CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN

Departamento de Matemática Educativa

LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA UNA REFLEXIÓN PARA SU RECONCEPTUALIZACIÓN EN EL AULA

Tesis que presenta

Moisés Ricardo Miguel Aguilar

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

especialidad

Matemática Educativa

Directora de Tesis

Dra. Rosa María Farfán Márquez

México, Distrito Federal Agosto 2013

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico que me brindo para realizar mis estudios de maestría.
Moisés Ricardo Miguel Aguilar.
Becario Número: **210049**

Agradecimientos y dedicatoria

Desde luego agradezco y dedico este trabajo a todos aquellos que de alguna manera influyeron en mí para la realización del mismo:

Primeramente a mi esposa: Gracias y para Ti.

Agradecimientos

De manera especial agradezco a la

Dra. Rosa María Farfán Márquez

por su apoyo, tiempo y conocimientos.

Agradezco también a mis profesores y sinodales por ser un ejemplo a seguir:

Al Dr. Ricardo Cantoral

Al Dr. Francisco Cordero Osorio

Resumen

Este trabajo plantea estudiar a la demostración en física como una herramienta para dar a las argumentaciones matemáticas un sentido menos artificial y más cercano a la realidad del estudiante.

Algunas investigaciones han dado cuenta ya de las dificultades que presentan los estudiantes al enfrentarse a la demostración de resultados matemáticos evidenciando factores que intervienen en la enseñanza y aprendizaje de la demostración como: aspectos relacionados al entorno sociocultural como determinante de los significados que se surgen en el ambiente escolar, el factor maestro y su concepción de la enseñanza de la demostración, la aparente artificialidad que perciben los estudiantes acerca de la demostración matemática y la influencia de distintos contextos en los que el estudiante hace uso de la demostración.

Al respecto, han existido diversos acercamientos, los cuales han desembocado en connotaciones del término demostración como el de explicación, prueba y argumentación que hacen referencia a la validez respecto a una comunidad y al lenguaje aceptado por la misma.

Considerando que también dentro de una misma aula de clase existen varias formas de demostrar muy características, como por ejemplo la noción de demostrar en física. Se presenta un análisis del desarrollo histórico de la demostración matemática poniendo un énfasis especial en aquellos momentos cruciales para el desarrollo de la demostración así como en los orígenes de la matemática moderna y su consecuente rompimiento con el mundo físico.

Con el objetivo de robustecer nuestra reflexión sobre la demostración matemática analizamos el trabajo de científicos clásicos para quienes la observación científica del mundo físico les brindo las herramientas para establecer y probar conceptos y leyes matemáticas. Buscando llegar a una análisis sobre una reconceptualización en el aula inclinada hacia reconciliar la demostración matemática y la demostración en física.

Abstract

This work plans to study physics demonstration as a tool for to give to the mathematics argumentations a sense less artificial and closer to the student's reality.

Some investigations had gave information about the difficulties that the students present when confront the mathematic demonstration, giving evidence about the factors that intervene in the teaching and learning of the demonstration like: aspects related to the sociocultural context like determinant of the meanings that emerge from the school, the agent teacher and their conception of teaching and demonstration.

Respect to, there had been exist diverse approach, which one had end in connotations for the demonstration term like explication, proof and argumentation that make reference to the validity respect to a community and to the language accepted for the same.

Considering that in the classroom many forms to demonstrate too characteristics, as an example, the notion of physics demonstration. We present an analysis of the historic advance of mathematic demonstration putting a special interest on the crucial aspects for the development of the demonstration so like in the origins of the modern mathematics and the consequent break with the physic world.

With the objective to give robustness to our reflection about the mathematic demonstration we analyze the work of classic scientist for whom the scientific observation of the physic world give them the tools for establish and proof concepts and laws in mathematics. Looking for an analysis about a re-conceptualization on the classroom inclined to reconcile the mathematic demonstration with the physic demonstration.

Contenido

Capítulo I

Capítulo 1 Introducción

La demostración como medio de validación del conocimiento matemático tiene un significado más o menos bien determinado para la comunidad matemática, pero se ignora el hecho de que como tal no puede ser reproducido en la escuela particularmente en niveles educativos o áreas del conocimiento en que la matemática no es estudiada desde un punto de vista formal.

Larios (2002) nos recuerda que…el modelo ideal de la demostración nació como una necesidad para validar un conocimiento abstracto, poco tangible y separado de la realidad inmediata del científico.

Por lo tanto, si la demostración tal como la usan los matemáticos actualmente y tal como se pretende transmitir en la escuela surge de una realidad ajena a la de quienes la aprenden proponemos buscar escenarios en los que las argumentaciones surjan de manera natural y más aún estén estrechamente ligadas al concepto matemático que se pretende demostrar.

1.1 Las formas de demostrar y argumentar en Física.

Mucho se ha investigado sobre la importancia de la demostración matemática en la enseñanza de las matemáticas, como una actividad que desarrollará en el estudiante diferentes habilidades del pensamiento lógico deductivo y por consecuencia del pensamiento matemático. Pero tal parece que se descuida el hecho de que la demostración se presenta como un producto terminado consistente en una cadena de proposiciones en las que cada una puede ser deducida de las anteriores o ya ha sido derivada en otro momento.

La demostración matemática, si bien tuvo sus orígenes en la lógica griega, tal y como la conocemos ahora en realidad tiene menos de tres siglos. Hubo un periodo de tiempo, entre el siglo XVII y el XVIII, en que la matemática se desarrollo paralelamente a la física. Lo cual con el tiempo llevo a la matemática a posicionarse como “el lenguaje de las ciencias” y a convertirse en un criterio de cientificidad.

Para muchos de los principales escritores de la historia de la matemática algunos de los científicos de esta época o sus descubrimientos han sido borrados de este periodo por considerar que su trabajo carecía de rigor matemático. Tal es el caso de Galileo, quien por muchos no es considerado un matemático sino solamente un físico experimental; para Newton, su método de las fluxiones en su momento no tuvo tanto éxito entre los matemáticos dado que carecía del rigor matemático y el lenguaje simbólico utilizado por Leibniz propio de la matemática; o incluso Arquímedes quien se valió de métodos heurísticos para obtener la mayoría de sus resultados pero en la escritura propiamente matemática utilizaba su método de *exhaución* pues era el que otorgaba mayor validez a su trabajo matemático.

El trabajo de Arquímedes. Galileo o Newton muestran claramente que un resultado matemático no siempre se obtiene o descubre por medio de seguir una cadena de razonamientos lógicos. Más aún, la presentación acabada y detallada de una demostración matemática oculta todos aquellos razonamientos que llevaron a su construcción (De Villiers, 1993).

Postulamos que la verdadera riqueza de la demostración matemática no se encuentra en desarrollar una cadena deductiva de razonamientos lógicos matemáticos sino en los razonamientos que llevan al establecimiento del resultado que se quiere demostrar. Es decir, en las intuiciones, observaciones y experimentaciones y argumentaciones que se desprenden del trabajo reflexivo llevado a cabo por el individuo en su práctica científica. Siendo la demostración matemática únicamente el lenguaje en el que los matemáticos expresan sus resultados para ser validados frente a su comunidad.

Por lo tanto este trabajo de investigación se enfocará en estudiar aquellas intuiciones, experimentaciones y razonamientos que surgen antes de una demostración matemática en momentos específicos de la historia de la matemática y la demostración. Y para ello se han formulado las preguntas y los objetivos de este trabajo.

1.2 Preguntas de investigación

Con base en lo anterior, entonces, las preguntas que nos hacemos apoyados en el marco teórico de la Socioepistemología son las siguientes:

¿La demostración en matemáticas tiene objetivos diferentes que la demostración en otras áreas de las ciencias exactas como la física?

¿Puede, el análisis de los contextos en los cuáles se desarrollo históricamente la demostración matemática aportar elementos que nos permitan plantear propuestas hacia mejorar su comprensión y aprendizaje en la escuela?

1.3 Objetivos de la investigación

Esta investigación plantea la necesidad de estudiar cómo es que dos nociones de demostración tan distintas como lo es la noción de demostración en física y la noción de demostración en matemáticas, coexistieron durante una época en un mismo contexto institucional, el científico.

Creemos, al igual que otros investigadores, que los estudios sobre la demostración en educación matemática deben enmarcarse dentro de la problemática más amplia de la evaluación y desarrollo de las distintas prácticas argumentativas en diversos contextos institucionales. Sólo de esta manera seremos sensibles a las distintas modalidades de demostración, de sus condiciones de desarrollo, los papeles que desempeñan en los distintos contextos institucionales y las relaciones entre las mismas. (Godino & Recio, 2001)

Bajo el supuesto de que la argumentación matemática como una construcción sociocultural que emerge dentro de la comunidad matemática, y es desarrollada de acuerdo con las características del escenario sociocultural en el que se pone de manifiesto (Crespo Crespo, 2007). Buscamos entender cómo es que dos nociones de demostración pueden llegar a contraponerse o a complementarse en el desarrollo paralelo de dos grandes ciencias la física y la matemática.

Podríamos entonces decir que el ***objetivo general*** de la investigación será:

Entender las formas en que diferentes nociones de demostración surgieron a lo largo de la historia específicamente dentro de la física y la matemática. Y como estas pueden complementarse para el aprendizaje de la demostración matemática.

Y por lo tanto, ***los objetivos específicos***:

Caracterizar a las demostraciones consideradas propiamente de la física o de la matemática respectivamente en el desarrollo de la historia de estas dos ciencias.

Formular, en caso de ser identificada, la posible contraposición y coexistencia de ambas formas de demostración. Al tiempo en que trataremos de poner al descubierto sus condiciones de desarrollo, los papeles que desempeñan y las relaciones entre las mismas.

Dar características de las formas en que la demostración se ha desarrollado en ambos ámbitos. De tal forma que podamos plantear propuestas hacia la enseñanza de la demostración matemática.

1.4 La estructura de la tesis:

En el capítulo 2 se exponen los problemas identificados en diversas investigaciones con respecto a la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática formal en la escuela. También se presentan las propuestas que desde autores como Balacheff (1982), Duval (199), Godino y Recio (1997, 2001), Crespo (2005, 2007), Acuña (2006) y otros autores más, se han hecho respecto a la demostración en física. En el capítulo 3 se presenta una breve reseña de la demostración matemática poniendo un énfasis especial en aquellos momentos cruciales para el desarrollo de la demostración así como en los orígenes de la matemática moderna y su consecuente rompimiento con el mundo físico. En el capítulo 5 se encuentra la parte más sustancial de este trabajo, un análisis histórico del trabajo de científicos clásicos para quienes la observación científica del mundo físico les brindo las herramientas para establecer y probar conceptos y leyes matemáticas.

Capítulo II

Capítulo 2 Marco de Referencia.

2.1 La demostración matemática

Para la comunidad de matemáticos la demostración tiene como fin la validación del conocimiento matemático y como institución han establecido las reglas para ello. Está íntimamente ligada a las nociones de deducción y de su sistema axiomático. Basándose principalmente en argumentos deductivos, que si bien no es el único, si el principal objeto de la lógica formal. En este sentido la veracidad de los objetos matemáticos descansa en la validez de las reglas lógicas usadas en el proceso de su demostración.

Por lo tanto la matemática es una ciencia estrechamente relacionada con la lógica pues esta se originó de la necesidad de establecer los elementos que permitieran fundamentar y estructurar los razonamientos matemáticos.

En matemática, desde el punto de vista formalista, una demostración en una teoría: Es una secuencia de proposiciones, cada una de las cuales están estrechamente ligadas, por axioma o proposiciones que ha sido derivada de los axiomas iniciales por las reglas de inferencia de la teoría. Desde esta óptica, un teorema es una proposición que deberá derivar por medio de una serie de argumentos basados en la lógica deductiva en una demostración. Esta concepción de las demostraciones, se basa en aspectos sintácticos, haciendo hincapié en la aplicación de reglas de inferencia precisas y a veces sin hacer uso de la intuición. Desde esta perspectiva, la verdad se reduce a la coherencia dentro de un sistema axiomático (Crespo y Ponteville, 2005).

La matemática es una teoría completa que cumple con los cuatro aspectos fundamentales: que nos habla Crespo (2005):

a. Los objetos o entidades de carácter práctico y empírico sobre los que se quieren actuar y que sirven para controlar las suposiciones de la teoría.

b. La faz lingüística de la teoría compuesta por el vocabulario y sus afirmaciones científicas.

c. La estructura lógica de la teoría, que jerarquiza las afirmaciones de ésta por medio de nexos deductivos e inferenciales.

d. Los problemas relacionados con la validez y corrección de las afirmaciones de la teoría.

En el caso de la matemática, la validez de las afirmaciones se sustenta básicamente en el carácter deductivo de la lógica.

Es decir, en matemática se colocaron a las definiciones y axiomas antes que cualquier otra cosa. Solo entonces se realizaron las formulaciones precisas, elegantes declaraciones y sus demostraciones. Cualquier declaración en matemática que carece de una demostración no tiene lugar ni validez. Nadie lo tratará como eficaz. Y nadie lo usará en su propio trabajo. La demostración es la prueba final de cualquier idea nueva y una vez realizada nadie negará este hecho matemático en particular.

Otra característica especial de la matemática es su atemporalidad. Los teoremas que Euclides y Pitágoras demostraron hace 2500 años todavía son legítimos hoy; y los usamos con confianza porque sabemos que son tan verdaderos hoy como eran cuando fueron demostrados. Las otras ciencias son muy diferentes. La medicina, la ciencia informática o la literatura de hace algunos años es considerada prácticamente obsoleta. Porque lo que las personas pensaban entonces ya ha cambiado, pasa y se transforma. Muchos aspectos de la matemática, por el contrario, no han cambiado en cientos de años.

2.1.1 Lógica y Matemáticas

Es ineludible la estrecha relación entre estas dos ciencias. Por un lado la lógica es una ciencia filosófica y parte de su método es matemático. Por el otro la matemática es considerada en la actualidad como la ciencia deductiva por excelencia, ya que en ella se pueden obtener unos resultados a partir de otros mediante la aplicación de leyes lógicas. (Crespo Crespo, 2005).

En consecuencia en esta estrecha relación es que surge la lógica matemática. Al inicio la lógica está al servicio del razonamiento en el lenguaje ordinario, aunque después del siglo XIX se construye como una forma del álgebra abstracta a través del trabajo de un grupo de matemáticos que se adentran en la investigación lógica. Posteriormente se buscaba en ella la fundamentación de todo razonamiento matemático en la obsesión por el rigor que sacude a la matemática del XIX. Cuando aparecen las geometrías alternativas a la euclidiana surge el problema de la consistencia y de los fundamentos del método axiomático, tal como fueron sentados por el propio Euclides, se vuelve un gran problema para las matemáticas.

De esta manera la lógica matemática se basa en el método matemático. Por principio de cuentas, las teorías de ambas ciencias, la lógica y la matemática, cargan un peso verificativo. Sus resultados no dependen de manera exclusiva de los principios postulados por ellas mismas, sino de su capacidad de explicar, de manera científica, fenómenos que les son externos e independientes.

