CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS

DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Distrito Federal

Departamento de Matemática Educativa

f, *f* (*x*) y su significación. Una relación dialéctica

Tesis que presenta

Alex Montecino Muñoz

Para obtener el grado de Maestro en Ciencias
en la especialidad de Matemática Educativa

Director de Tesis:

Dr. Ricardo A. Cantoral Uriza

México, D.F. Septiembre, 2012

Agradezco enormemente al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) por el apoyo que me ha brindado, como estudiante extranjero, para el desarrollo de mi estudio de maestría. Esta labor evidencia el compromiso que tiene esta institución con la construcción de conocimiento científico.

Alex Montecino Muñoz

N° de becario: 252576

Agradezco a todos lo que hicieron posible este trabajo, a quienes me apoyaron, compartieron y aportaron.

Muchas gracias.

Resumen

Este trabajo tiene como premisa central que la noción de función se robustece a la luz de las prácticas y actividades que le rodean, donde se pone en juego los diferentes significados y usos de sus signos f y $f(x)$. A su vez la significación de estos signos surgen y/o emergen de acuerdo a los usos que se le den, debido a una relación dialéctica que los une.

La problemática a observar tendrá como finalidad ver cómo se está concibiendo, cómo se está significando y cómo se están relacionando los signos, es decir, qué se está entendiendo con ellos, qué están representando, cuáles son los roles, cuáles son sus significados, cómo se está utilizando dichos signos en los diferentes contextos y qué práctica o actividades han favorecido a la utilización de f y $f\ (x)$, cómo se relacionan y argumentan en los diferentes medios de difusión del conocimiento matemático.

Para lo cual se analizarán, por una parte, los discursos elaborados por Cauchy y Bourbaki, los cuales surgen como un interés por crear una obra didáctica, la cual sirva para la formación académica, además de sintetizar el conocimiento de su época y con ello contribuir al desarrollo de las Matemáticas Francesas. Para luego dar cabida a indagar dentro del *discurso matemático escolar* (dME) actual. En ambos casos se buscará dar evidencia de que los roles que se le otorga a f y $f\ (x)$ estarán dando una significación contextualizada, la cual no se encuentra implícita dentro del dME y a su ésta vez responde a la racionalidad que sustenta dicho discurso. Con todos estos antecedentes se intentará demostrar que estos signos evolucionan[1] a la luz de los usos y prácticas en los cuales se vean inmersos.

[1] Cuando hacemos referencia a que los signos evolucionan, es en el sentido de que éstos cambian de significados y este nuevo significado pasa a ser una nueva característica del signo, lo cual es relativo al uso y práctica que se le da.

No obstante, lo antes mencionado se verá permeado por la concepción de función con la cual se esté trabajando, y por otra parte, por las "ideas" que la sustentan, las necesidades, ideologías y el razonamiento con el cual se argumenta el discurso que sostienen los textos analizados.

En síntesis, el siguiente trabajo se sustenta en la idea de conciliar aspectos sociales del conocimiento matemático, sus signos y la construcción de éstos, abriendo la discusión en base a las nociones de significación, relación dialéctica de los signos f y $f\ (x)$, bajo una perspectiva socioepistemológica.

Donde las preguntas que orientaran este estudio son: *¿Cómo se significan f y $f\ (x)$ a la luz de los diferentes usos que se le dan? y ¿cómo se caracteriza la relación dialéctica, usos y significados, que viven f y $f\ (x)$ y cómo ha sido su construcción?* Y para abordar la problemática plasmada en las preguntas de investigación, se examinará los papeles que cumplen los signos f y $f\ (x)$ en la construcción del concepto de función dentro de los medios de difusión del conocimiento matemático, abocándonos en los usos y argumentaciones presentes en estos medios y con ello poder inferir en qué forma están siendo significados, reconociendo categorías de significaciones de los signos las cuales se edifican bajo una racionalidad contextualizada en donde subyace sus usos, actividades y prácticas.

Del análisis a los textos se establecen en cada caso categorías de significación, los cuales muestran y dan a conocer cómo ha evolucionado la significación de los signos y cómo se están argumentando dentro de estos discursos. Por otra parte se reconoce que es dentro del discurso matemático subyacente (dMS) que se sustenta y se dan herramientas para la argumentación de las diferentes categorías encontradas.

Concluyendo del trabajo, por una parte, que las significaciones de estos signos es evolutiva, es decir, se relativizan paulatinamente, lo que sucede a luz de los diferentes usos que se esté dando al signo y más aún en las actividades o prácticas en la cuales que se vea envuelto el conocimiento matemático. Por otra parte, se concluirá que la noción de función no se podrá construir o constituir, hasta que se articulen los diferentes usos y significados de f y $f(x)$. Además de que el dMS propicia significaciones que complementan las expuestas en el discurso matemático (discurso oficial), además da herramientas para poder argumentar, en ocasiones de forma parcial, concepciones, conceptos y constructos.

Abstract

This research has as central premise that the notion of function is strengthened by the practices and activities surround it, which brings into play the different meanings and uses of signs f and $f(x)$. At the same time, the significance of these signs appears and or emerges according to the uses to be given, because of its dialectical relationship.

The problematic to observe will have as purpose seeing how it is conceived, how it is signify and how the signs are relating each other, it means, what is understood by them, what are they representing, what are their roles, what are their meaning, how this signs are been utilized in different contexts and what practices or activities have favored the utilization of f and $f(x)$, and how they relate and argue in the different mathematical knowledge's diffusion means.

Thus, we will analyze, for one side, the discourses elaborated by Cauchy and Bourbaki, which arise as an interest to create a "didactic work", that will serve to an academic formation, in addition to synthesizing the knowledge of his age and thus contribute to the development of French mathematics. And then, explore into the *discurso matemático escolar* (DME) of nowadays. In both cases we will look for evidence that the roles that are given by of f and $f(x)$ will provide a contextualized signification, which is not implicit in the DME and at the same time responds to the rationality behind this discourse. With all these antecedents, we will try to show that these signs evolve in light of the uses and practices in which they are immersed.

However, the above is permeated by the concept of function with which is being used, and secondly, by the “ideas” that support it, in addition to the practices where you can see it, the needs, ideologies and the reasoning, which support the discourse of the analyzed books.

In summary, the following research work is based on the idea of reconciling social aspects of mathematical knowledge, its signs and the construction of them, opening the discussion based on the notions of signification, the signs dialectical relationship, of f and $f(x)$ all under a socioepistomological perspective.

The questions to guide this study are: How are meant f and $f(x)$ in the light of the different uses that are given? And how the dialectical relationship is characterized, used and meant, that lives in f and $f(x)$ and how was it built? And to address the issues reflected in the research questions, we will examine those roles played by the signs f and $f(x)$ in the construction of the function concept, inmerse in the mathematical knowledge's diffusion media, focusing our attention in the uses and argumentations present in these media and thus to infer on how are they being signifying, recognizing categories of meanings of the signs which are built under a contextualized rationality in where lies its uses, activities and practices.

From the analysis of the texts are set in each case, categories of meaning, which show and reveal how it has changed the meaning of signs and how they are saying in these discourses. Furthermore it is recognized that within the *discurso matmático subyacente* (dMS) -underlying mathematical discourse - is where it sustains and gives tools to the argumentation of different categories found.

Concluding that the meanings of these signs is evolutionary, in other words, are relativized gradually, this happens to the light of different uses that are being given to the sign and even more in the activities or practices in which they become involved the mathematical knowledge. Moreover, it is concluded that the notion of function cannot be built or constituted, until the articulation of the different uses and meanings of f and $f(x)$. Besides the favorable dMS meanings that complement those outlined in mathematical discourse (formal discourse) also gives tools to argue, sometimes partially, ideas, concepts and constructs.

ÍNDICE

CAPÍTULO 2:

CAPÍTULO 3:

CAPÍTULO 4:

CAPÍTULO 5:

CAPÍTULO 6:

Introducción

Este trabajo tiene como premisa central que la noción de función se robustece a la luz de las prácticas y actividades que le rodean, durante este hecho se puede ver que se pone en juego diferentes significados de signos f y $f(x)$, los cuales surgen y/o emergen de acuerdo a los usos que se le den, debido a una relación dialéctica que los une.

La problemática a observar tendrá como finalidad ver cómo se está concibiendo, cómo se está significando y cómo se están relacionando los signos, es decir, qué se está entendiendo con ellos, qué están representando, cuáles son los roles, cuáles son sus significados, cómo se está utilizando dichos signos en los diferentes contextos y qué práctica o actividades han favorecido a la utilización de f y $f\ (x)$, cómo se relacionan y argumentan en los diferentes medios de difusión del conocimiento matemático.

Para lo cual se analizarán, por una parte, los discursos elaborados por Cauchy y Bourbaki, estas obras surgen como un interés por crear una obra didáctica, la cual sirva para la formación académica, además de sintetizar el conocimiento de su época y con ello contribuir al desarrollo de las Matemáticas Francesas. Para luego dar cabida a indagar dentro del *discurso matemático escolar* (dME) actual. En ambos casos se buscará dar evidencia de que los roles que se le otorga a f y $f\ (x)$ estarán dando una significación contextualizada, la cual no se encuentra implícita dentro del dME y a su vez ésta responde a la racionalidad que sustenta dicho discurso. Con todos estos antecedentes se intentará demostrar que estos signos evolucionan a la luz de los usos y prácticas en los cuales se vean inmersos.

No obstante, lo antes mencionado se verá permeado por la concepción de función con la cual se esté trabajando, y por otra parte, por las "ideas" que la sustenta, las necesidades, ideologías y el razonamiento con el que se argumenta el discurso que sostienen los textos analizados. Como podemos ver reportado en Castillo y Montiel (2007), el concepto de función puede ser visto como forma de una curva (función geométrica), como fórmula analítica (función algebraica) y como abstracta (función lógica), lo cual nos da indicios sobre la racionalidad que subyace a su construcción y los intereses que se tenían en un determinado momento, entre otras cosas.

Nuestro trabajo lo centraremos dentro de prácticas matemáticas escolares, ya que en ellas vive el lenguaje matemático, poniendo énfasis en cómo interactúan los signos f y $f(x)$ y cómo estos son utilizados y con ello vislumbrar cómo se están siendo significando a la luz de sus prácticas. Dentro de las prácticas matemáticas escolares podemos ver que interactúa el discurso matemático escolar, las nociones del docente, aspectos socioculturales, intereses personales o colectivos, entre otros muchos factores que permean el quehacer dentro del sistema educativo.

El estudio de estos signos se hace indispensable, ya que consideramos en ellos un doble papel, por un lado su función como herramientas que permite al individuo participar en prácticas cognitivas, y por otro lado, son parte de esos sistemas que trasciende al individuo y que a través del cual una realidad social es objetivada (Berger, 2004). Además del hecho que el signo matemático tiene una significación cultural que se deriva de su uso establecido en el discurso matemático. Teniendo esto presente, es que levantamos la siguiente hipótesis: la noción de función no se constituye entre los estudiantes, si no hasta que sus usos articulados entre f y $f\,(x)$ estén bajo el control de las actividades situadas del alumno.

Por lo cual, nuestra investigación se sustenta en la idea de enlazar aspectos sociales del conocimiento matemático, sus signos y la construcción de éstos, abriendo la discusión en base a las nociones de significación, relación dialéctica de los signos f y $f\,(x)$, bajo una perspectiva socioepistemológica. Donde las preguntas que orientaran este estudio son: *¿Cómo se significan f y $f\,(x)$ a la luz de los diferentes usos que se le dan? y ¿cómo se caracteriza la relación dialéctica, usos y significados, que viven f y $f\,(x)$ y cómo ha sido su construcción?*

Para dar respuesta a estas interrogantes pondremos el acento en dos nociones que desarrollaremos y estarán dentro de la discusión de esta investigación, las que son: significación y dialéctica, más específicamente la noción de relación dialéctica. Estas nociones en la Figura N°6, podemos ver como se relacionan y como estos signos se van transformando en función de los usos, prácticas, contextos y relaciones entre opuestos.

Este trabajo de investigación se encuentra estructurado en sietes capítulos, aquellos son: el origen de la problemática de investigación junto con algunos antecedentes, consideraciones teóricas y metodológicas, dando a conocer con todo ello precedente a la investigación, a mostrando aspectos del cómo surge el interés por realizar este estudio; en el segundo capítulo plantearemos la problemática y preguntas de investigación, donde se caracterizarán las palabras claves, con las cuales se desarrollará la investigación; en el tercer capítulo se presentará la justificación y propósitos de la investigación, donde se considerarán algunos trabajos que anteceden a las ideas que se están indagando; en el cuarto capítulo se darán a conocer los constructos y consideraciones teóricas que sustenta este estudio, en donde se abordarán aspectos de la socioepistemología, la construcción social y aspectos del signo; en el quinto capítulo se mostrará algunas consideraciones metodológicas, las cuales dan a conocer la forma en la cual se pretende dar respuesta a la problemática; en el sexto capítulo revisión bibliográfica, tanto de la construcción del concepto de función, el uso de los signos f y $f\,(x)$ en las obras de Cauchy, Bourbaki y en textos de que son partes del dME; para finalizar con el capítulo de las conclusiones.

CAPÍTULO 1

Desde dónde surge el interés por la problemática de investigación, algunos antecedentes.

CAPÍTULO 1: Desde dónde surge el interés por la problemática de investigación, algunos antecedentes.

Podemos ver que el concepto de función[2] está presente a lo largo de la formación académica, ideas intuitivas se introducen muy tempranamente dentro del discurso matemático escolar (dME), es el caso de nociones tales como: relaciones, dependencia o causalidad, las cuales se puede ver presentes en actividades como: llenado de tablas, ubicación en el plano (específicamente de puntos en el plano), extracción de información e interpretación de ella desde diferentes registro[3], predicción de algún fenómeno, entre otras cosas; para luego dar paso a la institucionalización del concepto de función como una relación de correspondencia, junto con ello dar paso a aplicar y usar el concepto en diferentes contextos o dentro de otros constructos matemáticos. Por consiguiente, nos damos cuenta que a lo largo de la vida estudiantil, el concepto de función evoluciona desde considerar ideas intuitivas, para luego apreciarlas como un objeto de estudio, hasta llegar a concebirlo como un objeto matemático aplicado en otros constructos.

[2] Entenderemos a la función como una relación entre variables, donde exista una regla de correspondencia con un dominio y contradominio definido, sin desconocer con ello sus ideas germinales.
[3] Estaremos entendiendo como registros a los diferentes medios en los cuales se puede representar los constructos matemáticos, tales como tablas, gráficos, icónico, etc.

Es dentro de ésta evolución en la conceptualización, argumentación y uso, a la cual se ve enfrentado el concepto de función a lo largo de su desarrollo dentro del ámbito académico, en donde queremos localizar nuestro trabajo de investigación, ya que reconocemos en ello la existencia de diferentes medios para significar el concepto de función, por lo tanto, la existencia de una evolución y relación permanente entre usos y significados de los *signos matemáticos*[4], f y $f(x)$.

El interés o problemática a investigar surge en una primera instancia al observar que el concepto de función puede ser representado en diferentes medios o registros de representaciones y, en estos casos los signos, que representa a la función y su valor numérico (o su imagen), es decir, f y $f(x)$, respectivamente, se encuentran relacionados e interactuando constantemente durante o en el transcurso de la institucionalización del concepto de función, así mismo en los diferentes usos o contextos en donde se pueden ver inmerso el concepto. A su vez, estos signos se ven presente en un sinfín de procesos en que el concepto de función está en juego o es parte de un constructo matemático; por otra parte podemos vislumbrar que a la luz de lo expresado dentro del dME existe un predominio de argumentaciones, significados y usos para éstos signos, los que se ve presente al momento de introducir el concepto de función, ya que existe una forma única de presentarlos y darlos a conocer, lo cual nos hace conjeturar que el dME le da un carácter estático a estos usos y significados. Más aún junto a la evolución del concepto, suponemos que existe una evolución en estos usos y significados, lo que podría hacer surgir en algunas ocasiones contradicciones o errores conceptuales dentro del dME; por último, al considerar que la matemática es un lenguaje, podemos tener como premisa que los signos con los que se conforma, tendrán diferentes acepciones, dependiendo del

[4] *"un signo puede ser un símbolo matemático, una afirmación matemática, una expresión matemática, el nombre de un objeto matemático, entre otras cosas"* (Berger, 2004), los cuales, se puede considerar como una herramientas que permite a un individuo participar en prácticas cognitivas, por otro lado, son parte de esos sistemas que trasciende al individuo y que a través del cual una realidad social es objetivada. Por otra parte son fundamentales para comprender la realidad, debido a que brindan herramientas para interpretar y manipular el entorno (Radford, 1998, 2001).

contexto y del campo en donde se vea aplicada, conllevando a considerar la existencia de una pluralidad de significados dentro del dME para un mismo signo.

De lo anterior, surgen como primeras preguntas ¿cómo se relacionan f y $f(x)$?, ¿cómo son argumentados estos signos dentro del discurso matemático?, ¿cómo se van significando[5] a la luz de las diferentes prácticas[6] en que se ven inmersos y cuáles son éstas significaciones? Y de éstas preguntas, nace un primer acercamiento de lo que se desea observar dentro de nuestro trabajo, donde el acento estará en la forma de argumentar y significar los signos f y $f(x)$, además de ver como se articulan y se complementan al momento de conceptualizar el concepto de función o hacer uso de él. En esta investigación no nos centraremos en el concepto de función en sí, sino más bien en las prácticas y usos en donde se ven envueltos estos signos, ya que sostenemos que ellas estarán dotando de significados a los signos antes mencionados.

Nuestra investigación se sustentará bajo el marco teórico de la socioepistemológica que cuestiona la organización de la matemática escolar, reconociendo que las prácticas sociales son las generadoras del conocimiento, por lo cual, rescata el carácter social en la construcción del conocimiento matemático, además de considerar que este conocimiento no es estático ni acabado, sino más bien es situado, contextualizado y es relativo, encontrándose en una evolución constante.

1.1. Origen de la problemática

Como se puede inferir de lo expuesto anteriormente, nuestra inquietud nace al reconocer que dentro del discurso matemático escolar predomina un carácter utilitario del

[5] Se entenderá como significando al acto de significar. A significar como extensión de la noción clásica de significado, ya que se tiene como premisa que la construcción del significado se encuentran influenciado por un contexto social, los usos que se le da al conocimiento y los intereses que la sociedad tienen en un momento determinado, además de considerar que este significado se encuentra en una constante evolución. Lo cual también puede ser entendido como un significado contextualizado.
[6] Se entenderá a las prácticas como la acción intencional y reiterada, las cuales son articuladas a través de los usos que se le da al conocimiento matemático.

conocimiento (Cordero, 2001, 2005), en el que no se propicia espacios para reflexionar sobre su sintaxis, es decir, la estructura o relación entre los signos o palabras, con sus usos y significados, en nuestro caso los signos que se encuentran interactuando dentro del lenguaje matemático para establecer el concepto de función y cómo estos juegan un papel al ser aplicados dentro de un contexto o constructo teórico. Por su parte Cordero (2006), reconoce que se debe lograr sacar, del sistema educativo, las concepciones de nivel utilitario y llevarlo al nivel funcional para lograr que el estudiante valore socialmente el conocimiento matemático.

Podemos identificar e inferir que dentro del dME no se favorecen instancias en que se reconozca que los signos f y $f(x)$ pueden cumplir diferentes roles o más aún, que su significación se encuentra normada por usos y prácticas en donde se vean inmersos a la hora de la conceptualización del concepto de función o de algún otro concepto donde la función este presente; como nos presenta Soto (2010), este carácter utilitario hace ver a la matemática como una herramienta para resolver problemas que pueden situarse dentro de la matemática o de otros contextos, pero no permite la visión de que el conocimiento se construye para transformar la realidad, por lo cual, no se reflexiona sobre su construcción ni en su funcionalidad, teniendo como consecuencia que exista un predominio dentro del dME a una memorización de algoritmos, propiedades y conceptos, conllevando a que no se propicien instancias donde los constructos que se están construyendo tengan una significación que dependa de un contexto determinado.

Es dentro del dME en donde queremos poner el acento en esta investigación, problematizando en la(s) relación(es) existente(s) entre f y $f(x)$, además conocer cómo se están argumentando y significando estos signos a la luz de los diferentes contextos y usos que se le están dando. Por consiguiente, se hace necesario estudiar éstas relaciones y cómo éstas interactúan, ya que, así podremos identificar los roles que adquieren estos signos mediante los diferentes usos y significados que se le asignan en diversas actividades del dME y en las diferentes prácticas que se ven inmersas dentro del quehacer matemático, en donde no podemos dejar de considerar que la construcción del conocimiento se lleva a cabo dentro de un momento histórico y en un escenario sociocultural que se encuentran normados por prácticas especificas, intereses de una comunidad y una racionalidad contextualizada.

En otras palabras el interés se encuentra en analizar los roles desempeñados por estos signos en los diferentes contextos en los que pueda estar inmerso el concepto de función, además de ver la argumentación que se utiliza para significarlos y con ello vislumbrar cómo influye en la construcción del conocimiento, donde el concepto de función está presente o juega algún rol.

Podemos percibir que en el discurso Matemático $f(x)$ es utilizado en los diferentes medios de representación y en algunas circunstancias, tal uso se realiza sin hacer distinción alguna, con ello invisibilizando el hecho de que dicho signo puede tomar diferentes matices según dónde y cómo se esté trabajando y utilizado, junto a esto, éste signo en ocasiones es confundido con la noción misma de función, es decir f. En la figura N° 1 podemos notar que el signo $f(x)$ está cumpliendo diferentes roles dentro de la gráfica, es decir, los usos que se le están dando son diferentes en cada situación y por ende la significación y argumentación que le subyace será diferente en cada caso.

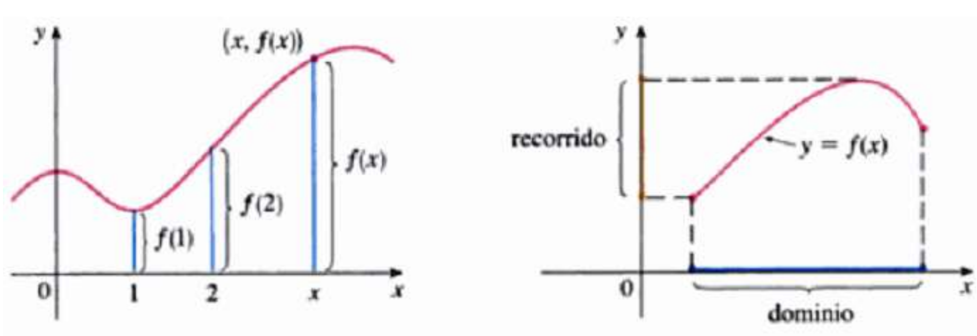

Figura N°1: Diferentes rolles de $f(x)$, presente en la gráfica

(Tomado de Stewart, 2003, p. 12)

Por otra parte en el caso del signo f, podemos ver que tiene una mayor presencia en momentos introductorios al concepto de función, precisamente cuando se desea institucionalizar este concepto, en el cual, se hace explícito “la regla”, su dominio y contra dominio; en otras palabras se usa f para dar a conocer la correspondencia o relación de los elementos de un conjunto A (conjunto de partida) con los elementos de un conjunto B (conjunto de llegada), como por ejemplo, la siguiente función definida como:

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B \\ a &\rightarrow f(a) \end{aligned}$$

A su vez podemos encontrar dentro de los textos de estudios, diagramas en que los signos f y $f(x)$ se relacionan de forma implícita, como es en el caso de cuando se hace referencia, metafóricamente, a que una función es una “máquina”, o en el caso cuando se hace referencia a un diagrama de flechas, como lo podemos ver en la figura N° 2. Estos tipos de representaciones se pueden ver presentes en muchos textos escolares a la hora de introducir el concepto de función, pero dentro de este discurso no se explicita los roles de cada uno de los signos y cómo estos se significan, en este caso particular podemos ver que estos diagramas son presentados en un mismo texto y en ambos casos los signos representan en cada situación cosas diferentes, como es el caso de $f(x)$ donde en un momento se entiende como el valor de salida de un proceso y en otro momento como un valor de llegada.

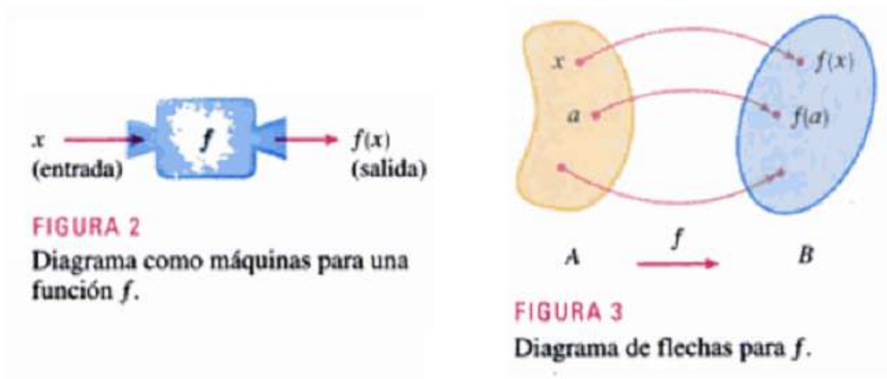

Figura N° 2: Diagramas como máquina y flechas
(Tomado de Stewart, 2003, p. 12)

Se hace indispensable estudiar estos signos matemáticos, ya que como se ha evidenciado en la figura N° 1 y N° 2, sus usos y significados (sus roles) se encuentran articulándose constantemente dentro del dME, más aún existe una relación entre estos signos a la hora de estudiar tópicos que concierne al concepto de función; así mismo, sólo al estudiar las imágenes podremos caracterizar a la función, es decir, a través de los diferentes usos y significados que pueda adoptar $f(x)$ se estará dotando de significados a f, junto con ello la noción de función se robustece a la luz de las prácticas y actividades que le rodena, donde se pone en juego los diferentes significados y usos de f y $f(x)$, lo que a su vez estará dando sustento para poder aplicar el concepto de función y sus signos en otros contextos.

A su vez se reconoce desde una visión semiótica, el hecho de que el signo captura y conlleva en sí una carga cultural (Radford, 1998, 2001; Berger, 2004), por lo cual, sus significados están estrechamente relacionado con las prácticas del individuo o el uso que se le dé (Radford, 2001; Berger, 2004; Steinbring, 2006), además los signos tienen como finalidad el dar herramientas para interpretar y comprender la realidad, funcionando como sistema de códigos para comunicar información y producir conocimiento (Radford, 1998, 2001; Steinbring, 2006). Todas estas ideas no se contradicen con los sustentos de la socioepistemología, marco donde se encontrará respaldada esta investigación, más aún tiene como tesis compartida con la semiótica cultural, el considerar que los objetos son "creados" en el ejercicio de prácticas, las que son normadas por prácticas sociales (Cantoral y Farfán, 2008).

Por consiguiente, los diferentes usos y significados que pueden adoptar estos signos, han sido sustentado bajo prácticas que norman el quehacer dentro de las matemáticas y más aún han dotado a los participante de esa comunidad con una visión del cómo entender lo que se está produciendo, sustentando un marco de significación acorde a sus necesidades e intereses, el cual es validado por la comunidad.

