CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD DISTRITO FEDERAL

Departamento de Matemática Educativa

Matemática funcional en una comunidad de conocimiento:

el caso de las ecuaciones diferenciales lineales en la ingeniería

Tesis que presenta

Edith Johanna Mendoza Higuera

Para obtener el grado de

Maestra en Ciencias

en la especialidad de

Matemática Educativa

Director de Tesis: Dr. Francisco Cordero Osorio

México, Distrito Federal Febrero/2013

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) por el apoyo brindado para la realización de mis estudios de maestría.

Para ti …

Con todo mi cariño

Agradecimientos

México, ciudad magestuosa y enorme, en la que he pasado mis últimos dos años y medio llenos de experiencias, sabores, alegrías, tristezas, amistades pero lo más importante de amor por la vida. Nunca imaginé estar acá, pero hoy sigo y seguiré aquí. Gracias al pueblo mexicano, quien a través de Conacyt me ha apoyado para alcanzar un logro más en mi vida profesional.

A mis profesores, Dr. Ásuman, Dr. Cantoral, Dr. Rosa María y Dr. Acuña, muchas gracias por sus enseñanzas y por el trabajo de estos semestres.

A mi mamá, que a pesar su tristeza por hacerme sola en esta enorme ciudad, me apoya en mis decisiones y retos. A papá, mi viejo querido, mis hermanas Omaira y Janeth, mis hermanos César y Eduar infinitas gracias, este último año han sido mi mayor soporte. A Camilo, Lunita, Jairo, Daniel, Eduar David y Valeria, por sus risas y locuras. Los extraño tanto como ustedes a mi.

A mi maestro y amigo, Francisco, toda mi admiración por su entrega y pasión a la investigación y a la Matemática Educativa. Sin duda eres un ejemplo a seguir. Día a día me has enseñado a respetar y valorar nuestro quehacer. Gracias por el apoyo, la confianza, la paciencia y la dedicación puestas a éste y otros proyectos que hemos compartido.

A mis colegas de la Universidad Autónoma de Chiapas: Miguel, Hipólito, Alma, Atenea y Maestro Muciño. Un agradecimiento enorme por el *recibimiento y el calor humano que recibí. Gracias a su apoyo y entrega mi estancia en Tuxtla fue todo un éxito. Por allá nos veremos muy pronto.*

A los estudiantes de ingeniería civil, con los que compartí horas de grabaciones y que sin esperar nada a cambio, mas que una experiencia, me colaboraron en la realización de esta investigación.

Adrianita, desde Colombia sentí lo maravillosa persona que eres. Gracias infinitas por la paciencia y el apoyo en cuanta cosa he necesitado. Susana y Nancy un agradecimiento también a ustedes por la confianza y apoyo.

A mis amigos colombianos Sandra y Alex, quienes me recibieron el primer día que llegué a México, abrieron las puertas de su casa para brindarme todo cuanto necesitase. Les estoy infinitamente agradecida. A Nubita, que estando aquí en México me a acompañado en todas mis alegrías y pesares.

A Jorge Fiallo, muchas gracias por confiar en mi y en mis capacidades, has sido un maestro para mi.

A mi entrañable amigo Cristian por que a pesar de la distancia, hemos estado muy pendientes el uno del otro. Sabes cuanto te aprecio.

A mis compañeros de maestría Claudia, Chayo, Loncho, Elma y Mario, juntos preparamos sesiones de trabajo, exposiciones, trabajos, viajes, congresos, en fin, he aprendido mucho de cada uno de ustedes.

A Maguito, gracias por nuestra amistad, por escucharme, por las risas y los llantos, por darme un abrazo cuando más lo he necesitado y por estar ahí …

A Elí, estos últimos meses hemos compartido muchas cosas. Gracias por la cercanía y todo el tiempo dedicado a nuestras pláticas.

A los compañeros del seminario de Doctorado, Magali, David, Eduardo, Karla, Claudia C, Claudia M, Jano y Daniela, que aunque oficialmente no debía estar ahí, era grato y enriquecedor escucharlos platicar de sus tesis y proyectos.

Índice

Resumen

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la ingeniería conlleva una problemática amplia y compleja, seguramente con muchas orientaciones. En esencia esta investigación problematiza dos aceptos centrales:

- Cuando se aborda la problemática de la enseñanza de la matemática para la ingeniería, en general, prevalece el dominio matemático por encima del conocimiento de la ingeniería. Esto conlleva formular enseñanzas de la matemática ignorando los *usos del conocimiento matemático* en la propia ingeniería.

- El discurso matemático escolar no tiene un marco de referencia que ayude a resignificar el conocimiento matemático para transitar en otros dominios de conocimiento, como la ingeniería. Esto conlleva construirlo, tomando como base una epistemología de la matemática *desde el ámbito de la ingeniería*, donde el objeto de estudio no es en sí la matemática, sino por el contrario es un conocimiento funcional y situacional.

Abstract

The teaching and learning of mathematics in engineering involves a large and complex problem, probably with many orientations. In essence this research problematizes two central accepted:

- When addressing the issue of teaching mathematics for engineering generally prevails above mathematical domain engineering knowledge. This involves formulating mathematical teachings ignoring the uses of mathematical knowledge in engineering itself.

- The school mathematical discourse does not have a framework that helps to give a new meaning to transit mathematical knowledge in other domains of knowledge, such as engineering. This leads to build, based on an epistemology of mathematics from the field of engineering, where the object of study is not the math itself, but rather is a functional and situational awareness.

Introducción

En esta investigación se caracteriza a la graficación como un modelo de las resignificaciones de los comportamientos tendenciales, generadas por una argumentación de estabilidad en una situación específica de acumulación. Todo esto en la usanza de una comunidad de conocimiento matemático de ingenieros en formación. Se destacan los comportamientos tendenciales modelados gráfica y analíticamente. El objeto en cuestión consiste de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, que modelan una tendencia asintótica. Se evidencian la alternancia entre los funcionamientos y las formas de lo analítico y lo gráfico propios de una comunidad de conocimiento que se sitúa en su cotidiano escolar, al someterse a una situación específica.

La enseñanza de la matemática para la ingeniería es la problemática que se aborda en esta investigación, donde prevalece el dominio de la matemática por encima del conocimiento de la ingeniería. Este hecho obliga desconocer la existencia de una dualidad de la matemática escolar y el carácter de herramienta con el que la matemática es asumida dentro de la ingeniería. Por ello, en la enseñanza de la matemática se formulan marcos de referencia que ignoran el uso del conocimiento matemático en el dominio de la ingeniería y más bien asumen un carácter autoritario sobre el conocimiento que debe ser enseñado.

Pero la problemática se agudiza más porque no hay marcos de referencia explícitos que ayuden a resignificar el conocimiento matemático en otros dominios disciplinares, como la ingeniería: se desconoce su funcionalidad y sus usos , en las diferentes comunidades de conocimiento que la conforman.

Esto sucede, con respecto a la ingeniería, en gran medida porque se ha considerado como una aplicación de las ciencias, en particular de la matemática, donde primero se requiere saber matemáticas para luego aplicarlas y así, los programas de formación de ingenieros, dedican sus primeros semestres en "enseñar" un cúmulo de conocimientos para luego ser aplicados las asignaturas agrupadas como "ciencias de la ingeniería".

Para abordar tal problemática, con ánimos de contribuir a pesar de su dimensión, en este estudio, se conceptualiza a los participantes como ciudadanos miembros de una comunidad de conocimiento, en particular ingenieros en formación de una facultad de ingeniería civil. Con el mismo tenor, se caracteriza el uso de su conocimiento matemático al enfrentarse a una situación específica. Dichos participantes se someten a una Actividad diseñada donde se evidenciaron los usos de la graficación en la modelación de comportamientos tendenciales.

La graficación pasa a ser el enlace entre los diferente procedimientos analíticos. Al graficar lo que pudiera ser la solución de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, los ingenieros en formación, construyeron argumentos de estabilidad para caracterizar modelos gráficos y analíticos que hablan de la solución de la ecuación diferencial y a la vez de la situación de acumulación.

El presente documento se organiza a través de cinco capítulos. A continuación comentamos brevemente el contenido de cada uno de ellos.

En el capítulo 1 denominado de Antecedentes, se presentan los trabajos que preceden a éste desde tres perspectivas: La matemática en otras profesiones, la enseñanza de la matemática a ingenieros y estudios de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. También se explica ampliamente la problemática abordada, así como los objetivos y las preguntas que orientan la investigación

En el capítulo 2 se formula el marco teórico que fundamenta la investigación, así como los recortes epistemológicos con base en los cuales se organiza la Actividad y la situación específica que se pone en escena. El marco mismo, es la base para organizar la forma de análisis de los datos.

En el capítulo 3 se presenta la situación específica, es decir, la situación de acumulación, que fue seleccionada, para detonar los usos del conocimiento matemático. Posteriormente, se presenta la Actividad dividida entres momentos donde se explicita lo que se espera durante la puesta en escena. Finalmente, se abordan aspectos metodológicos como los participantes, el escenario y la puesta escena.

En el capítulo 4 se hace el análisis de los datos, retomando lo epistemológico y lo presentado en el capítulo 3.

Se finaliza con el capítulo 5 en donde se presentan las conclusiones del trabajo. Se indica lo alcanzado tanto teóricamente, como en aportes al rediseño del discurso matemático escolar.

Capítulo I
ANTECEDENTES

I.1. Antecedentes

Las investigaciones en la Matemática Educativa no solo se han ocupado de los aspectos cognitivos que emergen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, así como de estudiar las interacciones entre docentes y alumnos en el aula de clase; también se ha ocupado de estudiar las matemáticas que deben ser enseñadas en los diferentes niveles de formación, incluso el universitario. Es así como se han realizado investigaciones, desde diferentes perspectivas, para determinar qué matemática ha de ser enseñada en la formación de profesionales.

I.1.1 La matemática en otras profesiones

Algunas de estas investigaciones, como es mencionado por Noss, R., Hoyles, C. & Pozzi, S. (2000) han centrado su mirada en identificar qué de la matemática escolar es puesta en uso en el trabajo, es así, como por medio de encuestas distinguen "las matemáticas necesarias" en los lugares de trabajo y de esta manera impulsan los cambios curriculares. Así mismo, estas investigaciones tienen una visión utilitaria de la matemática, llevando a conclusiones como que la matemática escolar no es puesta en uso en el trabajo. Bajo esta mirada, se desconocen las matemáticas que emergen en las prácticas profesionales y que puedan parecerse o no a las matemáticas escolares.

Noss, R., Hoyles, C. & Pozzi, S. (2000), afirman que es posible agrupar otros estudios bajo el título de cognición situada, los cuales tienen como base la Teoría de la Actividad. Y que estas investigaciones proporcionan una visión del trabajo intelectual la cual es inseparable de su contexto socio-cultural. Además, que la actividad matemática en el trabajo está profundamente entrelazada con la complejidad de las prácticas de trabajo y presume de que no se puede desarrollar una teoría de la competencia matemática sin desarrollar una teoría del conocimiento de trabajo. Así, las matemáticas usadas en estos contextos son fragmentos caracterizados por éstos y que pareciera que éstas matemáticas no se puede llevar a términos de estrategias más generales.

A partir de las críticas y análisis de estas dos formas de investigar la matemática que se debe enseñar en el aula, a través del estudio de las matemáticas en el trabajo, Noss, R., Hoyles, C. & Pozzi, S. (2000) realizan una investigación donde exploran cómo las matemáticas se utilizan en diversos contextos del trabajo con el fin de desentrañar su potencial y las limitaciones en cuanto al desarrollo de modelos útiles en las prácticas del trabajo. Sus investigaciones, muestran que las "matemáticas visibles" o las matemáticas escolares, casi siempre se relacionan con las actividades rutinarias; y que algunos de los profesionales usan un número significativo de métodos e incluso una amplia gama de estrategias mentales para la solución de problemas concretos en circunstancias muy específicas.

En concreto, dicen Noss, R., Hoyles, C. & Pozzi, S. (2000) que hay tres caminos para clasificar la relación entre la matemática en uso y la matemática *per se*. Primero, los profesionales tratan con los mismos objetos y relaciones, pero con un lenguaje del trabajo el cual difiere del establecido en la matemática. Segundo los objetos y las relaciones que se observan en el trabajo de los profesionales y los modelos que son conceptualizados a partir de su actividad, no coinciden con la matemática visible o matemática escolar, dado que lo que se puede generalizar en el trabajo, seguramente en la matemática escolar no se puede. Tercero, la generalización de las matemáticas en el trabajo se limita a grupos específicos y bien definidos de circunstancias in situ , pero en ninguna otra parte.

En sus investigaciones, Noss, R., Hoyles, C. & Pozzi, S. (2000) hablan de esa matemática que no es visible o que no se encuentra en la matemática escolar y resalta las estrategias y modelos que surgen de las prácticas en el lugar de trabajo. También, afirman que al matematizar la actividad del trabajo se deben tener en cuenta los tres caminos mencionados anteriormente y analizar las abstracciones desarrolladas por los profesionales. Sin embargo no es clara la intencionalidad educativa de su estudio, ni la forma como estas estrategias y modelos desarrollados en las prácticas laborales pueden ser llevados a las aulas de clase.

Dentro de la teoría sociopistemológica, se han realizado investigaciones donde se identifican prácticas sociales o de referencia que norman la construcción social del conocimiento matemático, así como los procesos de institucionalización en dominios específicos como la toxicología, la ingeniería Biomédica, la ingeniería electrónica y de comunicaciones, entre otras. En general, estas investigaciones comparten el objetivo de aportar marcos de referencia para la reorganizar la matemática escolar, es decir, identificar categorías del conocimiento matemático que permitan elaborar diseños de situación mas *ad hoc* a las realidades del trabajo de los futuros profesionales, puesto que se ha dado cuenta que se requiere entender la construcción de conocimiento matemático pero del ciudadano en su cotidiano.

Por ejemplo la investigación que desarrolla Tuyub (2008), analiza las prácticas en una comunidad Toxicológica con el objetivo de evidenciar cómo se produce la *norma en el proceso de institucionalización de las prácticas* en un entorno científico. En una de sus conclusiones, ejemplifica cómo el toxicólogo hace uso de un conocimiento matemático, la función, pero en un sentido funcional, es decir, no se aprecia su uso como aparece en el discurso Matemático Escolar: no aparecen fórmulas y reglas de correspondencia, más bien se aprecian las magnitudes en los procesos de cambio al realizar tablas o análisis de gráficas. Con otros ejemplos como éstos y realizando un análisis de prácticas asociadas que anteceden determinado objeto toxicológico, determinación de procesos de institucionalización en la toma de decisiones e identificación de saberes funcionales, nos ofrece un marco de referencia de cómo se constituye un saber, en este campo de conocimiento.

Así mismo, García-Torres (2008) realiza una investigación donde "identifica la existencia de mecanismos de construcción social de conocimiento considerando los saberes relativos a la Matemática en los procesos de institucionalización de las prácticas constitutivas de una práctica profesional en Ingeniería Biomédica" (p. 15) Así, identifica dos procesos de institucionalización en los que estuvo inmerso el mecanismo de equilibración de las relaciones asimétricas, uno de estos procesos se refiere a la institucionalización de un saber experimental a un saber teórico y el otro es referido al aprendizaje de uno de los profesionales observados, pues se advierte la forma como en él se va institucionalizando la práctica de producir cerámicas de calidad óptima, o la práctica de interpretar gráficas. Además, da a conocer el uso de la gráfica como un medio para expresar los mecanismos, he indica que su uso es como argumento, conjetura e hipótesis y así cree que este uso se debe favorecer en el sistema didáctico, al atribuir a una gráfica un significado proveniente de una acción directa sobre la experiencia.

También Vázquez (2011) realiza una investigación, en el marco de la socioepistemología, donde estudia la funcionalidad de la estabilidad en la Biología. Busca evidenciar la funcionalidad del conocimiento matemático asociado en las publicaciones y experiencias de un investigador, biólogo matemático de profesión. Para esto, crea un marco de referencia apoyado en artículos de este campo, donde encuentra un uso de las ecuaciones diferenciales para explicar diferentes situaciones como la propagación de enfermedades. En su investigación identifica un uso de la estabilidad, en el modelo depredador-presa, que permite analizar el comportamiento del crecimiento de las especies. Aquí detecta a la graficación como una práctica social en éste dominio.

Los tres estudios mencionados anteriormente, ofrecen a la Matemática Educativa una visión más amplia de la construcción social del conocimiento matemático en otros dominios donde la matemática no es el objeto de estudio. Esta visión a través de los procesos de institucionalización de las prácticas ofrece marcos de referencia que pudieran ayudar en la transferencia del conocimiento construido en estos contextos a la escuela. En este sentido, falta retomar estos trabajos para determinar las implicaciones de dicha transferencia de conocimiento, a la vez que hacer estudios de uso del conocimiento en comunidades de estudiantes, pues en su práctica escolar también se pueden identificar procesos de institucionalización.

