CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
UNIDAD DISTRITO FEDERAL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA Y SU RELACIÓN CON LA PRÁCTICA DOCENTE DE PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

TESIS QUE PRESENTA
MELCHOR MORALES FLORES

PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE
MATEMÁTICA EDUCATIVA

DIRECTOR DE TESIS
DR. SIMÓN MOCHÓN COHEN

México, Distrito Federal febrero de 2013.

Agradecimiento

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACYT, el apoyo brindado para la realización de mis estudios de maestría, siendo el becario 203816. Gracias al pueblo trabajador de México.

Agradecimiento

A mi madre, que mostró un camino con su ejemplo.

A los doctores: Simón Mochón Cohen, Sonia Ursini Legovich, Aurora Gallardo Cabello, por su apoyo incondicional y la paciencia de sabios demostrada en la conclusión de esta aventura.

A los profesores que participaron en la investigación, demostrando que él que enseña no debe dejar de aprender.

Hilda por tu compañía, apoyo y amor.

Esther, Iyari y Héctor; que han sido inspiración para hacer.

Adriana, por tu trabajo, que se transforma en compromiso del que me he visto beneficiado.

Contenido

RESUMEN

EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA Y SU RELACIÓN CON LA PRÁCTICA DOCENTE DE PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Introducción. Es una investigación de corte cualitativo, que tiene como interés indagar sobre la relación del conocimiento matemático para la enseñanza y la práctica docente de los profesores de quinto y sexto grado de educación primaria, describir los cambios en el conocimiento matemático para la enseñanza de los profesores como consecuencia de su participación en un programa de mejoramiento profesional y observar los cambios en la práctica docente posteriores a la participación en un programa de mejoramiento profesional.

El método. Se realizó un taller donde ocho profesores reflexionaron sobre sus saberes matemáticos en situaciones de enseñanza, utilizando: cuestionarios, hojas de trabajo, lecturas de carácter pedagógico y de investigaciones recientes. Se realizaron observaciones de clase de los profesores antes y después del taller, utilizando una guía de observación (Askew, 2000).

Desarrollo. Se realizaron diez sesiones del Taller, de noventa minutos cada una; las primeras para escuchar a los profesores y conocer su relación con el conocimiento matemático y las últimas con una temática matemática con tres contenidos principalmente; fracciones y decimales, cálculo mental y estimación y porcentajes, se hicieron cuatro observaciones de clase a profesores voluntarios antes y después del Taller, que fueron videograbadas.

La participación de los profesores en el Taller fue voluntaria, una vez a la semana con trabajo en casa que se revisaba y discutía en la reunión teniendo como conductor al investigador.

Resultados. El taller fue un espacio de discusión, análisis y reflexión en donde se pensó y habló críticamente de la práctica docente, se realizó un trabajo en equipo en donde se enfrentaron dudas y se compartieron soluciones sobre el conocimiento matemático y el conocimiento matemático para la enseñanza. La reflexión de la problemática inmediata de enseñanza hizo tener soluciones y poner en práctica ideas y estrategias surgidas en el Taller.

En las observaciones finales se observó un cambio comparativamente con las primeras, en la forma de enseñanza, producto de las actividades del taller. La diversidad de los participantes; en su formación académica, años de servicio e intereses ayudó a la obtención de resultados positivos.

ABSTRACT

MATHEMATICAL KNOWLEDGE FOR TEACHING AND ITS RELATION TO TEACHING PRACTICE OF PRIMARY SCHOOL TEACHERS

Introduction. It is a qualitative research whose interest is inquired into the relationship between mathematical knowledge and practice for teaching of teachers from fifth to sixth degree of primary school, it describes the changes in the mathematical knowledge for teachers teaching as a result of their participation in one professional improvement program and observe the changes in teaching post participation in a professional improvement program.

Method. A workshop was done with eight teachers who reflected on their own mathematical knowledge in teaching situations, using questionnaires, worksheets, pedagogical readings and recent researches. Observations were done about the class work of teachers before and after the workshop, using an observation guide (Askew, 2000).

Development. The workshop had ten sessions, of ninety minutes each one, the first to listen to the teachers and learn about their relationship with the mathematical knowledge and the latest with a mathematical theme with three main contents; fractions and decimals, estimation, mental arithmetic and percentages, the class of four volunteer teachers where observed before and after the workshop, which were videotaped.

The involvement of teachers in the workshop was voluntary, once a week with homework that was reviewed and discussed at the meeting where the leader was the researcher.

Results. The workshop was a forum for discussion, analysis and reflection in which participants thought and spoke critically of teaching practice, team work in which they faced doubts and shared solutions to mathematical knowledge and mathematical knowledge for teaching was done. The reflection of the immediate problems of education helped to have solutions and implement ideas and strategies that emerged at the workshop.

In the concluding observations a change was observed in comparison with the first in the form of education, as a result of the workshop activities. The diversity of the participants, in their education, years of service and interests helped to obtain positive results.

INTRODUCCIÓN

En el año de 1989 se dio a conocer el Programa para la Modernización Educativa, este documento presenta un análisis del sistema educativo nacional, en el capítulo que se refiere a la Educación Básica se afirma, que como consecuencia del crecimiento de la población, aumentó la demanda de educación primaria, lo cual obligó a multiplicar la formación de docentes, éste hecho “sacrificó en alguna medida la calidad” de los profesores egresados de las escuelas Normales.

En la década de los 70´s la formación de profesores fue señalada por modificaciones en los planes de estudio, en periodos relativamente cortos, sin realizar una evaluación de su eficiencia, estos programas subordinaban la formación, a la acumulación de conocimientos, dejándose de lado la reflexión, la construcción teórica, la innovación y la vinculación entre teoría y práctica.

Con respecto a la actualización de los profesores en servicio, se hace notar que los contenidos de los cursos de actualización se vinculan escasamente a los problemas educativos y sociales que enfrenta el profesor en su práctica, para su diseño y organización no se toma en cuenta su opinión.

El diagnóstico realizado por la institución federal detonó acciones como: la reforma a Plan y Programas, nuevos libros de texto gratuitos, libros del maestro, apoyos didáctico, ficheros de actividades, cursos nacionales de actualización y apoyos tecnológicos para la enseñanza. Estas reformas tienen como propósito mejorar la calidad de la educación.

Investigaciones realizadas posteriores a la reforma curricular de 1993, constatan que los profesores han adoptado diversas posturas frente a los cambios, como resultado de la interacción entre sus esquemas y las innovaciones, “ observamos que la formación y la experiencia son factores que permiten valorar, más o menos positivamente, los nuevos materiales y definir posturas ante ellos” (Ávila, 1996).

Después de la reforma, la afectación significativa de lo que acontece en el salón de clases es mínima. “Se pone aquí de manifiesto el protagonismo de los docentes y la necesidad de repensar su acción y sus posibilidades reales de cambio. No resulta productivo volver sobre la crítica simplista que los señala como los principales oponentes a las reformas” (Ávila, A, 1996).

Esta investigadora considera *importante conservar lo mejor de las prácticas y encontrar un punto de equili*brio “mejorante” entre las reformas, los profesores y el aprendizaje de los estudiantes; es decir que las innovaciones no sean tan distantes de las costumbres de la clase, que las han hecho inasimilables. Para realizar lo anterior se debe conocer a los profesores: “sus acciones (buenas o no tan buenas), sus destrezas y sus torpezas, sus aciertos y desaciertos… así como las costumbres que a la vez los impulsan y los limitan. Los datos universales y atemporales deben sustituirse por otros específicos y contextualizados” (Ávila, A, 1996, p. 306).

La acción del profesor se observa en los aprendizajes de los alumnos, estos aprendizajes expuestos a evaluaciones nacionales e internacionales ofrecen signos contundentes que muestran que en este rubro hay mucho por hacer. Según el resultado de Pisa 2003 (Programa para la Evaluación Internacional de alumnos), el nivel de conocimientos y habilidades de los jóvenes mexicanos en matemáticas es significativamente inferior al nivel que tienen los países desarrollados. Ubicándose por debajo de todos los países de la OCDE, sólo arriba de Túnez, Indonesia y Brasil. (Plan de estudios 2009).

Los conocimientos de los profesores y la naturaleza de su compromiso para cambiar es lo que determina la mejora en la calidad de la enseñanza, el desarrollo del currículo está determinado por su comprensión y aplicación. El compromiso para proporcionar de manera efectiva experiencia educativa a sus alumnos, aumenta significativamente cuando son ellos los propietarios de las ideas y pueden crear formas de representación que funcionan en el aula (Contreras, 1999).

Son los profesores quienes en última instancia ejecutan las reformas, utilizan los recursos y hacen posible la educación, mejorar esta acción requiere de una reflexión, como una práctica que expresa el poder reconstruir la vida social por la forma en que se participa en la comunicación, la toma de decisiones o la acción social.

Investigaciones nacionales e internacionales (Ball, 2000 y Ávila, 2004) han evidenciado la carencia de un conocimiento de la materia de la asignatura rico y flexible por parte de los profesores, necesario para ser receptivos al pensamiento de los estudiantes y así poder enriquecer el aprendizaje con esta comprensión. Ball observó que los estudiantes que se iniciaban en la docencia tenían pocos conocimientos sobre temas de matemáticas de nivel primaria, como el sistema posicional, la división, las fracciones y la relación entre área y perímetro. Sus conocimientos parecían obedecer más a la memorización que a una comprensión conceptual, y no mostraban conocer las relaciones entre los temas de matemáticas.

La actualización de los docentes representa el problema principal al querer hacer cambios curriculares que tengan como propósito impactar en las prácticas de aula. En la enseñanza de las matemáticas es importante tener un conocimiento sólido, así lo exige su enseñanza, aunado a una forma idónea para presentarlo, porque existe una variedad de caminos que puede seguir una clase y deben de estar salvaguardados por el conocimiento del docente.

Esto representa un factor importante en la dinámica escolar, es por esto, por lo que la presente investigación indaga sobre el *conocimiento matemático para la enseñanza* de profesores de primaria y como con la participación en un Taller de discusión se puede incrementar este conocimiento.

Por organización el presente documento está divido en cinco capítulos.

En el capítulo primero presentamos el problema de investigación y lo delimitamos, porque reconocemos su complejidad y las múltiples facetas que presenta. Al resaltar la importancia que tiene el profesor en la instrumentación de la educación y que son sus conocimientos los que determinan en gran medida los resultados del aprendizaje de sus estudiantes, planteamos las preguntas y objetivos que orientan la investigación. Así determinamos investigar específicamente ese conocimiento que conjuga para la práctica, el conocimiento matemático y el conocimiento pedagógico.

En el capítulo segundo establecemos el marco teórico, refiriéndonos al plan y programas de estudio como el documento que enuncia los contenidos que enmarcan la razón de la práctica, investigaciones recientes sobre el conocimiento de los profesores y la relación que existe con su práctica docente.

En el capítulo tercero se describe: el método, los sujetos que participaron en la investigación y los instrumentos que se utilizaron para recopilar la información; la interacción de estos tres aspectos aportó elementos para dar respuesta a los cuestionamientos planteados en la investigación.

En el capítulo cuarto presentamos el análisis: del desarrollo de las sesiones del Taller de discusión, de las soluciones dadas a las hojas de trabajo, de los comentarios a las lecturas con contenido matemático y pedagógico y de las observaciones de clase realizadas a los profesores participantes.

El capítulo quinto expresa los resultados relevantes encontrados en el estudio, las conclusiones y se comentan las futuras investigaciones que pueden surgir a partir de este trabajo.

Capítulo primero

Problema de investigación

La educación de las nuevas generaciones es una responsabilidad de la sociedad, la transmisión de la herencia intelectual es su propósito fundamental, para hacerlo se ha implementado un sistema educativo que responde a las exigencias sociales. Esta estructura educativa dispone los medios para que lo que acontece en la escuela y más específicamente en el salón de clases asegure un desarrollo continuo del ser humano. El profesor tiene el dominio del proceso de enseñanza porque comprende lo que va a enseñar y como lo va a enseñar.

En el salón de clase interactúan: un sujeto que es el alumno, y otro que es el profesor; con un conocimiento conformado en un currículo que se ha designado para el nivel educativo determinado. En esta interacción, núcleo principal del hecho educativo, es donde, recordando a Menón de Platón: él que no sabe es guiado, a través de una serie de hábiles preguntas centradas alrededor del conocimiento; porque éste está en el interior del sujeto y se puede descubrir por medio de preguntas e indicaciones que dirigen la atención de la mente.

Aquí se resalta la labor de quién hace preguntas, dirige, mantiene la atención y entiende la educación como una forma de comunicación en la que existe una trasmisión deliberada; proceso necesario para construir el conocimiento.

Savater expresa: "Para ser hombre no basta con nacer, sino que hay también que aprender. La genética nos predispone a llegar a ser humanos pero sólo por medio de la educación y la convivencia social conseguimos efectivamente serlo" (Savater, 1997, p. 41). La escuela nos da la oportunidad de educarnos en la convivencia, pero quien actúa en forma deliberada y planeada, es el profesor que realiza el proceso de transposición del conocimiento para lograr el aprendizaje en sus alumnos.

El profesor como factor, determina la dinámica de la clase, la diversidad de actividades, la profundidad del conocimiento, la relación de lo que se hace dentro del aula, con lo que viven los niños en su realidad cotidiana, por esto, es que fijar la atención en el profesor desde sus dos facetas importantes para la enseñanza: su conocimiento de los contenidos matemáticos, de su estructura y la relación entre los diferentes conceptos y el conocimiento pedagógico que ayuda a crear un ambiente propicio en el que los intereses y las formas de pensamiento de los alumnos son considerados; representa indagar en la zona medular del hecho educativo.

Hablar de educación de calidad, sin considerar al profesor; con sus características individuales y colectivas es alejarnos de una comprensión exacta del problema educativo, porque es él quien actúa de acuerdo a sus consideraciones, sus saberes y su conocimiento pedagógico, que le facilitan reconocer las características individuales de los alumnos, la disparidad de los conocimientos previos, el currículo escolar, la organización de la escuela como institución educativa y el acompañamiento que hacen los padres de familia al trabajo con sus hijos.

El acto educativo es complejo, se concretiza con la actuación del profesor en el salón de clases, al poner en juego sus conocimientos y habilidades. La mejora educativa estará determinada por la preparación del profesor que repercute en su desempeño como organizador y facilitador para la adquisición de conocimientos.

El profesor debe ser un profesional de la educación, con una idea precisa del propósito de su enseñanza, dominio del conocimiento de la asignatura y el conocimiento de las formas de aprendizaje de sus alumnos. Y si esto no fue posible en su formación como docente se deberá de realizar en servicio, reflexionando sobre su práctica cotidiana.

En el año 1993 se reformaron los planes y programas de la educación primaria; los resultados a más de 10 años muestran que no es suficiente esta acción, como tampoco ha sido la implementación de materiales e instrumentos tecnológicos aplicados a la enseñanza; voltear la mirada al profesor representa conjuntar los cambios curriculares, las herramientas tecnológicas, en el sujeto que hace posible su acción; porque es el profesor quien determina lo que acontece en el salón de clase, sus conocimientos, creencias y prácticas determinan el aprendizaje del conocimiento matemático por parte de sus alumnos.

1. *Problema de investigación*

Configurar el espacio de estudio de la práctica profesional del profesor está determinado principalmente por dos aspectos: a) la comprensión de los contenidos matemáticos, los propósitos educativos para el uso práctico y para la formación posterior al nivel primaria de educación básica. b) La forma en que realiza la enseñanza, que tiene que ver con los instrumentos pedagógicos, los medios por los cuales se pretende obtener el aprendizaje de los alumnos; estos instrumentos no sólo son de carácter físico, sino que engloban los conceptuales y construcciones teóricas que se generan en la preparación profesional, pero fundamentalmente en la práctica.

