación se planteó el siguiente objetivo general:

- Analizar los significados que manifiestan los estudiantes de secundaria en torno al cero.

Para el logro del objetivo general, se establecieron los siguientes objetivos particulares, los cuales dan sustento a este trabajo:

a) Describir el contexto histórico de la génesis del cero en dos culturas que marcan la diferencia en cuanto a la concepción y manejo del mismo: La cultura Griega y la cultura China.

b) Determinar en qué momento hace su aparición el cero en la recta numérica.

c) Conocer la situación del tratamiento del cero dentro del currículum de Educación Básica, principalmente en lo que respecta a la educación secundaria en México.

d) Identificar los diferentes significados atribuidos al cero por los estudiantes de educación secundaria y cómo estos significados están relacionados con las formas en que era concebido el cero en la cultura china, griega y durante la Edad Media con Stevin.

e) Establecer las relaciones que los estudiantes realizan entre el concepto de cero y las formas de representación para justificarlo.

4.3 Preguntas de investigación

A partir de los objetivos planteados y después de realizar un acercamiento al auge del cero en distintos momentos históricos, se plantearon las siguientes preguntas de investigación:

a) ¿Cuáles son las concepciones sobre el cero que manifiestan los alumnos de secundaria en situaciones cotidianas?

¿Cómo las distintas representaciones gráficas y las diversas estructuras de los problemas consolidan o inhiben los significados del cero?

4.4 Elementos Teóricos

Hay dos pilares que dan sustento al inicio de esta investigación. Por un lado, la lectura y análisis del texto "Imaginario Colectivo y creación matemática" (Lizcano, 1993), representa el punto de partida sobre los múltiples significados que el cero ha tenido a lo largo de la historia, principalmente en dos de las culturas antiguas con mayor influencia en el mundo (la cultura Griega y la China). En este texto se resalta la influencia que ha tenido el imaginario cultural en el manejo y la asimilación de conceptos tan complejos como los son la negatividad y el cero. También nos permite acercarnos a un panorama diferente en cuanto al manejo de estos conceptos matemáticos, pues en occidente la aceptación de la negatividad y el cero no se lograrían sino hasta el siglo XVI, mientras que en China se manejaba de manera "natural" desde el siglo 300 a.n.e

Por otro lado, los diversos trabajos realizados por Gallardo y Hernández (2005, 2006, 2007) con respecto al cero y la negatividad, nos mostraron la estrecha relación que existe entre estos conceptos, de lo cual se desprendieron cinco sentidos de uso del cero asociados a la negatividad (Gallardo, 2006)[62]. A partir de estos sentidos de uso, nos encaminamos a indagar sobre si los significados que le atribuyen los estudiantes al cero son

62 Nos referimos al cero nulo (aquel que no tiene valor), cero implícito (que no aparece escrito), Cero total (formado por números opuestos), cero aritmético (como resultado de una operación aritmética) y cero algebraico (resultado de una operación algebraica).

los mismos para todos, es decir, cuando en la resolución de un problema aparece el “0”, los estudiantes comprenden el significado de este símbolo de igual manera.

De la misma forma, al mirar a nuestro alrededor y observar la publicidad, los medios de comunicación y escuchar las expresiones de tantos personajes en la cotidianeidad, donde se hace uso de expresiones como “nada es para siempre”, “empecemos de cero”, etc., nos orientó en dirección hacia la posibilidad de que los múltiples significados o sentidos del uso del cero no están clarificados en los estudiantes, aún más, por falta de un análisis a profundidad dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje, se ignora la existencia de los mismos.

A partir de la revisión del texto de Lizcano (1993) y de analizar las diversas investigaciones realizadas en torno a la negatividad y el cero por parte de Gallardo y Hernández (2005, 2006a, 2006b, 2007a, 2007b, 2007c), y aplicando un pilotaje al cuestionario final, los estudiantes nos llevaron a categorizar tres distintos significados del cero, atribuidos a partir del comportamiento de los estudiantes y de la forma en como fueron tratados en las civilizaciones griega y china, así como el principio del uso del cero en la recta numérica con Simón Stevin.

Dicha categoría son las siguientes:

Categoría	Significado	Descripción
Cero Chino	Cero como resultado de la compensación o equilibrio de opuestos (+a)+(-a)=0	Identificar qué cantidades iguales de signos diferentes se compensan resultando cero.
Cero Griego	Cero como una ausencia total de elementos. Está relacionada con la nada.	Resultado de la “visión sensualista”, donde al no existir un objeto se asocia con el vacío

		o la nada.
Cero Relativo o Cero de Stevin.	Cero como un punto de referencia o como el límite de separación entre los números negativos y positivos.	Elemento de la recta numérica que muestra un punto de referencia o de separación entre lo positivo y negativo

Las categorías anteriores nos permitieron describir el tipo de significado atribuido al cero durante las entrevistas y a su vez, debido a la naturaleza de las explicaciones de los estudiantes, se recurrió a una categorización de las representaciones utilizadas, la cual es la siguiente:

Categoría	Descripción
Discreto	La representación o ejemplos corresponden a objetos o situaciones discretas.
Continuo	Se hace uso de contextos o representaciones continuas como el tiempo, la distancia, la temperatura, la recta numérica.
Sistema de numeración posicional	El cero es la ausencia de unidades, decenas, centenas, etc. Ej. En 205, el 0 simboliza la ausencia de centenas.
Principios matemáticos	Son propiedades matemáticas que ejemplifican el conjunto vacío o el elemento neutro.
Otros	En esta categoría se incluyen representaciones o contextos que por sus características, no se pueden englobar en las anteriores. Ej. Manchas, “espacios vacíos”, etc.

4.5 El Método Histórico-Critico

Uno de los fundamentos de la presente investigación es la necesidad de respaldar la construcción de los distintos sentidos de uso del cero a partir del imaginario colectivo en el que se desarrolla el conocimiento. Esta idea, propia de Lizcano (1993), nos invita a considerar la fuerte carga cultural que tienen los conocimientos desarrollados en distintas épocas y espacios de nuestro planeta.

Así, para fundamentar las distintas concepciones que se tienen del cero, fue necesario recurrir a diversos planteamientos históricos que dieron sustento a las tres sentidos de uso del cero que se plantean en la presente investigación. Para ello, recurrimos al análisis sobre las ideas en torno a dos culturas que se desarrollaron en distintos momentos, al igual que el episodio que se puede señalar como promotor del cero como origen. Tal análisis, se enriqueció con lo que hicieron los estudiantes durante el cuestionario y la entrevista, lo que nos hizo regresar nuevamente a la parte histórica.

Este recurrente movimiento de ida y vuelta de los textos clásicos a la actuación de los estudiantes, es propio del método histórico-critico. Piaget (1960) plantea tres métodos complementarios para utilizar en la epistemología genética: el análisis formalizante (problemas de estructura formal de los conocimientos y validez de estos sistemas); el análisis psicogenético (problemas de hecho y no de validez formal, referidos a la caracterización de los estados de conocimiento en distintos niveles sucesivos y a los mecanismos de transmisión entre uno y otro); el método histórico critico (reconstrucción de la historia de la ciencia en cuanto análisis de los procesos conducentes de un nivel de conocimiento a otro).

Basados en los trabajos de Piaget (1960), Filloy y Rojano (1984) recurren al método histórico crítico como un componente teórico metodológico para analizar los problemas de enseñanza y aprendizaje del álgebra elemental. Este enfoque permite realizar movimientos recurrentes entre los avances de la investigación teórica y los resultados obtenidos del análisis empírico. Este movimiento de ida y vuelta es lo que sitúa estos trabajos en el terreno de la matemática educativa y no en la historia o en el de la epistemología de las matemáticas (Gallardo y Basurto, 2009).

Es consecuencia, a partir del análisis de distintas fuentes históricas, nos permitimos indagar si las ideas sobre el cero (desarrolladas en contextos y épocas diferentes), se encuentran presentes actualmente con los estudiantes.

4.6 Método de la investigación

Este trabajo se desarrolla bajo los estándares de la investigación cualitativa, que en su más amplio sentido se refiere a la investigación que produce datos descriptivos, es decir, se tiene como objetivo la descripción de las cualidades de un fenómeno, partiendo de las palabras, creaciones y explicaciones que dan las personas.

Lo anterior resulta importante, pues al iniciar esta investigación nos centramos especialmente en determinar cuáles eran las concepciones que los estudiantes dan al cero, partiendo de las justificaciones que dan los estudiantes de secundaria. Para ello fue necesario considerar las explicaciones y comentarios realizados en la resolución de las actividades presentadas.

De esta manera, nuestra investigación se centra, tal como lo señala Arnal y otros (1992), en *“describir e interpretar los fenómenos educativos y se interesa por el estudio de los significados e intenciones de las acciones humanas desde la perspectiva de los propios agentes sociales. Desde esta perspectiva se aborda el mundo personal de los sujetos (como interpretan las situaciones, qué significados tienen para ellos”).*

Así, este proceso de indagación sobre los significados del cero adquiere especial relevancia en las expresiones individuales de los sujetos, las cuales siempre aportarán un cúmulo de ideas a partir de un tema dado, sin importar su nivel de conocimiento.

En general podemos afirmar que nuestra investigación es de tipo cualitativo, porque, retomando los señalamientos de Taylor y Bogdan (1987), presenta las siguientes características:

- Es inductiva, pues los conceptos e intelecciones parten de los datos recolectados. En esta investigación no se recolectan datos para comprobar o verificar una teoría o modelo, se trata de la construcción de los significados en torno al cero.

- Es holística, porque las personas, los escenarios y los grupos no son reducidos a variables. Se estudian a las personas en su contexto, de donde parten sus ideas y concepciones.

- Es naturalista, debido a que se interactuó con los participantes de forma natural y no intrusiva, buscando comprender a los estudiantes dentro del marco de referencia de ellos mismos. Para ello, la investigación se hace en el entorno real y no se crea un espacio delimitando para este trabajo.

- Es abierta, porque no se excluyen los datos y puntos de vista distintos, sino que todas las perspectivas son valiosas.

- Es humanista, pues se accede a la parte privada de las experiencias de los estudiantes, donde afloran sus percepciones, conceptos y formas de adaptarse a la vida. En estos ámbitos, los estudiantes resaltan conceptos tan personales, como la belleza, los valores, la fe, etc.

- Es rigurosa, en cuanto que la proximidad con el fenómeno empírico nos permite contrastar y enriquecer los datos con lo que las personas dicen y hacen. Esto nos lleva a realizar análisis detallados y a profundidad.

4.7 Descripción de las Instituciones Educativas donde se efectuó el Estudio

Uno de los aspectos que se tomó en cuenta para la selección de las escuelas donde se aplicó la etapa final de la investigación, fue la disposición mostrada por los docentes responsables de los grupos.

En el caso de México, se seleccionaron dos grupos de noveno grado de Educación Secundaria, la cual era impartida en la Escuela Telesecundaria "José Vasconcelos", ubicada en la comunidad de San José Tenejapa, perteneciente al Municipio de Tepatlaxco, Veracruz. Esta escuela es completa, es decir, cuenta con dos profesores para impartir cada uno de los grados, además de un director efectivo. Esta Telesecundaria se sitúa en un punto importante, pues capta a los estudiantes que egresan de primarias que se localizan en comunidades aledañas. La matrícula era de 120 alumnos en el momento de la aplicación de los instrumentos de recolección de datos.

Esta escuela fue seleccionada por las facilidades que la Maestra Brenda Zulema Reyes y el Maestro Sergio Tevera dieron para que se aplicara el cuestionario y las entrevistas a los estudiantes con mejor puntaje en el instrumento de diagnóstico.

El estudio se completó con datos tomados con alumnos de Secundaria de Tenerife, España. En este caso participaron dos centros educativos. El primero fue el Centro de Enseñanza Obligatoria "Manuel de Falla" y el segundo el Instituto de Enseñanza Secundaria "Santa Úrsula". En ambos centro se impartían Enseñanza Secundaria Obligatoria (que en España corresponde a la edad de 12-16 años).Se contó con el apoyo de los docentes de los grupos, los cuales nos proporcionaron los medios y permisos necesarios para aplicar el instrumento de diagnóstico y las entrevistas video grabadas a estudiantes de segundo grado (13-14 años).

4.8 Sujetos del Estudio

Para el desarrollo de esta investigación se trabajó con dos grupos distintos para solucionar los planteamientos del cuestionario de diagnóstico y a partir de sus resultados se aplicó la entrevista utilizando el cuestionario final. En México se aplicó a dos grupos de estudiantes de noveno grado con 18 y 19 alumnos respectivamente, los cuales se encontraban entre los 14 y 16 años de edad. En el momento de la aplicación del diagnóstico y de la entrevista ya se había tratado el tema de los enteros, no obstante el trabajo con el cero fue de manera muy general, sin profundizar en su significado. Aunado a lo anterior, los alumnos habían trabajado con diferentes actividades donde participan los números enteros durante el séptimo y octavos grados, principalmente en la adición y sustracción de números signados durante el séptimo grado y con ecuaciones y sistemas de ecuaciones en octavo grado.

Con respecto a los estudiantes de España, se aplicó el cuestionario a dos grupos de estudiantes de secundaria de segundo nivel, con edades entre los 13 y los 14 años de dos centros educativos de Tenerife (España). En el momento de la aplicación los estudiantes ya habían trabajado con los números enteros, pues en España este tema se estudia en los primeros meses del curso escolar.

4.9 Instrumentos Metodológicos

Uno de los elementos indispensables de la investigación es la recolección de datos y para ello se hace necesario utilizar instrumentos metodológicos que nos permitan recabar las ideas y explicaciones que los estudiantes tienen al respecto de un tema. Dichos instrumentos siempre estarán diseñados con la finalidad de cumplir los objetivos descritos al principio de este capítulo.

La intención de los instrumentos diseñados fue indagar en primera instancia las habilidades de los estudiantes para resolver problemas en los que se hace presente el cero, tanto como un número dentro de la operación como en un resultado. Partimos de la idea, tal cual se ha señalado en capítulos anteriores, que en la enseñanza de las matemáticas en la Educación

Secundaria en México tanto como en España, no se da un tratamiento particular al número cero, sino que solo se opera con él a partir de determinadas reglas aprendidas

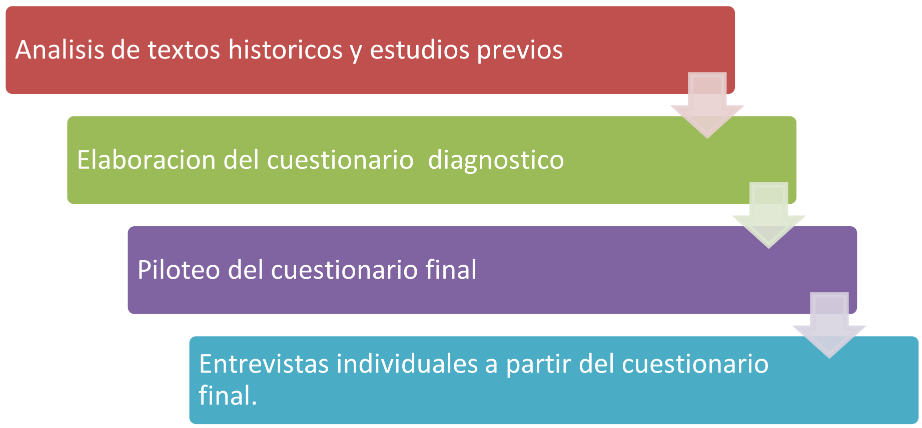
Para la elaboración de los instrumentos se siguió el siguiente procedimiento:

a)

b)

c)

d)



a) Análisis de textos históricos y estudios previos.

En la primera etapa se realizó una revisión del texto de Lizcano (1993) “Imaginario Colectivo y Creación Matemática”, donde se enfatiza la importancia de las culturas China y Griega en el desarrollo del conocimiento matemático. De aquí, tal como lo muestra el capítulo histórico, se hizo énfasis en las aportaciones y disyuntivas que presentan ambas culturas en torno a la concepción del cero y la negatividad. Lo anterior fue la base para indagar y contrastar las explicaciones que los estudiantes dan a este concepto.

De igual forma, nos adentramos a las diversas investigaciones en didáctica para conocer los alcances y conclusiones en torno al cero, lo cual nos guió al reconocimiento de los distintos usos del cero manifestados por los estudiantes en torno a la negatividad.

b) Cuestionario diagnóstico

El cuestionario diagnóstico estuvo integrado por diez ítems. El propósito general del cuestionario fue el de presentar problemas donde los estudiantes hicieran uso del cero en distintos contextos. Estaba dividido en cuatro apartados, en los cuales se buscaban los siguientes aspectos:

Apartado I y II

El conocimiento del cero y los enteros representan diversas dificultades para los estudiantes que se encuentran cursando la educación secundaria en México y posiblemente en España. El currículo de matemáticas ha privilegiado la resolución de problemas sin contexto, donde se escapa la posibilidad de contemplar los múltiples usos y significados que se le puede dar al cero.

En los apartados I y II se presentan operaciones en el terreno aditivo y multiplicativo para indagar la operatividad que los estudiantes tienen con el cero. Las expresiones con números signados que se les plantean a los alumnos nos permiten destacar si consideran que $a+0=a$, mientras que $a(0)=0$.

No obstante, aunque los ítems se quedan en el nivel operatorio, las situaciones planteadas nos llevan a indagar sobre diversos usos del cero. En este caso consideramos a un cero aritmético y un cero total. (Ver el capítulo de Estudios Previos)

Si bien se espera que la mayoría de los estudiantes puedan realizar las operaciones con el cero, se contempla la posibilidad de confusiones por parte de los alumnos al sumar y multiplicar un número por cero.

Apartado III

En este apartado se lleva a los alumnos a la resolución de ecuaciones de primer grado. Dentro del proceso de resolución se puede ver la presencia de un cero total y también se considera un cero algebraico (Gallardo, y Hernández, 2002), como resultado que hace valida la igualdad.

Aunque los estudiantes son capaces de solucionar este tipo de situaciones algebraicas, se plantean expresiones con la presencia de la misma incógnita en ambos miembros de la igualdad, lo que puede representar una dificultad adicional al conocimiento que han desarrollado. Se espera que en el proceso de resolución los estudiantes hagan uso de un proceso de compensación para pasar de un miembro de la igualdad al otro, utilizando un cero total y un cero algebraico.

No obstante, cabe la posibilidad de que los estudiantes solo realicen el cambio de los términos de un miembro a otro solo modificando el signo, quizás sin comprender ese proceso de equilibrar ambos miembros de la igualdad.

Apartado IV

El espacio en donde se pueden ver los múltiples usos y significados que se le atribuyen al cero es en contextos determinados. Para este apartado se plantean situaciones a los alumnos en contextos de temperatura, movimientos de ascensor y deudas. Se espera que los alumnos no se limiten a la resolución matemática del ejercicio, sino que puedan expresar algunas ideas al respecto del sentido que se le atribute al cero en cada problema.

La dificultad añadida a estos reactivos es la necesidad de representarlo gráficamente en la recta numérica con la intención de llevarlos al uso del "cero relativo", es decir a un cero como punto de referencia.

Se espera que algunos alumnos, en el contexto de la recta numérica, no escriban el cero y lo ignoren o bien que vayan a lo que Peled (1991) denomina, "modelo de la recta dividida", donde el cero es un punto que separa o parte a la recta en dos partes, sin aparente relación entre ambas, ocasionando que los alumnos solo trabajen con los valores absolutos de los desplazamientos en la recta.

c) Cuestionario final

A partir de los resultados del cuestionario de diagnóstico, se seleccionaron a los estudiantes que obtuvieron los mejores logros, tanto en México como en España, pues la intención era que los estudiantes manifestaran el uso del cero.

Este cuestionario final estaba integrado por 10 ítems, (entre peguntas y problemas) y a partir de los ítems se indagó cuáles eran los significados que le atribuyen al cero. Este cuestionario fue diferente al de diagnóstico, pues se trataba de que el estudiante explicara sus ideas al respecto del cero. Es importante señalar que dentro del cuestionario y para respaldar sus explicaciones, se le pidió que utilizaran representaciones, lo cual nos permitió clarificar el contexto (continuo o discreto) en el cual estaban desarrollando sus ideas, y nos dio pie a tener claridad sobre el uso que le estaban dando al cero.

El intervalo de tiempo de aplicación entre el cuestionario diagnóstico y el final con entrevista fue de una semana para no abusar del tiempo destinado por los docentes responsables de cada grupo.

El propósito de cada ítem es mostrado en la siguiente tabla:

Ítem	Características
1	Idea inicial del significado del número cero.
2	Ejemplo en lenguaje natural sobre el cero.
3	Representación gráfica sobre las concepciones acerca del cero.