1.1.1. Algunos antecedentes

Como un antecedente o una primera aproximación a esta problemática tenemos lo presentado en Andrade y Montecino (2009), donde se reporta que en el transcurso del año 2005 se comenzó a indagar, bajo el sustento del Grupo Estudiantil de Investigación en Matemática Educativa (GEIME), sobre las dificultades al momento de calcular el volumen de un sólido de revolución mediante integrales definidas. El interés surgió a partir de una experiencia de aula –durante la Actividad Curricular Cálculo II[7]– al producirse un debate entre el Profesor de la asignatura y un Estudiante, respecto a qué se hace girar para determinar el volumen de un *sólido de revolución con hueco*[8], en ese momento el estudiante realizó la siguiente pregunta: *"¿Por qué motivo no se hace girar el área?"*, estos tipos de ejercicios son usualmente abordados por el método de las capas cilíndricas o de la arandela (Figura N° 3).

[7] Del Programa pedagogía en matemáticas de la Universidad Católica Silva Henríquez (UCSH).
[8] Se llamará sólido de revolución con hueco a todo sólido que al momento de hacer girar la región encerrada por dos curvas "no toca" o "no intersecta" el eje de rotación.

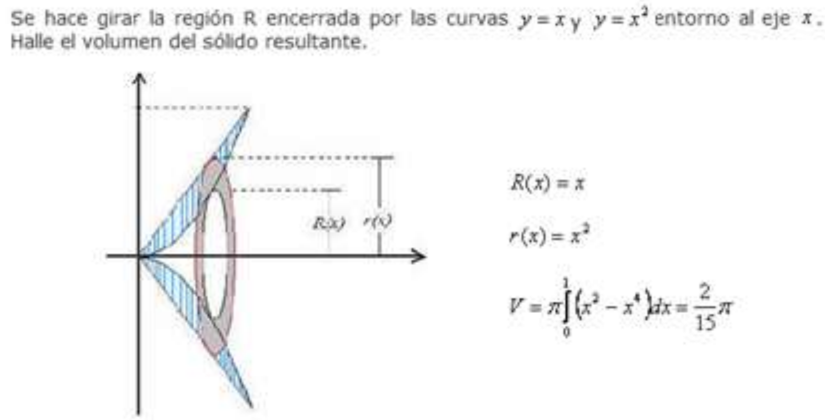

Figura N° 3: Método de la arandela

(Tomado de Andrade y Montecino, 2009)

En este estudio se reconoce específicamente el problema en cómo identificar las regiones encerradas por dos o más curvas, conllevando a la identificación de los radios de las arandelas, para poder hacer el cálculo mediante integrales definidas del sólido generado. Para este tipo de problemas surge como propuesta del estudiante al momento de realizar dichos cálculos (restar las funciones y luego elevar al cuadrado dicho resultado), o sea:

Forma general:	Propuesta por el alumno:
$\pi\int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2]dx$	$\pi\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$

Para indagar sobre la génesis de este cuestionamiento, se realizó un análisis de textos utilizados en Enseñanza Escolar (libros otorgados por el Ministerio de Educación de Chile) y Enseñanza Superior (libros considerados dentro de la bibliografía básica de la Carrera de Pedagogía en Matemática e Informática Educativa de la UCSH). Del estudio se pudo concluir que no se profundiza en la construcción geométrica de un sólido de revolución con hueco, pudiendo verse esto reflejado en la no explicitación del eje z, además en algunos textos de Cálculo, se presenta la definición de este concepto con entendimientos erróneos y confusos para el estudiante, por ejemplo: *"Un sólido de revolución es generado al hacer girar el área de una figura*" (Ayres, 1991, citado en Andrade y Montecino, 2009), dejando nula claridad respecto a un eje de rotación, sin explicitar qué sucede con los sólidos que se generan a partir de la rotación de regiones encerradas por dos o más curvas que no intersectan el eje de rotación y, más aún, si se tiene presente que el área representa sólo el valor numérico de una región o superficie determinada, y con este tipo de definiciones se puede realizar el siguiente cuestionamiento: ¿Qué sentido o de qué forma podríamos hacer girar un número (el área) para obtener un sólido de revolución?

Como consecuencia del análisis bibliográfico, documentado en Andrade y Montecino (2009), se construyó y aplicó un cuestionario a alumnos del Programa de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa de la UCSH, basado en el cálculo de áreas y volúmenes de diferentes sólidos de revolución (con y sin hueco), el que corroboró, la presencia de dificultades en identificar la "expresión algebraica" que debían integrar para obtener el volumen del sólido.

A partir de este análisis se detectó que la mayoría de los estudiantes no logra identificar los diferentes papeles que representa el signo $f(x)$ en el cálculo integral, como es en el caso de las gráficas de funciones (imagen, altura, segunda coordenada de un par ordenado, expresión algebraica de una función), por lo cual, se considera necesario y primordial para el caso del tratamiento de la integral definida, resignificar $f(x)$[9] como un objeto de imagen o altura (aspecto geométrico implícito en la gráfica de una función) y no quedarse sólo con el hecho de que $f(x)$ representa una "función a integrar" o "a graficar", en otras palabra, considerada como un proceso.

[9]Especificar aquellos roles que juega $f(x)$ en estos casos en particular, es decir, durante una *conversión* de registros de uno algebraico a uno gráfico y viceversa, profundizar y reconocer sus papeles, tanto dinámicos (procesos) como estáticos (objetos).

Asimismo, de lo anterior, se concluyó que al abocarse a generar mentalmente los sólidos, a los encuestados les dificultó la conversión de un registro algebraico a uno gráfico, al graficar las funciones para obtener los límites de integración de una región encerrada por dos o más curvas, y viceversa, además de encontrar la expresión algebraica a integrar de una superficie.

Lo que nos interesa del estudio es la evidencia de conflictos, para identificar por parte de los estudiantes los diferentes "papeles" que juega $f(x)$ en el cálculo integral, como por ejemplo, ver a $f(x)$ como el conjunto de imágenes, alturas que se encuentran bajo la curva de ancho dx, el segundo término del par ordenado, la gráfica (ver Figura N° 4), estos usos del signo no se encuentran explícitos en los diferentes medios de difusión del conocimiento matemático y más aún el usos de este signo dentro del discurso matemático se hacen sin hacer distinción del contexto en el que se están empleando, es decir no se explicita cómo éste signo transforma sus significados para poder tener un rol significativo dentro de un contexto.

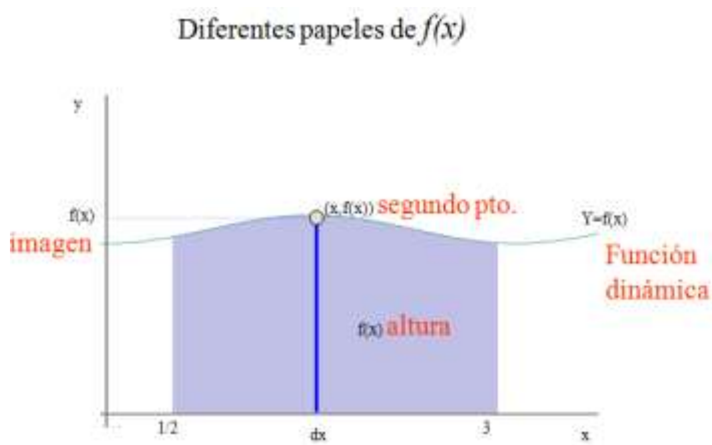

Figura N° 4: Diferentes papeles de $f(x)$, en un contexto gráfico
(Tomado de Andrade y Montecino, 2009)

Además dentro de este contexto, del cálculo de sólidos de revolución, se observa la existencia de una confusión entre **una** noción de función con **un** procedimiento, es decir, se confunde la función f, con la imagen $f(x)$, y en éste caso $f(x)$ representa el valor de las alturas de un ancho dx, y que a su vez representa el radio de las arandelas al momento de formar el sólido de revolución, por otra parte, podemos ver que dentro del dME se le está adjudicando a $f(x)$ propiedades de la función, en otras palabras, se está entendiendo a $f(x)$ como si fuera f.

Como otro antecedente tenemos lo que nos presenta Bagni (2004) en su trabajo, si bien su interés es reportar algunas ideas sobre función real, función continua, dominio de una función y la integral dentro del contexto del aprendizaje de las matemáticas en alumnos de secundaria italianos entre las edades de 16 y 19 años, analizando el estado de estos conceptos a través de pruebas, en su estudio reconoce que las representaciones juegan un papel importante en el aprendizaje de las matemáticas, por lo cual, particularmente estudia la influencia de la visualización en la representación gráfica (representación cartesiana de una función). Dentro de este contexto, analiza el abuso que existente en la nomenclatura $y = f(x)$, al mostrarnos como evidencia que en algunos libros de texto para la secundaria, se puede ver que la misma ecuación $y = f(x)$ representa el conjunto de los puntos del plano cartesiano, que tienen coordenadas que pertenecen al conjunto: {*(x;y)* ϵ DxR: $y = f(x)$)} (en donde DxR es el dominio de f). A sí mismo en algunas ocasiones $y = f(x)$ representa la función f misma, es decir, leamos: "dada la función $y = f(x)$.", o su gráfica cartesiana (leamos: "dada la curva $y = f(x)$..."). Naturalmente se trata de un abuso, ya que, una función f: D→R es una relación, por tanto, es una representación particular de DxR y no una ecuación, ni una curva; donde la ecuación $y = f(x)$ se usa para representar la función f. Y el gráfico cartesiano de $y = f(x)$ es una representación en el plano, cuyos puntos pertenecen a {*(x;y)* ϵ DxR; $y = f(x)$} estableciendo una correspondencia unívoca.

En este caso se pone el acento en hacer notar que la función es una relación en donde f es sólo una triada formada por una regla específica, un dominio de aplicación y un contra dominio o imagen que no se debe confundir con alguna de sus representaciones. Dándonos evidencia de que f (el concepto de función), en ocasiones es confundida o es entendida como $f(x)$ (por sus imágenes o valor numérico de la función) o viceversa, lo cual, en ocasiones se podría heredar hacia conceptos más avanzados, en los que f o $f(x)$ jueguen un papel primordial para el entendimiento del concepto.

1.1.2. La matemática como un lenguaje y el papel de la escuela en su transmisión

Las matemáticas pueden caracterizarse de diferentes formas, entre ellas, como un lenguaje y como tal *"se convierten en un instrumento para el desarrollo del conocimiento y en un intérprete de la realidad social"* (Skovsmose, 1994). En tal sentido entender su simbología se hace indispensable, para poder comprender dicho lenguaje, es decir, su construcción, estructura y a lo que nos lleva éste. Al concebir a las matemáticas como un lenguaje se hace necesario reconocer en él su carácter social, ya que todo lenguaje está arraigado a un entorno sociocultural que se encuentra dentro de un momento histórico, lo que dota de significados y sentido a sus *palabras*[10]; por otra parte las instituciones educativa toma gran relevancia en el proceso de la comunicación, ya que es uno de los agentes responsable de la difusión y divulgación de dicho conocimiento y de transmitir los ideales e ideologías que se encuentran detrás sustentando este lenguaje, entonces estudiar el dME donde se encuentra presente los signos, se hace indispensable para poder entender lo que se quiere transmitir con éstos y cómo están siendo significados bajo prácticas especificas.

El sistema escolar se encuentra dentro de una sociedad que se ve involucrada en diferentes procesos sociales que repercuten dentro de la escuela de forma directa o indirectamente, influyendo o normando el quehacer dentro de ésta, permeando sus

[10] *"palabras"* lo entenderemos como una unidad dotada de una función, en consecuencia el signo o símbolo lo podremos entender como tal.

discursos e intereses. Podemos ver esto presente en lo propuesto por Skovsmose (1994) al decir que, la desigualdad en la sociedad crea diferencias de oportunidades en la escuela, esto puede resumirse en la tesis de que la escuela reproduce las estructuras sociales. Esta reproducción incluye la reproducción de la división del trabajo, la reproducción de la distribución del poder entre el individuo y el estado, entre el estado y los grupos sociales y, por último, la reproducción de los valores culturales. Por lo cual se puede señalar que la escuela reproduce el conocimiento, las rutinas y competencias, al igual que sustenta las creencias ideológicas, respaldando un tipo de enseñanza que debe apuntar a lo antes mencionado.

De acuerdo a lo presentado, podemos decir que estudiar matemáticas en un lugar determinado no es lo mismo que estudiarlas en otro, aunque su recorrido curricular sea idéntico; además nos da pie para confirmar el hecho de que todo cambio curricular se debe hacer pensando en la sociedad que será aplicada, en lo que se quiere lograr con dicha educación y no basta sólo con importarlas desde otras realidades, así es recayendo en la escuela la responsabilidad de transmitir lo esperado o aceptado por la comunidad. Siendo estos aspectos algunos de los que se deben tener presentes en el momento de mirar el entorno de la obra matemática, ya que como nos centraremos en obras que fueron elaboradas para la formación académica, cuyas cuales deben su naturaleza al momento histórico y social en las que fueron elaboradas.

Por otra parte se hace necesario considerar que las prácticas en que se ven inmersos los estudiantes, tanto en un ambiente escolar como en lo cotidiano, se encuentran influenciada por su entorno, existiendo múltiples factores que pueden influenciarla. En el caso de las prácticas matemáticas escolares, las que se ejercen bajo la supervisión del profesor quien se debe apegar a un plan curricular, que se ve afectados por los aspectos socioculturales externos a una escuela, los ideales de la institución, deben convivir con las ideas del mismo docente, lo que favorece a dar que se caractericen de diferentes formas. Dentro de tales prácticas matemáticas escolares, que es uno de los lugares donde vive el lenguaje matemático, donde se pondrá énfasis en el estudio para poder ver cómo interactúan los signos f y $f(x)$ dentro del dME y cómo estos son utilizados y con ello vislumbrar cómo se están siendo significando.

Gellert (2005) nos dice que la decisión curricular sobre las prácticas matemáticas escolares depende en cierta manera del poder de las personas involucradas en educación y en matemática. Aclarándonos que si consideramos que las matemáticas escolares no se reducen como algo inferior o subsidiario a las matemáticas académicas, sino que las matemáticas escolares tienen un valor propio y diferente, el definir este valor es una tarea curricular y, por ende, esencialmente social. Bajo estas ideas nos propone como ejemplo, las matemáticas escolares bajo el régimen del socialismo-nacional alemán, donde se puede ver evidenciado la influencia ideología de la sociedad en lo que se está enseñando, por consiguiente, se vislumbrar que la educación matemática tiene una finalidad que responde a aspectos fuera de las decisiones de los encargados directos de la educación, sino más bien a una cosmovisión que esta normando. Se puede ver que en el índice del libro de texto para el octavo año escolar (Rechenbuch für Volksschulen, Heft VII-Siebentes und achtes Schuljahr, 1940, citado en Gellert 2005) figuran diez capítulos, los cuales son:

1. Adolf Hitler se hace cargo de una herencia lamentable.
2. Adolf Hitler salvador.
3. Lo que logramos con el primero plan cuadrienal.
4. Alemania debe vivir si bien desvanezcamos.
5. Mantente sano para tu pueblo.
6. Del cálculo actuarial.
7. La circulación de dinero.

8. El Correo del Reich Alemán.

9. El Ferrocarril del Reich Alemán bajo el signo de la reconstrucción.

10. De la geometría.

Los que muestran, que existe en esta época un interés en que la educación forme a los ciudadanos con una forma de ver el mundo, específicamente la educación matemática está fortaleciendo una ideología o visión del mundo, la cual, es transmitida bajo los programas de educación. Más aún, en este ejemplo, los poderes y visiones políticas se reflejan claramente en las decisiones curriculares, que en cierta medida ejerce una presión sobre lo qué, cómo y para qué se debe enseñar, cayendo en las instituciones académicas las responsables de trasmitir estas ideas, además como lo podemos ver en este ejemplo los mecanismos de difusión también cumplen un papel por una parte para la divulgación del conocimiento y por otra parte trasmitir las ideas e ideologías que subyacen a la educación.

Con lo expuesto anteriormente se puede inferir que los significados y usos de los signos f y $f(x)$ no quedan inmunes a estos factores sociales, políticos o ideológicos, con los cuales se sustenta un currículum y sus medios de difusión. En este caso al momento de trabajar con algún tópico donde se esté usando el concepto de función, se verán usos y significación que se encontraran permeados por aspectos que subyacen a una sociedad, como es el caso de las ideologías, visión del mundo, cosmovisiones, entre otras cosas. Por consiguiente se hace necesario enfatizar en las diferencias conceptuales existentes entre ellos y cómo estos se relacionan, ya que en los diferentes medios o registros se hace uso de éstos y en ocasiones hasta sin hacer distinción alguna, por ende, pondremos el acento en los diferentes roles y argumentaciones que pueden tomar, dependiendo de donde se vean inmersos, las prácticas y actividades que le rodean y cuáles son los conceptos y/u objetos que lo estén sustentando, además de los que se esté buscando construir con ellos y sin dejar de lado los ideales e ideologías que permean a la sociedad donde se ven inmersos.

1.2. Algunas consideraciones teóricas y metodológicas

A esta altura la pregunta de cómo se están significando estos signos, toma gran relevancia al considerar que las construcción de las matemáticas tienen un carácter social, la cual, se encuentra dependiendo de los escenarios socioculturales, los intereses de la comunidad donde se encuentre inmersa, entre otros. Estos factores estarán normando los usos y argumentando con los cuales se sustente el dME, por lo cual, podremos ver diferente matices, donde los usos pueden sufrir modificaciones a la luz de diferentes prácticas o contextos y por consiguiente sus significaciones se verán modificadas. De lo anterior, podemos apreciar que de alguna forma los signos estarán capturando la esencia de dichos escenarios, es decir, las ideas, la filosofía, entre otras cosas, que sustentan o subyacen al discurso matemático que es elaborado en un contexto que se encuentra definido en un periodo determinado.

Por otra parte si consideramos que en las corrientes semióticas exponen o señalan que el signo captura aspectos sociales y culturales, se hará indispensable mirar los escenarios donde están siendo aplicados para poder comprender cómo los roles y significados de los signos f y $f(x)$ se constituyen, además de identificar cómo ello captura aspectos (sociales y culturales) de una determinada época, con ello notar cómo se está adaptando o integrando a una realidad que cambia constantemente y cómo se le está dotando de diferentes significados, los que se encontrará en dependencia de las prácticas que le rodean y del contexto en donde es aplicado y enseñado el o los conceptos, con todo ello tener antecedentes de la construcción social de estos signos, con ello poder disponer de herramientas y antecedentes para un rediseño del dME.

Por consiguiente, se hace pertinente estudiar los signos matemáticos en el sentido de Berger (2004), ya que éstos tienen un doble papel, por un lado su función como herramientas que permite al individuo participar en prácticas cognitivas, y por otro lado, son parte de esos sistemas que trasciende al individuo y que a través de una realidad social es objetivada. Además del hecho que el signo matemático tiene un significado cultural que se deriva de su uso establecido en el discurso Matemático, reconociendo así su carácter social. Por lo tanto, no podremos separar la forma que es usado y significado un signo del contexto en que se encuentra inmerso, ya que se encuentran estrechamente relacionado, más aún es dentro de un contexto social que se le da vida a los signos, se valida sus usos y, por consecuencia, sus significaciones.

Como se plasma en Buendía y Montiel (2009) reconocer el carácter social de la matemática implica distinguir desde los momentos del uso del concepto hasta aquellos momentos donde se hacía necesaria una presentación sistemática y ordenada de las herramientas, nociones y conceptos, es por ello que ésta investigación intentará por una parte ver cómo se está dando uso y significando los signos f y $f(x)$ dentro del discurso matemático establecido (obras que influyeron en el establecimiento del discurso matemático actual y textos en los cuales podemos ver el discurso matemático que vive hoy dentro de las aulas), además de ver cómo los procesos de difusión del conocimiento influyeron en que prevaleciera una visión o argumentación de los usos y significados de dichos signos, donde los escenarios sociales y el surgimiento de nuevas ideas o conceptos matemáticos jugaron un papel primordial, para su generación.

CAPÍTULO 2

Problemática y preguntas de investigación.

CAPÍTULO 2: Problemática y preguntas de investigación.

Como se ha planteado anteriormente, nuestra problemática está orientada a estudiar la relación existente entre f y $f(x)$, que representan, respectivamente, la función y su imagen, cómo estos signos matemáticos interactúan y se relacionan, mediante los diferentes usos y cómo éstos son significados dentro del dME, centrándonos en el análisis de los diferentes roles que desempeñan en los medios de representación y de difusión. Estos signos permiten a un individuo participar de forma evolutiva en prácticas cognitivas donde el concepto de función se ve presente, por otra parte, tener un lenguaje para poder comunicar ideas y producir conocimiento.

2.1. La problemática

Si bien podemos reconocer que cuando se trabaja con el concepto de función, este se hace desde nociones funcionales y abstractas, los signos f y $f(x)$ se encuentran interactuando, donde las argumentaciones que le subyacen propician diferentes formas de entenderlos. A modo de ejemplificar nuestra problemática, podemos en una primera instancia levantar el siguiente cuestionamiento, ¿el $f\ (x)$ utilizado en la fórmula para calcular sólidos de revolución mediante integrales definidas ($\pi \int_a^b f(x)^2\, dx$), es el mismo o representa lo mismo que el $f\ (x)$ que denomina una función, en este caso polinómica, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 x^0$ o en el caso de la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = f(x)$? En otras palabras y a modo de pregunta ¿el $f\ (x)$ utilizado en estos diferentes contextos representa o cumple el mismo rol, por lo cual, su significado y argumentaciones permanecen inmutable? y junto con ello, ¿cómo se significa la función, f, a la luz de los diferentes usos que se le puede dar a $f\ (x)$?

Como se reportó en Andrade y Montecino (2009), en el caso del cálculo integral, específicamente en el cálculo de sólidos de revolución se puede ver que el signo $f\ (x)$, que está presente en la fórmula del volumen de un sólido, representa una altura de ancho dx y no la función en sí mismo, ni la gráfica, entre otras cosas. Además no podemos dejar de reconocer la existencia de diferentes usos y con ellos argumentaciones, siendo estos los que van dotando de significados a f.

Por lo anterior, cabe preguntarse en una primera instancia ¿qué representan, cuáles son los significados y usos de los signos f y $f\ (x)$?, ¿qué papeles juegan (f y $f\ (x)$) en la apropiación del concepto de función y en sus interpretaciones en los diversos contextos que es utilizado? y ¿cómo $f\ (x)$ dota de significados o significa a f?

Estos signos viven y se significan en el ámbito académico dentro de un proceso de dualidad entre lo escolarizado y el cotidiano, o sea, los signos se dotan de significados, por una parte a través del uso que se le da en el dME dentro de las diferentes prácticas y actividades, por otro lado, en el uso que se le da en las prácticas diarias. También se puede evidenciar que en el dME es escaso el tratamiento sobre la manera de significar los diferentes roles de f y $f\ (x)$, ya que la argumentación en donde se sustenta los usos y significados no se presentan de forma directa, sino más bien se deben inferir a la luz de los usos y contextos en el que se ven inmersos, existen carencias de argumentos para construir los roles de f y $f\ (x)$ y con ello generar sus significaciones.

Si bien estos usos y significados se desarrollan a la luz de sus prácticas y actividades en que la función cumple algún rol y/o se desarrollan en diálogo con otras concepciones o nociones, es durante estos procesos que los signos se robustecen y nutren, dando con ello una multiplicidad de argumentaciones, en las cuales, sustenta lo que estarán representando estos signo.

Por ende, en esta investigación además de identificar, las relaciones existentes en la significación de estos signos dentro de los usos y en las prácticas que se ven inmersos, con ello evidenciar las argumentaciones que la sustenta, se buscará dentro del desarrollo del discurso matemático antecedentes sobre la relación dialéctica existente entre los signos, donde el predominio del uso de $f\ (x)$ inhibe que la noción de función se construya, pero he aquí la dialéctica del asunto, ya que sólo cuando se construyen relaciones entre los usos y significados de $f\ (x)$ es como se constituye a la noción de función, es decir: f.

Siendo sobre esta dialéctica, que fundamentamos nuestra problemática, ya que no podemos conceder, una sin la otra, es decir, no podemos caracterizar a una función f, o hablar de sus propiedades, sin realizar un estudio de su imagen $f\ (x)$, más aún $f\ (x)$ es portadora de significados de f, en otras palabras, los diferentes roles que puede jugar $f\ (x)$ dotarán de significado a f. Además perdería sentido hablar solamente de un $f\ (x)$, si no encuentra definida la f que le subyace. Teniendo esto presente miraremos los diferentes usos que se le está otorgando a estos signos y cómo es que se están significando y argumentando para poder evidenciar con ello cómo interactúan, sin perder de vista la relación que existe entre éstos signos.

Nuestra problemática surge al reconocer que la construcción de significado esta en evolución a la luz de los usos que se le dé, donde el proceso de significación es socialmente construida y distribuida, por ende relacionadas con las actividades humanas y sus prácticas, siendo estas normadoras de la forma de significar, en este caso los diferentes signos.

La importancia de este estudio se debe por un lado que *"los objetos matemáticos no son asequibles directamente, sino a través de signos, dibujos, gráficas"* Planchart (s/f), el comprender qué es lo que está representando, qué papeles está cumpliendo, qué usos y significado puede adquirir estos signos, se hace primordial, ya que el signo es uno de los medio para acceder y comprender los objetos matemáticos, por lo mismo, para la comunicación y desarrollo del conocimiento, también el reconocer que el proceso de significación es progresivo, encontrándose estrechamente racionadas con las prácticas, contexto y usos donde el conocimiento este en juego, esto nos da pie para hablar del carácter situado y contextualizado de las argumentaciones, con ello reconocer la racionalidad que le subyace y se sustenta el discurso matemático.

Al centrarnos en los signos f y $f\ (x)$ que engloban el concepto e imágenes de la función, estaremos abordando un tópico que tiene gran importancia en el estudio de las matemáticas porque sustenta gran parte de los constructos matemáticos, al mismo tiempo que se ve inmerso en un sinfín de procesos y conceptos cada vez menos elementales, en el que comprender los usos y significados de dichos signos nos podría dotar de herramientas que facilite el entendimiento de procesos u objetos en que los signos y el concepto de función se vea involucrado, como también comprender la argumentación de su sintaxis.

La función es un concepto transversal dentro de las ciencias exactas, su comprensión es vital para el entendimiento de una gran parte de contenidos o constructos, además en la formación académica este concepto es un objeto de estudio que dota de herramientas para una infinidad de procesos, tanto para el mismo concepto de función como para otras nociones matemáticas. El poner atención en dichos signos, se debe a que se reconoce el hecho que se van dotando paulatinamente de significados a la luz de experiencias o prácticas matemáticas escolares en donde se está dando usos al conocimiento, por consiguiente, podemos considerar que los usos y significados de los signos se van resignificando constantemente, además del hecho, que su adquisición es progresiva normadas por el dME.

Otte (1998, citado en Sáenz-Ludlow, 2007) señala que un objeto matemático, como una función, no existe independiente de la totalidad de sus posibles representaciones, y no debe ser confundido con cualquier representación particular. Es por ello que no podemos invisibilizar para este estudio las diferentes representaciones, y cómo en ellos viven los signos f y $f\ (x)$, reconociendo los diferentes roles y usos que juegan éstos signos en situaciones donde el concepto de función se encuentra presente, o sea, se tendrá en cuenta en qué y cómo es utilizado en las diferentes representaciones los signos.