Se basa en sistemas lógicos formales, también llamados teorías formales, y teorías lógicas (filosóficas) propiamente dichas. Un sistema lógico formal es una entidad matemática compleja. Tradicionalmente, se componen de una alfabeto, un conjunto de fórmulas bien formadas, un conjunto de reglas de inferencia y, en algunos casos, de un conjunto de axiomas. En tanto objeto matemático, todo sistema lógico formal tiene propiedades matemáticas. Algunas de ellas (las así llamadas propiedades sintácticas) son internas, mientras que otras (las así llamadas propiedades semánticas) son externas, es decir, se predican tan sólo en relación con otro sistema matemático (a veces meramente posible) comúnmente llamado su modelo. Algunas de las propiedades matemáticas de los sistemas formales puede expresarse como propiedades relativas al sistema de alguno de sus elementos.

En este respecto, el objetivo de los sistemas lógicos formales es construir una correspondencia entre propiedades lógicas y matemáticas. Esta correspondencia se crea cuando se establece un mecanismo, a veces muy complejo, de representaciones de las entidades lógicas cuyas propiedades serán modeladas por algún tipo de objeto matemático constituyentes del sistema formal. Tradicionalmente esto implica representar proposiciones mediante fórmulas, argumentos por medio de secuencias de fórmulas, y teorías mediante conjuntos de fórmulas. Este mecanismo es comúnmente llamado “formalización” o “simbolización”.

La lógica matemática en este sentido se dedica al estudio de los sistemas formales de la lógica como meros sistemas matemáticos, no lógicos. Estudia las propiedades formales del tipo de sistemas matemáticos que se utilizan, o en principio podría utilizarse, en lógica. En este sentido, esta lógica matemática sólo se interesa en las primeras dos

La lógica matemática es una ciencia formal que se presenta siempre en forma de cálculo. A imitación de la matemática desarrolla un método formalista donde las reglas operacionales se refieren a las forma de los signos y no a su sentido.

2.2 Los problemas de la demostración

Existe una constate preocupación por la dificultad que presentan los estudiantes de matemáticas al enfrentarse a la demostración de resultados matemáticos y por lo tanto numerosas investigaciones que intentan estudiar la noción de demostración matemática.

Las dificultades que presentan los estudiantes al enfrentarse a la demostración matemática, en el plano de los cognitivo son muy complejas. Existen muchos trabajos que describen esta situación. También existen muchas formas de ver el problema.

La demostración no es una actividad sintáctica, un mero juego deductivo; por el contrario, en la actividad demostrativa, la cognición se dirige a la construcción de un universo matemático que funciona de modo *significativo* para el sujeto. La demostración conlleva, entonces, la construcción misma de los objetos que intervienen en el discurso demostrativo. (Armella, 1996)

El pensamiento deductivo se va construyendo lentamente a lo largo de las distintas etapas de la escuela. Esto no significa que se logre realmente su construcción de manera solida. Es común encontrar alumnos universitarios que aún no han logrado dominar este contenido procedimental (Ibañes & Ortega, 1997).

En muchas ocasiones, un estudiante no entiende por qué hay que demostrar deductivamente una afirmación matemática. Por ejemplo, porque demostrar que 5+3=3+5, o lo que es lo mismo a+b=b+a (Kleine, 1976). Esto ocurre generalmente porque, para él, se trata de una afirmación obvia o porque ya la considera suficientemente demostrada por las mediciones o transformaciones que ha realizado con algunos ejemplos adecuados. Así pues, previo al problema de enseñar a demostrar a los estudiantes, está el de identificar las creencias de los estudiantes al respecto y saber qué les convence y qué no les convence de que una afirmación matemática es cierta (Gutiérrez, 2004).

En los trabajos desarrollados por Dina y Pierre Van Hiele se atribuye esta situación al hecho de que los diferentes temas son presentados en un nivel más alto del que pueden acceder los alumnos.

Por otro lado, el estudiante también se enfrenta a la compleja estructura lógica de algunos enunciados escolares. Se les dificulta identificar el contenido del enunciado y la correcta identificación de hipótesis y tesis. En Cannizzaro (2008) se reportan una serie de factores que influyen en el estudiante al tratar de comprender la estructura lógica de los enunciados escolares.

- El contexto sociocultural, como determinante del significado de los términos que inevitablemente se utilizan en el ambiente escolar y por lo tanto como influyente en la comprensión de los enunciados.
- El lenguaje, como elemento importante del ambiente sociocultural.
- El ambiente escolar en su variedad de disciplinas enseñadas, al poner dicha variedad problemas de conflictos de significado para ciertos términos.
- El ambiente escolar limitado a la clase de matemáticas, al establecerse en dicho ambiente el contrato didáctico, y al ser lugar, de dinámicas sociales que influyen sobre el aprendizaje.
- El papel del maestro como artífice no único, pero sí importante, de la transposición didáctica y por lo tanto responsable de los posibles obstáculos didácticos.

Lo anterior nos hace reflexionar sobre la importancia del ambiente sociocultural al momento de construir conocimiento. Pero, también sobre la importancia del maestro en el proceso de aprender a demostrar en matemáticas. Las ideas que tiene sobre la matemática, su didáctica, estrategias y ejemplos que utiliza para que los estudiantes puedan aprender a realizar demostraciones en matemáticas.

Este tema es muy controversial. En todo el mundo se han realizado diversas investigaciones que estudian el factor maestro y su influencia directa e indirecta en el aprendizaje de todo tipo de contenidos matemáticos. Por ejemplo al respecto Larios considera que:

…pero que no hacer otra cosa que evidenciar que el "modelo de rigurosidad" por excelencia que alguno de los docentes manejan en sus cursos no es otra cosa que un producto falible y social, influenciado por el entorno cultural e intelectual, (Larios, 2002)

Diversas investigaciones de la matemática educativa señalan que el docente de matemática enseña esta disciplina de acuerdo con sus ideas acerca de la matemática (Ibañes & Ortega, 1997). Estas investigaciones señalan que si un profesor piensa que el carácter deductivo de la matemática es su esencia, en sus clases pondrá un gran peso en las demostraciones. Si, por el contrario piensa que la matemática es un conjunto de fórmulas y algoritmos aplicables a diversas situaciones, entonces el alumno ejercitará para adquirir fluidez en su uso.

También existen los profesores que creen que la demostración no es más importante al momento de aprender matemáticas que aprender los procedimientos de manera ordenada y correcta. Crespo y Ponteville (2005) también concluyen, en su investigación sobre *Las Funciones de la Demostración en el Aula de Matemática*, que la enseñanza de la demostración como contenido matemático no es siempre una problemática asumida por los docentes en forma sistemática, sino en algunos casos de manera intuitiva, toman como modelo aquel en el que han sido formados. Los docentes no diferencian la idea de hacer demostraciones y la de enseñar a demostrar, siendo esto último algo que pocos llevan a cabo en el aula.

El libro de texto que se utiliza en clase o que rige el rumbo del curso también tiene una gran importancia en el aprendizaje de la demostración en matemáticas. Existen investigaciones que muestran que en los libros de texto predomina una concepción rígida y rigurosa de la demostración matemática. En particular en los libros de texto de bachillerato predomina la idea de demostración deductiva y formal, entendida de un modo rígido y absoluto. Ibáñez M. (2001) encuentra que en los libros de bachillerato existe cierta preocupación por demostrar los teoremas como si se tratara de un trámite obligado y no ser acusados de falta de rigor, pero se emplean pocos recursos en hacer comprensibles esas demostraciones, en prevenir errores y dificultades,… en detenerse en sus razonamientos, en reconocer sus técnicas, en destacar sus funciones, y en potenciar su utilización.

Por otro lado Armella (1996) nos dice que los criterios de validación que se emplean en la investigación matemática formal (en la presentación formal de los resultados en matemáticas) *han sido trasladados a la matemática escolar como criterios para medir el nivel de aprendizaje del estudiante*. Es decir, se hace uso de un criterio lógico para discriminar una situación de carácter cognitivo.

Se han expuesto diversos trabajos que tratan sobre las dificultades de los estudiantes al enfrentarse a la demostración, sin embargo existe algo que no ha sido analizado. Dentro del salón de clases el estudiante también está expuesto a distinto formas de demostración y está sujeto, por tanto, a las influencias de distintos contextos institucionales: particularmente no puede evitar participar como ciudadano en la vida cotidiana y emplear todos los recursos característicos del razonamiento informal; es también alumno de las clases impartidas sobre ciencias experimentales, donde es inducido a pensar en términos empíricos e inductivos; en las clases de matemáticas recibe, por otra parte, diferentes modelos de demostración matemática (Nápoles, y otros, 2001).

2.3 Diversos acercamientos al problema

Diversas investigaciones han considerado necesario poner la mirada a otros elementos que intervienen en el proceso de demostrar o de presentar una afirmación más que en el objeto terminado y denominado “demostración”. Nociones como argumentación, explicación y prueba han surgido como acciones intelectuales que si bien no tienen en sí mismas el rigor de una demostración matemática tienen el mismo objetivo que es mostrar los fundamentos por los cuales se considera cierta una afirmación.

Al abordar el concepto de demostración, es de gran utilidad conocer la significación que le otorga Balacheff (1982). Este autor utiliza el término *explicación* como idea primitiva de la cual derivan las de prueba y demostración, pretende hacer inteligible la verdad de una proposición ya conocida. No se reduce a una cadena deductiva, sino que se organiza y construye a partir del lenguaje coloquial. Una *prueba* se compone, por su parte, de explicaciones aceptadas por una comunidad dada en un momento dado, lo que hace que pueda evolucionar en el tiempo o ser aceptada por una comunidad determinada y no por otra. Para que una explicación sea una prueba debe ser reconocida por alguien como razón suficiente en el correspondiente marco discursivo.

Por otro lado Duval (1999), quien ha hecho profundas reflexiones acerca del tema considera necesario distinguir entre explicación y argumentación. En la *argumentación* se trata de mostrar el carácter de verdad de una proposición, mientras que en la *explicación* los enunciados tienen una intención descriptiva de un fenómeno, resultado o comportamiento.

Otros autores (Godino, Recio, 2001) consideran que la idea de explicación de Balacheff puede asimilarse a la noción de *argumentación* de Duval. Utilizan el término *demostración* para referirse de modo genérico al objeto emergente del sistema de *prácticas argumentativas* (o argumentaciones) aceptadas en el seno de una comunidad, o por una persona, ante situaciones de validación y decisión, o sea situaciones que requieren justificar o validar el carácter de verdadero de un enunciado, su consistencia o la eficacia de una acción.

En todos estos trabajos la constante el carácter que dan a las argumentaciones o pruebas y su sentido de validez respecto a una comunidad y al lenguaje aceptado por esa comunidad. Además de que estas buscan la evolución en el tipo de argumentos.

Para Crespo (2005) lo más importante en el proceso de argumentación es la influencia de los diversos factores que varían según el escenario en que se encuentre.

Dado que los estudiantes se encuentran simultáneamente sujetos a distintas instituciones, en cuyo seno se ponen en práctica distintos esquemas argumentativos, parece razonable que los estudiantes tengan dificultades en discriminar el uso respectivo de cada tipo de argumentación. (Godino & Recio, 2001)

Al respecto Nápoles (2000) nos dice, "la Matemática debe ser considerada como una clase de actividad mental, una construcción social que encierra conjeturas, pruebas y refutaciones, cuyos resultados están sometidos a cambios revolucionarios y cuya validez, por tanto, puede ser *juzgada* con relación a un enclave social y cultural, contrario a la *visión absolutista (platónica)* del conocimiento matemático

Y como cada escenario resulta muy característico, entonces cada uno tiene formas específicas, Recio (1999): la argumentación y la demostración matemática, como un tipo especial de argumentación, adquieren connotaciones particulares en distintos contextos institucionales en donde se pone en juego. El estudiante de matemática debe aprender en el seno de la clase de matemáticas las características notacionales, conceptuales y fenomenológicas de la demostración. Podemos consideran que las argumentaciones matemáticas son construcciones que reflejan las características de escenarios socioculturales y pensado en la riqueza de la construcción de significados en la interacción dentro del aula de clase donde se negocian y articulan significados, pero también se abren alternativas explicativas, se plantean debates y explicaciones que casi siempre llegan a una conclusión (Resendiz, 2004). Considerando que también dentro de una misma aula de clase existen varias formas de demostrar muy características, como por ejemplo la noción de demostrar en física.

En Godino y Recio (1997) se analizan los rasgos característicos del significado de la noción de prueba en distintos contextos institucionales: lógica y fundamentos de las matemáticas, matemática profesional, ciencias experimentales, vida cotidiana y clase de matemáticas. Ellos reportan "como consecuencia se deduce que el estudio de los problemas epistemológicos y didácticos que plantea la enseñanza de la prueba en la clase de matemáticas debe encuadrarse dentro del marco más general de las prácticas argumentativas humanas" y valiéndose de que la postura socioepistemológica considera que la matemática no es una ciencia que surge aislada de la sociedad, sino inmersa en ella y por lo tanto recibe influencias fuertemente basadas en el pensamiento, las necesidades y características del escenario en que se desarrolla, la importancia de explorar la influencia del medio social en las interacciones dentro del aula y como es que esta regula y norma la actividad matemática.

2.4 Nuestra propuesta, la demostración en física

En este momento cabe resaltar que en alguna época algunos avances en la matemática debieron su surgimiento a observaciones y conjeturas obtenidas directamente de los fenómenos físicos por parte de grandes científicos de la historia. Podemos pensar que también dentro de una misma aula de clase existen varias formas de demostrar muy características, como por ejemplo la noción de demostrar en física o en otras áreas de las ciencias experimentales además de la matemática.

La demostración matemática es básicamente un proceso de validación que siguen los matemáticos para justificar las propiedades de sus teorías. Aunque existen otras opciones, el modelo actual dominante de demostración, dentro de la institución matemática, es la demostración lógico formal. No así, en otras ciencias.

Pero cada estudiante es miembro, y está sujeto, por tanto a las influencias de distintos contextos institucionales: particularmente no puede evitar participar como ciudadano en la vida cotidiana y emplear todos los recursos característicos del razonamiento informal; es también alumno de las clases impartidas sobre ciencias experimentales, donde es inducido a pensar en términos empíricos e inductivos; en las clases de matemáticas recibe, por otra parte, diferentes modelos de demostración matemática. La influencia de estos diferentes modos de razonar condiciona su comprensión y dominio de la demostración matemática.

Las ciencias experimentales (por ejemplo física, biología, química) cuidan que los experimentos del laboratorio o las demostraciones verifiquen y comprueben las aseveraciones. El punto de referencia en estas asignaturas es el experimento reproducible bajo cierto control. En sus trabajos publicados, estos científicos describen qué han descubierto y cómo llevaron a cabo el experimento, paso a paso, brevemente. Describirán el control, que es el registro con el que los resultados experimentales son comparados. Los científicos interesados podrán leer el artículo y reproducir el experimento en sus propios laboratorios. Los experimentos más clásicos, fundamentales e importantes se hacen en el aula de clase y son reproducidos por estudiantes en todo el mundo. El proceso intelectual es más empírico y en consecuencia el procedimiento de verificación es más práctico y directo.