El profesor que actualmente trabaja en la escuela primaria ha obtenido su preparación docente principalmente de cuatro fuentes: la observación de cómo enseñan otros profesores (desde que era estudiante hasta que estudiaba para docente y lo hacía con la intención de tomar modelos), su formación en la escuela Normal o

Universidad, los cursos de actualización y por último su experiencia docente en el aula. Estas han aportado en mayor o menor medida los saberes y configurado una forma de actuación, con resultados que no son acordes con las reformas y los propósitos de la planeación del Sistema Educativo Nacional

Para resolver el problema de la formación de docentes, hace 20 años se decía: "se pretende lograr que ésta se convierta en un proceso de educación continua que se inicie con la formación profesional y se prolongue con la actualización permanente y la superación académica, dentro de un marco de renovación constante que impulse la reflexión y la creatividad en la práctica docente". (Programa para la modernización educativa, 1989).

Estas reflexiones son el antecedente de la reforma del Plan y Programas del año de 1993, con nuevos libros de texto, libros para el maestro y ficheros de actividades didácticas.

En el año 2006 se realizó una investigación para saber la apropiación de innovaciones para la enseñanza de las matemáticas, por maestros de educación primaria, al observar cuales son las condiciones que facilitan la apropiación, se expresa: "una vez que los maestros han decidido llevar adelante determinados cambios en sus prácticas, entre los factores que parecen facilitar dicho propósito destacaron: el dominio del contenido disciplinario y la existencia de proyectos colegiados a nivel escuela" (Block, 2007). Por lo que se hace necesario atender las necesidades de conocimiento específico de matemáticas y de su problema de enseñanza.

Al identificar las múltiples facetas y advertir la complejidad de estudiar al profesor en su práctica docente, este estudio se limita a indagar el conocimiento matemático para la enseñanza que se materializa en la práctica docente y como se modifica al mejorar estos dos aspectos.

1.1 Preguntas de investigación

El aprendizaje de las matemáticas en los alumnos de primaria está determinado por la enseñanza; debido a que en la mayoría de los casos es el primer encuentro con el conocimiento y se inicia la formación de conceptos.

La acción del profesor resulta relevante porque "saber matemáticas es una cosa y ser apto para enseñar –comunicarlas a aquellos con un nivel conceptual más bajo- es otra; y creo que esto último es lo que más se adolece en la actualidad. Como resultado, mucha gente adquiere en la escuela un desagrado, e incluso temor, a las matemáticas para toda la vida" (Skemp, 1993, p. 40).

Por su importancia en el proceso de la enseñanza de las matemáticas, la presente investigación se cuestiona: *¿cuál es la relación entre el conocimiento matemático para la enseñanza y la práctica docente?* Porque la escuela tienen sentido por la existencia de los niños, pero en el salón de clases, la figura dominante en el curso que puedan tomar los acontecimientos es el profesor, (Ávila, 2006).

La segunda pregunta que orienta la investigación es: *¿qué cambios se observan en la práctica docente como consecuencia de la participación en un programa de mejoramiento profesional?* Enfocando el problema fundamental de la educación que es la acción del docente.

Diversas investigaciones han estudiado como promover el conocimiento matemático para la enseñanza con la utilización de diferentes instrumentos como videos de clase y producciones escritas de los alumnos (Seago y Goldsmith, 2006). Nos proponemos hacerlo con la reconstrucción crítica colectiva del trabajo de aula, para lo cual se utilizarán hojas de trabajo y lecturas de contenido matemático y pedagógico.

1.2 Objetivos de la investigación

Los objetivos que orientaron la investigación fueron:

- Indagar sobre la relación del conocimiento matemático para la enseñanza y la práctica docente de profesores de 5º y 6º grado de Educación Primaria.
- Describir los cambios en el *conocimiento matemático para la enseñanza* de profesores de 5º y 6º grado como consecuencia de su participación en un programa de mejoramiento profesional.
- Observar los cambios en la práctica docente, de profesores de 5º y 6º grado de Educación Primaria, posteriores a la participación en un programa de mejoramiento profesional.

Para lograrlos se diseñó un Taller de discusión, en donde la reconstrucción de la práctica docente, es el elemento principal.

En el Taller participa el investigador como coordinador de las actividades, lo que significa que se incidió en el curso que tomaron las sesiones, al realizar cuestionamientos que propiciaron la participación y reflexión de los docentes participantes en los tópicos tratados.

Capítulo segundo

Marco teórico

Educar es una ocupación social, el profesor es el sujeto al que la sociedad le ha encomendado la educación sistemática, organizada y ubicada en tiempo y espacio. El profesor sabe lo que otros no, que son sus alumnos, él transforma su comprensión, con habilidad y actitud, en representaciones y acciones pedagógicas, mediante las cuales, trata de expresar, exponer, escenificar y representar de diferentes maneras ideas, para que los que no saben, puedan tener esos conocimientos.

El profesor sabe que el hecho de aprender se realiza principalmente en el salón de clases, lugar donde los alumnos pueden dedicarse a tareas pertinentes para adquirir conceptos.

La enseñanza tiene múltiples propósitos, algunos prioritarios se declaran en el Plan y Programa de Estudio: “la escuela debe asegurar en primer lugar el dominio de la lectura y la escritura, la formación matemática elemental y la destreza en la selección y el uso de información. Sólo en la media que se cumplan estas tareas con eficacia, la educación primaria será capaz de atender otras funciones” (Plan y programas, 1993, p. 13). Lograrlo requiere de la actuación comprometida de los involucrados en la educación.

Con respecto a la asignatura de matemáticas, el Plan y Programas expresa: “el éxito en el aprendizaje de esta disciplina depende en buena medida, del diseño de actividades que promuevan la construcción de conceptos a partir de experiencias concretas” (Plan y programas, 1993, p. 51). Entendemos que diseño de actividades se refiere a aquellas que el profesor realiza frente a su grupo, atendiendo a necesidades particulares, a formas de aprendizaje individuales, a circunstancias sociales propias del entorno y contexto en el que se realiza su labor.

2.1 Conocimiento pedagógico del contenido

Los cambios en la educación básica efectuados en 1993, plantearon la reforma del currículo y los libros de texto. Su propósito lo expresa el Libro para el maestro de matemáticas de quinto grado de la siguiente manera: “que los niños adquieran una formación cultural más sólida y desarrollen su capacidad para aprender permanentemente y con independencia…para que esta finalidad se cumpla, es indispensable que cada maestro lleve a la práctica las orientaciones del Plan y programas y utilice los nuevos materiales educativos en forma sistemática, creativa y flexible.” (Libro del maestro, 5° grado, 1998, pág. 7).

Debemos apuntar que las propuestas didácticas tienen pocas posibilidades de propiciar, por sí solas, cambios importantes en los enfoques didácticos que subyacen en las prácticas de la enseñanza de las matemáticas (Álvarez Icaza, 2002). Los profesores no se limitan a utilizar las propuestas pedagógicas tal como son prescritas, ellos las reelaboran, las reformulan; lo cual lleva a una diversidad de usos y significados que adquieren al ser incorporadas a las prácticas cotidianas, utilizando para ello sus conocimientos y su experiencia laboral principalmente.

Los materiales didácticos propuestos por la autoridad educativa para el trabajo docente están en concordancia con un enfoque que tiene como finalidad lograr que el alumno construya su conocimiento, desarrolle habilidades, creatividad e imaginación. Pero es el profesor quien le da sentido a los apoyos didácticos poniendo en práctica su conocimiento pedagógico y del contenido. (McDonough & Clarke, 2003).

La mayor parte de la investigación cognitiva sobre la enseñanza ha ignorado los procesos cognitivos del profesor. No se han producido estudios del conocimiento de los profesores, de los esquemas y marcos que emplean para aprehender la comprensión y los errores del estudiante (Shulman, 1989). Existe una relación directa entre la comprensión cognitiva del contenido de la enseñanza y la enseñanza que dan a sus alumnos.

La enseñanza, como un proceso práctico, complejo y multifactorial, está expuesta a diversas interpretaciones que dependen del conocimiento de la asignatura por el docente. Shulman (1987) introduce el término *conocimiento pedagógico del contenido* (PCK: Pedagogical Content Knowledge), que amalgama conocimientos y capacidades que permiten al docente hacer que un contenido sea objeto de enseñanza. En éste se incluyen poderosas formas de representación, explicaciones y demostraciones, que hacen comprensible y permiten el aprendizaje de un tópico específico, es el conocimiento que va más allá del tema de la materia *per se* y que llega a la dimensión del conocimiento del tema de la materia para la enseñanza.

El conocimiento pedagógico del contenido incluye el entendimiento de lo que hace fácil o difícil el aprendizaje de tópicos específicos; las concepciones y preconcepciones de los alumnos. Y si estas preconcepciones son errores conceptuales, los profesores necesitan el conocimiento de estrategias propicias para la reorganización del entendimiento por parte de los alumnos (Shulman, 1987).

La enseñanza de un contenido debe ser sustentado por el conocimiento profundo, flexible y cualificado de la materia disciplinar, y además; en la capacidad para generar representaciones y reflexiones sobre ese conocimiento (Shulman 1999). La enseñanza eficaz conjunta un conocimiento del contenido y un conocimiento pedagógico, obteniéndose una comprensión de la materia y de formas de transformar los contenidos en representaciones con potencialidad para lograr aprendizajes.

Duval (1998) expresa que cada representación es parcial con respecto al concepto que representa, se debe considerar como absolutamente necesaria la interacción entre diferentes representaciones del objeto para su formación, en este caso el matemático.

El dominio de una variedad de representaciones para determinado contenido constituye la ubicación pedagógica del conocimiento matemático, la característica de éste último es ser abstracto, lo cual nos lleva a la paradoja cognitiva "por un lado la aprehensión de los objetos matemáticos no puede ser otra cosa que una aprehensión conceptual y por otro lado, solamente por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos." (Duval, 1998, p. 175)

Esto solicita del profesor tres acciones principalmente: a) disponer de un repertorio variado de formas de representación para los diferentes contenidos que contempla su programa de estudio, b) reconocer las dificultades de comprensión del alumno y el nivel en que se encuentra para elegir la forma de representación adecuada para el caso particular; realizando modificaciones, adaptaciones u omisiones necesarias, c) la forma de representación debe considerar el contexto en que se desenvuelve el alumno, la situación particular de una situación específica que se reconoce como un eslabón entre lo escolar y el ambiente habitual.

Estas tres consideraciones muestran la diferencia del conocimiento de la materia de un científico con la de un profesor; mientras uno trabaja para crear nuevo conocimiento el profesor lo hace para crear conocimiento en el otro.

Ejercer la docencia requiere de múltiples conocimientos, Shulman (1987) enlista: conocimiento de la materia, conocimiento pedagógico general, conocimiento del currículo, conocimiento pedagógico de la materia, conocimiento de los educandos y de sus características, conocimiento del contexto educacional y por último el conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educativos que tienen como base fundamentos filosóficos e históricos. Lo cual da como resultado un conocimiento multidimensional que responde a requerimientos institucionales, sociales y personales.

En el docente se mezclan: el conocimiento de la asignatura y un conocimiento pedagógico, que conforman un conocimiento base para la enseñanza que el docente adquiere principalmente de cuatro fuentes, referenciadas por Shulman (1987) de la siguiente manera: formación académica en la disciplina, estructuras y materiales didácticos, estudios académicos sobre educación y la sabiduría adquirida de la práctica. Como se dé este aprendizaje por parte del docente puede determinar, en el mejor de los casos, una actividad sobre lo que enseña con un proceso de reflexión en la toma de decisiones que tengan fundamento y justificación en sus conocimientos.

En sus investigaciones Grossman, Wilson y Shulman (2005) encontraron que el conocimiento de la materia por los profesores atañe a la vez al contenido de lo que se enseña y a la enseñanza, es decir, influye en lo que los profesores enseñan y cómo lo hacen. La profundidad del conocimiento del profesor predispone las elecciones didácticas y en un mayor énfasis las explicaciones conceptuales. Por otro lado, la falta de conocimiento puede afectar el estilo de enseñanza, porque los profesores se encuentran inseguros y eligen hablar más que solicitar cuestionamientos por parte de los alumnos.

Otro resultado de las investigaciones muestra como el dominio del conocimiento afecta en cómo los profesores critican los libros de texto, seleccionan el material a utilizar como apoyo didáctico, cómo estructuran sus cursos y conducen la clase.

Los profesores a los que les falta un conocimiento de las estructuras sintácticas de las matemáticas, afirman los investigadores citados anteriormente, fallan en incorporar ese aspecto de la disciplina en su programa. Con esto se corre el riesgo de desnaturalizar la asignatura que enseñan. Los estudiantes necesitan aprender que las matemáticas son algo más que algoritmos. La falta de conocimiento sintáctico puede limitar seriamente las habilidades para aprender nueva información de la asignatura.

El docente reflexiona e interpreta críticamente el conocimiento, su información pedagógica y el contexto en el que se desenvuelve, Shulman (1987) llamó a este proceso de reflexión e interpretación *modelo de razonamiento y acción pedagógica*, (*véase Figura 2.1).*

Este *modelo* inicia con la acción docente de la comprensión de las relaciones del contenido con el contexto y las intenciones educativas. Esta comprensión permitirá la transformación de los contenidos, que inicia con la preparación, en la que se seleccionan las formas de representación, que responden a las características particulares de los alumnos. Se pasa a la enseñanza en el aula, para posteriormente realizar una evaluación de los elementos sustantivos que ayudarán a la reflexión crítica de lo realizado y así avanzar a nuevas formas de comprensión para una nueva puesta en marcha de un proceso cíclico y dinámico.

El *modelo de razonamiento y acción pedagógica* ayuda a discriminar las partes del proceso de enseñanza para cualquier contenido o asignatura de la educación sistematizada y señala los componentes para mejorar la enseñanza permanentemente apoyado en el proceso de reflexión.