Teniendo en consideración lo antes mencionado la problemática a observar tendrá como finalidad ver cómo se está concibiendo, cómo se está significando y cómo están interactuando los signos, es decir, qué se está entendiendo con ellos, qué están representando, cuáles son los roles, cuáles son sus significados, cómo se está utilizando dichos signos en los diferentes contextos o registros de representaciones semióticas (Duval, 1999) y qué práctica o actividades han favorecido a la utilización de f o $f\ (x)$, cómo se relacionan y argumentan en los diferentes medios de difusión del conocimiento matemático.

2.2. Preguntas de investigación

Si bien se han presentado algunas inquietudes o preguntas que han ayudado a acotar y aclarar la problemática y con ello comprender a mayor profundidad lo que se desea investigar. Se hace necesario precisar las preguntas para que sean más asertivas y con ello nos delimite el qué y cómo abordar la problemática.

Con la finalidad de plantear preguntas menos globales, que a la luz de las interrogantes antes mencionada englobe y centren de mejor forma las ideas a investigar, surgen como preguntas de investigación:

¿Cómo se significan $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{f(x)}$ a la luz de los diferentes usos que se le dan?

¿Cómo se caracteriza la relación dialéctica, usos y significados, que viven $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{f(x)}$ y cómo ha sido su construcción?

Con el fin de tener una mejor comprensión de lo que se quiere abordar con cada pregunta, nos detendremos a explicar lo referente a las palabras claves de cada una, con ello poder entender el discurso que se estará utilizando y elaborando a la luz de la investigación. Si bien la investigación se centrará a dar respuesta a estas dos preguntas, no quita el hecho de que gran parte de las interrogantes que sirvieron para acotar y delimitar la problemática, al mismo tiempo, se le esté dando respuesta mediante el desarrollo del siguiente estudio.

Nuestras preguntas de investigación pone el acento en dos nociones que desarrollaremos y estarán dentro de la discusión de esta investigación, estas nociones son: la de significación y dialéctica. Si bien en la primera pregunta se hace referencia a *"cómo se significan"*, tendremos mayores herramientas para comprenderla cuando se entienda la noción misma de significación; en el caso de la segunda pregunta la que hace referencia a una *"relación dialéctica"* y su construcción se podrá inferir a través de lo que se estará entendiendo por dialéctica, es por ello que nos tomaremos la libertad de caracterizar aquella palabra.

2.2.1. Significación

Si consideramos que las prácticas en donde se ve envuelto y aplicado el conocimiento matemático, constituyen o contiene en sí conocimiento científico, el cual es variable a su dimensión temporal, social y al campo especifico donde se ve envuelto y donde se pueden apreciar diferentes usos, se hace necesario ampliar la noción de significado ya que se estará reconociendo que el contexto afecta al significado, siendo esta una visión pragmática del significado.

Asimismo debemos pensar más bien en un *"significado contextualizado"* que considere como premisa que la construcción de los significados se encuentran influenciado por un contexto social, los usos que se le da al conocimiento y los intereses que la sociedad tienen en un momento determinado, además considerar que este significado se encuentra en una constante evolución, es decir, que el significado no se considera como algo fijo y establecido, sino más bien se nutre, robustece, se transforma y se construye permanentemente sobre las prácticas en donde se ve inmersa. Siendo este *"significado contextualizado"* que contiene y a su vez extiende la noción "clásica" de significado (Espinoza 2009) la que denominaremos como *significación*.

De lo expuesto anteriormente podemos vislumbrar que la noción de *significación* no centra su atención en el objeto matemático, sino más bien en las prácticas, usos y contexto en donde se ve involucrado el conocimiento –por lo cual rescata aspectos de la temporalidad y su contextualización– y para nuestro caso, la significación de los signos f y $f\ (x)$, estarán influenciando de forma directa sobre que se está entendiendo por cada uno de ellos, en donde se encuentren inmerso, el uso que se le esté dando y prácticas que la sustenten. Más aún los usos que se le darán a los signos y las prácticas en donde se desarrollan se encontrarán dentro de un contexto, en que se ver permeado por aspectos sociales, culturales, intereses personales o de la comunidad, entre otros; los que obedecen a una racionalidad que puede ser particular a un momento histórico. Es por ello que se estará considerando factores como el contexto, usos y lo temporal, al momento de construir una significación de los signos $f\ y\ f\ (x)$.

En la siguiente figura N°5 se tratará de ejemplificar lo antes mencionado, consideraremos un sistema que se encuentra en una constate evolución, donde C_x representara un contexto[11] en particular, U_x será un uso particular, en este caso de $f\ (x)$ y S_x será una significación particular de la función que estará dependiendo tanto del contexto y usos que se le este dado a las imágenes $f\ (x)$, pero a su vez con este proceso el $f\ (x)$ se verá (re)significado a la luz de su uso, lo que muestra en si un proceso dialéctico, donde estarán en juego una mutua trasformación (significación o resignificación) de los signos.

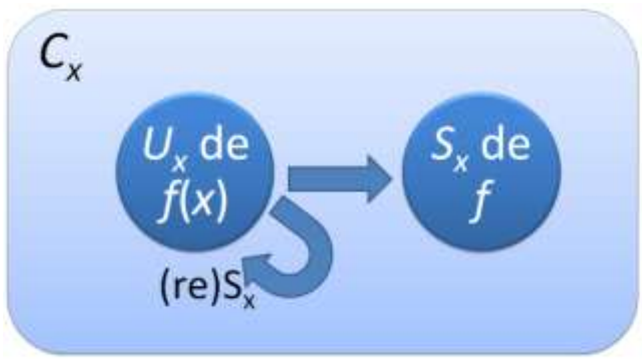

Figura N° 5: Usos y significados

Es sobre este proceso en donde queremos poner el acento en la investigación al realizarnos la pregunta: *¿Cómo se significan estos signos a la luz de los diferentes usos que se le dan?*, ya que con esta pregunta buscaremos dar evidencia de que existen factores que matizan la significación de los signos f y $f\ (x)$, por lo cual, al momento de ingresarlo, implementarlos o hacerlos interactuar en los diferentes contextos en donde se pueda ver involucrado el concepto de función, se hace necesario reconocerlos por medio de sus usos y prácticas, las que se encuentran normadas por el dME.

[11] En este caso al hablar de contexto, estaremos incluyendo aspectos sociales y temporales, por ejemplo, los intereses de una comunidad en particular.

2.2.2. Dialéctica y relación dialéctica

Si realizamos un recorrido del desarrollo de la dialéctica podemos ver que existen los primeros antecedentes en Grecia, su comienzo debe remontarse al tiempo de los presocráticos, como es en el caso de Heráclito de Efeso quien consideraba que todo está formado por opuestos que siempre están en estado de tensión dinámica, considerando que todo fluye, donde el movimiento de las cosas se debe a fuerzas externas a ellas. Pero son los sofistas del tiempo de Sócrates, que se constituyeron como maestros prácticos de la dialéctica, en este sentido es entendida la dialéctica como el de arte de la refutación. Por otra parte, Platón le dio a la dialéctica otro sentido: la dialéctica entendida como movimiento o método supremo, último, lo que se alcanza después de haber practicado grados inferiores del conocer, siendo la dialéctica la forma de llega al último grado intelectual o intuición de las ideas, en que para poder intuirla es necesario aplicar un método: el dialéctico, donde su prioridad es la búsqueda de la verdad. Para Aristóteles, la dialéctica es el arte del descubrimiento o de la verdad del ser; es descubrir lo que está cubierto, además considera que es dialéctica la argumentación que concluye algo a partir de la comprensión cotidiana, donde el punto de partida no es una premisa cierta, sino una opinión cotidiana, algo que el platonismo pensó despreciable (Dussel, 1974), por lo cual, Aristóteles considera –a la dialéctica– que se ocupa del estudio de los razonamientos que son sólo probables y que se pueden reconstruirse según los esquemas silogísticos[12] que parte de premisas cuya verdad no ha sido comprobada o aceptada previamente, y que son posibles, es decir, admitidas con relativa amplitud.

Si bien podemos ver que la dialéctica es utilizada de diferentes formas, como es en el caso de los sofistas que la usan como arte de refutación, mientras que Aristóteles la usa sólo para descubrir la verdad del ser, estos usos pueden ser

[12] El silogismo es una forma de razonamiento deductivo que consta de dos proposiciones como premisas y otra como conclusión, siendo la última una inferencia necesariamente deductiva de las otras dos

considerados como algo previo a la filosofía, como lo expresa Dussel (1974) al señalar que en este periodo la dialéctica no es todavía filosofía, por lo tanto, no se puede considerar como ciencia.

En esta revisión del desarrollo de la dialéctica no podemos dejar de considerar lo desarrollado por el movimiento dialéctico instaurado por Descartes, quienes rechaza al ámbito cotidiano. Por otra parte Kant fundamenta un movimiento dialéctico como crítica: la crítica de la razón pura es toda ella un movimiento dialéctico (donde dialéctica es idéntica a crítica). Hegel en cambio fundamenta que la dialéctica será un conocer supremo y positivo por negación. Y por su parte la dialéctica fichteana será deductiva y, por consiguiente, epistémica o científica, donde la dialéctica se considerará como el método de la ciencia, de la filosofía como ciencia, entendida como ciencia suprema Dussel (1974).

Continuando con la idea podemos considerar que desde Hegel hasta Marx son quienes retoman a la dialéctica ya no como un problema discursivo, sino considerándola como un mecanismo de análisis, en el caso de Marx de la realidad social, y en el caso de Hegel de la fenomenología del espíritu.

Siendo Hegel quien con su teoría dialéctica, basada por una parte en la lógica formal, utilizando el principio de los opuestos, centrando su filosofía en conciliar los opuestos dentro de sí –en una unidad–, esto significa generar un desarrollo a través de la contradicción que parte de una tesis (posición inicial) la que está en oposición con una antítesis (posición contraria) las que a través de una composición llega a una síntesis, lo que a su vez se convierte en una tesis, la que deberá ser negada por una antítesis.

Invirtiendo la postura de Hegel, sobre la fenomenología del espíritu, Marx construirá una dialéctica en torno a la materia, cuya finalidad no será la simple teorización y justificación de la realidad, sino su transformación revolucionaria, donde la economía y la productividad determinan la relación dialéctica del hombre con la naturaleza, a su vez la naturaleza con la sociedad, elaborando una dialéctica de la historia, denominada materialismo histórico, que se fundamenta en el desarrollo de las fuerzas de producción, el trabajo y cuyo motor es la lucha de clases.

Si bien la dialéctica la podemos entender como la técnica de la conversación, también se puede considerar como la teoría de los contrapuestos, entre otras acepciones que ha tomado a lo largo de su desarrollo, podemos ver que la dialéctica se admite como método para producir visiones sintéticas, por lo cual, la podemos considerar como un método para entender o comprender, tanto una idea como la realidad.

En este proceso dialéctico los opuestos se transformarán al interactuar entre ellos, puede ser ejemplificado si consideramos que al observar un objeto necesitamos un instrumento especializado para ello en donde se transformará cuando se conozca o entiende el objeto, en otras palabras, el proceso de dilucidación del entendimiento transforma mi herramienta utilizada para poder entender, en nuestro caso si utilizamos o manipulamos las imágenes de la función –$f\ (x)$– para poder caracterizar a la función –f–, al momento de construir una idea o significar a f, habrá de cambiar la herramienta inicial, en este caso $f\ (x)$, lo que sucederá cada vez que signifiquemos al concepto de función.

Lo que trataremos en esta investigación, con ayuda de la dialéctica es llevar a la problemática de los signos a la argumentación utilizada para su establecimiento, para lo cual, se buscará la razón fundada de su significación.

Si bien podemos considerar que la dialéctica es una superación que sobrepasa las oposiciones y que eleva o propicia al saber unificado de lo conciliantes. En este mismo sentido, entenderemos como una *relación es dialéctica*, cuando hay una unidad de opuestos que se van a modificar al interactuar o al relacionarse, donde para analizar la realidad se va a utilizar un instrumento que a su vez se va a transformar con el análisis mismo de la realidad. Para ello puede surgir tanto de la cotidianidad o por lo conocido, como son las preconcepciones adquiridas.

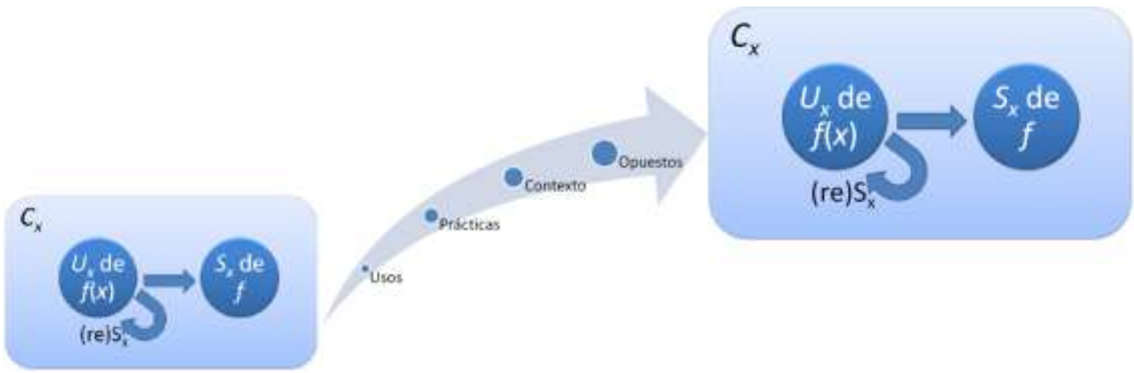

Figura N° 6: Relación dialécticas

En la figura N°6 podemos ver como el proceso de significación es una relación dialéctica, ya que en el caso de la significación de $f\ (x)$, se verá robustecida a la luz de las contraposiciones que existirán en los diferentes usos del signo, más aún estas significaciones de $f\ (x)$ estarán dotando de diferentes significados a la función. Donde la existencia de una la relación dialéctica entre los signos f y $f\ (x)$, nos permite hablar de significaciones que estarán dependiendo de los usos, prácticas y contexto en donde se vean inmersos el conocimiento.

CAPÍTULO 3

Justificación y propósitos de la investigación.

CAPÍTULO 3: Justificación y propósitos de la investigación.

"una buena parte de las Matemáticas ha sido construida generalizando cada vez más la noción de función" (Godemet, 1971, en Farfán y García, 2005).

Cantoral y Farfán (1998) nos proponen que *"la matemática escolar está al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia, de donde a su vez adquiere sentido y significación"*, esto se puede ver claramente reflejado dentro del concepto de función, ya que este concepto toma diferentes significados dependiendo de los intereses y objetivos que persigue el sistema educativo en donde se encuentra inmerso, viéndose esto reflejada en los medios de difusión; en la escuela que es la encargada de institucionalizar la enseñanza; donde se encuentra inmerso el estudiante; y en el dominio en que se esté aplicando el concepto. Por ende, los signos f y $f\,(x)$ van adquiriendo diferente usos y significados, de los cuales, se van resignificando a lo largo de la experiencia académica a la luz de las prácticas y usos en las cuales se vean inmersos.

Además Montiel (2005) sostiene que la didáctica de las funciones no puede abordarse desde la generalidad del objeto matemático, sino desde la particularidad de cada tipo de función y las condiciones socio-culturales de su construcción, por ende, cabe preguntarse si los roles que jueguen los signos f y $f\,(x)$, se verán influenciados o permanecerán inalterados en cada situación, es decir, al reconocer la naturaleza de cada función, estos signos tendrán la misma significación o se verán afectados por cada particularidad de las funciones.

Con el fin de identificar los roles, en otro término, cómo se están significados y de qué formas se está dando uso a los signos f y $f\ (x)$; se hace necesario problematizar y comprender de mejor forma la estructura, génesis, evolución que ha tenido el concepto de función dentro del contexto del cálculo, y con ello poder tener vestigios de estos signos o su equivalente dentro de su construcción histórica, además de poner un fuerte énfasis en cómo ha sido su conceptualización, y cómo es que en la actualidad se está concibiendo, resignificando y haciendo usos del dicho signo, además de los papeles que jugaron los medios de difusión del conocimiento matemático.

Se intentará vislumbrar el momento en donde $f\ (x)$ deja de ser el único signo que representa al concepto de función y con ello dar paso al uso de f y $f\ (x)$, conllevando esto a considerar que $f\ (x)$ pase a ser la imagen o el valor numérico de la función y con ello volviéndose en un objeto en el que se puede operar, analizar, manipular, entre otras cosas, transformándose en la “materia prima” de otros procesos matemáticos, abandonado con ello su rol de representar a la función, para pasar a ser una parte de la triada.

Además es sólo por medio de un estudio de $f\ (x)$ que podemos caracterizar a la función. Por ende, lo que se busca es lograr percibir cómo ha sido el uso de los signos a través de su evolución y qué ha significado durante los diferentes momentos que ha vivido, además de ver la forma en el que han sido significados a la luz de los usos y más aún de las prácticas que le rodean.

El realizar una búsqueda de carácter histórico implica reconocer y dar cuenta de las circunstancias que rodean tanto la gestación de un determinado saber, como los procesos de institucionalización que se vio sometido, por lo cual, se analizará, al hombre haciendo y usando matemáticas en un contexto social específico y no sólo a la producción matemática final que logra, donde el análisis de los usos del conocimiento matemático en situaciones socioculturales específicas permite dar cuenta que éste no está conformado por conceptos y estructuraciones conceptuales de forma aisladas, sino que presenta una articulación gestada al seno del desarrollo de ciertas prácticas (Buendía y Montiel, 2009).

Lo que se intenta en este trabajo es poder mirar desde una perspectiva sistémica el cómo se otorga y se está significando a los signos f y $f\ (x)$, por medio de los usos que se le han otorgado en las prácticas y actividades que se han asentado estos signos, lo que ayudará a entender a mayor cabalidad cómo ha evolucionado los roles, los significados de dichos signos, con ello comprender de mejor forma lo que están representando y los usos que se le están dando. Asimismo, se hace necesario considerar una revisión histórica y epistemológica del concepto de función, debido a que el desarrollo de este concepto se ha hecho casi a la par que el ser humano (Cantoral y Farfán, 1998), es claro que la simbología, las ideas y argumentaciones que sustentas a ella han evolucionado y por ende los signos utilizados tomarán matices, roles y significados diferentes, los cuales, se encuentran estrechamente ligados a aspectos socioculturales que se ven reflejados directamente en las prácticas e intereses de una época determinada.

Para esta investigación se considerará la evolución del concepto de función desde Leibniz hasta Bourbaki, con ello poder identificar cómo se estaban significando y usando los signos en los diferentes momentos. Por otro lado, se pretende identificar cómo evoluciona en la actualidad los usos y significados de f y $f\ (x)$, para ello se analizarán libros que son comúnmente utilizados en la enseñanza del cálculo, para poder así dar rastros de dicha evolución, ver cómo son aplicado dichos signos en diferentes momentos de la enseñanza.

Se hace indispensable estudiar los signos, debido a que sirven para manipular objetos abstractos, generalizar y comunicar, capturando aspectos sociales, intereses y una visión del mundo, además éstos se debe adaptar constantemente a los cambios, usos y deben ser capaces de transmitir todos los objetos o procesos que sintetizan, además de represéntalos. Los objetos y procesos matemáticos han evolucionado, por ende, la significación de estos signos también lo ha hecho.

El tener claro cuáles son los roles, significados y usos de éstos, favorecería a una mejor comprensión de los aspectos matemáticos que hacen usos de ellos, teniendo esto presente nos dotaría diversos antecedentes para proponer un rediseño del discurso matemático escolar, en donde los signos y el concepto de función se ven envueltos.

3.1. Algunos antecedentes

Como antecedente a las problemáticas que atañen al concepto de función podemos encontrar a Sierpinska (1992, citado en Ferrari, 2001) que en un estudio sobre las dificultades para la comprensión del concepto de función, distingue varios obstáculos epistemológicos, entre ellos se encuentra las distintas representaciones que puede tener una función. Estas representaciones o registros se relacionan constantemente en el proceso de enseñanza y aprendizaje, es por ello que se hará necesario detenerse a observar cómo en las diferentes representaciones se está entendiendo los signos f y $f\ (x)$, además de identificar lo qué están representando, con ello vislumbrar lo(s) significado(s) y uso(s) que se le asigna a los signos dentro de los diferentes registros y cómo estos interactuando o se relacionan entre sí. Podemos ver, que si bien las diferentes representaciones de la función pueden obstaculizar la adquisición de este concepto nos preguntaremos sobre los papeles o roles que juegan los signos en estas representaciones, además cómo han sido tratados en la evolución del concepto, es decir, cómo se están usando y significando en los diferentes registros.

Además desde la corriente socioepistemológica que da una perspectiva donde se considera la construcción social del conocimiento como un aspecto medular, se reconoce que *"la naturaleza del concepto de función es en extremo compleja, su* *desarrollo se ha hecho casi a la par del humano, es decir, encontramos vestigios del uso de correspondencias en la antigüedad, y actualmente se debate sobre la vigencia, en el ámbito de las matemáticas, del paradigma de la función como un objeto analítico. Empero, el concepto de función devino protagónico hasta que se le concibe como una fórmula, es decir hasta que logró la integración de dos dominios de representación: el álgebra y la geometría. La complejidad del concepto de función se refleja en las diversas concepciones y representaciones con las que tratan los estudiantes y profesores"* (Cantoral y Farfán, 1998), si bien no desconocemos ésta naturaleza compleja que se nos ha mostrado, nosotros localizamos que junto con la evolución del concepto existe una evolución de los signos con que se representa la función que toman diferentes usos y significados dependiendo de la época, escenario sociocultural que se vea inmerso dichos signos.

Dentro de los antecedentes históricos tendremos a la vista lo que nos presenta Youschkevitech (1976) al manifestar que la introducción de las funciones como un método analítico revolucionó a las matemáticas; y debido a su extraordinaria eficacia, ganó un lugar central en todas las ciencias exactas. No obstante, hacia el siglo XVIII entender a las funciones como expresiones analíticas resultó inadecuado, lo que gatilló introducir una nueva noción general de función que fue aceptada hasta el siglo XIX. Por lo cual, nos centraremos en este estudio en la evolución del concepto de función desde el siglo XVIII en adelante, donde se entiende a la función como una expresión analítica.

Esta revisión de aspectos históricos, la evolución del concepto de función, nos llevará a evidenciar las argumentaciones que engloban a los signos f y $f\ (x)$, esta revisión no se limitará a un aspecto informativo, sino más bien a ver cómo esto forma parte del dME y de la cultura matemática.

3.2. Una cuestión de contextos

Teniendo en consideración todo lo antes mencionado, no sería pertinente pensar que la construcción de los roles y significados de los signos matemáticos no se encuentra influenciada por el contexto y las prácticas que le rodea, el momento histórico, los aspectos socioculturales y lo que se persigue o pretende con la educación, además de creer que la construcción de estos significados es uniforme o simplemente verlos de forma aislada y con ello desconocer su naturaleza social. Como se puede ver en el ejemplo citado por desde Gellert (2005), se hace claro en él, el hecho de que la educación se permea de las ideologías e ideales de la sociedad, los cuales, influyen en la curricula y, por consiguiente, en el quehacer dentro del aula y más aún influye en todo lo relacionado con la educación, como es en el caso de los diversos medios de difusión, los que de cierta son los encargados de plasmar, difundir y normar el conocimiento.

No olvidemos que los signos son culturalmente modelados y socialmente distribuidos (Radford, 1998), es decir, que adquieren significado bajo prácticas y su validez dependerá del contexto en donde se encuentre inmerso. Siendo estos unos de los factores que favorecen a la diversificación de los significados de los signos, específicamente en nuestro caso de f y $f\ (x)$, si bien consideramos un factor social en la significación del signo, no podemos dejar de considerar el hecho de que el dME está normando el desarrollo de éste, más aún de dicho discurso no se reduce a la organización de los contenidos temáticos, ni a su función declarativa en el aula, sino que se extiende al establecimiento de bases de comunicación para la formación de consensos y la construcción de significados compartidos (Cantoral, Farfán, Lezama y Martín-Serra, 2006)

Desde otro punto de vista, se sostiene que el dME al privilegiar la centración en los conceptos matemáticos, ha generado la concepción de la Matemática como un conocimiento acabado, imposible de trastocar, ocasionando que la participación del individuo se restrinja a conocer y no a construir, lo que se ve reflejado en el carácter hegemónico del dME, en el que se refiere a cómo el dME privilegia un sólo tipo de argumentaciones, significados y procedimientos, imponiendo una situación que no permite la inclusión del estudiante en su construcción (Soto 2010).

No podemos dejar de tener presente, el hecho de que el contexto, lo cultural donde se hace uso de dichos signos está en constante evolución, por eso podemos pensar o tener otro antecedente para proponer, que el signo que depende de estos factores culturales y sociales también ha evolucionado junto con estos factores; el autor Varela (1997, citado en Cantoral et al, 2006) reconoce que el conocimiento depende de las experiencias vividas que, a su vez, modifican las propias preconcepciones y creencias, por lo cual, se suma como variables de significación las vivencias y experiencias que el individuo a tenido.

Teniendo esto aspectos en consideración, no podemos separar las prácticas, experiencias, contexto, lo histórico y cultural de la significación de los signos f y $f\ (x)$, aunque estos sean considerados como algo estático, abstracto y/o general, ya que estos factores, por nombrar algunos, estarán favoreciendo a la construcción de sus diferentes significados, usos y aplicaciones.

Es así como, a la hora de adentrarnos al trabajo con funciones, se hace indispensable entender que los signos f y $f\ (x)$ puede tomar diferentes significaciones o roles dependiendo en el contexto que se encuentre aplicado o el uso que se le esté dando o las argumentaciones que se subyacen, los cuales, se invisibilizan a la hora de su enseñanza, es así que se puede ver dentro del dME, específicamente, en los medios de difusión del conocimiento.

Dentro del dME podemos observar que generalmente el signo f se reserva para dar a conocer la "regla" o triada de la función que se puede ver en el tratamiento que hacen libros como, por ejemplo, en el caso del Spivak (1996) y Apostol (1993), donde f

queda reservado para nombrar o definir la función; por otra parte, el signo $f\ (x)$ es utilizado en diferentes medios de representación, lo que se hace sin hacer distinción alguna en los significados que pueda tomar. Además, se debe tener presente que el concepto de función responde a diferentes definiciones, algunas de éstas han cambiado con el tiempo y otras con los avances que se han suscitado en la enseñanza de la matemática (Planchart, s/f), por lo que podemos concluir que sus argumentaciones han evolucionado.

CAPÍTULO 4

Constructos y consideraciones teóricas.

CAPÍTULO 4: Constructos y consideraciones teóricas.

4.1. Aspectos de la Socioepistemología.

Como lo hemos manifestado anteriormente, esta investigación se sustenta bajo el marco teórico de la Socioepistemología la que pone su atención en entender las circunstancias que permitieron que el conocimiento se construyera como se construyó (Cantoral, 2001, p.xxiii), por consiguiente, sus objetos de estudios incluye el entender cómo las personas construyen conocimiento matemático en situaciones específicas, y cómo desarrollan una manera matemática de pensar ante situaciones diversas, poniendo en el centro de la discusión, más que los conceptos en sí a las prácticas sociales asociadas con la construcción de dicho conocimiento (Cantoral y López-Flores, 2010), poniendo su acento en la naturaleza epistemológica, con ello privilegiando una epistemología de prácticas asociada a la construcción de los conocimientos matemáticos, junto con ello retira del centro atención a los objetos matemáticos (Montiel, 2005).