A pesar que aparezca un poco de artificialidad en los procesos matemáticos, la matemática suministra modelos para la naturaleza. Una y otra vez, y más con el avance de la ciencia y la tecnología, la matemática ha ayudado a explicar y demostrar cómo trabaja el mundo a nuestro alrededor.

Algunos ejemplos que ilustran este punto:

- Galileo en el siglo XVII, logró describir mediante formulas matemáticas. El movimiento de los cuerpos cayendo y la trayectoria parabólica que seguían los proyectiles

- Isaac Newton obtuvo las tres leyes del movimiento planetario de Kepler de sólo su ley universal de la gravitación y el cálculo.

- Gracias a Isaac Newton, Willebrord Snell, y Pierre de Fermat es que hoy tenemos una teoría matemática completa de la refracción de la luz

- Existe una teoría matemática de la propagación del calor y de las ondas electromagnéticas obtenidas mediante razonamientos matemáticos.

- Toda teoría de campo clásica de física es formulada con relación a la matemática.

- Las ecuaciones de campo de Einstein son analizadas usando matemática.

- Los Cd's fueron creados con base en el análisis de Fourier y la teoría de codificación, ambas ramas de la matemática.

Y podríamos seguir listando infinitamente.

El punto clave es comprender que la demostración es fundamental para desempeñarse en física e indispensable para trabajar la matemática moderna, y es lo que la hace confiable y reproducible.

"Ninguna otra ciencia depende de la demostración y por lo tanto ninguna otra ciencia tiene la solidez a prueba de balas de la matemática. Pero la matemática es utilizada de muchas maneras, en todas las disciplinas. Y las formas en que se utiliza son muchas y variadas. Las otras disciplinas a menudo gustan reducir sus teorías a matemáticas o las explican por lo menos en los términos matemáticos porque da cierta elegancia y solidez al hecho" (Krantz, 2007).

Lo que intentamos es la comprensión del complejo y rico entramado de pautas de interacción, que se dan para producir conocimiento, por lo que esta investigación pretende localizar y analizar las maneras en que dos formas de demostrar han coexistido y se han desarrollado a través de la historia, la demostración propia de la matemática y la propia de la física.

2.5 La propuesta socioepistemológica

Considerando que demostrar en matemáticas no es algo trivial y que a lo largo de la historia se ha desarrollado en diversas culturas y etapas. Nos apoyamos de una aproximación teórica que permite rescatar aspectos de las argumentaciones como construcciones sociales en el sentido de Crespo (2007) a través de desarrollo científico en una etapa en que la matemática obtenía sus justificaciones de la observación de los fenómenos observables en la naturaleza.

La línea de investigación que desarrollamos en la disciplina de matemática educativa, la Socioepistemología. Considera necesario dotar a la investigación de una aproximación sistémica situada, o sea, entiende a las circunstancias y escenarios socioculturales particulares, que permite incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza (Cantoral & Farfán, 2004).

La *socioepistemología* problematiza la construcción del conocimiento matemático, pues no centra su atención en cómo se construyen conceptos en sí, sino que se ocupa del examen de los elementos que posibilitan su construcción, es decir, las *prácticas sociales* asociadas a ellos (Cantoral & Farfán, 1998). Ha reflexionado que el problema de la enseñanza de las matemáticas no es un problema matemático sino social ya que se la matemática ha estado al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia (Cantoral y Farfán, 1998). Este trabajo considera para su análisis aquellos dominios científicos y prácticas de referencia que han permitido a la matemática constituirse como el campo de conocimiento universal que es ahora y cómo la demostración matemática se valió de ellos para su estructuración como método para dar validez, rigor y fundamento a las verdades matemáticas. Además, considerando que "existen formas de argumentación que se construyen fuera de escenarios académicos que no se basan en la lógica aristotélica[1] y que llegan al aula de matemáticas, no coincidiendo sus características con las de las argumentaciones muchas veces esperadas en escenarios académicos"(Crespo 2007) y que las argumentaciones matemáticas son construcciones que reflejan las características de escenarios socioculturales.

2.6 El papel y la función de la demostración en Matemáticas.

Michael de Villiers ha realizado trabajos centrados en el papel de las demostraciones matemáticas en el aula y las posibles funciones que puede atribuírseles (de Villiers, 1993). Al referirnos a funciones de las demostraciones en el aula, está implícito que sus investigaciones tienen en cuenta la consideración de una didáctica con escuela, sin embargo no llegan a ponerse de manifiesto en ellas la presencia de escenarios socioculturales.

Tradicionalmente, las demostraciones ocupan una posición central en la actividad matemática, constituyendo el método de prueba de las afirmaciones de esta ciencia, en contraposición, por ejemplo de lo que ocurre en la física o en otras ciencias experimentales o sociales, en las que el método de verificación de las afirmaciones consiste en su contrastación con la realidad. Aunque existen otras posturas frente a la naturaleza de la matemática, el modelo actual dominante de demostración, dentro de la institución matemática, es la demostración lógico formal.

[1] lógica aristotélica o clásica, cuyas bases fueron sentadas por Aristóteles. Fue elaborada por los pensadores del medievo y enseñada durante siglos en la educación media y superior.

De esta manera, la demostración matemática es básicamente considerada como el proceso validativo seguido por los matemáticos para justificar las propiedades de sus teorías. Sin embargo ésta no es el único papel, ni el más importante que desempeña la demostración en la matemática, y mucho menos en el aula de matemática.

Michael de Villiers (1993) presenta un modelo en que se evidencia las siguientes funciones:

1. *Verificación o convicción*: se orienta a establecer la verdad de una afirmación.

2. *Explicación:* exhibe los por qué de la verdad, profundizando en las causas correspondientes.

3. *Sistematización:* organiza diversos resultados en un sistema que incluye axiomas, conceptos y teoremas.

4. *Descubrimiento o creación*: permite llegar a nuevos resultados.

5. *Comunicación:* transmite el conocimiento matemático.

La verificación es, sin lugar a dudas, la función que parece ser la más aceptada entre matemáticos y docentes. Según esta función, establece la verdad de una afirmación. Se piensa a las demostraciones como autoridad para establecer validez de conjeturas y se considera detrás de teoremas la presencia de una secuencia de transformaciones lógicas. Se atribuye en primera instancia a las demostraciones la propiedad de generar certeza absoluta acerca de la validez de una conjetura, ya que por medio de leyes lógicas conduce hasta el resultado correspondiente. Normalmente se busca la demostración después de haber tenido la convicción de validez. Sin embargo, la convicción personal se logra no sólo con una demostración rigurosa, también son necesarias muchas veces la intuición y la verificación cuasi-empírica. Un ejemplo en el que se puede apreciarse claramente a qué nos referimos es la conocida frase que

Cantor dirige a Dedekind tras hallar una función biyectiva entre los puntos de la recta y los del plano: “¡Lo veo, pero no lo creo!”. De esta manera expresa que la demostración que había encontrado en referencia a la equipotencia de los continuos de cualquier número de dimensiones no alcanza para que lograra la convicción al respecto.

Las demostraciones también otorgan un medio de *explicación***.** En oportunidades, el matemático se enfrenta a la existencia de ejemplos que verifican cierta propiedad. Una demostración, tal vez basada en ciertos cálculos algebraicos, por ejemplo, le puede proporcionar un mayor conocimiento de las causas por las que ocurría lo que ha encontrado previamente en los ejemplos. De esta manera la evidencia cuasi-empírica era suficiente, la demostración brindó una explicación o aclaración de lo observado. Los docentes recurrimos muy a menudo a las demostraciones con este fin.

En relación con *la sistematización*, es necesario centrarnos en la visión de la demostración dentro de un sistema axiomático. Es en este caso la estructura lógica subyacente la que permite organizar más allá de la intuición. Esta visión de las demostraciones, que es apropiada del formalismo, ayuda a evitar inconsistencias, razonamientos circulares y suposiciones no explícitas. Cada teorema ocupa un lugar de la estructura existente, la verdad se reduce en este caso a la consistencia dentro del sistema.

La demostración puede ser vista también como *un medio de descubrimiento*. No todos los resultados matemáticos surgen de la intuición. Existen algunos teoremas que no aparecieron como consecuencia del hallazgo de ejemplos que verificaran cierta propiedad, sino que se llego a ellos a partir de razonamientos deductivos; la creación puede ser el producto de la demostración misma. A esto es a lo que se refiere la función de descubrimiento o creación de las demostraciones.

La demostración como *medio de comunicación* de resultados se refiere a la forma de discurso entre quienes hacen matemáticas. Este intercambio se basa en la existencia de significados compartidos a través de un lenguaje común. Esta función permite el abordaje crítico de las demostraciones.

Este modelo intenta exponer algunas de las funciones de la demostración dentro de la actividad matemática científica pues permite vislumbrar las posibilidades de modificar algunas prácticas vinculadas con la demostración en el aula evitando caer en la función formalista de verificación que se reconoce generalmente en la enseñanza de la matemática en las aulas. Estas posibilidades se sustentan en la posibilidad de reconocer en las demostraciones funciones diversas, además de la verificación y de esta manera enriquecer el tratamiento que se dé a las demostraciones y más generalmente a las argumentaciones lógicas en el aula de matemáticas.

Estas no son las únicas funciones reconocidas por los especialistas. Gila Hanna (Hanna, 2000) amplia el modelo de Villiers considerando también las funciones *de construcción de una teoría empírica, exploración de significados de una definición* o de las consecuencias de una suposición e incorporación de un hecho bien conocido a un nuevo esquema o visión desde una nueva perspectiva.

Sin embargo, aclara el autor, la enumeración de las funciones de las demostraciones que hemos citado no es exhaustiva, y además no siempre se ponen de manifiesto simultáneamente todas, ni existe un esquema típico de funciones común a todas las demostraciones y todos los momentos. Por el contrario, en cada momento es posible que predomine una o varias de ellas, según sean los interlocutores y los casos particulares que se estén tratando. (De Villiers, 1993)

2.7 Tema de la investigación

En los últimos años, para la Matemática Educativa, ha aumentado el interés por la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la demostración. No hay más que ver cualquier revista especializada en educación matemática para darnos cuenta de la cantidad de trabajos relacionados con esta problemática.

Este interés parece justificado por la importancia de la demostración para la propia matemática pero también por el bajo nivel que muestran los estudiantes en la comprensión y elaboración de demostraciones. Acuña (1996) nos plantea que los alumnos de ingreso al nivel medio superior no tienen aún herramientas para enfrentarse a situaciones como argumentar, conjeturar, deducir o demostrar, pues todas sus herramientas mentales han sido desarrolladas para otro tipo de problemas, como el cálculo, la construcción y el uso de algoritmos.

También podemos anexar a la problemática la dificultad que tiene el profesor al intentar enseñar a demostrar al estudiante, pues diversas investigaciones muestran que el docente de matemáticas enseña de acuerdo a las concepciones que tiene de esta disciplina. Estas investigaciones señalan que si un profesor piensa que el carácter deductivo de la matemática es su esencia, en sus clases pondrá un gran peso en las demostraciones. Si, por el contrario piensa que la matemática es un conjunto de fórmulas y algoritmos aplicables a diversas situaciones, entonces el alumno ejercitará para adquirir fluidez en su uso. (Crespo & Ponteville, 2005).

En esta investigación, Crespo y Ponteville (2005), se concluye que la enseñanza de la demostración como contenido matemático no es siempre una problemática asumida por los docentes en forma sistemática, sino en algunos casos de manera intuitiva, tomando como modelo aquel en el que han sido formados. Pero más importante aun se encontró que los docentes diferencian la idea de hacer demostraciones y la de enseñar a demostrar, siendo esto último algo que pocos llevan a cabo en el aula. La falta de presencia explícita dentro de los planes de estudio de las carreras de profesorado de matemática y dentro de las planificaciones de la enseñanza en los distintos niveles de las demostraciones como contenido, hace necesaria la reflexión y abre una brecha muy importante dentro de la investigación en matemática educativa, y concluyen que aun cuando la demostración es un concepto central de la matemática como ciencia no lo es en la práctica dentro de su enseñanza.

Recio (1999) nos dice:

"Aunque inicialmente nos orientamos hacia el estudio del razonamiento matemático, posteriormente preferimos centrarnos en la demostración matemática, que no presenta ese significado psicológico, mentalista, difícil de operativizar, que desde ciertas perspectivas, puede tener el razonamiento. Además, nos dimos cuenta de que es, precisamente, en las situaciones de validación matemática, particularmente en las demostraciones matemáticas, donde con más evidencia se ponen en juego las capacidades de razonamiento matemático"

Lo cual nos muestra la importancia de la demostración en el estudio de la matemática por lo que es de aquí que nace nuestra inquietud por identificar cuáles son las concepciones que tiene el estudiante sobre la demostración, que en ocasiones pueden ser varias concepciones en un mismo individuo. El estudiante se encuentra con diversos significados de demostración en distintos contextos institucionales en su cotidiano, una noción de demostración en la escuela, que muchas veces no es la misma que en la casa, en la calle, con los amigos, en el trabajo, etc. cada uno con un distinto sistema de prácticas argumentativas que se encuentra entre sus dimensiones institucionales y personales.

La idea de demostración deductiva y formal, entendida de un modo rígido y absoluto en el seno de la comunidad matemática como la única concepción posible, parece necesitada de una revisión teórica. Existen Investigaciones que nos muestran que "existen formas de argumentación que se construyen fuera de escenarios académicos que no se basan en la lógica aristotélica y que llegan al aula de matemática, no coincidiendo sus características con las de las argumentaciones muchas veces esperadas en escenarios académicos" (Crespo Crespo, 2007) y pensando que las argumentaciones matemáticas son construcciones que reflejan las características de escenarios socioculturales.

Consideramos, en este sentido, que es necesario realizar un estudio sistemático sobre los diversos significados de demostración que viven en un mismo contexto institucional, así como su relación con otras nociones próximas, tales como explicación, argumentación, razonamiento, verificación, etc.

Este estudio busca poner al descubierto nuevas cuestiones de investigación, aportar interpretaciones alternativas de las dificultades de los estudiantes y fijar fundamentos para la elaboración de propuestas de intervención didáctica.

Este estudio podría hacernos sensibles a las distintas nociones de demostración que viven en un mismo contexto institucional, de sus condiciones de desarrollo, los papeles que desempeñan y las relaciones entre las mismas.