Es así como la investigación que aquí se discutirá se interesa por estudiar el uso de las ecuaciones diferenciales en una comunidad de ingenieros en formación.

Rodríguez (2009), realiza un estudio donde afirma que a la ingeniería es llevado el conocimiento matemático de la forma tradicional, es decir, se ha seguido el paradigma del sistema escolar que basa los planes de estudio en los libros de texto y en el proceso de enseñanza y aprendizaje centrados en enfoques axiomáticos y deductivos. Por lo cual, propone que la enseñanza de la matemática debe proveer, al futuro ingeniero, mecanismos que le permitan desarrollar el pensamiento matemático, analítico, reflexivo, deductivo y lógico propio de la ingeniería y así logre un buen desempeño en su vida profesional.

En esta investigación Rodríguez (2009) propone un marco de referencia que no sólo articula las cuatro dimensiones que componen la socioepistemología: epistemológica, didáctica, cognitiva y social, sino que también tiene en cuenta información, de la funcionalidad de la matemática, obtenida a través de entrevistas con ingenieros de las comunicaciones y electrónica que han ejercido la profesión y que son docentes en una facultad de ingeniería.

Así mismo, en la revisión bibliográfica realizada por la autora, identifica a las Series trigonométricas de Fourier como el conocimiento matemático base en una actividad propia (el análisis de señales) del ingeniero de las comunicaciones y electrónica, en esta actividad el ingeniero debe analizar una función desde su representación gráfica. Pero, que en el ámbito escolar no se trabaja con algunas funciones que aparecen en el quehacer profesional.

Finalmente, Rodríguez (2009) afirma que el ingeniero en formación se debe incorporar paulatinamente a su comunidad académico-profesional. El ingeniero trabaja con algunas funciones especiales (funciones que desafortunadamente no están explícitamente en los temarios de matemáticas y que por lo mismo queda a criterio del profesor el estudiarlas), sugiere sean incorporadas para su estudio.

En la anterior investigación, la autora identifica una práctica desde la actividad propia del ingeniero y busca evidenciarla en los programas curriculares para ingenieros en formación, afirmando que al incorporar dicha práctica a los programas, se proveerá a los estudiantes de una matemática funcional, pero no señala cómo incorporar dichas práctica a los programas, pues se hace necesario realizar un proceso de transferencia o transposición de dicha práctica, identificada en el trabajo, al aula.

Las investigaciones mencionadas anteriormente, nos dan una visión de los estudios que se están realizando alrededor del uso de las matemáticas en el trabajo y de cómo la matemática que allí se usa depende del contexto laboral, con objetos de la misma jerga disciplinar y que es construida socialmente por prácticas sociales.

A continuación, nos adentraremos en un dominio de conocimiento más específico como el de la ingeniería, para comentar sobre las concepciones de los investigadores con respecto a este dominio y de la enseñanza de las matemáticas en las licenciaturas de ingeniería.

I.1.2 La enseñanza de las Matemáticas a ingenieros

Desde el inicio de las escuelas de ingeniería hasta nuestros días, las matemáticas y en general las ciencias han sido uno de los ejes principales en la formación de profesionales de la ingeniería, por ello el creciente interés por investigar alrededor de las problemáticas de enseñanza de las matemáticas en la ingeniería.

Cajas (2009) afirma que desde una concepción epistemológica, se ha considerado a las ciencias básicas como el fundamento para la formación de ingenieros, y es por ello, que los programas curriculares propuestos se dividen en tres grupos: las ciencias básicas, las ciencias de la ingeniería y los cursos profesionales. Es así, como el ingeniero en formación transita por estos éstos tres grupos durante sus años de estudio. De hecho, se ha llegado considerar a la matemática como una ciencia básica en cualquier profesión, incluso como un conocimiento necesario para desempeñar cualquier labor.

I.1.3 Estudios de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

La enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales (ED) a estudiantes de ingeniería ha tenido diversas orientaciones. Al ser conscientes del uso privilegiado de los métodos algebraicos para resolver las ED se ha implementado la enseñanza de otros métodos como el gráfico y el numérico, en algunas ocasiones, con la utilización de la tecnología. En estos acercamientos, el centro de atención es el objeto matemático, y se ha desconocido, por un lado, que ED como las lineales con coeficientes constantes modelan fenómenos de estabilidad, que pueden ser estudiados a través de la modelación y el uso de gráficas como argumentos, así como caracterizar las soluciones usando como argumento el comportamiento tendencial de las funciones, y por otro, que los ingenieros en formación son una comunidad que construye conocimiento y que hace uso de el mismo, que en sus prácticas suceden usos del conocimiento matemático, que expresan funcionamientos y formas específicas de éste (Cordero, 2008).

Uno de los trabajos relacionados con la enseñanza de las ecuaciones diferenciales es el planteado por Artigue (1992), quien busca determinar las ventajas y dificultades de los estudiantes al utilizar otro método de solución, como es el gráfico. En éste se presenta un análisis de las relaciones entre las dificultades cognitivas y didácticas para la enseñanza-aprendizaje de la noción de función. Para ello, Artigue utiliza los resultados de las investigaciones llevadas a cabo durante tres años en la enseñanza de las ED en el nivel universitario. En el último estudio, intentó encontrar un equilibrio para la enseñanza de las ED – entre el método algebraico y el gráfico – desde un punto de vista epistemológico, y también, dio a conocer a los estudiantes otra posibilidad para analizar las soluciones de ED, a partir del método gráfico, las llamadas soluciones cualitativas.

La autora afirma que la solución geométrica de las ED lleva inevitablemente a establecer relaciones entre el entorno algebraico y el gráfico. Teniendo en cuenta que una ED corresponde en el entorno gráfico a un campo tangente y a un conjunto de curvas solución, entonces la solución cualitativa consiste en un intercambio permanente entre la ecuación y el dibujo. Además, las competencias requeridas para asociar dibujos dados y las ecuaciones no son las mismas que para interpretar los dibujos, para predecir el mapa de fases de una ecuación o para justificar conjeturas.

Artigue (1992) también analiza las dificultades encontradas por medio de tres registros de interacción entre los marcos algebraico y gráfico, a saber: el registro de interpretación, el registro de predicción y el registro de justificación.

El anterior estudio da valiosos aportes. Analiza las dificultades de los estudiantes al enfrentarse a un nuevo método y las relaciones que se evidencian entre los dos métodos utilizados. Además, demuestra que un cambio de método para analizar las soluciones de las ED, no es suficiente para atacar la problemática de la enseñanza de las ED.

En los trabajos de Solís (2012, 2003) y Cordero y Solís (2001) se establece una relación simbiótica entre las nociones de predicción y simulación en el contexto de las ecuaciones diferenciales lineales de la forma $ay' + by = F(x)$ en un ambiente de modelación gráfica. Así mismo, en estos trabajos, se busca reconstruir significados de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes a través de situaciones de transformación. Dichas situaciones consisten en identificar patrones de comportamiento de la función F cuando se varían los coeficientes a y b de la ecuación y, además, interactuar con los contextos gráficos y algebraicos.

Una de las secuencias utilizadas es la siguiente Solís (2012, pp. 44)

> Secuencia de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden $y(x) + y'(x) = F(x)$ variando $F(x)$.
>
> Observaciones en la entrevista. Se deberá poner atención en las siguientes relaciones de identificación.
>
> O1. Identificación de relaciones entre la solución de la ecuación y el comportamiento de $F(x)$.
>
> Pregunta 1.

1.1. Explore situaciones gráficas de la solución de la ecuación diferencial $y'(x) + y(x) = F(x)$, considerando la siguiente secuencia para $F(x)$:

$$F(x) = x, x^2, x^3, \dots, x^n$$

1.2. Considere la siguiente secuencia de ecuaciones diferenciales con sus respectivas soluciones:

$$\begin{array}{ll} y' + y = 0, & y(x) = 0 + Be^{-x} \\ y' + y = k, & y(x) = k + Be^{-x} \\ y' + y = x, & y(x) = x - 1 + Be^{-x} \\ y' + y = x^2 & y(x) = x^2 - 2x + 2 + Be^{-x} \end{array}$$

1.2.a. Identifique un patrón algebraico en las soluciones $y(x)$. (Sugerencia: observe la forma algebraica del polinomio que aparece en cada $y(x)$).

1.2.b. De acuerdo al patrón identificado, halle la solución $y(x)$ para la ecuación diferencial

$$y'(x) + y(x) = x^3$$

A partir de secuencias, como la mencionada, los estudiantes construyen argumentos de comportamientos gráficos y algebraicos. Algo que merece resaltarse, es el haber identificado que la solución $y(x)$ tiene un comportamiento tendencial hacia la función $F(x)$. Esto permite caracterizar la solución de la ecuación diferencial sin necesidad de resolverla.

Este estudio socioepistemológico de las ecuaciones diferenciales lineales, del tipo mostrado, establece un método del diseño de situación que llevado al sistema educativo permite rediseñar las situaciones de aprendizaje relacionadas con este conocimiento matemático.

Otro trabajo relacionado con la problemática presentada es el de Zaldívar (2009). En esta investigación se propone un diseño de situación que resignifique la estabilidad de una ecuación diferencial, por medio del desarrollo de usos de gráficas que ocurren en la modelación. En el diseño de situación propuesto se modela un fenómeno físico, el movimiento oscilatorio de un sistema masa resorte, que se representa matemáticamente por una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes. Esto lo aborda el autor en un ambiente de difusión del conocimiento científico, donde el conocimiento de los participantes emerge desde su cotidiano.

En este estudio se aclara que no hay interés en desarrollar el concepto de estabilidad en los participantes, sino en estudiarla desde la construcción del humano y encontrar aquello que los relaciona, y a lo que el investigador llama lo estable.

Entre otros aspectos, se concluye que a lo largo de la aplicación del diseño de situación propuesto los participantes manifestaron un uso *sui géneris* de las trayectorias para explicar lo estable del fenómeno desde su cotidiano. Las argumentaciones que se alcanzaron en la actividad fueron: lo estable está en la dirección que las trayectorias mostraban, lo estable está en lo periódico de la curva, en los aspectos regulares; lo estable se encuentra en la parte final de la curva que modela el comportamiento del resorte; lo estable se encuentra en la amplitud de las ondas de la curva y en los picos.

La anterior investigación, da cuenta de los argumentos dados por ciudadanos ante una situación de estabilidad desde su cotidiano. Estos argumentos posiblemente se evidencien o no en un ambiente escolar, aún así, se pueden tener en cuenta para diseñar propuestas de intervención en el aula donde se de prioridad a las formas en que el ciudadano resignifica este conocimiento. Dichas propuestas permitiran un acercamiento funcional de la matemática, en cuanto se centran en el uso del conocimiento matemático y en el lenguaje de herramientas y no en sí en el objeto matemático.

Por otro lado, en Cordero y Reyes (2003) se presenta un análisis de la reconstrucción de significados de la ecuación diferencial $y''+by'+cy=f$ a través de identificar patrones de comportamiento de la solución $y(x)$ en relación con $f(x)$, cuando se varían los coeficientes b y c (situación de transformación).

En este análisis, parten del hecho de que los estudiantes construirán el argumento comportamiento tendencial de las funciones (CTF), el cual les posibilitará la reconstrucción de significados de la ecuación diferencial y de la propiedad de la estabilidad. Según los autores, dicha propiedad pudiera ser reorganizada a través de la situación de transformación donde el CTF es el argumento que permite la reconstrucción de significados, es decir considerar nociones de comportamiento de las funciones con cierta tendencia (estabilidad de las ED).

En la anterior investigación, los estudiantes construyen nuevos significados de un tipo de ecuación diferencial y de la estabilidad partiendo del CTF como argumento.

Estos resultados, me permiten pensar, que se puede caracterizar la solución de una ecuación diferencial desde la búsqueda de patrones de comportamiento gráfico y analítico, sin encontrar en si la solución, pero que permiten anticipar la forma de ésta.

I.2 La investigación

I.2.1 La problemática

La Matemática Educativa, como disciplina, reconoce una confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar, la cual asume como la problemática fundamental de la enseñanza de la matemática. Según Cordero (2001) la segunda debe reorganizar e interpretar a la primera para luego ser llevada al sistema escolar. Tradicionalmente se ha pensado que en el aula se enseña la obra matemática y en ese sentido gran parte del problema se ha reducido a secuenciar y temporalizar los contenidos del currículo. En la matemática escolar no se toman en cuenta factores que, en conjunto, son los que posibilitan la creación de significados matemáticos: la forma como este conocimiento se ha constituido en saber, la existencia de un grupo humano que se organiza y que origina dicho conocimiento.

Dicha confrontación genera fenómenos educativos como el discurso Matemático Escolar, el cual, según Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez (2006) no se reduce a la organización o secuenciación de los conceptos matemáticos, sino que va más allá, al llegar al establecimiento de bases de comunicación para la formación de consensos y la construcción de significados. Entonces el discurso matemático escolar afecta a todos los niveles del sistema educativo, es decir, al nivel básico, medio y superior. Consecuencia de ello, este discurso, también se encuentra presente en la formación de ingenieros. Se evidencia en el carácter utilitario y no funcional con el que las escuelas de formación de ingenieros presentan a la matemática, donde soslayan el hecho de que la Matemática responde a otras disciplinas, como la ingeniería, donde encuentra la posibilidad de resignificarse (Figura 1).

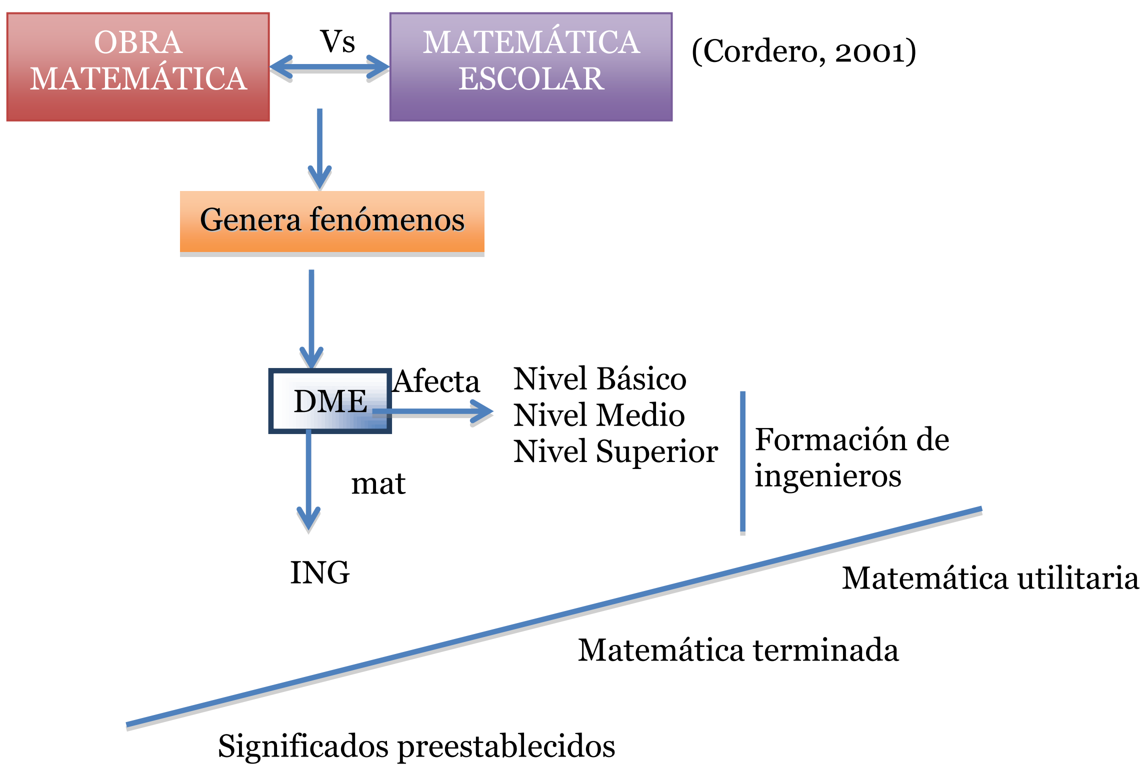


Figura 1. La confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar

Por otro lado, el hecho de que la ingeniería sea vista como una ciencia aplicada, según Cajas (2007), provoca que en la formación de ingenieros se ofrezcan programas lineales que inician con Ciencias Básicas, particularmente Física y Matemática, seguidos luego de Ciencias de las ingenierías para concluir con Materias Profesionales. Este tipo de programas, es llevado a cabo, en sus primeros años, por matemáticos o profesores ingenieros que no han tenido experiencia con no han tenido experiencia con la práctica de la ingeniería y que abordan las temáticas desde el mismo campo de conocimiento es decir, desde la matemática y no desde la ingeniería. Lo anterior, genera un discurso matemático escolar desde la dimensión matemática *para* el ingeniero en formación.