En adelante su intención radica en explicar la construcción del conocimiento matemático desde un contexto situado, problematizando la construcción social del conocimiento, pues no centra su atención en los conceptos o procesos matemáticos, sino en los elementos sociales, culturales, funcionales e institucionales que permiten la construcción de ellos (Soto, 2010).

Para ir caracterizando a la socioepistemología por un lado nos centraremos en cómo se relaciona con la aproximación semiótica, la cual, nos entrega herramientas para entender aspectos de los signos, en este caso de f y $f\ (x)$, y por otra parte puntualizaremos en sus fundamentos.

4.1.1. La socioepistemología y su relación con la semiótica

Si bien en Cantoral *et al* (2006) y a su vez en Cantoral y Farfán (2008) se reconoce que en diferentes escuelas de pensamiento, específicamente las que adoptan una perspectiva trascendental respecto a los objetos matemáticos, los signos constituyen el puente de acceso a esos objetos conceptuales vistos como situados más allá de las peripecias de la acción humana y la cultura. El signo y la forma en que éste es usado, su sintaxis, son considerados como constitutivos del objeto conceptual: éstos objetivan al objeto.

Por otra parte se reconoce, en los artículos antes mencionados (Cantoral *et al*, 2006; Cantoral y Farfán, 2008) que el enfoque socioepistemológico comparte la tesis, de la semiótica cultural, que confiere a la actividad humana la función de producción del objeto, destacando que el énfasis no está puesto ni en el objeto preexistente o construido, ni en su representación producida o innata; sino más bien el interés está en modelar el papel de la práctica social en la producción de conocimiento a fin de diseñar situaciones para la intervención didáctica, las cuales, tienen presente su contextualización. Por ende, dentro de esta corriente se ha tratado el problema de la representación de un modo singular, pues no busca discurrir teóricamente sobre la acción de representar al objeto mediante artefactos, herramientas o signos, sino que se ubica "a ras" de las prácticas y de la forma en que éstas son normadas por prácticas sociales, ya que los objetos son "creados" en el ejercicio de prácticas normadas (tesis compartida con la semiótica cultural).

4.1.2. Aspectos generales de la socioepistemología

En este trabajo nos centraremos en cómo viven f y $f\ (x)$ dentro del dME, sus significaciones y argumentaciones. No obstante, nos encontramos con este mismo dME quien excluye a los actores del sistema didáctico (profesor, estudiantes, escritor de textos, entre otros) de la construcción del conocimiento matemático (Soto, 2010) y más aún excluye al mismo conocimiento matemático (Andrade, 2012), dándose estas exclusiones a partir de la imposición de argumentaciones, significados, procedimientos y de los conocimientos que se deben enseñar (incluyendo su orden y estructuración), es decir, su carácter hegemónico, lo cual se cristaliza a la luz de los intereses y tendencias que mueven a una sociedad en un determinado momento, factores que la matemática escolar no queda excepto, ya que en el dME plasma en sí la intencionalidad e ideales que tiene una sociedad, siendo la educación un medio para difundirla.

La corriente socioepistemológica se plantea el examen del conocimiento matemático, social, histórica y culturalmente situado, problematizándolo a través de las circunstancias de su construcción y difusión (Cantoral y Farfán, 2004), por lo tanto, su aproximación a la investigación en matemática educativa se ocupa específicamente del problema que plantea la construcción social del conocimiento matemático y de su difusión institucional. Dado que este conocimiento adquiere el estatus de saber sólo hasta que se haya constituido socialmente, en ámbitos no escolares, su difusión hacia y desde el sistema de enseñanza le obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento, de manera que afectan también a las relaciones que se establecen entre los estudiantes y su profesor (Cantoral *et al*, 2006; Cantoral y Farfán, 2008).

Desde la Socioepistemología la problemática fundamental del aprendizaje de la matemática se encuentra en la estructura de la matemática escolar, donde se reconoce una confrontación entre la Obra Matemática y la Matemática Escolar (Cordero, 2001), y por ende, nuestro quehacer se enfoca a entregar herramientas para la resignificación del dME, esta confrontación se puede ver plasmado en los diferentes medios de difusión del conocimiento matemático, ya que estos son normados por el discurso matemático, el que entrega las aristas de qué y cómo enseñar, que responde a su dimensión social, cultural y temporal, soslayando la organización, argumentación, actividad y prácticas que hicieron posible que los conceptos emergieran, desconociendo así sus ideas germinales, raíces, contextos, entre otros.

En esta corriente los aspectos históricos permiten conformar una base de significados para el conocimiento matemático y para su introducción, significativa y articulada, al sistema didáctico, además favorece el reconocimiento del carácter social de la matemática donde éste es entendido como las circunstancias que generan conocimiento matemático, esta aproximación teórica puede entenderse en dos sentidos: el primero referente al planteamiento de epistemologías de prácticas; y el segundo, en su aspecto metodológico, para desarrollar intencionalmente dichas prácticas al seno de los sistemas didácticos (Buendía y Montiel, 2009). Por consiguiente, se problematizan los fenómenos de producción, adquisición y de difusión del conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple, que incorpore al estudio de la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza (Cantoral y Farfán, 2003).

4.2. Acerca de los signos ¿cómo se caracterizan?

Como la problemática se enfoca en ver los roles de los signos f y $f(x)$, se hace necesario detenernos para puntualizar qué es lo que se estará entendiendo por signos. Para esta investigación al referirnos a signos, adoptaremos lo señalado por Radford (1998), quien dice que los signos son parte de procesos específicos de los seres humanos que enlazan los procesos individuales con el entorno social, adquiriendo ciertos significados según el uso que se les dé en la práctica y su validez dependerá del contexto en donde se encuentra inmerso el sujeto. Además los signos se tornan fundamentales para comprender la realidad, debido a que brindan herramientas para interpretar y manipular el entorno, puesto que son culturalmente modelados y socialmente distribuidos, o sea, su significado es adquirido bajo prácticas y su validez dependerá del contexto en que se encuentre inmerso. Por consiguiente, el signo conecta lo abstracto con lo concreto, describiendo relaciones y estructuras de la realidad, dándole significados a ésta, además Radford (2004, citado en Cantoral *et al*, 2006) dice que el signo no crea al objeto: aquél es solamente afectado por éste.

4.2.1. La construcción social de los significados de los signos

Si bien el interés de esta investigación no se encuentra en examinar directamente o de cerca lo referente al lenguaje, pero éste al estar constituidos de signos nos hace detenernos en sobre él, ya que es importante tener presente que el lenguaje puede preestructurar la visión del mundo y excluir algunas formas de pensamiento, ya que *"Los seres humanos no viven sólo en el mundo objetivo ni en el mundo de la actividad social como se piensa comúnmente, sino que más bien se encuentran a la merced del lenguaje particular que se ha convertido en el medio de expresión de su sociedad. Es una ilusión imaginar que uno se ajusta a la realidad esencialmente sin el uso del lenguaje y que el lenguaje es tan sólo un medio incidental para resolver problemas específicos de comunicación o de reflexión. El hecho es que el "mundo real" se construye en gran medida inconscientemente sobre la base de los hábitos lingüísticos del grupo"* (Edward Sapir y Benjamin Lee Whorf. Sapir, Skovmose 1994). Es importante tener presente estos aspectos del lenguaje, ya que como se dijo anteriormente por un lado las matemáticas pueden caracterizarse como un lenguaje y sus palabras juegan un papel primordial para la comunicación de lo que se desea expresar o desarrollar, además en este lenguaje estarán presente signos que lo conforman, por lo cual, el comprender este lenguaje nos otorga herramientas para interpretar la realidad que nos rodea y más aún para problematizarla, generando conocimiento y teniendo el medio para poder comunicarlo.

Como es motivo del presente trabajo buscar y dar evidencia de que los roles que se le puede otorgar a f y $f\ (x)$, estarán dando una significación particular de cada uno de éstos y con ello poder dar evidencia de que estos evolucionan por una parte dependiendo de la concepción de función con que se esté trabajando, también por las "ideas" que lo sustenta o rodea, los usos que se le dan, además de las prácticas a que se ve sometida y más aún las necesidades y/o ideologías que se encuentran presente en un momento determinado, para lo cual, consideraremos que los roles y significados de los signos es una construcción social y constante, los que dependen directamente de su entorno sociocultural, además de lo que se persigue con la enseñanza de las matemáticas, es decir, la filosofía que sustenta o se encuentra detrás de cómo se estructura la enseñanza.

Planchart (s/f) nos hace hincapié en que para muchos profesores de matemáticas, las expresiones simbólicas, más bien algebraicas, son las únicas representaciones "aceptadas" en los procesos demostrativos del quehacer matemático y estas ideas son transmitidas a los alumnos, además de que muchas veces en la enseñanza no se selecciona con criterio pedagógico las definiciones de función que se utiliza en determinados niveles de enseñanza porque se hace sin tomar en cuenta los objetivos del curso; lo que es primordial si consideramos que la construcción del conocimiento debería estar estrechamente relacionada con las prácticas, intereses, experiencia y contextos sociales del que se encuentra aprendiendo y, por ende, las definiciones que se manejan para un concepto deberían dar respuesta a estos factores.

El signos f y $f\ (x)$ toma gran relevancia ya que no sólo se ve y se trabaja con ellos, cuando se ven tópicos referentes a funciones, sino que también lo podemos ver presente en temáticas más avanzadas donde la función es, por ejemplo, el resultado de un procedimiento, como es en el caso de una ecuación diferencia del tipo $ay'' + by' + cy = f(x)$ o también se pueden ver presentes los diferentes registros, como lo hemos documentado anteriormente en Andrade y Montecino (2009) y Bagni (2004), jugando diferentes papeles.

4.2.2. Aspectos transcendentes de los signos

Complementando lo antes expuesto sobre los signos, consideraremos lo que nos expone Steinbring (2006) al señalar que el conocimiento matemático no puede ser revelado por la simple lectura de los signos matemáticos, símbolos y principios. Los signos han de ser interpretados, y esta interpretación requiere de experiencias y de un conocimiento implícito, no puede entenderse estas señales sin ningún tipo de preconcepciones. Además el aprendizaje y la comprensión de las matemáticas requieren de un ambiente cultural, es por lo cual, que tal conocimiento implícito, así como las actitudes y formas de utilizar el conocimiento matemático se hacen indispensables y esenciales. Dejándonos claro que necesitamos tener antecedentes (conocimientos previos) para poder comprende e interpretar un signo y que dicho significado irá evolucionando y resignificándose a medida que tengamos más experiencias con él, encontrándose estrechamente ligado con nuestro entorno sociocultural.

Por otro lado podemos considerar que los signos tienen un carácter estático y dinámico (Peirce 1976, citado en Sáenz-Ludlow, 2007), teniendo esto en cuenta la actividad de enseñanza-aprendizaje se podría entender como un proceso de interpretación por parte de los maestros y estudiantes, donde se hace, nuevamente, primordial los aspectos sociales que rodean y los intereses que se tienen, ya que los signos transportan información más allá de la que se podría considerar "esencialmente matemática", sino también ideologías y forma de ver al mundo.

Steinbring (2006) considera que los signos matemáticos son medios indispensables para la comunicación y pensamiento humano, al igual que los signos en general, los signos matemáticos también son portadores de los conocimientos y elementos de comunicación, considerándolos como "instrumentos" para la codificación, descripción y comunicación de los conocimientos matemáticos, facilitando con esto el trabajar con el conocimiento matemático y la generalización de éste. En este sentido, los signos matemáticos se pueden considerar como herramientas culturales (Radford, 1998, 2001), que se utilizan en la comunicación con otras personas a fin de desarrollar el conocimiento, en este caso matemático.

Además Steinbring (2006) nos presenta que la caracterización del papel de los signos matemáticos requiere de dos funciones a considerar:

Una función semiótica: la función del signo matemático como "algo que representa algo más".

Una función epistemológica: la función del signo matemático en el marco de la constitución epistemológica del conocimiento matemático.

Las matemáticas requiere de cierto signo o sistemas de símbolos con el fin de mantener un registro de código, con ello unificar el conocimiento y divulgarlo. El ingreso de un signo a las matemática necesita la aprobación y aceptación de la comunidad que la norma, validando su significado y uso. En el caso de los estudiantes, *"…, estos signos no tienen un significado propio, esto tiene que ser producido por el alumno mediante el establecimiento de una mediación a los contextos de referencia adecuado"* (Steinbring, 2006). Podemos manifestar que el signo es construido socialmente y su significado es situado, más aún este signo es validado por la comunidad, en este caso matemática, dotándolo de significados, característica y de un estatus dentro del quehacer, por lo cual, la adquisición de los significados de un signo no es algo automático e inmediato.

Complementando estas ideas tenemos lo presentado por Berger al referirse a la obtención de significado de los signos matemáticos, en el contexto de la enseñanza de las matemáticas, donde nos aclara que un signo puede ser un símbolo matemático, una afirmación matemática, una expresión matemática, el nombre de un objeto matemático, entre otras cosas. Basándose en Vygotsky y por lo expresado por Radford (2000), es que Berger (2004) considera que los signos tienen una doble vida, por un lado su función como herramientas que permite al individuo participar en prácticas cognitivas, por otro lado, son parte de esos sistemas que trasciende al individuo y que a través de esto una realidad social es objetivada.

La tesis de Berger (2004) concluye que un uso funcional de un signo matemático en un contexto social, conduce a la construcción de un significado personal que también es congruente con el significado cultural de ese signo. Considera, desde una perspectiva cultural, al entendimiento como un sinónimo de captación de significado, así una persona que encuentra la forma en que un signo matemático es utilizado por la comunidad matemática, entenderá ese signo matemático, pero si esa persona sólo puede utilizar el signo matemático en contextos restringido o de manera limitada, entonces esa persona tiene una mala comprensión de aquel signo. La idea sobre el uso funcional de un signo matemático, se deriva y es análoga a la noción del uso funcional de una palabra de Vygotsky. De acuerdo con este principio, los niños usan las palabras para la comunicación y la organización de sus actividades antes de que tengan una comprensión completa de lo que significan estas palabras. *"La capacidad de usar estas palabras antes de la plena comprensión da lugar a la impresión de que: el punto final en el desarrollo del significado de una palabra coincide con el punto de partida, que el significado ya hecho se da justo en el comienzo y que, en consecuencia, no hay lugar para el desarrollo"* (Berger, 2004).

Aplicando el postulado de Vygotsky sobre el papel central del uso funcional de una palabra en la formación de conceptos y haciendo una analogía, Berger (2004) establece el papel central de un uso funcional de un signo matemático en la formación de un concepto matemático para un alumno en particular. Cuando un estudiante se encuentra con un nuevo signo matemático (por ejemplo, en una definición matemática) el signo no tiene todavía sentido para él, pero posiblemente como resultado de las intervenciones pedagógicas o sociales dentro de la zona de desarrollo próximo del estudiante, no permanecerá inactivo, sino que comenzará a utilizar este signo matemático (que puede ser en forma de símbolos, gráficos, palabras o dibujos) en la comunicación con los demás y en las actividades matemáticas, incluso mientras su comprensión de este signo es inestable e inmaduro. De hecho estos usos funcionales de los signos matemáticos (las manipulaciones, las imitaciones, las asociaciones, entre otros) le dan un punto de acceso inicial al nuevo objeto de estudio, además este uso funcional del signo matemático está mediado por el conocimiento del alumno de los signos relacionados o por la intervención de una tarea. Destacando como lo más importante, el hecho de que el signo matemático tiene un significado cultural que se deriva de su uso ya establecido en el discurso matemático. Así, el alumno se esfuerza en utilizar "nuevos" signo matemático de una manera que sea compatible con su uso socialmente aceptado por la comunidad matemática.

En resumen, Berger (2004) argumenta que un estudiante comienza a utilizar un nuevo signo matemático en actividades matemáticas antes de que entienda perfectamente cómo utilizarlo de una manera culturalmente significativa. A través de este uso (que pueden ser incorrecto) del signo matemático, el alumno será capaz de empaparse con el objeto matemático y comunicarse con otras personas acerca de su ideas. Debido a este uso funcional, que puede estar mediado por las actividades, el signo matemático comienza a adquirir un significado personal para el alumno y con ello comienza a utilizar el signo en el discurso matemático de una manera que sea compatible con su significado socialmente reconocido, en otras palabras, el sujeto comienza a apropiarse de los objetos matemáticos.

Asimismo podríamos preguntarnos qué hace que un signo prevalezca en el tiempo o cómo es que las comunidades seleccionan un signo, es decir, lo que un signo sea considerado un "buen signo", por lo cual, prevalezca en el tiempo. Dando respuesta a esta interrogante, se puede considerar que una buena elección de un signo o símbolo depende muchas veces de su capacidad para integrarse o ser el núcleo de un sistema local de notaciones, dependiendo de su capacidad de adaptación a los distintos desarrollos matemáticos donde va a intervenir, más que en la forma como sus rasgos reflejan aquellos que quiere ser representado (Alarcón, 1998).

Por lo antes mencionado podemos concluir que la función de los signos es la generalización, sintetizar procesos y transmitir el conocimiento, ayudando a mediar la comunicación del conocimiento, además los signos debe con frecuencia adaptarse a los diferentes usos y tratamientos que se le dan, siendo éstos parte de una producción o expresión intelectual más global, teniendo como intención dar a conocer algo a alguien dentro de un contexto y momento, su construcción estará altamente incidida por las prácticas que rodean al individuo, ya que estas regularán lo que se entenderá por un signo y lo que se debe entender por él, además la adquisición de su(s) rol(es) y significado(s) es progresiva al uso que se le dé, por lo tanto, su significación irá evolucionando a la luz de su usos y prácticas.

Pero una vez que el signo aparece como mediador, éste debe de abstraer ciertas propiedades y volverse parte de un discurso, validado de ante mano por una comunidad, y con ello hacerse parte de la humanidad. No podemos ver al signo disjunto a su(s) significado(s), ya que el/los significado(s) de un signo se encuentran estrechamente relacionado al uso que se le esté dando y éste está anclado a un sistema de nociones , ideas y racionamiento establecidos, además de que dicho signo acarrea aspectos socioculturales y da evidencia de aspectos filosóficos e ideológicos. También con fines prácticos podemos considerar que cuando una persona logra significar un signo adecuadamente, darle un significado personal igual al significado establecido, podrá tener un “conocimiento matemático apropiado”.

Sin duda podemos considerar que el hacer uso de signos en matemática permite a los estudiantes sentirse incluidos o pertenecientes a un grupo, le da un sentido de pertenencia y un estatus, ya que al entrar en las matemática se hace indispensable el uso y comprensión de los signos, para poder interpretar y entender lo expresado en los diferentes medios de difusión, debido a que se trabaja mayoritariamente con signos. Pero se debe tener presente que en ocasiones estudiante hacen uso de los signos sin tener apropiado el/los rol(es) y significado(s), cayendo con ello en un uso de las matemáticas como algo repetitivo o algorítmico o práctico que sólo está al servicio de un objetivo a corto plazo, como por ejemplo para superar una barrera (un examen o un curso) o para cumplir con el formalismo y un aparente rigor de las matemáticas.

CAPÍTULO 5

Cómo se pretende dar respuesta a la problemática, consideraciones metodológicas.

CAPÍTULO 5: Cómo se pretende dar respuesta a la problemática, consideraciones metodológicas.

Para abordar la problemática se examinará los papeles que cumplen los signos f y $f\ (x)$ en la construcción del concepto de función dentro de los medios de difusión del conocimiento matemático, abocándonos en los usos y argumentaciones presentes en estos medios y con ello poder inferir en qué forma están siendo significados, reconociendo que estas significaciones se edifican bajo una racionalidad contextualizada en donde subyace sus actividades y prácticas.

Se enfatizará en las diferencias conceptuales existentes entre f y $f\ (x)$, dando evidencia del carácter portador de significado de f que posee $f\,(x)$ y que a su vez, paradójicamente, impiden la construcción de ésta, en otras palabras, los diferentes roles jugados por $f\ (x)$ que dotan de significado a f; ya que es sólo estudiando las imágenes que se puede hablar de las propiedades de la función, pero a su vez ello obstaculiza su construcción plena, por ejemplo, si la imagen "se mueve" se dice que la función "es variable", pero la f "no se mueve", lo que cambia son las imágenes, es decir, $f\ (x)$, porque f es sólo una triada formada por una regla específica, un dominio de aplicación y un contra dominio o imagen. Por lo tanto, podemos pensar que la noción de función no se constituye, sino hasta que se articulen los usos y significados entre f y $f\ (x)$, reconociendo en cada uno de éstos signos su rol, y estén bajo el control de las actividades o prácticas que rodean al concepto de función.

Junto con lo antes propuesto se buscará en la construcción y evolución del concepto de función aspectos relevantes que den antecedentes sobre los usos y significados de éstos signos, donde se tendrá presente el contexto situado en que se encuentra aplicando los constructos matemáticos; también se verán los usos y significados dentro del dME, analizando en ambos casos las argumentaciones que son utilizadas.

No obstante, tenemos presente que es insuficiente recuperar solamente los significados y la génesis histórica de los conceptos, sino que también es necesario entender aquellos elementos que hicieron posible su construcción (Cantoral, 2001, p.1), es decir, aspectos de su entorno sociales, entorno cultural, intereses de quienes están produciendo el conocimiento, de la comunidad que lo abala y quienes deciden qué es lo que se debe difundir, filosofía e ideologías que le subyacen, entre otras cosas.

Como podemos ver en Espinoza (2009) se reconoce que desde una visión socioepistemológica –visión en que hemos fundamentado nuestra investigación– la cuestión de significado se lleva más allá de la visión o postura *clásica y tradicional*[13] del conocimiento científico, la que ha sido criticada por ocultar intencionalmente la historia de dicho conocimiento; esta crítica se debe a que no podemos desconocer la historia intrínseca al conocimiento científico lo que llevará a considerar que el significado mismo del conocimiento variará en base a lo temporal. Si bien, esta visión más pragmática del conocimiento matemático cambia la idea de lo estable y fijo del

[13] La postura clásica y tradicional, considera que el conocimiento es concebido como una relación convencional entre signos y entidades concretas e ideales que existen independientemente de los signos lingüísticos. Aquí el conocimiento matemático es un sistema de verdades seguras, no modificable por la experiencia humana, es decir, el conocimiento es fijo, ya tiene su significación intrínseca. Aquí hablamos de “significado” como tal, por lo tanto, si la matemática es estática, su significado es intrínseco a su estructura lógica, es decir, el significado de un enunciado deriva de la aceptabilidad de su veracidad, y esto en base a leyes lógicas fijas. De esta manera, la significación misma del conocimiento no es un problema, pues, al estar considerados los problemas y enunciados matemáticos, el problema se vuelve entonces en desarrollar, en base a estos, nuevos problemas y enunciados matemáticos (Espinoza, 2009).

conocimiento matemático, no logra cambiar de raíz el problema de la articulación de lo social en este proceso. Se logra dotar a la matemática de una dimensionalidad histórica, pero sigue presente el problema de la difusión institucional, la construcción social del conocimiento, los mecanismos aprendizaje y la misma socialización del saber científico.

Por otra parte, Espinoza (2009) nos dice que cuando se entiende la dimensión contextual de la racionalidad, el "significado" es una noción que necesita una ampliación a lo sociocultural, centrar el interés en la construcción de significados en un contexto específico con una racionalidad situada a éste, lo que también podremos entender como "significación". Lo que implicaría dejar de considerar al conocimiento como fijo y estático, y comenzar a entenderlo como una variable en función de lo temporal, así como inherente al él su uso, podemos embonarlo con los procesos sociales de construcción del conocimiento con base en esta noción de "significación" porque la esencia epistémica del conocimiento no está separada de esta dimensión social, pues el conocimiento matemático lo entendemos como un producto de las dinámicas sociales. Es más, las prácticas mismas contienen conocimiento científico. Al considerar el conocimiento como variable a la dimensión temporal y su articulación con lo social, la noción como tal de "significado" queda restringida. Es por esto que se utilizará la noción de "significación", que permite embonar estos procesos que contiene y extiende la noción misma de significado.

Si bien como buscamos realizar una caracterización de los signos f y $f\ (x)$, a la luz de cómo se está significando en torno a sus prácticas, no podemos dejar de considerar lo expuesto por Steinbring (2006) quien hace referencia de que para hacer una caracterización de los signos se hace necesario tener presente que los signos matemáticos pueden cumplir una función semiótica y otra epistemológica.

Lo que se entenderá con el término "función semiótica" lo encontraremos al hallar a la vez la respuesta a la pregunta: ¿qué usos se le han asignado a estos signos (en los diferentes registros de representación dentro del dME)? Buscando obtener evidencia de los diferentes papeles que pueden jugar éstos y con ello poder identificar sus roles, a la luz de los usos que se le estén dando y argumentaciones utilizadas. En el caso de la función epistemológica se busca dar respuesta a: ¿qué significados se le ha otorgado a estos signos (en los diferentes registros de representación dentro del dME o en la evolución de éste)? y con ello vislumbrar cómo es qué se hace o es el recorrido de la construcción de sus significados y cómo esto propicia la construcción de contenidos matemáticos bajo una racionalidad. Reconociendo en estas dos funciones un medio para poder dar evidencia de la significación que se le están dando a los signos.

Para poder tener antecedentes de estos usos y sus significados de estos signos, de los que dependen directamente de su contexto y de lo temporal, es cómo se ha expresado anteriormente. En una primera instancia se buscará en la construcción y evolución del concepto de función aspectos trascedente, donde se den luces de los diferentes usos y significados que se le han otorgado a de los signos f y $f\ (x)$, o sus equivalentes. Para lo cual, tomaremos como antecedente la evolución del concepto de función, la que se remonta varios milenos atrás, alrededor de 3.700 años en donde se trabajó con objetos matemáticos que llevaban implícitos el concepto de función, siendo éste un periodo de poca evolución hacia arribar al concepto mismo. Pero fueron necesarios solamente 300 años para su formación y desarrollo, el que inicialmente surgió en relación con problemas del Cálculo y del Análisis (Kleiner, 1989; Farfán, 1997; Del Castillo y Montiel, 2007; Sastre, Rey y Boubée, 2008)

Por otro lado, no podemos desconocer que los conocimientos matemáticos, en nuestro caso el objeto o concepto de función, se han ido construyendo sobre ideas previas o bien contra ellas, sobre la base de los intereses, cuestionamientos, problemas, posibilidades y limitaciones de cada cultura y época (Sastre *et al*, 2008), por ende, no ha siendo su desarrollo de forma aislada, sino que relacionándose con otros conceptos y concepciones, por lo tanto, dicho desarrollo no se puede considerar de forma lineal, sino más bien que se irá nutriendo por los aspectos sociales y culturales, además de aspectos propios de los avances conceptuales dentro de la matemática. Se hará necesario observar el desarrollo epistemológico del concepto de función, poniendo énfasis en las diferentes concepciones de función, su evolución, en los roles de f y $f\ (x)$, cómo se le están dando significados a estos signos matemáticos y cuáles son sus usos.

Para esta investigación se considerará la concepción del concepto de función y su transformación desde que Leibniz lo introduce hasta la definición conjuntista de Bourbaki, no se considerará la noción de función antes de Leibniz, ya que *"es evidente que la noción primitiva de función era mucho más intuitiva; la actual tiene un alto grado de formalización que la hace mucho más abstracta"* (Farfán y García, 2005), poniendo el énfasis en las obras de Cauchy y Bourbaki, en las cuales, surgen como medios de difusión del conocimiento matemático.