En el aula de matemáticas, las argumentaciones desempeñan distintas funciones en las que se ponen en juego habilidades propias del pensamiento racional. Estas habilidades se van construyendo a través de los distintos niveles de la enseñanza, a lo largo de un extenso proceso. En este proceso, como en todo aprendizaje, el alumno recibe influencia de factores diversos que varían según el escenario en el que se encuentra. (Crespo Crespo, 2005)

En la enseñanza de la matemática no se debe descartar ninguna forma de razonamiento: Inductivo o deductivo. Obviamente, no se puede ni se debe pretender, sin embargo, que los alumnos sobre todo en los primeros niveles de la enseñanza, se muevan dentro de un marco axiomático riguroso y formal. Esta forma de razonar requiere de una madurez que recién comienza a alcanzarse en los últimos años de la adolescencia y cuyo pleno manejo requiere de un desarrollo más profundo del pensamiento. Sin embargo, ya sea a edades tempranas, es necesarios que los niños aprendan a intuir, planear hipótesis, hacer conjeturas, generalizar y cuando se posible, ensayar pequeñas argumentaciones y demostraciones aunque sin exigencia de formalización. En ciertos niveles y momentos del aprendizaje, la forma de razonar puede tener tanto interés como los propios contenidos conceptuales, porque el razonamiento es en sí mismo un gran contenido a aprender. (Crespo Crespo, 2005)

Ahora estudiemos la historia occidental de la demostración matemática y del desarrollo de la física. Tratemos de buscar características propias de los razonamientos detrás de la demostración matemática. Además de un análisis sobre las funciones que De Villers propone para la demostración matemática pero en el contexto de la física, pues deseamos identificar si existe o no una contraposición o complementariedad entre ambas formas de demostrar. Para esto suponemos que la demostración es un proceso que se desarrollo a lo largo de la historia y que fue normado por la práctica social de demostrar, en la comunidad matemática.

Capítulo III

Capítulo 3 La demostración matemática a través de la historia

3.1 El concepto de demostración

La tradición matemática es muy larga. Está en la naturaleza de la condición humana querer comprender el mundo a su alrededor, y la matemática es un vehículo natural para hacerlo.

En sus primeros días, la matemática estaba a menudo vinculada con las preguntas prácticas. Tanto los egipcios, como los griegos, estaban preocupados por la medición de terrenos. Por lo tanto, era natural considerar las cuestiones de geometría y trigonometría. Indudablemente triángulos y rectángulos surgieron de una manera natural en este contexto así que la organización se concentró en estos conceptos. Los Círculos, también, eran considerados naturalmente en el diseño de tanques para el agua y otros proyectos prácticos como el diseño de los ruedos. Por ejemplo en geometrías tan antiguas como la de Euclides se habla de círculos.

La matemática anterior era fenomenológica. Si uno pudiera dibujar una figura o dar una descripción agradable, entonces ésa era toda la justificación necesaria, para eso estaba un matemático. La noción de que los argumentos matemáticos podían ser demostrados no era aún una idea que había sido desarrollada. No había ningún patrón para el concepto de la demostración. Las estructuras lógicas, las reglas, aun no habían sido creadas.

Por lo tanto, es natural ahora preguntarnos: ¿qué es una demostración? Existen muchas concepciones, por ejemplo, para Krantz (2007), *heurísticamente, una demostración es una estratagema retórica para convencer a otra persona de que una declaración matemática es verdadera o legítima*, para Duval (1999) *una demostración es una secuencia de enunciados organizados según reglas determinadas* y para este el objeto de una demostración es la verdad por lo tanto, obedece a criterios de validez.

Existen muchas otras concepciones pero todas coinciden en que una demostración es una serie de argumentos, ante una situación de validación y decisión, aceptados por una comunidad o por una persona y tienen una forma particular dada por una serie de reglas determinadas de deducción.

¿Y cómo podríamos hacer una demostración? La idea anterior nos indica que de manera natural, demostrar que algo nuevo es verdadero es relacionarlo con algo viejo que ya ha sido aceptado como verdadero en el seno de una comunidad o por una persona. Aparece, por lo tanto, la idea de obtener un nuevo resultado de un resultado viejo, es decir, justificar los nuevos hechos matemáticos en relación con los viejos hechos matemáticos. La siguiente pregunta entonces es natural de hacerse, ¿cómo fue verificado el viejo resultado? Aplicando este régimen repetidamente, nos encontramos una cadena de razonamiento. Pero después uno no puede dejar de preguntar: ¿dónde comienza la cadena?

Esto no quiere decir que la cadena no tenga ningún principio: o que se extiende hasta el infinito. Porque si ése fuera el caso quebrantaría, a nuestro pensar, lo que una es una demostración. Pero si el razonamiento retrocede infinitamente, entonces no podemos decir que algo es verdad sin comprender una base o justificación inicial para nuestro razonamiento. Como veremos abajo, la respuesta para estas preguntas es la existencia de las definiciones y los axiomas, es decir, lo que es verdadero dentro de una comunidad.

Como consecuencia de estas preguntas antiguos matemáticos tuvieron que pensar en la naturaleza de la demostración matemática. Tales (c. 625-c. 546 a.C.), Eudoxo (408-355 a.C.) y Teeteto de Atenas (417a.C.-369 a.C.) formularon la idea de teorema de la actualidad. Tales demostró algunos teoremas en geometría (y éstos después fueron puestos en un contexto mayor por Euclides). Un teorema es la enunciación formal matemática de un hecho o verdad. Pero Eudoxo trató de encontrar los medios para demostrar sus teoremas. Su trabajo tenía una aptitud claramente práctica, y estaba particularmente encariñado con los cálculos.

Euclides de Alejandría fue el primero que formalizó la manera en que pensábamos ahora la matemática. "*Euclides tenía definiciones, axiomas y luego teoremas en ese orden. Nadie podrá negar la aseveración de que Euclides puso el paradigma con el que hemos estado practicando matemática durante 2300 años. Esto era matemática correcta"* (Krantz, 2007).

Ahora, siguiendo a Euclides, para abordar el asunto de retroceder en la cadena infinitamente de razonamientos, empezamos poniendo en juego las definiciones y los axiomas.

¿Qué es una definición? Para Krantz (2007) una definición explica el significado de una pieza de terminología. Hay problemas lógicos con incluso esta idea simple, porque, considere la primera definición que vamos a formular.

Suponga que deseamos definir un rectángulo. Esto será el primer término en nuestro sistema matemático. ¿Qué palabras podemos usar para definirlo? Suponga que definimos el rectángulo en relación con puntos, líneas y ángulos rectos. Eso no evita las preguntas: ¿qué es un punto? ¿Qué es una línea? ¿Qué es un ángulo? ¿Cómo definimos el ángulo? ¿Qué es un ángulo recto?

Por lo tanto, vemos que nuestra primera definición deba ser formulada en relación con palabras comúnmente aceptadas que no requieren más explicación.

Fue Aristóteles (384 a.C.-322 a.C.) quién insistió en que una definición deba definirse en términos de otros conceptos ya conocidos. Esto es a menudo muy difícil. Como un ejemplo, Euclides definió que un "punto" debe ser eso que no tenía ninguna parte. Por lo tanto, está usando palabras externas de la matemática, que son comúnmente aceptadas por parte de la jerga, para explicar la precisa noción matemática de "punto". En cuanto es definido "punto", entonces uno puede usar ese término en las posteriores definiciones, por ejemplo, defina "línea". Y uno también usará la lengua diaria que no requiere de explicación adicional. Es así cómo se construyó nuestro sistema de las definiciones.

Las definiciones nos dan una lengua para hacer matemáticas. Formulamos nuestros resultados, o los teoremas, usando las palabras que han sido establecidas en las definiciones. Pero aun no estamos listos para los teoremas. Porque tenemos que poner piedras angulares sobre las que nuestro razonamiento puede desarrollarse. Ése es el propósito de los axiomas.

¿Qué es un axioma? *Un axioma*[2] *(o postulado*[3]*) son una declaración matemática del hecho, formulado que use que la terminología que ha sido definida en las definiciones, que es tomada como evidente* (Krantz, 2007). Un axioma expresa una aseveración matemática perfecta. Uno no demuestra un axioma. Uno toma el axioma como dado, y es considerado obvio y plausible que no requiera demostración alguna.

En términos generales, en cualquier área matemática, uno comienza con una lista breve de las definiciones y una lista breve de los axiomas. A partir de los cuales se puede empezar a demostrar los teoremas.

Y que es una demostración[4]? *Una prueba es una estratagema retórica para convencer de a otro matemático que una declaración en particular (el teorema) es verdadero* (Krantz, 2007).

O como lo menciona Pluvinage (1996, pág. 77) "los matemáticos de hoy afirman que una demostración no es otra cosa sino lo que los matemáticos aceptan como demostración".

---

[2] La palabra Axioma proviene del griego *axios* que significa "Algo respetable".
[3] La palabra Postulado proviene de la palabra medieval latina *postulatus* que significa "nombrar" o "demandar".
[4] La palabra Demostración proviene del latín *demonstrāre,* que significa "manifestar" o "declarar".

Por lo tanto, una demostración puede tomar muchos formularios diferentes. La forma más tradicional de la demostración matemática es que es una secuencia fuerte de declaraciones conectada por reglas estrictas de la lógica. Hoy, una demostración podía (y a menudo se hace) llevar la forma tradicional, de hace 2300 años, de la época de Euclides. Pero también podía constar de un cálculo de computadora, o podía consistir en formular un modelo físico, o podía constar de una simulación de computadora o modelo, o podía constar de un cálculo algebraico por computadora. También podía constar de una aglomeración de estas varias técnicas.

3.2 Reseña histórica de la demostración matemática

En realidad la historia del concepto de demostración es algo rudimentario. No es muy clara, justo en el momento cuando matemáticos y filósofos concibieron la noción de que las aseveraciones matemáticas requerían ser justificadas. Ésta era una idea muy nueva pero también fue otro considerable salto para crear los métodos para formular la noción de demostración.

Gran parte de los vestigios históricos griegos fueron destruidos por los conflictos bélicos de la época.

Quizás la primera demostración matemática escrita en la historia es atribuible a los babilonios. Parece (al mismo tiempo que el chino) que conocían el teorema de Pitágoras antes de Pitágoras.

Los babilonios tenían ciertos diagramas que demuestran por qué el teorema de Pitágoras es verdadero y tablas que fueron construidas para validar este hecho. Ellos tenían listas de tríos de números, empezando con (3, 4, 5) y (5, 12, 13) que son las longitudes de los lados de triángulos rectángulos, es decir los enteros *a, b* y *c* que satisfacen: $a^2+b^2=c^2$

Como en el teorema de Pitágoras.

3.2.1 Pitágoras

Pitágoras (569-500 a.C.) fue tanto una persona como una sociedad (conocida como *Los Pitagóricos*). También fue una figura política y un místico. Fue especial en su tiempo, entre otras razones, porque involucró a mujeres como iguales en sus actividades. Pitágoras murió, de acuerdo con la leyenda, en las llamas de su propia escuela incendiada por intolerantes políticos y religiosos que levantaron a las masas para protestar contra la ilustración a la que Pitágoras trato de llevarles.

Pitágoras vivía antes de Euclides. Por lo tanto, sus contribuciones deben ser pensadas como muy influyentes, como la alimentación en la creación de Euclides. Los Pitagóricos son recordados por dos enormes contribuciones a la matemática. El primero de éstos fue establecer la importancia de, y la necesidad de, demostrar en matemática: Las declaraciones matemáticas, especialmente declaraciones geométricas, deben ser verificadas vía la demostración rigurosa.

Antes de Pitágoras, las ideas de geometría eran generalmente reglas que fueron obtenidas empíricamente, simplemente de la observación y de (ocasionalmente) la medición. Pitágoras también introdujo la idea de que un gran cuerpo de matemática (como geometría) podía ser obtenido de una pequeña cantidad de premisas. La segunda gran contribución fue el descubrimiento, y la demostración de, el hecho de que no todos los números son conmensurables. Más precisamente, los griegos antes de Pitágoras creyeron con una profunda pasión que todo fue desarrollado sobre los números enteros. Las fracciones aparecen en una manera concreta: como las proporciones del grupo de triángulos con la longitud de entero (y ser por lo tanto conmensurable, esta terminología anticuada hoy ha sido reemplazada por la palabra racional)

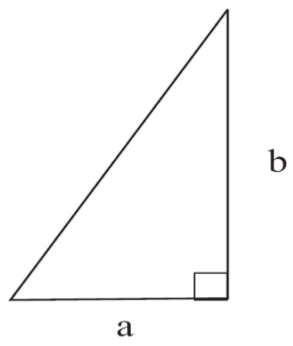


Figura 1 La fracción $\frac{b}{a}$.

Pitágoras demostró el resultado que ahora llamamos el *teorema de Pitágoras*.

Este dice que los catetos *a*, *b* y la hipotenusa *c* de un triángulo recto están relacionados por la fórmula:

$a^2+b^2=c^2$

Este teorema tiene quizás más demostraciones que algún otro resultado en matemática, son más de cincuenta. A decir verdad es uno de los resultados matemáticos más antiguos. Hay demostraciones que los babilonios y los chinos ya sabían al menos 500 años antes de Pitágoras.

Pitágoras notó que si $a = 1$ y $b= 1$, entonces $c^2 = 2$. Se preguntaba si había un número racional c que cumpliera esta última identidad.

Su aplastante conclusión fue esta:

Teorema: no hay número racional c tal que $c^2 = 2$.

Dicho en otras palabras, si hay un número cuyo cuadrado es dos entonces ese número no puede ser racional. Este resultado causó considerable disgusto y confusión a círculos de filósofos griegos. Había sido una creencia sujetada rígidamente que todo numero -por lo menos los números que uno encuentra en la vida real- eran racionales.

Entonces fue descubierto que había otros números (los irracionales). Tardaría dos mil años para que eruditos comprendieran completamente e incluyeran estas nuevas ideas en la estructura de la matemática.

3.2.2 Eudoxo

Fue Eudoxo (408-355 a.C.) quien comenzara la tradición imponente de organizar la matemática en teoremas. Eudoxo eran uno del primero en usar la palabra teorema en el contexto de la matemática.

A decir verdad Eudoxo eran un hombre de muchos intereses y muchos talentos. El fue experto en astronomía y teoría de números. Elaboró la teoría de las proporciones y se basó en las ideas de Pitágoras para crear los métodos de comparar los números irracionales. Esto le permitió desarrollar su *método de exhausción,* que es un precursor de la teoría de integración moderna (parte del Cálculo) que se usa para calcular áreas y volúmenes.

Lo que Eudoxo gano en rigor y precisión para la formulación matemática, lo perdió pues no demostró nada. La demostración formal aún no era una tradición en matemática. Como hemos notado, la matemática en sus primeros días era un tema en gran parte heurístico y empírico.

3.2.3 Euclides

Euclides (325-265 a.C.) es conocido como el primero en organizar la matemática sistemáticamente (una cuantiosa parte de la matemática que ya existía antes de él), en formular las definiciones, los axiomas y demostrar los teoremas, en un extenso tratado matemático de 13 volúmenes sobre materias tales como geometría plana, proporciones en general, propiedades de los números, magnitudes inconmensurables y geometría del espacio.

Éste fue un logro monumental y uno muy original.

Aunque Euclides no es tan conocido como lo es Arquímedes y Pitágoras, por su original y profunda perspicacia matemática, ha tenido un efecto incisivo sobre el pensamiento humano. Después de todo, Euclides escribió el tratado, ahora conocido como los elementos de Euclides, el cual ha sido consultado desde hace más de 2000 años.

Algo importante sobre los elementos de Euclides es el paradigma que provee para la manera en que la matemática debe ser estudiada y registrada. Comienza con algunas definiciones de términos e ideas para geometría y luego enuncia cinco importantes postulados (o axiomas) de geometría.