Por ello, la matemática presentada al ingeniero en formación es acabada. Las ecuaciones que modelan los fenómenos que estudia la ingeniería ya están institucionalizados y difícilmente se pueden modificar para provocar otras variantes en los fenómenos. Es así, como el discurso matemático escolar no provee a los estudiantes de ingeniería de una matemática funcional que se resignifica desde la ingeniería.

Conviene tener en cuenta que la Matemática y la Ingeniería como campos de conocimiento, que se encuentran involucrados en esta problemática, tienen objetos de estudio diferentes. La Matemática estudia los números, la estructura, el espacio, el cambio, objetos que no son propios de la Ingeniería. Además, se considera a la Ingeniería como una disciplina con conocimiento propio que usa la matemática, y no como una ciencia aplicada (Figura 2).

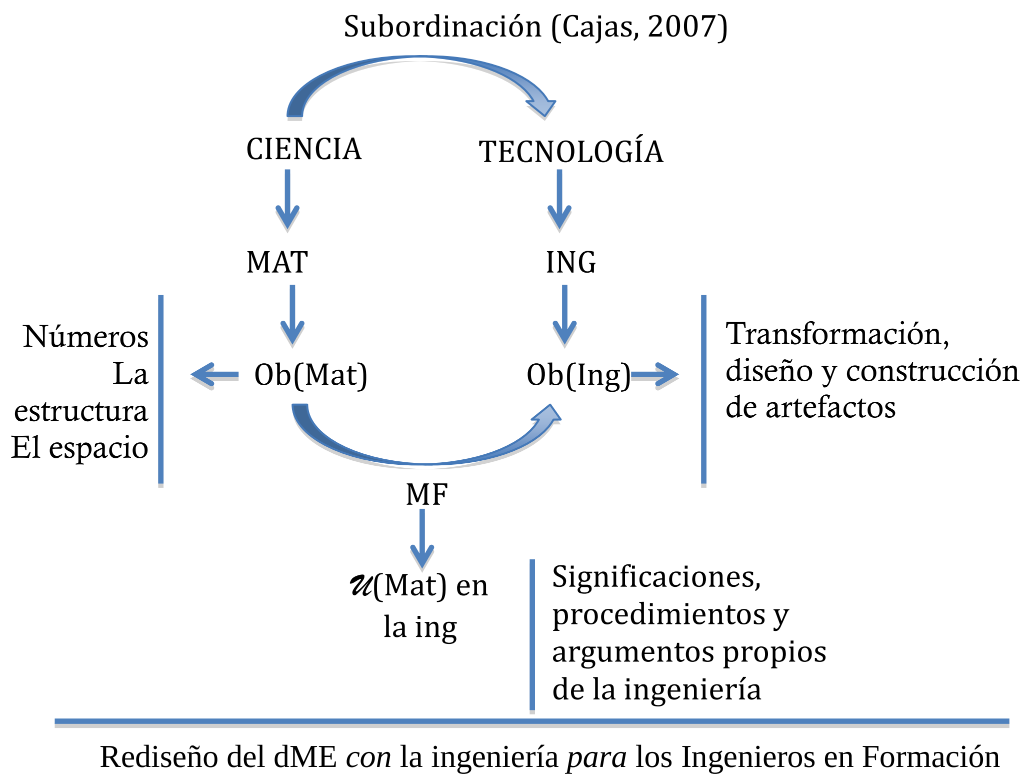


Figura 2. La ingeniería como una disciplina con conocimiento propio

Desde nuestra perspectiva, los usos dados por la ingeniería, al conocimiento matemático, dan cuenta de la existencia de prácticas de referencia que expresan una funcionalidad de la matemática. Es clave hacer notar, que la matemática es usada desde la ingeniería, para resolver problemas propios de su campo y en sus términos. Es decir, en sus prácticas suceden usos del conocimiento matemático, que expresan funcionamientos y formas específicas de éste (Cordero, 2008). Entonces, el discurso matemático escolar que permea la formación de ingenieros deberá rediseñarse con base en los usos que da la ingeniería a la matemática, al igual, que los usos del conocimiento matemático del que dan cuenta los ingenieros en formación.

El asumir a la ingeniería como una ciencia aplicada ha llevado a profesores, estudiantes y programas de formación a afirmar que la ingeniería se fundamenta básicamente en la aplicación de la matemática y de otras ciencias. Por ello, la mayoría de escuelas de ingeniería forman a sus estudiantes con un programa lineal, donde primero se estudian conceptos de las ciencias básicas para después ser aplicados en las ciencias de la ingeniería. Entonces, esta visión ha provocado que ciertos usos continuos en las prácticas de la ingeniería, como la modelación, sean entendidas como una aplicación del conocimiento matemático. Así, las ecuaciones diferenciales son enseñadas para después ser aplicadas en la solución de problemas físicos, químicos, de crecimiento de población, etc.

El marco anterior conlleva enfocar la atención a las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes (EDL), en la problemática. Su enseñanza en las facultades de ingeniería ha estado privilegiada por los métodos analíticos-algebraicos. Se ha enfatizado en mostrar trucos para buscar una función o un conjunto de funciones que satisfagan una ecuación diferencial, y finalmente aplicar estos métodos a las EDL que resuelvan problemas matemáticos escolares típicos en contextos de la Física, la Química, la Economía, entre otras. Al ser conscientes del uso privilegiado de los métodos analíticos-algebraicos para resolver las EDL se ha buscado implementar otros métodos como el gráfico y el numérico, en algunas ocasiones, con la utilización de la tecnología. Estos acercamientos, han logrado dar otra mirada a su enseñanza, sin embargo, lo que se ha logrado en algunos casos es que el docente presente situaciones problema con base en un contexto específico, intentando traer la realidad al aula, pero desconociendo el uso de ese conocimiento matemático en ese realidad, incluso el uso de ese conocimiento matemático en asignaturas posteriores.

De igual forma, el centro de atención sigue siendo el objeto matemático, se enseñan los métodos de solución de las EDL desconociendo su naturaleza y su construcción social en dominios como la ingeniería. En este caso, se considera que no se aprecian las EDL como modelos de fenómenos de estabilidad, que pueden ser estudiados a través de la modelación y el uso de gráficas como argumentos, así como caracterizar las soluciones usando como argumento el comportamiento tendencial de las funciones (Cordero, 2001).

En este sentido, las ecuaciones diferenciales lineales de primero y segundo orden no son resignificadas, por los estudiantes, como modelos de fenómenos estables. Difícilmente relacionan la ecuación que modela cierto fenómeno y la forma de solucionarla.

En lo planteado anteriormente, no se vislumbran marcos de referencia que articulen los usos del conocimiento matemático, la matemática funcional y la comunidad de conocimiento, es decir, un marco de referencia que de cuenta de la construcción del conocimiento (Modelación, ED lineales y estabilidad), a través de su uso, en la organización de un grupo humano (ingenieros en formación) normado por aspectos de carácter institucional y cultural.

Así, esta investigación se planteó determinar un marco de referencia para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes al identificar los usos de este conocimiento en una comunidad de ingenieros civiles en formación frente a una situación específica donde se enfrentan a un fenómeno conocido.

Además, este marco de referencia consideramos que debe aportar una matemática escolar desde el ingeniero civil en formación, por ello conviene considerar la formulación de un modelo que ayude a analizar los usos del conocimiento matemático desde la comunidad de ingenieros en formación.

I.2.2 Preguntas de investigación

Las preguntas que orientan la investigación son:

- ¿Cómo los ingenieros en formación usan el conocimiento matemático en la resignificaión de las ecuaciones diferenciales como modelos de estabilidad?

- ¿Qué argumentos emergen cuando los ingenieros en formación se enfrentan a una situación específica?

- ¿Cuáles son las características de la matemática funcional del estudiantes de ingeniería civil cuando la pone en uso en su escenario, en una situación específica?

I.2.3 Objetivos

Identificar o construir marcos de referencia que manifiesten el desarrollo del uso de la ecuaciones diferenciales lineales y el uso de modelos matemáticos, su funcionamiento y su forma orgánica en situaciones específicas de la Ingeniería Civil con ingenieros en formación.

Proponer un modelo que ayude a analizar los usos del conocimiento matemático desde la comunidad de ingenieros en formación.

Capítulo II
Marco Teórico

En esencia esta investigación problematiza dos aspectos centrales:

a. Cuando se aborda la problemática de la enseñanza de la matemática para la ingeniería, en general, prevalece el dominio matemático por encima del conocimiento de la ingeniería. Esto conlleva formular enseñanzas de la matemática ignorando los *usos del conocimiento matemático* en la propia ingeniería.

b. El dME no tiene un marco de referencia que ayude a resignificar el conocimiento matemático para transitar en otros dominios de conocimiento, como la ingeniería. Esto conlleva construirlo, tomando como base una epistemología de la matemática *desde el ámbito de la ingeniería*, donde el objeto de estudio no es en sí la matemática, sino por el contrario es un conocimiento funcional y situacional.

II.1. La Teoría Socioepistemológica.

La Teoría Socioepistemológica (TSE) ha planteado desde sus inicios que la matemática escolar es de naturaleza dual. Este hecho amplió la problemática al incorporar la *justificación funcional* a los cuestionamientos del quehacer disciplinar de la Matemática Educativa. En términos genéricos, podríamos decir que se ancló, hasta hace algunos años, la discusión y se enfocó la problemática sólo en el domino matemático. Es decir, los cuestionamientos del aprendizaje y de la enseñanza, así como de la construcción del conocimiento sólo tenía sentido entenderlos dentro del dominio matemático. Sin embargo, ha sido muy importante ampliar esta problemática hacia otros dominios o prácticas de referencia donde la matemática adquiere sentido y significación (Cantoral y Farfán, 2003). Se ha ampliado la visión para entender la construcción del conocimiento matemático y el discurso matemático escolar con relación en otros dominios. Habrá entonces que enfatizar, en la reorganización de la obra matemática, una visión donde se permita resignificar los conocimientos matemáticos, que favorezca el uso de la matemática, que propicie el estudio no en sí del conocimiento sino de su función, como ya lo mencionamos anteriormente.

La naturaleza dual de la matemática escolar consiste en entender que en algún momento la matemática es el objeto de estudio y en otro momento no lo es. Por ejemplo, la matemática en el nivel universitario, por un lado es un objeto de estudio, porque efectivamente hay especialistas en formación, es decir, hay individuos que estudian matemáticas para ser matemáticos. Si bien no todas las universidades tienen carreras de matemáticas, otras sí: existen programas de maestrías y doctorados en matemáticas. En ese sentido la matemática escolar trata a la matemática como un objeto de estudio. Pero también tenemos que entender que la matemática es un instrumento para otros dominios (Cordero, 2008; Lara y Cordero, 2007; Parra y Cordero, 2007).

Existe el profesional usuario del conocimiento matemático, no es matemático y usa la matemática, pero no como objeto de estudio. En este escenario impera la justificación funcional (Cordero, 2011; Cordero, Mena & Montalto, 2010). Es decir, el uso del conocimiento matemático está normado por las prácticas del trabajo de un profesional no matemático (Buendía, 2011; Vázquez, 2011; Tuyub, Cordero y Cantoral, 2009). Otros trabajos se preocupan por la transposición didáctica de las ciencias. Por ejemplo, Cajas (2009) distingue a la ciencia y a la ingeniería como dos dominios con naturalezas de prácticas propias y no como se piensa comúnmente: la ingeniería como ciencia aplicada. En este sentido, estudia las prácticas sociales de ingeniería y cómo se trasladan a los sistemas escolares de su enseñanza. Propone una nueva epistemología de la ingeniería que no se centre en la ciencia sino en las prácticas.

Así, la disciplina de la Matemática Educativa ha avanzado conformando marcos teóricos que dan respuesta, no sólo a cómo se trabaja la matemática en una actividad matemática, sino también en una actividad de trabajo no matemático, sin soslayar la justificación funcional (ver figura 3).

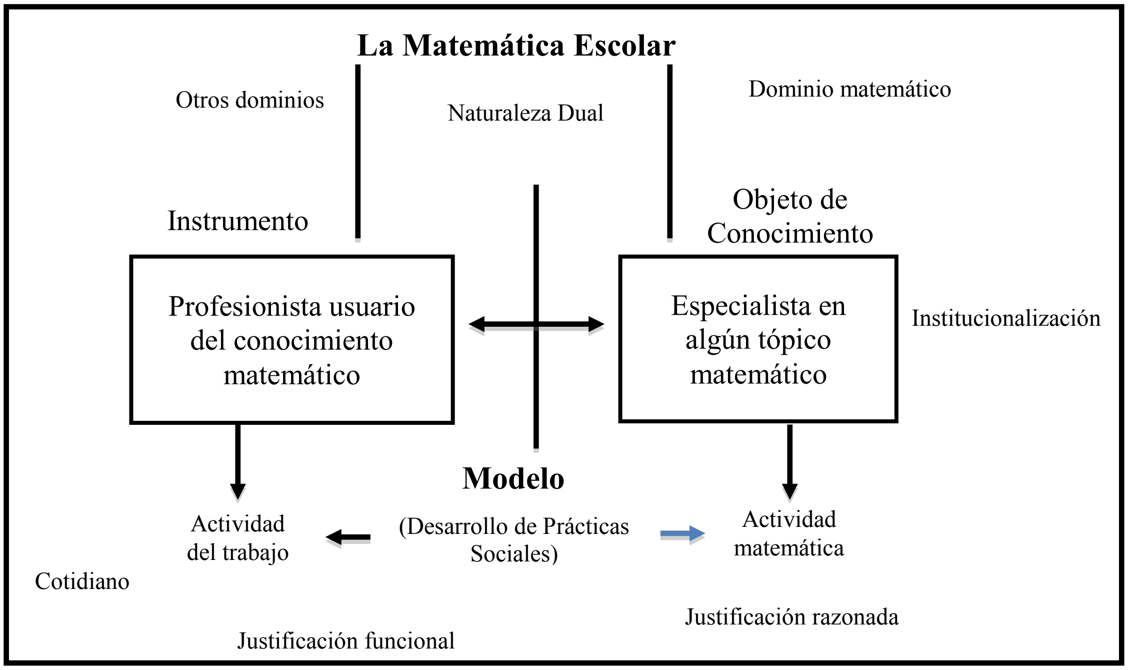


Figura 3. La dualidad de la Matemática Escolar

Se puede decir que la TSE es un modelo teórico que articula ambos aspectos, formula epistemologías de la construcción de conocimiento matemático a través de una justificación razonada y de una justificación funcional, donde la noción de práctica social esclarece esa dualidad y en consecuencia amplía considerablemente la problemática que conlleva la matemática escolar (Cordero & Flores, 2007; Cordero, Mena & Montalto, 2010).

Esta visión pone en el escenario de la Matemática Educativa el rol de la justificación funcional, la cual presume de interactuar, de manera natural, con las realidades que construye el ciudadano.

Efectivamente nos interesa entender cómo un sujeto construye conocimiento, pero en su condición de un sujeto situado, un sujeto que pertenece a una cultura, a una comunidad. En síntesis, nos referimos a un sujeto social cuyas vivencias le han proporcionado conocimiento. A este sujeto lo reconceptualizamos como ciudadano: va a la escuela (o fue), trabaja y vive en una ciudad.

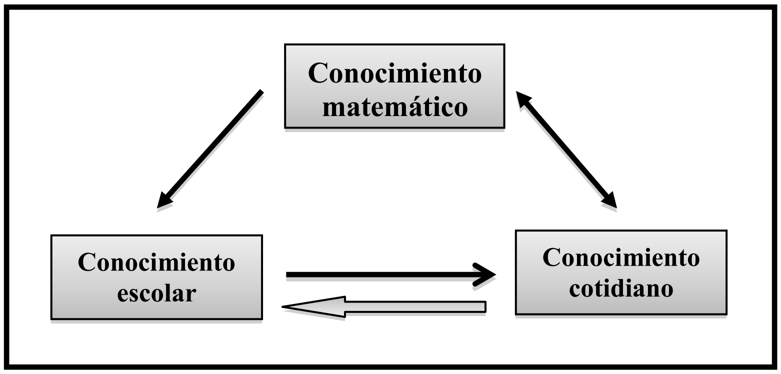


Figura 4. Relación entre los tres escenarios de la matemática

El énfasis se encuentra en identificar la matemática funcional que tiene presencia durante el actuar del ciudadano, y así obtener una caracterización de la misma.