Para lograr tener una mirada más global se tendrá como antecedente a esta investigación lo siguiente: cómo se concibe el concepto de función a lo largo de su construcción histórica y su epistemología, centrándonos aspectos socioculturales, las prácticas, intereses de la comunidad matemática, es decir, aspectos que hicieron o gatillaron entender a la función y sus signos de una determinada forma y, como se dijo anteriormente, poniendo especial atención en las obras de Cauchy y Bourbaki, ya que estas obras se caracterizaron por ser medios de difusión que se encargaron de sintetizar y estructurar la matemática que se estaba realizando, además de tener un gran impactando dentro de la comunidad, ya que marcaron pautas para obras posteriores, lo que los convierte en trabajos interesantes de observar otorgando antecedentes fundamentales para nuestro estudio; más aún estas visiones fueron las que predominaron e impactaron o se ven presente dentro del dME actual.

Se analizará diferentes medios de difusión del conocimiento, en el que se deberá tener presente los diferentes matices que f y $f\ (x)$ han adoptado dentro de los diferentes discursos matemáticos, con ello poder vislumbrar qué se está entendiendo y qué están representando en los diferentes momentos de la construcción del concepto de función, donde se tendrá presente su construcción, su entorno social, sus antecedentes epistemológicos, los intereses de la comunidad, etc.

Se llevará a cabo esto con el fin de poder dar antecedentes que respondan a la construcción y sobre la existencia de dificultades al momento de apropiarse de los diferentes “papeles” de éstos signos, sus interpretaciones, los diferentes usos y significados que puede adquirir desde los diferentes registros de representaciones, cómo en los diferentes campos donde se pueda ver inmerso el concepto de función, tanto como un objeto, como una noción.

Además de estudiar la obra matemática, en una segunda instancia, se analizará el discurso matemático escolar actual, identificando los usos y significados de f y $f\ (x)$, con ello ver qué es lo que está representando, cómo se concibe el concepto de función y razonando sobre éste, es decir, vislumbrar cómo están significándose a la luz de los diferentes usos que se le estén otorgando. Para lo cual, se observarán libros de cálculo, que se utilizan en la actualidad en la formación de diferentes especialidades, como es el caso de los libros Courant y John (1999) y Stewart (2003), con el fin de ver cómo se relacionan estos signos, cómo se están argumentando sus usos y significados en los diferentes momentos que se ven presentes.

Para poder dar respuesta a la problemática y con ello a las interrogantes que han surgido a lo largo del estudio, como se ha comentado anteriormente, nos situaremos desde la socioepistemología donde, la reconstrucción de los significados resulta indispensable, debido a que están impregnados de aspectos sociales y culturales de la época en la que se construyeron, porque no es posible su adaptación inmediata a nuestro contexto cultural (Cantoral y Farfán, 1998).

Asimismo el enfoque socioepistemológico comparte la tesis, de la semiótica cultural, que confiere a la actividad humana la función de producción del objeto, aunque el énfasis socioepistemológico no es puesto ni en el objeto –preexistente o construido, ni en su representación– producida o innata; sino más bien se interesa y se ocupa de modelar el papel de la práctica social en la producción de conocimiento con la intención de extraer desde ello diseños para la intervención didáctica (Cantoral y Farfán, 2008).

Consideraremos que *"la práctica social no es lo que hace en sí el individuo o el grupo, sino aquello que les hace hacer lo que hacen"* (Covián, 2005) y bajo esta idea que se intenta explicar los procesos de construcción, adquisición y difusión del saber matemático, o sea, con base en las prácticas que rodean un conocimiento que responde a racionalidad contextualizada.

Para esto se identificarán y caracterizarán las prácticas y actividades relacionadas con el uso y significación de f y $f\ (x)$ en torno a la construcción del concepto de función y al desarrollo de saberes que utilizan este concepto, donde los escenarios históricos, culturales e institucionales toman gran relevancia, ya que en la socioepistemología se plantea el examen del conocimiento matemático, social, histórica y culturalmente situado, problematizándolo a la luz de las circunstancias de su construcción y difusión (Cantoral, Farfán, 2004).

Como nos plantea Cantoral y Farfán (2008) en este encuadre teórico, es preciso modificar el centro "pasar de los objetos a las prácticas". Los enfoques centrados en objetos, buscan explicar el proceso mediante el cual se llega a la construcción del objeto y minimizan el papel que desempeña la triada: herramientas, contextos y prácticas. En cambio, el dejar de mirar sólo al objeto producirá un deslizamiento de orden mayor hacia explicaciones sistémicas, holísticas, complejas y transdisciplinarias.

Es por ello que se buscará construir una explicación sistémica de los fenómenos didácticos que se encuentran entre la vecindad del concepto de función y no sólo discutir asuntos de la semiosis de manera aislada, sino que se busca dar antecedentes para intervenir en el sistema didáctico, al tratar a los fenómenos de producción, adquisición y de difusión del conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple, que incorpore al estudio de la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza (Cantoral, Farfán, 2003), teniendo presente que todo esto se realizará dentro de dinámicas sociales, en donde los signos f y $f(x)$ serán un producto de ellas.

CAPÍTULO 6

Revisión bibliográfica.

CAPÍTULO 6: Revisión bibliográfica.

Con el fin de dar sustento a esta investigación, se realizará un breve recorrido de la construcción del concepto de función, desde el siglo XVII hasta el siglo XX donde se pretende resaltar los momentos más relevantes y con ello tener algunos antecedentes de cómo se estaban concibiendo los signos f y $f\ (x)$, es decir cómo se estaba haciendo usos de éstos y cómo se estaban significando. Para luego centrarnos en las obras de Cauchy y Bourbaki, las cuales fueron creadas con el propósito de ser obras para la formación académica, es decir libros para la educación en matemática. El analizar estas obras tiene como finalidad el puntualizar el uso y significados que se le asigna a los signos, ya que estas obras cumplieron con la finalidad de sintetizar el desarrollo matemático que se había desarrollado en su época, por otra parte han influenciado en el desarrollo y fundamento del dME actual. Y para finalizar se revisarán dos textos actuales de cálculo, para poder identificar los usos y significaciones que se le está dando a éstos signos en el dME actual y cómo están siendo argumentados.

El realizar este recorrido histórico, no se hace sólo como algo informativo, sino con el fin de reconocer a la historia (construcción y desarrollo del la función) como una fuente de significación y usos de estos signos, en los cuales podremos identificar su carácter situado, temporal, reconociendo en ellos una racionalidad contextualizada.

6.1. Función, aspectos históricos y algunos antecedentes de sus signos

En Del Castillo y Montiel (2007) se nos muestran que el concepto escolar de función predominante en la actualidad es aquel que alude a una regla de correspondencia, el cual en las investigaciones en matemática educativa ha sido ampliamente cuestionado por su carácter estático, algebraico y algorítmico. Desde el punto de vista del sistema de enseñanza, tradicionalmente el curso de precálculo, es un repertorio de procedimientos y algoritmos provenientes esencialmente del álgebra y de la geometría analítica, tocando con mayor o menor énfasis el estudio de función, habitualmente sobre la definición de Dirichlet - Bourbaki. Su enseñanza tiende a sobrevalorar los procedimientos analíticos y la algoritmización, dejando de lado a los argumentos visuales, entre otras causas por no considerarlos como matemáticos. Por otra parte, los alumnos tienen una visión discreta de una función relacionando pares separados de números, en el que cada número puede considerarse como una entrada dando como resultado otro número, pensando que existe una relación entre los números, pero la relación es formada separadamente para cada par, más aún la cuestión es que la relación de dependencia entre las dos variables no es visible en el gráfico, que sigue siendo una representación estática de la pareja (x, y) y no permite el significado de dependencia entre las dos variables.

Si bien podemos reconocer que el concepto de función evoluciono desde sus ideas intuitivas de relaciones y dependencia pasando por una visión geométrica o gráfica, para luego ser considerada como una expresión analítica, hasta entenderla como una relación de correspondencia, siendo esta última la que ha predominado dentro de los textos escolares actuales, a su vez podemos evidenciar que gran parte de su evolución, génesis e ideas germinales se ha perdido dentro del dME, es decir, se ha perdido sus raíces, de donde surge, ya que sólo predomina una visión conjuntista de la función, más aún con ello podemos vislumbrar el carácter estático y acabado con el cual se fundamenta el conocimiento matemático.

El concepto de función por una parte nos permite hacer una caracterización del movimiento y con ello poder estudiarlo, por otro lado una función se puede considerar que no es más, que una ley que regula la interdependencia de cantidades variables, la cual no presupone la existencia de una relación causa y efecto entre ellas, aunque en el lenguaje corriente se utiliza a menudo la palabra “función” con este último sentido (Courant y Robbins, 2002), como lo hemos visto anteriormente, el concepto de función puede tomar diferentes caracterizaciones o matices, dependiendo del contexto en el que se vea aplicado y lo que se quiera estudiar con ella, es por ello que queremos ver cómo se estaba significando la función en los diferentes periodos y con ello poder ver que usos y significados se le otorgaban a los signos.

El desarrollo de la Matemática como ciencia, está marcado por los procesos dialécticos que se dan con las contradicciones u oposiciones en las cuales surgen y evolucionan los conceptos, leyes y procedimientos. En la enseñanza no se puede repetir el curso de la historia evolutiva de las ciencias (Sastre et al, 2008), pero si podemos rescatar aspectos que favorezcan y robustezcan el discurso que rodea a un concepto, más aún poder reconocer en la evolución y en la racionalidad que le subyace, un medio de significación del concepto.

Son los procesos dialécticos, los que van “afinando” el conocimiento matemático, ya que estará significando el conocimiento a la luz de las necesidades e intereses de la época y de un contexto especifico, viéndose esto reflejado en lo que se estudia y en los interés donde se está poniendo énfasis, lo cual direcciona el desarrollo de dichos conocimientos, favoreciendo así a su construcción, evolución, sus usos y significados desde un contexto que responde a un campo de aplicación especifico. Más aún como se dijo anteriormente, los conocimientos matemáticos, en este caso el de función, se han ido construyendo sobre ideas previas o bien contra ellas, sobre la base de los intereses, cuestionamientos, problemas, posibilidades y limitaciones de cada cultura y época

(Sastre et al, 2008), por lo cual podemos identificar que dentro de su desarrollo han surgido procesos dialécticos que lo han permeado.

Como se ha manifestado anteriormente, para este trabajo nos centraremos en el concepto de función centrándonos en los sucesos trascendentes desde siglo XVII hasta el siglo XIX, pasando principalmente desde Leibniz hasta Bourbaki. Para luego poder precisar nuestra mirada en las obras de Cauchy y Bourbaki, quienes le dan una visión analítica, sintetiza y buscan dar una estructura al conocimiento de sus épocas, con una finalidad académica.

6.1.1. En el siglo XVII

La distinción de Descartes entre curvas "geométricas" y "mecánicas", dio lugar a que Gregory (1638 - 1675) realizara la distinción entre funciones "algebraicas" y "trascendentes". En 1667, este matemático da la definición de función más explícita del siglo XVII, definiéndola como: *"una cantidad que se obtiene de otras cantidades mediante una sucesión de operaciones algebraicas o mediante cualquier otra operación imaginable"* (Sastre et al, 2008)

Es durante este siglo que se inicia el estudio de las curvas y las expresiones algebraicas que las describen, lo cual da pie al desarrollo de la teoría de funciones, *"el cual se basa fundamentalmente en tres pilares: el crecimiento impetuoso de los cálculos matemáticos, la creación del álgebra simbólico-literal y la extensión del concepto de número"* (Youschevitch, 1976). Por tanto en este siglo se ponen los cimientos de la estructura de la noción formal de función y del análisis, columna vertebral del estudio del movimiento, el que se desarrolla por un lado en Inglaterra con Newton -bajo dos formas: la primera mediante el método que él llama de las primeras y últimas razones, de las cantidades que nacen y se desvanecen y la segunda a través del método de las fluxiones (Ruiz, 1998)-, y simultáneamente, en Alemania con Leibniz -a través del cálculo de los diferenciales (Ruiz, 1998)-, quien por vez primera habla en términos de función, lo que sucedió según Youschevitch (1976) a falta de un término general entre éste último y Bernoulli, para representar las cantidades arbitrarias que dependen de una variable, para luego dar uso de la palabra función en sentido de una expresión analítica.

Si bien al hablar de la aparición del Cálculo, significa hacer referencia a Newton y a Leibniz, ésta creación la podemos considerar como una de las herramientas matemáticas más potentes, con ello generando el nacimiento de un nuevo paradigma científico: la naturaleza puede ser explicada a partir de ecuaciones diferenciales, conllevando a la consideración continua y dinámica de las relaciones funcionales, en contra de la consideración discreta y estática imperante hasta el momento (Sastre et al, 2008).Por otra parte se debe tener presente que los objetos de estudio del Cálculo desarrollado por Newton y Leibniz no fueron las funciones, sino las curvas.

Leibniz (1646 - 1716) fue el primer matemático en utilizar la palabra función en 1692, (Kleiner, 1989). Usó esta palabra para referirse a cualquier cantidad que varía de un punto a otro de una curva, tal como la longitud de la tangente, de la normal, de la subtangente y de la ordenada. Por ejemplo, Leibniz afirmaba que *"una tangente es una función de una curva"* (Iacobacci, 1965, en Kleiner, 1989). También introdujo las palabras: constante, variable, coordenadas y parámetro, además clasificó a las curvas en: "algebraicas", las representadas por una ecuación de cierto grado y "transcendentes", las representadas por una ecuación de grado infinito o indefinido, Leibniz, entendía la función como una curva que estaba formada por un número infinito de tramos rectos infinitamente pequeños (Sastre et al, 2008), por lo cual se hace necesario hacer notar que él no utilizaba o entendía el concepto de función como lo hacemos en la actualidad.

Paralelamente en 1665, Newton utilizó la palabra "fluent" para representar cualquier relación entre variables. Además introdujo la noción de diferencial, designada por la palabra momento, el cual es producido por una cantidad variable llamada "genita", siendo esto en una aproximación al concepto de función. (Sastre et al, 2008)

Como nos reporta Sastre et al (2008), Newton y Leibniz contribuyeron decisivamente al desarrollo del concepto de función, introduciendo el desarrollo de función en serie de potencias. En esta época la idea de función era muy restringida, pues se reducía a funciones analíticas, abarcando inicialmente las que se podían expresar mediante una ecuación algebraica y poco después, las desarrollables en serie de potencias.

6.1.2. En el siglo XVIII

El formalismo del siglo XVIII consisto en pensar y fundamentar el Cálculo desde lo infinitesimal, lo que difiere de la concepción desarrollada por Newton y Leibniz, como el estudio de las funciones, como objeto analítico y no como el de curvas u objetos geométricos. Euler define función de la siguiente manera: *"una función de una cantidad variable, es una expresión analítica compuesta, como quiera que lo sea, de dicha cantidad y de números o cantidades constantes"* (Antolín, 1981). El desarrollo matemático de este siglo se caracterizo por la gran influencia el paradigma dominante: la matematización del movimiento, donde el análisis ya no trata sólo sobre las propiedades de las curvas, sino sobre las propiedades de las funciones (Dunham, 2001, en Buendía y Montiel, 2009)

En este periodo en la matemática se analizan los fenómenos físicos a través de un objeto matemático de naturaleza eminentemente analítica, lo cual deja de ser el estudio desde la curva sino más bien se enfoca en entender a la función como expresión analítica, siendo esto lo tomo el protagonismo durante este periodo. Como se reconoce en Farfán y García (2005) este enfoque a la función aún continuaban impregnada de las ideas infinitesimalistas de Leibnitz, lo que se debe a la poderosa herramienta que éste lego.

Además como se plantea en Buendía y Montiel (2009), los conceptos físicos están indisolublemente asociados a uno o varios conceptos matemáticos guardando una relación constituyente más que instrumental. En el periodo de Euler, la física proveyó de gran variedad de situaciones y planteamientos científicos, de los cuales nacen conceptos matemáticos.

Bernoulli y Euler, son los responsables que la noción de función sea considerada como una expresión analítica, proponiendo el primero de ellos, la letra griega φ - f- para designar la característica de una función, escribiendo entonces: "$f\ x$", lo que evolucionará con Euler, para escribirse como $f\ (x)$ (Farfán y García, 2005), se hace importante para nuestro estudio recalcar el hecho de que se reconoce que Euler introdujo la notación $f\ (x)$, lo cual puede ser entendido en la actualidad, para denotar que f es una función que depende de la variable x (Navarro y Elizarraraz, 2007). Lo anterior surge cuando el concepto de función es fundamental en la nueva disciplina que Euler estructura a través de conjuntar al Cálculo Diferencial de Leibnitz con el Método de fluxiones de Newton, de donde emerge el Análisis Matemático, disciplina que estudia los procesos infinitos. (Farfán y García, 2005).

Por lo cual, la primera definición de función como expresión analítica la dio en el siglo XVIII Jean Bernouilli (1667-1748) pero fue en 1734 cuando el matemático Euler (1707-1783) en su obra "Introductio" define una función como una expresión analítica formulada a partir de una cantidad variable y constantes; incluye los polinomios, las expresiones trigonométricas y logarítmicas. Y es Euler quien utilizó, por primera vez, la notación $f\ (x)$ para simbolizar una función.

Continuando el camino trazado por Euler para precisar la noción de función, podemos ver que para ello comenzó a definir nociones iniciales como son: constante y cantidad variable entre otras, para que en 1755, llegara a definir a la función como una expresión analítica: *"la función de una cantidad variable es una expresión* *analítica compuesta de cualquier manera a partir de esa cantidad variable y de números o cantidades constantes"*. (Kleiner, 1989; Sastre et al, 2008)

Si bien Euler no define lo qué es una "expresión analítica", la que fue definida formalmente recién en el siglo XIX, sino más bien explica que las expresiones analíticas admisibles son las que contienen las cuatro operaciones elementales, raíces, exponentes, logaritmos, funciones trigonométricas, derivadas e integrales. Clasificando a las funciones en: "algebraicas y trascendentes", "univariadas y multivariadas" e "implícitas y explícitas" (Sastre et al, 2008).

Euler se enfrenta al problema de que si a toda función le corresponde una curva, también toda línea curva debería representarse por una función. Así admite como funciones a las llamadas curvas mecánicas. Al ampliar el concepto de función distingue dos clases: las "continuas" y las "discontinuas" (Sastre et al, 2008). El significado de estos dos términos es distinto al significado que en la actualidad manejamos. Ya que para Euler, una función "continua" es aquella que está representada por una sola ecuación, aún cuando su dibujo conste de más de un trazo, como el caso de la hipérbola. Las "discontinuas", por su parte, son las curvas mecánicas, es decir, son aquellas para las que no hay una ecuación conocida, aún cuando su trazo en papel sea seguido. (Sastre et al, 2008)

Si bien modernamente es necesario indicar por separado el dominio y la regla de correspondencia (que puede o no ser una expresión analítica) para definir una función, para Euler bastaba la regla (siempre una expresión analítica) puesto que consideraba que ella es la función (Antolín, 1981).

Resumiendo, si bien durante este período se reconoce la aparecieron nuevas funciones (las "trascendentes", es decir, cicloide, catenaria, etc.), la cuales ayudaron a resolver problemas relacionados con la Física. Podemos considerar que Euler lleva más allá la idea de función, al que se había entendido anteriormente, ya que consideraba a la función como un ente matemático, lo que hasta ese momento era considerado como una herramienta para resolver problemas, generalmente relacionados con la Física, abriendo con ello la posibilidad de estudiar las funciones como objetos matemáticos. El concepto de función evolucionó, enriqueciéndose y cambiando su significado a partir de la controversia iniciada entre Dalambert y Euler sobre el problema de la cuerda vibrante. (Sastre et al, 2008). Es con éste problema -de la cuerda vibrante-, problema que según Euler, *"queda totalmente determinado si se dan para un instante cualquiera, la forma de la cuerda y la velocidad en cada punto"* (Farfán, 1997). Siendo precisamente aquí donde Euler se verá en la necesidad de generalizar la definición de función, tomando en cuenta funciones arbitrarias, especiales, no derivables, con picos, a las que él llama discontinuas o mixtas, escribiéndole a D´Alambert: *"...considerando tales funciones que no se sujetan a la ley de continuidad se abre ante nosotros una nueva ruta de análisis..."* (Farfán, 1997; Farfán y García, 2005).

La discusión entre D'alambert (1717 - 1783), Euler y D. Bernoulli (1700 -1782) se centró alrededor del significado de la palabra función y versó sobre las funciones que solucionaban este problema, sosteniendo los autores que se debían buscar soluciones más generales. Para entender mejor esta controversia se debe tener en cuenta que durante el siglo XVIII los matemáticos aceptaban por "artículo de fe" (Kleiner, 1989), es decir sin demostración y sin duda alguna, que: "si dos expresiones analíticas coinciden en un intervalo, ellas coinciden en todas partes", por otra parte el uso del concepto de función era diferente, D'alambert entendía por ello cualquier expresión analítica, mientras que Euler entendía que se trataba de cualquier curva dibujada libremente a mano. Por consiguiente el mayor efecto que produjo el debate sobre el problema de la cuerda vibrante fue la extensión del concepto de función para permitir en él la inclusión de: funciones definidas por expresiones analíticas a trozos y funciones que tenían un gráfico y no tenían una expresión analítica (Sastre et al, 2008)

Por lo cual es posible afirmar que, “quien reestructuró el cálculo leibniziano y lo convirtió en un cuerpo organizado fue Leonhard Euler (Farfán, 1997), dándolo a conocer en su libro introduction a l´analyse infinitesimale en 1748, donde inicia definiendo sus objetos de estudio, las funciones: una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta, como quiera que lo sea, de dicha cantidad y de números o cantidades constantes..., y las cantidades sobre las que opera: ...Una cantidad variable es una cantidad indeterminada o, si se quiere, una cantidad universal que comprende todos los valores determinados..., (Farfán y García , 2005).

“En el transcurso de un largo período (todo el siglo XVIII y comienzos del siglo XIX) el concepto de función se continuó asociando al de fórmula analítica. J. B. Fourier (1768- 1830) en su obra “Termología”, de 1822, dejó claro que debía plantearse la dependencia recíproca de las magnitudes como principio de la definición del concepto función. El trabajo de Fourier señala el fin del concepto clásico de función, la trasformación del concepto de función que marca el tránsito del Análisis Clásico al moderno, del cálculo al Análisis. (Antolín, 1981)

6.1.3. El siglo XIX

Este siglo se encuentra caracterizado por diversas generalizaciones, las cuales se pueden observar en los trabajos de Cauchy, (1827), Lobachevsky, (1834), Dirichlet, (1837), Riemann, (1858), al emplear al objeto matemático función como la médula del Análisis recién creado por Euler. Ellos describían a la función con la particularidad de ser una correspondencia de tipo muy general, Cauchy producirá una gran formalidad al concepto, ya que intentará contener toda “la sustancia” de éste en definiciones abstractas, las que después perderán de vista las relaciones geométricas y las nociones de curva que guarda en sí mismo este objeto y que en el pasado fueron las que le dieron vida a este concepto (Farfán y García, 2005).

A partir de 1720 hasta 1820, comenzó a desarrollarse en el seno del campo de la Matemática una nueva disciplina cuyo objeto de estudio fueron las funciones: el Análisis. Antes de esto las funciones fueron mayoritariamente definidas y aplicadas en el Cálculo, por lo cual se discutía si las funciones debían ser representadas geométricamente -en la forma de una curva-, analíticamente -en la forma de una fórmula-, o lógicamente -en la forma de una definición- (Sastre et al, 2008)

Como se reporta en Sastre et al (2008), Fourier (1768 - 1830), estudiando el flujo de calor en cuerpos materiales, contribuyó a la evolución del concepto de función al considerar la temperatura como función de dos variables: tiempo y espacio. Conjeturó, pero no probó matemáticamente, que era posible desarrollar una función dada en un intervalo apropiado mediante una serie trigonométrica. Todos estos desarrollos rompieron el "artículo de fe" imperante en el siglo XVIII (Kleiner, 1989), dejando en claro que dos funciones dadas por diferentes expresiones analíticas pueden coincidir en un intervalo y ser diferentes fuera del mismo. Fourier puso las representaciones de funciones por medio de expresiones analíticas (algebraicas) al mismo nivel que las representaciones geométricas (curvas).

Los matemáticos desde Euler hasta Cauchy, pasando por Fourier, parecían estar de acuerdo con la naturaleza "arbitraria" de las funciones, pero en la práctica ellos pensaban en las funciones como expresiones analíticas o curvas. Pero fue Dirichlet el primero en considerar la noción de función como una "correspondencia arbitraria" (una definición de función muy cercana a la que conocemos hoy en día) restringiendo explícitamente a un intervalo, el dominio de una función, es decir, si una variable y está relacionada con otra variable x de tal modo que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, se dice que y es una función de la variable independiente x.

Por lo tanto, en 1829 Dirichlet estableció las condiciones suficientes para que tal representación sea posible y definió función de la siguiente forma: "y es una función de la variable *x*, definida en el intervalo a<*x*<b, si para todo valor de la variable *x* en ese intervalo, le corresponde un valor determinado de la variable *y*. Además, es irrelevante como se establece esa correspondencia" (Sastre et al, 2008)

Como ya se ha dicho, hasta ese momento, las funciones se concebían como expresiones analíticas o curvas, siendo Dirichlet quien, por primera vez, considera a una función como una "correspondencia", por consiguiente el concepto de función adquiere un significado independiente del concepto de expresión analítica (Youschkevitch, 1976). Por lo cual podemos ver que con Dirichlet surgió la separación de los conceptos de función y de su representación analítica.

Es así como la Teoría de Conjuntos iniciada por Cantor (1845 - 1918) produce una nueva evolución del concepto de función, extendiéndose la noción para incluir: "toda correspondencia arbitraria que satisfaga la condición de unicidad entre conjuntos numéricos o no numéricos" (Sastre et al, 2008).

6.1.4. El siglo XX,

Este siglo corresponde al uso pleno y a la exploración minuciosa del concepto basado formalmente en la noción general de función introducida por Dirichlet, y basta observar lo que Spivak (1978, en Farfán y García, 2005), escribe a este respecto: *"El concepto más importante de las matemáticas es el concepto de función. En casi todas las ramas de la matemática actual, la investigación se centra en el estudio de funciones. No ha de sorprender, por lo tanto, que el concepto de función haya llegado a definirse con una gran generalidad"*.

Peano formuló en 1911 la definición de la función como subconjunto del producto cartesiano, así como ciertas propiedades, utilizando las investigaciones sobre la teoría de las funciones y las de lógica matemática. En la época moderna un problema esencial ha estado relacionado con el hecho de que los matemáticos han seleccionado sus definiciones en dependencia de las teorías que han querido desarrollar, como por ejemplo Caratheodory, en 1917 definió la función como una correspondencia de un conjunto sobre el conjunto de los números reales.

Bourbaki, en 1939, planteó la definición de función como un cierto conjunto del producto cartesiano de dos conjuntos. La importancia intrínseca de esta evolución del concepto de función, es que ella reformuló los principios del Análisis, es decir el paradigma que le sustentaba, ya que, se estaba considerando la función como una correspondencia.