El quinto postulado: *Para cada línea l y cada punto P que no esté contendido en l hay una única línea l' que pasa por P tal que l' es paralela a l.*

Tiene una historia fascinante. Durante dos mil años las personas sospechaban que no era independiente de los otros postulados, que podía ser obtenido del primer y el cuarto postulado. Había peleas muy fuertes sobre tal origen y se cometieron muchos errores que se hicieron muy famosos. Pero, en 1826, Janos Bolyai y Nikolai Lobachevsky mostraban por separado que el quinto postulado nunca puede ser demostrado. Hay modelos para geometría en la que todos los otros axiomas de Euclides son verdaderos y el quinto postulado es falso. El quinto postulado es ahora uno de los axiomas matemáticos más usados en geometría.

Por supuesto que antes de enunciar sus cinco célebres postulados, Euclides había definido *punto, línea, círculo* y otros términos que él usaría.

Aunque Euclides pidió prestado, a matemáticos tanto pasados como contemporáneos, sus resultados, es conocido, generalmente, por su famoso "*axioma de las paralelas*", es decir el quinto Postulado, que fue creación propia de Euclides.

3.2.4 Nacimiento de la Matemática Moderna

No fue sino hasta finales del siglo XIX que ocurren cambio significativo en la estructura de las matemáticas y son aceptados por los matemáticos profesionales.

Durante el siglo XIX surgieron varias “geometrías no Euclídeas” al cuestionar la validez del “axioma de las paralelas”. Alrededor del año 1900, Hilbert encabeza un movimiento de matemáticos que, para resolver este problema en el sistema axiomático de los “Elementos de Euclides”, que afectaba a los fundamentos de las matemáticas, definen una nueva estructura de las matemáticas basada en unas reglas de demostración y en un sistema de axiomas que cumplieran los criterios de la lógica moderna, en particular los referentes a la necesidad de consistencia y completitud del sistema axiomático.

Pero Gödel mostró que la estructura matemática creada por Hilbert no era completa, al demostrar en 1931 el “teorema de incompletitud”, que afirma que ningún sistema axiomático suficientemente amplio como para incluir la aritmética elemental puede ser consistente. Es decir, hay afirmaciones que se puede demostrar y que son al mismo tiempo verdaderas y falsas.

Durante el siglo XIX surgieron muchas de las ideas importantes en la matemática de la actualidad y Europa fue el refugio para muchos matemáticos brillantes Mencionamos sólo algunos de estos:

- Joseph Louis Lagrange (1736-1813), Cauchy y otros sentaron las bases del cálculo de variaciones, la mecánica clásica, el teorema de la función implícita y muchas otras ideas importantes en el análisis geométrico moderno.
- Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) desarrolló las ideas seminales de la serie de Fourier y creó la primera fórmula para la expansión de una función arbitraria en una serie trigonométricas.

- Carl Jacobi (1804-1851), Ernst Kummer (1810-1893), Niels Henrick Abel (1802-1829), y muchos otros matemáticos de varios países desarrollaron la teoría de los números.

- Evariste Galois (1812-1832) y Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) sentaron las bases para el álgebra abstracta inventando la teoría de grupos.

- Augustin Louis Cauchy-sentó las bases de la teoría de variable compleja y ecuaciones diferenciales parciales. También hizo trabajo seminal en el análisis geométrico.

- Karl Weierstrass (1815-1897) a partir de numerosos ejemplos y teoremas, sentó las bases para un análisis riguroso e hizo contribuciones importantes al análisis tanto real como complejo.

- Bernhard Riemann (1826-1866) estableció la geometría diferencial, que define la versión de la integral que usamos hasta nuestros días, e hizo contribuciones a la teoría de variable compleja y al análisis de Fourier.

Y podríamos seguir aumentando la lista considerablemente. El siglo XIX fue un momento fecundo para la matemática, la comunicación entre los matemáticos se encontraba en un máximo histórico. Había muchas revistas de matemáticas muy importantes que cumplían con la importante labor de la difusión. Las grandes universidades de Italia, Francia, Alemania, e Inglaterra iniciaron fuertes programas de matemáticas. Esta fue la época en que se establecieron las bases de la matemática moderna. Y, por supuesto, las semillas del discurso riguroso se sembraron también en este momento.

Antes de las demostraciones, cerca de 2600 años atrás, la matemática era un tema fenomenológico y heurístico. Impulsado en gran medida, aunque no exclusivamente, por motivos prácticos de medición, de comercio y de conteo, no parecía haber ninguna necesidad real de crear algún tipo de teoría o del rigor. Fue hasta la aparición de la matemática abstracta o matemática que comenzó a quedar claro la importancia de las demostraciones. De hecho, las pruebas son fundamentales para la forma en que se ve la matemática en nuestro tiempo.

Gutiérrez (2004), nos dice…*algo en lo que están de acuerdo todos los matemáticos desde Tales de Mileto hasta la actualidad es en que la demostración es el criterio válido para confirmar la veracidad de un teorema.*

Podemos ver como a lo largo de la historia ha cambiando la concepción de "demostración", incluso en la actualidad, hay un fuerte debate en el seno de la comunidad matemática internacional sobre qué es demostrar y qué tipos de procedimientos son demostraciones y cuáles no lo son.

En el álgebra antigua, es decir, el álgebra clásica posterior a Diofanto (siglo III d.C.), no existía el concepto de variable tal y como lo entendemos hoy en día. Además de las constantes del propio cálculo, se usaban letras, pero éstas no eran más que abreviaciones de expresiones más complejas y/o recursos mnemotécnicos. Por lo tanto, no se tenían mecanismos para expresar cálculos en general. Dado que el formalismo algebraico contenía sólo símbolos constantes, no se podía expresar en él más que cálculos particulares que servían como ejemplo a paradigmas. A este uso de los símbolos se le llama sincopado, pues no forma un lenguaje simbólico propiamente dicho. No fue sino hasta el trabajo de Viète y Paralelamente, descartes (1635), que aparecieron en matemáticas las variables propiamente dichas y, con ellas, el álgebra moderna. La introducción de variables en el lenguaje algebraico permitió dos avances importantes dentro de la historia de la matemática: la posibilidad de expresar formas generales y, aun más importante, la posibilidad de calcular con ellas.

La diferencia central entre el álgebra moderna y la antigua es que, a través del uso de variables, por fin se pudo abstraer la forma general. A diferencia de las formulas con letras del álgebra antigua, que expresaban cálculos particulares de manera abreviada, las fórmulas con variables del álgebra moderna permitían por primera vez expresar formas generales del cálculo. Este nuevo lenguaje simbólico permitió a los matemáticos manipular las formas generales de una manera que era casi imposible dentro del lenguaje anterior.

Además les permitió integrar las nuevas fórmulas en un nuevo cálculo de formas generales. Es sólo hasta entonces que debe hablarse de un lenguaje simbólico propiamente dicho. En este sentido, un lenguaje simbólico no es simplemente aquel que usa símbolos, sino aquel que usa símbolos para calcular. Entonces, si bien es cierto que la introducción de las variables trajo consigo la posibilidad de expresar cierta generalidad a forma en matemáticas, el mayor logro conseguido con ellas fue la posibilidad de crear un nuevo tipo de cálculos formales. En otras palabras, lo que inaugura el álgebra moderna – y por lo que ésta representa una evolución significativa en el desarrollo de las matemáticas- es la posibilidad de calcular con formas.

La importancia de esta nueva herramienta no fue reconocida de manera inmediata por los matemáticos europeos de su tiempo. Por el contrario durante los siguientes doscientos años se vivió en la matemática occidental una intensa lucha entre dos maneras de entender la matemática: conforme al paradigma formal del álgebra, o de conforme al paradigma constructivo de la geometría. La extensión de este conflicto es tan obvia y tajante que es imposible entender la historia de las matemáticas, y por extensión, del conocimiento en general, de estos siglos sin darle un lugar central a esta pugna.

Capítulo IV

Capítulo 4 La demostración matemática y el desarrollo de la física.

Es innegable la estrecha relación que existe entre el desarrollo de la matemática y de la física. Más aún de la segunda como ciencia. Desde los griegos hasta nuestros días una ha acompañado a la otra, cada avance en una de ellas ha traído el progreso en la otra. Con frecuencia una teoría física no se ha podido desarrollar en una época determinada porque aunque era claro como debía ser concebida ésta, no existía la herramienta necesaria para su desarrollo.

Así mismo desde sus inicios la matemática se ha enriquecido de las observaciones y explicaciones de los fenómenos de la naturaleza sin los cuáles muchos avances de la matemática hubiesen sido imposibles o se hubiese retrasado su desarrollo. Existe una gran variedad de ejemplos que podrían mencionarse al respecto pero sin duda uno de los más palpables son los trabajos desarrollados por Arquímedes, Galileo, Newton y Leibniz quienes sentaron las bases para el cálculo integral y diferencial.

4.1 La demostración antes de la matemática moderna y su relación con el mundo físico.

El nacimiento de las matemáticas estuvo motivado principalmente por la necesidad de explicar los fenómenos que ocurrían en la naturaleza y de cumplir con las necesidades materiales. Estas necesidades están plasmadas en las huellas que han dejado los pueblos como los egipcios o los babilonios. Pero tal como ahora las demostraciones matemáticas no nos permiten observar los razonamientos que llevaron al matemático a la obtención de ese resultado. No podemos vislumbrar la serie de razonamientos que llevaron a estos pueblos al descubrimiento de diversos procedimientos de resolución cuya generalidad la expresan solo a través de casos numéricos particulares (Bourbaki, 1976).

Opuesto a lo ocurrido con el pueblo griego, donde la serie de razonamientos requeridos para llegar a una deducción eran más importantes que el resultado mismo. Fue el descubrimiento por parte de los pitagóricos de que el estudio de los fenómenos podía ser reducido a números y las relaciones entre ellos lo que muestra los inicios del poder que esta ciencia, entonces naciente, tendría hasta nuestros tiempos.

A partir de entonces la matemática se convirtió en una actividad exclusiva de los intelectuales. Y comenzó a desarrollarse como tal al grado que para Platón, uno de los más grandes filósofos griegos, el volver la mirada al mundo material para desarrollar algún resultado matemático era considerado una aberración. Pero en el fondo la necesidad humana de poder explicar los fenómenos naturales que sucedían a su alrededor y de utilizar la matemática como la herramienta que les permitía hacerlo persistió, incluso dentro de los mismos platónicos.

La obra de Aristóteles consiguió en ese momento sistematizar y codificar por primera vez los procedimientos de razonamientos confusos o no formulados por sus predecesores por medio de su lógica. Para él, era posible reducir todo razonamiento correcto a la aplicación sistemática de un pequeño número de reglas fijas, independientes de la naturaleza particular de los objetos que se trate (Bourbaki, 1976).

Sin duda el parte-aguas fue la escritura por parte de Euclides de “Los elementos”, obra que reúne de manera sistemática todos los resultados matemáticos conocidos hasta el momento. Si bien es considerada una obra totalmente matemática tuvo gran influencia en la forma en que los futuros intelectuales presentarían su obra científica (Arquímedes, Galileo, Newton). Esta estructura matemática de “Los elementos” represento para ellos la forma de dar validez a sus reflexiones y resultados, además de que constituía un medio por el cual podían expresar su labor científica. Tiene lugar entonces preguntarse ¿Cómo se coordinaban sus reflexiones entre el mundo físico y el mundo matemático? ¿Cómo utilizaban la matemática como la herramienta que les permitía explicar lo que sucedía a su alrededor? ¿O se trataba de una herramienta que solamente les permitía expresar sus resultados y así conseguir la aprobación por parte de la comunidad intelectual?

Por otro lado, el enorme poder de la matemática quedo manifiesto durante el siglo XVIII por medio de la explicación que se podía dar a diversos fenómenos que no eran observables a simple vista. Por medio de la abstracción que permitía la matemática se pudieron explicar una gran cantidad de fenómenos: la atracción gravitacional, la electricidad y magnetismo, temperatura, elasticidad, hidrodinámica.

Fue en este momento que los científicos descubrieron que la matemática podía desarrollarse dentro de ella misma. No era necesario un escenario del cual tomar las primeras intuiciones. Lagrange ostentaba haber concebido su *Mecánica Analítica* (1798) sin la necesidad de procesos físicos ni de diagramas geométricos. Entonces los procedimientos matemáticos y cuantitativos se convirtieron en la esencia de la ciencia y la verdad paso a residir, con la mayor seguridad en las matemáticas. Era el comienzo de la matematización de la naturaleza no visible que se ha desarrollado hasta nuestros días y el descubrimiento de la abstracción matemática como una poderosa herramienta.

A pesar de este avance de la matemática como ciencia deductiva. Los matemáticos de la época, que por supuesto también eran los principales científicos siguieron muy interesados en la obtención de más leyes de la naturaleza por medio del trabajo matemático. De este modo, durante el siglo XVIII ambas ciencias se desarrollaron al unisonó.

Así, mientras que durante un siglo la labor principal de los científicos era explicar y describir matemáticamente fenómenos físicos la matemática tuvo grandes avances principalmente en series, ecuaciones diferenciales, cálculo de variaciones, teoría de probabilidades. Siendo considerado Euler el principal matemático de este periodo debido en mucho a su gran producción.

Al final de este siglo se destaca como hecho curioso que algunos de los matemáticos más destacados expresaron la opinión de que el campo de la matemática estaba de algún modo agotado.

Durante el siglo XIX se desarrollo un especialista interesado en la matemática por sí misma. Las guerras, la industria, la mecánica y la astronomía dejaron de ser la principal fuente de inspiración de los matemáticos. Los matemáticos comenzaron a trabajar en campos especializados de la matemática. Así podemos pensar en Cauchy como un analista, Cayley como un algebrista, Steiner como un geómetra, Cantor como un pionero de la teoría de conjuntos puntuales. La especialización solamente fue rota por el más alto nivel de los genios: Gauss, Riemann, Klein, Pincaré quienes dieron un poderoso impulso a la matemática del siglo XIX.

Fue en este periodo que la matemática sufrió una de sus primeras crisis. Uno de los pilares más importantes de todo desarrollo matemático "la geometría Euclidiana" comenzó a tambalearse. El axioma de las paralelas de Euclídes que por mucho tiempo había molestado a los matemáticos comenzó a dar evidencia de que la seguridad por la que muchos aceptaban con facilidad su validez estaba basada en la experiencia. Esta observación introdujo por primera vez de que era la experiencia y no la evidencia lo que justificaba los axiomas. La constatación de que incluso las matemáticas obtienen sus principios de la experiencia y de que su verdad no podía ser asegurada por más tiempo hizo que los científicos reconocieran son tanto más vulnerables cuándo utilizan axiomas y teoremas de la matemática (Kline, 1980). Afortunadamente el surgimiento de "las geometrías no euclidianas" rescato a los matemáticos de tal crisis. Pues la matemática misma se había bastado para deshacerse del mal que la aquejaba.

De este modo también se llego a la conclusión de que la matemática no describía las verdades de la naturaleza sino que las modelaba.