4	Contextualizar una adición de números opuestos cuyo resultado es cero
5	Representar gráficamente el ítem 4. Observar si la representación está relacionada con lo expresado en el ítem 4.
6	Situación en un contexto de temperatura específico. Observación de cómo explica el cero relativo y cómo lo representan.
7	Problema aditivo con estructura de combinación. Observación si surge el cero chino o de compensación. Representación gráfica del problema.
8	Problema aditivo con estructura de dos cambios. Hace énfasis en un cero relativo. Representación gráfica del problema.
9	Problema aditivo con estructura de cambio. Hacer referencia al cero relativo. Representación gráfica del problema.

d) Entrevista

La importancia de los estudios empíricos radica en la posibilidad de observar los procesos y justificaciones que los participantes dan ante determinado tema. Para rescatar las ideas de los estudiantes, se recurre a la entrevista. La entrevista es considerada como *“un dialogo iniciado por el entrevistador, con el propósito específico de obtener información relevante para la investigación y enfocado sobre el contenido especificado por los objetivos de investigación”… “Es un método que comprende la reunión de datos a través de una interacción oral directa entre individuos. En este sentido difiere del* *cuestionario, donde se requiere al informante que registre de alguna forma sus respuestas a las preguntas presentadas"* (Cohen y Manión, 1990, pág. 378).

En el desarrollo de esta investigación se recurrió a entrevistas semi-estructuradas para conocer en las voces de los participantes del estudio, los sentidos de uso del cero. Las entrevistas realizadas tuvieron la característica de ser "menos formales", pues se dio la libertad de modificar la secuencia de las preguntas, cambiar su redacción, explicarlas o ampliar si resultó necesario.

Para la realización de las entrevistas se desarrolló un protocolo de entrevista, donde se plasmaron un conjunto de preguntas que sirvieron como guía para el desarrollo de la misma y asegurando que la obtención de la información fuera la misma en los participantes. Es importante hacer énfasis que durante las entrevistas se trabajaron en las ideas de los estudiantes, buscando un dialogo espontáneo y fluido.

Para la realización de las entrevistas se realizó el siguiente procedimiento:

- Previo a la entrevista se les comentó brevemente la actividad a desarrollar.
- Se les fue presentando pregunta por pregunta, para que el estudiante la resolviera y argumentara su respuesta.
- En donde se presentaban dificultades, se les cuestionó de diferentes maneras y, si se requería, se daba una breve fase de enseñanza.

4.10 Validación de los instrumentos

Debido a la naturaleza de esta investigación, es imposible repetir o replicar un estudio en sentido estricto. Para lograr un mayor nivel de confiabilidad de la información obtenida se emplearon las siguientes estrategias:

a) Se especificó el contexto en el cual se recogieron los datos.

b) Se precisaron los métodos de recolección de información y de su análisis.

c) Se utilizaron medios tecnológicos para conservar la realidad presenciada: videograbaciones

d) Se detallan los hechos auténticos evidenciados por los estudiantes.

e) Se contó con los recursos elaborados por los estudiantes, en este caso los cuestionarios y las videograbaciones.

Como ya se mencionó, para este estudio, partimos de los estudios previos realizados en torno al tema, así como la indagación desde una perspectiva histórica. En la elaboración del cuestionario diagnóstico se puso énfasis en el manejo operatorio del cero, mientras que en el cuestionario final se trató de que las preguntas planteadas nos ofrecieran información confiable en torno a las concepciones de los estudiantes sobre el cero.

Es importante señalar que en el caso del cuestionario final se hizo una prueba piloto con futuros Profesores de Primaria en la Universidad de La Laguna, con la intención de probar si el cuestionario era propicio para recabar información sobre los significados que le atribuyen los estudiantes al cero (Méndez, Gallardo y Bruno, 2014)

Por último, para el desarrollo de esta investigación se seleccionaron dos entrevistas, una de un estudiante mexicano y otra de un español, donde se pueden establecer los múltiples significados que le atribuyen al cero, aunque no se desarrollen en un mismo espacio cultural.

Capítulo V
Análisis y resultados

Después de la aplicación de la entrevista video grabada, se hizo necesario analizar los aportes que cada una de ellas presentaba en torno a los significados que le atribuyen los estudiantes al cero. Si bien, lo que pretendemos es hacer un contraste entre los significados que dan los estudiantes y los significados que emergieron en distintos momentos de la historia.

En este apartado mostramos las respuestas de Guadalupe, un estudiante mexicano de tercer año de secundaria, el cual estudió en la modalidad de Telesecundaria. De igual forma se seleccionó a Héctor, un estudiante del IES Santa Úrsula, localizado en Tenerife, España. Ambos estudiantes fueron seleccionados por las respuestas dadas, pues entre sus explicaciones nos permitían observar los diferentes significados que se le atribuyen al cero.

Para la realización del análisis se presentan las 10 preguntas realizadas durante la entrevista video grabada con la intención de explicar cómo se presentan los distintos significados del cero. Existen algunas preguntas que se complementan, por lo que su tratamiento se hará de manera integral.

Se presentarán algunos fragmentos de la transcripción de las entrevistas realizadas, donde (D) representa la letra del entrevistador y la inicial del nombre del alumno (G) o (H), según corresponda, representará al estudiante entrevistado.

5.1 ¿Cómo explicamos el cero?

La primera pregunta que se les presentó a los estudiantes fue ¿Qué significado tiene para tí el número cero? Esta pregunta parte de la necesidad de explorar cómo se concibe el cero a partir de los conocimientos previos de los alumnos. Al establecer esta pregunta tratamos de rescatar cuáles son las primeras ideas que le surgen al estudiante como producto de su experiencia y a su vez, la forma en cómo aplica el cero y su significado en situaciones cotidianas.

En el caso de Guadalupe, esto fue lo que nos contestó:

R1 *D: Mira, la primera pregunta, o lo que quisiéramos saber es ¿para ti qué significado tiene el número cero? ¿Qué significa para ti el número cero?*

R2 *G: Mmmm, bueno* ***para mí el cero es, pues es un número que dependiendo de la posición en la que esté es el valor que va a tomar el número que se escriba porque, por ejemplo si está un cero desde el punto hacia la izquierda, es como si no tuviera ningún valor****, pero si está a la derecha y dependiendo de la posición en la que esté (en las decenas o las centenas, etc.) será el valor que va a tomar.*

En este primer momento Guadalupe nos muestra el uso que hace del cero como resultado del manejo del sistema posicional, afirmando que el valor depende de la posición que ocupa, sin embargo también nos permite apreciar la consideración que hace del cero como un número el cual no tiene valor o es la representación de la ausencia de objetos. Cuando el estudiante afirma que “por ejemplo, si está un cero desde el punto hacia la izquierda, es como si no tuviera ningún valor”, nos muestra la idea de que el cero representa la no existencia de objetos.

Esta apreciación del cero continuaría siendo demostrada por Guadalupe, pues al pedirle que a partir de lo que para él significaba el cero nos escribiera un ejemplo, el estudiante contestó lo siguiente:

R7 *D: Pensando en esto que nos dices del cero, podrías escribir un ejemplo en el cual aparezca ese cero del que nos estás hablando, es decir, ese cero que dices que no tiene valor, que si está a la izquierda, o que si está a la derecha y tiene un valor determinado. ¿Podrías escribir un ejemplo?*

R8 *G: Ujum. Primero voy a poner el que se supone que no tiene valor.*

R9 *D: Ok*

R10 *G:* ***Sería, no importando la cantidad de ceros que tenga a la izquierda del punto, o sea, por ejemplo aquí está el punto (dibuja un punto en la hoja) y si está un uno, pero no importando cuantos ceros tenga a la izquierda: uno, dos o tres, la cantidad siempre va a valer uno*** *(el estudiante escribió el número uno y a la izquierda ha colocado cuatro ceros, donde plasma que el uno seguirá siendo la misma cantidad aunque se le agreguen ceros a la izquierda de él); pero por ejemplo si es esta misma cifra, pero está a la derecha del punto, entonces dependiendo de la cantidad de ceros que tenga, si es uno serían 10, o dos 100 o tres mil o diez mil dependiendo de la cantidad (ver ilustración 5.1)*

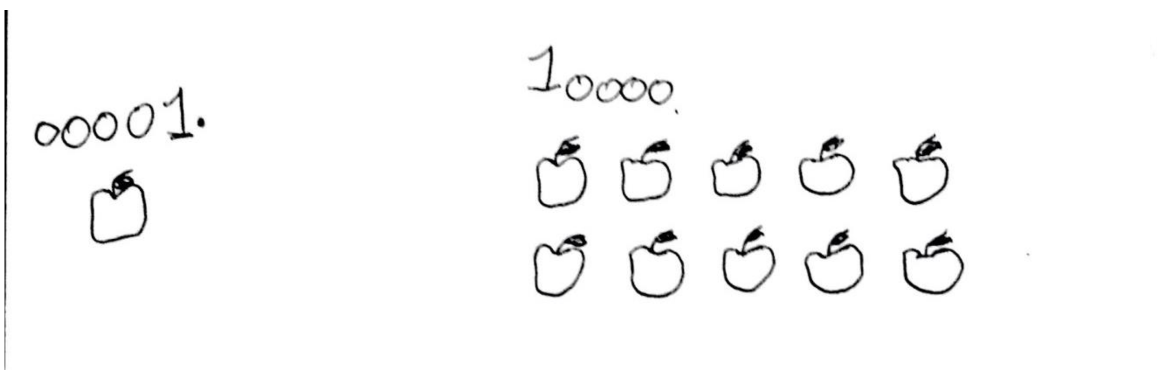


Figura 4 Donde el cero puede o no tener valor y como esto se demuestra en su representación gráfica.

Como podemos percatarnos, Guadalupe muestra que al colocar ceros a la izquierda de un número (sin ser esté una cantidad decimal), el valor no se modifica, es decir, si tenemos la cantidad 0001, está sería igual a escribir 01 o simplemente 1, pues “no importando cuántos ceros tenga a la izquierda, la cantidad siempre va a valer uno”. Esto lo expresa de la siguiente forma:

R19 *D: Ah ok, entonces dependiendo de donde ubiques el cero, será el valor que tenga la cantidad. Y si pensáramos en los ejemplos que estás poniendo, si tu nada más tomaras un cero de cada uno de los ejemplos, serían* *diferentes entre uno y otro .Es decir, vamos a suponer que tomamos del primer ejemplo que escribiste el primer cero que aparece allí a la izquierda, y del segundo ejemplo vamos a tomar el cero, solo el cero que tienes a la derecha del número uno. ¿Hay una diferencia entre esos ceros?*

R20 *G: Ummm… pues igual sí, porque,* ***porque igual y aquí (señalando el ejercicio uno) aunque tenga un cero igual vale uno y aquí (señalando el ejercicio dos) igual tiene un cero, pero la cantidad es mayor que uno, es decir 10. No es mucha la diferencia pero sí hay.***

Resulta interesante la forma en cómo Guadalupe atribuye un significado doble al cero, es decir, un cero sin valor y otro con valor, pues en el contexto del sistema de numeración posicional, él se percata de que tantos ceros a la izquierda de un número no alteran su valor, mientras que si existen ceros a la derecha de un número éste se modifica incrementándolo. Podríamos pensar que es por este tipo de situaciones que de manera coloquial se dice "eres un cero a la izquierda".

La tercera indicación de la entrevista fue que utilizara una representación gráfica para explicar su idea del cero. En este sentido Guadalupe recurre a una representación discreta, pues tomando como referencia los ejemplos dados anteriormente decide explicar el cero con manzanas (*ver ilustración 5.1*). Al hacer sus dibujos y cuestionarle el porqué de ellos, nos comentó lo siguiente:

R24 *G: Pues bueno, podría ser algún dibujo de algún objeto, por ejemplo, en el primer ejercicio, aunque tenga cinco, seis o más ceros, siempre va a ser uno. Y aquí (señalando el ejemplo dos) dependiendo de la cantidad de ceros que ponga será el número de dibujos que haga yo.*

R25 *D: Ok, ¿podrías hacernos algún ejemplo con algún dibujo?*

R26 *G: Bueno en el primero solo sería un objeto, haría yo una manzana o no sé.*

R27 *D: Ok (Guadalupe dibuja una manzana)*

R28 *G: Aquí igual,* ***no importando los ceros hacia acá (en dirección a la izquierda del número uno) hacia la izquierda, siempre va a ser uno. Pero aquí (señalando el ejemplo dos), dependiendo del cero, va a aumentar la cantidad de manzanas. Entonces, suponiendo, tomando el primer cero, tendría que hacer 10 manzanas.***

La representación que Guadalupe hace le permite ver que los ceros que escribió no afectan la cantidad, por lo tanto solo dibuja una manzana. En el segundo ejemplo, él establece que si le seguimos agregando ceros al número uno, esta cantidad crecerá y determinará la cantidad de manzanas a dibujar, pero lo relevante es la afirmación que hace al final de su dibujo:

R35 *D: Ah ok, entonces en tu primer ejemplo donde tienes 0001 y que has dibujado una manzana. No importa la cantidad de ceros. Tú puedes poner más ceros pero no cambia la cantidad, sigue valiendo lo mismo.*

R36 *G: No, no importa.*

R37 *D: Entonces el cero allí no vale, y en el segundo ejemplo el cero ya tiene valor.*

R38 G: Si, allí tiene un valor.

La afirmación de que el cero vale resulta interesante, pues el símbolo “0” denota la ausencia de cantidad, pero el estudiante le da la posibilidad de valor. Podríamos pensar en la posibilidad de ver al cero del 10 no como la ausencia de unidades, sino como la relación que existe entre la adición de diversos números: 5+5, 6+4, 7+3, 8+2, 9+1, etc.

Con respecto a la segunda entrevista, Héctor nos respondió lo siguiente a la pregunta: ¿Qué significa para ti número cero?:

L1 *D: Qué contestarías tú si te preguntaran para ti: ¿qué significado tiene el número cero? ¿Qué significa para ti el número cero?*

L2 *H:* ***Pues para mí el número cero es un número que está entremedio de dos balanzas, significa como la que te queda en blanco.***

Para Héctor, el cero tiene sentido como un número que se encuentra entre dos balanzas y a su vez como aquello que se queda en blanco, es decir, sin objetos. En el primero caso nos parecería ver que el estudiante asume al cero como el punto que parte a los números en dos secciones, es decir, lo ve como el punto que divide o equilibra a las cantidades. Esta idea surge de la afirmación que hace el alumno:

L6 *H: Si una balanza, por ejemplo está entre los números naturales y racionales. El número de los racionales****, los negativos y los positivos, el cero es la balanza que los une a los dos, que está entre medio.***

Esta idea del cero como una balanza nos remite inmediatamente al cero que encontramos en la recta numérica, la cual ocupa la posición descrita por el estudiante.

De igual forma, Héctor deja entrever que existe otro significado del cero, pues en la entrevista dice "*significa como la que te queda en blanco*". En dicha afirmación, el alumno relaciona el número cero con un color, lo que nos lleva a la idea de la ausencia de cantidad. Esto se ve reafirmado cuando al ejemplificar su idea de cero el estudiante plantea lo siguiente:

L8 *H:* ***Por ejemplo tú tienes, a ver por ejemplo 5 euros, te gastas uno luego te gastas 4 y al final te quedas si nada, te quedas con cero.***

L9 *D: ok, y ahí, ¿qué tipo de cero es el que estamos viendo?*

L10 *H: El cero está representando al dinero*

L11 *D: El dinero, en este momento el cero está representando dinero. Y para ti, ¿qué significaría ese cero en este momento?*

L12 *H:* **Que te quedaste sin dinero, que no tienes nada***.*

Como vemos, para Héctor, al llevar a un contexto de compra/venta, el cero representará la ausencia de objetos, pues afirma que después de gastar *“al final te quedas sin nada, te quedas con cero”.* La aseveración anterior describe lo que consideramos como un cero griego, resultado de la ausencia de objetos.

Al pedirle a Héctor que nos representara de manera gráfica la idea de cero que nos estaba mostrando, realiza un histograma (ver figura 5), donde señala el cero como el punto donde se intersecan el eje ordenado y el de las abscisas. La explicación que nos da es la siguiente:

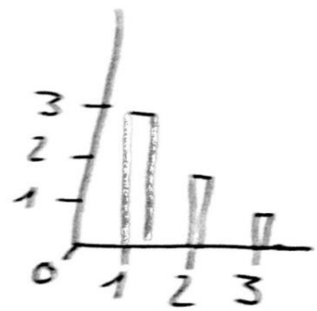


Figura 5 Dibujo hecho por Héctor para ejemplificar al cero.

L16 *H: Haré una gráfica,* ***aquí está el cero como punto intermedio****.* ***No podrías tocar el cero porque no tienes nada.*** *De todas maneras otros números si podrías… (Dibuja la gráfica y escribe algunos números). Por ejemplo en la gráfica podríamos hacer así un ejemplo, hay una disminución, sí, pero es imposible coger algún material del cero, no se podría tocar (Héctor hace una gráfica de barras, donde dice que el cero “no se puede tocar”).*

Al realizar su dibujo, Héctor recurre inicialmente a su idea de cero como el punto de la balanza, aquel que separa los positivos de los negativos. Sin embargo, en el momento de utilizar su representación surge una confusión sobre el significado que le atribuye al cero, pues al cuestionarle que significa el cero en su dibujo nos dice:

L19 *D: Aja, y ¿qué significa para ti ese cero?*

L20 *H:* ***El cero es como casi, es como cuando tienes cero significa que no tienes elementos****…*

En este caso pareciera que Héctor se mueve entre ambos significados, entre un cero como punto de referencia y separación entre los números positivos y negativos (cero de Stevin) y el cero como la ausencia de elementos (cero griego). Lo anteriormente descrito nos permitiría pensar en el manejo de múltiples significados del cero. No obstante, al no tener muy claro lo que el estudiante quería decir con que “el cero no se puede tocar”, se le pidió que realizara otra representación y esto fue lo que nos dijo:

L21 *D: Ok, muy bien. Tendrías alguna otra representación o manera de mostrarnos el cero del que tú nos estabas hablando. (El estudiante se pone a pensar un poco)*

L22 *H: Una gráfica, como te dije antes como la balanza. (Ver figura 6)*

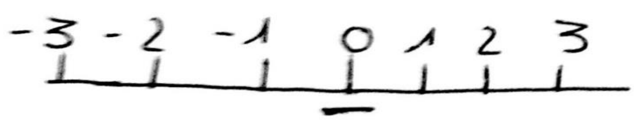


Figura 6 Representación de Héctor: “la recta numérica como balanza”

L23 *D: Podrías mostrarnos por favor (el estudiante empieza a dibujar una recta numérica escribiendo primero el cero y después los números positivos y negativos). Ok, me podrías señalar dónde se encuentra el cero. (el alumno pone una marca debajo del cero en la recta numérica). Ok, entonces ese cero, nos estabas comentando que es el que se encuentra como balanza, ¿verdad?*

L24 *H:* ***Sí, porque, o no tienes nada o tienes menos que nada, que sería deber algo.***

L25 *D: Ok, tener menos que nada ¿significa…?*

L26 *H: Que debes algo.*

L27 *D: Que debe uno algo.*

L28 *H: Eso se representa más o menos cuando uno dinero así, por ejemplo* ***cuando no tienes nada y pides un préstamo, a lo mejor te ofrece, pero estarías en números negativos, ya no te ofrecen más.***

Héctor realiza un nuevo dibujo a manera de “balanza”, es decir utiliza una representación continua que en este caso pudiera ser la recta numérica. Es aquí donde Héctor nos muestra al cero como ese elemento que separa a los positivos de los negativos, y aun más, pues manifiesta de manera general la existencia de esas “cantidades menores que nada”, las cuales representan a los negativos. La importancia de esta afirmación radica en la relación que existe entre el cero y los negativos, pues desde el cero griego no podrían existir, sin embargo desde el cero chino y el cero de Stevin podríamos considerar el manejo y la existencia de dichos números, algo que Glaeser (1981), señalaría como primordial para el manejo y la aceptación de los negativos.

Podemos ver que una de las concepciones arraigadas del cero en los estudiantes es la representación de la ausencia de cantidad. No obstante podríamos pensar en que el desarrollo y uso de diversos modelos de enseñanza (como la recta numérica) han permitido que los alumnos ubiquen al cero como punto de referencia, lo que les da una noción de la existencia de cantidades menores que nada.

5.2 Tres caras del cero.

Las siguientes dos preguntas estaban relacionadas mutuamente, pues nos interesaba saber cómo interpretaban el cero a partir de una adición de números opuestos, y la forma en cómo lo representaban de manera gráfica. Ambos estudiantes se les pidió que escribieran un problema en el que hicieran uso de la operación 7 + (-7)=0, la cual podría tener una estructura de suma de dos variaciones opuestas o de dos estados opuestos.