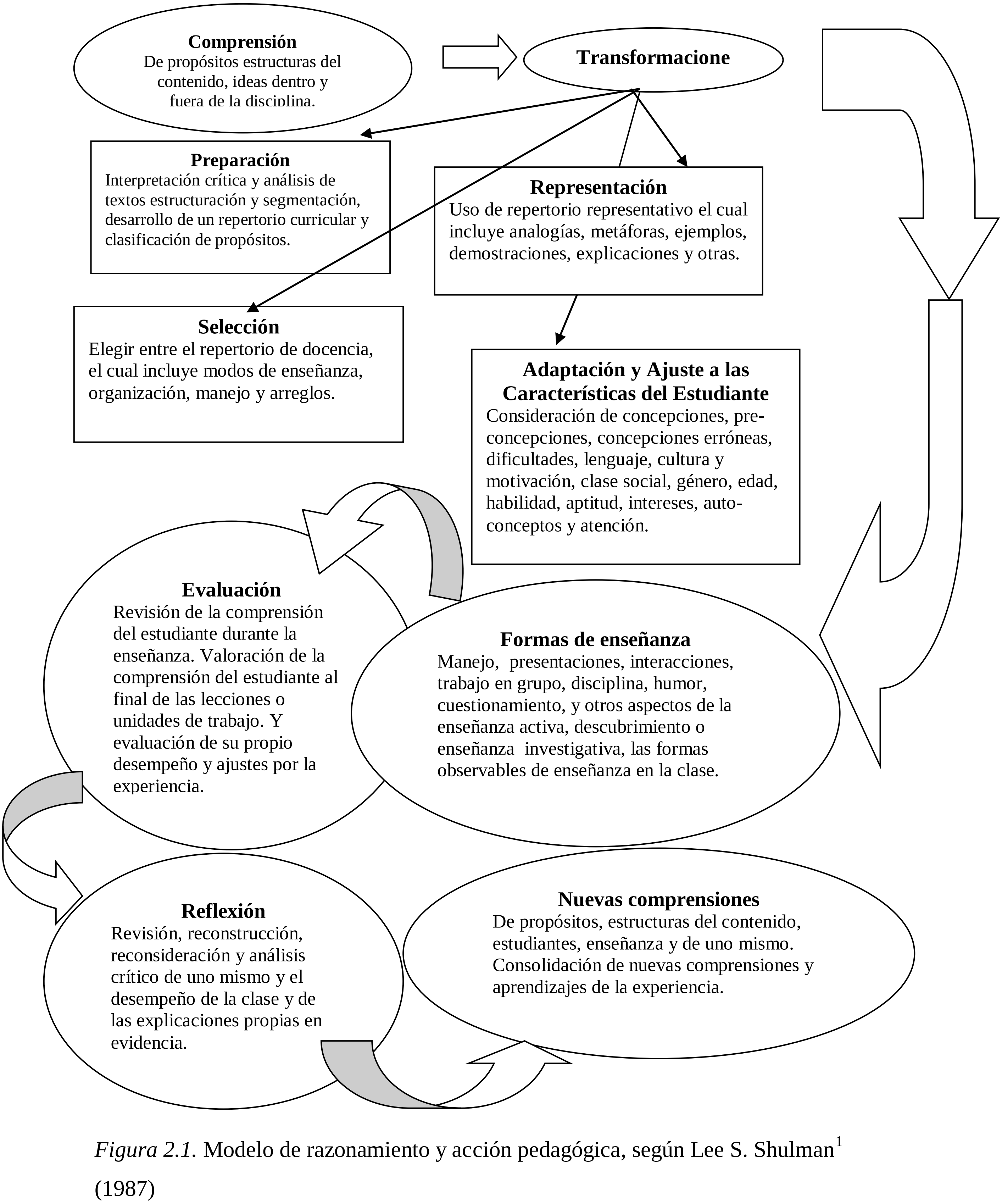


Figura 2.1. Modelo de razonamiento y acción pedagógica, según Lee S. Shulman[1] (1987)

[1] Tomado y adaptado de Shulman 1987 por Salazar Susan.

2.2 Conocimiento matemático para la enseñanza.

Además de las investigaciones de Shulman, consideramos las aportaciones del equipo de investigación de educación elemental de la Universidad de Michigan encabezados por Deborah Ball y Heather Bass quienes acuñaron el término "*conocimiento matemático para la enseñanza"* (MKT: Mathematical Knowledge for Teaching), para referirse al conocimiento matemático que tiene que ver directamente con los problemas específicos de la enseñanza de las matemáticas.

EL *conocimiento matemático para la enseñanza* se muestra en la forma en que el docente responde a situaciones nuevas de enseñanza en las que considera: el contenido, el alumno, el aprendizaje como un proceso y los procedimientos pedagógicos.

El profesor en el trabajo cotidiano considera el contexto, razona sobre el contenido, toma decisiones, es capaz de hacer cambios, diseña una tarea o modera una discusión al interpretar y atender los requerimientos inmediatos de sus alumnos; su pensamiento pone en juego diferentes conocimientos para situaciones siempre cambiantes; una lluvia de situaciones enmarcadas en problemas matemáticos, es la práctica cotidiana del docente (Ball, 2000).

Dewey llama al profesor a convertirse en un líder intelectual: por su preparación en la asignatura, que debe superar el nivel del libro de texto, debe ser tal que pueda sacar provecho a preguntas inesperadas o incidentes imprevistos y debe de entusiasmarse con la exposición del conocimiento hasta contagiar a sus alumnos. "El problema de los alumnos se encuentra en la materia; el problema del maestro estriba en saber que hace la mente de los alumnos con la materia… el maestro ha de estar atento a todas las formas de expresión corporal del estado de ánimo… debe percibir no sólo el significado de las palabras en sí mismo, sino también su significado en tanto manifestación del estado mental del alumno, su grado de observación y de comprensión" (Dewey, 1989, p. 230).

Un profesor que da la espalda a sus alumnos cuando explica, que divaga en la explicación de los conceptos o que se le dificulta la resolución del libro de texto, debe de reconsiderar sus conocimientos porque ese actuar influye en las oportunidades de aprendizaje de sus alumnos.

Hasta ahora hemos hablado de un conocimiento matemático para la enseñanza como algo existente, pero en realidad es un conocimiento en formación que los docentes requieren fortalecer para navegar en complejas transacciones matemáticas flexiblemente y sensiblemente para las diversas formas de enseñanza y aprendizaje que son las situaciones reales (Ball y Bass 2000).

El *conocimiento matemático para la enseñanza* le faculta al profesor atender las solicitudes de representaciones y conexiones del contenido, es decir, pensar en la construcción del conocimiento desde la experiencia del alumno; conocimientos en estado de crecimiento, partiendo de la propia comprensión del contenido que se fragmenta en elementos fundamentales, para producir explicaciones comprensibles que funcionan en el nivel de fragmentación propuesto (Ball y Bass, 2000), es decir, representan elementos lógicos y pasos suficientemente pequeños que tienen sentido para el alumno o para una clase, habiendo considerado lo que saben, lo que no saben y el propósito de la actividad de enseñanza.

Para Ma (1999) el *conocimiento matemático para la enseñanza* es en forma análoga al conocimiento de un taxista experimentado de una ciudad, con el que uno puede ir a lugares importantes en una variedad de caminos con flexibilidad y adaptabilidad. Esto se logra al tener una profunda comprensión de las matemáticas fundamentales, con lo que se obtiene un dominio de conceptos básicos (simples y poderosos), para entender los problemas desde múltiples perspectivas e interrelacionar conceptos y procedimientos.

La existencia de un *conocimiento matemático para la enseñanza* representa el desafío de integrar el conocimiento matemático y el pedagógico en situaciones de clase, donde la labor del docente tiene su real dimensión y como consecuencia al mejorar el conocimiento matemático y la competencia pedagógica de los maestros se mejoran los aprendizajes de los alumnos. Es entonces la atención directa a la práctica de enseñanza lo que hará posible mejorar la educación (Powel y Hanna 2006). Esto explicita la importancia que se le ha otorgado a la formación y capacitación de profesores en el mundo.

Un aspecto importante y urgente a indagar es la naturaleza y el desarrollo del *conocimiento matemático para la enseñanza* que facilite una enseñanza efectiva y promueva aprendizajes exitosos. Hill y Ball (2004) han desarrollado programas para el desarrollo del *conocimiento matemático para la enseñanza* por medio de Talleres en los que es valorado el conocimiento de los maestros al reflexionar en su actividad docente y considerar el conocimiento de los alumnos con respecto a sus formas de aprendizaje, las estrategias que utilizan al intentar resolver una tarea y los errores que cometen de carácter conceptual y procedimental.

Estos estudios han hecho posible identificar cuatro actividades centrales para la enseñanza de las matemáticas:

a) Deducir lo que los estudiantes entienden.
b) Analizar métodos y soluciones diferentes de los propios, comparándolos y determinando su validez.
c) Desglosar ideas, procedimientos y principios matemáticos.
d) Elegir representaciones para comunicar ideas matemáticas eficazmente.

Para realizar eficazmente estas actividades en el salón de clases los profesores deben de razonar y no simplemente tener un repertorio de estrategias y respuestas. La importancia de estas actividades marca un camino para indagar en la experiencia docente y así proporcionar a los profesores la oportunidad de desarrollar su conocimiento matemático para la enseñanza (Seago y Goldsmith, 2006).

En la actividad de los Talleres se entiende el currículo en conjunto y se dispone de herramientas pedagógicas de otros profesores, así ellos pueden exponer a sus alumnos experiencias de aprendizaje disfrutables, interesantes y que les den la satisfacción de la aprehensión del conocimiento; para lograr esto los profesores deben de pasar por las mismas experiencias (Amato, 2006).

Si el profesor no vivió estas experiencias podrá tener una reenseñanza de las matemáticas y la pedagogía como un camino para mejorar su entendimiento, recurriendo a actividades lúdicas que motivan y hacen cambiar actitudes negativas hacia la asignatura, la manipulación de material concreto para entender relaciones y conceptos y observar diferentes modos de representación para una comprensión, interpretación y validación del conocimiento (Amato, 2006).

Los profesores pueden invitar a los alumnos a comprometerse con una tarea matemática y discursivamente conectar con ellos, entender sus ideas emergentes y su razonamiento cuando están construyendo su conocimiento (Powell y Hanna, 2006), tienen que dar cuenta del estado epistemológico específico del conocimiento matemático, diagnosticar y analizar las construcciones comparándolas con sus propósitos de enseñanza y ser capaces de proponer nuevos desafíos acordes con la situación específica de sus alumnos. Esto representa mucho más que tener un repertorio de estrategias y respuestas, (Seago y Goldsmith, 2006), significa tener un conocimiento matemático para la enseñanza y responder a las exigencias que plantea el aprendizaje de los alumnos.

Investigaciones internacionales muestran una relación entre el logro de los alumnos y las cualidades del profesor, las diferencias en el aprendizaje de los alumnos se les atribuyeron a características del conocimiento del docente. McDonough y Clarke (2003), describieron el trabajo de profesores eficaces en los siguientes diez puntos:

Foco matemático: se centra en ideas matemáticas importantes que hace explícitas a sus alumnos.

Características de las tareas: estructura tareas atractivas que posibilitan la aparición de estrategias diferentes.

Materiales, herramientas y representaciones: utiliza diversidad de materiales, representaciones y contextos para el mismo concepto.

Adaptaciones, conexiones y vínculos: realiza conexiones con las ideas matemáticas de la clase o de las experiencias previas, aprovechando el desarrollo de la clase.

Estilos de organización y métodos de enseñanza: dirige el pensamiento matemático de los alumnos a través de una actividad introductoria de todo el grupo y escoge entre las diferentes formas de aprendizaje las que predominan para la presentación de la lección, adaptando su papel como facilitador.

Comunidad de aprendizaje e interacción en clase: anima a los alumnos a expresar sus ideas, cuestionando y desafiando su pensamiento, los escucha, alienta a escuchar y evaluar otras ideas, apoya sin decirles todo, construye sobre las ideas y estrategias que surgen en clase.

Expectativas: tiene altas expectativas del trabajo de sus alumnos, promueve y valora el esfuerzo.

Reflexión: Extrae ideas clave durante y al final de la clase, después de ella reflexiona sobre las respuestas y aprendizaje de los alumnos.

Métodos de evaluación: Utiliza diversos métodos de evaluación, recolecta datos cuando sus alumnos interactúan con el conocimiento. Realiza modificaciones a su planeación como resultado de los datos obtenidos.

Atributos personales: cree que el aprendizaje matemático puede y debe ser disfrutable, confía en su conocimiento y obtiene placer y orgullo de sus éxitos.

2.3 La argumentación en el salón de clases

Son numerosas las investigaciones que dan cuenta de la importancia de la comunicación en el salón de clases. La participación de profesor y alumno en el aprendizaje y la práctica de nuevos conceptos matemáticos son básicos para el logro de propósitos.

Schwarz, Hershkowitz y Azmon (2006) identificaron dos modelos en profesores que enseñaron la misma sucesión de actividades con el mismo objetivo. Observaron que; al discutir, los alumnos expresaban sus ideas y pensamientos a través de una negociación de significados, que se podía dar con afirmaciones sencillas y cortas o con argumentos. Las primeras carecían de una explicación o complementación que tenían las segundas. Los profesores que solicitaban argumentaciones a sus alumnos los orillaban a practicar nuevos conceptos y a desarrollar su razonamiento, aprovechando el potencial que esta actividad tiene para el desarrollo cognoscitivo y el aprendizaje.

Desde una perspectiva diferente Vygotsky escribió: “La capacidad de un niño para comunicarse mediante el lenguaje está relacionada directamente con la diferenciación de los significados en su lenguaje y conciencia” (Vygotsky, 2003, p.151). Él enfatizó la importancia de utilizar herramientas intelectuales desarrolladas por la sociedad para la construcción del conocimiento.

Motivar la argumentación de los alumnos obliga a realizar una comprensión de la forma de pensar, observar el conocimiento en formación y después plantear cuestionamientos y actividades propicias y determinantes para ayudar a lograr los propósitos de aprendizaje y enseñanza.

En el aula se presenta una "peculiar dependencia del estudiante de matemáticas de una buena enseñanza, especialmente en las primeras etapas, cuando se están formando los esquemas básicos y, también, las actitudes duraderas en relación con la materia" (Skemp, 1993, p. 120).

El profesor pregunta para reconocer en la argumentaciones el nivel de formación de los conceptos, para realizarlo con eficacia tiene que hacer "un análisis conceptual de la materia, seguido de una cuidadosa planificación de los métodos por lo que los esquemas necesarios pueden desarrollarse, con atención particular a las etapas en la que será necesaria la acomodación de los esquemas del que aprende" (Skemp, 1993, p. 120). Así el profesor dirige y orienta el trabajo para corregir errores en la formación de conceptos en los alumnos.

En la argumentación de los alumnos en el aula interrelacionan las ideas del que argumenta y del que escucha; el primero, en el hecho de comunicar sus ideas; las ordena lógicamente, lo que ayuda a clarificarlas, el que escucha requiere de una flexibilidad y mente abierta para observar las diferencias en la forma de razonamiento. Así se provoca "la mancomunación de ideas, de tal modo que las de cada uno se encuentran disponibles para todos" (Skemp, 1993, p. 127).

2.4 Reconstruir la práctica en colectividad

Reconstruir la práctica del docente involucra un nivel de reflexión que tiene como propósito incrementar el *conocimiento matemático para la enseñanza* y mejorar la calidad de la educación. La estrategia es un Taller de discusión en donde la reflexión sea el elemento primordial y la reunión con compañeros profesores que comparten la misma problemática de enseñanza. Porque como Schön expresa: "cuando un profesional reflexiona desde y sobre su práctica, los posibles objetos de su reflexión son tan variados como los tipos de fenómenos ante él y los sistemas de saber desde la práctica que él les aporta" (Schön, 1998, p. 67). El profesor realiza esta reflexión sobre su práctica atendiendo a sus conocimientos, de estos se dice: "El profesor posee muchas teorías inconexas, desarticuladas, inestables, compuestas de elementos incoherentes y hasta contradictorios entre sí, acrisoladas en el curso de su experiencia como alumno, como aprendiz de profesor, como profesor y como miembro de una cultura. Ese bagaje de teorías implícitas o creencias pedagógicas es el componente real de la racionalidad pedagógica de la que el profesor dispone en su práctica" (Sacristán, et al. 1998, p. 142).

Las investigaciones realizadas con respecto a la reconstrucción de la práctica resaltan la discusión y la reflexión crítica; acompañadas por la acción, "el movimiento dialéctico acción-reflexión es el que libera el proceso de evolución del docente; surgiendo en él un deseo de superación y de búsqueda de nuevas vías, a través de sus aspectos afectivos y cognitivos, del análisis de las situaciones pedagógicas vividas, con sus componentes interpersonales, y del descubrimiento de sí mismo, en la filigrana de las actividades y de los comportamientos en clase" (Postic, 1996, p. 19).

2.5 Taller de discusión

En un Taller de discusión el profesor realiza una reconstrucción crítica de su práctica docente con colegas que tienen la misma problemática; para desarrollar conocimientos prácticos compartidos, que tienen que ver con la pedagogía técnica enunciada por Cooper, Baturo y Grant (2006). Estos conocimientos surgen de la reflexión, el diálogo y contraste permanente hasta llegar a desarrollar formas compartidas de comprensión de los conceptos y de los dilemas contradictorios de la práctica (Elliot, 1994).