Cabe señalar que muchos estudios, con la TSE, han sido enfocados a la matemática escolar. En nuestro caso, es importante señalar que tratamos con tres escenarios diferentes de la matemática: el conocimiento matemático, el conocimiento escolar y el conocimiento cotidiano (Figura 4). Cada uno de estos se encuentran interrelacionados, pues de alguna manera, las condiciones del conocimiento cotidiano, algunas veces, han dado pie al surgimiento de los conocimientos disciplinares, y entre ellos la matemática misma. Por otra parte, la matemática escolar ha sido producto de una reorganización del saber matemático, con el interés, de formar ciudadanos con los conocimientos útiles que le permitan llevar a cabo sus actividades personales y sociales.

Cada una de éstas matemáticas se desarrolla con intereses y funciones diferentes, y por tanto, difieren en características. En la figura 5 e presenta de manera resumida algunos aspectos que corresponden a cada uno de los escenarios de la matemática (López, 2012)

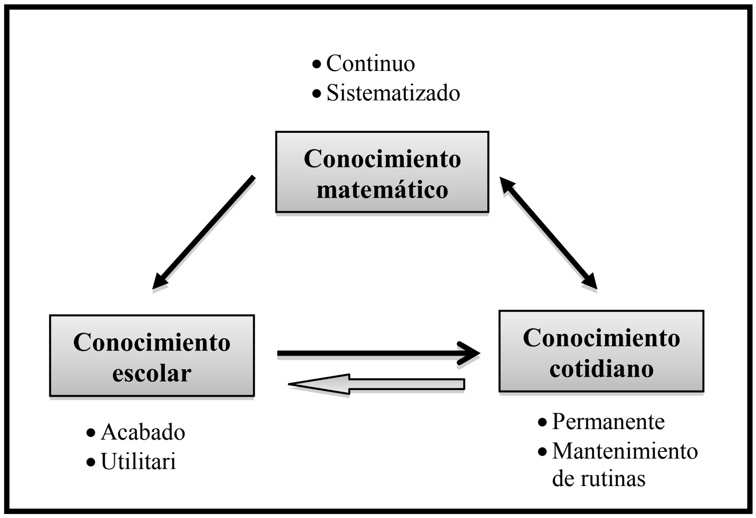


Figura 5.

Características de la matemática en sus diferentes escenarios

Las relaciones entre los escenarios descritos en la figura 5 conllevan cuestionar varias trayectorias que atañen a la problemática. En primer lugar conviene recordar que la TSE tiene como tarea definitiva rediseñar el discurso matemático escolar (dME). Por ello, se han realizado estudios de la matemática escolar, de la obra matemática, de los profesores, y de los estudiantes. Sin embargo, pareciera que no es claro el marco de referencia para trastocar el dME. Tenemos, por un lado, que el sistema educativo formula en su programa que la matemática escolar debe afectar al cotidiano del ciudadano. Tal vez por ello, se dibuja implícitamente una trayectoria de la problemática: el conocimiento escolar *para* el conocimiento del ciudadano. Pero ¿qué se sabe del ciudadano? ¿Cómo conoce y usa el conocimiento desde su condición de ciudadano? Es decir, ¿Cómo es el uso del conocimiento matemático *desde* el ciudadano?

En nuestro caso el ciudadano es el ingeniero, de ahí nos hemos preguntado el uso del conocimiento matemático *desde* la ingeniería.

Precisamente este último cuestionamiento podría ser el marco de referencia para el rediseño del dME. Esto es, por el planteamiento de estas preguntas surge la necesidad de realizar estudios que den cuenta de la función y forma del conocimiento matemático desde la condición del ciudadano. Los cuáles serán el marco de referencia para el rediseño del dME, el cual expresará el uso del conocimiento matemático *desde* y *con* el ciudadano.

Siguiendo el tono de nuestra investigación, buscamos el marco de referencia para el rediseño del dME de la ingeniería que exprese el uso del conocimiento matemático *desde* y *con* el ingeniero.

Con las consideraciones anteriores nos damos a la tarea de contribuir para tal fin. En ese sentido debe ser reconceptualizado el ciudadano y no solo dejarlo a la definición constitucional de los países. ¿Cuál es la condición del ciudadano en la TSE? Un primer aspecto a tomar en cuenta es que en la premisa que hace alusión a que las prácticas sociales generan conocimiento matemático, subyace la consideración del *ser con otro*. Todo ello emana elementos como organización de grupos o función de las sociedades. En ese sentido el constructo que se formule de ciudadano debe estar cercano a comunidad con relación al conocimiento. Es decir, si hay conocimiento existe una comunidad que lo construye.

Nos vamos a referir a la idea anterior como “comunidad de conocimiento (CC)”.

El ejercicio es caracterizar lo propio de lo que es comunidad, es decir su naturaleza. No cualquier conjunto de personas juntas componen una comunidad. Se debe distinguir a la comunidad de conocimiento de la individualidad, de lo público y de la universalidad o de lo cosmopolita. En ese sentido reconocemos tres elementos:

- Reciprocidad. El conocimiento se genera por la existencia de un compromiso mutuo.
- Intimidad. Es el uso de conocimiento propio y privado que no es público.
- Localidad. El conocimiento es local, se da cuando existe una coincidencia en ideas, una jerga disciplinar, trabajo u oficio, intereses, la región, entre otros.

Estos tres elementos nos permiten separar lo individual, lo público y lo cosmopolita e identificar lo propio de comunidad.

De ahí la importancia de formular el constructo comunidad de conocimiento como una triada *C* C (reciprocidad, intimidad, localidad).

Otro aspecto más, consiste en el uso del conocimiento matemático. Para apreciar el uso se requiere de un referente que señale su tradición, su cultura y su historia, al seno de su comunidad. Por ello, importa la continuidad del conocimiento, es decir, **la institucionalización** como un eje transversal.

Pero una comunidad con adjetivo las distingue de otras, entonces se requiere de momentos de **identidad:** legitimidad, resistencia y proyecto**.** Así la identidad, con sus momentos, será otro eje transversal.

Poniendo estos elementos en conjunto se trata de formular un modelo que ayude a analizar los usos del conocimiento matemático propios de una comunidad de conocimiento (ver figura 6).

Con el modelo sometemos al ciudadano, es decir estudiamos la comunidad de conocimiento del ciudadano, en una situación específica. Por eso no debemos soslayar la institucionalización del conocimiento y que esta triada se desarrolla gracias a la existencia de una identidad (Silva, 2010 y Cordero & Silva-Crocci, 2012).

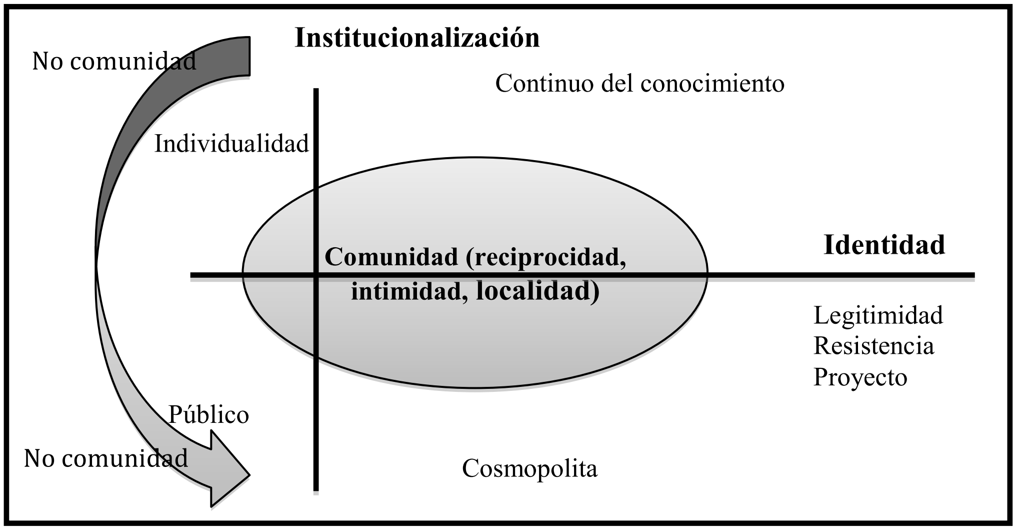


Figura 6 . Comunidad de Conocimiento como un constructo en la TSE (Cordero, 2011)

II.2. El cotidiano del ciudadano

El cotidiano está compuesto por una interacción de comunidades de conocimiento, donde se desarrollan mantenimientos de rutinas para que permanezcan, esto último es lo que hace el día a día (Zaldívar, 2011).

Todo ciudadano pertenece al menos a una comunidad de conocimiento, según sea su profesión u oficio, su ámbito laboral o institucional. Un ciudadano será considerado como aquel que dada sus actividades cotidianas, se encuentra en interacción con otras comunidades de conocimiento. De esta manera es que se encuentra presente en diversas situaciones, considerando a una situación como toda acción del ciudadano que forma parte de su vida diaria. Sin embargo no todas las situaciones nos van a interesar. La atención se centrará en aquellas en donde se hace un uso de conocimiento matemático.

La figura 7 representa el cotidiano del ciudadano cuando éste se desenvuelve en su vida diaria.

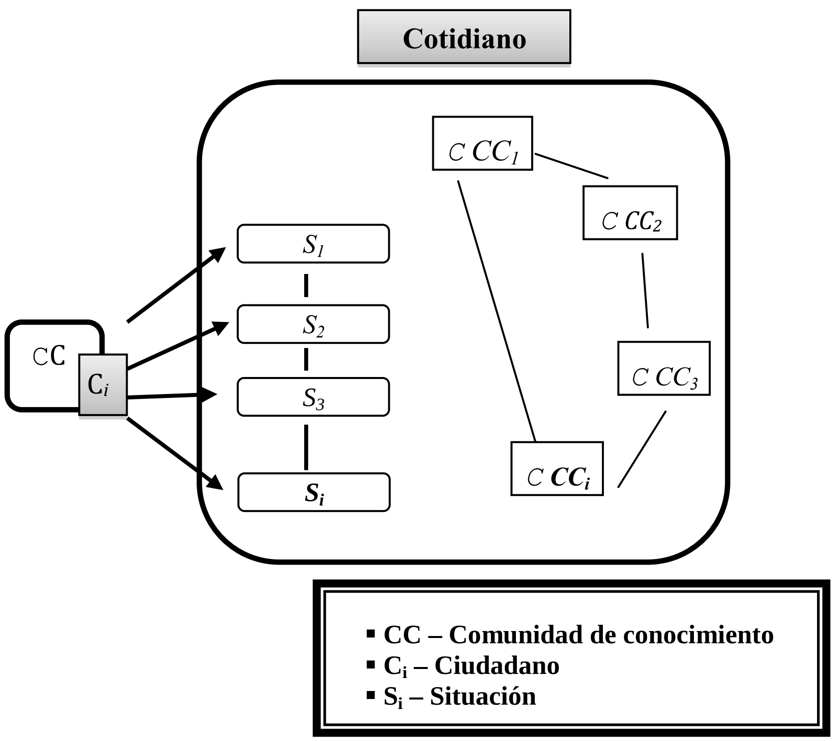


Figura 7. El cotidiano como una interacción de comunidades de conocimiento (López 2012)

Entonces, a partir de una situación (S_i), en el cotidiano, sucede una comunidad de conocimiento del ciudadano ($CC(C_i)$). Es en estas situaciones en donde interactúan las comunidades de conocimiento, ya que estamos mirando al ciudadano como miembro de una comunidad de conocimiento. Todo lo anterior en su conjunto conforma el cotidiano del ciudadano.

En nuestra problemática se tiene el propósito de considerar entre aquella matemática que se discute en las escuelas, y aquella que se discute en el cotidiano.

El dominio científico es aquel donde predomina la justificación razonada, lo estructural, la sistematicidad, es el dominio caracterizado por construir conocimiento, mientras que el cotidiano expresa como vive dicho conocimiento desde su funcionalidad, lo que se realiza es porque funciona de esa manera y no de otra, se vale de justificaciones funcionales, es un esfuerzo por acentuar el conocimiento que queda fuera del terreno disciplinar de la ciencia y que, sin embargo, es conocimiento del humano (Cordero, Cen & Suárez, 2010).

Para caracterizar al cotidiano, fue importante, en primer lugar, distinguir tres elementos fundamentales que según Arendt (2005) condicionan la vida humana : el Trabajo, la Labor y la Acción. En segundo lugar, cada condición se expresa socialmente en tres procesos respectivos: el Proceso Institucional, el Proceso Funcional y el Proceso Historial. Esta relación es lo que nos permite tener mayor entendimiento del cotidiano y la manera en que el humano se condiciona a realizar ciertas acciones que norman el por qué de lo que hacen. Tal vez el primero nos señala la condición del humano y la segunda la función del humano (Gómez y Cordero, 2009).

II.3 El uso del conocimiento matemático desde el ámbito de la ingeniería y la situación específica

Con el marco anterior formulamos una recorte epistemológico que nos permita objetivar la investigación.

Seleccionamos una situación específica, la cual le hemos llamado: acumulación de un fluido. Esta presume estar en el ámbito de la ingeniería: por un lado, aparece en la ingeniería en formación y, por el otro lado, aparece en la jerga disciplinar de la ingeniería (Cordero, 2003; Solís, 2012 y Mendoza & Cordero,2011).

La situación específica genera una argumentación de estabilidad, en la cual la graficación es el modelo de las resignificaciones de comportamientos tendenciales, con procedimientos de variar parámetros e instrucciones que organizan comportamientos. Los usos de las gráficas son las modelaciones que se resignifican confrontando sus funcionamientos y formas a través de múltiples realizaciones, realizaciones de ajustes, construcción de patrones y desarrollo del razonamiento. Figura 8

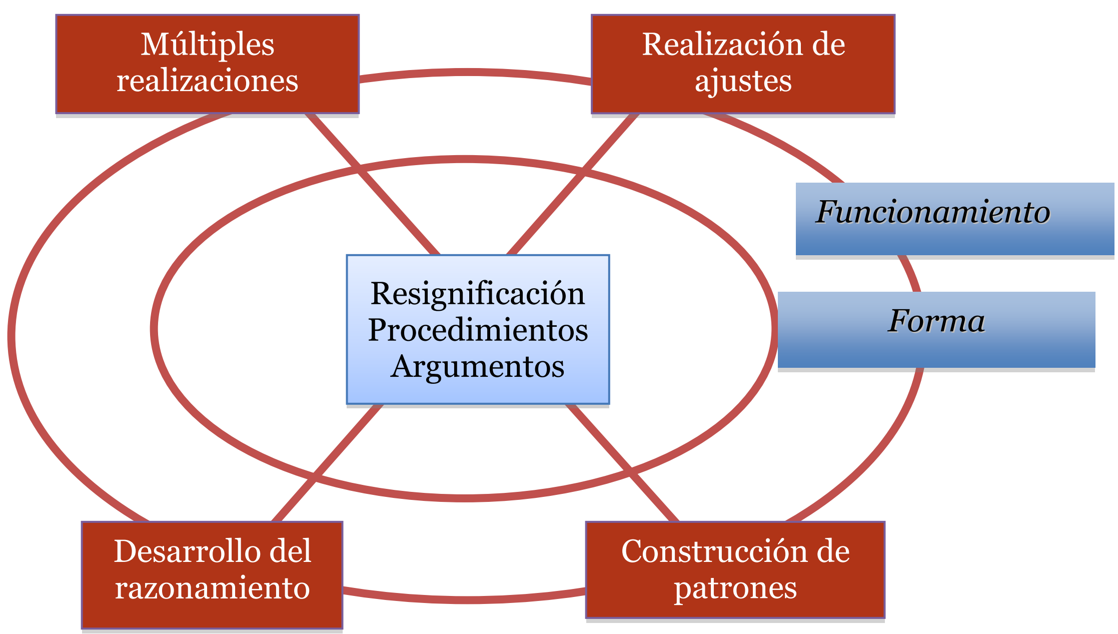


Figura 8. Elemento nuclear para la Modelación – Graficación. (Suárez, 2008)

El que interviene en la situación específica es la comunidad de conocimiento matemático del ingeniero CC(Ing). La triada (reciprocidad, intimidad, localidad) expresará lo propio de esos ingenieros que intervinieron en la situación. La especialidad, ingeniería civil, de alguna manera estará reflejada en los ejes: institucional e identidad. Así la permanencia de los usos de las gráficas dependerá del proyecto de la comunidad.

II.3.1 La acumulación de un fluido en el ámbito de la ingeniería civil

Dentro del ámbito de la ingeniería civil, surgen diversas situaciones específicas, que son atendidas por especialistas dentro de la misma ingeniería. Por ejemplo, una de estas situaciones es el funcionamiento hidráulico de una presa de almacenamiento, donde se acumulan los volúmenes recibidos por un cauce y que se controlan por una cortina según la capacidad deseada, si el volumen acumulado sobrepasa el nivel máximo, estos serán desalojados por otra estructura diseñada para tal fin.