Ante dicha pregunta, Guadalupe nos respondió lo siguiente:

R39 *D: Te voy a dictar una operación es 7 + (-7)= 0. El reto es que tú en este momento, con esa operación que te acabo de dar pienses en un problema o situación de la vida cotidiana en donde tú utilices esa operación y que el resultado te dé cero.*

R40 *G: ¿Lo escribo?*

R41 *D: Si puedes escribirla primero (Guadalupe escribe "una persona tenía 7 pesos pero fue a la tienda y compró un chocolate que costaba 7 pesos y al final del día quedó sin dinero").Ok, podrías leernos tu ejemplo.*

R42 *G: Bueno,* ***yo puse que una persona tenía 7 pesos pero fue a la tienda y compró un chocolate que costaba 7 pesos y al final del día quedó sin dinero.***

Se puede ver que el problema seleccionado por Guadalupe se sitúa en un contexto de compra/venta donde la operación no corresponde a la estructura de doble cambio, sino que a partir del contexto seleccionado el alumno recurre a una estructura de un cambio (estado inicial + variación = estado final)), esto puede ser el causante del que el resultado de la operación sea cero, entendido éste como la ausencia de objetos, lo que se reafirma con la expresión del alumno "y al final del día me quedo sin dinero". Otro ejemplo de dicha reafirmación es lo que nos dijo al preguntar qué significaba el cero obtenido en el problema:

R43 *D: Ok, entonces, en la operación ¿en dónde estaría representada la parte que tú dices que quedó sin dinero?*

R44 *G: La parte sería el cero.*

R45 *D: ¿El cero?*

R46 *G: Ajam.*

R47 *D: Y entonces, el cero que estamos viendo en esa operación ¿sería el mismo cero que tú nos decías al principio?*

R48 *G: Bueno, en este caso no porque no tiene ninguna cifra a la derecha o a la izquierda.*

R49 *D: Y entonces, ¿qué pasa con este cero que estás dando como resultado?*

R50 *G: Pues* ***en este caso el cero representaría que la persona tenía 7 pesos pero como compró un chocolate que costaba 7 pesos, al momento de pagar se quedó sin dinero, es decir se quedó con cero pesos.***

Dicho de otra manera, parecería que al manejar una estructura de un cambio, el estudiante se remite principalmente a manejar el cero como la ausencia de elementos, a decir de nosotros, como cero griego. Una posible respuesta ante el cambio de estructura sería el tipo de problemas que se manejan en el proceso enseñanza y aprendizaje, pues pocas veces los alumnos son llevados a situaciones donde se trabajen con estructuras de doble cambio.

Al continuar con el trabajo de Guadalupe y ante el cuestionamiento de si el cero obtenido tiene algún otro significado, el alumno nos da un atisbo de lo que podría ser un cero chino, en el sentido de que es el resultado de una suma infinita de opuestos:

R51 *D: Ah ok, entonces podríamos pensar en algún otro significado de ese cero que te resulta, es decir, de ese cero como "se quedó sin dinero". ¿Tendría para ti otro significado el cero que aparece en esta operación?*

R52 *G: Bueno, si,* ***en este caso, tomando en cuenta solo la operación sin tomar en cuenta el problema, el cero representaría la igualación, porque tiene el signo de igual, de igualación de la operación de 7-7, porque en este caso el 7 es positivo, y el menos 7 que está en el paréntesis*** **[7 + (-7) =0]*****, al momento de hacer esta operación de los signos (señala el signo positivo que antecede al paréntesis junto con el***

negativo que es inherente al negativo 7) del más y menos, el resultado daría negativo.

Lo anterior podría ser, en una idea muy general, un comienzo en la construcción del cero como el equilibrio entre números opuestos (cero chino), pues de alguna manera el estudiante tiene la noción de que si tenemos cantidades iguales con signos diferentes, el resultado es cero.

Para la justificación de su ejemplo, se le pidió que lo representara de manera gráfica. Guadalupe recurrió a una representación continua utilizando la recta numérica para ejemplificar la solución del problema (ver figura 7)

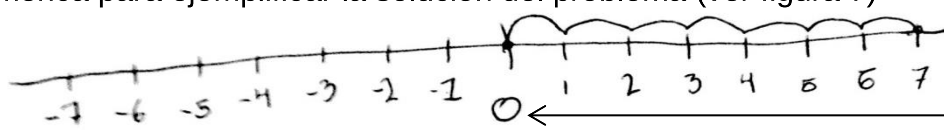


Figura 7 La recta numérica que utilizó Guadalupe para ejemplificar la solución del problema.

Al cuestionarlo nuevamente al respecto del cero nos muestra otro significado de este número:

R71 *D: Ok, veo allí en tu dibujo que en la recta que acabas de utilizar aparece un cero que es a donde llega (después de realizar la operación del ejercicio anterior) pero veo que hay cantidades a la izquierda de ese cero. Entonces, solo pensando en ese cero que dibujaste, ¿tendría el mismo significado que nos decías anteriormente [**R50**] en la operación o el que nos dabas al principio [**R2**] el cual depende del lugar en el que se ubica?*

R72 *G: Bueno, en este caso de la recta numérica o de una gráfica, el cero siempre va a ser el punto o el centro de las cifras (hace referencia al cero como el punto por el cual se determina la posición de los enteros). Por ejemplo, en éste (indicando el cero de la recta) igual a la derecha tienen un valor positivo.*

R73 *D: Sí.*

R74 *G: Y a la izquierda se le daría un valor negativo.*

R75 *D: Un valor negativo.*

R76 *G: Ajam.*

R77 *D: Ok, entonces ¿allí el cero sería el centro?*

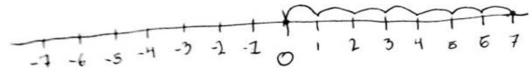
R78 *G: Ajam.*

R79 *D: Y ¿te serviría para algo? Es decir, allí en el dibujo sirve para algo que ese cero sea el "centro del dibujo".*

R80 *G: Pues* ***sí porque me sirve como base para, en esta operación, ubicar los números, como en este caso el 7 positivo.*** *En la operación lo marca como 7 positivo, entonces en la recta me ubicaría en el +7, y después, como en la operación se marca una resta porque tendría el signo negativo, se tendría que disminuir la cantidad, quitarle siete veces, igual quedaría en el valor cero, en el centro.*

Como se puede ver, Guadalupe considera al cero como el punto de referencia para ubicar las cantidades positivas y negativas en la recta numérica. Así, al contestar este ejercicio, hace uso del cero con dos significados distintos: primeramente muestra al cero como la ausencia de objetos ("al momento de pagar se quedó sin dinero"); ante la operación nos muestra un acercamiento al cero como un equilibrio de cantidades opuestas (cuando comenta que cero es la igualación de la operación 7+ (-7)) y por último, el momento en que asume al cero como un punto de referencia para colocar las cantidades positivas y negativas.

Esta idea de la existencia de las nociones sobre los posibles significados del cero se ven reflejadas en la siguiente parte:



R83 *D: Entonces ¿tiene un uso allí? El cero tiene un uso*

(Guadalupe duda, se queda pensativo ante tal afirmación, pues aunque pareciera que concibe al cero como punto de referencia, no clarifica este uso que le está dando y solo lo asume como el resultado de la operación).

R84 *G: Bueno, en este caso el cero solo sería el resultado.*

R85 *D: Solo sería el resultado.*

R86 *G: Porque* ***en la operación no lo utilicé, en este caso el cero se utilizó en la recta porque el cero es el centro, para diferenciar cuáles son los números negativos de los positivos.*** *En este caso yo utilicé el lado derecho porque la cifra era positiva. Pero, por ejemplo, si en la operación hubiera sido -7 en vez de +7 me hubiera yo ubicado en el lado izquierdo porque sería negativo.*

R87 *D: ¿En el lado izquierdo de qué?*

R88 *G: Del cero.*

El estudiante asume que el cero tiene un uso cuando nos permite ubicar positivos y negativos, y cuando es solo un resultado lo considera como la ausencia de objetos, lo cual nos llevaría a pensar en un cero relativo (o cero de Stevin) y en un cero griego.

En el mismo cuestionamiento, Héctor también se remite a un contexto discreto de ganancia/pérdida en el siguiente problema:

L33 *D: Ok, ¿Podrías leernos tu problema?*

L34 *H: "Si tenemos 7 pelotas y regalamos las 7¿con cuántas nos hemos quedado?*

L35 *D: Muy bien, en el problema ¿dónde estarían representados cada uno de los números del problema?*

L36 *H: El 7 es el número de pelotas que tenemos y si las regalamos [7 + (-7) = 0] estaría representado por esa resta del 7 a las pelotas que se tenían.*

L38 D: Ah, ok. Y el que te quedaras sin las pelotas representaría.

L39 H: El cero.

Al igual que el alumno mexicano, Héctor recurre a una estructura de un cambio (estado inicial + variación = estado final), donde el estado final es representado por la ausencia de objetos, es decir la pérdida de las pelotas. Como se ha dicho anteriormente, existe la posibilidad de que el alumno recurra a esta estructura como resultado del tipo de problemas que resuelve en la escuela, lo que lo lleva a una zona de seguridad.

Para corroborar que el alumno percibe al cero como la ausencia de objetos, la representación a la que recurre se da en un entorno discreto (ver figura 8), y explica lo siguiente:

L41 *D: ¿Podrías explicarnos tu dibujo?*

L42 *H: Aquí tengo las pelotas (señalando el primer dibujo), luego las estamos regalando (señalando el dibujo de una mano en acción de dar una pelota) y al final cuando terminamos de regalarlas todas nos quedamos en cero*

L43 *D: Me interesa ese último dibujo que hiciste. ¿Allí estas representando?*
[]

L44 *H: El espacio sin pelotas.*

L45 *D: ¿El espacio?*

L46 *H: Si, es como aquí si tenemos tres bolígrafos (señalando a la mesa donde pone tres bolígrafos) y quitamos los tres, se queda este espacio (señala la mesa sin los bolígrafos).*

L47 *D: Implicaría entonces para ti que fueron retiradas las cosas.*

L48 *H: sí.*

Figura 8 Representación discreta realizada por Héctor para ejemplificar “El espacio sin pelotas”

En este caso es muy claro como el estudiante representa esta ausencia de objetos mediante un dibujo que lo acerque a representar “la nada” []. Al cuestionarle sobre el “espacio sin pelotas” Héctor se ve en la necesidad de ejemplificarlo al momento con los bolígrafos, donde al retirarlos de la mesa, se queda el espacio (sin objetos). Además de la explicación anterior se le pide al estudiante que nos muestre otro ejemplo donde represente la operación: 7 + (-7) =0, y nuevamente recurre a una representación discreta utilizando un ejercicio de compra-venta:

L54 *H: Tengo 5€ y una moneda de 2€ (dibuja un billete y una moneda), voy (marca una flecha hacia la derecha) y me compro una camisa que cuesta 7€ (dibuja la camisa con el valor de 7€) y al final me quedo sin el dinero (nuevamente marca una flecha hacia la derecha) (ver figura 9).*

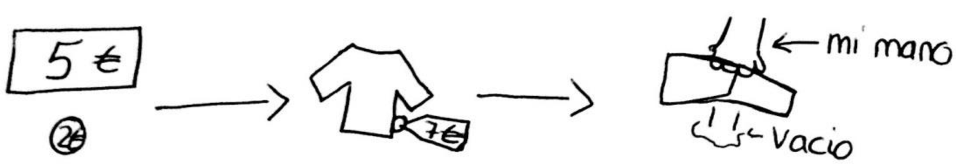


Figura 9 La representación discreta muestra cómo se llevan a cabo las acciones para “quedarse sin dinero”

L55 *D: ¿Te quedas sin el dinero? ¿Cómo podrías representar tú que te quedas sin el dinero?*

L56 *H: Directamente más o menos así (y hace el dibujo de su mano con la cartera vacía), sería mi mano y sería una cartera vacía:[* 

].

Se puede apreciar que el estudiante asume al cero como la ausencia de un objeto (sean las pelotas o el dinero). Esta ausencia (la cual matemáticamente no es representada en el dibujo), queda expuesta cuando se le cuestiona sobre si existe un símbolo que represente la ausencia de dinero o de pelotas, para la cual nos dice:

L60 *H: Por ejemplo si tengo siete (escribe la operación 7-7=0) y le quitamos siete nos quedaría cero.*

L61 *D: Ese último símbolo nos representaría ¿Qué?*

L62 H: Que tienes nada.

Este último comentario resulta importante resaltarlo porque ante el cuestionamiento de lo que representa el cero, muchos expresarían "no tengo nada", sin embargo Héctor es capaz de atribuirle una existencia al cero expresando "tienes nada". La posibilidad de atribuir la existencia de la nada permite un paso importante en la comprensión de los negativos.

De manera general nos percatamos que los estudiantes tienden a utilizar dos significados del cero: como cero griego (ausencia de objetos) o como cero de Stevin (relacionado con el punto que separa los positivos de los negativos). Estas dos nociones o significados conviven y se adaptan a partir de la situación o problema que enfrenten, aunque regularmente los estudiantes desarrollan problemas en un entorno discreto que los lleva a utilizar con mayor frecuencia el cero griego.

5.3 Un cero muy frío…

Uno de los entornos donde cotidianamente escuchamos hablar del cero es en el reporte meteorológico. Este entorno continuo permite evidenciar el arraigo del significado que tiene el cero y cómo se relaciona con el concepto de temperatura.

En el caso de Guadalupe, al preguntarle qué significa que la temperatura esté a 0°, explica que al igual que en el ejercicio anterior, el cero sirve como punto de referencia, es decir, que nos permite localizar las temperaturas positivas y negativas (cero de Stevin). Lo anterior lo podemos ver en el siguiente fragmento:

R92 *D: Bien, supongo que tú escuchas las noticias y te enteras que todos los días dan la temperatura de varios lugares en el país. Vamos a pensar que tú escuchas que el día de ayer en Córdoba amaneció a 0°C, ¿Sí? Para ti, ¿qué significa o cómo explicarías que la temperatura se encuentra a 0°C?*

R93 *G:* ***Bueno, en el caso de los grados tal como lo sé, en las escalas de los grados igual que en el ejemplo anterior, el 0° sería como el centro de la temperatura porque si es mayor que cero la temperatura aumenta, en este caso sería el calor.*** *Pero, como usted dice en las noticias mencionan que está a nueve grados bajo cero, esto en una recta sería un número negativo.*

Vemos que la afirmación de Guadalupe parte de la idea que por arriba de cero grados hace calor y por debajo las temperaturas serían negativas. Es clara la presencia de un cero que es la referencia para establecer lo positivo y lo negativo.

Al pedirle que utilizara una representación gráfica (ver figura 10), el estudiante realiza la representación del plano cartesiano habitual y nuevamente tomando como referencia el cero señala cuáles son las temperaturas positivas (donde hace calor) y las negativas (donde hace frío).

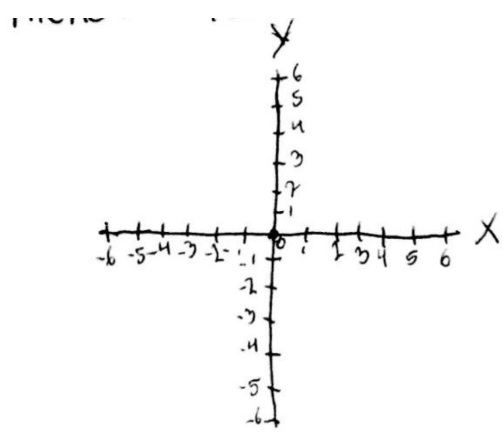


Figura 10 Representación de Guadalupe para ejemplificar el significado de 0°C

Con respecto a Héctor, al hacerle el mismo cuestionamiento recurre inmediatamente al trazo de una recta numérica (ver figura 11), y nos dice:

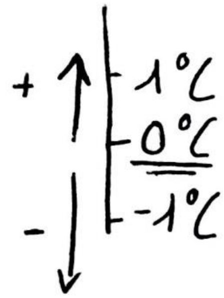


Figura 11 Dibujo hecho por Héctor para explicar el 0° como un punto frío

L64 *H: En ese caso al estar en cero grados centígrados (dibuja una recta numérica vertical donde solo se marca el cero y el positivo uno y negativo uno) para mí sería una media temperatura, para mí sería que había más frío que calor.*

L65 *D: ¿Significaría que para ti hay más qué?*

L66 *H:* ***El cero lo representamos como una medida de temperatura, cuanto más arribas es que hay mayor temperatura y cuanto más bajemos es que hay menor temperatura. Para mí el cero significaría que es un punto frío.***

L67 *D: ¿Un punto frío?, en donde me estabas explicando que arriba de ese número hace más calor y debajo de ese número hace más frío.*

L68 *H: Para acá aumenta la temperatura (marcando una flecha hacia arriba) y para acá (marcando una flecha del cero hacia abajo), la temperatura disminuye. Bueno, solo si presentamos de esa manera en grados centígrados.*

En este caso Héctor recurre a su experiencia previa, pues al seguir la entrevista nos deje entrever que el valor de la temperatura es relativo ya que depende del lugar en donde te encuentres. Esta idea parte de la representación gráfica que hace, pues recurre nuevamente a un histograma donde compara las temperaturas de las Islas Canarias con algunos otros lugares (ver figura 12).

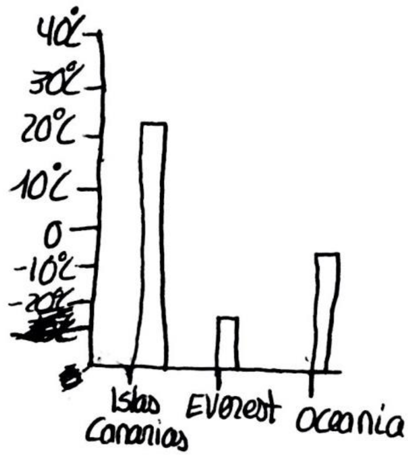


Figura 12 Histograma que utilizó Héctor para explicar lo relativo dela temperatura a 0°C

Al hacer esta representación comenta:

L69 *D: ¿Tendrías alguna manera gráfica de representarnos esa idea que tienes sobre el cero grados de temperatura, además de la que acabas de hacer?*

L70 *H: mmm vale. (El alumno recurre a una gráfica de barras donde en el eje de las abscisas escribe los nombres de diversos lugares, y en el eje ordenado escribe las temperaturas positivas y negativas. Sin embargo el eje ordenado y el eje de las abscisas no se cruzan en el punto cero, sino que se encuentra por debajo de los -20°C). Por ejemplo aquí vamos a comparar las Islas Canarias, el monte Everest y también Oceanía. Los tres son muy distintos en temperatura. Aquí tendríamos a 0°C (es la primera temperatura que marca en la intersección entre el eje "x" y el eje "y"), mejor vamos a quitar el 0° de aquí (lo raya y lo pone más arriba sobre el eje ordenado) vamos a colocarlo aquí, y después 10°, luego 20°, 30°, 40° y aquí (por debajo del cero marcado) estaría -10°, -20°, -30 C. Las Islas Canarias estarían entre 20 y 30°C. El Everest estaría con temperaturas por debajo de cero (a Oceanía la coloca en 0°C por desconocimiento de la temperatura en ese lugar).* ***En la gráfica el cero sería el punto medio, pues en está gráfica***

hay representaciones que van por debajo de cero (señala los valores de 0° hacia abajo).

L71 *D: Entonces estamos pensando en…*

L72 *H:* ***Para nosotros el cero sería un punto de frío porque no estamos acostumbrados a esa temperatura.***

L73 *D: Sería un punto de frío.*

L74 *H: Sí, porque nosotros tenemos una temperatura determinada. Cuando baja la temperatura sentimos frío.*

L75 *D: Ah, perfecto, entonces en ese punto de frío nosotros podemos pensar que hay temperaturas que están por debajo de ese punto y que hace más frío, y que debe haber lugares con temperatura más baja y que por arriba de ese punto de frío hay lugares donde la temperatura es más alta.*

L76 *H: Sí.*

L77 *D: Ah, ok.*

L78 *H:* ***Pero para otros lugares cero grados sería la temperatura donde hace más o menos calor para ellos, pues teniendo temperaturas tan bajas, al tener un poquito más de temperatura sería como tener menos frío, más fresquito.***

En este caso podemos ver que el cero no solo se concibe como un punto de referencia, sino que se le otorga un papel relativo en cuanto a la medición y a la percepción que tienen los habitantes. Así, para los habitantes de las Islas Canarias la temperatura por debajo de los 10°C se asume como temperaturas frías. El 0°C no se asume como una temperatura en su entorno inmediato pero se reconoce que "para otros lugares cero grados sería la temperatura donde hace más o menos calor…").

Otro aspecto destacado de esta asociación entre el 0 y la medición de la temperatura es el adjetivo asignado por Héctor a este punto. Señalar al cero como “punto frío” puede ser resultado de conocimientos desarrollados en su formación académica, pues en la escala Celsius se asume el 0° como el punto de congelación del agua.