El Taller ayuda a pensar y hablar críticamente sobre la propia práctica, recreando la actividad del salón de clases, mostrando su *conocimiento matemático para la enseñanza* que si bien es individual, al realizarlo con compañeros se enriquece, se obtienen soluciones a problemas prácticos de enseñanza, partiendo de experiencias reales y cercanas, haciendo necesario lo expresado por Piaget: "Es evidente que la confrontación de puntos de vista ya es indispensable en la infancia para la elaboración del pensamiento lógico, y que estas confrontaciones se vuelven cada vez más importantes en la elaboración de las ciencias por parte de los adultos" (Kamii, 1979, p. 9). Confrontación que se realiza entre los que comparten una situación de enseñanza rescatando el trabajo en equipo y así plantear en la práctica un principio fundamental: las actividades y contextos en que las personas aprenden se vuelven una parte fundamental de lo que ellos aprenden (Resnick, citado por Seago y Goldsmith, 2006).

Shulman (1989) define la expresión de la experiencia práctica como: la interpretación, reflexión y transformación, en la recreación para los demás y para uno mismo; que sirve para expresar principalmente lo que hacemos y por qué lo hacemos, permite adoptar una postura crítica que ayuda a conformar una explicación de nuestra práctica. Pensar en lo que ha pasado, en lo que se intentó hacer y en el resultado de la acción; tiene resultados en retrospectiva y prospectiva porque conecta el pasado y el futuro, al comprender lo que ha funcionado y preparar la próxima acción.

2.6 Observación de clase

El salón de clases es el espacio cambiante, dinámico y contextuado donde el profesor ejecuta la enseñanza, sujeto a las demandas de autoridades y padres de familia, utilizando recursos materiales con los que cuenta pero sobre todo sus saberes, creencias y conocimientos, es el lugar idóneo para observar: la intención, los recursos metodológicos, las formas de organización, las formas de representación, el conocimiento de los fines de la educación y el conocimiento matemático. Es el lugar en donde se expresa en acciones deliberadas, limitadas en tiempo y espacio el *conocimiento matemático para la enseñanza.*

Tratándose de la asignatura de matemáticas en la escuela primaria; el profesor toma las decisiones sobre el nivel de abstracción incorporado en el trabajo de una lección (Orton, 1990), con base en consideraciones, en las que se reflejan el conocimiento matemático para la enseñanza.

En la presente investigación se realizaron observaciones de clase para inferir el *conocimiento matemático para la enseñanza* de los profesores, analizando su práctica en acción (Powel y Hanna, 2006) porque es ahí, en la interacción con los alumnos donde el conocimiento se concretiza.

Askew, Brown, Denvir y Rhodes (2000) desarrollaron una estructura para observar el desempeño de profesores de primaria y poder diferenciar aspectos de la clase que hacen que los profesores tengan mejores logros. Ellos concretizan los aspectos a observar en una clase en cuatro parámetros de observación:

- Actividades: Deben representar desafío y estimular el pensamiento.

- Conversación: Dirigida a facilitar el aprendizaje: motiva la participación, el entendimiento y la interacción entre el profesor y el alumno y entre los alumnos.
- Herramientas: Cubren los diferentes estilos de aprendizajes, mediante modelos efectivos.
- Relaciones y normas: Crean un ambiente propicio de respeto y tolerancia.

Estos parámetros se dividen en aspectos que se evalúan cualitativamente respondiendo a las preguntas correspondientes.

Actividades
- Desafío matemático. ¿Cómo el contenido o tarea desafía matemáticamente a todos los alumnos apropiadamente?
- Integridad y significación**.** ¿La presentación de las tareas muestran integridad y son significativas para los alumnos?
- Captar el interés**.** ¿Las actividades captan el interés de los alumnos?

Conversación
- Conversación del profesor. ¿Se centra en significados según lo construido en el aula?
- Conversación profesor alumno**.** ¿El profesor y el alumno entablaron una discusión matemáticamente, sobre el contenido?
- Conversación de los alumnos**.** ¿La lección motiva a los Alumnos a conversar matemáticamente y exponer su razonamiento?
- Manejo de la conversación**.** ¿El profesor atrajo la participación al derredor del contenido matemático?

Herramientas
- Herramientas y estilo de aprendizaje**.** ¿Las herramientas cubren la variedad de formas de aprendizaje?
- Modelos. ¿Los modelos son didácticamente apropiados?

Relaciones y normas
- Comunidad de aprendizaje**.** ¿Hasta qué punto el profesor y alumnos participan en una comunidad de aprendizaje?
- Empatía. ¿Cómo es la empatía afectiva y cognitiva del profesor hacia los alumnos?

Enseñar es una práctica, donde se integra razonamiento, conocimiento y acción, en la que el profesor toma decisiones conforme a los hechos que observa, McDonough y Clake (2003) consideran que es mucha la información que se obtienen del *conocimiento matemático para la enseñanza* del profesor con la observación de una clase frente a sus alumnos.

2.7 Matemática Educativa

Los programas del 5º y 6º grado presentan los contenidos incorporados al currículo articulado en ejes. Los números, sus relaciones y sus operaciones, mediación y geometría, procesos de cambio, tratamiento de la información y la predicción y el azar (Plan y programas, 1993).

Los contenidos aritméticos representan la base de la matemática que el alumno utilizará durante su vida académica, su importancia estriba en darle los fundamentos y las herramientas para la resolución de problemas. Entre estos contenidos se encuentran fracciones, porcentajes, cálculo mental y estimación. Los dos primeros están presentes en la tercera parte de las lecciones del libro de texto y representan un reto para su enseñanza debido a su complejidad y a los antecedentes que son necesarios por parte del alumno. El cálculo mental es una habilidad cuyo desarrollo depende de la comprensión de las características y propiedades del sistema de numeración y de las operaciones básicas. Es importante que el profesor no pierda la oportunidad de la práctica y resaltar sus ventajas.

Por su importancia en el currículo y en la formación del profesor se desarrollan brevemente estos contenidos, y además porque representan una dificultad para su aprendizaje y un reto para la enseñanza.

2.7.1 Cálculo mental

Hablamos del cálculo mental al que Parra y Saiz (1997) entienden como un conjunto de procedimientos que, analizando los datos por tratar, se articulan, sin recurrir a un algoritmo preestablecido, para obtener resultados exactos o aproximados. Los procedimientos del cálculo mental se apoyan en las propiedades del sistema de numeración decimal y en las propiedades de las operaciones, ponen en juego diferentes formas de escribir los números y las relaciones entre ellos.

El cálculo mental ha sido relegado de la enseñanza, una razón de esto es el conocimiento y disposición del profesor hacia este tema. Pero ¿por qué enseñar cálculo mental en la escuela primaria? Los aprendizajes en los aspectos del cálculo mental influyen en la capacidad para resolver problemas; el enriquecimiento de las relaciones numéricas a través del cálculo mental favorece que los alumnos ante una situación, sean capaces de modelizarla, por anticipación y por reflexión (Parra y Saiz, 1997).

El cálculo mental desarrolla el conocimiento en el campo numérico y favorece la construcción de la estructuración matemática por parte del alumno, favorece la individualidad al tener una relación que reconoce como válida con el conocimiento que funciona en el grupo y fuera de la escuela. El cálculo mental se retroalimenta así mismo, otorga herramientas de control sobre el conocimiento de los algoritmos.

El profesor debe proponer situaciones de aprendizaje en las que se pongan en juego habilidades de cálculo mental y tener conocimiento de los posibles planteamientos que hagan los alumnos.

2.7.2 Fracciones y decimales

Los números fraccionarios tienen una riqueza y complejidad con múltiples aplicaciones en la vida cotidiana, la ciencia, la técnica y el arte, las fracciones las encontramos con diversos significados. Kieren (1983) afirma que la expresión a/b puede modelar cuatro significados o ideas matemáticas: medida, cociente, operador multiplicativo y razón, agrega uno más, el de relación parte-todo, aclarando que éste se puede encontrar presenten en los otros cuatro significados, al poderse identificar en cada contexto la unidad y sus partes correspondientes.

La enseñanza de las fracciones es difícil para los profesores de primaria, esto se manifiesta por el alto porcentaje de alumnos que fracasan en aprender este concepto (De León Fuenlabrada, 1996), un aspecto que determina lo anterior, es la pobreza conceptual que se maneja en la práctica escolar, los mismos autores argumentan: se sabe que la enseñanza prioriza el significado del fraccionamiento de la unidad así como el dominio de las reglas de cálculo, dejando a un lado variedad de situaciones relacionadas con el significado de fracciones, además de que algunas situaciones como de reparto, de comparación, de medida y de transformación de medida no son aprovechadas.

Este mismo documento afirma que otro elemento que explica el fracaso es la ignorancia de los profesores en los esquemas de conocimiento que necesitan los alumnos para darle significado a las fracciones y el planteamiento de manera anticipada del uso del lenguaje convencional y los algoritmos sin otorgar esquemas de partición, equivalencia, conservación de área, etc. que darían sentido al lenguaje simbólico y a las reglas de cálculo, lo que provoca que los saberes sólo funcionen en el contexto escolar (De León y Fuenlabrada, 1996).

Porque se ha reconocido que la elección de una unidad divisible constituye uno de los mecanismos constructivos básicos de la fracción por lo que brinda un soporte de cualquier otra elaboración, Kieren (1983), así se introduce una definición de número racional "*m/n* usado en el sentido de fracción", la *n* se llama denominador y la *m* se llama denominador. Denominar se deriva de la palabra latina *denominatus*, "llamar por el nombre". Designa el nombre de (nombre del número) las partes en las cuales el entero está dividido. El numerador se deriva de la palabra latina *numeratus*, "para contar" y "cuenta" las partes bajo consideración. El símbolo *m/n*, con respecto a la interpretación de "fracción" designa *m* de *n* partes iguales. Del conocimiento de fracciones debe de relacionarse el conocimiento de los decimales, por la definición de fracción decimal: es un numeral racional cuyo denominador es una potencia entera de 10 (Peterson y Hashisaki, 1999). Esta acción es un ejemplo de la conexión de conceptos que dan estructura y lógica al conocimiento matemático.

Los mismos autores explican este cambio de fracción decimal a número decimal. "En lugar de escribir la potencia de 10 en el denominador, se coloca un punto llamado el punto decimal entre dos de los dígitos del numerador de tal forma que el *número de lugares a la derecha de este punto indica la potencia de la base en el denominador*. El punto sirve como una "separatriz". Los dígitos a la izquierda del punto forman la parte entera del número y los dígitos a la derecha del punto son el numerador de la fracción cuyo denominador es la potencia de 10 con exponente igual al número de dígitos a la derecha del punto decimal." (Peterson y Hashisaki, 1999, p. 256).

Ejemplos.

$$\frac{25}{100} = \frac{25}{10^2} = 0.25 \qquad \frac{874}{10000} = \frac{874}{10^4} = 0.0874$$

La explicación para el algoritmo de la adición de números decimales utilizando la anterior explicación, con un ejemplo es:

Encontrar la suma de:

3.92, 406.7273, 0.076

Estos números pueden sumarse como números racionales, recordando que el número de cifras decimales indica la potencia de la base en el denominador.

$$3.92 + 406.7273 + 0.076 = 392/10^2 + 4067273/10^4 + 76/10^3$$

Escribiéndolas con el mismo denominador obtenemos:

$$39200/10000 + 4067273/10000 + 760/10000$$

Al realizar la adición da como resultado.

$$4107233/10000 = 4107233/10^4 = 410.7233$$

La razón para alinear los puntos decimales en los números decimales para efectuar la adición en columna puede resultar más clara si los números se escriben en forma desarrollada.

En la multiplicación con decimales la regla para colocar el punto decimal en el producto dice: se suman el número de cifras decimales de los factores, esa suma será las cifras decimales en el producto. Este procedimiento es una consecuencia de las leyes de los exponentes. Ejemplo.

$$(26.6)\ (4.75) = (266/10)\ (475/10^2) = (266)\ (475)/10^3 = 126350/10^3 = 126.35$$

2.7.3 Porcentaje

Un contenido que tiene relación muy directa con las fracciones y decimales es el tanto por ciento. Peterson y Hashisaki (1999) han estudiado como el profesor realiza las explicaciones utilizando razones y proporciones y dice: tradicionalmente, en la presentación de los problemas de porcentaje se tiene que encontrar la cuarta componente de dos razones equivalentes cuando tres de ellas se conocen.

Supongamos que *p* simboliza el porcentaje. Entonces, por ejemplo el 32% debe darnos *p = 32* y deberá ser expresado como la razón *32/100*. Cuando usamos *p* para representar el porcentaje, *p/100* es la razón. Para denotar a la otra razón equivalente en el problema de porcentaje usaremos *A/B*, donde *A* se llama “cantidad” y *B* “base”. Ahora los “tres” tipos de problemas de porcentaje pueden expresarse en términos de estas dos razones.

Encontrar el 32% de 400	32/100 = A/400	A = 128
¿Qué porcentaje de 400 es 128?	P/100 = 128/400	P = 32
¿De qué número es 128 el 32%?	32/100 = 128/B	B = 400

Un propósito general que enuncia el Plan y programas de estudio es desarrollar la habilidad para estimar resultados de cálculos y mediciones, la capacidad de anticipar y verificar resultados y el pensamiento abstracto por medio de distintas formas de razonamiento; entre otras, la sistematización y generalización de procedimientos y estrategias en donde los alumnos encuentran significado y funcionalidad al conocimiento matemático.

Es importante que estos contenidos se trabajen en diferentes contextos, en diversidad de situaciones en las que se relacionen para un mejor entendimiento de ellos (Libro del maestro, 5° grado, 1994).

Dada la importancia, en este trabajo se exploró el conocimiento matemático para la enseñanza de los profesores acerca de las fracciones, porcentajes, cálculo mental y estimación.

Capítulo tercero

Método

La presente investigación es de carácter cualitativo y estudia los cambios en el *conocimiento matemático para la enseñanza* de profesores de educación primaria como consecuencia de su participación en un Taller de discusión en el que participa el investigador. Se analiza la actuación de profesores en el grupo que actualmente atiende, haciendo un comparativo antes y después de la participación en el Taller de discusión; reconociendo su conocimiento matemático, en situaciones de reflexión, que orientaron a los profesores a establecer juicios y tomar decisiones fundamentadas sobre la enseñanza.

3. Método

Crear un Taller en donde los profesores reflexionen sobre sus saberes matemáticos en situaciones de enseñanza, tiene en principio dos propósitos: el primero, realizar recreaciones didácticas que apoyen el trabajo en el grupo, evaluar la efectividad de la acción en el aula, y el segundo; mediante la resolución de problemas concretos que tienen que ver con el currículo del nivel educativo, reconocer el conocimiento matemático que sustenta la acción docente.

La participación en el Taller fue voluntaria, dentro del horario de la jornada laboral, estableciendo en todo momento una relación de empatía entre los profesores y el investigador. Las actividades programadas se llevaron a cabo conjuntamente con la carga laboral e institucional, que solicita de los docentes el trabajo en el aula, como: la entrega de documentación, la participación en comisiones asignadas entre y acciones que son propias de la escuela primaria.

3.1. Escenario

El estudio se realizó con ocho profesores de educación primaria: dos de ellos laboran en escuela particular y seis en oficial. Las escuelas oficiales están integradas al Programa Escuela de Calidad y una de ellas es de tiempo completo. Los planteles pertenecen a una zona escolar ubicada en el oriente de la Ciudad de México, en una colonia de clase media. La mayoría de los profesores residen en la misma comunidad.

3.2. Sujetos

Participan ocho profesores que atienden grupos de 5° y 6° grado, seis mujeres y dos hombres (*véase Tabla 3.1*).