Otro ejemplo, de estas situaciones es almacenamiento de agua para el abastecimiento de ésa a poblaciones, regadío de sembrados, distribución a a través de canales, en general.

En las anteriores situaciones, prevalece la constante de mantener un nivel de volumen acumulado, así, los niveles pueden aumentar o disminuir, pero se requiere que sean estables en ciertos momentos, para que garanticen el abastecimiento.

Así mismo, en la formación de ingenieros civiles, aplicaciones como éstas son abordadas en asignaturas como mecánica de fluidos, hidráulica básica, diseño de estructuras, entre otras.

La situación específica seleccionada en esta investigación, la hemos denominado acumulación de fluidos, y básicamente hace referencia a la necesidad de mantener el nivel de un líquido acumulado en un tanque cilíndrico al que le entra un líquido con un gasto constante y sale de él a través de una válvula con un gasto variable.

II.3.2 El uso de las gráficas en la resignificación de las ecuaciones diferenciales

La situación específica genera una argumentación de la estabilidad, en tanto que el Comportamiento Tendencial de las Funciones (CTF) es considerado como el eje epistemológico. Por medio de esta categoría, el uso de las gráficas, se resignifica debatiendo entre sus funcionamientos y formas, así mismo en la alternancia de dominios entre lo analítico y lo gráfico.

La grafica de los comportamientos de las variables con tendencia significados desde el mismo dominio de la ingeniería, conlleva a procedimientos analíticos y de graficación; dentro de los primeros, emergen restas y desigualdades y de los segundos, surgen procedimientos como variar parámetros, realizar ajustes, múltiples realizaciones, construir patrones, éstos apoyadas, en alguna medida, por el uso de la tecnología.

A continuación se presenta un cuadro donde resumimos cada uno de los aspectos que son necesarios a considerar en la situación específica. Éste nos permite apreciar los significados, procedimientos y argumentaciones, elementos claves en la construcción de conocimiento desde las prácticas (Cuadro 1).

	Transformación	Acumulación de un fluido
Significaciones	- Tendencia y comportamiento	- Acumulación - Nivel del líquido - Gasto de salida y entrada - Equilibrio
Procedimientos	- Comparar las variables - Buscar patrones de comportamiento - Buscar la tendencia de las variables cuando t crece - Graficar y realizar ajustes para encontrar un patrón deseado - Variar parámetros de los coeficientes	- Restar: lo que entra menos lo que sale - Comparar el comportamiento del gasto de entrada y el de salida. - Buscar la tendencia en el comportamiento cuando t crece
Funcionalidad (Lo que es de utilidad al humano)	- Modelo de un comportamiento con tendencia	
Argumentación	Estabilidad	

Cuadro 1. Epistemología de uso de gráficas en una situación de acumulación de fluidos

Capítulo III
LA SITUACIÓN. ASPECTOS METODOLÓGICOS

Se ha presentado una epistemología del uso de las gráficas, que por medio de sus funcionamientos y formas y de la alternancia de dominios entre lo analítico y lo gráfico, se resignifican en modelos de estabilidad. Los elementos de esta epistemología han sido tomados en la actividad que se diseñó y en la cual se involucran los ingenieros civiles en formación y los significados y procedimientos de los que se valen. La epistemología es la base de la actividad que se presenta en este capítulo, donde sus componentes están en relación con la situación de acumulación de un fluido y los argumentos tendenciales que emergen de procedimientos como la variación de parámetros, las múltiples realizaciones y la búsqueda de patrones.

El objetivo de la actividad es someter a los ingenieros en formación a una situación donde la formulación de conjeturas y la toma de decisiones, a la vez que interactúan con sus pares, nos den evidencias del uso del conocimiento matemático aquí abordado en la comunidad de conocimiento que ahí se conforma.

A continuación, se hace un análisis sobre la acumulación de un fluido y la actividad diseñada, con base en la situación específica, que se ha puesto en escena, así como con una descripción de la metodología utilizada, la concepción de ciudadano y el escenario en el que se toman los datos.

III.1. La acumulación de un fluido

En esta sección se hará una análisis del sistema dinámico que se utiliza como situación específica en la actividad diseñada para los ingenieros en formación.

La elección de esta situación, surgió por ser modelada por una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes y dado que en cursos de ecuaciones diferenciales y de mecánica de fluidos ha sido abordada con algunos matices.

La actividad que se diseñó, se basa en una situación donde se considera que el flujo del líquido es laminar, es decir, cuando el movimiento del fluido es suave y lineal, sin perturbaciones. Usualmente se hará referencia al agua como dicho fluido. Además, no se consideran variables como la viscosidad o densidad del fluido. Cada una de estas variables incorporarán al modelo nuevas condiciones, que no fueron abordadas.

La actividad consistió en plantear una situación tal que el recipiente donde se acumula el fluido es un tanque cilíndrico con un volumen inicial, donde A es la medida de la sección transversal del tanque, q_e es el gasto o caudal de entrada y q_s el gasto o caudal de salida, además, el gasto de entrada es constante y el de salida es variable. El fluido sale por una válvula ubicada en la parte inferior del tanque con un diámetro a (ver figura 9).

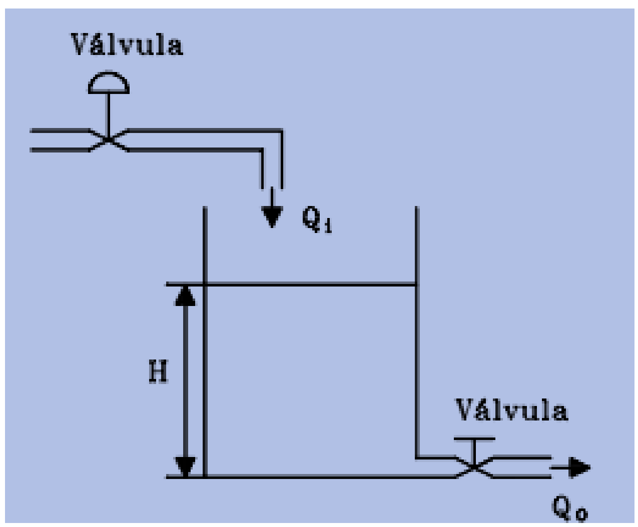


Figura 9. Sistema del nivel de líquidos

En la situación, se busca controlar el nivel del líquido o su acumulación de tal forma que el tanque contenga cierta cantidad de fluido en cualquier momento. Esta cantidad puede ser mínima o máxima y esto depende de la relación entre el q_e y el q_s.

El volumen del líquido acumulado, está relacionado con la diferencia de los gastos.

$$\frac{dV}{dt} = q_e - q_s \quad (1)$$

La anterior expresión, permite conocer la variación del volumen, *V*, del líquido acumulado, Pero ¿cómo se sabe si se está acumulando líquido o no?

a. Si $q_e = q_s$ entonces $q_e - q_s = 0$, al reemplazar en *(1)* se tiene que $\frac{dV}{dt} = 0$, es decir, la variación del volumen acumulado es nula y por tanto el *V* es constante, es decir, si hay un volumen inicial en el tanque éste se mantendrá constante.

b. Si $q_e < q_s$ entonces $q_e - q_s < 0$. Al relacionar lo anterior con la expresión *(1)* se tiene que $\frac{dV}{dt} < 0$, y si la variación es negativa *V* es decreciente, es decir, el volumen inicial del tanque empieza a disminuir.

c. Si $q_e > q_s$ entonces $q_e - q_s > 0$, así al relacionarlo con *(1)* se tiene que $\frac{dV}{dt} > 0$, y si la variación es positiva *V* es creciente, es decir, el volumen inicial del tanque empieza a aumentar.

La variación del volumen del líquido acumulado es una función su nivel *(h)* así

$$dV = Adh \quad (2)$$

De (1) y (2) se tiene que

$$Adh = (q_e - q_s)\,dt \quad (3)$$

Es necesario considerar la resistencia *R* para el flujo del líquido en el tubo de salida, la cual se define como al diferencia del nivel del líquido necesaria para producir un cambio en una unidad en la velocidad del flujo, es decir,

$$R = \frac{\text{cambio en la diferencia de nivel}}{\text{cambio en la velocidad del flujo}}$$

Así, para el flujo laminar, la resistencia *R* se obtiene como

$$R = \frac{dH}{dQ} = \frac{H}{Q}$$

dado que las variaciones en el nivel del líquido y en la velocidad del flujo son tan pequeñas que casi son constantes en el estado estable.

Para la situación que se plantea $q_s = \frac{h}{R}$. Remplazando en (3) se tiene que

$$Adh = \left(q_e - \frac{h}{R}\right)dt \quad (4)$$

Y realizando algunas operaciones se llega a la expresión

$$AR\frac{dh}{dt} + h = Rq_e$$

El anterior modelo, es una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes la cual modela una estabilidad del nivel del líquido y por tanto del volumen acumulado en el tanque. En la actividad se centra la importancia, en los comportamientos analíticos y gráficos de las variables en el estado estable, es decir cuando el tiempo tiende al infinito. El comportamiento de la curva solución es asintótico a la recta $t = Rq_e$

Del trabajo realizado por Solís (xxxx) es interesante hacer notar, en la expresión (4), que el valor que sea asignado a el área transversal, *A,* provocará que el tanque se llene con mayor o menor rapidez.

III.2. La Actividad

En la actividad que se diseñó, se establecen tres momentos que orientarán tanto su puesta en escena, como el análisis de los datos. Estos momentos son dibujados con base en la epistemología planeada en el capítulo II.

Estamos llamando "La Actividad" al planteamiento de una situación y una serie de preguntas diseñadas que orientan una entrevista grupal. Estas preguntas llevan a los ingenieros en formación a hacerse otros cuestionamientos y a plantear hipótesis que darán forma a la discusión que se espera se genere dentro del grupo.

La situación planteada en la actividad consiste en formular la modelación del comportamiento de la acumulación y así del nivel del líquido en un recipiente específico, considerando dos aspectos:

a) El funcionamiento y forma de lo gráfico; y
b) El funcionamiento y forma de lo analítico.

La actividad será susceptible a la búsqueda de comportamientos tendenciales en variables como el volumen acumulado del fluido, el nivel del líquido y el gasto de salida. El análisis de la variación de las variables será clave para observar los comportamientos tendenciales y propiciar el uso de gráficas. La fuerte influencia del discurso Matemático Escolar promueve el uso de las expresiones analíticas a las que está acostumbrados, las preguntas pretenden que emerja una alternancia entre lo analítico y lo gráfico.

La modelación de los comportamientos tendenciales, provoca que el ingeniero en formación identifique patrones, realice ajustes y múltiples realizaciones. Dentro de la actividad se promueve la variación de los parámetros de la ecuación diferencial para que el comportamiento tendencial del nivel del agua varíe más rápido a más lento. Aquí, la alternancia entre lo gráfico y lo algebraico y la búsqueda del comportamiento tendencial se podrán en juego.

Se espera encontrar argumentaciones relacionadas con el funcionamiento del uso de las gráficas en la modelación de la estabilidad, al igual que la aparición de justificaciones funcionales. Se espera que los estudiantes realicen una reorganización de sus conocimientos para establecer una nueva forma del uso de las gráficas y a su vez de las ecuaciones diferenciales.

Se busca que a partir del análisis de la problemática planteada y del comportamiento de las variables, el estudiante caracterice el modelo que se ajusta a lo observado, para luego, de ser necesario, rediseñarlo según las condiciones que varíen o las nuevas preguntas que se generen.

III.2.1 Momentos de la Actividad

MOMENTO 1

Significaciones de acumulación, nivel del líquido, fluido y equilibrio.

En el momento I, inicialmente se plantea la situación de acumulación de un fluido de manera general así:

1) *¿Cómo abordarían una situación donde se tiene un tanque o depósito cilíndrico que contiene cierto fluido, al cual entra, el mismo fluido, con un gasto de entrada constante y sale a través de una válvula ubicada en la parte inferior del tanque?*

El planteamiento de la situación pretende que los ingenieros en formación formulen algún propósito en la actividad, como: Dada esta situación, ¿cuánto fluido se acumula en un tiempo determinado? ¿cuánto tiempo se necesita para vaciar el tanque? O ¿cuánto tiempo se necesita para llenarlo? Entre otros cuestionamientos. De esta manera se espera identificar los significados que dan a las diferentes variables, qué dicen de éstas.

Con base en el principio de que si hay un fluido que fluye en un recipiente, éste se acumula o no al pasar el tiempo, se significará la acumulación. Ésta será modelada a través de una resta: *Lo que entra menos lo que sale*. (De hecho, este principio recibe el nombre de Principio de continuidad en la mecánica de fluidos) (Cordero, 2003).

El gasto de salida (q_s) es significado como la cantidad de fluido (volumen) que sale en un determinado tiempo y de éste dependerá que se acumule o no, aquí cobra relevancia el pensar en el vaciado o llenado del tanque.

Al pensar en lo que se acumula o no, dentro del tanque, se habla de el nivel del líquido o altura como algo que sube o baja. Esto hace referencia a la posición de la partículas y no en si al crecimiento o decrecimiento de la variable altura que está relacionada funcionalmente con el tiempo.

Se plantea nuevamente la situación estableciendo la necesidad de determinar la cantidad de líquido acumulado dentro del tanque.

2) *Se tiene un tanque o depósito cilíndrico con dimensiones conocidas que contiene cierto fluido. A éste entra, el mismo fluido, con un gasto de entrada constante y sale, con un gasto variable, a través de una válvula ubicada en la parte inferior del tanque con diámetro conocido. ¿Cómo se calcula lo que se acumula del fluido en cualquier tiempo t?*

Se tienen formuladas preguntas que puedan motivar a responder la planteada en la situación anterior.

- *¿De qué depende que halla acumulación?*
- *¿Qué pasa con el nivel líquido cuando hay o no acumulación?*
- *¿Cómo comporta el gasto de salida?*

El significado de acumulación, concede procedimientos como la resta entre lo que sale y lo entra, así como la comparación entre los gastos de salida y entrada para determinar si se acumula o no fluido. Surgirán entonces expresiones analíticas y caracterizaciones.

$$q_e - q_s = acumulación$$

En este momento, se realizan comparaciones entre los gastos

a) Si en algún momento $q_e = q_s$ a partir de ahí no hay acumulación, la cantidad de líquido permanece constante, es decir el volumen de líquido acumulado ya no aumenta ni disminuye. Aquí se presenta el primer acercamiento a la estabilidad, en tanto que si los gastos son iguales el volumen del líquido alcanza un estado estable.

b) Si $q_e < q_s$ el fluido existente en el tanque empezará a disminuir y el nivel del líquido bajará. Aquí surge la pregunta de si el tanque se vacía por completo o hay un valor mínimo.

c) Si $q_e > q_s$ el fluido existente en el tanque empezará a aumentar y el nivel del líquido empezará a subir. Surgirá el cuestionamiento de si el fluido se rebalsa o si hay un valor máximo.

No se espera que surjan en este momento argumentos del tendencia, por ello el análisis gráfico se encuentra relegado. Los estudiantes se valdrán inicialmente de todo el conocimiento alrededor de la situación con planteamientos analíticos.

Para provocar que emerjan los argumentos gráficos, se proponen nuevas preguntas orientadoras.

MOMENTO 2

Construcción de modelos analíticos y gráficos. Una alternancia entre los dos dominios

Como se mencionó en el momento 1, el estudiante modelará la acumulación del fluido por medio de una resta, lo que entra menos lo que sale, éste será su primer modelo analítico de la situación, el cual se considera como una "instrucción que organiza comportamientos". Este modelo le permite determinar si el volumen de líquido en el depósito aumenta o disminuye a través del tiempo, pero no **cómo** aumenta o disminuye, al igual que el comportamiento del nivel del líquido en el depósito.

Para provocar el uso de la gráficas en la modelación del comportamiento del volumen del fluido en el tanque o de su nivel, se propone la siguiente pregunta

- *¿Cómo cambia el volumen del líquido dentro del tanque?*
- *¿Cómo cambia el nivel del fluido en tanque?*
- *¿Cómo varía el gasto de salida en la situación planteada? ¿aumenta? ¿disminuye?*
- *¿Existe alguna relación entre el gasto de salida y el nivel del fluido en el tanque?*

En el momento 1, la atención se centra en la acumulación, y no así en el comportamiento de las variables como el volumen del líquido, el gasto de salida y el nivel del líquido, se suponen variables, pero no cómo varían y qué relación guardan.