Es posterior a este hecho que los matemáticos toman como necesidad la fundamentación de los conceptos básicos de la matemática y se intentó poner en claro su naturaleza. Dando como resultado una reorganización total del conocimiento matemático en el que la demostración se constituyo como la herramienta matemática por excelencia.

4.2 Análisis

4.2.1 Los Pitagóricos

Durante el tiempo que la matemática griega tuvo su mayor esplendor (600- 200 a. C el desarrollo de la matemática y el de otras ciencias fue muy significativo.

A los Pitagóricos les llamo la atención el hecho de que los fenómenos más diversos desde un punto de vista cualitativo mostraran idénticas propiedades matemáticas. Por consiguiente las propiedades matemáticas debían ser la esencia de estos fenómenos. Más concretamente, encontraron esta esencia en el número y en las relaciones numéricas "todas las cosas son números".

A los Pitagóricos se les ha atribuido el mérito de haber erigido a la matemática en una materia que ante todo requiere del ejercicio del intelecto. Para nosotros es importante destacar que sus conclusiones estaban fuertemente conectadas con observaciones tangibles.

Se puede atribuir a los Pitagóricos la primera formulación matemática de una ley física lo cuál para algunos puede muy bien considerarse como el primer paso de lo que hoy conocemos como física teórica (Gamow, 1980) "La ley Pitagórica de las cuerdas". La cuál fue observada en un monocordio (una cuerda cuya longitud puede variar y someterse a varias tensiones producidas por un peso suspendido en su extremo). Usando el mismo peso y variando la longitud de la cuerda, vio que los sonidos armónicos se producían cuando las longitudes de la cuerda estaban en relaciones numéricas sencillas.

Si bien los Pitagóricos establecieron la importancia de la racionalización matemática de todos los fenómenos. Platón fue el más influyente al separar a la razón de los fenómenos físicos. Situación por la cual no es considerado como una figura influyente en la historia de la física.

4.2.2 Platón

Es importante destacar a Platón como el primero en darle a la matemática el carácter analítico que la caracteriza. Creía que unas pocas miradas penetrantes al mundo físico sugerían verdades básicas con las que la razón podría después caminar sin ayuda. Las matemáticas sustituirían a las investigaciones físicas. Este fue su más grande error y prueba de ello lo dieron sus propios contemporáneos y más aún su discípulo, considerado por muchos el más brillante, Aristóteles.

Eudoxo y Arquitas (contemporáneos de Platón) utilizaban argumentos físicos para demostrar resultados matemáticos y Platón indignado, denunciaba tales demostraciones como una corrupción de la geometría, puesto que usaban hechos sensibles en lugar de razonamientos puros.

Si bien Platón instituyó el método analítico de la matemática, gracias a que el humano siempre se ha interesado por los fenómenos de la naturaleza el desarrollo del estudio del mundo físico y de la matemática no se separaron del todo. Y muchos de los avances que tuvo la matemática dentro de sí misma demostraron a la larga ser una excelente referencia para futuros estudiosos de los fenómenos físicos.

4.2.3 Aristóteles

A pesar de ser uno de los discípulos más brillantes de Platón no deseaba seguir el camino de las abstracciones y tecnicismos que imponía la época. Para él las ciencias físicas eran fundamentales. Las matemáticas ayudaban en el estudio de la naturaleza describiendo propiedades formales como la forma y la cantidad. También las matemáticas proporcionaban las razones de los hechos observados en los fenómenos materiales. Los conceptos y principios matemáticos son definitivamente abstracciones del mundo real. Y puesto que han sido abstraídos del mundo real son aplicables a él.

Es digno de mención que aunque Aristóteles no hiciera ninguna contribución técnica notable a la matemática, abstrajera los principios de la lógica deductiva del razonamiento que ya practicaban los matemáticos (Boyer, 1999). La lógica deductiva es, en efecto, hija de las matemáticas. Su análisis sobre el papel de las definiciones y las hipótesis en la matemática tuvo un papel muy concreto y positivo.

Cabe señalar que a pesar de que en el mundo de la física se cree que su contribución más importante en este campo fue la invención del nombre de esta ciencia (se deriva de una palabra griega que significa naturaleza). Volvió a poner la mirada sobre la importancia de los fenómenos de la naturaleza para el desarrollo de la matemática y su obra tuvo gran influencia en los pensadores que le siguieron. La deficiencia de la filosofía Aristotélica en el estudio de los fenómenos físicos debe ser atribuida al hecho de que la gran inteligencia de Aristóteles no estaba orientada matemáticamente como la de otros muchos antiguos filósofos griegos. Cuando resurgió el pensamiento durante el renacimiento hombres como Galileo tuvieron que luchar duramente para liberarse del yugo de la filosofía aristotélica que en aquel tiempo, era considerada generalmente como la última palabra del conocimiento, que hacía innecesarias más investigaciones sobre la naturaleza de las cosas (Gamow, 1980).

4.2.4 Euclides

Los matemáticos griegos, que eran filósofos en su mayoría, insistían en el uso exclusivo del razonamiento deductivo porque este conduce a eternas verdades. Gracias a esto, las creaciones matemáticas pasaron de ser unos fragmentos oscuros, empíricos e inconexos a unas creaciones intelectuales brillantes, grandiosas, sistemáticas y profundas (Kline, 1985). Trabajos como los de Euclides (Los elementos) muestran poca relación con el funcionamiento de la naturaleza. De hecho solamente ofrecen una presentación de matemáticas formales pulidas y deductivas no muy diferentes a nuestros actuales libros de texto. De hecho, por el carácter de su obra pareciera que Euclides estudió con los discípulos de Platón, si no es que en la Academia misma y que fuera escrita para la Universidad de Alejandría. Es importante considerar que los conocimientos de Euclides se extienden más allá de la matemática misma hasta la astronomía, la óptica, la música y la mecánica. Lo cual pudo haber sido de gran influencia en el desarrollo de su capacidad pedagógica (dentro de la enseñanza de la matemática) y su habilidad expositiva que pueden observarse en la escritura de "Los elementos". Trabajo que penetro fuertemente el mundo intelectual al grado que inspiró el tratamiento axiomático-deductivo no solo en otras áreas de la matemática sino de todas las demás ciencias. Incluida por supuesto la física.

4.2.5 Arquímedes

La gran influencia que tuvieron "Los elementos" de Euclides en el mundo científico se refleja claramente en el trabajo de Arquímedes. Considerado el padre la física matemática. Pues a partir de un conjunto de postulados sencillos demostraba algunas conclusiones difíciles de entender. Por ejemplo, formulaba las leyes fundamentales de la "estática" (el estudio del equilibrio) comenzando por formular los postulados y derivando de ello cierto número de proposiciones. Estableciendo así la estrecha relación entre la matemática y la mecánica que se volvería (y siempre lo ha sido) tan importante para la física y la matemática misma.

Muy importante es para el mundo de la física que el abismo platónico entre la teoría y la práctica no existió para Arquímedes, que supo aplicar a la técnica el resultado de sus meditaciones, ni tampoco existió para él la restricción de la regla y el compás como únicos instrumentos de la actividad matemática. A pesar de su éxito como ingeniero y como inventor, lo que verdaderamente le interesaba era la ciencia matemática pura. Entre todas sus contribuciones puso los cimientos del cálculo integral; determinó el centro de gravedad del segmento parabólico; estableció el concepto riguroso de momento estático; calculó las áreas y volúmenes de cuerpos limitados por superficies curvas. En “El método” una de sus contribuciones más importantes, la cual se creía desaparecida hasta 1906. Analizó las diferencias entre el descubrimiento y la demostración de las verdades matemáticas, dejando la más amplia libertad para aquel y exigiendo el rigor para esta, que ilustra con ejemplos propios extraídos de la Mecánica y de la Geometría del mundo sensible, en el que no hay puntos sin extensión, líneas sin anchura ni superficies sin espesor, sino que todo es corpóreo y todos los cuerpos son irregulares, cuyo conocimiento previo, contando, midiendo y pesando-y no metafisicalizando a la manera de Platón- es indispensable para el conocimiento lógico y abstracto (Vera- Científicos griegos).

El método heurístico de Arquímedes.

Arquímedes utilizaba el método de Exhaución el cual confiere un rigor lógico impecable al argumento matemático. Pero para utilizar el método es necesario conocer previamente el resultado a demostrar, no sirve para encontrar nuevas verdades sino solo para demostrar aquellas de las cuales ya se tiene conocimiento. Es un método de demostración no de descubrimiento. En los casos más sencillos Arquímedes pudo haber llegado al resultado por vía de la intuición pero en los casos más difíciles era de suponerse por muchos de sus predecesores que tenía un método que no había revelado.

El método de investigación utilizado por Arquímedes durante siglos género gran curiosidad y desconcierto por parte de los matemáticos y pensadores. Fue hasta 1906 que gracias a un descubrimiento realizado por el filosofo e historiador Johan Ludvig Heiberg, es que su “Método” fue expuesto, *Del método relativo a los teoremas mecánicos, para Eratóstenes.*

Este escrito revela en palabras de su autor, *un método según el cual es posible abordar la cuestión de ciertas cuestiones matemáticas por medio de la mecánica…*destacando que*, es más fácil construir la demostración después de haber adquirido por ese método cierto conocimiento de los problemas, que buscarla sin la menor idea al respecto.*

> *"Reconociendo, como digo, tu celo y tu excelente dominio en materia de filosofía, amén de que sabes apreciar, llegado el caso, la investigación de ciertas cuestiones matemáticas, he creído oportuno confiarte por escrito, y explicar en este mismo libro, las características propias de un método según el cual te será posible abordar la cuestión de ciertas cuestiones matemáticas por medio de la mecánica. Algo que, por lo demás, estoy convencido, no es en absoluto menos útil en orden a la demostración de los teoremas mismos. Pues algunos de los primeros que se me hicieron patentes por la mecánica, recibieron luego demostración por geometría, habida cuenta de que la investigación por ese método queda lejos de una demostración; como que es más fácil construir la demostración después de haber adquirido por ese método cierto conocimiento de los problemas, que buscarla sin la menor idea al respecto."*

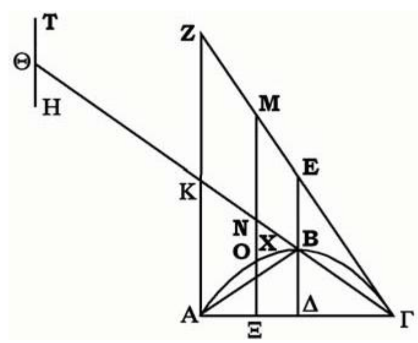
Abstrayendo el método de Arquímedes:

a) La observación, exploración o descubrimiento de una relación que se manifiesta por medio de la mecánica.
b) Una vez identificada una relación plausible procedía a buscar la demostración geométrica.

Incluso el mismo menciona que la exploración mecánica no solo le servía para establecer la conjetura sino que también le daba pistas para la posterior exploración geométrica.

¿Cómo se puede augurar que «*el área de un segmento parabólico es cuatro tercios del área del triángulo inscrito de la misma base y altura sobre el eje*»?

Se compara el área que se pretende hallar, con la de un triángulo inscrito en ella, de igual base. A su vez, se traza un triángulo rectángulo que contiene a las dos figuras anteriores. Posteriormente, se trazan una serie de rectas en las figuras con la intención de generar un escenario en el cual se vayan evidenciando propiedades geométricas y de proporción, asentadas en los Elementos de Euclides, y propiedades mecánicas y geométricas ya demostradas en obras anteriores del propio Arquímedes.



Así, se consideran rectas trazadas como *palancas,* y puntos de intersección como *baricentros* (centros de gravedad) o *fulcros* (momentos): "Imaginemos que ΓΘ es una palanca cuyo punto medio es K" o "el punto K es el centro de gravedad de la suma de ambos pesos", refiriéndose esta última aseveración a los pesos de los segmentos TH y MΞ. Finalmente, en función de algunos teoremas de obras previas del siracusano, como *Sobre el equilibrio de los planos* y *Sobre la cuadratura de la parábola*, así como de otros fijados en los *Elementos* de Euclides, y tras varias operaciones que no vienen al caso, el autor concluye que el área del segmento parabólico es cuatro tercios del triángulo inscrito.

El trabajo de Arquímedes es un claro ejemplo de la estrecha relación existente entre la física y la matemática, o dicho de otra forma entre procesos de demostración/invención y métodos de exposición/demostración (González y Vaqué, 1993). Pues nos muestra, como a diferencia de Aristóteles, su capacidad para matematizar los fenómenos del mundo físico es lo que dio profundidad, sustento y trascendencia a su obra intelectual.

Sin embargo cabe señalar que el rigor deductivo que caracterizaba a las matemáticas en esta época obstaculizó de algún modo algunos descubrimientos que de haberse tomado como validos en ese momento tanto la física como la matemática estarían contando otra historia.

En cuanto a la física la escuela Alejandrina estaba representada por Herón que fue más bien ingeniero inventor que un físico. Su libro "Mecánica" contiene muchas afirmaciones exactas pero también muchos errores matemáticos. He aquí un atisbo más de la estrecha y *rigurosa* relación que establece la matemática con la física. Herón no era considerado un físico dadas sus fallas en cuanto a matemáticas.

Una importante contribución de Tolomeo a la física sobre la refracción de la luz al pasar de un medio a otro (de su libro "Óptica"). Pues no intento (lo intento y no lo consiguió o no se tiene registro de esto) expresar los resultados de sus observaciones por medio de una fórmula matemática. La formulación matemática de la ley de refracción se encontró hasta el siglo XVII por Snell.

4.2.6 La edad media

Hasta fines del siglo XII el Occidente Cristiano es estéril desde el punto de vista de la física y de la ciencia en general. Durante este largo periodo el trabajo intelectual estaba asentado casi por completo en las obras de Aristóteles, que llegaban a Europa en su versión árabe. Y que además armonizaban perfectamente con las materias teológicas. Aunque eminente en muchos aspectos, no era lo mismo en el campo de las ciencias físicas lo cual no ayudo al rejuvenecimiento de la física en Europa, que estaba comenzando a despertar de un sueño de mil años.

Uno de los factores más importantes en la difusión de los conocimientos fue la invención de la imprenta a mediados del siglo XV. Uno de los libros más importantes que salieron de estas primeras prensas fue De Revolutionibus Orbitum Coelestium (1943) de Nicolas Copérnico, el cual estableció un nuevo sistema del mundo con el sol en su centro. Para evitar la prohibición de la iglesia su editor aclaraba en un prefacio que las ideas expresadas en el eran de carácter puramente hipotético y representaban más bien un ejercicio matemático de una descripción de las cosas reales (Gamow).

A partir del siglo XVII que se observa un largo periodo de cooperación entre la física y la matemática. El estudio de fenómenos de flujo en la naturaleza dio la oportunidad para que se desarrollaran una gran cantidad de resultados teóricos para las dos ramas del conocimiento. Caída libre, movimiento uniforme y uniformemente acelerado, difusión del calor, dinámica de fluidos, flujos eléctricos y magnéticos y elasticidad de los cuerpos. La necesidad de predecir el estado futuro de un fenómeno conociendo sus condiciones iniciales da pie al surgimiento de la matemática de la variación y el cambio en estrecha relación con el surgimiento de los primeros elementos de la física clásica y a la mecánica de medios continuos. Con el tiempo los razonamientos y técnicas que dentro de un contexto dieron origen a esos resultados pasan a formar parte de una estructura matemática que se encargará de estudiar a ese tipo de fenómenos. Los análisis rigurosos dentro de la misma matemática que sirvió como herramienta para estudiar a dichos fenómenos permiten reformular estos resultados a la luz de razonamientos y estructuras que robustezcan a la matemática.