Tabla 3.1. Características de los profesores que participan en el estudio.

	Profesor	Grado que atiende	Número de Alumnos	Años de servicio	Tipo de Escuela	Egresado	Otros estudios
1	I	6°	35	20	Oficial	15 de mayo	Lic. UPN
2	P	5°	26	24	Oficial tiempo completo	BENM	Pedagogía ENS
3	L	6°	30	24	Oficial	BENM	I. Pedagogía UNAM
4	J	5º	25	4	Particular	Sin estudios normalistas	PSICOLOGIA
5	A	6°	9	2	Particular	Sin estudios normalistas	PSIC. UNAM.
6	LP	5º	26	30	Oficial	BENM	Biología ENS
7	E	5º	26	24	Oficial	Altamirano	
8	R	5º	23	15	Oficial	BENM	

3.3. Instrumentos metodológicos

Se utilizaron dos cuestionarios: inicial y final, hojas de trabajo, observaciones de clase y un Taller de discusión.

El propósito del cuestionario inicial fue indagar: sobre el gusto por las matemáticas con respecto a otras asignaturas, la importancia que le dan al conocimiento matemático en la educación primaria, sus técnicas de enseñanza, el material que emplean y las formas de evaluación que utilizan para verificar que sus alumnos han aprendido. *(Véase Figura 3.1).*

CUESTIONARIO INICIAL

Nombre del profesor: ______________________

I.- Elabora una lista de las materias que impartes con base en el gusto que tienes por ellas. Inicia con la que más te gusta y termina con la que menos te gusta:

II.- Contesta cada una de las siguientes cuestiones:

1.- ¿Por qué crees que es importante enseñar Matemáticas en la escuela primaria?______________________

2.- ¿Qué te gusta de las Matemáticas? ______________________

3.- ¿Qué no te gusta de las Matemáticas? ______________________

4.- ¿Qué técnicas utilizas para que tus estudiantes entiendan y apliquen el conocimiento matemático?

5.- ¿Cómo compruebas que tus estudiantes entienden lo que se trabaja en clase? Da un ejemplo.

6.- Escribe el nombre de los materiales que utilizas en la clase de Matemáticas para algunos contenidos.

Material	contenido

Figura 3.1. Cuestionario inicial

El cuestionario final tuvo como propósito conocer la opinión de los profesores sobre las actividades implementadas en el Taller, las aportaciones que obtuvieron de su participación, los conocimientos aritméticos y saberes pedagógicos que se lograron al trabajar en el Taller y a partir de esto solicitarles las características que consideran debe tener una clase de matemáticas *(véase Figura 3.2).*

CUESTIONARIO FINAL Nombre del profesor______________________________ 1.- De lo que aprendiste en el Taller de Aritmética, ¿qué se podría aplicar a otras áreas de las matemáticas? ____ ____ 2.- De lo que aprendiste en el Taller de Aritmética, ¿Qué se podría aplicar a otras asignaturas como historia, español o geografía? ____ 3.- Da una lista de conceptos y habilidades aritméticas que consideras ahora más importantes. ____	4.- ¿Por qué es importante deducir lo que entienden o no los niños? ____ 5.- ¿Qué obtuviste para mejorar tu práctica docente con tu participación en el Taller de de discusión? ____ 6.- Describe alguna actividad realizada con tus alumnos en la que se utilizo una idea obtenida por el Taller. ____ 7.- Escribe algunas características que debe tener una clase de matemáticas ____

Figura 3.2 Cuestionario Final

A través de las hojas de trabajo se propusieron problemas de contenido aritmético y pedagógico. Su propósito fue propiciar la participación y centrar la atención en temas específicos.

En las hojas de trabajo se les solicitó, por ejemplo, una lista de conceptos o ideas aritméticas que a su parecer son complejas en quinto y sexto grado, es en estos grados por ser con los que se finaliza la educación primaria y además forman el tercer ciclo, siendo el primero y el segundo grado el primer ciclo y el tercero y cuarto grado el segundo ciclo. *(Véase Figura 3.3).*

Nombre del profesor (a): ____________________

Escribe tres conceptos o ideas aritméticas que te parecen complejas en el presente ciclo escolar.

Figura 3.3 Conceptos o ideas complejas

Esta tarea se propuso a los profesores con la finalidad de reflexionar sobre el currículo matemático del tercer ciclo, las conexiones que existen entre los diferentes conceptos y señalar aquellos contenidos que aglutinan o requieran del dominio previo de otros conceptos para ser comprendidos.

La siguiente tarea consistió en escribir una lista de las ideas equivocadas y los conceptos erróneos más frecuentes de los estudiantes; su propósito fue precisar algunos conceptos o ideas equivocadas que tienen los alumnos en aritmética, las consecuencias en la enseñanza: en qué momento se forman y qué hace el profesor para ayudar a sus alumnos a resolverlos, *(véase Figura 3.4).*

Nombre del profesor: ______________________

1.- Escribe una lista de las ideas equivocadas y los conceptos erróneos más frecuentes de tus estudiantes en la clase de Matemáticas.

Figura 3.4 Ideas equivocadas y conceptos erróneos

La hoja de trabajo que se presenta a continuación se utilizó para interactuar con las diferentes aportaciones que dieron los profesores de los conceptos erróneos o ideas equivocadas que tenían sus alumnos (la dinámica se encuentra descrita en el capítulo cuarto, tercera sesión), *(véase Figura 3.5).*

Nombre del profesor: ______________________

Después de leer el trabajo de tu compañero (a) escribe uno de los conceptos erróneos o ideas equivocadas que te parezcan interesantes.

Anota las causas probables.	***Sugiere algunas alternativas de solución***

Figura 3.5 Causas y alternativas de solución

Esta tarea indagó los conceptos y habilidades que el profesor consideró importantes a desarrollar en sus alumnos durante el ciclo escolar, *(véase Figura 3.6).*

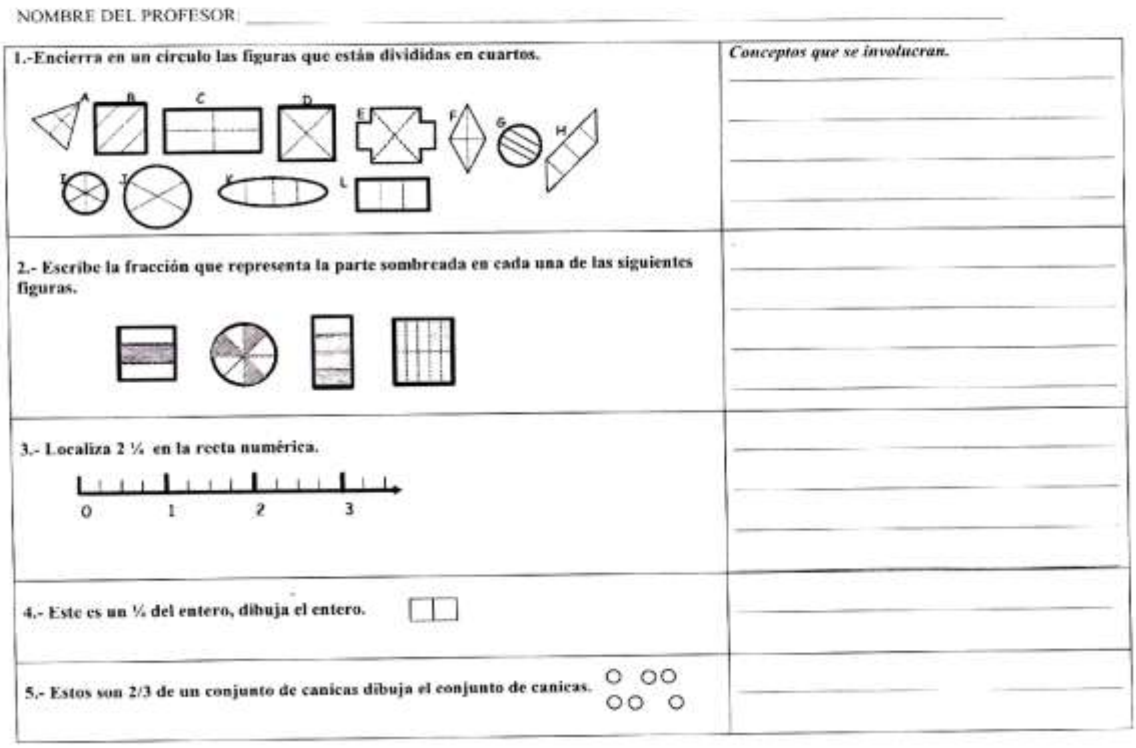
Nombre del profesor: ____________________

I.- Escribe una lista de conceptos y habilidades de Aritmética que consideren más importantes en su curso.

Conceptos	Habilidades

Figura 3.6 Conceptos y habilidades

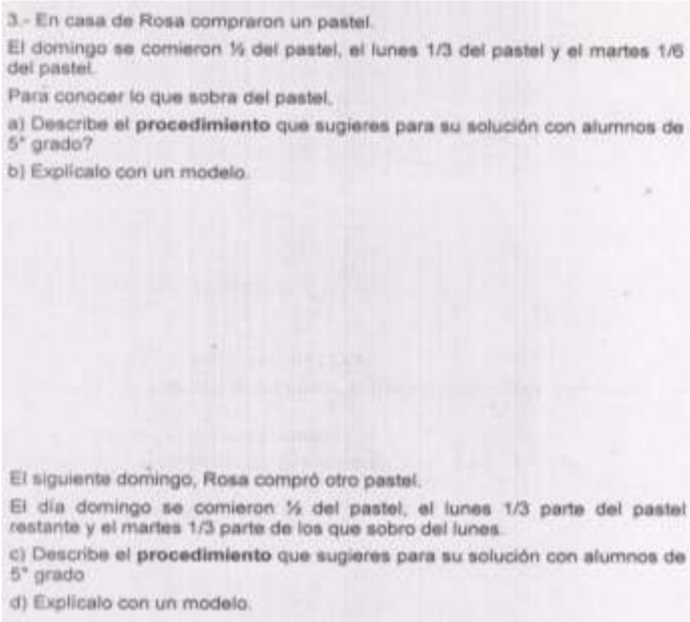
En la siguiente hoja de trabajo se solicitó a los profesores describir los conceptos que involucran una colección de reactivos referente a fracciones, *(véase Figura 3.7).*


NOMBRE DEL PROFESOR ____________________

	Conceptos que se involucran.
1.-Encierra en un círculo las figuras que están divididas en cuartos.	
2.- Escribe la fracción que representa la parte sombreada en cada una de las siguientes figuras.	
3.- Localiza 2 ¼ en la recta numérica.	
4.- Este es un ½ del entero, dibuja el entero.	
5.- Estos son 2/3 de un conjunto de canicas dibuja el conjunto de canicas.	

Figura 3.7 Conceptos que involucra un ejercicio de fracciones

La resolución de problemas y las fracciones se trabajaron en esta hoja de trabajo. *(Véase Figura 3.8).*



3.- En casa de Rosa compraron un pastel.

El domingo se comieron ½ del pastel, el lunes 1/3 del pastel y el martes 1/6 del pastel.

Para conocer lo que sobra del pastel,

a) Describe el **procedimiento** que sugieres para su solución con alumnos de 5° grado?

b) Explícalo con un modelo.

El siguiente domingo, Rosa compró otro pastel.

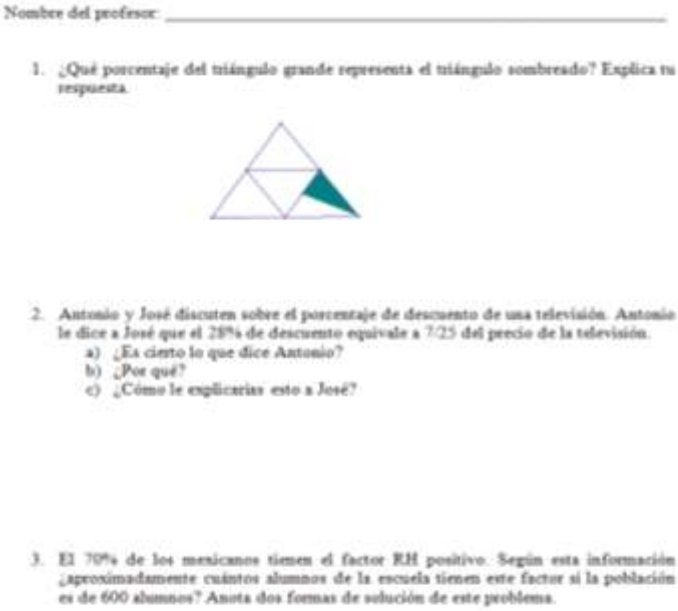
El día domingo se comieron ½ del pastel, el lunes 1/3 parte del pastel restante y el martes 1/3 parte de los que sobro del lunes.

c) Describe el **procedimiento** que sugieres para su solución con alumnos de 5° grado

d) Explícalo con un modelo.

Figura 3.8 Problemas de fracciones

La siguiente hoja de trabajo, tuvo como propósito que los profesores aportaran experiencias de su trabajo en el aula cuando realizaron actividades cuyo contenido es de porcentaje. *(Véase Figura 3.9).*



Nombre del profesor: ______________________________

1. ¿Qué porcentaje del triángulo grande representa el triángulo sombreado? Explica tu respuesta.

2. Antonio y José discuten sobre el porcentaje de descuento de una televisión. Antonio le dice a José que el 28% de descuento equivale a 7/25 del precio de la televisión.
   a) ¿Es cierto lo que dice Antonio?
   b) ¿Por qué?
   c) ¿Cómo le explicarías esto a José?

3. El 70% de los mexicanos tienen el factor RH positivo. Según esta información ¿aproximadamente cuántos alumnos de la escuela tienen este factor si la población es de 600 alumnos? Anota dos formas de solución de este problema.

Figura 3.7 Problemas de porcentaje

Reunir a profesores que enfrentan problemáticas semejantes, con el propósito de socializar la experiencia y aprender unos de otros y construir en conjunto un conocimiento que sirva para resolver problemas de enseñanza y conocimiento matemático, forma parte fundamental de la presente investigación.

Se realizaron diez sesiones de noventa minutos cada una. Una sesión por semana, cada sesión tuvo objetivos que los participantes conocieron al inicio de la misma. Las sesiones se realizaban dentro del horario de la jornada laboral, el personal directivo de las escuelas en las que laboran estos profesores se organizó para atender a sus grupos en su ausencia.

La organización general del Taller está constituido por tres apartados: sesiones para escuchar a los profesores y conocer su relación con el conocimiento matemático: lo que les gusta y lo que no les gusta de las matemáticas, su experiencia en su aprendizaje de las matemáticas, las dificultades de enseñanza, los conceptos y habilidades que pretenden desarrollar en el aula y las ideas equivocadas y conceptos erróneos que presentan sus alumnos. Sesiones con una temática matemática en las que se desarrollaron tres contenidos principalmente: a) fracciones y decimales, b) cálculo mental y estimación y c) porcentajes. Para estas sesiones se entregó información impresa a cada profesor, además se presentaron las hojas de trabajo y se analizó su solución.

En la resolución de las hojas de trabajo se observa el conocimiento matemático que posee cada profesor y cuando se les solicita una representación de este conocimiento en el espacio escolar está presente el aspecto pedagógico, enfatizando la importancia de visualizar las dificultades de enseñanza y las posibles dificultades de aprendizaje por parte de los alumnos.