Al analizar los comportamientos de las variables mencionadas surgen diversas argumentaciones:

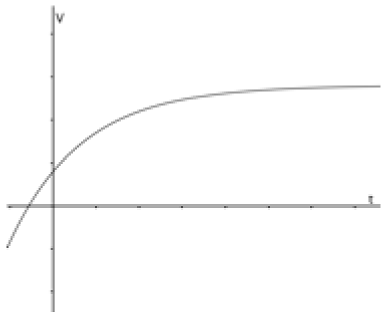
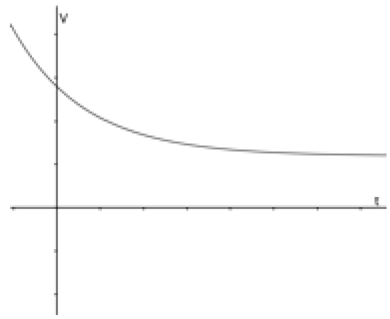
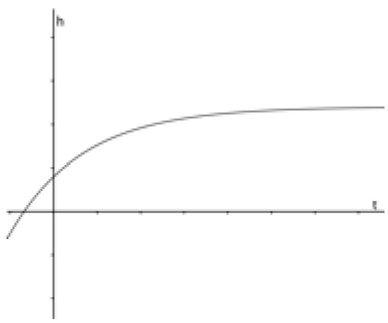
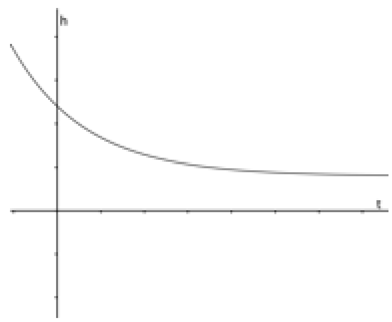
a) El volumen del líquido dentro del tanque crece o decrece.
b) El nivel del líquido dentro del tanque crece o decrece de la misma manera que el volumen, dado que el volumen está en función del nivel del líquido.
c) El gasto de salida crece en tanto que el nivel del líquido crece, y decrece en tanto que el nivel del líquido decrece.

Así:

Si $q_e > q_s$	Si $q_e < q_s$
Se acumula fluido	Disminuye el volumen
El volumen del líquido en el tanque crece	El volumen del líquido en el tanque decrece
El nivel del líquido *(h)* crece	El nivel del líquido *(h)* decrece
El q_s crece, en tanto que *(h)* o la columna de agua ejerce una presión mayor al transcurrir el tiempo	El q_s decrece, en tanto que *(h)* o la columna de agua ejerce una presión menor al transcurrir el tiempo

d) En el primer caso, donde q_s es menor que q_e y a la vez empieza a crecer, emerge el primer argumento de estabilidad, q_s crecerá hasta llegar a parecerse a q_e, y por tanto el volumen se hace casi constante en este momento. Este argumento surge, en tanto que se estudia el comportamiento de las variables.

A continuación se presentan las gráficas que surgen de este análisis (ver cuadro 2).

Si $q_e > q_s$	Si $q_e < q_s$
	
	
$q_s \to q_e$	

Cuadro 2. Graficas del volumen y nivel del líquido acumulado

De igual forma, se espera que los ingenieros en formación realicen diferentes gráficas hasta llegar a las expuestas en el Cuadro 2. Incluso, en este momento, se resignifica el uso de las gráficas en la modelación de estos comportamientos con tendencia, en tanto, que la forma de la gráfica se alcanza inicialmente por medio de una distribución de puntos donde su funcionamiento radica en establecer la trayectoria y el trazo de la correspondiente con base en el comportamiento significado y después se continúa haciendo uso ésta desde el análisis de la información analítica (Cordero, Cen & Suárez, 2010).

El desarrollo analítico y gráfico, mencionado anteriormente, emerge de las significaciones y procedimientos que surgen del primer modelo planteado analíticamente,

$$q_e - q_s = acumulación\ ,$$

de tal forma que esta instrucción, no solo organiza comportamientos, sino que los organiza siendo la tendencia el argumento.

Al buscar modelar gráficamente el comportamiento del volumen de líquido dentro del tanque y del nivel del fluido, aparecen gráficas crecientes con diferentes concavidades. Aquí se ponen en debate los funcionamientos y formas del uso de las gráficas como la variación de parámetros, los múltiples ajustes y la búsqueda de patrones. Lo anterior junto con procedimientos y herramientas algebraicas llevarán al ingeniero en formación a analizar los comportamientos de crecimiento y decrecimiento de las variables (se hace uso del análisis de información).

MOMENTO 3

El uso de la gráfica en la argumentación

La graficación pasa a ser el modelo de las resignificaciones de los comportamientos tendenciales, aquí emergen procedimientos como variar parámetros. Se confrontan funcionamientos y formas del uso de las gráficas a través de múltiples realizaciones, construcción de patrones y desarrollo de razonamiento.

El comportamiento tendencial emerge al graficar el volumen del fluido acumulado o su nivel en el depósito. Éste permitirá significar la acumulación desde su variación, así como la del nivel del líquido. A partir de la gráfica, emergerán argumentos como:

- Las variaciones del volumen y el nivel del fluido dentro del tanque tenderán a cero cuando el tiempo tiende a infinito
- El gasto de salida tiende a estabilizarse, tiende a un valor constante. Este valor es gasto de entrada.

Del modelo gráfico se pasará al modelo algebraico y viceversa. La gráfica aporta argumentos del comportamiento, tanto de la variable como de su variación, como se ha mencionado con anterior, esto le permite, al ingeniero en formación confrontar sus argumentos.

Para este momento, se consideran las siguientes preguntas, que reorganicen lo encontrado y conduzcan a la caracterización de un modelo para calcular el volumen del líquido acumulado en el tanque.

- *¿Qué tipo de relación existe entre el gasto de salida y el nivel del fluido en el tanque?*
- *¿Hay alguna expresión para calcular el volumen del líquido acumulado?*

Se espera que dada la gráfica, relacionen su comportamiento con alguna gráfica conocida y a partir de las relaciones observadas analíticamente puedan caracterizar una expresión que modele el comportamiento. Puede ser la ecuación diferencial o una función. Aquí la calculadora será una herramienta que les permita hacer múltiples realizaciones y ajustar patrones para llegar a la gráfica esperada.

		Discusión de las variables acumulación, nivel del líquido y gastos de entrada	Analizar las variables y su variación, al establecer relaciones de lo analítico con lo gráfico	La gráfica como un hilo conductor y establecimiento de modelos
ALTERNANCIA ENTRE LO ANALÍTICO Y LO GRÁFICO	Significados	Un fluido que fluye en un recipiente, éste se acumula o no al pasar el tiempo. Si algo entra o sale, el nivel baja o sube El gasto como la cantidad de fluido que sale en un determinado tiempo	Asignación de una relación entre la variación del volumen acumulado y la forma de la gráfica El gasto de salida como la cantidad que tiende a ser constante y parecerse al gasto de entrada	Asignación de modelos analíticos que relacionan las variables y sus variaciones dada la tendencia en las gráficas El gasto de salida como una cantidad directamente proporcional a la altura.
	Procedimientos	Comparación del comportamiento de las variables Expresar modelos analíticos que relacionan las variables	Variación de Parámetros Múltiples realizaciones Desarrollo de razonamiento	Construcción de patrones Realización de ajustes analíticos
	Lo que es de utilidad al INF	La resta como una instrucción que organiza comportamientos	La gráfica como un modelo de comportamientos con tendencia	La gráfica como un modelo de comportamientos con tenencia
	Argumentación	Estabilidad		

Cuadro 3. Aspectos epistemológicos de la Actividad

III.3. Aspectos Metodológicos

El objetivo de esta investigación propone la construcción de un marco de referencia que manifieste a la graficación como un modelo de las resignificaciones de comportamientos tendenciales, que genera una argumentación de estabilidad en una situación específica de acumulación, en una comunidad de ingenieros en formación. Este destaca aspectos importantes como: el uso de las gráficas, la alternancia entre lo analítico y lo gráfico, las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes contantes como modelos de estabilidad y la comunidad de conocimiento.

La evidencia que se recolecte nos debe aportar evidencias de cómo una comunidad de conocimiento construye el argumento de estabilidad en una situación de acumulación. Para ello, se diseñó una actividad, con base en la situación de acumulación de un fluido y la epistemología inicial formuladas en los capítulos anteriores. Esta actividad se puso en escena con un grupo de ingenieros en formación para identificar y caracterizar los usos del conocimiento matemático íntimo, recíproco y local que emerjan allí. Finalmente, el análisis de los datos, teniendo como lupas la epistemología planteada y la comunidad de conocimiento permiten brindar un modelo para el diseño de situaciones de aprendizaje donde la estabilidad sea el argumento principal.

La Actividad se llevó acabo en tres sesiones de entre 2 y 3 horas. Todas fueron videograbadas. En éstas, los ingenieros en formación participaron dando argumentos y discutiendo de acuerdo a las preguntas planteadas.

III.3.1 Los ciudadanos: ingenieros en formación

Por la naturaleza de esta investigación, donde nos interesa entender cómo un sujeto construye conocimiento en su condición de sujeto situado que pertenece a una cultura, a una comunidad, trataremos en esta sección de caracterizar a los ciudadanos que participaron en la puesta en escena de la actividad.

Primero que todo, estamos considerando a ciudadanos como miembros de una comunidad de conocimiento, que son sometidos a una situación específica. Así todas sus vivencias e interacciones conforman su cotidiano.

El cotidiano al que hacemos referencia acá, es el de la Ingeniería, donde suceden comunidades de conocimiento en escenarios como la escuela y el trabajo. En la escuela, los ingenieros en formación interactúan entre ellos o con sus maestros, de igual forma, los ingenieros docentes interactúan con sus pares o con los ingenieros en formación. En le trabajo, se ha identificado entre otros, a ingenieros investigadores e ingenieros en su profesión.

En esta investigación, se ha decido trabajar con ingenieros en formación, pues nos interesa reconocer los usos del conocimiento matemático de los estudiantes, el cómo construyen su conocimiento en la interacción con sus pares, con el objetivo de ofrecer un marco de referencia *desde* los ingenieros en formación.

En las sesiones de trabajo, participaron tres mujeres y un hombre. La actividad se realizó en tres sesiones, en la primera participaron 3 estudiantes más, los cuales, por razones personales no se incorporaron en las últimas dos sesiones.

Cabe mencionar, que los ingenieros en formación participantes, aceptaron en forma voluntaria hacer parte de las sesiones de trabajo.

A continuación, se menciona algunas características en general de los participantes y luego de cada uno de ellos:

Los ingenieros en formación participantes, cursaban sexto semestre de la licenciatura en ingeniería civil en la Universidad Autónoma de Chiapas. Ya han cursado asignaturas como Mecánica de materiales, Mecánica de suelos, Materiales de construcción, topografía y Mecánica de fluidos y están cursando Mecánica de fluidos entre otras.

G. Es una estudiante, mujer, de 20 años. Está estudiando la licenciatura en ingeniería civil motivada por sus padres que también son ingenieros civiles. Sus padres tienen una empresa que presta servicios de diseño de redes de agua potable en la cual ella trabaja y por tanto tiene mayor experiencia en proyectos de ingeniería que sus compañeras. Grosso modo, tiene otra visión de la licenciatura en tanto que ya ha vivido la experiencia práctica.

D. Es una estudiante, mujer, de 20 años. Ha tenido una corta experiencia de trabajo en una constructora. Crítica el programa que están llevando, en tanto que esperaba que desde los primeros semestres hubiesen tenido un acercamiento mas intenso con la práctica de la ingeniería civil.

A. Es una estudiante, mujer, de 22 años. Llega a la ingeniería civil por casualidad, al decidir abandonar sus estudios de Medicina. La mayor experiencia que ha tenido con la ingeniería es en sus clases. Se pudo observar en la sesiones de trabajo su interés por aprender y responder “escolarmente" a lo que se le cuestiona.

E. Es un estudiante, hombre, de 20 años. Comenta que decidió estudiar ingeniería civil por el gusto hacia las matemáticas. No ha tenido experiencia de trabajo con la ingeniería.

III.3.2 Los ingenieros en formación como comunidad de conocimiento

El que interviene en la Actividad es la comunidad de conocimiento matemático del ingeniero CC(Ing). En particular, la conformada por los ingenieros en formación que participan en la actividad. Es así como se observará a cada ingeniero en formación, como miembro de una comunidad de conocimiento, en la que los elementos de la triada (reciprocidad, intimidad, localidad) expresarán lo propio de esos ingenieros que intervinieron en la situación.

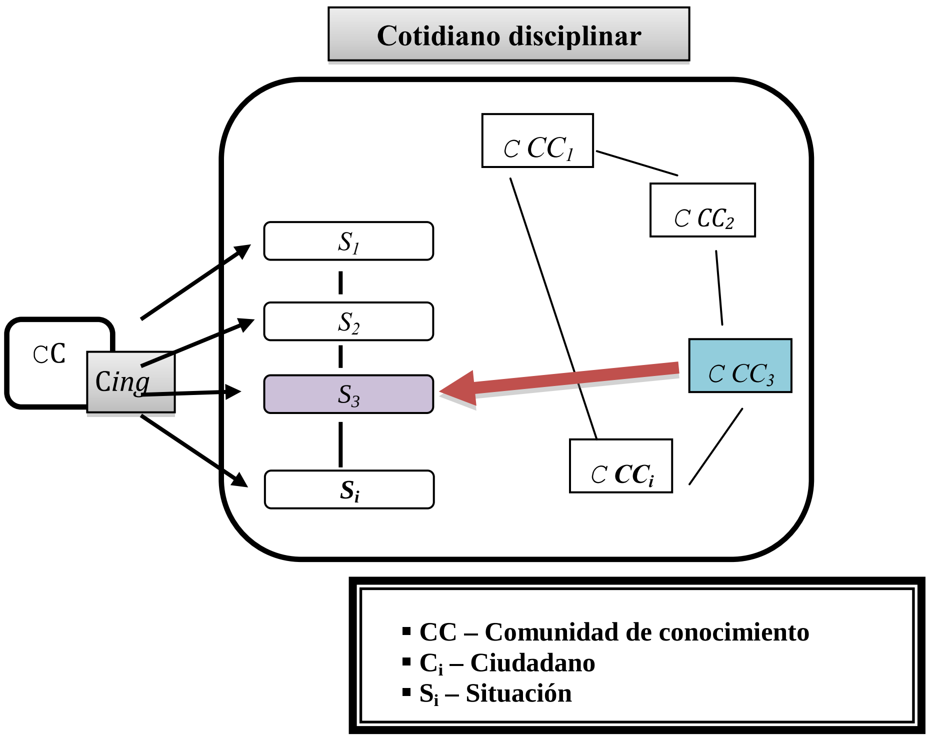


Figura 10. Cotidiano disciplinar de un ingeniero en formación

Capítulo IV
ANÁLISIS DE DATOS

Para el análisis de los datos, en las tablas que se encuentras anexas a este documento, se colocaron como evidencias los relatos de los ingenieros en formación, sus explicaciones, justificaciones y argumentos. También se colocó los significados y procedimientos que se perciben a partir de estas explicaciones y justificaciones.

Nuestro interés está en caracterizar el uso de la grafica en la resignificación de comportamientos tendenciales, donde la alternancia entre el funcionamiento y la forma de lo analítico y lo gráfico norma este uso.

En la actividad planteada, variables como el volumen acumulado el tanque, el nivel del líquido y el gasto de salida son determinantes en tanto que sus comportamientos expresan cierta tendencia asintótica. Es por ello, que centramos este primer análisis a la forma como los ingenieros en formación discuten alrededor de estas variables y como sus significados conceden procedimientos que en conjunto develan el argumento de estabilidad.

IV.1. Las variables y sus comportamientos tendenciales.

La situación que orientó la Actividad, puesta en escena con los estudiantes inició con el siguiente planteamiento

> *¿Cómo abordarían una situación donde se tiene un tanque o depósito cilíndrico que contiene cierto fluido, al cual entra, el mismo fluido, con un gasto de entrada constante y sale a través de una válvula ubicada en la parte inferior del tanque?*

Inicialmente los estudiantes empezaron a hablar de los gastos de entrada y salida, de las dimensiones del tanque, de el tiempo necesario para llenar o vaciar el tanque, de las condiciones para que el tanque se llenara, entre otras.

Con respecto a la variable de acumulación, el ingeniero en formación E. expresa lo siguiente

> *"Si entra el fluido debe ser menor a la cantidad que sale, para que ésta se pueda llenar"*

El volumen acumulado será una variable que depende de la relación entre lo que entra y lo que sale, dependerá de la diferencia entre éstos.

