CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

"CARACTERIZACIÓN DE LA ENSEÑANZA DE LOS ENTEROS EN DOCENTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA"

T E S I S

Que presenta

EDUARDO MENDOZA CAMACHO

Para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Directora de la Tesis: DRA. AURORA GALLARDO CABELLO

Ciudad de México JULIO, 2018

AGRADECIMIENTOS

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACYT por el apoyo brindado para el desarrollo y culminación de la Maestría en Ciencias con la especialidad en Matemática Educativa.

AL Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, CINVESTAV por brindarme la oportunidad de desarrollarme en el campo de la investigación.

A mi asesora, la Dra. Aurora Gallardo por su dirección, acompañamiento, apoyo profesional y humano, y por permitirme trabajar con eminente personalidad.

A los Doctores Teresa Rojano y Ulises Xolocotzin por su valiosa revisión y aportaciones realizadas en este trabajo de Tesis.

A mis maestros, las doctoras Aurora Gallardo, Marta Valdemoros, Mirela Rigo y Sonia Ursini, a los doctores Ulises Xolocotzin, Ricardo Quintero y José Guzmán† por sus conocimientos y enseñanzas para mi formación.

Al departamento de Matemática Educativa, en especial a Adriana Parra y a Alfonso Vera.

A los docentes y alumnos docentes participantes en este estudio.

DEDICATORIAS

A mis padres Eduardo Mendoza Cortés, Hilaria Camacho Ugalde†, a mis Tías Georgina y Esperanza, a mis hermanos Salvador y Alejandro.

A mi esposa Graciela Beatriz y a mis hijos Eduardo Alejandro y Graciela.

A Rafael, Graciela† y sus hijos, Rafa, Julio, Juan y Víctor.

Resumen

En esta investigación se indaga sobre la manera en que los docentes de secundaria enseñan los *números con signo*, los *números negativos* o *los números enteros* durante el primer grado de educación secundaria de acuerdo a los programas de estudio vigentes (SEP 2011). Se caracteriza dicha enseñanza de acuerdo a las investigaciones más recientes sobre este tema matemático.

Se utiliza la observación directa, la entrevista y el cuestionario como instrumentos metodológicos para la recogida de datos, se realiza la videograbación y la toma de notas durante la enseñanza de tres docentes, los dos primeros en la primera enseñanza, el tercer docente de tercer grado, en un repaso de la operatividad de números enteros o negativos con el fin de facilitar la resolución de problemas de aplicación de las Matemáticas en la Física y poder dar sentido a las soluciones negativas. También se indaga en la enseñanza de un docente en un video en internet, así como en la información disponible cuando los estudiantes acuden a este recurso. Se aplican cuestionarios y posteriormente una entrevista con otros tres docentes para triangular la información analizada por los tres primeros docentes observados. Se analiza además la entrevista didáctica realizada de una profesora-investigadora a un docente de telesecundaria, desde el punto de vista de la enseñanza para ser caracterizada, en la cual se encuentran dificultades similares a aquellas presentadas en la enseñanza de los dos primeros docentes. Durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de los dos primeros docentes aparecen dificultades no sólo en el niño sino en el mismo profesor, los docentes no pueden ayudar a algunos niños a superarlas, para arribar a la comprensión, interpretación y operatividad de los enteros, y simplemente provocan la aceptación de reglas sintácticas sin sentido como dogma, estas dificultades surgen durante la definición del *número entero*, cuando se determinan las *relaciones de orden,* en los conceptos de *simétrico* y *valor absoluto*, así como en el establecimiento de reglas para la *adición y sustracción de enteros,* el tercer docente observado les cuestiona a sus alumnos (provenientes de la enseñanza de los dos primeros) el porqué utilizan una regla multiplicativa para sumar o restar (la ley de los signos) y entran en conflicto, porque no pueden explicar el porqué, debido a haber aceptado reglas sin sentido.

Abstract

This research inquires about the way in which teachers teach whole numbers in the first grade of secondary school, according to the current study programs, (SEP, 2011). The teaching of integers is characterized according to the most recent research on this subject.

Direct observation, interview and questionnaire are used as methodological instruments for data collection, videotaping and taking notes during the teaching of three teachers, the first two in the first teaching, the third-grade teacher, in a review of the operability of whole or negative numbers, in order to simplify the resolution of problems of application from mathematics to physics and to make sense of negative solutions.

It is also investigated in the teaching of a teacher in a video on the Internet, as well as in the information available when children use this resource.

Questionnaires are applied and then, an interview with three other teachers is made, in order to triangulate the information analyzed by the first three teachers observed.

The didactic interview of telesecundaria teachers is also analyzed, from the point of view of teaching, to be characterized, in which similar difficulties are found in the interviewee, to those presented in the teaching of the two teachers observed.

In the teaching-learning process of the first two teachers observed, difficulties appear in children and teachers, in the latter because they cannot help them overcome them, to achieve comprehension and operability of the whole numbers. They simply incite the acceptance of meaningless rules. The difficulties arise in the teaching of the *whole number*, of the *relations of order*, in the concepts of the *symmetric* and the *absolute value*, as well as in the *rules for the addition and subtraction of integers*.

The third teacher observed questions his students, why they use a multiplicative rule to add or subtract (law of signs). Students come into conflict because they can not explain it, due to the fact that they accepted rules without meaning.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Los números negativos han representado un problema de tipo histórico, epistemológico y didáctico de acuerdo con Gallardo, (1994) quien llevó a cabo un estudio histórico-crítico de los números negativos en el contexto de la resolución de ecuaciones. Examinó también los distintos niveles del lenguaje, los métodos y estrategias utilizadas para la resolución de problemas algebraicos. Enfatizó que "*los términos sustractivos, las leyes de los signos, así como ciertos elementos necesarios para la operatividad con números negativos aparecen desde épocas remotas en el contexto de la resolución de ecuaciones algebraicas*". Con base en este hecho, la relevancia de esta investigación reside en que el dominio de la conceptualización, operatividad y aún más la transferencia de los enteros está relacionada directamente con el aprendizaje del álgebra, y éste a su vez es producto de ***el docente y de su enseñanza***, la enseñanza de los enteros en el contexto del álgebra lo muestra el estudio realizado por Gallardo, (2002) en "*The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra", a*sí como lo reafirman Salinas, Gallardo y Mendoza (2015) cuando mencionan que "*el número positivo es a la aritmética como el entero es al álgebra*". Por esta razón, en la presente investigación se indaga la forma en que los docentes de educación secundaria enseñan el contenido de los números enteros, cuáles son las cartacterísticas de su enseñanza y cómo ésta influye en la *extensión* del dominio numérico de los naturales al de los enteros.

En el Capítulo I del presente trabajo, se muestran los antecedentes encontrados en relación al número negativo, al número con signo o al número entero. Los antecedentes incluyen las investigaciones desde el punto de vista del análisis histórico, del estudio de la epistemología del número negativo, de la filosofía alrededor de las concepciones de la antigüedad del negativo, investigaciones en el terreno de la didáctica y también de la enseñanza. Además en esta sección se incluye un apartado donde se presentan las definiciones actuales del número entero formal y de sus propiedades. También se exponen las principales ideas en los trabajos realizados en el departamento de

Matemática Educativa dirigidos por Gallardo (1994-2017) alrededor este tema, así como aspectos relacionados con la extensión del entero a las ciencias experimentales.

El Capítulo II se presenta la propuesta educativa institucional y la forma en que es administrada en México, de acuerdo con los planes y programas de estudios (SEP 2011), así como el contenido de los números enteros en primero de secundaria, los aprendizajes esperados a los que corresponden dichos contenidos, las orientaciones didácticas que propone la Secretaría de Educación Pública, los conocimientos previos, contenidos y aprendizajes con los que llegan los egresados de la primaria, así como el perfil esperado del estudiante de secundaria al terminar la educación básica y los conocimientos a los que este perfil le ayudará a arribar a los contenidos del entero y del álgebra en el bachillerato.

El Capítulo III concentra la información central de este estudio: el planteamiento del problema de investigación, su justificación, las preguntas de investigación y los objetivos a cubrir en el presente trabajo. También se incluye el marco teórico utilizado para el análisis y clasificación de los información obtenida en esta investigación.

En el Capítulo IV se encuentran los aspectos metodológicos que estructuran la investigación, como lo es, la descripción del estudio empírico, el método de estudio, el análisis de la observación directa de los docentes, de los cuestionarios, y entrevistas realizados así como la caracterización de la enseñanza.

El Capítulo V concentra el análisis de los resultados encontrados en esta tesis, la caracterización de la enseñanza de los sujetos de estudio y el resultado del análisis de cómo enseñan los docentes el tema de los enteros en la escuela secundaria.

En el Capítulo VI se encuentran las principales conclusiones del estudio realizado, así como una propuesta del perfil de la eneñanza del docente que trabaja el tema de los enteros en la escuela secundaria, además de las perspectivas de trabajos futuros.

Capítulo I. Antecedentes de la investigación

1.1 Generalidades.

La enseñanza de los enteros en México, comienza en el primer grado de educación secundaria. Niños de entre 12 y 13 años tienen por primera vez contacto con este contenido matemático de acuerdo con el currículo de educación media básica. El contenido dentro de los planes y programas de estudio de Matemáticas (SEP 2011) de este tema, menciona la enseñanza de los *números enteros, fraccionarios y decimales, positivos y negativos.*

Existe una problemática en la enseñanza, identificada por diferentes autores como Bruno (1996), Maz (2005), González (1995), Gallardo (1994), Cid (2003) y, Cid y Bolea (2007), entre otros. Estos autores coinciden en la presencia de diferente tipo de dificultades que se oponen a la comprensión de este contenido. Otros estudios realizados por Piaget (1960), Freudenthal(1983), Glaeser(1981), Lizcano(1993), Schubring (1986), hablan de obstáculos específicos en el aprendizaje y concepción del número negativo, incluso analizan la construcción histórica del número negativo y de las dificultades que tuvieron que ser superadas, hasta que en el siglo XIX se acepan formalmente a los negativos con Hankel en 1867 (Gallardo 1994). Por esta situación, en la siguiente sección, se presentan los trabajos realizados con los enfoques histórico, epistemológico, filosófico y didáctico del número negativo y del entero. En el ámbito de la enseñanza, dicha problemática es ilustrada por Maz (2005), quien comenta: "*En la práctica cotidiana de la enseñanza de las matemáticas, los docentes encuentran temas y conceptos que presentan cierta resistencia o dificultad a los alumnos para llegar a su comprensión, interpretación y utilizaciones correctas; uno de estos conceptos es el número negativo*".

A partir de esta problemática, en la presente investigación se indaga sobre cómo enseñan los maestros con el programa de estudios vigente (SEP, 2011) este contenido matemático, es decir, *cuáles son las características de su enseñanza*, de acuerdo con las investigaciones más recientes del tópico y analizar si ésta les ayuda a los estudiantes a realizar la extensión del dominio numérico de los naturales $\boldsymbol{N}$ al de los enteros $\boldsymbol{Z}$.

1.2 Los Obstáculos

Los diferentes autores mencionan que existen y han existido diferentes obstáculos que se interponen en la comprensión del número negativo, así como en su operatividad, por ello comenzaremos definiéndolos. Este concepto, ha sido desarrollado por Brousseau (1983) y Schubring (1986), analizado y explicado por otros autores como Cid (2003) y D'Amore (2005) entre otros. Los obstáculos se mencionan en esta investigación porque aparecen en la misma, no sólo en la enseñanza de los profesores, también en el aprendizaje de los alumnos.

Un *obstáculo* es una idea o un conocimiento que ha sido eficaz en un momento dado para resolver un problema o una situación, pero se convierte en ineficaz cuando se aplica a una nueva situación, se tiende a conservar la idea ya adquirida y comprobada, sin embargo a pesar de no haber éxito en esta nueva situación, se la intenta salvar, pero este hecho resulta ser una barrera para el nuevo aprendizaje. (D'Amore, B. y Brousseau, G., 2005).

Se han tipificado tres clases de obstáculos:

a) *Obstáculos Ontogenéticos*.
b) *Obstáculos Didácticos*.
c) *Obstáculos Epistemológicos*.

Los obstáculos ontogenéticos son aquellos que tienen que ver con el estudiante, con sus capacidades y conocimientos de acuerdo a su edad y con su madurez cognitiva, de tal manera que ante la adquisición de nuevos conceptos, sus capacidades y conocimientos resultan insuficientes y constituyen un obstáculo de naturaleza ontogenética. El alumno no está listo cognitivamente para enfrentar situaciones más complejas debido a su edad cronológica. Para ilustrar este tipo de obstáculo, se podría pensar en introducir aspectos de la lógica matemática en niños de primaria, como las proposiciones del tipo: *Si A entonces B*, o en el caso de esta investigación, intentar enseñar las propiedades de los números enteros a los niños de primaria, cuando están construyendo el concepto del número natural, o intentar que los alumnos de secundaria construyan la definición de los enteros a partir de una teoría axiomática.

El obstáculo didáctico, tiene que ver con el proyecto del profesor, con el currículum, con el método o con la interpretación de la *transposición didáctica* (la forma en que el docente adecúa un contenido para ser enseñado), si la elección de tal proyecto resulta ser eficaz para algunos estudiantes pero no para otros, el proyecto para ésos otros se convierte en un obstáculo didáctico. Para ilustrar, resulta un obstáculo didáctico, la enseñanza del segmento como una sucesión de puntos, el cual permanece y se opone al concepto de continuidad en la recta. En el caso de esta investigación, un obstáculo didáctico resulta de la enseñanza del docente que menciona: "*cuando sumas una cantidad a otra, la suma siempre aumenta*" la cual se opone a la enseñanza de la suma de un número positivo y uno negativo o que "*la cantidad siempre es positiva*" cuando se enseña el concepto del número negativo y de las cantidades negativas.

Los argumentos matemáticos tienen su propio desarrollo en la historia hacia el interno de las propias matemáticas y cuando en la evolución de un concepto aparece una no continuidad, una ruptura, cambios en la concepción, se presume que dicho concepto en su aprendizaje revela obstáculos de carácter epistemológico, es decir, el problema epistemológico se debe a la naturaleza misma del argumento matemático. Como ejemplos de estos obstáculos están, el infinito, que históricamente tuvo problemas en su concepción, otro es el caso del cero y sus concepciones, "*cómo representar con algo, a aquello que no existe o que es la nada*" y su aceptación como número fue tardía, los estudiantes ven al cero como un número especialmente difícil. En el caso de los números negativos, aparecen en el siglo VI en la India y "*tienen una historia análoga al cero pero más obstaculizada y tardía*". Si era difícil representar a la nada (el cero), *¿cómo representar a las cantidades menores que la nada?* o más aún, para la sustracción de un número del cero, *¿cómo quitar algo de donde no lo hay?* El caso clásico de este tipo de obstáculo, reside en la extrañeza de que "*el producto de dos números negativos es un número positivo"* como lo comenta D'Amore (2005).

Esta clasificación de los obstáculos, ha permitido hacer un análisis adecuado dentro de la didáctica de la matemática, aunque éstos parecen bien tipificados, en ocasiones se presentan situaciones que involucran a más de un tipo de ellos.

1.3 Investigaciones Histórico-Epistemológicas y Filosóficas del número negativo

La epistemología recurre a la historia para reconstruirla a partir de los procesos que la llevan de una etapa de conocimiento a otra, a través del *método histórico-crítico* planteado por Piaget (1960). En esta sección se muestran las investigaciones que a través de la historia presentan la evolución del concepto del número negativo hasta su establecimiento como número negativo formal, de sus propiedades, y de las concepciones filosóficas que fueron desarrolladas en torno a este tema.

1.3.1 J. Piaget

El epistemólogo, realiza un estudio histórico sobre los números negativos, menciona a autores como D'Alambert, quien los consideró parte de la realidad en su artículo "*Negativo*" escrito para la Enciclopedia de Diderot, analiza situaciones como la siguiente: "*Se busca el valor de un número x, que sumado a 100 haga 50*", la traducción al lenguaje algebraico es: $x + 100 = 50$ con $x= -50$ y D'Alambert sugiere la forma equivalente $100- x = 50$ para evitar la emergencia del negativo. Problemas como el anterior y otros, conducen a la conceptualización del número negativo para Piaget, quien menciona: "*…La propiedad esencial del número no es estática y perceptual, sino dinámica y vinculada a la acción misma, interiorizada en operaciones. Desde este punto de vista*, e*l número negativo puede compararse con el positivo, es resultado de la misma acción, en el sentido más estricto del término, pero simplemente orientado en sentido inverso*" (Piaget, J., 1987).

1.3.2 G. Glaeser

Estudió en textos antiguos, el desarrollo histórico de los *números relativos*, con la intención de encontrar los obstáculos que se oponen a la comprensión y aprendizaje de los números negativos. En su estudio, revisó los trabajos de diversos matemáticos notables como Diofanto, Stevin, Descartes, McLaurin, Euler, D'Alambert, Carnot, Laplace, Cauchy y Hankel, con el propósito de identificar y analizar, los seis obstáculos epistemológicos que hubo que superar para la aceptación de los números negativos (Glaeser, G., 1981).

Los Obstáculos encontrados por Glaeser se enuncian a continuación:

Obstáculo 1 "*Ineptitud para manipular las cantidades negativas aisladas*"
(No aptitud)

Obstáculo 2 "*Dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas*"

Obstáculo 3 "*Dificultad para unificar la recta numérica*"
(naturaleza de la cantidad negativa contraria a la del número positivo)

Obstáculo 4 "*La ambigüedad de los dos ceros*"
(absoluto y origen)

Obstáculo 5 "*El estancamiento en el estadio de las operaciones concretas*"
(dificultad para desprenderse del sentido concreto de los números)

Obstáculo 6 *"Deseo de un modelo unificador. Aspiración de hacer funcionar un modelo aditivo igualmente válido para ilustrar el dominio multiplicativo en donde ese modelo es inoperante"*

La siguiente tabla contiene la información de los obstáculos de Glaeser vs Autores.

Autor	**Obstáculo 1** No se manipulan cantidades negativas aisladas	**Obstáculo 2** No se da sentido a cantidades negativas aisladas	**Obstáculo 3** No se unifica la recta numérica	**Obstáculo 4** Ambigüedad de los dos ceros	**Obstáculo 5** Se estancan en las operaciones concretas	**Obstáculo 6** Deseo de un modelo unificador
Diofanto	–					
Stevin	+	–	–	–	–	–
Descartes	+	¿?	–	¿?		
McLaurin	+	+	–	–	+	+
Euler	+	+	+	¿?	–	–
D'Alambert	+	–	–	–	–	–
Carnot	+	–	–	–	–	–
Laplace	+	+	+	¿?	–	¿?
Cauchy	+	+	–	–	+	¿?
Hankel	+	+	+	+	+	+

Tabla 1.1 Obstáculos de Glaeser vs. Autores de textos antiguos.

En la tabla anterior (tomada de Glaeser, G., 1981) los signo + y – indican si en los textos, los autores han superado el obstáculo epistemológico de Glaeser o no, los signos de interrogación indican información insuficiente. Maz (2005) menciona con respecto al trabajo de Glaeser que: "*Este trabajo fue punto de referencia obligado en trabajos posteriores al tema*".

El autor de esta tesis analiza la tabla de los obstáculos de Glaeser vs. Autores y externa que para el obstáculo No. 6, existe el modelo unificador dentro de la matemática formal establecido por Hankel en 1867, pero no desde el punto de vista de la conceptualización del negativo ni de la matemática escolar, ya que no existe un solo modelo de enseñanza que promueva la comprensión, interpretación, dominio operatorio y usos correctos en los enteros.

Además de Glaeser, otros autores han estudiado el trabajo de los matemáticos que contribuyeron al desarrollo del número negativo, de entre estos matemáticos destaca Simon Stevin, quien según la *Enciclopedia Británica* (Varios, 1910-11) y O'Connor & Robertson (2004) es considerado el ***Padre de los números negativos***, por sus contribuciones a la operatividad y conceptualización de estos números, en la que sobresalen algunos hechos, como la equivalencia entre la sustracción de un número positivo y la adición de su negativo.

Además, Pluvinage y Flores (2016), en su artículo de la *Génesis Semiótica de los Enteros*, analizan hechos que dieron origen a la simbolización relacionada con los números negativos y con el álgebra, a quien Pluvinage considera "gemelos" por su proceso de construcción simultánea, reconoce este autor que a Stevin se debe la introducción de la recta numérica para representar a positivos y negativos, así como el plano cartesiano y no a John Wallis como se había creído, la evidencia puede encontrarse en la obra de Stevin *L'Arithmetique* (1585), en la cual utiliza la semi-recta para representar a los números relativos y en la que también se encuentra la regla de los signos para la multiplicación de números positivos y negativos.

1.3.3 H. Freudenthal

Llevó a cabo un estudio histórico, encontró que los números negativos surgen alrededor del año 1500 y tres siglos tendrían que pasar para aceptarlos totalmente, mientras que las magnitudes dirigidas son una invención del siglo XIX, menciona que los negativos surgen en la resolución de ecuaciones y expone la *emergencia de la racionalización sobre la intuición en los negativos*, menciona también que prefiere a estos números antes que a las fracciones, aunque por tradición se enseñan al revés: "*las fracciones se encuentran en la aritmética y los negativos en el álgebra*". "*Por lo general, los enteros negativos son abordados intuitivamente con la recta numérica y resulta muy útil este enfoque*". Otra forma de enseñar a los enteros negativos sin necesidad de la recta numérica es a través de lo que Freudenthal denomina ***el método inductivo-extrapolatorio***, "*se trata de una extrapolación al otro lado del cero*", "*Es un complemento dinámico de la contemplación pasiva de la recta numérica, que se verifica por medio de cálculos e inferencias*" (Freudenthal, H., 1973, 1983).

Freudenthal, muestra el método inductivo-extrapolatorio, tablas como la siguiente:

$3 + 2 = 5$	$3 - 2 = 1$	$3 \bullet 2 = 6$	$(-3) \bullet 2 = -6$
$3 + 1 = 4$	$3 - 1 = 2$	$3 \bullet 1 = 3$	$(-3) \bullet 1 = -3$
$3 + 0 = 3$	$3 - 0 = 3$	$3 \bullet 0 = 0$	$(-3) \bullet 0 = 0$
$3 + (-1) = \cdots$	$3 - (-1) = \cdots$	$3 \bullet (-1) = \cdots$	$(-3) \bullet (-1) = \cdots$
$3 + (-2) = \cdots$	$3 - (-2) = \cdots$	$3 \bullet (-2) = \cdots$	$(-3) \bullet (-2) = \cdots$

Tabla 1.2 Método inductivo-extrapolatorio de Freudenthal.

Freudenthal considera que este método es un complemento valioso en el enfoque intuitivo de la recta numérica, expone que, de otra manera, el uso exclusivo del método resulta en un acercamiento más natural. Desde el punto de vista del autor de esta tesis, el docente puede hacer dinámico y significativo el aprendizaje de los enteros en la recta numérica utilizando estrategias parecidas a las de Freudenthal, como son, las propuestas mostradas más adelante en este trabajo y hechas por investigadores de la didáctica y la enseñanza de los enteros como Peled (2007), Bruno (1997) y Cid & Bolea (2007).

1.3.4 E. Fishbein

Trabajó también con los números negativos, mencionando que estos no tienen el mismo carácter intuitivo que los positivos, que son artificiosos, como lo menciona Freudenthal (1973) cuando habla de la "*necesidad de la racionalización sobre la intuición en el número negativo"*. Fishbein por su lado comenta que "*El principal obstáculo consiste en… que el concepto de número negativo refuta el concepto mismo de número… y contradice la existencia de sí mismo… surgieron en la historia de las matemáticas como… artefactos,… subproductos de problemas matemáticos diseñados inadecuadamente*" (Fishbein, E., 1987). Considera el problema de la multiplicación de un número positivo y uno negativo desde la intuición, indica que es correcto el pensar que el primer factor positivo, se relacione al número de veces que se suma el segundo factor de naturaleza negativa. Esta situación aparece en el presente trabajo de investigación cuando la docente D11E, entrevista al docente de telesecundaria durante la construcción del concepto del *número de oxidación*; pero el producto de un número negativo por uno positivo parece ser no intuitivo y se recurre a la propiedad conmutativa de la multiplicación para solventar este hecho, a menos que esta conmutatividad sea representada por una situación intuitiva como la que se plantea en este estudio. Fishbein contribuyó a la educación matemática introduciendo la *psicología educativa* en el terreno de las matemáticas y fue uno de los fundadores del PME, *The International Group for the Psychology of Mathematics Education*, es reconocido por su influyente contribución al conocimiento y comprensión de la *intuición* en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y las ciencias (Tirosh, D. y Dreyfus, T., 1998).

1.3.5 A. Sfard

Las concepciones matemáticas del número negativo, históricamente tienen una difícil y tardía construcción para llegar a ser constructos abstractos, este hecho es observado por Sfard (1991), quien en su escrito de la doble naturaleza de los conceptos matemáticos, propone un marco teórico para investigar el rol de los algoritmos en el pensamiento matemático a través de diferentes definiciones y representaciones, (como es el caso del número negativo en sus transición al número relativo y posteriormente al número entero), en el cual hay dos formas de ser concebidas, *estructuralmente* – como objetos y *operacionalmente* – como procesos, "*Estas dos formas parecen incompatibles pero son de hecho complementarias*" menciona la investigadora. Revisa en la historia, ejemplos en los cuales a la luz de la teoría del esquema cognitivo, la concepción operacional es el primer paso en la adquisición de nuevas nociones matemáticas (como la del número negativo) y a través del análisis de las etapas en la formación de conceptos, nos lleva a la conclusión de que la transición de las operaciones de cálculo a objetos abstractos es lento y difícil. Este hecho constituye de cierta forma un problema histórico-epistemológico en los números negativos, ya que a lo largo de la historia se ha construido el concepto del *entero* con diferentes concepciones partiendo de su operatividad. El mismo problema del pasado ocurre actualmente. Este hecho es analizado en la *observación directa de la enseñanza de los enteros* en la presente investigación. Los constructos están ya establecidos, pero la didáctica y el arribo de la concepción del objeto-operación o de la complementariedad de la *estructura* - *proceso* representa el reto de la enseñanza.

1.3.6 L. Hefendehl-Hebeker

Estudió los números negativos también, desde una perspectiva histórica, reconoce los obstáculos en la evolución de constructos de tipo intuitivo al tipo intelectual, comenta que "*los números negativos son matemáticamente simples, pero didácticamente demandantes*" y lo ilustra con la interpretación de Lietzmann de 1924, quien comenta que el nivel abstracto de los números negativos a nivel de una maestría no asegura que el profesor invente una ingeniosa introducción acorde al pensamiento y acción de los pupilos. Además comenta los obstáculos que resultan del estudio empírico aplicado al sujeto denominado – *Nico* - al que se le presenta la operación $(+3) + (-3)$, quien produce interpretaciones incorrectas, producto de considerar a la adición siempre como un incremento, a la adición de cero como un caso especial sin efecto, y a la adición de algo menor que la nada como algo oscuro.

También compara la interpretación de este estudiante – *Nico* - con la respuesta de Pascal, "*Conozco a quienes no entienden que cuando substraes cuatro de cero, lo que queda es cero*", obstáculo que proviene de la enseñanza de las cantidades dentro de la aritmética. Para ilustrar otras dificultades intelectuales en la evolución del negativo, la investigadora menciona la autobiografía del escritor francés Stendhal en 1797, quien estudió matemáticas desde joven y a los trece años pregunta a su profesor el por qué "*menos por menos resulta en más"*, el docente responde diciendo que sólo quiere molestar, porque que esta regla la aceptaron personajes como Euler y Lagrange y él no, entonces a éste, le llevó tiempo concluir tal objeción. En este contexto, específicamente, los siguientes obstáculos tuvieron que ser superados:

1) "- *No había noción de una recta numérica uniforme* -. El modelo consistía en dos semi-rectas orientadas en direcciones opuestas, lo cual provocó la insistencia en no ver a estos números como – relativos -".
2) "El ver por mucho tiempo al cero como - *cero absoluto* - con nada por debajo de él, es una reminiscencia del punto de vista de Pascal. La transición al *cero origen* en la recta numérica se veía venir entonces".
3) "*El apego al punto de vista concreto*, esto es, asignar a los números y operaciones el - *sentido concreto* –".
4) "En particular, uno sentía la necesidad de introducir *un sólo modelo* que diera explicaciones satisfactorias a todas las reglas del cálculo con números negativos".
5) "El problema clave fue la *eliminación de la noción Aristotélica* del número subordinado a la magnitud".

(Hefendehl-Hebeker, L., 1991).

Los obstáculos presentados por Hefendehl-Hebeker son en un sentido un complemento de los obstáculos presentados por Glaeser.

1.3.7 H. Hankel

Reconoce y legitima a los números negativos como entidades independientes con una estructura algebraica propia, en su obra *Theorie der complexen Zalhensysteme*, otorgándoles el estatus de *números enteros*. Realiza la extensión numérica de los naturales a los enteros y complejos dentro del marco de la matemática formal, independiente de las nociones de cantidad y magnitud (Hankel, H., 1867).

Para asegurar el contenido interpretable en la matemática formal, Hankel establece otro requisito, *el principio de permanencia de las leyes formales*, (Hefendehl-Hebeker, 1991) esto es, las fórmulas válidas en el sistema de los números naturales son válidas en los sistemas numéricos extendidos. Un ejemplo de este principio con la conexión de los números negativos, es el siguiente: se requiere obtener la suma de $(-3) + (-4)$, para ello partimos de los axiomas de los números naturales, de la ley conmutativa, la asociativa y las propiedades del cero.

La solución de las ecuaciones $x + n = 0$ * donde *n* es un natural y con el negativo -*n* obtenemos la expresión $(-n) + n = 0$.
Para sumar $(-3) + (-4)$:
Definimos las operaciones a partir de la ecuación*, entonces tenemos $(-3) + (3) = 0$ y $(-4) + (4) = 0$, sumando ambas, resulta en $[(-3) + (-4)] + [(3) + (4)] = 0$. El segundo paréntesis cuadrado agrupa la suma de dos naturales =7, y de acuerdo a la ecuación*, resulta que $(-3) + (-4) = -7$. Este principio está ilustrado en la sección 1.5 de este capítulo con las definiciones actuales de los enteros.

En este punto de la construcción de los negativos, queda completa la teoría numérica de los enteros, fortalecida con conceptos como el de *sistema de referencia* y de *vector*. "*En física, ahora cobra sentido hablar de voltajes, velocidades, fuerzas, etc., todos ellos negativos. De esta forma se obtienen descripciones más sencillas y se simplifican los cálculos*". La relación entre número y cantidad se invierte, ahora la magnitud queda subordinada al número.

Para el autor de la presente tesis faltaría incluir en estas ideas a la *Química* y a sus ciencias auxiliares, derivadas o relacionadas, desarrolladas en los siglos XIX y XX, como las Físico-Químicas, Bio-Químicas y la Tecnología, entre otras, como actividades científico-tecnológicas que dan significado a los números negativos. *Es decir la negatividad en las Ciencias y en la Tecnología cobra sentido*.

1.3.8 G. Schubring

Estudió el proceso de desarrollo del concepto matemático del número negativo, realizó estudios históricos analizando textos franceses y alemanes, categorizando los obstáculos en su aceptación y formalización:

- *Obstáculos internos a las matemáticas*: Tiene que ver, con las dificultades para definir y distinguir los conceptos de cantidad, magnitud y número como conceptos independientes y su relación con la tardía aceptación de los negativos.
- *Obstáculos epistemológicos*: Relacionados con la transmisión del conocimiento científico y diferencias entre lo físico y lo conceptual como rupturas en el ámbito de los negativos. *"Por epistemología, se puede entender las concepciones sobre las condiciones de – existencia- de las entidades matemáticas*"
- *Arquitectura de las matemáticas*: Debidas a la importancia que históricamente se da a las ramas de las matemáticas, como el álgebra y la geometría, dando mayor importancia a la cantidad en el caso de la geometría, que al número.

Realiza otro estudio histórico, rescatando las consideraciones de los negativos en diversas culturas, analiza a Bhaskara, Chuquet, Leonardo de Pisa, Cardano, Arnauld, Preset, Reyneau y D'Alambert (Schubring, G., 1986,1988).

1.3.9 E. Lizcano

Realiza un estudio comparativo entre la matemática China y la Griega, en cuanto a la negatividad. Muestra cómo aparecen estos números primero en China y después tardíamente en occidente, y cómo el componente filosófico influye en la aparición de nuevos conceptos. Da una idea clara de que la investigación epistemológica de los negativos está ligada a la investigación histórica y sociológica. Revela la conceptualización del número negativo, las reglas del positivo-negativo, la concepción del cero, la oposición, algoritmos para la suma, resta, multiplicación y división, el método para la resolución de sistemas de ecuaciones, y la relación de la matemática con la filosofía oriental. Estudia las matemáticas de la antigua Grecia, con Aristóteles y su "*tropiezo con el cero*", y con el "*álgebra geométrica como campo inhóspito para los números negativos*", después "*la quiebra del ideal clásico con las ideas de Diofanto o la primera emergencia occidental de la negatividad*" (Lizcano, E., 1993).

1.3.10 A. Gallardo

Llevó a cabo un estudio histórico-crítico de los números negativos en el contexto de la resolución de ecuaciones, algunos aspectos de este trabajo aparecen a continuación (Gallardo, A., 1994, 2002, 2009):

- Justifica la incidencia de los negativos en el proceso de enseñanza de la resolución de ecuaciones.
- Realizó un análisis del aspecto conceptual de los números negativos en su evolución histórica, abarcando los siglos XII al XV.
- Estudió antecedentes en las culturas china, griega, india y árabe. El análisis lo realizó mediante la revisión de capítulos de textos antiguos de matemáticas que presentaban alguna evidencia del estatus del número negativo tanto en problemas como en la resolución de ecuaciones.
- Revisa el capítulo VIII del texto chino, *Fiu Zhang-suanshu* (*Libro de los Nueve Capítulos del Arte de las Matemáticas*); La *Aritmética de Diofanto*; El capítulo XVIII *Cuttacad'hyaya* del libro de Brahme-sphuta de Bramagupta; Los libros *Lilavati* de aritmética y del *Vijagánita* de álgebra de Bhâskara; *Liber Algebrae et almachabala* (Ciencia de la transposición y la reducción) de Al'Kawârizmi; *Al-Báhir fil-hisáb* (El ilustre libro del cálculo) de Al-Samaw'al; *La Flos* de Leonardo Pisano; *El Ars Magna* de Girolamo Cardano; *Triparty en la Science des Nombres* de Nicolás Chuquet: *Invention nouvelle en L'Algebre* de Albert Girard. Estos textos y sus contenidos están relacionados a las soluciones negativas, vistas desde las categorías de *lenguaje utilizado*, *método de resolución*, *operatividad* e *interpretación de los números con signo.*
- Examinó los distintos niveles del lenguaje, los métodos y estrategias utilizadas para la resolución de problemas algebraicos a lo largo de la historia en el periodo mencionado.
- Estableció que ha existido: *"una larga trayectoria histórica de evitamiento y reconocimiento de los números negativos en el contexto de las ecuaciones algebraicas"*

- Enfatizó que la problemática de los números negativos no está ubicada en un lugar particular de la historia, sino que*: “los términos sustractivos*, *las leyes de los signos, así como ciertos elementos necesarios para la operatividad con números negativos aparecen desde épocas remotas en el contexto de la resolución de ecuaciones algebraicas”.*
- Expresó que*: “los conceptos opuestos de ganancia y pérdida, propiedad y deuda, futuro y pasado, venta y compra son interpretaciones adecuadas para positivos y negativos.”*

Otra aportación de la investigadora, consiste en un estudio empírico implementado mediante una propuesta didáctica en secundaria, utilizando el Modelo Chino-Gallardo (1994) para traer de la antigua cultura china, el modelo para la operatividad de la adición y sustracción. Este estudio permitió identificar las ventajas y dificultades este modelo concreto. Como aportaciones, encuentra la interpretación de la adición como la de juntar, reunir o agrupar cantidades positivas o negativas, encuentra la significación de la sustracción a través de la acción de “*quitar*”, pudiendo resolver esta, con minuendos y sustraendos tanto positivos como negativos. Los sujetos competentes (alumnos), encuentran diferencias conceptuales de las operaciones a través de los códigos del modelo (presentadas más adelante en esta sección), también encuentra las dificultades surgidas en la implementación de esta propuesta, explicadas a través de las *tendencias cognitivas* (explicadas en el Marco Teórico).

Del mismo modo en que Maz (2005) enfatiza que la obra de Glaeser (1981) es un referente obligado en el estudio de los números negativos, el autor de la presente tesis, considera que los estudios de Gallardo (1994, 2002, 2009), en especial, el de los de los *niveles de conceptualización de los números negativos*, los de la *triple naturaleza de la sustracción*, así como los de *la triple naturaleza del signo menos*, (explicados más adelante dentro del Marco Teórico) son necesariamente un referente para el estudio y análisis de situaciones relacionadas con este contenido matemático desde la Matemática Educativa.

1.3.11 J.L. González Marí

Efectúa un estudio histórico y epistemológico de los números enteros, realiza reflexiones sobre la historia, la enseñanza y la fenomenología de los números naturales y enteros, estudia los conceptos que intervienen en la construcción de estos últimos, postulando la existencia de otro conjunto de números entre los naturales y los enteros cuya asignación es didáctica y cognitiva, llamados *números naturales relativos* ($\mathbf{n_r}$)

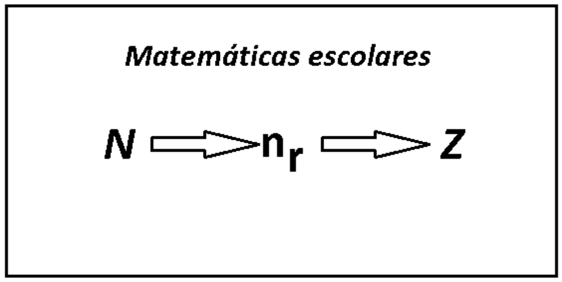


Fig. 1.1 Los números naturales relativos entre los naturales y enteros.

El autor antes mencionado establece cinco diferencias lógico-estructurales (DLE) de los $\mathbf{n_r}$ al pasar de ***N*** a ***Z***. En la tabla 1.3 se encuentran expresadas estas diferencias estructurales[1].

Conjunto numérico / Diferencia Lógico-Estructural	**N** **Estructura natural**	$\mathbf{n_r}$ **Estructura relativa**	***Z*** **Estructura entera**
DLE1 Del orden	Orden total	Orden parcial	Orden total
DLE2 Referencia a un elemento	Sin primer elemento	Con primer elemento	Sin primer elemento
DLE3 De la continuidad	Punto de origen[2]	Discontinuidad de medidas	Continuidad de medidas al cruzar el cero
DLE4 Del cero	Cero origen[2]	Cero doble	Cero único
DLE5 Composición aditiva	Adición natural	Adición natural y anulación-compensación	Adición entera

Tabla 1.3 Diferencias lógico-estructurales entre los enteros y los naturales relativos de González Marí.

[1] Esta tabla ha sido reorganizada por el autor de esta tesis.

[2] Se refiere a la *serie natural ampliada* Z_0 (explicada en el apartado 1.5), la cual incluye al cero y sus propiedades.

Las diferencias lógico-estructurales de **n_r** que aparecen, entre los naturales y los enteros se explican a continuación:

- **DLE1. Orden total-orden parcial**

  En los naturales sólo existe una región, la positiva, en la cual hay un orden total entre dos o más números o cantidades.

  En el caso de los números naturales relativos hay una comparación arbitraria de números o cantidades en dos regiones, son números relativos los asociados a "*ganar, perder", "peor y mejor", así como "subir y bajar".* En la región negativa, "*Deber 10 € es más que deber 5* €" En n_r, existe independencia o ausencia de términos que signifiquen a las comparaciones.

  En ***Z***, el orden está bien establecido, no importa si la comparación se realiza en la región positiva, en la negativa o cruzando el cero, "*-5* es mayor en valor absoluto pero, menor que *-1".*

- **DLE2. Sin-Con primer elemento.**

  En el caso de los naturales, hay un punto de partida, o de llegada en una situación de desplazamientos, con avances y retrocesos en el que existen adiciones y sustracciones con resultados positivos.

  Los naturales relativos aparecen en contextos concretos, como cuando un objeto puede disminuir su altura hasta el cero, y otro objeto puede disminuir su profundidad hasta cero, en ambas situaciones no tiene sentido cruzar el cero, basta utilizar naturales, como 20m de altura y 5 m de profundidad. Aparece la redundancia entre adjetivo y signo como en: gané +5 pesos, y bajé -2 pisos. La simbolización matemática es superflua para n_r.

- **DLE3. Continuidad-Discontinuidad de medidas.**

  En los naturales sólo es posible comparar valores positivos.

  En los relativos la comparación no tiene sentido cuando se comparan cantidades de diferentes regiones, pero sí se pueden comparar dos cantidades de la misma región, como en la comparación de temperaturas, la diferencia entre 5 °C bajo cero y 10 °C bajo cero es de 5°. En los enteros las comparaciones pueden realizarse en ambas regiones, incluso cruzando el cero.

- **DLE4. Cero único, cero doble.**

  En los naturales, el cero no existe, pero en la recta numérica es utilizado para ilustrar la operatividad de suma y resta con el sustraendo menor que el minuendo. En la tabla 1.3 se incluyen a los naturales, para observar las diferencias de n_r surgidas en la extensión de N a Z y el cero sólo puede existir como punto de origen, cuando se utiliza el concepto de *serie natural ampliada de los naturales* con el cero como elemento precedente de los naturales.

  En cuanto a los naturales relativos, las representaciones asociadas al cero como “no subí, quedé en la misma posición, no subí nada”. El cambio de posición es cero. Otras representaciones asocian un signo al cero, convirtiéndolo en dos ceros, el cero positivo y el cero negativo, dependiendo de la región de donde provenga la anulación.

  En el caso de los enteros, el cero es el mismo, aunque provenga la anulación de la región positiva o negativa.

- **DLE5. Adición con anulación compensación.**

  En los naturales la adición se define a parir del consecutivo, con sumandos y suma positivos.

  En los naturales relativos, la suma se realiza con una anulación o compensación: “Un número positivo y un número negativo con el mismo valor absoluto se anulan”.

  En los enteros la suma está definida mediante los postulados de la sección 1.5.2.

El autor, sostiene que “*los números naturales relativos perviven en los manuales escolares y libros de divulgación actuales junto con los enteros, y con su misma notación; no así en los libros de la matemática formal*”
(González, J.L., 1995).

En el presente estudio se indaga en esta aseveración, pero en lugar de manuales o textos, se postula la existencia de este hecho en los profesores de secundaria en México, quienes enseñan números relativos en lugar o a la par de los enteros.

1.3.12 R. Ribeiro

Analizó el problema de la ley de los signos surgida en los números negativos, reduciendo la problemática epistemológica a las estos cuatro aspectos:

1. "*¿Cómo tomar el más grande del más pequeño? 3 – 5=*"
2. "*¿Cómo sustraer un número negativo?* $-(-3)$"
3. "*¿Qué significa multiplicar por menos? (-3) x"*
4. "*¿Por qué el menos por menos es más*? (-2) (-3)= "

El autor justifica las cuatro preguntas anteriores con la asistencia de la *abstracción reflexiva* y la *generalización* de Piaget. El uso de la estrategia didáctica lo justifica a partir de la teoría de situaciones y la de los campos conceptuales. (Ribeiro, R., 1997).

Analizando la problemática epistemológica de Ribeiro, encontramos:

En la primera cuestión, se utilizan números relativos. Ribeiro menciona "grande" y "pequeño", siendo que el uso de estas palabras representa un obstáculo según González Mari (1995). Para ilustrar la cuestión, se tiene: *¿Cómo tomar 5 de 3, es decir* $3-5=$*?* La respuesta no tiene solución en el conjunto de los naturales. Este hecho y lo que pasa con esta pregunta, es discutido posteriormente en la presente investigación. La representación más general de la cuestión es: ¿Cómo sustraer un número, de otro menor que él? $a - b \ con \ b > a$, con a, b naturales.

La cuestión 2, representa una situación compleja, para algunos, desde la epistemología, *¿Cómo quitar algo menor que la nada?* En la enseñanza *parece faltar un contexto apropiado para sustraer un negativo* (Cid, E., 2007), como en la operación $0-(-3) =$, cuya forma de obtener la solución, en un contexto que, parece ser apropiado, se presenta en este estudio. La forma general de esta situación es la siguiente: ¿Cómo sustraer un negativo?: $a - b$, con $b < 0$. Ribeiro considera en este punto que la expresión, "– (-3)=" es una sustracción, cuando realmente representa una simetrización, o la negación de un número en la cual subyace el concepto de simétrico: "$-(a) =$" Esta situación, también es observada en esta investigación, así como la utilidad del simétrico en la enseñanza dentro de la operatividad y conceptualización del número negativo.

En la cuestión número tres de Ribeiro, se plantea lo que le hace un número negativo a una expresión, como en el caso de "$(-3)\,x\ =$" , cuyo significado podría interpretarse como : tres veces el simétrico de x, no importando si ésta, es mayor, menor o igual a cero.

La cuarta pregunta, no puede ser explicada por los niños, durante la enseñanza de los problemas multiplicativos y aditivos, de enteros en secundaria, pero tampoco la pueden responder la mayoría de los docentes. Cuando a éstos se les cuestiona por qué menos por menos es más, producen respuestas que son examinadas en esta tesis. No es lo mismo plantear $(-)\,(-)\ =\ +$, que $(-5)\,(-8)\ =\ 40$, o de manera general, en la multiplicación: Si $a < 0 \wedge b < 0$ entonces $ab > 0$. El autor pregunta ¿por qué menos por menos es más?, no correspondiendo con la expresión mostrada: (-2)(-3), preguntando ¿por qué el producto de dos números negativos es positivo?

1.3.13 A. Maz

Es otro autor que ha trabajado con el método histórico-crítico y que ha desarrollado un análisis histórico del número negativo, haciendo un recorrido, desde la antigüedad hasta el siglo XVII dentro de los antecedentes de su trabajo. Identifica las diferentes concepciones de la construcción histórica, del número negativo. Analiza a autores como Glaeser, Schubring, Gallardo, Lizcano y González Marí dentro del contexto histórico-epistemológico del número negativo. Reconoce el contexto histórico, social, educativo y político de España durante el periodo de análisis.

En el cuerpo de su investigación, examina y analiza el contenido de los negativos en los libros de texto españoles utilizados en los siglos XVIII y XIX, desde las perspectivas históricas y de la enseñanza. Analiza sus características desde el *análisis del contenido,* con argumentos epistemológicos, cognitivos, didácticos y fenomenológicos de los números naturales relativos de González Marí (1995).

Encuentra y clasifica a los autores de los libros de texto españoles, a sus obras y al contenido de los números negativos en ellos. Caracteriza a la obra y al autor, de acuerdo al contenido del texto relacionado con la noción de número, cantidad, noción del natural, nociones de número general, incógnita y ecuación. Por otro lado caracteriza el contenido del libro de acuerdo al significado del negativo y si la obra presenta a los signos + y -, si presenta cantidades negativas, el tipo y su naturaleza, si se les considera menores que la nada, si aparecen operaciones de cantidades negativas, si hay ejemplos, interpretaciones y utilidad de los negativos. (Maz, A., 2005).

Una pequeña muestra resumida del análisis de una obra en su trabajo es la siguiente:

"*Compendio mathematico. Tomo I y II (1707-1709)"*
"Autor: *Tomás Vicente Tosca*"
En el texto sólo se tratan las cantidades negativas en el tomo II del Álgebra.

"*Tratamiento dado a los negativos"*

"**TSN1[3].** Significado y presentación de los signos + y - ."
"[…] *esta señal + significa Mas: y este – significa Menos: del primero vfaremos quando vna quantidad fe ha de juntar con otra, ó afirmar de ella: y del segundo, quando una cantidad se ha de quitar, o negar de otra; y por efta caufa el señal + se llama Afirmativo […] y el otro feñal – fe llama Negativo*. (p.6)"

"*El signo + significa la suma que fe ha de hazer de dos cantidades*. (p. 73)"

"*El signo - , sirve para denotar, que la magnitud siguiente a dicho numero se ha de restar de la que le precede*. (p. 73)"

[3] TSN1. Clave consecutiva de Categorización del autor. Tratamiento sobre los números negativos.

“**TSN2**. Presentación de las cantidades negativas”

“*y por esta causa el señal + se llama Afirmativo: y la cantidad que se le sigue se dice afirmada: y el otro señal – se llama Negativo y la cantidad que se le sigue, se dice Negada*. (p.6)”

“**TSN3**. Naturaleza de las cantidades negativas.”

“*La cantidad que lleva antes de si el signo -, se llama cantidad negativa, defectiva o falsa; y todas las que no son negativas, se llaman positivas, ó reales. Las magnitudes positivas, son más que nada; pero las negativas, son menos que nada* (p.73).”

“*También las cantidades cuyas partes, ni ván unidas con el signo + ni separadas con el signo -, fe llaman abfsolutas, é incomplexas; y todas las demás fe llaman compueftas, y complexas; (p. 73).”*

1.3.14 I. Kant

Escribe su ensayo para introducir las magnitudes negativas en la filosofía. Su postura radica en dos premisas principalmente, la primera, está basada en la existencia de opuestos reales, y la segunda en la equilibración de estos opuestos reales. La definición de cantidad negativa existe sólo en el entendido de que existe su cantidad opuesta que la anula. El filósofo comenta que las reglas operativas posibilitan su uso, pero no su concepción, ya que había concepciones extrañas y contradictorias. Establece el rechazo a que las cantidades negativas sean menores que la nada. Caracteriza mediante haberes y deudas, avances y retrocesos, subidas y bajadas a los números negativos en el sentido de los opuestos. Su posición filosófica imponía respetabilidad en el mundo social y científico de la época, invitó a otros filósofos y matemáticos a participar en su trabajo para completar su teoría filosófica-matemática. (Kant, I., 1763). Es importante señalar que este filósofo participa en la construcción del número negativo y por tanto en su obra se nota la dificultad en la identificación del signo de la operación con el signo del número. Para ilustrar esta situación, Kant utiliza el siguiente ejemplo:

Un barco avanza con vientos del este con trechos (+) (positivos) y retrocede con vientos del oeste con trechos (-) (negativos), y los números representan millas, así un viaje queda representado como +12+7-3-5+8=19 millas que ha avanzado hacia el oeste. El autor de la presente Tesis observa que estas operaciones son una combinación de sumas y restas de números positivos, y no se ve propiamente al número negativo, este hecho aparece en la enseñanza actual de los enteros, por tanto se considera a esta forma, como la de un sujeto histórico que está en un nivel intermedio en la construcción de éste tipo de números.

1.4 Investigaciones Teórico-Experimentales y Didácticas de los negativos o enteros

En esta sección se presentan algunas investigaciones realizadas a partir de trabajos empíricos para desarrollar constructos teóricos.

1.4.1 G. Vergnaud

Estudia a los números negativos, sus concepciones y su operatividad en el contexto escolar. Al respecto comenta lo siguiente: "… *El cálculo con los números relativos se enseña antes de introducir la ecuación y el tratamiento de ecuaciones… El álgebra juega un papel esencial en el significado de los relativos,… Un obstáculo epistemológico evidente, es la reducción del concepto de número al de medida… y …cantidades. Este obstáculo manifestado por los alumnos es reforzado por los programas escolares y los modelos de enseñanza que no dan lugar a otras interpretaciones del número negativo… El problema didáctico… consiste en crear las condiciones para que los estudiantes representen algebraicamente los problemas utilizando en forma simultánea los números sin signo y los números con signo*". Este autor, otorga importancia a las representaciones a través de diagramas sagitales, en el que identifica por un lado a las medidas y por otro a las transformaciones, y las relaciones entre éstas, para resolver el problema didáctico de usar números con y sin signo simultáneamente en el álgebra. (Vergnaud, G., 1982).

Para ilustrar el diagrama sagital en la introducción de los números con y sin signo simultáneamente, se presenta la circunstancia: La ecuación $x + 14 + (-31) = 23$ puede representar la situación en que un sujeto en el estado 1 tiene x cantidad, obtiene 14 unidades más, y en otro momento pierde 31 unidades, llegando al estado 2 con 23 piezas en total, la incógnita representa la cantidad original. En el diagrama sagital:

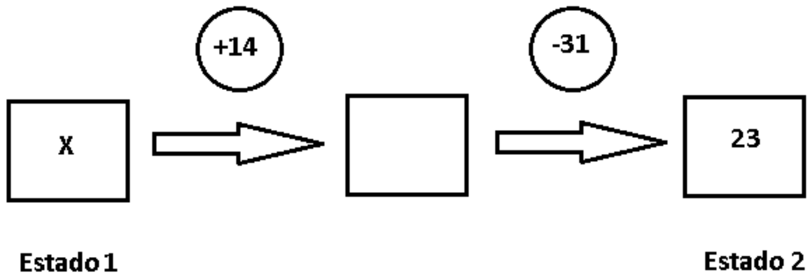


Fig. 1.2 Diagrama sagital (Vergnaud, G., 1982) representa cantidades (cuadros) y transformaciones (círculos).

1.4.2 H. Freudenthal

Utiliza a la recta numérica para introducir a los números enteros y operar con ellos. Se auxilia del plano semántico para llegar al nivel sintáctico como se muestra en la siguiente tabla (Freudenthal, H., 1983):

Nivel semántico	**Nivel sintáctico**
Sumar un número positivo a otro	$x \longrightarrow x + a$
Sustraer un número positivo de otro	$x \longrightarrow x - a$
Sumar un negativo es lo mismo que sustraer su opuesto	$x + (-a) = x - a$
Sustraer un negativo es lo mismo que sumar su opuesto	$x - (-a) = x + a$

Tabla 1.4 Paso del nivel semántico al sintáctico de Freudenthal en operaciones en Z.

En la tabla anterior se considera $x, a, \epsilon \boldsymbol{N}$.

1.4.3 C. Janvier (1983).

Clasifica a los modelos utilizados en las operaciones de adición y sustracción como:

a) "Modelo de la recta numérica"
b) "Modelos de equilibración"
c) "Modelo híbrido"

"*En el modelo de la recta numérica, los números son representados con posiciones o desplazamientos.*". En la figura 1.3 se muestran las representaciones punto y segmento.

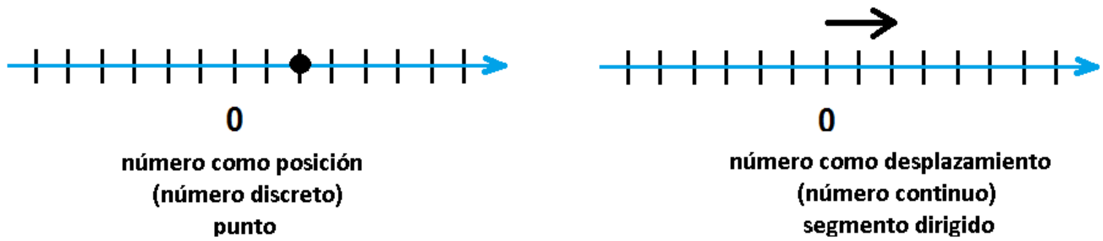


Fig. 1.3 Representación punto y segmento de un entero.

“*La suma es una composición de dos cambios o el cambio (transformación) de un estado a otro*.”. En la figura 1.4 se muestran las representaciones punto-segmento y segmento-segmento para la adición.

En la adición: 3 + (-2), las representaciones en la recta son:

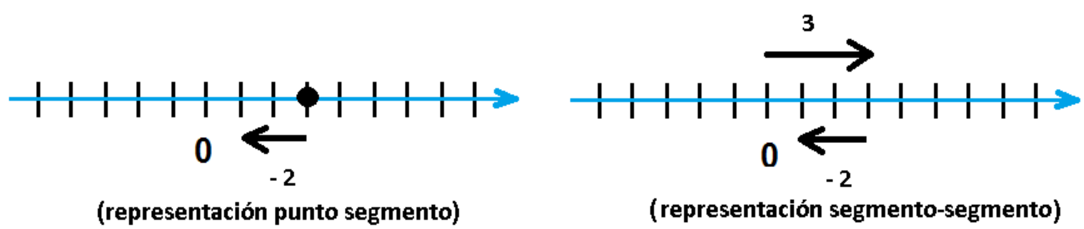


Fig. 1.4 Representación punto-segmento y segmento-segmento en la adición.

En la figura 1.5 se muestran los resultados de la suma como posición y como segmento.

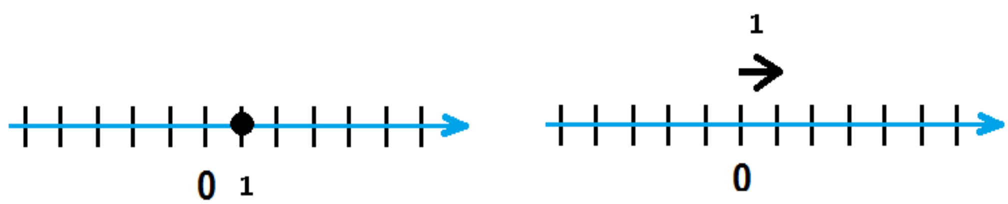


Fig. 1.5 Representación de la suma de dos enteros, con posición y vector.

“*Para la sustracción, puede aplicar sumar el opuesto*”.

En esta situación, surge el nivel de conceptualización del número negativo como *relativo* (Gallardo, A., 1994) cuando se utiliza a la Recta Numérica como modelo para realizar la sustracción de enteros. En cuanto a la recta, el autor referido, indica que los estudiantes no dan sentido a las operaciones efectuadas sobre ésta.

Con respecto a los modelos de equilibración, comenta de los negativos, que son objetos de naturaleza opuesta, como en el caso de los pares dialécticos "*lleno-vacío, objeto negro-objeto blanco y* ***protón-electrón****"*, éste último par, referido a sus cargas eléctricas es utilizado como contexto auténtico por una docente, observada en esta investigación.

Con respecto al modelo híbrido, Janvier comenta que junto con Ahmed Daif, descubrieron un modelo que utiliza tanto a la recta, como la idea de equilibrio. Los números signados son representados por las acciones sobre un globo aerostático el cual contiene pesas que ejercen una fuerza descendente y globos que ejercen una fuerza ascendente. El efecto está indicado mediante etiquetas pegadas, tanto a las bolsas-pesas o a los globos auxiliares.

"*La adición es claramente identificada con la acción de agregarle objetos al globo aerostático, la sustracción está definida con la acción de removerle objetos. Vemos que quitar una bolsa que provoca que eleve 4 metros, es equivalente a agregar un globo auxiliar que provoca la elevación de 4 metros*" (Janvier, C., 1983,1985).

La figura 1.6 representa la situación del globo en equilibrio, a la que se le agregan o quitan globos auxiliares, y también se pueden quitar o colocar bolsas-pesas.

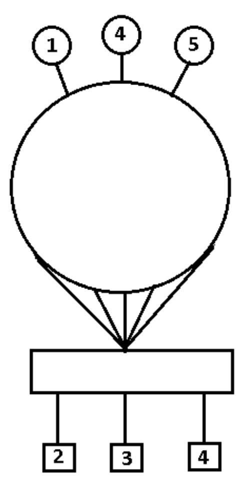


Figura 1.6 Representación esquemática del modelo híbrido de Janvier.

1.4.4 P. Ernest

Estudia a la recta numérica y la considera como auxiliar en la enseñanza de las matemáticas escolares, en las operaciones de suma y resta de números enteros. Este hecho es apoyado por textos que incluyen métodos matemáticos elementales para enseñar la adición y sustracción de enteros de una cifra. Por otro lado, en la planeación del currículum está contemplada la habilidad de operar con ayuda de la recta numérica, entre sus objetivos. Además algunos educadores matemáticos consideran ésa habilidad de operar en la recta numérica como uno de los comportamientos que representan una señal del entendimiento de las operaciones elementales con los enteros.

Propone tres usos de la recta numérica con fines para:

1. El orden. (como modelo ordenador)
2. Modelo para las operaciones. (para la comprensión operacional)
3. Contenido en sí. (como elementos de contenido)

(Ernest, P., 1985)

1.4.5 A. Bell

Dentro de la investigación y experiencias didácticas, Bell (1986) utiliza la ***enseñanza por diagnóstico***, cuyo método de enseñanza consiste en:

- "*…el estudio de la comprensión que poseen los alumnos del tema*"
- "*la identificación de los errores y las falsas concepciones*"
- "*el diseño de la enseñanza en la que las falsas concepciones sean expuestas y resueltas a través de una **discusión-conflicto***"

Establece cuatro clases de obstáculos conceptuales, observados en los alumnos cuando resuelven problemas de situaciones de dinero y temperatura.

1. "*Dificultades en la conceptualización de cantidades enteras o de los propios números negativos, en su **ordenación** y en su uso para representar posiciones o movimientos;"*

2. "*Dificultades en problemas para cuya solución se requiere una* ***inversión del pensamiento****; estos problemas contienen una palabra clave 'engañosa' como 'más' o 'suben'*;"
3. "*Dificultades asociadas con* ***cruzar el cero***;"
4. "*Dificultades al* ***manipular*** *combinaciones de* ***cambio*** *(por ejemplo, movimientos o transacciones de dinero, en particular cuando los cambios se refieren a un estado de partida desconocido."*

Bell, propone la caracterización de los errores conceptuales de la siguiente manera:

a. "SA *Subir es aumentar*."
b. "IS *Ignorar el signo*."
c. "SR *Signo denota región*."
d. "OSO *Omitir signo mientras se está operando*"
e. "PM *Confundir posición con movimiento*"

El problema de orden de los números enteros en la región negativa o al cruzar el cero, parece ser común en la enseñanza actual, situación que es muy bien explicada por Bell: (misma que emerge en la presente investigación)

" *…Nosotros mismos… pedimos a… nuestros alumnos que digan que ' -2 es mayor que -8' y a la vez, les pedimos dibujar gráficas que tomen valores 'negativos más grandes'. Deberíamos ser más consecuentes acerca del conflicto esencial que aquí se plantea y decir simplemente que -2 es un número mayor que -8 …"*

En el experimento de Bell, utiliza la enseñanza basada en el conflicto, reflexión y discusión para que, por un lado sean superados los errores conceptuales y por otro lado observar si este adelanto permea otros contextos. (Esta realidad surge en la presente investigación). Tanto los obstáculos como los errores conceptuales de Bell, surgen en la enseñanza de los docentes observados en la presente investigación y ayudan a la caracterización de la enseñanza de los enteros.

1.4.6 I. Peled

Realiza una investigación (1991) en la que sugiere un análisis teórico del conocimiento de los niños acerca de los números con signo, junto con las operaciones de adición y sustracción. Con base en su estudio empírico, establece cuatro niveles de conocimiento en dos dimensiones, el de la recta numérica y el de la cantidad.

Niveles de conocimiento
- Dimensión de la recta numérica
- Dimensión de la cantidad

Los niveles de conocimiento en la dimensión recta numérica son los siguientes:

Nivel 1RN. "*El niño conoce que hay otros números, los negativos, colocados a la izquierda del cero sobre la recta numérica. Son casi un reflejo de los números "normales" y comienzan con 'menos uno' y continúan a la izquierda, formados con la palabra "menos" seguida del número "normal": menos dos, menos tres, etc. La relación de orden se extiende a estos nuevos números: dados dos números, cualquiera de ellos, normales o negativos, el que se encuentra más a la derecha es el mayor*".

Nivel 2RN. "*El estudiante está listo para hacer una simple extensión de las operaciones de adición y sustracción. Al realizar la sustracción, significa que el niño acepta ir tan a la izquierda, incluso más allá del cero, sobre la recta numérica, cuando un número mayor es sustraído de uno menor. En la adición sobre la recta, significa que el niño está listo para ir hacia la derecha aún cuando el punto de partida sea un número negativo*".

Nivel 3RN. "*El estudiante está listo para extender aún más las definiciones de adición y sustracción, las cuales involucra "desplazarse" a lo largo de la recta. Se acepta que las operaciones anteriores lleven direcciones opuestas. Surge otro componente: el signo de los números que son sumandos o sustraídos. Existen dos mundos, un mundo positivo a la derecha y uno negativo a la izquierda. Así como la adición significa ir hacia números de mayor negatividad en el mundo negativo, es decir, hay movimiento hacia la izquierda* *cuando se suman en este mundo negativo. Por un argumento similar, cuando se realiza una sustracción en este mundo negativo, se produce un movimiento a la derecha. Es importante señalar que las operaciones se han extendido a pares de números que tienen el mismo signo y no se han definido aún para números con signos diferentes*"

Nivel 4RN. "*En este nivel, el estudiante no tiene que considerar el signo de ambos números, sino puede referirse simplemente al segundo número y determinar si el movimiento sobre la recta numérica será a la derecha o a la izquierda. Cuando el segundo número es positivo, se enfrenta con la dirección positiva, siendo a la derecha para la adición y a la izquierda para la sustracción. Cuando es negativo, uno se enfrenta con el mundo negativo, dirigiéndose a la izquierda para la adición y a la derecha para la sustracción*".

Con respecto a la dimensión de la cantidad, la autora explica los siguientes cuatro niveles:

Nivel 1Q. "*Así como hay números normales que representan la cantidad de cosas, existen los números negativos que también representan cantidades de cosas. Sin embargo, estas últimas poseen una característica desfavorable, como lo constituye, una cantidad debida (deuda). Debido a esta connotación negativa, la relación de orden en estos números es definida en una forma invertida a las de los números normales, es así que, cuanto mayor sea la cantidad, menor es el número, ya que representa un estado en peores condiciones*".

Nivel 2Q. "*Los niños son capaces de extender la operación de sustracción que permite que un número mayor (natural) sea sustraído de uno menor. Esto se hace quitando la cantidad disponible y encontrando la cantidad faltante para completar la operación, el último es en realidad el valor absoluto del resultado, que se etiqueta con un signo menos para representar este estado de deuda o déficit. Nota: El orden entre el nivel 1 y el 2, en esta dimensión puede ser invertido*".

Nivel 3Q. "*El niño está dispuesto a extender las definiciones de adición y sustracción, de añadir cantidades y quitar cantidades y aplicarlo también a cantidades negativas. Esto quiere decir que una magnitud negativa puede ser tomada de una cantidad negativa, siempre y cuando haya suficiente para quitar. Una cantidad negativa puede también ser añadida a una negativa, resultando en el incremento de la cantidad negativa, sin embargo cantidades de diferente tipo no se operan en este nivel*".

Nivel 4Q. "Las magnitudes no tienen que ser del mismo tipo. El efecto de la operación está determinado solamente por la operación y por el signo del segundo número. Esto es, uno tiene que considerar si quitar o traer más de la cantidad relevante, resulta en una mejor o peor en relación de la que partieron".

Los niveles de Peled, en ambas dimensiones aparecen en la enseñanza de los docentes observados en esta investigación y son analizados y empleados más adelante.

1.4.7 J.L González Marí y cols. (*Los Enteros*)

En su obra, (González, J., Iriarte, M., Jimeno, M., Ortiz, A., Ortiz, A., Sanz, E. y Vargas-Machuca, I., 1990) los autores trabajan en la epistemología, en la construcción histórica y didáctica del número negativo, muestran precisiones relacionadas con los obstáculos que se presentan en el aprendizaje y la enseñanza de los números enteros desde sus fundamentos hasta la planeación curricular. Su obra se divide en tres bloques principalmente. En el primero se trata la historia y epistemología del número negativo, en el segundo bloque, el análisis didáctico, las vías de acceso de Z, los métodos, obstáculos y concepciones en el contexto escolar, y en el tercero se realiza una propuesta didáctica.

Se desarrolla el concepto del número entero como *objeto* de la educación matemática, el cual se presenta en la enseñanza mediante varias perspectivas que dependen del proyecto escolar.

En el aula los números enteros han sido vistos desde los siguientes posibles enfoques:

a. Parte de un programa sin más, que el alumno debe cubrir para continuar sus estudios.
b. Una cuestión de cultura matemática.
c. Un medio más para estimular y favorecer el desarrollo de habilidades, destrezas y capacidades intelectuales.
d. Herramientas matemáticas necesarias para otros contenidos posteriores.
e. Instrumentos útiles para otras Ciencias y para la vida.
f. Objetos conceptuales a construir dentro del proceso natural de adquisición y descubrimiento de conocimientos.
g. Medio de comunicación de conceptos y proposiciones en contextos numéricos.

Dentro del presente estudio sobresale el enfoque como instrumento para otras Ciencias.

Los autores de esta obra plantean los conocimientos y las reflexiones previas del tema para su planificación y desarrollo didáctico para que sean coherentes con los enfoques:

1. "*El docente debe dominar el contenido matemático*".
2. "*Conocer los hechos históricos y los obstáculos contemplados en la comprensión y aceptación de los negativos*".
3. "*Conocer la epistemología de los enteros*".
4. "*Conocer las aplicaciones y utilidades de los enteros, en contextos como las Ciencias Experimentales, constituye un apartado importante a considerar en el proceso de enseñanza-aprendizaje*". (Transferencia de ***Z*** a las ciencias experimentales, como se explora en la presente investigación).

La siguiente conclusión presentada por los autores es esencial dentro de la didáctica del contenido de los enteros:

> "…hemos de insistir en el hecho objetivo de que mientras que el diseño curricular y su desarrollo en el aula no estén fundamentados en los conocimientos más elementales sobre éstos cuatro apartados, difícilmente se conseguirá que los alumnos comprendan los números enteros, dominen sus operaciones y aplicaciones algebraicas y sepan manejarlos en contextos diferentes."

En cuanto a los obstáculos presentados en la enseñanza, mencionan que:

- "*Es difícil concebir a los números negativos mientras no se abandonen los contextos concretos*".
- "*El conocimiento enseñado a los niños en cuanto a Que la cantidad aumenta en la suma y disminuye en la resta*".
- "*Ignoran el signo negativo*"
- "*Dificultades en el orden*".

Los autores comentan que la enseñanza y el aprendizaje debe estar marcado por el *conflicto cognitivo* (concepto definido y explicado en el Marco Teórico) y la confrontación entre el conocimiento formal y el práctico. Comentan que la enseñanza cotidiana de los enteros evita la ruptura, reduciendo a los enteros, su conceptualización y operatividad a un formulismo vacío. (Aspecto emergido en la presente investigación).

1.4.8 A. Gallardo

Plantea los perfiles de estudiantes de secundaria que definen las condiciones bajo las cuales se logra la extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros, A, B, C y D., los cuales se mencionan a continuación:

PERFIL A.

> Los sujetos manifiestan el sentido de uso del número sustractivo (número como magnitud). En el caso del simétrico de un número exhibe la idea de cantidades opuestas y surge la presencia del número signado. Se revela inconsistencia en el uso del lenguaje algebraico. Poseen una marcada preferencia por los métodos aritméticos en la resolución de problemas verbales.

PERFIL B.

Los sujetos presentan los sentidos de uso del número sustractivo y número signado. Además manifiestan en algunas tareas el sentido de uso de número relativo. Surge el lenguaje algebraico y los métodos aritméticos-algebraicos en la resolución de problemas. Los sujetos que pertenecen a los perfiles A y B tienen una operatividad débil. Se presenta el fenómeno del predominio del negativo, la aparición de la solución negativa en algunos de los problemas y ecuaciones planteados. Se concluye que los estudiantes de los perfiles A y B no extienden el dominio numérico de los naturales a los enteros.

PERFIL C.

Los sujetos arriban al sentido de uso del número negativo aislado. Hay un reconocimiento pleno de la triple naturaleza de la sustracción y de la triple naturaleza del signo menos. Utilizan lenguajes y métodos tanto aritméticos como algebraicos. Existe la solución negativa en problemas y ecuaciones. Sin embargo persiste el predominio del negativo y una operatividad incorrecta en el ámbito numérico.

PERFIL D.

Los sujetos manifiestan sentidos de uso avanzados del número negativo, un predominio del lenguaje y método algebraico, así como la existencia de la solución negativa en problemas y ecuaciones. Ahora bien en situaciones de mayor complejidad reaparece el predominio del negativo, que no había surgido en tareas más simples para estudiantes del perfil D. Así mismo al complicarse la situación problemática, se presenta un desequilibrio entre la semántica y la sintaxis de la tarea que dificulta el desprenderse del significado de lo representado y dar sentido al proceso de sustitución en problemas verbales, ecuaciones, sistemas de ecuaciones y expresiones generales.

Por otro lado Gallardo (1996) encuentra que "*los números negativos constituyen un obstáculo perdurable en la enseñanza del álgebra*" En su estudio, construye diferentes perfiles de estudiantes, caracterizándolos *en niveles de conceptualización del negativo*. Esta caracterización la realizó, analizando estrategias de resolución algebraicas en alumnos de secundaria, a partir de los errores cometidos en la resolución de problemas, encontrando, dificultades sintácticas en la operatividad durante la aplicación de un modelo de enseñanza.

Los perfiles encontrados, A y D se describen a continuación:

Perfil A

1) Presencia del dominio multiplicativo en las situaciones aditivas.
2) Ignorancia de la triple naturaleza de la sustracción y de la triple naturaleza del signo menos.
3) Operatividad incorrecta en las esferas aritmética y algebraica.
4) Inconsistencia en el uso del lenguaje algebraico.
5) Preferencia por métodos aritméticos de resolución de problemas.
6) Ignorancia de las soluciones negativas de los problemas

Perfil D

1) Superación de los errores de cálculo en el dominio aditivo.
2) La comprensión de la triple naturaleza de la sustracción y de la triple naturaleza del signo menos.
3) Superación de errores en las esferas aritmética y algebraica.
4) Correcto uso del lenguaje algebraico.
5) El predominio de los métodos algebraicos sobre los aritméticos.
6) La aceptación de las soluciones negativas de las ecuaciones.

Se presentan los dos niveles extremos como los analiza Cid (2003) ya que los perfiles B y C son un intermedio entre los perfiles A y D.

En Gallardo (2002, 2006) se establecen cinco niveles de aceptación del número negativo[4]: como sustractivo, como signado, como relativo, como aislado y como negativo formal. Estos niveles son desarrollados a partir del estudio epistemológico y empírico del número negativo y se confirman en los alumnos mediante las entrevistas en las que se analizan respuestas a problemas aritméticos verbales.

[4] Los conceptos: *número sustractivo, número signado, número relativo, predominio del negativo, número negativo aislado, triple naturaleza de la sustracción, triple naturaleza del signo menos,* son definidos dentro de la sección del Marco Teórico.

1.4.9 A. Bruno.

Bruno (1997) trabaja en el nivel conceptual y didáctico y en cómo enfocar la enseñanza de los enteros. Como marco para las ideas de Bruno, está la del *campo conceptual numérico* (González, J., 1995), definido como "*el conjunto formado por las situaciones que se corresponden con la idea, así como por los conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones como tareas matemáticas"* (Bruno, A. 2009).

Para reflexionar sobre los elementos del campo conceptual numérico, la autora, trabaja en tres dimensiones en sus relaciones de transferencia entre ellas.

Dimensiones del conocimiento numérico	Dimensión abstracta Dimensión recta Dimensión contextual

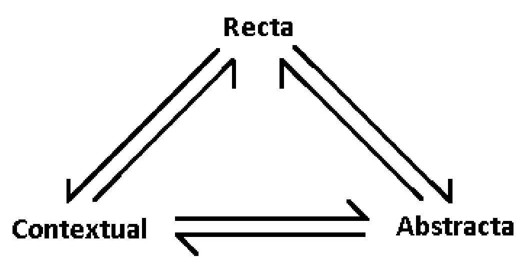


Fig. 1.7 Transferencias entre las dimensiones recta, abstracta y contextual.

La figura 1.7, muestra las relaciones bi-direccionales de transferencia entre las tres dimensiones del conocimiento numérico. La autora, describe a estas dimensiones:

- "LA DIMENSIÓN ABSTRACTA: *referidos a los sistemas numéricos como estructuras matemáticas, a las formas de escritura de los números y a reglas operatorias*".
- "LA DIMENSIÓN DE RECTA: *representación de los números sobre una recta, basada en la identificación de los números reales con los puntos de la recta y con vectores en la misma*".

- “LA DIMENSIÓN CONTEXTUAL: *situaciones concretas en las que se usan los números, aplicaciones y problemas*”.

“*El tratamiento de las tres dimensiones adquiere mayor importancia en la enseñanza cuando se favorece la traducción del conocimiento entre ellas*”, comenta la autora (Bruno, A., 1997).

Se muestra la tabla 1.5 para ilustrar las relaciones

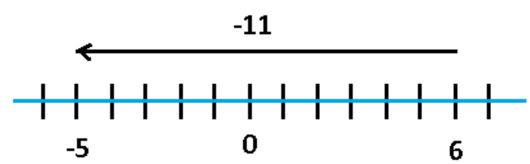
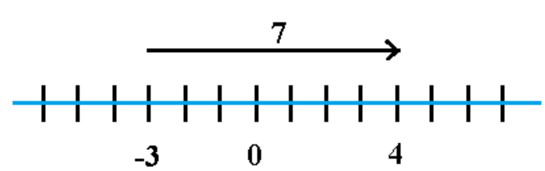
Transferencia: abstracto → recta Representa en la recta la operación: $-4+10=6$	**Transferencia: recta → abstracto** Dime una <u>operación</u> que pueda ser representada en la recta de la siguiente forma: 
Transferencia: abstracto → contextual Dime una situación que pueda ser resuelta con la siguiente operación: $-4+7=3$	**Transferencia: contextual → abstracto** Dime una <u>operación</u> que pueda resolver la siguiente situación: *La temperatura en Madrid es de 9 grados sobre cero. En París hay 12 grados menos que en Madrid. ¿Cuál es la temperatura en París?*
Transferencia: contextual → recta Representa la siguiente situación en la recta: *Un ascensor estaba en el piso 5 del sótano y subió 7 pisos. ¿Cuál era la posición del ascensor después de esta subida?*	**Transferencia: recta → contextual** Dime una <u>situación</u> que pueda ser representada de la siguiente forma: 

Tabla 1.5 Relaciones entre las dimensiones abstracto-recta-contextual de Bruno (1997)

Bruno (1997), comenta que las extensiones de los conjuntos numéricos inicia con los números enteros no negativos Z^+ y terminan con el de los reales R. “*La principal conclusión… es que es posible realizar la extensión a los números negativos mostrándolos como los opuestos de los números positivos que conozcan los alumnos en el momento de realizar la extensión*”. Y los números que conocen los estudiantes son Z^+, Q^+, R^+.

Para Bruno (1994), el contexto es: "*la situación, entorno o ambiente con el que se enuncia una determinada actividad matemática"*. Y es importante porque influye en la complejidad del problema, para analizar las dificultades surgidas, los contextos utilizados en los números negativos parecen ser reducidos contra los utilizados en los números positivos, (al menos en la educación básica). En su trabajo de 1994, aparece un estudio con 5 contextos utilizados para clasificar problemas aditivos con números negativos, los contextos son:

- Deber-tener;
- Nivel del mar;
- Temperatura;
- Tiempo;
- Carreteras.

Para clasificar los problemas aditivos, Bruno y Martinón (1997a) clasifican los problemas aditivos simples por su estructura funcional y por la forma semántica. Para ello define algunos términos importantes:

En primer lugar:

- *Historias aditivas. Son situaciones numéricas que se describe con una adición*: $a + b = c$.
- Problemas aditivos: *Cada historia aditiva cuyo esquema es* $a + b = c$ *da lugar a tres problemas aditivos simples*, de los cuales surgen tres incógnitas, según cuál sea la incógnita, a, b o c, y se denotan como $i1, i2$ e $i3$.

Problemas aditivos	Incógnitas
$\boldsymbol{a} + b = c$	$i1 + b = c$
$a + \boldsymbol{b} = c$	$a + i2 = c$
$a + b = \boldsymbol{c}$	$a + b = i3$

Tabla 1.6 problemas aditivos y el tipo de incógnita.

En segundo lugar, la siguiente clasificación está planteada de acuerdo al uso de los números:

- “Estados (e)
  Expresan la medida de una cantidad de una cierta magnitud asociada a un sujeto en un instante. Debo 2.”
- “Variaciones (v)
  Expresan en cambio de un estado con el paso del tiempo. Perdí 2”.
- “Comparaciones (c)
  Expresan la diferencia entre dos estados. Tengo 2 más que tú”.

Las estructuras planteadas por el uso de los números, más usuales en la enseñanza son:

- ***“Combinación***.
  (Combinación de estados: e1 + e2 = et)
  (Estado parcial 1 + estado parcial 2 = estado total)
  “Pedro tiene $3 y debe $15, ¿Cuál es su situación económica?”.
- ***“Cambio***.
  (Variación de un estado: e1 + v = e2)
  (estado inicial + variación = estado final)
  “Un delfín estaba a 5 m bajo el nivel del mar y bajó 8 m. ¿Cuál es la posición del delfín después de este movimiento?”.
- ***“Comparación***.
  (Comparación de estados: e1 + c = e2)
  (estado menor + comparación = estado mayor)
  “Un coche está en a 6 Km a la izquierda del cero y una moto está 11 Km a la derecha del coche. ¿Cuál es la posición de la moto?”.
- ***“Dos cambios***.
  (Combinación de variaciones sucesivas: v1 + v2 = vt)
  (variación 1ª + variación 2ª = variación total)
  La temperatura bajó 11°C y luego subió 5°C. ¿Cómo varió la temperatura con respecto a la que hacía antes de moverse?”

(Bruno, A. y García, J., 2004).

Bruno et. al (2004, 2009), realizaron estudios en estudiantes de secundaria y en profesores en formación, de primaria y secundaria, encontrando dificultades en ambos casos para clasificar los problemas aditivos y encuentra que los docentes y alumnos que pueden clasificarlos, tienen una mejor comprensión de las situaciones contextuales y pueden resolver mejor estos problemas.

Bruno (2009) plantea una metodología de enseñanza centrada en la distinción, tanto de la *estructur*a, como de la *posición de la incógnita* en los problemas aditivos, aunque como conclusión menciona que "*ante las diferentes investigaciones parece no haber métodos ideales, sino métodos más adecuados para desarrollar o favorecer cierto tipo de conocimientos o de actitudes".*

Bruno y Martinón (1994) mencionan que las dificultades operatorias de los niños, con los números negativos, se deben a la necesidad de utilizar reglas que son difíciles de entender y los errores que se producen, son debido al mal uso de la notación o de los paréntesis, esto implica que el trabajo en el aula se centre en la práctica rutinaria de las operaciones. Además, ***la enseñanza a través de la resolución de problemas permite que los alumnos reflexionen y razonen sobre las operaciones básicas y se les pueda ofrecer una mayor riqueza de significados***. En la clasificación de los problemas aditivos de Bruno, tanto en docentes como en alumnos se observa la utilización de números relativos, hecho identificado y analizado en la presente investigación.

Por otro lado, en el estudio realizado por Bruno y colaboradores, con docentes en formación para la educación secundaria, se observa un solo perfil del futuro docente, como egresado de la Licenciatura de Matemáticas a nivel Universitario. En contraste con México, el perfil del profesor de secundaria es muy variado, ya que pueden ser egresados de la Escuela Normal Superior de Maestros, profesionistas universitarios, como ingenieros, actuarios, pedagogos, físicos, educadores, etc. Este hecho tiene impacto y es analizado en la presente investigación.

1.4.10 E. Cid

En su estudio de los obstáculos epistemológico en la enseñanza de los números negativos (Cid, E., 2000), explica y esclarece los obstáculos presentados por Glaeser en 1981 y por Schubring en 1986, y comenta sobre la necesidad de tener en cuenta los obstáculos históricos en la enseñanza de estos números, ya que los modelos concretos utilizados para introducir al número negativo, supuestamente ayudan a crear reglas de funcionamiento, pero, aunque franquean el primer obstáculo epistemológico, refuerzan el segundo. Comenta la autora que: "*Históricamente la negatividad surge en el contexto del álgebra y son las necesidades del cálculo algebraico las que determinan las reglas de manejo de los números con signo… el establecimiento de sus reglas de cálculo queda totalmente a merced del modelo concreto que se utilice para introducirlos*…" lo que agrava el obstáculo epistemológico.

En Cid (2002), se pone en duda la pertinencia de introducir a los negativos por medio de modelos concretos, analizando los efectos no deseados que produce. En primer lugar la autora, menciona que las matemáticas son utilizadas para modelizar situaciones o fenómenos de la física, la química, la biología, o la economía, mientras que en la enseñanza elemental, lo que se hace es modelizar la noción matemática a partir de algún sistema o fenómeno físico o social. El modelo concreto sirve como apoyo para la comprensión de la noción y para su reconstrucción. Así cuando el profesor considera que el niño con la ayuda del modelo concreto ha construido la noción matemática, es entonces que debiera regresar a la función matemática, que es modelizar en lugar de ser modelizada.

Cid, menciona que los modelos concretos más utilizados en la enseñanza son los siguientes:

- Deudas y haberes
- Juegos con puntajes positivos y negativos
- Personas que suben y bajan de un transporte
- Altitudes, sobre y bajo en nivel del mar
- Personas que suben y bajan escaleras
- Partículas que recorren sentidos contrarios
- Pérdidas y ganancias
- Personas que entran y salen
- Temperaturas
- Años antes y después de Cristo
- Ascensores en sótanos y pisos
- Posiciones y desplazamientos

Además, los modelos concretos son útiles para justificar las estructuras aditivas de los enteros, pero justifican con dificultad la estructura ordinal, por ello la aritmética elemental no es un ámbito adecuado para introducir a los negativos porque no los necesita ni los justifica (hecho observado en esta investigación cuando se utilizan números relativos para resolver problemas con modelos concretos usuales en la enseñanza en la secundaria). Los modelos concretos no dan razón de la estructura de anillo ordenado de los enteros (comentado en la sección 1.5). Este hecho constituye una razón más para justificar que, los negativos están dentro del álgebra, no de la aritmética (Gallardo 1994).

La conclusión de Cid (2002) es la siguiente:
"…*parece conveniente empezar a plantearse la posibilidad de introducir los números negativos en un entorno algebraico, estudiando además la manera de salvar el posible obstáculo epistemológico originado por la concepción del número como medida*"

Esta reflexión de la autora, plantea que este proyecto, es un trabajo para los investigadores en didáctica de las matemáticas, más que para los profesores.

En Cid y Bolea (2007) los autores trabajan en la necesidad de introducir a los negativos en un entorno algebraico y presentan una aproximación para realizar esta introducción a nivel escolar, las razones para la elección de un entorno algebraico son las siguientes:

La aritmética no es un buen lugar para iniciar la enseñanza de los números negativos,…la contextualización… no permite justificar la razón de ser de estos objetos.

La introducción escolar… del número… como medida, parece ser un obstáculo… para aceptar los números positivos y negativos…

… lo que se promueve es esa concepción del número negativo como medida de magnitudes opuestas o relativas… un supuesto obstáculo para la justificación de parte de su estructura algebraica.

La familiaridad de los alumnos con los modelos concretos no parece ser tal, por lo que su presentación puede ser una dificultad añadida, antes que una ayuda para el aprendizaje de los números negativos".

La introducción de los negativos debe ser en el momento de introducir el álgebra, por ello los autores se interesan en "*poner de manifiesto la ruptura que supone el álgebra frente a la aritmética, como medio de justificar la necesidad de la simetrización aditiva de los números naturales o racionales positivos*". Lo que caracteriza al cálculo algebraico es la *simetrización aditiva y multiplicativa* de ***N***, que permite reducir a dos operaciones la suma y el producto, en consecuencia los signos binarios pasan a ser unarios ante las operaciones.

Los criterios utilizados en el modelo algebraico de introducción de los negativos son los siguientes:

a) La introducción simultánea de los números negativos y del álgebra elemental.

b) El modelo epistemológico de referencia del álgebra elemental utilizado es el de la *modelización algebraica*. (Ecuación que resuelve un problema de un sistema y es resuelto por el método algebraico), porque permite resaltar diferencias entre el trabajo algebraico y el aritmético.

c) Propuesta de problemas verbales cuya modelización inmediata viene dada por una fórmula (expresión algebraica, ecuación o función explícita).

d) *Simetrización* de los números conocidos por los alumnos.

e) Las cuatro etapas de la construcción escolar del negativo:

1) Pasar de los signos binarios a los unarios a través de sumandos y sustraendos, en lugar de números signados.
2) Reinterpretar las operaciones de suma y resta, a través de sumandos y sustraendos.
3) Aceptar que los sumandos y sustraendos amplían los conjuntos numéricos ya conocidos.
4) Revisar las propiedades que caracterizan la condición de número a las ampliaciones del conjunto natural como simetrización aditiva y multiplicativa.

f) Introducir primero la estructura aditiva de sumandos y sustraendos, posteriormente la estructura multiplicativa.

Tomando en cuenta los enunciados anteriores, los autores realizan su propuesta de introducción del número negativo en un entorno algebraico, modelando mediante ecuaciones o fórmulas el conjunto de soluciones a través de los parámetros, del uso de la simetrización de los números conocidos, de las expresiones equivalentes y de la notación completa. (Notación con paréntesis y signos en los sumandos y sustraendos, numéricos o literales).

1.5 Los Números Enteros. La Matemática Formal.

1.5.1 Definición y diferentes representaciones.

En Bravo, A., Rincón, C. y Rincón, H. (2012) se manifiesta que *los números enteros son una extensión de los números naturales*, porque para dar solución a las ecuaciones de la forma $a = b + x$, donde a y b son naturales, no siempre existe una solución dentro del dominio natural, para evitar dicha limitación se realiza la extensión a otro conjunto $\boldsymbol{Z}$, isomorfo a $\boldsymbol{N}$ llamado conjunto de los números enteros.

Una forma de entender a los enteros es a partir de sus propiedades, Beaumont, R. y Pierce, R. (1963) mencionan que el primer encuentro de los estudiantes con los enteros es dentro del álgebra elemental y es ahí es donde éstos aprenden que *los enteros son los números naturales, el cero y los negativos de los números naturales*, también aprenden por memorización las reglas aditivas y multiplicativas aplicadas a estos números pero sin su comprensión. Estos autores, plantean que existen varias formas de construir el sistema de los enteros a partir de los naturales y mencionan también que una elección para el cero es el conjunto vacío(Φ), y los números negativos son definidos como:

$$-n = \{n\}, \quad n = 1,2,3, \ldots$$

DEFINICIÓN. El conjunto $\boldsymbol{Z}$ de todos los enteros es:

$$\boldsymbol{Z} = \{\{n\} | n \epsilon \boldsymbol{N}\} \; U \; \{\Phi\} \; U \; \boldsymbol{N}$$

En la cual el símbolo “0” denota al cero (= Φ) y $-1, -2, -3, \ldots - n, \ldots$ se intercambian por {1}, {2}, {3},…,{n},…

Donde *los objetos de la lista:*

$$\ldots, \{3\}, \quad \{2\}, \quad \{1\}, \quad \Phi, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \ \ldots$$

Son diferentes entre sí.

Las operaciones de adición, multiplicación y negación son las responsables de la utilidad e importancia de los enteros, ya que la adición y la multiplicación son extensiones de sus operaciones correspondientes en el sistema de los números naturales y para la negación se sugiere pensar en ***los negativos como imágenes especulares de los naturales***, así los naturales y negativos quedan ligados mediante el cero.

$$\ldots, -3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \ \ldots$$

La negación es el proceso de pasar de un entero a, a su imagen especular.

DEFINICIÓN. Negación: Sea m cualquier natural, entonces:

(a) $-m = \{m\}$

(b) $-\{m\} = m$

(c) $-0 = 0$

Entonces la doble negación es entendida: $-(-m) = m$

Otra forma de construir a los enteros desde la teoría axiomática es la siguiente:

Z denotará el conjunto de los números enteros.

Z = {…, -2, -1,0, 1, 2 , 3, …}

*Los números enteros constan del conjunto **Z**, más dos operaciones binarias, la adición y la multiplicación*, (Cárdenas, H., Lluis, E., Raggi, F. y Tomás, F., 2012) satisfaciendo los siguientes axiomas, premisas o postulados que forman un cuerpo para demostrar otros razonamientos.

Axioma 1. *La suma de enteros es conmutativa*.

Si $a, b \in \boldsymbol{Z} \quad \rightarrow \quad a + b = b + a$

Axioma 2. *La suma de enteros es asociativa*.

Si $a, b, c \in \boldsymbol{Z} \quad \rightarrow \quad (a + b) + c = a + (b + c)$

Axioma 3. *Existe en **Z** un elemento neutro para la suma*, el 0. Es decir,

Si $a \in \boldsymbol{Z}, \rightarrow \quad a + 0 = 0 + a = a$

Axioma 4. *Para cada a en **Z** existe también en **Z** su inverso aditivo,* (simétrico), denotado por $-\boldsymbol{a}$.

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

Axioma 5. El producto de números enteros es conmutativo

Si $a, b \in \boldsymbol{Z} \rightarrow a\, b = b\, a$

Axioma 6. El producto en $\boldsymbol{Z}$ es asociativo,

Si $a, b, c \in \boldsymbol{Z} \rightarrow (a\, b)\, c = a\, (b\, c)$

Axioma 7. *Existe en* **Z** *un elemento neutro para la multiplicación*, el 1.

Si $a \in \boldsymbol{Z} \rightarrow \quad a\, 1 = 1\, a = a$

Axioma 8. *En* **Z** *el producto es distributivo ante la suma*.

Si $a, b, c \in \boldsymbol{Z} \rightarrow a\,(b + c) = a\, b + a\, c$

$$(a + b)\, c = a\, c + b\, c$$

En Ayres, F. (1996) se puede encontrar una forma alterna de construir a los enteros, mencionando que el sistema de los números naturales tiene un defecto manifiesto en que:

Dados $m, s, \in \boldsymbol{N}$, la ecuación $m + x = s$ puede o no tener solución.

Ya que en la ecuación m + x = m carece de solución en los naturales, mientras que en la ecuación m+x= m* la solución es x= 1 siendo m* el consecutivo de m, es decir,
m*= m+1.

Esto se remedia añadiendo a los naturales (enteros positivos), el cero y los enteros negativos para formar el conjunto ***Z***.

Otra forma de definir al conjunto ***Z*** es a través de lo que se denomina ***Relación Binaria Equivalente*** (Ayres, F. 1996) en la que se postula que:

(s,m) ~ (t,n) si y solo si, s + n = t + m con $s, m \in \boldsymbol{N}$

Se lee: el conjunto producto (s, m) es equivalente a (t, n) si y sólo si se cumple la relación s + n = t + m. Con esta definición se declara la existencia de la partición L en clases de equivalencia.

Por ejemplo: $(5,2) \sim (9,6)$ porque $5+6 = 2+9$

$(5,2) \nsim (8,4)$ porque $5+4 \neq 8+2$

$(r,r) \sim (s,s)$ porque $r+s = s+r$

La adición de enteros con esta definición queda de la siguiente forma:

$(a + b) + (c + d) = (a+c, b+d)$

La multiplicación se define de la siguiente manera:

$(a,b) \times (c,d) = (ac+bd, ad+bc)$

Así la llamada ley de los signos en esta ***Teoría de pares ordenados*** (Rico, L., 2001) se puede definir como:

Si r es un entero positivo, su representación canónica es (p,0)

Si s es un entero negativo, su representación canónica es (0,q)

El producto $r \times s$ es:

$r \times s = \{(p,0) \times (0,q)\} = \{(p\cdot 0+0\cdot q) , (pq+ 0\cdot 0)\} = \{(0 , pq)\}$

Como p y q son distintos de cero, entonces pq es negativo, a partir del producto de un positivo y un negativo.

1.5.2 Propiedades básicas de las operaciones de adición y multiplicación.

Beaumont (1963) define la adición y la multiplicación de enteros de la siguiente manera:

DEFINICIÓN. *Adición*. Sean m y n cualquier número natural, entonces:

a) $m + n$ está definida en ***N***;

b) $(-m) + (-n) = -(m + n)$;

c) $$m + (-n) = (-n) + m = \begin{cases} m - n & si\ n < m, \\ 0 & si\ m = n, \\ -(n-m) & si\ m < n; \end{cases}$$

d) $m + 0 = 0 + m = m$;

e) $(-m) + 0 = 0 + (-m) = -m$;

f) $0 + 0 = 0$

Cabe aclarar que el signo menos tiene un carácter binario para la operación de sustracción como en $3 - 1$, pero cuando aparece antes de un número denota la operación de negación como en -5.

DEFINICIÓN. Multiplicación. Sean m y n cualquier número natural, entonces:

a) $m \bullet n$ está definida en $\boldsymbol{N}$;

b) $(-m) \bullet (-n) = m \bullet n$

c) $-m \bullet n = n \bullet (-m) = -(m \bullet n)$;

d) $m \bullet 0 = 0 \bullet m = 0$;

e) $(-m) \bullet 0 = 0 \bullet (-m) = 0$;

f) $0 \bullet 0 = 0$

1.5.3 Propiedades de anillo de los enteros.

Algunas propiedades aplican tanto para los enteros como para los racionales y los reales, con el fin de diferenciar las propiedades aplicadas a los enteros se planteó la idea del término Dominio Entero para describir todos los sistemas numéricos sobre los cuales son definidas dos operaciones, la adición y la sustracción. Previo al concepto de Dominio Entero, está el concepto de Anillo.

DEFINICIÓN. Un anillo es un conjunto **A** sobre el cual son definidas dos operaciones binarias, $x + y$ y $x \bullet y$ llamadas *adición y multiplicación,* y de la operación unaria $-x$ llamada *negación,* tal que **A**, contiene entre sus elementos uno particular, "0" llamado cero con el cumplimiento de las identidades mostradas anteriormente, llamadas axiomas (1-8) (Beaumont 1963).

Los números enteros forman un ***anillo conmutativo*** con elemento unitario (el 1) porque es un conjunto con dos operaciones (+, x) que cumplen con los 8 axiomas mencionados.

Las propiedades de la adición y multiplicación quedan descritas anteriormente con los axiomas 1 al 8. Con éstas, se pueden demostrar otras propiedades de los anillos de los enteros como son proposiciones lógicas y corolarios (razonamientos consecuentes lógicos de lo demostrado) como los siguientes:

Proposición 1. *Ley de cancelación*.

Si $a, b, c \in \boldsymbol{Z} \;\; \wedge \;\; a + b = a + c \;\rightarrow\; b = c$

Esta proposición 1 se puede demostrar utilizando el axioma 4, existe el inverso aditivo $-a$ tal que, $(-a) + a = 0$ entonces:

$(-\boldsymbol{a}) + (a + b) = (-a) + (a + c)$ y utilizando el axioma 2 (propiedad asociativa) $\big((-a) + (a)\big) + b = ((-a) + a) + c$ en donde $0 + b = 0 + C$ y como 0 es el elemento neutro aditivo del axioma 3, obtenemos que $b = c$.

Corolario 1.

Si $a, b, c \in \boldsymbol{Z} \;\; \wedge \;\; a + c = b + c \;\rightarrow\; a = b$

Corolario 2.

Si $a, b \in \boldsymbol{Z} \;\; \wedge \;\; a + b = a \;\rightarrow\; b = 0$

Proposición 2.

$\forall\, a \in$ Z, se tiene que: $0\, a = 0$

Corolario 2. *El inverso aditivo del inverso aditivo de un entero a, es a.*

$\forall\, a \in$ Z, se tiene que $-(-a) = a$

Proposición 3. "La ley de los signos"

Si $a, b, c \in \boldsymbol{Z}$ entonces:

$$(-a)\, b = -(ab)$$

$$(-a)(-b) = ab$$

Se puede demostrar que en cada una los dos miembros son expresiones equivalentes aplicando las propiedades de la adición y la multiplicación (axiomas 1-8).

"Menos por más es menos": $(-a)\, b = -(ab)$

Demostración.