Para ambos estudiantes el 0°C sirve como un punto de referencia en la medición de las temperaturas. Este conocimiento se ve enriquecido con las percepciones que se tienen de su entorno inmediato. Sin embargo, mientras Guadalupe interpreta al cero como el punto de referencia (cero de Stevin), Héctor asume que el significado de 0°C es relativo al lugar o posición en la que se encuentre, lo cual no le quita que siga siendo el punto del cual se determinan las temperaturas positivas y las temperaturas negativas.

5.4 Bajando más allá del cero.

Al igual que en el caso anterior, la pregunta 7[63] estaba dirigida a revisar el uso que se le da al cero en una situación particular, es decir, en problemas de ascensor. Aunque se puede destacar que ambos estudiantes recurrieron al cero como el punto de referencia (cero de Stevin), los significados atribuidos al cero son diferentes y esto se debe, quizá, a la diferencia de contextos en los que los alumnos se desarrollan.

Otra particularidad interesante es que los estudiantes para resolver el problema recurren directamente a representaciones continuas, es decir, al uso de la recta numérica antes de hacer el cálculo, lo que favorece la asimilación del cero como punto de referencia (cero de Stevin), pero podría limitar la operatividad con los números enteros.

En el caso de Guadalupe antes de dar una respuesta, recurre a la representación de la recta numérica y enfatiza el uso que le ha dado al cero pues dice:

63 Se les planteo el siguiente problema: Un ascensor está en la planta 3 y bajó hasta la planta 5 del sótano. ¿Cuántas plantas bajó?

R113 *D: Sí, el ascensor se encuentra en la tercera planta o tercer piso y dice que baja hasta la planta 5 del sótano o al piso cinco del sótano.*

R114 *G: Bueno entonces sería como en esta operación. En esta recta se representaría por pisos de cualquier edificio.*

R115 *D: Ajam.*

R116 *G: A partir del uno sería un piso y el problema dice que se encuentra en el nivel 3 y descendió al nivel 5 del sótano.*

R117 *D: Así es.*

R118 *G: Serían a partir del tres obviamente descendió o disminuyó, entonces tendría que irse para atrás (indicando el sentido hacía la izquierda), pero como en todos los edificios deberían tener un sótano y en este caso* ***el punto cero representaría el nivel del piso.***

R119 *D: Ajam.*

R120 *G: A partir del piso hacia arriba serían los pisos normales y ya bajo el cero, los números negativos representarían los niveles del sótano es decir debajo del piso, debajo del cero. Entonces a partir de éste (tomando como referencia el cero) bajo otros 5 y entonces en total el ascensor descendió 8 pisos (Guadalupe primero realiza un movimiento que va de +3 a 0 y después de 0 a -5, lo que indica que maneja una "recta dividida").*

R121 *D: ¿8 pisos? ¿Podrías escribir eso? ¿Cuánto descendió? (Guadalupe escribe "el ascensor descendió 8 pisos). Decías algo al respecto del cero, decías que el cero ¿qué te estaba marcando allí? (señalo el cero en la recta)*

R122 *G:* ***Bueno yo el cero lo utilicé como el punto de nivel de piso de un edificio.***

R123 *D: Ah ok.*

R124 *G**: O podría ser hasta el nivel de la tierra.***

R125 *D: Aja*

R126 *G**: Porque sobre la tierra serían los pisos y bajo la tierra ya sería el sótano, ¿no?***

Guadalupe explica la forma en cómo usa el cero, pero al asociar este uso con el significado que se le da al problema, él considera al cero como la línea entre lo que hay arriba y abajo del suelo. Esta interpretación podría ser el resultado de la aplicación de la recta numérica o bien como una interpretación desde el campo de la geografía y el concepto de altitud. De igual forma, y como se mencionó anteriormente, el del alumno podría ser un factor determinante en el razonamiento mostrado, pues en el medio rural donde vive es imposible encontrar un edificio, aún más un ascensor.

Con respecto a Héctor, también recurre a la recta numérica para realizar el cálculo, sin embargo, y a diferencia de Guadalupe, en un inicio el estudiante muestra que el 0 no representa el nivel del suelo, sino la entrada del edificio:

L87 *D: Ahora tenemos otra situación, te la voy a leer y para esta situación necesitamos representar una operación y una representación gráfica, la que más te guste. Dice la situación: "Un ascensor está en la planta 3 y bajó hasta la planta 5 del sótano, ¿Cuántas plantas bajó? (El estudiante dibuja una recta numérica vertical, empieza dibujando el punto cero ("el cual es la entrada del edificio") luego marca los números positivos hasta +3 y después con los números negativos hasta -5).*

L88 *H:* ***Aquí sería el punto cero, que sería el punto de entrada****. Cuando va subiendo llega hasta el punto tres, y al estar por debajo del sótano serían los negativos. ¿Bajó hasta el punto 4?*

En la entrevista se aprecia como asume que el cero en la recta numérica corresponde a la entrada del edificio. Esta idea será nuevamente expresada por el estudiante cuando se le pregunta dónde se encuentra la planta 5 del sótano, a lo que responderá que se ubica por debajo de cero.

De manera general en este ejercicio los estudiantes demuestran el arraigo que se da del cero como un punto de referencia debido principalmente al uso de la recta numérica. No obstante, es importante enfatizar que ambos estudiantes no pudieron expresar matemáticamente la operación que hiciera válido el problema. Tanto Guadalupe como Héctor recurrieron a estructuras de un cambio (del tipo estado inicial + variación = estado final), cuando se requería una estructura de estado final – estado inicial= variación.

5.5 Donde el cero puede ser equilibrio pero termina siendo nada

La pregunta 8 estaba dirigida ex profeso para conocer si los estudiantes pueden asimilar al cero como un número que es el resultado de múltiples pares de opuestos. Para ello se buscó que el problema no pidiera un resultado sino una interpretación del mismo.

El problema que debían resolver era "si tengo 14 euros en casa y debo 14 euros a un amigo, ¿Cuál es mi situación económica? Al presentar el problema, los estudiantes asumen como obligatorio la acción "pagar lo que debo", y esto los lleva al resultado de cero como "quedarse sin dinero". En el caso de Guadalupe, esto nos dijo:

R145 *G:* ***Bueno, en este caso si yo tuviera 14 pesos pero si debiera 14 pesos, pues al momento de pagar yo quedaría sin dinero porque si yo debo una cantidad, y esa cantidad que debo es la que tengo pues quedaría sin nada, como si fuera el cero.***

Aunque el problema no lo menciona, Guadalupe asume la necesidad de pagar y así el resultado de la acción es "quedaría sin nada", lo que lo lleva a asumir al cero como la ausencia de objetos, es decir como cero griego. Sin embargo, al continuar con la entrevista, el estudiante hace algunas precisiones que nos permitirían ver una noción vaga del cero chino:

R149 *G: Entonces la operación quedaría más 14 menos (+14-14=) ¿no? E igual que en el ejemplo anterior, en este caso sería una resta porque los signos son diferentes y en este caso no hay un número más grande o más chico, o sea que es el mismo y entonces sería 14-14 y sería cero (0) ¿no? E igual* ***no se le pone signo porque no tomé como referencia ni el número más grande ni el más chico, entonces sería cero.***

R150 *D: Sería cero. ¿Podría suceder que tuvieras un número más grande que otro y que el resultado te dé cero?*

R151 *G:* ***No, porque en cualquier operación mientras haya un numero positivo y un número negativo pero que sea la misma cantidad, o sea que sean los mismos dígitos, pues el resultado siempre será cero porque siempre va a ser la misma cantidad.***

R152 *D: Siempre va a ser la misma cantidad. Entonces para que te de cero tiene que haber la misma cantidad de positivos y la misma cantidad de negativos y así te da cero.*

R153 *G: Sí.*

En el fragmento anterior Guadalupe logra expresar la idea del cero chino y parecería que asume el resultado como la interacción de dos cantidades iguales con signo diferente. Pero después se le cuestiona qué significa el cero que le da como resultado la operación, y nuevamente asume la respuesta como "si me hubiera quedado sin dinero", lo que lo lleva nuevamente a un cero griego.

Con respecto a Héctor, el razonamiento que sigue es muy similar al de Guadalupe, de hecho al presentarle el problema él nos contesta lo siguiente:

L118 *H: Pues mi situación económica depende. Mi situación económica es que tengo 14 euros (escribe 14), y al deber 14 euros, le debes 14 (escribe -14), pues al final tu situación económica sería cero (la operación queda 14-14=0).*

L119 *D: Ok, ¿qué significaría para ti que el resultado te de cero?*

L120 *H:* ***Pues que no tienes dinero ni debes dinero.***

L121 *D: Que no tienes dinero.*

L122 *H: Y que tampoco debes dinero.*

L123 *D: Recordando lo que habías dicho inicialmente, ¿te acuerdas que habías dicho que era el cero?* ***(L12).***

L124 *H:* ***Sí, un número que no representa nada****.*

L125 *D: Que no representa nada. ¿Este cero que tienes allí [14-14=0] dibujado tendría que ver con lo que tú nos habías explicado inicialmente?*

L126 *H:* ***Sí, porque antes tenías dinero, una posesión material, ahora no tienes nada.***

L127 *D: Tenías una posesión material.*

L128 *H:* ***Sí, una posesión, cualquier cosa. Tenías algo y lo perdiste****.*

En este fragmento del diálogo, Héctor parecía insistente en el asunto de “no tienes dinero ni debes dinero”, lo cual podría darnos una idea del acercamiento al cero chino, pero nuevamente resalta la idea de tener y perder, lo que lleva al estudiante a asumir el cero como la ausencia, el no tener, el perder un objeto material (cero griego).

Lo anterior se ve respaldado por la representación discreta que hace el estudiante, pues para explicar su situación el alumno recurre a un dibujo de un billete y dos monedas y realiza la sustracción quedando en cero. Pareciera existir una relación entre los contextos discretos y la noción de cero como ausencia de objetos (Ver figura 13)

.

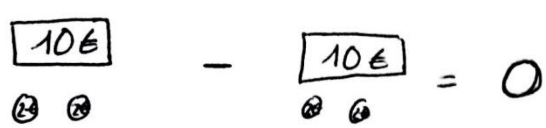


Figura 13 La idea de Héctor que refleja el cero como griego

Es posible que existan diversas explicaciones sobre por qué no se logra asumir el equilibrio entre cantidades iguales pero con signo contrario. En este caso pensamos que entre los factores que limitan la comprensión del cero chino está la necesidad de siempre obtener un resultado e interpretarlo en el contexto matemático (pues ante una operación como +14 + (-14)=0, decir que es un equilibrio entre dos cantidades podría ser aberrante, antes bien se les pide a los alumnos que asuman el resultado como que tengo cero cosas o nada). De igual forma se puede pensar en el constante uso que se le dan a las estructuras de un cambio más que a las de combinación.

5.6 ¡En donde empezamos!

La pregunta 9 se desarrolló en un contexto de elevador, aunque con la diferencia de estar basado en una estructura de doble cambio, es decir variación 1 + variación 2= variación total. La diferencia con respecto a los problemas anteriores es que a los estudiantes solo se les dan las variaciones que experimenta el elevador, lo que ocasiona reacciones distintas en los entrevistados.

Mientras que uno de ellos se asume en el inicio del edificio (aunque el problema nunca lo menciona), el otro estudiante duda pero piensa en distintos lugares.

En el caso de Guadalupe, al presentarle el problema responde de la siguiente manera:

R165 *D: Te voy a leer el problema, que dice: "Un elevador primero sube seis plantas y posteriormente baja seis plantas, la pregunta es ¿Cómo ha variado la posición del elevador con respecto a la que tenía antes del primer movimiento?*

R166 *G**: Bueno, en este caso el elevador al principio del problema se encontraría en el nivel 0, en este caso en el primer piso.***

R167 *D: Ajam*

R168 *G: Pero como dice que ascendió seis pisos ¿no? Y después descendió seis pisos,* ***igual quedaría en el mismo punto en el que empezó, es decir, quedaría igual en el nivel cero.***

Como ya se mencionó, el problema no menciona donde comienza el ascensor, sin embargo Guadalupe se piensa en el 0 como el inicio del movimiento del ascensor. Esta idea del cero como un punto de referencia le permite al estudiante no solo situar las cantidades positivas y negativas, sino que lo considera como el punto de inicio. Esto lo afirma Guadalupe en el siguiente fragmento:

R184 *G:* ***Bueno, en este problema el cero representaría el punto base, ¿no?***

R185 *D: Ajam.*

R186 *G:* ***Del cual empieza el problema, porque a partir de este punto (Señala el cero del resultado 6-6=0) empieza a ascender el elevador e igual vuelve a este punto.***

R187 *D: Y vuelve a ese punto. Ok, entonces en este problema ese cero representaría tu inicio.*

R188 *G: Aja.*

Es importante señalar que el estudiante se enfrenta a dos ceros. De manera inicial ve al cero como su punto de partida, pero al momento de escribir la operación (6-6) nuevamente nos muestra una idea cercana a lo que nosotros consideramos como cero chino, pues dice:

R182 *G: Porque en el caso de este problema dice que primero ascendió seis pisos, ¿no? O sea subió seis pisos, sería el seis positivo (+6) y después dice que descendió otros seis que sería como si fuera negativo (-6)* ***como si hubiera disminuido, igual sería 6-6 y entonces el resultado sería cero, ¿no? Porque igual que en las demás operaciones tienen signo diferente y entonces se hace una resta. Igual se resta al número mayor el menor, pero en este caso son la misma cantidad, (6-6) y es cero y no se le pone ningún signo.***

Esta consideración del cero como el resultado de dos opuestos nos reafirmaría la noción de un cero chino en proceso de asimilación.

En el caso de Héctor, el problema le genera una reacción de sorpresa al pensar en un dato que no se presenta, es decir, el lugar en donde comienza el movimiento del ascensor. Esta característica del problema obliga a Héctor a recurrir a los conocimientos que ha desarrollado en el estudio del álgebra. Veamos lo que hizo:

L136 *D. La situación dice "Un ascensor sube 6 plantas y posteriormente baja 6 plantas, ¿Cómo ha variado la posición del ascensor respecto a la que tenía antes del primer movimiento?"*

L137 *H: ¿Cómo ha variado?*

L138 *D: Sí, cómo ha variado.*

L139 *H: Voy a hacer otra vez el dibujito (el estudiante dibuja nuevamente una recta numérica vertical que va de 0 a +6 y de 0 a -6). Me has dicho que el ascensor ha subido seis plantas.*

L140 *D: Aja.*

L141 *H:* ***Estaba aquí (señala inicialmente el número cero)… pero, ¡no me has dicho dónde empieza la posición en donde estaba!***

L142 *D: Bueno, el problema no lo dice. Te lo vuelvo a leer si quieres, "un ascensor sube 6 plantas y posteriormente baja 6 plantas, ¿cómo ha variado la posición del ascensor respecto a la que tenía antes del primer movimiento?"*

L143 *H: Pues sería primero decir donde estaba, sería equis más 6 (El estudiante escribe x+6) y luego baja seis plantas (escribe -6). Te quedarías en el mismo punto donde estabas.*

L144 *D: Estás escribiendo una equis, ¿Qué significaría esa equis?*

L145 H: El punto que no sabemos dónde estaba (el ascensor). Es como para mí un punto que no sé dónde está y quiero representarlo.

L146 *D: ¿Podría ser cualquier lugar?*

L147 *H:* ***Sí, podría ser cualquier lugar, por ejemplo podría estar aquí (señalando el cero) y luego bajarlo.***

En este caso, Héctor inicialmente se localiza en el cero, pero al pensar en el problema exclama "¡No me has dicho dónde está!". Esta reacción inesperada lo lleva a utilizar una incógnita para señalar un punto que no conoce pero que puede ser cualquiera en la recta numérica. Al asumirlo como cualquier lugar en la recta, también llega a considerar al cero como un punto de inicio, pero le confiere esta característica a cualquier lugar de donde pueda iniciar.

De manera general podríamos pensar que los problemas de dos variaciones opuestas reafirman el significado del cero como el punto de referencia (cero de Stevin), pero al enfrentarlo a la representación matemática, se puede dar la aparición del cero chino, como resultado de la compensación entre cantidades iguales con signo diferente.

5.7 Cuando cero grados es un equilibrio o un punto de referencia

La última pregunta de la entrevista recurre a un contexto continuo, pues se expresa un problema de un cambio, donde la temperatura termina en cero grados. Aunque esta situación ya se había mostrado en la pregunta seis de la entrevista, este último reactivo nos permite observar si el cero se sigue asumiendo como un punto de referencia (es decir como cero de Stevin) o si se le puede atribuir otro significado.

Cuando se hizo esta pregunta a Guadalupe nuevamente argumenta que el resultado obtenido es cero, pues al tener dos cantidades iguales con signo diferente es el resultado que se espera. En este momento nuevamente hace su aparición una noción del cero chino. Sin embargo, al pedirle que represente gráficamente la solución del problema, el estudiante recurre a la recta numérica y explica que el cero es el nivel desde donde se mide la temperatura.

Hasta este punto se corroboraría lo visto a lo largo de la entrevista, sin embargo al cuestionarlo sobre qué significaría que la temperatura fuera 0° Guadalupe dice:

R202 *D: Es cero. Nos decías que implicaba que fuera cero grados la temperatura. ¿Te acuerdas que nos decías?*

R203 *G: Bueno sí, en este caso igual el cero representaría el nivel o la intensidad. Si está sobre cero pues hay más calor. Si es bajo cero, es frío.*

R204 *D: Y ¿si está en cero? Nos dices que por arriba de cero sería más calor y por debajo de cero sería más frío, pero ¿si está en cero?*

R205 *G:* ***Pues el cero representaría como una temperatura neutra o sea, que no es ni calor ni frio, es decir, la mitad.***

Esta última afirmación representaría el cero chino, sin embargo, ante la situación o problema presentado, cero grados no se asume como un equilibrio.

Por último, en el caso de Héctor se presenta un choque entre las ideas expresadas a lo largo de la entrevista y esta última pregunta. En la pregunta 6 el estudiante asume al cero como punto de referencia y lo contextualiza diciendo que su significado depende del lugar donde nos encontremos. Para esta última pregunta Héctor nos dice:

D: Si esa temperatura, ese 0°C, ¿tendría el mismo significado que le habías dado cuando te pregunte qué significado tenía el cero para ti?

L167 *H: Ehh… mmm (el alumno se queda pensativo un momento) más o menos yo creo que no, porque el cero grados centígrados puede ser representado de diferentes maneras, es una escala centígrada que es la* *representativa de nosotros,* ***es un punto del que se puede representar valores por debajo de un ese punto o aumentar la temperatura.***

L168 *D: Entonces ese cero que tenemos, o que estás representando, ¿no significa que no tengas nada?, ¿qué significaría para ti ese cero?*

L169 *H: Por ejemplo este cero (señalando el cero de la operación) representa los grados centígrados, no es un cero porque no es lo mismo un 0°C a 0°K, es solo la manera en cómo se representa la temperatura.*

Aquí el alumno sigue utilizando el cero como punto de referencia, pero se da cuenta que no significa tener nada, sino que es tanto un punto de referencia como una cantidad que nos sirve para indicar la temperatura.

Capítulo VI.
Conclusiones de la tesis

Esta investigación fue desarrollada en dos vertientes: un estudio histórico que nos muestra la génesis y manejo del concepto cero en dos de las grandes culturas antiguas de la humanidad: la cultura China y la cultura Griega. De igual forma un acercamiento a la aparición del cero en la recta numérica, resultado de una nueva interpretación del número por parte de Simon Stevin. La segunda vertiente fue la indagación empírica de los significados que le asignan los estudiantes de secundaria al cero en diversas situaciones cotidianas y escolares.

Las dos vertientes seguidas están basadas en el desarrollo del método histórico crítico, pues esto nos permitió un viaje de ida y vuelta para contrastar lo descrito por los estudiantes con las ideas y conceptos manejados en diferentes momentos de la historia.

Para mostrar las conclusiones de este trabajo, se confrontarán los resultados de la investigación con los propósitos y objetivos planteados, los cuales tenían la empresa de dar respuesta a nuestras preguntas de investigación:

a) ¿Cuáles son las concepciones sobre el cero que manifiestan los alumnos de secundaria en situaciones cotidianas?

b) ¿Cómo las distintas representaciones gráficas y las diversas estructuras de los problemas consolidan o inhiben los significados del cero?

En el desarrollo de la parte teórica, fue necesario un acercamiento histórico para conocer la emergencia y aceptación del cero en la cultura China y su negación en la cultura Griega. Al revisar el texto “Imaginario Colectivo y Creación Matemática” (Lizcano, 1993) encontramos que el cero y la negatividad serán conceptos indisociables, los cuales permitirían a unos (chinos) operar con el cero y los negativos, y a otros (griegos) su total rechazo y nula concepción.