En tres sesiones la temática favoreció el aspecto pedagógico, se realizó la reflexión de contenido pedagógico a través de lecturas que son resúmenes de artículos de investigaciones actuales e internacionales que responden al propósito de resolver los problemas de enseñanza y mejorar los aprendizajes: “El papel del profesor en cambiar afirmaciones por argumentos”, “Colaboración con profesores para mejorar en aprendizaje de las matemáticas: pedagogía de tres niveles” y “Describiendo la práctica de profesores eficaces de matemáticas”. Estos documentos se entregaron a los profesores una semana antes de ser trabajadas en el Taller, para que tuvieran este antecedente y elementos para la discusión *(anexo1).*

Primera sesión: presentación, comunicar la organización y propósito del Taller y comentarios sobre las respuestas al cuestionario inicial.

Segunda sesión: Discutir sobre los conceptos y habilidades aritméticas que se pretenden desarrollar en los alumnos de quinto y sexto grado.

Tercera sesión: reconocer las ideas equivocadas y los conceptos erróneos que tienen los alumnos o que se forman en ellos como producto de la enseñanza.

Cuarta sesión: señalar cuáles son los conceptos e ideas complejas que presenta el programa de quinto y sexto grado, se inicia la discusión del contenido de fracciones, por ser este un ejemplo de un concepto complejo durante toda la educación primaria.

Quinta sesión: Trabajar el documento y analizar las soluciones a las hojas de trabajo sobre este contenido.

Sexta sesión: comentar la lectura “El papel del maestro en cambiar afirmaciones por argumentos” y describir lo que se hace en el aula para hacer este cambio.

Séptima sesión: analizar la lectura “Cálculo mental y estimación”, considerar las estrategias propias y el desarrollo en los alumnos de esta habilidad, comentar la lectura “Describiendo la práctica de maestros eficaces de matemáticas”.

Octava sesión: reconocer la forma en que se trabaja el contenido de porcentaje y las dificultades que presenta en los alumnos.

Novena sesión: comprender que la colaboración y la participación en un trabajo colegiado son una alternativa para mejorar el *conocimiento matemático para la enseñanza*; comentar la lectura: “Colaboración con maestros para mejorar el aprendizaje de las matemáticas”.

Décima sesión: comparar las visiones que tienen los profesores de la experiencia de participar en un Taller de discusión cuyo propósito es mejorar su *conocimiento matemático para la enseñanza* al comentar el cuestionario final. Participación del Dr. Simón Mochón con los profesores del Taller: “Extendiendo ideas: reflexionar sobre la importancia de mejorar la práctica docente”.

Tabla 3.2 Sesiones del Taller de discusión.

Sesión	Contenido
1	Cuestionario inicial.
2	Conceptos y habilidades aritméticas a desarrollar en los alumnos.
3	Ideas equivocadas y conceptos erróneos.
4	Conceptos e ideas complejas y fracciones.
5	Fracciones.
6	Lectura: El papel del maestro en cambiar afirmaciones por argumentos.
7	Cálculo mental y estimación. Lectura: Describiendo la práctica de maestros eficaces de matemáticas.
8	Porcentajes.
9	Lectura: Colaboración con maestros para mejorar el aprendizaje de las matemáticas.
10	Cuestionario final.
11	Extendiendo ideas.

Al inicio de las sesiones del Taller se realizaron cuatro observaciones de clase a profesores voluntarios, con el propósito de conocer su práctica docente antes de su participación en el Taller. Al finalizar éste se realizaron observaciones a los mismos profesores. Las observaciones tanto al inicio como al final se videograbaron y para su análisis se utilizó la guía de observación propuesta por Askew, et al. (2000) que consideran cuatro elementos: tareas, conversación, herramientas y relaciones y normas. A estos parámetros se hicieron adaptaciones que responden a los requerimientos y condiciones de la investigación.

Se presentan las consideraciones de los cuatro parámetros.

Tareas: se aprecian las actividades que se proponen, el desafío que representa al pensamiento del alumno, en el que se considera el paso entre lo que se domina y el nuevo conocimiento, el interés de los alumnos por realizar las actividades que son significativas y cercanas a su contexto y las conexiones con otros conocimientos que dan estructura lógica al saber matemático *(Véase Tabla 3.3)*.

Tabla 3.3. Parámetro: Tarea.

	A	B	C	D
Desafío matemático. La tarea implica un reto graduado al conocimiento y responde al interés de los alumnos permitiéndoles construir su aprendizaje.	Todos o casi todos.	La mitad del grupo.	Algunos	Pocos o ninguno.
Integridad y significado Se desarrollan conexiones con significado matemático, se desglosan ideas que responden a un esquema con perspectivas claras	Realiza conexiones con otros conceptos.	Describe ideas con algún análisis y conexión.	Se da poca oportunidad de análisis.	Tarea rutinaria.
Capta el interés. Los alumnos participan, resuelven, sugieren, comentan, se emocionan, preguntan, etc.	Todos o casi todos.	La mitad del grupo.	Algunos	Pocos o ninguno.

Herramientas: se aprecian los instrumentos concretos y abstractos que el profesor utiliza para la representación en una situación de aprendizaje *(véase Tabla 3.4).*

Tabla 3.4 Parámetro: Herramientas.

	A	B	C	D
Tipos de herramientas.	Las herramientas se adaptan a los estilos de aprendizaje de la mayoría de los alumnos. Se les motiva a elegir y trabajar con herramientas diversas	Algunos alumnos utilizan las herramientas porque se adaptan a su estilo de aprendizaje. Se limita la gama de modelos y su uso.	Las herramientas responden en forma esporádica a los estilos de aprendizaje.	Los estilos de aprendizajes no son considerados. Los modelos y herramientas son únicos
Tipos de modelos	Son apropiados y efectivos para la tarea, existe diversidad.	Existe una gama de modelos sin considerar sus limitaciones.	Los modelos conducen a una integración modelo-concepto.	Los modelos son utilizados como ejemplos.

Relaciones y normas: se considera el ambiente creado para realizar actividades de aprendizaje; la convivencia y la aceptación de normas que regulan las relaciones y favorecen el respeto y la tolerancia *(véase Tabla 3.5).*

Tabla 3.5. Parámetro: Relaciones y normas.

	A	**B**	**C**	**D**
Comunicación de las normas	Las normas son explícitamente comunicadas a los estudiantes, se retroalimentan en la convivencia.	El profesor tiene expectativas de normas, pero no siempre las comparte explícitamente.	Las normas separan al profesor de los alumnos, con roles independientes. Yo enseño-tú aprendes.	Las normas son esporádicas y no existe sujeción a ellas.
Empatía	El profesor muestra empatía por todos sus alumnos quienes se sienten bien con su esfuerzo y como aprendices de matemáticas.	Se muestra empatía con algunos alumnos.	El profesor reconoce las relaciones afectivas y cognitivas, pero no trabaja con ellas.	Se muestra poca o nada de empatía con los alumnos.

Conversación: se aprecian las formas de comunicación, la construcción del lenguaje matemático conjuntamente a la formación de conceptos y significados, la motivación a la participación en un juego de ideas y razonamientos *(véase Tabla 3.5).*

Tarea. 3.5. Parámetro: conversación.

	A	B	C	D
Conversación del maestro. El nivel de comunicación para desarrollar significados matemáticos.	Alto nivel de atención para el desarrollo de significados compartidos. Da confianza, seguridad y anima a participar y preguntar para entender.	No existe retroalimentación sólo una explicación elaborada, menor grado de atención y motivación a la participación.	Prevalece la creencia en significados de los textos. Asume que hay una sola manera de explicar.	Asume que los significados se transmiten. Se instruye en procedimientos.
Discurso maestro alumno.	Discusión de alto nivel, existe retroalimentación se permite y promueve la incitativa de los alumnos que buscan clarificar y hacer preguntas. El profesor acepta que puede equivocarse.	Discusión de menor nivel, existe retroalimentación independiente del contenido matemático. Los alumnos participan cuando se les solicita.	No se promueve la discusión, se responde con un si o no a las respuestas y los alumnos esperan saber si están bien o mal.	No existe discusión. Preguntas dan respuestas cerradas.
Conversación entre los alumnos.	Los alumnos son animados a proporcionar y ampliar sus razones y comprensiones.	Algunos alumnos dan con amplitud sus razones y comprensiones.	No se aprovechan las oportunidades para que se expresen razonamientos, solo respuestas cortas.	No se expresan razones o comprensiones.
Dominio de la conversación.	Existe un dominio de la clase para animar al máximo la participación. Los alumnos se involucran y atienden a las explicaciones de sus compañeros.	Se animan los alumnos a participar por elección del profesor. Los alumnos participan, pero no se involucran en la participación de compañeros.	No se aprovechan las oportunidades para la participación de los alumnos, quienes explican sus razones principalmente al profesor.	La conversación carece de dirección efectiva.

Estos criterios se concentraron en la siguiente guía de observación. (*Véase Tabla 3.6).*

Tabla 3.6. Parámetro de observación.

PARÁMETROS DE OBSERVACIÓN

Nombre del Profesor__________________ Grupo____

TAREAS.	A	B	C	D
Desafío matemático.				
Integridad y significación.				
Capta el interés.				

CONVERSACIÓN.	A	B	C	D
Conversación del profesor.				
Conversación profesor-alumno.				
Conversación alumno-alumno.				
Dominio de la conversación.				

HERRAMIENTAS.	A	B	C	D
Herramientas y estilos de aprendizajes.				
Tipos de modelos.				

RELACIONES Y NORMAS.	A	B	C	D
Comunicación de las normas.				
Empatía.				

La validación de los instrumentos se realizó por triangulación interna, porque como lo expresan Cohen y Manion (1990), cuando se quiere explicar de manera más completa, la riqueza y complejidad del comportamiento humano, conviene estudiarlo desde más de un punto de vista. Los elementos analizados fueron: la participación de los profesores en el Taller de discusión, sus aportaciones en las hojas de trabajo y la observación de clase. Los datos obtenidos se contrastaron para su validación.

Capítulo cuarto

Análisis de los resultados

Para dar orden a este capítulo analizaremos los resultados de la investigación atendiendo la secuencia temporal de las sesiones del Taller de discusión; por ser esta acción la que conjunta las hojas de trabajo y las lecturas. Las observaciones de clase tendrán un comentario aparte. El análisis de los cuestionarios inicial y final, se presentan en la primera y última sesión del Taller, respectivamente.

4. Análisis de resultados

La labor docente es una actividad compleja, de la cual se obtiene como resultado un aprendizaje por parte de los alumnos, para poder tener una visión lo más completa posible, se analizaron diferentes elementos de ella, todos ellos aportaron experiencias de aprendizaje a los docentes participantes en el Taller. Así la participación en el Taller dio una alternativa de organización para el intercambio de experiencias profesionales.

4.1 Análisis de las sesiones del Taller de discusión

Para fundamentar el análisis de las sesiones del Taller se presentan segmentos de las interacciones argumentativas de los profesores y el conductor del Taller. Se consideran los conceptos matemáticos y estrategias pedagógicas a que hacen alusión los profesores en situaciones reales de enseñanza.

Fue importante para el análisis de las sesiones del Taller percibir dentro de las argumentaciones el *conocimiento matemático para la enseñanza* a través de la reconstrucción y reflexión de la práctica docente.

4.1.1. Primera sesión

En esta sesión estuvieron presentes los ocho profesores. Por ser esta sesión con la que se inició el Taller se acordó: la dinámica, el número de sesiones y los horarios en los que se desarrollaría el Taller.

Una semana antes se les había entregado el cuestionario inicial. Al inicio del Taller se centró la atención en las respuestas dadas al cuestionario inicial y se hicieron comentarios en forma oral de las respuestas expresadas.

Los comentarios al cuestionamiento, "*elabora una lista de las materias que impartes con base en el gusto que tienes por ellas. Inicia con la que más te guste y termina con la que menos te gusta*": cinco de ellos, colocaron la asignatura de matemáticas como la que más les gusta, dos de ellos la colocaron en el segundo lugar y uno en tercer lugar, después de Historia y Español.

La mayoría de ellos expresó que matemáticas es la asignatura que más les gusta, manifestaron la importancia que tiene el conocimiento matemático para la vida cotidiana. Algunos profesores expusieron la dificultad que tienen para la enseñanza y lo ejemplificaron con la resolución del libro de texto. A continuación se presenta un fragmento de este diálogo.

Marcela. No se respeta la metodología constructivista que proponen los libros de texto, (refiriéndose a sus compañeros profesores de grados anteriores), y en los grados superiores quinto y sexto grado, tenemos el problema para resolverlos, porque los alumnos no tienen los antecedentes de la forma de trabajo que proponen los libros, los conocimientos y la forma de trabajo en equipo.

Otro profesor refiriéndose a los libros de texto y a su actividad de preparar la clase expresó:

Javier. Cuando planeo la lección en casa, me tardo hasta dos horas en entender los cuestionamientos, encontrar las respuestas y realizar la planeación de la lección. Por la dificultad de los ejercicios.

Cuatro de los profesores se refirieron al poco tiempo que tienen para atender a todos los contenidos que presenta el programa.

Tres profesores argumentaron de la forma tradicional en que aprendieron matemáticas y el cambio que tienen que hacer para enseñarlas y hacerlas interesantes a sus alumnos, utilizando nuevas estrategias de enseñanza. La profesora Anabel expresó que un problema importante que ha observado es que los profesores dan por hecho que el alumno ha aprendido; argumentó que en ocasiones no se tienen elementos para reconocer el aprendizaje de los alumnos.

La mayoría expresó una forma de trabajo basada en la resolución de problemas, reconocen esta forma como el enfoque del Plan, programas y los libros de texto en la asignatura de matemáticas.

Sobre el cuestionamiento del uso de materiales de apoyo, la mayoría de ellos reconocieron carencias en su manejo y/o su limitación en el número de materiales que utilizan.

Los profesores fueron participativos, mostraron interés y honestidad en sus comentarios. Un ejemplo es, cuando expresaron, refiriéndose al conocimiento matemático que enseñan en su salón de clase.

Marcela. Si a nosotros se nos complica como adultos.
Liliana. Si estamos inseguros, transmitimos esa inseguridad.
Marcela. Los alumnos preguntan, refiriéndose al conocimiento "para qué sirve".
Paty. Yo he aprendido de los niños y en ocasiones no encuentro como ejemplificar un conocimiento.

Los profesores mostraron inseguridad en lo que hacen, no encuentran apoyo en el libro de texto, que se convierte en una dificultad extra, al no poder resolver con facilidad los problemas que plantea o no encontrar actividades previas para introducir los conocimientos.

A la pregunta: *"¿por qué crees que es importante enseñar matemáticas en la escuela primaria?"* La mayoría de los profesores expresaron la utilidad práctica para la vida y su importancia en la formación de los alumnos.

Isaías. Refuerza muchas áreas cognitivas y sobre todo ejercita el razonamiento.
Elsa. Son la base para entender el contexto social, donde nos desenvolvemos y sirven para tomar decisiones asertivas.
Paty. Son la base de los conocimientos más relevantes de la vida, ya que en todo hay matemáticas.

Liliana. Porque a los alumnos les ayuda a reflexionar, analizar y hasta a criticar.

Los pronunciamientos son parecidos a los que presentan los documentos oficiales como los programas y libro del maestro. El docente conoce de la importancia del conocimiento matemático como parte de la formación integral del alumno y como elemento indispensable para que el alumno pueda acceder a otro nivel académico, como lo es la secundaria, preparatoria y una carrera profesional.

A la pregunta *"¿qué te gusta de las matemáticas?"* Todos expresaron un gusto por la asignatura, a la solicitud de especificar algunos aspectos, dicen: "porque representa un reto y hace razonar de forma particular".

Paty. Me gusta descubrir las múltiples relaciones entre los números, la infinidad de combinaciones que se pueden realizar.

Marcela. Nos hacen razonar y reflexionar. El reto que representa aplicarla y enseñarla eficientemente.

Liliana. El reto que representa aplicar lo enseñado.