Se tiene que: $(-a)b + ab = \big((-a) + a\big)b = 0b = 0$

Y con el inverso aditivo $-(ab) + ab = 0$

De la propiedad de cancelación: $(-a)b + ab = -(ab) + ab$

Se demuestra que: $(-a)b = -(ab)$

Es decir, el producto de un número negativo por uno positivo es negativo como una consecuencia de la aplicación de los axiomas que definen al conjunto $\boldsymbol{Z}$ de acuerdo a la demostración realizada. (Nótese que la ley de los signos aplica para cuando en su expresión a y b son Naturales y se hace la extensión para cualquier valor de a y b enteros cualquiera*)

"Menos por menos es más": $(-a)(-b) = ab$

Se tiene que $(-a)b + (-\boldsymbol{a})(-\boldsymbol{b}) = (-a)\left(b + (-b)\right) = (-a)\,0 = 0$

Y como antes $(-a)b + ab = 0$

Por consiguiente $(-a)b + (-\boldsymbol{a})(-\boldsymbol{b}) = (-a)b + ab$

Y por la ley de cancelación:

$$(-a)(-b) = ab$$

Es decir el producto de dos números negativos resulta positivo como una consecuencia de la aplicación de los axiomas que definen al conjunto $\boldsymbol{Z}$ como quedó demostrado*.

Estas premisas (leyes de los signos) se convierten en expresiones equivalentes que son demostradas mediante la aplicación de los axiomas.

$$(-a)\,b = -(ab)$$
$$(-a)(-b) = ab$$

Corolario 3. Caso particular de la proposición 3. (Ley de los signos si b = 1)

$\forall\, a, \in \boldsymbol{Z}$ Se tiene que: $(-1)\,a = -(a) \quad \wedge \quad (-1)\,(-1) = 1$

SUSTRACCIÓN DE ENTEROS.

Las propiedades de anillo de los enteros nos permiten considerar a la diferencia de dos números enteros utilizando la adición y el inverso aditivo. (Cárdenas et al. 2012)

DEFINICIÓN. Si $a, b \in \boldsymbol{Z} \rightarrow$ *La diferencia* $a - b$ *es el entero*

$$a - b = a + (-b)$$

Proposición 4. Si $a, b, c \in \boldsymbol{Z}$ entonces:

$$a\,(b - c) = ab - ac$$

Corolario 4. $-(a + b) = -a - b$

La sustracción es evidentemente una operación binaria sobre ***Z***. Sin embargo no es conmutativa ni asociativa, si bien la multiplicación es distributiva con respecto a la sustracción (Ayres ,1996).

$$a - b \neq b - a$$
$$a - (b - c) \neq (a - b) - c$$

No todas las propiedades de las operaciones en los enteros son consecuencia de los axiomas de anillo, así que ***Z*** tiene la propiedad:

Axioma 9.

Si a, b son enteros diferentes de cero, entonces su producto ab es diferente de cero.

DEFINICIÓN. Si **A** es una anillo conmutativo con 1 como elemento, en el cual se cumple con el axioma 9 se dice que **A** es un ***Dominio Entero*.**

Así que ***Z*** es un **Dominio Entero.**

1.5.4 El orden en el conjunto *Z*

Como Z es un conjunto ordenado, sus elementos pueden ser comparados. Nuevamente en Cárdenas et al. (2012) encontramos las consideraciones y propiedades que ayudan a definir el orden en ***Z***.

N forma un subconjunto de ***Z***:

N = {1,2,3,…} ⊂ ***Z***

Con esta consideración se utilizan las propiedades de los naturales:

Axioma 10: La suma de dos naturales es un natural.

Axioma 11: El producto de dos naturales es un natural.

Axioma 12 Si a es un entero se cumple *una y solo una* de las tres condiciones:

i) a es un número natural;

ii) $a = 0$;

iii) $-a$ es un número natural. (cuando a es negativo)

Con estas condiciones un entero puede ser, un natural o cero, o su inverso aditivo es natural, así usando el subconjunto $\boldsymbol{N}$ de $\boldsymbol{Z}$ y estas tres propiedades se puede definir las relaciones de orden e incluso demostrarlas y las que de ellas se deduzcan.

DEFINICIÓN. Si a y b son números enteros, se dice que a es mayor que b si $a - b$ es un número natural.

$$a > b \iff a - b \in \boldsymbol{N}.$$

Siendo $b = 0$ se tiene que:

$$a > 0 \iff a \in \boldsymbol{N}.$$

A los números $\boldsymbol{a}$ tales que $\boldsymbol{a} > 0$ se les llaman positivos, entonces *los números naturales son los enteros positivos Z^+*.

Con las premisas (axiomas) 10,11 y 13 se puede demostrar la siguiente:

Proposición 1. Propiedad Transitiva.

Si a, b, c son enteros tales que $a > b$ y $b > c$ entonces $a > c$

El axioma 12 puede ahora enunciarse como:

Proposición 2: (Un número entero es positivo, o negativo o cero)

Si a es un número entero, se cumple una y solamente una de las condiciones siguientes: (Utilizando la ley de tricotomía con b=0)

i) $a > 0$

ii) $a = 0$

iii) $a < 0$

Análogamente a la definición de los números positivos, **los negativos son los números $\boldsymbol{a}$ tales que $\boldsymbol{a} < 0$**, llamados enteros negativos $\boldsymbol{Z}^-$.

1.5.5 El simétrico y el valor absoluto de los enteros.

1.5.5.1 El Simétrico.

Este concepto es importante para generar al número negativo a partir de los naturales y para poder extender ese dominio numérico junto con el cero al dominio entero ***Z*** como su conjunto isomorfo.

El inverso aditivo o simétrico es como ya se mencionó una operación unitaria llamada negación $-a$, donde a es cualquier entero. Por definición y conceptualmente, la negación es el proceso de pasar de un entero a, a su imagen especular en la RN.

En el caso del inverso multiplicativo para los enteros, los únicos elementos de ***Z*** que tienen inverso multiplicativo son 1 y -1.

1 tiene a 1 por inverso multiplicativo porque: $1 \bullet 1 = 1$

-1 tiene al -1 por inverso multiplicativo porque: $(-1) \bullet (-1) = 1$

El 0 no tiene inverso multiplicativo porque $0a = 0 \neq 1$

En un anillo, a los elementos que tienen inverso multiplicativo se les llama *unidades*, en el anillo ***Z***, 1 y -1 *son las únicas unidades*.

1.5.5.2 El valor absoluto.

En este estudio, el concepto de valor absoluto es importante porque es utilizado en la enseñanza para realizar generalizaciones dentro de la operatividad.

Se define el valor absoluto $|a|$ de un entero a por:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{Si} \quad a > 0 \\ 0 & \text{Si} \quad a = 0 \\ -a & \text{Si} \quad a < 0 \end{cases}$$

Excepto cuando $a = 0$ se tiene que $|a| \in \mathbf{Z}^+$

Si a o b tienen un valor de 0, son evidentes las siguientes leyes:

(1) $-|a| \leq a \leq |a|$

(2) $|a \bullet b| = |a| \bullet |b|$

(3) $|a| - |b| \leq |a+b|$

(3´) $|a+b| \leq |a| + |b|$

(4) $|a| - |b| \leq |a-b|$

(4´) $|a| - |b| \leq |a+b|$

1.5.6 El cero y la serie ampliada de los números naturales

Hemos observado que tanto las definiciones como las propiedades hacen referencia al cero. El autor de esta investigación considera de suma importancia el significado o significados del cero y sus propiedades en el estudio de los enteros.

Potápov, M., Alexándrov, V. y Pasichenko, P. (1986), mencionan que el cero no es un número natural y se considera un número precedente a todos los naturales.

La serie de los naturales junto con el cero lleva el nombre de *serie natural ampliada*, la cual se designa con el símbolo Z_0. En esta serie ampliada de números naturales se pueden definir las operaciones de adición y multiplicación, y es suficiente añadir aquellas en las que interviene el *número cero*:

a) $0 + n = n + 0 = n$;

b) $0 + 0 = 0$;

c) $0 \bullet n = n \bullet 0 = 0$;

d) $0 \bullet 0 = 0$.

Por definición la potencia nula de todo natural m es la unidad, es decir:

$m^0 = 1$.

La división por cero y la elevación del cero a la potencia nula son operaciones prohibidas.

Otro aspecto importante y que se pasa por alto es la forma de escribir a los números naturales, ya que ésta dependerá del sistema numérico elegido. Actualmente se utilizan los sistemas posicionales.

Los sistemas posicionales se basan en que cierta cantidad de unidades forman una nueva unidad del orden superior siguiente, dicho número recibe el nombre de *base del sistema de numeración*. Así un número natural puede ser expresado en diferentes bases como la binaria, base 3, base 5, base 12 o base 10 la cual es utilizada de forma tan común que perdemos de vista sus propiedades o su estructura.

Con la serie ampliada de los naturales se puede construir la serie:
$Z_0 = \{ 0, 1, 2, 3 \ldots n\}$
Y se puede relacionar ahora con la recta numérica sin entrar en conflicto, por utilizar al cero en el modelo de enseñanza de la recta numérica para representar a los naturales.

DIVISIÓN DE ENTEROS.
Herstein (1986) basado en las propiedades elementales de los enteros incluye el principio de inducción matemática y el hecho de que un conjunto no vació de enteros positivos tiene un elemento mínimo. Así la división queda determinada de la siguiente manera:

Dados a y b con $b \neq 0$, se puede dividir a por (entre) b, para obtener un residuo no negativo r que menor en tamaño que b. Existe m y r tales que $a = mb + r$ donde $0 \leq r \leq |b|$, este hecho se conoce como el *algoritmo de Euclides*.
Si $b \neq 0$ divide a a si $a = mb$ para algún m.

Para indicar que b divide a a, se escribe $b|a$, utilizando esta notación se pueden resumir las propiedades de la división.
Siendo a, b, c enteros diferentes a cero, se tiene que:

a) $a|0$ y $1|a$
b) $a|a$
c) Si $a|b$ y $b|c$ entonces $a|c$
d) Si $a|b$ y $b|a$ entonces $|a| = |b|$
e) Si $a|b$ y $a|c$ entonces para cualquier entero x, y se tiene que $a|(xb + yc)$
f) Si $a|b$ entonces $|a| \leq |b|$

Así se extienden los conceptos de múltiplo, divisor, máximo común divisor, número primo en el conjunto de los enteros.

El texto de álgebra de Potápov, M., Alexándrov, V. y Pasichenko, P. (1986), incluye una sección donde indica que a la división se le trata como una operación inversa a la multiplicación, excepto, la división por cero. Por este motivo la operación de división no siempre es realizable, los números enteros siempre admiten la división entera inexacta. *Dividir un número entero a por un número natural m con residuo* significa hallar dos números enteros q y r tales que sea válida la igualdad $a = mq + r$
Si $r=0$ se dice que el número entero a se divide exactamente por el natural m.

1.6 La transferencia de los enteros a las ciencias experimentales.

Dentro de este estudio una docente no sólo significa a las operaciones, es decir, provoca que sus alumnos vean a la adición como juntar o agregar, también promueve la interpretación de la sustracción, desde el punto de vista de su triple naturaleza, como *quitar*, como *completar* y como *diferencia* (Gallardo 1994), además utiliza contextos reales y auténticos de la Física y la Química para significar el uso de los negativos y de los enteros, haciendo junto con la extensión del dominio de los naturales a los enteros, una posible transferencia de este conocimiento a estas ciencias experimentales.

Por lo expresado anteriormente es necesario conocer el Modelo Chino-Gallardo (1994) el cual tendrá su aplicación física en el *Modelo Atómico de Böhr* (Cruz, Chamizo y Garritz., 1986) y cómo se utilizan, operan e interpretan *los enteros en la Química*.

Por otro lado en la resolución de problemas, la misma docente, utiliza el contexto del movimiento parabólico para la enseñanza de la ecuación de segundo grado, con la finalidad de interpretar *a los negativos en la Física*, dada la modelización matemática en la cinemática.

1.6.1 El Modelo Chino.

Dentro de la presente investigación, se analiza una entrevista de la docente investigadora caracterizada como D5E en (Salinas, G., 2016), quien utiliza el modelo Chino-Gallardo (1994) y encuentra una propuesta para transitar de este modelo concreto hacia la abstracción del inverso aditivo.

En el Modelo Chino-Gallardo, la operatividad empleada por los matemáticos chinos, está basada en:

a) "*La oposición entre positivos y negativos*"
b) "*La suma de opuestos es cero*"

La operatividad en el campo aditivo, se basa en:

1) "*El conteo de los números positivos se extiende a los negativos*", es decir no sólo los números positivos se utilizan para contar.
2) "*En…la sustracción se requiere una representación alternativa del minuendo para llevar a cabo la resta*, se recurre a la adición de ceros según se requiera.
3) "*Es necesario tener en cuenta que* $a = a + 0 = a + 0 + 0 + 0 \ldots$"
4) *Los números positivos* (cantidades*) corresponden a "bolitas blancas" y los negativos están representados por "bolitas negras"*.

Para ilustrar el uso del modelo y sus códigos a continuación se expresa éste para la adición y sustracción de números positivos y negativos.

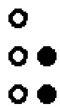
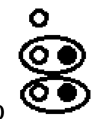
La representación de un positivo. 3 (tres) en el modelo chino (M-Ch) es: ○ ○ ○

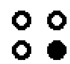
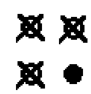
La representación de un negativo. -2 (dos negativo) en el M-Ch es: ● ●

La representación de un cero en el M-Ch es: ○ ● , o bien ● ○ ● ○ …

En la adición: 3 + (-2) = (léase, tres positivo *más* dos negativo), el tres está representado por tres bolitas blancas y el dos negativo por dos bolitas negras, como es una adición, se juntan, y al hacerlo se “aparean”[5] cada bolita blanca con una negra para formar ceros, entonces el resultado corresponde a las bolitas que quedan sin aparearse.

La adición anterior en el código chino es:

 , entonces se forman dos ceros y el resultado es uno positivo  .

Para la sustracción: 2 – 3= (léase dos positivo *menos* tres positivo), se observa que no se pueden quitar 3 de los 2 que existen previamente, para lo cual se recurre la suma de un cero al número dos (2 + 0):  , ahora puede realizarse la sustracción, tachando tres cantidades positivas, entonces el código de la operación 2 – 3 es:  con resultado uno negativo (-1) debida a la bolita negra que queda.

En las siguientes tablas se muestran operaciones aritmético-algebraicas y su representación en el M-Ch.

Operación	**Caso**	**Código en el Modelo Chino-Gallardo**
$-5 - (-1) = -4$	Sustracción de un negativo de otro negativo.	
$-2 + 1 = -1$	Adición de un negativo y un positivo	

Tabla 1.7a operaciones de adición y sustracción de positivos y negativos con el M-Ch-G

[5] El término aparear es usado en este caso para indicar que se forman pares.

Operación	Caso	Código en el Modelo Chino-Gallardo
$1-5=-4$	Sustracción de un positivo de otro positivo menor	
$2-(-3)=5$	Sustracción de un negativo de un positivo	
$-3+(-2)=-5$	Adición de dos negativos	
$2+(-1)=1$	Adición de un positivo y un negativo	

Tabla 1.7b operaciones de adición y sustracción de positivos y negativos con el M-Ch-G

Con el modelo chino se pueden observar las diferencias de la estructura matemática y la estructura equivalente. En la operación $-2+(-4)=-2-4=-6$, sintácticamente existe la igualdad entre las estructuras equivalentes, sus códigos chinos son los siguientes:

Operación	Caso-Estructura	Código en el Modelo Chino-Gallardo
$-2+(-4)=-6$	Adición de dos negativos (Suma)	
$-2-4=-6$	Sustracción de un positivo de un negativo (Resta)	

Tabla 1.8 Diferencias estructurales entre expresiones equivalentes en el M-Ch-G

Aunque las estructuras son equivalentes, conceptualmente las operaciones son distintas.

La propiedad conmutativa, dice que el orden de los sumandos no altera la suma, y en el M-Ch también ocurre. Cuando no se utiliza la notación completa de Cid y Bolea (2007), podría cometerse un error en esta igualdad: $2-3=-3+2$, y suponer que está representado la propiedad conmutativa. Los códigos del modelo arrojan diferentes esquemas debido a que no se están conmutando los sumandos:

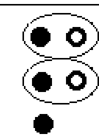
Operación	**Caso-Estructura**	**Código en el M-Ch**
$2-3=\ -1$	Sustracción de un positivo de otro menor (Resta)	
$-3+2=\ -1$	Adición de un negativo con un positivo (Suma)	

Tabla 1.9 Diferencias entre estructuras equivalentes no conmutativas en el M-Ch-G

En cambio, cuando se tiene la expresión (-3) + (+2) = (+2) + (-3), sí se está representando la propiedad conmutativa y los códigos chinos son iguales.

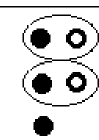
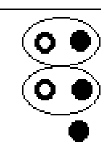
Operación	**Caso-Estructura**	**Código en el M-Ch**
$(-3)+(+2)=\ -1$	Adición de un negativo y un positivo	
$(+2)+(-3)=\ -1$	Adición de un positivo y un negativo	

Tabla 1.10 Estructuras equivalentes conmutativas en el M-Ch

En este apartado mostramos las ventajas del modelo, pero, en la aplicación del mismo, han surgido dificultades y obstáculos mostrados por Gallardo (1994) a través de las tendencias cognitivas. (Explicadas en el marco teórico, capítulo IV). Algunos problemas del modelo, residen en que no se puede utilizar para contar números del orden de las decenas por la complicación de sus representaciones, el modelo no ayuda a construir el orden en $\boldsymbol{Z}$ y sólo los usuarios expertos en el modelo pueden llegar a reflexiones como las expuestas en las tablas 1.8, 1.9 y 1.10.

1.6.2 El Modelo Atómico

Salinas (2016) realiza un trabajo de tipo semiótico analizando los entrecruzamientos de los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS) y los Sistemas Químicos de Signos (SQS)[6], para lo cual define algunos términos de la química que son necesarios para el análisis de la entrevista realizada por esta autora, a un docente de telesecundaria, entrevista aquí analizada y caracterizada, desde otro punto de vista, el de la enseñanza, ya que ésta es de tipo didáctica. Además los términos de la química presentados en esta sección son también utilizados por las docentes caracterizadas como D3S y D6S, quienes emplean contextos auténticos de la química. Algunos conceptos utilizados (Brown, T., Le May, H., Bursten, B. y Murphy, C., 2009), se muestran a continuación:

Química. Ciencia (experimental) que estudia las transformaciones de la materia a nivel atómico, pero reflejadas a nivel "macroscópico" (el que perciben nuestros sentidos) mediante los electrones de valencia de los átomos involucrados en una combinación química, con la consecuente absorción o emisión de energía, para obtener productos y energía beneficiosa al hombre.

Materia. En los textos escolares puede encontrarse como "todo aquello que ocupa un lugar en el espacio"…"tiene masa, peso, inercia, color, densidad, volumen, etc." pero una forma de entenderla e introducirla, es a través de la palabra "materiales que conocen los alumnos".

Valencia. Capacidad de combinación de un átomo en un compuesto, expresado con números enteros positivos pequeños (1,2,3…7).

Elemento. Sustancia formada por átomos del mismo tipo. Como hidrógeno, helio, cloro, azufre, oxígeno, oro, plata, cobre, etc. es decir el elemento oxígeno está formado sólo por átomos de oxígeno. De este concepto se desprende una sustancia como elemento.

Átomo. La partícula mínima que puede existir como elemento y conserva sus propiedades físicas y químicas, es considerada la partícula fundamental de la materia. Un átomo de oro conserva las propiedades físicas y químicas del elemento oro.

[6] Los SMS y los SQS son definidos en la sección del marco teórico.

Existen varios modelos para representar al átomo, como el de Demócrito, atomista de la antigua Grecia, quien consideraba que la materia estaba formada por pequeñas partículas. El Modelo de Dalton, consideraba a la materia formada por partículas esféricas, y cada sustancia tiene un tipo específico de partículas esféricas con diferentes propiedades. *El modelo atómico de Böhr* (Cruz, Chamizo y Garritz., 1986) es utilizado en la enseñanza actual de la química en el nivel secundaria y preparatoria, este modelo se emplea, para representar a un átomo, el cual tiene un núcleo positivo, estructurado por dos tipos de sub-partículas atómicas, los *protones,* con carga eléctrica convencionalmente positiva, y los *neutrones* con carga eléctrica cero (nula), fuera del núcleo, existen órbitas circulares cuantizadas energéticamente (de este concepto se forma la teoría cuántica), en las cuales se mueven en trayectorias ondulatoria y circulares, las partículas llamadas *electrones*, las cuales son 1836 veces más pequeñas que el protón, pero con el mismo tamaño de carga (en valor absoluto) pero de signo opuesto, es decir son partículas con carga negativa.

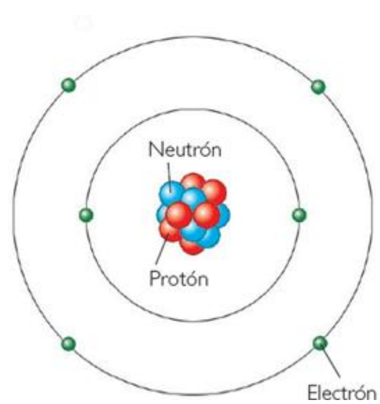


Fig. 1.8 El modelo atómico de Böhr para el átomo de Carbono

Ión. Es un átomo con carga eléctrica. Al átomo cargado positivamente se le llama catión, si el átomo tiene carga negativa se le llama anión, aplica también para agregados moleculares como el ión sulfato $(SO_4)^{2-}$. Un átomo o agregado puede adquirir carga al ganar o perder electrones, si gana un electrón, gana una carga negativa (-1), si pierde un electrón entonces su carga es uno positiva (+1). Aunque los protones son positivos, no intervienen en las reacciones químicas, en éste ámbito un átomo no puede ganar ni ceder protones.

Molécula. Es un agregado, formado químicamente por dos o más átomos de diferente tipo, como la molécula de agua, formada por dos átomos de hidrógeno y un átomo de oxígeno, desde el punto de vista macroscópica se le denomina *compuesto*, es decir una sustancia formada por el mismo tipo de moléculas o agregados.

Mezcla. Es la unión aparente de dos o más sustancias, pueden ser mezclas de elementos y compuestos, como el aire, que es una mezcla de nitrógeno (N_2), con una composición del 78%, oxígeno (O_2) con un 21% de composición y el otro 1% está formado por gases nobles (helio He, neón Ne, argón Ar, kriptón Kr, xenón Xe y radón Rn), metano (CH_4), vapor de agua $H_2O_{(g)}$, y dióxido de carbono (CO_2) entre otros.

1.6.3 Los enteros en la química

En la representación atómica de Böhr, se considera que los átomos son eléctricamente neutros, es decir la materia es neutra eléctricamente. Desde el punto de vista "microscópico", (que realmente es nanoscópico, del orden de 10^{-9} m) un átomo tiene igual número de partículas positivas y negativas, cuyas cargas son anuladas eléctricamente para un átomo es estado basal[7].

En el átomo de Carbono (C).

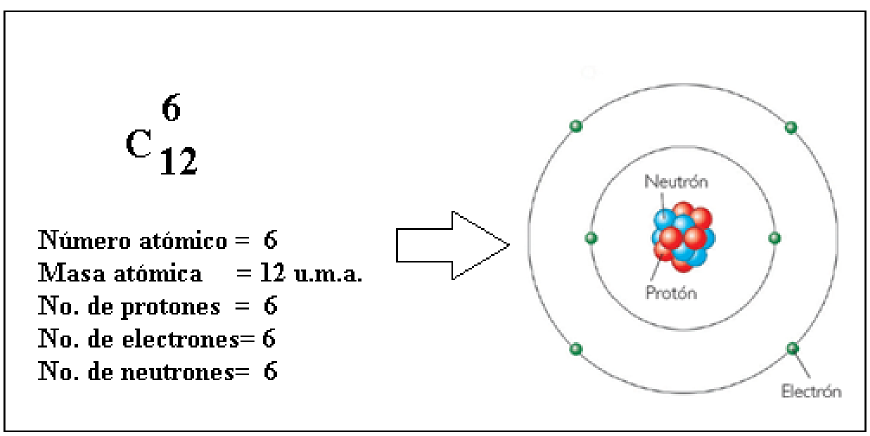


Fig. 1.9 El Carbono y su representación con el Modelo de Böhr.

[7] El estado basal de un átomo corresponde a un estado no excitado o de mínima energía.

La carga eléctrica del protón es +1.6 x 10^{19} C[8], y en el modelo atómico, se dice que un protón tiene *una carga positiva* y se representa con 1p+. Para fines prácticos se utiliza la siguiente equivalencia:

$$1p^{+} = +1.6\,x\,10^{19}\,C = +1$$

De forma análoga para el electrón (e^-) se tiene la equivalencia:

$$1e^{-} - = -1.6\,x\,10^{19}\,C = -1$$

Y como el neutrón tiene carga neta igual a cero, la equivalencia es:

$$1\,n\pm = 0\,C = 0$$

Por tanto cuando decimos que el átomo de carbono tiene 6 cargas positivas, se escribe como +6, pero quiere decir 6 p^+= (6) 1.6 x 10^{19}C, no se utilizará la carga del neutrón por tener carga nula. Las cargas de los átomos en este sentido son representadas con números enteros.

Para el átomo de Carbono (C), se tiene, en el SMS la representación de sus cargas:

$$(+6) + (-6) = 0$$

Nótese que se está utilizando a los números enteros y se está pasando del SQS al SMS como lo menciona y utiliza Salinas (2016). Estos enteros se usan en el SMS para después regresar a un SQS más complejo o abstracto.

1.6.3.1 Número de oxidación y estado de oxidación

Las reacciones químicas ocurren al compartir, ceder y ganar electrones entre los átomos o especies químicas que intervienen en ellas. Muchas de las reacciones son consideradas de óxido-reducción, proceso por el cual algunos átomos pierden electrones oxidándose y otros ganan electrones reduciéndose, esto ocurre simultáneamente, formándose el par dialéctico óxido-reducción.

[8] El símbolo C, corresponde al Coulomb, unidad de carga eléctrica en el sistema internacional de unidades.

Para ilustrar una reacción química, en la que ocurre el proceso de oxidación y reducción, nos auxiliaremos de los SQS, para lo cual, utilizaremos la reacción que ocurre en una celda voltaica (pila AA):

En la celda intervienen, el zinc (Zn), elemento metálico, el cobre (Cu) metálico, una disolución de sulfato de cobre (Cu SO_4) con el ión Cobre II (Cu^{2+}), una disolución de sulfato de zinc (Zn SO_4) con el ión zinc (Zn^{2+}) y un puente salino entre dos recipientes arreglados de acuerdo con la figura 1.10 (Brown et al, 2009).

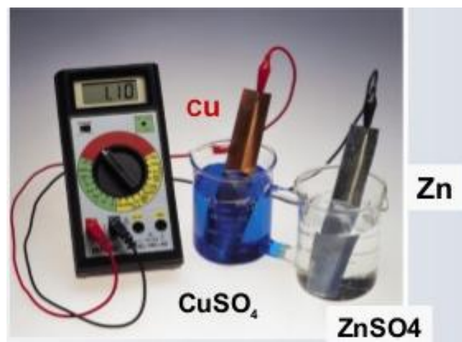


Fig. 1.10 Celda voltaica Cobre-Zinc

En el SQS (Salinas, G., 2016), la reacción de óxido reducción se representa de la siguiente forma:

$$Zn_{(s)} + Cu^{2+}_{(ac)} \longrightarrow Zn^{2+}_{(ac)} + Cu_{(s)} \qquad \Delta V = 1.10\ V$$

Se lee, El zinc metálico sólido reacciona con el ión cobre (en solución) para formar el ión zinc (en solución) y cobre metálico sólido, produciendo un voltaje de 1.10 Volt.

En la reacción, cuando los símbolos del zinc y del cobre no tienen un entero positivo o negativo como superíndice, entonces su *número de oxidación* es cero, y esto les sucede a las especies sólidas sin reaccionar, entonces se representa Zn^0, Cu^0, H_2^0 (hidrógeno molecular), O_2^0 (oxígeno molecular), etc.

En Salinas (2016) se puede encontrar un estudio semiótico de los signos matemáticos utilizados en la química, encontrando las semejanzas y diferencias en sus usos.

Para analizar la reacción de óxido-reducción, se separa ésta en dos semi-reacciones.

a) Semi-reacción de oxidación:

$Zn^0_{(s)} \longrightarrow Zn^{2+}_{(ac)} + 2\ e^-$

Se lee: El zinc metálico se transforma en el ión zinc (Zn^{2+}) cediendo dos electrones (al cobre), El número de oxidación del zinc, pasó de cero a dos positivo (se oxidó), este hecho expresado en un SMS:

$$0 = +2 + (-2)$$

Explica que eléctricamente hay un balance de cargas, dos cargas positivas del cobre se neutralizan con dos cargas eléctricas negativas de los dos electrones.

b) Semi-reacción de reducción:

$Cu^{2+}_{(ac)} + 2e^- \longrightarrow + Cu^0_{(s)}$

Se lee: El ión Cobre II (Cu^{2+}) en solución, se transforma ganando dos electrones (del zinc) en Cobre sólido metálico. El número de oxidación del cobre pasó de dos positivo a cero (se redujo), este hecho expresado en un SMS:

$$+2 + (-2) = 0$$

Explica que eléctricamente hay un balance de cargas, dos cargas positivas del cobre se neutralizan con dos cargas eléctricas de los dos electrones.

El paso de estos dos electrones a través de un conductor (cable), se registra con un voltímetro y arroja una diferencia de potencial eléctrico (voltaje) de 1.10 V.

En este apartado se observa cómo las matemáticas modelan el fenómeno electroquímico, lo que plantean, Vergnaud (1982) cuando habla de la introducción algebraica para representar fenómenos, también Cid (2007) cuando postula una introducción algebraica de los enteros para modelar fenómenos y no para ser modelada por éstos. Los autores de *Los Enteros* (2001) cuando dicen que es importante "*Conocer las aplicaciones y utilidades de los enteros, en contextos como las Ciencias Experimentales"* para realizar una correcta planeación didáctica.

1.6.3.2 Balanceo de reacciones químicas con el método redox

Existe un método químico-matemático para realizar el balanceo de una reacción química, es decir para determinar los coeficientes estequiométricos (cantidad de cada especie química que participa en una reacción) y cumplir con el balance de materia, (la materia no se crea ni se destruye, sólo se transforma).

Para ilustrar el balance, recurriremos a la misma reacción de óxido-reducción de la celda voltaica zinc-cobre:

A partir de las dos semi-reacciones de oxidación y de reducción, se tiene que:

$$Zn^0{}_{(s)} \longrightarrow Zn^{2+}{}_{(ac)} + 2\ e^-$$

$$Cu^{2+}{}_{(ac)} + 2e^- \longrightarrow + Cu^0{}_{(s)}$$

El número necesario de electrones que debe ceder el zinc, es 2. El número necesario de electrones para formar el átomo de cobre es 2. Como la cantidad de electrones cedidos y ganados son iguales, no es necesario multiplicar las ecuaciones por un entero positivo para igualar la cantidad de electrones necesarios en el intercambio. Sólo se realiza la suma algebraica de las dos expresiones.

$$Zn^0{}_{(s)} \longrightarrow Zn^{2+}{}_{(ac)} + 2\ e^-$$

$$Cu^{2+}{}_{(ac)} + 2e^- \longrightarrow + Cu^0{}_{(s)}$$

$$Zn_{(s)} + Cu^{2+}{}_{(ac)} + 2e^- \longrightarrow Zn^{2+}{}_{(ac)} + Cu_{(s)} + 2e^-$$

Aplicando la propiedad de cancelación:

$$Zn_{(s)} + Cu^{2+}{}_{(ac)} \longrightarrow Zn^{2+}{}_{(ac)} + Cu_{(s)}$$

Se obtienen los coeficientes son $1,1 \longrightarrow 1,1$, es decir es una reacción uno a uno.

$$(1)\ Zn_{(s)} + (1)\ Cu^{2+}{}_{(ac)} \longrightarrow (1)\ Zn^{2+}{}_{(ac)} + (1)\ Cu_{(s)}$$

1.6.4 Los negativos en la Física

Los números negativos en la física son utilizados cuando las variables son modeladas y referidas a los puntos de referencia, en una recta o en un plano cartesiano, como lo es el caso de fenómenos en la cinemática, la dinámica y la mecánica. También tienen significados fundamentales en la descripción y modelado de aspectos que tienen que ver con la aceleración gravitacional (Mochón, S., 1987), y tienen riqueza de significados del número negativo como en la fisicoquímica, la electroquímica y en especial en la Termodinámica.

Los docentes investigados en este trabajo, por un lado utilizan contextos de:

1) Movimiento rectilíneo uniforme
   Problemas de alcance
   Problemas de encuentro
2) Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado
   Problemas de tiro vertical
   Problemas de caída libre
   Problemas de movimiento parabólico

Y por otro lado se trabaja con estos docentes, para analizar conceptos que en la práctica cotidiana de la enseñanza de las ciencias resultan complejos, o confusos. Se utilizan a las matemáticas como modeladoras de fenómenos físicos y como apoyo en la comprensión de conceptos como:

a) Gravedad
b) Gravitación
c) Fuerza de gravedad
d) Peso
e) Aceleración gravitacional

El trabajo realizado con docentes, con el contexto de la Física, está orientado a indagar en la diferencia entre utilizar números relativos y números negativos.

Capítulo II. Estado actual de la enseñanza Institucional en México

2.1 El contexto institucional en México

La enseñanza en México de los números *negativos, con signo o ente*ros aparece por vez primera en primer grado de educación secundaria y continúa su enseñanza en segundo grado, de acuerdo al los planes y programas de estudio (SEP, 2011), aplicados inicialmente en el ciclo escolar 2011-2012, a partir de los cuales se realizó la presente investigación. Estos programas permanecen vigentes hasta el ciclo escolar 2017-2018. Para el periodo escolar 2018-2019 se tienen contemplados cambios en el currículum y en los planes y programas de estudio de acuerdo al "*Nuevo Modelo Educativo 2017*" (SEP, 2017), en éste último, los enteros aparecen ahora en sexto año de primaria y continuarán en primero y segundo de educación secundaria. A continuación se presenta la estructura de los planes y programas 2011, utilizados en esta tesis mediante *la observación de la enseñanza de los números enteros*. Posteriormente se presenta la información curricular, con la nueva propuesta educativa, con el fin de mostrar que ante este cambio educativo institucional, el contenido de los números negativos permanece intacto, con excepción de su programación y dosificación, observando que este tema y esta investigación permanecen vigentes.

2.1.1 Planes y programas 2011

En cuanto al **enfoque de la asignatura:**

g) "Se sugiere implementar situaciones problemáticas…"

h) "Se propone implementar situaciones que promuevan la reflexión…"

i) "Se proponen situaciones empleando diferentes alternativas de resolución…"

Los **propósitos del estudio de las Matemáticas** en educación secundaria (SEP, 2011) referentes a nuestra investigación son:

- "Se espera que los alumnos utilicen el cálculo mental, la estimación de resultados o de las ***operaciones escritas con números enteros, fraccionarios o decimales***, ***para resolver problemas aditivos y multiplicativos***".
- "Se espera que los alumnos ***modelen y resuelvan problemas que impliquen el uso de ecuaciones*** hasta de segundo grado, de funciones lineales o de expresiones generales que definen patrones"

La totalidad de los contenidos están dosificados en bloques del I al V, cada uno debe cubrirse en un bimestre aproximadamente. Los contenidos de la enseñanza de los enteros en secundaria aparecen en el acuerdo 592 de la SEP mostrados en el cuadro 2.1

BLOQUE IV Primer grado	
APRENDIZAJES ESPERADOS	EJE SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO
	NÚMEROS Y SISTEMAS DE NUMERACIÓN • Planteamiento y resolución de problemas que impliquen la utilización de números enteros, fraccionarios o decimales positivos y negativos
BLOQUE V Primer grado	
APRENDIZAJES ESPERADOS	EJE SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO
Resuelve problemas aditivos que implican el uso de números enteros, fraccionarios o decimales positivos y negativos	PROBLEMAS ADITIVOS • Resolución de problemas que implican el uso de sumas y restas de números enteros.
BLOQUE I Segundo grado	
APRENDIZAJES ESPERADOS	EJE SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO
Resuelve problemas que implican efectuar multiplicaciones o divisiones con expresiones algebraicas	PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS • Resolución de multiplicaciones y divisiones con números enteros.

Tabla 2.1 Contenidos y aprendizajes de los números negativos o enteros en secundaria.

Por otro lado, en la Guía para el maestro. Programas de estudio 2011. Educación Básica Matemáticas (SEP, 2011), aparecen los *estándares curriculares* de matemáticas, los cuales presentan la visión de ***"una población que sabe utilizar los conocimientos matemáticos y en general los estudiantes saben efectuar cálculos con expresiones algebraicas***"

Los estándares curriculares específicos relacionados al contenido de los enteros son:

1.2.1 "Resuelve problemas aditivos que implican efectuar cálculos con expresiones algebraicas"
1.3.1 "Resuelve problemas multiplicativos con expresiones algebraicas, a excepción de la división entre polinomios".
(SEP, 2011)

El eje y sus temas al que corresponden estos contenidos son:

- "Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico"
  - "Números y sistemas de numeración"
  - "Problemas aditivos"
  - "Problemas multiplicativos"

(SEP, 2011)

2.2 Análisis de los planes y programas de estudio 2011

La planeación didáctica del contenido de los enteros la realiza el docente con base en la información que provee la tabla 2.1, tomando en cuenta el enfoque de la asignatura, los propósitos y los estándares curriculares de la educación básica en matemáticas.

Algunos aspectos ulteriores, que no son ostentados explícitamente en esta propuesta educativa son:

- La tabla 2.1 no es explícita en su totalidad, es un resumen del enfoque, los propósitos y los estándares curriculares.
- En el bloque IV de primer grado, aparece el contenido "*Planteamiento y resolución de problemas que impliquen la utilización de números enteros, fraccionarios o decimales positivos y negativos*", en él, no se indica ninguna estrategia o dosificación del contenido para plantear los problemas de números enteros, ¿cómo plantear los problemas cuando no se han enseñado la conceptualización del número negativo ni la definición de los enteros?
- En el cuadro no aparecen los aprendizajes esperados correspondientes al contenido del bloque IV, el profesor no contempla éstos en la enseñanza o tiene que indagar en el programa para que haga sentido el aprendizaje esperado con el contenido presentado.
- Primero se debería iniciar con una actividad introductoria de los números negativos a partir, por ejemplo de los opuestos reales (Kant, I., 1992).
- Después continuar con una secuencia didáctica que recupere los conocimientos previos de la ubicación y comparación de los naturales para extenderla a los enteros.
- En el bloque V el contenido es "*Resolución de problemas que implican el uso de sumas y restas de números enteros*" Para resolver problemas con enteros ya se debió cumplir con la enseñanza de los mismos o nuevamente, enseñar a resolver problemas desarrollando al mismo tiempo la enseñanza de los enteros.
- En el bloque V sí aparece el aprendizaje esperado con su contenido, que resulta ser el mismo para el contenido del bloque IV.
- Se debe tomar en cuenta que se realizarán operaciones de adición y sustracción de números positivos y negativos, enteros, decimales o fraccionarios en el contexto de la resolución de problemas.
- Queda a criterio del docente la transposición didáctica (D'Amore, B. y Brousseau, G., 1995).
- Es responsabilidad del docente realizar la planeación y dosificación de contenidos. (SEP, 2011).

2.3 El nuevo modelo educativo 2017

Plan y Programas de Estudio Para la Educación Básica

Aprendizajes Clave para la Educación Integral

A continuación, se presenta una descripción general del nuevo modelo educativo, el cual contempla un nuevo enfoque pedagógico, propósitos replanteados y estándares curriculares modificados, rescatando y presentando las orientaciones didácticas como apoyo para el docente y una nueva definición del perfil de egreso del estudiante de secundaria, este nuevo modelo representa una evolución curricular del modelo 2011.

El *pensamiento matemático* como forma de razonar, es clave como campo de formación académica inmerso en los programas de estudio para traducirse en actitudes y valores favorables hacia las matemáticas, utilidad y valores científicos y culturales (SEP, 2017).

Existe una definición de las matemáticas en la educación básica: "*Las matemáticas son un conjunto de conceptos, métodos y técnicas mediante los cuales es posible analizar fenómenos y situaciones en contextos diversos, interpretar y procesar información, tanto cuantitativa como cualitativa, identificar patrones y regularidades, así como plantear y resolver problemas. Proporcionan un lenguaje preciso y conciso para modelar y comunicar observaciones que se realizan en distintos campos*" (SEP 2017).

Como propósitos generales de las matemáticas en la educación básica se tiene que:

- *"Concebir* a las matemáticas como una construcción social…"
- *"Adquirir* actitudes positivas y críticas hacia las matemáticas…"
- *"Desarrollar* habilidades que les permitan plantear y resolver problemas…" (SEP, 2017)

Dentro de los propósitos para la educación secundaria, el siguiente está relacionado con la enseñanza de los negativos, o enteros:

- “*Utilizar* de manera flexible la estimación, el cálculo mental, y el cálculo por escrito en las operaciones ***con números enteros, fraccionarios, decimales positivos y negativos***”.

- “*Resolve*r problemas que impliquen el uso de ***ecuaciones hasta de segundo grado***”.

El enfoque pedagógico de la asignatura de matemáticas es a través de la resolución de problemas como meta y como medio para el aprendizaje.

El organizador curricular para el contenido de los enteros y sus temas relacionados son:

“NUMERO, ÁLGEBRA Y VARIACIÓN”.

- “NÚMERO”
- “ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN”
- “MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN”

(SEP, 2017)

Las orientaciones didácticas son recomendaciones para que el docente apoye al alumno en el desarrollo del pensamiento matemático, es el apoyo que requiere el estudiante para avanzar progresivamente con mayor nivel de abstracción con las siguientes metas:

- “COMPRENDER LA SITUACIÓN IMPLICADA EN UN PROBLEMA”
- “PLANTEAR RUTAS DE SOLUCIÓN”
- “TRABAJO EN EQUIPO”
- “MANEJO ADECUADO DEL TIEMPO”
- “DIVERSIFICAR EL TIPO DE PROBLEMAS”
- “COMPARTIR EXPERIENCIAS CON OTROS PROFESORES “

(SEP, 2017)

El nuevo perfil de egreso está en función del pensamiento matemático, en el cual el estudiante:

- “*Amplía su conocimiento de técnicas y conceptos matemáticos para plantear y resolver problemas con distinto grado de complejidad, así como para modelar y analizar situaciones. Valora las cualidades del pensamiento matemático*”.

(SEP, 2017)

2.3.1 Dosificación de los aprendizajes esperados.

En esta nueva propuesta, aparece ahora el primer contenido relacionado a los números enteros en sexto grado de primaria como se muestra en la siguiente tabla.

MATEMÁTICAS. PRIMARIA 6º.		
EJES	Temas	Aprendizajes Esperados
NÚMERO, ALGEBRA Y VARIACIÓN	Número	• Resuelve problemas que impliquen el uso de números enteros al situarlos en la recta numérica, compararlos y ordenarlos.

Tabla 2.2 Aprendizaje esperado de enteros en primaria.

En el tema de la enseñanza de los números negativos, o enteros para el primer grado de secundaria se tiene la información en la siguiente tabla:

MATEMÁTICAS. SECUNDARIA 1º.		
EJES	Temas	Aprendizajes Esperados
NÚMERO, ALGEBRA Y VARIACIÓN	Adición y sustracción	• Resuelve problemas de suma y resta con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.

Tabla 2.3 Aprendizaje esperado de enteros en 1º. de secundaria

Para el segundo grado, el organizador curricular, el tema y el aprendizaje esperado se encuentra en la siguiente tabla.´

MATEMÁTICAS. SECUNDARIA 2º.		
EJES	Temas	Aprendizajes Esperados
NÚMERO, ALGEBRA Y VARIACIÓN	Multiplicación y división	• Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.

Tabla 2.4 Aprendizaje esperado de enteros en 2º. de secundaria

2.4 Análisis del nuevo modelo educativo (2017)

La planeación didáctica del contenido de los enteros la realiza el docente con base en la información que provee las tablas 2.2, 2.3 y 2.4, tomando en cuenta el enfoque de la asignatura, los propósitos y los estándares curriculares, las orientaciones didácticas y el perfil de egreso de la educación básica en matemáticas, análogo al modelo 2011.

De manera similar al modelo 2011, el Nuevo Modelo Educativo tiene implícita la información curricular, de la cual se puede concluir lo siguiente:

- Las tablas anteriores (2.2, 2.3, 2.4) no son explícitas en su totalidad, es un resumen del enfoque, los propósitos y los estándares curriculares.
- La dosificación de contenidos ya no es a través de bloques sino a través de aprendizajes esperados.
- Los contenidos ahora serán plantados y organizados por el profesor, además de los aspectos curriculares, de acuerdo a sus estrategias, conocimientos y experiencia.
- Es la primera vez que se enseña a los negativos en sexto año de primaria, los profesores nunca han enseñado este contenido, ¿Estarán en condiciones de hacerlo? (ya que una de las conclusiones de esta tesis es que los docentes del nivel primaria en el modelo 2011, evitan la emergencia del número negativo).
- En el caso del 6º de primaria, al ser la primera vez que se toca este contenido, sería prudente un taller de la historia, epistemología y didáctica, del número entero para los profesores, así como otro taller para el desarrollo de secuencias didácticas.
- En el caso de la secundaria, al arrancar el programa, los niños de nuevo ingreso al primer grado en el ciclo escolar 2018-2019, deberán regularizar el contenido de sexto de los enteros, ya que se da por entendido que traen ese conocimiento.
- Para el primer grado, el aprendizaje esperado "*Resuelve problemas de suma y resta con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos*" se mantiene y el contenido deberá ser planteado y organizado por el docente.

- Para el segundo grado se mantiene el aprendizaje esperado "*Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos".*
- A diferencia del programa anterior 2011, ahora se muestran de manera clara, los aprendizajes esperados, lo que permite diseñar las secuencias didácticas a partir de éstos.
- El enfoque es aprender matemáticas mediante la resolución de problemas como meta y como medio.
- Queda a criterio del docente la transposición didáctica (D'Amore, B. y Brousseau, G., 1995) del contenido de los números negativos, o enteros para su enseñanza.
- Es responsabilidad del docente plantear los contenidos de acuerdo al aprendizaje esperado, su planeación y dosificación (SEP, 2017).

2.5 Comparación de planes y programas 2011 y del nuevo modelo educativo 2017

En el libro "Aprendizajes Clave para la Educación Integral" del Plan y programas de estudio para la educación básica, se muestra *la evolución curricular* del programa 2011 al 2017, se mencionan los aspectos del currículum anterior que permanecen:

- "El enfoque didáctico para el estudio de las matemáticas es la resolución de problemas…"
- "El aprendizaje se sustenta en los conocimientos previos de los alumnos…"
- "La actividad principal en los proceso de estudio de la asignatura es el razonamiento; sin embargo los ejercicios de práctica y el uso de la memoria son complementarios…"
- "El enfoque de la evaluación de la asignatura es formativo…" (SEP, 2017).

A continuación se presenta la tabla 2.5 (propuesta por el autor de la presente tesis), la cual concentra los aspectos de las dos propuestas educativas:

Números enteros.	PLANES 2011	**PLAN 2017**
Enfoque	Resolución de problemas, reflexión y diferentes formas de solución	Resolución de problemas, como meta y como medio, reflexión y diferentes formas de solución
Propósitos	*Utilicen el cálculo mental, la estimación o las operaciones escritas con números enteros, fraccionarios o decimales, para resolver problemas aditivos y multiplicativos*	*Utilizar de manera flexible, la estimación, el cálculo mental y el cálculo escrito en las operaciones con números enteros, fraccionarios y decimales positivos y negativos…*
Organizadores curriculares	Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico	Número, Algebra y Variación
Temas	Números y sistemas de numeración Problemas aditivos Problemas multiplicativos	Número Adición y sustracción Multiplicación y división
Aprendizajes esperados	*Resuelve problemas aditivos que implican el uso de números enteros, fraccionarios o decimales positivos y negativos.*	*Resuelve problemas de suma y resta con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.*
	Resuelve problemas que implican efectuar multiplicaciones o divisiones con expresiones algebraicas.	*Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos*

Tabla 2.5. Comparativo de los planes 2011 y 2017

A partir de la tabla 2.5 se puede observar que existe una compatibilidad entre los dos planes y programas de estudio, que hay equivalencias en el enfoque, propósitos y estándares curriculares, por lo que la enseñanza de este contenido de los números enteros, fraccionarios y decimales positivos y negativos, sigue vigente dentro de la evolución curricular.

El nuevo currículo avanza según SEP (2017) en los siguientes aspectos, de los cuales, sólo se presentan aquellos que están relacionados con el tema de los números enteros, fraccionarios y decimales positivos y negativos:

- "*Se tiene una posición más clara sobre la concepción de las matemáticas y sobre el papel de la resolución de problemas."*
- *"Las – Orientaciones Didácticas – se recuperan, con explicaciones, sugerencias de actividades…"*
- *"Se integró al eje "Número, Álgebra y Variación" que ahora incluye – Proporcionalidad –"*
- *…"En sexto grado se introducen los números enteros."*
- *…"El álgebra simbólica se inicia con la resolución de problemas por medio de la formulación y solución de ecuaciones…. se estudia la generalización mediante el análisis de sucesiones numéricas y figurativas, y la simbolización algebraica de sus reglas."*

2.6 Consideraciones para realizar la Transposición Didáctica

Es importante conocer los aprendizajes esperados, tanto en el modelo 2011 como ahora en el modelo 2017, los cuales contienen equivalencias, al menos en cuanto a los números negativos, esto, con la finalidad de plantear y planificar, los contenidos, las actividades, la evaluación formativa, la dosificación programática y las estrategias de enseñanza para realizar una correcta transposición didáctica.

Por un lado los docentes deben conocer las políticas institucionales de la educación, así como la normatividad que sustenta el modelo educativo, el docente en este aspecto debiera entonces, tomar en cuenta aspectos como:

1) El enfoque de la asignatura de matemáticas en la secundaria
2) Los propósitos de las matemáticas en la secundaria
3) Los organizadores curriculares y sus temas correspondientes
4) El perfil de egreso deseado en los estudiantes de secundaria
5) Los planes y programas de estudio de la asignatura
6) Los aprendizajes esperados en las matemáticas por grado y conocerlos en su totalidad, no importa si el docente sólo atiende un grado.
7) El perfil de egreso con el que arriban los niños de primaria a la secundaria

El estudio y conocimiento de los aspectos mencionados, permite por un lado, rescatar los conocimientos previos de los niños cuando ingresan a la secundaria, además, permite desarrollar los contenidos del tópico de los números negativos y otros, con base en los aprendizajes esperados que se desean alcanzar, enmarcados en el enfoque, propósitos y perfil de egreso deseado en los estudiantes de secundaria.

El siguiente esquema (Fig.2.1) muestra las ideas anteriores en el contexto de la enseñanza institucional, para realizar una correcta transposición didáctica.

Fig. 2.1 El contexto institucional en la planeación didáctica.

Capítulo III. Planteamiento del problema

3.1 El problema de investigación.

En el capítulo 1 se comentó la problemática del aprendizaje y la enseñanza de este complicado contenido, desde los puntos de vista histórico, epistemológico, filosófico y didáctico. Además de Maz (2005) quien comenta que el número negativo es difícil de enseñar, la investigadora Eva Cid (2000) comenta que "*El objetivo,... es utilizar la noción de obstáculo epistemológico definida en el marco de la teoría de situaciones didácticas para terciar y, en la medida de lo posible, zanjar la polémica sobre la existencia de obstáculos en la historia de los números negativos y su influencia en la enseñanza actual, polémica surgida hace ya años pero que sigue sin resolverse*".

Como lo mencionan los autores citados, la enseñanza del número negativo o entero no se ha resuelto y el problema de esta investigación surge de los siguientes aspectos:

- No existe un modelo único para la enseñanza del número negativo, además cada profesor tiene su estilo (perfil) de enseñanza y cada alumno tiene su estilo de aprendizaje.
- ¿Por qué los niños egresados de la secundaria tienen un aprovechamiento tan bajo? En 2005 y 2008 más del 50% de los niños a nivel nacional estaban por debajo del nivel básico en las pruebas de matemáticas. Para la prueba EXCALE de 2012, se tuvieron los siguientes resultados, en promedio, a nivel nacional, incluye secundarias generales, técnicas, telesecundarias y privadas:

Nivel de logro en la prueba de matemáticas.	**Puntaje**	**Resultados en porcentaje de alumnos**
Avanzado	692-1008	3
Medio	560-691	22
Básico	471-559	41
Insuficiente	330-470	34

Tabla 3.1 Resultados de la prueba EXCALE 2012. Fuente INEE 2016.

Los niveles de logro en las pruebas, son explicados en: Sánchez A., Martínez, J. y Andrade, E. (coords.), (INEE, 2016).

- Los resultados obtenidos por los niños ¿están relacionados con la enseñanza de los profesores de secundaria?, es decir ¿son producto de una deficiente enseñanza? o, ¿existen factores adicionales a la enseñanza del docente?
- ¿El docente de secundaria domina el contenido matemático y didáctico de los números negativos?
- ¿Cómo enseñan los profesores el tema de los números enteros?
- ¿La competencia matemática en los niños es reflejo de la competencia matemática de los docentes?
- ¿Los docentes ayudan a los niños a superar los conflictos surgidos en la enseñanza de este contenido y de ser así cómo lo hacen y de no ser así, qué sucede?

A partir de las cuestiones planteadas, se indaga en la presente investigación, la forma en que los docentes enseñan este contenido matemático, *mediante la observación directa de la práctica docente* habitual, esto, para conocer los elementos utilizados en la enseñanza, y caracterizar la misma, de acuerdo con los aspectos históricos, epistemológicos, filosóficos y didácticos tratados en el capítulo 1 y en el marco teórico, aspectos que subyacen en las dificultades y obstáculos que se interponen en la comprensión y usos correctos de los números negativos en los sujetos que aprenden a partir, de los sujetos que enseñan. Analizar si los errores, dificultades y obstáculos conocidos en los alumnos son una reproducción de las dificultades de los docentes, y cómo éstos, ayudan o no al estudiante a superar sus dificultades para alcanzar la extensión del conjunto numérico de los naturales al dominio de los enteros.

Para ilustrar la situación de las dificultades encontradas en el aula durante la enseñanza de los números negativos, hablaremos del docente "ideal" en este estudio, quien cuestiona a los alumnos, el porqué utilizan una regla multiplicativa para sumar o restar, éstos, entran en conflicto y no pueden responder, debido posiblemente al hecho de haber aceptado reglas como dogma.

3.2 Objetivos del estudio

Los objetivos de esta tesis son:

Objetivos generales:

- Indagar en *cómo es la enseñanza* de los números enteros en la secundaria, por medio de la observación directa de profesores, para conocer sus características y relacionarlas con la extensión del dominio numérico del conjunto de los números naturales al dominio de los números enteros.
- Identificar y determinar los aspectos en la enseñanza, que favorecen u obstruyen la extensión numérica, así como el tipo de introducción de los negativos, que son utilizados por los docentes.
- Indagar en los perfiles del docente, y si éstos pudieran influir en la enseñanza de los números enteros.

Objetivos particulares:

- Identificar los modelos y métodos utilizados por los profesores cuando enseñan el número negativo.
- Identificar los procedimientos y dificultades manifestados por los profesores durante la primera enseñanza de los números negativos o enteros.
- Indagar en cómo enseñan los docentes, el número negativo desde su conceptualización, su ordenación, y conocer las diferentes definiciones utilizadas.
- Indagar en cómo enseñan a operar en el campo aditivo de los enteros, en especial cómo enseñan la sustracción.
- Indagar si los docentes utilizan el enfoque de la resolución de problemas y si en éstos, aparece el número natural relativo o el negativo formal.
- Indagar si los docentes usan y explicitan, los sistemas de referencia en los problemas aditivos.

3.3 Preguntas de investigación.

A partir de las reflexiones anteriores, se plantean las siguientes preguntas de investigación:

a) *¿Cuáles son las características de la enseñanza de los enteros observadas en docentes de educación secundaria?*

b) *¿Cuáles son las estrategias de enseñanza en los problemas o situaciones aditivas con los enteros, fracciones y decimales positivos y negativos?*

c) *¿Cuáles aspectos de la enseñanza ayudan u obstruyen la extensión del conjunto numérico de los naturales hacia el dominio de los enteros?*

3.4 Justificación del trabajo de investigación.

Como se ha mencionado, la enseñanza del número negativo no está resuelta, por otro lado, las investigaciones desarrolladas en el CINVESTAV, México, en el departamento de Matemática Educativa, se han enfocado en identificar los obstáculos y dificultades en los alumnos durante el aprendizaje del número con signo, negativo o entero, así como del análisis de las ventajas y dificultades encontradas en la implementación de propuestas didácticas, o en indagar en la competencia matemática de profesores que enseñan este contenido, pero no se ha observado la enseñanza directa de los profesores en la práctica cotidiana, con excepción de Esqueda (2016), quien observa a docentes durante la enseñanza de problemas aditivos con números enteros (relativos) para analizar el uso del sistema de referencia.

En la tabla 3.2a, 3.2b, 3.2c y 3.2d, se encuentra un breve resumen de trabajos elaborados en torno a este contenido, dirigidos por Gallardo en el periodo comprendido de 1994 al 2018.

3.4.1 Trabajos dirigidos por GALLARDO en CINVESTAV

Las investigaciones encontradas en CINVESTAV dirigidas por Gallardo, son las siguientes, con un resumen del trabajo desarrollado en cada una.

ESTUDIO/REFERENCIA	RESUMEN
1. El modelo de la recta numérica como instrumento de investigación en la descripción de las dificultades en la adición y sustracción de números enteros. Romero, M. (1999)	Se indaga y se señalan las ventajas y dificultades a las que se enfrenta el profesor en la enseñanza de los números enteros cuando se utiliza a la recta como modelo y como instrumento de investigación en alumnos de secundaria, se concluye acerca de las concepciones erróneas y dificultades para operar con la recta numérica.
2. Introducción al concepto del número negativo en el nivel medio básico mediante la resolución de problemas de tipo aditivo. Torres, M. (2001)	En este trabajo, se averigua si la enseñanza de los números negativos mediante la resolución de problemas consigue mejorar la conceptualización de los mismos en el primer año de secundaria.
3. Enseñanza y aprendizaje de los números negativos. Mejía, J. (2009)	En esta tesis se expone la relación que pudiera existir entre las dificultades surgidas en los estudiantes durante el aprendizaje de los enteros y la competencia de docentes que resuelven problemas con números negativos a través de la observación indirecta de éstos.
4. El cero y la negatividad. Hernández, J. A. (2002)	En este trabajo se encuentran los sentidos de uso de los negativos, así como los sentidos de uso (al menos 15) del número cero, y su importancia para el conocimiento de los números enteros al implementar un estudio empírico en estudiantes de nivel secundaria.
5. Uso de modelos de enseñanza en la resolución de problemas aditivos. Alcántara, J.A. (2010)	En este trabajo se estudian cuatro modelos de enseñanza; el Modelo Chino, El de la Recta Numérica, el Híbrido y el llamado “De reglas matemáticas”, su implementación mediante un estudio empírico en estudiantes de secundaria en el cual se obtienen y analizan las tendencias cognitivas surgidas durante la misma.

Tabla 3.2a Investigaciones dirigidas por Gallardo (1994-2018).

ESTUDIO/REFERENCIA	RESUMEN
6. El plano cartesiano como organizador fenomenológico de la adición, sustracción, multiplicación y división de los enteros. Damián, E. (2009)	Este trabajo muestra la aplicación de la fenomenología didáctica en las representaciones de las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de enteros en el plano cartesiano con una intervención didáctica, la autora concluye que para algunos estudiantes, el uso del plano representa un obstáculo y para otros, un organizador importante.
7. Estudio de las fracciones negativas en educación básica. Saavedra, G. A. (2011)	En esta tesis se trabaja en los significados de la fracción positiva y a partir de éstas construir la fracción negativa con los significados de operador y cociente, además aporta elementos teóricos del estudio de las fracciones negativas.
8. Análisis del entrecruzamiento de los sentidos de uso de la variable y del número negativo en el trabajo del algebraico con estudiantes de secundaria. Espinoza, E. I. (2011)	En este trabajo se averigua si la enseñanza de los números negativos durante la resolución de problemas consigue mejorar la conceptualización de los mismos, en el entorno de la enseñanza del álgebra en el primer año de secundaria.
9. Resolución de problemas de cinemática por alumnos de secundaria. Matías, F. (2013)	Observa errores relacionados con el número negativo, presentados en los alumnos de secundaria en situaciones de la Física, específicamente en la Cinemática del movimiento de objetos o partículas y la identificación de las tendencias cognitivas surgidas en el estudio.
10. De las representaciones intuitivas de la negatividad a la interpretación formal del concepto de entero. Hernández, M. (2014)	En este estudio se indaga en el uso de números positivos en lugar de negativos en la resolución de problemas aditivos clasificados por Bruno y Martinón (1997) y observa los procesos de resolución en un una estudiante que van de los intuitivos a los formales, identificando sus tendencias cognitivas.
11. La sustracción en recta numérica versus los números negativos: Un estudio de caso en el nivel de secundaria desde una perspectiva integral. Torres, F. O. (2008)	En este trabajo se expone la recuperación de la sustracción y los números negativos a través de la recta numérica, a través de un estudio empírico en estudiantes de secundaria, se obtienen y analizan las tendencias cognitivas surgidas en el estudio, en el cual son utilizados los estudios de Gallardo acerca de la conceptualización del número negativo, la triple naturaleza de la sustracción y el signo unario y binario.

Tabla 3.2b Investigaciones dirigidas por Gallardo (1994-2018).

ESTUDIO/REFERENCIA	RESUMEN
12. Diferentes sintaxis de algunas calculadoras básicas en la escritura de operaciones con números enteros y la resolución de problemas aditivos. Basurto, E. (2007)	En este trabajo se exponen las formas de introducir por medio de modelos a los números negativos, en particular a los enteros y se analiza en qué medida el manejo de las reglas de escritura inhibe o beneficia la extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros por parte de los estudiantes.
13. Análisis de algunos Hitos fundamentales que surgen durante la transición de la aritmética al álgebra para entender la diferencia entre el cálculo aritmético y el cálculo algebraico. Espinoza, E. I. (2016)	En esta tesis se plantea una ruta didáctica que permita analizar los hechos surgidos en el proceso de adquisición del álgebra a partir del conocimiento aritmético de los estudiantes de secundaria, hechos que tienen que ver con los sentidos de uso de los números negativos y cómo estos usos permiten entrecruzar estos dos ámbitos matemáticos.
14. Entrecruzamientos de los Sistemas Matemáticos de Signos y los Sistemas Químicos de Signos. Un estudio semiótico. Salinas, G. B. (2016)	En esta tesis, se presentan las semejanzas y diferencias entre los sistemas matemáticos de signos (SMS) y los sistemas químicos de signos (SQS), desde un punto de vista semiótico y si la competencia matemática influye en la competencia química. Se concluye que los SQS no son matemáticos.
15. ¿Es el cero el mismo número para todos? Méndez, D. (2016)	En esta tesis se presentan las diferentes concepciones relacionadas con el cero cuando se resuelven problemas aditivos asociados con los números enteros o negativos, enmarcados en las investigaciones históricas de diferentes culturas como la griega y la china.
16. Impacto de los recursos usados por los profesores en la comprensión y resolución de problemas de números con signo. Esqueda, A. (2016)	En este trabajo se expone que los profesores durante la enseñanza de problemas que representan a los números enteros no son conscientes del uso del sistema de referencia, aunque es utilizado implícitamente y los problemas son resueltos con números naturales asociados a un punto de referencia no explícito.

Tabla 3.2c Investigaciones dirigidas por Gallardo (1994-2018).

ESTUDIO/REFERENCIA	RESUMEN
17. Introducción temprana de los números negativos: un estudio con niños de quinto grado de primaria. Mejía, J. (2017)	Este estudio exploratorio muestra que es posible implementar la didáctica del número negativo desde la primaria como una introducción temprana de este contenido, analiza las dificultades surgidas en la implementación de una propuesta didáctica.
18. Surgimiento de la negatividad en los números racionales. Saavedra, G. A. (2018)	Este trabajo expone la necesidad del surgimiento del número negativo fraccionario en problemas que se resuelven con la sustracción como diferencia que modela situaciones de variación lineal desde la perspectiva del número sustractivo.

Tabla 3.2d Investigaciones dirigidas por Gallardo (1994-2018).

Como puede observarse en la tabla 3.2, los autores que investigan a los docentes, lo hacen a través de cuestionarios, entrevistas o de la observación indirecta de los profesores en la enseñanza, con excepción del trabajo de Esqueda (2016), por lo cual consideramos que el trabajo realizado en esta tesis es original y complementario a los estudios de Gallardo.

3.5 Marco teórico

Consideramos algunos conceptos articuladores en este estudio, por un lado, el uso de los *Modelos Teórico Locales* para observar experimentalmente y analizar las actuaciones entre docentes y alumnos como usuarios de los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS), en el contexto de la enseñanza de los números negativos, con signo o enteros, con el fin de desentrañar las relaciones entre los diversos componentes que participan en este modelo y poder llevar a cabo una caracterización. Por otro lado, se toma en cuenta a *La abstracción reflexiva* utilizada por los docentes en la enseñanza de los enteros y el *conflicto cognitivo* surgido en los estudiantes durante el proceso de enseñanza-aprendizaje como meta a superar para la generación del conocimiento.

3.5.1 Los Modelos Teórico Locales

Los Modelos Teórico Locales (MTL) constituyen una perspectiva metodológica para la observación experimental en materia educativa. Filloy, Rojano, Puig y Rubio (1999) proponen los MTL para analizar textos orales y escritos, creados por los sujetos usuarios del SMS, que aprenden y enseñan, en los procesos de producción de sentido. El Modelo es local en el sentido de que es adecuado a fenómenos específicos, y es integral porque sus componentes están inter-relacionadas entre sí.

Los cuatro componentes de los MTL son los siguientes:

a) *Los Modelos de enseñanza*
b) *Modelo para los procesos cognitivos*
c) *Modelos de Competencia formal*
d) *Modelos de Comunicación*

3.5.1.1 El componente de *Los Modelos de Enseñanza*

Los modelos de enseñanza se forman a través de una secuencia de textos matemáticos, en los cuales los sujetos traducen y decodifican estos textos en un SMS más abstracto.

Según Filloy (1999) el modelaje de la enseñanza del álgebra tiene dos componentes:

a) Traducción, en la cual se dan significados a nuevos objetos y operaciones en un contexto concreto.

b) Separación del contexto concreto hacia el uso de los nuevos objetos y operaciones hacia la resolución de situaciones más abstractas.

Los modelos de enseñanza que aparecen en este estudio son el Modelo de la *Recta Numérica*, el *Modelo Chino* y el *Modelo Algebraico*. En González, J., Iriarte, M., Jimeno, M., Ortiz, A., Ortiz, A., Sanz, E. y Vargas-Machuca, I. (1990) se consideran dos modelos geométricos para representar a los números enteros en la *Recta Numérica*, uno a través de puntos sobre la recta, en donde se requiere un punto de referencia (el cero) y una unidad, y en el otro se piensa a los enteros como números dirigidos considerándolos vectores. El principio fundamental del *Modelo Chino* (Gallardo, 1994) está basado en el equilibrio de dos cantidades simétricas que representan a números enteros.

El *Modelo Algebraico*, (González, et al. 1990) es utilizado cuando se plantea una ecuación o cuando aparece una generalización.

Para esta investigación se recurre a la clasificación de los modelos de enseñanza de los números con signo, negativos o enteros de Janvier y del autor de la presente tesis, mostrado a continuación:

$$\text{Modelos de enseñanza} \begin{cases} \text{Modelos de neutralización} \\ \text{Modelos de Desplazamiento} \\ \text{Modelo Algebraico} \end{cases}$$

Los modelos utilizados en la enseñanza planteados para el análisis de las actuaciones son:

$$\text{Modelos de enseñanza} \begin{cases} \text{Modelo Chino-Gallardo} \\ \text{Modelo de la Recta Numérica} \\ \text{Modelo Sintáctico-Algorítmico} \end{cases}$$

El modelo sintáctico algorítmico propuesto en esta tesis, utiliza estrategias del tipo aritméticas, aritmético-algebraicas y algebraicas, con tres métodos:

$$\text{Modelo Sintáctico-Algorítmico} \begin{cases} \text{Método de las reglas matemáticas} \\ \text{Método inductivo-extrapolatorio} \\ \text{Método de introducción algebraica} \end{cases}$$

En cuanto al modelo de la Recta numérica, se observan dos modelos geométricos:

- *Modelo geométrico a partir del punto*. Este modelo conceptualiza al número entero como un punto en la recta o como una pareja ordenada en el plano cartesiano. En este caso el número es tratado como discreto. Las operaciones aditivas ocurren entre números considerados como puntos.

- *Modelo geométrico con segmentos dirigidos*. En este modelo se conceptualiza al número como un segmento dirigido (vector) en la recta numérica y como las dos componentes rectangulares correspondientes a una pareja ordenada (x, y) de un vector r, en el plano cartesiano. El número es considerado como continuo. Las operaciones aditivas son consideradas como vectoriales colineales.

El método de las reglas matemáticas, es el utilizado por los profesores para llevar a cabo las operaciones de adición y sustracción de enteros, reglas de tipo semántico-sintáctico, con mayor carácter semántico, ya que son del tipo*: la suma de dos números negativos es negativa*, o *para sumar dos números negativos, se suman sus valores absolutos y el resultado es negativo*, y no se llega a la regla, a través de expresiones como la siguiente:

$(-a) + (-b) = -(a+b)$ con a, b naturales.

El método inductivo-extrapolatorio es la versión escolar del método de Freudenthal (sección 1.3.3) para cruzar el cero, el cual utiliza expresiones como adiciones, sustracciones y multiplicaciones de naturales para crear patrones lógicos, y operar números desde, operaciones con los positivos hacia operaciones donde surgen los negativos y analizar los resultados para que el sujeto "invente" sus propias reglas operatorias.

El método algebraico es el que describe González Marí (1995) y Cid & Bolea (2007), cuando indican que se introducen literales o ecuaciones para representar una situación, como lo son las del tipo: $x + 1 = 0$, $x + 1 = 1$, $x^2 - 1 = 0$.

3.5.1.2 El componente del *Modelo para los Procesos Cognitivos*

En este componente, los procesos cognitivos ponen en acción a los sujetos usuarios del SMS para llevar a cabo las formas del pensamiento matemático y su comunicación a través de elementos complejos como los empleados en la percepción, en el direccionamiento de la atención, en el uso intensivo de la memoria, en los procesos de análisis y síntesis en los procedimientos heurísticos para la resolución de problemas y en el aprendizaje de situaciones de generalización en los que se requiere el uso de los SMS.

Por otro lado, Filloy (1999) identifica hechos que se presentan en una situación de enseñanza cuando se pasa de un nivel de lenguaje concreto a uno más abstracto, a estos hechos, se les considera como *Tendencias Cognitivas,* presentadas a continuación:

Tendencia cognitiva 1 (TC1)

"*La presencia de un proceso de abreviación de los textos concretos para producir reglas sintácticas nuevas*".

Tendencia cognitiva 2 (TC2)

"*La dotación de sentidos intermedios*".

Tendencia cognitiva 3 (TC3)

"*El retorno a situaciones más concretas, cuando se presenta una situación de análisis*".

Tendencia cognitiva 4 (TC4)

"*La imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse momentos antes*".

Tendencia cognitiva 5 (TC5)

"*Lecturas hechas en estratos del lenguaje que no permitirán resolver la situación problemática*".

Tendencia cognitiva 6 (TC6)

"*La articulación de generalizaciones erróneas*".

Tendencia cognitiva 7 (TC7)

"*La presencia de mecanismos apelativos que centran el desencadenamiento de procesos erróneos de solución*".

Tendencia cognitiva 8 (TC8)

"*La presencia de mecanismos inhibitorios*"

Tendencia cognitiva 9 (TC9)

"*La presencia de obstrucciones provenientes de la semántica sobre la sintaxis y viceversa*"

Tendencia cognitiva 10 (TC10)

"*La generación de errores sintácticos debido a la producción de códigos personales intermedios, para dotar de sentidos a las acciones concretas intermedias*".

Tendencia cognitiva 11 (TC11)

"*La necesidad de dotar de sentidos a las redes de acciones cada vez más abstractas hasta convertirlas en operaciones*".

En los estudios de Gallardo (1994-2002), se han encontrado tres aspectos que conceptualizan al número negativo, los cuales son utilizados como elementos para el análisis de los datos recogidos en la presente investigación:

Aspectos encontrados por Gallardo

La triple naturaleza del signo menos
Los niveles de conceptualización del número negativo
La triple naturaleza de la sustracción

En cuanto a la triple naturaleza del signo menos, Gallardo (2002), encuentra tres formas distintas de carácter conceptual de este signo:

- *Signo unario*. Es el signo correspondiente al número, se utiliza para representar al número negativo. $-5, \ -a \ con \ a \in \boldsymbol{N}$.

- *Signo binario*. Es el signo correspondiente a la operación de sustracción. $(-5)-(-3) =;\ a-b$ con $a<0\ ,\ b<0, \quad con\ a, b \in \boldsymbol{Z}$.

- *Signo menos en la definición de simétrico*. Es el signo correspondiente a la operación de negación o simetrización de un número o de una variable. Se utiliza para representar simétricos. – (- 4) = 4; $-(a) = -a \ \forall\ a \in \boldsymbol{Z}$.

En los trabajos de Gallardo (2002) y Gallardo & Basurto (2009), se analizan las actuaciones de alumnos resolviendo problemas del pasado, en los que aparece la tendencia cognitiva 2 (TC2) de los *sentidos intermedios* encontrando los niveles intermedios de conceptualización de los números negativos, presentados a continuación:

Sentidos Intermedios

Sustractivo
Signado
Relativo
Aislado
Negativo formal o entero

Los niveles de conceptualización son explicados e ilustrados en la tabla 3.3

NIVEL DE CONCEPTUALIZACIÓN DEL NÚMERO NEGATIVO	**DESCRIPCIÓN**
Nivel del número *sustractivo*	El signo menos tiene un carácter solo binario, es decir perteneciente a la operación de sustracción: $a - b = c \ con \ a > b$ $\forall \ a, b, c \ \in \boldsymbol{N}$.
Número *signado*	Se asocia al natural un signo de “más” o “menos” apareciendo la dualidad del signo como unario para el número y binario para la operación. Signo unario: $-a$ **.** Signo binario: $+a - (-\text{b})$. $\forall \ a, b, \ \in \boldsymbol{N}$.
Número *relativo*	Se concibe desde la idea de los opuestos en situaciones discretas y simétricos en situaciones continuas: $-(a)$, $\forall \ a \in \boldsymbol{Z}$
Número *aislado*	El *aislado* se acepta como la solución de una operación, una ecuación o un problema
Número *Negativo formal o entero*	Se ha llegado a la formalización, alcanzando la extensión del número natural al número entero, con sus propiedades.

Tabla 3.3 Niveles de conceptualización del número negativo de Gallardo (1994)

Gallardo obtiene diferentes conceptualizaciones de la operación de la sustracción de números con signo, en sus estudios empíricos (1994, 2002), definidos a continuación:

$$\text{Conceptualización de la sustracción como:} \begin{cases} \textit{quitar} \\ \textit{completar} \\ \textit{diferencia o comparación} \end{cases}$$

A continuación son definidas e ilustradas, estas conceptualizaciones:

- **Sustracción como *quitar***. En la operación de sustracción, se recurre al concepto de "extraer" o "remover" una cantidad de otra. En $a - b$, la sustracción como quitar se comprende como "extraer" b de a, $\forall\ a, b \in \boldsymbol{Z}$. En la operación, $5 - 8$: *quito ocho de cinco*; en la operación 5 – (-3*): retiro tres negativo de cinco*; en -5 – (-3) *remuevo tres negativo de cinco negativo*.

- **Sustracción como *completar***. La resolución de la sustracción $a - b$ se lleva a cabo mediante el planteamiento: ¿Cuánto le falta a b para igualar a a? $\forall\ a, b \in \boldsymbol{Z}$. En la operación, $5 - 8$: *¿cuánto le falta a 8 para llegar a 5?*; en la operación 5 – (-3*): Si estoy en tres negativo, ¿cuánto hace falta para llega a cinco?*; en -5 – (-3) *¿Cuántas unidades se requieren para ir de menos tres a menos cinco?*.

- **Sustracción como *diferencia***. El procedimiento para sustraer se lleva a cabo al realizar una comparación entre dos números. En $a - b$ se compara a con b. $\forall\ a, b \in \boldsymbol{Z}$. En la operación, $5 - 8$: *¿qué diferencia hay de 8 a 5?*; en la operación 5 – (-3*): ¿Cuántas unidades de diferencia hay entre el tres negativo y el cinco?*; en -5 – (-3), *¿Cuántas unidades dirigidas (vector) hay entre tres negativo y cinco negativo?*

3.5.1.3 El componente de los *Modelos de Competencia Formal*

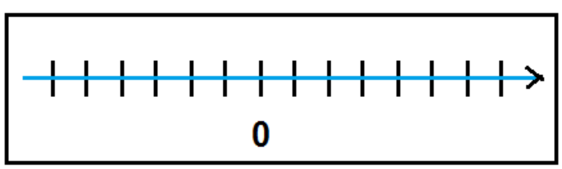
Para que los alumnos logren desarrollar un nivel de competencia matemática aceptable en el contexto de la resolución de problemas, es necesario promover en ellos una abstracción por medio de la reflexión de los conceptos elementales de las operaciones de los números enteros, no solo como una simple adquisición de reglas sintácticas sin sentido, sino dentro de una interpretación de la operación en sí, que se está realizando para poder aplicarla al planteamiento y resolución de un problema.

En la investigación bibliográfica realizada en esta tesis acerca de los autores del capítulo 1, aparece en la sección 1.5, el modelo de competencia formal como parte del modelo teórico local que describe esta investigación:

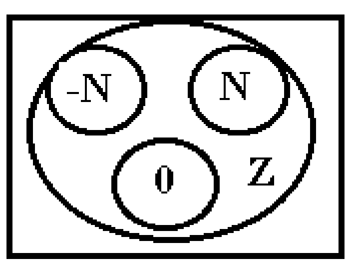
a) En cuanto a la enseñanza del número negativo.
b) En cuanto al sujeto competente en la enseñanza de los enteros.

a) La definición, conceptualización y operatividad del número entero desde la matemática formal (sección 1.5), constituyen el componente formal de los enteros descrito a continuación:

- Para construir a los enteros, se parte de los naturales, ***N***= {1, 2, 3…}
- Pueden expresarse con el consecutivo de 1, n+1= 1*
  ***N*=** {1, 1*, (1*)*, ((1*)*)*…}
- Los números enteros ***Z*** son el conjunto de los naturales ***N***, sus simétricos **-*N*** y el cero. Z= { N, -N, {0} }
- ***N*** es un conjunto isomorfo de ***Z*+**.
- Las definiciones de los enteros:
  - Como conjunto, ***Z***= { … -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,…}
  - Como unión de conjuntos $\boldsymbol{Z}= \boldsymbol{Z}^{+}$ U $\boldsymbol{Z}^{-}$ U { $\boldsymbol{\Phi}$}
  - Con la recta numérica



  - Con diagrama de Venn-Euler



- Los enteros son el conjunto ***Z*,** más las operaciones binarias suma (+) y multiplicación (x).

- La serie natural ampliada de los naturales Z_0, incluye al cero $Z_0 = \{ 0, 1,2, 3,\ldots\}$ para poder incluir a las propiedades del cero y explicar las propiedades de la suma de enteros a partir de los naturales (extensión numérica de ***N*** a ***Z***)
- La suma se define como:

.*Adición*. Sean m y n cualquier número natural, entonces:

g) $m + n$ está definida en ***N***;

h) $(-m) + (-n) = -(m + n)$;

i) $m + (-n) = (-n) + m = \begin{cases} m - n & si\ n < m, \\ 0 & si\ m = n, \\ -(n - m) & si\ m < n; \end{cases}$

j) $m + 0 = 0 + m = m$;

k) $(-m) + 0 = 0 + (-m) = -m$;

l) $0 + 0 = 0$

- Para sustraer de dos números enteros, son utilizados, la adición y el inverso aditivo.

$$a - b = a + (-b)$$

$$a(b - c) = ab - ac$$

$$-(a + b) = -a - b$$

- La sustracción no es conmutativa ni asociativa, $a - b \neq b - a$

$$a - (b - c) \neq (a - b) - c$$

b) El sujeto competente, es el docente ideal, que cumple con las siguientes características (En relación con la enseñanza del número negativo):

- Domina el contenido matemático de los enteros y del número negativo.
- Domina la didáctica del contenido de los enteros y del negativo.
- Conoce la historia de la construcción del número negativo.
- Conoce la epistemología del número negativo y las rupturas emergidas.
- Transita de los modelos concretos hacia los algebraicos.
- Ayuda a realizar la extensión del conjunto numérico de ***N*** a ***Z***.

- Utiliza la abstracción empírica y reflexiva en la enseñanza.
- Conoce y utiliza diferentes modelos y métodos de enseñanza del negativo.
- Utiliza diferentes contextos y los transfiere a otras situaciones.
- Realiza la transposición didáctica tomando en cuenta el currículum actual.

3.5.1.4 El componente de los *Modelos de Comunicación.*

La comunicación entre el docente y los alumnos es observada en esta investigación, se describen las reglas de competencia comunicativa, la formación, uso y decodificación de textos orales y escritos entre los sujetos de estudio, se analizan por medio de este componente, los intercambios de mensajes entre sujetos con distintos niveles de competencia en el uso de los diferentes SMS.

La relación entre los cuatro componentes es presentada de la siguiente manera: en el fenómeno de la enseñanza de los números enteros, se están observando procesos de pensamiento, relacionados al *componente cognitivo*, y los intercambios de mensajes correspondientes al *componente de comunicación*, con diversos niveles de competencia en el uso de los SMS para crear textos matemáticos correspondientes al *modelo de enseñanza*, adecuados en el proceso de enseñanza-aprendizaje. El componente formal, es el modelo mediante el cual, se realiza la descripción de las situaciones observadas por medio de un SMS más abstracto para decodificar los textos surgidos en el intercambio de mensajes entre los docentes y estudiantes dentro de la enseñanza de los números enteros.

3.5.2 La Abstracción Reflexiva y el Conflicto Cognitivo.

Durante la presente investigación que trata en cómo es la enseñanza de los números enteros en México, a partir de la observación directa de las clases de profesores durante la práctica docente habitual en la escuela secundaria. Aparece o surge el método por el cual el profesor ayuda a los niños a construir el conocimiento, a partir de situaciones concretas hacia situaciones más abstractas a través de la *abstracción reflexiva* (Piaget, J., 2001).

3.5.2.1 La Abstracción Reflexiva

Existen dos tipos de abstracción según Piaget (2001):

- *La abstracción empírica*
- *La abstracción reflexiva*

La abstracción empírica es la que realiza el sujeto sobre las características observadas en los objetos, o en las acciones. La abstracción reflexiva en cambio, es un proceso que parte de estructuras previas para construir nuevas estructuras a través de la reorganización de elementos conocidos.

La abstracción reflexiva es una fuerza motriz en el desarrollo cognitivo, es por ello que este tipo de reflexión debiera ser promovida en el aula como una actividad constante la cual conduce a la formación de conceptos por parte de los estudiantes, creando en ellos la presencia de la conciencia de sus actos que lo conduzcan a un aprendizaje continuo. Estos dos tipos de reflexión, se desarrollan y existen al mismo tiempo, dependiendo de la etapa de desarrollo del niño, se privilegia una sobre otra.

3.5.2.2 El conflicto cognitivo

El conocimiento se da, cuando se supera un conflicto en el estudiante, como lo mencionan González et al. (1991), Bruno (1994) y Cid (1997), aunque fueron Piaget e Inhelder quienes definen este concepto (Piaget, J., 1978). Estos últimos, mencionan que los nuevos conocimientos se abstraen no del objeto, sino de las acciones que el sujeto aplica sobre los objetos, las operaciones presumen una construcción continua, es constructiva, reconstruye la estructura elemental presente en la acción, transforma el pensamientos del sujeto, a través de problemas o *conflictos* llamados desequilibrios, los cuales cuando son superados, se llega a un nuevo estado de equilibrio en el cual ha ocurrido el aprendizaje.

3.5.3 Categorías de análisis.

Para analizar el fenómeno de la enseñanza y poder caracterizarlo, se utilizan los contenidos de las investigaciones realizadas en el capítulo 1, de autores de la historia, epistemología, didáctica y enseñanza del número negativo, así como los del marco teórico planteados en este capítulo, mostrados a continuación en la tabla 3.4:

Obstáculo Obstáculo ontogenético Obstáculo didáctico Obstáculo epistemológico Obstáculos de Glaeser Obstáculos de Hefendehl-Hebeker Obstáculos de Schubring Problemática epistemológica de Ribeiro Los negativos en la filosofía de Kant Obstáculos conceptuales de Bell Obstáculos y errores en la obra "*Los Enteros…"*	Números enteros de Hankel Números enteros de la matemática formal. Números enteros de la matemática escolar.
La intuición vs la racionalización Objeto-operación Estructura-proceso	El número negativo El número relativo El número entero El número con signo
Introducción algebraica de Vergnaud Introducción método inductivo-extrapolatorio Introducción semántica-sintáctica de Freudenthal Introducción con el modelo RN de Janvier y Ernest Introducción con el Modelo Chino-Gallardo Introducción con el Modelo Atómico y con la Cinemática. Introducción algebraica de Cid.	El número natural relativo (G-M) El número relativo al sistema de referencia de D'Alembert. El número relativo (G)
El estudio de Gallardo S XII-XV El estudio de Lizcano (China-Grecia) El estudio de González-Marí El estudio de Maz S: XVIII y XIX	El orden en $\boldsymbol{N}$ El orden en $\boldsymbol{n_r}$ El orden en $\boldsymbol{Z}$
Niveles de conocimiento de Peled Perfiles de Gallardo en la extensión numérica Niveles de conceptualización de Gallardo Niveles de aceptación del número negativo Gallardo	Diferencias lógico estructurales de González Marí Dimensiones del conocimiento numérico de Bruno. La extensión numérica de Gallardo La extensión numérica de Bruno Problemas aditivos de Bruno Notación completa de Cid.

Tabla 3.4 Contenidos relacionados con la investigación para el análisis de la enseñanza.

Para caracterizar la enseñanza de los enteros a través de la observación de clase, se utilizan los siguientes conceptos (tabla3.5), acorde con su relación con la operatividad, el nivel de construcción de conceptos y de la resolución de problemas o contextos.

OPERATIVIDAD	NIVEL CONCEPTUAL	RESOLUCION DE PROBLEMAS
Estructura aditiva: suma Estructura aditiva: resta Sustracción de naturales Sustracción de enteros Sustracción como quitar Sustracción como completar Signo binario Signo unario Predominio del negativo Predominio del positivo Permanencia del signo Reglas semánticas Reglas sintácticas Reglas para la adición • Positivo-positivo • Negativo-negativo • Positivo-negativo • Negativo-positivo • Con paréntesis • Sin paréntesis Reglas para la sustracción • Inverso aditivo • Simétrico • Menos por menos • Eliminar paréntesis • Inverso de la suma • No se considera	Número sustractivo Número signado Número relativo Gallardo Número aislado Número negativo formal Relaciones de orden Simétrico Opuesto Valor absoluto Entero relativo de González Marí Número relativo al Sistema de Referencia (D'Alembert) Inhibición del cero como número Cero origen (Stevin)	Semántica Sintaxis Traducción Interpretación Métodos aritméticos Métodos aritmético - algebraicos Métodos algebraicos Lenguaje Natural Lenguaje Matemático Problemas verbales Problemas aditivos Problemas multiplicativos Sistema Matemático de Signos (SMS) SMS aritmético SMS algebraico SMS más abstracto

Tabla 3.5 Conceptos utilizados en la caracterización de la enseñanza.

Capítulo IV Aspectos Metodológicos

En este capítulo se describe la investigación desde el punto de vista metodológico, siguiendo los pasos de la investigación cualitativa que describe Álvarez-Gayou (2003), Cohen, Manion & Morrison (2007) y Taylor & Bogdan (1984) mostrados a continuación:

- El problema de investigación ha sido definido en la sección 3.1.
- La importancia de la presente investigación reside en el hecho de que la enseñanza de los números negativos, con signo o enteros no está resuelta, como se ha justificado en el capítulo 1 y en la sección 1.4.
- El proyecto es viable en tiempo, recursos y en cuanto a la aprobación de profesores para ser observados y entrevistados.
- Los objetivos generales y particulares de la presente investigación se encuentran en la sección 3.2.
- El marco bibliográfico se encuentra en el capítulo 1.
- El marco teórico está fundamentado en la sección 3.5
- El marco interpretativo para el análisis de datos y para responder las preguntas de investigación se encuentra en la sección 3.5 y 3.5.3.
- Las características de la investigación, las características y selección de participantes, procedimientos y métodos utilizados son mostrados a continuación:

4.1 Tipo de investigación

El tipo de investigación en este estudio es *cualitativa*, en la cual convergen distintas perspectivas, como en este caso de tipo fenomenológica (Taylor y Bogdan, 1987), es multi-metódica e interpretativa, estudia a la realidad en su contexto natural para interpretar los fenómenos ocurridos en la enseñanza de los números enteros en el escenario de la escuela secundaria.

4.2 El método

El método principal utilizado en esta investigación fue el de la ***observación***, el cuál consistió en video-grabar y tomar notas de la clase de varios profesores de escuelas públicas de educación secundaria con alto rendimiento escolar, durante la enseñanza de los números enteros. Las videograbaciones fueron transcritas y analizadas junto con las notas de campo.

El segundo método utilizado en esta investigación fue el de la entrevista a profundidad, con el fin de triangular la información surgida en la etapa de la observación participante. Previo a la realización de las entrevistas, se aplicó un cuestionario como instrumento metodológico para diseñar el protocolo de entrevista, la cual es de tipo flexible.

4.3 El modelo teórico local de la investigación

En esta investigación se observan los mensajes (*modelos de comunicación*) y los pensamientos (*modelos de cognición*) surgidos en el proceso de enseñanza de un sujeto con un SMS avanzado (docentes) con otros sujetos con un SMS más concreto (alumnos), es decir, se realiza la observación del fenómeno de la enseñanza de los enteros (*modelos de enseñanza*) con la ayuda de un *modelo de competencia formal* para decodificar los mensajes con distinto nivel de abstracción en los SMS.

4.4 El estudio empírico

Para responder las preguntas de investigación, se realizó un estudio empírico diseñado a partir de la recurrencia del modelo teórico local propuesto, el cual se describe a continuación:

Después de establecer el problema de investigación, y elegido el método de la observación, se fue diseñando la estructura del proyecto, con una primera aproximación para obtener información directa de los docentes seleccionados para realizar la primera indagación del tema a través de un cuestionario exploratorio, llamado *cuestionario piloto*.

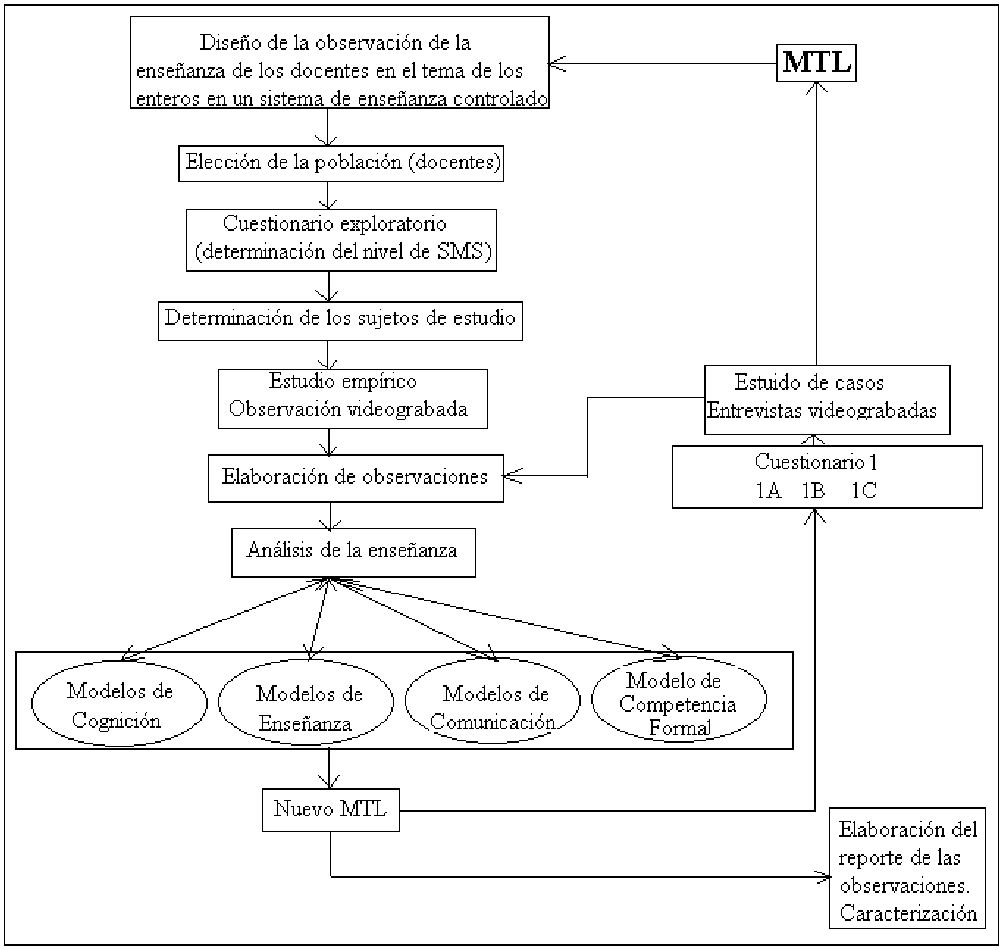


Fig. 4.1 Esquema del Modelo Teórico Local de la investigación.

Se eligió a la población de docentes para ser observada durante la enseñanza de los enteros. La recogida de datos se realizó durante las clases mediante la videograbación de las mismas y la toma de notas en campo. Posteriormente se transcriben las observaciones en su totalidad, después, estas observaciones son seleccionadas para su análisis en términos de los propósitos teóricos del estudio. El análisis de los datos se realizó con la información del capítulo 1 y con la del marco teórico del capítulo 3, información mostrada en la sección 3.5.3. El análisis arroja distintas observaciones, conjeturas y conclusiones, las cuales son utilizadas para realizar la caracterización de la enseñanza de cada docente observado.

Con el fin de triangular la información obtenida, se modifica el cuestionario piloto, para obtener el *cuestionario 1*, y obtener una versión refinada del modelo teórico local.

Se realiza la aplicación del cuestionario 1 a un nuevo grupo de docentes para buscar, confirmar y confrontar la nueva información, con la obtenida en la primera etapa. Se realiza el análisis de los cuestionarios obteniendo nuevas conjeturas y conclusiones complementarias de la primera etapa (de observación).

Confrontada la información obtenida a partir de la *observación* contra la información obtenida del cuestionario 1, se observa que coinciden los hallazgos del estudio. Se realiza una tercera etapa, que consiste en seleccionar a tres de los seis docentes participantes del cuestionario 1, y llevar a cabo una entrevista, para obtener información precisa que confirma los hallazgos encontrados.

4.4.1 Los sujetos de estudio

Los sujetos de estudio son profesores de primaria, secundaria y preparatoria, con diferente género, formación y años de experiencia. A continuación se muestran los docentes que participaron en este estudio, sus características y las etapas de la investigación en las que intervienen.

En la etapa de exploración participaron 5 docentes de secundarias diurnas (Tabla 4.1)

Docente	**Sexo**	**Etapa**
D-4S	F	Exploración
D-3S	M	
D-2S	F	
D-1S	F	
D0S	M	

Tabla 4.1 Docentes participantes en la etapa de exploración.

En la etapa de observación participaron 4 docentes, 3 de la misma escuela secundaria y uno externo observado en internet (Tabla 4.2).

Docente	Sexo	Etapa	Perfil	Experiencia
D1S	M	Observación durante la primera enseñanza en primer grado	Normalista	Secundaria 15 años
D2S	F		Lic. en Educación	Secundaria 20 años
D3S	F	Observación en un repaso de operatividad en tercer grado	Ingeniero y Maestro en Ciencias	Secundaria, preparatoria, universidad 25 años
D4I	M	Observación en internet	Desconocido	Indeterminada

Tabla 4.2 Docentes participantes en la etapa de Observación.

Para la etapa del cuestionario 1 y de entrevista participaron 6 docentes (Tablas 4.3a,b).

Docente	Sexo	Etapa	Perfil	Experiencia
D5P	F	Cuestionario 1 A,B,C. Entrevista	Lic. en Educación. Maestría en Psicología Educativa.	Primaria 15 años
D6P	F	Cuestionario 1 A,B,C.	Ing. en Comunicaciones y Electrónica.	Primaria 4 años
D7S	F	Cuestionario 1 B,C.	Normalista.	Secundaria 5 años
D8S	M	Cuestionario 1 A,B,C.	Ingeniero en Sistemas y Comunicaciones. Normalista.	Secundaria 3 años

Tabla 4.3a Docentes participantes en el cuestionario 1 y en la entrevista

Docente	Sexo	Etapa	Perfil	Experiencia
D9S .	F	Cuestionario 1 A. B, C. Entrevista	Normalista	Secundaria 23 años
D10S	M	Cuestionario 1 A, B, C. Entrevista	Lic. en Educación Matemática.	Secundaria, preparatoria 4 años

Tabla 4.3b Docentes participantes en el cuestionario 1 y en la entrevista.

Para completar el estudio, se analiza una sección del trabajo de Esqueda (2016) y Salinas (2016), en los cuales aparecen aspectos relacionados con la enseñanza de los enteros que no fueron vistos en esos trabajos (Tabla 4.4).

Docente	Sexo	Etapa	Perfil	Experiencia
D11S	M	Complementación	Normalista	3 años
D12S	M	Complementación	Normalista	26 años
D13E	F	Complementación	Maestro en Ciencias	25 años

Tabla 4.4 Docentes analizados de otras fuentes de información.

4.4.2 El escenario

En la etapa de exploración participaron 5 docentes (D-4S, D-3S, D-2S, D-1S y D0S) de diferentes escuelas secundarias diurnas de la Ciudad de México, los cuales resolvieron el cuestionario inicial exploratorio. Lo resolvieron en su centro de trabajo durante el horario habitual de clase, en alguna hora de descanso o de servicio.

Los docentes participantes en la etapa de observación (D1S, D2S y D3S) pertenecen a una misma secundaria diurna de la Ciudad de México con nivel medio alto, D1S y D2S realizan su práctica docente con alumnos de primero y segundo grado, y D3S con estudiantes del tercer grado, provenientes de la enseñanza de D1S y D2S.

Alternativamente se realizó una exploración en internet, de diferentes videos en Youtube, con el tema de la enseñanza de los enteros. Después de la revisión de 5 videos, se seleccionó uno, en el cual un docente (D4I), explica cómo sumar y restar números enteros, este docente se incluye en la etapa de observación.

Los docentes participantes en la tercera etapa (D5P, D6P, D7S, D8S, D9S y D10S), resolvieron la parte A del cuestionario 1, después resuelven una segunda etapa del cuestionario1 (parte B) para observar las estrategias utilizadas en la resolución de situaciones aditivas, y para finalizar, resuelven la parte C del cuestionario1 que contiene tres problemas de la física, donde se da significado a las soluciones negativas, por parejas, durante una sesión de trabajo colectivo fuera de la escuela secundaria.