G. Otro de los ingenieros en formación, comenta que:

> *"El volumen varía con respecto al tiempo y depende del gasto de entrada y del gasto de salida"*

Al igual que E, relaciona el volumen acumulado en el tanque con la relación que exista entre los gastos.

Hasta acá, los procedimientos que se perciben son la comparación entre los gastos de entrada y salida, sin ni siquiera proveer de algún modelo analítico o gráfico que los lleve a calcular o caracterizar este volumen.

En cuanto al nivel del líquido, la ingeniera en formación A. hace referencia al estado estable, o donde el nivel del líquido permanecerá constante diciendo que:

> *"Si la entrada es la misma que .. el que sale, entonces ese nivel no cambiaría, el nivel que tenga dentro del tanque"*

Hasta este momento, no se hace mayor referencia a esta variable ni a su comportamiento. Los ingenieros empiezan a discutir la forma de calcular el volumen acumulado en el tanque, en tanto que se replantea la situación, haciendo un cuestionamiento mas específico en la situación. El planteamiento es el siguiente:

> *Se tiene un tanque o depósito cilíndrico con dimensiones conocidas que contiene cierto fluido. A éste entra, el mismo fluido, con un gasto de entrada constante y sale, con un gasto variable, a través de una válvula ubicada en la parte inferior del tanque con diámetro conocido. ¿Cómo se calcula lo que se acumula del fluido en cualquier tiempo t?*

Al preguntar por la forma como se puede calcular lo que se acumula de fluido dentro del tanque, los ingenieros en formación respondieron con reflexiones y argumentos donde se vislumbran modelos analíticos. Por ejemplo, la ingeniera en formación G. comenta que:

> *"gasto de entrada menos gasto de salida, ahí sería el volumen que está quedando dentro del tanque"*

y después A. comenta que:

> *"la diferencia de los gastos, lo deberías relacionar también con el tiempo, [...] para que te pueda resultar el volumen dentro del tanque y en ... Si lo divido en el tiempo, ya me va quedar volumen"*

En este momento, las participantes empiezan construir un modelo analítico para calcular el volumen de líquido acumulado en el tanque. En el primer comentario que hace G. se dan cuenta que la diferencia de los gastos no es igual al volumen, por ello A. sugiere relacionarlo con los tiempos, recordando que el gasto es el cociente del volumen y el tiempo.

Lo que se quiere recalcar, hasta este momento, es la manera como los ingenieros en formación van significando las variables como el volumen del líquido acumulado, el nivel del líquido y los gastos. Y que hasta este momento, no aparecen argumentos de tendencia, incluso no aparecen argumentos relacionados con la forma como varían las variables.

Insistiendo en la diferencia de los gastos, E. dice:

> *"Está entrando cierta cantidad, está saliendo otra, pues la diferencia … de esas dos, de entrada y salida, quedaría, una cierta cantidad en el tanque"*

Y escribe varias expresiones para modelar analíticamente el volumen acumulado en el líquido

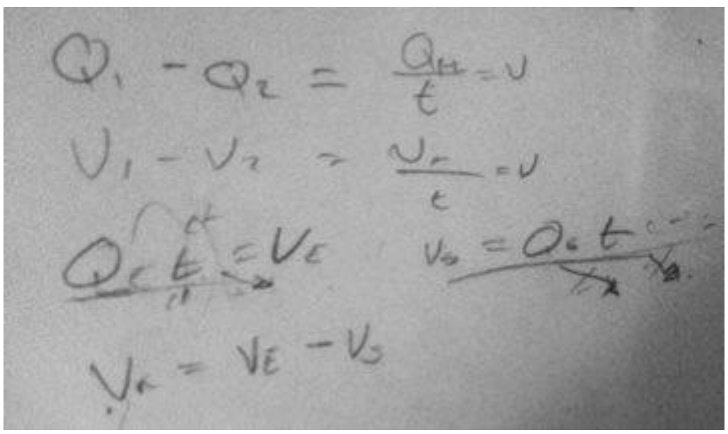


Figura 11. Expresiones analíticas para el volumen de fluido acumulado

De lo anterior, van concluyendo que necesitan saber el gasto de salida para poder calcular el volumen.

A la par de las reflexiones y comentarios, se fueron formulando cuestionamientos como ¿qué afecta al gasto de salida? A lo que E. responde así:

> *El gasto de salida puede depender de muchas cosas. De la presión del agua, de la columna de agua, y esto va a variar, por lo que mientras más vaya desocupándose*

el tanque la columna de agua va disminuyendo, va a haber menos presión, y va a salir con menos velocidad. A que si estuviera mas o menos llenos saldría con mayor velocidad y tendría mayor presión

Así, relaciona el gasto de salida con la columna de agua, o la altura y se dan indicios de relacionar las variables con sus variaciones, pues ya empiezan a surgir justificaciones como *"saldría con mayor velocidad" "va a salir con menos velocidad".*

En algunos momentos, fue necesario formular preguntas diferentes a las ya previstas, para desatorar la reflexión. Por ello, se plantean la pregunta ¿El volumen que se está acumulando también depende de la altura? A la que A. responde:

"el volumen del agua va variando con respecto al tiempo, si se va vaciando el nivel va bajando o va aumentando, la variación de la altura va a dar a la variación del volumen"

Se ve explícitamente la relación entre las variables, he incluso en la variación de las variables. Además, lo anterior lo expresa analíticamente de la siguiente manera:

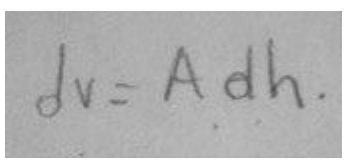


Figura 11. Relación entre la variación del volumen y la variación de la altura

Se plantean preguntas relacionadas con la variación, las cuales detonan el análisis de cómo crecen o decrecen las variables y la necesidad de graficar. Las preguntas formuladas fueron *¿Cómo cambia el volumen del líquido dentro del tanque? ¿Cómo cambia el nivel del fluido en tanque? ¿Cómo varía el gasto de salida en la situación planteada? ¿aumenta? ¿disminuye? ¿Existe alguna relación entre el gasto de salida y el nivel del fluido en el tanque?*

La participante D. reconoce tres casos dentro de la situación y hace el siguiente comentario al respecto:

> *" hay tres casos, si el gasto de entrada es igual al gasto de salida, la altura se mantiene constante, ahí si podemos decir que la velocidad se mantiene constante y la carga de la columna de agua va a ser constante. Sería el mismo volumen*
>
> Si *el gasto de entrada es mayor que el gasto de salida entonces, ahora, va estar subiendo ... no va estar disminuyendo esa altura, sino va a estar en aumento ..*
>
> *aquí va a salir, o sea, va tener una mayor velocidad y una mayor presión, y el tiempo va a ser menor y va a ir subiendo el gasto de salida ... si o no?*

Aquí, se insiste en preguntar ¿Cómo varía el gasto de salida? A lo que E. responde

> *si va a cambiar en tanto más sea la altura del agua ... El gasto está en función del área y de la velocidad, entre mayor sea la presión del agua, mayor será la velocidad*

En este momento, los ingenieros en formación, a partir de el anterior análisis, observan que el tanque se puede rebalsar, es decir, que el fluido empiece a salirse del tanque y se plantean la forma de controlar el sistema para que esto no suceda.

Así, E. plantea lo siguiente:

> *"es que yo lo que me refiero es que los casos que estamos planteando es para... saber y controlar, pues, el fluido que se está reteniendo en el cilindro y que la mejor opción es que el gasto de entrada sea igual al gasto de salida"*

Al volver a pensar en la forma como varia del gasto de salida, E. y G. discuten lo siguiente:

> ***E.:*** *"entre más se de la carga de agua, más va saliendo. La altura y la velocidad que sale cuando la altura es menor. Pero la altura es mayor, como dice ella, pues va aumentando la velocidad y el gasto de salida, <u>pero llega un tiempo en que se reduce eso y se reduce la velocidad y el gasto de salida</u> … bueno no se, es que esta tu tanque, y está hasta acá. Pero como acá tiene la mayor presión ya la mayor velocidad, esto va a salir rápido, la velocidad va a aumentar. Pero va a llegar un momento donde esto va a salir y esto va disminuir y va a llegar hasta acá, pero este no va a tener la misma velocidad que acá, y la velocidad disminuye igual que el gasto, y ahí es donde se viene controlando, esto vuelvo a subir, sin el flotador, sólo que con la carga de agua… se está regulando"*

> G.: *El gasto de salida va a ser igual al gasto de entrada, pero por qué o cómo, por qué no se rebalsa, por que no puede salir la misma cantidad? entonces hay una limitante en el diámetro que va a impedir que salga…va a llegar un punto en el que el <u>gasto de entrada va ser igual que el gasto de salida</u>*

En este momento, los ingenieros en formación generan argumentos para controlar el rebalse del agua, siendo clave que el *gasto de entrada sea igual al gasto de salida en algún momento*. Aquí se empieza a construir un argumento de estabilidad dada la necesidad de que el tanque no se rebalse.

El análisis de las variaciones del gasto y de la influencia que ejerce la presión sobre este, provocó que los ingenieros en formación justificaran la estabilidad del sistema. Por ejemplo E. hace las siguientes afirmaciones

> *"Va llegar en un momento que este va a quedar así , que ya ni va a subir, ni va a bajar, solo con el gasto constante, se puede mantener*

Se va a suponer que …suponte que va a ir subiendo, subiendo va a llegar algún momento en que va a quedar en equilibrio, sin modificar aquí y acá.

Finalmente los ingenieros en formación, acuerdan que:

Ed: Pensando, si el gasto, pues o sea la cantidad de agua que entra, no varía igual que la cantidad de agua que sale, no varía, no se modifica en la válvula. Pero ya el tanque tiene cierto nivel de agua , entonces al entrar va subiendo poco a poco pero ya en cierto tiempo va a quedar fijo, como si fuese a quedar en equilibrio, y ya no se va a desfasar por que tampoco se va vaciar, a menos que sufra cambios en la entrada y salida.

[…]

ED: tal vez por la presión, y así se va a equilibrar el agua tanto en la entrada como en la salida.

En este momento, se plantea la pregunta que detona el momento donde la gráfica entra en juego y se inicia la alternancia entre lo analítico y lo gráfico. La pregunta formulada es *¿Y en dónde se alcanzará el equilibrio?* y genera el siguiente diálogo:

-: ¿Y en dónde se alcanzará ese equilibrio?

E.: es lo que hay que buscar

G.: hay que graficar

E.: Hay que hacer un modelo

G: si hay que hacer un modelo

E: tu dijiste algo, ¿no? ¿que hay que graficar?

G: se supondría que al principio la velocidad aumentaría, después, poco a poco aumentaría de tal forma que sería bajar y alcanzar el nivel que tenía antes el agua, y después volvería a bajar y me imagino una gráfica, que subiría y bajaría.

E: y cómo sería esa gráfica? Gabriela?

[…]

O: *como dice Gabi, subiría y volvería a bajar, como la del seno*

-: *Yo no entiendo eso, por qué empieza a bajar?*

E: *Ya no baja,*

A: *ya no podría bajar*

E: *Ya tiene que estar en equilibrio*

Los estudiantes dibuja gráficas como las siguientes:

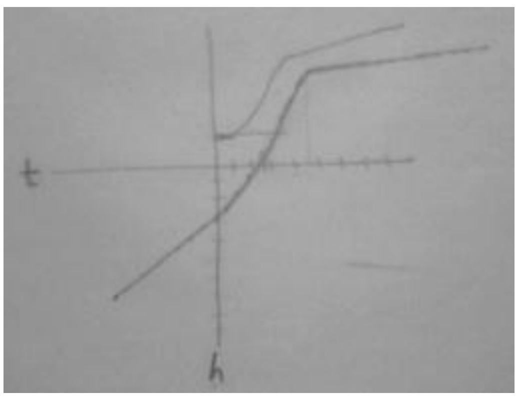


Figura 12. Evidencia de gráficas A.

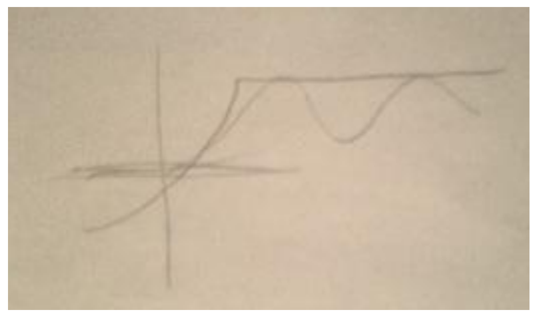


Figura 13. Evidencia de graficas de G.

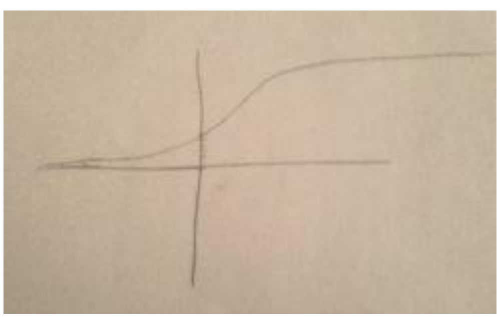


Figura 14. Evidencia de gráficas de D

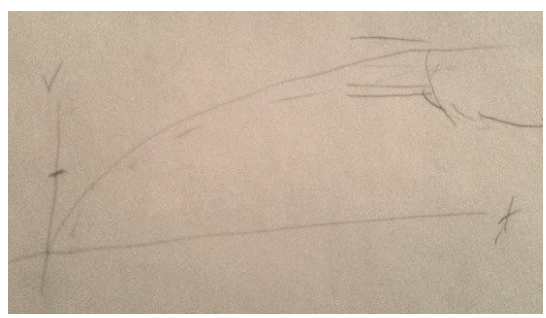


Figura 15. Evidencia de gráficas de E.

Y discuten cuál es la forma que debe tomar la curva, de acuerdo a lo analizado anteriormente.

G: Yo me imaginaría que al principio subiría, después volvería a bajar y se estabilizaría, no se por qué me imagino eso

Ed: No pero quedaría en ese constante

Ed: No, no va a subir muy poquito pero ya va a ser despreciable.

[…]

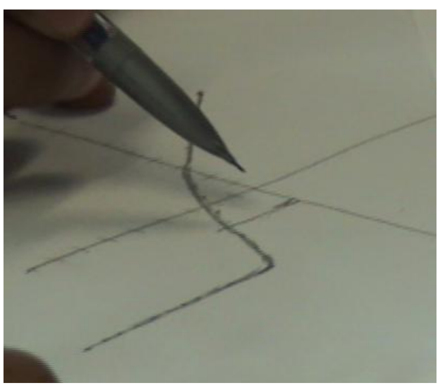
G: qué va a empezar a subir y cada vez va ir subiendo mas lento, más lento,

F yo creo que es un crecimiento exponencial

-: por qué?

F por que llega un momento en que … la diferencia de alturas es pequeña, hasta que alcanza ese equilibrio en el que ya no aumenta la altura.

Algo que determina en el inicio de la gráfica, es la misma situación, y uno de los participantes aclara lo siguiente:



E: debería empezar acá, en una determinada altura, porque se supone que ya

A: si, por ejemplo en el tiempo cero, el volumen no es cero. Sino que es el volumen que se encuentra retenido, conocido

E: de ahí ya podría aumentar hasta volverse constante

Figura 16. Evidencia del punto inicial de la gráfica

Se observa que los ingenieros en formación relacionan la variación del volumen acumulado con la forma de la forma de la gráfica descartando las gráficas de las figuras 12, 13 y 14, y optando por la 15. En este momento, entre todos hacen la gráfica, y la elaborar inicialmente por medio de una <u>distribución de puntos</u>, después de tener la forma de la curva, trabajan con ella de forma global.