Subyace la idea de la complejidad del conocimiento matemático y la inquietud por, ayudar a sus alumnos a desarrollar este tipo de razonamiento, para que puedan resolver los problemas que presenta la vida.

A la pregunta *"¿Qué no te gusta de las matemáticas?"* Los profesores contestaron en razón de sus dificultades conceptuales o nivel del *conocimiento matemático para la enseñanza.*

Isaías. Cuando los problemas están planteados de manera confusa.

Elsa. Los problemas que implican fracciones.

Paty. Lo que me disgusta es no contar con los elementos suficientes para tener la manera de ejemplificar una idea o concepto.

Marcela. Cuando hay ejercicios que se me dificultan.

Liliana. En realidad no es que no me gusten, sino que me desespero a veces por no poder resolver algunos problemas (aclara que, "*no poder"* quiere decir, que se le dificulta).

Las respuestas presentaron dos posiciones: el desagrado a las matemáticas debido a las dificultades específicas de algún contenido o conocimiento, que se expresó diciendo "hay ejercicios que no tienen las instrucciones necesarias", o la imposibilidad para resolver algún tipo de problema y el desagrado en relación con el conocimiento pedagógico.

Otra pregunta solicitaba que expresaran las técnicas que utilizan para que sus estudiantes entiendan y apliquen el conocimiento matemático.

Aquí el "juego" se vio beneficiado, el trabajo en equipo y los materiales con que cuenta la escuela.

Isaías. Creo que hacemos uso de todos los recursos que tenemos a la mano.

Anabel. Utilizo materiales diversos, como palos, bancas, cajas, etc. Trato de llevar los contenidos, a la vida diaria.

Marcela. Manipulo algunos materiales: palitos, semillas, bloques, regletas, lotería, dominó, dados, perinola, canciones, etc., gráficos y abstractos.

Con el propósito de considerar los diferentes puntos de vista, la profesora Paty dijo.

Paty. Trato de seguir la secuencia que se sugiere en los materiales educativos, considerando la manipulación y observación de objetos, representación gráfica, la simbólica y que los alumnos expresen lo que hicieron al resolver un problema o ejercicio.

La secuencia de los contenidos en el libro de texto es una propuesta, el profesor puede realizar cambios en su presentación de acuerdo con el avance e interés de sus alumnos, la presentación de las lecciones es con una situación problemática, cercana a los alumnos, cuestión que se dificulta en la práctica.

La pregunta cinco solicitó *"¿cómo compruebas que tus estudiantes entienden lo que se trabaja en clase?" Da un ejemplo*. La mayoría de ellos dijo utilizar ejercicios escritos, para ser resueltos por equipos o individualmente y los exámenes. Dos respuestas representativas son:

Paty. Realizo ejercicios impresos o que los alumnos muestren con sus materiales la solución que encontraron, tratando de que practiquen lo trabajado en alguna situación en casa o escuela. Les pregunto ¿para qué nos sirve saber…?

Elsa. Pregunto sus procesos de resolución a problemas y ejercicios.

La solución del libro de texto o de un ejercicio escrito, es la forma principal que los profesores utilizan para evidenciar que sus alumnos han entendido. La calificación numérica está relacionada con la resolución de estos materiales.

Preguntar sobre las formas de solución y poder interpretar a partir de ellas el nivel de avance en el proceso de aprendizaje requiere de habilidades que no siempre están desarrolladas en los docentes.

Por último, se solicitó que escribieran el nombre de los materiales que utilizan en la clase de matemáticas para algunos contenidos.

Las respuestas fueron variadas, llegando a concluir que todo lo dispuesto en el salón, la escuela y la comunidad se puede tomar como material para ejemplificar un concepto o hacer objetiva una relación.

Isaías. Enciclomedia, cálculo mental y juego de geometría. La primera para todos los contenidos, el cálculo para las operaciones fundamentales y el juego de geometría para las figuras geométricas y líneas diversas.

Marcela. Utilizo la tabla de fracciones, el juego de geometría, ábaco, problemario, tangram, geoplano y billetitos. Los contenidos son: equivalencia de fracciones, trazo de polígonos, líneas, decenas, centenas, etc., resolución de problemas, ubicación espacial, concentración, formación de polígonos, área, perímetro y cantidades.

Los profesores reconocieron la importancia de la asignatura en su labor de enseñanza, mostraron sus inquietudes con respecto al aprendizaje que logran sus alumnos. Su gusto o disgusto por la asignatura está relacionado con el dominio del conocimiento. La resolución de ejercicios es una forma con la que comprueban el entendimiento de sus alumnos.

Se presenta el concentrado del cuestionario inicial *(véase Tabla 4.1).*

Tabla 4.1. Cuestionario Inicial.

	¿Por qué es importante enseñar matemáticas?	**¿Qué te gusta de las matemáticas?**	**¿Qué no te gusta de las matemáticas?**	**Técnicas que utilizas para que entiendan y apliquen.**	**¿Cómo compruebas que tus alumnos entienden?**	**Materiales que utilizas.**
Isaías.	Refuerza áreas cognitivas, ejercita el razonamiento.	Los retos y las diferentes formas de resolver.	Cuando los problemas están planteados de manera confusa.	Uso todos los recursos que tengo a la mano.	Cuando son capaces de resolver y analizar problemas	Enciclomedia, cálculo mental, suma, resta, multiplicación.
Lidia.	Están presentes en todo lo que realizamos.	Desarrollan la capacidad de razonamiento lógico.	Todo me gusta. En ocasiones me desespero con las dificultades.	Trabajo en equipo y juegos.	Pasándolos al pizarrón y resolviendo ejercicios en el cuaderno.	Regletas, hojas de colores y fracciones, equivalencias.
Elsa.	Para entender el contexto social y tomar decisiones.	Juegos de azar, probabilidad y geometría.	Problemas que implican fracciones.	El juego.	Preguntando sus procesos de solución.	Bloques lógicos, razonamiento lógico, ábacos y regletas.
Paty.	Son la base de los conocimientos más relevantes de la vida.	Descubrir las relaciones entre los números.	No poder ejemplificar una idea o concepto.	Trato de seguir la secuencia que sugieren los materiales educativos.	Ejercicios impresos, les pregunto, ¿para qué sirve?	Semillas, ábacos, y fichas de colores, recortables.
Javier.	Es básica, se utiliza en la vida cotidiana.	Aprender cosas nuevas.	Los ejercicios que no tienen las instrucciones necesarias.	Trato que sea a través del constructivismo.	Los ejercicios de clase y calificar la tarea.	Dado grande, juego geométrico y ordenar fracciones.
Anabel.	Son la base para todo.	Del contenido me gustan todos los temas.	Conversión de medidas de capacidad.	Material didáctico que pueden manipular.	Ejercicios en clase, tareas, exámenes y participaciones.	Cartulina, plastilina, dados, fracciones y probabilidad.
Marcela.	Están en todas partes.	Nos hace razonar y reflexionar.	Los ejercicios que se dificultan.	En equipo, objetivo, gráfico y abstracto.	Cuando logro que les guste.	Tabla de fracciones, problemario y tangram.
Liliana.	Enseñar el nivel práctico de las matemáticas.	El reto que representa aplicar lo enseñado.	Cuando hay problemas que no puedo resolver.	Manipulando materiales.	Ejercicios individuales con materiales o escritos.	Bloques, regletas, lotería de fracciones y tablas.

Los profesores reconocen la importancia del conocimiento matemático, le otorgan tiempo y esfuerzo, ven en su enseñanza problemas que en principio no relacionan con su conocimiento personal de la asignatura.

Para la segunda sesión se dejó la actividad: e*scribir una lista de conceptos y habilidades de la aritmética que consideren más importantes en el curso.*

4.1.2. Segunda sesión

Asistieron seis profesores a la sesión. Los motivos de la ausencia de dos profesores fueron: la realización de una prueba de conocimientos a los alumnos de sexto grado denominada “Olimpiada del conocimiento” y el concurso de Poesía “Benito Juárez” en los que participan principalmente los grados de quinto y sexto, además de la entrega de evaluaciones del tercer bimestre.

El propósito de la sesión fue distinguir los conceptos y habilidades aritméticas a desarrollar con los alumnos.

Al respecto se realizaron los siguientes comentarios:

Anabel. No sé si en conceptos aritméticos se deba colocar el cálculo del perímetro, área y volumen.

Isaías. Esos conceptos corresponden a la geometría.

Liliana. Yo puse el cálculo de probabilidad y creo que pertenecen a otro eje.

Los profesores relacionan la resolución de operaciones con la aritmética, así que el cálculo de perímetros, áreas y el cálculo de probabilidades los ubican como conceptos y habilidades aritméticas. El conocimiento y comprensión del algoritmo de las operaciones aritméticas es un concepto de la aritmética, pero cuando éstas sirven como herramienta para calcular áreas o probabilidades entonces debemos considerar como concepto a desarrollar el geométrico y probabilístico respectivamente.

Los profesores dieron lectura a los listados que realizaron en forma individual:

Liliana. Conceptos: números naturales, sistema numérico, números primos, decimales, fracciones, relación de orden, operaciones y propiedades. Habilidades: cálculo mental, reconocer y planear.

Anabel. Conceptos: área, volumen, medida, perímetro, conversiones y operaciones básicas. Habilidades: Ubicación espacial y cálculo mental.

Posteriormente se organizaron en dos equipos de tres, con la finalidad de hacer una lista de conceptos y habilidades, jerarquizados por la importancia que tienen en el aprendizaje de conocimientos matemáticos.

En los equipos los profesores argumentaron y comentaron sus posturas, existió una disposición al consenso, las posturas que prevalecieron al interior de los equipos fueron: en el equipo *A* la de la profesora Paty y en el equipo *B* la de la profesora Lidia. Las dos con formación normalista y estudios de Pedagogía.

Los equipos expresaron:

Equipo "*A": En* conceptos colocamos las operaciones básicas, resolución de problemas, no consideramos los conceptos de geometría; creemos que no entran en la aritmética. En habilidades pusimos: estimar, predecir, contar, recolectar, clasificar, diferenciar, calcular, relacionar, reconocer y resolver.

Equipo "B". En conceptos: operaciones básicas, unidades de medida, fracción, figuras geométricas, plano cartesiano, lectura de símbolos, porcentaje y proporción. Habilidades: observar, razonar y reconocer.

Se observa una diferencia en la enunciación de habilidades y conceptos entre los dos equipos. En la argumentación los profesores expresaron:

Paty. Considero que primero deben estar los números naturales.

Liliana. Con respecto a las habilidades, es una cuestión recurrente, que debe de tener el alumno, como lo que se da en preescolar, porque ahí ya se señala: clasificar, comparar, probablemente como conocimientos previos que debe tener el alumno para llegar a formar el concepto de número, pero como estamos en la primaria no manejamos esas habilidades tan explícitamente.

Anabel. Estos son sólo conceptos de quinto y sexto grado, no son de toda la primaria, si viéramos de toda la primaria nuestra lista crecería mucho.

Paty. Creo que un concepto de todos los grados son los números, si revisamos los libros vemos que siempre se ven primero porque sirven de base para las operaciones que se ven con diferente dificultad.

Liliana. En un curso nos dijeron que solamente había adición y multiplicación porque la sustracción y la división son operaciones inversas.

Paty. Pero si las tenemos que poner porque tienen su algoritmo.

La resolución de problemas causó división al ubicarlo como concepto o habilidad, se consideró como habilidad porque el alumno pone en práctica sus conocimientos y como concepto porque es la forma en que se enseña y como se acerca al alumno al conocimiento.

Posteriormente los dos equipos argumentaron para presentar acuerdos únicos de todo el grupo de profesores participantes, quedando de la siguiente manera, *(véase Tabla 4.2).*

Tabla 4.2. Conceptos y Habilidades a desarrollar en los alumnos

Conceptos	**Habilidades**
• Números naturales.	• Observar.
• Sistemas de numeración.	• Estimar.
• Operaciones básicas.	• Identificar.
• Resolución de problemas.	• Reconocer.
• Fracciones.	• Calcular.
• Unidades de medición.	• Clasificar.
• Conversiones.	• Ubicar.
• Porcentajes.	• Comparar.
• Razón y proporción.	• Razonar.
	• Interpretar.
	• Discriminar.

En la *Tabla 4.2 s*e presentan los conceptos y habilidades aritméticas en el orden dado por los profesores. A pesar de que la consigna fue jerarquizar de acuerdo con la importancia de los conceptos y habilidades; los profesores dieron un orden siguiendo una secuencia didáctica, argumentaron que ésta es la forma en la que se enseña a los niños y por esta razón las fracciones ocupan ese lugar en la tabla; pero también esto resolvió el problema de pensar en una importancia matemática, porque entender otros conceptos requiere de conocimientos previos y la exigencia del desarrollo de un pensamiento abstracto; esto dicho por los docentes.

El listado final de conceptos y habilidades muestra principalmente dos situaciones: a) el trabajo en equipo; primero de tres integrantes y después de los seis profesores, enriqueció el trabajo individual, ellos se percataron y así lo manifestaron y

b) los acuerdos se asumieron por todos los integrantes, la participación de la profesora Paty ayudó a centrar la discusión y avanzar en el propósito de la tarea. Al reflexionar sobre el conocimiento matemático y la relación que existe entre los conceptos, los profesores evitan el problema matemático y recurren a lo conocido por ellos, como lo es, el plan de estudios y principalmente priorizan el proceso de enseñanza.

Para finalizar, se les entregó un trabajo para la siguiente sesión, que consistió en escribir cuáles son las ideas equivocadas y los conceptos erróneos más frecuentes de los estudiantes en la clase de matemáticas.

4.1.3. Tercera sesión

Se presentaron los ocho profesores, inició con la lectura y comentario de la tarea: *escribir una lista de las ideas equivocadas y los conceptos erróneos de los estudiantes en la clase de matemáticas.* Los escritos se presentan en la *Tabla 4.3.*

Tabla 4.3. Ideas equivocadas y conceptos erróneos

Profesor	Comentario
Lidia	Confunden perímetro con áreas, fallas al ordenar cantidades (valor posicional).
Isaías	Las conversiones, las fórmulas para sacar áreas, las olvidan.
Elsa.	Sustracción; procedimiento al pedir prestado, fracciones, reparto (con diversos materiales), cantidades (valor relativo), el centímetro cuadrado con el centímetro cúbico.
Javier.	Valor posicional, escritura de números con decimales, adición: colocación de enteros y decimales, en la resta colocan primero el número menor y después el mayor, multiplicación; realizan equivocadamente la suma de los números, división error en el proceso.
Anabel.	¿Cuál es el área de la base? (en cuerpos geométricos), conversiones, ¿entre o por diez, cien y mil?, porcentaje, ¿cuándo es con resta o cuándo sólo porcentaje? división y multiplicación de fracciones, ¿cuándo es cruzado y cuándo no lo es?
Profesor	Comentario
Liliana.	Fracciones; confunden un medio con uno y medio, el punto decimal, medidas como centímetro, milímetro y decímetro y por consiguiente kilómetro cúbico, kilómetro cuadrado.
Paty.	Problemas con la sustracción, cuando el numerador es menor que el denominador, orden de las fracciones; para ellos es mayor un noveno que un cuarto, cuando se trabaja antecedente y consecuente de un número por ejemplo: el sucesor de 1999 es frecuente que escriban 19910 o 1910, identificar la altura en los triángulos isósceles y escalenos.

Los profesores identificaron ideas equivocadas y conceptos erróneos fundamentales para la comprensión de la matemática, algunos de ellos son procedimentales como en el caso del algoritmo de las operaciones, que reflejan deficiencias en la comprensión de los principios del sistema de numeración, pero otros son confusiones en la comprensión del lenguaje (confunden un medio con uno y medio).