Por otro lado se utilizó información adicional para ser observada desde el punto de vista de la enseñanza. En primer lugar se utilizó la información obtenida por Esqueda (2016) en cuanto a dos profesores observados en su trabajo, (D11S y D12S) en la resolución de problemas aditivos y su relación con el sistema de referencia, durante la enseñanza de los números enteros. En segundo lugar se utilizó la entrevista didáctica de una docente (D13E) que aparece en Salinas (2016), en ésta, se analiza la información surgida en aspectos de la enseñanza de los enteros en la entrevista didáctica aplicada a un docente de telesecundaria.

4.5 El cuestionario exploratorio

Los profesores D-4S, D-3S, D-2S, D-1S y D0S participaron en la resolución de un cuestionario exploratorio para conocer, a priori, los aspectos contemplados en la enseñanza de los números enteros. La intención de este cuestionario es identificar aquellos aspectos de la enseñanza de los enteros que son utilizados por los profesores en su práctica docente, la transcripción de las producciones de los docentes se encuentran en el apéndice A.

El cuestionario exploratorio es el siguiente:

Nombre:____ Escuela:______________

1. ¿Cómo le explicas a tus alumnos el concepto de número negativo?
2. Explica ¿qué modelos utilizas para enseñar números enteros?
3. Explica ¿cómo enseñas la suma de enteros?
4. Explica ¿cómo enseñas la sustracción de enteros?
5. Explica ¿cómo enseñas la multiplicación de enteros?
6. Explica ¿cómo enseñas la división de enteros?
7. Explica ¿qué tipo de ejercicios utilizas para la enseñanza de enteros?
8. Como profesor, explica ¿qué consideras que presenta mayor dificultad en la enseñanza de enteros?
9. Explica ¿Qué consideras que presenta mayor dificultad en el aprendizaje de los enteros en tus alumnos?
10. Explica ¿cuál es la operación de los números enteros que más se les dificulta aprender a tus alumnos y cómo lo has notado?
11. Explica ¿cómo enseñas el simétrico de “–a”?
12. ¿Cómo concibes a los enteros?

4.6 La Observación de la enseñanza.

Se aplicó el método de la observación directa de la enseñanza de los números enteros, se utilizó la videograbación de clases de los docentes D1S, D2S y D3S y la toma de notas durante la misma para ser transcrita y analizada, la cual se encuentra en el apéndice B.

4.6.1 La observación de la enseñanza en internet.

Se guardó la página de internet, del docente D4I, para ser transcrita y analizada, la cual se encuentra en el apéndice B.

4.7 El cuestionario 1.

El autor del presente trabajo también aplica el cuestionario1 a 6 docentes (D5P, D6P, D7S, D8S, D9 y D10S).

El cuestionario 1 es producto de la recursividad del Modelo Teórico Local propuesto para este estudio y está conformado por tres etapas A, B y C.

A continuación se muestra el *cuestionario 1* parte A:

Nombre:____ Fecha______________

1. ¿Cuál es tu profesión y cuál tu formación?
2. ¿Cuántos años tienes de experiencia docente?
3. ¿Cuáles materias has impartido?
4. ¿En cuáles instituciones has laborado?
5. ¿Cómo le explicas a tus alumnos el concepto de número negativo?
6. Explica ¿qué modelos utilizas para enseñar números enteros?
7. Explica ¿cómo enseñas la suma de enteros?
8. Explica ¿cómo enseñas la sustracción de enteros?
9. Explica ¿cómo enseñas la multiplicación de enteros?
10. Explica ¿cómo enseñas la división de enteros?
11. Explica ¿qué tipo de ejercicios utilizas para la enseñanza de enteros?
12. Explica ¿qué tipo de problemas utilizas para la enseñanza de enteros?
13. Como profesor, explica ¿qué consideras que presenta mayor dificultad en la enseñanza de enteros?
14. Explica ¿Qué consideras que presenta mayor dificultad en el aprendizaje de los enteros en tus alumnos?
15. Explica ¿cuál es la operación de los números enteros que más se les dificulta aprender a tus alumnos y cómo lo has notado?
16. Explica ¿cómo enseñas el simétrico de "–a"?
17. Define a los Números Enteros y ¿Cómo los concibes?
18. ¿Cuándo consideras que tus alumnos han adquirido el dominio numérico de los enteros? ¿Cómo lo identificas?

La intención del cuestionario es recuperar la información que resulta similar en la etapa de la observación para compararla, contrastarla y completarla, y de ahí establecer las primeras conclusiones del estudio.

En el Cuestionario 1 parte B se indaga sobre los aspectos utilizados por los mismos seis docentes en la resolución de situaciones asociadas al número negativo, cuestionario diseñado y aplicado en Salinas, Gallardo y Mendoza (2016), presentado a continuación:

Nombre:____

1.- Resuelve, indicando cómo resolviste cada uno de los ejercicios:
A) $(+3) + (+8) =$
B) $(+3) + (-8) =$
C) $(-3) + (+8) =$
D) $(-3) + (-8) =$
E) $(+3) - (+8) =$
F) $(+3) - (-8) =$
G) $(-3) - (+8) =$
H) $(-3) - (-8) =$

2.- Análisis de los diferentes casos:
A) En $a + b = c$
¿Cómo deben ser los sumandos a y b para que $c > 0$?
¿Cómo deben ser los sumandos a y b para que $c < 0$?
¿Cómo deben ser los sumandos a y b para que $c = 0$?

B) En $a - b = c$
¿Cómo debe ser el minuendo "a" con respecto al sustraendo "b", para que la diferencia "c", sea mayor que cero?
¿Pueden el minuendo "a" y el sustraendo "b" ser negativos, y su diferencia $c > 0$?
¿Cómo debe ser el minuendo "a" con respecto al sustraendo "b", para que la diferencia "c", sea menor que cero? Ejemplifica.
¿Puede el minuendo "a" y el sustraendo "b" ser negativos y su diferencia $c < 0$?
¿Cómo debe ser el minuendo "a" y el sustraendo "b", para que la diferencia "c", se igual a cero? Ejemplifica.

3.- Resuelve
A) $a + b = 10$
B) $-a + b = 10$
C) $a - b = 10$
D) $-a - b = 10$

4.- Identifica las operaciones que representan los problemas, represéntalos en la recta numérica y resuélvelos:

A) La diferencia de temperaturas entre la Ciudad de Toronto Canadá y la ciudad de México Distrito Federal a las 6:00 am es de -44°C. ¿Cuál es la temperatura de Toronto en ese momento si la temperatura de la ciudad de México es de 12°C?

B) El domingo tu papá te da 150 pesos. Vas a la feria y gastas 30 pesos en los cochecitos y 20 pesos en los dardos donde recuperas 10 pesos; en los globos gastas 15 pesos y recuperas 7 pesos. ¿Cuánto dinero te queda al terminar el día?

C) La temperatura máxima de la ciudad de México en promedio durante el mes de diciembre es de 17°C y la mínima de -2°C; la temperatura máxima ese mismo mes en Ottawa en promedio es de -5°C y la mínima de -22°C. ¿Cuál de las ciudades tuvo mayor variación de temperatura?

D) En una reacción química la suma de los productos es igual a la suma de los reactivos, entonces si los productos están representados por "k" y "m" y los reactivos son "e" y "f". ¿Cuál es la ecuación que representa esta situación?

5.- Representa el simétrico en la recta numérica para cada una de las cantidades:
A) -5
B) $-(-10)$
C) $-(-(-3))$
D) $-a$

6.- Resuelve:
A) $a + b - c =$
B) $2a + 3b - 10a - 5b =$
C) $-(a - b) =$
D) $-5(-8x + 3y) =$
E) $9x + 3 = -15$
F) $10x + 4 = 15x + 9$

7.- Representa las siguientes situaciones con una operación y resuélvelas (calcula el valor numérico)
A) Si $x = 11$ y $z = -9$, ¿Cuánto es $x(-z)$?
B) Si $a = 3$, $b = -16$ y $c = -12$ ¿Cuánto es $(a + b)(a - c)$?
C) Si $f = -2$, $g = -6$ y $h = -5$ ¿Cuánto es $\frac{f-g}{g-h}$?

8.- Resuelve:
A) $m(-m) =$
B) $(-g)2 =$
C) $-(-h)3 =$

Esta parte B del cuestionario es utilizada para indagar en la competencia matemática del sujeto que enseña los números enteros a los alumnos de primer grado de secundaria, en cuanto a sus concepciones del número negativo, de la adición y sustracción y para observar sus métodos y estrategias de solución y para observar el uso de la matemática formal en sus producciones.

En el Cuestionario 1 parte C, se aplican problemas de la física con tres situaciones:

1) Un problema de alcance con solución de tiempo negativo.

2) un problema de encuentro, con solución de “distancia” negativa.

3) Una situación del movimiento parabólico para utilizar la “g” y su signo.

Las tres situaciones son una adaptación de los problemas presentados por Mochón (1997), para analizar las dificultades en su resolución y en su enseñanza. Además con estos profesores se trabajan conceptos como la velocidad, la aceleración, el desplazamiento, el sistema de referencia, en los cuales se involucra al número negativo como necesario, y donde no es posible el uso del número relativo. Se realizaron reflexiones de conceptos como la gravedad, la gravitación, la fuerza gravitatoria, el peso, la aceleración gravitacional, y sus diferencias, algunas explicadas desde el marco del número negativo.

Los problemas presentados son los siguientes:

Alcance. Un camión pasó por una gasolinera sin detenerse a 50 Km/h. Tres horas antes pasó por ese mismo lugar un auto a 100 Km/h, ambos por la misma carretera. ¿Cuál es la posición y el tiempo de alcance? ¿Cuál es tu punto de referencia? ¿Cuál es la ecuación que describe la posición del camión? ¿Cuál es la ecuación que describe la posición del automóvil? Resuelve el sistema de ecuaciones ¿Qué signo tiene el tiempo y la posición del alcance? ¿Cómo interpretas estos resultados? ¿Cuáles son las dificultades enfrentadas para su resolución? ¿Cuáles son las dificultades que consideras podrían aparecer durante la enseñanza de este tipo de situaciones en tus alumnos?

Encuentro. La posición de un camión en función del tiempo está descrita por y = 50t, en donde “y” es la posición en kilómetros (Km) y “t” es el tiempo en horas (h). La posición de un automóvil en función del tiempo es y = -100t – 300.

a) Elabora una gráfica de Posición vs tiempo para ambos móviles
b) Encuentra gráficamente el punto de intersección de ambas rectas
c) ¿Cuál es la pendiente de cada una de las rectas?
d) ¿Qué representa cada una de las pendientes de esas rectas?
e) ¿Cuál es la rapidez de cada uno de los móviles?
f) ¿Cuáles son los valores para el tiempo y la posición que satisfacen ambas funciones?

g) Encuentra analíticamente la solución del sistema de ecuaciones y compara los valores con la solución gráfica.
h) ¿Cuál es la interpretación de los resultados?
i) ¿Qué tipo de problema físico se está representado con esta situación? Caracteriza este tipo de movimiento
j) Escribe un problema de enunciado verbal en el que se utilicen las funciones que representan el movimiento del camión y del automóvil.
k) ¿Cuáles son las dificultades enfrentadas para su resolución?
l) ¿Cuáles son las dificultades que consideras podrían aparecer durante la enseñanza de este tipo de situaciones en tus alumnos?

Tiro parabólico. Desde lo alto de un edificio de 30 m se lanza un objeto con un ángulo de inclinación de 60°.

a) ¿Cuál es la velocidad inicial para que tarde 10 segundos en llegar al suelo?
b) Determina la distancia horizontal recorrida por el objeto
c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el móvil con respecto al edificio?
d) ¿Cuál es la altura máxima con respecto al suelo?
e) ¿Cuál es la velocidad final del objeto y el ángulo con el que cae?

La intención de la parte C, del cuestionario 1, es la de promover el establecimiento del sistema de referencia en problemas de la física, así como promover en los docentes el uso de problemas con datos (positivos, nulos y negativos) en los cuadrantes II, III y IV asociados al plano cartesiano en problemas de cinemática. Además de obtener información acerca del uso del número relativo y del número negativo en los problemas presentados de la Física.

4.8 Análisis de la enseñanza de los docentes observados por Esqueda (2016)

Las producciones de los docentes D11S y D12S se pueden encontrar en el trabajo de Esqueda (2016) p.p. 51-84. La enseñanza de estos docentes es caracterizada por el autor de la presente tesis como parte complementaria de esta investigación, la cual se encuentra en el capítulo V.

4.9 Análisis de la entrevista didáctica de la docente D13E en Salinas (2016)

La entrevista realizada a un docente de telesecundaria se encuentra en el trabajo de Salinas (2016) p.p. 159-294. La parte didáctica de una parte de la entrevista es caracterizada por el autor de la presente tesis como parte complementaria de esta investigación, la cual se encuentra en el capítulo V.

4.10 La entrevista realizada a los docentes D5P, D9S y D10S

Después de analizar los resultados del cuestionario 1 realizado por los docentes D5P, D6P, D7S, D8S, D9S y D10S, se determinó seleccionar a los docentes D5P, D9S y D10S para realizar una entrevista con el fin de confirmar los hallazgos encontrados en la etapa de observación de los docentes D1S, D2S, D3S y D4I. Los resultados y análisis de las entrevistas son presentados en el capítulo V.

Las caracterizaciones de la enseñanza de los docentes observados, D1S, D2S, D3S y D4I, de los docentes cuestionados D5P, D6P, D7S, D8S, D9S y D10S, así como de los docentes del estudio complementario D11S, D12S y D13E, son presentadas en el capítulo V. Las conjeturas, análisis y conclusiones son presentadas en el capítulo VI.

Capítulo V. Análisis de los resultados de la información.

5.1 Etapa de exploración.

5.1.1 Análisis del cuestionario exploratorio.

La información completa de las producciones de los docentes D-4S, D-3S, D-2S, D-1S y D0S, en el cuestionario exploratorio es presentada en el apéndice A. Las tablas siguientes (5.1a - 5.1j) contienen los aspectos utilizados en la enseñanza que aparecen en las respuestas del cuestionario piloto por parte de cada uno de los docentes.

Pregunta 1. ¿Cómo le explicas a tus alumnos el concepto de número negativo?	
Docente explorado	**Aspectos encontrados que menciona el docente son utilizados en la enseñanza**
D-4S	No hay información.
D-3S	Recursos como la recta numérica, el plano cartesiano, modelo de equilibración, suma y resta de positivos y negativos, definición: el número a es negativo si $a < 0$. El negativo aparece al resolver una ecuación.
D-2S	No responde la pregunta por omisión accidental.
D-1S	Utiliza recursos como el video de un elevador y la recta numérica vertical. Se pueden utilizar los números negativos sin la recta. Resolución de ejercicios.
D0S	Define al negativo como aquel que es menor que cero, ubica al negativo en la recta numérica, contextualiza al negativo mediante problemas de temperatura. El número a la izquierda de otro en la recta numérica es el menor entre ellos dos.

Tabla 5.1a Aspectos relacionados a la enseñanza de los enteros en el cuestionario piloto.

Pregunta 2. Explica ¿Qué modelos utilizas para enseñar números enteros?	
Docente explorado	**Aspectos encontrados que menciona el docente son utilizados en la enseñanza**
D-4S	No hay información.
D-3S	No responde esta pregunta pero en la pregunta 1 menciona el modelo de la recta numérica y el del plano cartesiano, además del modelo de equilibración. Menciona fenómenos en los que aparecen los números negativos. Relaciona a los negativos con la filosofía. Utiliza la notación de conjuntos para representar a los enteros. Menciona que los números negativos surgen cuando se plantea (o resuelve) una ecuación.
D-2S	Modelo de equilibración, de la recta numérica y de las propiedades de los números. Analogía entre cargas de protones y electrones con los enteros. Utiliza contextos científicos para ilustrar la operatividad de adición y sustracción con los enteros. Enseña utilizando el concepto de la suma de simétricos la cual es nula.
D-1S	No menciona modelos, pero dice que a través de problemas, en los que confunde al natural con el entero por no tener parte decimal o fraccionaria. Es evidente en sus respuestas que llama “enteros” a aquellos números que representan unidades, pero no hay evidencia de que esté pensando en los negativos. Construye figuras a partir de las unidades “enteras”.
D0S	La recta numérica es utilizada para definir al número entero, positivo y negativo. Además utiliza al cálculo mental para operar las adiciones de enteros.

Tabla 5.1b Aspectos relacionados a la enseñanza de los enteros en el cuestionario piloto.

Pregunta 3. Explica ¿Cómo enseñas la suma de enteros?	
Docente explorado	**Aspectos encontrados que menciona el docente son utilizados en la enseñanza**
D-4S	No hay información.
D-3S	Aunque no lo responde por escrito, si menciona verbalmente que si utiliza reglas operatorias como: “la suma de dos positivos es positiva” , “la suma de dos negativos es negativa”, utiliza de algún modo la concepción de la neutralización en la suma de un positivo y un negativo cuando recurre al concepto de que el número de mayor valor absoluto le gana al otro con todo y su signo.
D-2S	Utiliza los casos que pueden presentarse en la adición, de dos positivos, dos negativos, y de positivo con un negativo, esto en función de la definición del valor absoluto. Recurre a la contextualización como la situación de deudas para representar al número negativo. Además recurre al simétrico para resolver adición de números positivos y negativos. Esta observación es analizada en las producciones de la docente D3S observada en este estudio empírico.
D-1S	Agregando objetos en la recta numérica. Nuevamente utiliza el algoritmo de la suma en la recta para los naturales. Se mantiene la confusión del número natural y el número entero.
D0S	Definición de la operación de suma o adición, enseña a través de ejemplos y problemas, las propiedades de los números, como son la de cerradura, asociativa, conmutativa y elemento neutro para la adición. Resolución de problemas con dos sumandos. Parece haber evidencia de que confunde la propiedad del elemento neutro de la adición con la del inverso aditivo.

Tabla 5.1c Aspectos relacionados a la enseñanza de los enteros en el cuestionario piloto.

Pregunta 4. Explica ¿Cómo enseñas la sustracción de enteros?	
Docente explorado	**Aspectos encontrados que menciona el docente son utilizados en la enseñanza**
D-4S	No hay información.
D-3S	No lo escribe en el cuestionario pero si menciona que utiliza el inverso aditivo para convertir una resta en suma. No menciona ejemplos.
D-2S	Separa los casos de la sustracción y utiliza a la recta numérica para comparar dos cantidades ya sean en la región positiva, la negativa o cruzando el cero, da significado al signo según la dirección de la comparación. Utiliza los segmentos dirigidos (vectores colineales) para representar los resultados de la sustracción. Parece utilizar los conceptos de la sustracción como "quitar" y "comparar".
D-1S	Vuelve al uso de reglas para los naturales, dice que utiliza a la recta numérica y el concepto de "sustrayendo" de una colección de objetos, lo que afirma la posibilidad de que esté pensando en el conjunto de los naturales y no de los enteros.
D0S	Definición de la operación de resta o sustracción, identifica las partes de los números que intervienen en la sustracción, dice que resuelve ejercicios y problemas pero no externa la estrategia para sustraer con número enteros en el minuendo y sustraendo.
Pregunta 5	Se omite su análisis porque se está trabajando en esta tesis en el dominio aditivo.
Pregunta 6	Se omite su análisis porque se está trabajando en esta tesis en el dominio aditivo.

Tabla 5.1d Aspectos relacionados a la enseñanza de los enteros en el cuestionario piloto.

Pregunta 7. Explica ¿qué tipo de ejercicios utilizas para la enseñanza de enteros?	
Docente	**Aspectos encontrados que menciona el docente son utilizados en la enseñanza**
D-4S	No hay información.
D-3S	No dispone de tiempo para responder.
D-2S	Problemas con contextos de temperaturas, trayectorias, utiliza los puntos de referencia, el plano cartesiano, deudas y línea del tiempo.
D-1S	En la recta numérica, algoritmo de operaciones y problemas, uso de recursos como un video, aparece la tecnología de forma incipiente.
D0S	Enseña con operaciones de adición y sustracción y con problemas de aplicación, no se indican de qué tipo.

Tabla 5.1e Aspectos relacionados a la enseñanza de los enteros en el cuestionario piloto.

Pregunta 8. Como profesor, explica ¿qué consideras que presenta mayor dificultad en la enseñanza de enteros?	
Docente	**Aspectos encontrados que menciona el docente son utilizados en la enseñanza**
D-4S	No hay información.
D-3S	No dispone de tiempo para responder.
D-2S	Indica que se evita trabajar con los números negativos pero no aclara si los profesores, alumnos o todos en general.
D-1S	No, ninguna. Para sus alumnos son más complicadas las fracciones. Sigue en la confusión de naturales con enteros.
D0S	La jerarquía de operaciones con enteros y señala la confusión entre la suma y la resta cuando un número es positivo y otro negativo.

Tabla 5.1f Aspectos relacionados a la enseñanza de los enteros en el cuestionario piloto.

Pregunta 9. Explica ¿qué consideras que presenta mayor dificultad en el aprendizaje de los enteros en tus alumnos?	
Docente explorado	**Aspectos encontrados que menciona el docente son utilizados en la enseñanza**
D-4S	No hay información.
D-3S	No dispone de tiempo para responder.
D-2S	La parte conceptual del número entero.
D-1S	No les representa ninguna dificultad, porque habla de los naturales.
D0S	No emite ninguna respuesta.

Tabla 5.1g Aspectos relacionados a la enseñanza de los enteros en el cuestionario piloto.

Pregunta 10. Explica ¿cuál es la operación de los números enteros que más se les dificulta aprender a tus alumnos y cómo lo has notado?	
Docente explorado	**Aspectos encontrados que menciona el docente son utilizados en la enseñanza**
D-4S	No hay información.
D-3S	No dispone de tiempo para responder.
D-2S	La sustracción de enteros.
D-1S	La división, pero no mucho (Se refiere muy posiblemente a la operación entre naturales)
D0S	Operaciones con signos contrarios, en especial en la suma o resta, sobre todo cuando el negativo tiene mayor valor absoluto.

Tabla 5.1h Aspectos relacionados a la enseñanza de los enteros en el cuestionario piloto.

Pregunta 11. Explica ¿cómo enseñas el simétrico de "-a"?	
Docente	**Aspectos encontrados que menciona el docente son utilizados en la enseñanza**
D-4S	No hay información.
D-3S	No dispone de tiempo para responder.
D-2S	Utiliza la tricotomía con b=0 y simetriza en la recta numérica para a>0 y para a<0. Además utiliza el lenguaje matemático para expresar los casos en que ocurre la simetrización, si a es positivo o negativo. Se auxilia de la RN.
D-1S	No escribe cómo pero dice que a través de la recta numérica.
D0S	Utiliza el simétrico: la suma de un número con su opuesto es cero, expresa que el elemento neutro de la adición es su sinónimo. Confunde al inverso aditivo con el neutro aditivo. Define al simétrico como el mismo número o literal pero con signo contrario.

Tabla 5.1i Aspectos relacionados a la enseñanza de los enteros en el cuestionario piloto.

Pregunta 12. ¿Cómo concibes a los enteros?	
Docente	**Aspectos encontrados que menciona el docente son utilizados en la enseñanza**
D-4S	No hay información.
D-3S	No dispone de tiempo para responder.
D-2S	Z= {Z-, 0. Z+} Con propiedades, conmutativa para la suma y multiplicación.
D-1S	No da ninguna definición, reconoce que es una parte primordial en la enseñanza de las matemáticas (posiblemente persiste el concepto del natural sobre el entero)
D0S	No los conceptualiza pero reconoce que son la base de toda la enseñanza de las matemáticas.

Tabla 5.1j Aspectos relacionados a la enseñanza de los enteros en el cuestionario piloto.

5.1.2 Conclusiones del análisis del cuestionario exploratorio

Las conclusiones obtenidas después de analizar las respuestas del cuestionario piloto, (localizado en el apéndice "A") aplicado a los docentes D-4S, D-3S, D-2S y D-1S y D0S en la etapa de indagación, son presentadas en las siguientes tablas (5.2a – 5.2e).

Docente	Sexo	Observaciones
D-4S	F	Se le invitó a responder el cuestionario piloto, incluso se le dio el instrumento, respondió que ya había visto el contenido de los enteros con sus alumnos cuando el programa todavía no lo marcaba. Se negó a ser observada a través de la videograbación de sus clases porque ella considera que, ese contenido ya había sido cubierto y por la misma razón no responde el cuestionario. La posible explicación a esta situación, es que confunde a los números naturales con los enteros, se le sigue preguntando si ya enseñó a los números "***enteros***" para provocar una reflexión de ideas y vuelve a aseverar que efectivamente ya los vio. Esta docente parece encontrarse en el nivel del *número su*stractivo de Gallardo (1994) porque no concibe al número negativo como parte de los enteros, es decir pudiera estar en el nivel cero de la conceptualización del negativo. Se trató de indagar en la competencia matemática de la docente, pero no dio la oportunidad. A este perfil se le podría considerar como Nivel del número sustractivo o nivel cero en la conceptualización del número negativo, en cuya característica principal está en confundir el conjunto de los naturales con el de los enteros.

Tabla 5.2a Conclusiones de los aspectos encontrados en la enseñanza en el cuestionario piloto.

Docente	Sexo	Observaciones
D-3S	M	Este profesor indica que utiliza reglas para sumar y restar números enteros, para operar a estos números, no utiliza definiciones semánticas ni problemas, sino simplemente reglas operatorias o definiciones matemáticas, combinando la semántica con la sintaxis. 1) La suma de dos números con signo positivo es positiva como en (+5) + (+5) = (+10) y generaliza Si a>0, b>0 a+b= c c>0 2) La suma de don números con signo negativo es negativa como en (-5) + (-5) = -10 3) La suma de un número con signo positivo y otro número con signo negativo se resuelve comparando a los dos números, el que sea más grande gana con su signo, por ejemplo: (+10) + (-5) = +5 porque el +10 le gana al -5 por +5 unidades y en (-10) + (+5) = -5 porque el -10 gana por 5 unidades. Aunque no da un ejemplo enseña la sustracción por separado a través del inverso aditivo, convirtiendo la sustracción a su expresión equivalente en suma y aplica las estrategias para sumar. La enseñanza es totalmente orientada al uso de reglas operatorias que el alumno tiene que aprender para aplicarlas a sumas y restas de enteros, cabe señalar que utiliza la notación completa con los paréntesis de Cid y Bolea y diferencia entre el signo del número y el de la operación. El perfil presentado en la enseñanza es de tipo sintáctico algorítmico con una enseñanza de tipo conductista mayormente pero con conocimientos de la matemática formal, sin poder concluir que el docente se encuentre en el nivel 4 de Gallardo pero sí en el nivel 3 de Gallardo del número aislado, es decir, obtiene y conceptualiza los resultados negativos.

Tabla 5.2b Conclusiones de los aspectos encontrados en la enseñanza en el cuestionario piloto.

Docente	**Sexo**	**Observaciones**
D-2S	F	La suma de enteros es por medio de ver a la adición como juntar, y a la sustracción como quitar elementos. Provoca la construcción de reglas por parte de los alumnos para la adición y sustracción de enteros. a) Suma de dos positivos: Se suman los valores absolutos y la suma (resultado) es positiva b) Suma de dos negativos: Se suman los valores absolutos y la suma (resultado) es negativa. c) Suma de un positivo y un negativo: Se restan los valores absolutos y la suma tiene el signo del número de mayor valor absoluto. d) Para la sustracción se convierte la resta en adición por medio del inverso aditivo, o bien a través de la operación inversa de la sustracción, que es la adición, una regla sencilla es: se suma el opuesto del sustraendo y de esta manera al transformarse en suma se puede aplicar las reglas de los incisos a, b y c. Ve los casos de la suma y la resta por separado. El perfil de la enseñanza es sintáctico-algorítmico-estructural con una enseñanza conceptual, porque explicita el significado de las operaciones de adición y sustracción, es decir trabaja en la estructura aditiva de las expresiones. Denota un dominio didáctico del contenido y un dominio matemático porque utiliza conceptos y leguaje matemático apropiados. Aparecen conceptos como el simétrico, el valor absoluto, la recta numérica, la notación completa con paréntesis, habla del modelo de equilibración, recurre a la transferencia del contenido a situaciones de la química. Cabe notar que recurre al simétrico para realizar la adición de dos números de diferente signo con una estrategia de anulación-compensación, situación de partida para una propuesta didáctica de esta tesis. El nivel de conceptualización del número negativo parece estar en el nivel 4 de Gallardo, *nivel del negativo formal o entero*.

Tabla 5.2c Conclusiones de los aspectos encontrados en la enseñanza del cuestionario piloto.

Docente	Sexo	Observaciones
D-1S	F	La docente acepta que sus clases de enteros sean video-grabadas, pero cuando se le pide programar la fecha del evento, dice que ya vio ese contenido y que ya no se pudo realizar la actividad, como esta petición se realizó a principio del curso. Se concluye que la profesora incurre en confundir a los naturales con los enteros, esto se comprueba cuando resuelve el cuestionario piloto, en sus respuestas, interpreta que los naturales son enteros porque no tienen parte fraccionaria. La docente recurre a los videos para la enseñanza, en este caso habla de uno en el que se muestra un elevador y los movimientos se representan en una recta numérica, en el que los alumnos pueden usar los números negativos, en este momento aparece el número como signado. Dice que la suma se resuelve agregando “objetos” en la recta numérica, apelando a la suma en la recta numérica, se vuelve a presentar la situación de suma de naturales. Por otro lado concibe a la sustracción como la acción de ir “sustrayendo” objetos de una colección, por lo que se sospecha que sigue anclada en los naturales y no en los enteros. Cuando se le pregunta por las dificultades en la enseñanza de los enteros, responde que no tienen “ninguna” dificultad, que son más difíciles los decimales y las fracciones, lo que lleva nuevamente a pensar que está estancada en los enteros como si fueran naturales. Cuando se le pregunta por la operación de los enteros que más se les dificulta a los niños dice que la división, pero no mucho, probablemente sigue pensando en los naturales como enteros por no tener parte fraccionaria. Cuando se le pregunta por el simétrico de $-a$, se queda pensando y sólo dice que con la recta numérica Parece que en este caso, la docente presenta dificultades con la competencia matemática del contenido, lo cual no puede ser comprobado, sólo puede indagarse a través de cuestionario exploratorio. El nivel de conceptualización del número negativo parece estar entre el nivel 0 y 1 de Gallardo, *nivel del número sustractivo o del signado*, en éste último porque en el cuestionario muestra que en los enteros están involucrados los negativos.

Tabla 5.2d Conclusiones de los aspectos encontrados en la enseñanza del cuestionario piloto.

D0S	M	Este docente resuelve el cuestionario exploratorio y accede a que sus clases sean video-grabadas, pero no se obtiene el permiso por parte de las autoridades de la escuela para tal efecto. En cuanto al cuestionario exploratorio, lo resuelve dejando sólo una pregunta sin responder posiblemente por la carga de trabajo. En su producción, a través del cuestionario se observa una tendencia de tipo semántica sobre la sintáctica, la mayoría de sus explicaciones no contienen argumentos sintácticos, pero sí argumentos semánticos válidos. Define semánticamente que un número es negativo si es menor que cero, utiliza a la RN para ubicar a los negativos, los contextualiza con cantidades de temperatura, recurre a la regla de que un número a la izquierda de otro es menor que ese otro, la RN sirve para definir a los enteros. Dice utilizar las propiedades de la teoría axiomática para resolver operaciones, aunque no muestra ningún ejemplo del cómo, confunde al elemento neutro de la adición con el inverso aditivo, que es el que dice utilizar para resolver la sustracción de enteros. Enseña a través de la resolución de problemas en los que se requieren sumas y restas de enteros. Encuentra que la suma de un positivo y un negativo resulta conflictiva porque los niños confunden a la resta y a la suma con los números positivos y negativos. Este aspecto es analizado y caracterizado en el presente trabajo. Utiliza el concepto del valor absoluto en las reglas para sumar y restar enteros positivos y negativos. Emite una definición con un error común del simétrico, como los números que son iguales pero con diferente signo. El docente reconoce que los enteros son la base de la enseñanza de las matemáticas. El nivel de conceptualización del número negativo parece estar en el nivel 3 de Gallardo, *nivel del número aislado* y el perfil parece ser de tipo algorítmico-contextual.

Tabla 5.2e Conclusiones de los aspectos encontrados en la enseñanza del cuestionario piloto.

5.1.3 Aspectos encontrados en la enseñanza de D-4S, D-3S, D-2S, D-1S, D0S

En el cuestionario piloto, los docentes producen concepciones del número negativo y cómo enseñan el contenido de los enteros. Aparece el modelo de la recta numérica, los simétricos, el modelo concreto de la RN con el elevador y algunas definiciones formales como que un negativo es aquel que es menor que cero. Aparecen los conceptos de conjuntos, los modelos de equilibración, la suma de simétricos con resultado nulo y la transferencia de los enteros a las ciencias experimentales. Se explicita la confusión del número entero como aquél que no está fraccionado. Para la suma aparecen diferentes estrategias como, la de las reglas sintácticas, la de los simétricos y la de algunas propiedades de la teoría axiomática como la de cerradura, distributiva, asociativa y del inverso aditivo, se expresa la dificultad que tienen los alumnos en la sustracción y en la adición, sobre todo cuando los número son, uno positivo y el otro negativo.

La información analizada en este cuestionario piloto es una primera aproximación para identificar los aspectos que pueden caracterizar la enseñanza de los docentes a través de la observación directa de la práctica docente cuando enseñan los enteros.

5.2 Etapa de observación

En esta etapa se realizó la observación directa de la enseñanza de los docentes D1S, D2S, D3S y la observación indirecta de la enseñanza del docente D4I.

Se seleccionó el conjunto de docentes D1S, D2S y D3S de una misma secundaria y su enseñanza como parte central de esta tesis para ser estudiada y caracterizada, para reportar los resultados de esta investigación. Además se incluye la observación de otro docente D4I, quien muestra su trabajo en internet, para conocer cómo se enseña este contenido de los enteros en la red, a la que los niños tienen libre acceso.

A continuación se detallan los aspectos encontrados en la observación de cada docente (D1S, D2S, D3S y D4I) y su caracterización.

5.2.1 Observación y caracterización de la enseñanza del docente D1S

Como ya se indicó, este profesor es normalista con 15 años de experiencia docente y enseña el tema de los enteros, en específico la adición y sustracción en primer grado de educación secundaria como primera enseñanza, de acuerdo a los planes y programas de estudio presentados y analizados en el capítulo 2.

La transcripción completa y el análisis de la enseñanza del docente D1S se encuentra en el apéndice B de esta tesis, de la cual se obtuvo la información que caracteriza la enseñanza de éste.

Se dividió la observación de la enseñanza en 11 episodios y se nombraron de acuerdo con su contenido de la siguiente forma:

- Episodio I. LOS ENTEROS Y LA RECTA NUMÉRICA
- Episodio II. EL ORDEN EN LOS ENTEROS
- Episodio III. EL SIMÉTRICO Y EL VALOR ABSOLUTO
- Episodio IV. ADICIÓN DE DOS POSITIVOS
- Episodio V. ADICIÓN DE DOS NEGATIVOS
- Episodio VI. ADICIÓN DE UN POSITIVO Y UN NEGATIVO
- Episodio VII. ADICIÓN DE POSITIVOS Y ¿NEGATIVOS? OPERACIONES SIN PARÉNTESIS
- Episodio VIII. SUSTRACCIÓN, LA INVERSA DE LA ADICIÓN
- Episodio IX. EL INVERSO ADITIVO O SIMÉTRICO
- Episodio X. SUSTRACCIÓN DE ENTEROS
- Episodio XI. ¿DÓNDE APARECEN LOS NEGATIVOS?

A continuación se describe y caracteriza la enseñanza de este docente por episodio:

Episodio I. LOS ENTEROS Y LA RECTA NUMÉRICA

En este episodio el docente D1S recurre al Modelo de la Recta numérica para definir a los enteros. En su enseñanza emergen las concepciones de los niños, éstos reconocen que los enteros son los positivos, pocos de ellos reconocen que también los negativos pero ningún alumno menciona al cero como entero.

El docente explica que también el cero forma parte de los enteros. Ubica a los números enteros en la recta numérica apelando a su definición de número positivo y negativo de acuerdo con las siguientes consideraciones:

> "Los positivos van en el sentido de los positivos (derecha en la RN)
>
> Los negativos van en el sentido de los negativos (izquierda en la RN)
>
> En la parte central está el cero.
>
> El punto de partida de los números no es necesariamente el cero.
>
> El cero sirve para iniciar algunas operaciones".

El docente utiliza el concepto de "cantidades" cuando se refiere a los números ubicados en la recta, lo cual puede provocar un error de tipo conceptual porque esos números, no están representando a ninguna magnitud en la recta. No hay una explicación por parte del docente que aclare la diferencia entra cantidad y número.

El docente afirma que los naturales son del cero hacia la derecha, incluye al cero en la RN de los naturales y no hace ninguna aclaración al respecto. La definición de enteros no es precisa ni completa, ya que si el sistema de referencia puede cambiar hacia la izquierda o en una recta vertical, por lo que ya no aplicaría su definición.

El docente ubica indistintamente al entero como un punto sobre la recta o como un segmento dirigido sin mencionar las diferencias.

Al ubicar a los números en la recta, se nota el uso del natural relativo de González Marí (1995), ya que para ubicar al seis negativo (-6) dice que se coloca al seis (6) pero del lado de los negativos, parece no hacerse claro que el número seis negativo es diferente al número 6, en su lugar parece generarse un posible error conceptual porque repetidamente se menciona que "los simétricos son el mismo número pero con signo contrario" cuando se sugiere que podría decirse que "son números distintos pero con el mismo valor absoluto".

Episodio II. EL ORDEN EN LOS ENTEROS

Utiliza la palabra “mayor” para comparar dos números, y no utiliza el “mayor que”. Recurre al cero para comparar dos números, así el 6 es mayor que el 2 porque tiene mayor distancia con respecto al cero en la recta numérica. Entre el -3 y el -1 utiliza la misma estrategia, marca con segmentos las distancias de cada número al cero y les pregunta a los niños ¿Cuál es el mayor?, los niños recurren a la regla aprendida, como el que tenga la mayor distancia es el mayor, todos contestan que el mayor es el -3, así el docente, reconoce que existe una dificultad, por lo que dice “*…no ocurre lo mismo con los negativos*”, esta enseñanza provoca el obstáculo epistemológico No 1 de Glaeser porque hay dificultad para unificar a la recta numérica y el No.1 de Hefendehl-Hebeker porque no existe una noción de una recta uniforme, sino que el modelo está formado por dos semi-rectas opuestas. Este obstáculo no sólo divide a la recta numérica sino que provoca el establecimiento de dos reglas diferentes para la comparación de dos números según la región “positiva” o “negativa” a la que pertenezcan los números que se comparan.

Existe en esta enseñanza una lectura desordenada de los signos de *mayor qué (>)* y *menor qué (<),* ya que en ocasiones el docente pregunta ¿Quién es el mayor de A y C? siendo C mayor que A, en la sintaxis está escrito “A_<__C” y el docente responde “C es mayor que A”, cuando lo niños respondieron con una lectura de izquierda a derecha “A es menor que C”, Así que cuando pregunta por el mayor, los niños contestan “El menor” y se evidencia una falta de entendimiento en el lenguaje utilizado y por tanto en precisar el resultado correcto.

El docente genera un error conceptual porque los niños preguntan entre uno positivo y uno negativo, cuál es mayor, unos niños dicen que son iguales, probablemente intentaron decir que “en valor absoluto” pero D1S les dice que si son iguales pongan el signo de igual y escriben: 1= - 1 , el docente no corrige de inmediato la falsa concepción y cuando pasan al pizarrón los alumnos, reproducen el error y escriben que -5 = 5 y que 12=-12 y hasta entonces el docente corrige el resultado pero sin ninguna explicación, sólo les dice que cinco es mayor que menos cinco y que doce es mayor que menos doce.

Episodio III. EL SIMÉTRICO Y EL VALOR ABSOLUTO

El docente presenta una dificultad didáctica al enseñar la definición del ***simétrico***, no recurre al término de *simetría* con respecto al origen y en su lugar utiliza las *distancias de los números al cero* en la RN. La definición es incompleta y de tipo semántica, no la conceptualiza como una operación (operación de simetrizar o negar) y no se representa su sintaxis.

Define: "*una cantidad positiva y una cantidad negativa que están a la misma distancia del cero, su nombre es números simétricos*"

No se presenta una definición formal del valor absoluto, pero en ocasiones menciona que "Es la distancia del número al cero". Presenta en cambio una forma sintáctica intermedia entre la semántica y la formal: |-4| es 4. Otro sentido intermedio (tendencia cognitiva) es la explicación de que "el valor absoluto es el mismo número (refiriéndose por ejemplo al 6 y a -6) pero sin signo", lo cual puede provocar incluso un error didáctico y los niños pueden creer que en verdad hay números sin signo, en cuyo único caso sería el cero, además de no visualizar que 6 y -6 son dos números distintos.

Episodio IV. ADICIÓN DE DOS POSITIVOS

Para la adición de dos números enteros positivos, el docente recupera el conocimiento previo de la suma de dos números naturales, aspecto que ayuda a la extensión de los naturales a los enteros positivos, cuando transforma la suma de naturales a la suma de enteros positivos con la ayuda de la notación de Cid y Bolea: De 5+3 pasa a (+5) + (+3).

Pero se observa el surgimiento de un conflicto cognitivo cuando los niños pasan del SMS aritmético al SMS aritmético-algebraico mostrada a través de la tendencia cognitiva No. 4, de la imposibilidad de realizar operaciones que podían hacer momentos antes, porque cuando el docente plantea otras sumas de dos positivos, los niños no pueden resolverlas de la misma forma que lo hacían en los naturales. En esta etapa el docente recurre al concepto de *número signado* de Gallardo para extender N a Z+.

Otra forma de realizar la suma de dos enteros positivos que enseña el docente D1S es a través del modelo de la recta numérica, con la estrategia de "los saltos de la rana" en lugar de "los segmentos dirigidos" que ya había planteado, este aspecto constituye una falta de gradualidad en la enseñanza de este contenido. Para sumar 5 + 3, traza “un salto de rana” (semi-arco) del 0 al 5, como es suma, entonces va a la derecha el siguiente número y enseguida traza otro semi-arco de tres unidades, el resultado es el punto final de la suma o unión de los dos semi-arcos, que en este caso el número 8. Esta estrategia no garantiza que los alumnos consideran a los números como enteros positivos, porque bien pueden hacer la operación de suma dentro del conjunto de los naturales.

Finalmente, el docente dice que “hay sumas con números negativos”, aspecto que ayuda a extender el dominio de N a Z, porque rompe con la falsa concepción epistemológica de si existen los negativos y además de que se puedan sumar.

Regresa al caso de la suma de dos sumandos positivos (se refiere a los enteros) para planear su estrategia principal, el establecimiento de una regla sintáctica:

Si los sumandos son positivos, la suma es positiva.

Cuando propone la práctica de lo aprendido, les pone operaciones supuestamente de sumas de dos sumandos positivos, en los que tienen que aplicar la regla anterior, pero utiliza la notación de suma de dos naturales, regresando al estado del que partió en lugar de utilizar la notación completa, por lo que no hay nuevamente gradualidad de la complejidad del contenido, ***regresa a las operaciones en N y no en Z+.***

En sus alumnos aparece la tendencia cognitiva No. 10, de la generación errores sintácticos debido a la producción de códigos personales intermedios, como lo es la suma de dos positivos sin el uso de los paréntesis, una niña escribe en el pizarrón: $_{+}5 + {}_{+}2 = 7$. El docente D1S indica contradictoriamente que sólo se signan los números positivamente cuando están dentro de los paréntesis, cuando anteriormente había mencionado que los números positivos no necesariamente se tienen que signar.

Cuando los niños pasan al pizarrón a resolver las sumas de “positivos”, que en realidad son naturales, ***se pierde la vía de la extensión de N a Z+,*** que estaba realizando el docente en sus alumnos y por tanto hay dificultades en la extensión del conjunto de N a los enteros, a través de lo que proponen Bruno y Cid para arribar a los conjuntos Z+, Z-, Q- a partir de N y Q+.

Episodio V. ADICIÓN DE DOS NEGATIVOS

El docente introduce el tema a través de una pregunta identificada como obstáculo epistemológico: ¿Se pueden sumar los números negativos?, a lo que muchos niños contestan que no, incluso que no se puede, a lo que el docente les dice que sí. En esta parte aparece la tendencia cognitiva No. 8, del tipo inhibitoria al decir que no se puede.

Plantea la suma de dos negativos a través de la notación completa, una niña explica que se suman porque son cantidades del mismo tipo y que el resultado es negativo. Aunque la niña construye su regla para sumar, el docente no le da importancia y sigue con su explicación de que los niños tienen que identificar que los sumandos son negativos, lo que permite que los niños identifiquen la estructura aditiva: suma de dos números negativos.

Una vez identificada la estructura aditiva, recurre al modelo de la RN para sumar dos negativos, utiliza la misma estrategia para la suma de dos positivos, sólo que ahora en la región negativa de la RN, como ejemplo utiliza: (-4) + (-6), para lo que traza un semi-arco de cero a cuatro negativo, enseguida otro arco de seis unidades dirigidas a la izquierda (-6), y la suma es la unión de los semi-arcos dirigido a la izquierda, en donde se llega al punto marcado como diez negativo, número que constituye la respuesta. A esta estrategia brinco-brinco ó semi-arco - semi-arco se le considera un código personal del docente de la estrategia segmento-segmento de Janvier.

A partir del ejemplo anterior el docente establece la segunda regla como estrategia principal para sumar dos (enteros) negativos:

La suma de dos negativos es negativa.

Ahora utilizando esta regla, los niños deben resolver una serie de operaciones de este caso aditivo, debe notarse que en estas operaciones, a diferencia de la suma de dos positivos, el docente tiene que utilizar la notación completa, lo que hace que los niños identifiquen tanto la estructura aditiva como el carácter negativo de los números.

El docente parece llevar a los niños a cubrir los niveles 2Q y 2RN de Peled, aunque no aparece el enfoque de la resolución de problemas para la enseñanza del contenido.

Episodio VI. ADICIÓN DE UN POSITIVO Y UN NEGATIVO

El docente plantea la adición de un número negativo con un positivo utilizando la notación completa, y parte del conflicto de Bell, porque establece el hecho de que los niños no pueden responder cómo se resuelve la operación a partir de lo que ya deben saber los niños: la suma de dos positivos y la suma de dos negativos.

El docente promueve que los niños identifiquen la estructura: suma de un negativo y un positivo o viceversa. La estrategia para operar, consiste en identificar cuál de los dos números tiene mayor valor absoluto en el sentido de cuál tiene mayor distancia con respecto al cero, para después comparar las distancias en la RN con la estrategia brinco-brinco ó semi-arco – semi-arco.

Así el primer número tiene asociado su semi-arco en la RN, después se desplaza a la derecha si es positivo el segundo sumando y a la izquierda si es negativo, tantas unidades como indique el valor absoluto del segundo sumando, el resultado corresponde al la posición final de los dos semi-arcos.

Con éste método los niños no entienden el porqué se hace así, lo preguntan y el docente sólo repite el procedimiento, pasa después de la dimensión RN a la dimensión Abstracta de Bruno, entonces recurre a su estrategia principal, el establecimiento de la regla No. 3 para sumar un positivo y un negativo:

"Se restan los valores (absolutos) con el signo del número de mayor valor absoluto".

La alumna A3, quien fue la que construye sus propias reglas, ahora utiliza en su regla que "tiene que restar el mayor del menor" y el docente le ayuda a completar su definición diciendo que el mayor y menor en valor absoluto. El docente abunda en la regla:

"Hago una resta de las dos cantidades cuando tengo signos distintos"

Se observa que no hay precisión en el uso de los aspectos conceptuales y operativos, surgen muchas dudas en los niños, principalmente en la cuestión de *por qué se tienen que restar los valores (absolutos) cuando se está resolviendo una suma de números con diferente signo.*

Para practicar lo aprendido el docente recurre a una serie de ejercicios de suma de dos números con signos opuestos, los niños tienen que recurrir a la regla anterior pero inhibe el uso de la RN para realizar las sumas porque un niño pregunta si puede utilizar las dos estrategias y el docente le dice que no, que tiene que utilizar solamente la regla. Anota una serie de sumas de dos números enteros con signos opuestos utilizando la notación completa.

Los niños presentan dificultades ya reportadas, en las que no llegan a resolverse la situación conflictiva de la que partieron a través de *la enseñanza por* conflicto de Bell, aunque pueden extender las operaciones de suma de naturales a la suma de dos positivos o dos negativos, no pueden extender sus conocimientos o estrategias para la resolución competente de números enteros con diferente signo como lo indica Peled en sus Niveles 3Q y 3RN y resuelven operaciones a través de un formulismo vacío, porque recurren a reglas que no dan significados, estancándose en niveles intermedios de la conceptualización y operación como lo indica el estudio de Gallardo.

Episodio VII. ADICIÓN DE POSITIVOS Y ¿NEGATIVOS? OPERACIONES SIN PARÉNTESIS

El docente intenta extender las operaciones de los casos de suma de enteros al caso en el que hay una cadena de operaciones, supuestamente de suma pero en realidad ocurren cadenas de sumas y restas de números, en su mayoría, naturales.

En la siguiente operación:

$$-2 + 8 - 5 + 2 - 3 + 1 - 7 + 4$$

El docente dice que 2, 5, 3 y 7 son “negativos” y que +8, +2, +1 y +4 son positivos, cuando en realidad el único número negativo es el dos negativo, el problema es que no se identifica la estructura aditiva a simple vista, la cual es más clara con el uso de la notación completa:

$$-2 + 8 - 5 + 2 - 3 + 1 - 7 + 4 = \mathbf{(-2) + (+8) - (+5) + (+2) - (+3) + (+1) - (+7) + (+4)}$$

El docente enseña que los signos de resta y suma son de los números positivos y negativos, con base en esta concepción intermedia y errónea, él crea la regla para la operatividad de este tipo de expresiones. Cuando el docente utiliza la notación completa mostrada en los episodios anteriores, puede identificar el signo unario y el binario, además de la estructura aditiva, en este caso mostrado dentro de este episodio, no utiliza la notación completa, retrocede en la extensión del conjunto N al Z, porque no reconoce la *triple naturaleza del signo menos* como aspecto que conceptualiza al número negativo de Gallardo y que es necesario para significar la operatividad aditiva de éstos números.

La estrategia de resolución mostrada por el docente consiste en:

a) Sumar todos los “positivos” mediante la asociación.

b) Sumar todos los “negativos” a través de la asociación.

c) Obtener dos resultados parciales de las sumas de “positivos” y “negativos”.

d) Aplicar la regla No. 3 para la suma de un positivo y un negativo o viceversa: resta los valores (absolutos) y obtiene el resultado con el signo del mayor (en valor absoluto)

El docente D1S muestra el procedimiento anterior en la operación:

$-2 + 8 – 5 + 2 – 3 + 1 – 7 + 4 = - 17 + 15$

Hasta este momento ha sumado los “negativos” y los “positivos” y la expresión parcial obtenida, muestra la suma de un negativo y un positivo como estructura, en la que no puede asegurarse que el segundo sumando no sea considerado como un natural.

En otro ejemplo el docente muestra el mismo procedimiento:

$2 – 6 + 7 – 4 + 5 – 1 + 9 – 11 = 23 - 22$

La suma parcial no muestra la adición de un positivo y un negativo como para aplicar la Regla No. 3, sino que se trata del caso de la sustracción de dos naturales, en todo caso si se considerara a esa operación como: 23- (+22) como la sustracción de dos positivos, los niños apelan a la sustracción de naturales en lugar de una sustracción de enteros.

En la práctica de este tipo de operaciones, durante la clase de D1S, surgen nuevamente conflictos en los alumnos porque no identifican la estructura aditiva, no saben si están sumando o restando.

El uso de la notación completa para plantear operaciones de suma de números positivos y negativos en una cadena, le ayudaría al docente D1S a dar un sentido operativo a las estrategias propuestas en su enseñanza (de las reglas matemáticas dentro del perfil de enseñanza del tipo Sintáctico-Algorítmico propuesto por el autor de esta Tesis), así como a mantener la gradualidad del contenido, porque parece que se está saltando a la sustracción cuando no es así.

Episodio VIII. SUSTRACCIÓN, LA INVERSA DE LA ADICIÓN

El docente D1S pregunta al grupo lo que es la sustracción y de ahí parte para su enseñanza. Los niños dicen que es una resta, entonces el docente recupera el conocimiento de que en una sustracción se encuentran los elementos: minuendo, sustraendo y diferencia, la estrategia en la enseñanza de la sustracción trata de que los niños comprendan que lo contrario de la adición es la sustracción. Menciona la importancia de las operaciones inversas en las ecuaciones para poder despejar, aspecto importante que ayuda a extender el conjunto de N a Z porque aparece la relación entre los enteros y el álgebra.

La explicación del docente D1S es demasiado extensa y complicada para los niños, quienes muestran señales de desinterés. D1S utiliza a las ecuaciones aritméticas del tipo $a + x = b$ con a, b Naturales, la estrategia utilizada es apelar a la inversa de la siguiente forma:

"La inversa de la adición consiste en encontrar un sumando desconocido"

Para ilustrar la situación utiliza la operación: 7 + x = 10, pregunta cómo determinar el valor desconocido de x, para lo cual dice que se hace la operación inversa a la adición:

"La cantidad mayor le voy a restar siete para conocer cuánto vale x", esto es:

10 -7 = x.

D1S introduce la regla que permite resolver una sustracción a partir de la inversa de la adición, presentada en una diapositiva como se muestra:

La explicación para la trasformación de una suma a una resta consiste en aplicar la regla No. 4A para la sustracción de enteros, la cual es la siguiente:

"La suma es el minuendo, el sumando desconocido es el sustraendo y el sumando desconocido es la resta o diferencia".

Antes de ilustrar la regla con un ejemplo, trata D1S de dar significado a la operación y plantea la operación:

10 - x = 3

Y pregunta ¿cuánto debe restarse a 10 para obtener tres?, en este momento el signo negativo adquiere el carácter binario de la operación resta, y el valor de la "x" tendrá el carácter unario del número. Está planteando la estructura aditiva: una sustracción, utiliza lo que los niños conocen, la resta de dos naturales.

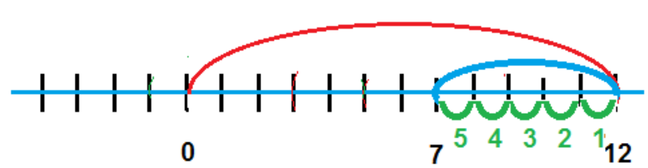
El docente no deja que los alumnos respondan y el dice que "x" vale 7 porque es la forma de determinar su valor fácilmente (no dice que ese método se llama *inspección*) y que una forma práctica es a través de *tanteo*, que es buscar el valor de "x" suponiendo números e ir refinando la suposición hasta encontrar el resultado.

En lugar de aplicar el tanteo a la expresión de sustracción 10 – x = 3, la aplica a la expresión en forma de suma 7 + x = 10 y dice "si x=8, 7+8=15 ¡no! (no coincide con el resultado), Si x= 2, 7+2 = 9 ¡no!, 7+3=10 ¡diez!, (entonces) ¡es tres!, a eso se le llama tanteo"

Al observar el docente que los niños no están comprendiendo la forma de resolver una sustracción, les dice que hay expresiones (algebraicas) todavía más complejas como $\frac{8}{5}$ + x = $\frac{6}{4}$ en las que se vuelven más difíciles y para esto existe el álgebra. Este aspecto es importante y ayuda a la extensión de N a Z porque dirige el estudio de los enteros y a la resolución de la sustracción como parte importante en el estudio del álgebra, les comenta que para resolver estas situaciones del álgebra, primero deben conocer los números enteros.

Les enseña con otro ejemplo: ¿Qué cantidad debe restarse a doce para obtener siete?: 12-x = 7, Los niños dicen ¡Cinco!, 12-5= 7, ahora trata de hacer la extensión de N a Z en la sustracción, ¿Qué cantidad debe sumarse a 12 para obtener siete? Pero ahora lo hace a través de la operación inversa a la sustracción, lo que confunde a los niños: 12 + x = 7, un alumno dice "sumar seis", otro dice "No se puede", aparece la tendencia cognitiva inhibitoria, pero además surge el problema epistemológico cuando el docente dice "Está medio rara la pregunta ¿no?, y aclara: "Si tengo un número menor y le tengo que restar uno mayor, da un resultado negativo, ¡menos cinco!" En este momento D1S está tratando de superar el nivel más bajo de la conceptualización del número negativo, el del *número signado* de Gallardo en donde no se concibe la operación $a - b$ con $b > a$.

El docente pasa de la *dimensión cantidad* a la *dimensión RN* de Bruno, para continuar la explicación de la sustracción de enteros, utiliza la estrategia brinco-brinco ó arco dirigido – arco dirigido:



12 + (-5) = 7, pero no explica que está resolviendo una adición como operación inversa a la sustracción (Esta operación en la RN no representa una sustracción a menos que se interprete como 12-5, dentro de los naturales).

La sesión de la sustracción de enteros a través de la operación inversa parece no resolver cómo restar números enteros y si deja muchas dudas en los niños.

Episodio IX. EL INVERSO ADITIVO O SIMÉTRICO

El docente recupera el concepto del *simétrico* para plantear la sustracción de enteros pero, el concepto recuperado es incompleto y conduce a un error conceptual porque dice del simétrico: “es la misma cantidad pero con signo contrario”.

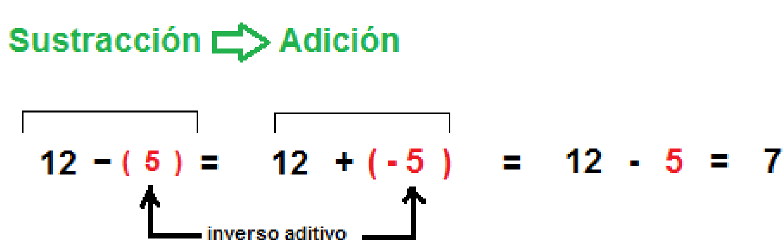
Vuelve a explicar a la sustracción como operación inversa a la adición, pero se percata que los niños siguen sin comprender el planteamiento, posiblemente porque en su transposición didáctica, le ha faltado claridad en la intención didáctica, el docente intenta que los niños resuelvan la sustracción de enteros, pero no es explicito en su enseñanza, que la va a resolver a través de la operación inversa de adición, y una vez resuelta ésta, es decir, cuando encuentre el sumando desconocido, estará encontrando el resultado de la resta, es decir, la diferencia, que es la solución de la sustracción. Otro aspecto a contemplar en la falta de comprensión en los niños es el de la profundidad del contenido, ya que parece haber quedado por encima del nivel cognitivo de éstos cuando trata de utilizar el álgebra para explicar las operaciones de enteros cuando no ha explicado nada relacionado al álgebra.

Después del discurso de la sustracción como operación contraria a la suma, plantea la estrategia del *inverso aditivo o simétrico* para resolver una sustracción con la regla mejorada No. 4b:

“Una sustracción se resuelve sumando al minuendo, el inverso aditivo o simétrico del sustraendo”

La regla se interpreta: se resuelve la sustracción *transformándola* a una expresión equivalente de adición, después se elimina el paréntesis y se utilizan las reglas 1,2 y 3 para la suma”

Se muestra la estrategia utilizada a través de algunas operaciones como:



Interpretación: La sustracción de 12 menos cinco, aplicando el inverso aditivo a cinco, se convierte en doce más cinco negativo, y al ser una suma de un positivo y un negativo, se aplica la regla No. 3, se restan los valores absolutos y se obtiene siete con signo positivo porque el valor absoluto de 12 es mayor al valor absoluto de cinco negativo. Se incluye la interpretación del autor de esta Tesis porque la explicación del docente no es clara.

Episodio X. SUSTRACCIÓN DE ENTEROS

En este episodio se realiza la práctica de lo aprendido, es decir del uso del inverso aditivo o simétrico para realizar las sustracciones. Fortalece la estrategia de sustracción, pero cuando ilustra el método, ocurre una confusión provocada por la imprecisión del lenguaje utilizado, en la operación:

$$-9 - (-3) = -9 + 3 = -6$$

El docente la explica y dice que "*tengo menos nueve, el menos se convierte a más y el tres negativo se convierte a tres positivo… menos nueve más tres es una resta y se deja el signo de la cantidad mayor*". En la explicación de D1S, ocurre que aplica el simétrico de tres negativo, pero no utiliza el concepto en la explicación, sólo el procedimiento como "una regla", cuanto obtiene la expresión equivalente -9 + 3, dice que "*es una resta*" cuando es una suma de un negativo y un positivo, en la que aplica de forma incompleta la regla No. 3, en la que se "restan" los valores absolutos y al resultado se le coloca el signo del sumando mayor en valor absoluto. Parece ser que esta imprecisión en el lenguaje es el aspecto que no ayuda a extender las operaciones de N a Z, porque los niños se confunden y no saben si restan o suman, ya que la estrategia es *sumar para restar*.

Repite el procedimiento a través de otras operaciones numéricas con diferentes casos de la sustracción, porque parece que quedan dudas en los niños, entonces concluye con la siguiente explicación: *"… Si yo tengo un signo menos fuera del paréntesis, es una sustracción, y al que esté dentro del paréntesis le voy a aplicar su inverso aditivo… elimino el paréntesis… no puedo resolver la operación si tengo dos paréntesis, por eso hago este proceso…*".

En este momento hace más claro el procedimiento para resolver una sustracción y para que los niños practiquen lo aprendido, les presenta el docente 7 operaciones, con tres términos cada una, con dos sustracciones sucesivas.

La estrategia consiste en eliminar los paréntesis con el concepto del simétrico, después de eliminarlos, resolver las operaciones que se indiquen, el problema es que se recurre a la misma estrategia (mostrada en el episodio VII SUMA DE POSITIVOS Y "NEGATIVOS" OPERACIONES SIN PARÉNTESIS) para asociar "positivos" y "negativos" y después aplicar la regla No. 3, y obtener el resultado. Los niños resuelven los ejercicios solicitados por el docente, pero en su resolución aparecen las dificultades ya explicadas, en las que finalmente sólo algunos niños pueden resolver las operaciones con la estrategia mostrada por el profesor a través de sus reglas operatorias. Se confirma en esta etapa, la dificultad de Bell, de que los niños no pueden identificar los errores y las falsas concepciones porque éstas parecen persistir también en la propuesta didáctica del docente D1S.

Episodio XI. ¿DÓNDE APARECEN LOS NEGATIVOS?

El docente considera a los números enteros asociados a la recta numérica, repasa las 3 reglas para la suma de enteros y pregunta "¿para qué sirven los números negativos? y lo niños expresan sus concepciones:

- En el termómetro (Se refieren a los grados sobre y por debajo de cero)
- En la cantidad de dinero que tenemos (Se refieren al balance familiar)
- En el tipo de sangre (No explican por qué)
- En las compras (Se refieren a la compra con la tarjeta de crédito)
- En las gráficas (Gráficos en la región negativa del plano cartesiano)
- En los descuentos (En los anuncios de supermercados p.e. -20% desc.)

El docente comenta que ahí aparecen los negativos, pero no aclara que en el caso del factor RH, esto no representa el concepto de números opuestos entre el RH+ y el RH-, sino que esta concepción se refiere a que si existe o no un tipo de proteína en la sangre, lo que correspondería de manera más precisa es el concepto de "hay" o "no hay" tal proteína, situación que podría representarse mediante un cero y un uno: RH0 y RH1.

En general, la enseñanza del docente D1S aunque es extensa y utiliza algunos aspectos que ayudan a realizar la extensión de N a Z, resulta imprecisa en algunos aspectos conceptuales y operativos ya mostrados, que constituyen aspectos que obstaculizan la extensión citada, y al final de cuentas la enseñanza propuesta, no alcanza la extensión de ***N*** a ***Z***, además no se toma en cuenta el enfoque de la asignatura porque no se incluyen problemas aditivos que impliquen el uso de números enteros, fraccionarios o decimales positivos y negativos como muestra el programa de estudios. (Información presentada en la Tabla 2.2 de la página 86 de esta Tesis).

5.2.2 Observación y caracterización de la enseñanza de la docente D2S

Como ya se indicó la profesora es Licenciada en Educación con 20 años de experiencia docente y enseña el tema de los enteros, en específico la adición y sustracción en el primer grado de educación secundaria como primera enseñanza, de acuerdo a los planes y programas de estudio presentados y analizados en el capítulo 2.

La transcripción completa de la enseñanza de la docente D2S, así como el análisis de la misma, se incluye en el apéndice B, de la cual se obtuvo la información que caracteriza la enseñanza de ésta.

Se dividió la observación de la enseñanza en 6 episodios y se nombraron de acuerdo con su contenido de la siguiente forma:

Episodio I. LOS ENTEROS Y LA RECTA NUMÉRICA

Episodio II. LA ADICIÓN DE ENTEROS

Episodio III. PROBLEMAS CON ENTEROS

Episodio IV. EL SIMÉTRICO Y EL VALOR ABSOLUTO

Episodio V. RECAPITULANDO SUMAS Y ¿RESTAS?

Episodio VI. COMBINANDO OPERACIONES.

A continuación se describe y caracteriza la enseñanza de esta docente por episodio:

Episodio I. LOS ENTEROS Y LA RECTA NUMÉRICA.

En su enseñanza aparece la siguiente definición del número entero:

"*Se les llama números enteros a los números que tienen signo… que son positivos o negativos, los números… del lado derecho (en la RN) son los positivos y los que están del lado izquierdo son negativos… pero empiezan desde el menos uno, van en cuenta regresiva…"*.

La definición es incompleta e imprecisa, ya que cabrían los números racionales al menos en su definición, además si el sistema de referencia positivo cambia, la definición ya no aplica, como en una recta numérica vertical o una RN sobre un plano inclinado.

En su representación de la RN, la docente D2S incluye una punta de flecha en la región izquierda del cero, lo cual contradice su representación con los números crecientes a la derecha.

En la definición faltan conceptos como, el simétrico, el valor absoluto, el cero origen, las relaciones de orden con respecto al cero para definir a positivos y negativos, falta incluir que el cero es neutro y una definición precisa o formal.

Episodio II. LA ADICIÓN DE ENTEROS.

Como recurso, la docente D2S utiliza un formulario en el que se encuentran impresas las reglas para la adición, se numeraron estas reglas como 1 y 2 para sumar números con el mismo signo y números con signos opuestos, respectivamente, con ejemplos numéricos de cada caso.

La estrategia para sumar dos positivos consiste en, partir de la suma de dos naturales con la notación vertical, y ocurre que, como suma de naturales los niños pueden resolver la operación, pero en cuanto se les dice que son enteros positivos, aparece la tendencia cognitiva No. 4, resulta una imposibilidad para realizar la operación que ya podían hacer. La docente D2S intenta extender las operaciones de N a Z+, a través de recurrir al número signado de Gallardo.

Para la suma de dos positivos utiliza la notación vertical, pero no incluye los signos unario de los sumandos, sólo el signo de la suma, o bien no signa al 6, signa al tres y signa el resultado y no aparece el signo de la operación, porque no es clara esta situación.

$$\begin{array}{r} 6 \\ \underline{+\,3} \\ +\,9 \end{array}$$

Signa positivamente al resultado para enfatizar la regla No. 1.

Para sumar dos negativos, apela a la notación vertical, pero omite el signo binario de la adición y sólo escribe los números negativos, por lo que los alumnos no pueden "ver" que la operación es una suma:

$$\begin{array}{r} -\,6 \\ \underline{-\,3} \\ -9 \end{array}$$

Para enfatizar el resultado negativo, la docente D2S hace la transferencia de la *dimensión abstracta* a la *dimensión contextual* de Bruno cuando dice que "*el -6 representa que debo seis pesos, y luego pido prestado otros tres, representado por -3, pues me va a dar un (*total de*) menos nueve*"

Aprovechando la dimensión contextual del haber y deber, la docente plantea la adición de un positivo y un negativo cuando dice: *"¿Qué pasa si tengo seis (*pesos*) y me gasto tres?"* cuya respuesta es: "*tres":*

$$\begin{array}{r} +\,6 \\ \underline{-\,3} \\ +\,3 \end{array}$$

En esta operación aparece el *Problema Aditivo relativo* (explicado más adelante), porque la situación se puede resolver con una resta de naturales, 6-3= 3, para convertir el número relativo en entero, el autor de la presente tesis propone la introducción del concepto del “balance”, en el que se tienen que sumar todas las cantidades (positivas, negativas y nulas) que intervienen en la situación, así la resta de naturales podría representarse mediante el balance: (+6) + (-3) = +3, y se daría significado a la adición de un positivo y un negativo.

Después, la docente D2S cambia la operación en el mismo contexto, *“¿Qué pasa si debo seis y abono tres?”,* al fin participan los alumnos diciendo el resultado con una expresión semántica: “*Sigo debiendo tres*”

$$\begin{array}{r} -\,6 \\ \underline{+\,3} \\ -\,3 \end{array}$$

La docente enfatiza el carácter del número resultante: “*Menos tres ¿verdad?”*

En la estrategia de sumar un entero positivo y uno negativo o viceversa, se omite el signo de la adición en la notación vertical, lo que puede provocar errores en la identificación de la estructura aditiva. Hasta el momento, los alumnos no han sido enfrentados a una de las dificultades mostradas por Bell, del establecimiento de un conflicto para ser resuelto e identificar las falsas concepciones de los niños.

Se nota una falta de gradualidad del contenido, ya que no existe una transformación de la notación vertical a la notación horizontal ni al uso de la notación completa de Cid y Bolea.

La docente reconoce que los alumnos se equivocan “bastante” en problemas que se resuelven con la suma de enteros positivos y negativos, así que recurre nuevamente a la *dimensión contextual* de las temperaturas (positivas y negativas referidas al cero). Recurre a las estrategias de la *resolución de problemas de tipo aditivo clasificadas* por Bruno.

La docente establece un estado inicial: -15 grados. Entonces propone una variación: sube 3 grados. Para ilustrar el problema aditivo de la forma: estado 1+ variación 1 = estado 2, representado por e1 + v1 = e2, aunque la docente no conoce esta clasificación, es utilizada sucesivamente para determinar nuevos estados ante nuevas variaciones.

En este momento de la enseñanza, la docente D2S permanece estancada en la operación vertical con enteros y sin utilizar el signo binario de la suma:

-15 GRADOS

+ 3

-12

Encuentra el resultado y en los ejercicios siguientes, aplica la misma estrategia indicando que el cambio positivo consiste en un aumento de temperatura, y un cambio negativo consiste en un cambio negativo de temperatura, conceptos adecuados que ayudan a través de la dimensión contextual a dar significado a la adición de enteros, pero no llega a lograrse del todo esta intención didáctica debido a que no es clara la situación de suma por no utilizar el signo binario de la suma en la forma vertical y no pasar a la forma horizontal con la notación completa.

Para practicar lo aprendido, la docente plantea algunas operaciones de "suma" de enteros, en la que los niños muestran las dificultades ya señaladas por autores como Bell, Peled, Bruno, Cid , Gallardo y González-Marí (Mostradas en los Capítulos I y III).

En las producciones de los niños aparecen las reglas que la docente les brindó:

Regla No. 1

"***Si los números tienen signos iguales, sumamos sus valores absolutos y el signo de la suma es el mismo que el de los sumandos***"

Regla No. 2

"***Si los números tienen signos contrarios, restamos sus valores absolutos y el signo de la diferencia es el del sumando de mayor valor absoluto***"

Para fortalecer el uso de las reglas, la docente explica que recurre a la práctica a través de varias operaciones, en las que emerge un conflicto cognitivo:

Ya que en la operación:

$$\begin{array}{r} +\,8 \\ -\,2 \\ \hline +\,6 \end{array}$$

La docente dice "*hacemos una resta, tenemos más ocho y menos dos… que son números con diferente signo,* ***se resta****, ¿Cuánto me da?*" a lo que los alumnos responden *"¡Más seis!*", respuesta que puede ser cuestionada, porque aunque es correcta, no es seguro que los niños hayan identificado que se resolvió una operación de adición de un entero positivo y un entero negativo, sino que puede caber la posibilidad de que el resultado sólo haya sido la consecuencia de la aplicación de una regla que representa un formulismo vacío.

Episodio III: PROBLEMAS CON ENTEROS.

La docente D2S recurre al enfoque de la resolución de problemas de la asignatura para enseñar este contenido matemático y utiliza un típico problema de enteros, el de la línea del tiempo. Como modelo de enseñanza utiliza a la RN, con el cero y la connotación A.C. (antes de Cristo) y D.C. (después de Cristo).

En el problema planteado, la docente D2S, ubica en la RN el año de nacimiento (620 A.C.) y el año de la muerte (531 A.C.) de Tales de Mileto, con auxilio del número *natural relativo* de González-Marí (1995), es decir en este esquema cognitivo aparece la diferencia lógico-estructural No. 3 (DLE-3) de González-Marí, porque se muestra la *discontinuidad de medidas al cruzar el cero*, ya que este hecho divide a la recta en dos regiones en las que no tiene sentido cruzar el cero, porque los años después de Cristo (D. C.) van disminuyendo hasta el cero y ahí acaban, ya no tiene sentido continuar la disminución, de manera análoga pasa con los años A.C., van aumentando hasta cero y ya no tiene sentido continuar con ese aumento.

El problema presentado por la docente es de *tipo relativo* y es resuelto con números naturales referidos a un punto, que en este caso, es el cero, como el diferenciador entre dos conjuntos, los años A.C. y los años D. C.

La pregunta realizada por la docente D2S es: ¿Cuántos años tiene? Cuando debió ser ¿Cuántos años vivió?, la respuesta no es obtenida correctamente por los alumnos, entonces la docente recurre a la operación vertical:

$$\begin{array}{r} 620 \\ \underline{-531} \\ 89 \end{array}$$

Como puede notarse, la operación es una simple sustracción de naturales, en la que no parece necesario utilizar la complicación de "meter" a los números negativos como lo indica Cid en su estudio. El problema se puede resolver con una sustracción de naturales relativos de González-Marí.

El autor de la presente tesis le llamará a este tipo de problemas *Problemas Aditivos de tipo relativo,* los cuales pueden ser resueltos con adición o sustracción de naturales referidos a un punto o a un sistema de referencia no explícito.

La solución del problema no representó un reto cognitivo dentro el dominio de los enteros, además no se explicitó la estructura aditiva en su resolución, no se indicó si se resuelve con una suma o con una resta.

Este problema, en cambio podría aplicarse para la enseñanza de la **sustracción,** como la ***comparación*** de dos números negativos, como la ***diferencia*** de dos números o como la acción de ***completar,*** lo que le falta a un número para llegar a otro, aspectos mostrados por Gallardo (1994-2002) en su triple naturaleza de la sustracción.

Episodio IV. EL SIMÉTRICO Y EL VALOR ABSOLUTO.

La docente D2S recurre a la operación del valor absoluto sin utilizar alguna definición de tipo sintáctico o formal, sólo indica que "*el valor absoluto es el valor de un número sin su signo*".

Como los valores absolutos "no llevan signo" de acuerdo con la docente, aparecen no signados en la tabla, aunque no indica D2S que siguen siendo positivos. Mediante ejemplos la docente va aplicando el concepto del valor absoluto a varios números para que el alumno vaya induciendo los resultados con una versión del *método inductivo-extrapolatorio* de Freudenthal.

Para el simétrico, la docente D2S tampoco utiliza una definición semántica o sintáctica o formal, sino que simplemente aplica la operación a los números y va diciendo que el simétrico de menos tres es tres, que el simétrico de más tres es menos tres y con estos ejemplos los niños "comprenden" que "hay que cambiar el signo" para obtener el simétrico.

Introduce a los fraccionarios y decimales positivos en la tabla, con ejemplos numéricos para completar la misma con sus valores absolutos y simétricos, en este momento la docente está realizando la extensión numérica de Z+ y Q+ hacia, además de Z-, hacia Q- como lo proponen Bruno y Cid, de las extensiones numéricas que pueden hacer los niños a partir de los conjuntos numéricos que ya conocen.

Parece que al completar la tabla los niños pueden obtener los resultados de aplicar el valor absoluto y el simétrico, pero no se nota una comprensión de éstos en el terreno conceptual, lo que el autor de esta tesis considera como aspectos que ayudarían a extender el conjunto N al dominio de Z y a otros.

Episodio V. RECAPITULACIÓN DE SUMAS Y ¿RESTAS?

En este episodio la docente recapitula las estrategias de enseñanza para la suma de dos positivos, dos negativos y un positivo con un negativo y viceversa a través de las dos reglas principales que ya mostró en el episodio II. Los niños no parecen tener problema en la adición de dos positivos y dos negativos o como dice la docente, es sumar números con el mismo signo, cubriendo así éstos el Nivel No. 2 de Peled en la RN y en la dimensión Cantidad.

El problema sigue siendo como indica Bell, en su *Enseñanza por diagnóstico*, que los niños no reconocen sus dificultades para sumar un positivo y un negativo, además del aspecto epistemológico, porque no hay claridad en la estructura aditiva, ni en el carácter de los enteros empleados en la operación, los niños no saben si están sumando o están restando, porque para "sumar" tienen que restar.

Episodio VI. COMBINANDO OPERACIONES.

Aunque la mayoría de los niños ya pueden obtener resultados correctos de la suma de números con el mismo signo y con signos opuestos, es decir han adquirido cierta competencia meramente operativa (como lo explica Sfard, 1991), la docente trata de que sus alumnos apliquen las estrategias ya “aprendidas” para llevarlas a las cadenas de operaciones como la siguiente:

$$-12 + 8 - 7 + 6 =$$

En la operación anterior aparece una combinación de sumas y restas de números positivos y negativos, entonces aparece una falta de gradualidad del contenido de los enteros porque se les va a pedir a los niños la operación de la sustracción, cuando ésta no ha sido enseñada.

Parece haber una confusión en la transposición didáctica de la docente porque para que tuviera sentido esta propuesta, el contenido debería ser: Sumas de positivos y negativos, es decir cómo resolver adición de enteros cuando hay más de dos sumandos.

La estrategia para resolver la operación antes comentada es:

1) Sumar todos los positivos (se asocian aquellos que tienen signo menos)
2) Sumar todos los negativos (se asocian los que tienen signo más)
3) Se obtiene la suma de positivos y negativos, entonces se restan los valores absolutos y se pone el signo del más grande.

Se confunden los signos de la operación con los del número y por tanto, los números que tienen un signo más son positivos y a los que tienen menos son negativos, se asocian y se operan: $\mathbf{-19}$

$$-12 + 8 - 7 + 6 = \mathbf{-12 - 7 = -19}, +8 + 6 = +14 = \mathbf{-5}$$

No se respetan las propiedades de la igualdad, se sigue utilizando la suma vertical y no hay competencia en la escritura horizontal ya que prácticamente no fue utilizada.

Otro aspecto encontrado es que en la enseñanza de estas cadenas de operaciones, se vuelve a confundir la operación de suma con la de resta, porque cuando se tienen las dos semi-sumas de "positivos y negativos", éstas según la regla: "***Negativo y positivo, lo resto***", se tienen que restar y ocurre lo siguiente:

+3 + (-2) -8 +15 =   3+15= +18

-8 - 2 = -10

En la operación se realiza la suma de positivos, la docente dice ahora sí correctamente que está el *menos dos* y erróneamente que *el menos ocho*, y como tienen el mismo signo aunque no diga que se están sumando, obtiene el resultado correcto: diez negativo.

La regla dice entonces: negativo y positivo, lo resto y escribe en notación vertical:

$$\begin{array}{r} 3+15=+18 \\ -8-2=\underline{-10} \\ +\ 8 \end{array}$$

Pero una niña dice que si lo resta entonces tiene: "dieciocho *menos* menos diez", y aparece la sustracción de un negativo provocada por la inconsistencia de la regla No. 2., como el establecimiento de una falsa concepción, pero la docente le dice que no, que tienen que restar 18 – 10 y el resultado es positivo porque el 18 es mayor.

Este es el defecto de esta estrategia, que tienen que "restar" falsamente, cuando suman porque si en verdad restaran tendrían que hacerlo con otra estructura aditiva.

Pareciera que como en la enseñanza de D2S ya se resolvieron sumas en las que hay que restar, ya está vista la operación de sustracción, cuando no es así. La docente no incluye en su enseñanza un apartado para la sustracción como operación aparte de la adición, no se analizan los casos de 1) la sustracción de dos enteros positivos $a-b$ con $a>b$, 2) La sustracción de dos enteros positivos con $b>a$, 3) La sustracción de dos negativos, con $a>b$, 4) La sustracción de dos negativos con $b>a$, 5) La sustracción de un positivo de un negativo y 6) La sustracción de un negativo de un positivo. Además no aparece la estrategia de la resta como operación inversa a la suma o la del simétrico (o inverso aditivo) para resolver la sustracción de enteros.

5.2.3 Observación y caracterización de la enseñanza de la docente D3S

Como ya se indicó en el capítulo de los aspectos metodológicos, esta profesora, es Ingeniero y Maestro en Ciencias, con 25 años de experiencia docente y enseña el tema de los enteros, en específico, la adición y sustracción en el tercer grado de educación secundaria como una recuperación de los conocimientos previos que deben tener los alumnos para enfrentar el contenido de modelación de fenómenos utilizando la ecuación de segundo grado en un problema de la física, de acuerdo a los planes y programas de estudio presentados y analizados en el capítulo 2.

La transcripción completa de la enseñanza del docente D3S, así como el análisis de la misma, se incluye en el apéndice B, de la cual se obtuvo la información que caracteriza la enseñanza de ésta.

Se dividió la observación de la enseñanza en 5 episodios y se nombraron de acuerdo con su contenido de la siguiente forma:

Episodio I. RECUPERACIÓN DE CONOCIMIENTOS PREVIOS

Episodio II. PRACTICANDO LA ADICIÓN DE ENTEROS

Episodio III. ¿CUÁNTO ES $-(-5)$?

Episodio IV. LA SUSTRACCIÓN DE ENTEROS, QUITO LA MISMA CANTIDAD

Episodio V. EL MODELO ATÓMICO Y EL MODELO CHINO

A continuación se describe y caracteriza la enseñanza de esta docente por episodio:

Episodio I. RECUPERACIÓN DE CONOCIMIENTOS PREVIOS.

En este episodio la docente enseña la adición de enteros a través de los casos:

a) Suma de un positivo con otro positivo
b) Suma de un negativo con otro negativo
c) Suma de un positivo con un negativo.

La docente aborda inmediatamente el caso más complicado de la adición de números enteros: el de la suma de un número entero negativo con un número entero positivo (o viceversa), como lo reconoce Peled (1991) en su nivel 4Q de la *dimensión cantidad.* La docente D3S introduce la adición con el caso de un negativo y su simétrico, como en $(-3) + (+3)$, en él, la docente no les da la respuesta inmediatamente, sino que a través de preguntas reflexivas, promueve que el alumno construya su conocimiento. De alguna manera utiliza la *enseñanza por diag*nóstico de Bell (1986) porque expone las falsas concepciones y éstas son resueltas a través de la *discusión-conflicto.* Recupera el conocimiento previo de los alumnos provenientes de la enseñanza de los docentes D1S y D2S, a través de las reglas que fueron aprendidas por los niños y con las que resuelven las operaciones de adición de enteros, de las cuales se recupera la de suma de números con diferente signo:

1. "*Signos opuestos se restan*".

(Regla expresada por la mayoría de alumnos de este grupo)

La docente pregunta por qué se usa esa regla y los niños no pueden explicar el por qué. Entonces la docente se enfoca en que los niños identifiquen la estructura aditiva en la operación escrita a través de la notación completa de Cid y Bolea (2007). La docente parece utilizar dos aspectos de la triple naturaleza del signo menos de Gallardo (1994-2002): 1) El signo unario para el número 2) el signo de la operación. (El tercer aspecto aparece en el episodio III).

Así que los niños mediante preguntas de reflexión reconocen que:

a) Los números enteros pueden tener signo positivo, negativo o son neutros.
b) Existe un signo que representa a la operación, de suma o resta y otro que pertenece al número y le da el carácter de positivo o negativo.
c) Se conceptualiza al número negativo como aquel menor que cero, y por tanto al positivo como aquel mayor que cero.

Durante la enseñanza de D3S aparece nuevamente en los niños el ***conflicto cognitivo*** surgido durante la enseñanza de los docentes D1S y D2S:

- *¿Por qué para sumar dos números con diferente signo se tiene que restar?*
- *¿Es una suma o una resta?*

Antes de promover que los alumnos superen ese conflicto, la docente fortalece el conocimiento de la estructura aditiva porque pregunta ¿para qué sirven los paréntesis?

(en la notación completa), hasta que los niños reconocen que sirven para separar los signos de los números de los de la operación. Entonces, la docente intenta eliminar la falsa concepción de que para sumar dos números enteros, se tenga que multiplicar los signos, el que está antes del paréntesis (binario) con el que está dentro del paréntesis (unario), indicándoles que como ya saben identificar la estructura, no se trata de una multiplicación sino de una adición y tienen que utilizar las estrategias propias para la suma. Con preguntas reflexivas por parte de la docente D3S, los alumnos reconocen que no están multiplicando y no tienen por qué utilizar la estrategia de multiplicar los signos.

Una vez aclarada la estructura aditiva, la docente D3S al darse cuenta que algunos estudiantes no comprenden el "por qué se tiene que restar para resolver la suma" (regla aprendida en la enseñanza de D1S y D2S) ahora utiliza las transferencias entre las dimensiones del conocimiento de Bruno (2009), entre la dimensión recta, abstracta y contextual, porque representa a la operación (-3)+ (+3)=0 desde la dimensión abstracta, después, recurre a la dimensión recta, en la que a través de la estrategia punto-segmento dirigido (Janvier, 1983) resuelve la operación y entonces pasa a la dimensión contextual con la representación de una deuda de 3 de la cual se pagan 3 y la deuda queda en cero, recurriendo a problemas aditivos en los que se utiliza el número entero (Problemas aditivos de Bruno y Martinón, 2007a).

Para practicar lo aprendido, la docente les invita a realizar la operación (-2) + (1)= ¿?, y los niños regresan al conocimiento que traían del "las reglas" y dicen que para resolverse "se restan", a lo que la docente recurre al contexto de haberes y deberes, "Si tengo una deuda de dos y pago uno"... entonces los niños dicen inmediatamente "debe uno" y escriben el resultado: (-2)+(1) = -1.

La docente promueve que la regla que los niños ya traen, ahora sea completada y significada, es decir que sean los niños los que la construyan y no que sólo la aprendan de forma incompleta. La D3S, pregunta por qué el resultado es negativo, a lo que los niños responden que: "*se queda el signo del mayor*", pero la docente les dice que: "*uno es mayor que menos dos*", los niños regresan al conflicto al no poder aclarar esta situación, la que corresponde la dificultad No. 1 de Bell (1986) de la dificultad para ordenar a los enteros.

La docente recurre nuevamente al modelo de la recta para ordenar a los enteros, por medio de la cual los alumnos reconocen que en este sentido es claro que: “*uno es mayor que dos negativo*”. La docente ahora promueve que los alumnos por sí solos reconozcan o recuperen el concepto del valor absoluto, pero no es así y la D3S tiene que recurrir a los segmentos dirigidos para explicar el valor absoluto, después, reconocen el valor absoluto de los números dos negativo y uno, utilizando la sintaxis adecuada:$|-2|= 2$, $|1|=1$. Hasta entonces, los estudiantes producen el sentido de que el dos negativo es mayor en valor absoluto y por ello el resultado lleva ese signo. Aprovechando la situación, la docente enseña con la misma estrategia y les pregunta ahora “¿Cómo se llaman los números que al sumarse nos dan cero?” a lo que los niños inmediatamente mencionan “Simétricos”.

Episodio II. PRACTICANDO LA ADICIÓN DE ENTEROS.

Al resolver los niños la suma de un positivo con un negativo: (+3) + (-1000), aparece la tendencia cognitiva No. 3, del retorno a situaciones más concretas, ya que los niños tienen la necesidad de convertir la suma de un positivo con un negativo a la de un negativo con un positivo: (-1000)+(+3) que es como la aprendieron con la D3S en el episodio I, quien aprovecha esta tendencia para enseñar la propiedad conmutativa de la suma, los alumnos ya la resuelven correctamente sin necesidad de acudir a ninguna regla, prácticamente por inspección.

La docente recurre a la dimensión contextual y les pregunta una situación en la que se represente la suma de (-1000) + (-100) = a lo que responden los alumnos correctamente utilizando un contexto de la tarjeta de crédito “*Si pagas por un celular mil pesos, quedas a deber mil pesos y después compras una memoria de cien pesos en total tienes una deuda de mil cien pesos*”. En este caso parece más sencilla la enseñanza de la suma de números del mismo signo, aspecto que resalta Peled (1991) en que los niños se encuentran en los niveles 2Q, y 2RN, los cuales son de menor dificultad contra el nivel enseñado por D3S, el cual corresponde al nivel 3-4 Q y 3-4 RN.

Episodio III. ¿CUÁNTO ES – (-5)?

En este episodio se presenta la operación – (-5) porque una niña pregunta qué operación es esa y cómo se resuelve, la docente D3S utiliza primero la indagación para conocer las concepciones previas de los alumnos, y plantea que se puede resolver de dos formas:

- A través de una regla porque es una operación.
- A través de su significado porque se usa un concepto.

La docente D3S recurre a la RN y ubica al -5, 0 y 5, apela al concepto del valor absoluto y al de la simetrización para explicar que 5 y -5 son simétricos, por lo tanto explica que la operación –(-5)= 5 es aplicar el simétrico al número dentro del paréntesis, se observa que la docente D3S utiliza la sintaxis y no se queda en la parte discursiva que en general es usada por D1S y D2S, quienes utilizan la parte semántica: el simétrico de menos cinco es cinco, el uso de la notación sintáctica para el valor absoluto y para el simétrico son aspectos que ayudan a extender el conjunto ***N*** al dominio ***Z***.

Cabe mencionar que en este capítulo, la docente D3S utiliza el tercer aspecto de *la triple naturaleza del signo menos* de Gallardo (1994-2002): III) El signo menos en la definición del simétrico.
Un niño dice anticipadamente el resultado de la expresión – (-5) “es más cinco” pero la docente, una vez que explicó la operación y significado del simétrico, ahora le explica al grupo a través de una generalización para representar *el simétrico de la diferencia de dos números,* presumiblemente enteros:

$$-(a - b) = -a + b.$$

Lo que denota que los negativos y la operación del simétrico se encuentran en el álgebra, como lo ha planteado Gallardo (1994) y Salinas, Gallardo y Mendoza (2015) cuando éstos mencionan que: *Los Naturales son a los Enteros como la Aritmética es al Álgebra*.

La docente aprovecha la situación para plantear otro aspecto epistemológico, que:

“*Se confunde a la expresión* $-(-5)$ *con la operación* $0-(-5)$”.

Ella explica que en el primer caso se trata de la operación del simétrico: el *simétrico* de cinco negativo, y la segunda es otra operación, la de sustracción: cero *menos* cinco negativo.

Esta situación es presentada por el autor de la presente tesis en el capítulo I, cuando Ribeiro (1997) menciona el punto 2 de sus problemas epistemológicos:

"¿Cómo sustraer un número negativo? – (-3)"

Se plantea que corresponde la expresión al simétrico y no a la sustracción, como bien ha explicado la diferencia la docente D3S.

Episodio IV. LA SUSTRACCIÓN DE ENTEROS, QUITO LA MISMA CANTIDAD

La docente enseña a la sustracción de enteros como una operación aparte de la adición, a través de preguntas, promueve que los alumnos identifiquen la estructura aditiva de resta con ayuda de la notación completa con paréntesis.

Comienza con la sustracción de un número de sí mismo, como ejemplo: $(-5) - (-5) =$ en el cual los niños reconocen que se trata de una sustracción, pero no pueden obtener el resultado porque intentan aplicar las mismas reglas para la adición de dos números negativos (aspecto mostrado en la enseñanza de D1S y D2S), los alumnos emiten las respuestas "diez", "menos diez", "cero", la docente indica que como no es una suma no pueden aplicar las mismas reglas, entonces promueve a través de la reflexión, que un niño vea a esta la sustracción como que: "*Al ser resta, y al ser los dos números menos cinco, da cero porque algo igual menos algo igual nos da cero*".

Un alumno dice que "*puedo cambiar la sustracción a menos cinco más cinco y da cero usando el simétrico*" y la docente escribe la expresión correspondiente: -5+5=0, a lo que la docente le dice: "*Si, lo puedes cambiar a adición, pero me interesa que aprendas a restar*". De hecho esta fue la intención de la docente para que los niños realicen sustracciones sin recurrir al inverso aditivo o a una regla sintáctica sin sentido (el formulismo vacío).

La docente aprovecha esta situación para extender este caso de la resta a cualquier par de números enteros iguales, es decir: $a - a\ = 0$ y este caso de la sustracción, aplica para números positivos, negativos o nulos, con el mismo resultado.

Se observa en este episodio que los niños no saben realizar la operación de sustracción, surge el conflicto cognitivo observado en los docentes D1S y D2S, cuando no saben los niños si cuando suman dos cantidades con signos opuestos están sumando o restando y cuando restan tienen que sumar, al menos en el caso de la enseñanza de D1S, porque en la enseñanza de D2S no parece la sustracción de enteros como contenido. Los niños provenientes de la enseñanza de D1S y D2S, parecen no haber cubierto los niveles 3Q, 3NR de Peled porque no pueden reconocer si resuelven sumas o restas y cómo se tendrían que resolver.

Episodio V.

La docente D3S enseña las diferentes formas de la sustracción utilizando las diferentes conceptualizaciones de la sustracción planteadas por Gallardo (1994-2002):

a) Sustraer como "quitar"

b) Sustraer como "completar"

c) Sustraer como "diferencia" o "comparación"

A través de estas conceptualizaciones, la docente D3S pretende llevar a los niños hacia el nivel 4Q y 4NR de Peled y superar el obstáculo de la conceptualización de la sustracción, ya que tanto en la enseñanza escolar observada en D1S, en los libros de texto y en la matemática formal para la sustracción se utiliza la estrategia de convertir la resta a su expresión equivalente en suma a través del inverso aditivo y resolver las sustracciones sumando. Un aspecto que conceptualmente puede representar un obstáculo didáctico y epistemológico. *La sustracción se resuelve sumando*, aunado a la regla de adición de dos números con signos opuestos, *La suma se resuelve restando*.

- En la sustracción como quitar:
    - La docente D3S utiliza el Modelo Chino y la concepción de juntar y quitar cantidades positivas y negativas a través de los códigos propios del modelo.

- Relaciona la suma de simétricos de manera sintáctica con el par dialéctico neutro: positivo-negativo del Modelo Chino.
- Realiza transferencias entre el Modelo Chino y la sintaxis con la notación completa.
- Realiza la transferencia del Modelo Chino al contexto de protones y electrones del Modelo Atómico.

- En la sustracción como completar:
  - La docente D3S utiliza la sustracción de naturales mediante la pregunta ¿Cuánto le falta al sustraendo para llegar al minuendo?, para después aplicar la misma estrategia a la sustracción de dos enteros como en: $18 - 9$ ¿Cuánto le falta a nueve para dieciocho?, a lo que los niños dicen 9 como respuesta, después en $-5 - (+8)$, la docente de manera análoga pregunta ¿Cuánto le falta a 8 para llegar a cinco negativo? Cuya respuesta identifican los niños "*es trece negativo*", debida la dirección del proceso.
- En la sustracción como diferencia o comparación:
  - La docente utiliza el modelo de la recta numérica en la que ubica dos números y los compara a través del segmento dirigido (vector) entre ellos con la dirección de la comparación.

La docente realiza la transferencia entre las tres conceptualizaciones de la sustracción con la misma operación (-5)- (+8), para que los niños aprendan verdaderamente a restar números enteros.

Es la primera vez que el autor de la presente tesis observa en la enseñanza que a los niños se les enseña a sustraer números enteros sin utilizar al inverso aditivo o una regla sintáctica.

En la etapa de indagación de la enseñanza se seleccionó a esta docente D3S debido a que mostró una estrategia que no ha sido observada ni en los libros de texto ni en la enseñanza del la suma y resta de enteros, la cual es la siguiente:

Para la suma de tres negativo y siete produce la siguiente sintaxis:

$$(-\mathbf{3}) + (+\mathbf{7}) = (-\mathbf{3}) + (+\mathbf{3}) + (+\mathbf{4}) = \mathbf{0} + (+\mathbf{4}) = \mathbf{4}$$

En la que se muestra el método de la descomposición de uno de los sumandos para formar simétricos, cuya suma sea cero y así obtener el resultado, esto es importante desde el punto de vista operativo y conceptual porque es una manera de representar la anulación compensación de números o cantidades opuestas sin tener que utilizar la regla sintáctica de "para sumar un positivo y un negativo, se restan los valores absolutos y el resultado tendrá el signo del sumando de mayor absoluto.".

A esta forma de realizar la adición de un entero positivo y uno negativo el presente autor lo denominará ***método de descomposición-simetrización-anulación*** para la suma de enteros, fraccionarios y decimales positivos y negativos, atribuida a la docente D3S y propuesta en esta tesis para superar varios obstáculos en la comprensión de la operación de la adición de enteros con signos opuestos.

5.2.4 Observación y caracterización de la enseñanza del docente D4I

La transcripción completa de la enseñanza del docente D4I, así como el análisis de la misma, se incluye en el apéndice B, de la cual se obtuvo la información que caracteriza la enseñanza de este docente.

Se observó un video en youtube.com de la enseñanza por una persona, supuestamente un docente al que se le caracterizó como D4I (Docente 4 de internet). Después de transcribir su enseñanza a través del video, se analizó la información desde el punto de vista de las categorías de análisis presentadas en el capítulo IV.

El docente D4I, organiza su enseñanza en los siguientes 4 episodios, y en el 5o. se muestran los comentarios de algunos de los usuarios, los cuales son alumnos de secundaria.

Episodio I. LOS ENTEROS Y LOS PARÉNTESIS

Episodio II. SUMA Y RESTA DE ENTEROS

Episodio III. COMBINACIÓN DE SUMAS Y RESTAS CON ENTEROS

Episodio IV. LOS COMENTARIOS

A continuación se describe y caracteriza la enseñanza de este docente por episodio:

Episodio I. LOS ENTEROS Y LOS PARÉNTESIS.

En el video se indica que se enseñará cómo realizar sumas y restas con números enteros, pero no se indica cuáles son estos números, se da por entendido que el usuario ya los conoce. El enfoque de la enseñanza es a través del discurso y de la ejemplificación, del tipo conductista con algunas preguntas incipientes para la reflexión, las cuales no son suficientes para la construcción del conocimiento.

El docente D4I plantea que existen dos situaciones:

Con Paréntesis

Sin Paréntesis

D4I dice que los paréntesis se resuelven, no se indica que se van a sumar o restar los números enteros, lo que indica que no se trabaja en esta enseñanza, en la identificación de la *estructura aditiva* de suma o resta de números enteros.

Resolver paréntesis.

La primera estrategia es cuando se presenta el caso de los paréntesis, los cuales tienen que resolverse, D4I dice que "*los paréntesis tienen signo, de más o de menos*", lo cual constituye un error conceptual, ya que los paréntesis por sí solos no tienen signo, y dice también que "*dentro de los paréntesis puede haber números con signo más, o menos*". No se habla en términos de números negativos o positivos, sino en término de números signados, lo que habla de un sentido intermedio en la conceptualización del número entero de Gallardo (1994). D4I plantea cuatro casos para resolver:

a) El caso de un paréntesis con signo más y con número dentro del paréntesis con signo más, como ejemplo: +(+4) = +4; enuncia y aplica la siguiente regla: "*El signo más se copia tal como está*" queriendo decir que el signo fuera del paréntesis no afecta el signo del número dentro del paréntesis y simplemente se copia tal cual, sin explicar alguna razón del porqué.
b) El caso de un paréntesis con signo más y con número dentro del paréntesis con signo menos, como ejemplo: +(-4) = -4; "*El signo más se copia y el resultado es menos 4*".
c) El caso de un paréntesis con signo menos y con número dentro del paréntesis con signo más, como ejemplo: -(+4) = -4. "*El signo menos del paréntesis indica cambiar el signo del número dentro del paréntesis*" y no se indica el porqué, tampoco se menciona el simétrico o inverso aditivo como recurso.
d) El caso de un paréntesis con signo menos y con número dentro del paréntesis con signo menos, como ejemplo: -(-4) = +4. "*El signo menos del paréntesis indica cambiar de signo del número dentro del paréntesis*".