Aún dentro de este periodo de importantes descubrimientos, generación de leyes y teorías es muy notoria la separación entre la matemátización de los fenómenos físicos y el razonamiento matemático que se venía forjando desde los tiempos de Platón. A muchas de las grandes mentes de este periodo Galileo, Newton, Euler,…, se les exige cierto grado de rigor matemático en la validación de sus resultados y actualmente dentro de los libros de historia de la física o de la matemática se les menciona por sus contribuciones pero se sigue dando un mayor peso a aquellos que se interesaron más por los desarrollos propiamente matemáticos.

4.2.7 Galileo

A pesar de que muchos historiadores proclaman a Galileo como el inventor de la física experimental otros consideran que no invento el llamado método experimental de la investigación ya que sus precursores lo utilizaron y muchos de sus contemporáneos y discípulos lo emplearon con mayor éxito y más frecuentemente (Gamow, 1980; Kleine, 1985). Si puede atribuirse a él la conjunción en una sola unidad de lo filosófico, matemático y empírico, que pudo lograr solo con el estudio de tres grandes obras: los elementos de Euclídes, el trabajo de Arquímedes y de la filosofía de Aristóteles (sus tesis en relación a la caída libre de los cuerpos se oponen en cierta medida a las de su predecesor).

Los pregalileanos y Descartes creían que la mente aporta los principios básicos para toda ciencia. Según ellos, la mente no tenía más que pensar en una clase de fenómenos para reconocer inmediatamente las verdades fundamentales. Galileo decidió que para lograr describir a los fenómenos mediante formulas los primeros principios deben proceder de la experiencia y de la experimentación. Frente a estas conclusiones una cuestión surgió en las reflexiones de Galileo "Si los principios básicos de la ciencia deben provenir de la experiencia, ¿por qué no los axiomas de las matemáticas?". Una de las suposiciones de origen de este trabajo.

Para autores como Boyer (1999) gran parte de lo que Galileo enseñaba en sus cursos universitarios (En Pisa y Padua) se podrían clasificar hoy como física, astronomía o aplicaciones a la ingeniería…estaba más cerca de lo que podríamos llamar un matemático aplicado. En este texto a pesar de que se destaca la importancia de sus contribuciones a lo que en el futuro se llamaría cálculo infinitesimal ninguno de sus tratados se considera estrictamente de tipo matemático.

Como bien señaló Galileo, en la práctica de la investigación científica y en particular en la investigación matemática siempre existe un dualismo metódico, dos momentos distintos y consecutivos en el proceder, la fase de la invención, intuitiva, no rigurosa y cargada de hipótesis, sugerencias, analogías, argumentos plausibles y razonamientos informales, es el «*ars inveniendi*» o vía del descubrimiento; y la fase apodíctica, donde se impone el rigor, el «*ars disserendi*» o vía de la demostración. De ambas vías que son complementarias en la investigación científica.

Las ideas, tanto en cuanto al método como a sus descubrimientos y leyes, prepararon el camino para las investigaciones de personajes como Isaac Newton.

La obtención de las leyes de la caída.

Cuándo se suelta una piedra ésta cae cada vez más rápidamente, y Galileo quería conocer las leyes matemáticas que rigen este movimiento acelerado. Pero la libre caída de los cuerpos se realiza demasiado rápidamente para estudiarla en detalle sin el empleo de aparatos modernos. Por esta razón, Galileo decidió “diluir la fuerza de gravedad” haciendo que la esfera rodase por un plano inclinado. Marcando las posiciones de la esfera a intervalos iguales de tiempo, a partir del origen, halló que las distancias recorridas, durante estos intervalos de tiempo estaban en la proporción 1:3:5:7, etc. Cuándo estaba más inclinado, las correspondientes distancias eran más largas pero sus relaciones eran siempre las mismas. Así por tanto, concluyo Galileo, esta ley debe regir para el caso límite de la caída libre. De la dependencia observada entre la distancia recorrida y el tiempo, Galileo dedujo que la velocidad de este movimiento debe aumentar en proporción simple respecto al tiempo.

> *Dialogue on the Great World Systems:*
>
> *En el movimiento acelerado, al ser continuo el aumento [de velocidad]no se pueden dividir los grados de velocidad [valores de la velocidad en el lenguaje moderno], que aumentan continuamente hasta cualquier número*

determinado, porque al cambiar a cada momento, son infinitos. Por tanto, podemos ejemplificar mejor nuestro propósito trazando un triángulo ABC. Tomemos el lado AC tantas partes iguales como nos plazca, AD, DE, EF, FG, GC y tracemos por los puntos D, E, F, G, líneas rectas paralelas a la base BC. Supongamos ahora que las partes señaladas en la línea AC, representan tiempos iguales y que las paralelas trazadas por los puntos D, E, F, y G representan para nosotros los grados de velocidad acelerados que aumentan igualmente en el mismo tiempo y que el punto A sea el estado de reposo, partiendo del cual el cuerpo, ha adquirido, por ejemplo, en el tiempo AD el grado de velocidad DH; en el segundo tiempo supondremos que ha aumentado la velocidad DH a EJ, y así sucesivamente en los tiempos siguientes, de acuerdo con el aumento de las líneas FK, GL, etc. Pero a causa de que la aceleración es continua de momento a momento y no por saltos de una cierta parte del tiempo a otra, y representando el punto A el momento de menor velocidad, esto es, el estado de reposo, y AD el primer instante del tiempo siguiente, es evidente que, antes de adquirir del grado de velocidad DH en el tiempo AD, el cuerpo debe haber pasado por grados cada vez más pequeños adquiridos en los infinitos instantes que hay en el tiempo DA, correspondiendo a los infinitos puntos la línea DA. Por tanto para representarnos los infinitos grados de velocidad que preceden al grado DH es necesario imaginar líneas sucesivamente más cortas que se suponen están trazadas por los infinitos puntos de la línea DA y las paralelas a DH. Estas líneas infinitas representan para nosotros la superficie del triángulo AHD. Así, podemos imaginar que toda distancia recorrida por el cuerpo, con el movimiento que comienza en el reposo y acelerado uniformemente ha consumido y hecho uso de infinitos grados de velocidad que aumentan conforme a las infinitas líneas que, comenzando desde el punto A , se suponen trazadas paralelamente a la línea HD y a las restantes JE, KF y LG, continuando el movimiento hasta donde se quiera.

> *Completamos ahora el paralelogramo AMBC y prolonguemos hasta el lado BM no solo las paralelas señaladas en el triángulo sino también aquellas otras paralelas en el número infinito, que imaginamos trazadas desde todos los puntos del lado AC, y así como BC, que es el mayor de estas infinitas paralelas del triángulo representa para nosotros el grado mayor de velocidad adquirido por el móvil en el movimiento acelerado y la superficie entera de dicho triángulo era la masa y la suma de toda la velocidad con la cual en el tiempo AC recorrió cierto espacio, así ahora el paralelogramo es una masa y agregado de un número igual de grados de velocidad, pero cada uno igual al mayor BC. Esta masa de velocidades será el doble de la masa de las velocidades crecientes en el triángulo, como dicho paralelogramo es el doble del triángulo, y por tanto, si el cuerpo que al caer empleo los grados acelerados de velocidad correspondientes al triángulo ABC, ha recorrido tal distancia en tal tiempo, el muy razonable y probable que empleando las velocidades uniformes correspondientes al paralelogramo recorrerá con un movimiento igual al mismo tiempo una distancia doble que la recorrida por el movimiento acelerado.*

La ley de Galileo del movimiento uniformemente acelerado puede ser escrita de este modo en las actuales notaciones matemáticas.

Velocidad=aceleración X tiempo.

Distancia= ½ aceleración X tiempo.

Como bien señaló Galileo, en la práctica de la investigación científica y en particular en la investigación matemática siempre existe un dualismo metódico, dos momentos distintos y consecutivos en el proceder, la fase de la invención, intuitiva, no rigurosa y cargada de hipótesis, sugerencias, analogías, argumentos plausibles y razonamientos informales, es el «*ars inveniendi*» o vía del descubrimiento; y la fase apodíctica, donde se impone el rigor, el «*ars disserendi*» o vía de la demostración.

En el método matemático-experimental de Galileo la observación y la experimentación eran la base para la obtención de hipótesis matemáticas, la matemática era la herramienta que mediante el razonamiento lógico (inducción) permitía deducir las consecuencias. Pero el modelo obtenido necesitaba ser contrastado y comprobado experimentalmente para poder adquirir el estatus de ley.

4.2.8 Newton y la matematización de las ciencias.

Newton encontró las ideas directrices de tres descubrimientos: invento el cálculo infinitesimal, descubrió la ley de la gravitación universal y probó experimentalmente la naturaleza compuesta de la luz blanca.

Solo señalaremos que Newton creo su cálculo infinitesimal, su método de fluxiones, antes que su ilustre rival Leibniz e independientemente del agudo pensador alemán. El punto de partida, el camino seguido y la finalidad buscada son muy distintas en el proceder de los dos inventores. Newton considera su cálculo de fluentes y fluxiones como un instrumento para sus búsquedas foronómicas y dinámicas. Por otro lado para Leibniz el cálculo infinitesimal no es solo un medio sino también un fin, trata de crear un método general con un claro y transparente algoritmo. Fueron el método y los símbolos de Leibniz los que se mantuvieron y forman la base del cálculo infinitesimal.

El segundo gran descubrimiento del joven Newton fue la ley que une la mecánica terrestre y celeste en una indivisible unidad, la ley de la gravitación universal.

El camino deductivo permite reencontrar las características métricas de la gravitación, pero nada revelaría de su naturaleza si Newton no identificará la aceleración conferida a los satélites por el cuerpo central con la aceleración comunicada a los objetos terrestres por la pesadez. Prueba la realidad con la concordancia con el ejemplo de la luna. En este caso la observación y la experimentación seguía siendo la clave.

Por primera vez sucede en la historia de la ciencia que una ley numérica se muestra valedera tanto para los acontecimientos terrestres como para los fenómenos celestes.

Como Euclídes Newton antepone a su obra definiciones y leyes axiomáticas; su método es esencialmente geométrico deductivo. Sin duda sus leyes y definiciones estaban ya en parte comprendidas por las investigaciones de Galileo y Huygens. El no las ha descubierto pero es el primero en formularlas rigurosamente y en forjar en ellas los cimientos de toda la mecánica.

Las demostraciones que Newton aporta en apoyo de sus tesis, utilizan, en general, solo los medios de la geometría Euclidiana y son extensas y pesadas. Pero lo más relevante es que sus conjeturas estaban apoyadas en la observación y el análisis de los fenómenos físicos y la matemática se levantaba como la herramienta que le permitía inferir sobre lo que no era observable. Sin embargo la demostración matemática que ofrecía seguía siendo únicamente la forma de plasmar sus resultados, ella no estaba en el centro de sus deducciones.

La demostración matemática como el lenguaje oficial de validación matemática pero no el de la matematización.

De la tercera parte de los *Principia:*

PROPOSICIÓN III:

La fuerza con la que la Luna es retenida en su órbita se dirige hacia la tierra y es inversamente como el cuadrado de su distancia de los lugares al centro de la tierra.

PROPOSICIÓN IV:

La luna gravita hacia la tierra y es continuamente desviada del movimiento rectilíneo y retenida en su órbita por la fuerza de gravedad.

PROPOSICIÓN VI:

Que todos los cuerpos gravitan hacia todos los planetas y que los pesos de los cuerpos hacia cualquier planeta, a distancias iguales del centro del planeta, son proporcionales a las cantidades de materia que respectivamente contienen.

PROPOSICIÓN VII:

Que el poder de la gravedad pertenece a todo cuerpo en proporción a la cantidad de materia que cada uno contiene.

En forma concisa:

$$\vec{F}_{MM'} = G\frac{MM}{r^2}\vec{u}_r$$

Aquí algunas de las reflexiones por las que Newton llego a esta expresión:

> *El hecho de que, por virtud de las fuerzas centrípetas, los planetas pueden ser retenidos en ciertas órbitas podemos comprenderlo fácilmente si consideramos el movimiento de los proyectiles, cuando se lanza una piedra, la presión de su propio peso la obliga a abandonar la trayectoria rectilínea que por la proyección inicial solo debiera haber seguido, y a describir una línea curva en el aire, y, por virtud de esta línea encorvada, terminar proyectada, tanto más lejos ira antes de caer a la tierra. Podemos por tanto, suponer que la velocidad aumente de modo que describiera un arco de 1, 2, 5, 10, 100, 1000 millas antes de que llegue al suelo, hasta que al fin excediendo los límites de la Tierra, pasaría al espacio sin tocar en ella. Hagamos que AFB (Fig) represente la superficie de la tierra; sea C su dentro, VD, VE, VF, las líneas curvas que un cuerpo describiera si fuera proyectado por una dirección horizontal desde la cumbre de una elevada montaña (en algún lado del país montañoso de Escocia, sin duda)sucesivamente con velocidades cada vez mayores; y por razón de que los movimientos celestes se retrasan escasamente por la pequeña o ninguna*

resistencia de los espacios en que son efectuados, para mantener la paridad de los casos supongamos que no hay aire sobre la tierra, o al menos que está dotado con poco o ningún poder de resistencia; y por la misma razón que el cuerpo proyectado con menor velocidad describe el arco VD más pequeño y con mayor velocidad el arco mayor VE y aumentando la velocidad va cada vez más lejos, a F y G , si la velocidad fuera todavía aumentada cada vez más llegaría al fin al otro lado de la circunferencia de la Tierra para volver a la montaña de la que había partido.

Pero si imaginamos cuerpos proyectados en las direcciones de líneas paralelas al horizonte desde alturas mayores de 5, 10, 100, 1000 millas o más bien como varios semidiámetros de la Tierra, estos cuerpos, según sus diferentes velocidades y las diferentes fuerzas de gravedad a las diferentes alturas, describirían bien arcos concéntricos con la Tierra o diversamente excéntricos, y seguirían girando a través de los cielos en órbitas lo mismo que lo hacen los planetas en las suyas.