A medida que avanza el nivel de la Matemática, ocurre lo mismo con la definición de función. Los desarrollos en el campo del Álgebra abstracta y de la Topología dan lugar al surgimiento de nuevas definiciones teóricas conjuntistas. El grupo Bourbaki, en 1939, definió función como una correspondencia entre dos conjuntos de una forma semejante a la dada por Dirichlet en 1837 (Kleiner, 1989; Youschkevitch, 1976; Sastre et al, 2008), siendo la definición propuesta:

> Sean E y F dos conjuntos, que pueden o no ser distintos. Una relación entre un elemento variable x de E y un elemento variable y de F, se ll ama relación funcional en y, si para todo x en E, existe un único y en F el cual está en la relación dada con x. Damos el nombre de función a la operación que, de esta forma, asocia cada elemento x en E con el elemento y en F que está en relación con x, se dice que y es el valor de la función en el elemento x, y se dice que la función está definida por la relación dada. Dos relaciones funcionales equivalentes determinan la misma función. (Sastre et al, 2008)

Por otra parte, Bourbaki también formuló una definición de función equivalente, como un conjunto de pares ordenados (Kleiner, 1989). En sus palabras:

> una función del conjunto E en el conjunto F se define como un subconjunto especial del producto cartesiano ExF (Kleiner, 1989)

Podemos evidenciar que durante la primera década del siglo XX, la definición de Dirichlet- Bourbaki se asentó en los libros de texto y en los años 60 se presentaban básicamente tres tipos de definición de función:

- funciones definidas en términos de variables,
- funciones definidas en términos de conjuntos,
- funciones definidas en términos de una regla de correspondencia.

Por otra parte podemos ver que el enfoque de Bourbaki es excesivamente abstracto, especialmente como un primera introducción para estudiantes pre-universitarios (Sfard, 1992)

Con el enfoque de Boubaki el concepto de función se independizan de las expresiones analíticas, ya que la nueva definición considera que una función es una correspondencia arbitraria. (Sastre et al, 2008)

6.2. $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{f(x)}$ desde la obra matemática de Cauchy y Bourbaki

Como se dijo en un comienzo de este capítulo nos centrarnos en las obras de Cauchy y Bourbaki, en las cuales buscaremos antecedentes de cómo se está dando uso de los signos f y $f(x)$, con ello inferir cómo se están significando y argumentando estos signos. Nos centraremos en estas obras, ya que, por un lado tiene la finalidad de sintetizar el desarrollo matemático de su época, además de haber sido creadas como libros para la formación en matemática, es decir con un fin pedagógico.

Por otra parte, no podemos desconocer que estos libros fueron escritos bajo prácticas de referencias y un sistema de razonamiento, además de estar permeadas por los aspectos sociales, culturales, ideológicos, entre otras factores de su temporalidad o momento histórico, los que fueron normando el desarrollo de cada uno de estos textos, dándole el matiz que hoy podemos observar dentro del discurso plasmado en cada una de estas obras.

Se debe tener presente que estos libros por una parte cumplen con el rol de difusión, además de sintetizar y unificar un discurso que se estaba construyendo, enfocados su esfuerzo principalmente a la formación académica.

Al momento de analizar las obras de estos autores, en un primer momento nos centraremos en como establecen el concepto de función, para poder así entender cómo estaban concibiendo este constructo, para luego pasar a analizar los signos f y $f(x)$ aplicados en diferentes instancias, es decir mirarlos desde diferentes usos, para poder con ello inferir cómo se están significando dentro del discurso presente en cada libro.

6.2.1. Cómo se conceptualiza el concepto de función en las obras de Cauchy

Para llevar a cabo este análisis nos basaremos por un lado en la traducción realizado por Alvarez en 1994, en la Colección MATHEMA de la Facultad de Ciencias de la UMAN, titulada como *Curso de análisis,* en el que se realiza una selección entre los capítulos o lecciones de *Cours d'Analyse, premierè partie, L'Analyse Algebraique*, ambos editado por la *Imprimérie Royale* en 1821 y *Résumé des leçons sur les calcul infinitésimal*, editado por la *Imprimérie Royale* en 1823. Por otra parte en los originales: *Résumé des leçons sur les calculs infinitésimal* y *Cours d'Analyse*.

Cauchy, considera que cuando las cantidades variables están de tal modo relacionadas entre sí que, dado el valor de una de ellas, es posible concluir los valores de todas las demás, expresando ordinariamente estas diversas cantidades por medio de una de ellas, la cual toma entonces el nombre de *variable independiente*, y a las otras cantidades expresadas por medio de la variable las llamamos funciones de esta variable (Cauchy 1994; Cauchy, 1921, 1923).

Se hace la diferencia entre dos funciones, las *funciones explícitas,* aquellas que se encuentran expresadas por medio de sus mismas variables, ejemplos de estas nos propone:

L x, sin x, $x + y$, x^y, xyz (Cauchy, 1821, 1823) o L (x), sen (x), $x + y$, x^y, xyz; (Cauchy, 1994)

y las *funciones implícitas*, aquellas en las cuales sólo se dan las relaciones entre las funciones y las variables, es decir, la ecuación a las cuales esas cantidades deben satisfacer. Estas últimas se pueden volverlas explícitas y para ello sólo basta resolverlas, cuando esto sea posible, como ejemplo de este caso nos plantea:

> Sea L $y = x$ o L $(y) = x$, donde y es una función implícita de x, pero si consideramos A como la base del sistema de logaritmo, ésta función se vuelve explícita mediante la resolución de la ecuación dada, quedando expresada: $y = A^x$ (Cauchy, 1821, 1823, 1994)

Por otra parte, nos dice que cuando se quiere designar a una función explícita de una sola variable x, o de varias variables $x, y, z, \ldots,$ sin determinar la naturaleza de dicha función, se emplean las siguientes notaciones:

$$f(x), F(x), \varphi(x), \chi(x), \psi(x), \varpi(x), \ldots$$

$$f(x,y,z), F(x,y,z), \varphi(x,y,z), \ldots$$

(Cauchy, 1821, 1823, 1994)

6.2.1.1. Usos y significación de los signos f y $f(x)$ dentro del discurso de Cauchy.

Podemos ver que las ideas de Cauchy están fundamentadas en que la función es una relación, la cual ha evolucionado desde lo propuesto por Leibniz hasta lo que se propone en este libro, donde los trabajo sobre la cuerda vibrante y propagación del calor, ayudaron a resignificar el concepto como tal, pasando por las ideas geométricas o gráficas, hacia la analítica. Pero dentro de todo este desarrollo podemos identificar que el concepto de función se solidifica como una relación entre variables, además en el transcurso de sus obras podemos ver un predominio de expresiones algebraicas, en detrimento por ejemplo a las representaciones gráficas, además en este contexto sólo podemos ver dentro del discurso plasmado el uso del signo $f(x)$, el cual designa una función explicita sin determinar su naturaleza. Por lo cual nos preguntaremos en este contexto ¿cómo se está dando uso y significando este signo?

Para dar respuesta a ello, como hemos dicho en un comienzo miraremos el signo aplicado o desde diferentes usos, y con ello ver cómo es su significación bajo estos usos, contextos y prácticas.

Del discurso y argumentaciones que podemos ver en los diferentes textos, se puede identificar los siguientes usos del signo $f(x)$ y con ello sus significación, en este caso no hemos identificado el uso de f, por lo cual podremos inferir que no hizo uso de él.

6.2.1.1.1. Usos para el signo $f(x)$ y sus significaciones

$f(x)$ es usada para designar la notación de una función explícita, sin determinar la naturaleza de ésta, es decir como *representante de las funciones explícitas.*

$f(x)$ es usada para designar a *una función de variable x*, por ejemplo:

> *"Sea $f(x)$ una función de variable x, para cada valor de x intermedio entre dos límites dados, esta función admite constantes valores únicos y finitos…"* (Cauchy, 1821, 1994, p. 90) *"… la función $f(x)$ permanecerá continua respecto a x entre los limites dados si…"* (Cauchy, 1821, 1994), *"… donde $f(x)$ designa una función que crece…"* (Cauchy, 1823, 1994 p.119)

$f(x)$ es usada para designar *una función continua*, por ejemplo:

> *"Si la función $f(x)$ es continua respecto a la variable x …"* (Cauchy, 1821, 1823, 1994 p. 98)

$f(x)$ es usada para designar el *miembro derecho de una ecuación o igualdad*, por ejemplo:

> *"Supongamos que en la ecuación $y = f(x)$, la variable x sea una función de una variable t…"* (Cauchy, 1821, 1823, 1994 p. 97); *"…una función dada $y = f(x)$…"* (Cauchy, 1821, 1994 p. 263) o más específicamente como *segundo miembro de la ecuación de la* curva, por ejemplo: *"… la curva que tiene como ecuación $y = f(x)$…"* (Cauchy, 1994 p.98)

$f(x)$ es usada para designar el *segundo miembro del par ordenado*, por ejemplo:

> *"… el punto correspondiente a la coordenada $x_0, f(x_0)$…"* (Cauchy, 1821, 1823, 1994)

$f(x)$ es usada como *valor particular de la ordenada*, por ejemplo:

> *"… se encuentra entre las ordenadas $f(x_0)$ y…"* (Cauchy, 1821, 1823, 1994)

$f(x)$ es usada para determinar un *valor*, por ejemplo:

> *"… cada elemento se multiplica por el valor $f(x)$…"* (Cauchy, 1821, 1994)

$f(x)$ es usada para designar una *expresión algebraica*, por ejemplo:

"designamos por $f(x)$ al primer miembro de la ecuación: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$" (Cauchy 1823, 1994)

$f(x)$ es usada para designar *un polinomio*, por ejemplo:

"*El polinomio $f\ (x) = a_0x^n +\ a_1x^{n-1}\ +\ \ldots\ +\ a_{n-1}x +\ a_n$ …"* (202); *"Descomponer el polinomio $f(x)$ en sus factores lineales…"* (Cauchy 1821, 1994)

En el caso del cálculo de integrales, podemos ver que el uso de $f(x)$ es de forma implícita, el que representar las alturas de ancho dx.

A la luz de cada uso podemos ver que existe asociado una significación al signo los cuales se encuentran relacionados principalmente con los campos en que se desarrollan y a las prácticas que le rodean, respondiendo estos a una forma de razonar y ver el mundo que esta permeado de las ideas, filosofías y la cosmovisión del momento en el cual se fundamentan.

No podemos separar o disociar el significado con su uso, ya que estos se encuentran relacionados mediante una relación dialéctica, lo que hace que esta dualidad se nutra cada vez que se empleen estos signos. A modo de sintetizar, proponemos las siguientes categorías de significación a la luz de los diferentes usos vistos en los trabajos de Cauchy para el signo $f(x)$:

Valor puntual, tanto como parte del par ordenado o valor de la ordenada, por consiguiente es un valor que depende directamente de la variable independiente *x*, pudiendo ser considerado como un valor numérico o algebraico, que se puede operar;

Expresión algebraica que representa una función de diferentes naturalezas (continua, explicitas, entre otras) la cual puede ser expresada como $f(x)$ igual a expresión algebraica (por ejemplo un polinomio) o $y = f(x)$, al ser entendido de esta forma se puede manipular las expresiones con alguna finalidad, por ejemplo escribirla en su mínima expresión, lograr expresarla de una forma particular, entre otras, para lo cual se puede hacer uso de diferentes operaciones o métodos;

Función misma de variable *x*, la cual puede ser caracterizada de diferentes formas, como por ejemplo continúa, creciente, explicita, entre otras;

Una altura, en este caso se entiende como tal al momento de trabajar con integrales y hacer su introducción a través de la suma de Reimann, la cual representa la altura de ancho dx

6.2.2. Cómo se conceptualiza el concepto de función en las obras de Bourbaki

Para llevar a cabo este análisis nos basaremos en los libros de la colección *Éléments de Mathématique*, específicamente el libros *Théorie des Ensembles*, publicado por primera vez en 1970, además el libro *Fonctions d'une variable réelle*, publicado por primera vez en 1976, respectivamente, ambas producciones hicieron su primera aparición en Paris, Francia.

Bourbaki, en el primer libro de su colección *Éléments de Mathématique*, titulado *Théorie des Ensembles* define a la función como:

> Decimos que una gráfica F es una gráfica funcional si, para toda x, existe a lo sumo un objeto correspondiente para x en F. decimos que una correspondencia *f*=(F,A,B) es una función si su gráfica F es una gráfica funcional, y si su conjunto de partida A es igual al dominio de F. En otras palabras, una correspondencia *f*=(F,A,B) es una función si, toda x pertenece al conjunto de

partida A de f, la relación (x, y) ϵ F es funcional en y; el objeto único correspondiente para x de f se llama el valor de *f* para el elemento x de A, y se designa por $f(x)$.o f_x., (o $F(x)$., o F_x.)[14].

Si f es una función, F es la gráfica y x un elemento del dominio de f, la relación $y = f(x)$ es equivalente a $(x, y) \in F$[15]

También decimos que una función f definida sobre A, transforma x en $f(x)$. (para todas las $x \in A$), o que $f(x)$ es la transformada de x para f, o (por el abuso del lenguaje) la imagen de *x* para f.[16]

6.2.2.1. Usos y significación de los signos f y $f(x)$ dentro del discurso de Boubaki.

Podemos ver que Bourbaki para plantear la definición del concepto de función relaciona el uso de tres signos, F *(la gráfica de la función)*, f *(la función)* y $f(x)$ *(la imagen de la función)*, los cuales relaciona en el momento en que se establece el concepto, pero dentro del transcurso de las obras se pierde el uso de F. Por otra parte, a diferencia con Cauchy, quien entiende a la función como una relación, Bourbaki entenderá a la función como una correspondencia y junto con las ideas de Dirichlet propiciaron el ingreso y uso del signo f para designar a la función. Al igual que en las obras de Cauchy, se puede percibir un predominio de expresiones algebraicas

[14] On dit qu'un graphe F est un graphe fonctionnel si, pour tout x, il existe au plus un objet correspondant à x par F. On dit qu'une correspondance *f* = (F, A, B) est une fonction si son graphe F est un graphe fonctionnel, et si son ensemble de départ A est égal à son ensemble de définition F. Autrement dit, une correspondance *f* = (F, A, B) est une fonction si, pour tout x appartenant à l'ensemble de départ A de *f*, la relation (x, y) ϵ F est fonctionnelle en y; l'objet unique correspondant à x par *f* s'appelle la valeur de *f* pour l'élément x de A, et se désigne par *f* (*x*) ou f_x, (ou F(*x*), ou F_x).

[15] Si *f* est une fonction, F son graphe et *x* un élément de l'ensemble de définition de *f*, la relation *y* = *f* (*x*) est donc équivalente à (*x*, *y*) ϵ F

[16] On dit encore qu'une fonction *f* définie dans A *transforme* x en *f* (*x*) (pour tout *x* ϵ A), ou que *f* (*x*) est le *transformé de x* par *f*, ou (par abus de langage) *l'image* de *x* par *f*.

De la misma forma que el análisis efectuado con las obras de Cauchy, nos preguntaremos ¿cómo se está significando y dando uso a estos signos (para este caso nos centraremos en los signos f y $f(x)$, ya que son los que han prevalecido dentro del dME, además de que dentro del mismo discurso de Bourbaki pierde protagonismos el uso de F?

Al igual que en el caso anterior para dar respuesta a la interrogante, miraremos los signos aplicados, es decir, desde sus diferentes usos y con ello ver cómo se están significando dentro de un contexto y/o prácticas en los cuales se ven envuelto.

Dentro del discurso y argumentaciones que fundamenta Bourbaki podemos identificar, a lo largo del desarrollo de los textos, los siguientes usos tanto del signo f, como $f(x)$ y junto con ello las diferentes significaciones que se le están dando a estos signos.

6.2.2.1.1. Usos para el signo f y sus significaciones

f es usada para designar *la función (correspondencia)* de diferente naturalezas, como por ejemplo, vectorial, numérica, constante, entre otras, a las cuales se le define o se deja explicito el intervalo de aplicación, por ejemplo:

> *"Si f es una función vectorial definida sobre un intervalo $I \subset R$,..."* (b01, p.1); "una función afín x→ax+b …, La función numérica $1/x$ (definida para x ≠ 0) … , la función numérica $|x|$, definida sobre R…"

f es usada para designar una *aplicación*, por ejemplo:

> *"...sea f una aplicación de A en B,...sea una aplicación f:A→B,... $A \xrightarrow{f} B$,..."* (Bourbaki, 2006, p.14)

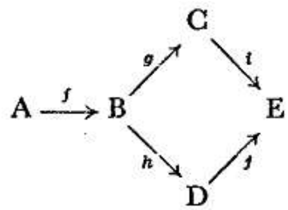

Figura N° 6: diagrama de f como un diagrama

(Tomada de Bourbaki, 2006, p.14)

Al igual que en el caso anterior a la luz de cada uso presente para el signo f, en el discurso de Bourbaki, podemos asociar o vislumbrar el cómo se está significando este signo. Con la finalidad de sintetizar las significaciones que emergen de los diferentes usos que se le asigna a f, es que proponemos las siguientes categorías de significación, que responden al discurso que el autor plasma en sus textos.

Una *función* de diferentes naturalezas, donde se define el conjunto de partida y llegada;

Por otra parte haciendo una analogía con la explicación de "la función como una máquina", podremos entender a f como una *aplicación*, en la cual entra un numero A, es aplicada f sobre A, para dar como resultado un valor B

6.2.2.1.2. Usos para el signo $f(x)$ y sus significaciones.

$f(x)$ es usada para designar el *valor numérico o su transformada*, por ejemplo:

> "*…el valor de f para el elemento x en A, se designa por $f(x)$ o f_x (o $F(x)$, o f_x)…"* (Bourbaki, 2006, p.13); *"...una función definida en A trasforma x en $f(x)$,... $f(x)$ es el trasformado de x en f"*(Bourbaki, 2006, p.14); "se dice que f es derivable en un punto $x_0 \in$ I si $\lim_{x\to x_0, x\in I,, x\neq x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ …" (Bourbaki, 2007, p.2);

$f(x)$ es usada para designar *un punto o posición en el plano*:

> *"En Cinemática, si el punto $f(t)$ es la posición de un móvil sobre el espacio R^3 en un instante t, $\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ se llama velocidad media del movimiento entre los timepos t_0 y t, y su límite $f'(t)$_la velocidad instantánea..."* (Bourbaki, 2007, p.2)*;* *"En cinemática, si $f(t)$ es la posición de un móvil M en el instante t, $g(t)$_la posición al mismo tiempo de la proyección M' de M en un plano P..."* (Bourbaki, 2007)*; "Sea C la gráfica o curva respectiva de una función numérica finita f, parte el plano R^2, formado por los puntos $(x, f(x))$ donde x oscila sobre el conjunto donde f está definida..."* (Bourbaki, 2007, p.9)*; "... pasa por le punto $M_x = (x, f(x))$ de C...."*(Bourbaki, 2007, p.9);

$f(x)$ es usada para designar *la imagen*, por ejemplo:

> *"... la imagen de x para f"* (Bourbaki, 2006, p.14)

$f(x)$ es usada para designar una relación generadora de *los punto de coordenadas*, por ejemplo:

> *"...la relación $y = f(x)$ es equivalente a $(x, y) \epsilon F$"* (Bourbaki, 2006, p.13).

En el caso del cálculo de integrales, podemos ver que el uso de $f(x)$ es de forma implícita -al igual que en Cauchy- el cual es representar las alturas de ancho dx, en ocasiones podemos ver que se aplica el signo f, para dar a conocer una integral, es decir $\int f$, pero en su generalidad se hace uso de la escritura $\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$

Como lo hemos visto en los casos anteriores, a la luz de los diferentes usos que se presentan en los textos, surge o emerge junto con ella una significación al signo que responde a ciertas actividades o prácticas. Por lo cual, podemos sintetizar o ver desde los diferentes usos las siguientes categorías de significación del signo $f(x)$:

valor especifico o *imagen,* es decir se puede considerar como el valor de la función evaluada en un elemento del dominio, el que puede ser una expresión numérica o algebraica;

puntos los cuales pueden ser entendidos como el valor o posición en el plano, pudiendo ser expresados como punto de coordenadas, un momentos particular de un fenómeno;

si bien no se significa a $f(x)$ como una *altura*, se hace necesario entenderla de este modo al momento de institucionalizar la integral, ya que al igual que en Cauchy, se hace la introducción a las integrarles mediante la suma de Reimann.

6.2.2.1.3. Algunas aplicaciones de los usos de f y $f(x)$

Podemos ver que dentro del discurso matemático desarrollado por Bourbaki, los signos f y $f(x)$ se encuentran interactuando constantemente, como lo podemos ver presente en los siguientes ejemplos, donde están en juego las categorías de significación antes propuestas para cada signo. Pero en el caso del signo para designar la gráfica de la función, es decir F, no es usado dentro del discurso, esto puede ser razón de que existe una ausencia de representaciones gráficas, ya que más bien dentro del discurso que se elaborado por Bourbaki predomina lo algebraico.

> *"Se dice que una función es constante si, para todo el conjunto de x y x' de f, se da que $f(x) = f(x')$"* (Bourbaki, 2006, p.15)

“Diremos que dos funciones f y g coinciden en un conjunto E…, y si $f(x) = g(x)$ para toda $x \epsilon E$… Se dirá que $f = g$, lo que significa q f y g tienen el mismo conjunto de definición A, más aun el mismo conjunto de llegada B, …” (Bourbaki, 2006, p.15)

“…f y g dos funciones vectoriales derivables en el punto x_0 tomando sus valores respectivamente en E y F, la función vectorial $x \rightarrow [f(x) \cdot g(x)]$ (nótese que incluso $[f \cdot g]$) admitiendo en el punto x_0 una derivada igual a $[f'(x_0) \cdot g(x_0)] + [f(x_0) \cdot g'(x_0)]$…” (Bourbaki, 2007, p.5)

“sea f_α una familia de funciones convexas definidas sobre un intervalo $I \subset R$ …” (Bourbaki, 2007, p.25)

“por definición, la función $x \rightarrow \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$, es la primitiva de f que se anula en el punto $x_0 \epsilon I$…” (Bourbaki, 2007, p.8)

6.2.3. A modo de síntesis

Podemos ver que es dentro del discurso que plasma Bourbaki, que se cristaliza el uso de f, lo cual hace surgir diferencias conceptuales entre los signos f y $f(x)$, donde el signo $f(x)$ pasa de representar a la función y su imagen (todos los elementos de la función), dentro del contexto de la curva o como la expresión analítica, a ser la imagen o el valor numérico de la función, divorciándose con ello de la capacidad de representar la totalidad del concepto, como se puede ver en el discurso de Cauchy. El que apareciera f volcó a entender a $f(x)$ como un objeto con el cual se puede operar, analizar, manipular, entre otras cosas, pero principalmente con el cual se podrá determinar a la función, es decir f, ya que, es estudiando estas imágenes es que se puede caracterizar la función.

En el discurso de Bourbaki se dan antecedentes para vislumbrar diferencias conceptuales entre estos signo, las cuales se ha ido forjando a la luz de la evolución del concepto de función y de cómo han sido usados los signos para representar diferentes características de éste, podemos ver presente dentro del dME que $f(x)$ tiene un carácter portador de significados de f, los cuales se nutren gracias a su relación dialéctica, estas diferencias se sustentan bajo las prácticas, usos y argumentaciones que se le dan a los signos. Además como se ha presentado en el discurso de Bourbaki f captura la esencia de la función, es decir, la triada compuesta por un dominio, contradominio y una regla, donde a su vez $f(x)$ a las imágenes o un valor (numérico o algebraico), con los cuales al estudiarlos se puede caracterizar a f o en su defecto podemos llegar a comprender algunas propiedades de la función misma.

Por lo cual, podemos ver que estos signos se nutren constantemente a la luz de las prácticas en las cuales se ven envueltas. Pero no es hasta que se piensa a la función como una correspondencia es que surge esta dualidad entre los signos, ya que antes al hablar de función sólo se hace referencia al uso de $f(x)$ o su equivalente, que representaba una relación, una expresión analítica o una curva, abordando en si "la totalidad" del concepto de función. Con ello podemos ver que ha existido una evolución en la significación de los signos desde lo presentado por Cauchy hasta Bourbaki, los cual responde a una forma de razonar y ver el mundo que esta permeado de las ideas que le sustenta.

6.3 Aspectos transcendentes de las obras analizadas

6.3.1. Algunos aspectos relevantes a considerar de las obras de Cauchy

Las obras de Cauchy, estaban dirigida a los alumnos de la Escuela Politécnica, institución encargada de formar los cuadros técnicos del estado y la industria. En la época en la cual se gestaron estas obras, fue de gran actividad en las ciencias físicas, Francia se encontraba interesada en recuperarse de su retraso en relación a la revolución industrial inglesa (Espinoza, 2009), dentro de las diferentes obras podemos ver que se rechazaba la relación de la matemática con las ciencias.

Su obra *Cours D'Analye* tuvo un gran reconocimiento, volviéndose, como nos presenta Espinoza (2009) normativa en cuanto al discurso matemático, ya que intentó fundamentar a la matemática con una nueva racionalidad, es decir, sus argumentaciones y formas de validación. Comenzaron a nacer conceptos nuevos del cálculo que no encuentran sus ideas germinales en las ciencias de su tiempo, sino en la misma matemática, los cuales viene a construir una nueva arquitectura.

Cauchy buscaba desarrollar un discurso escolar para los que se iniciaban en el estudio de las matemáticas, alumnos de la élite intelectual de su época, los estudiantes de la École Polytechnique. La estructura organizativa de las ideas, siendo estas ideas consideradas como son una reorganización de los conocimientos matemáticos trabajados en la época, con una intencionalidad didáctica.

6.3.2. Algunos aspectos relevantes a considerar de las obras de Bourbaki

La obra Eléments de Mathematique de Nicolas Bourbaki, ha influido decisivamente en el desarrollo y la evolución de la matemática contemporánea. Lo curioso es que Nicolas Bourbaki no existe, sino más bien es el seudónimo colectivo de un grupo de matemáticos, la mayoría franceses, que nació en la década de los 30 y que se ha ido renovando con el tiempo, siendo bajo el nombre Nicolas Bourbaki que los participantes de este grupo han publicado un monumental y aún inconcluso tratado que tiene como objetivo la exposición, de forma sistemática y rigurosa, de las herramientas básicas para el desarrollo de toda la Matemática (Bombal, 1988).

El grupo fue fundado a mediados de los años 30 por jóvenes matemáticos de edades comprendidas entre los 24 y 30 años, todos ellos fueron antiguos alumnos de L'École Normale Superieur de Paris.

El agruparse respondía a un sentimiento de frustración y protesta por la situación de las Matemáticas en Francia. En efecto, después de la sangría que supuso la I Guerra Mundial, la Matemática francesa, antiguamente líder de la Matemática universal, había ido cayendo en la rutina y el provincialismo. Además la vida científica francesa estaba dominada por dos o tres grupos de académicos, más preocupados por conservar sus parcelas de poder que por el desarrollo de la investigación. Los jóvenes fundadores del grupo Bourbaki querían acabar con esta situación y recuperar el nivel y calidad de la investigación matemática francesa (Bombal, 1988).