Episodio II. SUMA Y RESTA DE ENTEROS.

La segunda estrategia consiste en resolver operaciones sin paréntesis, para lo cual se plantean dos situaciones (reglas operativas):

a) "Signos iguales se suma"
b) "Signos diferentes se resta"

En el primer caso se explica la regla: "Signos iguales se suma y se pone el mismo signo", así +4+5=+9, se suman cinco y cuatro y el resultado es nueve, con signo más, en el ejemplo de -7-3= -10 se suma y se coloca el signo menos, en este caso se incurre en un error de estructura, ya que no es una suma sino una resta, si se utilizara la notación completa se daría cuenta que: (-7) – (+3) es una sustracción y no una suma.

En el segundo caso se explica otra regla: cuando hay signos diferentes, se resta. Parece no importar la estructura aditiva. Como ejemplo se tiene la operación -7+10= +3 en la que se resta 10 menos 7 y se obtiene 3 y como 10 es mayor, se pone el signo del mayor y se signa con más al tres. En el ejemplo -10+4= -6, se resuelve igual, se restan 10 menos

4 y se obtiene 6, ahora dice D4I que como -10 es mayor que +4, entonces el signo del resultado es menos, incurriendo en un error conceptual en el orden de los enteros, ya que +4 es mayor que -10 y según la regla el resultado sería positivo, lo cual es incorrecto, para salvar la situación bastaría con incluir en la regla, “el signo del de mayor valor absoluto”.

Episodio III. COMBINACIÓN DE SUMAS Y RESTAS CON ENTEROS.

Para resolver una operación en la que aparecen números con y sin paréntesis se emplean las dos estrategias de resolución anteriores, nuevamente no se habla de la estructura aditiva, ni se aplica el simétrico, simplemente se aplican las regla “aprendidas” por el usuario. Por ejemplo en la operación -30+8-(-5)+1-5-(-3)+(-7) no se indica por el docente D4I, que los negativos sean -30, -5, -3 y -7; que los positivos son 8, 1 y 5 entre los cuales se están resolviendo sumas y restas, lo cual podría verse con la notación completa de Cid y Bolea (2007): (-30) + (+8) – (-5) + (+1) - (+5) – (-3)+ (-7).

Para resolver la cadena de operaciones en la que hay paréntesis, la estrategia de D4I es:

a) Ir copiando los números que no tienen paréntesis.
b) Resolver los paréntesis de acuerdo con las 4 reglas del episodio I.
c) Anotar la operación ya sin paréntesis.
d) Identificar los ceros que se forman con la propiedad “cancelativa”
e) Agrupar “positivos” y “negativos” y sumarlos con su “signo” correspondiente.
f) Aplicar la regla de resolver un positivo y un negativo (restando y con el signo del mayor)

Para ilustrar la estrategia, D4I identifica que $+5-5$, son dos números con signos contrarios, y aplica la propiedad cancelativa, incorrectamente, porque simplemente se están restando 5-5=0, ahora agrupa números con el mismo signo y aplica las dos reglas ya mencionadas. Obtiene como resultado de resolver paréntesis a la expresión:

$$-30+8+5+1-5+3-7$$

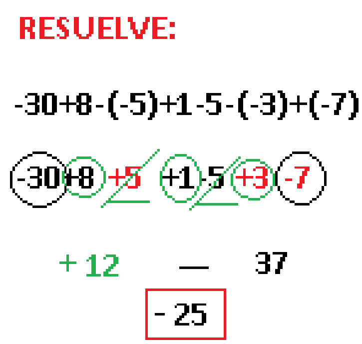
La expresión anterior es sintácticamente correcta. Aplica la propiedad "cancelativa" para eliminar a $+5-5$ y obtiene una nueva expresión:

$$-30+8+1+3-7$$

Expresión equivalente sintácticamente correcta.

Agrupa "positivos y negativos" los suma y obtiene +12 y -37, es decir suma los positivos y obtiene 12, suma los que tienen signo menos y obtiene -37, en este momento confunde el signo del número con el de la operación, es decir a las sumas las considera positivos y a las restas las considera negativos, con esta falsa concepción, agrupa y opera juntando las semisumas (no se puede decir que sumando porque no aparece ese concepto en la explicación) a los números. Aplica la regla de signos diferentes (se restan) y obtiene el resultado -25.

La secuencia de operaciones se muestra a continuación:



Como puede observarse se llega a un resultado correcto, a través de la aplicación de reglas que no utilizan un lenguaje matemático preciso, como el uso del inverso aditivo, o la concepción de la sustracción, no se utilizan las propiedades de la igualdad.

La explicación fue funcional porque obtiene resultados aparentemente correctos, pero carentes de la matemática formal y con errores de tipo conceptual.

Episodio V. COMENTARIOS DE LOS USUARIOS.

Los usuarios no reconocen la propiedad cancelativa, como estrategia en la adición y sustracción de enteros. Varios usuarios comentan que ahora sí entendieron, cuando lo que entendieron fue una serie de reglas y algoritmos para determinar resultados, los cuales son correctos, pero con deficiencias en el tratamiento matemático y conceptual de los enteros.

La enseñanza de la suma y resta de números enteros del docente D4I puede clasificarse de acuerdo al perfil Docente denominado por el presente autor de esta tesis como enseñanza de tipo SINTÁCTICO ALGORÍTMICO (En el capítulo VI se describe esta categoría)

5.3 Etapa de complementación

Las actuaciones de los docentes D11S y D12S fueron observadas directamente por Esqueda (2016), para determinar si utilizan el sistema de referencia en los problemas aditivos de números enteros y si éstos son conscientes o no de su uso. Las producciones de los docentes D11S y D12S se pueden encontrar en Esqueda, A. (2016) p.p. 51-84.

En esta etapa de complementación, estos docentes, D11S y D12S son observados nuevamente por el presente autor de esta tesis a través del trabajo de Esqueda, para caracterizarlos de acuerdo al propósito de este estudio, en la que se observará ahora, las estrategias aditivas y si en los problemas, se utiliza el número natural relativo de González-Marí o el entero formal en la enseñanza.

5.3.1 Caracterización de los docentes D11S y D12S Observados por Esqueda

5.3.1.1 Caracterización de la enseñanza del docente D11S

El docente recurre a dos problemas:

- La altura de la mosca.
- La profundidad del submarino.

El problema de la mosca.

Escribe el docente D11S "*Una mosca se encuentra volando en el campo. Inicialmente se encuentra a una altura de 6 m. Comienza a realizar ascensos y descensos, los cuales son registrados. Primero se eleva 2m, y luego desciende 3m, después asciende nuevamente 5m y desciende 4m. ¿A qué altura se encuentra en ese momento la mosca?"*

El profesor dibuja la situación con segmentos de arco que representan los desplazamientos de la mosca, asocia el número como un desplazamiento, cabe mencionar que D11S no aclara que está considerando sólo el movimiento vertical de la mosca, como si se moviera en una sola dimensión en la que solo puede subir o bajar. El contexto puede representar un reto cognitivo, pero es difícil conceptualizar la forma en la que se miden los desplazamientos hacia arriba y hacia abajo de la mosca.

El docente para resolver el problema dice que si está a 6m de altura y sube 2 entonces llega a 8, si baja 3 llega a 5m, sube 5 y llega a 10m, baja 4 y queda a 6m del piso.

El docente no dice explícitamente de dónde obtuvo el problema, pero sí comenta la fuente para la enseñanza de este contenido, se refiere a los libros de texto *Matemáticas 1* (Block y García, 2013) y Matemáticas 1. Primer curso (Caballero et al., 1994).

En la resolución apela sólo al discurso de tipo semántico para ir resolviendo mentalmente las operaciones, el problema es, que no aparecen números enteros, sino números relativos como los conceptualiza González-Marí (1995), aparecen sólo sumas y restas de números naturales relativos, no hay uso del número entero formal.

Por lo tanto el problema aditivo de la mosca no pertenece al contenido de los enteros porque no se resuelve con sumas y restas con estos números, sólo ocurren sumas y restas en la región positiva de la recta numérica vertical.

El problema del submarino.

Escribe el docente el problema *"Un submarino se encuentra a una profundidad de 430m. Después descendió 100m; luego subió 150m y finalmente bajó 220 m. ¿A qué profundidad se encuentra el submarino al finalizar sus acciones?"*

En el planteamiento del problema se nota claramente el uso de los números naturales relativos, como puede observarse no hay necesidad de recurrir al número negativo, como lo comenta Cid (2002) al decir que en los contextos aritméticos no es adecuado introducir a los negativos. Sin embargo, el docente D11S considera a los números como negativos porque están bajo el nivel del mar, utiliza para ello al *número signado* de Gallardo (1994). Aparece en el docente el *predominio del negativo*, ya que plantea en su discurso una profundidad de -430 m. La profundidad se puede expresar con el número relativo; o con la posición y el número signado, pero no con ambas.

El autor de la presente tesis considera que el número relativo "430 m de profundidad", se convierte a entero, a través de su posición de acuerdo con el establecimiento del sistema de referencia explícito, "-430 m".

En el esquema dibujado en el pizarrón del submarino, D11S traza un segmento dirigido hacia abajo y lo marca como -430, después, el docente dibuja un segmento hacia abajo de 100 m, pregunta a los niños ¿cuál es la profundidad a la que llegó?, éstos le responden que llegó "*a menos 330*" y el docente les corrige, diciendo que "*a menos 530 m de profundidad"* (tiene que decir a 530 m de profundidad o bien llegó a una posición de -530 m). Nótese que se utilizó -430 m y bajó 100 m, no hay consistencia con la notación, ya que de acuerdo con lo planteado, los dos números representan descensos y deberían utilizarse ambas cantidades negativas -430 m y a -100 m.

Los niños realizan la operación con naturales, 430-100= 330, este hecho puede deberse a que se está utilizando un lenguaje ambiguo, como ya se mostró cuando el docente dice que llegó el submarino a menos 530 m de profundidad, y no a la posición -530 m con respecto al sistema de referencia, en el cual se establece como positivo hacia arriba, pero no lo explicita así el docente D11S. Después éste escribe la operación que resuelve la situación: 430+100= 530, aplicó la misma estrategia que en el problema de la mosca, la suma de naturales relativos, en lugar de la suma de enteros, la propuesta sería (-430)+ (-100) = -530, cabe notar que se estaría utilizando en la propuesta la notación completa de Cid y Bolea (2007), la que permite identificar la estructura aditiva como el carácter positivo, negativo o neutro de los números, es decir dos de los tres aspectos que conceptualizan al número negativo, el signo *unario* del número y el *signo bin*ario de la operación, de Gallardo (1994-2004).

Ahora sube 150 m, dibuja un segmento dirigido hacia arriba de 150 m, y sin dejar que los niños reflexionen, los induce a reconocer que tienen que realizar una resta y escribe en el pizarrón "$530 - 150 =$", entonces los alumnos resuelven la sustracción de naturales y dicen 380 m. No se dan cuenta inmediatamente que el resultado debe ser negativo, hasta que el docente dice que "*es negativo porque siguen debajo del agua*", una niña pregunta *¿por qué es menos?*, es ignorada y el profesor continúa la explicación. Ahora dice que bajó 220 m. Los alumnos muestran la dificultad presentada por Bell, en la que no identifican si están sumando o restando, es decir los niños no han identificado sus falsas concepciones para establecer y superar ese conflicto, el docente escribe "380+220=" y pregunta "*¿A qué profundidad estamos?*", una niña dice a menos 600 m.

Otro niño dice "*yo lo puse en positivo*" y el docente le dice "*tendrás que especificar 600 m debajo del nivel del mar*", en este momento el docente enfatiza el carácter relativo de los números que está utilizando. Un tercer alumno le dice al segundo "tu ponle el signo menos y ya", interviene el docente y dice que son 600 m bajo el nivel del mar y luego aplica el signo negativo (porque de acuerdo a él todos los números debajo del nivel de referencia son negativos) menos 600 metros debajo del nivel del mar, incurriendo nuevamente en el predominio del negativo.

La enseñanza de D11S no es muy convincente y clara para los alumnos que van siguiendo las explicaciones pero entran en conflicto cuando no les hace sentido las conjeturas de tipo relativo del profesor, ésta situación se puede intentar resolver, de acuerdo con el autor de esta tesis, con ayuda del *establecimiento del sistema de referencia*, el cual hace que las cantidades relativas ahora se conviertan en números enteros, y plantear las operaciones con la notación completa con los paréntesis.

5.3.1.2 Caracterización de la enseñanza del docente D12S

El docente utiliza dos problemas obtenidos de Casarrubias & Gómez, 2015, p. 124, los cuales son planteados en la clase para resolver problemas con enteros mediante la suma o resta, el primero, es el caso de un avión que sube y baja ciertos metros de altura y otro de un submarino que sube y baja ciertos metros de profundidad.

El problema del avión.

Cuando el docente D12S, enseña a resolver el problema del avión que se encontraba a 2870 m de altura y luego bajó 945 m, después subió 812 m y por último descendió 570 m. lo hace mediante el uso de *números naturales relativos*, González Marí (1995).

D12S utiliza la misma estrategia que el docente D11S en el problema de la mosca, realiza sumas y restas de números naturales relativos.

Para determinar la altura inicial, traza en el pizarrón un segmento dirigido de 2870 m después les pregunta a los alumnos que si el avión baja 945 m, para determinar a qué altura quedó, qué operación tienen que hacer, una suma o una resta, los niños contestan “resto” y el docente escribe “2870-945” con un resultado de 1925, como comenta Esqueda, los movimientos que realiza el avión estarán asociados a una operación y no a números positivos y negativos.

Se sugiere el uso de la notación completa o elegir la estrategia, suma y resta de naturales relativos o convertir los naturales relativos a enteros, a través del establecimiento del sistema de referencia y utilizar las posiciones en lugar de las alturas. Después suma 812 m porque el avión sube y suma los naturales 1925+812 con resultado 2763, en que los alumnos lo resuelven muy bien porque están en el ámbito que dominan, la suma de naturales, el avión baja 570 m y los niños dicen que se resuelve con una resta, 2737-570 con un resultado de 2167. Este docente utiliza números naturales y operaciones de suma y resta con un punto de referencia, el suelo, por tanto este tipo de problemas planteados así, no pertenecen al dominio de los enteros, sino al de los naturales relativos.

El problema del submarino.

Este problema también es tomado de Casarrubias y Gómez, 2015. P. 124, En esta resolución no utiliza al número entero, sino al número relativo natural mediante restas y sumas con el problema de un submarino que se encuentra a 960 m de profundidad , luego emerge 275 m, después se sumerge 306 m y la pregunta es "*¿Cuántos metros debe emerger para estar en la superficie del mar*".

El docente recurre al esquema y traza un segmento dirigido hacia abajo del nivel del mar al cual le coloca 960 m, después dice que va a subir 275 m, y les pregunta a los niños la operación que deben aplicar, la suma o la resta, los niños dicen que la suma, probablemente porque va para arriba, aludiendo al problema del avión, pero el docente les dice que si se suman las cantidades se haría mayor el resultado y se iría más para abajo, con el argumento anterior los niños dicen que se resten, entonces aplica la operación 960-275 y los niños responden que es 685. Se nota que en la enseñanza persiste el conflicto cognitivo de si están sumando o restando y cómo se resuelven esas operaciones, debido muy probablemente al uso incorrecto del número natural relativo. Si el docente explicara que cambió el sistema de referencia positivo hacia abajo, tendrían más sentido sus planeamientos.

5.3.2 Caracterización de la Docente D13E observada en Salinas

Continuando con la etapa de complementación, se hace el análisis de una parte de la entrevista didáctica que realiza la docente-maestra D13E a un docente de telesecundaria, pero ahora desde el punto de vista de la enseñanza. La transcripción de esta entrevista, se puede encontrar en Salinas, G. (2016) p.p. 159-294. En los fragmentos de la entrevista seleccionados y mostrados en este trabajo, se encuentra el análisis realizado por el autor de esta tesis, en el que se pretende identificar las estrategias y recursos utilizados por la entrevistadora, que logran que el docente entrevistado establezca sus dificultades y pueda superarlas.

Para caracterizar la enseñanza de la D13E, se observarán y analizarán los siguientes fragmentos de su entrevista, se analiza en ésta, las estrategias y recursos que usa la entrevistadora para hacer que el docente entrevistado utilice al número entero para modelar situaciones de la química. Se observa cómo la Docente D13E guía al entrevistado a través de preguntas, para que éste explicite el número de oxidación con el uso experto del número entero, mostrando un aspecto de la transferencia de $\boldsymbol{Z}$ hacia la química.

En el siguiente fragmento tomado del episodio VI de química de Salinas (2016), se hace pasar al docente de un SMS_1 a un SMS_2 de mayor abstracción en el contexto químico.

20 D13E: ¿Puedes proponer una ecuación para calcular el número de oxidación del fósforo en $Ca_3(PO_4)_2$?
21 D: No sé cómo explicarlo, no sé cómo escribirlo.
22 D13E: ¿Qué hiciste para obtener el más cinco? Sabes que la suma de los números de oxidación total es cero.
23 D13E: ¿Cuál es tu incógnita?
24 D:| El número de oxidación del fósforo
25 D13E: ¿Cómo sería tu ecuación?
26 D: A mí no me sirve la ecuación
27D13E Si un alumno te dice que no entiende cómo calculaste el número de oxidación del fósforo ¿podrías ayudarte de la ecuación para enseñarlo?
28 D: Puede ser [No se muestra muy convencido] Si fueron tres veces más dos [Escribe $3(+2) = +6$]
29 D13E: Ahora representa toda la ecuación.
30 D: Tres por más dos, más dos veces el valor de la incógnita, más dos veces el número de átomos del oxígeno por su número de oxidación igual acero. [Escribe $3(+2) + 2x + 2(4)(-2) = 0$]
31 D13E: ¿Qué representa la “x”?
32 D: Según el contexto, el número de oxidación del fósforo.
33 D13E: ¿Crees que si resuelves esta ecuación te de cinco?
34 D: Tendría que resolverla para saber.
[Escribe

$$6 + 2x + (-16) = 0$$
$$6 - 6 + 2x - 16 + 16 = 0 - 6 + 16$$
$$2x = +10$$
$$x = +5$$

]
35 D: ¡Entonces sí se puede!

D13E se cerciora que el entrevistado obtenga los números de oxidación de los átomos que forman un compuesto, en donde lo fundamental es obtener *el número de oxidación* del átomo central. Una vez que el entrevistado puede obtener los números de oxidación de cada átomo en el compuesto por inspección, D13E incita al entrevistado a proponer una ecuación con la que obtuvo el número de oxidación del átomo central representado por una incógnita. El entrevistado no sabe cómo explicarlo ni cómo escribirlo, mencionando que a él no le sirve la ecuación. Este paso implica pasar de un SMS a otro SMS de mayor nivel de abstracción. Se observa que el docente no tiene la necesidad de abstraer algebraicamente lo que realizó por ensayo y refinamiento, ya que puede resolver la situación sin necesidad de recurrir a un SMS más abstracto. Para superar la tendencia inhibitoria del entrevistado, D13E le cuestiona, si un alumno no comprende cómo obtener el número de oxidación del átomo central, "*¿podrías ayudarte de una ecuación para enseñarle?"* El docente acepta que puede ser un recurso que le ayude en su enseñanza. D13E propicia que el docente plantee la ecuación, cuestiona acerca del significado de la incógnita y a la resolución de la ecuación. El entrevistado plantea la ecuación correctamente, la resuelve y obtiene el mismo resultado que con ensayo y refinamiento, exclamando ¡sí se puede!

Analizando la actuación del entrevistador observamos que D13E:

- Identifica si el docente puede encontrar los números de oxidación en un compuesto.
- Promueve una estrategia personal que puede ser por inspección o ensayo y refinamiento para encontrar el número de oxidación que son números enteros.
- Incita al docente a representar algebraicamente la situación al pedir que plantee una ecuación, lo que implica pasar de un SMS_1 a otro SMS_2 más abstracto.
- Realiza preguntas reflexivas como "¿Qué hiciste para obtener el más cinco?", provoca que el docente entrevistado analice sus procedimientos.
- Proporciona ayuda "*Sabes que la suma de los números de oxidación total es cero*"
- Encuentra preguntas para que el entrevistado supere tendencias inhibitorias.
- Cuestiona sobre el significado de la incógnita en el contexto químico.
- Provoca que el docente compruebe que con su ecuación se puede encontrar el número de oxidación de un compuesto.
- Induce la transdisciplinariedad y la transferencia.

En el episodio VII de química, el docente entrevistado procede a obtener los números de oxidación del átomo central de un compuesto planteando y resolviendo una ecuación, aunque no se le solicitaba esa estrategia. Mostrando la tendencia de utilizar lo aprendido recientemente y realizando la transferencia ***de un conocimiento matemático hacia un conocimiento en química y viceversa*** como se muestra en el siguiente fragmento.

1 D13E: ¿Cuántos átomos de Aluminio, Azufre y Oxígeno hay en $9Al_2(SO_4)_3$?
2 D: Al 2 x 9=18
S 3 x 1 = 3 x 9 = 27
O 3 x 4 = 12 x 9 = 108

3 D: [Escribe]

$$\begin{array}{cc} +6 & -24 \\ \hline +3 & -2 \end{array} = 0$$
$$Al_2(S0_4)_3$$

[Plantea la ecuación]

$$2(+3) + 3x + 12(-2) = 0$$
$$6 + 3x - 24 = 0$$
$$3x - 18 = 0$$
$$3x - 18 + 18 = 0 + 18$$
$$3x = +18$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{+18}{3}$$
$$x = +6$$

4 D: [Escribe]

$$\begin{array}{ccc} +6 & +18 & -24 \\ \hline +3 & +6 & -2 \end{array} = 0$$
$$Al_2(S0_4)_3$$

Como se observa en el fragmento anterior, D13E permitió que el docente entrevistado obtuviera el número de oxidación del átomo central, aunque no era consigna y advierte cómo el docente aplica en la química el conocimiento matemático. D13E observa dificultades en el signo de la igualdad, en la línea 2D, mismas que no son reportadas en la presente investigación.

En el episodio XII, se solicita al docente entrevistado encontrar el número de oxidación de un átomo en un anión, como se muestra en el siguiente episodio.

1 D13E: ¿Cuál es el número de oxidación del cromo en $Cr_2O_7^{2-}$?
2 D: Me tiene que dar igual a cero
3 D13E: ¿Tiene que dar cero?
4 D: Sí, ¿no?

5 D13E: Entonces ¿es un compuesto?

6 D: No, es un ión. Me tiene que dar, … ¡menos dos!

[Escribe]

$$\begin{array}{lll} & & = -2 \\ \hline & -2 & \\ Cr_2 & O_7 & \end{array}$$

7 D: Entonces esto es dos equis (2x), más(+) menos catorce (-14), igual (=) a menos dos (-2)

[Escribe]

$$2x - 14 = -2$$
$$2x = -2 + 14$$
$$2x = +12$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{+12}{2}$$
$$x = +6$$

8 D: Entonces es ¡más seis!

[Escribe]

$$\begin{array}{lll} & & = -2 \\ \hline +6 & -2 & \\ Cr_2 & O_7 & \end{array}$$

9 D13E: Explícame ¿qué hiciste?

10 D: Como es un ión, el resultado de la ecuación es menos dos. Establecí la ecuación para poder llegar a ese número [El +6], el resultado de los siete átomos de oxígeno por su número de oxidación me da menos catorce. Para el cromo dice que son dos átomos por el número de oxidación, es dos equis más, menos catorce me tiene que dar menos dos. Fui despejando hasta que llegué a dos equis es igual a doce y equis me da como resultado seis.

11 D: Dos por seis son más doce.

[Escribe]

$$\begin{array}{lll} +12 & & = -2 \\ \hline +6 & -2 & \\ Cr_2 & O_7 & \end{array}$$

Aquí son menos catorce. [Escribe]

$$\begin{array}{lll} +12 & -14 & = -2 \\ \hline +6 & -2 & \\ Cr_2 & O_7 & \end{array}$$

Me da como resultado menos dos.

12 D13E: ¡Gracias!

Podemos observar en la actuación de D13E en el episodio XII las siguientes características:

- Cuando el docente entrevistado expresa una aseveración incorrecta, D13E repite en forma de pregunta lo incorrecto, provocando duda sobre la afirmación.
- Si la duda no es superada por el entrevistado, D13E cuestiona nuevamente acerca de la naturaleza de lo que se está cuestionando sin dar la respuesta y provocando que el docente reconozca el conflicto. Las preguntas realizadas por D13E, proporcionan una ayuda para superar dicho conflicto.
- Superada la duda o conflicto, D13E permite que el docente entrevistado desarrolle lo que ha aprendido y lo aplique a la nueva situación.
- Provoca que el docente entrevistado explicite verbalmente lo desarrollado algebraicamente.

5.4 Etapa de Triangulación

Con el fin de completar y triangular la información encontrada en la observación de los docentes D1S, D2S, D2S y D4I, se aplica el *cuestionario 1*en sus tres *etapas, A, B y C* a un nuevo grupo de docentes: D5P, D6P, D7S, D8S, D9S y D10S, para buscar, confirmar y confrontar la nueva información arrojada de éste instrumento con la obtenida en la etapa de observación. Para ello se realiza el análisis de las respuestas de cuestionario1 en sus tres etapas, aplicado a cada docente. Las transcripciones y análisis de las respuestas del cuestionario 1, se encuentran en el apéndice C de esta obra.

5.4.1 Análisis de los cuestionarios de los docentes D5P, D6P, D8S, D9S y D10S

5.4.1.1 Análisis del *Cuestionario Etapa A*

Las conclusiones obtenidas después de analizar las respuestas del cuestionario 1, *etapa A*, aplicado a los docentes D5P, D6P, D8S, D9S y D10S, en la etapa de triangulación, son presentadas en las siguientes tablas (5.4.1.1a – 5.4.1.1d).

Docente D5P
No hay ninguna introducción de este contenido en primaria La única aproximación que puede existir es la de las “deudas”. No se continúa la RN para mostrar que existen los negativos. Realiza algoritmos de adición y sustracción en ***N***. Los problemas aditivos se estructuran de tal manera que “siempre” se reste el número menor del número mayor. Aparece la relación entre el problema relativo y el problema con enteros, en el banco se debe $ -10 o bien se tienen una deuda de $10. Puede explicar al número negativo a través de la recta numérica pero ahora con dirección hacia la izquierda. En primaria no se toca el contenido de los enteros ni del número negativo, por ello se le realizará una pequeña entrevista para indagar en esta situación.
Docente D6P
Utiliza a la RN para explicar al número negativo, al igual que D1S, D2S, D3S. Conceptualiza al número negativo como aquel menor que cero como D3S pero sólo de forma semántica. Asocia el negativo en el contexto de deudas, como D1S, D2S, D3S D5P. Conceptualiza al entero positivo como naturales, al cero como ausencia de objeto y al negativo como inversos de los positivos. La suma la conceptualiza como juntar en el caso de naturales, menciona que se suma en los enteros con las leyes de los signos.

Tabla 5.4.1.1a Conclusiones de los aspectos encontrados en la enseñanza en el cuestionario 1.

Docente D6P
La sustracción la conceptualiza como lo contrario a juntar, esto en los naturales. Es difícil que los niños realicen operaciones con números muy grandes, en los que no se pueden representar en la RN. Ubica al número $-a$, en la RN y encuentra su simétrico a partir de la distancia del cero a ese número pero en sentido contrario. No aparece el caso en que a sea positivo, negativo o nulo. Define a los enteros como el conjunto numérico que contiene a los naturales, sus inversos aditivos y al cero y son infinitamente grandes. Los alumnos logran el dominio de los enteros cuando pueden realizar operaciones sin dificultad interpretando correctamente a los números positivos, negativos y al cero. Se puede notar en esta docente el uso de los sentidos intermedios propuestos por Gallardo (1994-2002) y utilizados en la enseñanza de D1S, D2S y D4I, como son las definiciones incompletas o imprecisas, los conceptos semánticos sobre los sintácticos, la permanencia en el conjunto de los naturales, el uso de la recta modelo como único modelo conocido y el uso de reglas operatorias sin significados.
Docente D8S
Introduce a los enteros a través de la extensión de la recta numérica de los naturales, este aspecto puede ayudar a extender el conjunto $\boldsymbol{N}$ a $\boldsymbol{Z}$. Indica que los negativos ahora son aquellos menores que cero, pero se recurre a la semántica sobre la sintaxis. Utiliza al cero como referencia, es decir el "cero origen de Stevin" Conceptualiza a los positivos en la RN como los que están a la derecha del cero, los negativos como los que están a la izquierda del cero y los ve *como números signados*, como nivel intermedio en la conceptualización del número negativo de Gallardo (1994-2002). Realiza las operaciones de adición y sustracción en la recta numérica con movimientos de una partícula referida al cero, como lo hace el docente D1S en su enseñanza observada. Suma a la derecha un número positivo y resta a la izquierda, pero sin diferenciar que está restando un positivo.

Tabla 5.4.1.1b Conclusiones de los aspectos encontrados en la enseñanza en el cuestionario 1.

Docente D8S
Transita del modelo de la recta numérica para sumar, al modelo *Sintáctico-algorítmico* de las reglas de los signos para la suma y resta, porque ya no pueden utilizarse números “muy grandes” en la RN. La regla de los signos que utiliza es: con dos signos iguales los valores absolutos se suman y conservan el signo de ambos. Si son diferentes, el de mayor valor absoluto le resta el de menor valor absoluto y se conserva el signo que tiene mayor valor absoluto. Como no se ha visto la “multiplicación de signos”, no se pueden eliminar los paréntesis con la regla de los signos de la multiplicación, entonces utiliza la regla: “no cambies el signo” si afuera y adentro del paréntesis, hay un signo positivo, y “cambia el signo” si afuera del paréntesis hay un menos. Esta estrategia es utilizada por D4I en su enseñanza. Utiliza problemas “típicos de enteros”, alturas sobre el nivel del mar, elevadores, submarinos y aviones, pero lo importante es que habla de la posición en la vertical. Reconoce que hay operaciones que parecen ilógicas, aspecto de origen epistemológico de los enteros cuando se refiere a la operación +13-15.
Docente D9S
Establece la existencia de los números negativos a través de la existencia de los opuestos o de los pares dialécticos, derecha-izquierda, arriba-abajo, adelante-atrás, positivo-negativo. Habla de que ejemplifica situaciones cotidianas donde aparecen los números enteros, pero esto es discutido en una entrevista realizada a esta docente. Utiliza el modelo de la RN y contextos de temperaturas, altitud, el elevador, las eras, pérdidas y ganancias, avances y retrocesos y el uso de fichas positivas y negativas del cual se le ayudó diciéndole que se trata del Modelo Chino-Gallardo. La mayor dificultad en la enseñanza de los enteros es hacer que los alumnos comprendan los problemas para expresar las operaciones con cantidades positivas y negativas. Incluye a las ecuaciones y a los cuadrados mágicos para ejemplificar y practicar las adiciones y sustracciones de números enteros. La operación que más se dificulta es la de la multiplicación y división de números enteros.

Tabla 5.4.1.1c Conclusiones de los aspectos encontrados en la enseñanza del cuestionario 1.

Docente D9S
El simétrico lo define como el inverso aditivo y la suma de simétricos es cero. Esta docente puede utilizar el modelo Chino-Gallardo para representar operaciones de adición y sustracción de enteros, además debido a sus concepciones muy aproximadas al modelo de competencia formal en este estudio, será considerada como sujeto de estudio para una breve entrevista.
Docente D10S
Considera a los negativos como inversos de los positivos, y los ha considerado como deudas, pero reconoce que debe ir más allá (de esas concepciones). No reconoce el uso de algunos modelos de enseñanza, pero sí el contexto de haberes y deberes, así como el modelo de las estructuras algebraicas (*Modelo Sintáctico Algorítmico*). La operación de suma y resta de enteros la enseña a través del modelo de la RN. Como ejercicios y problemas enseña con contextos de deudas y puntos de encuentro. Dentro de las dificultades de enseñanza identifica algunos aspectos: a) Los problemas relacionados con los significados de los signos del número negativo con el de la sustracción, reconoce que aún los docentes presentan esta dificultad. b) Es difícil realizar la abstracción a pesar de la aparente simplicidad de los enteros. c) La suma cuando aparece un sumando negativo Parece conceptualizar correctamente al simétrico, y dice de manera correcta que los enteros forman un conjunto abeliano con respecto a la suma y dice que los enteros surgen de la necesidad de "completar" las operaciones en los naturales. No parece mostrar alguna forma de reconocer cuándo un estudiante domina el contenido de los enteros, pero si dice que si éste puede operar correctamente e identificar los signos del número y de la operación, sería suficiente. Las concepciones de este docente parecen de interés en el presente estudio por lo que será considerado para una breve entrevista.

Tabla 5.4.1.1d Conclusiones de los aspectos encontrados en la enseñanza del cuestionario 1.

5.4.1.2 Análisis de las respuestas del *Cuestionario 1, Etapa B*

Las conclusiones obtenidas después de analizar las respuestas del cuestionario 1, *etapa B*, aplicado a los docentes D5P, D6P, D7S, D8S, D9S y D10S, en la etapa de triangulación, son presentadas en las siguientes tablas (5.4.1.2a – 5.4.1.2i).

Cuestionario 1. Etapa B. Resultados.

Pregunta 1, respuestas por docente.							
Pregunta	Operación	D5P	D6P	D7S	D8S	D9S	D10S
1A	(+3)+(+8)=	11	11	+11	+3+8=+11	11	3+8= 11
1B	(+3)+(-8) =	-5	-5	-5	+3 - 8= -5	-5	3-8= -5
1C	(-3)+(+8) =	5	5	+5	-3+ 8= +5	5	8-3= 5
1D	(-3)+(-8) =	-11	-11	-11	-3- 8= -11	-11	-3-8= -11
1E	(+3)-(+8) =	-5	-5	-5	+3- 8= -5	**11**	3-8= -5
1F	(+3)-(-8) =	11	11	+11	+3+8=+11	11	3+8= 11
1G	(-3)-(+8) =	-11	-11	-11	-3- 8= -11	-11	-3-8= -11
1H	(-3)- (-8) =	5	5	+5	-3+8= +5	5	-3+8= 5
Análisis de la pregunta 1 para identificar la estrategia aditiva utilizada por cada docente.							
Docente	Estrategia Aditiva						
D5P	Regla para la suma de dos enteros positivos. "*Por ser de igual signo sumé valor absoluto con signo positivo*". Regla para sumar un entero positivo y un entero negativo. "*Resto valores absolutos con signo del mayor*". Regla para sumar dos enteros negativos. "*Por ser de igual signo, sumé valor absoluto con signo negativo*". Recta numérica mental para la sustracción de dos positivos. "*Si los ubico en la recta me coloco en +3 y resto 8, me dirijo hacia la izquierda 8 espacios*". Recta numérica mental para la sustracción de un negativo de un positivo. "*…inicio en +3, al restar, utilizo su simétrico y avanzo hacia la derecha 8 espacios*". Recta numérica mental para la sustracción de un positivo de un negativo. "*Estoy en -3 y al quitar 8, retrocedo 8 espacios*". Recta numérica mental para la sustracción de un negativo de otro negativo. "*Estoy en -3 y al quitar un número negativo utilizo su simétrico y avanzo +8*".						

Tabla 5.4.1.2a. Resultados de la pregunta 1 del cuestionario 1 etapa B, docente D5P.

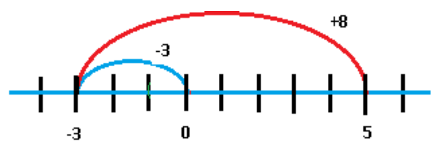
Pregunta 1. Estrategia aditiva utilizada por docente.	
Docente	Estrategia Aditiva
D6P	Con la ley de los signos de la multiplicación quita los paréntesis y recurre a la recta numérica con la estrategia de los saltos de la rana o de los segmentos de arco, del tipo segmento-segmento de Janvier. La ley de los signos que utiliza es: (+)(+) = + (+) (-) = - (-) (+) = - (-)(-)= + En los números positivos y en las sumas, los movimientos son a la derecha. En los números negativos y en las restas, los movimientos son a la izquierda. Ilustrando: (-3) – (-8) = 5 porque "*empleando la ley de los signos*" [Mentalmente aplica (-)(-)= +, y obtiene una expresión: -3+8 que es la que representa en la recta]  En la recta numérica aplica el concepto del simétrico cuando cambia la dirección al restar un negativo diciendo que ahora va hacia la derecha, pero sintácticamente no puede aplicarlo como una regla matemática, sino que utiliza la ley de los signos para quitar los paréntesis.
D7S	Regla para la suma de dos enteros del mismo signo. "*Sumando los valores absolutos y colocando al resultado el signo de los sumandos*". Regla para sumar un entero positivo y un entero negativo. "*Obteniendo la diferencia de los valores absolutos y colocando al resultado el signo del sumando con mayor valor absoluto*". Regla para la sustracción. "*Eliminando mentalmente los paréntesis (multiplicando los signos) y después haciendo lo mismo que en las reglas para los primero cuatro incisos* [se refiere a las reglas para las sumas]"

Tabla 5.4.1.2b. Resultados de la pregunta 1 del cuestionario 1 etapa B, docentes D6P y D7S.

Pregunta 1. Estrategia aditiva utilizada por docente.	
Docente	Estrategia Aditiva
D8S	Eliminando el segundo paréntesis con la ley de los signos. [Se interpreta que utiliza la ley de los signos para la multiplicación para eliminar el segundo paréntesis y aplica las reglas de la suma, porque en el cuestionario 1, parte A, dice que como los niños no saben multiplicar signos todavía, sólo puede decir lo que hacen los signos + y – al número dentro del paréntesis, entonces el signo más (+) fuera del paréntesis no le "hace nada" al signo del número dentro del paréntesis y el signo menos(-) fuera del paréntesis "le cambia el signo" al número dentro del paréntesis. Esta estrategia es utilizada también por el D4I]
D9S	*"Aplicando el simétrico y leyes de los signos para la suma. "* [Se considera que enseña la suma de enteros a través de las leyes de los signos para la suma] [Se considera que en la sustracción de enteros, aplica el concepto del simétrico para convertirla a suma y aplicar las reglas para sumar enteros] [Durante la etapa A del cuestionario 1, la docente dice utilizar a las fichas positivas y negativas, así como a la recta numérica para enseñar la suma y resta de enteros]
D10S	Elimina los paréntesis sin ser explícito el cómo. Después de eliminar los paréntesis, emplea la regla de los signos para la suma de enteros. Regla para la suma de dos enteros del mismo signo. "*Sumo y pongo signo que comparten*". Regla para la suma de un entero positivo y otro negativo. "*Resto y pongo el signo del mayor*".

Tabla 5.4.1.2c. Resultados de la pregunta 1 del cuestionario 1 etapa B, docentes D8S, D9S y D10S.

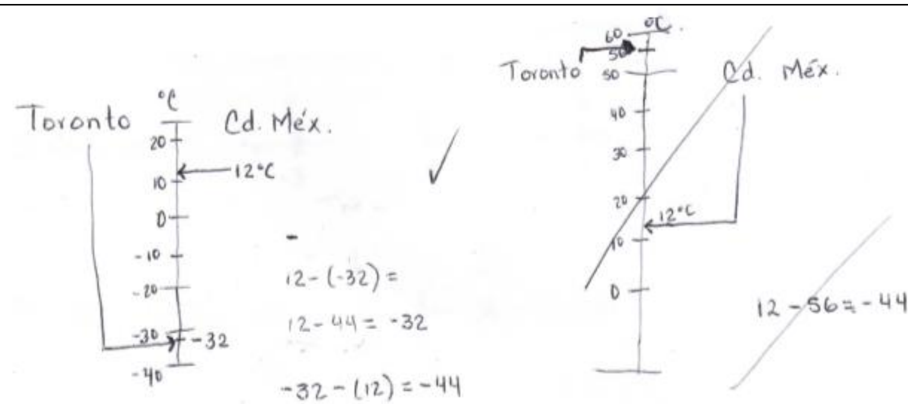
<table>
<tr><td colspan="2">Pregunta 4. Identifica las operaciones que representan los problemas, represéntalos en la RN y resuélvelos:
A. La diferencia de temperaturas entre la Ciudad de Toronto, Canadá y la Ciudad de México a las 6:00 A.M. es de - 44°C. ¿Cuál es la temperatura de Toronto en ese momento si la temperatura en la Ciudad de México es de 12°C?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Análisis de las respuesta de la pregunta 4A para identificar la estrategia en la resolución de problemas aditivos de números enteros con apoyo del modelo de la recta numérica.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Docente D5P</td></tr>
<tr><td>Respuesta</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Análisis</td><td>D5P utiliza la RN vertical, resolviendo dos casos para la sustracción, parece que la recta numérica vertical le apoya para eliminar el segundo caso. Plantea como la operación que resuelve la situación a 12- (-32) y después la cambia a 12-44 = -32 como una operación equivalente a la de una suma, no aparece en la RN la diferencia como un segmento dirigido, donde el sentido negativo indicaría una temperatura más baja en Toronto. En esta pregunta se busca la estrategia aditiva para la sustracción a través de comparar dos números en la RN sin importar la región de la RN en la que éstos se encuentren.</td></tr>
</table>

Tabla 5.4.1.2d. Resultado y análisis de la pregunta 4A de la docente D5P.

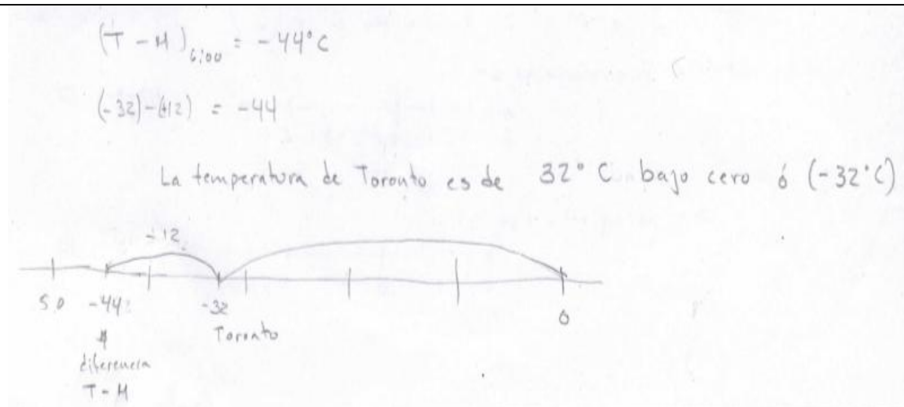
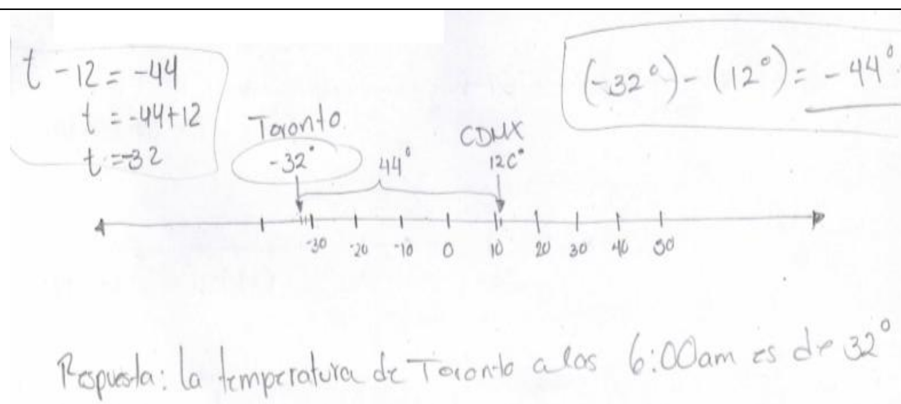
<table>
<tr><td colspan="2">Docente D6P</td></tr>
<tr><td>Respuesta</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Análisis</td><td>La docente utiliza a la sustracción como comparar dos valores de temperatura, entre la CDMX y Toronto con la expresión T - M = -44°C de manera adecuada, en la cual comprueba su resultado al sustituir las temperaturas en la expresión (-32) – (+12) = -44. Expresa la temperatura de Toronto con número relativo (32°C bajo cero) y con número negativo (-32°C). No utiliza el álgebra para encontrar la incógnita como T- (+12) = -44, sino que recurre a la recta numérica para encontrar por inspección el valor de T tal que satisfaga la igualdad. La ubicación de los valores de temperatura en el termómetro (RN) no es correcta y no aparece la comparación mediante un segmento dirigido entre ésos valores.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Docente D7S</td></tr>
<tr><td>Respuesta</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Análisis</td><td>La expresión t-12=-44 representa la situación y encuentra que t= - 32, la representación en la recta numérica es adecuada, sólo que indica una variación positiva (44°), cuando ésta debía estar expresada con un segmento de recta con dirección negativa para hacer sentido con el valor de -44°. Comprueba su resultado con la expresión (-32°) – (12°) = -44°.</td></tr>
</table>

Tabla 5.4.1.2e. Resultado y análisis de la pregunta 4A de las docentes D6P y D7S.

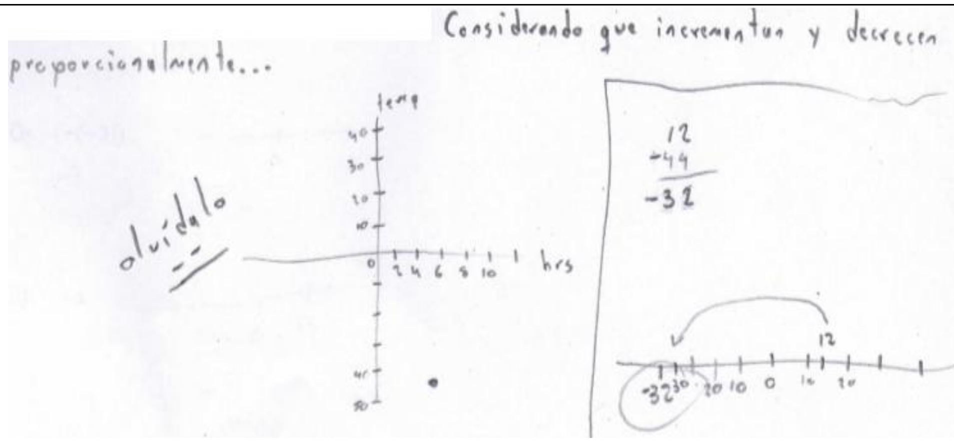
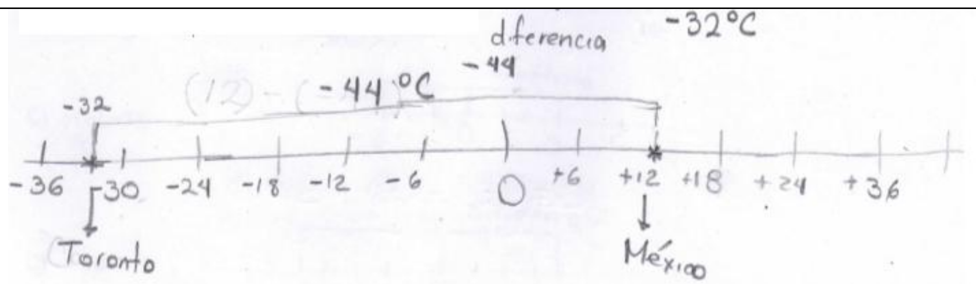
<table>
<tr><td colspan="2">Docente D8S</td></tr>
<tr><td>Respuesta</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Análisis</td><td>Considera una relación proporcional, por ello dibuja un plano cartesiano, pero rectifica y recurre a la recta horizontal, donde ubica la temperatura del estado 1, aplica la variación de -44 y encuentra el estado 2 con la operación 12-44= -32, no se muestra la estrategia para resolver la operación. En su representación de la RN utiliza el segmento de arco dirigido.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Docente D9S</td></tr>
<tr><td>Respuesta</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Análisis</td><td>La docente representa la situación de las temperaturas adecuadamente en la recta numérica, identifica la variación a través de ver a la sustracción como la diferencia entre dos números en la RN. Obtiene la temperatura de Toronto a través del estado1 (12° en CDMX) menos la variación de 44°, para obtener el estado2 (-32° C en Toronto). No aparece una operación entre enteros, ni una ecuación, no se sabe si aplica una variación a través de la sustracción o una variación a través de la suma de una variación negativa.</td></tr>
</table>

Tabla 5.4.1.2f. Resultado y análisis de la pregunta 4A de los docentes D8S y D9S.

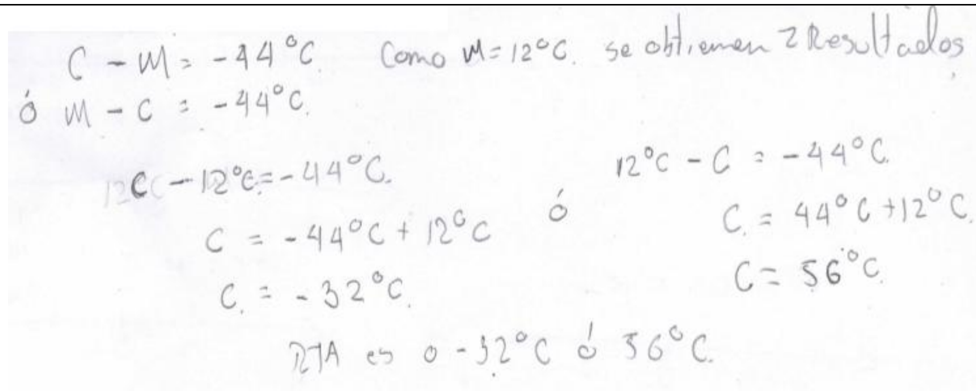
Docente D10S	
Respuesta	 C − M = −44 °C Como M = 12°C se obtienen 2 Resultados ó M − C = −44°C C − 12°C = −44°C ó 12°C − C = −44°C C = −44°C + 12°C C = 44°C + 12°C C = −32°C C = 56°C RTA es o −32°C ó 56°C
Análisis	Presenta dificultades para establecer el sentido del la variación porque obtiene dos expresiones C-M= -44 o bien M-C= -44, al resolverlas obtiene dos resultados, el primero correcto como C=-32°C y el segundo incorrecto con un valor para C=56°C. En la pregunta se le pidió utilizar y representar la situación en la RN, lo que no ocurrió y en este caso este modelo lo podría ayudar a identificar la variación y su sentido (positivo o negativo) entre dos valores de temperatura.

Tabla 5.4.1.2g. Resultado y análisis de la pregunta 4A del docente D10S.

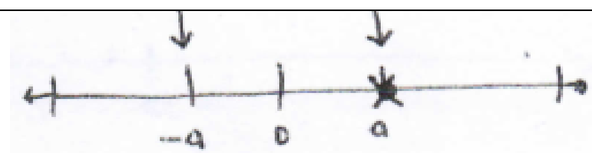
Item 5 D. Representa el simétrico en la recta numérica para cada una de las cantidades:	
Docentes D5P, D6P, D7S, D8S	
Respuestas mostradas	
Análisis	Al recurrir a expresiones de tipo general para representar al simétrico de un número, los docentes consideran que a siempre es positivo. Aunque parece que se tiene el concepto sintáctico del simétrico como $-(a) = -a$

Tabla 5.4.1.2h. Resultado y análisis de la pregunta 5D de los docentes D5P, D6P, D7Sy D8S.

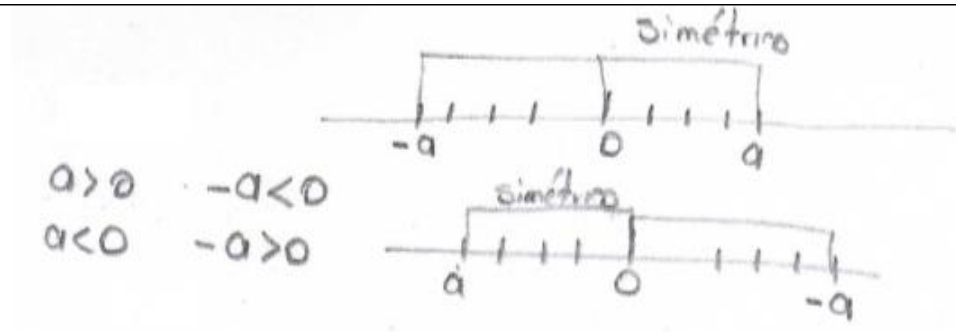
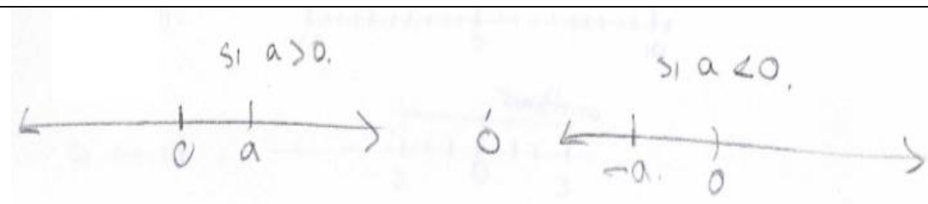
Docente D9S	
Respuesta	
Análisis	La docente conceptualiza de manera más adecuada al simétrico cuando se le hace la pregunta ¿Y si el número es negativo? y resulta que se obtiene la respuesta deseada, en donde hay una representación con lenguaje matemático asociado a la representación en la recta numérica. No aparece el caso en que se represente en la RN al simétrico de a si éste es igual a cero.
Docente D10S	
Respuesta	
Análisis	Se le hace la misma pregunta al docente que a D9S, pero falta que éste complete la representación en la recta numérica. En el segundo caso planteado, si a es menor que cero, $-a$ es mayor que cero. El docente lo ubica en el lado opuesto en la RN. No aparece el caso en que se represente en la RN al simétrico de a si éste es igual a cero, aún con la pregunta guía ¿falta algún caso para el valor de a?

Tabla 5.4.1.2.i. Resultado y análisis de la pregunta 5D de los docentes D9 y D10.

5.4.1.3 Análisis del *Cuestionario 1, Etapa C*

En la etapa C del Cuestionario 1, los docentes D5P, D6P, D7S. D8S, D9S y D10S resuelven y obtienen conclusiones de los problemas de física planteados de acuerdo con la tabla 5.4.1.3.a.

Docente	**Problema de Física.**
D5P D6P	*Problema de Alcance*
D7S D8S	*Problema de encuentro*
D9S D10S	*Problema de Tiro parabólico*

Tabla 5.4.1.3.a. Problemas resueltos del cuestionario 1, Etapa C, por docente.

5.4.1.3.1 *El problema de alcance*

Como ya se indicó en la sección 4.7, se utiliza un *problema de alcance* como lo plantea Mochón (1985), problema que es modificado por el autor de la presente tesis, para identificar a través de éste, los recursos y estrategias que utilizan las docentes D5P y D6P para resolver un problema con solución negativa en el tiempo y en la posición de dos móviles, así como para identificar las dificultades en su resolución y las dificultades a las que se podrían enfrentarse éstos, en la enseñanza de este tipo de contenidos.

Cabe señalar que este problema requirió de ayuda de tipo reflexiva por parte del presente investigador para que las docentes pudieran obtener e interpretar la solución.

Los resultados del *problema de alcanc*e de la *Etapa C* del *Cuestionario* 1 mostrado por los docentes son los siguientes:

Un camión pasó por una gasolinera sin detenerse a 50 km/h. Tres horas antes pasó por ese mismo lugar un auto a 100 km/h, ambos por la misma carretera. ¿Cuál es la posición y el tiempo de alcance?

a) ¿Cuál es tu punto de referencia?
   R= La gasolinera

b) ¿Cuál es la ecuación que describe la posición del camión?
   R= 50 $\frac{km}{h}$ t

c) ¿Cuál es la ecuación que describe la posición del automóvil?
   R= 100 $\frac{km}{h}$ t + 300 km

Resuelve el sistema de ecuaciones:

Sustituyendo en t=0, tenemos:

Y=50 $\frac{km}{h}$ (0 h)=0 km

X= 100 $\frac{km}{h}$ (0 h) + 300 km = 300 km

Sustituyendo en t=-6, tenemos:

Y=50 $\frac{km}{h}$ (-6 h)=-300 km

X= 100 $\frac{km}{h}$ (-6 h) + 300 km = -300 km

Punto de encuentro t=-6 horas y 300 km antes de la gasolinera o -300 km, considerando la gasolinera como punto de referencia.

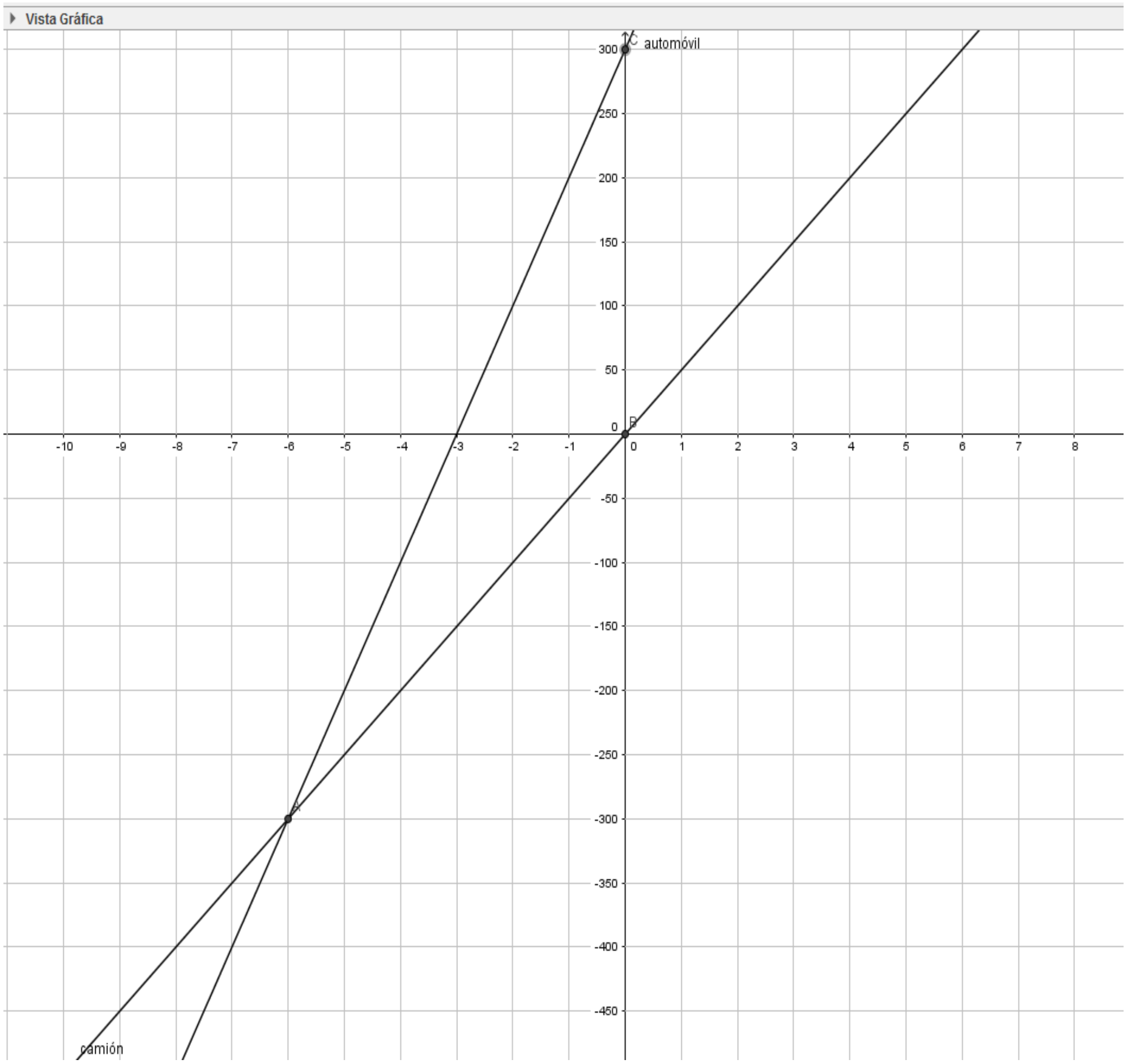
¿Qué signo tiene el tiempo y la posición de alcance?
R = Negativo (- 6 horas, - 300 Km)

¿Cómo interpretas estos resultados?
Se encuentran 6 horas antes de que el camión pase por la gasolinera, es decir, 300 km antes de llegar a ella.

¿Cuáles son las dificultades enfrentadas para su resolución?
R = La forma de representar el problema, la búsqueda de una representación que considere horas y kilómetros en la misma referencia y que nos permita interpretar el problema, cómo emplear el plano cartesiano y como punto fundamental, es importante entender que se debe retroceder en el tiempo para lograr encontrar la solución al problema.

¿Cuáles son las dificultades que consideras podrían aparecer durante la enseñanza de este tipo de situaciones en tus alumnos?

- No identificar el punto de referencia.
- Entender que se trabaja con dos dimensiones.
- Encontrar la forma de representar esas dos dimensiones.
- Reconocer que varían proporcionalmente.
- Reconocer que si continúan avanzando en el tiempo no lograrán encontrar la solución.
- Entender que deben retroceder en el tiempo, sin olvidar su punto de referencia y considerar que ambas dimensiones pueden ser negativas.
- Poder representar el problema con un sistema de ecuaciones e identificar la variación entre una ecuación y otra.



TIEMPO (HRS)	Posición del camión (km)	Posición del automóvil (km)
-8	-400	-500
-7	-350	-400
-6	**-300**	**-300**
-5	-250	-200
-4	-200	-100
-3	-150	0
-2	-100	100
-1	-50	200
0	0	300
1	50	400
2	100	500
3	150	600
4	200	700
5	250	800

5.4.1.3.2 *El problema de encuentro*

Como ya se indicó en la sección 4.7, se utiliza un *problema de encuentro* como lo plantea Mochón (1985), problema que es modificado por el autor de la presente tesis, para identificar a través de éste, los recursos y estrategias que utilizan la docente D7S y el docente D8S para resolver un problema con solución negativa en el tiempo y en la posición de dos móviles, así como para identificar las dificultades en su resolución y las dificultades a las que se podrían enfrentarse éstos, en la enseñanza de este tipo de contenidos.

Cabe señalar que este problema requirió de ayuda de tipo reflexiva por parte del presente investigador para que los docentes pudieran obtener e interpretar la solución.

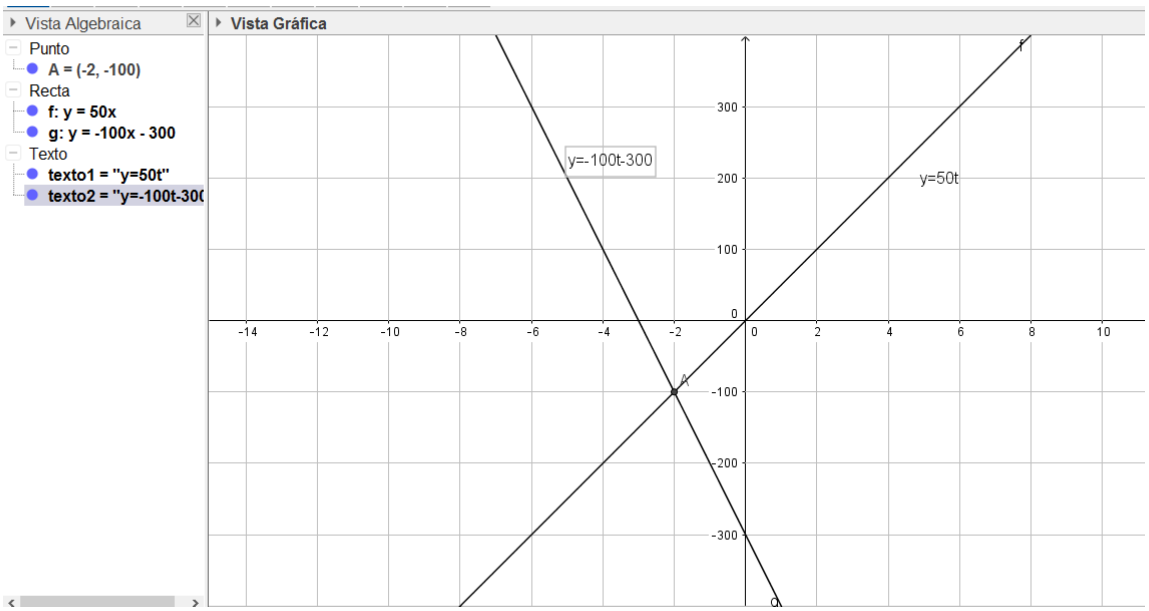
Los resultados del *problema de encuentro* de la *Etapa C* del *Cuestionario* 1 son los siguientes:

Problema

La posición de un camión en función del tiempo está descrita por $y = 50t$, donde "y" es la posición en kilómetros (km) y "t" es el tiempo en horas (h). La posición de un automóvil en función del tiempo es $y = -100t - 300$, "y" es la posición en kilómetros (km) y "t" es el tiempo en horas (h).

Preguntas

A) Elabora una gráfica de posición vs tiempo para ambos móviles



B) Encuentra gráficamente el punto de intersección de ambas rectas

(-2, -100)

C) ¿Cuál es la pendiente de cada una de las rectas?

m=50   m=-100

D) ¿Qué representa cada una de las pendientes de esas rectas?

La velocidad de cada vehículo, la pendiente negativa indica que el automóvil se desplaza en dirección opuesta al camión

E) ¿Cuál es la rapidez de cada uno de los móviles?

50km/h y -100km/h respectivamente

F) ¿Cuáles son los valores para el tiempo y la posición que satisfacen ambas funciones?

Tiempo= -2 Posición=-100

G) Encuentra analíticamente la solución del sistema de ecuaciones y compara los valores con la solución gráfica.

$$y = 50t$$

$$y = -100t - 300$$

$$50t = -100t - 300$$

$$50t + 100t = -300$$

$$150t = -300$$

$$t = -\frac{300}{150}$$

$$t = -2$$

$$y = 50t$$

$$y = 50(-2)$$

$$y = -100$$

H) ¿Cuál es la interpretación de los resultados?

El camión y el auto se encontraron 2 horas antes del punto de referencia 100 km antes del mismo.

I) ¿Qué tipo de problema físico se está representando en esta situación? Caracteriza este tipo de movimiento

Se trata de un problema de encuentro, en el que dos móviles se desplazan en direcciones opuestas a través de la misma trayectoria.

J) Escribe un problema de enunciado verbal en el que se utilicen las funciones que representan el movimiento del camión y el automóvil.

Un camión viaja a una velocidad de 50 km/h, mientras que un auto avanza, en dirección opuesta al camión, a una velocidad de 100 km/h. Si ambos salen de puntos distintos sobre la misma carretera ¿En qué momento se encontrarán si cuando el camión inició su recorrido el auto ya había viajado 300 km?

K) ¿Cuáles son las dificultades enfrentadas para su resolución?

Antes de la solución del problema mismo, cabe mencionar las dificultades que se tuvieron para plantearlo sin dar directamente las funciones, nos fue difícil introducir en el problema el -300 que forma parte de la función que corresponde al automóvil. Algebraicamente comprendemos la solución y sabemos que los resultados negativos hacen referencia a tiempo y distancia antes del punto de referencia, nuestra dificultad continua siendo ¿Cuál es el punto de referencia? ¿A qué punto de referencia se alude?

L) ¿Cuáles son las dificultades que consideras podrían aparecer durante la enseñanza de este tipo de situaciones en tus alumnos?

La interpretación de las pendientes y resultados negativos, así como la confusión de las representaciones gráficas de cada función con trayectorias y la ubicación y

5.4.1.3.3 *El problema de tiro parabólico*

Como ya se indicó en la sección 4.7, se utiliza un *problema de tiro parabólico* como lo plantea Mochón (1985), problema que es modificado del original transformándolo de un tiro vertical-caída libre, a uno equivalente de tiro parabólico, por el autor de la presente tesis, para identificar a través de éste, los recursos y estrategias que utilizan la docente D9S y el docente D10S para resolver un problema con solución negativa en la velocidad final al tocar el suelo el proyectil y con un ángulo de llegada negativo, así como para identificar las dificultades en su resolución y las dificultades a las que se podrían enfrentarse éstos, en la enseñanza de este tipo de contenidos.

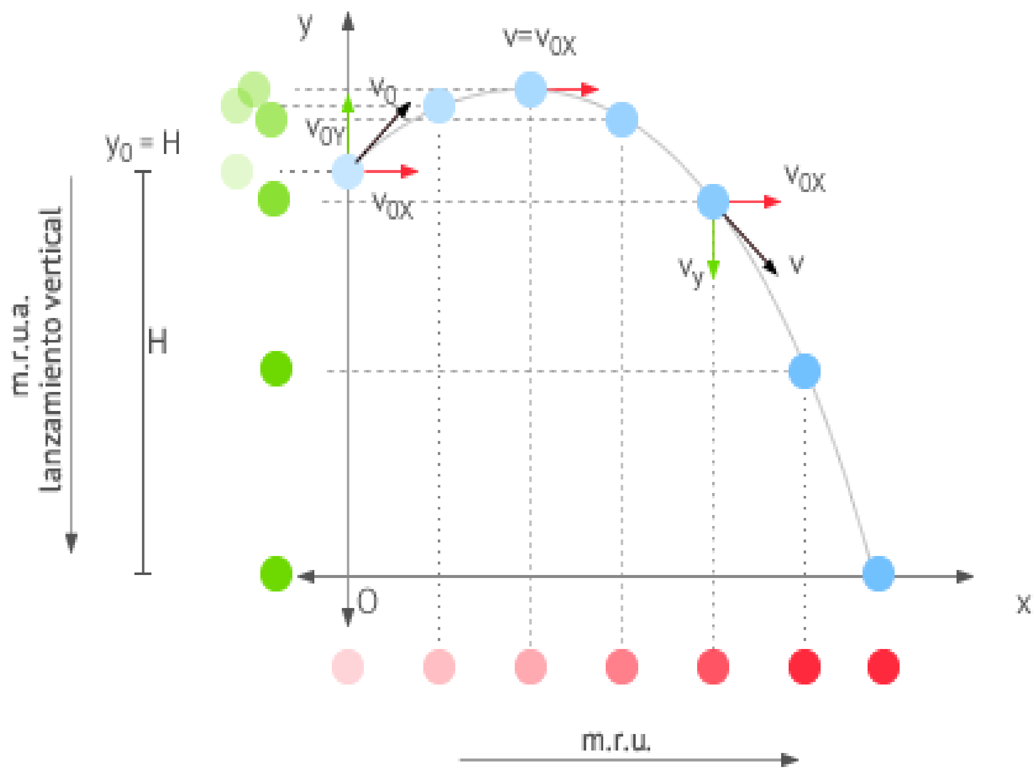
Cabe señalar que este problema requirió de ayuda de tipo reflexiva por parte del presente investigador para que los docentes pudieran obtener e interpretar la solución.

Los resultados del *problema de tiro parabólico* de la *Etapa C* del *Cuestionario* 1 son los siguientes:

Tiro parabólico

Desde lo alto de un edificio de 30 m se lanza un objeto con un ángulo de inclinación de 60°

a) ¿Cuál es la velocidad inicial para que tarde en 10s en llegar al suelo?



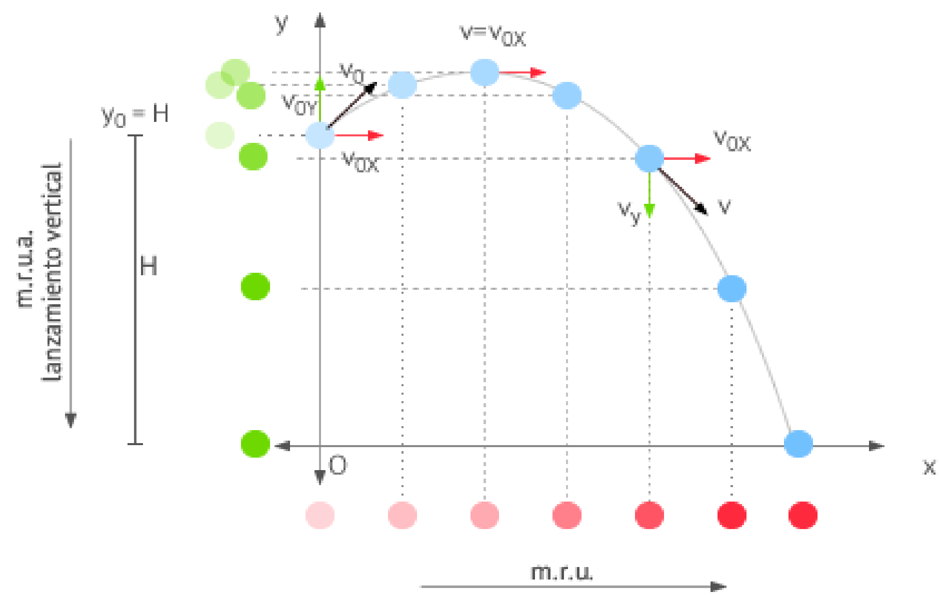
$$y = y_o + v_{oy} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = y_o + v_o \cdot sen\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$-30m = 0 + V_0(\text{sen } 60°)(10\ s) - \frac{1}{2}(10 m/s^2)(10s)^2$$

$$-30m = 8.66025V_0 - 500m$$

$$\frac{-30\ m + 500\ m}{8.66025} = V_0 \qquad V_0 = 54.\ 2709\ m$$

b) Determina la distancia horizontal recorrida por el objeto



$$x = v_{ox} \cdot t = v_o \cdot \cos\alpha \cdot t$$

x= (54. 2709 m/s)(cos 60°) (10 s)

x= (54.2709m/s)(0.5)(10s) =(54.2709m/s)(5s)

x= 271.3547 m

c)¿Cuál es la altura máxima que alcanza el móvil Con respecto al edificio?

Calcula el tiempo en que el objeto llega a la misma altura del edificio. $y - y_0 = 0$

$$y = y_o + v_o \cdot sen\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

0=(54. 2709 m/s)(sen 60°)(t) $-\frac{1}{2}$(10m/s²)(t²)

0= (54.2709)(.866025)(t) – (5)t²

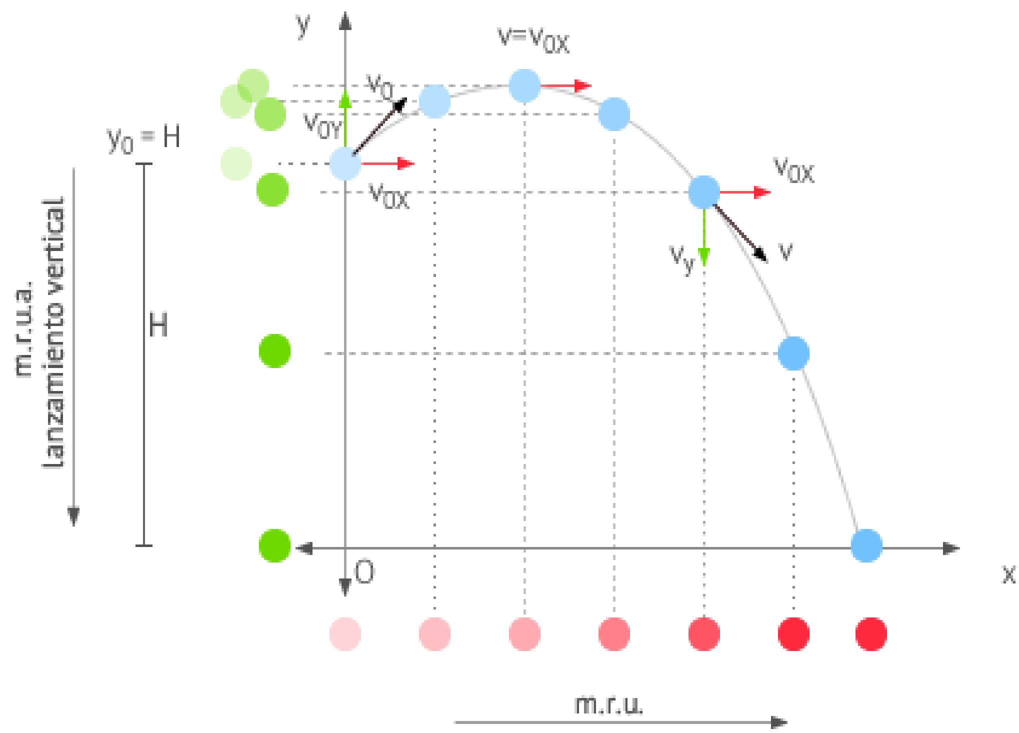
0= 47t – 5t² 0= t(47 – 5t) t= 0 ó t= -47/-5 t= 9.4s

Para alcanzar la altura máxima, ocupa la mitad del tiempo t= 9.4s/2 t= 4.7s

$Y_{máx} = v_o \cdot sen\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ $Y_{máx}$= (54. 2709 m/s)(sen 60°)(4.7)s $-\frac{1}{2}$(10m/s²)(4.7s)² $Y_{máx}$= 110.45 m

d) ¿cuál es la altura máxima respecto al suelo? y_{suelo}= 110.45m + 30m = y_{suelo} =140.45m

e) ¿cuál es la velocidad final del objeto y el ángulo con el que cae?



$V_{fy}= V_0(\text{sen } 60°) + gt$

$V_{fy}= -54.\ 2709\text{m}(\text{sen } 60°) + (10\text{m/s}^2)(-.6)$

$V_{fy}= -47 - 6$ $\quad V_{fy}= -53\text{m/s}$

$V_f=\sqrt{(V_{0x})^2 + (V_{fy})^2}$

$V_f=\sqrt{(27.13)^2 + (-53)^2}$

$V_f= \sqrt{736.0369 + 2809} = \sqrt{3545.0369}$ $\quad V_f= \pm 59.54 \text{ m/s}$

$V_f= -59.54 \text{ m/s}$

$\text{Tan } \beta = \frac{Vy}{Vx} = \frac{-53}{27.13} = -1.9535$ $\qquad \beta = \text{arc tan } -1.9535$

$B= -62.89°$

5.4.2 Aspectos encontrados en las entrevistas de los docentes D5P, D9S y D10S

En la siguiente etapa del estudio, se seleccionaron a los docentes D5P, D9S y D10S para aclarar y confirmar algunas conclusiones del estudio de la observación y caracterización de la enseñanza de los enteros en docentes de educación secundaria, por medio de la entrevista.

El objetivo de las entrevistas radica en confirmar y completar los hallazgos encontrados a lo largo de este estudio, como son, el uso de los números relativos en los problemas escolares y el uso del número entero o negativo formal en situaciones de la física, así como la interpretación y operatividad de la negatividad en los problemas propuestos y resueltos por los docentes.

A continuación se presenta la información más relevante encontrada en las entrevistas.

5.4.2.1 Aspectos encontrados en la entrevista de la docente D5P

A continuación se muestran fragmentos de la entrevista realizada a la docente D5P.

1 E: Profesora, en su enseñanza en la primaria ¿aparece el contenido de los números negativos?

2 D5P: No, no es parte de los contenidos a enseñarse de acuerdo al currículo.

3 E: Aunque no sea parte del contenido, ¿se enseña algún aspecto relacionado a los números negativos?

4 D5P: No, definitivamente no se trata ningún aspecto de los negativos.

5 E: ¿Existe alguna situación en la que los niños muestren indicio de que conocen los números negativos?

6 D5P: No. [Se queda pensativa…] De hecho no, al contrario, se evita que aparezcan.

7 E: ¿Cómo es que se evitan?

8 D5P: Se diseñan las clases, los problemas y las actividades para que no haya ninguna oportunidad a que “salgan” este tipo de números.

9 E: En cuanto a la parte de matemáticas en la clase, algún alumno a lo largo de su experiencia, le ha preguntado ¿qué ocurre cuando se resta un número mayor de uno menor, refiriéndome a los naturales?

10 D5P: Hasta ahora ninguno, se evita ese tipo de sustracciones.

11 E: ¿Qué le contestaría a un niño si le pregunta cómo restar un número mayor de uno menor?

12 D5P: No los sé, no lo había pensado, probablemente lo explicaría con las deudas o con ayuda de la recta.

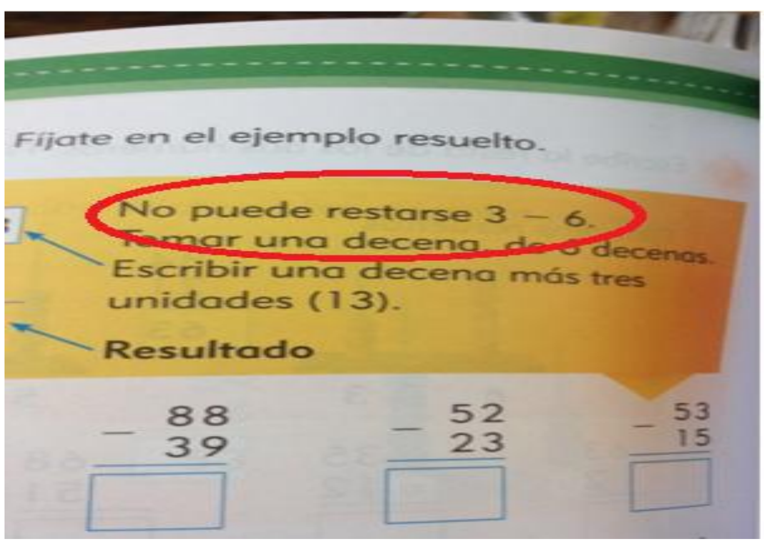
El análisis del fragmento de la entrevista de la docente D5P es el siguiente:

- Se obstaculiza la emergencia de los negativos en la educación primaria.

- Se obstaculiza la extensión numérica de N a Z.

- El nivel de conceptualización del número negativo de acuerdo con Gallardo (1994-2002) en los niños y probablemente en los docentes se encuentra en el nivel sustractivo, es decir en el nivel 0 del número negativo, ya que se evita su aparición y sólo se pueden resolver sustracciones del tipo $a - b$ con $a > b$, con $a, b \in N$.

Además en la siguiente imagen de un libro de texto buscado al azar en una biblioteca escolar, se muestra la siguiente imagen, la cual confirma el hecho mostrado por la docente, además de mostrar una tendencia cognitiva inhibitoria y un obstáculo didáctico.



5.4.2.2 Aspectos encontrados en la entrevista de la docente D9S

A continuación se muestran fragmentos de la entrevista realizada a la docente D9S.

Fragmento A de la entrevista.

1 E: Dices que los números enteros son el conjunto de los positivos, los negativos y el cero. ¿Cómo dices que un número es positivo?

2 D9S: Cuando un número es mayor que cero, cuando está a la derecha del cero en la RN.

3 E: Y si... a es un número cualquiera, ¿cómo se expresa?

4 D9S: Que a es mayor que cero si es positivo.

5 E: Y ¿si es negativo?

6 D9S: Son aquellos números que están a la izquierda en la RN.

7 E: También, a puede ser mayor…

8 D9S: Menor o igual a cero.

9 E: ¿Te acuerdas cómo se llama esta propiedad?

10 D9S: La tricotomía.

11 E: Si los enteros son los positivos, negativos y el cero ¿Las fracciones forman parte de los enteros?

12 D9S: Para mí, si, porque son cantidades que se pueden representar en la RN.

13 E: De acuerdo al programa ¿enseñas números enteros o números negativos?

14 D9S: Números enteros.

15 E: Vamos a partir de la RN de los naturales, ¿cómo se llaman esos números?

16 D9S: Naturales y comienzan en el uno. [dibuja a la RN con el cero]

17 E: ¿Y por qué aparece el cero? (en la recta numérica)

18 D9S: Porque hacemos como una extensión, en la que los números son puntos, del cero a la derecha y del cero a la izquierda.

Observación y análisis del investigador del fragmento A de la entrevista.

En la sección 1.5.6 se plantea la extensión de los naturales $\boldsymbol{N}$, hacia la serie ampliada de los números naturales $\boldsymbol{Z_0}$, desde la matemática formal. El autor de la presente tesis contempla este aspecto como primer paso en la extensión del conjunto $\boldsymbol{N}$ al dominio $\boldsymbol{Z}$.

Fragmento B de la entrevista.

19 E:	De acuerdo con tu definición, utilizando a los naturales, los enteros son…
20 D9S:	Una extensión de los naturales.
21 E:	¿Qué te parece si redefinimos a los entero en función de los naturales? Decimos: Los naturales son o contienen a los…
22 D9S:	Naturales, los negativos…
23 E:	¿Cómo le decimos a los negativos en función de los naturales?, sus….
24 D9S:	Simétricos.
25 E:	Y…
26 D9S:	El cero.
27 E:	Entonces los enteros son…
28 D9S:	Los naturales, sus simétricos y el cero

Observación y análisis del investigador del fragmento B de la entrevista.

Esta definición es sencilla pero precisa, es la que en este trabajo se promueve para ser utilizada en la enseñanza en lugar de “que los enteros son los positivos, negativos y cero”. . [Podría después pasar a otra definición como la de Los Z+, los Z- y el cero]

Fragmento C de la entrevista.

29 E:	¿Qué te parece esa definición?
30 D9S:	Bien, porque yo les enseño (a sus alumnos) que a la recta, la doblo y sobre el eje de simetría está el cero, entonces cada número tiene su simétrico.
31 E:	¿Cómo se define? (El simétrico).
32 D9S:	La misma cantidad, pero con su signo contrario. [Concepto impreciso]

33 E: Matemáticamente ¿cómo se define al simétrico?

34 D9S: Tengo una idea, es… menos a. [Escribe $-a$]

35 E: Utilizando estas dos formas [la semántica y la sintáctica] si tú dices a, entonces, su simétrico es…

36 D9S: Menos a [escribe $-a$]

37 E: ¿Qué pasa cuando a vale cero?

38 D9S: No tiene simétrico, es la misma cantidad.

39 E: ¿Si es la misma cantidad, el cero tiene simétrico o no tiene simétrico?

40 D9S: No, porque es el mismo número.

41 E: Pero, aplicando otra definición [la sintáctica: $-(a) = -a$] El simétrico de un número a es…

42 D9S: Menos a [escribe $-a$]

43 E: Entonces menos cero es igual a [Escribe el investigador $-(0) =$]

44 D9S: Cero. [D9S empata la idea sintáctica con la semántica]

45 D9S: Entonces el simétrico de cero es cero porque es el mismo número en el eje de simetría y es el mismo punto [Se ve la necesidad de conceptualizar al cero como punto y no como segmento]

46 E: Cuando ya tienes a los enteros en la RN, y los defines como los naturales, sus simétricos y el cero ¿Dónde quedan los fraccionarios o decimales (racionales)?, Por ejemplo, el número $-1/2$ es un entero?

47 D9S: No.

Observación y análisis del investigador del fragmento B de la entrevista.

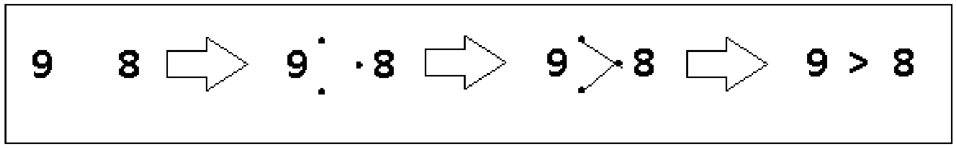
La vía para enseñar a los enteros, es a través de los naturales, para hacer la extensión de ***N a Z.*** Por lo tanto se debe conocer bien las propiedades de los naturales, las cuales deben hacerse extensivas a la de los enteros.

Fragmento C de la entrevista.

48 E: ¿Cómo haces las relaciones de orden en los enteros? (En la enseñanza)

49 D9S: Compara quién es mayor, el símbolo se forma con tres puntos (el de mayor o menor que)… [La docente explica que entre el 9 y el 8, como es

mayor el nueve, se le colocan dos puntos y al 8 un punto como se indica en el diagrama de abajo, después con esos tres puntos se forma el signo del mayor que, en este caso y por lo tanto dice que 9 es mayor que 8]



…es complicado porque puedo leerlo de izquierda a derecha o de derecha a izquierda.

50 E: ¿Los niños conocen estos símbolos de mayor que, menor que e igual que?

51 D9S: Si, pero ¿qué crees?... hay mucha confusión para los niños, si yo comparo 9 con 8, al 9 le doy dos puntos y al 8 un punto. [Con los puntos forma el símbolo del mayor o menor que según corresponda] Si lo leo de aquí para acá (lectura de izquierda a derecha) lo leo, el nueve es más grande que el ocho.[Escribe 9>8] y si lo leo de aquí para acá (lectura de derecha a izquierda) El ocho es menor que el nueve…[Señala nuevamente la relación 9>8 pero señala de derecha a izquierda] Ahí está el conflicto en que depende cómo lo leas.

52 E: Y si lo ponemos de esta forma [El investigador escribe 8___ 9], el ocho a la izquierda y el 9 a la derecha ¿cómo lo leerías?

53 D9S: También lo hago, entonces ellos qué hacen, lo generan [Escribe 8<9], lo leen, 8 menor que 9 ó 9 mayor que ocho. Lo importante es que lo lean de izquierda a derecha y de derecha a izquierda para que formen el símbolo (ya que) el lenguaje es ambiguo.

54 E: Cuando los niños llegan a primero de secundaria ¿ya saben leer estas relaciones?

55 D9S: Algunos sí, algunos todavía tienen la confusión.

56 E: Aquí estás diciendo que hay (un) conflicto en los números naturales para identificar las relaciones de orden, y (si) tú quieres enseñar las relaciones de orden en los enteros, ¿qué deberían saber primero? (los niños)

57 D9S: …conocer las relaciones de orden en los naturales. Antes de pasar a los enteros, empiezo con ¿quién es mayor, el cero o el uno? El uno es mayor porque está a la derecha del cero… entonces ya saben que todo número a la derecha es mayor que el otro, entonces les digo, 9 es mayor que 8 porque está a la derecha. Ahora con los negativos ¿quién es mayor cero o menos uno? Y les digo que cero porque está a la derecha.

58 E: Qué le dices a un niño que te pregunte ¿por qué el que está a la derecha es mayor?

59 D9S: Porque tiene más unidades.

60 E: ¿Cómo sería? ¿Por qué el dos es mayor que uno?

61 D9S: Porque es mayor la distancia que hay del cero al dos que del cero al uno.

Observación y análisis del investigador del fragmento C de la entrevista.

Coincide la estrategia de comparación de la docente D9S con la del docente D1S de la etapa de observación, porque se recurre al cero para comparar dos números, no lo hacen de manera directa entre dos números.

Fragmento D de la entrevista.

62 E: Entonces recurres al concepto de la distancia que hay del número al cero, y ¿no podrías usar una estrategia aditiva para explicar el por qué?

63 D9S: Sí, (podría) con la suma de 1+1 =2. Les digo ¿quién es mayor menos tres o menos dos? [Escribe -3 -2] Es mayor el menos dos porque está a la derecha (en la RN) [no responde a la estrategia aditiva y se mantiene en ese momento en uno de los dos argumentos en su enseñanza 1) El mayor está a la derecha, 2) El mayor tiene mayor distancia al cero]

64 E: ¿Qué te parece preguntar, qué diferencia hay entre 1 al 2?

65 D9S: Una unidad.

66 E: En términos de las unidades, ¿por qué es mayor el dos que el uno?

67 D9S: Porque el dos es mayor que el uno por una unidad.

68 E: En los negativos ¿por qué el menos dos es mayor que el menos tres?

69 D9S: Porque está a la derecha.

70 E: Pero qué pasa con las distancias, éste (-3) tiene mayor distancia que éste (-2) [Con respecto al cero] entonces aquí puede haber una confusión. [Porque en los naturales el que tiene mayor distancia del cero es mayor y esto no aplica con los negativos]

71 D9S: Lo que hacemos ahí es que va aumentando la distancia negativa, entre más negatividad más pequeño es el número [surge una concepción particular de la docente], sacamos ahí conclusiones...El número mayor es el que está a la derecha. En los números negativos es más pequeño el que está a la izquierda. Cualquier número positivo es mayor que cero. Cualquier número negativo es menor que cero.

Observación y análisis del investigador del fragmento D de la entrevista.

La docente comienza a generar reglas que surgen a partir de un análisis que hace junto con sus alumnos. Cuando el entrevistador pregunta cuál es mayor, entre menos tres y menos dos, resulta que el menos tres tiene mayor distancia hacia el origen, entonces ya no aplica la regla de los positivos, en consecuencia, se crean dos reglas, una para los positivos y otra para los negativos, este aspecto obstaculiza la extensión de N a Z, porque para hacerlo se tendrían que utilizar las propiedades de los naturales haciéndolas extensivas a los enteros. El autor de la presente tesis, ya ha hecho la observación de que antes de entrar a las relaciones de orden en Z se debe recuperar las relaciones de orden en N, observación hecha en el análisis de la observación de la enseñanza del docente D1S, en el lenguaje, "más pequeño" en lugar del menor que, obstaculiza la extensión de $\boldsymbol{N}$ a $\boldsymbol{Z}$.

Fragmento E de la entrevista.

72 D9S: Cuando uso lo de la "derecha", los niños no se equivocan.

73 E: Podrías usar el concepto del valor absoluto.

74 D9S: ¿Qué crees? Sí les digo qué es el valor absoluto, pero no lo utilizo en el lenguaje y creo que eso quita un conflicto para mí… ellos saben que el valor absoluto de cualquier cantidad es positiva, independientemente del signo, pero cuando empiezas en la suma… el valor absoluto… hay… yo siento que es más confuso, yo le digo el número que tiene más unidad, independientemente de que sea positivo o negativo. Hay un número que tienen más unidades que otro, ¿quién tiene más unidades negativas?

75 E: (Si) el menos dos es igual a menos tres más uno. [Escribe el investigador:]

$$-2 = -3 + 1$$

¿Por qué el menos dos es mayor que el menos tres?

76 D9S: Porque tiene una unidad más.

77 E: Esto es un porqué, es una verdadera razón.

Observación y análisis del investigador del fragmento E de la entrevista.

Se trabajó con la entrevista didáctica para que la docente pueda explicar por qué un número entero es mayor que otro, no por estar a la derecha, ni por tener menor o mayor distancia con respecto al cero o por que los negativos entre más negatividad tienen son menores, aunque son reglas válidas desde la operatividad, éstas se pueden complementar y significar conceptualmente con el argumento aditivo.

Fragmento F de la entrevista.

78 E: ¿Cómo enseñas la suma de un (entero) positivo y un negativo?

79 D9S: Con fichas (de dos colores), también con los protones y electrones. Por ejemplo coloquen 3 electrones y 2 protones y entonces digo ¿qué pasa? Como vieron que la unión de un protón y un electrón da un neutrón y saben que el neutrón da un cero y con eso los alumnos dicen esto da menos uno, porque les queda un electrón. Después de hacer varias operaciones, ellos ven que pasa, son signos diferentes… al número que tiene más unidades le restamos al que tiene menos unidades, entonces va a quedar el signo del que tenga más unidades.

80 E: Esa regla en los libros de texto es explicada con el valor absoluto.

81 D9S: Pero yo me como la definición del valor absoluto porque volvemos a la misma dificultad. El punto es decir ¿quién tiene más unidades?

82 E: Cuando hacemos la operación, ¿cómo la explicas?

83 D9S: [Escribe 4-5=] El cuatro tiene menos unidades, aunque es mayor, el número que tiene más unidades es el cinco.

84 E: ¿Más unidades… negativas?

85 D9S: Sí, finalmente cuando digo más unidades negativas estoy usando el valor absoluto sin decir que lo estoy usando. A cinco le restas cuatro, ¿cuánto les da?, uno, como el cinco es negativo, es menos uno. Así lo he trabajado mucho tiempo y es como me ha resultado.

86 E: Crees que después de tu instrucción, ¿podrías incluir el concepto del valor absoluto?

87 D9S: A lo mejor, nunca lo he hecho pero podría funcionar. Porque a veces tanta formalidad lo hace más aburrido, tedioso y confuso. Yo creo que en la secundaria todavía no es necesario darle tanta formalidad, ya deber ser en la prepa.

Observación y análisis del investigador del fragmento F de la entrevista.

La docente está apelando a esta concepción para explicar la neutralidad de una cantidad positiva y una cantidad negativa. Aunque parece simple la idea, se puede incurrir en un error de tipo conceptual en la química o en la física, ya que las reacciones atómicas, nucleares o de partículas fundamentales, son mucho más complicadas que solo la unión de un protón más un electrón para formar un neutrón, o en su forma reversible, la descomposición de un neutrón en un protón y un electrón. Este tipo de reacciones podrían ocurrir en el sol, las estrellas y en las supernovas, o probablemente en un colisionador de partículas. No es totalmente cierto que un protón más un electrón dan como resultado un neutrón solamente, porque para que se cumpla la conservación de la materia, se arrojan otro tipo de partículas. Este hecho se ha comentado con la docente, que aunque es un contexto del que se puede obtener la matematización, se debe tener cuidado de no incurrir en aspectos que puedan dar pie a falsos conceptos. Para ello se le ha propuesto en un futuro cercano trabajar en el mismo contexto de los protones y electrones pero ahora en la química, a través de las cargas eléctricas de los átomos, en las reacciones de óxido-reducción, donde una carga positiva se representa con números enteros positivos, una carga negativa con enteros negativos y una carga neutra con el cero, como se explica en la sección 1.6.3 de esta tesis, y es utilizada en la enseñanza por la docente D13E.

Por otro lado, la docente D9S, considera que se debe trabajar más en los contextos que en la formalización, el uso del valor absoluto puede adicionar una complejidad extra, aunque parece que su concepción de las unidades positivas y negativas están en el mismo nivel conceptual que el del valor absoluto y ha considerado que podría incluir este concepto formal en la enseñanza después de su instrucción habitual.

Fragmento G de la entrevista.

88 E: ¿Cómo enseñas a resolver esta operación? [Escribe]

$$-3+2-5+3=$$

89 D9S: Menos tres, más dos, es menos uno y seguimos así, pero… entonces una manera más fácil es juntar a los que tienen igual signo, entonces se suman, los que tienen signos iguales y como son diferentes (las semi-sumas) se restan, [escribe]

$$-3+2-5+3=\ -8+5=\ \ -3$$

…a 8 le quito 5 y es negativo. [No indica D9S si está resolviendo una suma o una resta]

90 E: Y en ésta [Escribe el investigador]

$$(+5)\ +\ (-2)\ +\ (-6)\ +\ (+8)\ =$$

91 D9S: Esta es una suma más formal, a cinco le estoy agregando menos dos, aquí estoy usando el signo de dos maneras, como operación y como el signo de la cantidad, cuando trabajamos con las fichas, si hay un (signo de) más, todo lo que hay adentro (del paréntesis) queda como más y lo hacen directo: 5+8=13, menos ocho (resultado de sumar menos dos con -6) y esto me da menos cinco (-5). [Escribe la docente]

$$(+5) + (-2) + (-6) + (+8) = 13 - 8 = -5$$

[La docente dice que la operación -2-6 es una suma de dos negativos y es como interpreta el resultado de (-2) + (-6)]

Observación y análisis del investigador del fragmento G de la entrevista.

En esta operación considerada como la más difícil de conceptualizar y operar de acuerdo con los niveles de logro de Peled (1981), se confirma el hecho de que aunque se obtiene el resultado, no se aprecia el tipo de estructura aditiva utilizada, la docente identifica con la notación completa la estructura, cuando dice que se agregan, cantidades, pero cuando obtiene las sumas parciales, se aplican las reglas para la suma de enteros aunque se esté restando.

Fragmento H de la entrevista.