(Tomado de Gamow, 1980)

4.3 El caso de la propagación de calor y la convergencia de series infinitas.

Existen muchos casos donde la relación tan estrecha de una demostración en matemáticas y en física es muy evidente. Cuando se aportan una a la otra en un mismo momento, cuando ambas demostraciones se realizan al mismo tiempo o si alguna de las dos no hubiera avanzado la otra tampoco lo hubiera hecho. Uno de los casos más claros es el de la propagación de calor y la demostración de la convergencia de series infinitas que realiza Joseph Fourier en Théorie Analytique de la Chaleur (1822). Y entonces, no es entendible la amplia separación que existe entre ellas en el contexto escolar. En el contexto de la clase en matemáticas, la propagación de calor busca mostrar un caso particular donde la convergencia de las series de Fourier es aplicable (Pérez, 2007). En el contexto de la clase de física la convergencia de las series de Fourier en la herramienta matemática que ayuda a resolver una situación problemática. Cuando en realidad gracias al estudio del fenómeno nacieron las ideas que llevan a la demostración de la serie y la serie es la herramienta que permite modelar el fenómeno, la ecuación que gobierna el sistema, y así determinar el estado estacionario del sistema. La propagación de calor que lo mismo incumbe a la Mecánica Racional que al Análisis Matemático no fue sino hasta que Fourier con su trabajo previo sobre la descomposición de funciones periódicas en series trigonométricas infinitas con ayuda del fenómeno de propagación del calor demuestra la convergencia.

En la mayoría de los libros de los textos escolares y especializados el discurso versa en términos de que gracias a la teoría analítica de la convergencia de las series infinitas resuelve la ecuación de calor modelando la evolución de la temperatura contribuyendo a los fundamentos de la termodinámica.

En cambio fue su trabajo conjunto lo que permitió la evolución de ambos problemas y que le brindó la idea para resolver la convergencia de las serie estableciendo el estado estacionario del fenómeno y por tanto modelando la propagación de calor al establecer la ecuación diferencial parcial solucionándolo por medio del uso de series infinitas trigonométricas.

> *Para que Cauchy se diera a la tarea de dar criterios de convergencia, fue menester reconocer como necesario un estudio de convergencia. Ello se dio con el trabajo de J. Fourier (1822) sobre la conducción del calor. En esta obra, como ya vimos se deduce la ecuación que rige el comportamiento del*

> *fenómeno, utilizando el instrumento de predicción paramétrica, natural de la época*. (Farfán, 2012).

La importancia principal radica en el tratamiento que Fourier da a este problema matemático, el estudio de la convergencia de series infinitas, en el ambiente fenomenológico, la propagación del calor, y los antecedentes ya establecidos por muchos trabajos. Como lo dice Farfán (2012).

> *No obstante, lo significativo de la obra para nuestros fines, es el tratamiento del problema que sigue a la determinación de la ecuación y consiste en encontrar el estado permanente, al cual llegarán por último las temperaturas sin sufrir cambio. La solución al problema es una serie trigonométrica infinita, de la que son necesarios sus coeficientes. Como la serie representa un sistema de temperaturas, y estas no pueden ser infinitas, la convergencia de la serie queda establecida. Para probar tal afirmación, Fourier utiliza varios recursos que van desde la inducción euleriana, hasta las transformaciones de la solución en una integral, de la cual muestra que tiende a una constante, pasando por la consideración de varios casos particulares, que ya hemos presentado. En todo el desarrollo está presente el referente físico concreto que le permitió, a pesar de consideraciones falsas, según el conocimiento matemático actual, iniciar el estudio de la convergencia. Y, aún más, como el estado estacionario o permanente es único, la solución también lo es, mostrando con ello no solo la convergencia de la serie sino, también, la unicidad de la solución de la ecuación diferencial.* (Farfán, 2012)

En síntesis, encontrar el estado estacionario conduce, necesariamente, a la verificación de la convergencia y, por ende, la separación entre el estudio del problema físico y el concepto matemático es *invisible*.

> *De modo tal que las consideraciones del estado estacionario marca una ruptura epistémica: se traslada el problema de calcular sumas y series infinitas al estudio de su convergencia.* (Farfán, 2012)

Insistimos, no se pretende que se enseñe matemática como en esta época, pues el momento, el contexto y las situaciones o motivaciones son completamente distintos por lo que las estrategias deben obligatoriamente también ser diferentes. Volvemos a poner en tela de juicio, porque en el contexto escolar la demostración de física y en matemáticas son dos cosas que parecen tan diferentes y separadas una de la otras ocasiones están en conflicto y no se nota la estrecha relación como lo hemos mostrado. Casos tan íntimamente ligados porque uno contribuyo de forma directa a la construcción de la otra y está a la solución de la primera. Podemos entonces asegurar que es posible encontrar conceptos en ambas ciencias, Física y Matemáticas, donde los contextos físicos permitan el establecimiento de argumentaciones que lleven a la formulación de conceptos matemáticos y por tanto a su demostración sean necesarios para el establecimiento de conceptos matemáticos.

Parafraseando a Farfán (2012), que sea posible detectar la presencia de los constructos utilizados a fin de conformar argumentaciones sobre el concepto matemático estrechamente relacionadas al concepto físico del cual surgió. De este modo reducir los obstáculos que se han identificado en la enseñanza de la demostración y abrir un nuevo campo en el cual puedan establecerse elementos para llegar a una demostración matemática.

4.4 Las funciones de la demostración en la física-matemática de Arquímedes, Galileo y Newton.

Comenzaremos este apartado con una pregunta ¿Las demostraciones en física cumplen las funciones que Michael DeVillers (1993) propone?

Analizaremos cada una de ellas individualmente.

Verificación

La verdad de una ley física propuesta matemática no siempre la proporciona la expresión matemática o su demostración. Un ejemplo de ello es el método propuesto por Galileo en su trabajo, en el cuál la comprobación de un modelo mediante la experimentación era crucial.

Para Arquímedes la verdad la proporcionaba la demostración geométrica debido en parte a la marcada influencia en su trabajo de la escuela Alejandrina y de los elementos de Euclídes.

Explicación: Esta función nos permite profundizar en porqué es verdad una afirmación? ¿Por qué ocurre un fenómeno físico y su comportamiento futuro? La demostración permitió describir fenómenos físicos, predecir sus consecuencias, más que demostraciones, se realizaban deducciones a partir de las condiciones observables de un fenómeno y la matemática proporcionaba una guía de cómo proceder en su estudio.

Sistematización

No existía como tal una matemática definida con un cuerpo de conocimiento propio como actualmente. Toda contribución científica tomaba lugar dentro de un cuerpo general de conocimientos del mundo conformado por las siguientes áreas: astronomía, filosofía natural y matemática. Sin embargo a pesar de que en el trabajo de Fourier sobre la convergencia de series infinitas y la propagación del calor fue indispensable la observación del fenómeno, es especial del estado estacionario. A partir de ello, y de otros eventos, la matemática tomo un nuevo giro al ponerse de manifiesto que la matemática en si misma podía proveerse de todas las herramientas necesarias para llegar a una demostración.

Descubrimiento

Siendo estrictos, esta función no forma parte de la demostración matemática como tal, sino del trabajo realizado para obtener una demostración. Tomándolo así, la observación, la intuición, la experimentación y la inducción han sido características por siempre presentes en el desarrollo del conocimiento científico. Desdeñadas por unos (los Platónicos) y valoradas por otros (Arquímedes, Galileo y Newton).

Comunicación

Era la forma oficial de comunicar un resultado principalmente entre los eruditos en el tema. Cabe señalar que dos de las obras de Galileo son consideradas por algunos historiadores de la ciencia como dirigidas al público en general, por sus características didácticas y sencillas. Y otras, como en el caso de Arquímedes, la presentación final de una demostración no siempre resulto educativa para aquellos que querían comprender su obra en su totalidad y no solamente asegurar la verdad de todos los encadenamientos lógicos presentados.

Capítulo V

Capítulo 5 Conclusiones

Durante los siglos más fructíferos (XVII Y XVIII) para el conocimiento científico y en los que la matemática jugaba un papel vital no había un desarrollo lógico para ella. Lo cual en apariencia parece mostrar que la intuición de los grandes pensadores era más poderosa que su lógica.

Durante ese período la justificación matemática se mostraba como el paso final en las deducciones de los científicos, el lenguaje en el cual comunicar sus hallazgos y el medio por el cual serían validados. Fue el poder de abstracción de la matemática lo que realmente le dio el estatus que tiene ahora.

El motor principal de muchos de los descubrimientos matemáticos se seguía encontrando en la necesidad de explicar y describir matemáticamente los fenómenos físicos y eran estos los que guiaban principalmente sus deducciones y el establecimiento de relaciones matemáticas. Tal como ocurrió en el caso de Newton, pues mucha de la matemática que desarrollo tenía como objetivo el responder a las necesidades que tenía de modelar fenómenos físicos, así como ocurrió con sus sucesores. Cabe mencionar que estos aspectos de la historia del descubrimiento en matemáticas son soslayados por aquellos que escriben sobre la historia de la matemática, en la que no se hace referencia al contexto dentro del cual estos tuvieron lugar.

5.1 Nuestra propuesta

Uno de los principales problemas para el aprendizaje de la demostración se relaciona con su aparente artificialidad percibida por los estudiantes e incluso por los científicos que la utilizan. Otra de las dificultades identificadas considera que los modos de razonamiento y estructuración de la demostración están alejados del estudiante y resultan por lo tanto antinaturales.

Nociones como argumentación, explicación y prueba han surgido como formas de analizar los razonamientos de los estudiantes pues no tienen en sí el mismo rigor que la demostración matemática pero si tienen el objetivo de mostrar los fundamentos bajo los cuales se considera la validez de una afirmación. Pero ¿Qué hay detrás de estos argumentos, explicaciones o pruebas? ¿De dónde surgen? Una mirada a la producción científica de personajes que no tenían como fin ultimo la demostración nos permite identificar características de su razonamiento que los llevaron al establecimiento de relaciones matemáticas que modelaban fenómenos físicos. Estos modelos después se debieron validar matemáticamente mediante una serie de razonamientos admitidos por la comunidad científica pero es claro que ninguno de ellos surgió del esfuerzo de la lógica deductiva.

Así como Arquímedes obtenía algunas de las relaciones matemáticas, que después demostraría geométricamente, de la mecánica y más aún ideas de cómo sería su demostración. Galileo obtenía de la experimentación las relaciones que le permitían formular una hipótesis matemática. Y como Newton a partir de resultados físicos ya conocidos pudo establecer generalizaciones para fenómenos no tangibles pero si observables y para los cuales estableció una relación matemática que los describía.

Proponemos por tanto que el aprendizaje de la argumentación matemática podría valerse de la modelación de fenómenos físicos en los cuales la necesidad de explicar o probar la validez de un argumento puede resultar más natural y valerse de la intuición, de la observación y la experimentación como herramientas para el establecimiento de relaciones matemáticas.

Bibliografía

Bibliografía

®, M. (2009). Encarta ® Microsoft Corporation.

Acuña Soto, C. (1996). Un modelo de tratamiento didáctico para la enseñanza del razonamiento deductivo y de la demostración en el nivel medio superior. En F. Hitt Espinosa, *Investigaciones en matemática educativa* (pág. 93). Grupo Editorial Iberoamericana.

Armella, L. M. (enero-junio de 1996). Una perspectiva sobre la demostración. *Revista Mexicana de Investigación Educativa , 1*(1), 123-136.

Balacheff, N. (1982). Preuve et démonstration en mathématiques au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques 3(3)*, 261-304.

Barceló Aspeitia, A. (noviembre de 2003). ¿Que tan matemática es la lógica? *DIÁNOIA, XLVIII*(51), 3-28.

Boyer, C. B. (1999). *Historia de la Matemática.* Madrid España: Alianza Editorial.

Cannizzaro, R. (2008). *Un análisis de las interpretaciones, realizadas por los estudiantes, de enunciados matemáticos escolares considerando la estructura lógica y el contenido matemático de los mismos: una interpretación sociocultural.* México: CICATA, IPN.

Cantoral, R., & Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon, edición especial 42, 14(3)*, 353–369.

Cantoral, R., & Farfán, R. M. (2004). La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques 24(2.3)*, 137-168.

Collantes, C., & Olga, E. M. (1994). El Comienzo de la Lógica Matemática. *Seminario Orotova de historia de la Ciencia, Año III*, 477-514.

Crespo Crespo, C. R. (2005). *El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La estrategia de deducción por reducción al absurdo.* México: Tesis de Maestría, CICATA, IPN.

Crespo Crespo, C. R. (2007). Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología. México: Tesis de Doctorado, CICATA, IPN.

Crespo, C. R., & Farfán, R. M. (2005). Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de la demostración por reducción al absurdo. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 8(3)*, 287-317.

Crespo, C. R., & Ponteville, C. (2005). Las Funciones de la Demostración en el Aula de Matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 18*, 307-312.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en Matemáticas. . *Revista Epsilon*, *26*, 15-30.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R. M. (2012). *Socioepistemología y Ciencia el caso del estado estacionario y su matematización.* Barcelona España: Gedisa.

Godino, J. D., & Recio, Á. M. (1997). Significado de la demostración en educación matemática. *Proceedings of the 21th International Conference of PME, 2*, 313-321.

Godino, J. D., & Recio, Á. M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *En Enseñanza de las Ciencias,19 (3*, 405-414.

Gutiérrez, Á. (2004). Aprendizaje de la demostración matemática en enseñanza secundaria. En *Memorias XV Encuentro de Geometría y III de Aritmética* (págs. 563-593). Bogotá, Colombia.

Ibañes, M. (2002). Analizadores específicos para la demostración matemática. Aplicación a los textos en el tema de Trigonometría en Bachillerato. *Texto de la ponencia* *presentada en la reunión del Grupo durante el 6º Simposio de la SEIEM.* España: Universidad de Valencia. Obtenido de http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/Ibanes02.pdf

Ibañes, M., & Ortega, T. (1997). La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria. *Educación Matemática 9(2)*, 65-104.

Krantz, S. G. (2007). *The History and Concept of Mathematical Proof.* Obtenido de Washington University in St. Louis, Department of Mathematics. : http://www.math.wustl.edu/~sk/eolss.pdf

Larios, V. (2002). Demostración y conjetura en la escuela. *Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas, Año 2, numero 3*, 45-55.

López, J. I. (2005). *La Socioepistemología.Un estudio sobre su racionalidad.* México: Tesis de Maestría, Cinvestav, IPN.

Nápoles, J. E. (2000). La historia y la educación matemática. Formalizando una relación informal. *Conferencia para el III Simposio de Educación Matemática.* Chivilcoy, Argentina.

Nápoles, J., Macías, D., Caputo, S., Espinoza, R., Jorge, M., Vilotta, D., . . . Mengual, C. (2001). *La enseñanza de la demostración matemática.* Obtenido de Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura – UNNE, Comunicaciones Científicas y Tecnológicas: http://www1.unne.edu.ar/cyt/2001/9-Educacion/D-021.pdf

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). Principios y Estándares para la Educación Matemática. *Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales*.

Pluvinage, F. (1996). Diferentes formas de razonamiento Matemático. En F. Hitt Espinosa, *Investigaciones en matemática educativa* (págs. 77-91). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Recio, Á. M. (1999). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática.* Granada, España: Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática,Tesis doctoral.

Recio, Á. M., & Godino, J. D. (1996). *Assessment of university student's mathematical generalization and symbolization capacities.* . Valencia, España: L. Puig y A. Gutiérrez (eds), Proceeding of the 20 Conference of PME (p. I-231), .

Resendiz, E. (2007). *Las variaciones en las explicaciones de los profesores en situación escolar.* México: Tesis de Doctorado, Cinvestav, IPN.