Siendo una de las primeras necesidades del grupo, reestructurar los cursos que sus integrantes impartían en diferentes universidades, como es el caso de curso de cálculo diferencial e integra, donde tradicionalmente se usaba, como lo reporta Bombal (1988), en las Universidades francesas el libro de Goursat, el cual no encontraban satisfactorio para la formación académica. Por lo cual se juntaron en varias ocasiones, con el objetivo de redactar un curso o tratado de análisis que reemplazara al de Goursat y sirviera de base para la enseñanza del análisis a nivel de la Licenciatura.

Los objetivos fueron cambiando y en palabras de A. Weil -uno de los fundadores-, *"se trataba de construir una base suficientemente amplia y sólida para sustentar lo esencial de las matemáticas modernas"* (Bombal, 1988). Por lo cual se decidió elaborar un tratado que contuviera, de forma clara, precisa y sistemática, los teoremas y resultados básicos para todas las teorías existentes en matemática pura.

De aquí su vasta publicaciones, aparte de algunas notas, publicadas casi todas en las Comptes Rendus de la Academia de Ciencias de Paris, no cabe duda que la obra fundamental de Bourbaki, que motivó su propia existencia como grupo, es su monumental y aún inconcluso tratado Eléments de Mathématique (Bombal, 1988), el cual como lo hemos dicho anteriormente, tiene como objetivo la elaboración de un tratado que, partiendo desde el principio contenga los fundamentos y resultados básicos de toda la matemática pura, siendo esta obra dirigida al matemático profesional.

Como nos presenta Bombal (1988), Bourbaki se declara partidario del método axiomático, advirtiendo que no hay que confundirlo con el formalismo lógico, siendo el instrumento básico para llevar a cabo este programa. A lo largo del siglo XIX fue poniéndose en evidencia que lo relevante no era la naturaleza de los objetos estudiados, sino las relaciones que existen entre ellos.

Bourbaki distingue tres tipos básicos de estructuras fundamentales: Las estructuras algebraicas, las de orden y las topológicas, yendo de menor a mayor grado de abstracción necesario para la formulación de sus axiomas. Además reconociendo que los matemáticos que influenciaron mayormente sus trabajos son Dedekind, Hilbert y la escuela alemana de álgebra y teoría de números de 1920, en Francia H. Poncaré y E. Cartan, estos matemáticos tienen en común el uso sistemático de nuevos conceptos y métodos “abstractos” para resolver problemas clásicos; idea central de Bourbaki (Bombal, 1988).

Los libros elaborados por Bourbaki se centra en el estudio de las tres estructuras básicas: de orden, algebraicas y topológicas, junto con algunas de sus combinaciones (grupos y espacios vectoriales topológicos, por ejemplo), la teoría de integración y los métodos fundamentales del cálculo. Posteriormente se incluyó el álgebra conmutativa, álgebras y grupos de Lie y algo de teoría espectral. También ha aparecido un fascículo de resultados sobre variedades y parece que se estuvo considerando la posibilidad de incluir parte de la geometría analítica.

Bourbaki fue pionero en sistematizar y ordenar una gran cantidad de información aparecida a lo largo de muchos años, en muchas revistas y en idiomas diferentes. También presentó el primer tratamiento sistemático de algunos temas, como son el álgebra multilineal y exterior, los espacios uniformes, la teoría de filtros, los grupos topológicos. Pero, además, Bourbaki es responsable de la popularización de algunas de las notaciones hoy universalmente aceptadas, como lo son, $\cap$,$\cup$ y $\emptyset$, el uso de las notaciones $x \otimes y$ y $x \wedge y$ para los grupos tensorial y exterior, $< x, y >$ para denotar formas bilineales o $\sigma(E, F)$ para designar la topología débil, entre otras (Bombal, 1988).

En cualquier caso, la influencia de la obra de Bourbaki, sobre todo a partir de 1950, ha sido realmente muy grande, tanto por el número de referencias explícitas a sus libros, como por la forma en que ha inspirado un determinado estilo de escribir matemáticas. Tampoco hay que ocultar que la obra de Bourbaki ha influido en la forma de enseñar matemáticas, con resultados no siempre positivos (Bombal, 1988).

6.4. $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{f(x)}$ en libros de matemática (en el dME)

Podemos ver que en diferentes textos actuales de matemática, al momento de trabajar con función prevalece el uso del signo $f(x)$ y el uso del signo f sólo queda reservado para definir o establecer el concepto.

Con la finalidad de poder caracterizar los papeles de los signos f y $f(x)$, con ello poder evidenciar los diferentes usos y significados que se le está otorgando a éstos signos en los diferentes registros dentro del dME, es que se realizará una revisión de libros de cálculos, que son utilizados en la enseñanza superior, los textos considerados son: Stewart (2003), Courant y John, (1999).

6.4.1. Cómo se conceptualizan $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{f(x)}$ en los diferentes textos

En una primera instancia veremos cómo se caracteriza en concepto de función dentro de los textos, Courant y John (1999) y Stewart (2003), y con ello ver cómo se está explicitando los diferentes papeles que jugaran los signos f y $f(x)$ para luego ver cómo están siendo utilizado dentro del discurso que se elabora en cada libro.

En el caso del libro *introducción al cálculo y al análisis matemático*, de Courant y John (1999), al momento de introducir el concepto de función, se caracterizan los usos de los signos, junto con la definición del éste, estableciendo que la función se denota por símbolos tales como f, F, g, etc. Y las correspondientes relaciones entre x y los valores asociados de y se escriben en la forma $y = f(x)$, o $y = F(x)$ o $y = g(x)$, etc.,...como ejemplo nos propone que si f está definida por la expresión $x^2 + 1$, se tiene… (Courant y John, 1999, p. 46)

Por otra parte en el caso del libro *cálculo de una variable transcendente temprana*, de Stewart (2003), en sus capítulos introductorio al concepto de función, se puede vislumbrar que se caracterizan los signos utilizados para definir el concepto y por ende con los que se estarán trabajando a lo largo del discurso presente en el texto. En este contexto podemos ver que se nos dice que: por lo común, se consideraran funciones para las cuales los conjuntos A y B son conjuntos de números reales. El conjunto A se llama **dominio** de la función. El número $f(x)$ es el **valor de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x}$** y se lee "f de x". La imagen de f es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$, conforme x varía en todo el dominio A. Un símbolo que representa un número arbitrario en el *dominio* de una función f se llama **variable independiente**. Un símbolo que representa un número en la imagen de f se llama variable dependiente. (Stewart, 2003)

6.4.2.1. Usos y significación de $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{f(x)}$ dentro del dME actual.

Podemos ver que dentro de los textos existe un relación constante de los signos y esta dualidad se encuentra asociada desde el momento en que se define o se introduce al concepto de función, pero como intentamos de mostrar que los significados de estos signos se encuentran más allá de los declarados en el dME y más aún se resignifican a la luz de sus usos, lo que intentaremos vislumbrar en el transcurso de la revisión realizada de los libros y con ello poder ver cómo interactúan en la construcción de los conceptos y en las diferentes temáticas donde el concepto de función se ve involucrado. Del análisis realizado se puede identificar lo siguiente:

6.4.2.1.1. Usos para el signo f y sus significaciones

f es usado para designar o *definir una función*, por ejemplo:

> *"… una función f para $a \leq x \leq b$, la cual…"* (Courant y John, 1999, p. 76)

> *"Una función f es una regla que designa a cada elemento de x de un conjunto A exactamente un elemento, llamado $f(x)$), de un conjunto B"* (Stewart, 2003, p. 12)

> *"una función f se define por* $f\,(x) = \begin{cases} 1 - x & si\ x \leq 1 \\ x^2 & si\ x > 1 \end{cases}$,, (Stewart, 2003, p. 18)

f es usado para designar o *gráfica una función*, por ejemplo:

> *"… Note que la gráfica de h no es simétrica respecto al eje y ni respecto al origen"*

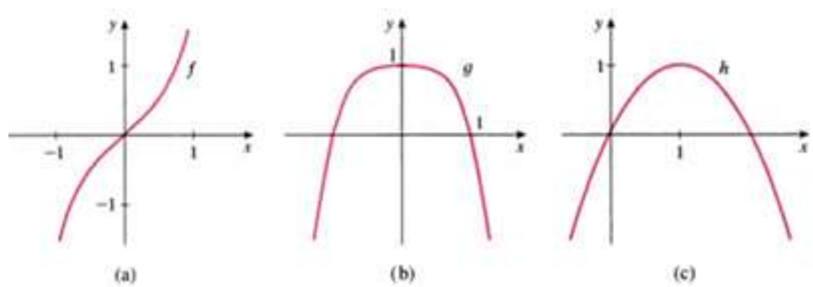

Figura N° 7: Representaciones gráficas de f

(Tomado de Stewart, 2003, p. 21)

f es usado para denominar el *integrando*, por ejemplo:

> *"El integrando denotado por f es la función de una variable independiente sobre el intervalo [a,b]…"* (Courant y John, 1999, p. 148)

> ***si bien se define en una primera instancia utilizando f, posteriormente aparece el uso de $f(x)$ para nombra el integrando, como es en el caso de: *"si el integrando $f(x)$ es positivo en el intervalo [a,b], puede inmediatamente identificarse $\int_a^b f\,(x)$ con el área acotada por la gráfica de f y las recatas x=a, x=b e y=0"* (Courant y John, 1999, p 148)

Como podemos ver el signo f es usado para designar a la función en diferentes registros, lo cual no lleva a proponer la siguiente categoría de significación:

> Como *función*, ya que ese signo es usado para denotar, definir o designar sus características, entendiendo a la función como una regla de correspondencia, o una regla con un dominio y contradominio definido, así también, pero usado muy escasamente, se destina este signo para dar a conocer la *gráfica de una función*, es decir representando la curva.

6.4.2.1.2. Usos para el signo $f(x)$ y sus significaciones.

$f(x)$ es usada para designar el valor (puntual) que se adquiere al momento de evaluar la función, es decir como *imagen*.

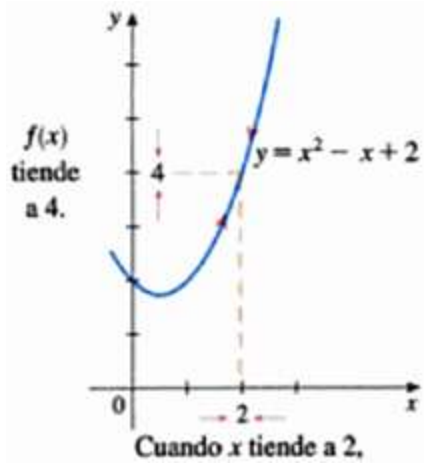

Figura N° 8: $f(x)$ como imagen

(Tomado de Stewart, 2003, p. 90)

$f(x)$ es usada para designar los valores (de forma global) que se adquieren al momento de evaluar la función, es decir *el conjunto de imágenes*.

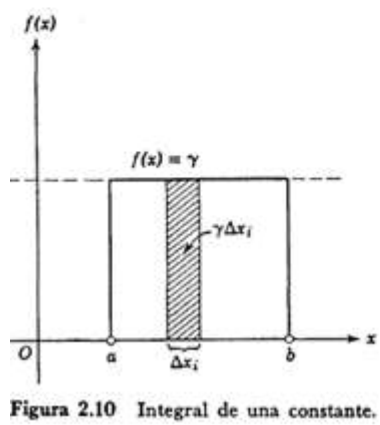

Figura N° 9: $f(x)$ como conjunto de imágenes

(Tomado de Courant y John, 1999, p. 151)

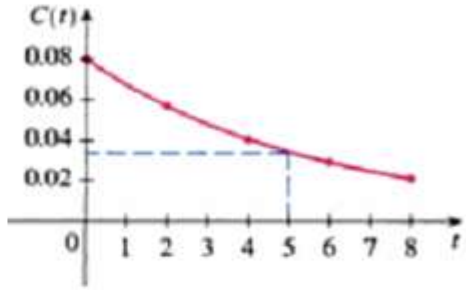

Figura N° 10: $f(x)$ como conjunto de imágenes

(Tomado de Stewart, 2003, p. 16)

$f(x)$ es usada para designar el valor de la segunda componente de $(x,\ f(x))$, es decir *el segundo término del par ordenado* o *puntos en el plano*.

> *"Interpretando geométricamente, el teorema establece que si dos puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ de la gráfica de un función continua f"* (Courant y John, 1999, p.69)

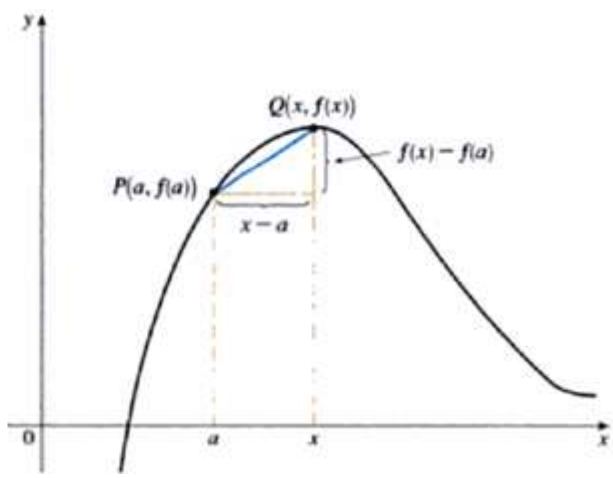

Figura N° 11: $f(x)$ como segundo término del par ordenado

(Stewart, 2003, p. 147)

$f(x)$ es usada para designar la forma en que se disponen los puntos en el plano cartesiano, es decir *la distribución de puntos en el plano*.

"(Observe que son parejas de entrada-salida*) En otras palabras, la gráfica de f consta de todos los puntos en el plano de coordenadas, tales que $y = f(x)$ y x está en el dominio de f. $\{(x, f(x)) | x \epsilon A\}$"* (Stewart, 2003, p. 12)

t	$c(t)$
0	0.0800
2	0.0570
4	0.0408
6	0.0295
8	0.0210

Figura N° 12: $f(x)$ como distribución de puntos en el plano

(Tomado de Stewart, 2003, p. 16)

$f(x)$ es usada para designar una parte de la gráfica, visto de forma estática, es decir *la representación (trazo) de* $y = f(x)$

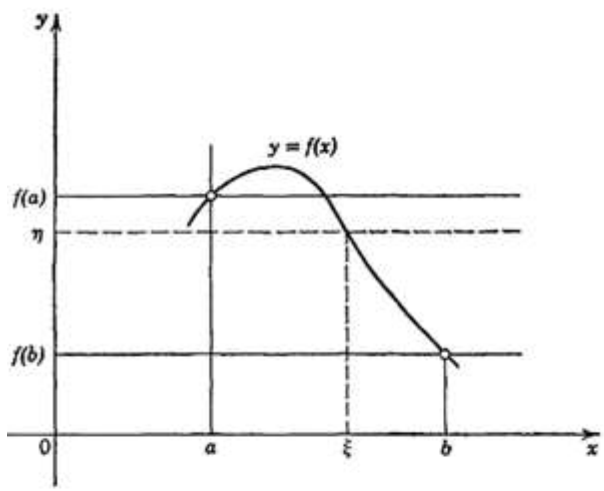

Figura 1.32 El teorema del valor intermedio.

Figura N° 13: Representación de $y = f(x)$

(Tomado de Courant y John, 1999, p. 68)

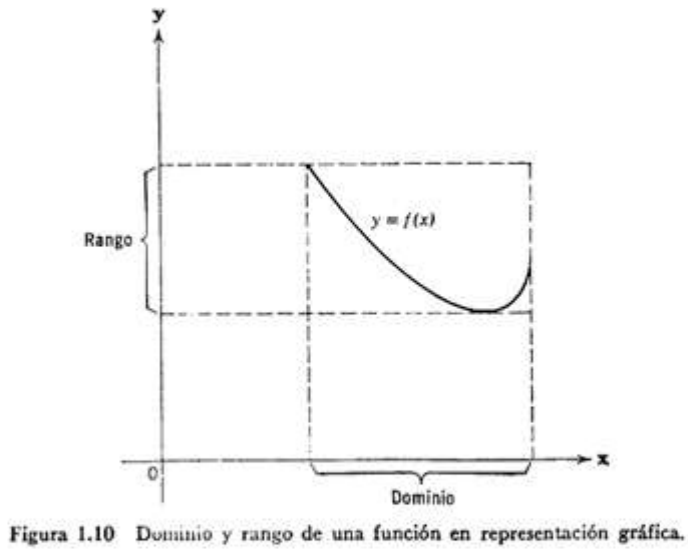

Figura N° 14: Representación de $y = f(x)$

(Tomado de Courant y John, 1999, p. 34)

$f(x)$ es usada para designar el miembro izquierdo de la igualdad o ecuación $y = f(x)$

> "…considerando una de las coordenadas rectangulares, digamos *y*, con una función $y = f(x)$ de la otra coordenada, *x*" (Courant y John, 1999, p. 48)

> "consideremos una función $y = f(x)$ dada analíticamente" (Courant y John, 1999, p. 48)

> "si para cada abscisa se toma la ordenada correspondiente $y = f(x)$, se obtiene la representación geométrica de la función" (Courant y John, 1999, p. 48)

$f(x)$ es *una expresión algebraica que modela un suceso*, es decir es usada como una modeladora de sucesos dentro de un contexto, siendo expresada de forma algebraica

$f(x)$ es usada para designar *una formula algebraica*.

> *"Cuando decimos que y es una* **función lineal** *de x, queremos decir que la gráfica de la función es una línea recta, de modo que podamos emplear la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta para escribir una fórmula para la función como*
>
> $$y = f\ (x) = mx + b$$
>
> *Donde m es la pendiente de la recta y b es la ordenada al origen."* (Stewart, 2003, p. 25)
>
> *"Una función P recibe el nombre de polinomio si* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$*"* (Stewart, 2003, p. 29)

$f(x)$ es usada para designar *las alturas que se encuentran bajo la curva* (en el caso de la integral es *una altura de ancho* dx)

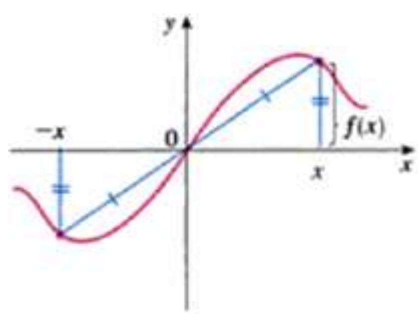

FIGURA 24
Función impar.

Figura N° 15: $f(x)$ como alturas

(Tomado de Stewart, 2003, p. 20)

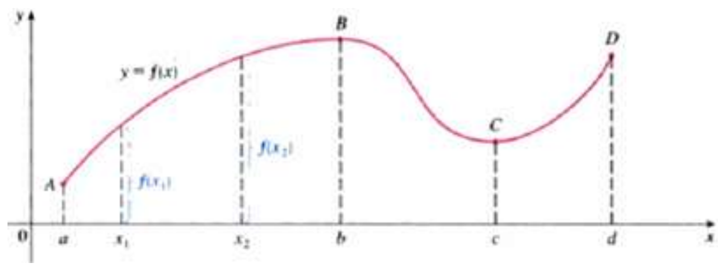

Figura N° 16: $f(x)$ como alturas

(Tomado de Stewart, 2003, p. 21)

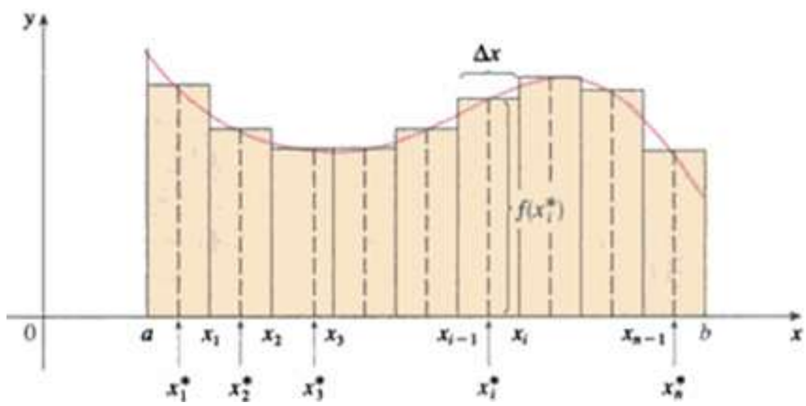

Figura N° 17: $f(x)$ como alturas de ancho dx

(Tomado de Stewart, 2003, p. 372)

$f(x)$ es usada para designar *la gráfica* misma, es decir como un procedimiento dinámico

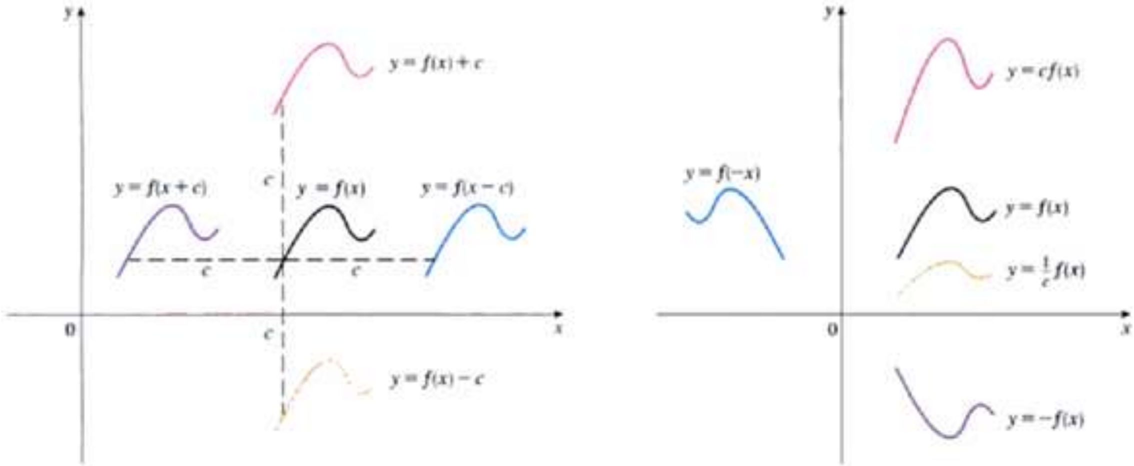

FIGURA 1
Traslación de la gráfica de f.

FIGURA 2
Estiramiento y reflexión de la gráfica de f.

Figura N° 18: $f(x)$ como la gráfica de la función

(Tomado de Stewart, 2003, p. 39)

$f(x)$ es usada como *resultado de un procedimiento*.

> *"entonces* $g(\phi(x)) = f(x)$*…"* (Courant & John, 1999, p. 76)

$f(x)$ es usada como *cuantificadora de cambio*, representando lo dinámico de la función, capturando la esencia del cambio

$f(x)$ es usada como *representante de la función misma*, es decir conlleva todo lo que sustenta a la definición de la función, por ejemplo:

> *"considere una función* $f(x)$ *continua en todo de un intervalo"*
> (Courant y John, 1999, p.68)

> *"…acotada por una porción de la gráfica de la función* $f(x)$*…"*(Courant y John, 1999, p. 144)

> *"Para toda función continua* $f(x)$ *en un intervalo cerrado [a,b]…"* (Courant y John, 1999. 147)

"Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones cualquiera (integrables),…"
(Courant y John, 1999, p. 159)

*** Podemos ver como ejemplo de que dentro del discurso propuesto en los textos, un signo puede estar cumpliendo diferentes roles en un mismo enunciado, como lo podemos ver en el siguiente caso: *"Si la curva representada por $y = f(x)$ es simétrica con respecto al eje y, esto es, si $x = -a$ y $x = a$ dan el mismo valor de la función $f(-x) = f(x)$…"* (Courant y John, 1999, p. 53).

En los diferentes usos de $f(x)$ se puede identificar que conllevan en sí significaciones que se puede ver presente en el trascurso de los discursos que sustentan a estos dos libros. Sintetizando, vamos a proponer las siguientes categorías de significación, las que surgen desde los diferentes usos que se le ha dado al signo.

valor(es) numérico(s) o algebraico(s), es decir, pude considerar valores de forma puntual (valor de la segunda coordenada, la imagen, la altura) o global (el conjunto de imágenes o eje *y*).

distribución de los puntos en el plano, los que pueden estar expresados mediante tablas o puntos de la gráfica.

gráfica, tanto el segmento del trazo o la curva completa, es decir, ver a la gráfica como un medio estático o dinámico, respectivamente, aunque en el caso de observar la curva completa, esta puede ser percibida como estática.

formula algebraica o miembro de una igualdad, tanto al considerar la función $y = f(x)$ o un $f(x)$ igual a un polinomio.

modeladora de sucesos o *cuantificadora* de cambio.

resultado de un procedimiento.

función, aunque conceptualmente se encuentra errónea esta categoría, ya que la función es una triada entre una regla, un dominio y un contradominio, y como se dice desde un principio en cada texto el signo $f(x)$ representará a la imagen, es decir, un parte de esta triada.

Podemos ver que las categoría de significaciones encontradas en el discurso de Cauchy, Bourbaki, y en el discurso matemático actual (Courant y John, 1999; Stewart, 2003) surgen de los usos que se le está designando a los signos en los diferentes contextos, a su vez, debemos tener presente que este uso de los objetos matemático se pueden ver a través de las actividades y prácticas en donde se ve inmerso. Por otra parte podemos considerar que los usos articulan las diferentes prácticas y es mediante éstas que los constructos teóricos son objetivados.

Si bien, se puede evidenciar los diferentes matices que pueden tomar los signos en los diversos discurso, podemos damos cuenta que existen significaciones que prevalecen durante el desarrollo de estos discursos, aunque las significaciones no se aprecian iguales, es más bien la esencia que le subyace la que se mantiene inalterada, como es el caso de entender a $f(x)$ como un punto o un valor puntual, si bien no se explicita en todos los casos, se estará entendiendo en todos los ellos como un valor resultante al evaluar un elemento del dominio en la función. Por otra parte podemos evidenciar que algunas significaciones se resisten a los cambios, lo que se puede ver presente al entender a $f(x)$ como la función, idea que se sostiene desde lo expuesto por Cauchy hasta la actualidad, si bien dentro del discurso de Cauchy esto está presente y de cierta forma justificable, ya que es este signo el que representa la totalidad de las cualidades de la función, es con lo propuesto por Bourbaki que este signo se deja de entender de esta manera, aun así se puede apreciar esta significación dentro del discurso actual.

En resumen, podemos inferir las siguientes categorías de significaciones de los diferentes discursos:

Del discurso de Cauchy se significará a $f(x)$ como el valor puntual, una expresión algebraica, la función misma y la altura.

Del discurso de Bourbaki se significará a f como la función o una aplicación; en el caso de $f(x)$ como un valor especifico o puntual, como puntos y las alturas.

Del discurso actual se significará a f como la función; en el caso de $f(x)$ como el(los) valor(es) numérico(s) o algébrico(s), la distribución de los puntos en el plano, la gráfica, una formula algebraica o miembro de una igualdad, modeladoras de sucesos o cuantificadoras de cambio, el resultado de un procedimiento y como la función (en este último se debe tener presente la aclaración antes mencionada)

6.5. El discurso Matemático Escolar (dME).

En la actualidad se puede evidenciar que el discurso oficial (discurso matemático o más específicamente discurso matemático escolar) se refiere a la función como una relación de correspondencia que es definida como tal en el momento que se comienza a utilizar el concepto, más aún, dentro de este discurso se dan a conocer los significados, es decir, cómo se estarán entendiendo los signos f y $f(x)$ en el desarrollo de las temática a tratar, con ello entregando las aristas para comprender el lenguaje y la sintaxis que se utilizará. Si bien se explicita los significados de estos signos al introducir el concepto de función, sólo se hace desde una perspectiva de significación, invisivilizando con ello otras formas de entenderlos, más aún limitando las argumentaciones existentes alrededor de estos signos.