92 D9S: Pero también se dan cuenta que en (la operación) [escribe la operación de sustracción y la resuelve]:

(+3) – (-9) = -3 + 9= 6

Esto es el simétrico… les pedí que quitaran los nueve electrones y todos me dijeron (los alumnos) "¿cómo quito los nueve electrones?"… Y les dije, piénsenle y les digo ¿y si ponemos nueve ceros?.. ¿Pasa algo?, pues no porque son ceros, ahora qué, pues quitamos los nueve electrones y qué les queda, pues 6 protones… [Lo que la docente indica, representa un error conceptual reportado en Salinas, 2016.] Si es menos pasa a más y si es más pasa a menos…

93 E: Entonces tú enseñas el inverso aditivo para enseñar la sustracción.

94 D9S: Si, y les hice hincapié que es una resta de dos números negativos.

95 E: Estás poniendo énfasis en ¿qué (aspecto)?

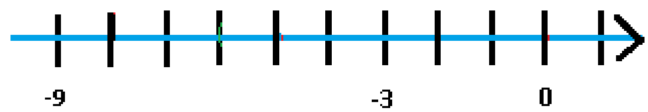
96 DE9S: En la estructura aditiva, resta…

Observación y análisis del investigador del fragmento H de la entrevista.

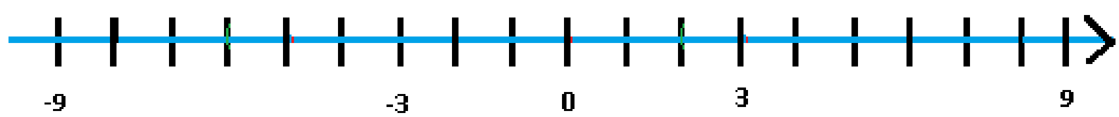
La docente puede conceptualizar a la sustracción mediante a su naturaleza como “quitar” (Gallardo, A. 1994-2002), y la utiliza en el modelo de equilibración de los protones y electrones, se le presenta el modelo chino y dice que es precisamente el que ocupa en sus fichas (positivas y negativas simbolizadas con el color) pero no sabía que así se llamaba.

Fragmento I de la entrevista.

97 E: En la RN vamos a localizar a ubicar a esos números [Se refiere a la operación de $-3 - (-9)$ y dibuja la RN y ubica a -3 y a -9]



…y vamos a poner (ubicar) sus simétricos [los ubica en la RN anterior]

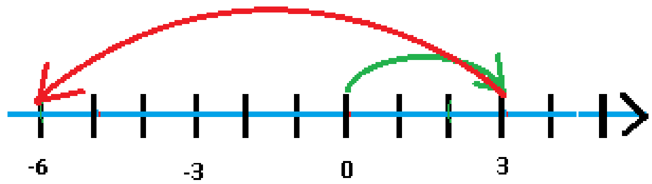


… en la operación tres menos nueve, [Escribe 3 -9], hay quienes dicen [Como lo expresó la docente D2S] es “*tres con nueve negativo*”, estamos en… los naturales pero ya vimos que la sustracción de dos naturales no necesariamente es un natural, cuando…

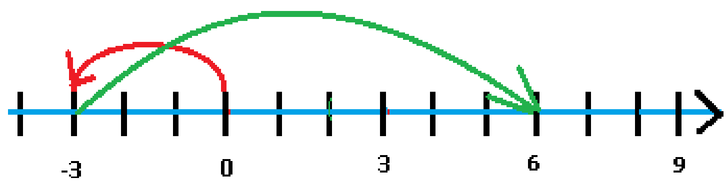
98 D9S: …el sustraendo es mayor que el minuendo.

99 E: Esta es la forma de entrar a los números negativos. [Una de las formas, a partir de los naturales] ¿Cómo hacemos en estas operaciones para ejemplificarlas en la RN?

100 D9S: Avanza 3, [ubica al minuendo][Va a resolver la operación $3 - 9$ en la RN] como es menos, retrocede nueve [se refiere al sustraendo] [dibuja la RN con sus movimientos y encuentra el resultado (-6)]



101 D9S: [En la operación $(-3) - (-9) =$] Aquí retrocedo 3 [ubica al tres negativo como el minuendo] y luego el simétrico de menos nueve [Se refiere a aplicar el inverso aditivo al nueve negativo] entonces va a avanzar 9.



… y obtengo el 6.

102 E: ¿Has enseñado así?

103 D9S: La sustracción, no. En la recta, no.

104 E: ¿Por qué para representar a tres negativo tienes que partir del cero y no te ubicas directamente en el punto menos tres?

105 D9S: Porque quiero que vean que menos tres (-3) es retroceder.

106 E: Entonces asocias el avance con el signo más (+) y el retroceso con el signo menos (-)?

107 D9S: Sí, así es, y hago cambio de signo cuando se aplica el simétrico, entonces en lugar de avanzar retrocede o en lugar de retroceder avanza [Esto no lo había utilizado y acaba de asociar el simétrico con el cambio de dirección de los segmentos dirigidos]

108 E: El comprobar las operaciones es usar el inverso (la operación), ahí es cuando decimos que el inverso de la adición es la sustracción, 9 menos tres es 6 porque 6 más tres es nueve: [Escribe la operación en forma vertical]

$$\begin{array}{r} 9 \\ -\ 3 \\ \hline 6 \end{array}$$

109 D9S: A nueve le estoy quitando tres, de hecho es lo que yo usé para resolver la operación.

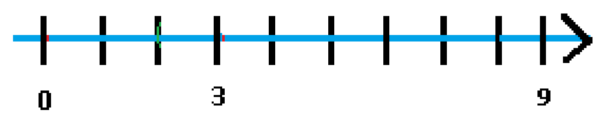
110 E: Pero también esta (otra forma) [Escribe la operación vertical]

$$\begin{array}{r} 9 \\ -\ \underline{3} \end{array}$$

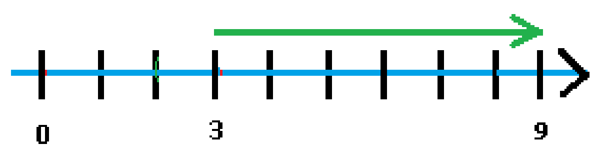
¿Cuánto le falta a tres para …

111 D9S: …llegar a nueve... seis.

112 E: …lo podemos ver en la RN [dibuja la RN ubicando a 9 y a tres] ¿Cuánto le falta a tres para llegar a nueve?

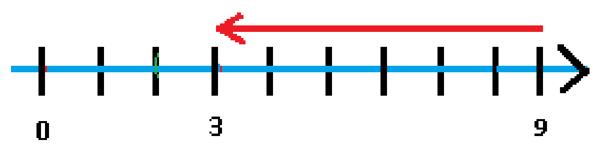


113 D9S: Seis. [Traza el segmento de 6 unidades]



114 E: …como va para allá (a la derecha) es positivo. Y si…al revés [Escribe 3 – 9] ¿Cuánto le falta al nueve para llegar a tres?

115 D3S: También 6 pero ahora negativo porque va a la izquierda.



116 E: Por ejemplo [Escribe la operación]

$$\begin{array}{r} 18 \\ -\ \underline{7} \end{array}$$

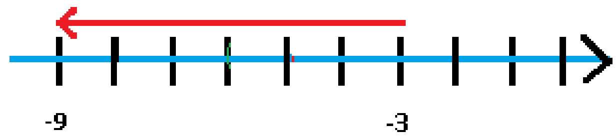
117 D9S: ¿Cuánto le falta a 7 para llegar a 18? Sería 11 positivo.

118 E: …cuando escribo nueve negativo menos tres negativo [Escribe la operación -9 – (-3) = En forma vertical]

$$\begin{array}{r} -9 \\ - \;\; -3 \\ \hline \end{array}$$

¿Cuánto le falta a menos tres para llegar al menos nueve?

119 D9S: ¿Cómo lo hago? [dibuja la RN y ubica a los números en cuestión] Es menos seis.



120 E: …aplicar el inverso aditivo, (para) pasar de (la expresión de) nueve negativo menos tres negativo a (la expresión) nueve negativo más tres igual a seis [Escribe]

$$(-9) - (-3) = -9 + 3 = -6$$

…estoy cambiando la estructura, de resta a suma.

121 E: Aquí, [Señala la operación realizada por la D9S] ¿Estoy cambiando la estructura?

$$\begin{array}{r} -9 \\ - \;\; -3 \\ \hline -6 \end{array}$$

122 D9S: No.

123 E: Podemos enseñar a los niños a hacer verdaderas sustracciones [En lugar de enseñar a la resta como una suma sintácticamente equivalente]

124 D9S: Esta forma de ver a la resta como completar es muy clara. Yo nunca había visto a la sustracción como esto. Así se debería enseñar la sustracción, es bastante clara.

125 E: A ver, cómo haces esta operación, 16 menos 9 [Escribe en forma vertical]

$$\begin{array}{r} 16 \\ - \;\; 9 \\ \hline 7 \end{array}$$

126 D9S: …son 7

127 E:	Porque…
128 D9S:	7 más 9 es 16.
129 E:	Ahora menos 16 *menos* menos 9 es…[Escribe el entrevistador en forma vertical y horizontal]

$$\begin{array}{r} -16 \\ -\;-9 \\ \hline \end{array} \qquad -16-(-9)=$$

130 D9S:	¿Cuánto le falta a menos 9 para llegar a menos 16?, menos siete. [Escribe el resultado y lo resuelve con la RN mental]

$$\begin{array}{r} -16 \\ -\;-9 \\ \hline -7 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad -16-(-9)=-7$$

Observación y análisis del investigador del fragmento I de la entrevista.

La docente no tenía la conceptualización de la sustracción como completar o como comparar dos números, después de la entrevista piensa que esta, es una manera útil y significativa conceptualmente para realizar esta operación, y es además un complemento de la estrategia del inverso aditivo. La docente durante la entrevista logra obtener la razón de por qué cuando se resta un número negativo se tiene que cambiar de dirección el segmento dirigido en la recta numérica, (por aplicar el simétrico) y no sólo por aplicar una regla que dice que así debe hacerse sin ningún argumento que lo acompañe.

Fragmento J de la entrevista.

131 E:	Los problemas.
132 D9S:	El detalle, es la interpretación.
133 E:	Si un niño resuelve un problema utilizando el inverso aditivo, puede interpretar el resultado.
134 D9S:	Primero debe comprenderlo.
135 E:	¿Y después?

136 D9S: Matematizarlo.

137 E: Ejemplo, hay un helicóptero a 30 m S.N.M. y un submarino a 30 m B.N.M., ¿Cuántos metros tiene que subir la carga desde el submarino para llegar al helicóptero?

138 D9S: Tiene que subir 30 metros.

139 E: Vamos a poner el *sistema de referencia*

140 D9S: Es que ese es el detalle, eso es lo que cuenta, el esquema de referencia.

141 E: ¿Cómo calculas una distancia en geometría analítica?

142 D9S: Distancia final menos distancia inicial [Se refiere a las posiciones]

143 E: Entonces sería…

144 D3S: 30 menos -30 igual a… 30 más 30 igual a 60. [Escribe 30- (-30) =60]. Porque si lo planteo al revés cambia la referencia, sería -30 menos 30 igual a -60. [Escribe -30 - (30)= -30 - 30= -60] Cambia el signo y ahí veo la complicación. [Falta decir que si es 60, la carga sube y si es -60 la carga baja, iría del helicóptero hacia el submarino]

145 E: Se puede resolver el problema utilizando los naturales.

146 D9S: Sí, pero entra un conflicto, ¿Cuál es el concepto de distancia?

147 E: Te acuerdas… de física, ¿Qué fue lo correcto, hablar de distancias o de desplazamientos y posiciones?

148 D9S: Desplazamientos y posiciones.

149 E: Cuando puedo resolver estos problemas sin recurrir al número negativo, yo le voy a llamar que estoy usando a los naturales de forma relativa, o naturales relativos (de González-Marí, 1995).

150 E: Si digo 30 m de profundidad, estoy usando al número relativo, pero si digo -30 m, estoy usando el número negativo de acuerdo con mi sistema de referencia.

151 E: ¿Pero, qué pasa con los problemas de caída libre o de tiro parabólico, te acuerdas?

152 D9S: Yo creo que sí, (en los problemas escolares) se pueden usar los naturales (relativos) pero, por la posición, el sistema de referencia, fue necesario usar al número negativo formal para resolver problemas de la cinemática.

Observación y análisis del investigador del fragmento J de la entrevista.

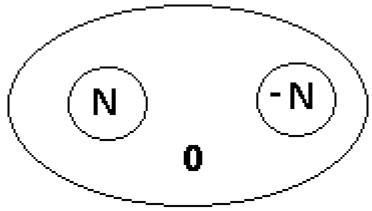
La mayoría de los problemas que se enseñan en la secundaria recurren a contextos de números relativos, en lugar de números negativos. Cuando se trata que usen estos números, los contextos quedan forzados, no así en los problemas que involucran conceptos de las ciencias, ricos en significados de la negatividad, como se indica en la secciones 1.6.3 (Los enteros en la Química) y 1.6.4 (Los negativos en la Física).

5.4.2.3 Aspectos encontrados en la entrevista del docente D10S

A continuación se muestran sólo algunos fragmentos de la entrevista realizada al docente D10S. Se exponen aspectos que no habían sido contemplados con los otros docentes, en especial se indaga sobre las representaciones formales y sobre el uso de las operaciones con el cero.

Fragmento A de la entrevista.

1 E:	Dijiste conjuntos…[El docente habla de que tanto los naturales como los enteros son un conjunto de números]
2 E:	¿Cómo defines a los enteros? [Recurriendo a los conjuntos]
3 D10S:	Como un conjunto abeliano…con respecto a la suma.
4 E:	¿Utilizas un símbolo para los enteros?
5 D10S:	La letra zeta [Escribe ***Z***]
6 E:	Si ***Z*** es un conjunto, ¿podemos utilizar la notación de conjuntos?
7 D10S:	Sí, el conjunto de los enteros son los naturales, el neutro y los inversos (simétricos) [Escribe D10S]
	Z = { ***N***, 0, -***N***}
8 E:	¿Puedes utilizar los diagramas de Venn Euler para representar a los enteros?
9 D10S:	Sí, [Dibuja el diagrama de Venn Euler para los enteros]



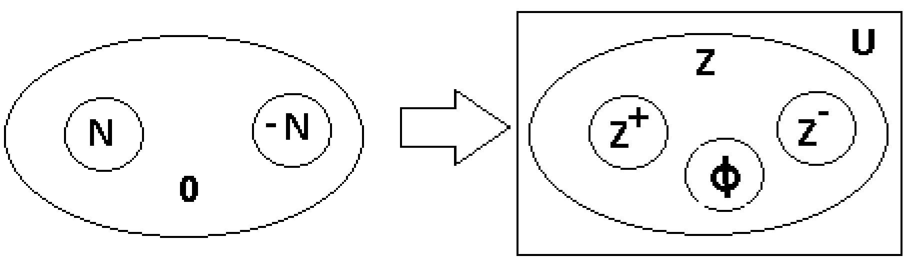
10 E: ¿Has utilizado a zeta más y zeta menos?

11 D10S: Sí, [Escribe el docente] zeta más, el neutro y zeta menos.

Z= { Z+, 0, Z-}

Observación y análisis del investigador del fragmento A de la entrevista.

En este extracto de la entrevista realizada al docente D10S, se analiza la forma en que se utiliza el lenguaje matemático, la simbolización y las diferentes representaciones. Aparece la notación de conjuntos y cómo se utilizan ***N, Z, Z+, Z-*** y el cero, que aparece como número y no como conjunto, por lo que se propone las siguientes estructuras de conjuntos: ***Z*** = { ***N***, Φ, -***N***}, ***Z***= { ***Z***+, {0}, ***Z***-} para ser coherente con la notación de conjuntos, incluir al cero como el conjunto vacío $\Phi = \{0\}$. Algo similar ocurre con la representación con el diagrama de Venn Euler.



Fragmento B de la entrevista.

12 E: ¿Has notado alguna dificultad en las operaciones con el cero? Sobre todo en la adición y sustracción de enteros?

13 D10S: Sí, veo dificultades, en la multiplicación, la división y las potencias, sobre todo, más que en la suma y la resta.

14 E: Cuando pones a a más cero, [Escribe]

$$a + 0 =$$

…¿tienen (los alumnos) problemas en dar la respuesta?

15 D10S: Yo no lo pongo así, pongo 9 más cero, igual a 9 [Escribe la operación]

$$9 + 0 = 9$$

16 E: Sería para ti, a más cero igual a a, con a elemento de los enteros [Enseguida el investigador escribe el enunciado anterior en lenguaje algebraico]

$$a + 0 = a \text{ con } a \epsilon \boldsymbol{Z}.$$

…Sería interesante indagar en las concepciones de los niños, al realizar operaciones con el cero, cero más cinco, cinco más cero, y las sustracciones con el cero, cero menos cinco, cinco menos cero, etc. [Escribe el investigador las operaciones]

$$5 + 0 = \qquad 0 + 5 = \qquad 0 - 5 = \qquad 5 - 0 =$$

17 D10S: Es que la verdad no había puesto atención a las operaciones con el cero. He cambiado mi pensamiento y ahora sería algo que tomaría en cuenta.

Observación y análisis del investigador del fragmento B de la entrevista.

Se le pregunta al entrevistado acerca de las operaciones de los enteros con el cero, porque en la enseñanza son muy poco utilizadas, y efectivamente coincide que no hay un análisis de las operaciones de adición y sustracción entre el cero, los enteros positivos y negativos. El autor de la presente tesis, ante esta observación ha presentado las propiedades del cero en la sección 1.5.2 con las definiciones de multiplicación y adición incluyendo al cero y en la sección 1.5.6 con la serie ampliada de los números naturales conteniendo al cero.

Fragmento C de la entrevista.

18 E: ¿Cómo dices (matemáticamente) que un número es positivo?

19 D10S: No sabría, deja lo pienso… el que tiene el signo positivo.

19 E: Y si digo, equis es positivo si…

20 D10S: equis es mayor que cero [Escribe en lenguaje algebraico]

$$x > 0$$

21 E: Ya utilizaste el lenguaje matemático. ¿Cómo puede ser x?

22 D10S: Positivo, negativo o cero.

23 E: ¿Cómo se llama esa propiedad?

24 D10S: Tricotomía. [Para x>y o x<y o x=y con y=0]

25 E: Vamos a pasar del lenguaje natural al lenguaje matemático, a la simbolización. ¿Quiénes son los positivos, negativos y el neutro?

26 D10S: [Escribe en lenguaje algebraico]

$$x > 0$$

$$x < 0 \qquad\qquad x \in Z$$

$$x = 0$$

Observación y análisis del investigador del fragmento C de la entrevista.

En esta sección se busca representar en la enseñanza de forma matemática a las relaciones de orden con el lenguaje algebraico, para que conviva la forma semántica “un entero positivo es aquél mayor que cero” ahora con la forma sintáctica “x es positivo si x > 0” y sobrepasar aquella idea de que los positivos están a la derecha en la recta.

Fragmento D de la entrevista.

27 E: ¿Qué le dices a un niño si te pregunta si los números negativos crecen a la izquierda?

28 D10S: Que crecen en valor absoluto.

29 E: Y si te dice que menos mil (-1000) es más grande que el 4?

30 D10S: Que es mayor en valor absoluto.

31 E: ¿Qué es el valor absoluto de un número a?

32 D10S: Si a es negativo entonces es el inverso (simétrico) de a

Si a es positivo entonces es a

…si a es cero, cero. [Escribe el docente en lenguaje algebraico la definición del valor absoluto]

$$|a| = a \quad si \quad a > 0$$

$$|a| = -a \quad si \quad a < 0$$

$$|a| = 0 \quad si \quad a = 0$$

Con $a \in \boldsymbol{Z}$

Observación y análisis del investigador del fragmento D de la entrevista.

En esta sección se indaga a través de la entrevista, la forma de arribar a los conceptos formales como el del valor absoluto, a través de una definición y a través de la sintaxis, para superar el estancamiento en la semántica cuando se dice "el valor absoluto es el número pero con signo positivo"

Fragmento E de la entrevista.

33 E: Vamos a los simétricos. ¿Cómo indicas el simétrico de un número? (matemáticamente).

34 D10S: Es el número que existe a la misma distancia del cero pero del lado contrario.

35 E: Si te pongo una tabla con números, ¿cuáles son sus simétricos? [El investigador escribe una tabla para ser completada por el docente D10S]

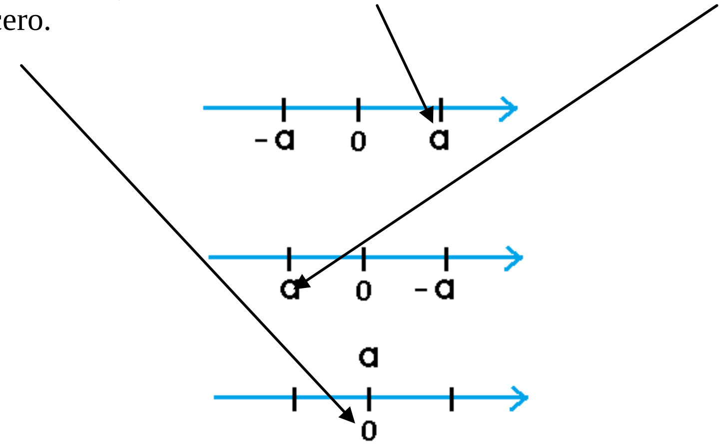
Número	Simétrico
-5	
+5	
0	
a	
$-a$	

36 D10S: [El docente investigado llena la tabla en silencio]

Número	Simétrico
-5	5
+5	-5
0	0
a	$-a$
$-a$	$-(-a)$

37 E: Si te digo que me coloques esta situación en la RN para que ubiques a a, $menos\ a$ y sus simétricos…

38 D10S Aquí estoy asumiendo que a es positivo, a menor que cero y a igual a cero.



Observación y análisis del investigador del fragmento E de la entrevista.

En este extracto de la entrevista, se indaga en la concepción formal del simétrico, para poder definirlo y determinarlo a través de su sintaxis y superar el sentido intermedio del que el simétrico “es el mismo número pero de signo opuesto”.

En general, en los extractos de la entrevista del docente D10S, se indagó en la importancia del lenguaje en la enseñanza, del natural al simbólico y a las diferentes representaciones, así como indagar en las propiedades del cero en las operaciones de adición y sustracción de enteros, el entrevistador anima al docente a utilizar lenguaje algebraico en sus producciones, y a incluir generalizaciones que tendrán impacto en la construcción del lenguaje algebraico y en la operatividad en álgebra.

Capítulo VI. Conclusiones, reflexiones y perspectivas

6.1 Conclusiones de la investigación

6.1.1 Respuestas de las preguntas de investigación

En la sección del planteamiento del problema aparecen tres preguntas de investigación, las cuales son respondidas a continuación de acuerdo al análisis realizado en este estudio.

a) ***¿Cuáles son las características de la enseñanza de los enteros observadas en docentes de educación secundaria?***

A continuación se enuncian aspectos encontrados en la investigación que definen las características de la enseñanza.

- La enseñanza de los enteros en primer grado de secundaria en México, está caracterizada por el uso de los conceptos de número natural, simetría, recta numérica, el simétrico y el valor absoluto, las relaciones de orden, la operatividad de adición y sustracción, escasamente se utilizan problemas, los cuales mayormente se resuelven con números naturales asociados a un sistema de referencia implícito (Número relativo).
- La enseñanza de los enteros desde el punto de vista de la extensión del conjunto numérico de ***N*** hacia el dominio de ***Z*** no ocurre en una sola dirección, ya que a través de la observación, se ha indagado que se enseña a los enteros a la par de los Naturales, ya que los alumnos no tienen aún dominado a ***N***.
- Los profesores en la enseñanza de este contenido, proponen problemas que pueden ser resueltos con números relativos, incluso pueden resolverse con sumas y restas de números naturales.
- En cuestiones del orden, se encontró en varios profesores el mismo uso para la comparación de enteros: los docentes piden a sus alumnos referir ambos números al cero, para poder comparar sus distancias, lo que genera dos reglas distintas para determinar el orden, "*el número que tenga mayor distancia con respecto al cero es*

mayor" pero "*en el caso de los negativos no es así, será mayor el que tenga menor distancia al cero*".

- Son muy pocos los docentes que dominan el contenido matemático en cuestión, que tienen el conocimiento formal de los enteros, y que construyen la enseñanza a través de la abstracción, que además signifiquen a las operaciones y principalmente que enseñen a la sustracción a través del inverso aditivo o con la triple naturaleza de la sustracción (Gallardo, 1994, 2002). Además, pocos docentes resuelven problemas con el uso del sistema de referencia explícito y el número negativo formal.
- Algunos docentes enseñan la regla del los signos de la multiplicación para aplicarla en las estructuras aditivas. Para eliminar los paréntesis aplican la misma ley de los signos, "*cuando hay dos signos juntos, si son iguales da positivo y si son diferentes da negativo*"
- En la enseñanza, no se hace distinción entre el número entero visto como punto en situaciones discretas y como segmento dirigido en situaciones continuas.
- Las concepciones del cero encontradas en este estudio están asociadas a las siguientes palabras: Anulan, equilibran, neutralizan, compensan, la nada. En cuanto al número negativo se encuentran las siguientes palabras asociadas al número negativo: contraposición, opuestos, contrarios, menos que la nada.
- El uso de reglas enseñadas por los profesores para resolver operaciones y problemas aditivos con los números enteros, es a través de lo que llamamos *método sintáctico-algorítmico*.
- Dentro del método sintáctico-algorítmico aparece la TC9, ya que los profesores utilizan la regla semántica sobre la regla sintáctica, orillando a los niños a cometer errores producidos por obstrucciones provenientes de la semántica sobre la sintaxis. Los estudiantes saben la regla semántica… pero no pueden decodificarla en un texto sintáctico correctamente
- Los docentes entrevistados, reconocen que existen problemas que se plantean en la física, los cuales pueden resolverse con números naturales, pero que existen otros problemas en los que es estrictamente necesario el uso del número negativo formal

para poder resolveros, lo que nos lleva a concluir que está presente la negatividad en los problemas de las ciencias experimentales a diferencia de los problemas escolares de secundaria, de ahí, la importancia de que los docentes conozcan y utilicen otros contextos.

- Los números negativos no parecen pertenecer a las situaciones de la vida cotidiana, pero sí existe una riqueza de significados dentro de las ciencias experimentales.
- En el trabajo con docentes, éstos llegan a significar a la adición como juntar o unir y a la sustracción como quitar, esto en el contexto de la química cuando representan cargas eléctricas asociadas a números enteros y llegan a comprender que sumar no es igual a restar cuando se utiliza el significado en este contexto y se añade o se quita una carga negativa (un electrón) al átomo con carga neutra, por ejemplo en la operación de quitar un electrón con carga -1, de un átomo con carga neutra (0), se utiliza la expresión: $0-(-1) = 1$ para formar un ión +1 (como en el caso de la formación de ión hidrógeno a partir del átomo de hidrógeno), a diferencia del caso en que se añade un protón a un átomo neutro para formar otro elemento con dicha carga inexistente, representada por la operación: $0 + 1 = 1$, la formación del ión Helio +1 a partir del átomo de hidrógeno por bombardeo de un protón, lo cual es improbable y constituye un error de tipo conceptual en la química y en la física de partículas. Este hecho es encontrado conjuntamente en Salinas, Gallardo y Mendoza (2015) y reportado en el artículo anexo.
- La adición es ampliamente explicada, a través del modelo de la recta numérica, del modelo sintáctico algorítmico (reglas para sumar) y de los contextos, sobre todo de los de haberes y deudas.
- La sustracción de enteros es brevemente explicada, y en algunos casos es nula, porque para sumar un entero positivo y uno negativo se aplica la regla de que se resten sus valores absolutos, entonces los niños e incluso los docentes creen que ya vieron la sustracción.
- Los docentes que llegan a enseñar la sustracción lo hacen a través del inverso de la suma o bien a través del inverso aditivo, sólo una docente utiliza la concepción como quitar, completar y comparar de Gallardo (1994-2002).

b) ***¿Cuáles son las dificultades, problemas y obstáculos didácticos surgidos en la enseñanza de los enteros?***

En la práctica docente se han observado y detectado del análisis del estudio empírico realizado, dificultades en la enseñanza de los enteros, específicamente en:

a) La enseñanza del número negativo desde su conceptualización.
b) La definición del entero desde una perspectiva intuitiva hacia una formal.
c) El orden en los números enteros.
d) Los conceptos de simétrico y de valor absoluto, utilizados en las definiciones de adición y sustracción de enteros.
e) Falta de flexibilidad de modelos de enseñanza para la adición y sustracción.
f) Dificultades en la enseñanza de la suma de un entero positivo y uno negativo.
g) La sustracción de enteros desde un punto de vista conceptual y operativo.
h) El uso de los números relativos en lugar de negativos en la resolución de problemas aditivos.

A partir de la observación directa de los docentes D1S, D2S y D3S, de la observación indirecta de los docentes D4I de internet, y del complemento y triangulación con las producciones de los docentes D5P, D6P, D7S, D8S, D9S y D10S y a partir del análisis de las transcripciones realizadas, a continuación se presentan algunos problemas y obstáculos didácticos surgidos.

Docentes D1S.

- Acusa una evidente transposición didáctica, pero en sus contenidos aparecen algunas imprecisiones en conceptos e imprecisiones en la operatividad, por lo que éste se encuentra en un SMS por debajo del que se esperaría en un docente ideal en la enseñanza de los enteros.

- El docente se comporta como un sujeto histórico, porque utiliza las mimas estrategias para sumar un positivo y un negativo que Kant (1763) en su "Ensayo para introducir las cantidades negativas en la filosofía".
- En la enseñanza se acusa una extensión incompleta del conjunto de los naturales al dominio de los enteros, porque se muestran niveles intermedios (Tendencia cognitiva No. 2) en la conceptualización y operatividad de los enteros.
- La enseñanza del docente utiliza los sentidos intermedios, lo que provocará usuarios del SMS (alumnos) con uso de niveles intermedios en la conceptualización y operatividad de los números enteros.
- En la enseñanza de D1S aparece la vía para extender N a Z+, cuando enseña la transformación de la sintaxis en el SMS-aritmético: 3+5 al SMS-aritmético-algebraico: (+3) + (+5) pero ésta se pierde por la tendencia cognitiva No. 3, del retorno a situaciones más concretas, es decir retorna a la sintaxis de la suma de naturales para explicar cómo se suman los "positivos".
- No existen diferentes recursos o estrategias de enseñanza, el docente pide a sus alumnos que se apeguen a su modelo de enseñanza, que son las reglas para ordenar, sumar y restar números enteros.
- Se muestra un rompimiento del *contrato didáctico*, porque los niños hacen preguntas y el docente no las responde, posiblemente porque éste presenta dificultades en el dominio del contenido y entonces acusa al niño o niña de no poner atención a las reglas que impone en su enseñanza.
- La enseñanza del Docente D1S ubica a los niños en un nivel de 2-3 Q (Nivel 2 a 3 en la dimensión cantidad) y 2-3 RN (nivel 2 a 3 en la dimensión Recta Numérica de Peled), ya que no llegan a dominar la suma de un positivo y un negativo de manera competente y no dominan la sustracción de enteros, incluso permanece la falta de reconocimiento de la estructura aditiva en los niños, de cuándo están sumando y cuándo están restando.

- Cuando el docente D1S utiliza la notación completa de Cid y Bolea (1997), muestra claramente la estructura aditiva y el carácter de los números, pero cuando no la utiliza confunde la sustracción con el número negativo.
- La enseñanza del Docente D1S, parece presentar dificultades en superar los problemas de ordenamiento de los enteros planteada por Bell (1986) debido posiblemente al uso de reglas para realizar la comparación, en lugar de utilizar las conceptualizaciones del número negativo, el valor absoluto y el simétrico.
- El docente D1S utiliza el concepto de *número relativo* y del *número signado* de Gallardo, en la conceptualización del número negativo en la recta numérica, lo que origina un estancamiento en el sentido intermedio como tendencia cognitiva.
- Para comparar dos números recurre a la distancia de los números al cero, con dos reglas, una para cada región de la recta numérica, provocando el estancamiento en los obstáculos epistemológicos No. 1 de Glaeser de la dificultad para unificar a la RN y el No. 1 de Hefendehl-Hebeker de no existir una recta uniforme porque estaría formada por dos semi-rectas con sentidos opuestos provocando diferentes reglas de acuerdo con la región.
- La enseñanza del Docente D1S podría acercarse al modelo de competencia formal si precisara sus concepciones y estrategias operativas, lo cual podría ocurrir a través de una entrevista didáctica planteada para un futuro.

Docente 2S.

- En su enseñanza utiliza sentidos intermedios para los conceptos de enteros, número positivo, número negativo, lo que provoca imprecisiones en sus argumentos.
- La enseñanza se basa más en expresiones semánticas que en expresiones sintácticas, no aparece la forma simbólica del simétrico ni del valor absoluto.

- En la adición de enteros, recurre a los naturales, para hacer la extensión a la suma de enteros de la forma vertical, pero no explicita la estructura aditiva, es decir suma verticalmente y no coloca el signo de la operación entre los dos números, lo que provoca que los niños no sepan si están sumando o restando. No supera este estadio porque no pasa a la forma horizontal, escasamente utiliza a los paréntesis.
- En su enseñanza no respeta las propiedades de la igualdad, pudiendo generar posibles errores operativos en los niños.
- La adición la enseña a través del método sintáctico-algorítmico, con reglas para la suma, las cuales le entrega impresas a los alumnos.
- Cuando enseña la suma, considera que está incluida la resta. No enseña la sustracción de enteros y no aparece en su enseñanza el caso de la sustracción de un negativo, por lo tanto no aparece la estrategia del inverso de la suma o del inverso aditivo.
- El contexto de temperatura lo utiliza adecuadamente, enseña cómo determinar un estado final a partir de un estado inicial y un cambio, pero presenta dificultades en las representaciones sintácticas correctas.
- Utiliza verdaderos problemas con números enteros como los de la línea de tiempo y de las temperaturas, aunque resuelve correctamente los problemas, la forma de operar presenta confusión entre la adición y sustracción
- Confunde el signo de la operación con el del número, así cuando resta un positivo dice que ahí hay un número negativo, en una cadena de sumas y restas, agrupa "positivos" y "negativos" para poder "sumarlos", al final los "resta" y coloca el signo del "más grande".
- La enseñanza de la docente se encuentra en los niveles 1 y 2 de Peled, tanto en la dimensión cantidad como en la dimensión recta numérica, porque sus alumnos pueden sumar cantidades del mismo tipo, ambas positivas o ambas negativas, ya sea en la RN o con la regla sintáctica, pero tienen dificultades en sumar cantidades opuestas y no llegan a realizar sustracciones de enteros.

Docente D3S.

Esta docente se comporta como sujeto ideal en este estudio.

c) ***¿Cuáles aspectos de la enseñanza ayudan u obstruyen la extensión del conjunto numérico de los naturales hacia el dominio de los enteros?***

A continuación se enuncian aquellos aspectos que pueden ayudar a realizar la extensión del conjunto numérico de los naturales al dominio de los enteros:

- El número relativo de González Marí, es un punto intermedio en la extensión de los Naturales a los Enteros, el cual debe ser superado prontamente (con las acciones debidas por los docentes) para arribar a la extensión del dominio Entero.
- El uso del *sistema de referencia* en la RN con el fin de resolver adecuadamente situaciones problemáticas de los enteros, puede ayudar a superar las diferencias Lógico-Estructurales del número relativo de González Marí (1995) hacia el número Entero o al número negativo. También se constituyen en uno de los aspectos que ayuda a extender del número natural al dominio y conceptualización del número negativo de Gallardo (1994). El autor de la presente tesis concluye que "El establecimiento del sistema de referencia, ayuda a eliminar el obstáculo del número relativo, convirtiendo a éste en número entero (positivo, neutro o negativo).
- El conocimiento del número natural y de sus propiedades por parte de los docentes les permitirá realizar la extensión del natural al dominio del entero, *así como se suma en los naturales se suma en los enteros, como se hace la sustracción en los naturales se puede hacer en los enteros*.
- *Uso del número negativo formal*. En problemas que representan altura, profundidad, avance, retroceso, haber y deber, se pueden transformar a los números relativos naturales en números negativos formales si se utiliza el sistema de referencia explícito. Así 5m sobre el nivel del mar se representa por +5m, 5° bajo cero por -5°C, 3 pasos hacia atrás por -3.

A continuación se enuncian aquellos aspectos encontrados en el estudio que pueden obstaculizar la extensión del conjunto numérico de los naturales al dominio de los enteros:

- Los profesores de primaria parecen evitar la emergencia del número negativo en la enseñanza habitual, éstos diseñan actividades para evitar que aparezca una discusión del caso de la sustracción de un número mayor de uno menor.
- La existencia de dos reglas distintas para determinar el orden en los enteros es un hecho clasificado como DLE1 (diferencia lógico-estructural 1 de González Marí) es una acción que no unifica a la recta numérica y crea una zona de inversión en la región negativa cuando al número se le considera *natural relativo* y constituyendo un obstáculo para la extensión del natural al dominio entero.
- Los docentes que enseñan los números relativos naturales, replicarán en sus estudiantes el uso de los relativos en lugar de los negativos y permanecerán en este estado con lo que difícilmente completarán la extensión del natural al dominio del entero, como lo indica Cid, se estancarán en los modelos concretos y no arribarán a los formales.
- Si los docentes no conocen las propiedades, como aquellas representadas por los axiomas: propiedad conmutativa, asociativa, distributiva, etc. o cómo se construye el número natural, el consecutivo y el antecesor, la existencia del número primo, de los múltiplos y divisores, etc., difícilmente podrán promover la extensión del natural al dominio del entero.
- Si el docente enseña con sentidos intermedios el alumno aprenderá los sentidos intermedios, aspecto que obstaculiza la extensión del conjunto N al dominio Z.
- Si los docentes enseñan a los números relativos en lugar de los negativos, formarán alumnos que utilicen números relativos en lugar de enteros.
- Es necesario e importante hablar del establecimiento de los sistemas de referencia explícitos como una aplicación o transferencia del modelo de la recta numérica hacia situaciones físicas.

Aspectos de la docente D3S que pueden ayudar a la extensión numérica.

En resumen, la enseñanza de la docente D3S es caracterizada por los siguientes aspectos, los cuales pueden ayudar a realizar la extensión de los naturales a los enteros y además de simetrizar las fracciones y los decimales.

1) Uso de la notación completa de Cid y Bolea.
2) Aplicación de la abstracción empírica y reflexiva.
3) El socio-constructivismo como paradigma educativo.
4) Promueve la identificación de la estructura aditiva, es decir el tipo de operación y el carácter positivo, negativo o neutro de los números involucrados.
5) Promueve la solución de la suma de positivos con negativos con estrategias diferentes a las reglas sintácticas que les fueron enseñadas a los niños en sus cursos previos provenientes de la enseñanza de D1S y D2S.
6) Utiliza las definiciones semánticas y sintácticas para el valor absoluto y para el simétrico.
7) Diferencia entre el simétrico: $-a$ de la sustracción de cero: $0 - a$ como ejemplos de la problemática epistemológica de los enteros.
8) Enseña la sustracción a través de las concepciones de “quitar”, “completar” y “comparar”, además de la de la matemática formal del inverso aditivo y de la regla: “al minuendo se le suma el opuesto del sustraendo”.
9) Utiliza el lenguaje matemático y lo promueve en sus alumnos, es decir va del lenguaje común al lenguaje matemático.
10) En el contexto de la temperatura, utiliza de manera implícita, dos estructuras funcionales de Bruno y Martinón (1997a), la de *Comparación* (e2 - e1 = c) y la de *Cambio* (e1 + v = e2). Utiliza el termómetro y las variaciones para modelar matemáticamente los cambios.

Aportaciones de la presente investigación para extender *N a Z*.

- El uso de la notación completa de Cid y Bolea (2007) permite identificar la estructura aditiva y el carácter de los número, además permite conceptualmente diferenciar el signo unario, del binario de Gallardo (1994), aspecto importante para dar significado a la operatividad y promover la extensión de ***N*** a ***Z*.**
- El establecimiento del sistema de referencia, en los problemas aditivos permite hacer la transición del número relativo al número entero. En las ciencias experimentales es necesario el uso del número negativo formal, donde hay riqueza de significados de la negatividad.
- Comenta Cid, (2000, 2001, 2007) que la enseñanza utiliza modelos concretos que parecen obstaculizar la extensión numérica hacia los enteros y hacia los demás conjuntos numéricos. Por ello, el docente debería ayudar al estudiante a superar dicho estancamiento para arribar al dominio algebraico junto con la construcción de los sistemas numéricos y utilizar a las matemáticas para la modelización del mundo físico y social.
- Como dice González-Marí y cols. en *Los Enteros*, mientras la enseñanza no esté fundamentada en los conocimientos más elementales sobre los 4 apartados:
    - *"El docente debe dominar el contenido matemático"*
    - *"Conocer los hechos históricos y los obstáculos contemplados en la comprensión y aceptación de los negativos"*
    - *"Conocer la epistemología de los enteros"*
    - *"Conocer las aplicaciones y utilidades de los enteros en contextos como las ciencias experimentales, constituye un apartado importante a considerar en el proceso de enseñanza-aprendizaje"*

  Difícilmente se conseguirá que los alumnos comprendan los números enteros, dominen sus operaciones y aplicaciones algebraicas y sepan manejarlos en contextos diferentes.

- Existe la propuesta didáctica para enseñar la suma de un entero positivo y un entero negativo a partir de lo que hemos denominado ***el método de descomposición-simetrización-anulació***n, para incluirlo en el modelo sintáctico-algorítmico y evitar la regla contradictoria de que "para sumar dos números opuestos hay que restarlos".

Aspectos que pueden ayudar a docentes como D1S, D2S a extender *N a Z*

-Pare evitar el error conceptual de que los positivos son los que están a la derecha y los negativos van a la izquierda, se sugiere:

a) Además de utilizar la recta convencional horizontal, indique que ésta cumple con un sistema de referencia en la que los positivos crecen a la derecha y por ello también se sugiere el uso de una sola punta de flecha en la derecha de la recta numérica.

b) De ser posible utilizar a la recta numérica vertical indicando con la punta de flecha el sentido del sistema de referencia positiva.

c) Utilizar la recta numérica inclinada con su sistema de referencia positivo como en el caso de su representación en el plano inclinado.

d) El contemplar a la RN y su sistema de referencia permite eliminar la definición incompleta de que "los positivos están a la derecha".

e) Se debería utilizar la semántica junto con la sintaxis para definir al número positivo, negativo y al neutro.

I) Un número entero positivo es aquel mayor que cero: a es positivo si $a > 0$.

II) Un número entero negativo es aquel que es menor que cero: a es negativo si $a < 0$.

III) Un número es neutro si es igual a cero: a es neutro si $a = 0$

IV) Se podría ir más allá si utiliza la propiedad de la tricotomía entre a y b con b=0 para explicar cómo pueden ser los números, positivos, negativos o neutro.

- Para precisar las relaciones de orden se sugiere que en la enseñanza se explique de manera sencilla por qué un número es mayor que otro, por ejemplo utilizar el argumento:

A) 5 es mayor que 2 porque, 5 es tres unidades mayor que 2, 5= (2)+3. (Argumento en la región positiva)

B) -2 es mayor que -5 porque, -2 es tres unidades mayor que -5, -2= -5+3.

(Argumento en la región negativa)

C) 2 es mayor que -3 porque, 2 es cinco unidades mayor que -3, 2= -3+5

D) Esto explica fácilmente por qué un número a la derecha de otro en la RN es mayor.

- Para evitar el estancamiento en los sentidos intermedios tendencia cognitiva, se propone utilizar la sintaxis correcta junto con la semántica correspondiente:

a) El simétrico de seis es seis negativo: $-(6) = -6$

b) Generalizar el simétrico a cualquier número entero: $-(a) = -a$

c) El valor absoluto de cinco negativo es cinco: |-5|= 5

d) El valor absoluto de a, es a, si a es positivo; es $-a$, si a es negativo y es cero, si a es cero:

$$|a| = a \quad si \quad a > 0$$

$$|a| = -a \quad si \quad a < 0$$

$$|a| = 0 \quad si \quad a = 0$$

Aspectos que pueden ayudar a docentes como D11S, D12S a extender *N a Z*

Los docentes D11S y D12S, aunque tienen muchos años de diferencia en la experiencia docente, su enseñanza es caracterizada como del *tipo relativa*, ya que al enseñar a resolver problemas con relativos, los niños utilizan estrategias con relativos para resolver problemas como los mostrados. Se aprecia claramente que este tipo de concepción del *número entero relativo*, provoca la diferencia lógico-estructural No. 3, de González-Marí (2005) de la discontinuidad de medidas, en las que no tiene sentido cruzar el cero, ya que la altura desde un punto "y_0" con $y_0 \neq 0$, puede disminuir hasta el nivel de referencia, 0 m, pero no tiene sentido continuar con la disminución porque se perdería la cualidad de "altura". De manera similar, un objeto colocado a "y_i" metros de profundidad, con $yi \neq 0$ m de profundidad, sólo puede ascender desde y_i hasta el nivel de referencia, 0 m, en el que no tiene sentido continuar con el ascenso porque se pierde la cualidad de "profundidad". En la enseñanza de los docentes D11S y D12S, faltaría incluir un problema en el que se tenga que cruzar el cero, es decir en el que deba hacerse explícito el sistema de referencia para ubicar números positivos y negativos con los que se tenga que operar, además se sugiere el uso de problemas auténticos de números enteros, los cuales se pueden encontrar en: Bruno, A. y Martinón, A. (1997a). Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos. *Educación Matemática*, 9 (1), 33-36.

En este estudio se observó la actuación de l8 docentes, en ellos se analizó cómo enseñan el contenido de los enteros, por lo que planteamos la existencia *perfiles de enseñanza*, debido muy probablemente al hecho de que tienen diferente formación académica y docente, además de un estilo propio de enseñanza.

No.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
Docente	**D-4S, D-3S, D-2S, D-1S, D0S**					**D1S, D2S, D3S, D4S**				**D5S, D6S, D7S, D8S, D9S, D10S**						**D11S, D12S, D13S**		
Etapa	**Exploración**					**Observación**				**Triangulación**						**Complementación**		

6.1.2 Perfiles de los docentes de acuerdo con su enseñanza

La caracterización de la enseñanza en los docentes, tanto los observados, como de la entrevistadora, así como de los entrevistados nos llevan a plantear posibles perfiles de docentes que enseñan a los enteros, construidos análogamente a los perfiles de estudiantes que plantea Gallardo (1994) en su tesis doctoral.

Perfil Docente A (Profesor sintáctico-algorítmico)

- El docente considera al sustraendo como negativo (esta situación aparece en el ensayo de Kant en1973): En la operación $5 - 6 = -1$ el docente considera al 5 como positivo, al 6 como negativo, con resultado negativo. El docente se comporta como un sujeto histórico.
- No enseña la distinción entre el signo unario y el binario y en ocasiones lo utiliza con el mismo sentido, para ilustrar dice que en la operación anterior, que en -1 el signo menos corresponde al número y en -6 que este número es negativo también siendo que el signo corresponde a la operación.
- Considera al conjunto Z como números naturales “signados”, lo cual obstaculiza a extender el dominio del natural al del entero. Como en la situación: “El -5 es como el 5 pero con signo menos”
- Tanto las definiciones, como las representaciones del simétrico y el valor absoluto son muy limitadas en caso de que utilice estos conceptos.
- Trabaja con reglas sintácticas sin sentido (formulismos vacíos) que permiten operar con números con signo. Plantea reglas para: 1) la suma de dos positivos, 2) la suma de dos negativos, 3) la suma de un positivo y un negativo; las cuales tienen que ser aprendidas a través de la memorización y no de la abstracción.
- En los ejercicios de adición de enteros no aparecen casos en que resulte cero como resultado, es decir no utiliza el caso de la adición de simétricos ni tampoco utiliza al cero como sumando, y continúa el niño sin poder resolver estas operaciones cuando está involucrado este número.

- No utiliza el lenguaje adecuado para expresar las relaciones de orden como el “mayor que”, cuando en su lenguaje utiliza “el más grande”, provocando ambigüedad en sus definiciones del orden.
- No enseña la sustracción de enteros, ya que cuando enseña la adición dice que en el caso de 5-8=-3 ó (5) + (-8) = -3 como son números uno positivo y el otro negativo, estos se restan para obtener el resultado, el cual tendrá el signo del más grande (en valor absoluto).
- La definición de Z es, también limitada, como ejemplo: “los números enteros son los positivos, los negativos y el cero”, o “Los positivos están a la derecha en la recta numérica y los negativos a la izquierda y el cero está en medio”.
- Recurre a la recta numérica para enseñar la adición pero no para la sustracción. Utiliza segmentos dirigidos a la derecha para sumar positivos y a la izquierda para sumar un negativo o bien los “saltos de la rana” o en el mejor de los casos segmentos de arco.
- Enseña con un solo modelo o método y se apega a su forma, no importa si el sujeto estudiante comprendió o no.
- No modela ni resuelve problemas de aplicación y no indaga en las situaciones en las que aparece el uso de los números negativos.
- No hace énfasis en ir construyendo del lenguaje natural al lenguaje formal, lo que obstaculiza, la extensión del natural al entero.
- Los alumnos pueden resolver la suma de dos positivos y de dos negativos pero tienen dificultades en determinar el resultado correcto cuando suman un positivo y un negativo.

Perfil Docente B (Profesor sintáctico-algorítmico-relativo)

- Puede presentar algunas características del perfil A.
- Representa situaciones con el uso de un sistema de referencia implícito del cual puede no ser consciente.
- Utiliza al número relativo natural como “opuesto semántico”.
- Resuelven y plantean problemas aditivos con números relativos naturales y no con el número negativo formal.

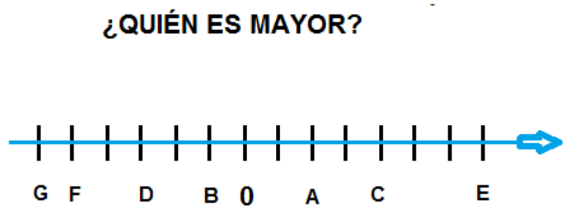
- Si el docente enseña el uso de los números relativos naturales, sus alumnos difícilmente extenderán el dominio de N a Z.
- En este perfil sus estudiantes adquieren una operatividad débil, ya que ellos pueden resolver la mayoría de operaciones pero después no recuerdan las reglas y recaen en errores.
- No llegan a aclarar y diferenciar las operaciones de suma y resta dentro de las estructuras aditivas.
- Aún los recursos de enseñanza son limitados, sólo utilizan a la recta numérica horizontal como modelo de enseñanza, la ley de los signos para la adición y sustracción y la aplicación de algoritmos.
- Utilizan a la RN para enseñar las relaciones de orden, pero no muestra otros modelos o métodos.
- Los docentes enseñan la regla de los signos, siendo la misma para la adición, sustracción y para la multiplicación. "Signos iguales da más, signos diferentes da menos".

Perfil Docente C (generalizador y reflexivante)

- Plantea problemas o ecuaciones o sistemas de ecuaciones en las que interviene el número negativo como solución (manipulación y posible interpretación del negativo aislado).
- Enseña a los enteros dentro de contextos algebraicos.
- Realiza generalizaciones de los enteros hacia el álgebra, para ilustrar la situación:

Número	simétrico	Valor absoluto
3	-3	3
2	-2	2
1	-1	1
0	0	0
-1	1	1
-2	2	2
-3	3	3
a	$-a$	$\|a\|$
$-a$	a	$\|-a\|$

- Analiza y posiblemente discuta diferentes concepciones del cero. El simétrico de cero es cero $-(0) = 0$, el valor absoluto de cero es cero $|0| = 0$.
- Explica las relaciones de orden auxiliándose de la RN. Explica que entre cada natural exista la misma distancia porque son múltiplos de la unidad, incluye al cero, puede ubicar o localizar al número entero incluso si utiliza literales y poder realizar la comparación.



- Provoca la emergencia de negativo con expresiones del álgebra del tipo:

  Si $x + 1 = 0 \quad x = ?$ o bien $a + 2 = -4$, auxiliándose de la recta numérica y del significado de la adición y la sustracción.
- Pide a sus alumnos diferenciar entre el signo unario y binario, aclarando por estructura aditiva si se trata de una suma o resta de enteros.
- Recurre al uso de métodos aritméticos, aritmético-algebraicos o algebraicos para resolver problemas aditivos.
- Enseña el algoritmo de la sustracción con el inverso aditivo o simétrico y explica las estructuras equivalentes, sumar es igual a restar
- El docente anima a la construcción del lenguaje matemático formal.
- Utiliza recursos alternos a la RN.

Perfil Docente D (Profesor reflexivante, significador y transferencial)

- Puede presentar características del nivel C.
- Conoce plenamente el contenido matemático, el contenido didáctico y epistemológico del tema en el contexto de la enseñanza de los enteros en la educación básica.
- Conoce los planes y programas de estudio institucionales (secundaria), conoce también los planes y programas de origen (primaria) y hacia dónde se dirige la

enseñanza en cursos posteriores del nivel medio superior (El álgebra, La geometría analítica y el Cálculo).

- Promueve la comprensión y operatividad de los enteros como si fueran naturales. Significan a las operaciones de suma y resta dentro del dominio aditivo.
- Ayuda a sus alumnos a realizar la extensión del natural al dominio de los enteros dentro de su nivel de madurez cronológico y cognitivo.
- Conoce y aplica varios modelos y métodos para enseñar a los enteros y sus propiedades, así como diferentes estrategias aplicadas a los alumnos para que comprendan y transcriban problemas verbales en textos aritméticos, aritmético-algebraicos o algebraicos.
- Realiza generalizaciones más sólidas con sus estudiantes como el uso de la tricotomía para significar que el simétrico de a es $-a$, analizando para $a = 0,\ a < 0$ y si $a > 0$ con simbología matemática formal y representado los diferentes casos en la RN.
- Puede llevar a sus alumnos de la reflexión empírica a la abstracción reflexiva en el planteamiento de situaciones organizadas por los enteros, como son los problemas que requieren del establecimiento del sistema de referencia y del uso del negativo formal.
- Hace que sus alumnos resuelvan una sustracción sin el uso de una regla sintáctica y sin el uso del inverso aditivo, sino de igual manera que se hace en los naturales con la triple naturaleza de la sustracción, como quitar, como completar o como diferencia.
- A la par de la extensión del natural al entero, enseña generalizaciones que ayudan a realizar la extensión de la aritmética al álgebra en sus alumnos.
- Realiza transferencias sencillas del uso del negativo y los enteros a contextos de otras ciencias como las experimentales.

6.2 Reflexiones finales

Se ha observado a través de este estudio que la enseñanza de estos contenidos (de los enteros) está basada en la presentación de reglas para realizar las operaciones, reglas que dependen de la memorización, sin sentido y sin significado para los niños, provocando un conflicto cognitivo que perdura hasta el tercer grado de educación secundaria. Además existen imprecisiones en el lenguaje matemático utilizado durante la enseñanza, así como errores en los conceptos, mismos que provocan confusión en los estudiantes, en la operatividad y en la resolución de situaciones que involucran números negativos.

Los alumnos no distinguen entre las operaciones de suma, resta y multiplicación porque utilizan la regla de los signos de la multiplicación para eliminar paréntesis cuando es suma o resta, evitando la sustracción. Es indispensable que los alumnos aprendan a restar sin una estructura sintácticamente equivalente, antes de pasar a las operaciones formales, porque en otras situaciones como en la Química, la acción de *sumar no es igual a restar* (Salinas, et al. 2015) como se muestra en el caso de la sustracción como *quitar*.

Se identificó a la recta numérica como un modelo geométrico y mental único en la enseñanza, utilizado para realizar la adición de un entero positivo con un negativo. Sin embargo, es conveniente el uso de otros modelos que apoyen a los alumnos a superar el conflicto cognitivo durante la enseñanza de este contenido.

La docente D3S utiliza la abstracción para que los alumnos den sentido a las operaciones de suma y resta, haciéndolos conscientes del significado y uso. Utiliza una analogía con las cargas eléctricas de los electrones y protones con los enteros, permitiendo utilizar un modelo diferente al de la recta numérica. Les ayuda a los alumnos a superar el conflicto cognitivo surgido en la enseñanza de D1S y D2S.

Concluimos que aparecen conflictos, cuando se aprende un conocimiento nuevo, también cuando hay errores conceptuales en la enseñanza, con reglas sintácticas que pueden ser erróneas, incompletas o carentes de sentido, cuando hay una enseñanza carente de reflexión en el sujeto que enseña y en el sujeto que aprende.

Se observó que el conflicto presentado por los estudiantes en la enseñanza de los números enteros persiste aún después de la primera instrucción de los docentes D1S y D2S, cuando D3S realiza su repaso de la operatividad de los enteros para resolver un problema de tiro parabólico. Este estado parece superarse cuando se utilizan otros modelos concretos o abstractos, contextos diferentes y apoyados en estructuras algebraicas.

Se observó en los alumnos fenómenos presentados por la enseñanza de los enteros que parecen provenir de:

1) La enseñanza de reglas sintácticas sin sentido.

2) La enseñanza con ausencia de contextos que puedan vincular lo concreto con lo abstracto.

3) La falta de otros modelos de enseñanza.

4) De la no aceptación de los negativos en el sujeto que aprende comportándose como un sujeto histórico.

Pero si se aplica una enseñanza en la cual se construyen reglas con sentido, se recurre a contextos variados, con modelos diversos, utilizando la reflexión y aún así persiste el conflicto, entonces podríamos determinar que el conflicto es puramente atribuible a la parte epistemológica del contenido.

Se observó que algunos estudiantes aprenden las reglas operativas, sin embargo, nos cuestionamos, ¿por qué la mayoría de los sujetos aceptan como dogma las reglas de orden y de operatividad durante la enseñanza y el aprendizaje de los números enteros? cuando no han sido comprendidas. Esta pregunta emana durante la observación de clase, ya que surgieron sujetos que expresamente no aceptaron las reglas sintácticas que los docentes proponen, permaneciendo en conflicto cognitivo, lo cual nos conduce a cuestionarnos ¿la no superación del conflicto cognitivo es la que nos obliga como sujetos a aceptar las reglas sintácticas que no entendemos?

6.3 Perspectivas

Dada la problemática de la enseñanza de los números negativos y enteros en la secundaria y su repercusión futura, dentro del álgebra, la geometría analítica, el cálculo y las ciencias experimentales, el autor de esta tesis tiene contemplado realizar estudios posteriores con las siguientes temáticas:

- Propuesta didáctica de la enseñanza de los números enteros en la educación secundaria articulada por el conocimiento matemático de los negativos y enteros desde la matemática formal, por el conocimiento de la historia en la construcción del número negativo y del entero, por el conocimiento de la epistemología del número negativo y el entero. Enmarcado desde un enfoque actual de las nuevas políticas educativas como lo es la nueva reforma educativa.

- Análisis de la enseñanza de los números negativos, con signo o enteros en los libros de texto para secundaria, autorizados por la Secretaría de Educación Pública y otros libros auxiliares, dentro de la nueva reforma educativa y su caracterización con el estudio de los números relativos de González Marí y los niveles de conceptualización de los negativos de Gallardo.
- Análisis de la enseñanza de los negativos y enteros en los libros de texto oficiales y disponibles en el nivel medio básico y medio superior desde el punto de vista de los números naturales relativos de González Marí y de los niveles de conceptualización del negativo de Gallardo.
- ¿Cómo se logra la extensión de los números naturales al dominio de los enteros? En el desarrollo del trabajo de tesis del presente autor, surge la exposición de aquellos conceptos, estrategias, acciones que permiten al usuario del sistema matemático de signos realizar dicha extensión, ahora, este trabajo consistiría en identificar, completar y clasificar los mencionados aspectos que permiten la comentada extensión, como respuesta a esta pregunta detonadora, que fue elaborada por una investigadora en un congreso.
- El nivel de logro de la extensión del número natural al dominio entero en usuarios del SMS. Este trabajo pretendería conocer ¿Cuál es el nivel de logro de extensión de los naturales al dominio de los enteros en alumnos de secundaria? ¿Cuál es nivel de extensión en el nivel medio superior? ¿En qué momento el usuario del SMS completa la extensión?
- **Historia de los negativos en México. Análisis de los libros de texto utilizados en México desde la conquista hasta el siglo XIX, con el enfoque de Maz Machado, González Marí y Gallardo. Es decir trabajar en el análisis histórico-crítico de la construcción del número negativo, relativo o entero en México, a través de la caracterización de textos de este periodo, e incluir los aspectos analizados en los libros que permiten realizar la extensión del número natural al dominio de los números enteros.**

- La competencia matemática en los números enteros en profesores de secundaria. Este trabajo permitiría conocer si los conocimientos de los profesores son suficientes para enfrentar las dificultades en la enseñanza y cómo se relacionan la competencia del docente con la competencia del estudiante.
- Aspectos fundamentales que debe conocer el docente de secundaria para la enseñanza de los números negativos, con signo o enteros. Incluye los conocimientos históricos, epistemológicos y didácticos de los negativos.
- Revisión y análisis de los planes y programas de estudio en escuelas de formación de profesores relacionados con la enseñanza de los números enteros.
- Implementación de un curso-taller para profesores de secundaria en la enseñanza de los números negativos, con signo o enteros e identificar ventajas y dificultades en dicha implementación.
- Los conocimientos de los profesores en primaria, de los números con signo, negativos o enteros, para su enseñanza. Problemática de acuerdo con Cid (200, 2002, 2007), la cual consiste en ¿cómo van a introducir los profesores a los negativos dentro de un entorno aritmético, ya que los alumnos no han visto álgebra y los docentes no la enseñan?
- Interpretación de la negatividad en las Ciencias experimentales. En este trabajo se pretende establecer que el número negativo está pleno de significados en el ámbito científico, y que también dotan de sentido a conceptos fundamentales de estas ciencias. Como comenta Cid (2000, 2002, 2007), utilizar a las matemáticas para modelar fenómenos físicos.
- La transferencia del dominio de los números enteros a las ciencias experimentales como la física y la química en el nivel medio superior y superior. Cómo son utilizados los conocimientos y habilidades matemáticos para enfrentar la modelización científica experimental.
- Revisión de planes y programas de estudio que contemplan enseñar problemas involucrando a los números enteros, fraccionarios o decimales, positivos y negativos,

lo que de alguna manera contempla una transposición didáctica que implique la simetrización de $\boldsymbol{N}$ ($\boldsymbol{Z}^+$), y $\boldsymbol{Q}^+$, como proponen Bruno (1997) y, Cid & Bolea (2007).

Referencias Bibliográficas

Álvarez-Gayou, J. (2003). *Cómo hacer investigación cualitativa. Fundamentos y metodología*. México: Paidós Educador.

Alcántara, J. A. (2010). *Uso de Modelos de Enseñanza en la resolución de problemas aditivos*. Tesis de Maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Ayres, F. (1996). *Álgebra Moderna*. México: McGraw-Hill.

Baldor, A. (1998). *Álgebra*. México: Publicaciones Cultural, S. A. de C. V.

Basurto, E. (2007), *Diferentes sintaxis de algunas calculadoras básicas en la escritura de operaciones con números enteros y la resolución de problemas aditivos*. Tesis de Maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Beaumont, R. y Pierce, R. (1963). *The Algebraic Foundations of Mathematics*. U.S.A.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Bell, A. (1982). Looking at children and directed numbers, *Mathematics Teaching*, 100. 66-72.

Bell, A. (1986). *Diagnostic Teaching*: *Report of an ESCR project*. University of Nottingham: Shell Centre for Mathematical Education.

Bravo, A., Rincón, C. y Rincón, H. (2012) *Álgebra Superior*. México: Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, v4*, (2), 165-198.

Brown, T., Le May, H., Bursten, B. y Murphy, C. (2009). *Química. La Ciencia Central*. México: Pearson.

Bruno, A. y Martinón, A. (1996). Números negativos, sumar=restar. *Uno* 10:123-132.

Bruno, A. (1997). La enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación. *Números*. 29. 5-18.

Bruno, A. y Martinón, A. (1997a). Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos. *Educación Matemática*, 9 (1), 33-36.

Bruno, A. y García, J. (2004). Futuros profesores de primaria y secundaria clasifican problemas aditivos con números negativos. *RELIME*. 7(1). 25-48.

Bruno, A. (2009). Metodología de una investigación sobre métodos de enseñanza de problemas Aditivos con números negativos. *PNA*, 3(2), 87-103.

Cantón, V. (1998). El sujeto y la aporía o cómo construir a partir del vacío. *La vasija*, abril-julio, (2) 30-38.

Cruz-Garritz, D., Chamizo, J. y Garritz, A. (1986). *Estructura Atómica. Un Enfoque Químico*. México: SITESA.

Cárdenas, H., Lluis, E., Raggi, F. y Tomás, F. (2012). *Álgebra Superior*. México: Editorial Trillas.

Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. *XIV Jornadas del Seminario Interuniversitario de investigación en Didáctica de las Matemáticas,* Cangas, España.

Cid, E. (2002). Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos. *Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas.* 2, 529-542. Zaragoza: Publicaciones de la Universidad de Zaragoza.

Cid, E., y Bolea (2007). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. *II Congreso Internacional sobre Teoría Antropológica de lo Didáctico UZES*., 1-16.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research Methods in Education*. New York: Routledge.

Courant, R. y Robbins, H. (2014) *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales*. México.: Fondo de Cultura Económica.

Damián, E. (2009). *El plano cartesiano como un organizador fenomenológico en la adición, sustracción, multiplicación y división de números enteros*. Tesis de Maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

D'Amore, B., y Brousseau, G. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Reverté.

Ernest, P. (1985). The number line as a teaching aid. *Educational Studies in Mathematics*. No. 16. 411-424.

Espinoza, E. I. (2011*). Análisis del entrecruzamiento de los sentidos de uso de la variable y del número negativo en el trabajo algebraico con estudiantes de secundaria*. Tesis de Maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Espinoza, E. I. (2016). *Análisis de algunos hitos fundamentales que surgen durante la transición de la aritmética al álgebra*. Tesis de Doctorado. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Filloy, E., y Rojano, T. (1984). From an arithmetical to an algebraic thought. (A clinical study with 12-13 years old). In *Proceedings of the 6 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 51-56).

Filloy, E., Rojano, T., Puig, L. y Rubio, G. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Filloy, E., Rojano, T. y Solares, A. (2010). Problems Dealing With Unknown Quantities and Two Different Levels of Representing Unknowns. *Journal for Research in Mathematics Education 41*, nº 1: 55-80.

Fishbein, E. (2002). *Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach*. New York: Kluwer.

Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an educational task. Dordrecht: Reidel

Freudenthal, H. (1983). Negative Numbers and Directed magnitudes. En *Didactical phenomenology of mathematical structures*, 432-460. Dordrect, The Netherlands.

Glaeser, G.(1981). Épistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(3), 303-346.

Gallardo, A. (1994). *El estatus de los números negativos en la resolución de ecuaciones algebraicas.* Tesis doctoral. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Gallardo, A. (1996). Qualitative analysis in the study of negative numbers, *Proceedings of the 20th International Conference of PME*, Valencia, vol. 2, 377-384.

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *49*(2), 171-192.

Gallardo, A. (2005). El surgimiento de la aporía en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la sustracción de números enteros. CINVESTAV.

González, J., Iriarte, M., Jimeno, M., Ortiz, A., Ortiz, A., Sanz, E. y Vargas-Machuca, I. (1990). *Números Enteros*. Madrid. España.: Síntesis.

González Marí, J. L. (1995) *El campo conceptual de los números naturales relativos*. Tesis doctoral. Universidad de Granada, España.

Hankel, H. (1867). *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen. Theorie der complexen Zahlensysteme*. *Leipzig:* Leopoldo Voss.

Hefendel-Hebeker, L. (1991). Negative Numbers: Obstacles in their Evolution from Intuitive to intelectual Constructs. *For the Learning on Mathematics*. II (1). 26-32.

Hernández, J. A. (2002). El cero y la negatividad. . Tesis de Maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Hernández, M. (2014). *De las representaciones intuitivas de la negatividad a la interpretación formal del concepto de entero*. Tesis de Maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Herstein, I.N. (1986). *Álgebra Moderna*. México: Editorial Trillas.

i Carrera, P. Josep (2009). *Liu Hui. Nueve capítulos de la matemática china*. España: Nivola.

Janvier, C. (1983). The understanding of directed numbers. En J. C. Bergeron & N. Herscovics (Eds.), *Proceedings of the XVth Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Montreal (Vol. 2, pp. 295-301).

Janvier, C. (1985). Comparison of models aimed at teaching signed integers. *Proceedings of the Nineth Meeting of the PME*. State University of Utrecht. The Netherlandes. 131-150.

Kant, E. (1992). Ensayo para introducir las magnitudes negativas en la filosofía. En Kant, I. Opúsculos de filosofía natural. Madrid: Alianza.

Lizcano, E. (1993). *El imaginario colectivo. La construcción social del número y el infinito*. Barcelona, España.: Paidos.

Matías, F. (2013). *Resolución de problemas de Cinemática por alumnos de secundaria.* Tesis de Maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Maz, A. (2005). *Los Números Negativos en España en los siglos XVIII y XIX*. Tesis Doctoral. Granada, España.

Mejía, J. L. (2009). *Enseñanza y Aprendizaje de los números negativos: un estudio comparativo entre los actores fundamentales del proceso didácticvo en educación secundaria*. Tesis de Maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Mejía, J. L. (2017). *Introducción temprana de los números enteros: un estudio con niños de quinto grado de primaria.* Tesis de Doctorado. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Mochón, S. (1997). ¿Qué signo tiene realmente la g?: el significado y la enseñanza del signo negativo en la Física. *Educación Matemática*, 9(3), 64-76.

Ohanian, H., y Markert, J. (2009). *Física para Ingeniería y Ciencias*. México: McGraw-Hill.

O'Connor, J. & Robertson, E. (2004). Simon Stevin. *MacTutor History of Mathematics archive*, Universidad de Saint Andrews. Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Simon_Stevin.

Peled, I. (1991). Levels of knowledge about signed numbers: effects of age and ability. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 145-152). Assisi, Italy.

Peled, I. y Carraher, D. W. (2007). Signed numbers and algebraic thinking. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 303–327). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Piaget, J. (1960). *Introducción a la epistemología genética. I. El pensamiento matemático*. Biblioteca de Psicología Evolutiva. Buenos Aires: Paidos.

Piaget, J. (1987). *Introducción a la epistemología genética. I. El pensamiento matemático*. Biblioteca de Psicología Evolutiva. Buenos Aires: Paidos.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1978). Las operaciones intelectuales y su desarrollo. En J. Delval (Ed.). *Lecturas en Psicología del niño*, I. (70-119). Madrid: Alianza Editorial.

Piagaet, J. (1978). *La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del desarrollo*. México: Siglo XXI.

Piaget, J. (2001). *Studies in Reflecting Abstraction*. New York: Taylor and Francis Inc. 303-322.

Platón. (2015). *Diálogos. Menón o De la Virtud.* México: Porrúa.

Pluvinage, F. & Flores, P. (2016). Génesis Semiótica de los Enteros. *Boletim de Educação Matemática, 30* (54), 120-141.

Potápov, M., Alexándrov, V. y Pasichenko, P. (1986). *Álgebra y análisis de funciones elementales*. Moscú: Editorial Mir.

Puig, L. (2006) Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. En P. Bolea, Ma. J. González M. Moreno (Eds*). X Simposio de la SEIEM*, Zaragoza, España.

Ribeiro, R. (1997). On the epistemology of integers. *Recherches en didactique des Mathématiques*. Vol. 17, no.2 (pp. 211-250)

Rico, L. (2001). *Análisis conceptual e investigación en didáctica de la matemática.* En Gómez, P.; Rico, L. (Eds.), Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro (pp. 257-276). Granada: Editorial Universidad de Granada.

Rojano, T., Filloy, E. y Puig, L. (2014). Intertextuality and sense production in the learning of algebraic methods, Educational Studies in Mathematics. 87, 389-407.

Rojano, T. (1984). *Del Aritmética al Álgebra: un estudio clínico con niños de 12 a13 años de edad.* Tesis Doctoral. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México

Romero, M. (1999). *El modelo de la recta como instrumento de investigación en la descripción de las dificultades en la adición y sustracción de números enteros*. Tesis de Maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Saavedra, G. A. (2011). *Estudio de las fracciones negativas en educación básica*. Tesis de Maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Salinas, G., Gallardo, A. y Mendoza, E. (2015). Entrecruzamiento de los Sistemas Matemáticos de Signos y los Sistemas Químicos de Signos. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.). *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 491-501). Alicante: SEIEM.

Salinas, G. (2016). *Entrecruzamientos de los Sistemas Matemáticos de Signos y los Sistemas Químicos de Signos. Un estudio semiótico*. Tesis de Maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Sánchez A., Martínez, J. y Andrade, E. (coords.) (2016). *El aprendizaje en tercero de secundaria en México. Informe de resultados* EXCALE 09 Aplicación 2012. Español, Matemáticas, Ciencias y Formación Cívica y Ética. México: INEE.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects, as differents sides of the same coin. *Educational Studies in Matehmatics*, 22, pp. 1-36.

Schubring, G. (1986). Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs. *Petit x.*, nº 12: 5-32.

Schubring, G. (1988). *Discussions épistémologiques sur le statut des nombres négatifs et leur représentation dans les manuels allemands et français de mathématique entre 1795 et 1845*. Actes du premier colloque franco-allemand de didáctique des mathématiques et de l'informatique. Editions La Pensée Suavage.

SEP. *Programas de Estudio 2011*. Guía para el maestro. Educación Básica Secundaria. Matemáticas. México.

SEP. *Plan y programas de estudio para la educación básica*. (2017). APRENDIZAJES CLAVE PARA LA EDUCACIÓN INTEGRAL. México.

Stevin, S. (1585). *L'arithmetique*. Free Google eBook. Disponible en: https://books.google.fr/books?id=1dU5AAAAcAAJ&printsec=frontcover&hl=fr&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

Taylor, S. J. y Bogdan, R. (1987). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Barcelona: Paidós.

Tirosh, D. y Dreyfus, T. (1998). Efraim Fischbein, 1920-1998. Bulletin No. 45. *The International Commission on Mathematical Instruction*. Dinamarca: ICMI.

Torres, F. O. (2008). La sustracción en recta numérica versus los números negativos: Un estudio de caso en el nivel de secundaria desde una perspectiva integral. Tesis de Maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México

Torres, M. (2001). *Introducción al concepto del número negativo en el nivel medio básico mediante la resolución de problemas de tipo aditivo*. Tesis de Maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

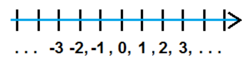
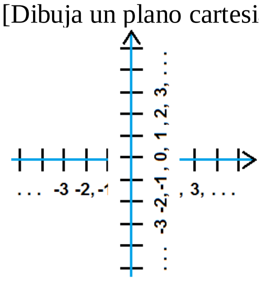
Varios. (1910-1911). Stevinus Simon. En Chisholm, Hugh. *Encyclopædia Britannica*. *A Dictionary of Arts, Sciences, Literature, and General information*. Encyclopædia Britannica. Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Simon_Stevin.

Vergnaud, G. (1989). *L'obstacle des nombres négatifs et l'introduction à L'algèbre. Construction des savoirs*. Colloque International Obstacle Epistémologique et Conflict Socio-Cognitif, CIRADE, Montreal.

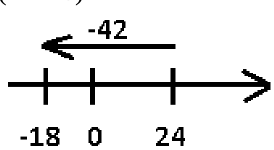
Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. Trillas*: México*.

APÉNDICE A.

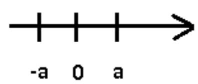
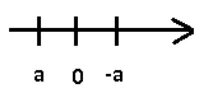
Respuestas del *Cuestionario piloto* de los docentes D-4S, D-3S, D-2S, D-1S y D0S en la etapa de exploración.

Pregunta 1. ¿Cómo le explicas a tus alumnos el concepto de número negativo?	
D-4S	(No resuelve el cuestionario)
D-3S	El modelo de la recta numérica donde se ubican los negativos, positivos y el cero, [Dibuja la RN]  También puede utilizarse el modelo del plano cartesiano para ubicar pares ordenados y el origen. [Dibuja un plano cartesiano]  Aunque utilizo el modelo de equilibración para introducir a la suma y resta de números positivos y negativos, uno positivo y uno negativo dan cero: (+1) + (-1) = 0, a es positivo si a>0 y a es negativo si a<0 Les menciono como definición que a es positivo si a>0 y a es negativo si a<0.
D-2S	(No responde la pregunta, porque pretende dejarla al último pero no le alcanza el tiempo para contestarla.)
D-1S	A través de un video, con un elevador, se sustituye un elevador con la recta numérica y con 10 ejercicios, observan que se pueden utilizar los números negativos sin recta. Partimos de allí para explicar operaciones.
D0S	Es aquel que su valor es menor que cero. Me ayuda trazando una recta numérica para identificar a los números negativos. Realizo ejercicios en donde me tengan que señalar los números negativos que les doy, e identificando que mientras estén a la izquierda un número de otro, este siempre va ser menor. Los alumnos identifican en el pizarrón con ayuda de una recta numérica los números negativos. Que el alumno identifique en su vida cotidiana la aplicación de los números negativos (termómetro, termostato de un refrigerador, etc.)
Pregunta 2. Explica ¿Qué modelos utilizas para enseñar números enteros?	
D-4S	(No resuelve el cuestionario)
D-3S	(El docente no aporta información escrita de los modelos, pero abunda en la forma de enseñar a los enteros)… [También les menciono (a los alumnos) que hay muchos fenómenos en los que aparecen los números negativos y positivos. Y que desde la antigüedad se han concebido cantidades opuestas relacionadas a la filosofía. También la enseño la definición de enteros Z, como el conjunto de los positivos, negativos y el cero. Z= { … -3, -2, -1, 0 1, 2. 3,…}. Menciono además que los números negativos aparecen cuando se plantea una ecuación: x + 5 = 3 ¿Cuánto vale x?]
D-2S	El modelo de equilibración, la recta numérica y las propiedades de los números. Utilizo la propiedad del elemento neutro aditivo. La suma de simétricos es cero con la analogía de lo bueno y lo malo, lo positivo y lo negativo: (+3) + (-3) =0 (+3) + (0) = +3 (-3) + 0 = -3 Para los alumnos de tercero que no han podido aprender la suma y resta de enteros utilizo la analogía con los protones y electrones.

Pregunta 2. Explica ¿Qué modelos utilizas para enseñar números enteros?	
D-1S	Exponemos un problema en donde una persona deba pagar determinada cantidad de dinero por una serie de artículos cuya cuenta asciende a $10.03 y se explica que no hay monedas de a centavo y que se suele pagar sólo por lo que hay de monedas. Esos los nombramos “Enteros” y así partimos para explicar sus usos, sus propiedades y operaciones. A veces basta con hacer cubos de papel con origami. Como no se pueden deshacer, les nombramos “unidad”. Construimos figuras con ellos y deben formar otras figuras que se denominan “Enteros”
D0S	Utilizo la recta numérica para que el alumno razone y argumente la definición de números enteros. Además de ayudar a utilizar el cálculo mental de operaciones con números enteros.
Pregunta 3. Explica ¿Cómo enseñas la suma de enteros?	
D-4S	(No resuelve el cuestionario)
D-3S	(El docente no aporta información escrita pero si explica como sumar, a través de reglas operatorias) Menciona que : [La suma que dos números con signos positivo es positiva como en (+5) + (+5) = (+10) La suma de don números con signo negativo es negativa como en (-5) + (-5) = -10 La suma de un número con signo positivo y otro número con signo negativo se resuelve comparando a los dos números, el que sea más grande en valor absoluto gana con su signo, por ejemplo: (+10) + (-5) = +5 porque el +10 le gana al -5 por +5 unidades. En (-10) + (+5) = -5 porque el -10 gana por 5 unidades.]
D-2S	Depende del caso, por ejemplo para sumar número negativo con cantidades negativas o deudas, debo 5: “(-5)” y le agrego una deuda de 10: “(-10)”, es: (-5) + (-10) = -15. Ahora debo 15: “(-15)”. Para negativo con positivo utilizo el simétrico, p/e: (+8) + (-5) = $(+3) + \underbrace{\cancel{(+5)} + \cancel{(-5)}}_{\text{Cero}}$ = +3. ó (-7) + (+2) = $(-5) + \underbrace{(-2) + (+2)}_{\text{Cero}} =$ -5 Para positivo con positivo: tengo 5 y agrego 5, tengo 10.
D-1S	Agregando objetos primero y después con la recta numérica.
D0S	Definimos entre todos qué es una suma o adición y comienzo a enseñar las propiedades: Asociativa (resolviendo operaciones), Conmutativa (resolviendo operaciones), Cerradura (resolviendo operaciones) y Elemento Neutro de la adición (resolviendo operaciones). Realizan los alumnos problemas referentes a la adición, en su vida cotidiana. Realizan los alumnos operaciones con 2 o más sumandos.

Pregunta 4. Explica ¿Cómo enseñas la sustracción de enteros?	
D-4S	(No resuelve el cuestionario)
D-3S	(El docente no aporta información escrita pero si explica como sustraer, a través de reglas operatorias) [Menciona que convierte la resta en suma con el inverso aditivo.] (no explica ningún ejemplo)
D-2S	Depende del caso: 1) 5-10= (+5) – (+10)= -5, uso la recta numérica, a 5 le quito 10 = -5. -5-10= (-5) – (+10) = -15 5- (-10) = 5 – (-10) = 15 2) -5-(-3) = -2 a cinco negativo quítale 3 negativo. -5 – (-8) = 3 3) Simétrico de -3 es +3, 0-(-3)= +3 4) A veces es necesario en -18-24 = -18-(+24) ¿Cuánto le falta a 24 positivo para 18 negativo? -(24+18) = - 42 
D-1S	Igual: sustrayendo objetos de una colección y posteriormente con la recta numérica. (No muestra ningún ejemplo)
D0S	Definimos entre todos qué es una sustracción, partes de la sustracción, (resolvemos operaciones y problemas referentes a la resta). Los alumnos resuelven problemas referentes a la sustracción en su vida cotidiana.
Pregunta 5. Explica ¿cómo enseñas la multiplicación de enteros?	
D-4S	(No resuelve el cuestionario)
D-3S	No dispone de tiempo para responder.
D-2S	5 por 2: 5 veces 2 y aplico la prop. Conmutativa 5 veces 2 = 2 veces 5 ∴ 5(2) = 2(5) 5 por -2: 5 veces dos negativo=-10, positivo por negativo es negativo. Aplicando la prop. Conmutativa 5 por -2= -2 por 5 ∴ negativo por positivo = negativo. -2(-5)= 10: Dos veces el simétrico de cinco negativo. Porque el simétrico de 5 neg. es 5 positivo.
D-1S	Primero haciendo sumas de números enteros hasta que los alumnos perciben que se pueden usar las tablas de multiplicar en lugar de hacer tantas sumas.
D0S	Definimos lo que es una multiplicación, y las partes que componen una multiplicación (factores y productos). Tablas de multiplicar. Propiedades de la multiplicación: P de identidad, P. conmutativa, P. asociativa, P. distributiva y P. Cerradura. (cada una con sus respectivos ejemplos). Los alumnos realizarán operaciones de multiplicación de uno o más factores. Los alumnos resolverán problemas de multiplicación, en su vida cotidiana.

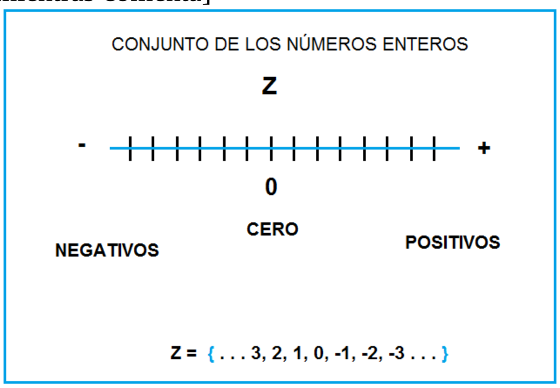
	Pregunta 6. Explica ¿cómo enseñas la división de enteros?
D-4S	(No resuelve el cuestionario)
D-3S	No dispone de tiempo para responder.
D-2S	Como el inverso de la multiplicación: $a/b = c \rightarrow a = b\,(c)$ 10/-5 = -2 porque 10 = -5 (-2) -10/-5= positivo porque positivo por negativo es negativo -10/5= negat. Porque neg. Por pos. es neg.
D-1S	Se les explica que es lo contario de una multiplicación. (No muestra ejemplos)
D0S	Definimos lo que es la división, y las partes que componen una división (divisor, dividendo, cociente y residuo). Diferentes formas en que se escribe la división (fracción, con el símbolo "÷" y con ayuda de la galera). Los alumnos realizan operaciones de división de dos, tres y cuatro cifras. Los alumnos resolverán problemas de división en su vida cotidiana.
Pregunta 7. Explica ¿qué tipo de ejercicios utilizas para la enseñanza de enteros?	
D-4S	(No resuelve el cuestionario)
D-3S	No dispone de tiempo para responder.
D-2S	Ejercicios. Problemas de Temperatura, de Trayectorias, utilizando puntos de referencia, el plano cartesiano, deudas y línea → del tiempo a.n.e.
D-1S	Recta numérica en principio, después algoritmo de las operaciones y finalmente problemas. Ó dependiendo del grupo, empezamos con problemas, algoritmo al final, recta numérica. Funciona mejor poner un video o exponer un problema.
D0S	Operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división. Problemas referentes a su vida cotidiana que contengan la aplicación de las 4 operaciones.
Pregunta 8. Como profesor, explica ¿qué consideras que presenta mayor dificultad en la enseñanza de enteros?	
D-4S	(No resuelve el cuestionario)
D-3S	No dispone de tiempo para responder.
D-2S	Que se evita trabajar con los números negativos.
D-1S	No, ninguna. Para mis alumnos son más complicadas las fracciones.
D0S	Cuando los alumnos resuelven problemas ó operaciones que contienen las 4 operaciones básicas, ya que no sabe o se confunde al jerarquizar, qué operación realiza primero. Además cuando realiza operaciones de signos contrarios, especialmente cuando el número mayor tienen signo negativo y el menor, signo positivo, se confunde al sumar o restar y no sabe qué signo dejarle.
Pregunta 9. Explica ¿Qué consideras que presenta mayor dificultad en el aprendizaje de los enteros en tus alumnos?	
D-4S	(No resuelve el cuestionario)
D-3S	No dispone de tiempo para responder.
D-2S	La conceptualización de los mismos
D-1S	No les representa mayor dificultad.
D0S	No responde la pregunta

Pregunta 10. Explica ¿cuál es la operación de los números enteros que más se les dificulta aprender a tus alumnos y cómo lo has notado?	
D-4S	(No resuelve el cuestionario)
D-3S	No dispone de tiempo para responder
D-2S	La sustracción
D-1S	La división, pero no mucho.
D0S	Las operaciones con signos contrarios, en especial cuando van a sumar o restar números; cuando éste es mayor y tiene signo negativo y el número menor es de signo positivo, el alumno no sabe si sumar o restar y qué signo dejarle. Ejemplo: -20 + 4 = -16
Pregunta 11. Explica ¿cómo enseñas el simétrico de "–a"?	
D-4S	(No resuelve el cuestionario)
D-3S	No dispone de tiempo para responder
D-2S	Que si a ∈ ***Z***, puede ser a>0 y a<0 entonces: Si a>0 → -a<0 ∧ a<0 → -a>0 ∴ tengo dos casos: Si a>0:  ∧ Si a<0 
D-1S	Por medio de la recta numérica.
D0S	Se le explica al alumno que al sumar un número con su opuesto obtenemos un resultado de cero. Que es el elemento neutro de la adición. En conclusión se le explica al alumno que es el mismo número o literal pero con signo contrario. $-a + a == 0$
Pregunta 12. ¿Cómo concibes a los enteros?	
D-4S	(No resuelve el cuestionario)
D-3S	No dispone de tiempo para responder.
D-2S	No dispone de tiempo para responder.
D-1S	Una parte primordial en la enseñanza de las matemáticas.
D0S	Los números enteros son primordiales para la vida cotidiana, ya que son la base para resolver operaciones y problemas que no se presentan en cualquier momento, hasta realizar investigaciones avanzadas en la ciencia. Son la base de toda la enseñanza de las matemáticas.

APÉNDICE B.

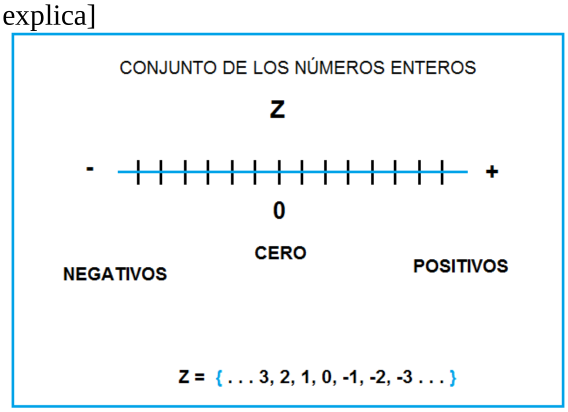
Transcripción y análisis de la observación de la enseñanza de los enteros, adición y sustracción por parte de los docentes D1S, D2S, D3S, D4I.

TRANSCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LA ENSEÑANZA DEL DOCENTE D1S

EPISODIO I.	LOS ENTEROS Y LA RECTA NUMÉRICA.	DOCENTE D1S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
1 D1S	Vamos a empezar con…[El docente comienza la clase con una diapositiva de los números enteros mientras comenta]  	
2 A1	¡Las rectas! [participa A1 con entusiasmo]	
3 D1S	… ¿Para qué nos sirven las rectas? [pregunta el docente al grupo y se contesta así mismo]…***nos sirven para conocer a los números enteros***. ... son *los positivos* [cuando el profesor dice que son los positivos los alumnos acompañan a coro y con firmeza], los…	El docente relaciona inmediatamente a los enteros con la(s) recta(s). Los alumnos reconocen a los positivos como números enteros.
4 G	… *negativos* [responden a coro pero con menos firmeza]	Pocos niños mencionan y reconocen a los negativos como parte de los enteros. Muestra clara, de que este es el primer contacto de los niños con los enteros de acuerdo al currículo de educación básica de primer grado de secundaria.
5 D1S	y… [invita al grupo a contestar]	
6 G	[tardan en responder, al fin sólo algunos participan] …¿los positivos? [se ven unos a otros con duda]	Los alumnos en la primera enseñanza no dan evidencia de que el cero sea parte de los enteros.

EPISODIO I. LOS ENTEROS Y LA RECTA NUMÉRICA. DOCENTE D1S

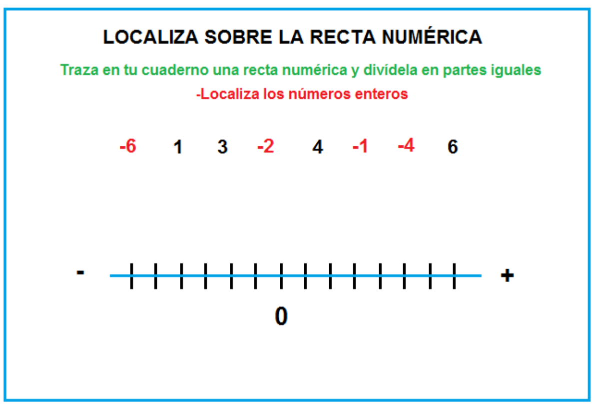
Línea	Diálogos	Observaciones
7 D1S	[al ver que no hay respuesta acertada interviene] ¡*El cero*! [Los alumnos aceptan la respuesta pero no muestran reacción alguna] Los ubicamos en la recta numérica que van hacia un sentido los números positivos y hacia el otro sentido los números negativos y en la parte central el cero.	Es muy importante el cero para definir a los enteros positivos y negativos, el docente no utiliza la definición que incluye al cero, sólo indica que es parte de éstos. Es decir muestra la inhibición del cero como número. El docente utiliza el modelo de la recta numérica para indicar cómo se ubican los enteros positivos, negativos y el cero. Habla del sentido en la recta, utiliza la concepción de números dirigidos en la recta numérica, aunque no lo menciona en esos términos.
8 D1S	…Los elementos de la recta numérica son… punto de partida. ¿El punto de partida es necesariamente el… cero? [pregunta al grupo y contesta A2]	El docente relaciona al punto de partida con el cero y reflexiona si es necesario, aunque no abunda en ello todavía.
9 A2	¡No!	A2 aparentemente reconoce que no necesariamente el punto de partida es el cero.
10 D1S	No es necesariamente el cero, pero nos sirve para poder iniciar alguna de las operaciones que queremos ver con números enteros. [Cambia en la pantalla el tema de enteros en la recta numérica y aparece otra pantalla con el título de "CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS"]	Introduce la idea de *que el cero sirve para operar con los enteros.* Implícitamente para comparar a estos números.
11 A3	[interviene la estudiante A3] También… vimos que se pueden reflejar los números negativos….	La estudiante A3 tiene la idea de que los números negativos son el reflejo de los naturales como una simetría sobre el origen, pero desafortunadamente es ignorada, ya que este comentario pudo suscitar un intento de extensión de la recta de los enteros a partir de la de la de los naturales a través de la *simetrización* de ***N***.

EPISODIO I. LOS ENTEROS Y LA RECTA NUMÉRICA. DOCENTE D1S		
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
12 D1S	Así es… entonces vamos a conocer lo que son ***el conjunto de los números enteros***, hacia los sentidos hacia donde se ubican. Ustedes en primarias conocieron únicamente las ***cantidades positivas***, los números naturales que son del cero hacia la derecha…	Al mencionar "Conjunto de los números enteros" ya expresa la idea de la unión de positivos, negativos y el cero como un solo conjunto, desafortunadamente no abunda en ello. El docente utiliza indistintamente los términos *cantidad y número*. No hace diferencia y los niños no mostraron alguna reacción al respecto. El docente afirma que los naturales son del cero hacia la derecha sin más restricciones. En este momento está incluyendo al cero dentro de los naturales, al menos en la recta, y no se observa que se realice alguna aclaración, al respecto. Se sugiere utilizar el concepto de los Naturales extendidos, que incluye al cero y las propiedades del mismo.
13 D1S	[Aparece la siguiente figura en pantalla mientras explica] 	Utiliza en lenguaje matemático, la notación de conjuntos para expresar a los enteros, pero no hay correspondencia entre los enteros en la recta y en la notación de conjuntos mostrada. Para evitar una posible confusión se propone la forma: Z= { …-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,…} No ha indicado cómo se leen estos números, ni se explica cómo es su sintaxis.

<table>
<tr><td colspan="3">EPISODIO I. LOS ENTEROS Y LA RECTA NUMÉRICA. DOCENTE D1S</td></tr>
<tr><th>Línea</th><th>Diálogos</th><th>Observaciones</th></tr>
<tr><td>14
D1S</td><td>…los números negativos… se manejan en termómetros, en figuras, en alturas, en profundidades.

Se manejan en la recta numérica del cero hacia la izquierda…

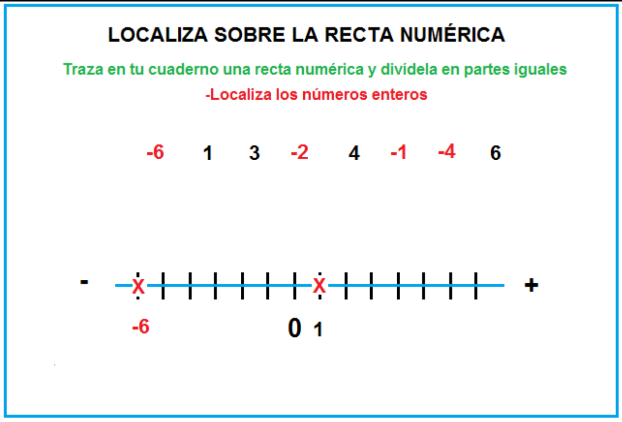
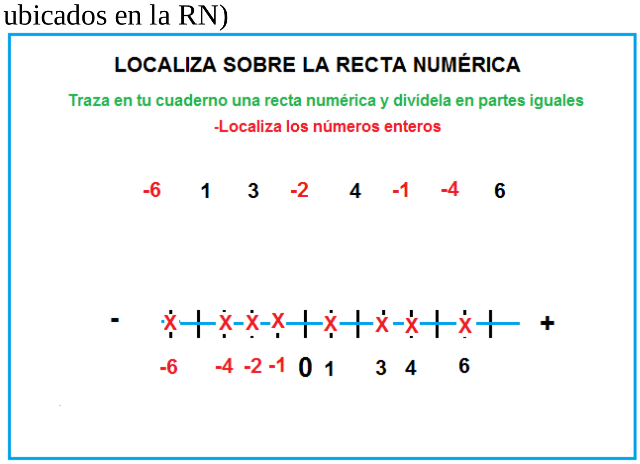
[cambia la pantalla y aparece el título “LOCALIZACION DE LOS NÚMEROS POSITIVOS”]</td><td>Contextualiza la existencia de los negativos en algunas situaciones.

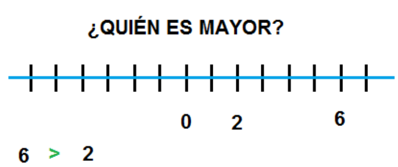
Reafirma que se encuentran del cero a la izquierda. Pero no menciona o reafirma la neutralidad del cero. Esta definición es incompleta porque no se aclara que en esta cabrían los decimales y fraccionarios negativos.</td></tr>
<tr><td>15
D1S</td><td>[Aparece la figura en pantalla]
¡Localicen los enteros!

</td><td>Solicita a los alumnos ubicar los números propuestos, anota a los positivos en color negro y redunda colocando a los negativos con color rojo y a la vez con el signo unario menos. Por cierto no aparece el cero para ser ubicado. Se reafirma el hecho de la inhibición del cero como número.</td></tr>
<tr><td>16
D1S</td><td>…el número seis está ubicado hacia la izquierda por ser negativo se encuentra hacia el lado izquierdo del cero.

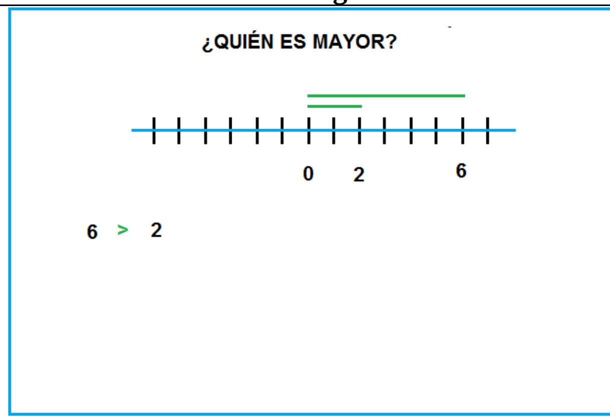
El número uno está del lado derecho del cero,</td><td>El docente lee “seis” y lo ubica en el lado izquierdo de la recta numérica como seis negativo. Es decir para ubicar al seis negativo, lo hace de manera relativa diciendo seis del lado izquierdo. Esto habla de que está viendo al número como signado y como relativo, es decir con un sentido intermedio entre los naturales y los enteros. El docente se comporta también como un Usuario del SMS.