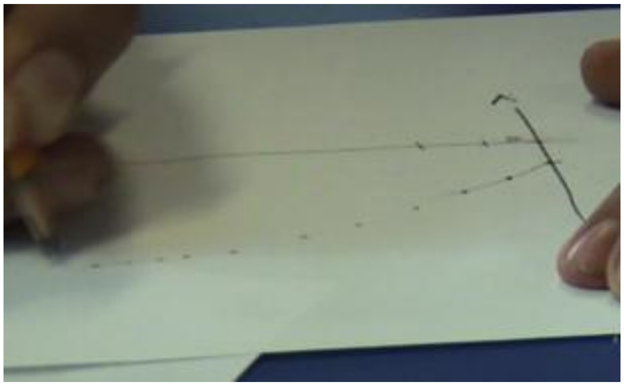


Figura 17. Distribución de puntos

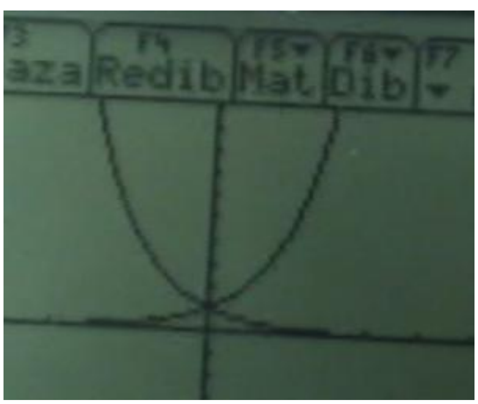
E.: *o sea en el tiempo cero, ya tenemos un volumen, no? Es lo que estaban diciendo*

D: *En el uno sería para arriba*

E: *Si estamos en el primer caso*

G: *y, hay uno, donde llega hasta estabilizarse*

Los participantes deciden que la función que representa la curva es una exponencial y se dan a la tarea de encontrar la expresión analítica que la modela. En este momento, hacen uso de la calculadora graficadora y empiezan a darle forma a la expresión haciendo variación de parámetros, sumándole o restándole valores constantes a $y=e^x$, sumándole, restándole o multiplicándole valores a *x*. Estas variaciones, las van realizando, de tal manera que identifican patrones en cada una de las gráficas. Comparan la que muestra la calculadora con la gráfica a la que quieren llegar. Y explícitamente buscan la tendencia, pues es el argumento que les permite decidir cuál gráfica es la adecuada.



Inicialmente grafican $y=e^x$ y $y=e^{-x}$ pero observan que no tiene la forma de que han dibujado.

Figura 18. Graficas de $y=e^x$ y $y=e^{-x}$

Grafican la función $y = e^{-x}$ en el mismo plano de la gráfica que buscan y se preguntan lo siguiente:

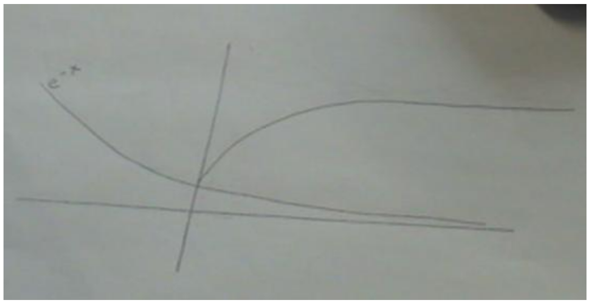


Figura 19. Comparando gráficas

D. ¿Qué valores cambiamos?

A. ¿Si se voltea, por ejemplo?

D. ¿qué cambia?

> *A. Si esto va aquí, tienen la misma forma. ¿O no tienen la misma forma? No mas está orientada hacia el otro lado. Hay que cambiarle aquí (señala la expresión exponencial) haber si de alguna forma se voltea la gráfica*

> *D. Multiplicarlo por algo?*
> *A. Pónle un 2*

La grafican y observan que no pasó nada, que sólo se recorrió hacia arriba un poco.

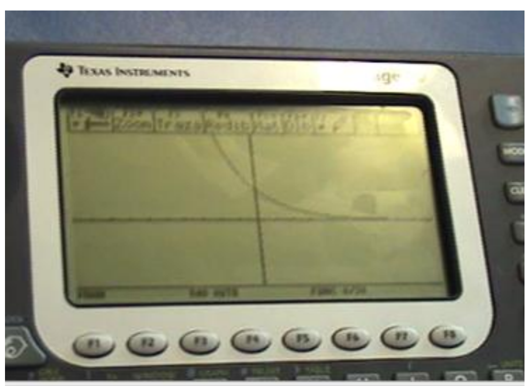


Figura 20. Grafica de $y = e^{-2x}$

Ahora le ponen un menos multiplicando la exponencial

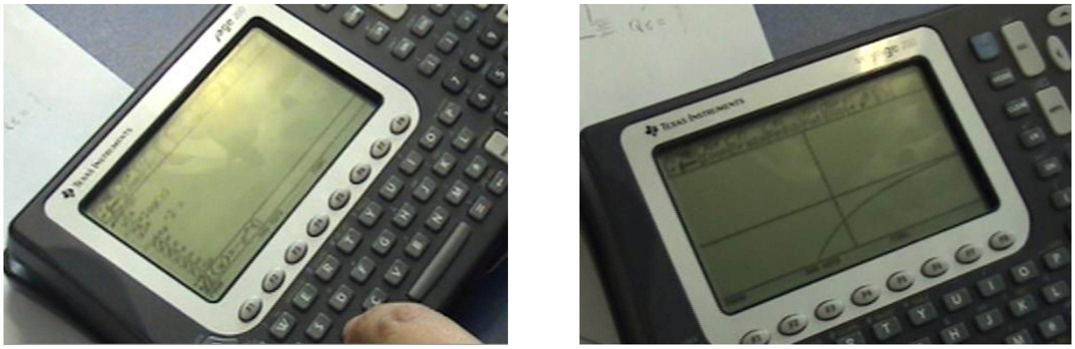


Figura 21. Variación de parámetros

Hace varios intentos, multiplicando la x y la y por algunos valores, analizan y deciden sumar en lugar de multiplicar.

Analizan diciendo:

A. El que se halla dado la vuelta, es por qu le pusiste menos aquí
D. Subirla
G. Sumarle un número más. Haber si sube.

Prueban con varios números, hasta que logran ver lo que sucede.

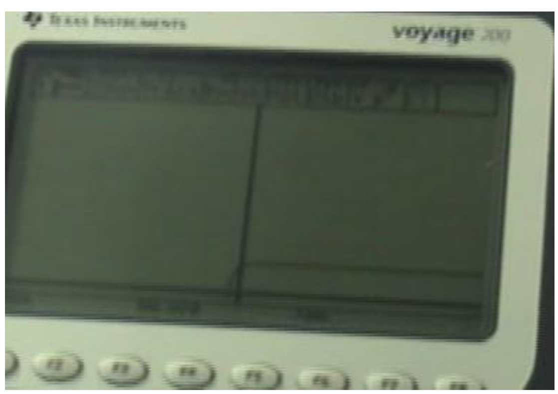


Figura 22. Variando parámetros

Finalmente, llegan a una expresión como $-e^{-x}+8$, que después generalizan como $y=a-e^{-x}$ Intentan buscar las variables en términos de la situación pero desisten.

De aquí en adelante, usan la gráfica para argumentar las tendencias de las variables y así encontrar una expresión analítica como las siguientes:

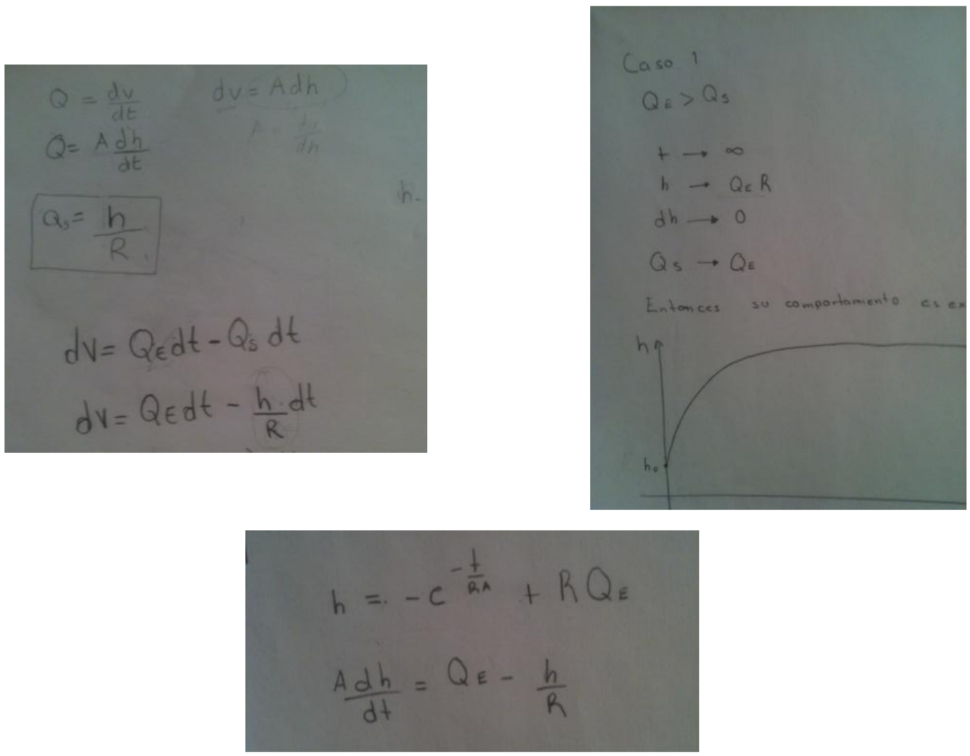


Figura 22. Resultados de la alternancia de lo gráfico a lo analítico

Capítulo V

CONCLUSIONES

A manera de conclusión podríamos decir que esta investigación, por el planteamiento socioepistemológico, tomó obligadamente dos direcciones. Por un lado, la amplitud y complejidad de la problemática de enseñanza de las matemáticas en las facultades de ingeniería. En términos genéricos, no por ello menos importante, se documento cómo la ingeniería ha estado, y en algún sentido sigue, subordinada como una ciencia aplicada. Ahí el discurso matemático escolar (dME) ha jugado un papel predominante, muy acentuado, al grado tal que al seno de los programas de formación para ingenieros se ve reflejado cómo los objetivos están permeados por el dME: se declara que la ingeniería consiste en formar cuadros "capaces" de aplicar las matemáticas para resolver problemas de la realidad. Pero también, el sector productivo-empresarial. demanda a las universidades, profesionales formados para tomar decisiones prácticas y en corto tiempo y no así, profesionales que construyan modelos productivos y de avance tecnológico para la sociedad. En ese sentido la ingeniería vive una dualidad: servicio y desarrollo disciplinar. Esto conllevó la otra dirección, rediseñar el dME más a fin su dualidad. Por ello, en el estudio, se buscó potencializar la construcción de conocimiento, en una comunidad de ingenieros civiles en formación, con una matemática funcional (totalmente ausente en los objetivos de los programas de formación), en una situación específica. Para tal fin se formuló una epistemología como base para diseñar una actividad que puso en juego una situación de acumulación de fluido.

La puesta en escena de la actividad, brindó algunas formas de cómo el ingeniero en formación abordaron la situación, al pronunciar nuevos retos dentro de la misma y al construir, con base en los usos de la gráfica, modelos de comportamientos tendenciales desde lo gráfico y lo analítico.

Los procedimientos y herramientas que dieron forma a estos modelos gráficos y analíticos fueron:

- Variación de parámetros.
- Simulaciones en la calculadora hasta obtener un patrón deseado.
- Realizaciones de ajustes tanto analíticos como gráficos.
- Comparaciones entre los comportamientos de las variables y sus variaciones.

En cuanto a los funcionamientos y formas del uso de las gráficas se evidenciaron los siguientes:

- La distribución discreta de puntos como herramienta para dibujar una curva con tendencia, al analizar las condiciones de la situación y mantener el argumento de estabilidad.

- El análisis de la curva en tanto a su concavidad para decidir la curva que modelaba el comportamiento tendencial. Este análisis se hizo desde la misma situación al sostener el momento de equilibrio que se debía alcanzar.

Así, nuestra investigación presume de aportar un modelo de análisis, en cuanto reconoce el carácter de sujeto situado, al que denominamos ciudadano, en nuestro caso ingeniero en formación. Se caracterizó lo propio de la comunidad de conocimiento matemático a la cual pertenece. En ese sentido, reconocemos una intimidad en la construcción de conocimiento, de ésta comunidad, en tanto que reconoce el argumento de estabilidad en el análisis de los patrones de tendencia con la variación, en la situación específica.

Bibliografía

Arendt (2005). La condición humana. España: Paidós.

Artigue, A. (1992). Functions from an Algebraic and Graphic Point of View: Cognitive Difficulties and Teaching Practices. En E. Dubinsky & G. Harel (eds.) *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 109- 132). Mathematical Association of America. USA.

Buendía, G. (2011). La construcción social del conocimiento matemático escolar. Un estudio socioepistemológico sobre la periodicidad de las funciones. México: Ediciones Díaz de Santos

Cajas, F. (2009). El conocimiento de ingeniería como conocimiento escolar. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, (22), 77 – 84, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Cajas, F. (2007). De parvulitos a las ingenierías: alfabetización científico tecnológica. En Argueta, B y España, O. (Eds.). *Democracia y educación: ensayos,* 239-258, Guatemala: Editorial de la Universidad de San Carlos.

Cantoral, R., Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6(1), 27-40.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J. y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Número especial, pp. 83-92.

Cordero, (2011). *Seminario: Constructos de la teoría Socioepistemológica*. Dirigido por: Francisco Cordero Osorio. Febrero-Junio 2011. CINVESTAV-IPN.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(2), 103-128.

Cordero, F., Cen, C. & Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: Una práctica institucional en el bachillerato. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa , 13(2), 187 - 214

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoamericano* (pp. 265-286). México, D.F.: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Cordero, F., Mena, J. & Montalto, M.E. (2010). Il ruolo della giustificazione funzionale in una situazione di risignificazione dell`asintoto. *l ´insegnamento della Matematica*, 33B (4).pp 457-488.

Cordero, F. & Flores, R. (2007). El uso de la gráfica en el discurso matemático escolar. Un estudio sociepistemológico en el nivel básico a través de los libros de textos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 10(1), pp. 7-38

Cordero, F. y Solís, M. (2001). Las graficas de las funciones como una argumentación del cálculo. Grupo Editorial Latinoamericana. Edición Especial.

Cordero, F. y Solís, M. (2001). Las gráficas de las funciones como una argumentación del cálculo (3ª. ed.). *Serie de Cuadernos Didácticos*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Gómez y Cordero, 2009. Los procesos de difusión del conocimiento matemático: la funcionalidad y el cotidiano. Documento en publicación.

Lara, A. & Cordero, F. (2007). Categorías de uso de las gráficas en Ingeniería. En Crespo C. (Ed.) Acta latinoamericana de Matemática Educativa, (20), pp519 -524.

López, S. (2012). Un estudio de la matemática del ciudadano. Tesis de maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México, D.F.

Parra, T. & Cordero, F. (2007). El uso de las gráficas en la Mecánica de fluidos. El caso de la derivada. En Crespo C. (Ed.) Acta latinoamericana de Matemática Educativa, (20), pp525- 530.

Noss, R., Hoyles, C. & Pozzi, S. (2000). Working Knowlegde: Mathematics in use. Bessot & Ridgway (eds.), Education for Mathematics in the Workplace, (pp. 17-35). Holanda: Kluwer Academic Publischers.

García-Torres, E. (2008). *Un estudio sobre los procesos de institucionalización de las prácticas de ingeniería biomédica. Una visión socioepistemológica*. Tesis de maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México, D.F.

Rodríguez, M. (2009). Una Matemática Funcional para el ingeniero. La Serie Trigonométrica de Fourier. *Tesis de Maestría no publicada*. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, D.F. México.

Reyes, A. y Cordero, F. (2003). Reconstrucción de significados de estabilidad de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. En J. Delgado (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 16(1), 105-111. Instituto Politécnico José Antonio Echeverría, La Habana, Cuba.

Rodríguez, M. (2009). Una Matemática Funcional para el ingeniero. La Serie Trigonométrica de Fourier. *Tesis de Maestría no publicada*. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, D.F. México.

Mendoza, E. & Cordero, F. (2011). El Uso De Las Ecuaciones Diferenciales Y La Ingeniería Como Comunidad. En Flores, R (Ed). Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (25), 1023-1030. Comité Latinoamericano de Matemática Educatia.

Solís, M. (2003). Predicción y simulación: nociones asociadas a las ecuaciones diferenciales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 16,* 386 - 392. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Solís, M. (2012). Las gráficas de las funciones como una argumentación del Cálculo. Caso de la predicción y la simulación en las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Tesis doctoral no publicada. Departametneo de Matemática Educativa. CINVESTAV – IPN, D.F. México

Tuyub, I. (2008). *Un estudio socioepistemológico de la práctica toxicológica: un modelo de la construcción social del conocimiento*. Tesis de Maestría no publicada. Departamento Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Tuyub, I., Cordero, F. & Cantoral, R. (2009). Un estudio socioepistemológico en la práctica toxicológica. En Lestón, P (Ed.) Acta latinoamericana de Matemática Educativa (22) pp 1247-1256

Vázquez, E. (2011) Funcionalidad de la estabilidad en la Biología. Un estudio socioepistemológico. Tesis de maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, D.F. México.

Zaldívar, D. (2011). Un estudio de la construcción social del conocimiento matemático en un escenario del cotidiano. Memoria predoctoral. Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, D.F. México.

Zaldívar J. (2009). Una caracterización de la función de un escenario de difusión de la ciencia desde una visión socioepistemológica. El caso de la resignificación de lo estable. *Tesis de maestría no publicada*. Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, D.F. México.