Pero es en el desarrollo de los conceptos relacionados con función y en los diferentes roles que se le dan a éstos signos, los que se encuentran dependiendo de su contexto, actividades y prácticas, que emerge un discurso que sustenta y argumenta los diferentes usos y significados, o sea, un discurso que amplía de forma implícita lo establecido formalmente, en otras palabras, éste dota de herramientas y entrega orientaciones con que se argumenta, significa y se entienden, en nuestro caso los signos antes mencionados.

Si bien, reconocemos el carácter hegemónico del dME como la *"supremacía de argumentaciones y significados frente a otras"* (Soto, 2010), consideramos que la construcción social de estas argumentaciones y significados se lleva a cabo de forma progresiva, la que en su mayoría se realizan de forma implícita, ya que el dME no propicia instancias para reconocer los diferentes matices o significaciones de este discurso, sino más bien las desconoce, pero podemos ver que éstas emergen dentro de un discurso que es subyacente al dME.

Este "discurso matemático subyacente" (dMS) que tiene un carácter dinámico y evolutivo, está sujeto a las interpretaciones de las personas, las actividades y prácticas donde se ve involucrado el conocimiento, entre otras cosas, éste se ve confrontado constantemente con el dME porque este último es el que norma su desarrollo mediante los medios de divulgación y difusión del conocimiento, direccionando las argumentaciones y significaciones que se van formulando y resignificando a la luz de los uso que surgen del los signos f y $f(x)$.

Este dMS no se encuentra explícito en los diferentes medios de divulgación, sino más bien se debe inferir por medio de los usos que se le da al conocimiento matemático, teniendo como rol principal el dotar progresivamente de herramientas para significar los constructos matemáticos, en este caso los signos f y $f(x)$, hasta llegar a una significación culturalmente significativa, además cumple con la finalidad de ser un punto de acceso al significado socialmente aceptado o reconocido.

Podemos ver que interactúan constantemente el dME y el dMS, los cuales, conllevan en sí una carga social y cultural, esta relación converge en una significación particular de los conceptos que será normada para encausarse a la socialmente aceptada. Siendo la interacción entre estos dos discursos los que aportan matices a los diferentes conceptos, ya que si bien se encuentran definidos o establecidos los roles, significados, usos y la sintaxis que se utilizará dentro del dME, es gracia al discurso subyacente que se nutre con significaciones particulares, las que en ocasiones podrían considerarse como parciales.

Lo antes mencionado, lo podemos presenciar en el caso de los signos que nos encontramos analizando, en el momento de especificar dentro del discurso oficial el significado de $f(x)$ (el cual es lo único que se explicita), ya que se realiza como *"el valor de f en x"* (Stewart, 2003), pero esta forma de entender este signo no es suficiente para la comprensión de otras aplicaciones o constructos, ya que precisan de otra significación de éste signo. Estas significaciones viven dentro del dMS, por lo cual no se establecen, institucionalizan ni se explicitan dentro del dME, más aún es gracia a las diferentes prácticas y usos que se le da a éste signo, en múltiples contextos en donde se ve inmerso, que podemos inferir o entender a $f(x)$ como una imagen, conjunto de imagen, segundo miembro del par ordenado, la distribución de pontos en el plano, como alturas, modeladora de sucesos, resultado de un proceso, cuantificadora de cambio entre otras.

La existencia de significados que no se encuentra explícitos dentro del dME, aquellos que no pasan por un proceso de institucionalización, sino más bien se debe inferir a la luz de los usos que se le da al signo, las prácticas que le rodean y en contexto en que está siendo aplicado, por otra parte son significaciones parciales validadas por su mismo uso, propician medios para llegar a una significación socialmente aceptada. Lo que es posible mediante el dMS que forja ideas, concepciones, significados parciales de los constructos, pero es la suma de ellas la que nos da como resultante una significación, la que al ser normada por el dME se encontrará en sintonía con las significaciones reconocidas por la sociedad.

Como se dijo anteriormente este dMS es normado por el dME, lo que llevará a que el dMS converja al discurso establecido, el que se caracteriza por: no considerar los aspectos sociales, contextuales y culturales que permiten la constitución del conocimiento; la existencia de supremacía de argumentaciones y significados frente a otras; ha sido reducido a la mecanización de procesos o memorización de los conceptos; tiene carácter utilitario del conocimiento; y tiene falta de marcos de referencia para la resignificación del conocimiento matemático (Soto, 2010). Pero el camino que se recorrerá para llegar a éste, se caracterizará por aspectos sociales, culturales, como por ejemplo, las vivencias de la persona, las actividades y prácticas que rodean al conocimiento, las prospectivas, entre otros, para luego fijarse y caracterizarse como el dME.

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES.

CAPÍTULO 7: CONCLUSIONES.

Los resultados de esta investigación, se encuentran imbricados sobre aspectos sociales del conocimiento matemático, sus signos y la construcción de éstos, abriendo la discusión en base a las nociones de significación, relación dialéctica de los signos f y $f(x)$ y los medios en que se dan a conocer o se establece el discurso matemático, teniendo en consideración los diferentes escenarios socioculturales, que se encuentran vinculados con las prácticas y usos que se le da al conocimiento, dentro de una temporalidad que se caracteriza por aspectos sociales, culturales e ideológicos.

El signo, como parte del lenguaje matemático, es un medio para acceder y comprender los objetos o constructos matemáticos, siendo una de sus finalidades la comunicación y desarrollo del conocimiento. El uso de los signos se realiza de forma evolutiva, se hace uso de éstos signos a lo largo de la vida académica, lo que se ve representado dentro del discurso matemático desde una forma intuitiva que evoluciona cada vez a una forma más abstracta. Por consiguiente, las significaciones de estos signos también irán evolucionando paulatinamente, ya que ésta sucede a la luz de los diferentes usos que se esté dando al signo y más aún en las actividades o prácticas que se vean envueltas. El hacer usos de los signos en matemática –es decir de un lenguaje, el lenguaje matemático– provee a los estudiantes un sentido de pertenencia e identidad, en otras palabras, sentirse incluidos o pertenecientes a un grupo porque al entrar en las matemática se hace indispensable el uso y comprensión de los signos para poder interpretar y entender lo expresado en los diferentes medios, debido a que se trabaja mayoritariamente con ellos, asimismo es gracias a estos signos que se puede unificar la producción y difusión del conocimiento.

También podemos concluir que la noción de función no se podrá construir o constituir, hasta que se articulen los diferentes usos y significados de f y $f(x)$, en otras palabras, cuando estos usos y significados se encuentran bajo el control del individuo, se signifiquen y pueda emplearlos en diferentes actividades o prácticas, más aún estas significaciones deben ser congruente a la expuesta dentro del discurso Matemático.

En este sentido, el aprendizaje de las función exige una dialéctica entre los signos que la representan, f y $f(x)$, donde se rescate por una parte la relación existente entre estos signo, cómo se sustentan uno al otro y cómo se relacionan en las diferentes actividades y prácticas, por otra parte, como se significan y articulan desde los diferentes constructos a la luz de los usos que se les dé, reconociendo en ello su significación contextualizada, la que se resignificará dentro del contexto en que se ponga en uso el conocimiento. Es así como la significación contextualizada de la función precisa de reconocer los usos y significados de sus signos y su relación, los cuales, se encuentran presente dentro del dME y dMS.

Las conclusiones que se desarrollarán se realizarán bajo tres ejes, revisión bibliográfica; usos y significados de los signos; y por último lo referente al discurso matemático escolar. Se tendrán como eje transversal aspectos sobre la construcción social del signo, las relaciones dialécticas, la noción de significación, aspectos sociales y culturales.

Podemos ver que dentro los textos de matemática, prevalece la postura de Bourbaki a la hora de precisar o definir el concepto de función, pero al momento de ver las aplicaciones se percibe, a la luz de cómo se argumentan y se hace uso del conocimiento, que es el enfoque de Cauchy el que prevalece, es decir, mirar a la función como un relación, siendo este objeto matemático representado por $f(x)$, más aún con el hecho de que f sólo se ve presente al momento de establecer el concepto de función, refuerza el uso indiferente de $f(x)$ en los diferentes contextos, lo que propicia un predominio en el uso de este último para referirse a todos los aspectos referente a la función, sin hacer distinción de donde se vea aplicado el concepto. Más aún, la visión de Bourbaki conlleva en si una crisis del concepto de función, ya que éste cambia el paradigma de racionalidad que le sustentaba.

Por otra parte podemos conjeturar que al estar centrándose mayoritariamente en usos de $f(x)$, se da espacio para pensar en que al ser éste es igual a una formula o expresión algebraica, es lo mismo que la función, pero se está invisivilizando que f está compuesta por tres elementos y más aún con lo expuesto por Bourbaki fija la noción de función como es una relación lógica entre conjuntos.

Como lo podemos ver "*las definiciones posteriores a la de Cauchy, dadas por Dirichlet en 1837, Riemmann (1858), etc., fueron presentadas bajo un mismo intento de formalización del concepto, el cual tendría por límite la proposición de la escuela Bourbakista"* (Sanchez, 2009, p. 68), y aunque lo propuesto por esta última escuela es lo que prevalece dentro del dME, podemos ver que algunas argumentaciones en ocasiones recaen en ideas anteriores.

Este proceso, de selección, por el cual paso el discurso matemático sin duda dejo de lado un sinfín de ideas, visiones y argumentaciones que se tenían sobre el concepto de función, prevaleciendo una la visión que responde a intereses de una comunidad y de la sociedad en un momento determinado. En otras palabras con lo antes mencionado podemos develar que el dME al seleccionar cierto contenido matemáticos excluye a otros (Andrade, 2012), lo que podemos evidenciar dentro de la evolución de los significados que se le da a la función y a sus signos, ya que al considerar dentro del dME a la función como una correspondencia, soslaya y desconoce sus orígenes e ideas germinales, o sea, la racionalidad contextualizada que subyace a su génesis. Pero como se comento y reconoció anteriormente estas ideas pueden estar presente o estar viviendo dentro del dMS, más aún jugando un rol significativo a la hora de significar a la función o a sus signos.

Si bien estas visiones sobre la función –la de Cauchy, Bourbaki y la actual– no se contraponen, al contrario se complementan, para poder fundamentar el dME, es la falta de marcos de referencias dentro de este discurso que propicien significaciones de los signos los que generan el hecho de que uno impida u obstaculice al otro, como se ve presente al momento de ser aplicados dentro del dME, ya que estos signos pueden ser entendidos como lo mismo o bien se considera su uso indiferente al campo o contexto en los cuales se ve aplicado, lo que conlleva a confundir sus usos y obstaculizar sus significaciones (de los signos y de la función). Para ello se hace necesario explicitar los diferentes roles, significados que se encuentran dentro del discurso matemático para tener herramientas y así poder significarlos en los diferentes contextos y prácticas, ya que como se reconoce en Sánchez (2009) la existencia de impacto que las prácticas sociales ejercen sobre las concepciones que se poseen de un objeto en particular.

Por otra parte, podemos ver cómo va evolucionando las significaciones de f y $f(x)$ a la luz de su relación dialéctica, normada por ciertas prácticas, las que lleva a significar de una forma determinada a estos signos, la que está estrechamente ligada con el uso que se le esté dando (los cuales estarán guiando los comportamientos, actividades, prácticas, etc.), el contexto en el que se esté trabajando, entre otras cosas. Como ejemplo de ello, podemos ver el caso de $f(x)$ que es entendido en una primera instancia como la imagen de f, es decir, es la resultante de f al ser es evaluada en un valor particular de su dominio; para luego ser entendido como el conjunto de imágenes, es decir usada para calcular o conocer todos los valores que puede tomar f cuando es evaluado en los valores de su dominio; luego de esto podemos ver que la significación de $f(x)$ puede ser mucha más abstracta al considerar su uso como una modeladora de sucesos representadas a través de expresión algebraica, y así podemos ir evolucionando los significados de $f(x)$ a la luz de las prácticas o usos y necesidades que se le esté dando y con ello significando o resignificando lo que se estará entendiendo por función.

Es así como podemos decir que, con la ayuda de los estudios de elementos puntuales, que nos entregarán significaciones parciales, se podrá tener una visión global de todos los "conocimientos", significaciones que nos llevará a una noción socialmente validada y aceptada, en este caso la de función.

Además el concepto de función ha evolucionado bajo las necesidades e intereses de una comunidad, donde el desarrollo se relaciona directamente con el área que se desea estudiar, investigar o más aún los intereses de una comunidad, podemos ver que junto a esta evolución surge el uso del f para caracterizar a la función, por una necesidad de precisar a la función de forma conjuntista, lo que conllevo a considerar a $f(x)$ como la imagen de f, perdiendo así su carácter de representante único de la función, pasando por ejemplo por lo presentado en Espinoza (2009) donde expresa que para Lagrange, si una función depende de x se denota fx, pero si es una función de función utilizaba el paréntesis, como en el caso de $f(2x)$, $f(3x+5)$ o $f(x+i)$.

Las obras de Cauchy y Bourbaki fueron diseñadas como "elementos didácticos" para la formación académica en matemáticas, sintetizando y estructurando lo desarrollado hasta la fecha, podemos ver en estos discursos una ausencia de instancias donde se conceptualicen o se hagan explicitas las diferentes significaciones que los signos pueden adoptar a la luz de diferentes usos que se le otorgan.

A su vez, se reconoce que los diferentes usos que han adoptado los signos f y $f(x)$ a lo largo de su desarrollo contienen un carácter sociocultural, pues surgen y se desarrollan dentro de tareas o prácticas relacionadas con el nivel y contexto de aplicación de las matemáticas a tratar, además esto estará condicionando la forma en que se está significando dichos signos. Por consiguiente, dentro del uso que se les dé a las matemáticas podemos ver que subyace en ella el significado y sentido con que se está orientando la construcción del conocimiento dentro de las prácticas.

Incluso no se puede desconocer que la transmisión de los signos sé hacer en un contexto particular, como por ejemplo dentro del sistema educacional que es parte de una sociedad, la que se ven influenciada por aspectos sociales, de contingencias, ideológicas, filosóficas, entre otros; en este contexto los medios de transmisión de los signos están inmersos, lo que repercute en la forma de significar y en el desarrollo de un discurso, esto último reflejándose en el tipo de argumentaciones que sostienen a los signos. Y más aún como lo señala Skovmose (1994) la escuela reproduce el conocimiento, las rutinas y competencias, al igual que sustenta las creencias ideológicas, con ello respaldando un tipo de enseñanza que es decidida y estructurada por unos pocos.

Las relaciones dialécticas que se encuentran dentro del discurso matemático, son las que generan significaciones, lo que de forma implícitas favorecen a una adquisición particular de significados y usos dentro de un campo de aplicación, pero a su vez estarán obstaculizando la adquisición plena de cada significado y de su uso particular, pero es gracia a este confrontamiento que las significaciones toman un carácter personal, que idealmente debe estar en coherencia con el discurso matemático, para así adquirir una significación congruente a la socialmente aceptada o institucionalizada.

Dentro del dME subyacen relaciones dialécticas que se generan entre los constructos o actores (conceptos, signos, nociones, relaciones entre quien enseña y quien aprende, entre otros) las que propician la construcción de significaciones, creencias, concepciones, representaciones, entre otras. Hacer reconocimiento de estas relaciones, se hace indispensable a la hora de proponer un rediseño del dME.

Dentro del lenguaje de las matemáticas podemos identificar que sus signos o palabras son socialmente distribuidos porque como nos propone Berger (2004) son herramientas que permite al individuo participar en prácticas cognitivas y que su significados se deriva de su uso establecido en el discurso matemático. Pero para ser más precisos las significados se nutre y se robustecen bajo las relaciones existente entre el discurso matemático y el discurso que le subyace, siendo justo esto lo que matiza las formas de significar al signo, ya que el dMS está abierto a las interpretaciones personales, responde a ideas parciales, a los usos y prácticas se le dé al conocimiento. A su vez, sería muy ingenuo pensar que la significación de un signo o un concepto es un fenómeno homogéneo, al ser éste socialmente distribuidos, se verá influido de aspectos de la misma sociedad y cultura, más aún si consideramos que estos signos viven y se significan en el ámbito escolar y social, convirtiéndose un instrumento (un lenguaje) para el desarrollo de conocimiento, con el que se podrá interpretar la realidad, existirán un sinfín de factores que permearán su desarrollo, como es el caso del uso que se le da en el dME dentro de las diferentes prácticas y actividades, por otra parte en el uso que se le da en las prácticas diarias. Otro factor a considerar es lo expuesto por Cordero y Flores (2007) explican que el discurso Matemático Escolar es la manifestación del conocimiento normado por creencias de los actores del sistema didáctico de lo que es la enseñanza y lo que es la Matemática.

Dentro de los textos analizados podemos evidenciar que existe una concepción de que la matemática es un conocimiento acabado y continuo, imponiéndonos objetos preexistes, lo que lleva a verla como un constructo acabado, estático y lineal, con ello no se propicia instancias para inferir o trasformar ideas o nociones que hagan emerger significaciones, las que estarán orientadas con la actividades y prácticas en donde este inmerso el constructo matemático, sino más bien en los textos se propicia un trabajo mecanicista y memorístico.

La falta de marcos de referencias que ayuden a resignificar la matemática escolar, conlleva en si la existencia de un solo tipo de argumentación que fundamenta al dME, la que es estática y única, con ello desconociendo las actividades o prácticas que hacen emerger el conocimiento, junto con no apreciar las interacciones que se dan dentro del sistema didáctico, lo que va matizando las formas de significar y entender los constructos.

Por otra parte, nos damos cuenta que el dMS propicia significaciones que complementan las expuestas en el discurso matemático (discurso oficial), además da herramientas para poder argumentar, en ocasiones de forma parcial, concepciones, conceptos y constructos, los que se encuentran influidos por factores externos de la persona y del sistema didáctico, como es el caso de los intereses sociales o filosóficos que tiene una sociedad. Es así como, se hace evidente que no basta sólo con lo expresado dentro del discurso matemático para poder rescatar la esencia de las ideas, las cuales pueden surgir de formas intuitivas o como producto de las interacciones y visiones personales, pero gracias al dMS muchas de estas ideas se retoman o se validan nuevamente, más aún en ocasiones se volcán las justificaciones a las ideas germinales de cada constructo.

Se hace necesario para poder comunicar el conocimiento, reconocer las limitaciones que pueden tener sus signos y con ello tener claro lo que se quiere expresar con cada uno de ellos, explicitar aspectos sobre el discurso que subyace al dME, ya que es éste el que dota de herramientas para argumentar los usos y de cómo se le estarán significando los signos. Junto con ello reconocer el carácter social de su transmisión el que se encuentra empapado de aspectos sociales y culturales.

No podemos desconocer lo que nos propone Gellert (2005) al decir que las decisiones curriculares sobre las prácticas escolares dependen en cierta manera del poder de las personas involucradas en educación y matemática, ampliando más esta idea podemos ver que no sólo son las decisiones curriculares las que dependen de la decisión de un grupo, sino que todo lo involucrado con la educación, como es el caso del dME el que es establecido en las escuelas como algo acabado y estructurado, sin reconocer la filosofía e ideologías que la sustenta, más aún la visión de mundo que se quiere constituir con ello, por lo cual, podemos inferir una intencionalidad del discurso matemático, la que se ve influenciada o permeada por factores externos, lo cual es aceptado y validado por una comunidad, todo esto irá sumando a la hora de ver factores que estarán influyendo en la forma de significar a las matemáticas.

Por otra parte, en el caso de los estudiantes *"..., estos signos no tienen un significado propio, esto tiene que ser producido por el alumno mediante el establecimiento de una mediación a los contextos de referencia adecuado"* (Steinbring, 2006), a su vez, la construcción de este significado se puede considerar como un resultado de la interacción entre lo explicito e implícito del discurso matemático.

Podemos vislumbrar la existencia de nociones matemáticas que precisan de diferentes significaciones de los signos, estas significaciones dependerán directamente del nivel de abstracción del constructo en el que se esté trabajando o aplicando y las prácticas que lo normen.

A forma de síntesis y considerando lo antes presentado es que podemos decir que su significación será de forma evolutiva y que sus significados y usos se transformarán a la luz de las necesidades, experiencias del individuo, así como en el contexto en el que se vea inverso el contenido y el estudiante.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alarcón, J. (1998). Sobre las notaciones del cálculo diferencial. *Investigaciones en matemática educativa II*, 17-40. Editor Fernando Hitt Espinosa. Grupo editorial Iberoamérica.

Andrade, M. (2012). *Influencia de los escenarios socioculturales en la apropiación del espacio.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Andrade, M. y Montecino, A. (2009). *La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano: Antecedentes para una propuesta centrada en el aprendizaje reflexivo*. Tesis de licenciatura no publicada Universidad Católica Silva Henríquez, Chile.

Antolín, A. (1981). *De Euler a Fourier: crisis y abandono del concepto clásico de función*. Tesis de Licenciatura no publicada, Universidad Nacional Autónoma de México.

Apostol, T. (1993). *Calculus 2nd Edición.* Editorial Reverte.

Bagni, G. (2004). Una experiencia didáctica sobre funciones, en la escuela secundaria. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 7(1)*, 5-23.

Berger, M. (2004). The functional use of mathematical sign. *Educational Studies in Mathematics* 55, 81-102.

Bombal, F. (1988). Nicolás Bourbaki. *Historia de la Matemática en el siglo XX,* Real Acad. Ci. de Madrid, 313-323

Bourbaki (2006). *Théorie des Ensembles*. Editorial N. Bourbaki et Springer-Verlag Berlin Heidelberg

Bourbaki (2007). *Fonctions d'une variable réelle*. Editorial N. Bourbaki et Springer-Verlag Berlin Heidelberg

Buendía, G. y Montiel, G. (2009). Acercamiento socioepistemológico a la historia de las funciones trigonométricas. En P. Lestón (Ed.), En P. Lestón (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22, 1287-1296.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon. Revista de la S.A.E.M. "Thales", 42,* 353-369.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa: Un estudio de la formación social de la analiticidad.* México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista latinoamericana de matemática educativa*, *21*, 740-753.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2004). La sensibilité a la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathematiques 24*(2.3), 137-168.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2008). Socioepistemología y matemáticas. *Acta latinoamericana de investigación en matemática educativa 21*, *6(1)*, 27-40.

Cantoral, R., Farfán, R.M., Lezama, J., & Martín-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, número especial*, 83-102.

Cantoral, R. y López-Flores, J. (2010). La Socioepistemología: un estudio de su racionalidad. *Paradigma 31(1)*, 103–122

Cauchy, A. (1821) Cours D´Analyse. En Gauthier-Villars et fils (Eds.), *Œuvres complètes d'Augustin Cauchy* Ed. 2, Vol. 3.

Cauchy, A. (1823) Résumé des leçons données à l´école royale polytechnique sur le calcul infinitésimal. En Gauthier-Villars et fils (Eds.), *Œuvres complètes d'Augustin Cauchy* Ed. 2, Vol. 4

Cauchy, A (1994). Curso de Análisis. Selección, traducción directa del francés y notas por Alvarez, C. MATHEMA, Facultad de Ciencias de la UMAN

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4(2)*, 103-128.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8(3)*, 265-286.

Cordero, F. (2006). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte Iberoamericano*. Díaz de Santos, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C. 265-286.

Cordero, F., Flores, R. (2007). El uso de la gráfica en el discurso matemático escolar. Un estudio sociepistemológico en el nivel básico a través de los libros de textos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*,10(1), 7-38.

Courant, R. y John, F. (1999). Introducción al cálculo y al análisis matemático. Volumen 1. Editorial Limusa. México.

Courant, R. y Robbins H. (2002). *¿Qué son las matemáticas?: conceptos y métodos fundamentales / prefacio y avances recientes*, Ian Stewart. Fondo de cultura económica, México.

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Del Castillo, A. y Montiel, G. (2007). El concepto de función en un ambiente geométrico dinámico bajo el enfoque covariacional. *Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa.*

Dussel, E. (1974). Método para una filosofía de la liberación. Superación analéctica de la dialéctica hegeliana. Ediciones Sígueme, Salamanca

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Santiago de Cali, Colombia: Editorial Peter Lang.

Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería didáctica: un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoaméria.

Farfán, R. y García, M. (2005). El concepto de función: Un breve recorrido epistemológico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 18,* 489-493.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Gellert, U. (2005). La formación docente entre lo teórico y lo práctico. En Inés M. Gómez-Chacón y Enrique Planchart (Eds.). Educación Matemática y Formación de Profesores Propuestas para Europa y Latinoamérica. Publicaciones de la Universidad de Deusto, España, p. 73-83

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function Concept: A Brief Survey. *The college Mathematics Journal, Published by: Mathematical Association of America, Vol. 20, Number 44*, 282-300.

Montiel, G. (2005) Interacciones en un escenario en línea. El papel de la socioepistemología en la resignificación del concepto de derivada. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8 (2),* 219-233

Navarro, J. y Elizarraraz, D. (2007).Euler y el Análisis Matemático. En Anzaldo, A., Delgado, J.y Monroy, F. (Eds). *El legado matemático de Leonhard Euler a trescientos años de su nacimiento.* Innovación Editorial Lagares de México, S.A. de C.V

Planchart, O. (s/f). *La visualización y la modelación en la adquisición del concepto de función.* Tesis de doctorado no publicada, Universidad Autónoma del Estado de Morelos, México.

Radford, L. (1998). On culture and mind: A post Vygotskian Semiotic perspective, with an example from Greek Mathematical thought, 23rd, *meeting of Semiotic Society of American* 1-30.

Radford, L. (2001). On the relevance of Semiotics in Mathematics Education. *Paper presented to the Discussion Group on Semiotics and Mathematics Education at the 25th PME International Conference*, The Netherlands, University of Utecht, July 12-17, 2001.

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: Análisis Epistemológico y didáctico.* Tesis doctoral; no publicada, Universidad de Jaen, España.

Sáenz-Ludlow, A. (2007). Signs and the process of interpretation: sign as an object and as a process. *Studies in Philosophy and Education, Volume 26, Number 3*, 205-223.

Sanchez, B. (2009). *El concepto de función matemática entre los docentes a través de representaciones sociales*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, D.F., México.

Sastre, P., Rey, G.y Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la Historia. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *16*, 141-155.

Skovsmose, O. (1994). Towards a philosophy of an applied oriented mathematical education. En W. Blum et al. (Eds.), *Applications and modelling in learning and teaching mathematics*, 110-114. Chichester: Ellis Horwood. Traducido por Paola Valero, Una empresa docente, Universidad de los Andes, Bogotá, 1999

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification - the case of function. En Dubinsky, E., Harel, G. (Eds.). *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy, Volume 25*. Washington: Mathematical Association of America.

Soto, D. (2010). *El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una Visión Socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Spivak, M. (1996). *Cálculo infinitesimal 2da. Edición*. Editorial Reverté.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a *mathematical sign*? – An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics 61*, 133–162.

Stewart, J. (2003). Cálculo de una variable transcendentes temprana. Cuarta edición. Editorial Thomson Learning.

Youschkevitech (1976). El concepto de función hasta la primera mitad del siglo XIX. Traducción por Farfán, R. en *Serie Antropológica, número 1.*