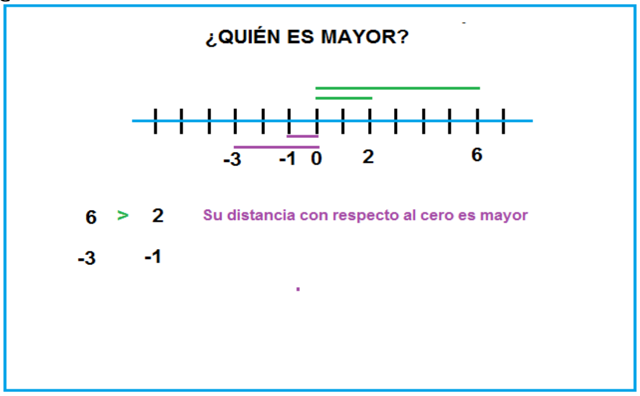
Cuando menciona que el uno está del lado derecho del cero, sin signarlo está construyendo la extensión del dominio natural al entero. Este es un hecho que ayuda a extender el dominio de N a Z.</td></tr>
</table>

EPISODIO I. LOS ENTEROS Y LA RECTA NUMÉRICA. DOCENTE D1S

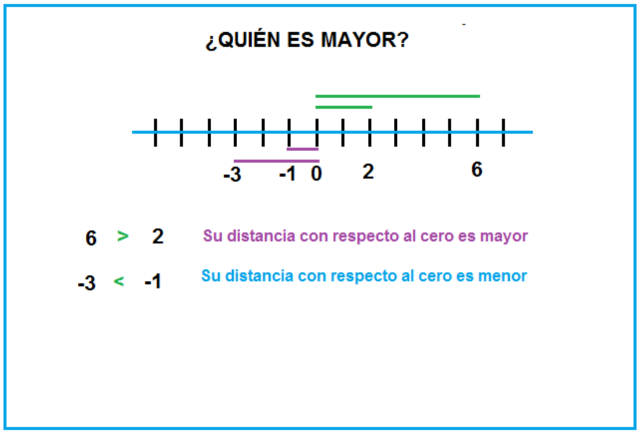
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
16 D1S	 recuerden, una cantidad que no tenga signo, …[pregunta al grupo] ¿Qué signo le corresponde?	Aquí se muestra una imprecisión de concepto cuando menciona que una cantidad (número) que no tiene signo es positiva. **Se sugiere: Cualquier número diferente a cero tiene signo, ya sea implícito o no en el caso de los positivos y explícito en el caso de los negativos.**
17 G	[Al unísono contestan] ¡Positivo!	Los niños ahora ven a los naturales como enteros positivos. Este es otro aspecto que ayuda a extender el dominio de N a Z, la existencia de conjunto isomorfos entre N y Z^+.
18 D1S	Positivo… hay cantidades… que no tienen signo… aparentemente, pero son positivas… …Tres, menos dos, cuatro, menos uno, menos cuatro y finalmente el número seis. (aparece la recta con todos los números propuestos ubicados en la RN) 	Aquí el docente precisa la existencia del signo que aparentemente no tenían los positivos. Aunque no explica cómo se leen los enteros, de alguna manera lo hace al nombrarlos mientras los localiza en la **RN** (recta numérica) como menos dos, menos cuatro, etc. y a los positivos como cuatro, seis, etc. sin signarlos. Cabe notar que el docente no indica que en este momento los números son asociados a cantidades discretas como puntos.

Episodio II.	EL ORDEN EN LOS ENTEROS	Docente D1S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
1 D1S	¿Quién es mayor?... …¿Qué será mayor un número positivo o un número negativo? ¿Será mayor… menos diez que… menos uno? ¿Será mayor… cinco que… cero? … eso es lo que tengo que determinar…	Cuando el docente pregunta "¿Quien es mayor?", se refiere a qué número es mayor, porque va a comparar dos números, con varios casos: Entre un positivo y un negativo, entre el menos diez y menos uno, entre cinco y cero. Introduce el orden relacionándolo con el "mayor", aunque no dice específicamente que va a comparar dos números y determinar cuál de los dos es *mayor que* el otro. (o *menor que* o *igual que*). Con esta pregunta deja ver que va a utilizar reglas… Hay una diferencia entre "mayor" como lenguaje natural y "*mayor que*" como lenguaje matemático. La diferencia es que mayor en el sentido coloquial significa más grande con polisemia con rango militar, premio de la lotería, o adulto de edad avanzada, y en el sentido matemático es para comparar dos números y decir cuál de ellos es mayor que el otro.
2 D1S	[Se muestra una recta numérica en la diapositiva] …¿Quién es mayor entre el seis y el dos?, si ubico el dos y el número seis determino que… el mayor de ellos es el seis.  (aparecen dos semi-rectas sobre la recta numérica representando a las distancias del cero a cada número para que los alumnos comparen las distancias)	No explica por qué el seis es *mayor que* el dos, apela posiblemente al conocimiento que traen los niños de la primaria. Recurre al cero para determinar la distancia a ambos números. Ahora explica quién es mayor en función de la distancia que hay del cero a cada número. En primera instancia sería justificable determinar las distancias con respecto al cero dentro de N.

Episodio II. EL ORDEN EN LOS ENTEROS Docente D1S		
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
2 D1S	 ¿Conocen ustedes esos signos de *mayor que*, *menor que* e *igual que*? [pregunta al grupo en general]	Se sugiere: Puede recurrir a la construcción de los números como: 2 + 4 = 6 Y decir que el 6 es mayor al 2 por cuatro unidades O que al 2 le faltan 4 unidades para completar el 6 y referirse a la RN. Al notar que hay dudas en los alumnos, explora si éstos saben utilizar los signos de orden. El comparar dos números sin la necesidad de compararlos con el cero es otro aspecto que ayuda en la extensión de N a Z. (Evita estancar a los alumnos en los niveles intermedios en la adquisición de la competencia en Z)
3 G	Ahhh…, si [contestan poco convencidos]	
4 D1S	…la flecha que indica hacia el lado derecho me dice que es mayor esa cantidad a la que está de su lado derecho, si está de manera invertida y la punta de esa flecha va hacia la izquierda, indica que ese número es menor a la cantidad del lado derecho. … tengo esas cantidades, su distancia con respecto al cero es mayor, por lo tanto el seis es mayor que ese número. Tengo menos tres (-3) y tengo menos uno (-1), los ubico dentro de esa recta numérica, ¿quién va a ser mayor de ellos dos? [pregunta al grupo y se escuchan diferentes respuestas mientras aparece el uno negativo y el tres negativo en la recta numérica de la diapositiva].	Hay limitación del concepto, ya que la lectura de los signos > y < se puede hacer de derecha a izquierda o viceversa. En la expresión 3<5 un alumno puede leer 3 menor que 5 ó 5 mayor que 3. Debe quedar clara la forma en que van a hacer la lectura de orden. Justifica que el seis tiene mayor distancia al cero que el dos, por lo tanto es *mayor* seis *que* dos (6>2). De alguna manera está utilizando el concepto del valor absoluto aunque no lo explicita. Aparece la primera regla para el orden de dos positivos ***“Su distancia con respecto al cero es mayor”***

Episodio II.	EL ORDEN EN LOS ENTEROS	Docente D1S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
4 D1S	¿El tres o el menos uno?  	Aunque no la explicita de forma completa como "El número más lejano al cero es mayor en el caso de dos positivos" o bien "El número con mayor distancia al cero es mayor que el otro"
5 G	[Se oyen varias voces de los alumnos respondiendo la pregunta de qué número es maroy si -3 ó -1] ¡El tres!, ¡el uno!, ¡el menos tres!, ¡el menos uno! [Predomina la respuesta menos tres].	Hay contradicción en las respuestas de los alumnos. Se miran unos a otros buscando consenso en la respuesta o la aclaración del profesor. Parece haber diferencias por: a) Estar aplicando la estrategia del ejemplo anterior en la que el tres negativo tiene mayor distancia al cero. b) Algunos expresan qué número es mayor y otros qué número es menor c) No aplican correctamente los signos de orden
6 D1S	Tenemos ideas encontradas ahorita para poder calcular cuál de los dos es mayor y cuál es menor. Por lo tanto tengo que menos tres es menor que el menos uno. ¿Por qué razón o motivo? Su distancia con respecto al cero es mayor, entonces analicemos esta parte, el cero es el que me determina quién de ellos es mayor, si mi cantidad es positiva me voy hacia la derecha, el que tenga mayor valor numérico (se refiera al valor absoluto) es el que precisamente es mayor***, pero no ocurre lo mismo con los números negativos***.	El docente reconoce que hay un problema en la comprensión del concepto y orden en los enteros (Surgimiento de *La Aporía* en la enseñanza de los enteros, Gallardo) En este momento surge un ***conflicto cognitivo*** en los alumnos, cuando el profesor dice que el argumento anterior ya no aplica y que "*no ocurre lo mismo con los números negativos*".

<table>
<tr><td colspan="3">Episodio II. EL ORDEN EN LOS ENTEROS Docente D1S</td></tr>
<tr><th>Línea</th><th>Diálogos</th><th>Observaciones</th></tr>
<tr><td>6 D1S</td><td>Si nos vamos con la misma idea hacia los negativos ustedes me decían, la mayoría de ustedes el menos tres es mayor que el menos uno por su valor…


</td><td>Establece que al menos hay dos reglas diferentes para determinar el orden de los números, provocando una división en la recta numérica con propiedades diferentes para los positivos y los negativos, obstáculo presentado en el capítulo 1 de Glaeser y Hefendel-Hebeker.

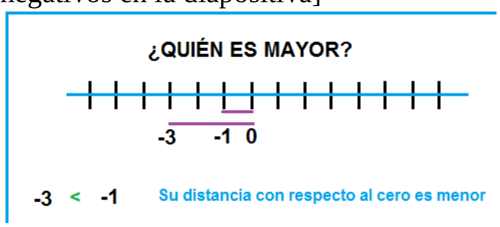
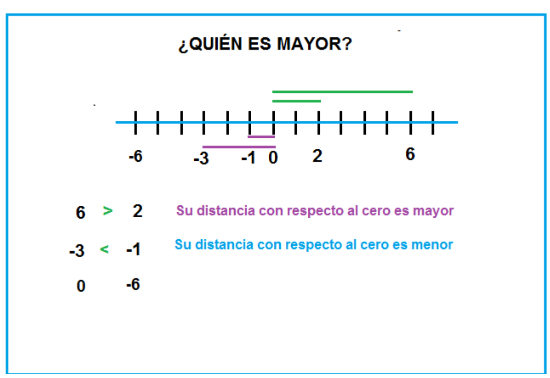
El aspecto que promueve la extensión de N a Z es el uso de una sola regla en el orden de los enteros que unifique a la recta.

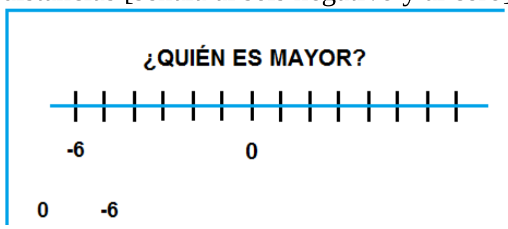
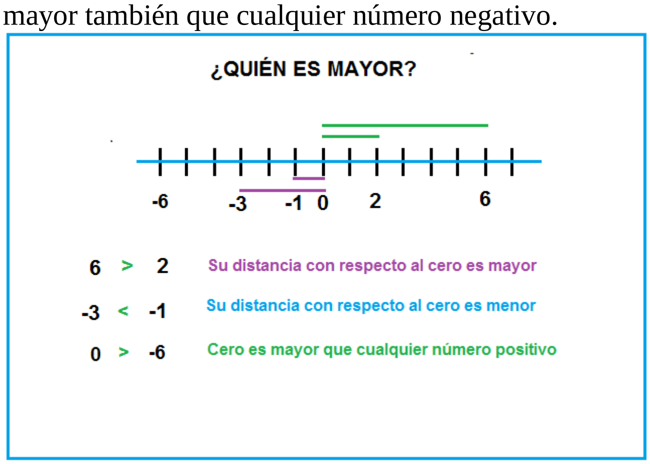
Si positivos, negativos y el cero son enteros, entonces debe aplicar la misma regla para cualquier par de números que se pretenda comparar.

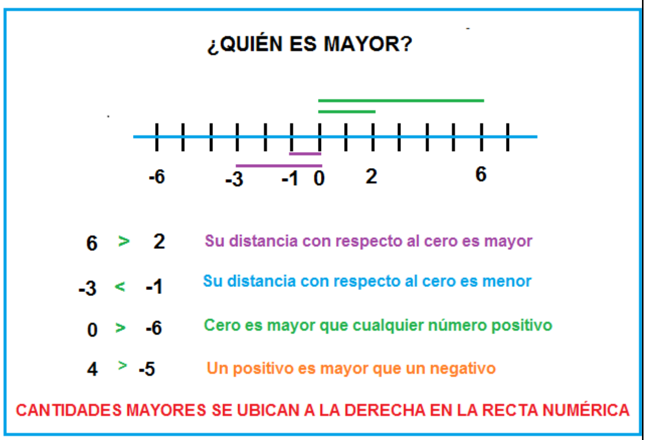
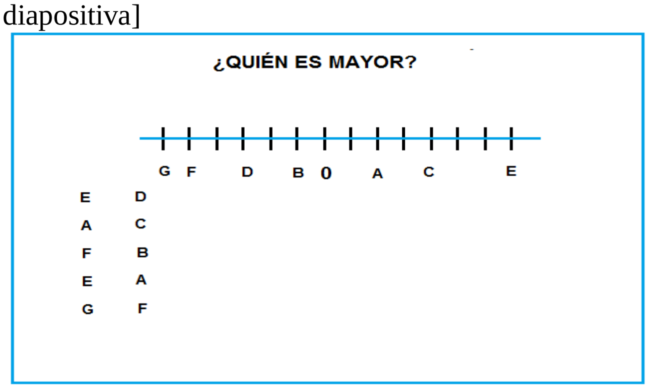
El docente coloca o escribe arbitrariamente el par de números a ordenar, lo que reafirma la confusión de los niños.
6 > 2 Se lee “seis mayor que dos”
-3 < -1 Se lee “menos tres menor que menos uno”
Pero el docente preguntó ¿Quién es mayor de menos tres y de menos uno? (-3__?__-1)
Concluye que el menos uno es mayor que el menos tres así que la escritura de derecha a izquierda correspondiente a esta situación es -1 > -3

Por esta razón, de escribir de manera indistinta la relación de orden, los alumnos arrojan diferentes respuestas relacionadas con el inciso b) de la línea 5G.

Esta situación parece que subyace en una dificultad didáctica del docente, provocando un obstáculo epistemológico en los alumnos.</td></tr>
</table>

Episodio II.	EL ORDEN EN LOS ENTEROS	Docente D1S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
7 D1S	El tres [El docente se refiere al tres negativo] está más alejado del cero, quien está más cerca del cero es el menos uno… por lo tanto el menos tres es una cantidad menor a ese menos uno. [aparece la regla y la relación de orden de dos negativos en la diapositiva] 	Explicita la nueva regla, "***Su distancia con respecto al cero es menor***" Al igual que la regla para los positivos ahora no explicita la nueva regla para los negativos como "El número más cercano al cero es mayor en el caso de dos negativos" o bien "El número que tenga menor distancia al cero será mayor que el otro en el caso de dos negativos" Apela a la nueva regla para comparar dos negativos, [El que tenga menor distancia al cero será el mayor] sin explicar el por qué cambió la regla para dos positivos [El que tenga mayor distancia al cero será el mayor] Se sugiere que: De la misma forma puede utilizar el modelo de la RN para indicar que el -1 es mayor que menos tres por tener dos unidades más. (-3 + 2 = -1)
8 D1S	Siguientes cantidades que son el cero y el menos seis [aparece ubicado el menos seis en la recta y abajo los dos números para colocar el signo de > o <] 	El docente pregunta entre el cero y el menos seis, se supone que el alumno debe entender: ¿quién es mayor, el cero o el menos seis?
9 G	[Se escuchan pocas voces de los alumnos, no muy convencidas y el grupo responde con dos opciones] "El seis" , "el cero". [predomina la respuesta "cero"]	Prevalece el conflicto cognitivo en los alumnos al no ser capaces de expresar con seguridad qué número es mayor entre el cero y el menos seis.

Episodio II. EL ORDEN EN LOS ENTEROS Docente D1S		
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
10 D1S	Voy aponer esas cantidades (en la RN) para saber dónde voy a encontrar esos números, tengo ahí sus distancias [señala al seis negativo y al cero]  	El docente al darse cuenta que no quedó clara la forma de comparar entre el cero y un negativo, recurre nuevamente a la RN, ubica e indica sin colocar los segmentos sobre la recta, pero no responde qué número es el mayor. Deja sin anotar el signo de orden en el espacio entre los dos números
11 D1S	…mi siguiente indicación sería *que el cero es mayor que cualquier número negativo*. ¿Por qué? Por que se encuentra precisamente en ese inicio de recta numérica. Entonces el cero va a ser mayor a cualquier número negativo, por lo tanto cualquier número positivo es mayor también que cualquier número negativo.  	Aparece una nueva regla para comparar a cualquier negativo con el cero "***El cero es mayor que cualquier número negativo***" Menciona al cero como inicio de la NR, nuevamente aleja la extensión del dominio entero cuando la limita. Utiliza la deducción para decir que como el cero es mayor que cualquier negativo, entonces "***cualquier positivo también será mayor que cualquier negativo***" En la diapositiva van apareciendo las reglas: (La interpretación es la siguiente) 6>2 "El seis es mayor que dos" porque "su distancia con respecto al cero es mayor" -3<-1 "Menos tres es menor que menos uno" porque "su distancia (de -3) con respecto al cero es menor"(que la distancia de -1) La interpretación posiblemente no es la misma para todos los niños, así que a esta diapositiva le falta información para ser más precisa.

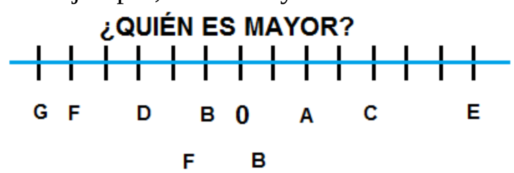
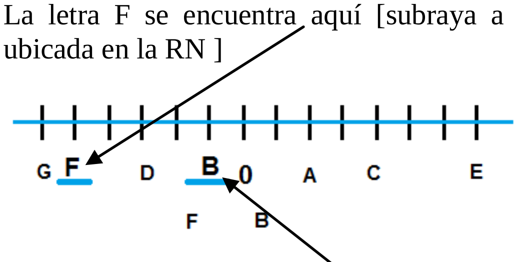
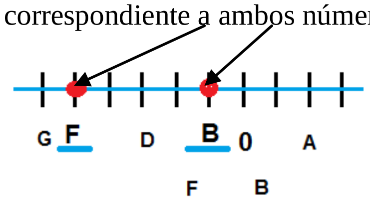
<table>
<tr><td colspan="3">Episodio II. EL ORDEN EN LOS ENTEROS Docente D1S</td></tr>
<tr><th>Línea</th><th>Diálogos</th><th>Observaciones</th></tr>
<tr><td>12
D1S</td><td>…el cuatro y el menos cinco, al ubicarlos, el cuatro siempre va a ser mayor a cualquier número negativo, lo que les decía hace un momento, un positivo es mayor que un negativo. (aparecen el cuatro y el menos cinco, después aparece el signo “>” entre ambos números e inmediatamente la frase “un positivo es mayor que un negativo”, después aparece la frase “CANTIDADES MAYORES SE UBICAN A LA DERECHA EN LA RECTA NUMÉRICA”

</td><td>Para comparar a cuatro y a cinco negativo recurre simplemente a la regla, como el cuatro es positivo y el cinco es negativo y como cualquier positivo es mayor que cualquier negativo, por transitividad el cuatro es mayor que el cinco negativo 4 > -5.
Termina con la regla en la diapositiva “un positivo es mayor que un negativo”
Concluye que cantidades mayores se ubican a la derecha en la recta numérica.
El docente ahora tiene cinco reglas para determinar el orden.
Una regla más simple puede expresarse como “Entre dos números cualesquiera, el número a la derecha del otro en la RN es mayor” en lugar de aprender 5 reglas no muy claras.</td></tr>
<tr><td>13
D1S</td><td>Aquí tengo algunas letras que se manejan para saber ya no cantidades sino simple y específicamente para determinar la posición donde se encuentran cada uno de ellos en relación al cero. [aparece una nueva diapositiva]


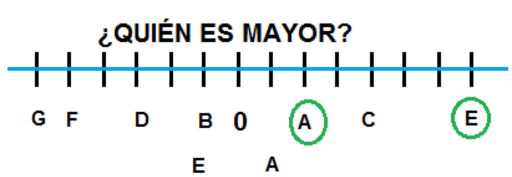
…la letra E y la letra D, para saber con relación al cero quién es mayor y quién es menor, me dice que la letra E está ubicada en el lado de los positivos, está después del cero a la derecha y la letra D está del lado izquierdo del cero y es una cantidad negativa y según las oraciones anteriores me dicen que son las cantidades positivas son mayores que cualquier negativa, es entonces que la letra E es mayor a la letra D. [aparece el signo entre las dos letras]
E > D</td><td>Nuevamente recurre al cero para determinar su posición en la RN.

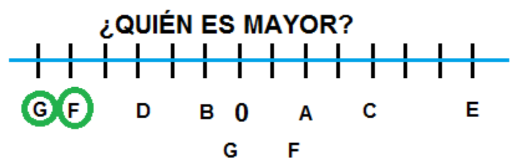
El docente necesita ubicar al cero para determinar que los números A, C y E son positivas y los números G, F, D y B son negativos.

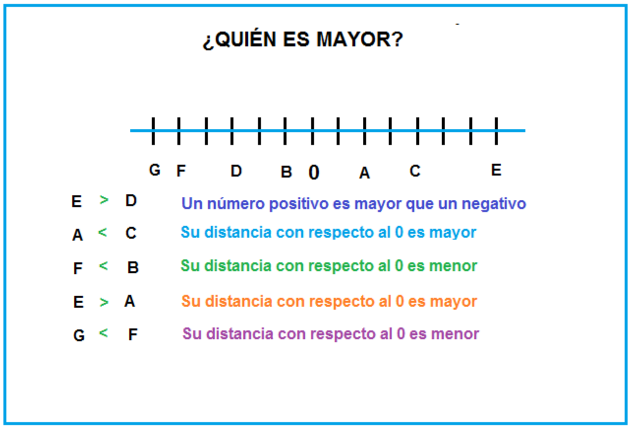
De esta manera utiliza sus “oraciones” para determinar el orden entre los pares de números en la diapositiva.

Para determinar el orden entre E y D, recurre a la oración “las cantidades positivas son mayores que cualquier negativa”.
Así que como E es positiva y D es negativa entonces E > D.</td></tr>
</table>

Episodio II. EL ORDEN EN LOS ENTEROS Docente D1S		
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
14 D1S	Bueno, aquí me gustaría que alguno de ustedes me dijera, la letra A o la letra C ¿quién es mayor? [se dirige al grupo]	
15 G	La "C" [contestan varios alumnos casi al mismo tiempo]	
16 D1S	La letra C es mayor(asiente el profesor), por lo tanto si tengo la letra C que está de este lado(señala del lado derecho primero a la C y después a la A), la letra A que también es lado positivo pero es mayor en… valor, entonces me quedaría que la letra C en relación con la letra A es mayor, la letra A es menor a la letra C. (Anota el signo entre los dos números) A < C	Utiliza la regla de dos positivos, es mayor el que tenga mayor valor (absoluto), a lo cual su escritura sería C > A y se lee "C es mayor que A", pero en la diapositiva coloca A < C y se lee "A es menor que C" Persiste la dificultad didáctica en el docente al preguntar una cosa (pregunta quién es mayor entre A y C, cuya respuesta seria "C") y responder otra (responde que A es menor que C) Los niños tendrían que identificar cómo está haciendo la lectura el profesor.
17 D1S	Siguiente ejemplo, la letra F y la letra B 	
18 G	[Una alumna contesta] ¡La be (B)! [otra alumna responde] ¡La efe (F)! [una tercer alumna dice] ¡No, la be (B!	
19 D1S	[Al ver que persiste confusión en los niños, pregunta] La efe (F)… ¿es mayor o menor?	Aún persiste el conflicto cognitivo
20 G	[un cuarto alumno menciona] ¡No es la be (B)! [entonces a coro la mayoría responde] ¡Es la be (B)!	
21 D1S	(Interviene el profesor mientras los niños responden) ¿Menor o mayor?, ¿menor?, ¿mayor?	Persiste la confusión del orden
22 A1	[Otra alumna contesta] ¡Mayor!	No le da réplica a la alumna A1
23 D1S	La letra F se encuentra aquí [subraya a la letra F ubicada en la RN]  … y la letra B aquí [la subraya también]	El docente señala tanto a la letra F como a la letra B y las subraya, en lugar de señalar el punto correspondiente a ambos números. 

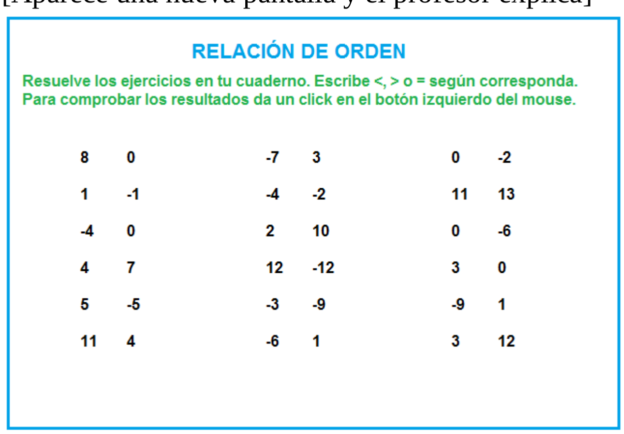
Episodio II. EL ORDEN EN LOS ENTEROS Docente D1S		
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
23 D1S	… decíamos que… al tener ambos números negativos en relación y cercanía al cero ¿quién es mayor?, ¿el que está más cerca o el que está más lejos?	**Aunque ya vio a los enteros como distancias (continuo) y como puntos (discreto), no explicita esta dualidad.** Recurre a la regla de los dos negativos
24 G	[contestan algunos no muy convencidos a qué número es mayor, el que está más cerca o más lejos del cero cuando ambos son negativos] ¡El que está más cerca! [otros] ¡El que está más lejos!	Aquí utiliza el docente el lenguaje común al decir “cerca” o “lejos” en lugar de utilizar el lenguaje matemático en relación a qué número tiene mayor distancia con respecto al cero… Aparece la tendencia cognitiva No.3, regreso a situaciones más concretas… Esto retrasa el paso de un Sistema Matemático de Signos (SMS) a otro de mayor complejidad y competencia.
25 D1S	El que está más cerca del cero cuando comparo dos números negativos. En este caso mis dos números F y B son negativos, ¿quién está más cercano al cero?	Aclara la regla de comparación de dos negativos (El que tenga menor distancia al cero será mayor), y los niños todavía no la pueden aplicar, probablemente porque se deja a la memoria y no a algún razonamiento.
26 G	[Responden tres o cuatro alumnos] Be (B).	
27 D1S	El be (B), por lo tanto (la letra) B es mayor…entonces en el orden de cómo están ahí escritos me quedaría que “F” es menor que “B” [anota el signo entre los dos números] **F < B**	Nuevamente pregunta quién es **mayor**, pero como están escritos la respuesta está en la forma de qué número es **menor.**
28 D1S	¿La letra A y la letra E? [Está preguntando qué número es mayor de los dos] 	

Episodio II.	EL ORDEN EN LOS ENTEROS	Docente D1S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
29 A1	La E [contesta tímidamente]	
30 D1S	La E ¿es mayor o menor?	
31 D1S	¡Mayor!, ambos son positivos… [anota el signo entre ambos números] E > A	
32 D1S	¿La letra G y la letra F? [Está preguntando qué número es mayor de los dos]  	
33 A3 y A4	[Contesta en voz baja una niña] La.. Efe (F) [seguido interviene otra niña] Efe (F).	
34 D1S	¿Es mayor o no?	
35 A3 y A4	Mayor [responden las dos mismas niñas, mientras los demás miembros del grupo permanecen callados]	
36 D1S	Por lo tanto nuevamente me quedaría, la G es menor que la letra F (anota el signo entre los dos números) G < F	Repite la pregunta de quién es mayor y la respuesta es menor. La mayoría de niños permanecen callados, se sospecha duda en cómo comparar un par de números, cuando lo más sencillo sería utilizar la única regla del mayor es el que está a la derecha.
37 D1S	Ahí está…la comparación… de dos cantidades en la RN para saber si son menores o mayores. ¿Y esto para qué me va a servir? Precisamente para hacer operaciones con cantidades.	El docente asegura que la comparación de orden de los enteros les servirá para la operatividad. El docente les deja ver a los niños que tienen que aprenderse las reglas para comparar dos enteros, cuando ese aprendizaje está en función de que las recuerden o memoricen, ya que no se observa un aprendizaje significativo.

<table>
<tr><td colspan="3">Episodio II. EL ORDEN EN LOS ENTEROS Docente D1S</td></tr>
<tr><th>Línea</th><th>Diálogos</th><th>Observaciones</th></tr>
<tr><td>38
D1S</td><td>[Aparece en la diapositiva las “oraciones” que determinan qué número es mayor que otro y hace su lectura]

</td><td>El docente hace un repaso de cómo determinó el signo de orden entre cada pareja de números.

Las reglas escritas en la diapositiva están en función del número que resulta mayor y no de la forma en que están escritas las parejas.

Para que los alumnos comprendieran mejor estas reglas debía completarlas:
E >D porque un número positivo “E” es mayor que un negativo “D”
C>A porque la distancia del cero a “C” es mayor que la distancia del cero a “A” (caso de los dos positivos)
B>F porque “B” tiene menor distancia al cero que “F” (caso de dos negativos)
E>A por la regla de los dos positivos dada por el docente.
F>G por la regla de los dos negativos dada por el docente.

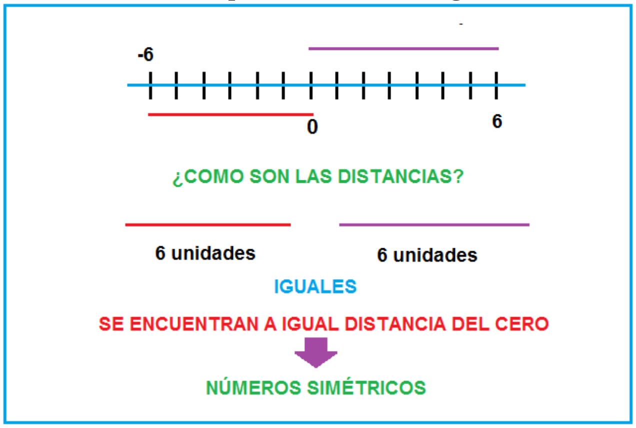
Estas reglas son presentadas a los alumnos sin permitir que sean éstos quienes den significado y construyan sus propias reglas.</td></tr>
<tr><td>39
D1S</td><td>[Aparece una nueva pantalla y el profesor explica]

</td><td>Los niños ya tuvieron la clase de relación de orden de los enteros, ahora van a realizar un ejercicio de fortalecimiento de sus nuevas habilidades y conocimientos.</td></tr>
</table>

Episodio II. EL ORDEN EN LOS ENTEROS Docente D1S		
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
39 D1S	Aquí tenemos una serie de ejercicios para determinar cuál es mayor, cuál es menor en relación a los signos, *ya no estamos utilizando la recta numérica, sino simplemente aquellas* ***consideraciones*** *que vimos hace un momento de saber cuándo son mayores, cuándo son menores*.	El docente pasa de utilizar el modelo de la RN a un modelo mental de la misma. Va a utilizar sus “enunciados” ahora “consideraciones” que finalmente son las 5 reglas para determinar el orden.
40 D1S	[aparece el primer ejercicio de la serie resuelto] $8 > 0$	
41 A1	[Pasa al pizarrón el primer estudiante a resolver la segunda relación de orden] $1 > -1$ [A1 escribe el signo > para expresar que el uno es mayor que el uno negativo] [Interviene el grupo murmurando que los dos números son iguales, entonces el profesor les dice que si son iguales coloquen el signo de igual y A1 cambia su respuesta y coloca el signo de igual] $1 = -1$	El docente no indica si es correcto el ejercicio, cuando cambia la respuesta A1, no corrige de inmediato el error, incluso parece consecuentarlo, para después corregir.
42 G	[Se escuchan varias voces y los niños muestran desacuerdo en que si los números son iguales o no] Es igual ¿no?, ¡no!… [el grupo parece quedar con dudas]	Resurge el conflicto cognitivo en el grupo.
43 D1S	[El docente al darse cuenta de la confusión interviene] Recuerden las **premisas** que son…Dos números negativos el que está más cercano al cero es mayor, cualquier número positivo es mayor a cualquier número negativo y el cero es mayor que cualquier número negativo]	A los “enunciados” , después “consideraciones” (reglas) las llama ahora “*premisas*”
44 A2	[mientras el profesor termina la explicación anterior pasa A2 y resuelve correctamente la relación de orden porque al momento que va a llevar a cabo escucha la regla de que el cero es mayor a cualquier número negativo] $-4 < 0$	A2 resuelve correctamente aplicando la regla de que el cero es *mayor que* cualquier negativo.
45 A3	[Resuelve correctamente, firme y rápidamente] $4 < 7$	No parece haber problema en determinar quién es el mayor en el caso de dos positivos.
46 A4	[Resuelve incorrectamente, pero firme y rápidamente] $5 = -5$	Aparece el error derivado de que los niños no han superado el conflicto cognitivo en la relación de orden. Y del tipo didáctico, ya que el profesor no corrigió a tiempo y permitió que continuara la idea de que los simétricos son iguales.

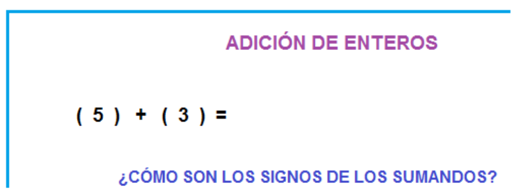
<table>
<tr><td colspan="5">Episodio II. EL ORDEN EN LOS ENTEROS Docente D1S</td></tr>
<tr><th>Línea</th><th colspan="3">Diálogos</th><th>Observaciones</th></tr>
<tr><td>47 A5</td><td colspan="3">[Resuelve rápidamente]
$11 > 4$</td><td></td></tr>
<tr><td>48 A6</td><td colspan="3">[Resuelve rápidamente]
$-7 < 3$</td><td>El alumno resuelve correctamente, posiblemente aplica la regla, cualquier positivo es mayor que cualquier negativo o puede ser que colocó el signo sin ningún tipo de reflexión y resultó acertado.</td></tr>
<tr><td>49 A7</td><td colspan="3">[Resuelve rápidamente]
$-4 < -2$</td><td>A7 aplica la regla, el dos negativo tiene menor distancia al cero que el cuatro negativo.</td></tr>
<tr><td>50 A8</td><td colspan="3">[Resuelve errónea, pero rápidamente]
$2 > 10$</td><td>Se presenta el error, confirmando que este sujeto no ha adquirido la competencia deseada por el profesor para aplicar correctamente los signos de orden.</td></tr>
<tr><td rowspan="10">51 G</td><td colspan="3">[La clase se torna dinámica y pasan al pizarrón los estudiantes A9 a A17, anotan el signo que determina el orden de los números]</td><td></td></tr>
<tr><td>A9</td><td>$12 = -12$</td><td>Incorrecto</td><td>Se trasmitió el error a los demás niños por no corregir a tiempo éste. (Obstáculo didáctico)</td></tr>
<tr><td>A10</td><td>$-3 > -9$</td><td>Correcto</td><td></td></tr>
<tr><td>A11</td><td>$-6 < 1$</td><td>Correcto</td><td></td></tr>
<tr><td>A12</td><td>$0 < -2$</td><td>Incorrecto</td><td>A12 cree que el dos negativo es mayor a cero por tener mayor valor numérico (absoluto) como lo expresó en un momento el profesor (Obstáculo didáctico) y no está aplicando la regla adecuada dada por éste.</td></tr>
<tr><td>A13</td><td>$11 < 13$</td><td>Correcto</td><td></td></tr>
<tr><td>A14</td><td>$0 < -6$</td><td>Incorrecto</td><td>Se repite en otro alumno A13 el mismo error de A12, porque cree nuevamente que el seis negativo tiene mayor valor numérico (absoluto) que el cero y no aplica la regla adecuada.</td></tr>
<tr><td>A15</td><td>$3 > 0$</td><td>Correcto</td><td></td></tr>
<tr><td>A16</td><td>$-9 < 1$</td><td>Correcto</td><td></td></tr>
<tr><td>A17</td><td>$3 < 12$</td><td>Correcto</td><td></td></tr>
</table>

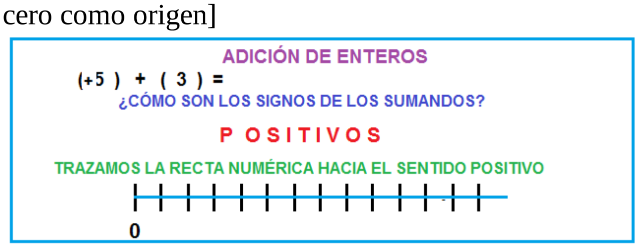
Episodio II. EL ORDEN EN LOS ENTEROS Docente D1S		
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
52 D1S	[Después de colocar los signos de mayor, menor que o igual, el docente revisa si es correcto, para ello comenta lo siguiente:] El primero, [señala 8>0] bueno ocho es mayor que cero.	
53 D1S	El segundo, dicen que es igual [señala 1 = -1 en la diapositiva] Recuerden las premisas: todo número positivo, porque este es positivo [señala al 1], si no tiene signo es positivo, es mayor que cualquier número negativo y en teoría parece que los dos tienen el mismo valor, uno, pero uno es positivo y el otro es negativo.	Ahora interviene para aclarar el caso de los simétricos. Comenta que los dos números simétricos tienen el mismo valor, y parece que hace falta hablar del concepto de los simétricos como del valor absoluto como temas necesarios para aclarar esta situación.
54 D1S	Siguiente, [señala a -4 < 0 y comenta:] El cero es mayor a cualquier número negativo. Siguiente, [señala a 4 < 7y argumenta:] Ambos son positivos y el de mayor valor es precisamente el mayor.	Cuando dice el de mayor valor es precisamente el mayor, está usando nuevamente lenguaje natural en lugar de lenguaje matemático con términos como valor absoluto.
55 D1S	En la misma consideración [señala al 5 = -5] Uno es positivo y el otro es negativo, todos los números positivos son mayor a cualquier número negativo. [Señala 11 > 4 y dice] Es correcto. Siguiente: [Señala ahora al -7 < 3 y expresa:] Menos siete y tres también está correcto, ya que todo número positivo es mayor a cualquier número negativo. Ahora ¿quién es mayor? [se refiere a -4 < -2] El menos dos está más cercano al cero, por lo tanto está correcto ese ejercicio.	Es la misma situación de la línea 53.

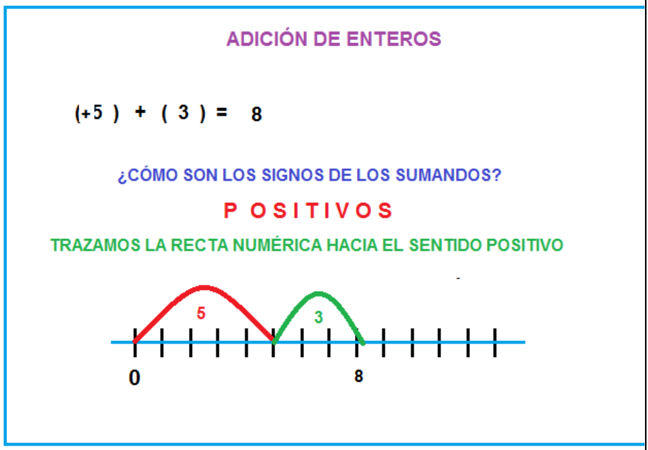
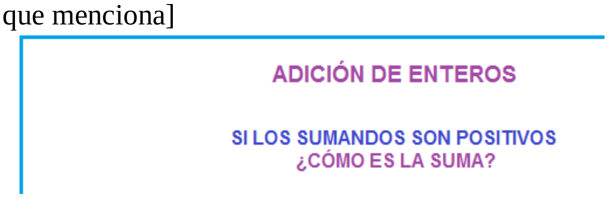
Episodio II. EL ORDEN EN LOS ENTEROS		Docente D1S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
55 D1S	El siguiente: Son los dos números positivos [se refiere a 2 > 10] Son el diez y el dos, por simple inspección el diez es mayor. Doce y menos doce: [señala en la diapositiva 12 = -12] Recuerden ente positivo y negativo el mayor siempre va a ser el positivo. [quiso decir que el doce es mayor al menos doce] Menos tres y menos nueve: [hace referencia a -3 > -9] ¡Perfecto! [está resuelto correctamente] Menos seis y uno: [señala -6 < 1] Todo número positivo es mayor a cualquier negativo. El cero y el dos [0 < -2] La misma premisa de hace un momento, El cero es mayor que cualquier número negativo, [menciona] aquí, [señalando al dos negativo] podría ser dos, veinte, doscientos, dos mil, veinte mil, doscientos mil y seguiría siendo mayor el cero. Siguiente: Trece es mayor que once [11 < 13]	Dice que el diez es mayor que el dos por simple inspección pero no dice a los niños que corrijan el signo > por el <, acto que puede originar confusión después. (Obstáculo didáctico). Nuevamente aparece la situación de la línea 53. Línea 51 G del A12. Hay ambigüedad en las respuestas ya que en la expresión, su lectura sería “once es menor que trece”
56 D1S	Siguiente: Cero es mayor que menos seis [0 < -6] Todo cero es mayor a cualquier número negativo. Siguiente: Tres es mayor que cero [3 > 0]. El uno es mayor que menos nueve: [-9 < 1] y… El doce es mayor que el tres [3 < 12]	Se repite la situación de la Línea 51 G del alumno A14.

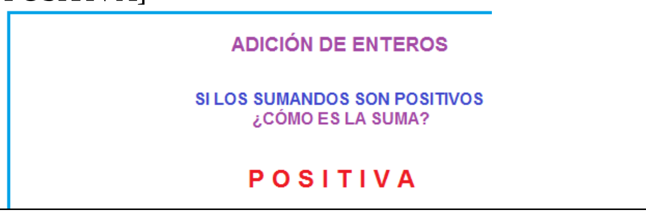
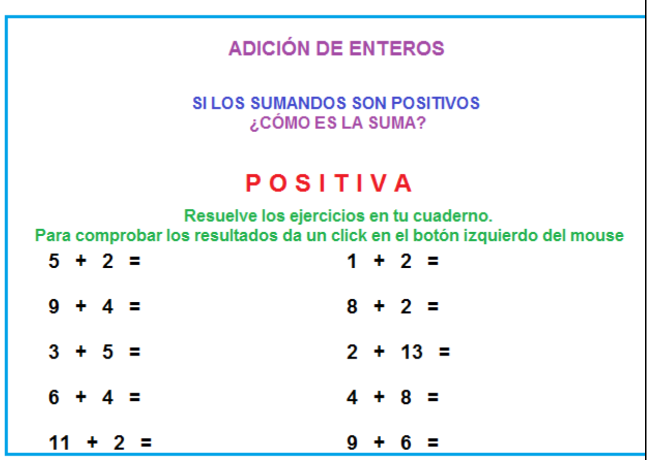
Episodio III.	EL SIMÉTRICO Y ELVALOR ABSOLUTO.	Docente D1S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
1 D1S	[Se muestra una diapositiva como la siguiente]  … primero observa. Tengo al cero, ¿Cómo son las distancias entre el cero y el seis y (entre el cero y) el menos seis?, *no tomen en cuenta el signo*, simple y sencillamente ¿Cómo son las distancias?	Se presenta una dificultad didáctica para explicar la definición del simétrico. No utiliza el término de simetría con respecto al cero y en su lugar utiliza el concepto del valor absoluto sin mencionarlo. No indica cómo se escribe el simétrico. La propuesta es: Sim 6 = -6, o bien: -(6) = - 6 Simétrico de 6 = menos seis
2 G	Iguales…	
3 D1S	Iguales, como lo dice ahí, se encuentran a igual distancia del cero por lo tanto esos números se llaman simétricos. Si yo tengo una cantidad positiva y una cantidad negativa y están a la misma distancia del cero su nombre es números simétricos.	No utiliza expresiones generales como: $-(a) = -a$ Simétrico de a es –a Cuando explica la operatividad de los enteros regresa al concepto de simétrico y ahí hace ejemplos cuando dice, el simétrico de ocho (8) es menos ocho (-8) y el simétrico de menos cuatro (-4), es cuatro (4)
4 D1S	[Ahora el docente presenta el tema del valor absoluto y aparece una nueva diapositiva como la siguiente:]	No utiliza la definición de valor absoluto en términos del orden con respecto al cero, sino de la distancia del cero al número, que como primera enseñanza parece adecuada para después construir la definición. Correctamente indica que se escribe entre barras pero no utiliza el signo de igual.

Episodio III.	EL SIMÉTRICO Y ELVALOR ABSOLUTO.	Docente D1S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
4 D1S	 Valor absoluto.	Propuesta: $\|-4\| = 4$ en lugar de $\|-4\|$ es 4
5 D1S	[Al respecto el docente comenta:] Lo que tengo de valor absoluto a conocer, lo que acabo de explicar, en relación a que ya no voy a tomar en cuenta lo que es el signo, sino simplemente el valor numérico que me representa. Si yo tengo aquí el valor absoluto y tengo la distancia del cero al cuatro, la distancia únicamente que va recorriendo del cero a ese menos cuatro es la que me interesa y a eso se le llama valor absoluto. Si yo tengo del cero al tres y es signo positivo no me interesa el signo, me interesa únicamente es la distancia que existe, tanto del cero a ese número 4 como del cero a ese número tres, y ese es el valor absoluto, ¿cómo se representa?... con un par de líneas de forma paralela más grandes para que no parezca un uno y de esa manera identifico que es un valor absoluto.	No indica la definición $\|a\| = a$ si $a > 0$ $\|a\| = -a$ si $a < 0$ No indica que el valor absoluto de un número es siempre mayor o igual a cero. $\|a\| \geq 0$
6 D1S	El valor absoluto no tiene signo, no es positivo ni negativo, simplemente es la distancia que se recorre del cero hacia ese punto o hacia ese número que estoy haciendo. En este caso de cero al cuatro es únicamente recorrí cuatro espacios, del cero al tres solamente recorrí tres espacios.	Existe una imprecisión en el concepto, ya que a partir de su definición, el valor absoluto de un número siempre es positivo, es decir, tiene un signo implícito, excepto en el caso del cero que es neutro.
7 D1S	Su valor absoluto de tres es tres. Su valor absoluto de cuatro es cuatro. De menos cuatro es cuatro.	No escribe matemáticamente el valor absoluto de los números que menciona, sólo lo hace verbal. La propuesta: Escribir semántica y sintácticamente: Valor absoluto de tres es tres $\| 3 \| = 3$ Valor absoluto de menos cuatro es cuatro $\| -4 \| = 4$

Episodio IV. ADICIÓN DE DOS POSITIVOS. Docente D1S		
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
1 D1S	Adición de números enteros…	
	…tenemos una suma de números: tres más cuatro más seis [utiliza el pizarrón y escribe] $3 + 4 + 6 =$ …eso me da como resultado ¿cuánto? [pregunta al grupo]	
2 D1S	[Contestan firmemente] ¡Trece!	No parece haber ningún conflicto, ya que en este momento los alumnos provienen de un SMS que dominan, el aritmético, el del dominio de los Naturales.
3 D1S	…da como resultado trece [completa la operación] $3 + 4 + 6 = 13$ Bueno tengo esas cantidades y ¿cómo las represento en la recta numérica?, bueno siguiendo esos pasos. [enciende el proyector y aparece nuevamente la presentación con la siguiente pantalla]  	Dice que se representan en la RN pero no aparece. El docente utiliza cambia de la adición de dos naturales 5 + 3= A la adición utilizando paréntesis $5 + 3 = (5) + (3) =$
4 D1S	Como dice ahí, tengo cinco más tres, ¿cuánto me da mi resultado? [Se dirige al grupo]	
5 G	¡Ocho!	
6 D1S	Primero lo que debo entender, ¿cómo son los signos de los sumandos?	Parece indagar en el signo de los números que se están sumando.
7 G	Son… posi..(positivos) [dudan del signo de los números y se escucha una voz tenue] ¡Positivos!	Afirman los alumnos poco convencidos que son positivos
8 D1S	… o son positivos o son negativos, eso es en lo que me debo de enfocar cuando voy a hacer operaciones con números enteros, primero saber si son positivos o son negativos, ¿cómo sé si son positivos, ese cinco está entre paréntesis y no tiene signo? Pero recuerden que… [Hace participar al grupo]	
9 G	¡Se lo podemos agregar! [contesta el grupo al unísono]	

Episodio IV. ADICIÓN DE DOS POSITIVOS. Docente D1S		
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
10 D1S	Se lo podemos agregar, únicamente para no distorsionar la operación y conocer que ese signo está ahí, [signa al cinco con el signo más] (+5) + (3) = ¿CÓMO SON LOS SIGNOS DE LOS SUMANDOS? … quizá de manera oculta, pero ahí está el signo positivo.	Después de colocar paréntesis, signa los números para reafirmar que son positivos. Esta considerando a los naturales como enteros positivos. Está realizando la extensión de los naturales a los enteros, aunque sin ser consciente de ello. Utiliza la notación completa de Cid y Bolea.
11 D1S	Igual el número tres que está entre paréntesis, ¿qué signo tiene?	
12 G	¡Positivo! [Contestan todos]	
13 D1S	Positivo, por lo tanto, ¿cómo son los signos de los sumandos?	
14 D1S, G	[Responde el profesor junto con algunos alumnos] Positivos, [aparece la palabra "positivos" en la diapositiva] ADICIÓN DE ENTEROS (+5) + (+3) = ¿CÓMO SON LOS SIGNOS DE LOS SUMANDOS? POSITIVOS …Porque recuerden que en una adición ¿cómo se llaman los elementos de la adición?... [Al no responder el grupo, contesta el docente] ¡Sumandos! y al resultado de la adición se le llama…[solicita al grupo la respuesta]	
15A1	¡Suma! [Los demás se quedan callados]	
16 D1S	Entonces son los elementos que debo conocer. Pasamos a la recta numérica hacia el sentido de los números positivos…	Inicia la introducción de un modelo de enseñanza: la recta numérica, para la suma de enteros positivos.
17 D1S	[se muestra en la diapositiva la recta numérica con el cero como origen]  Recuerden, los números positivos, el sentido de los positivos está hacia el lado derecho…	Utiliza la RN de de los naturales para ahora utilizarla como RN de los enteros positivos. Se sugiere que sería adecuado continuar la recta hacia los negativos aunque se realicen operaciones en la región positiva. No hay consciencia del establecimiento del sistema de referencia. Y la definición debe ser fortalecida en el sentido de que los positivos son aquellos mayores que cero ya que si la recta es vertical, ya no aplica esa descripción.

Episodio IV. ADICIÓN DE DOS POSITIVOS. Docente D1S		
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
18 D1S	Voy a escribir y voy a colocar cada uno de esos números [refiriéndose al cinco y al tres] cinco positivo, … vimos anteriormente en primaria…(que) lo identificábamos así, [muestra en la diapositiva los saltos del cero al 5 y enseguida otro salto del 5 al 8]  y tres positivo, estamos identificando el resultado que finalmente me da como resultado ocho. La suma de esos dos números me da ocho.	Apelación a la adición de naturales como los niños lo hicieron en la primaria con ayuda de la recta numérica y saltos (de la ranita) No ubica al 5 y al 3 en la RN como puntos. Para realizar la suma de 5 + 3, ubica al primer sumando, a partir de éste recorre 3 lugares a la derecha mediante un salto, llegando así de dos saltos al 8, que es el resultado de la adición en la recta numérica de 5+3=8 **Para ubicar al 5 traza un arco del cero al cinco. El profesor no se percata que *está realizando una operación en este momento representada por 0+5=5***
19 D1S	…lo importante… es esta parte… [Señala en la diapositiva la pregunta "¿cómo son los signos de las cantidades que estoy utilizando?"] Ustedes van a decir que las sumas ya las conozco, ya las sé hacer, sí, pero cuando empezamos con números… enteros lo primero que debo… conocer, es qué tipo de signo tienen las cantidades, si son positivas o son negativas.	Ya mencionó que los naturales son enteros positivos, ahora dice a los alumnos que hay sumas con números negativos. Es otro paso para ir del dominio natural al dominio entero.
20 D1S	Siguiente. Tengo un ejercicio para saber qué hacer con ese tipo de cantidades. [Se muestra una nueva diapositiva al momento en que menciona]  Adición de enteros. ¿Cómo lo voy a hacer? Si los sumandos son positivos, ¿cómo es la suma? [invita al grupo a responder]	

<table>
<tr><td colspan="3">Episodio IV. ADICIÓN DE DOS POSITIVOS. Docente D1S</td></tr>
<tr><td>Línea</td><td>Diálogos</td><td>Observaciones</td></tr>
<tr><td>21 A2 y A3</td><td>¡Positiva!
[Dos alumnos contestan firmemente y otros seis contestan tímidamente y los demás permanecen callados. Se muestra en la diapositiva la respuesta: POSITIVA]

</td><td>No se muestra convencimiento por parte de los alumnos de que los números naturales ahora son iguales a su conjunto isomorfo, los enteros positivos, quizá porque les está siendo difícil el paso del número natural al entero, y a la dificultad de conceptualizar al número entero positivo y negativo.</td></tr>
<tr><td>22 D1S</td><td>Son… condiciones que ustedes de deben de aprender para conocer una regla que me determine cuándo cantidades son positivas, cuando las cantidades son negativas o cuando tengo una positiva y una negativa (para realizar una adición)</td><td>Establece que hay condiciones para conocer las “reglas” para sumar enteros.</td></tr>
<tr><td>23 D1S</td><td>Dice ahí, cómo son los sumandos, eh… si los sumandos son positivos, ¿cómo es la suma? Positiva. [Se completa la pantalla con un ejercicio de suma de enteros positivos]


… Tenemos las cantidades:

cinco más dos, (5+2)

nueve más cuatro…(9+4)

…pasan a resolverlo así, como va la fila.

Resultados de su lado derecho [pasan los alumnos a resolver las operaciones]</td><td>Establece la primera regla para la suma de dos positivos:

Si los sumandos son positivos la suma es positiva.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">Episodio IV. ADICIÓN DE DOS POSITIVOS. Docente D1S</th></tr>
<tr><th>Línea</th><th>Diálogos</th><th>Observaciones</th></tr>
<tr><td>24 F1</td><td>[La alumna F1signa ambos números positivamente y escribe el resultado]

$^{+}5 \;+\; ^{+}2 \;=\; 7$</td><td>La alumna F1 resuelve correctamente, en este proceso se muestra la tendencia cognitiva No. 10, de producir errores sintácticos por códigos personales intermedios.
Está en la construcción sintáctica de la operatividad de adición de positivos, ya que no utiliza paréntesis (la notación completa mencionada por Cid y Bolea)</td></tr>
<tr><td>25 D1S</td><td>… vamos a colocar el signo positivo como lo hizo su compañera pero cuando tengamos paréntesis.

Cuando tenemos simplemente la suma así como está escrita aquí ya no es necesario ponerle los signos porque estamos identificando que ambos son positivos y podemos efectuar una suma.

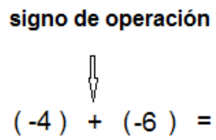
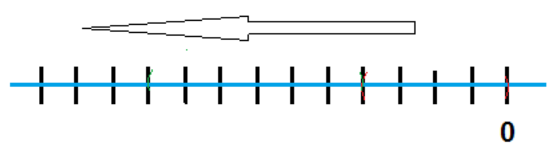
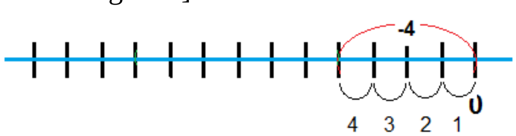
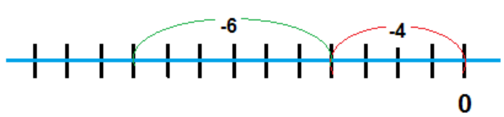
Cuando tengamos… entre paréntesis, (a) las cantidades sí hay que colocarles el signo para no perder el sentido de la operación y del signo de nuestras cantidades. En este caso como todas las cantidades son positivas y se están sumando basta simplemente con que hagamos la suma.</td><td>El docente dice que sólo se signan los números cuando haya paréntesis. (lo cual no es necesariamente así, ya que un positivo entre paréntesis no necesita signarse para saber que es positivo)
Cuando se tenga una suma “así como está escrita”, sin paréntesis no es necesario signarlos porque son positivos. (anteriormente se menciona que es un acercamiento al dominio entero el no signar necesariamente a los positivos)

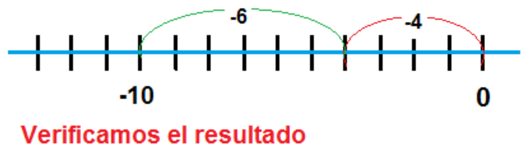
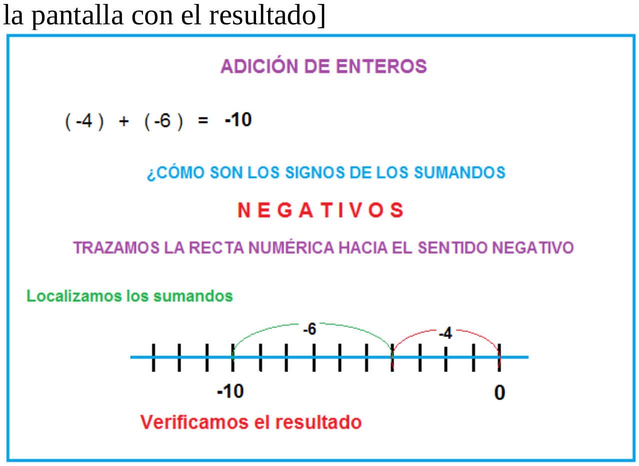
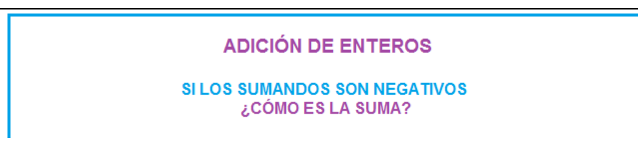
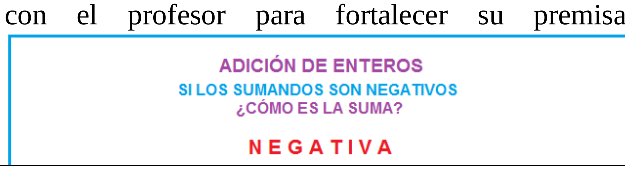
Nuevamente establece diferencias entre el signo de operación (binario) y el signo del número (unario). El docente sólo considera que los números tienen signo cuando están entre paréntesis. Esto conformará un obstáculo didáctico en la suma de números con signo sin paréntesis.</td></tr>
<tr><td>26 G F2-F10</td><td>[pasan al pizarrón los alumnos continuando la fila, anotando el resultado de las operaciones de suma de positivos]
<table>
<tr><td>F2</td><td>$9 + 4 = 13$</td><td>Correcto</td></tr>
<tr><td>F3</td><td>$3 + 5 = 8$</td><td>Correcto</td></tr>
<tr><td>F4</td><td>$6 + 4 = 10$</td><td>Correcto</td></tr>
<tr><td>F5</td><td>$11 + 2 = 13$</td><td>Correcto</td></tr>
<tr><td>F6</td><td>$1 + 2 = 3$</td><td>Correcto</td></tr>
<tr><td>F7</td><td>$8 + 2 = 10$</td><td>Correcto</td></tr>
<tr><td>F8</td><td>$2 + 13 = 15$</td><td>Correcto</td></tr>
<tr><td>F9</td><td>$4 + 8 = 12$</td><td>Correcto</td></tr>
<tr><td>F10</td><td>$9 + 6 = 15$</td><td>Correcto</td></tr>
</table></td><td>Los niños resuelven correctamente la operación de suma, en este momento no se sabe si están sumando naturales o si ya ven a estos números como enteros positivos sin la necesidad de signarse.

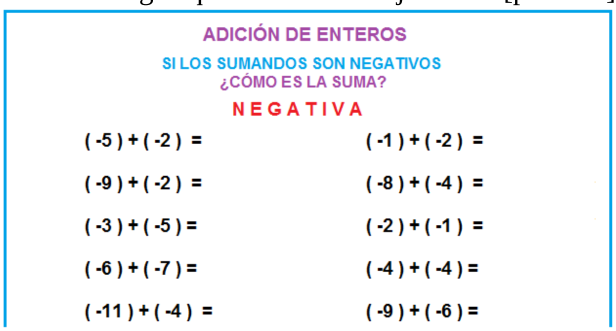
No hay indicios aún de si existe la conciencia del estudiante de que está haciendo la extensión numérica.</td></tr>
</table>

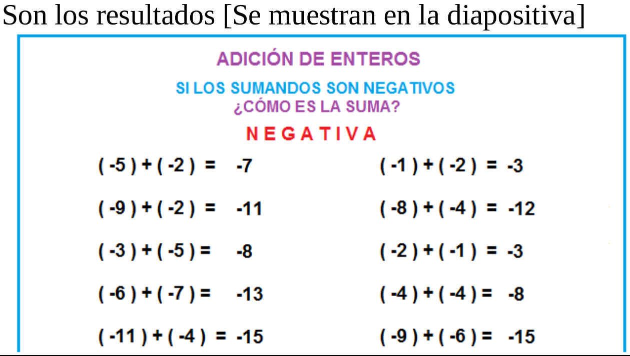
Episodio IV. ADICIÓN DE DOS POSITIVOS. Docente D1S		
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
27 D1S	Ahora veamos si aquellas cosas de primaria nos hicieron bien. [Aparecen los resultados correctos en las diapositivas de las diez operaciones de suma de positivos, las cuales coinciden con los resultados de los alumnos]	En este comentario se reconoce que hubo "cosas malas" (aspectos inadecuados) como el afirmar que no se puede "quitar" un número mayor de un número menor, es decir el obstáculo didáctico.

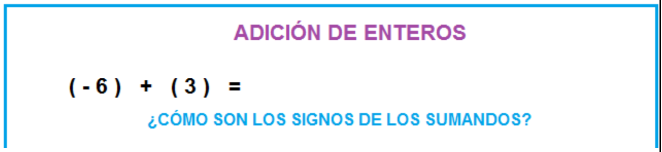
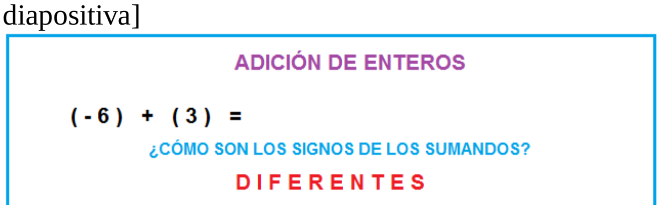
Episodio V.	ADICIÓN DE DOS NEGATIVOS.	Docente D1S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
1 D1S	… Adición… con números negativos.	
2 D1S	¿… Se pueden sumar los números negativos?	Hace una pregunta identificada como obstáculo epistemológico que repercutirá en el conflicto cognitivo.
3 G	¡No!, ¡sí!, ¡no!..[contestan algunos alumnos, en su mayoría dicen que no, y sólo unos cuantos dicen que sí]	Surge nuevamente un conflicto cognitivo en los estudiantes.
4D1S	¿No se pueden sumar? ¡Si son negativos!, ¡se tienen que sumar! [aparece una nueva diapositiva] ADICIÓN DE ENTEROS (-4) + (-6) = ¿CÓMO SON LOS SIGNOS DE LOS SUMANDOS	No se sabe por qué el docente pregunta ¿No se pueden sumar?, quizá al hecho del desconocimiento del número negativo en los niños y si estos pueden operarse.
5 A2, G	¡Sí, sí se puede! [responde un niño firmemente] [otros contestan] ¡No se puede!	Durante la primera enseñanza surge también la tendencia cognitiva No. 8, de tipo inhibitoria al decir que no se puede.
6 A1	Sí se puede pero creo que no da un resultado negativo sino uno positivo	A1 intuye un resultado positivo, pero no sustenta su argumento.
7 A3	Entonces se suman porque son iguales (en los signos)	El argumento de la niña A3, es valioso porque está viendo a dos cantidades “iguales” o al menos del mismo tipo (negativas) que se tienen que sumar, está de manera inconsciente reconociendo la estructura aditiva: la suma de dos números negativos.
8 D1S	Se suman porque son iguales, ¿Quién más? ¿Qué más podría pasar con dos cantidades iguales?	
9 A3	¡Se suman y el resultado es negativo!	A3 *establece su propia regla* a partir del argumento de sumar dos cantidades iguales (del mismo tipo) y el resultado tiene que ser igual en el mismo sentido de las cantidades (negativo). La alumna construye su regla a partir de dar sentido a la operación, está utilizando la operatividad al mismo nivel de los naturales, lo que indica que está extendiendo el dominio natural al entero.

Episodio V.	ADICIÓN DE DOS NEGATIVOS.	Docente D1S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
10 D1S	… ¿Cómo son los signos de los sumandos? Negativos… las cantidades… tienen sus signos, pero la operación… es ésta [señala el signo de la suma]  Lo que me interesa es el signo de la operación, qué operación están haciendo (los dos números) ¿una sustracción o una adición?... están haciendo una adición, son dos números negativos pero están haciendo una adición… ¿cómo son los signos de los sumandos? … a pesar de que son negativos su nombre siguen siendo sumandos porque están haciendo una operación de adición.	El docente trata de que los alumnos observen la estructura de la expresión, *es una suma de dos números negativos*. Históricamente la “Estructura” queda determinada formalmente con Hankel (ver capítulo 1)
11 D1S	… son negativos, fíjense, trazamos la recta numérica en sentido negativo, recuerden que el sentido negativo está hacia la izquierda del [dirige su brazo hacia la izquierda sobre la recta numérica]  y vamos a colocar los números para saber qué sucede con ellos, primero coloco el menos cuatro que aparece ahí del cero, uno, dos, tres y cuatro espacios [cuenta los espacios y marca un arco del cero al cuatro negativo]  y luego el seis negativo porque siguen siendo negativos, uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis. [Repite el conteo de espacios hasta contar los seis espacios en donde dibuja un arco y asigna el seis negativo]  Verificamos el resultado ¿cuánto me da la distancia total del cero hacia el punto final?[pregunta al grupo]	Utiliza la RN como modelo de enseñanza para la adición de dos números enteros negativos como números dirigidos. Recuerda nuevamente que el sentido negativo es a la izquierda del cero. No ubica a los dos números en la RN, sólo ubica al primer sumando -4. Nuevamente, en lugar de ubicar el cuatro negativo en la RN, hace una operación al partir del cero hacia el cuatro negativo: 0 – 4 = -4 Hace una sustracción en lugar de una adición, pero como operación simétrica a la adición de enteros positivos, dice que ahora se van a sumar los números hacia la izquierda 0 + (-4) = (-4) y (-4) + (-6) = -10 Pero la operación que está efectuando estrictamente es: 0-4-6= -10 que es equivalente a: 0 + (-4) + (-6) = -10

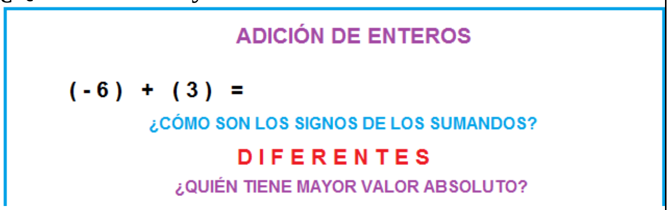
Episodio V.	ADICIÓN DE DOS NEGATIVOS.	Docente D1S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
11 D1S	 	Está nuevamente utilizando dos reglas diferentes para adición de positivos y negativos en la RN. Esta acción de utilizar dos reglas para sumar no ayuda a conceptualizar a los números como enteros, sino como naturales relativos. (Gallardo, 1994 & González Marí, 2005)
12 G	¡Diez! [contesta la mayoría de los niños]	Los niños están viendo a los negativos como naturales relativos. Resultado del obstáculo didáctico (de enseñar números relativos en lugar de números negativos)
13 D1S	Diez, pues resulta como está en los números negativos mi resultado es *menos diez*. Y ese es el resultado que tengo como finalmente la distancia con la suma de esos dos números negativos. [Se completa la pantalla con el resultado]  	Asocia la suma de dos negativos con una distancia. Lo cual puede traer complicaciones cuando los niños escuchen que las distancias no son negativas. Se sugiere hablar de *desplazamientos* para hacerlo coincidir con las características del “movimiento” y de los “vectores” en la clase de Física.
14 D1S	 Si los sumandos son negativos. ¿Cómo es la suma?	
15 G	¡Negativa! [Contesta la mayoría de los niños junto con el profesor para fortalecer su premisa]  	

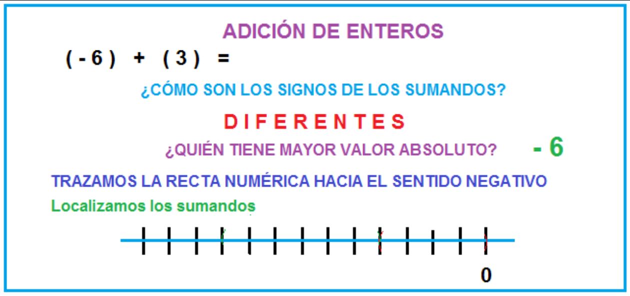
<table>
<tr><td colspan="5">Episodio V. ADICIÓN DE DOS NEGATIVOS. Docente D1S</td></tr>
<tr><th>Línea</th><th colspan="3">Diálogos</th><th>Observaciones</th></tr>
<tr><td>16
D1S</td><td colspan="3">Por lo tanto ya entendimos entonces que los números negativos también se pueden sumar, pero la suma de ambos sería también negativa…</td><td>Reafirma la segunda regla para la suma de dos negativos:
La suma de dos negativos es negativa.</td></tr>
<tr><td>17
D1S</td><td colspan="3">Entonces tengo aquí otra serie de ejercicios [pantalla]

</td><td>Los ejercicios se muestran con la notación completa.</td></tr>
<tr><td>18
D1S</td><td colspan="3">Pasen… [Pasan los alumnos al pizarrón]</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="10">19
F11-
F20</td><td>F11</td><td>$(-5) + (-2) = -7$</td><td>Correcto</td><td rowspan="10">La mayoría aplica la regla excepto F17, que resta en lugar de sumar.</td></tr>
<tr><td>F12</td><td>$(-9) + (-2) = -11$</td><td>Correcto</td></tr>
<tr><td>F13</td><td>$(-3) + (-5) = -8$</td><td>Correcto</td></tr>
<tr><td>F14</td><td>$(-6) + (-7) = -13$</td><td>Correcto</td></tr>
<tr><td>F15</td><td>$(-11) + (-4) = -15$</td><td>Correcto</td></tr>
<tr><td>F16</td><td>$(-1) + (-2) = -3$</td><td>Correcto</td></tr>
<tr><td>F17</td><td>$(-8) + (-4) = -4$</td><td>Incorrecto</td></tr>
<tr><td>F18</td><td>$(-2) + (-1) = -3$</td><td>Correcto</td></tr>
<tr><td>F19</td><td>$(-4) + (-4) = -8$</td><td>Correcto</td></tr>
<tr><td>F20</td><td>$(-9) + (-6) = -15$</td><td>Correcto</td></tr>
<tr><td>20
D1S</td><td colspan="3">Veamos…si… entendimos, si comprendimos. Los resultados, tenemos:
la primera que es menos siete $[(-5) + (-2) = -7]$
el siguiente menos once $[(-9) + (-2) = -11]$
menos ocho
$[(-3) + (-5) = -8]$
menos trece
$[(-6) + (-7) = -13]$
menos quince
$[(-11) + (-4) = -15]$
menos tres
$[(-1) + (-2) = -3]$</td><td></td></tr>
</table>

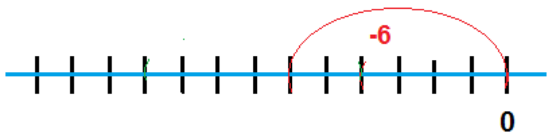
Episodio V.	ADICIÓN DE DOS NEGATIVOS.	Docente D1S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
21 A2	[Cuando el profesor va a leer el resultado que aparece incorrecto $(-8)+(-4)=-4$ Interviene el alumno A2 y menciona] ¡Menos doce! Ahí falló.	
22 D1S	[Interviene el docente y comenta] ¡Aquí fue la diferencia (utilizando el lenguaje común, no la sustracción)! [Señala la operación y el resultado: $(-8)+(-4)=-4$ y explica la regla] Recuerden, dos números negativos se suman… si ambas cantidades son negativas, se suman y el signo… sigue siendo el mismo. Entonces por lo tanto ese resultado es incorrecto [señala al cuatro negativo] $(-8)+(-4)=-4$	
23 D1S	Hicieron una resta, una sustracción, ¡No! Dos cantidades negativas se siguen sumando… el signo de la operación me sigue indicando que se suman. [señala en la operación el signo de suma] $(-8)+(-4)=-12$ [corrige el resultado anotando doce negativo]	
24 D1S	[Continúa revisando los resultados] Menos tres $[(-1)+(-2)=-3]$ Menos ocho $(-4)+(-4)=-8]$ Y menos quince. $[(-9)+(-6)=-15]$	
25 D1S	Son los resultados [Se muestran en la diapositiva]  	

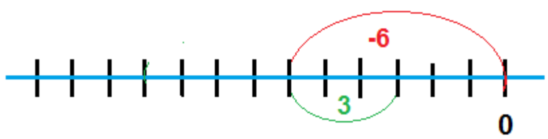
Episodio VI.	ADICIÓN DE UN POSITIVO Y UN NEGATIVO.	Docente D1S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
1 D1S	… Si mis cantidades son… una positiva y una negativa, ¿Qué es lo que sucede?... [Se muestra una nueva diapositiva] 	El docente dice una positiva y una negativa y en la diapositiva aparece primero una negativa y después una positiva, falta concordancia en lo que dice y en lo que está escrito.
2 D1S	[El docente invita a los alumnos a participar, a que expliquen cómo se realiza la adición de un entero positivo y uno negativo] [Una alumna intenta participar pero se detiene…y el docente le dice:] A ver primero externa lo que ibas a decir, no te preocupes… no pasa nada.	Después de trabajar las dos primeras reglas, el docente indaga en las concepciones de los alumnos sobre la forma de sumar un entero positivo y uno negativo.
3 A3	Este… pues... empezamos con el número negativo y se suma, ah… eh… [El docente al percatarse que no acaba de explicar el procedimiento, interviene]	
4 D1S	Aquí tenemos una pequeña contradicción [en que la que para sumar se tiene que restar] , tenemos el menos seis, luego más y el positivo tres,[señala] $(-6) + (3) =$ ya no tenemos dos signos iguales que se sumen…	La alumna y los demás niños del grupo entran nuevamente en un conflicto porque no pueden explicar cómo se realiza la operación.
5 A3 y A4	[A3 dice]Ah… si, pero empezamos del cero aquí están los negativos, acá los positivos y está el seis [A4 interviene] De todos modos se tienen que sumar… porque el signo… el signo va cambiado… sería equivalente…	Los estudiantes A3 y A4, intentan participar pero no pueden expresar claramente la idea que tienen y no acaba de tener sentido su explicación.
6 D1S	[interviene el docente] Lo que vimos hace unos momentos, es la misma distancia pero con signo positivo… Vamos a ver entonces… [Se dirige a la diapositiva y pregunta al grupo] ¿Cómo son los signos de los sumandos?	Pregunta sobre la estructura de la expresión
7 G	[Todos siguen la respuesta conforme aparece en la diapositiva]  ¡Diferentes! Tenemos un signo positivo y un signo negativo.	El docente trata que sus alumnos reconozcan la estructura de la expresión: *Suma de un entero negativo y uno positivo.* El docente utiliza adecuadamente el lenguaje matemático al utilizar el término sumando. El grupo contesta primero el signo positivo y luego el negativo cuando, en la suma se tiene primero un número negativo y después uno positivo.

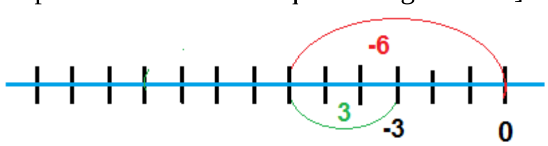
Episodio VI. ADICIÓN DE UN POSITIVO Y UN NEGATIVO. Docente D1S

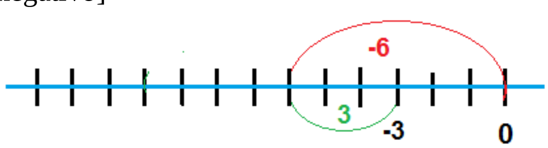
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
8 D1S	[El docente lee la pregunta de la diapositiva,] ¿Quién tiene mayor valor absoluto?  	
9 G	[Se oyen diferentes respuestas] ¡Tres!... ¡seis!... el tres porque es positivo	Los estudiantes parecen no recordar o no tener dominio sobre el concepto de valor absoluto, lo que provoca diferentes respuestas.
10 D1S	[El docente interviene] Valor absoluto, recuerden que hace un momento determinamos que el valor absoluto es únicamente la distancia del cero hacia esa cantidad, no interesándome si es positiva o negativa, únicamente la distancia, entonces en relación a la distancia ¿quién tiene mayor valor absoluto?	Recuerda el docente su concepto de valor absoluto referido a la distancia del número con respecto al cero.
11 D1S	El valor absoluto es el seis, recuerden el valor absoluto es la distancia del cero hacia ese número, nada más, no tomando en cuenta el signo que tiene la cantidad, únicamente la distancia. Si nosotros colocamos la distancia entre el seis y el tres la que está a mayor distancia del cero es el seis, ese es el valor absoluto. Por lo tanto ¿quién tiene mayor valor absoluto?...	
12 G	¡El seis! [En la diapositiva aparece el -6 como respuesta, porque tiene mayor valor absoluto que 3]	Aquí se muestra una imprecisión del docente cuando dice que el seis tiene mayor valor absoluto, nuevamente ve a los números como relativos, ya que está hablando del seis negativo, y no recurre a la notación antes vista: $\mid -6 \mid = 6$ El valor absoluto de seis negativo es seis.
13 D1S	El seis, ya lo tenemos ahí el seis, hay que recordarlo bien. [al momento que explica se muestra en la diapositiva una recta numérica de lado de los negativos] Dice ahora, trazamos una recta numérica en sentido de los negativos.	La respuesta sugerida podría ser: El menos seis tiene mayor valor absoluto que el tres, o bien utilizar el lenguaje matemático a la par del semántico. $\mid -6 \mid > \mid 3 \mid$

<table>
<tr><td colspan="3">Episodio VI. ADICIÓN DE UN POSITIVO Y UN NEGATIVO. Docente D1S</td></tr>
<tr><th>Línea</th><th>Diálogos</th><th>Observaciones</th></tr>
<tr><td>14
D1S</td><td>

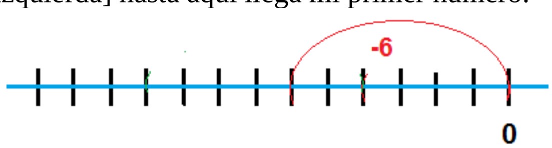
Y localizamos los sumandos, ¿cómo los vamos a localizar? Primero el menos seis que es del cero hacia la izquierda [se muestra la recta con la ubicación del cero al seis negativo]


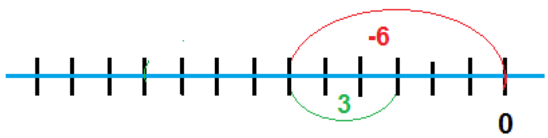
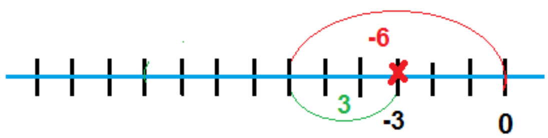
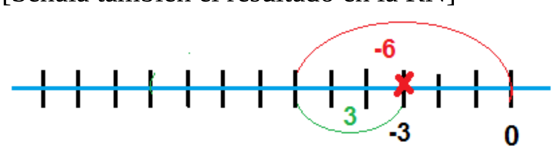
Y después ¿qué tenemos que hacer? Pues como lo vamos a sumar vamos a colocar el tres ¿en qué sentido? </td><td> Utiliza el modelo de la RN para explicar la adición de un entero positivo y uno negativo.
Localiza el primer sumando (-6) y de nuevo no se percata de la operación que realiza al indicar un salto del cero al seis negativo: 0 – 6= -6 en lugar de sólo localizar el seis negativo.
Ya ubicado el seis negativo procede a realizar la suma. </td></tr>
<tr><td>15 G</td><td>¡Hacia la derecha!</td><td>Adecuadamente indica el grupo que se suma a la derecha un positivo.</td></tr>
<tr><td>16
D1S</td><td> Hacia la derecha [se muestra ahora que del seis negativo se desplaza tres unidades a la derecha]


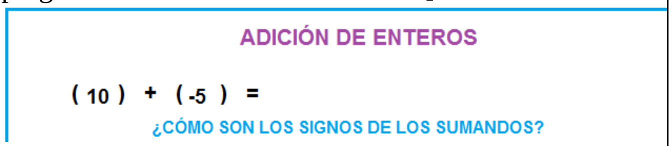
porque hacia ese lado se encuentran a la derecha los números positivos pero se dan cuenta que no llego ni siquiera a cruzar el cero [señala al punto final del desplazamiento e indica que no llega al cero]


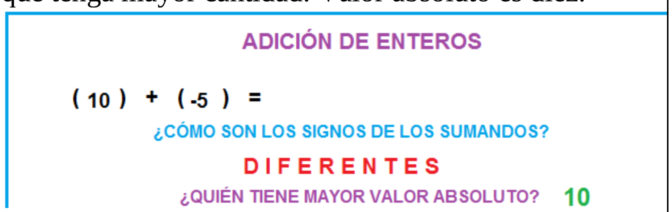
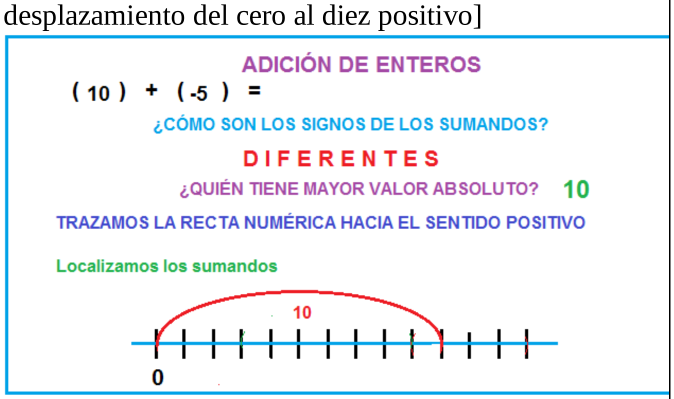
… que es donde se encuentran o donde empiezan a encontrarse los números positivos,
nada más llega hasta este punto [señala al tres negativo]

</td><td>En la RN el docente indica la operación:
(-6) + (3) = (-3) aunque la operación que está realizando es: 0 – 6 + 3 = -3, que sintácticamente son equivalentes las dos expresiones, pero con diferentes estructuras aditivas, la primera es una suma de un negativo y un positivo y la segunda es una combinación de sumas y restas de tres números, la sustracción del 6 del cero y luego la adición de 3.</td></tr>
</table>

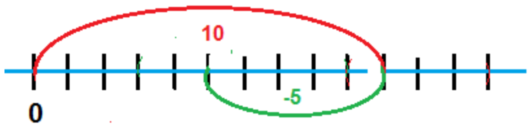
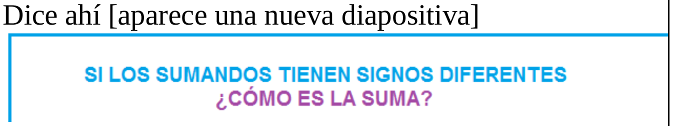
Episodio VI. ADICIÓN DE UN POSITIVO Y UN NEGATIVO. Docente D1S

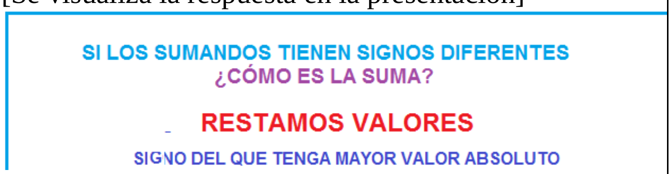
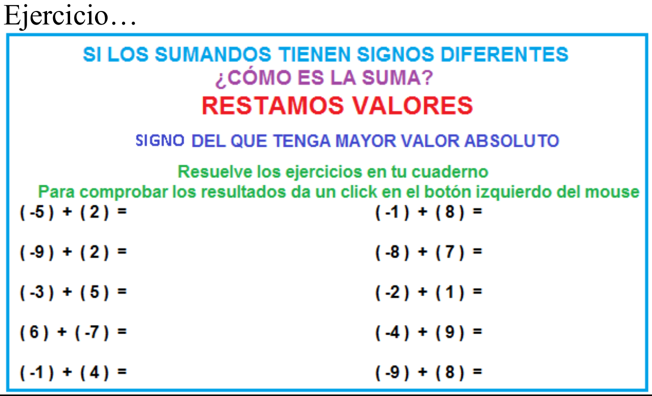
Línea	Diálogos	Observaciones
17 D1S	Esa es la posición tres pero del lado de los números negativos. Por lo tanto mi resultado final es el número menos tres [vuelve a señalarlo]	El profesor dice “posición del tres pero del lado de los números negativos”, otra vez no ve al tres negativo como un entero sino como un número relativo signado.
18 A4	¡No entendí nada! [Expresa apenada]	Una estudiante A4 expresa que no ha comprendido esta operación.
19 D1S	¿Qué pasó? [pregunta a los niños que parecen tener dudas] Vamos a ver otra vez [regresa al inicio de la diapositiva y explica resumidamente] ¿Quién tiene mayor valor absoluto? [señala a los sumandos] $(-6) + (3) =$	
20 G	¡Menos seis!	La respuesta es correcta, porque preguntó qué número tiene mayor valor absoluto y no cuál es el valor absoluto de menos seis.
21 D1S	¡Seis nada más!, pero quién de los dos es, como lo mencionas, el menos seis es el de mayor valor absoluto [aparece la respuesta] ¿QUIÉN TIENE MAYOR VALOR ABSOLUTO? - 6	Confusión en la respuesta del docente, quien menciona “el valor absoluto de seis” cuando lo que debería decir es: “el valor absoluto de menos seis”. En la diapositiva sí aparece la respuesta correcta.
22 D1S	… Tomando en consideración que los números positivos se van a escribir hacia la derecha y los números negativos hacia la izquierda, y recuerdan que la clase pasada lo que vimos era que el punto de origen no es necesariamente el cero, el punto de origen puede ser cualquier punto de la recta numérica. Si nosotros tomamos en cuenta primero el menos seis, lo ubicamos, (para ubicarlo partimos de) el cero y luego uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis, [localiza al seis negativo con un desplazamiento hacia la izquierda] hasta aquí llega mi primer número.  Este ahora es mi punto de origen, no el cero, sino donde me quedé, en mi punto de origen.	Adecuadamente menciona que el punto de origen puede ser cualquier número, no necesariamente el cero.

Episodio VI.	ADICIÓN DE UN POSITIVO Y UN NEGATIVO.	Docente D1S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
23 D1S	Y ahora ¿qué cantidad sigue?[señala al tres positivo] $(-6)+(3)=$ Un tres y ¿qué signo tiene?	
24 G	¡Positivo!	
25 D1S	¿Para dónde son los positivos?	
26 G	¡Derecha!	
27 D1S	Hacia la derecha, por lo tanto lo que voy a recorrer es ese número, uno, dos, tres, positivo [señala tres posiciones desde el seis negativo hacia la derecha]  Y ahí es donde voy a colocar mi valor numérico de esa adición. 	No explica lo que es el valor numérico de una cantidad, parece que se refiere a su valor absoluto.
28 A4	Pero en ese caso ¿ponemos los positivos abajo y los negativos arriba?, o ¿Cómo los pongo? [Se refiere a cómo indicar los desplazamientos de negativos y positivos en la recta numérica]	Al parecer algunos alumnos no trabajaron la recta numérica en la primaria o no lo recuerdan.
29 D1S	Para no tener esa complicación… sí sería práctico poner los negativos arriba y abajo los positivos o al revés para no tener esa confusión de para dónde estoy yendo. El resultado final es menos tres. El resultado final que tengo de esa adición de número tanto positivo como negativo es menos tres: [Señala la operación con su resultado] $(-6)+(3)=-3$ [Señala también el resultado en la RN] 	

<table>
<tr><td colspan="3">Episodio VI. ADICIÓN DE UN POSITIVO Y UN NEGATIVO. Docente D1S</td></tr>
<tr><th>Línea</th><th>Diálogos</th><th>Observaciones</th></tr>
<tr><td>30
D1S</td><td>Vamos a hacer otro ejemplo…empiezo con diez positivo y le voy a sumar un cinco, pero es negativo[aparece la operación en la diapositiva y la pregunta de cómo son los sumandos]


¿Cómo son lo sumandos?</td><td>Explica otra suma pero ahora comienza con un positivo y suma un negativo para fortalecer la estrategia de solución.</td></tr>
<tr><td>31 G</td><td>¡Diferentes¡</td><td>Los niños deben decir con signos opuestos o diferentes.</td></tr>
<tr><td>32
D1S</td><td>Siendo diferentes los sumandos lo que voy a hacer (es) exactamente lo que hice hace un momento. Colocar la recta numérica…¿Quién tiene el mayor valor absoluto?</td><td>El sentido que debe recuperarse es el de que 10 y -5 son dos sumandos o números distintos.</td></tr>
<tr><td>33 G</td><td>¡El diez!</td><td></td></tr>
<tr><td>34
D1S</td><td>Diez, valor absoluto es sin signo, simplemente es el que tenga mayor cantidad. Valor absoluto es diez.

</td><td></td></tr>
<tr><td>35
D1S</td><td>… trazamos la recta numérica hacia el sentido positivo, y localizamos los sumandos, ¿por qué hacia el sentido positivo? Porque recuerden estoy empezando con un número positivo [se refiere al 10] y además mi valor absoluto está determinándome hacia dónde voy a dirigir la recta numérica, en este caso es diez… del cero hacia la derecha [se muestra la recta numérica y el desplazamiento del cero al diez positivo]

</td><td>Se repite el problema de la operación de 0 + 10 = 10</td></tr>
</table>

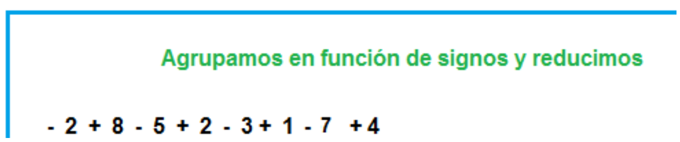
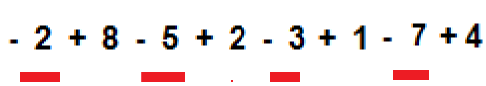
Episodio VI.	ADICIÓN DE UN POSITIVO Y UN NEGATIVO.	Docente D1S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
35 D1S	Ahora le voy a sumar menos cinco, menos cinco son números negativos, se recorren hacia la izquierda, por lo tanto mi siguiente valor sería hacia la izquierda, cinco unidades y hasta donde llega en ese momento será mi resultado final [se muestra en la diapositiva el desplazamiento del diez hacia la izquierda en 5 unidades]  y ubicamos el resultado final que es cinco positivo	Una vez ubicado el 10, va sumar cinco negativo. Dice que como es menos cinco, se tiene que recorrer hacia la izquierda. Está invirtiendo el sentido de la suma aunque no lo indica, es decir cambia el sentido del número dirigido. La operación que realiza en la RN es: $0 + 10 - 5 = 5$ Tratando de representar a: $(10) + (-5) = 5$
36 D1S	¿Cuál es la conclusión a la que llegamos con esto? Dice ahí [aparece una nueva diapositiva]  … Por lo que acabamos de ver ¿cómo le hacemos para hacerlo sin la regla y sin la recta numérica?	
37 A3	Según yo, al número mayor le tiene que ***restar*** el número menor.	Resuelve una suma mediante una resta, aplica una equivalencia sintáctica sin darse cuenta. La misma niña A3 que construyó su regla para la suma de dos negativos ahora *construye su propia regla para la suma de un positivo y un negativo transformándola en resta.*
38 D1S	Ajá, y luego como indico si es positivo o negativo	El docente ayuda a la niña a terminar de construir su regla.
39 A3	Si el mayor es positivo o negativo	Falta precisar a la niña el concepto del valor absoluto.
40 D1S	Así es, el de mayor…	
41A3	¿Cantidad?	
42 D1S	Valor….	

Episodio VI. ADICIÓN DE UN POSITIVO Y UN NEGATIVO. Docente D1S		
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
43 A3	¡Valor absoluto!	Finalmente completa su regla para la suma de un positivo y un negativo sin la necesidad de utilizar la RN.
44 D1S	Exactamente… como lo comentaba su compañera… *Hago una resta de las dos cantidades cuando tengo signos distintos*. Si el mayor (en valor absoluto) de ellos es signo negativo, entonces mi resultado va a ser negativo. Si el mayor (en valor absoluto) de los dos es signo positivo entonces mi resultado será positivo.	Establece el procedimiento para la suma de dos números con signos diferentes. El docente no precisa diferencia entre “mayor” y “mayor en valor absoluto”, lo que puede provocar confusión con el orden de los números.
45 D1S	Entonces ¿cómo encuentro la suma? [Se visualiza la respuesta en la presentación]  Restamos valores… del mayor le voy a restar el menor. Después el signo, como dice ahí… el signo de quién, el signo del que tenga el mayor valor absoluto.	Debiera decir “restamos los valores absolutos” y le corresponde “el signo del número de mayor valor absoluto”
46 D1S	Vamos con una serie de ejercicios… esto sí ya es un poquito más de pensar  ¿Cómo logro la suma? Restamos los valores, después ponemos el signo del que tenga el mayor valor absoluto, van a restar de manera tradicional, quizá aparezca una cantidad pequeña y después una cantidad grande, restamos de manera tradicional del mayor le quito la menor, después ¿cómo determino el signo? El del que tenga el mayor valor absoluto	Para realizar los ejercicios tiene a la mano la **tercer regla para sumar dos números con signos diferentes:** ***Se restan los valores (absolutos) con el signo del número de mayor valor absoluto.***
47 D1S	[Se completa la pantalla con las operaciones de suma de enteros con diferente signo] Ejercicio… 	

Episodio VI.	ADICIÓN DE UN POSITIVO Y UN NEGATIVO.	Docente D1S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
48 A2	¿También copiamos los paréntesis?	El niño A2 ahora comienza a arribar a la notación completa.
49 D1S	Sí, copien todo como está	
50A6	¡Lo hacemos también en la recta numérica?	El alumno ya trata de utilizar otro recurso para realizar la operación (La regla sintáctica y la recta numérica)
51 D1S	No, sólo siguiendo esta regla, que dice aquí, [señala en la presentación] RESTAMOS VALORES SIGNO DEL QUE TENGA MAYOR VALOR ABSOLUTO … únicamente sigan los pasos… se van a restar las cantidades y anoto el signo del mayor valor absoluto. [Los alumnos resuelven individualmente en silencio mientras el profesor asigna lugares para pasar a resolver al pizarrón]	El docente trata de pasar de un modelo de la RN a una regla sintáctica.
52 A3	[Se escucha una conversación entre pares] ¡No! primero se tienen que restar… [El profesor asigna lugares para pasar a los alumnos N1 a N10]	
53 N1	[pasa al pizarrón y escribe su resultado] $(-5) + (2) = 7$	
54 D1S	[El docente pregunta sobre el resultado igual a siete] ¿Positivo?, si es positivo pónganle positivo, si es negativo pongan negativo, pónganle el signo negativo.	
55 N1	[la alumna anota al lado de la operación] $(-5) + (2) = 7$ posi… [inmediatamente interviene el profesor]	Aquí se nota cómo los alumnos están en la transición de un SMS de la aritmética y van a pasar a otro más complejo en el que tienen que aprender una nueva sintaxis.
56 D1S	¡No!, el signo [dibuja una cruz en el aire]	
57 N1	[la niña anota un signo positivo muy pequeño] $(-5) + (2) = {}_{+}7$	
58 N2, N3, N4, N5, N6, N7, N8, N9, N10	[Escriben sus resultados en el pizarrón] (-5) + (2) = +7 (-1) + (8) = -7 (-9) + (2) = -7 (-8) + (7) = -1 (-3) + (5) = +2 (-2) + (1) = -1 (6) + (-7) = -1 (-4) + (9) = +5 (-1) + (4) = -3 (-9) + (8) = -1	(-5) + (2) = +7 -3 (-1) + (8) = -7 7 (-9) + (2) = -7 (-8) + (7) = -1 (-3) + (5) = +2 (-2) + (1) = -1 (6) + (-7) = -1 (-4) + (9) = +5 (-1) + (4) = -3 3 (-9) + (8) = -1 Los niños comenten tres errores de cálculo, señalados con el círculo rojo y la respuesta correcta se muestra con color azul.

Episodio VI. ADICIÓN DE UN POSITIVO Y UN NEGATIVO. Docente D1S

Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
59 D1S	Vamos a verificar que los resultados sean iguales a (los de) sus compañeros… La primera da por resultado… [El docente hace click en el botón izquierdo del mouse y junto a la respuesta de la alumna N1 aparece el resultado correcto, tres negativo] menos tres. $(-5)+(2)=+7$ **-3**	Corrige verbalmente los tres errores encontrados en la resolución del ejercicio.
60 A3	¡Ya ves, te dije! [le dice A3 a N1]	
61 D1S	La segunda… da como resultado menos siete $(-9)+(2)=-7$ **-7** Siguiente, tenemos como resultado dos positivo… $(-3)+(5)=+2$ **2** Siguiente, menos uno,¡ muy bien! $(6)+(-7)=-1$ **-1** Siguiente, tres positivo $(-1)+(4)=-3$ **3** [Al ver el resultado incorrecto dice el docente:] recuerden hacer la sustracción, la resta y el signo del de mayor valor absoluto que es cuatro, ¿qué signo tiene? Positivo. Siguiente, siete, $(-1)+(8)=-7$ 7 …le pusieron singo negativo, volvemos a lo mismo, el de mayor valor absoluto es ocho y ocho tiene signo positivo.	
62 D1S	Siguiente, menos uno, ¡bien! $(-8)+(7)=-1$ -1 Siguiente, menos uno. $(-2)+(1)=-1$ -1 Siguiente, cinco positivo $(-4)+(9)=+5$ 5 Siguiente y finalmente menos uno. $(-9)+(8)=-1$ -1 [Con este ejercicio finaliza el tema de suma de dos números con diferente signo]	Parece ser que varios alumnos tienen dudas sobre la suma de números con diferente signo.