En la cultura China, el imaginario colectivo basado en la concepción dialéctica del mundo, permitirá operar con mucha facilidad en la resolución de situaciones cotidianas donde estén implicadas cantidades opuestas. Esta relación de oposiciones, representadas por los nombres zheng (positivo) y fu (negativo), darían como resultado un espacio wu (nada, cero), el cual en términos actuales describiría correctamente un cero como resultado de la compensación o equilibrio de dos cantidades con signo contrario. Aunque sin símbolo que representara el espacio wu, la matemática china permitiría reconocer en dicho espacio la infinidad de contradicciones que existen (día-noche, luz-oscuridad, vida-muerte), y por las cuales se mueve el mundo.

La importancia de la visión dialéctica en el imaginario cultural chino radicaría en que desde antes del 300 a.n.e ya se podían hacer cálculos que en occidente se llevarían a cabo hasta la aceptación de los negativos en el siglo XIX.

Para nuestra investigación, esta manejo del cero y la negatividad nos permitiría concebir al "cero chino" como el resultado de un equilibrio entre cantidades.

Con respecto a la matemática griega, encontramos que el principio de no contradicción determinaría y justificaría la forma de concebir el mundo, lo que llevaría a los grandes filósofos y pensadores de la antigua Grecia (Aristóteles, Platón, etc.) a despreciar y negar la existencia de la nada, pues desde la visión sensualista solo se puede apreciar y representar lo existente, pues la importancia de las "cosas" radica en su existencia, en lo visible de ellas. Esta idea se vería reforzada por la demostración por abstracción, la cual requiere "tener para abstraer".

Así, en la Grecia clásica, el imaginario cultural no consideraría la existencia de la nada y por ende, cosas menores que nada. Tal justificación nos permitiría, en este trabajo de investigación, concebir al cero como la misma apreciación sensualista de los griegos, es decir, la representación de la ausencia de objetos.

Con respecto a Simon Stevin, éste lograría romper con la dicotomía continuo-discreto, al considerar al número como una entidad aislada, donde ya no representa solo a los objetos, sino que puede representar magnitudes. Esta idea será trascendente porque al extender el dominio numérico lograría concebir que la unidad no sea análoga al punto geométrico, sino que esta característica le correspondería al cero., lo que eventualmente identificaría al punto-número en la recta de Descartes. El proceso de Stevin nos permitirá considerar al cero como ese punto de referencia en la recta, lo cual nosotros consideraremos como cero de Stevin.

A partir de la revisión histórica, hicimos un acercamiento a diversos estudios didácticos sobre el cero. Encontramos que, por un lado existe una relación directa en los sentidos de uso del cero asociado a los enteros negativos, lo que determina al cero nulo, cero implícito, cero total, cero aritmético, cero algebraico. (Gallardo y Hernández 1994, 2004, 2005, 2006, 2007). De igual forma Cataño (2013) determina al cero como número neutro, como un número contextual y como ausencia de cantidad.

Al indagar las explicaciones históricas y didácticas del cero, tuvimos elementos para contrastar lo expresado por los estudiantes en las entrevistas video grabadas. Al realizar el análisis de las dos entrevistas encontramos que existe una convivencia entre los significados del cero que históricamente fueron desarrollados.

Ante diversas situaciones cotidianas como los procesos de compra/venta o la variación de temperaturas, los alumnos muestran en sus acciones la existencia de los distintos significados atribuidos al cero. Así, cuando se pregunta sobre el significado del cero, los alumnos recurren a explicaciones donde se presenta la ausencia de objetos y como un punto de referencia para posicionar a los enteros positivos y los enteros negativos.

Estas explicaciones se ven reforzadas por sus representaciones, pues al afirmar la ausencia de objetos o cantidades, recurren a representaciones discretas donde las acciones giran en torno a regalar, gastar o perder objetos. De igual forma utilizan la representación continua de la recta numérica para explicar el cero asociado al punto de referencia.

Otro aspecto que resulta importante es que, aunque existen ciertas representaciones las cuales son propicias para asignarle un significado al cero, las explicaciones de los estudiantes denota el paso que hacen de uno a otro, (como en la representación (+14)+(-14)=0 los estudiantes representan al cero en la reta numérica acercándolo al cero de Stevin; el resultado de la misma operación es considerado como cero griego, pues en el contexto en que lo explican lo asumen como quedarse sin objetos; y por último, cuando explican la relación entre los números, dan un atisbo de lo que históricamente se definiría como cero chino, pues asumen que cantidades iguales con signo diferente dan cero).

De igual manera, ante operaciones con números enteros los alumnos sitúan la operación en contextos cotidianos donde se compran productos o se regalan objetos. Esta preferencia por el tipo de problemas refuerzan las concepciones que existen del cero (cero griego). Lo anterior también se manifiesta con problemas de temperatura o de ascensor que los llevan a la recta numérica y al cero de Stevin.

Es importante resaltar que los estudiantes recurren a contextos conocidos para darle sentido a las explicaciones del cero. Cuando se pregunta sobre el significado de 0°C, los estudiantes interpretan que este valor depende del lugar donde te ubiques, así para algunos 0° sería una temperatura fría si se encuentran en una zona templada, mientras que para aquellos que viven en zonas con temperaturas por debajo de 0°C, el cero grados implicaría una temperatura cálida.

Otro aspecto que se destaca es la interpretación que el estudiante puede hacer sobre algunas operaciones, lo que lo lleva a considerar de manera errónea al cero. Cuando se presenta el problema “Se amanece a 4°C y durante el día disminuye 4°C, ¿Cuál es la temperatura por la noche?”, se puede llegar a interpretaciones erróneas a partir del resultado, pues aunque se obtiene 0°C, un estudiante declara que sería como un equilibrio, lo cual no es ni frío ni caliente (Méndez, Gallardo y Bruno, 2014). Si bien se puede considerar el resultado como la compensación de dos cantidades iguales con signo contrario, el significado que se le atribuye no tiene sentido en la realidad.

De manera general se puede afirmar que los estudiantes manifiestan un arraigo en el uso del cero griego como representación de la ausencia de objetos y a su vez el significado del cero de Stevin, como punto de inicio y de referencia para situar las cantidades positivas y negativas. No obstante, en la mayoría de los casos los alumnos manifiestan un atisbo del cero chino, aunque es posible que sea solo por utilizar las reglas de operación con números enteros, lo cual limita su comprensión.

Es necesario que ante el proceso de enseñanza se clarifiquen los significados que se atribuyen al cero, pues siendo un elemento de relevancia en la aceptación y manejo de los números negativos, el no clarificar dichos significados podría generar interpretaciones y construcción erróneas de conceptos matemáticos.

Se da respuesta a la pregunta **¿Cuáles son las concepciones sobre el cero que manifiestan los alumnos de secundaria en situaciones cotidianas?**

Después del análisis histórico y didáctico, y al contrastarlo con las producciones de los alumnos, encontramos que los estudiantes manejan principalmente dos significados del cero:

a) El cero como ausencia de cantidad, es decir el cero griego.

b) El cero como el punto de inicio y el punto de referencia para situar a los enteros positivos y negativos, es decir, el cero de Stevin.

Estas dos concepciones del cero son ampliamente manejadas por los estudiantes en situaciones diversas. El caso del cero griego está relacionado con expresiones cotidianas como “te quedas sin dinero”, “el cero no vale nada” o “eres un cero a la izquierda”.

El cero chino solo se manifiesta cuando los estudiantes dan explicaciones de una compensación de números opuestos, pero se confunden porque, al ser el cero resultado de una operación lo asumen como ausencia de cantidad y no como el equilibrio.

Este manejo de significados atribuidos al cero se debe en particular a la extensión de los números naturales a los enteros y por el uso de modelos de enseñanza como la recta numérica. Otro aspecto que refuerza los significados del cero es el contexto de los problemas, pues los alumnos suelen utilizar situaciones de compra/venta, ganancia/pérdida, etc., donde se refuerza el cero griego, mientras que los problemas de ascensor o temperaturas reafirman el cero de Stevin.

En el caso de los estudiantes analizados, no proponen ni usan problemas en donde el cero sea un equilibrio de opuestos. Probablemente porque este tipo de problemas es poco usado en la enseñanza y rara vez se hace una reflexión sobre el significado que puede tener el cero en distintos contextos.

Con respecto a la pregunta **¿Cómo las distintas representaciones gráficas y las diversas estructuras de los problemas consolidan o inhiben los significados del cero?,** podemos afirmar lo siguiente:

- Las representaciones discretas favorecen el manejo del cero griego, principalmente porque se encuentran inmersas en contextos cotidianos de compra/venta y similares. Las representaciones de este tipo señalan la ausencia de objetos y se relaciona con los tipos de problemas utilizados en ambientes aritméticos.

- Las representaciones continuas como la recta numérica o el termómetro permiten a los estudiantes centrarse en el cero de Stevin, pues les permite ubicar cantidades positivas y negativas. Este tipo de representaciones se manifiestan principalmente en problemas de ascensor o de temperatura.

- En ambas representaciones se da el uso de los dos significados del cero (como griego y de Stevin), pues cuando realizan operaciones en la recta numérica no solo consideran al cero como el punto de referencia, sino que a su vez le atribuyen el sentido de representar el resultado, es decir, la ausencia de objetos.

- Los estudiantes no hacen representaciones que lleven a la descripción del cero chino. En muchos casos la representación de la recta numérica permite que el estudiante explique que cuando dos cantidades son iguales pero con signo diferente, su resultado es cero. Algunas representaciones discretas también cumplen la función anterior.

- Con respecto a las estructuras de los problemas, la estructura de un cambio (estado inicial + variación = estado final) favorece el desarrollo del cero griego, pues el estado final representa la ausencia de objetos. Aun cuando a los estudiantes se les presenten estructuras de dos cambios (variación 1 + variación 2 = variación total), los alumnos aplican la “regla de los signos”, transformando la estructura de dos cambios a una de un cambio. Este procedimiento inhibe completamente el significado del cero chino, pues el resultado no se asume como equilibrio o compensación de cantidades, sino como la ausencia de cantidad. Solo se logra una noción del cero chino cuando se explica que el resultado es por la interacción de cantidades iguales con signo opuesto.

- El punto anterior podría tener como premisa que este tipo de estructuras no son comúnmente manejadas en la dieta de problemas de los estudiantes de nivel secundaria, lo que dificulta la aceptación de un cero como equilibrio y fomenta el cero griego.

Como podemos percatarnos, el manejo y significación del cero requieren un tratamiento particular dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje. Actualmente la escuela y los programas de estudio no contemplan el tratamiento y desarrollo del cero y sus significados, aunque el cero se manifieste en diversos temas de la currícula básica como lo son las operaciones con número signados o el tratamiento de actividades en el plano cartesiano.

El tratamiento del cero no debe ser considerado trivial, pues este concepto matemático resulta ser complejo y es un eslabón que permite la comprensión de otros temas. Es indispensable que ante la resolución de problemas se de paso al desarrollo y comprensión de conceptos que permitan una comprensión mayor del actuar de los estudiantes en los problemas de la vida cotidiana, pues esto consolidará la formación de los alumnos.

6.1 Logros de la investigación

A partir del análisis de los resultados obtenidos en las entrevistas y la comparación con los datos históricos recolectados encontramos los siguientes logros:

Al resolver problemas matemáticos donde se vea involucrado el cero, los estudiantes tienden a hacer uso del cero griego y del cero de Stevin, pues son los significados con mayor predominio en la enseñanza. Este predominio es resultado de las concepciones que los estudiantes desarrollan o se apropian en el proceso de enseñanza al trabajar con la aritmética.

De igual forma, se puede corroborar que las respuestas de los alumnos con respecto al cero nos muestran la coexistencia de diversos significados atribuidos a este concepto, sin embargo, las expresiones que muestran los estudiantes reafirman el uso del cero como representación de la ausencia de objetos y a su vez como un punto de referencia en la recta numérica.

Con respecto a lo anterior, esta investigación nos permite afirmar que es necesario dar paso a una diversidad de problemas matemáticos donde se haga uso de estructuras de dos cambios y no solo de un cambio , pues esto permitiría que los estudiantes den paso a la comprensión del cero chino, el cual está inmerso en el lenguaje algebraico y no en el aritmético.

De la misma manera, al hacer la revisión histórica encontramos que la emergencia del cero le ha conferido distintas concepciones a este número, las cuales se manifiestan en la resolución de problemas por parte de los estudiantes. Estas concepciones traspasan el ámbito educativo pues diversas expresiones coloquiales muestran la forma en cómo se comprende al cero. Así, cuando escuchamos “eres un cero a la izquierda”, o “vamos a empezar de cero”, las personas están usando concepciones del cero provenientes de las matemáticas y que tienen sustento en cómo fueron concebidos o entendidos en el pasado.

Por último, podemos afirmar la importancia de la indagación histórica y empírica de los conceptos matemáticos, pues el recurrir a la génesis o emergencia de los objetos matemáticos en distintos lapsos y culturas, nos permitirá comprender con mayor profundidad las respuestas y argumentos que presentan los estudiantes. Tal como lo muestra Lizcano (1993), la cultura China y la cultura Griega daban sentido de sus concepciones en la vida cotidiana, donde el imaginario colectivo los enriquece para tratar de comprender el mundo.

6.2 Investigaciones futuras

La continuación de la presente investigación puede adentrarse a identificar los diversos significados del cero en los distintos niveles de la educación básica en México y España por poseer similitudes culturales y lingüísticas. De igual manera se puede indagar la relación existente entre los significados que atribuyen los alumnos al cero (y otros que salgan en la investigación) y aquellos que poseen los profesores y futuros profesores de educación básica.

Partiendo de lo mostrado por Lizcano (1993), donde se hace referencia al razonamiento lógico en la Cultura China, se podría indagar el impacto de la enseñanza dialéctica en la construcción del conocimiento matemático lo que nos llevaría a plantear el uso de modelos de enseñanza en el nivel primaria y secundaria, basado en las reglas zheng/fu/wu y el método Fang Cheng para conceptualizar el cero como la compensación de opuestos en distintas situaciones cotidianas. Todo lo anterior con miras a consolidar los distintos significados que se le pueden atribuir a este objeto matemático denominado cero y que se hace presente en muchas ramas de la ciencia y en entorno cotidianos.

Bibliografía

- Arnal, J., Del Rincón, D., & Antonio, A. (1992). *Investigación educativa: fundamentos y metodologías*.
- Cataño, A. (2013). Estudio didáctico del cero. Instituto Politécnico Nacional. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. México, D.F. (Tesis de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa).
- Cid, E., & Bolea, P. (2007). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. II Congreso Internacional sobre Teoría Antropológica de lo Didáctico. *UZES. Francia*, 1-16.
- Chiu, M. M. (2001). Using metaphors to understand and solve arithmetic problems: Novices and experts working with negative numbers. Mathematical thinking and learning, 3(2-3), 93-124.
- Cohen, L., Manion, L., & Rodríguez, M. A. C. (1990). Métodos de investigación educativa. La Muralla.
- Filloy, E., & Rojano, T. (1984). From an arithmetical to an algebraic thought.(A clinical study with 12-13 years old). In Proceedings of the 6 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 51-56).
- Gallardo, A. (1994). El estatus de los números negativos en la resolución de ecuaciones algebraicas. *Unpublished Ph D. Dissertation. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México*.
- Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *49*(2), 171-192.
- Gallardo, A., & Basurto, E. (2009). Formas semánticas equivalentes en problemas del pasado y el presente. Educación matemática,21(3), 67-94.
- Gallardo, A., & Hernández, A. (2005). The duality of zero in the transition from arithmetic to algebra. *International Group for the Psychology of M athematics Education*, 17.
- Gallardo, A., Santos, N., & Hernández, J. A. (2010). La aparición simultánea de los sentidos de uso de los números negativos y el cero en alumnos de secundaria: un estudio de caso.
- Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didáctique des mathématiques*, *2*, 3.

- Hernández, A., & Gallardo, A. (2006). La extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros vía el modelo concreto de bloques. *Educación matemática*, *18*(1), 73-98.
- Hernández, A., & Gallardo, A. (2009). Sentidos de uso del cero y la negatividad en la recta numérica.
- Hernández, A., & Gallardo, A. (2008). La numerología y el álgebra chinas en la enseñanza actual de las ecuaciones lineales. In *Investigación en educación matemática: comunicaciones de los grupos de investigación del XI Simposio de la SEIEM, celebrado en La Laguna del 4 al 7 de septiembre de 2007* (pp. 181-188). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Lizcano Fernández, E. (1993). Imaginario colectivo y creación matemática: la construcción social del número, el espacio y lo imposible en China y en Grecia. Gedisa.
- Méndez, D.; Gallardo, A. ; Bruno A. (2014) Significado que atribuyen al cero futuros docentes de primaria, pp. 149-181.
- Meneses, E. (1988). Tendencias educativas oficiales en México 1934-1964. Centro de Estudios Educativos-UIA, México.
- Peled, I. (1991). Levels of knowledge about signed numbers: effects of age and ability. In *PME CONFERENCE* (Vol. 3, pp. 145-152). THE PROGRAM COMMITTEE OF THE 18TH PME CONFERENCE.
- Piaget, J. (1960). Introducción a la epistemología genética. I. El pensamiento matemático. Biblioteca de Psicología Evolutiva.
- Santos del Real, A. (2000). La Educación Secundaria: Perspectivas de su demanda. Aguascalientes: Universidad Autónoma de Aguascalientes. Tesis del Doctorado Interinstitucional en Educación.
- Santos del Real, A., Aguilar, R., Miguel, Á., & Vázquez, D. F. (2009). El aprendizaje en tercero de secundaria en México: Informe sobre los resultados del EXCALE 09, aplicación 2008 Español, Matemáticas, Biología y Formación cívica y ética. México, DF: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.
- SEP (2011) Programa de Estudios 2011. Guía para el maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas
- Taylor, S. J., & Bogdan, R. (1987). Introducción a los métodos cualitativos de investigación.
- Waldegg, G. (1996). La contribución de Simon Stevin a la construcción del concepto de número. Educación Matemática, 8(2), 5-17.
- Zorrilla, M. (2004). La educación secundaria en México: al filo de su reforma. REICE Revista Electrónica Iberoamericana sobre Calidad, Eficiencia y Cambio en Educación, 12(1).

- Zorrilla, F.M., & Velasco, J. M. (2003). Diez años después del Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica en México: Retos, tensiones y perspectivas. Revista Electrónica de Investigación Educativa, 4(2).

APÉNDICE 1 CUADRO DE ANALISIS DE ENTREVISTAS.

Uno de los aspectos relevantes en la investigación cualitativa es la recolección de datos sobre el tema estudiado. Para este trabajo, se recurrió a las entrevistas videograbadas con "el propósito específico de obtener información relevante para la investigación…" (Cohen y Manión, 1990).

En el siguiente apartado se muestra la transcripción de las entrevistas videograbadas realizadas a los participantes de este estudio. La transcripción se hizo sin hacer modificación alguna a lo expresado por los estudiantes, pues era necesario conocer la forma en como los estudiantes justifican sus interpretaciones y usos del cero.

Análisis de la entrevista de Héctor

Pregunta	Dialogo	Observaciones
¿Qué significado tiene el número cero?	D: La primera pregunta tiene que ver con la prueba que se les aplico. El ejercicio que hicieron la última vez que vine. A: Si **PREGUNTAS 1, 2 y 3** D: Y, me surge una duda, quisiera conocer tu respuesta. **L1** D: Qué contestarías tú si te preguntaran para ti ¿qué significado tiene el número cero? ¿Qué significa para ti el número cero? **L2** A: Pues para mí el número cero es un número que esta entremedio de dos balanzas, significa como la que te queda	Le confiere al cero la posibilidad de ser un

Escribe un ejemplo que te sirva para explicar lo que significa el número cero.	en blanco. L3 D: Ah ok, podrías escribir eso por favor. (El estudiante escribe su respuesta en la hoja). Podrías volver a repetirlo. ¿Qué significa para ti el número cero? L4 A: Es cuando por ejemplo no tienes nada, significa algo que no puedes ver ni tocar. L5 D: Ok, algo que no puedes ver ni tocar, es decir no tienes, tienes nada. Ok, pero decía inicialmente algo sobre una balanza. ¿A qué te referías con ello? L6 A: Si una balanza, por ejemplo está entre los números naturales y racionales. El número de los racionales, los negativos y los positivos, el cero es la balanza que los une a los dos, que está entre medio. L7 D: Ah ok. A partir de lo que tú me acabas de decir de este cero que es como una balanza, bueno el equilibrio entre la balanza o que representa que no tienes algo, que no hay un objeto, podrías en la parte de abajo escribir un ejemplo (puede ser un ejemplo de la vida cotidiana, un ejemplo que tu conozcas), en donde nos puedas mostrar de ese cero que nos estás hablando. L8 A: Por ejemplo tú tienes, a ver por ejemplo 5 euros + te gastas uno luego te gastas 4 y al final te quedas si nada, te quedas con cero.	punto que divide a la balanza. (Cero de Stevin) Aunque no aclara la relación entre los naturales y los racionales, el estudiante muestra al cero como el punto que une a los positivos y a los negativos.