Episodio VII.	ADICIÓN DE POSITVOS Y ¿NEGATIVOS? OPERACIONES SIN PARÉNTESIS	Docente D1S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
1 D1S	…Agrupamos (a los números) en función de (sus) signos y reducimos [aparece una nueva diapositiva]  [Plantea la agrupación pero aún no la realiza]	Aparece un nuevo término "reducimos", el profesor utiliza el método del libro de Álgebra de *Baldor* (1998) para reducir términos semejantes pero en este caso sobre los coeficientes que son los enteros. (Consiste en agrupar y sumar los positivos y por otro lado agrupar y sumar los "negativos" y después restar los valores absolutos de cada suma agrupada y el resultado tendrá el signo de la suma agrupada de mayor valor absoluto).
2 D1S	… ¿Qué es lo que vamos a hacer si tengo (números con signos) más, menos, más menos…? Bueno pues como dice ahí, usamos la propiedad asociativa. Asociar, ¿qué es asociar?	Justifica la reducción a través de la propiedad asociativa.
3 G	Se juntan	"Juntan" es una expresión del lenguaje natural, que debe ser reemplazado con lenguaje matemático al utilizar el término "asociar"
4 D1S	Se juntan, es lo que vamos a hacer precisamente, juntar los números pero ¿cuáles?	
5 A2	Los negativos con negativos y los positivos con positivos	A2 establece un método de solución asociando positivos y negativos.
6 D1S	¡Bien! negativos con negativos y positivos con positivos… Si subrayo específicamente los números positivos con rojo o los negativos [aparecen subrayados los números que tienen un menos a su izquierda]  ¿Cuántos tengo? [Se refiere a cuántos números negativos hay en la expresión]	Esta operación tiene la estructura de adiciones y sustracciones de naturales. Esto puede observarse si se utiliza la notación completa de Cid y Bolea de los paréntesis y los números con su signo. -2+8-5+2-3+1-7+4 = (-2) + (+8) – (+5) + (+2) – (+3) + (+1) – (+7) + (+4)=

Episodio VII.	ADICIÓN DE POSITVOS Y ¿NEGATIVOS? OPERACIONES SIN PARÉNTESIS	Docente D1S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
6 D1S		Puede verse ahora que sólo hay un número negativo en la serie de sumas y restas de positivos. ***El uso de la notación completa ayuda a distinguir la estructura aditiva y el carácter unario de los números.***
7 G	¡Cuatro! [Contestan los niños a coro]	El grupo dice que hay cuatro números negativos, siendo que realmente hay un número negativo y tres números positivos ante una sustracción.
8 D1S	… Si tengo solamente números negativos, ¿Cuál es el procedimiento para calcular esa cantidad? (suma según el docente) Si todos son negativos ¿qué hago?	Apela a la regla para sumar números negativos cuando la operación no corresponde a suma de negativos: **- 2 - 5 - 3 - 7** Aunque esta expresión no es una suma de números negativos, son sustracciones sucesivas, sólo el primer término es negativo. Utilizando la notación completa se tiene que: (-2) – (+5) – (+3) – (+7) = Analizando la estructura, esta es la expresión que me dice que tengo -2 y le resto 5, y le resto 3 y le resto 7, se identifica de esta manera la estructura aditiva y el carácter unario de los números, es decir el signo de cada número.

Episodio VII. ADICIÓN DE POSITVOS Y ¿NEGATIVOS? OPERACIONES SIN PARÉNTESIS Docente D1S

Línea	Diálogos	Observaciones
9 A2	¡Sumarlos!	
10 D1S	Se suman, y ¿qué signo le corresponde?	
11 G	¡Negativo!	
12 D1S	Porque todos son negativos, tomando en cuenta esto tengo cuatro números negativos ¿cuánto me da por resultado?	
13 G	Cinco y dos, siete… (y tres, diez y siete…) ¡Diecisiete!	La regla aunque imprecisa, funciona para obtener un resultado correcto.
14 D1S	Diecisiete, como todos son negativos, como decía la regla: sumo todos los valores y como todos son negativos se queda con el mismo signo. [señala el resultado en la diapositiva] $-2+8-5+2-3+1-7+4=-17$ Ahora ya hice los negativos ¿qué me falta sumar?	En la operación no aparecen sumas, sino una combinación de sumas y restas, el docente dice que se van a sumar los que tengan signo negativo, confundiendo el signo unario con el binario.
15 G	¡Los positivos!	
16 D1S	Todos los positivos. Aquí, cuando ustedes hagan este tipo de operaciones *lo más práctico* es subrayar… para saber cuáles cantidades voy a formar… tengo doble subrayado con otro color [aparece en la diapositiva subrayado doble en los números que tienen un signo positivo a la izquierda] $-2+8-5+2-3+1-7+4=-17$ También pueden identificarlos bien, ¿cuánto me da esa suma de ahí?	
17 G	¡Quince! (15)	
18 D1S	Quince positivos (+15) [al momento de mencionar quince aparece en la diapositiva] $-2+8-5+2-3+1-7+4=\underbrace{-17\ +15}$ Menos diecisiete más quince.	
19 D1S	Ahora ya vimos también… cuando tengo una cantidad positiva y una negativa ¿qué es lo que hago?	
20 A1	¡Se restan!	

Episodio VII. ADICIÓN DE POSITVOS Y ¿NEGATIVOS? OPERACIONES SIN PARÉNTESIS Docente D1S

Línea	Diálogos	Observaciones
21 D1S	¿Cuánto me da esa resta?	
22 A6 y G	¡Menos dos!, ¡dos!	
23 D1S	Y ¿qué signo le corresponde?	
24 G	Menos	
25 D1S	¿Por qué?	
26 A6	Por el valor absoluto de la cantidad más grande es la que voy a colocar el resultado.	
27 D1S	Por lo tanto el resultado final es menos dos [se completa la operación en la diapositiva] - 2 + 8 - 5 + 2 - 3 + 1 - 7 + 4 = - 17 + 15 = - 2	
28 A4	Entonces ¿se resta o se suma?, ¿se saca una resta o una suma?	El tema es *suma de enteros*, así que hay una confusión en la alumna A4 cuando pregunta si se está sumando o restando, si la operación es una resta o una suma.
29 D1S	Una resta y una suma, de las dos combinaciones	La respuesta del docente no es específica, no le ayuda a salir del conflicto cognitivo.
30 A4	¡Esto es complicado!	La alumna A4 parece no estar convencida de los argumentos del docente y aparece la tendencia cognitiva inhibitoria.
31 D1S	No es complicado… ¿Qué sucede con esas sumas y restas? Tan fácil como esto, fíjate que tenemos una operación como ésta [señala nuevamente en la diapositiva] - 2 + 8 - 5 + 2 - 3 + 1 - 7 + 4 Donde hay sumas y restas… ¿Sumo o resto? ¿Te acuerdas de las reglas de hace un momento? Tengo solamente cantidades positivas y negativas ¿qué voy a hacer? …	Ahora el docente reconoce que son sumas y restas. Y que es fácil su solución. Apela nuevamente a las reglas. ***Insiste en considerar a las sumas y restas como números negativos y positivos, no tomando en cuenta los signos de la operación ni de los números.***

<table>
<tr><td colspan="3">Episodio VII. ADICIÓN DE POSITVOS Y ¿NEGATIVOS? OPERACIONES SIN PARÉNTESIS Docente D1S</td></tr>
<tr><th>Línea</th><th>Diálogos</th><th>Observaciones</th></tr>
<tr><td>31
D1S</td><td>Primero juntar todas aquellas cantidades que son positivas (negativas)… subrayándolas [en diapositiva]

$-2+8-5+2-3+1-7+4$

o las encierro en un círculo pero con todo y su signo para saber quiénes son negativas… es que todas las cantidades negativas se suman y se deja el signo que tienen. Efectivamente eso me da un resultado de menos diecisiete.

$-2+8-5+2-3+1-7+4 = -17$

Se sumaron, esas cantidades negativas, pero se sumaron</td><td>Ya había mencionado que juntar es asociar, y no utiliza este último término del lenguaje matemático.

Dice “las encierro en un círculo con todo y su signo” para afirmar falsamente que no hay restas, sino cantidades negativas, lo que constituye además de un error, un obstáculo didáctico.</td></tr>
<tr><td>32
D1S</td><td>Luego qué sucede con los positivos, hago lo mismo, [aparecen doble subrayados los números con signo positivo a su izquierda]

$-2+8-5+2-3+1-7+4 = -17$

todos se suman y deja el mismo signo que tienen que es positivo también [aparece más quince en el resultado]

$-2+8-5+2-3+1-7+4 = -17 + 15$

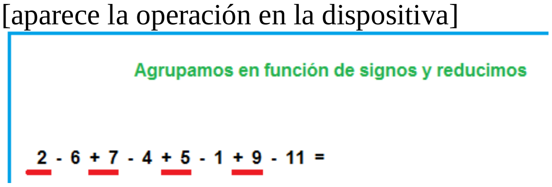
y ¿qué pasó con las positivas?, se sumaron.</td><td></td></tr>
<tr><td>33
D1S</td><td>Ahora bien, ya que tengo las sumas [se refiere al resultado de las sumas de los números con singo negativo a su izquierda y números con signo positivo a su izquierda por separado, es decir de las sumas y restas]

$= -17 + 15$

¿Qué pasa con este criterio que tengo de sumar una cantidad negativa y una positiva?... Ahora se restan y ¿qué signo le corresponde? El que sea de mayor valor absoluto. Entonces el de mayor valor absoluto es diecisiete ¿Qué signo tiene? Negativo, el resultado va a ser negativo y como son dos cantidades de distinto signo se restan [se muestra el resultado]

$= -17 + 15 = -2$

… entonces te das cuenta de que aplicando los dos criterios tanto sumar como restar en esta operación, pero primero sumamos y agrupamos aquellos que son negativos y agrupamos aquellos que son positivos y al final restamos.</td><td>Resume a la alumna A4 “la regla” para sumar números con diferentes signos:
(Aunque le cuesta trabajo al docente mencionar claramente la regla, interpretada como:)
Se agrupan y se suman los negativos, después se agrupan y se suman los positivos, finalmente se restan los resultados de la suma negativa y la suma positiva y a este resultado se le colocará el signo del número de mayor valor absoluto.</td></tr>
</table>

Episodio VII. ADICIÓN DE POSITVOS Y ¿NEGATIVOS? OPERACIONES SIN PARÉNTESIS		Docente D1S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
34 A4	Ah… sí.	Contesta A4 aún no muy convencida. Lo cual indica que no ha superado el conflicto cognitivo de la suma de dos números, uno positivo y uno negativo a través de la regla: “restar para sumar”, en la que se evidencia una contradicción. (Nuevamente surge la Aporía en la enseñanza de los enteros)
35 D1S	Ya ves cómo si se entiende.	
36 A4	Ya, ya lo entendí.[Parece dudosa]	A la niña A4 le queda sólo aprenderse la regla dada, ya que no hubo reflexión ni comprensión de por qué se tiene que restar para sumar.
37 D1S	Siguiente ejercicio, tengo dos, menos seis, más siete… [aparece la operación en la dispositiva]  Hacemos lo mismo, empiezo a agrupar todos los números positivos… y ¿cuánto me da ese resultado	
38 G	Veintitrés	
39 D1S	Veintitrés que es positivo [se muestra el resultado de la suma parcial] $\underline{2} - 6 \underline{+ 7} - 4 \underline{+ 5} - 1 \underline{+ 9} - 11 = 23\cdots$	El número 23 es sólo la suma parcial de los “positivos”, falta continuar la suma del lado derecho de la igualdad.
40A4	Tengo una duda ¿en lugar de separar los de los negativos, sumo los positivos y los negativos?	A4 vuelve a externar sus dudas.
41 D1S	…Primero se sumaron todos los negativos, después se sumaron todos los positivos y ahora se hace la resta porque son de diferente signo.	D1 repite nuevamente la regla.

Episodio VII. ADICIÓN DE POSITVOS Y ¿NEGATIVOS? OPERACIONES SIN PARÉNTESIS Docente D1S		
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
42 A4	Entonces cuando son signos diferentes se hace una resta y cuando son signos positivos se suma.	A4 sigue en conflicto con la acción de restar cuando se realiza una suma de un positivo y un negativo.
43 G	¿Qué? ¿Cómo dijo?	
44 D1S	…Eso que acaba de decir tu compañera es lo que acaba de pasar aquí escrito. Dos cantidades positivas, o tres cantidades positivas o más cantidades positivas se suman y se deja su signo positivo… Dos o más cantidades negativas se suman y se deja su signo negativo y la última que dijo tu compañera que fue la primera que dijo, de dos cantidades, una positiva y una negativa… se restan y se deja el signo del de mayor valor absoluto	D1 apela una vez más, a la regla establecida anteriormente, posiblemente sea momento de variar la estrategia para explicar la suma de otro modo. Como sugerencia se propone que a través de la descomposición de números en sus simétricos y hacer ceros, por ejemplo: (+8) + (-5) = En esta expresión se propone descomponer al +8 en: +8= (+3)+(+5) Y utilizar esta expresión en la cual se tiene la equivalencia: (+8)+ (-5) = (+3) + (+5) + (-5) = Y como (+5)+(-5) =0 por lo tanto (+3) + (+5) + (-5)= (+3) + 0 = +3 (Esta forma de sumar se observó en la docente D-2S del cuestionario exploratorio)

Episodio VII.	ADICIÓN DE POSITVOS Y ¿NEGATIVOS? OPERACIONES SIN PARÉNTESIS	Docente D1S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
45 D1S	Entonces, todas las cantidades que sean negativas se suman, todas las cantidades que sean positivas se suman, solamente dos, una positiva y una negativa se restan y se deja el signo del de mayor valor absoluto…	D1 insiste en su regla, sin buscar una opción.
46 D1S	De los negativos, ¿cuánto tendré de valor? [Se subrayan los que tienen un signo menos a la izquierda] **2 - 6 + 7 - 4 + 5 - 1 + 9 - 11 = 23**	
47 G	Veintidós	
48 D1S	**2 - 6 + 7 - 4 + 5 - 1 + 9 - 11 = 23 - 22** Veintidós [aparece el resultado]	
49 D1S	Ahora tengo mi valor ahí, veintitrés [señala la operación] **= 23 - 22** ¿qué signo tiene ahí?	
50 G	Positivo	
51 D1S	(y) ¿Veintidós?	
52 G	Negativo [señala el signo a la izquierda del veintidós] **= 23 - 22**	Nuevamente el docente indica erróneamente que se tiene un negativo en lugar de una sustracción. Este error no apareció cuando el docente utilizó la notación completa.
53 D1S	¿Cómo le hago ahí? ¿Cuánto me da el resultado? [Se dirige a la niña A4]	El docente trata de que A4 aplique la regla.
54 A4	Uno	
55 D1S	¿Positivo o negativo?	
56 A4	Positivo	
57 D1S	¿Segura? [Se escuchan murmullos de sí y no] Debes estar completamente del resultado que dices. ¿Es cuánto?	
58 A4	Es uno.	
59 D1S	¿Positivo o negativo?	
60 A4	Positivo	

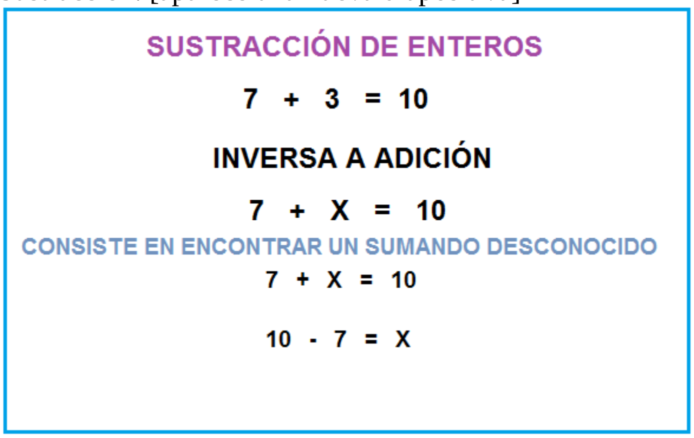
Episodio VII. ADICIÓN DE POSITVOS Y ¿NEGATIVOS? OPERACIONES SIN PARÉNTESIS Docente D1S		
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
61 D1S	¡Muy bien! [se muestra el resultado en la operación] **= 23 - 22 = 1** [aplauden los niños]	En este momento la clase se volvió dinámica y la niña A4 aprende a aplicar la regla. Parece que la mecanización, es decir la aplicación de la regla tuvo éxito para encontrar el resultado. Los niños aplauden entusiastas. Aunque los niños pueden encontrar el resultado con este método tipo Baldor, esta enseñanza podría ser corregida para evitar errores conceptuales y de estructura de la siguiente forma que propone el autor de esta tesis: Se tiene la operación: 2-6+7-4+5-1+9-11= Agrupar los números que se suman y agrupar los números que se restan y realizar la diferencia. (2+7+5+9)-(6+4+1+11)= (23)-(22) = 1 De esta forma no hay errores de conceptualización de la estructura ni del carácter positivo o negativo de los números.
62 D1S	Resuelve… [Aparece una nueva diapositiva para que los alumnos resuelvan las operaciones individualmente y después pasen al pizarrón a anotar sus resultados] **Resuelve los ejercicios en tu cuaderno** **Para comprobar los resultados da click en el botón izquierdo del mouse** - 5 + 8 - 3 + 4 - 2 + 1 - 9 + 8 = - 7 + 3 - 3 + 4 - 6 + 6 - 5 + 8 = - 5 + 1 - 9 + 3 - 2 + 5 - 4 + 8 = - 1 + 5 - 3 + 1 - 4 + 2 - 5 + 3 = - 9 + 2 - 8 + 3 - 2 + 5 - 1 + 6 = - 1 + 6 - 2 + 4 - 3 + 8 - 5 + 2 =	

<table>
<tr><td colspan="5">Episodio VII. ADICIÓN DE POSITVOS Y ¿NEGATIVOS? Docente D1S
OPERACIONES SIN PARÉNTESIS</td></tr>
<tr><th>Línea</th><th colspan="3">Diálogos</th><th>Observaciones</th></tr>
<tr><td>63 D1S</td><td colspan="3">[… el profesor pregunta el procedimiento para sumar números positivos o negativos, un estudiante presenta dificultades para expresar su conclusión, a lo que el profesor responde] ...La idea la tienen… quizá nada más falta el detalle de cómo expresarlo de manera correcta, a lo mejor les hace falta esas palabras, ese lenguaje para poder decir lo que hay que hacer</td><td>El docente reconoce la necesidad de utilizar el lenguaje adecuado para expresar una situación como la de la sumar de números con diferentes signos para pasar de un lenguaje natural a un lenguaje matemático, de un SMS a otro más complejo.</td></tr>
<tr><td>64 A3</td><td colspan="3">[La alumna pide la palabra a fin de explicar el procedimiento para suma de números negativos y positivos] …vimos que se juntaban los números que son negativos y aparte se juntaban los números que son positivos, luego los positivos se suman, los negativos también y el resultado de cada uno del negativo y del positivo se restan, pero el resultado depende si es negativo o positivo, del número que tenga mayor valor absoluto</td><td>A3 interpreta su propia regla.</td></tr>
<tr><td>65 D1S</td><td colspan="3">Vamos a hacer unos ejercicios … del concepto de las reglas de los signos, eso que están utilizando ustedes para hacer la agrupación de signos para simplificar esa operación y poder calcular un resultado, lo van a utilizar mucho en segundo grado, tercer año y a partir de ahora en adelante para toda su vida escolar de matemáticas…</td><td>El docente habla de la importancia de las operaciones con enteros, las cuales serán útiles a lo largo de la vida escolar en las matemáticas.</td></tr>
<tr><td>66 D1S</td><td colspan="3">Esa regla… es muy recurrente en álgebra, en materias como matemáticas, física.</td><td>D1 ahora especifica que las operaciones con enteros son muy frecuentes en el álgebra, en matemáticas y física.
Aparece la relación de los enteros con el álgebra y las ciencias exactas (matemáticas) y experimentales (físicas).</td></tr>
<tr><td>67 D1S</td><td colspan="3">Seis voluntarios (V) [asigna seis alumnos voluntarios y escriben sus resultados]</td><td rowspan="7">Aparece un error de aplicación de la regla.</td></tr>
<tr><td rowspan="6">68 G V1, V2, V3, V4, V5, V6</td><td>V1</td><td>-5+8-3+4-2+1-9+8= -19 + 21 = 2</td><td>Correcto</td></tr>
<tr><td>V2</td><td>-7+3-3+4-6+6-5+8= -21 + 21 = 0</td><td>Correcto</td></tr>
<tr><td>V3</td><td>-5+1-9+3-2+5-4+8= -20 + 17 = -3</td><td>Correcto</td></tr>
<tr><td>V4</td><td>-1+5-3+1-4+2-5+3= -13 + 11 = -2</td><td>Correcto</td></tr>
<tr><td>V5</td><td>-9+2-8+3-2+5-1+6= -20 + 16 = 36</td><td>Incorrecto</td></tr>
<tr><td>V6</td><td>-1+6-2+4-3+8-5+2= -11 + 20 = 9</td><td>Correcto</td></tr>
</table>

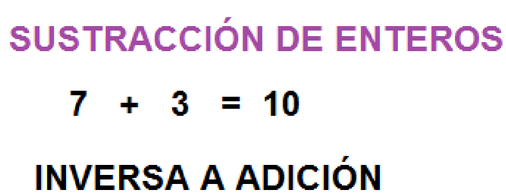
Episodio VII. ADICIÓN DE POSITVOS Y ¿NEGATIVOS? OPERACIONES SIN PARÉNTESIS Docente D1S		
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
69 D1S	La primera… es diecinueve, veintiuno y el resultado dos positivo, ¡perfecto! -5+8-3+4-2+1-9+8= -19 + 21 = 2	Menciona diecinueve cuando es diecinueve negativo
	La segunda, da cero, ¡bien! -7+3-3+4-6+6-5+8= -21 + 21 = 0	Aparece un ejercicio en el que suma los simétricos pero no aprovecha para enfatizar que la suma de simétricos es cero.
	La tercera menos tres, ¡perfecto! -5+1-9+3-2+5-4+8= -20 + 17 = -3	
	La siguiente menos dos ¡muy bien! -1+5-3+1-4+2-5+3= -13 + 11 = -2	
	La que sigue, menos cuatro, aquí tenemos, ¨señala la operación y los signos] Nada más aquí recuerda, no puedes volver a poner más, porque primero agrupaste todos los negativos y hasta aquí son tus negativos -9+2-8+3-2+5-1+6= -20 + 16 = 36 Ya no vas a sumar sino a tomar en cuenta la otra cantidad, que son los positivos, cuánto fue, dieciséis, entonces tengo menos veinte más dieciséis	El error encontrado por V5 fue de aplicar la parte de la “resta” ya teniendo la “suma” de negativos y positivos
	= -20 + 16 ¿Qué operación se hace? [pregunta a V5] Dos cantidades distintas se restan y se deja el signo del de mayor valor absoluto, veinte menos dieciséis, cuatro = -20 + 16 = 4 Y el de mayor valor absoluto es veinte por eso le pongo menos = -20 + 16= - 4	
	Siguiente, tengo menos once mas veinte igual a nueve -1+6-2+4-3+8-5+2= -11 + 20 = 9	
70 A8	¡No puedo!	Un alumno que no había participado lo hace ahora y expresa una tendencia cognitiva inhibitoria al mencionar que no puede.
71 D1S	Me interesa que pongan atención… …les puedo mandar la información por WhatsApp	A8 parece requerir acompañamiento para superar el conflicto cognitivo. Además de utilizar el recurso de la computadora y de la presentación, ahora puede usar el teléfono celular inteligente con una aplicación de red social.

<table>
<tr><td colspan="3">Episodio VII. ADICIÓN DE POSITVOS Y ¿NEGATIVOS? OPERACIONES SIN PARÉNTESIS Docente D1S</td></tr>
<tr><th>Línea</th><th>Diálogos</th><th>Observaciones</th></tr>
<tr><td>72
D1S</td><td>En términos generales éstas son las dos reglas [en diapositiva]


Me gustaría que las apuntaran, esto es lo más importante, es la regla de los signos para adición y sustracción… Apréndanlas…</td><td>Finaliza la sesión de suma de números positivos y” negativos” sin paréntesis aplicando las reglas de los signos para adición y sustracción.</td></tr>
</table>

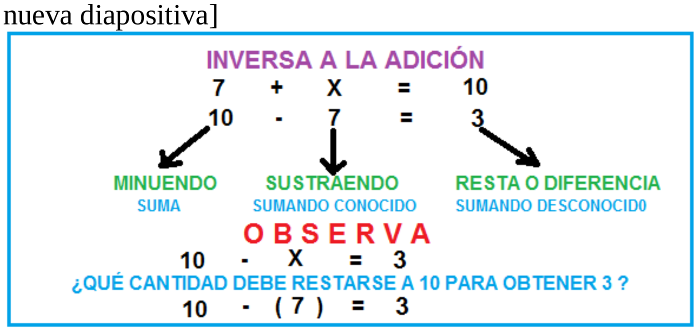
<table>
<tr><td colspan="3">Episodio VIII SUSTRACCIÓN, LA INVERSA DE LA ADICIÓN. Docente D1S</td></tr>
<tr><th>Línea</th><th>Diálogos</th><th>Observaciones</th></tr>
<tr><td>1 D1S</td><td>… ¿Qué es la sustracción?</td><td></td></tr>
<tr><td>2 G</td><td>Una resta</td><td></td></tr>
<tr><td>3 D1S</td><td>… ¿Cuáles son los elementos de la sustracción?
Minuendo y sustraendo y el resultado se llama resta o diferencia.</td><td></td></tr>
<tr><td>4 D1S</td><td>Sustracción. [aparece una nueva diapositiva]


Lo que viene siendo la operación inversa a la adición</td><td>Utiliza ecuaciones aritméticas para enseñar la resta de números enteros.
En la diapositiva se observa la solución.
Para explicar la sustracción utiliza el argumento de la inversa de la adición.</td></tr>
<tr><td>5 D1S</td><td>¿Qué es lo inverso?</td><td></td></tr>
<tr><td>6 G</td><td>Lo contrario, lo que es al revés, de cabeza.</td><td>Uso del lenguaje natural de los niños para explicar la operación inversa.</td></tr>
<tr><td>7D1S</td><td>Nos quedamos con lo contrario. ¿Cuántas operaciones básicas conocemos?</td><td>El docente utiliza el término “lo contrario” como primer acercamiento a la operación inversa.</td></tr>
<tr><td>8 A3</td><td>Adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.</td><td></td></tr>
<tr><td>9 D1S</td><td>Así es...

Hay una relación entre ellas… ¿Cuál es esa relación? [señala la diapositiva]


Lo contrario a la adición es la sustracción.</td><td>Establece la relación entre la adición y la sustracción como operaciones contrarias.</td></tr>
</table>

Episodio VIII SUSTRACCIÓN, LA INVERSA DE LA ADICIÓN. Docente D1S		
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
10 D1S	Esa es otra terminología que debemos conocer. … ¿Para qué nos va a servir eso? Para que cuando entremos a ***ecuaciones***… tienen que ***despejar*** y este ese sentido de operaciones inversas tenemos que conocerla… vamos a aplicar esa operación contraria o inversa para poder despejar.	El docente dice que es necesario conocer el lenguaje matemático para poder explicar y comprender las operaciones con enteros, ahora habla de utilizar una nueva terminología, para resolver ecuaciones mediante el despeje. ***Aparece la relación entre los enteros y el álgebra***.
11 D1S	Dice además, siete más tres es igual a diez **7 + 3 = 10** Inversa a la adición, siete más equis (x) igual a diez **7 + X = 10** Antes de eso ¿ustedes ya habían trabajado ecuaciones?	
12 G	¡No!...	
13 D1S	¿Si, dónde?	
14 A3	En mi escuela.	
15 D1S	¿Cómo las viste?, ¿Cómo la describes?	
16 A3	Cuando tiene x y al lado un más y están bien difíciles. Creo que tenías que sacar el valor de algo.	Aparece el lenguaje algebraico, y la necesidad de encontrar el valor desconocido.
17 D1S	Así es, es la forma en que podemos resolver algo… pero ecuaciones… (las) han visto desde cuarto de primaria	
18 G	¿En dónde?	
19 A2	En las fórmulas	
20 D1S	El área de un triángulo, base por altura sobre dos. [A=$\frac{b\ x\ h}{2}$]	
21 D1S	Y las ecuaciones deben de traer implícitas letras y números como aquí **7 + X = 10** Entonces a eso se le llama ecuación, tiene letras y números, y además tiene un signo igual…	La definición o explicación de lo que es una ecuación es muy limitada, falta hablar de las incógnitas, del grado de la ecuación, que es una ecuación lineal y cuántas soluciones tiene, aunque el tema no sea el de ecuaciones.

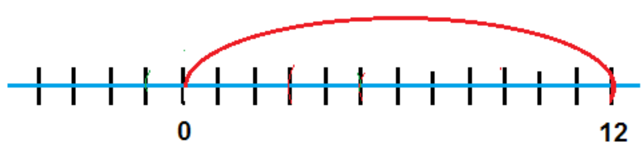
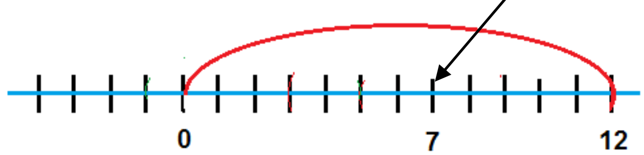
<table>
<tr><th colspan="3">Episodio VIII SUSTRACCIÓN, LA INVERSA DE LA ADICIÓN. Docente D1S</th></tr>
<tr><th>Línea</th><th>Diálogos</th><th>Observaciones</th></tr>
<tr><td>22
D1S</td><td>…la inversa a la adición consiste en encontrar un sumando desconocido, ustedes también vieron operaciones en este sentido [dibuja un cuadro encerrando la incógnita]
$7 + \boxed{X} = 10$
¿Sí o no?</td><td></td></tr>
<tr><td>23 G</td><td>Si.</td><td></td></tr>
<tr><td>24
D1S</td><td>Y eso también son ecuaciones, nada más que en lugar de tener una letra equis (x)… a ustedes les ponían un pequeño recuadro para que colocaran esa cantidad o les ponían así: ocho menos…(cuadro) igual a dos.
$8 - \boxed{} = 2$
Pues esto sustitúyanlo por una letra
$8 - x = 2$
Y es exactamente lo mismo</td><td>Usa un recuadro para pasar de un SMS a otro utilizando a la “x” como incógnita. Aunque el docente no indica que al nombre de los valores de las letras se les llama incógnitas en las ecuaciones</td></tr>
<tr><td>25 A3</td><td>¿Pero cómo vamos a encontrar el valor de las letras?</td><td></td></tr>
<tr><td>26
D1S</td><td>Pues ustedes lo van a aprender eso, cómo se hace y cómo se calcula.</td><td></td></tr>
<tr><td>27
D1S</td><td>Bueno regresamos a esto, tenemos entonces que consiste en encontrar un sumando desconocido. Si tenemos siete más equis igual a diez
$7 + X = 10$
Hacemos la operación inversa, del diez, la cantidad mayor le voy a restar precisamente ese siete para conocer cuánto vale esa equis (diferencia)
$10 - 7 = X$
Estas son las operaciones inversas, ya tengo su valor que es tres (3).</td><td>No indica el porqué a la cantidad mayor le tiene que quitar siete, esto genera un obstáculo didáctico, ya que no siempre tiene que ser a la cantidad mayor quitarle la menor, solo válida en los naturales y en este ejemplo.</td></tr>
<tr><td>28
D1S</td><td>Tengo una operación inversa a la adición. [aparece una nueva diapositiva]


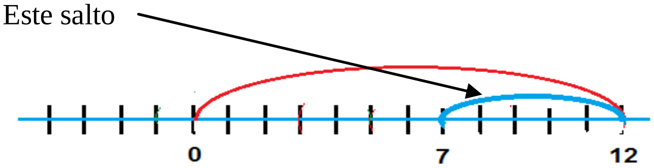
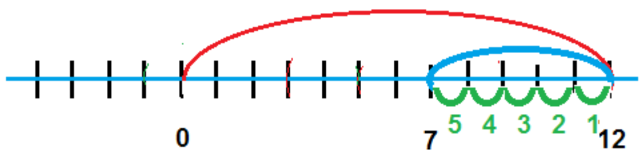
Siete más equis igual a diez [señala]
$7 + X = 10$
Diez menos siete igual a tres [señala]
$10 - 7 = 3$</td><td>En la diapositiva no se observa una correspondencia visual entre 7+x=10 y 10-7=3. No se discute porqué 10 es minuendo y siete el sustraendo. Tampoco indica cómo realiza la transformación de la adición a la sustracción.</td></tr>
</table>

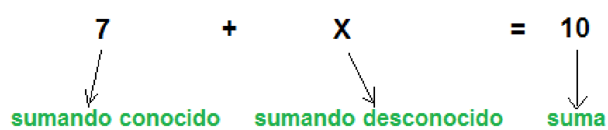
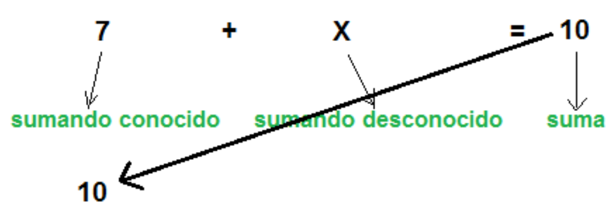
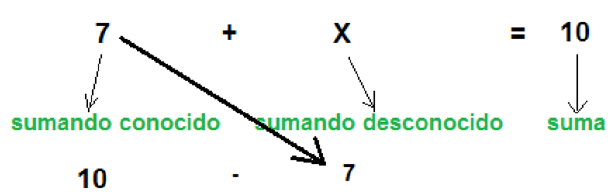
Episodio VIII	SUSTRACCIÓN, LA INVERSA DE LA ADICIÓN.	Docente D1S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
29 D1S	$7 + X = 10$ $10 - 7 = 3$ MINUENDO SUSTRAENDO RESTA O DIFERENCIA SUMA SUMANDO CONOCIDO SUMANDO DESCONOCID0 Ahí están implícitas las dos características de la adición y la sustracción. Recuerden en la adición se llaman sumandos lo que se está sumando y el resultado se llama suma. En sustracción se llama minuendo, sustraendo y resta. Aquí tenemos el minuendo, diez viene siendo el minuendo en esta operación [señala] $10 - 7 = 3$ Pero si lo transformo en la suma, el diez viene siendo la suma de la operación de arriba [señala] $7 + X = 10$	Establece una relación entre la adición y la sustracción utilizando las dos expresiones, pero sigue sin explicar cómo hizo la transformación.
30 D1S	Bueno, dice observa, diez menos equis es igual a tres. [señala] $10 - X = 3$ ¿Qué cantidad debe restarse a diez para obtener tres? [aparece el siete (7) en lugar de la equis (x)] $10 - (7) = 3$ Ahí dice siete. … hay que calcular un número y a veces ese número lo hacemos de la manera más práctica y fácil, ¿cómo lo hacen? por tanteo: [Busca el valor de x en la expresión 7 + x = 10] a siete más **ocho:** quince (7 + **8** = 15) ¡no!; siete más **dos:** nueve(7 + **2** = 9) ¡no!; siete más **tres:** (7 + **3** = 10) ¡diez!, es **tres** (**3**), a eso se le llama tanteo.	
31 D1S	Pero cuando la operación se vuelve más compleja ¿qué hacemos? Si es ocho quintos más equis igual a seis cuartos, ($\frac{8}{5} + x = \frac{6}{4}$)	Involucra un ejemplo de otro conjunto numérico: el de los racionales, cuando explica operaciones con enteros.

Episodio VIII SUSTRACCIÓN, LA INVERSA DE LA ADICIÓN. Docente D1S

Línea	Diálogos	Observaciones
31 D1S	¿Cómo lo haría por tanteo? Ya se vuelve más difícil, pero *para esto existe el álgebra*, para conocer estas cantidades desconocidas mediante un proceso que se llama ***despeje***.	Se refiere al uso del álgebra para resolver ecuaciones más complejas.
32 A3	Vimos en la primaria que en lugar de usar la equis (x) le ponían un triángulo y te decían: tienes que saber ¿qué número es el que falta para completar la suma? Y tenías que buscar qué valor era.	A3 explica el problema tipo abbaco visto en primaria.
33 D1S	… y ésta es con álgebra. [señala la ecuación] $7 \quad + \quad X \quad = \quad 10$ Pero para *eso necesitan conocer primero… los números enteros*.	El docente señala la necesidad de operar enteros para resolver situaciones del álgebra.
34 D1S	Siguiente, dice después [lee la diapositiva] ¿QUÉ CANTIDAD DEBE RESTARSE A 12 PARA OBTENER 7? 12 - = 7 ¿Qué cantidad debe restarse a doce para obtener siete?	
35 A3	¡Cinco!	
36 D1S	Cinco dice de manera inmediata su compañera… pero cinco lo ponemos entre paréntesis, $12 \quad - \quad (5) \quad = \quad 7$ puede ser con un cuadrado con un círculo o con una letra pero a final de cuentas ahí debe existir una cantidad que desconozco.	
37 D1S	[continúa leyendo la diapositiva] ¿QUÉ CANTIDAD DEBE SUMARSE A 12 PARA OBTENER 7? 12 + = 7 **¿Qué cantidad debe sumarse a 12 para obtener siete?**	
38 A4	Sumar seis	
39 D1S	¿Sumar seis? [Repite la pregunta al no obtener la respuesta correcta] ¿Qué cantidad debe sumarse a 12 para obtener siete?	

Episodio VIII	SUSTRACCIÓN, LA INVERSA DE LA ADICIÓN.	Docente D1S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
40 A6	**No se puede**	Aparece nuevamente el conflicto epistemológico. ¿Cómo puedo sumar algo a un sumando positivo para obtener un resultado menor a ese sumando?
41 D1S	Está medio rara la pregunta ¿no?	El docente confunde al grupo cuando utiliza esta expresión.
42 D1S	A ver si tengo un número menor y le tengo que restar uno mayor …	El docente da una guía a los alumnos…
43A3	Da un resultado negativo, ¡menos cinco!	A lo que A3 responde, encontrando la respuesta.
44 D1S	Menos cinco, ¡claro! Pero ¿Por qué menos cinco?	
45 A3	Porque como faltan números del siete para que le restes el doce, ¿¡ya es menos!?[contesta con tono entre afirmativo y de pregunta]	Aparece en A3 la concepción de la sustracción como *completar*, y no como resultado de una regla sintáctica.
46 D1S	Recuerden lo que vimos en la recta numérica [dibuja una RN para explicar] empiezo con doce [localiza el cero]  Vemos en las operaciones anteriores que hacía este salto. Llegué hasta doce, ¿se acuerdan?  Y luego le podía sumar cinco o le podía restar cinco, tenía que ser en el orden en que fuera la dirección de la cantidad, si es positivo, cinco le tenía que hacer para la derecha, si era negativo cinco, lo tenía que hacer hacia la izquierda, pero en este caso no tengo esa otra cantidad que se esté sumando, lo que tengo es el resultado y ¿cuál es el resultado? ¡Siete! y ¿dónde está el siete?… por aquí [localiza el siete]  ¿Qué me hace falta?	El docente parece no conocer la triple naturaleza de la sustracción. En lugar de ubicar al 12, hace un salto de 0 a 12. Ubicado el 12, ubica ahora al 7 sin necesidad de “brincar” desde cero.

Episodio VIII	SUSTRACCIÓN, LA INVERSA DE LA ADICIÓN.	Docente D1S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
46 D1S	Este salto  doce… y ¿qué tengo que hacer para llegar al siete?, que es mi resultado final, ¿hacia dónde me recorrí? ¿hacia la derecha?	Dibuja un arco para hacer el desplazamiento hacia la izquierda del 12 hasta el 7.
47 G	No	
48 D1S	Me recorrí hacia la izquierda, y a la izquierda ¿quiénes están?	
49 A2	¡Los negativos!	
50 D1S	¿Cuántos espacios recorrí? [Se ubica en doce] once, diez, nueve, ocho, siete. ¿Entonces cuántos (espacios o números) recorrí de regreso?[se posiciona en doce] uno, dos, tres, cuatro y cinco.  Pero está en qué sentido, de los positivos o de los negativos	El docente algunas veces se refiere a los números enteros como **puntos** en la RN, en otras ocasiones como **espacios** en la misma o bien como **distancias (dirigidas)**, pero no menciona diferencia alguna.
51 G	De los negativos	Dice el docente que moverse a la izquierda es moverse en el sentido de los negativos, lo cual no es exacto, depende de la operación que se esté realizando.
52 D1S	Por lo tanto como dice su compañera, aquí va a ser menos cinco [completa la ecuación en la diapositiva] $12 + (-5) = 7$	El profesor hace una sustracción en la RN utilizando el sentido negativo de las magnitudes dirigidas sin ser explícito. La operación que realiza es: 0 + 12 – 5 = 7 pero utiliza una expresión equivalente para explicar la suma: 12 + (-5) = 7 en donde tendría que justificar un cambio de dirección de la magnitud dirigida cuando cambia de resta a sumar el inverso aditivo del sustraendo.

Episodio IX.	EL INVERSO ADITIVO O SIMÉTRICO.	Docente D1S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
1 D1S	…Lo que vimos… el inverso aditivo o más bien el número simétrico. ¿Se acuerdan de él?	Comienza la clase hablando del inverso aditivo, el cual no había sido mencionado, sólo la sustracción como operación inversa a la adición.
2 G	No	
3 D1S	Es la misma cantidad que está a la misma distancia pero de manera positiva o negativa. Si digo menos seis, su simétrico es más seis, si digo menos ocho, su simétrico es… más ocho… es la misma cantidad pero con signo contrario… …eso es lo que vamos a aplicar… en la sustracción de números enteros.	Existe una imprecisión en el concepto ya que un número y su simétrico no son la misma cantidad, son números distintos. Menciona al simétrico o al inverso aditivo como estrategia para resolver la sustracción de enteros.
4 D1S	…Si tengo una adición [se muestra la operación]  Lo que voy a tener es un sumando conocido… sumando desconocido y suma.	Comienza un procedimiento basado en ecuaciones para justificar al inverso aditivo a partir de la transformación de una adición a una sustracción.
5 D1S	… Si ese diez lo traslado del lado izquierdo  El menos, el siete lo traslado acá  Y la letra equis(x) la coloco como si fuera mi resultado final	El docente explica ahora cómo transforma la adición en sustracción, menciona que traslada los elementos de la suma para ordenarlos de diferente manera y obtener la transformación.

Episodio IX. EL INVERSO ADITIVO O SIMÉTRICO. Docente D1S

Línea	Diálogos	Observaciones
6 D1S	7 + X = 10 sumando conocido sumando desconocido suma 10 - 7 = X Los tendría en una posición distinta pero ya convertidos en una sustracción, en los cuales cada uno de los elementos serían: 7 + X = 10 sumando conocido sumando desconocido suma 10 - 7 = x minuendo sustraendo resta o diferencia El minuendo, el sustraendo y la resta o diferencia…	La transformación la hace de la siguiente manera: - El sumando conocido es el sustraendo. - El sumando desconocido es la resta o diferencia. - La suma es el minuendo. Las reglas para la adición parecen ser difíciles de recordar. Las reglas para la transformación son más difíciles de comprender y recordar.
7 D1S	…Vamos con otros ejemplos… para que entiendan… cómo funciona esto de los signos cuando tengo una resta de números negativos o positivos. Tengo: doce menos equis es igual a siete [lee la diapositiva] 12 - X = 7 ¿Qué cantidad debo restarle a 12 para obtener 7? 12 - = 7 ¿Qué cantidad debo restarle a doce para obtener siete?	
8 G	¡Cinco!	
9 D1S	Es mi resultado correcto 12 - (5) = 7	
10 D1S	..Si tengo ésta…[lee de la diapositiva] ¿Qué cantidad debe sumarse a 12 para obtener 7? 12 + = 7	

Episodio IX.	EL INVERSO ADITIVO O SIMÉTRICO.	Docente D1S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
11 G	¡Cinco! ¡Menos cinco! [confusión en los niños]	
12 D1S	¿Cuánto?	
13 G	¡Menos cinco!	
14 D1S	Exactamente [aparece la respuesta] **¿Qué cantidad debe sumarse a 12 para obtener 7?** $12 + (-5) = 7$ Menos cinco.	
15 D1S	Hace rato escuché una exclamación de ¿cómo que debo encontrar una cantidad que sumada a doce me de siete? Pues sí… porque anteriormente vimos… números en operaciones de adición con números positivos y negativos… De esa manera ya identifican que en esta suma [señala el signo de la operación] $12 + (-5) = 7$ *Tengo que sumar o restar algo para obtener el resultado…* Mi relación es ésa… una sustracción la puedo convertir en una adición para poder obtener su resultado, o viceversa…	Esta oración es ambigua cuando dice que “tiene que sumar o restar algo para obtener un resultado”
16 D1S	…Ahora, [lee de la diapositiva] **UNA SUSTRACCIÓN SE RESUELVE SUMANDO**	Los niños deben aprender esta oración o regla que parece contradictoria porque ¿Cómo se va a realizar una resta sumando?
17 D1S	Supongamos, tengo doce menos cinco [lee de la diapositiva] $12 - (5) =$ ¿A qué es igual eso? Vean lo que va a suceder [se iguala a otras expresiones y cambia el signo de la resta a signo de suma y después a signo de resta] $12 - (5) = 12 + (-5) = 12 - 5 = 7$ inverso aditivo Cuando yo tengo una resta esto es lo que tengo que agregar, es a lo que me refería a ese simétrico con lo que se llama aquí inverso aditivo… simétrico e inverso aditivo es lo mismo	Aclara que la sustracción se resuelve sumando y utiliza un caso concreto. ***Resuelve la sustracción transformando la sustracción a una expresión equivalente de adición, después elimina el paréntesis y utiliza las reglas para la suma*** que definió en los capítulos anteriores. Este concepto de simétrico o inverso aditivo será estudiado más adelante, para determinar si los alumnos lo conocen y en qué proporción de la población y si los docentes también lo conocen y cuántos de ellos.

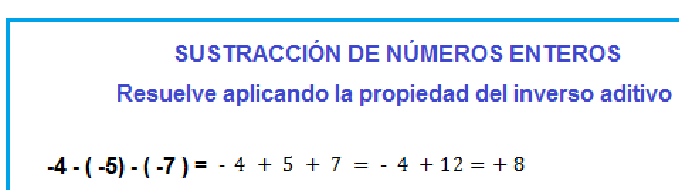
Episodio IX.	EL INVERSO ADITIVO O SIMÉTRICO.	Docente D1S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
18 D1S	Quiere decir que de una sustracción [señala] $12-(5) = 12+(-5) = 12-5 = 7$ inverso aditivo …lo que voy a hacer es convertirlo a suma, es decir voy a cambiar el signo menos y la cantidad que tenia con signo positivo o negativo… lo voy a trasladar a que tenga un signo contrario, ese es el inverso aditivo, se llama inverso por su operación contraria… o por su signo contrario de la cantidad, si es menos se convierte a más y aditivo, ¿por qué aditivo?, porque viene de la palabra adición, por eso de resta se está convirtiendo en una suma.	En una sustracción, primero la convierte a suma con el inverso aditivo. Sustracción ⇒ Adición $12-(5) = 12+(-5)$ inverso aditivo No es muy clara la explicación verbal, pero la sintáctica es muy clara. El problema es que los niños en esta etapa parecen requerir más explicaciones de tipo semántico para aplicarlas después a la sintaxis. Este hecho puede constituirse en la tendencia cognitiva No. 9 de la obstrucción de la semántica sobre la sintaxis o viceversa.
19 D1S	$12-(5) = 12+(-5) = 12-5 = 7$ inverso aditivo Y eso qué me da por resultado… doce menos cinco (12 - 5) ¿por qué menos cinco?, porque… cuando elimino paréntesis este menos cinco se queda tal cual como está y por eso me queda menos cinco y ya me da el valor de siete.	Después elimina el paréntesis Elimina el paréntesis $12+(-5) = 12-5$ Y obtiene el resultado. Aplica reglas de la adición $12-5 = 7$
20 D1S	Dice abajo [en la diapositiva] $12-(5) = 12+(-5) = 12-5 = 7$ inverso aditivo UNA SUSTRACCIÓN SE RESUELVE SUMANDO AL MINUENDO EL INVERSO ADITIVO O SIMÉTRICO DEL SUSTRAENDO.	Aparece la regla explícita: *Una sustracción se resuelve sumando al minuendo el inverso aditivo o simétrico del sustraendo.*

Episodio X	SUSTRACCIÓN DE ENTEROS	Docente D1S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
1 D1S	…Sustracción de números enteros: …diez *menos*, menos cinco es igual a….[lee la diapositiva] 10 - (- 5) = ¿Qué es lo que voy a hacer…? Aplicar el inverso aditivo, y el inverso aditivo es convertir este menos a un signo más, 10 - (- 5) = 10 + 5 = 15 inverso aditivo y este cinco negativo ahora ya es positivo… eso me da por resultado quince.	El profesor menciona la estrategia: para realizar una sustracción lo que tienen que hacer es utilizar el inverso aditivo, transformar la operación a suma y resolver sin paréntesis.
2 D1S	Siguiente ejemplo: Tengo menos nueve, el *menos* se convierte a más y éste -9 - (- 3) = -9 + 3 = - 6 inverso aditivo tres negativo se convierte en tres positivo …<u>menos nueve más tres es una resta</u> y se deja el signo de la cantidad mayor	Después de aplicar el Inverso Aditivo obtiene la expresión: -9 + 3 = Y dice que es una “resta”, cuando es una suma (de nueve negativo más tres positivo), que se resuelve con su regla de restar cantidades cuando tienen signo diferente.
3 D1S	Otro ejemplo: Once *menos* siete, el inverso aditivo de siete se convierte a menos siete…. 11 - (7) = 11 - 7 = 4 inverso aditivo [El docente al ver a sus alumnos dudosos trata nuevamente de explicar] A ver… aquí cómo está el procedimiento… [regresa a la diapositiva anterior]	En el siguiente ejemplo pasa directamente a la eliminación de paréntesis sin el paso intermedio de la suma y sin explicitar cómo aplicó el inverso aditivo, se “salta” este paso, lo que provoca que los alumnos se sorprendan al no ver la transformación de sustracción a adición.

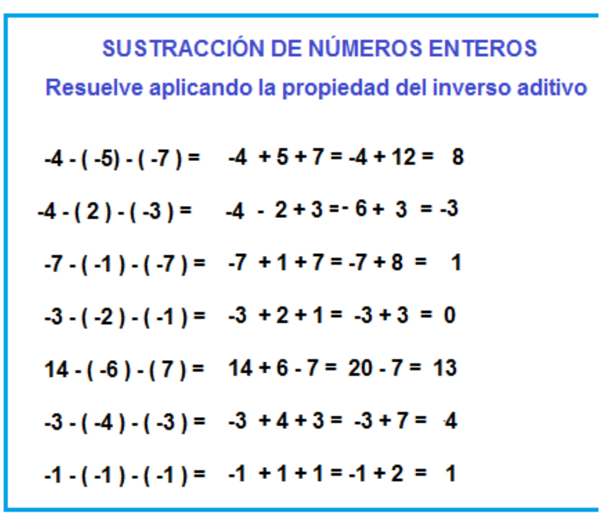
Episodio X	SUSTRACCIÓN DE ENTEROS	Docente D1S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
4 D1S	… De este paso $12 - (5) = 12 + (-5) = 12 - 5 = 7$ inverso aditivo me voy a brincar a… … este paso $12 - (5) = 12 + (-5) = 12 - 5 = 7$ inverso aditivo	El docente al notar que los niños tienen duda explica que se está "brincando un paso".
5 D1S	... es para obtener el resultado sin tener que tener dos signos a la vez como aquí $12 - (5) = 12 + (-5) = 12 - 5 = 7$ inverso aditivo ...voy a utilizar el signo de la cantidad, ya no tanto de la operación, ya no es necesario que ponga signo menos o signo más, simplemente voy a poner el signo que le corresponde al paréntesis, ya el signo más de la operación ya no lo voy a utilizar… sólo la cantidad… dentro del paréntesis junto con su signo, si es menos lo voy a colocar como menos cinco, si fuera más cinco aquí lo voy a colocar como más cinco.	Para no tener dos signos "a la vez", le llama cuando hay juntos el signo de la operación y el signo del número como en el caso de la sustracción de un positivo. Explica cómo se elimina el paréntesis, como es una suma, dice el docente que el signo es el mismo (porque el signo más no altera a un número) y dice que no importa el signo de la operación sino del número, aplica el inverso aditivo de menos cinco y cambia la suma a resta del positivo.
6 D1S	Vamos a ver otra vez los ejemplos: Tengo el diez, *menos* menos cinco, solamente voy a utilizar el inverso de éste, ¿Cuál es inverso de menos cinco? $10 - (-5) = 10 + 5 = 15$ inverso aditivo	Considera al signo menos de la sustracción como un operador (inverso aditivo) aplicado al cinco negativo y de esta manera elimina el paréntesis y ahora realiza una operación con la regla de las "sumas" sin paréntesis.
7 G	¡Más cinco!	
8 D1S	[señala el docente] $10 - (-5) = 10 + 5 = 15$ inverso aditivo Por eso me queda diez más cinco, y eso es igual con quince	

Episodio X	SUSTRACCIÓN DE ENTEROS	Docente D1S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
9 D1S	Menos nueve *menos*, menos tres… ¿cuál es el inverso de menos tres? [señala] $-9 \; - (-3) \; = -9 \; + 3 \; = -6$ inverso aditivo	
10 G	¡Más tres! [contestan con firmeza]	
11 D1S	Por eso le agrego más tres, Solamente aplico el inverso $-9 \; - (-3) \; = -9 \; + 3 \; = -6$ inverso aditivo y ya me da por resultado menos seis…	Fortalece la regla del inverso aditivo para realizar la sustracción.
12 D1S	…Esto va a suceder específicamente cuando sean sustracciones, si yo tengo un signo menos fuera del paréntesis es una sustracción y al que esté dentro del paréntesis le voy a aplicar su inverso aditivo… con aplicar el inverso aditivo elimino el paréntesis… *al final deben tener operaciones sin paréntesis*…No puedo resolver la operación si tengo dos paréntesis, para eso hago este proceso…	La forma en que enseña la sustracción es usar el inverso aditivo para llegar a operaciones de suma y resta sin paréntesis.
13 D1S	Vamos a hacer unos ejercicios para que ustedes sepan cómo se debe de hacer… [El docente lee la diapositiva] Sustracción de números enteros aplicando la propiedad del inverso aditivo [se muestran las sustracciones] **SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS ENTEROS** **Resuelve aplicando la propiedad del inverso aditivo** $-4 - (-5) - (-7) =$ $9 - (2) - (-3) =$ $-7 - (-1) - (-7) =$ $-3 - (-2) - (-1) =$ $14 - (-6) - (7) =$ $-3 - (-4) - (-3) =$ $-1 - (-1) - (-1) =$	Finalmente el docente indica la forma de resolver las sustracciones: Mediante la propiedad del inverso aditivo.

Episodio X	SUSTRACCIÓN DE ENTEROS	Docente D1S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
14 D1S	… deben aplicar [el] inverso aditivo… donde exista un signo [de resta] y después un paréntesis con una cantidad… por ejemplo, ¿Cómo hago la primera? [señala la primera sustracción en la diapositiva] …dice cuatro *menos*-menos cinco, *menos*-menos siete $4-(-5)-(-7)=$ Aquí tengo de tres en tres cantidades [números] ¿Cómo lo voy a resolver? Cambiando aquellas cantidades [los signos] que estén entre paréntesis, y al momento de cambiar de signo esas cantidades… elimino el paréntesis y el signo que estaba antes de ese paréntesis.	Modela la resolución de la primera operación de sustracción.
15 D1S	Así, tengo ésta, $4\underbrace{-(-5)}-(-7)=$ …voy a utilizar el inverso aditivo, si el paréntesis dice que es menos cinco, ¿cuál es el inverso aditivo de menos cinco?	El inverso aditivo lo aplica de forma semántica (“El inverso aditivo de menos cinco es más cinco”). Se sugiere utilizar la forma sintáctica correspondiente: - (-5) = 5
16 G	¡Más cinco (+5) ! [muy convencidos]	
17 D1S	Entonces voy a escribir menos cuatro más cinco. Ya de esta manera $4-(-5)-(-7)=-4+5-(\ldots$ … elimino el paréntesis y El signo que está antes… esto sólo ocurre cuando tengo sustracción.	Fortalece el hecho de aplicar el inverso aditivo sólo para la sustracción.
18 D1S	Siguiente, otra vez tengo un paréntesis y a un costado tiene un signo menos $4-(-5)\underbrace{-(-7)}=-4+5$ … aplico el inverso aditivo, si es menos siete, $4-(-5)-\underbrace{(-7)}=-4+5$ Ahora se convierte en…	Dice que tiene que aplicar el inverso aditivo a menos siete porque tiene a un costado un signo menos cuando podría usar la sintaxis: - (-7) = 7
19 G	¡Más siete! (+7) [Contestan con firmeza]	
20 D1S	Más siete, $4-(-5)\underbrace{-(-7)}=-4+5+7$ Queda, menos cuatro más cinco, más siete, y eso ¿a qué es igual? $-4+5+7=$	

Episodio X	SUSTRACCIÓN DE ENTEROS	Docente D1S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
21 A2	a…. dieciséis (16) [varios compañeros lo secundan diciendo el mismo resultado]	
22 D1S	¿Cuánto?, a ver… ustedes primero agrupaban cantidades positivas, cantidades negativas sólo hay una que es el cuatro, menos cuatro [escribe] $-4 + \underbrace{5 + 7} = -4$ Cinco más siete son positivos, es doce, más doce $-4 + \underbrace{5 + 7} = -4 + 12 =$ Y esto ¿a qué es igual?	
23 A2/A4	¡Dieciséis! (16) / ¡ocho! (8) [dan respuestas diferentes al mismo tiempo]	
24 D1S	[Al ver que existe confusión pregunta] ¿Qué signo tiene el cuatro?	
25 G	¡Menos!	
26 D1S	¿Qué sucede cuando tengo cantidades con signo distinto?	
27 G	[El grupo emite diferentes respuestas, unos cuantos afirman la suma, otros cuantos la resta y pocos menos preguntan] ¡Se suman!, ¡se restan!, ¿se suman o se restan?	Nuevamente surge el conflicto para resolver sumas restando.
28 D1S	¡Se restan! y se deja el signo…	
29 G	[Predominan dos respuestas] ¡Del mayor!, ¡del de mayor valor absoluto!	Los niños comienzan a utilizar el lenguaje correcto.
30 D1S	Del de mayor valor absoluto que en este caso es doce, y en este caso mi resultado es ocho… $-4 + \underbrace{5 + 7} = -4 + 12 = 8$ …Positivo $-4 + 5 + 7 = -4 + 12 = +8$ [aparece en la diapositiva el resultado completo de la operación]  	El docente signa al ocho, cuando no era necesario.
31 A2	Ah… ¡ya entendí!	Parece que A2 ha comprendido la regla y puede operar la sustracción.

<table>
<tr><td colspan="2">Episodio X</td><td>SUSTRACCIÓN DE ENTEROS</td><td colspan="2">Docente D1S</td></tr>
<tr><th>Línea</th><th colspan="2">Diálogos</th><th colspan="2">Observaciones</th></tr>
<tr><td>32
D1S</td><td colspan="2">… resuélvanlo [pide que lo resuelvan individualmente y dice que asignará a los alumnos que van a pasar al pizarrón]</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>33
D1S</td><td colspan="4">Seis voluntarios (V) [asigna a los seis alumnos que levantaron la mano para pasar a resolver las operaciones]</td></tr>
<tr><td rowspan="6">34
V1,
V2,
V3,
V4,
V5,
V6</td><td>V1</td><td>9 – (2) – (-3) = 9 - 2 + 3 = -2 + 12 = +10</td><td>Incorrecto</td><td rowspan="6"></td></tr>
<tr><td>V2</td><td>-7 – (-1) – (-7) = -7 + 1 +7 = -7 + 8 = 1</td><td>Correcto</td></tr>
<tr><td>V3</td><td>-3 – (-2) – (-1) = -3 + 2 + 1 = 0</td><td>Correcto</td></tr>
<tr><td>V4</td><td>14 – (-6) – (7) = 14 + 6 + 7 = 27</td><td>Incorrecto</td></tr>
<tr><td>V5</td><td>-3 – (-4) – (3) = -3 + 4 + 3 = -3 + 7 = +4</td><td>Correcto</td></tr>
<tr><td>V6</td><td>-1 – (-1) – (-1) = -1 + 1 + 1 = -1 + 2 = +1</td><td>Correcto</td></tr>
<tr><td>35
D1S</td><td colspan="2">¿Cómo están sus resultados?</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>36 G</td><td colspan="2">¡La dos está mal!
[se refiera al resultado de V1]</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>37
D1S</td><td colspan="2">Sí ,confundió el nueve con el cuatro…
-4 – (2) – (-3) = -4 - 2 + 3 = -6 + 3 = -3
por eso el resultado es incorrecto, debe ser… menos tres.</td><td colspan="2">El docente explica que el resultado es incorrecto, cuando no es así, V1 aplica correctamente el inverso aditivo para eliminar paréntesis, reduce y resuelve, aunque confunde al -4 con el -9.</td></tr>
<tr><td>38 A2</td><td colspan="2">La cinco está mal ¿no?
[se refiere a la operación realizada por V4]

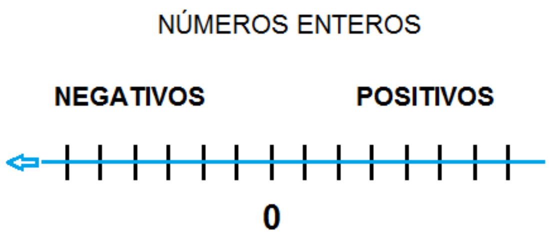
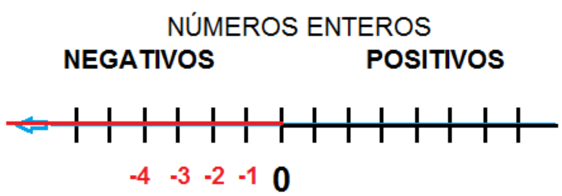
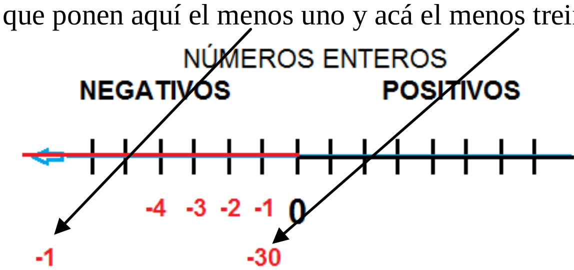
14 – (-6) – (7) = 14 + 6 + 7 = 27</td><td colspan="2">A raíz de que ya “entendió” A2 se vuelve participativo y reconoce el resultado incorrecto de V4.</td></tr>
<tr><td>39
D1S</td><td colspan="2">Vamos a ver si el resultado como el procedimiento están bien…
[aparecen los resultados en la diapositiva]
</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Episodio X	SUSTRACCIÓN DE ENTEROS	Docente D1S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
40 D1S	¿Dónde estuvo el error cuando dice 27? [se refiere al resultado de V4] **14 – (-6) – (7)** = 14 + 6 + 7 = 27 En que este siete es positivo y su inverso es negativo [señala en la diapositiva el resultado correcto] **14 - (-6) - (7) = 14 + 6 - 7 = 20 - 7 = 13**	
41 D1S	Bueno, de esa manera vamos a conocer la sustracción de números negativos.	El docente da por terminado el tema de adición y sustracción de enteros. No apareció el *enfoque de la resolución de problemas* que implicara la operatividad, solamente pregunta en dónde aparecen los negativos (Episodio 11)

Episodio XI	¿DÓNDE APARECEN LOS NEGATIVOS?	Docente D1S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
1 D1S	… vimos: - Cómo se trabajan los números enteros en la recta numérica - Números enteros que son los considerados positivos y negativos.	El docente recapitula… Los enteros en la recta numérica. Cuáles son los enteros.
2 A2	- Cómo se suman un número positivo y un número negativo	Suma de un positivo y un negativo.
3 D1S	¿Qué más?	
4 A6	- Si sumamos dos números positivos la suma es positiva	Suma de dos positivos.
5 A7	- Quién es mayor de un número negativo y uno positivo	El orden de los enteros.
6 D1S	Así es… - Cómo se considera un número positivo y uno negativo y cuál es el orden	
7 D1S	- En la adición de enteros, si los sumandos son negativos, cómo es la suma.	Suma de dos negativos.
8 D1S	***¿Y para qué nos sirven los números negativos?*** ya lo hemos platicado anteriormente, en dónde podemos ubicar nosotros números negativos.	Utilidad de los números negativos, hasta este momento se muestra un contexto.
9 D1S	¿Dónde ubicamos números negativos?	
10 A3	En un termómetro.	Aparece el contexto de temperatura, aunque no explica.
11 A4	En la cantidad de dinero que tenemos.	Aparece el contexto del haber y deber dinero.
12 A5	En el tipo de sangre	Aunque el tipo de sangre puede ser “positivo” (Factor RH+) o negativo (RH-), éste no da la idea de los opuestos, más bien contiene la idea del hay o no hay un factor, que matemáticamente podría representarse con un cero y un uno: 0 no hay un tipo de proteína en la sangre. 1 Si hay la proteína. Pero el docente no aclara esta situación, no es propiamente una situación representada por cantidades opuestas.

Episodio XI	¿DÓNDE APARECEN LOS NEGATIVOS?	Docente D1S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
13 A1	En las compras	Es el mismo contexto del haber y deber dinero, pero el docente no lo aclara.
14 A2	En las gráficas	Es un buen contexto aunque no amplía cómo intervienen los negativos.
15 A6	En los descuentos (Se refiere a los descuentos en las tiendas)	Puede clasificarse dentro del contexto del haber y tener dinero, pero no lo aclara. No indica que un -50% indica que se reduce el precio a la mitad y puede calcularse mediante una sustracción de enteros o bien con una estrategia multiplicativa, aplicar 50/100 al precio original. El tema de adición y sustracción de enteros está referido a la resolución de problemas dentro del programa de estudio, pero no apareció evidencia del enfoque de la resolución de problemas durante la enseñanza del docente D1.

TRANSCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LA ENSEÑANZA DE LA DOCENTE D2S

Episodio I.	LOS ENTEROS Y LA RECTA NUMÉRICA	Docente D2S
Línea	**Diálogo**	**Observaciones**
1 D2S	Se les llama números enteros a los números que tienen signo. Los números que son positivos o negativos… Números enteros mejor conocidos como números con signo	La definición que da la docente a los niños es incompleta ya que en ella cabrían los decimales y fraccionarios positivos y negativos por lo menos. Se sugiere por el presente autor una definición sencilla pero precisa: *“Los enteros son los naturales, sus simétricos y el cero”*
2 D2S	Ya habíamos visto en la recta numérica que los números que están del lado derecho son positivos… Y los números que están del lado izquierdo son negativos. [dibuja una RN]  	La definición del entero positivo está incompleta porque si la recta es vertical ya no aplica esta definición, por ello se propone: “Un entero positivo es aquel que es mayor que cero”, es decir: $\boldsymbol{a}>0$ es positivo con $\boldsymbol{a}$ entero. Se nota una punta de flecha izquierda en la Recta Numérica (RN) lo que indicaría que el sistema de referencia es positivo hacia esa dirección y contradice la primera definición de que los positivos están a la derecha en la RN.
3 D2S	Los negativos están del lado izquierdo pero empiezan desde el menos uno. [escribe los primeros negativos en la RN]  	Correctamente la docente dice que los negativos (enteros) comienzan en el uno negativo. Se sugiere mencionar que el menos uno es el primer entero negativo cuando se utiliza el método inductivo extrapolatorio: …3, 2, 1, 0. -1…
4 D2S	De tal manera que no vamos a hacer como algunos que ponen aquí el menos uno y acá el menos treinta  No, verdad, van en cuenta regresiva. [borra el uno negativo y al treinta negativo]	Indica que lo números negativos crecen en “negatividad” hacia la izquierda, como dice Peled en el nivel 1 de la RN, en la dificultad de la ordenación de enteros.

EPISODIO II.	LA ADICIÓN DE ENTEROS	DOCENTE D2S
Línea	**Diálogo**	**Observaciones**
1 D2S	¿Qué sucede si sumamos dos números positivos, ya lo sabemos verdad, si yo sumo seis *más* tres ¿cuánto me da? [escribe la suma en forma vertical] [Los niños no responden, se quedan viendo unos a otros a ver quién responde] $\begin{array}{r} 6 \\ \underline{+3} \end{array}$	Los alumnos pueden sumar naturales, pero cuando éstos son considerados como enteros positivos, los niños no están seguros de cómo operarlos, aparece la tendencia cognitiva no. 4, como la imposibilidad de realizar operaciones que podían resolver antes de introducir el nuevo contenido.
2 G	¡Nueve! [Contesta aproximadamente la mitad del grupo]	
3 D2S	¡Más nueve! [Interviene la docente y menciona el signo más del nueve] $\begin{array}{r} 6 \\ \underline{+3} \\ +9 \end{array}$	Aparece otra tendencia cognitiva, la no.2, de los sentidos intermedios, caracterizada en los enteros por Gallardo, en la que los alumnos conceptualizan al número signado en la transición del natural al entero.
4 D2S	Pero si yo ***sumo*** menos seis menos tres… [Escribe] $\begin{array}{r} -6 \\ \underline{-3} \end{array}$	Cabe mencionar que la docente utiliza la notación de suma vertical, pero no indica el signo de adición entre los dos números: Se sugiere incluir el signo binario para mostrar la estructura aditiva: $\begin{array}{r} -6 \\ \underline{+\ -3} \end{array}$
5 G	¡Menos nueve! [Contesta la mayoría del grupo, uno de los alumnos dice “nueve”]	El niño que dice “nueve” se encuentra en un sentido intermedio en la conceptualización del número negativo, está en la etapa anterior a la de signar al número, que sería la del número sustractivo de Gallardo.
6 D2S	Menos nueve…[Escribe el resultado con color rojo] $\begin{array}{r} -6 \\ \underline{-3} \\ -9 \end{array}$ Si yo debo seis pesos y luego debo tres, vuelvo a pedir prestado [escribe] $\begin{array}{rl} -6 & \text{debo} \\ \underline{-3} & \text{prestado} \\ -9 & \end{array}$ Pues me va a dar un menos nueve	La docente utiliza el color rojo y además el signo para dar la cualidad de negativo, se sugiere utilizar uno u otro para evitar el *predominio del negativo*. La docente utiliza el contexto de las deudas para representar dos negativos y a través del incremento de la deuda obtener el resultado de la suma como ocurre en el nivel 2Q de Peled. Se sugiere utilizar el signo binario para mostrar la estructura aditiva.

EPISODIO II.	LA ADICIÓN DE ENTEROS	DOCENTE D2S
Línea	**Diálogo**	**Observaciones**
7 D2S	Ahora la pregunta es: ¿Qué pasa si tengo seis y me gasto tres? [Escribe] $\begin{array}{r} +6 \\ \underline{-3} \end{array}$	Utiliza una pregunta para plantear el caso de la suma de enteros con diferente signo. Se sugiere escribir el signo binario, porque la situación problemática planteada se resuelve con la sustracción de números naturales y aquí se está utilizando a -3 para representar el gasto de tres pesos. Este planteamiento provoca una duda en la estructura aditiva.
8 A1	¡Tres!	
9D2S	Me queda tres $\begin{array}{r} +6 \\ \underline{-3} \\ +3 \end{array}$	La forma en que presenta la operación vertical parece una sustracción y no una adición. Aparece aquí la dificultad caracterizada por Peled, El alumno no llega a cubrir el nivel 3Q, porque presenta dificultad en sumar números de diferente signo, provocado posiblemente por la falta de estructura mostrada a través del signo binario de la suma.
10 D2S	Pero ¿qué pasa si debo seis y abono tres? [Escribe] $\begin{array}{r} -6 \\ \underline{+3} \end{array}$	La estructura es la misma (una adición) aunque no se indique mediante su signo binario. Para el caso de la suma de un negativo y un positivo, la docente utiliza el contexto del haber y el deber aunque no lo indique a sus alumnos.
11 A1	¡Sigo debiendo tres!	
12 D2S	… y ¿cómo lo pongo entonces?	
13 D2S	Menos tres ¿verdad? [Anota el resultado] $\begin{array}{r} -6 \\ \underline{+3} \\ -3 \end{array}$	D2S no da oportunidad a que los alumnos respondan.

EPISODIO II. LA ADICIÓN DE ENTEROS DOCENTE D2S		
Línea	**Diálogo**	**Observaciones**
14 D2S	¿Si? ¿Hasta aquí todo está bien claro?	
15 G	Siii… [Contesta a coro el grupo]	D2S induce a sus alumnos a aceptar sus reglas.
16 D2S	Vamos a poner otro ejemplo en el que se equivocan bastante	La docente comenta expresamente a los alumnos que hay situaciones que resultan en errores cometidos por los niños.
17 D2S	Por ejemplo si te dicen que amanecimos a menos dos grados [Escribe] -2 GRADOS O en la Ciudad de Chihuahua, tiene menos dos grados, ¡no!, *menos dos grados es muy poco*, si amaneció en el pleno invierno, *a menos quince grados* [A1 interviene y dice “Ah, por Estados Unidos” mientras D2 Escribe] -15 GRADOS ¿Qué sucede si sube la temperatura tres grados? ¿Cuánto me queda?	D2S utiliza el contexto de las temperaturas. D2S no utiliza la nomenclatura adecuada ni el tipo de escala. Se sugiere expresar: -2°C Cuando dice la docente que “*menos dos grados es muy poco*” lo que quiere decir es que la temperatura que utilizó como ejemplo (-2°C) no es lo suficientemente baja como para ilustrar la situación planteada. Se presenta la dificultad No. 1 y 3 de Bell, en la ordenación de los enteros o negativos y en las dificultades al cruzar el cero asociadas en este caso al uso ambiguo de lenguaje.
18 A1	¡Doce!	La respuesta de A1 es relativa y omite el signo del número, tal como está caracterizado este error conceptual por Bell “IS” (Ignora el signo)
19 G	¡Menos doce!	El grupo corrige a A1 recurriendo al número signado.

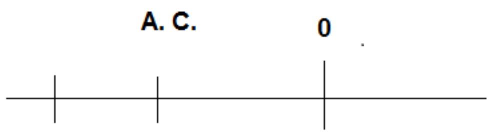
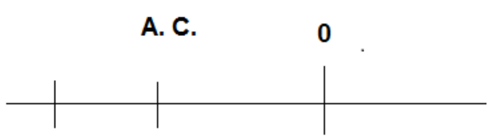
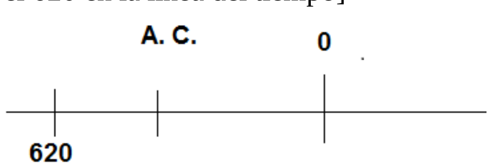
EPISODIO II. LA ADICIÓN DE ENTEROS DOCENTE D2S		
Línea	**Diálogo**	**Observaciones**
20 D2S	Menos doce ¿verdad? [Completa la oración y la operación] -15 GRADOS + 3 -12 Y luego… hace más calor y sube ocho grados en el pleno día…	D2S utiliza problemas aditivos caracterizados por Bruno, aunque no recurre a la sistematización de las estructuras propuestas es dicha caracterización como la “combinación”, “el cambio”, “la comparación” y “dos cambios”.
21 A1	¡menos cuatro!	Responden correctamente la mayoría de los estudiantes.
22 D2S	Entonces me queda menos cuatro. [Anota] 15 GRADOS + 3 -12 + 8 -4 Pero ya vuelve a anochecer y ya hace frío, a las doce de la noche baja la temperatura cinco grados…	La docente anota “15 Grados” en lugar de “-15”, suma 3 grados y llega a -12, suma 8 y llega a -4, la explicación que da es adecuada desde el punto de vista semántico, el cual ayuda a la comprensión del problema y de las operaciones, pero desde la sintaxis se comenten los errores ya reportados (Bell, Peled, Bruno).
23 A1, G	¡Menos nueve!	
24 D2S	Menos nueve [Anota] 15 GRADOS + 3 -12 + 8 -4 +5 -9 De las hojas que les proporcioné ¿tienen alguna duda?	La estrategia utilizada por la docente parece funcionar bien, el contexto de las temperaturas cuando es utilizado adecuadamente parece una buena introducción para la adición de enteros, pero en esta propuesta didáctica se sigue utilizando la forma de sumar vertical y esto impide que se observe la estructura aditiva debido a que sigue sin utilizarse el signo de la operación. La sugerencia es seguir utilizando este contexto e incluir la estructura aditiva, además de pasar de la forma vertical a la forma horizontal e incluir la notación completa de paréntesis de Cid y Bolea. La docente no explicita que: Un aumento de temperatura es un cambio con signo positivo (con movimiento hacia “arriba”) como en (-15) + (3) = -12 Una disminución de temperatura es un cambio con signo negativo (con dirección hacia “abajo”) como en (-4) + (-5) = (-9)

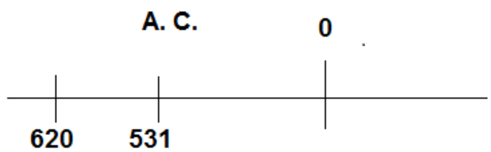
EPISODIO II.	LA ADICIÓN DE ENTEROS	DOCENTE D2S
Línea	**Diálogo**	**Observaciones**
25 G	¡No!	Parece que en un principio los alumnos no tienen duda en cómo operar las “sumas” verticales.
26 D2S	¿Quién quiere pasar a resolver? [Anota dos operaciones] $\begin{array}{r} -4 \\ -3 \\ \hline \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{r} -4 \\ +1 \\ \hline \end{array}$	
27 A2	[La docenta le dice a A2] Pasa al pizarrón y resuelve $\begin{array}{r} -4 \\ -3 \\ \hline -7 \end{array}$ [A2 escribe el resultado en rojo y no hay comentario por parte de la docente]	Esta forma de ver a la adición es común en varias situaciones analizadas en todo el estudio, si se coloca esta operación sin tomar en cuenta el signo binario, se tendría: -4-3= -7, el resultado de esta expresión es correcto pero cuando se pregunta sobre la estructura, algunos docentes aseguran que se trata de una suma y otros dicen que se trata de una resta, el alumno parece no ser consciente de la operación que está resolviendo y no sabe si es una adición o una sustracción.
28 A3	[La docente le dice a A3] Pasa y resuelve $\begin{array}{r} -4 \\ +1 \\ \hline +3 \end{array}$ [A3 escribe el resultado]	
29 D2S	[La docente observa el resultado y pregunta al grupo] ¿Está bien o está mal?	
30 G	¡Está mal! [Responde el grupo] ¡Es menos tres!	
31 D2S	Es menos tres porque a menos cuatro, [señala al cuatro negativo] $\begin{array}{r} -4 \\ +1 \\ \hline +3 \end{array}$ Ahí lo dicen las hojas: …	D2S no hace reflexionar a A3 sobre el resultado, simplemente se remite a explicar cómo obtener el resultado. La docente invita a los niños a que vean las hojas que les dio, en las cuales están escritas las reglas para sumar enteros.

EPISODIO II.	LA ADICIÓN DE ENTEROS	DOCENTE D2S
Línea	**Diálogo**	**Observaciones**
31 D2S	Se hace la resta, y se pone el signo del mayor.	Se recurre a la regla: números con signos diferentes, se hace la resta, y se pone el signo del mayor. Esta regla además de ser incompleta, provoca errores de tipo conceptual y operativo, provoca que el niño tenga confusión en que si para sumar requiera restar, entonces el niño no sabe si está sumando o restando.
32 D2S	¿Quién lo quiere leer? [Pregunta la docente al grupo]	
33 A4	[A4 comienza la lectura de las reglas dadas por la docente] La adición de números con signo se realiza de acuerdo con las siguientes reglas:	
34 A4	Si los (números) tienen signos iguales sumamos sus valores absolutos y el signo de la suma es el mismo que el de los sumandos	Recurre al valor absoluto, el cual aún no ha sido definido. Regla No.1 para la adición de dos números con el mismo signo: ***Si los (números) tienen signos iguales sumamos sus valores absolutos y el signo de la suma es el mismo que el de los sumandos.***
35 D2S	Aquí está [señala la operación del pizarrón] $\begin{array}{r} +6 \\ +3 \\ \hline +9 \end{array}$	
36 A4	Si los números tienen signos contrarios restamos sus valores absolutos y el signo de la diferencia es el del sumando de mayor valor absoluto	Regla No.2 para la adición de dos números con signos contrarios: ***Si los números tienen signos contrarios restamos sus valores absolutos y el signo de la diferencia es el del sumando de mayor valor absoluto.*** Se sugiere que los alumnos sean quienes construyan las reglas sintácticas y que vayan acompañadas de un ejemplo en el que se contemplen todos los casos: -La suma de dos positivos -La suma de dos negativos -La suma de un positivo y un negativo -La suma de un negativo y un positivo.

EPISODIO II.	LA ADICIÓN DE ENTEROS	DOCENTE D2S
Línea	**Diálogo**	**Observaciones**
37 D2S	¿Sí? ¿Todo claro?	
38 D2S	Si yo sumo dos números positivos ustedes ya saben que sale positivo. [Escribe la operación] $\begin{array}{r} 8 \\ +\ 2 \\ \hline +10 \end{array}$ Dos negativos se juntan y me da un resultado negativo [Escribe] $\begin{array}{r} -\ 8 \\ -\ 2 \\ \hline -10 \end{array}$	En este ejemplo, aparece el signo binario pero no el unario y sí el unario del resultado La palabra "juntan" no queda expresado sintácticamente a través del signo de la suma.
39 D2S	Cuando hacemos una resta, tenemos más ocho y menos dos [Escribe] $\begin{array}{r} +\ 8 \\ -\ 2 \\ \hline \end{array}$ Que son números con diferente signo se restan, ¿Cuánto me da?	Hay confusión en las reglas de la docente, ahora dice que está resolviendo una "resta" pero utiliza la regla de la suma de un positivo y un negativo. Realmente está enseñando cómo se suman un positivo y un negativo. Existe la confusión entre la sustracción y el número negativo, dificultad identificada por Gallardo como una tendencia cognitiva de los sentidos intermedios en la adquisición de la operatividad de enteros.
40 G	¡Más seis!	Los alumnos ya responden con el número signado, están dejando el número natural para pasar al signado.
41 D2S	Aquí es importante poner el signo [signa el resultado] $\begin{array}{r} +\ 8 \\ -\ 2 \\ \hline +\ 6 \end{array}$	La docente recurre al número signado para resaltar el carácter positivo del resultado.
42 D2S	¿Qué pasa si yo tengo menos ocho y más dos? $\begin{array}{r} -\ 8 \\ +\ 2 \\ \hline \end{array}$	Tiene dos números, pero no indica la operación que se realiza entre ellos, aunque se asume que es una adición.

EPISODIO II.	LA ADICIÓN DE ENTEROS	DOCENTE D2S
Línea	**Diálogo**	**Observaciones**
43 G	¡Menos seis!	
44 D2S	¿Por qué me da menos seis? [Pregunta al momento que escribe el resultado] $\begin{array}{r} -\ 8 \\ +\ 2 \\ \hline -6 \end{array}$	
45 G	¡Porque el mayor es menos ocho!	Aparece el error conceptual de Bell, de las dificultades en el orden de los enteros asociadas a la ambigüedad del lenguaje.
46 D2S	Me da el signo del mayor [Señala al signo del seis negativo] $\begin{array}{r} -\ 8 \\ +\ 2 \\ \hline -6 \end{array}$ Restas los valores absolutos	Los niños con esta instrucción apenas llegan a cubrir el nivel 3Q de Peled, en las que no llegan a adquirir la competencia en la adición de cantidades con diferentes signos en la dimensión cantidad.

Episodio III.	PROBLEMAS CON ENTEROS	Docente D2S
Línea	**Diálogo**	**Observaciones**
1 D2S	En la línea del tiempo… Se acuerdan qué edad tenía Tales de Mileto [Dibuja una línea del tiempo]  	La docente dibuja una recta, pero no se indica el sentido positivo del sistema de referencia. Se localiza el cero y la referencia de A.C. (antes de Cristo). Se sugiere colocar una punta de flecha en el extremo derecho de la recta para indicar el sentido positivo. Se sugiere además, utilizar en este momento la transformación de A.C. al de números negativos y D.C. como números positivos, para superar la DLE3 de la discontinuidad de medidas al cruzar el cero de González Marí. El presente autor de esta tesis señala que: ***El establecimiento del sistema de referencia permite convertir al número relativo en número entero.***
2 A1, G	82 años  	
3 D2S	¿Cuándo nació?	
4 A5	Seiscientos veinte antes de Cristo (620 A.C.) [Ubica el 620 en la línea del tiempo]  	
5 D2S	¿Cuándo murió?	
6 G	Setecientos diez, setecientos nueve,	

Episodio III.	PROBLEMAS CON ENTEROS	Docente D2S
Línea	**Diálogo**	**Observaciones**
7 D2S	¿Setecientos nueve antes de Cristo?	
8 A5	¡No! Quinientos ocho	
9 A6	Quinientos dieciocho	
10 A7	Quinientos treinta y uno antes de Cristo (531 A.C.) [Ubica al 531 en la línea del tiempo]  	La docente pareciera estar utilizando problemas con números enteros, pero en realidad está utilizando los naturales relativos de González Marí, y resolviendo operaciones de sustracción con números naturales.
11 D2S	¿Entonces cuántos años tiene?	
12 A8, A1	Ochenta y dos años [dice A8], Ochenta y uno [dice A1]	
13 G	¡No! [Exclama el grupo a coro]	
14 D2S	[Al notar la docente que los niños no pueden responder correctamente, hace una operación en el pizarrón] 620 -531 89 Ochenta y nueve ¿no? [Se dirige al grupo]	La docente D2S resuelve el problema con números enteros relativos, por ello opera con naturales. Los niños no tienen la oportunidad del reto cognitivo, ni la oportunidad de practicar lo posiblemente aprendido.
15 G	Si [Contestan no muy convencidos]	
16 D2S	¿Por qué ochenta y nueve? [Con esta pregunta termina la clase]	Se sugiere en este tipo de problemas plantear las operaciones que lo resuelven con números enteros en lugar de usar naturales relativos. (utilizando al sistema de referencia). Ejemplificar el caso de la sustracción el cual no ha sido visto. Como se está utilizando el modelo de la recta numérica, se sugiere utilizar a la sustracción como una comparación entre los dos números, el resultado tendrá el signo de la dirección del proceso (Triple naturaleza de la sustracción de Gallardo) no importando la zona de la recta en la que se realiza la comparación:

Episodio III.	PROBLEMAS CON ENTEROS	Docente D2S
Línea	**Diálogo**	**Observaciones**
16 D2S		 Comparar el -620 con el -531 es una forma de representar a la sustracción: (-531) – (-620) = Esta operación significa ¿Cuál es la diferencia entre -531 y -620? Es decir, ¿Cuántos años hay entre -531 y -620? Ya planteado el problema con la operación que la modela se puede recurrir a: a) El simétrico o inverso aditivo: (-531)+ 620= b) La operación inversa a la adición -620+ x = -531 ¿Cuánto tengo que sumar a -620 para llegar al -531? c) La sustracción como completar: ¿Cuánto le falta a -620 para llegar a -531? La dirección de proceso indica una diferencia positiva, es decir el segmento dirigido que representa a la diferencia va a la derecha.

<table>
<tr><td colspan="3">Episodio IV. EL SIMÉTRICO Y EL VALOR ABSOLUTO Docente D2S</td></tr>
<tr><th>Línea</th><th>Diálogo</th><th>Observaciones</th></tr>
<tr><td>1 D2S</td><td>[Comienza la siguiente clase con el valor absoluto y el simétrico, completa una tabla al momento que explica]
Que el valor absoluto de un número es el valor y no importa el signo, por ejemplo el número menos tres, más tres [los anota en la tabla]
¿Cuál es el valor absoluto de menos tres?<table><tr><td>NÚMERO</td><td>VALOR ABSOLUTO</td><td>SIMÉTRICO</td></tr><tr><td>-3</td><td></td><td></td></tr><tr><td>+3</td><td></td><td></td></tr></table></td><td>No existe una definición formal de la docente acerca del valor absoluto, ni de tipo semántico ni de tipo sintáctico, sólo una aproximación.
Se sugiere:
El valor absoluto de un número es el tamaño o norma del número y siempre es positivo, se utilizan dos barras paralelas para indicar la operación de valor absoluto:
| 5|= 5, El valor absoluto de 5 es 5
|-5|= 5,El valor absoluto de -5 es 5
|0|=0, El valor absoluto de 0 es 0.
Es buen momento de incluir una generalización (definición formal):
$|a| = a \quad Si\ a > 0$
$|a| = -a \quad Si\ a < 0$
$|a| = 0 \quad Si\ a = 0$
Con a ϵ $\boldsymbol{Z}$.</td></tr>
<tr><td>2 A1</td><td>Más tres</td><td></td></tr>
<tr><td>3 D2S</td><td>Tres, sin signo. [anota 3 en valor absoluto]
¿Cuál es el valor absoluto de más tres?<table><tr><td>NÚMERO</td><td>VALOR ABSOLUTO</td><td>SIMÉTRICO</td></tr><tr><td>-3</td><td>3</td><td></td></tr><tr><td>+3</td><td></td><td></td></tr></table></td><td>El eliminar, quita, omitir o evadir el signo del número entero puede provocar un error conceptual, ya que el valor absoluto no consiste en quitar el signo al número, sino en “positivar” un número con excepción del cero.</td></tr>
<tr><td>4 G</td><td>¡Tres! [Anota el valor absoluto de tres]<table><tr><td>NÚMERO</td><td>VALOR ABSOLUTO</td><td>SIMÉTRICO</td></tr><tr><td>-3</td><td>3</td><td></td></tr><tr><td>+3</td><td>3</td><td></td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Ahora vamos a hablar del simétrico ¿Cuál es el simétrico de menos tres?</td><td>No aparece una definición del simétrico, ni semántica ni sintáctica ni formal.
Se sugiere que: el simétrico es un número que resulta de la imagen especular de otro, localizado en la región opuesta de la RN tomando como eje de simetría al origen, esto desde un punto de vista conceptual.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Episodio IV. EL SIMÉTRICO Y EL VALOR ABSOLUTO Docente D2S</td></tr>
<tr><th>Línea</th><th>Diálogo</th><th>Observaciones</th></tr>
<tr><td>5 D2S</td><td></td><td>Desde un punto de vista matemático, el simétrico es el resultado de aplicar la operación de negación de dicho número:

-(5) = -5. El simétrico de 5 es cinco negativo.

-(-5) = 5. El simétrico de cinco negativo es cinco.

-(0) = 0. El simétrico de cero es cero. (conceptualmente es el mismo número)

Es buen momento para comenzar a utilizar las generalizaciones (Definición formal del simétrico): $-(\boldsymbol{a}) = -\boldsymbol{a}$ Es decir, el simétrico de a es menos a, y aplica para cualquier entero: si a es positivo, negativo o cero.</td></tr>
<tr><td>6 A2</td><td>Menos seis [la siguen con la respuesta dos o tres niños más]</td><td>La alumna A2 duplica el número en lugar de simetrizarlo.</td></tr>
<tr><td>7 D2S</td><td>Más tres [Anota el resultado en la tabla]<table><tr><td>NÚMERO</td><td>VALOR ABSOLUTO</td><td>SIMÉTRICO</td></tr><tr><td>-3</td><td>3</td><td>+3</td></tr><tr><td>+3</td><td>3</td><td></td></tr></table></td><td>La docente aplica una forma del método inductivo extrapolatorio de Freudenthal al utilizar su tabla e ir preguntando cómo se completa.</td></tr>
<tr><td>8 D2S</td><td>¿El de más tres?</td><td></td></tr>
<tr><td>9 G</td><td>¡Menos tres! [Contestan inmediatamente los niños]</td><td></td></tr>
<tr><td>10 D2S</td><td>¡Muy bien! [Anota el resultado en la tabla]<table><tr><td>NÚMERO</td><td>VALOR ABSOLUTO</td><td>SIMÉTRICO</td></tr><tr><td>-3</td><td>3</td><td>+3</td></tr><tr><td>+3</td><td>3</td><td>-3</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>11 D2S</td><td>Si no tienen signo, supongamos que no tiene signo ¿Cuál sería el simétrico de un décimo (1/10)? [Anota en la tabla]<table><tr><td>NÚMERO</td><td>VALOR ABSOLUTO</td><td>SIMÉTRICO</td></tr><tr><td>-3</td><td>3</td><td>+3</td></tr><tr><td>+3</td><td>3</td><td>-3</td></tr><tr><td>$\boldsymbol{\frac{1}{10}}$</td><td></td><td></td></tr></table></td><td>La docente utiliza a los números fraccionarios para ejemplificar al valor absoluto y al simétrico.

Esta docente se acerca más al programa de estudios que pide utilizar problemas de suma y resta de enteros, fraccionarios y decimales positivos y negativos.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Episodio IV. EL SIMÉTRICO Y EL VALOR ABSOLUTO Docente D2S</td></tr>
<tr><th>Línea</th><th>Diálogo</th><th>Observaciones</th></tr>
<tr><td>12 A3</td><td>¡Diez!</td><td>Los niños confunden al simétrico con el inverso multiplicativo.</td></tr>
<tr><td>13 D2S</td><td>¡Menos un décimo! [Anota en la tabla]
<table>
<tr><td>NÚMERO</td><td>VALOR ABSOLUTO</td><td>SIMÉTRICO</td></tr>
<tr><td>-3</td><td>3</td><td>+3</td></tr>
<tr><td>+3</td><td>3</td><td>-3</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{10}$</td><td></td><td>$\mathbf{-\frac{1}{10}}$</td></tr>
</table></td><td></td></tr>
<tr><td>14 G</td><td>¡ Ahh!</td><td></td></tr>
<tr><td>15 D2S</td><td>El simétrico es el mismo número pero con diferente signo.</td><td>Se presenta un error conceptual, ya que el simétrico de un número es otro número, el cual tiene en común sólo el valor absoluto.
Este error es común en la enseñanza de los dos docentes D1S y D2S en la primera enseñanza de números enteros, misma situación reportada en González M. (2001) en su obra de Los Enteros…</td></tr>
<tr><td>16 G</td><td>Si ¡Ahh!</td><td></td></tr>
<tr><td>17 D2S</td><td>¿Cuál sería el simétrico de menos tres punto dos? [Anota -3.2 en la tabla]
<table>
<tr><td>NÚMERO</td><td>VALOR ABSOLUTO</td><td>SIMÉTRICO</td></tr>
<tr><td>-3</td><td>3</td><td>+3</td></tr>
<tr><td>+3</td><td>3</td><td>-3</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{10}$</td><td></td><td>$-\frac{1}{10}$</td></tr>
<tr><td>-3.2</td><td></td><td></td></tr>
</table></td><td>La docente utiliza un ejemplo con números fraccionarios decimales.</td></tr>
<tr><td>18 A2</td><td>¡Mhhhmmm! [Exclama la alumna como no creyendo lo que preguntó la docente]</td><td></td></tr>
<tr><td>19 G</td><td>Más tres punto dos [Responde el grupo después de unos segundos]</td><td></td></tr>
<tr><td>20 D2S</td><td>¡Muy bien! Más tres punto dos [Escribe +3.2 al momento que llena la tabla]
<table>
<tr><td>NÚMERO</td><td>VALOR ABSOLUTO</td><td>SIMÉTRICO</td></tr>
<tr><td>-3</td><td>3</td><td>+3</td></tr>
<tr><td>+3</td><td>3</td><td>-3</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{10}$</td><td></td><td>$-\frac{1}{10}$</td></tr>
<tr><td>-3.2</td><td></td><td>+3.2</td></tr>
</table></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Episodio IV. EL SIMÉTRICO Y EL VALOR ABSOLUTO Docente D2S</td></tr>
<tr><th>Línea</th><th>Diálogo</th><th>Observaciones</th></tr>
<tr><td>21 D2S</td><td>¿Y el valor absoluto?</td><td></td></tr>
<tr><td>22 G</td><td>¡Tres punto dos!</td><td></td></tr>
<tr><td>23 D2S</td><td>Ya no lleva signo [Escribe 3.2 y 1/10 para llenar la columna de valor absoluto]
<table>
<tr><th>NÚMERO</th><th>VALOR ABSOLUTO</th><th>SIMÉTRICO</th></tr>
<tr><td>-3</td><td>3</td><td>+3</td></tr>
<tr><td>+3</td><td>3</td><td>-3</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{10}$</td><td>$\mathbf{\frac{1}{10}}$</td><td>$-\frac{1}{10}$</td></tr>
<tr><td>-3.2</td><td>3.2</td><td>+3.2</td></tr>
</table></td><td>Ocurre el mismo error de ignorar el signo en el caso del valor absoluto.</td></tr>
<tr><td>24 D2S</td><td>¿Algún otro que me quiera poner de ejemplo…?</td><td></td></tr>
<tr><td>25 A2 A3 A4</td><td>Uno punto cinco (1.5) [Propone A2], Dos tercios (2/3) [propone A3] Uno punto seis (1.6) [propone A4]</td><td></td></tr>
<tr><td>26 D2S</td><td>Uno punto seis [Selecciona la docente y anota en la tabla]
<table>
<tr><th>NÚMERO</th><th>VALOR ABSOLUTO</th><th>SIMÉTRICO</th></tr>
<tr><td>-3</td><td>3</td><td>+3</td></tr>
<tr><td>+3</td><td>3</td><td>-3</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{10}$</td><td>$\mathbf{\frac{1}{10}}$</td><td>$-\frac{1}{10}$</td></tr>
<tr><td>-3.2</td><td>3.2</td><td>+3.2</td></tr>
<tr><td>1.6</td><td></td><td></td></tr>
</table></td><td></td></tr>
<tr><td>27 D2S</td><td>¿Cuál es el valor absoluto de uno punto seis (1.6)?</td><td></td></tr>
<tr><td>28 G</td><td>Menos uno punto seis (-1.6)</td><td></td></tr>
<tr><td>29 D2S</td><td>Ese es el simétrico [Anota en la tabla el simétrico]
<table>
<tr><th>NÚMERO</th><th>VALOR ABSOLUTO</th><th>SIMÉTRICO</th></tr>
<tr><td>-3</td><td>3</td><td>+3</td></tr>
<tr><td>+3</td><td>3</td><td>-3</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{10}$</td><td>$\frac{1}{10}$</td><td>$-\frac{1}{10}$</td></tr>
<tr><td>-3.2</td><td>3.2</td><td>+3.2</td></tr>
<tr><td>1.6</td><td></td><td>-1.6</td></tr>
</table></td><td></td></tr>
<tr><td>30 D2S</td><td>¿Y el valor absoluto?</td><td></td></tr>
<tr><td>31 G</td><td>Uno punto seis (1.6)</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Episodio IV. EL SIMÉTRICO Y EL VALOR ABSOLUTO Docente D2S</td></tr>
<tr><th>Línea</th><th>Diálogo</th><th>Observaciones</th></tr>
<tr><td>32
D2S</td><td>[Anota 1.6 en la columna de valor absoluto]
<table>
<tr><th>NÚMERO</th><th>VALOR ABSOLUTO</th><th>SIMÉTRICO</th></tr>
<tr><td>-3</td><td>3</td><td>+3</td></tr>
<tr><td>+3</td><td>3</td><td>-3</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{10}$</td><td>$\frac{1}{10}$</td><td>$-\frac{1}{10}$</td></tr>
<tr><td>-3.2</td><td>3.2</td><td>+3.2</td></tr>
<tr><td>1.6</td><td>1.6</td><td>-1.6</td></tr>
</table></td><td>Cabe señalar que la docente D3S realiza una extensión del conjunto numérico de N o Z+ y Q+ hacia Z- y Q-, es decir realiza una simetrización de los números que conoce el niño, como son los naturales, los fraccionarios y los decimales positivos hacia sus conjuntos negativos, como lo sugieren Bruno y Cid.</td></tr>
</table>

Episodio V.	RECAPITULANDO SUMAS Y ¿RESTAS?	Docente D2S
Línea	**Diálogo**	**Observaciones**
1 D2S	Volvemos a recordar… Si yo tengo diez más… seis [Escribe en el pizarrón] $\begin{array}{r} 10 \\ +\ 6 \\ \hline \end{array}$ me da	Recapitula la suma de dos positivos, como lo hace en los naturales usando la notación vertical pero sin utilizar explícitamente los signos unario y binario.
2 G	Dieciséis (16) [Contesta el grupo entusiasta]	El grupo parece haber superado la tendencia cognitiva no. 4.
3 D2S	[Escribe el resultado] Dieciséis $\begin{array}{r} 10 \\ +\ 6 \\ \hline +\ 16 \end{array}$	
4 D2S	Si yo tengo menos diez y menos seis me da… [Escribe la operación en el pizarrón] $\begin{array}{r} -10 \\ -\ 6 \\ \hline \end{array}$	Resume el caso de la suma de dos negativos.
5 G	¡Menos dieciséis! [Contestan a coro mientras la profesora escribe la respuesta] $\begin{array}{r} -10 \\ -\ 6 \\ \hline -\ 16 \end{array}$	Los alumnos no tienen aparentemente ningún problema en obtener la solución de la adición de números del mismo signo, superando la dificultad No. 2Q de Peled.
6 D2S	Si yo tengo más diez y menos seis me da… [Escribe la operación] $\begin{array}{r} +10 \\ -\ 6 \\ \hline \end{array}$	En este punto parece surgir nuevamente el conflicto cognitivo, los niños no han superado la dificultad No. 3Q planteada por Peled.
7 G	[Se oyen al menos tres voces con tres resultados diferentes] ¡Cuatro!, ¡Menos cuatro!, ¡Más cuatro! [La profesora escribe +4 como resultado] $\begin{array}{r} +10 \\ -\ 6 \\ \hline +4 \end{array}$	Se emiten varias respuestas, lo que indica que aún existen dudas en cómo obtener el resultado de una suma de dos números con signos contrarios.