Cinvestav

¿Qué representación gráfica utilizarías para explicar lo que significa el cero?	L9 D: ok, y ahí, ¿Qué tipo de cero es el que estamos viendo? L10 A: El cero está representando al dinero L11 D: El dinero, en este momento el cero está representando dinero. Y para ti ¿Qué significaría ese cero en este momento? L12 A: Que te quedaste sin dinero, que no tienes nada. L13 D: Ok, muy bien. Y podrías tú, a partir de lo que nos acabas de decir, mostrarnos de manera gráfica, (grafica, dícese un dibujo, una representación) en la cual pudiésemos ver ese cero del que tú estás hablando. L14 A: ¿Una gráfica? L15 D: Si, o un dibujo, no sé lo que se te haga fácil. Que te ayude a ilustrar ese cero. L16 A: Haré una gráfica, aquí está el cero como punto intermedio. No podrías tocar el cero porque no tienes nada. De todas maneras otros números si podrías…(Dibuja la gráfica y escribe algunos números) Por ejemplo en la gráfica podríamos hacer así un ejemplo, hay una disminución, sí, pero es imposible coger algún material del cero, no se podría tocar.(Héctor hace una gráfica de barras, donde dice que el cero “no se puede tocar”) L17 D: A ver,¿ podrías mostrarnos el dibujo? (Nos muestre el dibujo).Así como lo tienes, podrías explicarnos donde esta ese	(Cero griego) En un contexto de compra/venta o de tener /perder, el estudiante asume el cero como la representación de nada El estudiante dibuja un histograma, donde señala que “es imposible coger algún material del cero”. Esta imagen reafirma al cero como punto de referencia (cero de Stevin), y es posible que realizará este dibujo por la orden “mostrarlo de manera gráfica”

	cero que tú nos dices L18 A: El cero está aquí (encierra en un círculo el punto de intersección de las rectas que componen la gráfica. L19 D: Aja, y ¿Qué significa para ti ese cero? L20 A: El cero es como casi, es como cuando tienes cero significa que no tienes elementos… (Señala el eje de las abscisas. Pareciera que da a entender que cuando no tienes elementos no te puedes desplazar en la recta) L21 D: Ok, muy bien. Tendrías alguna otra representación o manera de mostrarnos el cero del que tú nos estabas hablando. (El estudiante se pone a pensar un poco) L22 A: Una gráfica, como te dije antes como la balanza. L23 D: Podrías mostrarnos por favor, (El estudiante empieza a dibujar una recta numérica señalando positivos y negativos). Ok, me podrías señalar donde se encuentra el cero.(El alumnos pone una marca debajo del cero en la recta numérica).Ok, entonces ese cero, nos estabas comentando que es el que se encuentra como balanza, ¿verdad? L24 A: Si, porque, o no tienes nada o tienes menos que nada, que sería deber algo. L25 D: Ok, tener menos que nada ¿significa…?	Nuevamente, aunque el cero está en un contexto continuo (el plano cartesiano), el alumno solo puede relacionarlo con la ausencia de elementos (cero griego): “cuando tienes cero significa que no tienes elementos”.

	L26 A: Que debes algo L27 D: Que debe uno algo L28 A: eso se representa más o menos cuando uno dinero así, por ejemplo cuando no tienes nada y pides un préstamo, a lo mejor te ofrece, pero estarías en números negativos, ya no te ofrecen más. L29 D: ok, ok. Podrías pasar a otra hoja por favor. (El estudiante cambia de hoja)	Recurre a una representación continua (la recta numérica), sin embargo el estudiante ve al cero como la representación de "no tener" o bien "tener menos que nada" lo que en un contexto de deudas sería deber algo. Esta idea histórica de cantidades menores que nada (Glaeser, 1981) serían aceptadas con la aceptación del cero.
Escribe un ejemplo de la vida cotidiana que se resuelva con la siguiente operación.	**PREGUNTAS 4 y 5** Bueno, ahora te voy a pedir que escribas la siguiente operación. Dice, es siete más, abrimos un paréntesis, menos siete. Se cierra el paréntesis, igual a cero. 7+ (-7)=0. Bueno, ahora con esa expresión que acabas de escribir, te pediría que escribieras un problema o una situación, un ejemplo de la vida cotidiana, en la cual pudieras utilizar la operación que acabas de escribir. Que te imagines una situación en la cual tú puedas utilizar esa operación. L30 A: ¿Esta? (señalando la operación) L31 D: Si, si. Puedes primero escribirla si quieres y luego nos la puedes compartir L32 A: Es que estoy pensando en cual (Héctor hace una pausa	

Represéntalo mediante una gráfica o un dibujo	para pensar sobre el problema que nos quiere presentar) (El estudiante escribe "Si tenemos 7 pelotas y regalamos las 7 con ¿Cuántas nos hemos quedado?) L33 D: Ok, ¿Podrías leernos tu problema? L34 A: "Si tenemos 7 pelotas y regalamos las 7 con ¿Cuántas nos hemos quedado? L35 D: Muy bien, en el problema ¿dónde estarían representados cada uno de los números del problema? L36 A: El 7 es el número de pelotas que tenemos y si regalamos las 7 estaría representado por esa resta del 7 a las pelotas que se tenían (se refiere al -7) L37 D: Ah, ok. Y el que te quedaras sin las pelotas representaría L38 A: El cero L39 D: El cero, ok. ¿Podrías, utilizando tu ejercicio, representar esa situación mediante algún dibujo o grafica donde se ilustre la operación que acabas de hacer? L40 A: Claro (Héctor dibujo 7 círculos a manera de pelotas, indica con una flecha la siguiente acción la cual implica dar las pelotas y nuevamente pone una flecha indicando la última acción que es quedarse sin pelotas) L41 D: Ok, ¿podrías explicarnos tu dibujo?	El estudiante recurre a un contexto discreto, donde el resultado lo lleva a considerar quedarse sin elementos, es decir, sin pelotas (cero griego).

	L42 A: Aquí tengo las pelotas (señalando el primer dibujo), luego las estamos regalando (señalando el dibujo de una mano en acción de dar una pelota) y al final cuando terminamos de regalarlas todas nos quedamos en cero L43 D: Me interesa ese último dibujo que hiciste. ¿Allí estas representando? L44 A: El espacio sin pelotas L45 D: ¿El espacio? L46 A: Si, es como aquí si tenemos tres bolígrafos (señalando a la mesa donde pone tres bolígrafos)y quitamos los tres, se queda este espacio (señala la mesa sin los bolígrafos, donde hay “nada”) L47 D: Implicaría entonces para ti que fueron retiradas las cosas L48 A: si L49 D: Ok, ¿habría alguna otra manera de representar esa misma situación con algún otro dibujo o grafica? ¿Algo te sirviera para representar esa misma situación? L50 A: ¿Esta bien la de las siete pelotas? L51 D: Si, o si estás pensando en alguna otra situación ¿podrías escribirlo?	Dado el contexto anterior, el alumno recurre a una representación discreta. El caso del problema que el alumno presenta obliga al estudiante a “regalar” los objetos, es decir, tiene la necesidad de obtener un resultado, en este caso cero (cero griego)

	L52 A: Pues con dinero, es como si tengo dinero L53 D: ¿podrías mostrarnos? L54 A: Tengo 5€ y una moneda de 2€ (dibuja un billete y una moneda de esa denominación), voy (marca una flecha hacia la derecha) y me compro una camisa que cuesta 7€ (dibuja la camisa con el valor de 7€) y al final me quedo sin el dinero (nuevamente marca una flecha hacia la derecha) L55 D: ¿Te quedas sin el dinero? ¿Cómo podrías representar tú que te quedas sin el dinero? L56 A: Directamente más o menos así (y hace el dibujo de su mano con la cartera vacía), sería mi mano y sería una cartera vacía L57 D: Ok, pensando en una expresión matemática, ¿habría algún símbolo que te serviría a ti para representar que te quedaste sin dinero o que ya no tienes pelotas? L58 A: ¿Un símbolo? L59 D: Si, si L60 A: Por ejemplo si tengo siete (escribe la operación 7-7=0) y le quitamos siete nos quedaría cero. L61 D: Ese último símbolo nos representaría ¿Qué? L62 A: que tienes nada	Un contexto discreto que lleva hacia un "cero griego" (representación de nada)

¿Cómo explicarías a un niño lo que significa que la temperatura es 0°? ¿Cómo lo representarías gráficamente?	**PREGUNTA 6** L63 D: que tienes nada, ok. Pasamos a otra hoja. Bueno, la siguiente pregunta tiene que ver con algo que se escucha cotidianamente, Pensemos que has escuchado los noticieros y han hablado de la temperatura del Teide. Entonces tu escuchas por ejemplo que tal día la temperatura del Teide por la mañana está a 0°C Para ti, ¿Qué significa o como explicarías que la temperatura está a 0°C? L64 A: En ese caso al estar en cero grados centígrados (Dibuja una recta numérica donde solo se marca el cero y el positivo uno y negativo uno) para mí sería una media temperatura, para mí sería que había más frio que calor. L65 D: ¿Significaría que para ti hay más qué? L66 A: El cero lo representamos como una medida de temperatura, cuanto más arribas es que hay mayor temperaturas y cuanto más bajemos es que hay menor temperatura. Para mí el cero significaría que es un punto frio L67 D: ¿Un punto frio?, en donde me estabas explicando que arriba de ese número hace más calor y debajo de ese número hace más frio L68 A: Para acá aumenta la temperatura (marcando una flecha hacia arriba) y para acá (marcando una flecha del cero	Se considera al cero como un punto desde donde sabemos dónde hay frio y donde calor

	hacia abajo), la temperatura disminuye. Bueno, solo si presentamos de esa manera en grados centígrados. L69 D: Ah ok, ¿tendrías alguna manera gráfica de representarnos esa idea que tienes sobre el cero grados de temperatura? Además de la que acabas de hacer L70 A: mmm vale. (El alumno recurre a una gráfica de barras donde en el eje de las abscisas escribe los datos cualitativos (nombres de diversos lugares), y en el eje ordenado escribe la temperaturas positivas y negativas, sin embargo el eje ordenado y el eje de las abscisas no se cruza en el punto cero sino que se encuentra por debajo de los -20°C) Por ejemplo aquí vamos a comparar las islas Canarias, el monte Everest y también Oceanía, Los tres son muy distintos en temperatura. Aquí tendríamos a 0°C (es la primera temperatura que marca en la intersección entre el eje "x" y el eje "y"), mejor vamos a quitar el 0° de aquí (lo raya y lo pone más arriba sobre el eje ordenado) vamos a colocarlo aquí, y después 10°, luego 20°, 30°, 40° y aquí (por debajo del cero marcado) estaría -10°, -20°, -30 C. Las Islas Canarias estarían entre 20 y 30°C. El Everest estaría con temperaturas por debajo de cero (a Oceanía la coloca en 0°C por desconocimiento de la temperatura en ese lugar). En la gráfica el cero sería el punto medio pues en esta grafica hay representaciones que van por debajo de cero (señala los valores de 0° hacia abajo) L71 D: Entonces estamos pensando en…	(Cero de Stevin) El estudiante recurre a una representación continua, en este caso una gráfica de barras donde compara la temperatura de distintos lugares. El significado atribuido al cero esta dado como punto de referencia para posicionar la temperaturas por arriba y por debajo de cero. Pareciera que el cero solo hace sentido cuando se requiere considerar enteros negativos.

	L72 A: Para nosotros el cero sería un punto de frio porque no estamos acostumbrados a esa temperatura L73 D: Sería un punto de frio. L74 A: si, porque nosotros tenemos una temperatura determinada. Cuando baja la temperatura sentimos frio L75 D: Ah, perfecto, entonces en ese punto de frio nosotros podemos pensar que hay temperaturas que están por debajo de ese punto y que hace más frio, y que debe haber lugares con temperaturas más bajas y que por arriba de ese punto de frio hay lugares donde la temperatura es más alta L76 A: Si L77 D: Ah, ok L78 A: Pero para otros lugares cero grados seria la temperatura donde hace más o menos calor para ellos, pues teniendo temperaturas tan bajas, al tener un poquito más de temperatura sería como tener menos frio, más fresquito. L79 D: Ah ok L80 A: Para nosotros tener 10°C sería tener baja temperatura, pero para ellos sería un lugar cálido. L81 D: Entonces depende del lugar donde nos encontremos L82 A: si	El cero como un “punto frio”.

	L83 D: es decir, si estoy acostumbrado a un lugar en donde tengo -20°C regularmente, el tener 0° seria... L84 A: tener calor L85 D: Tener calor L86 A: No sería como cada una de estas temperaturas (señalando las escritas en la gráfica), sino que será como cada uno la piensa (se refiera a como se percibe)	El cero como un punto de referencia (cero de Stevin), pero flexible en cuanto al contexto en el que se desarrolla.
Un ascensor está en la planta 3 y bajó hasta la planta 5 del sótano. ¿Cuántas plantas bajó? Escribe una operación y representa la situación gráficamente.	**PREGUNTA 7** L87 D: Ahora tenemos otra situación, te la voy a leer y para esta situación necesitamos representar una operación y una representación gráfica, la que más te guste. Dice la situación: “un ascensor está en la planta 3 y bajo hasta la planta 5 del sótano, ¿Cuántas plantas bajó? (El estudiante dibuja una recta numérica vertical, empieza dibujando el punto cero (“el cual es la entrada del edificio”) luego marca los números positivos hasta +3 y después con los números negativos hasta -5) L88 A: Aquí seria el punto cero, que sería el punto de entrada. Cuando va subiendo llega hasta el punto tres, y al estar por debajo del sótano serían los negativos. ¿Bajó hasta el punto 4? L89 D: Bajó hasta la planta cinco	Cero de Stevin

	L90 A: Representado gráficamente más o menos seria así. Aquí tendríamos más o menos el ascensor (y dibuja un ascensor en el punto +3) y bajaría hasta aquí (dibuja una flecha que va de +3 hasta -5) L91 D: Hasta aquí. Ok L92 A: Entonces aquí seria, por ejemplo un piso, dos pisos, tres pisos, cuatro pisos… (realiza un conteo de los pisos que desciende el ascensor)… tendría que bajar 8 pisos, la respuesta sería -8 pisos L93 D: Ok, entonces me estás diciendo que el ascensor ¿Cuántos pisos bajo? L94 A: ocho L95 D: ¿ocho?, y los estas representando con un signo negativo, ¿Qué significa ese signo negativo? L96 A: Pues que está en un sitio y que cada vez que va bajando se le va restando. Sería como irle restando uno a uno. L97 D: Ok, ¿entonces es la suma de todas las restas que hiciste? Perfecto, ¿podrías escribir una operación matemática que nos dé como resultado el que obtuviste? Tú dices que bajo ocho pisos, es -8 pisos lo que escribiste, entonces, ¿podrías escribir la operación que represente este evento? (El alumno se queda en silencio pensando un momento)	El número negativo como sustraendo

	L98 A: Pues a ver… L99 D: Es decir, ¿Cómo escribiríamos una operación que nos dé como resultado que el ascensor bajos hasta el piso 5 del sótano, es decir, bajo 8 pisos? L100 A: ¿Qué nos de -5? L101 D: Bueno, podría ser, es decir, si quieres te vuelvo a leer el problema para que busques la manera de escribir una operación. Dice: un ascensor está en la planta 3 y bajo hasta la planta 5 del sótano, ¿Cuántas plantas bajó? L102 A: Puedo tener 3 y le quito 8 (escribe 3-8=-5) L103 D: Muy bien, ¿Podrías explicarnos lo que escribiste? L104 A: El tres sería el piso donde estamos ahora mismo, las cuales serían 3 plantas por arriba del suelo (marca el 0 de la recta numérica) y luego baja ocho plantas (hace un movimiento con las manos señalando en el papel como desciende planta por planta). Al bajar ocho plantas te quedarías en -5 o la planta 5 del sótano L105 D: la planta cinco del sótano. Entonces ese -5 nos está diciendo que se encuentre en un lugar ¿por debajo de…? L106 A: El suelo (señala la línea que dibujo en el cero) L107 D: Del suelo	El estudiante recurre a $e_i+v=e_f$, sin embargo

	L108 A: Del punto cero L109 D: ¿Del punto que? L110 A: Del punto cero, estaría por debajo del punto cero L111 D: Ok, entonces ese cero para ti está significando que está en el suelo, en la planta baja, bueno por donde entramos L112 A: Si L113 D: y que de allí hacia abajo está el sótano (al alumno asiente con la cabeza) y que de allí hacia arriba están los demás pisos. L114 A: si L115 D: Muy bien, entonces cuando tu escribes en tu operación ese -5 ¿está indicando que? L116 A: se encuentra en el piso 5 del sótano L117 D: en el piso 5 del sótano.	lo que se plantea es e_f-e_i=v. Cero de Stevin como un punto de referencia.
Si tienes 14 euros en tu casa y debes 14 euros a un amigo, ¿Cuál es tu situación económica?	**PREGUNTA 8** D: Muy bien, pasamos a otra hoja. Las siguientes situaciones son muy similares a la anterior. Vamos a escribir una operación y haremos un dibujo o representación gráfica o dibujo. La situación dice: “si tienes 14€ en casa y debes 14€ a	

	un amigo, ¿Cuál es tu situación económica? L118 A: Pues mi situación económica depende. Mi situación económica es que tengo 14 euros (escribe 14), y al deber 14 euros, le debes 14 (escribe -14), pues al final tu situación económica sería cero (la operación queda 14-14=0) L119 D: ok, ¿Qué significaría para ti que el resultado te de cero? L120 A: pues que no tienes dinero ni debes dinero L121 D: que no tienes dinero L122 A: y que tampoco debes dinero L123 D: Ok, Recordando lo que habías dicho inicialmente, ¿te acuerdas que habías dicho que era el cero? L124 A: Si, un número que no representa nada. L125 D: que no representa nada. ¿Este cero que tienes allí dibujado tendría que ver con lo que tú nos habías explicado inicialmente? L126 A: si, porque antes tenías dinero, una posesión material, ahora no tienes nada. L127 D: Ah ok, tenías una posesión material L128 A: si, una posesión, cualquier cosa. Tenías algo y lo	El cero como ausencia de cantidad (cero griego) Un acercamiento al cero de compensación, al equilibrio entre cantidades. Por la forma en cómo se expresa la

	perdiste L129 D: Tenia algo y lo perdí. Muy bien, ¿podrías representarlo con algún dibujo o alguna grafica esa situación? L130 A: Oh claro, (El estudiante dibuja un billete de 10€ y dos monedas de 2€, luego escribe el signo "-", seguido de la misma representación antes descrita, un billete y dos monedas. El resultado es cero) Tenias catorce euros, pero debías catorce euros. Al deber el dinero que tú tienes, se lo darías y tu situación se quedaría en cero, no tendrías. L131 D: No tendrías, es decir, primero tienes los 14 y luego se los quitas y al final te quedas con L132 A: Con cero L133 D: con cero L134 A:Por ejemplo si no tuvieras 14 euros, tendrías por ejemplo 12 y antes con la deuda te quedarías con una cifra -2 porque aun sigues debiendo dinero L135 D: Seguirías debiendo dinero. Muy bien, vamos a la siguiente pregunta	operación, llega nuevamente a un cero griego (quedarse sin dinero) Recurre a representaciones discretas.
Un ascensor primero sube 6 plantas y	**PREGUNTA 9** L136 D. La situación dice "un ascensor sube 6 plantas y posteriormente baja 6 plantas, ¿Cómo ha variado la posición	

<table>
<tr>
<td>posteriormente baja 6 plantas, ¿Cómo ha variado la posición del ascensor respecto a la que tenía antes del primer movimiento?</td>
<td>del ascensor respecto a la que tenía antes del primer movimiento?”

L137 A: ¿Cómo ha variado?

L138 D: si, como ha variado

L139 A: Voy a hacer otra vez el dibujito (el estudiante dibuja nuevamente una recta numérica vertical que va de 0 a +6 y de 0 a -6). Me has dicho que el ascensor ha subido seis plantas

L140 D: aja

L141 A: Estaba aquí (señala inicialmente el número cero)… pero, ¡no me has dicho donde esta!, la posición en donde está.

L142 D: Bueno, el problema no lo dice. Te lo vuelvo a leer si quieres, “un ascensor sube 6 plantas y posteriormente baja 6 plantas, ¿Cómo ha variado la posición del ascensor respecto a la que tenía antes del primer movimiento?”

L143 A: Pues sería primero decir donde estaba, seria equis más 6 (El estudiante escribe x+6) y luego baja seis plantas (escribe -6). Te quedarías en el mismo punto donde estabas.

L144 D: Ok, estas escribiendo una equis, ¿Qué significaría esa equis?

L145 A: El punto que no sabemos dónde estaba (el ascensor). Es como para mí un punto que no sé dónde está y quiero</td>
<td>Uso de representación continúa. (Recta numérica)

Ante la falta de un elemento, el estudiante recurre al uso de la incógnita. (Pone en juego el álgebra)</td>
</tr>
</table>

	representarlo L146 D: ok, ¿podría ser cualquier lugar? L147 A: Si, podría ser cualquier lugar, por ejemplo podría estar aquí (señalando el cero) y luego bajarlo L148 D: ¿Podrías utilizar tu dibujo para representar como se da ese movimiento? Vamos a suponer que tú escoges algún lugar de donde… L149 A: Por ejemplo, si estaba en -1 (escribe -1), la equis seria el -1, después sube 6 (escribe +6), estaría en +5 y luego al bajar 6 te quedarías otra vez en el -1. Volverías al punto de inicio L150 D: Ok, ¿Por qué volvería al punto de inicio? O ¿Cómo sabes tú que regresa al punto de inicio? L151 A: Porque si sube seis pisos y después baja seis pisos vuelves al punto de inicio. L152 D: ¿Qué implicaría que primero subieras seis y luego bajaras seis? L153 A: Al subir y bajar el mismo número de pisos, se quedaría en el mismo punto L154 D: En el mismo punto. Vemos allí en tu dibujo que tienes al número cero, ¿Qué significa en el dibujo ese número cero?	Se da una breve noción del cero como equilibrio de opuestos (cero chino)

	L155 A: el número cero sería una planta baja. L156 D: la planta baja, y si pensáramos por ejemplo que nosotros nos encontramos en la planta baja L157 A: ¿Aquí en el cero? L158 D: si, y que el ascensor hace el mismo movimiento, es decir que sube seis y que luego los baja, ¿podrías representarlo en tu dibujo? L159 A: Estamos en la planta cero (escribe 0), subiría 6 seis pisos y te quedarías en el piso 6. Luego bajaría seis pisos (escribe -6), entonces te quedarías en el punto cero (escribe =0) L160 D: En el punto cero, ok. Entonces estamos pensando que si sube la misma cantidad de pisos y los baja, se quedara en el mismo lugar L161 A: Si, sería el punto de inicio L162 D: El punto de inicio. Ok, y en la primera expresión que escribiste decías que p odia iniciar en cualquier lugar. No sabemos dónde, pero regresaríamos al mismo lugar. Muy bien, vamos a la siguiente parte	El cero con un significado doble: por un lado se tiene una idea de equilibrio cuando el ascensor sube y baja la misma cantidad de pisos (+6) + (-6)=0, y de igual forma el cero significando un punto de referencia (Cero de Stevin).
Si la temperatura por la	**PREGUNTA 10** D: Esta es la última situación que dice: “Si la temperatura por	

mañana es de 4° sobre cero y a lo largo del día baja 4°, ¿Cuál es la temperatura por la noche?	la mañana es de 4° sobre cero y a lo largo del dià baja 4°, ¿Cuál es la temperatura por la noche? L163 A: Bueno pues estaría en 4°C (el alumno escribe 4°C) durante el día, y luego en la noche al disminuir 4°C (el estudiante escribe primero una flecha que señala hacia abajo y luego escribe -4°C), sí que disminuye, te quedarías en 0°C (escribe =0°C) L164 D: ok, ¿Qué significaría que nos quedáramos en 0°C? L165 A: La temperatura a la que te irías a dormir L166 D: Si esa temperatura, ese 0°C, ¿tendría el mismo significado que le habías dado cuando te pregunte qué significado tenía el cero para ti? L67 A: Ehh… mmm (el alumno se queda pensativo un momento) más o menos yo creo que no, porque el cero grados centígrados puede ser representado de diferentes maneras, es una escala centígrada que es la representativa de nosotros, es un punto del que se puede representar valores por debajo de un ese punto o aumentar la temperatura L168 D: ok, entonces ese cero que tenemos, o que estas representando, ¿no significa que no tengas nada?, ¿Qué significaría para ti ese cero? L169 A: Por ejemplo este cero (señalando el cero de la operación) representa los grados centígrados, no es un cero porque no es lo mismo un 0°C a 0°K, es solo la manera en	Para este problema ya no se le atribuye al cero el significado de ausencia de cantidad (cero griego), sino como una posibilidad de representar algo más (lo que sería una característica del cero chino: donde en el

	cómo se representa la temperatura L170 D: ah, ok, muchas gracias Héctor.	número cero pueden englobarse todas las cosas)

Análisis de la entrevista a Guadalupe.

Pregunta	Respuestas	Observaciones
¿Qué significado tiene para ti el número cero?	D: Bueno Guadalupe, vamos a empezar con la entrevista, si te parece bien G: Si **Pregunta 1,2 y 3.** R1 D: Mira, la primera pregunta, o lo que quisiéramos saber es ¿para ti qué significado tiene el número cero? ¿Qué significa para ti el número cero? R2 G: Mmmm, bueno para mí el cero es, pues es un número que dependiendo de la posición en la que este es el valor que	

	va a tomar el número que se escriba porque, por ejemplo si esta un cero desde el punto hacia la izquierda, es como si no tuviera ningún valor, pero si está a la derecha y dependiendo de la posición en la que este (en las decenas o las centenas, etc.) será el valor que va a tomar. R3 D: ¿podrías escribir eso en la hoja? (Guadalupe escribe “El cero dependiendo su valor en la cifra depende de la posición en la que este, porque si está a la izquierda del punto no toma ningún valor, pero si está a la derecha el valor de la cifra dependerá en que unidad se ponga”) R4 G: Ya R5 D: Ok, entonces tu nos estas manejando una idea de que el valor del cero depende de donde se encuentre. Dices que si está a la izquierda del punto no toma ningún valor, es decir, que no vale nada mientras que si está a la derecha va a depender de la posición en que se encuentra R6 G: Aja R7 D: Pensando en esto que nos dices del cero, podrías escribir un ejemplo en el cual aparezca ese cero del que nos estás hablando, es decir, ese cero que dices que no tiene valor, que si está a la izquierda, o que si está a la derecha y tiene un valor determinado. ¿Podrías escribir un ejemplo? R8 G: Ujum. Primero voy a poner el que se supone que no tiene valor.	Cero posicional: Hace referencia al cero griego, pues considera que representa nada o que no tiene valor alguno. El alumno señala: “es como si no tuviera ningún valor”

Escribe un ejemplo que te sirva para explicar lo que significa el número cero.	R9 D: Ok R10 G: Sería, no importando la cantidad de ceros que tenga a la izquierda del punto, o sea, por ejemplo aquí está el punto (dibuja un punto en la hoja) y si esta un uno, pero no importando cuantos ceros tenga a la izquierda: uno, do s o tres, la cantidad siempre va a valer uno (el estudiante escribió el número uno y a la izquierda ha colocado cuatro ceros, donde plasma que el uno seguirá siendo la misma cantidad aunque se le agreguen ceros a la izquierda de él); pero por ejemplo si es esta misma cifra, pero está a la derecha del punto, entonces dependiendo de la cantidad de ceros que tenga, si es uno serian 10, o dos 100 o tres mil o diez mil dependiendo de la cantidad R11 D: Ah ok, entonces, en el primer ejemplo que tienes aquí (señalo el número 0001.), estos ceros que has dibujado ¿representan que no tienen valor alguno? R12 G: Ujum R13 D: ¿Le afectarían al uno que tienes escrito? R14 G: No porque el 1 tendría el mismo valor, o sea, uno R15 D: ¿Entonces seguiría siendo uno? R16 G: Si R17 D: Entonces, ¿Cuál es la diferencia entre el ejemplo que	Cero con valor y sin valor: Al utilizar el sistema posicionla, el cero tiene una concepción doble: con valor cuando señala unidades de orden superior (la integración de 9+1) y, cuando no importando la cantidad de ceros, no modifican el valor de la cantidad (00008). Asignamos el valor si esta por la izquierda o a la derecha. En ambos casos el cero representa la ausencia de elementos (cero griego)

	nos pones y el segundo? R18 G: Pues porque depende de la posición del cero aumenta la cantidad, por ejemplo uno (señalando el primer caso) suponiendo que le ponga otro cero, aquí tiene cuatro ceros el uno, pero a su izquierda y vale uno y aquí (señalando el caso dos) los tiene a la derecha, que igual son cuatro (ceros) y aumento la cantidad a diez mil R19 D: Ah ok, entonces dependiendo de donde ubiques el cero, será el valor que tenga la cantidad. Y si pensáramos en los ejemplos que estas poniendo, si tu nada más tomaras un cero de cada uno de los ejemplos, serian diferentes entre uno y otro, es decir vamos a suponer que vamos a tomar del primer ejemplo que escribiste el primer cero que aparece allí a la izquierda y del segundo ejemplo vamos a tomar el cero, solo el cero que tienes a la derecha del número uno. ¿Hay una diferencia entre esos ceros? R20 G: Ummm pues igual si porque, porque igual y aquí (señalando el ejercicio uno) aunque tenga un cero igual vale uno y aquí (señalando el ejercicio dos) igual tiene un cero pero la cantidad es mayor que uno, es decir 10. No es mucha la diferencia pero si hay. R21 D: Ah, entonces no importando donde ubiquemos el dibujo de cero, si hay una diferencia, a uno le afecta la cantidad y a otro no le afecta. Ok, bueno, podrías utilizar un diagrama, dibujo o grafico en el cual pudieras representar ese cero que	

¿Qué representación gráfica utilizarías para explicar lo que significa el cero?	nos estas señalando, ese el cual dices que no vale nada en un punto y en otro donde sí vale. ¿Habrá alguna manera de representarlo? R22 G: Mmm (dudando) R23 D: O que puedas decir “voy a utilizar un dibujo y con este dibujo estoy representando ese cero del que estoy hablando” R24 G: Pues bueno, podría ser algún dibujo de algún objeto, por ejemplo en el primer ejercicio, aunque tenga cinco, seis o más ceros, siempre va a ser uno. Y aquí (señalando el ejemplo dos) dependiendo de la cantidad de ceros que ponga será el número de dibujos que haga yo. R25 D: Ok, ¿podrías hacernos algún ejemplo con algún dibujo? R26 G: Bueno en el primero solo sería un objeto, haría yo una manzana o no sé. R27 D: Ok (Guadalupe dibuja una manzana) R28 G: Aquí igual, no importando los ceros hacia acá (en dirección a la izquierda del número uno) hacia la izquierda, siempre va a ser uno. Pero aquí (señalando el ejemplo dos), dependiendo del cero, va a aumentar la cantidad de manzanas. Entonces, suponiendo, tomando el primer cero, tendría que hacer 10 manzanas R29 D: Ok, ¿podrías dibujarlas? (Guadalupe dibuja 10 manzanas) ¿Podrías explicarnos ahora tu dibujo y que relación	La explicación desde el sistema posicional reafirma la idea de cero griego, pues la concatenación de elementos no modifica el valor del número (000007)

	tiene con lo que nos explicaste? R30 G: Tomando en cuenta que de cualquier lado tome solo un cero, el primer cero de la izquierda y el de la derecha. En el primer ejemplo en donde el cero está a la izquierda, el uno siempre va a valer uno, porque el cero va a aumentar a la izquierda, entonces la manzana siempre sería una. R31 D: Ok R32 G: Igual en este, como es el cero a la derecha son 10 y entonces por eso serían las 10 manzanas. R33 D: Las 10 manzanas R34 G: Pero si pusiera yo tres ceros serian 100 manzanas o mil o diez mil, según el número de ceros que ponga. R35 D: Ah ok, entonces en tu primer ejemplo donde tienes 0001 y que has dibujado una manzana. No importa la cantidad de ceros. Tu puedes poner más ceros pero no cambia la cantidad, sigue valiendo lo mismo R36 G: No, no importa R37 D: Entonces el cero allí no vale, y en el segundo ejemplo el cero ya tiene valor R38 G: Si, allí tiene un valor.	Para ejemplificar recurre a un contexto discreto, lo cual pareciera que limita el concepto del cero a un cero griego. Reafirma que el cero a la izquierda no afecta el valor de un número (01=1)

		¿El cero tiene valor? Esta afirmación podría ser un paso importante en la aceptación del cero chino, resultado de la infinita suma de opuestos.
Escribe un ejemplo de la vida cotidiana que se resuelva con las siguientes operaciones.	**Pregunta 4 y 5** R39 D: Te voy a dictar una operación es 7 + (-7)= 0. El reto es que tú en este momento, con esa operación que te acabo de dar pienses un problema o situación de la vida cotidiana en donde tu utilices esa operación y que el resultado te de cero R40 G: ¿Lo escribo? R41 D: Si puedes escribirla primero (Guadalupe escribe "una persona tenía 7 pesos pero fue a la tienda y compro un chocolate que costaba 7 pesos y al final del dià quedo sin dinero").Ok, podrías leernos tu ejemplo R42 G: Bueno, yo puse que una persona tenía 7 pesos pero fue a la tienda y compro un chocolate que costaba 7 pesos y al final	Se recurre a un contexto discreto en un entorno de compra/venta, donde el estudiante interpreta 7+(-7)=0 como 7-7=0, es decir recurre al ámbito aritmético y de igual forma lleva al estudiante a asumir al cero como cero griego.

	del dià quedo sin dinero R43 D: Ok, entonces, en la operación ¿en dónde estaría representado la parte que tú dices que quedo sin dinero? R44 G: La parte sería el cero R45 D: ¿El cero? R46 G: Ajam R47 D: Y entonces, el cero que estamos viendo en esa operación ¿sería el mismo cero que tú nos decías al principio? R48 G: Bueno, en este caso no porque no tiene ninguna cifra a la derecha o a la izquierda.	El cero como una representación de la ausencia de objetos (cero griego).

	R49 D: Y entonces, ¿Qué pasa con este cero que está dando como resultado? R50 G: Pues en este caso el cero representaría que la persona tenía 7 pesos pero como compro un chocolate que costaba 7 pesos, al momento de pagar se quedó sin dinero, es decir se quedó con cero pesos. R51 D: Ah ok, entonces podríamos pensar en algún otro significado de ese cero que te resulta, es decir, de eso cero como "se quedó sin dinero". ¿Tendría para ti otro significado el cero que aparece en esta operación? R52 G: Bueno, si , en este caso, tomando en cuenta solo la operación sin tomar en cuenta el problema, el cero representaría la igualación, porque tiene el signo de igual, de	(Cero chino) "sin tomar en cuenta el problema, el cero representaría la igualación…" La afirmación anterior podría ser un acercamiento al cero chino, pues el estudiante pareciera percatarse que al tener +7 y sumarle -7, el resultado es cero (como equilibrio de cantidades opuestas). Sin embargo el estudiante recurre al ámbito aritmético

Represéntalo mediante una gráfica o un dibujo.	igualación de la operación de 7-7, porque en este caso el 7 es positivo, y el menos 7 que está en el paréntesis, al momento de hacer esta operación de los signos (señala el signo positivo que antecede al paréntesis junto con el negativo que es inherente al negativo 7) del más y menos, el resultado daría negativo R53 D: Ujum R54 G: Entonces la operación quedaría 7-7 R55 D: Ah, ok, ¿podrías escribirnos eso que acabas de comentar? Que el cero es la igualación de la operación R56 G: ¿Lo escribo aquí? R57 D: Si abajo por favor (Guadalupe escribe "El cero de la operación es el resultado de los primeros dígitos que aparecen antes del igual porque cuando se relacionan el signo negativo con el positivo el resultado es negativo y tomando en cuenta el 7 la operación quedaría como una resta, el 7 se le resta al otro 7 y el resultado es cero).Ok, entonces nos estás hablando aquí que, a diferencia del primer cero del que tú nos hablabas y donde su valor depende de donde se ubique, este cero que aparece en esta operación es el resultado de igualar las cantidades que están antes del signo igual y de su resultado, que en este caso sería cero R58 G: Aja R59 D: Ok, pensando en el problema o ejemplo que pusiste ¿podrías representar ese problema de manera gráfica o con un	para procesar la información (7-7=0)

	dibujo que te ayudara a explicar lo que está sucediendo en el ejemplo? R60 G: Mmmm, bueno puedo hacer una recta (lo dice con mucha duda) R61 D: Ok, está bien, lo que te sirva y que pudiera ayudarte. Haz de cuenta que se lo vas a explicar a alguien, entonces ya tienes tu problema y ahora utilizas un dibujo o grafico que te ayudara a respaldar la información que estas utilizando R62 G: Bueno, utilizaría una recta numérica R63 D: Ok, adelante (Guadalupe dibuja una recta numérica señalando los positivos y los negativos. Parte desde el +7 y utilizando la recta hace un movimiento de saltos hacia la izquierda hasta que se detiene en 0) R64 G: Bueno, en el caso de mi ejemplo me colocaría en el 7 positivo porque cuando dice que una persona tiene 7 pesos es porque tiene el 7positivo R65 D: Ok R66 G: Entonces en este momento estaríamos en este punto (señalando el +7), pero cuando dice que pago el chocolate que costaba 7 pesos, o sea que su cantidad disminuyo 7 pesos, entonces saldría de aquí (señalando el +7) hasta… bueno nada más siete números para atrás (es decir a la izquierda), es decir menos 7 y entonces quedaría en el punto cero.	Se recurre a una representación continua, el uso de la recta numérica.

	R67 D: En el punto cero R68 G: Aja R69 D: Ok, entonces me estás diciendo que eso s7 pesos estarían representados, por lo que me dices, en el 7 positivo y que el hecho de haber pagado, lo hizo regresar los 7 pesos porque eso fue lo que le costó el chocolate y dices que llega al cero. R70 G: Al cero R71 D: Ok, veo allí en tu dibujo que en la recta que acabas de utilizar aparece un cero que es a donde llega (después de realizar la operación del ejercicio anterior) pero veo que hay cantidades a la izquierda de ese cero. Entonces, solo pensando en ese cero que dibujaste, ¿tendría el mismo significado que nos decías anteriormente en la operación o el que nos dabas al principio el cual depende del lugar en el que se ubica? R72 G: Bueno, en este caso de la recta numérica o de una gráfica, el cero siempre va a ser el punto o el centro de las cifras (hace referencia al cero el punto por el cual se determinan la posición de los enteros). Por ejemplo en este (indicando el cero de la recta) igual a la derecha tienen un valor positivo R73 D: Si R74 G: Y a la izquierda se le daría un valor negativo	

	R75 D: Un valor negativo R76 G: Ajam R77 D: Ok, entonces allí el cero seria el centro R78 G: Ajam R79 D: Y ¿te serviría para algo? Es decir allí en el dibujo sirve para algo que ese cero sea el “centro del dibujo” R80 G: Pues si porque me sirve como base para, en esta operación, ubicar los números, como en este caso el 7 positivo. En la operación lo marca como 7 positivo, entonces en la recta me ubicaría en el +7, y después, como en la operación se marca una resta porque tendría el signo negativo, se tendría que disminuir la cantidad, quitarle siete veces, igual quedaría en el valor cero, en el centro. R81 D: Ok, entonces dices que el cero que aparece en el dibujo te sirve para ubicarte, es decir, para poder ubicar inicialmente la cantidad positiva que era 7 y que después con la operación, la cual es una resta, llega a cero. R82 G: Si R83 D: Entonces tiene un uso allí, El cero tiene un uso (Guadalupe duda de tal afirmación, pues aunque pareciera que concibe al cero como punto de referencia, no clarifica el uso que le está dando y solo lo asume como el resultado de la	La representación continua reafirma el significado del cero como cero de Stevin, el cual ayuda a fijar a los enteros positivos y negativos. Cero de Stevin: “me sirve como base para, en esta operación, ubicar los números, como en este caso el +7”

	operación) R84 G: Bueno, en este caso el cero solo sería el resultado R85 D: Solo sería el resultado Ok R86 G: Porque en la operación no lo utilice, en este caso el cero se utilizó en la recta porque el cero es el centro, para diferenciar cuales son los números negativos de los positivos. En este caso yo utilice el lado derecho porque la cifra era positiva. Pero, por ejemplo, si en la operación hubiera sido -7 en vez de +7 me hubiera yo ubicado en el lado izquierdo porque sería negativo R87 D: ¿En el lado izquierdo de qué? R88 G: Del cero R89 D: En el lado izquierdo del cero, ok, perfecto. Entonces dices que te sirve como resultado, pero ahorita te está ayudando ese “centro” para ver donde se encuentran los positivos y los negativos R90 G: Ajam R91 D: Ah ok, vamos a pasar al siguiente ejercicio.	Aunque ha considerado al cero como el punto de referencia, el estudiante se remite nuevamente al cero como la representación de ningún elemento (cero griego) De los usos del cero: El estudiante asume que el cero se usa como instrumento al ubicar los elementos positivos y negativos, mientras que si es un resultado, no se le da un uso al cero.
¿Cómo explicarías a un	**Pregunta 6** R92 D: Bien, supongo que tú escuchas las noticias y te enteras	

niño lo que significa que la temperatura es 0°? ¿Cómo lo representarías gráficamente?	que todos los días dan la temperatura de varios lugares en el país. Vamos a pensar que tu escuchas que el día de ayer en Córdoba amanecieron a 0°C, ¿Si?, para ti ¿qué significa o como explicarías que la temperatura se encuentra a 0°C? R93 G: Bueno, en el caso de los grados tal como lo sé, en las escalas de los grados igual que en el ejemplo anterior, el 0° seria como el centro de la temperatura porque si es mayor que cero la temperatura aumenta, en este caso sería el calor. Pero, como usted dice en las noticias mencionan que está a nueve grados bajo cero, esto en una recta sería un numero negativo R94 D: Ajam R95 G: Porque estaría bajo cero, o sea, a la izquierda. R96 D: ¿A la izquierda? Podrías escribir eso que nos dices que el cero grados es, como en el ejemplo anterior, el centro. (Guadalupe escribe “El cero grados también representa como el centro para medir la temperatura porque si la temperatura está a una cantidad mayor a cero, la temperatura será más alta, pero si la temperatura está bajo cero estaría menor la intensidad del calor) Ok, ¿podrías leernos lo que escribiste? R97 G: “El cero grados también representaría como el centro para medir la temperatura porque si la temperatura está a una cantidad mayor a cero, la temperatura será más alta, pero si la temperatura está bajo cero estaría menor la intensidad del calor	Nuevamente el contexto continuo permite al estudiante asumir al cero como un punto de referencia, lo cual le atribuiría el significado de Cero de Stevin.