Episodio V.	RECAPITULANDO SUMAS Y ¿RESTAS?	Docente D2S
Línea	**Diálogo**	**Observaciones**
8 D2S	[Escribe otra operación mientras la menciona] Menos diez más seis $\begin{array}{r} -10 \\ +6 \\ \hline \end{array}$	
9 G	¡Menos cuatro! [Contesta el grupo entusiastas a coro]	Ahora la mayoría de alumnos responde correctamente.
10 D2S	Menos cuatro verdad [Escribe el resultado] $\begin{array}{r} -10 \\ +6 \\ \hline -4 \end{array}$ …porque queda el signo del mayor [señala al diez negativo como ese mayor] ¿Sí?	Se explica el porqué se obtiene ese resultado de acuerdo a la regla para sumar dos números con signos contrarios. Se sugiere utilizar al valor absoluto para evitar un error conceptual: …Porque queda el signo del número de mayor valor absoluto [Señalar al diez negativo]
11 A4	Ohhh ya, ya [A4 parece entender el procedimiento exclamando esa expresión verbal]	
12 D2S	Aquí se suman los dos que tienen el mismo signo [Señala la operación y signa al diez] $\begin{array}{r} +10 \\ +6 \\ \hline +16 \end{array}$ Acá se suman los signos cuando son iguales [Señala los signos negativos] $\begin{array}{r} -10 \\ -6 \\ \hline -16 \end{array}$ Cuando son diferentes [Señala el signo positivo del diez y el signo negativo del seis] $\begin{array}{r} +10 \\ -6 \\ \hline +4 \end{array}$ se restan los valores absolutos y se pone el signo del más grande [señala al signo positivo del diez] $\begin{array}{r} +10 \\ -6 \\ \hline +4 \end{array}$	Ejemplifica la suma de un positivo y un negativo nuevamente porque parece que no quedó claro el procedimiento.

Episodio VI. COMBINANDO OPERACIONES Docente D2S		
Línea	**Diálogo**	**Observaciones**
1 D2S	[La docente escribe en el pizarrón 5 operaciones combinadas de suma y resta sin paréntesis, después pregunta] 1) $-12 + 8 - 7 + 6 =$ 2) $15 - 9 + 6 - 3 =$ 3) $24 - 9 - 3 - 12 =$ 4) $36 + 8 - 17 + 15 =$ 5) $-15 + 8 - 7 + 6 =$ ¿Cómo habíamos dicho que íbamos a resolver estos?	La docente trata de utilizar lo aprendido (adición y “sustracción” de enteros) para realizar una cadena de operaciones, sumas y restas sin paréntesis. En la operación 1) sólo el primer sumando es negativo, los demás son sumas y restas de números naturales. Se sugiere aplicar la notación completa de Cid y Bolea para identificar la estructura aditiva y el carácter positivo, negativo o neutro de los números, es decir identificar los signos unarios y binarios de Gallardo: $-12 + 8 - 7 + 6 =$ (-12) + (8) – (7) + (6) = (-12) + (+8) - (+7) + (+6)= De esta manera se observa que la operación es: a doce negativo (-12) se suma ocho, se resta 7 y se suma 6. Y no confundir los signos de resta con el número negativo como lo hace la docente.
2 G	[Varios alumnos, aproximadamente 5 del total, responden al mismo tiempo] Sumando primero los positivos, los negativos y luego ya se restan	Aplican la regla de Baldor para operar o reducir los coeficientes algebraicos.
3 D2S	Exactamente. En la número uno ¿qué voy a sumar primero?	
4 A1, A2	Los positivos [dice A1], menos doce menos siete [dice A2] [Es decir -12 -7]	Si va a sumar dos números negativos debería utilizar la notación: (-12)+ (-7) = -19. Pero se está confundiendo a la operación de sustraer 7 de 8 (…8-7…) con utilizar al 7 como negativo (-7).

Episodio VI.	COMBINANDO OPERACIONES	Docente D2S
Línea	**Diálogo**	**Observaciones**
5 D2S	Menos doce menos siete no son los positivos pero bueno, vamos a empezar con menos doce menos siete [Escribe] -12 + 8 - 7 + 6 = **-12 -7** [pregunta] ¿Cuánto me da?	
6 G	[Contestan los niños] Diecinueve	
7 D2S	¡Menos diecinueve¡ [con tono de corrección, entonces iguala la expresión a 19 negativo] -12 + 8 - 7 + 6 = **-12 –7=-19** ¿ Y luego? Ocho más seis	Con la estrategia de la profesora se obtiene un resultado parcial = -19, éste sólo es el resultado paracial de "sumar negativos" falta completar la expresión para no violar las reglas de la igualdad.
8 G	¡Catorce!	Por otro lado se suman los "positivos"
9 D2S	Más ocho más seis me da más catorce [Anota una coma y hace la operación de los "positivos"] -12 + 8 - 7 + 6 =**-12 –7=-19,** +8+6=+14 ¿Y entonces?	La sintaxis no es la adecuada, se utiliza una coma para separar la suma de positivos y negativos violando las propiedades de la igualdad.
10 G	¡Menos cinco!	Varios alumnos obtienen el resultado por inspección de los números.
11 D2S	Lo voy a poner ¿dónde? [Los niños no comprenden a lo que se refiere hasta que coloca en forma vertical la suma] Arriba, verdad, para poderlo resolver[Escribe] **-19** -12 + 8 - 7 + 6 =**-12 –7=-19,** +8+6=+14 Y entonces ya me da ¿cuánto?	Regresa a la forma vertical para resolver la operación, presentando la tendencia cognitiva No. 3, regresando a situaciones más concretas o conocidas antes de introducir el nuevo contenido.
12 G	¡Menos cinco!	El grupo ansioso repite el resultado.
13 D2S	[Va a anotar el resultado en forma vertical, se arrepiente, anota el signo igual y al lado el resultado] **-19** -12 + 8 - 7 + 6 =**-12 –7=-19,** +8+6=+14 = -5 [La docente justifica la acción anterior diciendo…] Esto es para que no utilicemos el espacio.	Mezcla la forma vertical y horizontal, finalmente escribe el resultado de la operación. Esta forma de realizar sumas y restas de enteros, le es funcional a la docente, ya que obtiene el resultado correcto, aunque en el proceso comete errores de tipo conceptual. Podría simplemente agrupar los números que se suman y los que se restan asociándolos para evitar el error conceptual: (-12+8+6)- (7)= 2-7= -5

Episodio VI.	COMBINANDO OPERACIONES	Docente D2S
Línea	**Diálogo**	**Observaciones**
14 D2S	El que sigue… [Se refiere a la operación 2) 15 - 9 + 6 - 3 =]	
15 A3 A4 A5	¡Menos dieciocho! [Dice A3], ¡Quince! [Dice A4], ¡Trece! [Dice A5]	
16 D2S	No vamos a adivinar, quién se suma primero	
17 G	¡Positivos!	
18 D2S	Quince más seis me da…	
19 G	Veintiuno	
20 D2S	¡Más veintiuno! [Escribe la suma de positivos] 15 - 9 + 6 - 3 = 15 + 6 = +21 Y… menos nueve y menos tres (es) igual a menos doce [Escribe] 15 - 9 + 6 - 3 = 15 + 6 = +21 **- 9 - 3= 12** [No coloca el signo menos al doce] Y luego entonces, veintiuno menos doce [Escribe la operación verticalmente 21 15 - 9 + 6 - 3 = 15 + 6 = +21 **- 9 - 3= 12** -12 9	
21 G	¡Nueve!	
22 D2S	¡Más nueve! [Escribe el resultado en forma horizontal y no vertical] 21 15 - 9 + 6 - 3 = 15 + 6 = +21 **- 9 - 3= 12** -12 = +9	Recurre a la misma estrategia de resolución, sumar “positivos” y “negativos” y después “restarlos” y colocar el signo del “mayor”.
23 D2S	…Aquí ¿qué hacemos? [señala la operación 3) 24 − 9 − 3 − 12 =]	
24 A2	Sumamos todos	
25 D2S	¿Sumamos todos?	
26 G	¡No, los negativos!	
27 D2S	¿Cuáles son los negativos?	
28 G	¡Menos nueve, menos tres y menos doce!	
29 D2S	Menos nueve, menos tres y menos doce [Escribe] 24 - 9 - 3 - 12 = **-9 -6 -12 =** Que me dan la cantidad de….	Ocurre un error de transcripción al juntar a los “negativos”, 24 - 9 - 3 - 12 = **-9 -3 -12 =** Este error de no reconocer el signo negativo utilizado, como sustracción en lugar del número negativo aparece en Kant (1763), por lo que se plantea que los docentes D1S y D2S se comportan como sujetos históricos durante la construcción del número entero.

Episodio VI. COMBINANDO OPERACIONES Docente D2S		
Línea	**Diálogo**	**Observaciones**
30 A1	¡Menos veinticuatro!	
31 D2S	Menos veinticuatro [Escribe el resultado parcial] 24 - 9 - 3 - 12 = **-9 -6 -12 = -24** Y luego a ese le vamos a sumar….	
32 G	¡Veinticuatro!	
33 D2S	Más veinticuatro[Escribe] 24 - 9 - 3 - 12 = **-9 -6 -12 = -24 + 24**	Aún con el error de transcripción los alumnos obtienen las dos sumas parciales: -24 y 24
34 A1	¡Cero! [Contesta A1 antes de preguntar el resultado]	Un alumno se adelanta al resultado.
35 D2S	Y me da igual a cero [Escribe el resultado] 24 - 9 - 3 - 12 = **-9 -6 -12 = -24 + 24 = 0** Recuerden que el cero no tiene signo, no le vamos a poner ni más cero ni menos cero. ¿Sí? La que sigue…	No aprovecha la docente para ilustrar la suma de simétricos igual a cero. Y no se cumple con la regla de "se restan las sumas parciales" porque sumó en lugar de restar.
36 D2S	[Se refiere a la operación 4) 36 + 8 - 17 + 15 =] ¿Cuánto? [pregunta al grupo el cual se toma su tiempo calculando…] Treinta y seis más ocho más quince [Anota] 36 + 8 - 17 + 15 36 + 8 + 15 = Que me da igual a…	
37 G	Cincuenta y nueve	
38 A1	¡Más! cincuenta y nueve [Anota el resultado parcial] 36 + 8 - 17 + 15 36 + 8 + 15 = +59 ¿Y luego qué mas vamos a hacer ahí?	
39 A2	Menos diecisiete	
40 D2S	Menos diecisiete [completa la operación] 36 + 8 - 17 + 15 36 + 8 + 15 = +59 **-17** Y me da igual a…	
41 A2	Cuarenta y dos	
42 D2S	¿Más o menos?	
43 G	¡Más!	
44 D2S	Más cuarenta y dos [Anota el resultado] 36 + 8 - 17 + 15 36 + 8 + 15 = +59 **-17 = +42** ¿Por qué más?	
45 A2	Porque el mayor es más	
46 D2S	Porque el signo mayor es positivo ¿verdad? La que sigue…[Se refiere a la operación 5) $-15 + 8 - 7 + 6 =$]	
47 A4	Quince, más ocho más quince…	
48 A1	Quince menos siete…	

Episodio VI.	COMBINANDO OPERACIONES	Docente D2S
Línea	**Diálogo**	**Observaciones**
49 A2	Ocho más seis…	
50 D2S	[Interviene la docente al ver las diferentes respuestas] Ocho más seis si queremos empezar por los positivos. -15 + 8 - 7 + 6 8 + 6= Ocho más seis me da…	
51 G	Catorce	
52 D2S	Catorce [Anota la suma parcial] -15 + 8 - 7 + 6 8 + 6= 14 Y luego menos siete menos quince me da…[anota la operación] -15 + 8 - 7 + 6 8 + 6= 14 **-15 – 7 =**	
53 A4	Menos veintidós	
54 D2S	Menos veintidós [Anota la segunda operación parcial] -15 + 8 - 7 + 6 8 + 6= 14 **-15 – 7 = -22** y luego… ¿qué hacemos?	
55 G	Los restamos	
56 D2S	Restamos, menos veintidós más catorce me da igual a… [anota la operación entre las dos parciales] -15 + 8 - 7 + 6 8 + 6= 14 **-15 – 7 = -22** +14	
57 G	Menos ocho	
58 D2S	¿Seguro menos ocho?	
59 G	Sí…	
60 D2S	[Anota el resultado] -15 + 8 - 7 + 6 8 + 6= 14 **-15 – 7 = -22 = -8** +14 Alguna duda o algo que no hayan entendido	
61 G	No	
62 A5	¿Primero se suman los positivos?	Surge una duda en una estudiante, si primero se suman los positivos y luego los negativos o se puede al revés.
63 D2S	No necesariamente	

Episodio VI.	COMBINANDO OPERACIONES	Docente D2S
Línea	**Diálogo**	**Observaciones**
64 A2	Pueden ser cualquiera [Se refiere a comenzar con positivos o con “negativos”]	Aunque puede ser de cualquier forma el docente no justifica el por qué.
65 A5	Pero si son negativos de todas formas ¿se suman?	
66 D2S	Si es negativo sí, porque se suman los números con el mismo signo. Entonces menos quince y menos siete -15 + 8 - 7 + 6 8 + 6= 14 **-15 – 7 = -22 = -8** +14 [señala estos números en la operación] Tienen el mismo signo, me da menos veintidós ***No se restan, se suman.*** Se restan cuando tienen diferente signo como se ve aquí, mira… [Señala la operación vertical] -15 + 8 - 7 + 6 8 + 6= 14 **-15 – 7 = -22 = -8** +14 ***Negativo y positivo, lo resto.***	
67 D2S	¿Alguna otra duda?	
68 A3	Cuándo da cero ¿no lleva signo?	
69 D2S	No porque está en medio, lo acabo de decir, no pusiste atención. Ok. ¿Otra duda?	En este momento surgen diversas dudas, entre ellas el carácter neutro del cero.
70 D2S	…Así van a ser las preguntas del examen… por ejemplo no importa si hay o no paréntesis [Escribe una operación] 1) +3 + (- 2) – 8 + 15	Aquí la docente muestra operaciones con paréntesis.
71 A1	Se suman los positivos y los negativos..	
72 D2S	¿Dónde están los positivos y dónde los negativos?	
73 A2	Tres más quince…	
74 D2S	Tres más quince [Escribe] +3 + (- 2) – 8 + 15 = 3 + 15 = 18	
75 A2	Y ocho más dos, diez.	
76 D2S	¡Menos! Ocho menos dos me da igual a… [Escribe] +3 + (- 2) – 8 + 15 = 3 + 15 = 18 -8 – 2 =	En la operación aparece un paréntesis conteniendo a un número negativo.
77 G	¡Diez!	
78 A1	¡Menos diez¡ [La profesora espera la confirmación de la respuesta por el grupo]	Pero atribuye el signo de resta al ocho como negativo.
79 G	¡Menos diez!	
80 D2S	Menos diez [Escribe la respuesta] +3 + (- 2) – 8 + 15 = 3 + 15 = 18 -8 – 2 = -10	

Episodio VI.	COMBINANDO OPERACIONES	Docente D2S
Línea	**Diálogo**	**Observaciones**
81 A2	Después se resta	
82 D2S	Y esto me da igual a…[Señala la "resta"] +3 + (- 2) – 8 + 15 = 3 + 15 = 18 -8 – 2 = <u>-10</u>	
83 G	¡Menos ocho! ¡Ocho! Más ocho! [Una alumna dice menos ocho, otros ocho pero al final el grupo dice más ocho!	
84 D2S	[Escribe el resultado] +3 + (- 2) – 8 + 15 = 3 + 15 = 18 -8 – 2 = <u>-10</u> +8 ¿Por qué no menos ocho?	
85 A2	Porque el signo de más cuando es mayor va abajo	
86 A3	Porque siempre se pone el signo del número mayor	
87 D2S	Ahora díganme de este caso [Escribe] 2) -2 – 8 – 5 – 4 – 10 =	
88 G	Menos treinta y dos	
89 D2S	Menos treinta y dos ¿verdad? ¡Muy bien![Escribe] -2 – 8 – 5 – 4 – 10 = -32	Se podría utilizar la propiedad distributiva: -1(2+8+5+4+10)= -
90 D2S	Y lo que ustedes ya conocían ¿verdad? [Escribe la operación] 8 + 6 +15 + 10 + 3 + 2 = ¿Cuánto me da?	
91 G	Cuarenta y cuatro	
92 D2S	[Escribe la respuesta] 8 + 6 +15 + 10 + 3 + 2 = + 44 … El examen va a ser como esto.	
93 D2S	Ustedes tienen que hacer las sumas parciales [señala a las dos operaciones parciales] +3 + (- 2) – 8 + 15 = 3 + 15 = 18 -8 – 2 = <u>-10</u> +8 ¿Por qué?, ¿por qué es importante? Porque luego nos falla el cálculo mental.	
94 D2S	… Ejemplo [Escribe] 8 – 16 + 24 – 40 = ¿Quién me dice qué vamos a hacer ahí para resolverlo?	

Episodio VI.	COMBINANDO OPERACIONES	Docente D2S
Línea	**Diálogo**	**Observaciones**
95 A5	Sumamos los números positivos	
96 D2S	A ver ¿Cuánto me sale la suma de los positivos?	
97 G	Treinta y dos	
98 D2S	Ocho más veinticuatro es treinta y dos [Escribe la suma parcial vertical] 8 +24 8 – 16 + 24 – 40 = +32 Luego ¿Qué hacemos?	
99 A6	***Le restamos los negativos***	No aparece este caso en toda la explicación de la docente, no se realiza la sustracción de un número negativo, ni aparecen las estrategias para la sustracción de enteros, ni como reglas, ni en la recta numérica.
100 D2S	Le restamos los negativos, pero primero vamos a sumar los negativos. A ver A5, ¿Qué sumo con qué?	
101 A5	Cuarenta con dieciséis	
102 D2S	¡Bien¡ [Escribe] 8 40 +24 16 8 – 16 + 24 – 40 = +32 56 Me da cincuenta y seis ¿positivo o negativo?	
103 G	¡Negativo!	
104 D2S	Negativo ¿verdad? [Signa a los números] 8 **-40** +24 **-16** 8 – 16 + 24 – 40 = +32 **-56** Luego ahora sí vamos a hacer ¿Qué?	
105 G	¡La Resta!	
106 D2S	¿Qué vamos a restar?	La docente dice que ya que se tienen la suma parcial de “positivos” y “negativos”, erróneamente se va a hacer la resta.
107 A5	**Más treinta y dos *menos* menos cincuenta y seis**	Semánticamente indica una sustracción, a cuya sintaxis sería: +32-(-56)=, pero sin corregir esta situación recurre a la suma: -56+32

Episodio VI.	COMBINANDO OPERACIONES	Docente D2S
Línea	**Diálogo**	**Observaciones**
108 D2S	Bien ¿Cuál va arriba? [Se refiere al minuendo en la sustracción vertical]	
109 G	Cincuenta y seis	
110 D2S	¿Por qué? [Se percibe una tímida voz "porque es el número mayor" y escribe] 8 -40 -56 +24 -16 +32 8 – 16 + 24 – 40 = +32 -56 Porque es el número de mayor valor absoluto, no es el mayor es en el mayor valor absoluto, es más grande que yo tenga treinta y dos a que deba cincuenta y seis, pero el de mayor valor absoluto va arriba. Ok A1 ¿Cuánto me da el resultado?	
111 A1	Veinticuatro	
112 D2S	¿Negativo o positivo?	
113 G	Negativo	
114 D2S	Negativo, menos veinticuatro. 8 -40 -56 +24 -16 +32 8 – 16 + 24 – 40 = +32 -56 -24 … ¡Muy bien!	Las imprecisiones surgidas en las cadenas de operaciones, se deben a conceptualizaciones parciales o erróneas del signo negativo, se confunde el signo del número con el signo de la operación, así como la estructura aditiva. *El autor de esta tesis sugiere:* ***utilizar la notación completa, ya que ésta permite identificar el signo de los números y el tipo de estructura aditiva utilizada.***

TRANSCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LA ENSEÑANZA DE LA DOCENTE D3S

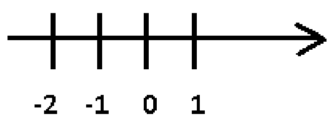
Episodio I. RECUPERACIÓN DE CONOCIMIENTOS PREVIOS ENTEROS. Docente D3S		
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
1 D3S	¿…díganme por qué, ésta operación, cuánto da? [Escribe en el pizarrón (-3)+(+3)=]	La docente utiliza la notación completa de Cid y Bolea.
2 E1	cero	El estudiante contesta correctamente
3 D3S	Cero [afirma y escribe el resultado en el pizarrón: (-3)+(+3)=0, entonces pregunta al grupo] ¿por qué?	
4 E2	[La alumna E2 responde] porque signos opuestos se restan	Explica la alumna E2 de acuerdo a la regla aprendida anteriormente (enseñada por D1S y D2S para sumar números con diferente signo)
5 D3S	…¿Quién más me dice otra cosa, porque eso es una regla...díganme ¿por qué? [solicita a los alumnos una explicación de por qué se utiliza esa regla]	La docente pregunta el por qué de la regla, utilizará a la reflexión (Piaget) para construir y recuperar conocimientos.
6 E1	[Responde E1] Porque hay tres unidades positivas y tres unidades negativas. [Interviene E3 interrumpiendo]	
7 E3	No sería ¿menos tres?	Los alumnos ahora dudan de su respuesta y E3 responde incorrectamente.
8 D3S	[contesta la docente dirigiéndose a el estudiante E1] y si se suman y se cancelan queda cero, fíjense en su compañero. [La docente trata de utilizar otra estrategia] ¿Por qué estos dos números al sumarse dan cero? [señala a la operación] (-3) + (+3) = 0	En lugar de responder, la docente utiliza preguntas de reflexión para que los alumnos sean los que encuentren la respuesta.
9 E4	Porque se restan, ¿no? me imagino	
10 D3S	¿Por qué se restan?	
11 E5	¿Porque son equivalentes?...	
12 D3S	¿Cómo equivalentes?	
13 E6	Como yo lo veo, en una recta al estar en el menos tres y sumarle los tres positivos, daría los tres espacios que hay del menos tres hacia el cero.	El estudiante E6 apela a su conocimiento en la recta numérica para explicar con la estrategia punto-segmento de Janvier, parte del -3 y aumenta 3 posiciones llegando al cero.
14 D3S	[Se dirige a la alumna E3 quien momentos antes comentó que el resultado era menos tres] E3, ¿por qué te da menos tres?	No deja a la estudiante E3, sin respuesta, indaga en su producción errónea (menos tres como respuesta)
15 E3	Porque según yo, menos por más es menos y ahí se supone que… [se queda callada pensando]	Apela a una regla multiplicativa, cuando se preguntó por una suma.

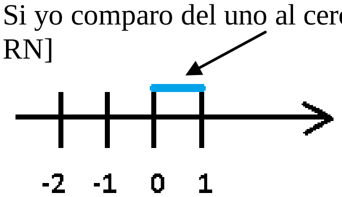
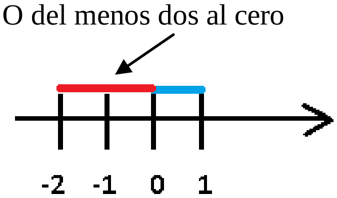
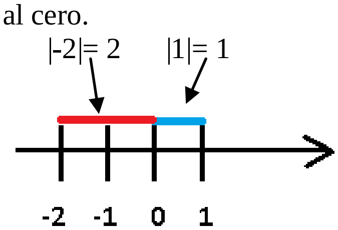
Episodio I. RECUPERACIÓN DE CONOCIMIENTOS PREVIOS ENTEROS. Docente D3S		
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
16 E7	¡Pero no es una multiplicación!	E7 interviene y menciona que efectivamente no se trata de una multiplicación.
17 D3S	[Al darse cuenta la docente que surge un conflicto entre los niños dice] ...aquí hay un problema…¿qué operación está indicada?	Continúan las preguntas de reflexión de la docente.
18 G	es una suma [algunos estudiantes contestas en voz baja]	El grupo contesta tímidamente que es una suma, lo que puede indicar que hay dudas sobre la estructura aditiva de la expresión planteada en un inicio.
19 D3S	Traten de reflexionar para aprender, ¿qué operación está indicada? [la docente señala el signo binario] (-3) + (+3) = 0	La docente pregunta por la estructura señalando el signo binario correspondiente a la suma.
20 G	es una suma	El grupo reconoce la estructura aditiva y por lo menos ya reconocen que tiene que sumar dos números enteros.
21 D3S	…¿para qué se están usando los paréntesis?..¿Para indicar multiplicación?	La docente indaga en la concepción de los paréntesis para ver si respondieron por conocimiento o por probabilidad.
22 G	No	
23 E3	Para separar una cifra de otra	
24 D3S	¿Para separar una cifra de otra?	
25 E3	No, no, no, ¡Para separar los signos!	
26 D3S	¡Para separar los signos!, aquí hay dos tipos de signos. Este signo que está aquí ¿Qué es? [señala el signo de la operación] (-3) + (+3) = 0	
27 G	Murmuran pero no contestan	
28 D3S	[Ante el murmullo, la docente comenta] De la operación	D3S provoca que los niños identifiquen el signo binario (de la operación de suma)
29 G	de la operación [repiten los niños]	
30 D3S	¿Cuál operación?	
31 G	Suma…	Los alumnos corroboran que se trata de la suma.
32 D3S	Y ¿éstos que están aquí? [La docente señala los signos dentro del paréntesis de cada número] (-3) + (+3) = 0	A partir de la notación completa, la docente promueve que los niños identifiquen el signo unario (de los números involucrados en la operación)

Episodio I. RECUPERACIÓN DE CONOCIMIENTOS PREVIOS ENTEROS. Docente D3S		
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
33 E1	Los signos del número.	
34 D3S	…¿Cuál es el signo del tres? [Señala al signo del segundo sumando] (-3) + (+3) = 0	
35 G	Más, entonces es positivo…	
36 D3S	…Pregunta ¿Este signo es de la adición? [Señala al mismo signo del segundo sumando] (-3) + (+3) = 0	
37 G	No [Contesta la mayoría del grupo]	
38 D3S	[Pregunta] ¿De qué es?	
39 G	Del número	
40 D3S	Entonces ¿Para qué estoy usando los paréntesis?...Para separar ¿quién de quién?	
41 E3	[La alumna E3 interviene] Para separar el más del otro más [Se refiere al signo de la suma y al signo del segundo sumando] (-3) + (+3) = 0	La alumna E3 ha identificado los dos tipos de signos de acuerdo a su uso.
42 D3S	Para separar el signo de la suma (-3) + (+3) = 0 con el signo del número [Señala los signos] (-3) + (+3) = 0 [Precisa la docente la observación de E3]	Y a través de la notación completa, la docente promueve que los niños identifiquen los signos de los números y los signos de la operación
43 E3	[Interrumpe la alumna E3] ¿Y por qué no nada más se pone menos tres más tres?	
44 D3S	¿Puedo poner menos tres más tres? [la docente escribe -3+3]	La docente les muestra una estructura equivalente a la inicial para que los alumnos reflexionen en el tipo de transformación realizada.

Episodio I. RECUPERACIÓN DE CONOCIMIENTOS PREVIOS ENTEROS. Docente D3S		
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
45 E6	¿y los paréntesis?!	
46 D3S	¿Cuáles paréntesis?	
47 E3	El del menos tres y el del tres.	
48 D3S	[la docente escribe (-3)+(3) sin signar el positivo] así también se puede, solo que el signo del tres positivo está implícito. En matemáticas hay muchas cosas que están implícitas, no se anotan pero ahí están.	D3S muestra que son equivalentes las estructuras aditivas, muestra también que no es necesario signar al número positivo porque ya está implícito éste. Este aspecto ayuda a realizar la extensión del conjunto de los naturales al dominio de los enteros. (Que el niño reconozca que no es necesario signar a los positivos)
49 E3	¡Pero no daría cero!, daría menos tres más tres… ah sí es cero.	Finalmente, a través de las preguntas reflexivas, E3 reconoce que está realizando una suma, y observa que inicialmente se encuentra ubicada en la RN en el tres negativo y al sumar tres, avanza en la recta hasta llegar a cero.
50 D3S	Su compañero [refiriéndose a E6] utilizó la recta numérica para representarlo. [La docente identifica que aún no es claro utilizando una equivalencia semántica] Pueden pensarlo de otra forma, el tres negativo puede estar representando una deuda, ¿qué sucede si tenemos una deuda de tres y pago tres?	La Docente D3S pasa de la situación de la recta numérica a la contextual, posiblemente de manera intuitiva está construyendo el conocimiento o recuperándolo a través de la enseñanza que propone Bruno de la transferencia entre las dimensiones del conocimiento numérico: La dimensión abstracta, la dimensión recta y la dimensión contextual.
51 G	Ya no tenemos deuda	D3S recurre al contexto del deber y haber.
52 E9	La deuda es de cero.	
53 D3S	Sí tengo una deuda de dos y pago uno [escribe en el pizarrón (-2)+(1)=]	Utiliza otro ejemplo para fortalecer el conocimiento ya adquirido por los estudiantes, muestra de que utiliza el enfoque socio-constructivista en su enseñanza.
54 G	Debe uno	
55 D3S	[la docente escribe el resultado de (-2)+(1)= en el pizarrón "-1"]Tengo una deuda de uno. [Escribe en el pizarrón (-2) + (1) = -1]	

Episodio I. RECUPERACIÓN DE CONOCIMIENTOS PREVIOS ENTEROS. Docente D3S		
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
56 D3S	…¿De dónde creen que salieron esas reglas que ustedes usan? Había una regla que su compañera usaba [Refiriéndose a E2] ¿Cuáles son esas reglas?	Después de dar significado a la operación de suma a través de la dimensión recta numérica y de la dimensión cantidad de Peled, regresa a la pregunta detonadora de la situación: El porqué de la regla aditiva.
57 E2	Que signos opuestos se restan y signos iguales se suman	
58 D3S	…Pero aquí ¿Por qué entonces, el resultado es negativo? [Señala el signo del resultado] $(-2)+(1)= -1$	A partir de lo que saben los niños, la docente los guía para que sean éstos los que construyan sus reglas y las signifiquen, es decir que encuentren la razón de ser de éstas.
59 E3	Porque se queda el signo del mayor.	Los niños E3, E10 y E11 recurren a las reglas que "aprendieron" en su enseñanza previa de enteros.
60 D3S	¡El número mayor de estos dos es uno! $\overbrace{(-2)+(1)}= -1$ [Ante esta observación de la docente, los alumnos se quedan pensativos y no saben qué responder, sólo aumentan los murmullos entre éstos] [Pregunta la docente] ¿Está mal? [Se refiere al resultado de -1]	Los niños no pueden explicar el por qué el resultado de la operación es negativo y por qué tienen que restar. Surge nuevamente el conflicto y la docente lo identifica y está próxima a provocar que éste obstáculo sea superado.
61 G	No [reconocen los niños que el resultado es correcto pero no pueden explicar por qué lleva ese signo negativo]	
62 D3S	..¿Estamos en el número dos? O ¿Estamos en el número dos negativo? [Señala al número] $(-2)+(1)= -1$ le sumas uno, te queda menos uno[señala] $(-2)+(1)= -1$ ¿Cuál es la regla que está usando la E2? En adición.	
63 G	Signos diferentes se restan	Los niños aprendieron que se queda el signo del mayor porque así lo enseñaron tanto D1S como D2S, quienes omitieron en repetidas ocasiones utilizar el valor absoluto.
64 D3S	En adición…¿Signos qué...?	

Episodio I. RECUPERACIÓN DE CONOCIMIENTOS PREVIOS ENTEROS. Docente D3S		
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
65 D3S	(Signos) diferentes se restan, y me dicen que el resultado es menos uno [señala] $(-2)+(1)= -1$ con el signo del número mayor, y yo digo que no es cierto, el resultado [-1] no tiene el signo del mayor [Entre -2 y 1] ¿Tiene el signo del mayor? o ¿Tiene el signo del menor?	La docente hace reflexionar al grupo acerca del orden en los números enteros, ya que los niños no pueden asociar el menor que, mayor que con la regla para sumar números con signos diferentes.
66 G	No …	
67 E2	[E2 interviene] Tiene el signo del mayor porque ahí el número mayor de esos dos [entre -2 y 1] es menos dos (-2) y es menos (negativo) y el uno es positivo y….. [No termina su explicación, entonces interviene la docente]	
68 E3S	[La docente recurre al modelo de la recta numérica y ubica a los tres números involucrados en la operación, escribe] 	Se muestra una variedad de recursos por parte de la docente para explicar la situación a través de la reflexión. Con ayuda de la RN los alumnos pueden identificar el orden entre los dos sumandos.
69 D3S	¿Quién es mayor (de los dos números), el dos negativo o el uno? [señala al dos negativo y al uno positivo]	
70 G	El uno	
71 E3	¡Ah bueno! Pues si ya está hablando así, pues el uno	Al ver la docente que en los niños no surge el concepto del valor absoluto, lo tiene que mencionar pero sin definirlo, entonces extrae de los niños ese conocimiento previo.
72 D3S	Si tiene que ver algo con el mayor, pero les falta algo…Existe un concepto importante que están dejando fuera de vista, **El valor absoluto de un número,** ¿E10, nos puedes decir qué es el valor absoluto de un número?	
73 E10	No sé [responde]	
	El valor absoluto de un número es la distancia que hay de ese número al cero.	La docente recurre a una definición sencilla para los niños, el de la distancia para ejemplificar el valor absoluto.

Episodio I. RECUPERACIÓN DE CONOCIMIENTOS PREVIOS ENTEROS. Docente D3S		
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
74 D3S	Entonces, ¿Quién tiene mayor distancia al cero? Si yo comparo del uno al cero [señala en la RN]  O del menos dos al cero 	
75 G	Dos, [corrigen] ¡menos dos!	
76 D3S	Eso se llama valor absoluto y lo vieron en primero ¿no?	
77 G	No , si, [Aparecen las dos respuestas]	
78 D3S	El valor absoluto de menos dos es dos [Señala y escribe sobre la RN utilizando el concepto de la distancia] y el valor absoluto del uno es uno, esa es su distancia al cero.  Entonces ¿quién es mayor de los dos en valor absoluto?	La docente D3S utiliza la sintaxis para expresar el valor absoluto de los números en cuestión.
79 G	El menos dos	
80 D3S	El menos dos en valor absoluto. Por eso es negativo si aplicara la regla. [Señala el signo negativo del resultado] (-2)+(1)= -1 La distancia de un número al cero es el valor absoluto de un número	Recurre al concepto de distancia para asociarlo al valor absoluto. Entonces utiliza el concepto que faltaba, el del valor absoluto para explicitar completamente la regla y que los alumnos pudieran justificar el porqué.
81 D3S	¿Esa regla salió al azar?	
82 G	No	

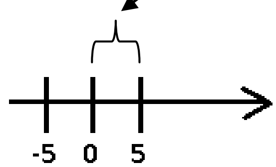
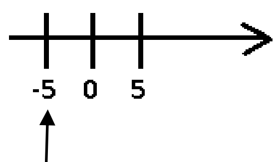
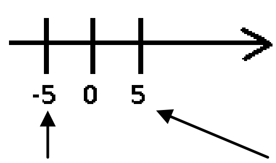
Episodio I. RECUPERACIÓN DE CONOCIMIENTOS PREVIOS ENTEROS. Docente D3S		
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
83 D3S	…Entonces, cómo queda la regla, la podemos enunciar (para la) como en adición: con números con diferente signo, se restan los valores absolutos y se conserva el signo del mayor en valor absoluto.	La docente recupera la regla pero ahora los niños son quienes la construyen a partir de conocimientos y conceptos precisos.
84 D3S	No debemos confundir la adición con la multiplicación. No es lo mismo menos tres, más, más tres [escribe en el pizarrón (-3)+(+3)] a que si pongo menos tres por más tres [escribe en el pizarrón (-3)(+3)] ¿Son iguales?	Para evitar que se escape la situación de la alumna E3 quien en un principio externó una idea multiplicativa para resolver un caso aditivo y quien finalmente reconoce la estructura y el carácter positivo, negativo o neutro de los números y puede realizar la operación de suma de simétricos. La docente D3S muestra la diferencia entre el caso aditivo del caso multiplicativo, haciendo énfasis en la estructura matemática.
85 G	No [Contesta el grupo]	
86 D3S	La primera es una ¿qué?	
87 G	Una suma	Sigue trabajando la docente en la estructura aditiva.
88 D3S	¿Y la segunda?	
89 G	Una multiplicación	
90 D3S	¿Cuándo sé que es una multiplicación?	
91 E11	Cuando no hay ningún signo entre los paréntesis	
92 D3S	También podemos representar a la multiplicación en esta forma [escribe en el pizarrón -3(+3)] ¿Están de acuerdo?	Indaga en la estructura multiplicativa para diferenciarla de la estructura aditiva y seguir trabajando en la suma y resta.
93 G	Sí	
94 D3S	¡Muy bien! Entonces regresándonos a tres negativo si sumo tres positivo, ¿cuánto me da?	
95 G	Cero	
96 D3S	¿Cómo se llaman estos números que al sumarse nos dan cero?	Aprovecha la docente el ejemplo de la suma de -3 y +3 para que los niños recuperen el concepto de simétricos.

Episodio I. RECUPERACIÓN DE CONOCIMIENTOS PREVIOS ENTEROS. Docente D3S		
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
97 G	Simétricos [La mayoría],… positivos [E3]	
98 D3S	¿Cuál es la característica de los simétricos?	
99 E12	Son dos números iguales pero con signos diferentes.	La docente observa el error conceptual y lo corrige apelando al concepto de valor absoluto.
100 D3S	¿Qué tienen igual los números simétricos?	
101 E13	Son números que tienen la misma distancia al cero	
102 D3S	Si, pero uno es mayor que cero y…	
103 G	El otro es menor que cero	
104 D3S	¿Si estamos de acuerdo?...	
105 G	Sí	Les hace ver que son diferentes números que tienen en común su valor absoluto.

Episodio II. PRACTICANDO LA ADICIÓN DE ENTEROS. Docente D3S.		
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
1 D3S	[Escribe (+3)+(-1000)=] ¿Qué operación es?	La intención de la docente es fortalecer el conocimiento de la suma de enteros para después pasar a la sustracción.
2 G	Una suma	
3 D3S	…¿Cómo son los sumandos?	
4 G	Uno es positivo y otro es negativo	Los alumnos ya reconocen tanto la estructura aditiva como el signo de los números.
5 D3S	…¿Quién me dice cómo se resuelve esa suma? Y ¿por qué?	
6 E3	…Se supone que el orden de los sumandos no altera el producto, entonces menos mil le sumas tres positivo te da novecientos noventa y siete negativos.	Los alumnos practican lo aprendido a través de una situación problemática, de manera correcta.
7 D3S	[La docente explica] Esa propiedad es la conmutativa y dice: *el orden de los sumando no altera la suma*…	La docente les enseña a los niños la propiedad conmutativa, es decir apela a la matemática formal como una forma de resolver situaciones.
8 D3S	¿Quién me dice… cómo se resuelve esta operación? [Escribe (-1000)+(-100=]	
9 G	Mil cien	
10 D3S	¿Están seguros?	
11 E2	Menos mil cien	
12 D3S	¿Por qué?...¿Por qué es negativo?...[Se escucha una respuesta] ¿Por qué signos iguales se suman?	Los niños recurren a lo que han aprendido con anterioridad, expresando la regla para sumar números con el mismo signo. Aparece una pregunta reflexiva, acerca del por qué se suma signos iguales
13 E12	…Porque son menores que el cero, al estar del mismo lado en la recta numérica van hacia la misma dirección	El estudiante E12 apela al modelo de la recta numérica para explicar la suma de dos números negativos, mostrando que se encuentra el y posiblemente varios de sus compañeros en los niveles 2R y 3R de Peled, en los que pueden sumar números con el mismo signo y con signos opuestos.
14 D3S	…¿Quién me puede decir otra forma? ¿Cómo le enseñarían a su compañero que mil negativo más cien negativo me da mil cien negativo [Señala la operación al momento que habla] (-1,100) + (-100) = -1,100	La docente indaga en otras formas de pensamiento en los alumnos.

Episodio II. PRACTICANDO LA ADICIÓN DE ENTEROS. Docente D3S.		
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
15 E3	Intenta utilizar nuevamente una estrategia multiplicativa cuando dice] “El enemigo de mi enemigo es mi amigo…]	
16 D3S	¿Cuándo usan esas reglas? [Pregunta la docente] En multiplicación, y esto ¿qué es? [Señala la operación] $(-1,100) + (-100) = -1,100$ No deben de perder de vista lo que están haciendo. ¿Cómo le explicarían a su hermano pequeño o a un amigo? [Varios alumnos intentan explicar pero no pueden hacerlo hasta que interviene E13]	
17 E13	Si compras un celular de mil pesos y lo pago con una tarjeta de crédito, quedas a deber mil pesos y se representa con números negativos, y después te compras una memoria de cien pesos, en total tienes una deuda de mil pesos, por eso es menos mil cien pesos.	La docente recurre a la resolución de problemas como medio para aprender contenidos matemáticos, una manera de enseñanza solicitada por el enfoque de la asignatura de matemáticas según los planes de estudio. Se nota una evidente transposición didáctica del contenido.
18 D3S	¿Qué pasa si a una deuda le agrego otra deuda?	Apela al mundo de la negatividad para ejemplificar la suma de dos cantidades negativas.
19 E14	Entonces la deuda es más grande.	
20 E15	¡Ya entendí!	
21 D3S	Es muy importante que sepan sumar enteros y que conozcan este contenido, ya que se los preguntarán en su examen “Comipems”.	La docente les hace ver que este contenido es muy importante para sus estudios futuros inmediatos.

Episodio III.	¿CUÁNTO ES – (-5)?	Docente D3S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
1 E3	Maestra, ¿Cuál es el resultado de *meno*s paréntesis menos cinco paréntesis?	La alumna E3 externa su duda de una operación y la expresa en forma semántica
2 D3S	[La docente escribe en el pizarrón la situación externada por la estudiante E3] - (-5) [Y la docente dice al respecto]… se puede explicar mediante sintácticamente o mediante el significado de la operación.	La docente traduce el mensaje llevándolo a un SMS. D3S externa que esta situación se puede explicar mediante dos formas, lo que demuestra la variabilidad de su enseñanza y no se ciñe a un solo concepto como el caso de D1S.
3 E3	Eh? No entiendo, qué es sintácticamente	La palabra es propia del lenguaje matemático, D3S a lo largo de su enseñanza lleva a los alumnos del lenguaje que conocen al uso correcto del lenguaje en matemáticas.
4 D3S	Con una regla.	
5 E3	¿Y con significado?	Al preguntar los niños cómo es con significado [Se refieren a la enseñanza de la situación $-\ (-5)\ =$] la docente se avoca a explicar.
6 D3S	[Se dispone a explicarle al grupo] A ver, este de aquí [señala al signo menos fuera del paréntesis] $-(-5)$	
7 E1	[Se anticipa y dice] ¡Ah, es más cinco! [La docente escucha pero intervendrá más adelante]	Un chico, ya responde que “positivo” pero la docente espera, y continúa con su explicación.

Episodio III.	¿CUÁNTO ES – (-5)?	Docente D3S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
8 D3S	[La docente dibuja una recta numérica y ubica al 5, al cero (0) y al momento que explica ubica al menos cinco (-5)] Si de aquí para acá es cinco [señala el intervalo de 0 a 5]  y tengo la misma distancia del cero hacia el lado opuesto, [señala el punto donde se encuentra -5 y el intervalo de cero a -5]  Se llaman opuestos. Entonces, ¿tienen el mismo valor absoluto?	La docente D3S recurre al modelo de la recta numérica para explicar o recuperar el conocimiento de los números simétricos y del valor absoluto.
9 G	Si [Contesta todo el grupo a coro]	
10 D3S	[Señala a -5 y a 5 al momento que explica]  … este número,[señala a -5] es el simétrico ¿de quién?	Provoca en los niños que sean ellos quienes construyan su conocimiento a partir de preguntas de reflexión acerca de este contenido [El simétrico, el valor absoluto y sobre todo, que puedan ellos responder la pregunta detonadora de este episodio ¿Cuánto es $-(-5)=$?
11 G	¡De cinco!	
12 D3S	Es el simétrico de cinco [señala en la RN a 5]  (menos 5) es el simétrico de 5 [Comenta al momento que escribe] El simétrico de 5 es -5 Ahora ¿Qué cambió de acá para acá?	

Episodio III. ¿CUÁNTO ES – (-5)? Docente D3S		
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
13 G	El signo	
14 D3S	Entonces cuando yo tengo: [Escribe en el pizarrón] - (-5) = Puedo darle uno de los significados que hay, como decir que es el simétrico del -5 [Escribe y señala en el pizarrón] - (-5) = La pregunta es: ¿Cuál es el simétrico de menos cinco?	
15 G	Más cinco (+5)	
16 D3S	El simétrico de menos cinco es cinco, [Escribe en el pizarrón al momento de explicar] $\underbrace{-\ (-5)} = +5$ Por lo tanto esta operación es: cinco	Los niños ahora saben que – (-5) es la operación del simétrico de menos cinco y que su resultado es 5.
17 E2	Menos por menos es más [se escucha decir de la alumna E2]	
18 D3S	De tal manera que cuando tengo [Escribe y explica] $- \ \underbrace{(a - b)} =$ Lo puedo leer como el simétrico de lo de adentro	La docente aprovecha la situación para plantear una generalización, recurre al álgebra para extender el conocimiento del simétrico.
19 D3S	El simétrico de a [escribe y señala] es: menos a … más b $- \ (a - b) = -a + b$ [El grupo va respondiendo al mismo tiempo que la docente]	Les enseña a los niños cómo aplicar el simétrico a una diferencia de dos números.
20 G	[El simétrico de a menos b] ¡es menos a más b!	
21D3S	… A ustedes…les dicen que eso es una multiplicación. ¿En algún momento multipliqué?	D3S se enfoca en resaltar que se realizó la operación del simétrico y no se utilizó la operación de multiplicación.

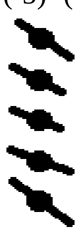
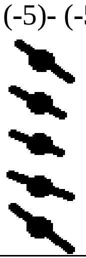
Episodio III.	¿CUÁNTO ES – (-5)?	Docente D3S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
22 G	No	
23 D3S	Utilicé un concepto que es el simétrico. Sin embargo puede aplicarse la multiplicación y obtener el mismo resultado… por eso hay que tener cuidado cómo se usan los conceptos.	La docente deja abierta la posibilidad de que eventualmente se trabaje en el simétrico contra la multiplicación.
24 D3S	Puedo utilizar otra forma [se refiere a una expresión que igualmente les puede provocar duda o conflicto a los alumnos y escribe] $0 - (-5) =$ Yo he visto a muchas personas [alumnos] que relacionan esto con esto. $\overbrace{0 - (-5) =}$; $\overbrace{- (-5)=}$ [Muchos alumnos confunden ambas expresiones según D3S]	Aprovechando la duda de la niña E3 quien inicialmente planteó la situación, la docente ahora plantea otra situación que pareciera similar pero no lo es desde la concepción de la estructura operativa.
25 E2	Ahí ya no sería una multiplicación ¿verdad?	
26 E3	No, sería una resta.	E2 y E3 reconocen la estructura aditiva de la expresión: una resta.
27 D3S	Dicen que es una resta, ¿A quién le estoy restando qué? [señala la sustracción] $\overbrace{0 - (-5) =}$	
28 E3	A cero le estoy restando menos cinco	E3 reconoce al minuendo y al sustraendo en la resta.
29 D3S	¿Y cómo le hago? [Se refiere a cómo se resuelve la operación]…	
30 E3	A cero le quito menos cinco y me da menos cinco.	Aunque E3 reconoce la estructura, produce un resultado incorrecto.
31 D3S	¿A cero le quito menos cinco y me da menos cinco?	
32 G	Si, noooo.	El grupo dice que si, luego dice que no es correcto.
33 D3S	¿Cuánto les da?	
34 E1	Más cinco	

Episodio III.	¿CUÁNTO ES – (-5)?	Docente D3S
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
35 D3S	Explíquenme esta operación sin usar ninguna regla sintáctica y sin usar la multiplicación porque es una resta, ahí no hay ninguna multiplicación, a cero quítale menos cinco.	Ya que un alumno dio la respuesta, la docente invita al grupo a explicar el por qué de esa respuesta sin usar una regla o las leyes de la multiplicación.
36 E5	[La alumna E5 no sabe por qué resulta más cinco y externa y repite] ¿Por qué da más cinco, por qué, por qué, por qué…?	Surge el conflicto cognitivo en esta operación que a lo largo de las enseñanzas de D1S y D2S y en general es reportada como una operación difícil de comprender por los niños y difícil de enseñar.
37 E3	[Expresa la niña E3 a través del contexto de deudas la sustracción de cero menos cinco negativo] No tengo dinero,	La niña E3 recurre al contexto de deudas para explicar la sustracción.
38 D3S	Ella dice [se refiere a E3] no tengo dinero [Señala al cero al momento de escribir] 0 - (-5) = No tengo dinero [Pregunta a E3] y luego [Se refiere a cómo representan en ese contexto a la sustracción de menos cinco]	
39 E2	No tengo dinero y me encontré cinco pesos	
40 D3S	Lo que tú estás diciendo es: No tengo dinero y me encontré cinco pesos [La docente escribe en el pizarrón la adición de 0 y 5] 0+ 5=	
41 G	Murmuros.[El grupo murmura tratando de encontrar una representación de la sustracción de cero menos cinco negativo]	El contexto empleado por E3 detona una serie de comentarios en los niños, los cuales tratan de elaborar un enunciado que satisfaga la sustracción.
42 E3	No tengo dinero y quito la deuda de cinco pesos que tenía	
43 D3S	Ahí está, su compañera lo dijo de esa forma [se refiere a la alumna E3] No tengo dinero y quito la deuda de cinco pesos que tenía. De alguna manera el haber quitado la deuda de cinco pesos ahora otra persona va a tener esa ganancia.	La docente, de alguna manera trata de hacer que el enunciado de la niña E3 tenga sentido. Estas reflexiones serán el detonante para la enseñanza de la sustracción en el episodio IV.

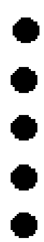
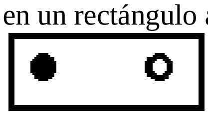
Episodio IV. LA SUSTRACCIÓN DE ENTEROS. QUITO LA MISMA CANTIDAD Docente D3S.		
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
1 D3S	…¿Cómo se resuelve esa operación? [Escribe en el pizarrón] (-5)-(-5)=	D3S comienza la enseñanza de la sustracción con uno de los casos más difíciles: la sustracción de un negativo.
2 E3	… los paréntesis son para encerrar y no confundir los de adentro con los de afuera [se refiere a los signos de los números dentro de los paréntesis]	E3 muestra que puede reconocer y diferenciar el signo unario del binario.
3 D3S	…¿Cómo se resuelve?	
4 E3	Es menos cinco menos cinco y… ¿sería menos diez o sería cero…?	Aunque E3 reconoce la estructura aditiva, omite el signo de la resta al describir con palabras la operación.
5 D3S	¿Sería cero o menos diez? [señala las dos opciones escribiéndolas en el pizarrón] 0 ó -10	
6 E15	Signos iguales se suman, signos diferentes se restan	Algunos niños no reconocen la operación planteada, la cual es una sustracción y el niño E15 trata de utilizar la regla que ya conoce para sumar dos negativos o dos positivos.
7 D3S	Esa regla es para la adición, no para la sustracción.	
8 E3	Por eso es menos diez	
9 D3S	[Interviene la docente cuando los alumnos divagan incluso alguien menciona la multiplicación, a lo que la docente dice] …¿Qué operación es?	La docente al ver que no es correcta la respuesta ayuda a E3 y al grupo a reflexionar sobre la estructura aditiva
10 G	Una resta	La docente promueve que los alumnos identifiquen la resta.
11 D3S	…¿Cuál es el resultado correcto de esta operación?	
12 E16	Cero	E16 produce la respuesta correcta.
13 D3S	¿Por qué?	La docente no se fía del resultado correcto, así que para asegurarse que el alumno entiende la operación emite una pregunta reflexiva.
14 G	[Los niños emiten diferentes explicaciones pero ninguno es capaz de emitir un enunciado claro] Es menos diez,… [Algunos contestan] no es cero,… [Otros difieren] es una resta, no una suma… [Otros opinan]…	Los niños no muestran un dominio de la competencia en la operación de la sustracción de entero, posiblemente porque provienen de la enseñanza de D1S y D2S quienes no abundaron en esta operación.
15 E17	Al ser resta y al ser los dos menos cinco y al ser iguales, da cero porque algo igual menos algo igual nos da cero.	El alumno reconoce a través de la estructura y del tipo de números que puede resolverla con el concepto de la sustracción como “quitar” de Gallardo.

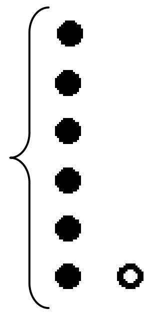
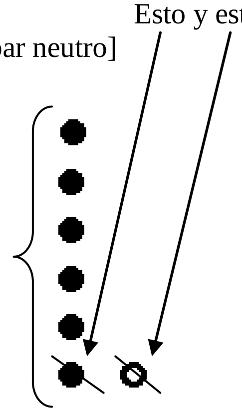
Episodio IV.	LA SUSTRACCIÓN DE ENTEROS. QUITO LA MISMA CANTIDAD	Docente D3S.
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
16 E14	Lo puedo cambiar a menos cinco más cinco y da cero [La maestra escribe en el pizarrón -5+5=0] Usando el simétrico. [Varios alumnos murmuran y comentan entre ellos]	El alumno apela a la operación equivalente de adición. Menciona al simétrico como una de las estrategias para resolver la sustracción. Posiblemente este alumno recuperó la estrategia de D1S o ya conocía el concepto.
17 D3S	Sí lo puedes cambiar a adición, pero me interesa que aprendas a restar. Lo que dijo su compañero E17, si a un número le quitas el mismo número ¿Cuánto me da? [escribe en al pizarrón] $a - a =$	La docente recupera del estudiante E17 el concepto de sustraer como “quitar” [Conceptualización del triple significado de la sustracción de Gallardo] y generaliza la sustracción como lo sugiere Cid, a través de un entorno algebraico: $a - a = 0$
18 G	Cero	
19 D3S	Cero [D3S anota el resultado] $a - a = 0$	Queda ilustrado el caso en que se sustrae un número negativo del mismo número negativo con resultado neutro. Se extiende este concepto a cualquier tipo de número al hacer la generalización y no importa el carácter: positivo, negativo o neutro de a, siempre se va a cumplir la igualdad, si se resta el número de sí mismo, el resultado siempre es cero.
20 G	[Se escuchan murmullos en el grupo]	
21 D3S	Yo puedo suponer que estas [señala a los dos números -5] son cantidades negativas. (-5)-(-5)= Por ejemplo, imagínense que tengo canicas negras [Con este ejemplo la docente introducirá el modelo atómico para dar significado a la operación de adición y sustracción de enteros]	Ahora recurrirá no al número sino a la cantidad contextualizada para representar a la sustracción de enteros.

Episodio V.	EL MODELO ATÓMICO Y EL MODELO CHINO	Docente D3S.
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
1 D3S	…Ustedes. ¿Han escuchado hablar de los electrones y de los protones?	Ahora la docente D3S recurre a un contexto científico, el de la química, para ello los alumnos ya están llevando esta asignatura por lo que el lenguaje no les es desconocido.
2 G	Sí	
3 D3S	¿Qué pasa si tengo un electrón que puedo representar con una bolita negra [dibuja en el pizarrón] ●	La docente recurre al uso del modelo concreto del modelo chino: El modelo atómico de Böhr. Recupera los conocimientos de los alumnos del tercer grado que están cursando la asignatura de Ciencias III, con enfoque en Química.
4 D3S	Fíjense, un electrón tiene carga, ¿Qué carga tiene?	
5 G	Negativa	
6 D3S	Entonces este electrón [bolita negra] es como si yo tuviera menos uno… [Escribe el número debajo de la bolita negra] ● (-1) Si yo le agrego una carga positiva [dibuja una bolita blanca para representar a una carga positiva] ● ○ (-1) + (+1)= ¿Qué me da?	Una vez establecido que los electrones tienen carga positiva y los protones carga positiva, recurre a situaciones reales de la química para ilustrar cómo se operan los enteros en este contexto. La docente establece el equilibrio, o neutralización de dos cargas opuestas para producir una carga neutra. Cabe señalar que la docente utiliza la matematización de las cargas eléctricas y no la matematización de las partículas subatómicas, por lo cual está utilizando un contexto auténtico y real.
7 G	¡Cero!	Este es uno de los principios del modelo Chino-Gallardo, el cero como equilibrio o neutralización.
8 D3S	Cero, me da neutro [Escribe el resultado en el pizarrón]] Más cero,… [contesta una alumna] ● ○ (-1) + (+1) = 0 ¿Cierto o no?	Esta enseñanza está de acuerdo con González, en la obra de *Los Enteros*… quien junto con otros autores mencionan que un docente debería conocer situaciones de las ciencias experimentales para hacer la transferencia de las matemáticas en este caso de los enteros a la física, la química, la biología o la economía.

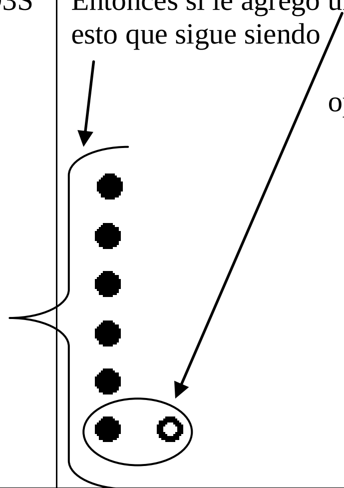
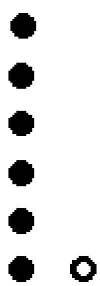
Episodio V.	EL MODELO ATÓMICO Y EL MODELO CHINO	Docente D3S.
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
9 G	Si	
10 D3S	Si estoy hablando en término de cantidades negativas, un electrón representa una cantidad negativa.	
11 D3S	Si tengo cinco cantidades negativas y le quito cinco cantidades negativas, pensando en los electrones ¿Cuánto nos queda E3? [Dibuja 5 bolitas negras para representar al cinco negativo o cinco electrones.]  Ahora, le voy a quitar cinco cantidades negativas, entonces, le quito una, [tacha una bolita negra] le quito dos, le quito 3, le quito 4 y le quito 5. [Va tachando una a una cada bolita de acuerdo a su discurso] (-5)- (-5) =  ¿Qué tengo?[Se refiere al resultado de la operación de quitar 5 cantidades negativas de 5 cantidades negativas]	La docente también realiza una modelación de situaciones científicas con los enteros en las ciencias experimentales como lo propone Cid, en su introducción de los enteros en un entorno científico de modelación algebraica. La docente recurre al código del Modelo Chino-Gallardo para la sustracción de cantidades negativas. A través del Modelo Ch-G, la docente les enseña a los niños a sustraer cantidades con la concepción de "quitar" [como una de las concepciones de la triple naturaleza de la sustracción de Gallardo] El sustraer cantidades positivas, negativas y neutras como se hace en los naturales, constituye un aspecto que ayuda a extender el conjunto de ***N*** a ***Z***.
12 G	Cero [Responde el grupo a coro]	
13 D3S	Entonces no tengo menos diez ¿verdad? [Anota el resultado con la sintaxis matemática correspondiente al código chino] (-5)- (-5) = 0 	En esta ocasión la docente les enseña a sustraer verdaderamente números enteros sin utilizar una regla y sin utilizar el inverso aditivo, como se haría en el caso de los naturales, por ello se considera a este aspecto como uno de los que ayuda a realizar la extensión numérica

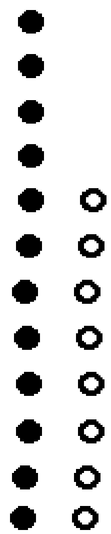
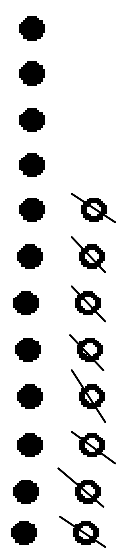
Episodio V. EL MODELO ATÓMICO Y EL MODELO CHINO Docente D3S.

Línea	Diálogos	Observaciones
14 G	[Se escuchan varios comentarios]Ah, ya entendí, [otros] así se suma	
15 D3S	Pero no se suman… esto es la sustracción. Otro ejemplo, ¿Qué pasa si tengo menos cinco y le quiero quitar ocho cantidades positivas? [Escribe en el pizarrón la operación] (-5) – (+8)= Pregunta ¿Qué hago?	La docente recurre a la notación completa para evidenciar los signos unarios y binarios, y la estructura aditiva: resta. Los niños, aunque ya fueron sujetos de la enseñanza de D1S y D2S, no tienen clara la diferencia de suma y resta, es decir no reconocen fácilmente la estructura aditiva.
16 E15	Se resta igual y pongo el signo de… [No completa la idea]	
17 D3S	¿Cómo lo resto? [Al ver que los alumnos no aportan ideas, porque se encuentran en un conflicto cognitivo, la docente ilustra la forma de sustraer con el M-Ch-G] Tengo cinco cantidades negativas [Escribe en el pizarrón y dibuja] (-5) – (+8)=  Sólo tengo cinco cantidades negativas y le tengo que restar ocho positivas. ¿Tengo [cantidades] positivas?	Los alumnos no tuvieron la oportunidad de construir su conocimiento acerca de la sustracción con números enteros, sólo alcanzaron a replicar algunas reglas como la del inverso aditivo, la cual en este momento de significación de la operación resta, no ayuda a su comprensión. La docente acude a la enseñanza de la sustracción con ayuda de la conceptualización de Gallardo de *quita*r con el modelo Chino-Gallardo y más delante de *completar* como se hace en los naturales y la de *comparar* dos números en la RN.
18 G	No	
19 D3S	…Ustedes ya se dieron cuenta que si yo tengo una cantidad negativa y una positiva es cero ¿no? [señala a la operación que ya había realizado de una cantidad negativa y una positiva con resultado nulo][Encierra en un rectángulo al par positivo negativo]  (-1) + (+1) = 0	La docente D3S establece el concepto de simétricos a partir de la equilibración de dos cantidades con igual valor absoluto pero con signos opuestos.

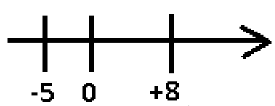
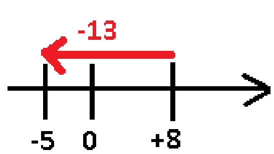
Episodio V.	EL MODELO ATÓMICO Y EL MODELO CHINO	Docente D3S.
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
20 D3S	¿Quién me dice si agrego una cantidad negativa y una positiva, qué tengo en total aquí?[Señala el código Ch-G, al cual adiciona un par neutro] 	Existe una construcción del conocimiento a partir de la abstracción reflexiva.
21 G	[Se escuchan varias voces y se distinguen tres respuestas] ¡seis!, ¡siete! ¡cinco!	
22 D3S	Le agregué un cero, yo tenía menos cinco, cinco cantidades negativas.	
23 E15	Ahí hay seis negativas.	
24 D3S	¿Seis negativas y una positiva? Esto y esto es cero [señala el par neutro] 	
25 E15	Ah, [parece que algunos niños comienzan a entender el modelo]	
26 D3S	¿Están de acuerdo? [No parecen muy convencidos los alumnos y se escuchan varios comentarios entre ellos] …Aquí estoy agregando ceros de alguna forma. …¿Qué pasa si le agrego cero E2? [Pregunta a la alumna] Le puedo agregar un cero, porque un cero, es una cantidad positiva y una negativa (juntas)[Señala el par neutro]	

Episodio V. EL MODELO ATÓMICO Y EL MODELO CHINO Docente D3S.

Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
27 D3S	Entonces si le agrego un cero, esto que sigue siendo [vuelve a señalar el código Ch-G de la operación (-15)-(+8)] 	La docente lleva a los sujetos a través de preguntas de reflexión de un estado de conocimientos a otro más abstracto, es decir de un SMS a otro más complejo.
28 G	¡Menos cinco!	
29 D3S	Menos cinco, pero aquí ya puedo quitar una cantidad positiva [señala la bolita blanca]  ¿Cierto o no?	
30 G	Si	
31D3S	Pero no tengo que quitar una cantidad positiva, ¿cuántas cantidades positivas debo de quitar? [Señala la operación] (-5)- (+8) =	
32 G	¡Ocho!	
33 D3S	Entonces ¿cuánto le tengo que agregar, qué le agrego?	

Episodio V.	EL MODELO ATÓMICO Y EL MODELO CHINO	Docente D3S.
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
34 G	Ocho.	
35 D3S	[comienza a dibujar ocho ceros en forma de pares neutros añadidos a las cinco cantidades negativas] (-5) – (+8) =  Así como está, ¿Ya le puedo quitar ocho cantidades positivas?	D3S enseña cómo realizar una sustracción a través del Modelo Chino-Gallardo.
36 G	Si	
37 D3S	Voy a tacharlas en lugar de quitarlas para que ustedes vean lo que se hizo, las voy a tachar, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8. [Las va tachando al momento que menciona]  [La docente hace una señal pidiendo la respuesta]	

Episodio V. EL MODELO ATÓMICO Y EL MODELO CHINO Docente D3S.		
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
38 G	¡Trece cantidades negativas! [Responden]	
39 D3S	[Entonces la docente escribe el resultado] Trece cantidades negativas (-5) – (+8) = -13 …(Y) No estoy usando la recta numérica,	La docente aclara que se resolvió la sustracción a través del concepto de quitar [modelo de equilibración] y no con el modelo de la recta numérica.
40 E2	…Es que así no le entiendo ¿Cómo se hace en la recta numérica porque así nos lo enseñaron?	La niña expresa que “aprendió” la sustracción con ayuda del modelo de la RN
41 D3S	...Vamos a hacerlo como haces una sustracción en los naturales. ¿Cuánto es dieciocho menos nueve? [Escribe la operación] _ 18 9	La docente muestra la flexibilidad que tiene de recursos en la enseñanza y se auxilia de la forma de sustraer en el conjunto de N para ahora extenderlo al conjunto Z.
42 G	¡Nueve!	
43 D3S	¿Cómo haces tú la operación? Explícame cómo obtienes el resultado [Le pregunta a la alumna E2]	
44 E2	…Una de ellas,… nueve, diez, once, doce, trece…	
45 D3S	[continúa contando] catorce, quince, dieciséis, diecisiete y dieciocho. Hasta ahí. Lo que hiciste es ¿cuánto le falta a nueve para llegar a dieciocho? ¿Cuánto le faltó?	
46 G	¡Nueve!	
47 D3S	Nueve [Escribe el resultado de la sustracción] _ 18 9 9 Eso se llama completar	

Episodio V.	EL MODELO ATÓMICO Y EL MODELO CHINO	Docente D3S.
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
48 D3S	Yo puedo hacer eso de completar [señala la operación] (-5) – (+8) = -13	La docente se refiere a que puede utilizar la concepción de *completar* de Gallardo para resolver la sustracción.
49 D3S	Fíjate, tu tendrías: menos cinco [escribe] -5 - +8 Si la ven así me van a decir ¿pero cómo?	La docente utiliza la notación vertical que conocen los niños para la sustracción de naturales, pero ahora con números enteros, a diferencia de la docente D2S que no utiliza el signo de la operación en las operaciones verticales.
50 D3S	En la recta numérica lo podemos observar [Dibuja una RN y ubica el -5 y el +8 con el cero de referencia]  -5 - +8 ¿Cuánto le falta a éste (ocho) para llegar a menos cinco? [Señala los números en la recta conforme los va nombrando]	Se auxilia del modelo de la RN para representar a la resta o diferencia a través de segmentos dirigidos (vectores), método que conocen los niños de acuerdo a su enseñanza previa proveniente de D1S y D2S.
51 G	¡Trece!	
52 D3S	Trece, hacia dónde me fui, ¿hacia la derecha o hacia la izquierda?	
53 E2,G	Hacia atrás, [Se oyen otras voces] hacia la izquierda.	
	Hacia la izquierda quiere decir que es menos trece. [Dibuja un segmento dirigido sobre la RN]  Y se llama *completar* El resultado de esto es menos trece. [coloca el resultado en la sustracción vertical]	La docente establece la sustracción ahora como la comparación (diferencia) entre dos números ubicados en la recta numérica.

Episodio V. EL MODELO ATÓMICO Y EL MODELO CHINO Docente D3S.		
Línea	**Diálogos**	**Observaciones**
54 D3S	$\begin{array}{r} -5 \\ -\quad +8 \\ \hline -13 \end{array}$ ¿Cuánto le falta al sustraendo (+8) para llegar al minuendo?	
55 G	Trece…negativo	
56 D3S	Eso que se hace para completar ¿Cuánto le falta al sustraendo para llegar al minuendo? Como en dieciocho menos nueve, ¿Cuánto le falta al nueve para llegar al dieciocho?	
57 G	Nueve	
58 D3S	[Se regresa a la operación anterior y la señala al momento que pregunta] ¿Cuánto le falta a menos cinco para llegar a menos cinco? (-5) – (-5) =0	
59 G	¡Cero!	
60 E2, E3, E1, E14, E15, G	Ah, ya entendí.	Aunque la mayoría de los alumnos pueden comprender que están realizando realmente una sustracción a través de los conceptos de quitar, completar y comparar (diferencia), les resulta aún difícil este contenido. Requieren tiempo, reflexión y práctica de lo aprendido para hacer significativo este conocimiento.

TRANSCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LA ENSEÑANZA DEL DOCENTE D4I

Para: SUMA Y RESTA DE NÚMEROS ENTEROS.

Video de la página electrónica youtube.com subido el 3 de junio de 2011, consultado y grabado el 4 de enero de 2017. El video tiene 657 comentarios emitidos por los usuarios, aparece como uno de los de mayor popularidad entre los jóvenes. Explicación del docente D4I y comentarios.

Episodio I.	LOS ENTEROS Y LOS PARÉNTESIS.	Docente D4I.
Línea	**ENSEÑANZA**	**OBSERVACIONES**
1 D4I	[Aparece una pantalla con la siguiente información. OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS (Z) Y el docente comienza con su explicación.]	En este video se encuentra con el buscador y palabras clave: SUMA Y RESTA DE NÚMEROS ENTEROS
2 D4I	Lo primero que se resuelve son los paréntesis, y los paréntesis pueden tener los siguientes signos… los paréntesis pueden ser del signo más y los paréntesis pueden tener signos menos… escribimos los paréntesis, …ya, estos son los paréntesis	Esta explicación puede conducir a un error conceptual, ya que los paréntesis por sí mismos no pueden tener signo.
3 D4I	[El docente escribe cuatro paréntesis antecedidos por dos signos más y dos menos. OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS (Z) +( ) -( ) +( ) -( )]	En cambio, se sugiere que: Los paréntesis pueden estar antecedidos de un signo.
4 D4I	Al interior de los paréntesis puede haber números, por ejemplo, uno con signo más y uno con signo menos	Se utiliza al paréntesis para agrupar o para operar, pero no se aclara.
5 D4I	[Escribe los números dentro de los paréntesis continuando con la explicación. OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS (Z) +(4) -(4) +(-4) -(-4) Y pregunta y se responde.]	El docente establece la palabra “resolver” así que implícitamente, los paréntesis representan una operación.

Episodio I.	LOS ENTEROS Y LOS PARÉNTESIS.	Docente D4I.
Línea	**ENSEÑANZA**	**OBSERVACIONES**
6 D4I	¿Cómo se resuelven los paréntesis?, los paréntesis se resuelven de acuerdo a sus signos. El signo de este paréntesis [Señala el signo fuera del paréntesis y continúa] $+(4)$ tiene signo más, ***el signo más indica que se copia tal como está,*** pero ¿Qué signo tiene? [Ahora señala al signo del número] $+(+4)$ El signo más, entonces copiamos más cuatro [Resuelve así la operación y escribe el resultado] $+(+4)=+4$	No se establece el tipo de operación que se resuelve(suma, resta, simétrico, eliminar paréntesis, etc.) Aparece la regla con la que se resuelve un paréntesis que contiene un número positivo antecedido con un signo más
7 D4I	El signo más del paréntesis [Señala al signo fuera del paréntesis] $+(-4)$ ***Se copia tal como está*** y ¿Cómo está?, como menos cuatro***, y escribe el resultado***. $+(-4)=-4$	Aparece la regla para obtener el resultado de un número negativo contenido en un paréntesis antecedido por un signo más.
8 D4I	[Se dirige a los paréntesis con signo menos y explica] Ahora ***el signo menos del paréntesis indica cambiar de signo*** [señala el signo menos fuera del paréntesis] ¿Qué signo está? [Se refiere al signo del número dentro del paréntesis, al momento que escribe su signo]***Más, cambiando: menos*** [Escribe el resultado] $-(+4)=-4$	Establece la regla para resolver el paréntesis cuando antecede un signo menos y éste contiene un número positivo
9 D4I	[Ahora se refiere al último paréntesis] $-(-4)$ ***El signo menos del paréntesis*** [se refiere al signo fuera del paréntesis] ***indica cambio***, ¿Qué signo está?, [Se refiere al signo negativo del cuatro] ***menos cuatro, cambiando: más cuatro*** [Escribe el resultado] $-(-4)=+4$ y esa es la manera como se resuelven los paréntesis.	Establece la regla para resolver el paréntesis cuando antecede un signo menos y éste contiene un número positivo

Episodio II.	SUMA Y RESTA DE ENTEROS.	Docente D4I.
Línea	**ENSEÑANZA**	**OBSERVACIONES**
1 D4I	[Cambia la pantalla y comienza una explicación adicional]	La estrategia consiste en eliminar el paréntesis y después aplicar una segunda serie de reglas.
2 D4I	Ahora lo segundo que debes tener en cuenta son los signos iguales, [Aparece en la pantalla la siguiente información al momento en que explica] Signos iguales SE SUMA Signos diferentes SE RESTA Los signos iguales se suman.	Aparecen dos reglas de la ley de los signos para la suma y resta de enteros.
3 D4I	Por ejemplo: [Escribe bajo la regla escrita y explica] tenemos, más cuatro, más cinco, ¿Cuánto sale? [pregunta y después responde] Signos iguales SE SUMA +4 +5 = ***Signos iguales se suman***, entonces [Señala a la operación] sumamos, cuatro más cinco sale nueve ***y se pone el mismo signo*** [Escribe el resultado incluyendo el signo más del nueve] Signos iguales SE SUMA +4 +5 = +9 Otro ejemplo podría ser: menos siete menos tres, [Escribe al momento que explica] -7 -3 = ¿Cuánto sale?, menos siete menos tres, tienen signos iguales [señala ambos signos negativos] -7 -3 = [Menciona la regla] ***signos iguales se suman***, siete más tres sale ***diez y se pone el mismo signo***, Entonces signos iguales se suman y se pone el mismo signo [Anota el resultado] -7 -3 = -10	Aparece la regla para sumar dos números con signos iguales, caso: dos positivos. Aparece la regla para sumar "dos números con signos iguales": caso: "dos negativos" En este momento se confunde la operación -7 -3 como suma de dos negativos cuando en realidad se tiene la sustracción entre -7 y 3. (-7) – (+3) =
4 D4I	[Continúa la explicación ahora con la regla de los signos diferentes] Los signos diferentes se restan, por ejemplo, si tenemos, menos siete más diez [Escribe la operación bajo la regla]	No se utiliza el valor absoluto para indicar que se "restan" los valores absolutos.

Episodio II.	SUMA Y RESTA DE ENTEROS.	Docente D4I.
Línea	**ENSEÑANZA**	**OBSERVACIONES**
4 D4I	**Signos diferentes** SE RESTA **-7+10=** son signos diferentes porque el siete tiene signo menos y el diez tiene signo más, [señala a los signos], **-7+10=** entonces, ***signos diferentes se restan***, diez menos siete, sale tres -7+10= 3 , ***y se pone, el signo del mayor***, ¿Quién es mayor, el diez o el siete?, ¡El diez!, el diez tiene signo más. [Completa la operación anotando el signo del número tres] **-7+10= +3**	Se enuncia la regla de los signos para el caso de dos números con signos diferentes. No se utiliza el concepto de valor absoluto para indicar que el signo del resultado corresponde al número de mayor valor absoluto.
5 D4I	Otro ejemplo, …menos diez más cuatro [Escribe la operación] **-10+4 =** tienen signos diferentes, signos diferentes se restan, diez menos cuatro, sale 6 [Anota] **-10+4 = 6** signo, del mayor, ¿Quién es mayor, el diez o el cuatro? El diez, el diez tiene signo menos [Entonces signa al resultado] entonces va el menos [Escribe el resultado] **-10+4 = -6**	No se utiliza nuevamente el concepto del valor absoluto en la regla, lo que puede conducir al formulismo vacío, es decir al uso de reglas sintácticas sin significado.

Episodio III. COMBINACIÓN DE SUMAS Y RESTAS CON ENTEROS. Docente D4I.		
Línea	**ENSEÑANZA**	**OBSERVACIONES**
1 D4I	[Cambia la pantalla y comienza la práctica de lo aprendido. Aparece la siguiente operación en la pantalla al momento que el docente la lee] RESUELVE: -30+8-(-5)+1-5-(-3)+(-7)	Ahora muestra la estrategia para resolver combinaciones de números con paréntesis y sin paréntesis.
2 D4I	Resuelve: menos treinta, más ocho, menos menos cinco, más uno, menos cinco, menos menos tres, más menos siete. -30+8-(-5)+1-5-(-3)+(-7) [escribe la operación] Lo primero que se resuelve son los paréntesis, así que tengo que copiar lo que no está en paréntesis [escribe debajo de la operación original] -30+8-(-5)+1-5-(-3)+(-7) -30+8 Ahora, en paréntesis, un signo menos indica que [señala el signo antecedido del paréntesis] se debe cambiar, [se refiere al signo negativo del cinco] a menos cinco, cambiando: más cinco. [escribe más cinco en rojo] -30+8-(-5)+1-5-(-3)+(-7) -30+8 +5 seguimos copiando [escribe más uno menos cinco, completando la operación], más uno, menos cinco. -30+8-(-5)+1-5-(-3)+(-7) -30+8 +5 +1-5 Ahora, el signo menos del paréntesis indica cambiar de signo, ¿Qué signo está?, menos [señala el signo negativo del 3], -30+8-(-5)+1-5-(-3)+(-7) cambiando: más [escribe más tres] -30+8 +5 +1-5 +3 , seguimos… el signo más del paréntesis [señala el signo de suma] -30+8-(-5)+1-5-(-3)+(-7) indica que se copia tal como está, ¿Qué cosa está?, menos siete. [lo escribe en la expresión]. -30+8 +5 +1-5 +3 -7	Aplica las reglas que ya estableció para “resolver los paréntesis” Elimina los paréntesis y ahora aplica la segunda parte de las reglas.

Episodio III. COMBINACIÓN DE SUMAS Y RESTAS CON ENTEROS. Docente D4I.		
Línea	**ENSEÑANZA**	**OBSERVACIONES**
3 D4I	Ahora observemos que, tenemos dos números iguales con diferentes signos [Subraya a cinco y a menos cinco] -30+8 +5 +1-5 +3 -7 Así que podemos aplicar la propiedad cancelativa [cancela ambos números] -30+8 ~~+5~~ +1 ~~-5~~ +3 -7 se cancelan. Ahora vamos a reunir aquellos números que tienen signo más [encierra en círculos al ocho, uno y tres] -30+8 ~~+5~~ +1 ~~-5~~ +3 -7 [y dice] entonces sumamos, ocho más uno más tres, [señala los números encerrados en círculos]ocho más uno: salen nueve, nueve más tres: salen doce, [escribe 12 bajo la expresión] -30+8 ~~+5~~ +1 ~~-5~~ +3 -7 12 signos iguales se suma y se pone el mismo signo, más, más, más[señalando a los signos de suma de ocho, uno y tres]más [signando al resultado 12] -30+8 ~~+5~~ +1 ~~-5~~ +3 -7 + 12	Resuelve la operación +5-5 que es una resta con resultado cero, pero en lugar de indicar esto, el docente dice que es por medio de la propiedad “cancelativa”, incurriendo en un error de tipo conceptual. Aplica las reglas para sumar positivos.
4 D4I	Ahora vamos a seleccionar a aquellos con signo menos, [encierra en círculos a -30, y menos siete] Menos treinta, menos siete. -30+8 ~~+5~~ +1 ~~-5~~ +3 -7 Signos iguales se suma, treinta más siete, treinta y siete [escribe el resultado parcial] -30+8 ~~+5~~ +1 ~~-5~~ +3 -7 + 12 37 menos, menos, [señala los signos negativos]entonces el mismo signo [signa al 37 negativo pero anota un signo menos entre los dos números]	Aplica las reglas para “negativos”

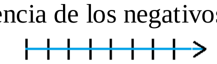
Episodio III. COMBINACIÓN DE SUMAS Y RESTAS CON ENTEROS. Docente D4I.		
Línea	**ENSEÑANZA**	**OBSERVACIONES**
4DI	RESUELVE: -30+8-(-5)+1-5-(-3)+(-7) -30 +8 +5 +1 -5 +3 -7 + 12 — 37	Confunde al signo negativo con el signo de sustracción.
5 D4I	Ahora tenemos signos diferentes. Signos diferentes se restan [señala a la operación y a los dos signos presentes] + 12 — 37 y me sale veinticinco [escribe el resultado] + 12 — 37 25 signo del mayor, ¿Quién es mayor? ¿Treinta y siete o el doce?, El treinta y siete, el treinta y siete tiene signo menos [entonces coloca el signo menos al 25] + 12 — 37 - 25 y este constituye la respuesta RESUELVE: -30+8-(-5)+1-5-(-3)+(-7) -30 +8 +5 +1 -5 +3 -7 + 12 — 37 $\boxed{-25}$	Aplica la regla de los “signos diferentes” para la suma aunque la operación es una sustracción. Finalmente resuelve la operación. Obtiene un resultado correcto a partir de reglas que contienen errores de tipo conceptual.

Episodio IV.	LOS COMENTARIOS	Docente D4I.
Línea	**ENSEÑANZA**	**OBSERVACIONES**
1 D4I	[Se muestran algunos comentarios emitidos por los usuarios de este video]	
2 Lucía	A mí no me la enseñaron con lo del caso “cancelativo”	La niña no reconoce el caso cancelativo” porque no se aplica.
3 Stefani	A mí si que así q si entendí a la perfección	Estefani piensa que entiende cómo se suman y restan los enteros de acuerdo a la enseñanza de D4I, pero no ha practicado lo aprendido ni se ha enfrentado a ningún reto cognitivo como para sostener su argumento.
4 Sara	Gracias, entendí mañana tengo evaluación final de matemáticas.	Sara se encuentra en la misma situación de Estefani.
5 Valeria	[Respuesta al comentario de Lucía] Yo igual [tampoco le enseñaron esta propiedad]	Valeria tampoco comprende lo de la propiedad “cancelativa”
6 Facundo	[Respuesta al comentario de Lucía] Yo igual [tampoco le enseñaron esta propiedad]	Facundo sigue el comentario de Valeria.
7 Melisa	GENIAL, SIEMPRE SUFRÍ CON ESTO, AHORA LO ENTIENDO Y ES TAN FÁCIL. GRACIAS.	Las reglas presentadas por el docente D4I parecen tener sentido para Melisa, aunque se encuentra en la situación de Estefani.
8 The Novask	Te puedo ayudar -7.1 + 8.1 =…	No aparece este contenido en la enseñanza de D4I y The Novask propone ayudar con la suma de decimales positivos y Negativos.
9 Mariel	Explica mil veces mejor q mi profesora de mate	Este comentario favorece a D4I sobre la enseñanza escolarizada sin justificarse.

APÉNDICE C

Transcripción de las respuestas del *cuestionario 1* por los docentes D5P, D6P, D8S, D9S y D10S.

Etapa A.

Pregunta 5. ¿Cómo le explicas a tus alumnos el concepto de número negativo?	
D5P	Formalmente no lo he introducido, en el caso del lenguaje utilizado que se aproxima es a que identifiquen "deudas" sin embargo el discurso se orienta más como valor absoluto (ganancias, deuda)
D6P	…Para explicar los números negativos utilizaría la recta numérica, mostrando que son números menores que el cero. Haciendo quizá referencia a dinero que pido prestado, lo que debes entonces es negativo.
D8S	Los presento como un complemento de la recta numérica que ellos ya conocían, dibujo primero una recta con los números naturales que parten del cero, a partir de ahí construyo los negativos hacia la izquierda diciéndole a los alumnos que a partir de ese momento vamos a tener un nuevo "grupo o familia" de números y para distinguirlos vamos a tomar el cero como referencia, que los que están a la derecha del cero van a ser los positivos y los que están a la izquierda son los negativos y que este grupo de números ahora con signo, representan a los enteros.
D9S	A partir de ejemplos o situaciones donde aparecen en la vida cotidiana además de hablar de los inversos o contrarios de derecha- izquierda, arriba-abajo, adelante-atrás, etc. para entender la dualidad y que para positivo…
D10S	En su momento lo introduje como una deuda y como inversos de los números positivos. (Aunque ahora sé que debo ir más allá)
Pregunta 6. Explica ¿qué modelos utilizas para enseñar números enteros?	
D5P	Me oriento más hacia el trabajo con naturales recurriendo a la recta numérica con la limitante de que no se hace explícita en ella la presencia de los negativos; es decir de la siguiente forma:  Ahora bien, identifico que ni siquiera doy un sentido ni dirección que ofrezca la idea de que pudieran existir.
D6P	Mediante conjuntos de objetos, dando una numeración, consecutiva a cada objeto. Ningún objeto representaría al cero. Les diría que los enteros son los números positivos y sus inversos.
D8S	La recta numérica y cuando avanzamos un poco más, lo extiendo a todo el plano cartesiano. Quizá no tengo tanta relación pero cuando se trata el contenido de expresiones algebraicas, uso algeblocks, una que otra vez los he aplicado sólo con adición y sustracción de números con signo.
D9S	Recta numérica, problemas de temperatura, altitud, el elevador, las eras, pérdidas y ganancias, avanza –retrocede, además del modelo chino, aunque desconocía su nombre con fichas.
D10S	No recuerdo haber utilizado modelos particulares más que el de "dudas" y el de estructura algebraica.
Pregunta 7. Explica ¿cómo enseñas la suma de enteros?	
D5P	Con material concreto, realizando conjuntos y agrupándolos en decenas, centenas, etc. según sea el caso. Jugando a realizar transformaciones a través de dichos conjuntos (cajero). Representando en la recta numérica el significado de adición de un conjunto con otro. Algoritmizando a través de la reflexión de lo hecho con la transformación en el juego del "Cajero"
D6P	Utilizando conjuntos de objetos distintos o separados, juntar los objetos de 2 conjuntos e ir adhiriendo o sumando esos objetos. Explicar lo que ocurre cuando se rebasa la decena y qué ocurre con el acarreo de las decenas, centenas, etc. Mostrar la ley de los signos y lo importante de su consideración.

Pregunta 7. Explica ¿cómo enseñas la suma de enteros?	
D8S	Comienzo en la RN, …, pongo un punto de referencia (en forma de conejo)… juntos hacemos los movimientos del conejo. Por ejemplo, -3-7, ubicamos el conejo en el cero, primero se mueve 3 pasos hacia la izquierda, luego otros 7 pasos hacia la izquierda…; cuando hay casos como +6-2, ... Les remarco que el signo … te dice "muévete hacia la derecha (cuando el signo es positivo) o muévete hacia la izquierda (cuando el signo es negativo)... Con números pequeños y enteros … queda muy bien, pero… con cantidades mucho más grandes… sólo se me ha ocurrido hacer que ellos observen qué pasa cuando se tienen dos signos iguales o dos signos distintos, que al ser iguales, los valores absolutos se suman y conservan el signo de ambos, y que al ser distintos, el valor de ambos es restado (el de mayor valor absoluto le resta el de menor valor absoluto) y se conserva el signo de ese que tienen mayor valor absoluto.
D9S	Con fichas y la Recta Numérica.
D10S	Usaba la recta numérica.
Pregunta 8. Explica ¿cómo enseñas la sustracción de enteros?	
D5P	Utilizo el mismo principio con el juego del "Cajero" pero ahora "pagan" lo que deben, devolviendo al cajero cierta cantidad, al llegar a requerir cambio transforman centenas en 10 decenas, o decenas en 10 unidades y siguen realizando el pago (quitando… *el menor al mayor "siempre")*. El planteamiento de problemas se encuentra estructurado para que se interprete "siempre" que el menor se quita del mayor. Se puede utilizar la RN para representar la sustracción pero conservando el mismo principio inicias a partir del mayor y retrocedes en la recta según se indique en el número menor.
D6P	Sería similar al anterior sólo que en lugar de adherir, quitaría objetos, explicando el algoritmo de la sustracción haciendo énfasis en la importancia del acarreo de unidades.
D8S	…podría agregar que al hallarnos operaciones de este tipo (+3)-(-2)… en donde aún no se ve nada de multiplicación de números con signo… lo que les digo es que el signo que está a la izquierda de algún número signado, le indica algo a ese número, si es positivo, lo le está diciendo al número signado es: "no cambies de signo" y ese signo (el positivo) desaparece llevándose el paréntesis con él. (+6)+(+4) →(+6)–4, el signo a la izquierda es negativo, lo que dice es "cambia de signo" ese negativo se va llevándose el paréntesis con él. (+3)- (-2) → (+3)+2 Para el caso del paréntesis que no tienen signo afuera y a la izquierda, les digo a los alumnos que aunque no esté ningún signo, se toma como positivo, así la "regla" de "cambia el signo" es aplicada a estaos casos. Retomando los dos anteriores: (+6) -4 → +6 - 4 (+3)+2→ +3+ 2
D9S	Con fichas y la Recta Numérica.
D10S	Usaba la recta numérica.
Pregunta 11. Explica ¿qué tipo de ejercicios utilizas para la enseñanza de enteros?	
D5P	Podríamos modificar el tipo de problemas verbales y la estructura en el tipo de preguntas para que de entrada no se niegue la presencia de los números negativos y pueda utilizarse la recta numérica para identificar al número negativo; por ejemplo decir * tiene en su cuenta de banco $10 y fue a comprar un juguete de $15 ¿Cuánto dinero tiene? ← esta pregunta posibilitaría contestar R= -5 pesos, a diferencia de que pregunte ¿Cuánto debe?, la respuesta se recarga en los naturales R= 5 pesos
D6P	(No emite ninguna respuesta)
D8S	Ejercicios numéricos sencillos al inicio (parejas de números) en las cuatro operaciones y después que lo dominan, ejercicios con tres o más valores signados en adición, sustracción…
D9S	Ejercicios en libro y cuaderno, juegos de cartas, lotería, etc. en programas como Clic, Thatquiz y quipper school, además de trabajo en equipo para resolver problemas.
D10S	Ejercicios de deudas, puntos de encuentro.

Pregunta 12. Explica ¿qué tipo de problemas utilizas para la enseñanza de enteros?	
D5P	Los tipos de planteamientos utilizan preguntas que de entrada dan la oportunidad a pensar sólo en naturales.
D6P	(No emite ninguna respuesta)
D8S	Los problemas típicos de alturas a nivel del mar (sobre o bajo), elevadores, submarinos, aviones (todos cambiando de posición con respecto a la vertical)
D9S	Respuestas de la pregunta 6 sería la misma, además de incluir ecuaciones y cuadrados mágicos.
D10S	Problemas de deudas, puntos de encuentro.
Pregunta 13. Como profesor, explica ¿qué consideras que presenta mayor dificultad en la enseñanza de enteros?	
D5P	1º. Que para mi adquiera sentido práctico, no sólo algebraico. 2º. Plantear situaciones que permitan la reflexión sin que se niegue de entrada al negativo.
D6P	En alumnos de secundaria la realización de operaciones con números muy grandes o con negativos.
D8S	La aceptación misma de que existen números negativos y que se pueden usar en operaciones que parecen ilógicas como +13-15
D9S	Comprensión de los problemas para expresar las operaciones con cantidades positivas y negativas.
D10S	Considero dos importantes: Los problemas relacionados con el significado de los signos asociados, ya que la resta (-) y el "menos" del número negativo(-) son dos elementos que hay que utilizar acorde a lo que requiera el problema y en ocasiones ni para el docente es claro y por otro lado, la abstracción que requieren a pesar de su aparente simplicidad.
Pregunta 14. Explica ¿qué consideras que presenta mayor dificultad en el aprendizaje de los enteros?	
D5P	La aplicabilidad cotidiana y familiaridad con los naturales, el reconocimiento de una representación tangible que dé cuenta del número negativo.
D6P	La realización de sustracciones con números muy grandes, en especial cuando deben restar de un número pequeño, uno muy grande.
D8S	El manejo de los signos, en adición y sustracción se manejan de cierta manera, bajo ciertas reglas, pero con multiplicación y división esto cambia. P. ej. +3-7=-4 no es lo mismo que (+3)(-7) = -21 Ellos mezclan ideas y generan sus propias nuevas reglas.
D9S	Resolver los problemas con operaciones con números enteros.
D10S	Lo mismo que dije en el 13.
Pregunta 15. Explica ¿Cuál es la operación de los números enteros que más se les dificulta aprender a tus alumnos y cómo lo has notado?	
D5P	En mi caso noto mayor dificultad, comprender el sentido de multiplicación y división con (negativos) enteros (+ y -), lo entiendo a nivel algebraico, no en su representación gráfica.
D6P	La división de enteros con números muy grandes.
D8S	La sustracción de enteros, por esa cuestión de quitarle a un número más del valor que tiene.
D9S	Multiplicación y división con números enteros.
D10S	La suma de enteros cuando se involucran 1 o más números negativos

Pregunta 16. Explica ¿cómo enseñas el simétrico de "-a"?	
D5P	Puede enseñarse a través de la recta numérica.
D6P	Lo explicaría mediante la recta numérica, ubicando el –a y su simétrico, indicando que están a la misma distancia, a partir del cero como referencia, pero de sentido contrario.
D8S	En una RN con positivos, el cero y negativos hago que los alumnos la doblen justo por el centro (el cero) y pregunto qué números se enciman, ellos observan y dicen que se encima el mismo número pero con signo distinto, es ahí donde introduzco el concepto de número simétrico, ya que ellos observan que el simétrico de un número es su contrario en la RN teniendo como referencia al cero.
D9S	A partir de la RN, se define el simétrico y se explica también que el simétrico es el inverso aditivo y al agregarse a la cantidad da cero.
D10S	Un número que sumado con $-a$ me de cómo resultado cero.
Pregunta 17.Define a los números enteros y ¿Cómo los concibes?	
D5P	Son los números que representan objetos pertenecientes a un conjunto numerable ya sea en el cuadrante positivo o negativo. Y la comprensión la alcanzo en el seguimiento de reglas algebraicas, no así en su representación gráfica.
D6P	Es el conjunto numérico que contiene a los naturales, sus inversos aditivos y el cero. Son infinitamente grandes.
D8S	El conjunto de números positivos y números negativos.
D9S	Conjunto de cantidades positivas y negativas que incluye al cero y tienen ciertas propiedades.
D10S	Un conjunto abeliano con respecto a la operación (+), los concibo como un conjunto de números que surgen por la necesidad de "completar el grupo de los números naturales todo con respecto a la suma.
Pregunta 18. ¿Cuándo consideras que tus alumnos han adquirido el dominio numérico de los enteros? ¿Cómo lo identificas?	
D5P	Que pudieran contestar preguntas donde consideren un punto de referencia y lo determinen en como cero y que puedan transitar a la derecha o a la izquierda de éste en la recta numérica.
D6P	Cuando pueden realizar operaciones sin dificultad, interpretando correctamente los números negativos, los positivos y el cero.
D8S	Cuando pueden resolver operaciones y ejercicios sin confundir reglas o procesos. Me doy cuenta cuando aceptan que pueden usar números con signo y que ya los han integrado de manera coherente a su lenguaje matemático.
D9S	Al observar los avances y dificultades que presentan al resolver los cuestionarios, las actividades que se proponen en la computadora, por equipo y al pasar al pizarrón. Además de ver su dificultad en los juegos porque se ve de manera más natural y con el cálculo mental el manejo de los números enteros.
D10S	No considero poder saber cuando mis estudiantes tienen un dominio numérico con los enteros, ya que para eso considero deben trabajar frente a estructuras muy abstractas, sin embargo considero que operan bien con ellos cuando logran trabajar al menos (-) y al más (+) acorde a cómo se pida, por ejemplo si tengo (-3) + 8 - 14, darse cuenta que en esta operación el -3 y el -14 son dos números negativos que por propiedades en los intentos podemos asumir a ese menos como una operación que al solucionar da (-9) pero … ahora se entiende como un número negativo.

Anexo. Artículo Publicado.

Título:	Entrecruzamiento de los sistemas matemáticos de signos y los sistemas químicos de signos
Título alternativo:	Intertwinement of Mathematical Sign Systems and Chemical Sign Systems
Autor/es:	Salinas, G. | Gallardo, A. | Mendoza, E.
Palabras clave:	Competencia formal | Números enteros | Sistemas matemáticos de signos | Sistemas químicos de signos | Recta numérica | Formal competence | Integers | Mathematical sign systems | Chemical sign systems | Number line
Área/s de conocimiento:	Didáctica de la Matemática
Fecha de publicación:	2015
Editor:	Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática | Universidad de Alicante
Cita bibliográfica:	C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), 2015. Investigación en Educación Matemática XIX. Alicante: SEIEM. ISBN 978-84-9717-385-8, pp. 491-501
Resumen:	En esta investigación, docentes de educación media básica y de educación media superior resuelven un cuestionario de matemáticas y de química. Durante los procesos de elaboración se advierte el entrecruzamiento entre los sistemas matemáticos de signos y los sistemas químicos de signos. La competencia formal es alcanzada por uno de los docentes de educación media superior. Se observan dificultades en el uso de la recta numérica al representar procesos de óxido-reducción en una reacción química con números negativos. | In this research report, a questionnaire of mathematics and chemistry is solved by professors of junior high school and high school. Throughout the resolution process it is noticed the intertwinement between mathematical and chemical sign systems. The formal competence is reached by a high school teacher. Difficulties are noted when oxide-reduction processes are presented in a chemical reaction within negative numbers on the number line.
URI:	http://hdl.handle.net/10045/51556
ISBN:	978-84-9717-385-8
ISSN:	1888-0762
Idioma:	spa
Tipo:	info:eu-repo/semantics/conferenceObject
Derechos:	© de los textos: los autores; de la edición: Universidad de Alicante
Revisión científica:	si
Aparece en las colecciones:	Congresos - XIX Simposio SEIEM - Actas