	R98 D: ¿Menor la intensidad del calor? Ok. Tendrías alguna manera de representar esta idea de la temperatura, me refiero a como representarías gráficamente o con un dibujo la idea que nos estas transmitiendo de este cero en la temperatura R99 G: Bueno, podría hacer una grafica R100 D: Ok, adelante (Guadalupe traza un plano cartesiano signando los negativos solamente, además de que señala el eje ordenado y el de las abscisas) R101 G: Bueno, en el caso de los grados, el 0° estaría en el punto centro, en el origen R102 D: Ajam R103 G: En el caso de 0°, un número mayor a 0 sería que la temperatura estaría más alta, el calor sería más intenso porque, por ejemplo si la temperatura está a 6°C, bueno en la actualidad 6°no es calor sino que hace frio, pero si hubiera una cantidad mayor, como 30°, pues esta normal, pero si ya pasa a 47° o 50° ya son temperaturas que son muy altas, pero en el caso de los grados mayores a cero se representarían del lado derecho de las “x” y en la parte de arriba del eje “Y”. Ya para los grados bajo cero serían los números negativos R104 D: Ah ok R105 G: Porque serían menores, pues estando uno a 6° bajo cero es cuando hay mucho frio ¿No?, hasta se forma hielo.	Al considerar al cero como punto de referencia, el estudiante puede ubicar las temperaturas cálidas y las

	R106 D: Ah ok, entonces cuando está por debajo de cero es cuando la temperatura está muy fría, que se puede formar hielo. Perfecto, vamos a continuar con la siguiente pregunta, ¿te parece?	temperaturas frías. (cero de Stevin)
Un ascensor está en la planta 3 y bajó hasta la planta 5 del sótano. ¿Cuántas plantas bajó? Escribe una operación y representa la situación gráficamente.	**Pregunta 7** R107 D: Te leo la pregunta para que tú nos des una respuesta. La idea de este problema es que representemos la operación y que podamos representarlo de manera gráfica. Cuando me refiero a grafico estamos hablando de un dibujo o representación que te ayude. El problema dice: Un elevador está en la planta 3 y bajo hasta la planta 5 del sótano, la pregunta es ¿Cuántas plantas bajo? R108 G: Bueno, primero haría yo la representación R109 D: Ok R110 G: Voy a utilizar una recta numérica para darme una idea R111 D: Perfecto (Guadalupe traza una recta numérica yo toma como base el cero para distribuir los enteros positivos y negativos) R112 G: ¿Cómo me había dicho en el problema? ¿Que el ascensor estaba en el 3er piso? R113 D: Si, el ascensor se encuentra en la tercera planta o	La representación continua de la recta numérica reafirma el significado del cero de Stevin.

	tercer piso y dice que baja hasta la planta 5 del sótano o al piso cinco del sótano. R114 G: Bueno entonces sería como en esta operación. En esta recta se representaría por pisos de cualquier edificio R115 D: Ajam R116 G: A partir del uno sería un piso y el problema dice que se encuentra en el nivel 3 y descendió al nivel 5 del sótano R117 D: Así es R118 G: Serían a partir del tres obviamente descendió o disminuyo, entonces tendría que irse para atrás (indicando el sentido hacía la izquierda), pero como en todos los edificios deberían tener un sótano y en este caso el punto cero representaría el nivel del piso R119 D: Ajam R120 G: A partir del piso hacia arriba serían los pisos normales y ya bajo el cero, los números negativos representarían los niveles del sótano es decir de bajo del piso, de bajo del cero. Entonces a partir de este (tomando como referencia el cero) bajo otros 5 y entonces en total el ascensor descendió 8 pisos (Guadalupe primero realiza un movimiento que va de +3 a 0 y después de 0 a -5, lo que indica que maneja una “recta dividida”) R121 D: ¿8 pisos? ¿Podrías escribir eso? ¿Cuánto descendió?	Aparición de la recta dividida: El alumno va del positivo al cero (en este caso de +3 a 0) y a partir de cero cuenta hasta -5 (de 0 a -5), lo que obtiene 3 y 5, dando como resultado que bajó 8 pisos.

	(Guadalupe escribe "el ascensor descendió 8 pisos) Ok, decías algo al respecto del cero, decías que el cero ¿qué te estaba marcando allí? (señalo el cero en la recta) R122 G: Bueno yo el cero lo utilice como el punto de nivel de piso de un edificio R123 D: Ah ok R124 G: O podría ser hasta el nivel de la tierra R125 D: Aja R126 G: Porque sobre la tierra serían los pisos y bajo la tierra ya sería el sótano, ¿no? R127 D: Ajam R128 G: Entonces ya sería… bueno yo los represente como los números negativos. R129 D: Entonces, si estoy comprendiendo bien, ese cero que estas utilizando en tu dibujo lo que está representando es el nivel de la tierra y entonces por arriba de ese cero están todos los pisos y por debajo de ese cero estaría el sótano, ¿sí? R130 G: Ajam R131 D: Entonces ese cero representaría el nivel de la tierra. R132 G: Ajam	

	R133 D: Y ¿Cuál sería la diferencia entre ese cero como nivel de la tierra que nos estas señalando y el cero que nos indicabas anteriormente en el ejercicio de la temperatura, el cual decías que a partir del cero hacia arriba había calor y del cero hacía abajo, o sea los negativos, había frio? R134 G: Bueno en este caso, como en los problemas anteriores el cero representa el punto medio o el centro de la cantidad porque igual que en la de los grados, hacia arriba o a la derecha siempre serían los números positivos y yendo a la izquierda representarían cosas que serían menos, cosas negativas. R135 D: Ok, entonces ¿tendrían más o menos la misma función? R136 G: Si R137 D: Mientras que en este ejercicio te marca el nivel de la tierra, en el otro te marcaria cuando o a partir de donde hace calor o hace frio R138 G: Si R139 D: Ah ok. ¿Podrías escribir la operación? Tu empezaste por el dibujo y dices que descendió 8 pisos, pero podrías escribir la operación que justifique que el elevador descendió esos 8 pisos, es decir que paso del piso 3 al piso 5 del sótano. R140 G: Bueno, pues lo representaría como una resta	Cero de Stevin

	R141 D: Ok R142 G: Pero, bueno el punto de referencia seria el punto +3 porque está en el tercer piso y como disminuyo 8 pisos, o sea que yo lo representaría como un 8 negativo y ya tomando en cuenta esta operación (Guadalupe escribió 3-8=) presentaría el punto en el que quedo el ascensor que era en el -5, ¿Por qué? Porque en esta operación como tienen signos diferentes este (señalando al 3 de la operación) tendría signo positivo y conforme a las reglas de los signos de la suma y resta de los signos, como son signos diferentes se restan, es decir, se resta al número mayor menos el número menor y seria 8-3 lo cual nos da 5 y el número que se obtiene se le pone el signo del número más grande que en este caso fue el negativo R143 D: Fue el negativo, ok y entonces dices que cuando estableces tu operación, ese negativo cinco (-5) te está indicando al lugar a donde llegó, el cual sería el sótano... Ok, pasemos a la siguiente pregunta.	El estudiante escribe 3-8=-5, donde 3 implica la posición del piso 3 y señala que bajo ocho pisos (-8), lo que lo deja en el piso cinco del sótano (-5). El estudiante hace uso de e_i + v =e_f, cuando el problema plantea e_f - e_i =v. Este cambio de estructura podría ser una limitante en la comprensión del cero con sus diferentes significados.
	PREGUNTA 8	

Si tienes 14 euros en tu casa y debes 14 euros a un amigo, ¿Cuál es tu situación económica?	R144 D: El siguiente también es otro problema, te lo leo: "si tienes 14pesos en tu casa y debes 14 pesos a un amigo, la pregunta es ¿Cuál es tu situación económica? R145 G: Bueno, en este caso si yo tuviera 14 pesos pero si debiera 14 pesos, pues al momento de pagar yo quedaría sin dinero porque si yo debo una cantidad, y esa cantidad que debo es la que tengo pues quedaría sin nada, como si fuera el cero. R146 D: Ok, podrías escribir eso (Guadalupe escribe "Si yo tuviera $14 pero si debiera $14 yo saldría sin dinero porque es la misma cantidad que tengo y la que debo") Ok, entonces la idea que nos estas transmitiendo es que si tú los tienes pero los debes y los pagas en ese momento te quedarías sin dinero. ¿Cómo representarías que te quedas sin dinero? R147 G: Bueno pues en una ecuación o en una operación, pues en este caso serían 14 pesos entonces serian +14 (Guadalupe escribe +14), pero si debía yo es como si estuviera yo pagando, como si estuviera disminuyendo de mi dinero 14 pesos R148 D: Aja (Guadalupe escribe +14-14=) R149 G: Entonces la operación quedaría más 14 menos (+14-14=) ¿no? E igual que en el ejemplo anterior, en este caso sería una resta porque los signos son diferentes y en este caso no hay un número más grande o más chico, o sea que es el mismo y entonces seria 14-14 y seria cero (0) ¿no? E igual no se le pone signo porque no tome como referencia ni el número más	Aunque el problema no lo señala, el alumno recurre a "pues al momento de pagar…" lo que lo lleva a obtener cero como representación de no tener dinero (cero griego), sin embargo pareciera estar implícito la noción de cero chino como resultado de enfrentar cantidades iguales con signo diferente. Aunque el resultado se asume como el cero griego (ausencia de dinero), la reflexión del alumno mostraría el

	grande ni el más chico, entonces seria cero. R150 D: Seria cero. ¿Podrías suceder que tuvieras un número más grande que otro y que el resultado te de cero? R151 G: No porque en cualquier operación mientras haya un numero positivo y un número negativo pero que sea la misma cantidad, o sea que sean los mismo dígitos, pues el resultado siempre será cero porque siempre va a ser la misma cantidad R152 D: Siempre va a ser la misma cantidad. Entonces para que te de cero tiene que haber la misma cantidad de positivos y la misma cantidad de negativos y así te da cero R153 G: Si R154 D: Si alguno de ellos es más grande ¿te dará cero? R155 G: No, no daría cero R156 D: Muy bien, y esta idea que nos estas transmitiendo de que tienes lo 14 pero tú los pagas y te quedas sin dinero, ¿podrías representarla mediante un dibujo una gráfica? R157 G: Bueno igual en este caso seguiría usando una recta. R158 D: Ajam (Guadalupe dibuja una recta numérica) R159 G: En este caso como en los problemas anteriores, en el caso de cuando todavía tengo los 14 pesos me ubicaría yo en el +14	principio del cero chino. Cero chino.

	R160 D: ok R161 G: Pero como en la operación que puse es una resta, disminuye 14 pesos, es decir la misma cantidad y entonces disminuye 14 (Guadalupe realiza un movimiento de “saltos” partiendo del 14 con dirección a la izquierda llegando a 0) y al momento de disminuir 14 igual resulta que el punto de resultado es cero R162 D: Es cero. Ok, entonces ese cero no s decías hace rato que significaba ¿Qué? R163 G: Pues como si hubiera quedado sin dinero R164 D: Ok entonces nos decías que ese cero representa que te quedas sin dinero, bien, vamos a la siguiente pregunta	La representación continúa de la recta numérica en la solución de problemas. Cuando aparece el significado del cero de Stevin (punto de referencia) y el cero griego (como ausencia de cantidad)
Un ascensor primero sube 6 plantas y posteriormente baja 6 plantas. ¿Cómo ha variado la posición del ascensor respecto a la que tenía antes del primer movimiento?	**PREGUNTA 9** R165 D: Te voy a leer el problema, que dice: “Un elevador primero sube seis plantas y posteriormente baja seis plantas, la pregunta es ¿Cómo ha variado la posición del elevador con respecto a la que tenía antes del primer movimiento? R166 G: Bueno, en este caso el elevador al principio del problema se encontraría en el nivel 0, en este caso en el primer piso R167 D: Ajam R168 G: Pero como dice que ascendió seis piso ¿no? Y después	El problema no señala el punto de inicio, sin embargo el estudiante asume que se encuentra en el punto cero.

	descendió seis pisos, igual quedaría en el mismo punto en el que empezó, es decir, quedaría igual en el nivel cero. R169 D: En el nivel cero. Podrías escribir eso (Guadalupe escribe "el elevador cuando empieza el recorrido se encuentra en el nivel cero pero después se eleva seis pisos y después desciende otros 6 pisos resultaría que quedo en el mismo punto que comenzó"). Ok, podrías leernos lo que escribiste R170 G: "el elevador cuando empieza el recorrido se encuentra en el nivel cero pero después se eleva seis pisos y después desciende otros 6 pisos resultaría que quedo en el mismo punto que comenzó" R171 D: Ok, decías hace rato que cuando el elevador sube y baja se queda en el mismo piso, el cual decías que es el piso cero, En un ejercicio anterior nos decías que el piso cero en tu recta te hacía referencia al nivel de la tierra, es decir que a partir de cero era el nivel de la tierra y entonces podías ver los pisos hacia arriba y el sótano que eran los números negativos. En este caso, cuando el elevador baja hacia el punto donde empezó, que nos dices que es el nivel cero, ¿a qué te estas refiriendo? R172 G: Bueno en este caso el cero no utilizaría niveles negativos, es decir por debajo de la tierra porque no menciona algún sótano, menciona solo pisos y el problema dice que estaba en el sexto piso	

	R173 D: Ajam R174 G: Y después descendió otras vez seis R175 D: Ajam R176 G: Entonces otras vez quedaría en el nivel cero R177 D: En el nivel cero, pero entonces ese nivel cero ¿Qué seria? ¿Sería el nivel de la tierra? R178 G: Ajam R179 D: Ok, entonces nuevamente lo estas tomando como en el ejemplo anterior donde el cero señala el nivel de la tierra. Muy bien, podrías escribir la operación que justifique esto. Te vuelvo a leer el problema que dice “el ascensor primero sube seis plantas y luego baja esas seis plantas y la pregunta es ¿Cómo ha variado la posición del elevador?” ya nos has dicho que regresa al punto donde empezó, pero ¿podrías escribir la operación? R180 G: Bueno el primero digito que tendría seria +6 R181 D: Ajam R182 G: Porque en el caso de este problema dice que primero ascendió seis pisos, ¿no? O sea subió seis pisos, sería el seis positivo (+6) y después dice que descendió otros seis que sería como si fuera negativo (-6) como si hubiera disminuido, igual seria 6-6 y entonces el resultado sería cero, ¿no? Porque igual	El cero de Stevin imbuido de conceptos geográficos (el nivel de la tierra)

	que en las demás operaciones tienen signo diferente y entonces se hace una resta. Igual se resta al número mayor el menor, pero en este caso son la misma cantidad, (6-6) y es cero y no se le pone ningún signo. R183 D: Ok, en este caso, ese cero que te está dando como resultado lo estoy asociando con lo primero que nos decías, te acuerdas que cuando te pregunte ¿Qué significaba para ti el cero? Decías que dependía del lugar pero que si estaba a la izquierda no valía nada y si estaba a la derecha dependía del lugar que ocupara. En este caso, ese cero ¿Qué simbolizaría para ti? R184 G: Bueno, en este problema el cero representaría el punto base, ¿no? R185 D: Ajam R186 G: Del cual empieza el problema, porque a partir de este punto (Señala el cero del resultado 6-6=0) empieza a ascender el elevador e igual vuelve a este punto R187 D: Y vuelve a ese punto. Ok, entonces en este problema ese cero representaría tu inicio R188 G: Aja R189 D: Ok, lo cual es diferente a lo que nos decías en un principio que dependía del lugar donde se encontrara	El cero como un posible equilibrio de cantidades. Cero de Stevin

Cinvestav

	R190 G: Aja R191 D: Muy bien, vamos al siguiente problema. Te lo voy a leer , el problema dice así:	
Si la temperatura por la mañana es de 4° sobre cero y a lo largo del día baja 4°, ¿Cuál es la temperatura por la noche?	**PREGUNTA 10** R192 D: La temperatura por la mañana es de 4° sobre cero y a lo largo del día baja 4°, la pregunta es ¿Cuál es la temperatura por la noche? R193 G: Si me podría repetir el problema R194 D: Ok, Si la temperatura por la mañana es de 4°sobre cero y a lo largo del día baja 4°, ¿Cuál es la temperatura por la noche? R195 G: Bueno en este caso la temperatura seria 0° porque en el problema menciona que por la mañana está a 4° y después dice que a lo largo del día la temperatura disminuye 4°, o sea es la misma cantidad la que aumenta y la que disminuye entonces resultaría en 0° R196 D: Cero grados, ¿podrías escribirnos eso? Me refiero al resultado y por qué te da ese resultado (Guadalupe escribe "El resultado es cero grados porque primero la temperatura estaba a 4 grados sobre cero y a lo largo del día disminuyo 4 grados y resulto como una temperatura de cero grados"). Ok, ¿podrías	¿Cero chino?

	leernos lo que escribiste? R197 G: El resultado es cero grados porque primero la temperatura estaba a 4 grados sobre cero y a lo largo del día disminuyo 4 grados y resulto como una temperatura de cero grados R198 D: De cero, ok, ¿podrías escribir la operación que justifique lo que nos estas diciendo? R199 G: En este caso pondría yo el cuatro como positivo (+4), el cual es el primer dato, porque nos dice que la temperatura está a 4° sobre cero, es decir 4 números después del cero, entonces sería positivo. Pero después dice que disminuyo cuatro grados, o sea que resto ¿no? , 4 grados y entonces igual esta sería la operación (el alumno escribe +4-4=0), y el resultado igual seria a cero, porque igual que en las operaciones anteriores al 4 se le resta el 4 y resulta como cero sin ningún signo R200 D: Sin ningún signo, ¿Por qué el cero no tendría signo? R201 G: Porque en este caso la operación, como en todas las operaciones los dos dígitos tienen diferente signo y entonces se tuvo que realizar una resta y entonces en la operación se resta el número menor al número mayor , pero en este caso no hay un número más grande que otro, es el mismo y entonces el resultado es cero R202 D: Es cero. Ok, y ya nos decías que implicaba que fuera	La estructura matemática $e_i + v = e_f$ lo lleva a obtener un resultado de cero griego, sin embargo el 0° no puede tomar este significado. En este ejercicio el estudiante hace uso de los dos significados del cero. Inicialmente al escribir el resultado de +4-4=0, Guadalupe señala que son la misma cantidad pero con signo opuesto, por lo tanto podría estar pensando en un equilibrio o compensación. Después

	cero grados la temperatura. ¿Te acuerdas que nos decías? R203 G: Bueno si, en este caso igual el cero representaría el nivel o la intensidad. Si esta sobre cero pues hay más calor. Si es bajo cero, es frio R204 D: Ok y ¿si está en cero? Nos dices que por arriba de cero sería más calor y por debajo de cero sería más frio?, pero ¿si esta en cero? R205 G: Pues el cero representaría como una temperatura neutra o sea, que no es ni calor ni frio, es decir, la mitad. R206 D: La mitad. Si tú nos pusieras un ejemplo, ¿a qué te referirías? Dices que es una temperatura neutra, ¿Qué nos quieres decir con que es neutra? R207 G: Si, que se encuentra en un punto que es a partir del cual se miden las temperaturas, sea esta alta o baja. R208 D: Ok, gracias por tu apoyo.	el alumno dice “en este caso igual el cero representaría el nivel…” lo que le atribuiría el significado de Cero de Stevin o como punto de referencia. Al final se maneja de manera errónea la aplicación de la compensación o cero chino en un contexto continuo, pues se piensa que 0°C representaría un equilibrio entre lo frio y lo caliente.