El comentario del profesor Javier con respecto al orden de los números en la sustracción, nos remite a una acción inmediata del alumno al percatarse que se trata de restar, o a la falta de comprensión del profesor de que una situación problemática puede presentar este caso y ser aritméticamente válida.

Se comentó que estas ideas equivocadas y los conceptos erróneos se forman en los alumnos principalmente derivados de procesos de enseñanza y por la actividad del alumno en su propio aprendizaje. Los profesores expresaron:

Anabel. Algunos conceptos son difíciles y el alumno no los interpreta correctamente; nosotros no nos damos cuenta de ello y se deja en el pensamiento del alumno, pasando a ser un error con el que vive.

Isaías. Lo peor, es que cuando una idea equivocada funciona para determinadas situaciones, cómo qué se reafirma en el alumno, porque se ve favorecida por su veracidad limitada.

El profesor no pudo dar un ejemplo de este tipo de ideas equivocadas. Lo expresado por la profesora Anabel refleja la visión del profesor como actor principal del acto educativo y la necesidad de deducir lo comprendido por el alumno.

Se agregaron a los comentarios escritos de los profesores tres hojas como la que se muestra a continuación, *(véase Figura 4.1).*

Nombre del profesor (a): ____

Después de leer el trabajo de tu compañero (a) escribe uno de los conceptos erróneos o ideas equivocadas que te parezcan interesantes.

____

____

____

____

Anota las causas probables	Sugiere algunas alternativas de solución.

Figura 4.1. Hoja de trabajo de conceptos erróneo o ideas equivocadas.

Cada profesor tenía un juego de cuatro hojas; una con la lista de las ideas equivocadas y los conceptos erróneos de sus alumnos y tres como la descrita anteriormente. Dispuestos, formando una circunferencia, cada profesor pasó su juego de hojas al compañero que estaba a su derecha, para que anotara causas probables y alternativas de solución de una de las ideas equivocadas o conceptos erróneos. Al terminar todos pasaban el juego de hojas al compañero de la derecha nuevamente, para realizar la misma acción, así hasta completar tres ocasiones, después las hojas regresaron al profesor inicial, quién leyó lo escrito por sus compañeros, posteriormente se realizó una lectura general para que todos participaran con sus comentarios y sugerencias.

Se presenta el resultado de tres profesores en la siguiente tabla, *(véase Tabla 4.3).*

Tabla 4.3. Conceptos erróneos o ideas equivocadas.

Liliana

Concepto erróneo o ideas equivocada	Causas probables	Alternativas de solución
Punto decimal.	No ubican espacios, no han aprendido los valores posicionales, confusión al manejar diferentes formas de escritura, como son el uso de comillas para separar clases y periodos.	Apoyarse en el sistema métrico decimal (metro), utilizar y ejemplificar con cantidades pequeñas con punto decimal e ir incrementando la complejidad.
La confusión de un medio con un entero un medio.	El alumno no sabe que son enteros y fracciones, observar como las escribe el profesor en el pizarrón.	Utilizar diferentes colores cuando se escriban fracciones mixtas, mostrarles modelos físicos de un entero y un medio, pueden ser manzanas, naranjas, o alguna otra fruta, chocolates, etc.
Antecesor y sucesor.	En ocasiones lo que desconocen son los términos de antecesor y sucesor.	Utilizar filas de objetos, que señalen que va después y realizar series numéricas.

Anabel

Concepto erróneo o ideas equivocada	Causas probables	Alternativas de solución
¿Cuál es el área de la base de un cuerpo geométrico?	No ubican la base del cuerpo.	Desarmar la figura, reconocer la base, una vez identificada verificar el proceso para calcular su área y realizar la identificación de la base en cajas que los niños puedan llevar al salón de clase.
Porcentaje	El alumno no ha comprendido la obtención de porcentaje como un descuento, nuevo precio o la aplicación a una cantidad.	Plantear situaciones reales, hacer uso de porcentajes sencillos, primero la comprensión y luego la ejercitación.
Confusión en la división y multiplicación abreviada por diez, cien y mil.	No hay comprensión de la operación como adición abreviada, verificar la multiplicación por cero.	Hacer repartos con fichas que representen cantidades, promover la ejercitación de la multiplicación, comparar los resultados y analizarlos para llegar a una regla.

Javier

Concepto erróneo o ideas equivocada	Causas probables	Alternativas de solución
Colocación del cero (valor posicional).	El alumno no entendió el concepto de decena, centena, unidad de millar, etc.	Retomar el tema del sistema de numeración para objetivizar la formación de clases y periodos, utilizar los bloques multibase, utilizar muchos ejercicios y preguntar a los alumnos en la lectura de cantidades.
Escritura de decimales.	No interpretan a los decimales como una representación de fracciones del entero, no relacionan a la fracción con una representación decimal.	Realizar ejercicios donde se observe que 1/10 es la décima parte del entero y se escribe después del punto decimal y así generalizar a un centésimo y a un milésimo.
Error en el proceso de la división	Falta reforzar lo que es el reparto, el propósito de la operación y el dominio de las otras operaciones.	Hacer repartos en juegos que agraden a los niños, reforzar el algoritmo de las operaciones enfatizando el de la división.

El contenido de fracciones y decimales presenta problemas de comprensión, esto dicho por los profesores, al realizar esta actividad podemos observar las ventajas del trabajo en equipo, se aprovechan los conocimientos y la experiencia de los compañeros.

El tiempo de la sesión terminó y quedaron sin leer cuatro trabajos. Por lo que esto se realizará en la siguiente sesión. Se les dejó para resolver dos ejercicios de problemas con fracciones y una hoja en donde se les solicitó que anoten tres conceptos o ideas aritméticas que les parezcan complejas de quinto y sexto grado.

4.1.4. Cuarta sesión

A esta sesión asistieron siete profesores, se procedió a continuar con el trabajo de las ideas equivocadas y los conceptos erróneos en los alumnos y comentar los tres conceptos o ideas aritméticas que les parecieron más complejas de quinto y sexto grado. Se presentan las cuatro tablas restantes de conceptos erróneos o ideas equivocadas, (*véase Tabla 4.4*).

Tabla 4.4. Conceptos erróneos o ideas equivocadas (continuación de *Tabla 4.3).*

Elsa

Concepto erróneo o ideas equivocada	Causas probables	Alternativas de solución
Confusión entre centímetro cuadrado y centímetro cúbico.	No está claro el concepto de área y volumen, es necesario que el alumno reflexione realizando la representación del centímetro cuadrado y del centímetro cúbico.	Ejercitar áreas y volúmenes, construcción del centímetro cuadrado y del centímetro cúbico, medición de algunos objetos utilizando estas unidades haciendo énfasis en la nomenclatura.
Fracciones (reparto con diversos materiales).	A los alumnos no se les ha ejemplificado las fracciones de manera práctica, para que entiendan el concepto, no han realizado actividades que tengan como resultado la obtención de fracciones y representarlas matemáticamente.	Introducir al alumno a las fracciones a partir de material concreto, ejercicios cotidianos, prácticos, con material apropiado al alcance y de interés para ellos.
Procedimiento de la sustracción (pedir prestado).	No tienen el concepto de unidad y decena, necesitan ejercitar el cálculo mental y realizar mecanizaciones en donde respeten el lugar de los diferentes órdenes.	Reiterar la notación desarrollada y realizar descomposiciones para hacer la sustracción.

Lidia

Concepto erróneo o ideas equivocada	Causas probables	Alternativas de solución
Confunden perímetro con área.	Confunden el contorno con el área, no se enseñó correctamente los conceptos, faltó reflexionar y practicar.	Utilizar el geoplano, dibujar un polígono en el patio y hacerlos caminar por el contorno y que reconozcan la diferencia entre perímetro y área, trazar y recortar figuras en papel y pasar sus dedos por el contorno de la figura, usar cuerdas para formar figuras en equipos y ejemplificar con situaciones cercanas a los alumnos.

Isaías

Concepto erróneo o ideas equivocada	Causas probables	Alternativas de solución
Las fórmulas para sacar áreas.	No entiende la fórmula, no identifican los elementos que constituyen una fórmula y su relación operacionalmente, no se han hecho ejercicios de memorización de las fórmulas y faltan ejercicios.	Que se explique la fórmula de acuerdo con la figura, realizando sustituciones que se puedan ilustrar con las partes de la figura, trabajar con un memorama; figuras y fórmulas, resolviendo ejercicios, explicarles de donde sale cada dato y por qué se obtiene de ahí y la importancia de seguir un orden en su aplicación.
Conversiones.	El alumno no ha entendido el procedimiento de las conversiones, es difícil por la falta de práctica cotidiana.	Explicar y verificar la comprensión de parte del alumno, de las diferentes unidades de medida, resaltando las relaciones que existen entre ellas, mostrar los criterios de cuándo se divide y cuándo se multiplica por 10, 100 y 1000 y realizar conversiones con material didáctico.

Paty

Concepto erróneo o ideas equivocada	Causas probables	Alternativas de solución
Al comparar fracciones como; un noveno y un cuarto, dan como mayor a un noveno.	No se les ha explicado a los alumnos las fracciones con material concreto y en forma gráfica, no han logrado crear el concepto de denominador, el profesor no ha explicado que el denominador es el número que indica en cuantas partes se divide el entero y no se ha hecho una diferencia entre fracciones y números naturales.	Iniciar desde lo básico con círculos divididos en las diferentes fracciones y con ellas hacer comparaciones para que el alumno vaya deduciendo esta clase de ejercicios, ilustrar cada fracción con un dibujo, que los mismos alumnos elaboren y obtengan la fracción solicitada, ir construyendo el significado del denominador.

Los profesores comentaron que los alumnos tienen conceptos erróneos e ideas equivocadas por lo complicado de la construcción del conocimiento, el profesor debe de estar atento a como los alumnos interactúan con el conocimiento, para poder corregir interpretaciones erróneas o falsas ideas que se puedan formar; para ello, debe crear ambientes propicios de trabajo en los que la duda y la expresión del razonamiento de los alumnos sea la fuente de la actividad de la clase.

Tener una planeación en la que se tenga presente el interés de los alumnos y que las formas de aprendizaje sean consideradas para asegurar la comprensión y obtener mejores resultados.

Evitar los conceptos erróneos y las ideas equivocadas en los alumnos forma parte de un *conocimiento matemático para la enseñanza*.

Con esta actividad los profesores se acercaron a estos conceptos e ideas de los alumnos y enfocaron su solución determinando su origen en un aspecto conceptual o procedimental. Para la corrección de la formación de los conceptos erróneos o ideas equivocadas los profesores utilizan la re-explicación; que consiste en volver a explicar cualquier parte del concepto o procedimiento. Pocos utilizaron el conflicto cognitivo, que consiste en presentar al alumno una situación donde pueda encontrar una contradicción fundamental con su respuesta original, revalorando su propuesta.

A continuación, los profesores presentaron sus trabajos que consistieron en escribir tres conceptos o ideas aritméticas que a su parecer son complejas. La *Tabla 4.5* presenta el concentrado del resultado de esta actividad.

Tabla 4.5. Conceptos e ideas complejas.

Profesor	**Concepto e idea compleja**
Paty	Fracciones, decimales y áreas y volúmenes.
Anabel	Múltiplos, submúltiplos y diagramas de árbol.
Liliana	Resolución de problemas, operaciones básicas y notación desarrollada.
Elsa	Volumen, fracciones y conversiones.
Isaías	Fracciones, operaciones con punto decimal y conversiones.
Javier	Fracciones, números decimales y problemas.
Lidia	Operaciones con fracciones, conversiones y volumen.

Los profesores comentaron la relación que existe entre los conceptos e ideas complejas y la formación de ideas erróneas, además de la corresponsabilidad que debe de existir entre los profesores de primero a sexto grado, en el que cada uno debe de aportar con su buena enseñanza a la formación de personas competentes matemáticamente.

Estos contenidos muestran que los programas de quinto y sexto grado, tienen una dificultad particular. Al respecto se les comentó que parte de nuestro trabajo es detectar cuáles son las deficiencias de los alumnos al inicio del ciclo escolar en la asignatura de matemáticas, a partir de esta detección, realizamos una planeación que satisfaga las necesidades de conocimiento de cada uno de nuestros alumnos.

Es importante conocer las conexiones entre los diferentes conceptos y cómo la comprensión de un concepto fortalece la construcción de conceptos nuevos. Realizar una secuencia didáctica, a partir de los conocimientos previos constituye una actividad fundamental del profesor, que está determinada por su conocimiento matemático para la enseñanza.

Al respecto la profesora Elsa comentó que el día de hoy estuvo trabajando dos horas en la lección cuarenta y cuatro del libro de sexto grado de matemáticas que se refiere a las diagonales de las figuras (clasificación de cuadriláteros).

Elsa. Los alumnos tienen ideas erróneas con las que han convivido desde segundo, tercero y hasta ahora, cuando llegan a sexto grado es cuando tenemos los problemas.

Lidia. Ya cuando llegan a sexto grado, quitarles esas ideas cuesta mucho trabajo y el programa hay que retomarlo.

Es necesario conocer la relación entre los contenidos del Plan de educación primaria y conectarlos en forma lógica. La formación de un concepto está determinada por la relación que tienen con otros cercanos a él, que le sirven de referencia, cuando un alumno tiene un concepto erróneo es probable que tenga problemas para la adquisición correcta de nuevos conceptos. Identificar una idea equivocada en los alumnos obliga a trabajar en consecuencia.

Paty. Hay conocimientos que no les quedaron claros.

Conductor. Pero ¿por qué no quedaron claros?

Elsa. Porque los profesores de tercero y cuarto dieron por entendido el conocimiento y el de quinto lo obvio.

Los profesores de los últimos grados de la educación primaria son los que mejor perciben las dificultades que tienen los alumnos con el dominio de conceptos complejos, esto se debe a que la enseñanza de los conceptos sigue un espiral ascendente, y es en estos grados cuando las conexiones y la interrelación entre estos aprendizajes se hacen necesarias para la resolución de problemas, que presentan un mayor grado de dificultad.

Una dificultad que los profesores observan para poder resolver problemas de construcción de conceptos que presentan los alumnos es el tiempo; para cubrir un programa y cumplir con el avance en el programa, que se les solicitan para la participación en el examen de la Olimpiada del conocimiento.

Con respecto a la tarea de los conceptos e ideas complejas, se les preguntó a los profesores por qué le damos el calificativo de complejas, algunas respuestas son:

- Porque se me hacen difíciles de entender.
- Se me dificultan, no entiendo el por qué y entonces cómo les enseño a ellos.
- Yo lo entendí de manera mecánica, entonces entro en un proceso de no saber por qué, y entonces ¿cómo les enseño? Ese es un punto negativo.
- Es difícil para mí.
- Por la dificultad para enseñarla a los alumnos.
- A todos nosotros nos hace falta conocimiento del por qué, en determinadas cosas de matemáticas.

Al inicio del ciclo escolar los profesores realizan un examen diagnóstico cuya utilidad ha dejado de ser pedagógica para deformarse en administrativa, tener al programa de estudio como directriz del trabajo en el aula representa para el profesor la respuesta a presiones administrativas e institucionales que tienen que ver con evaluaciones internas y externas. Si se reconocen los conceptos importantes y su complejidad por grado, puede ser el inicio de cambiar formas de planeación y organización, que involucren una responsabilidad con los alumnos y con los compañeros profesores.

A continuación se presenta la solución de los profesores a dos problemas que se habían propuesto en la sesión anterior para comentar en ésta. Tres soluciones significativas.

Lidia. La suma de fracciones con equivalencias y no sobra nada, lo represente con círculos

(véase Figura 4.2). La profesora utiliza el modelo del pastel circular para representar el entero, realiza la equivalencia a sextos, la descripción del procedimiento es limitado, "suma de fracciones con equivalencias".

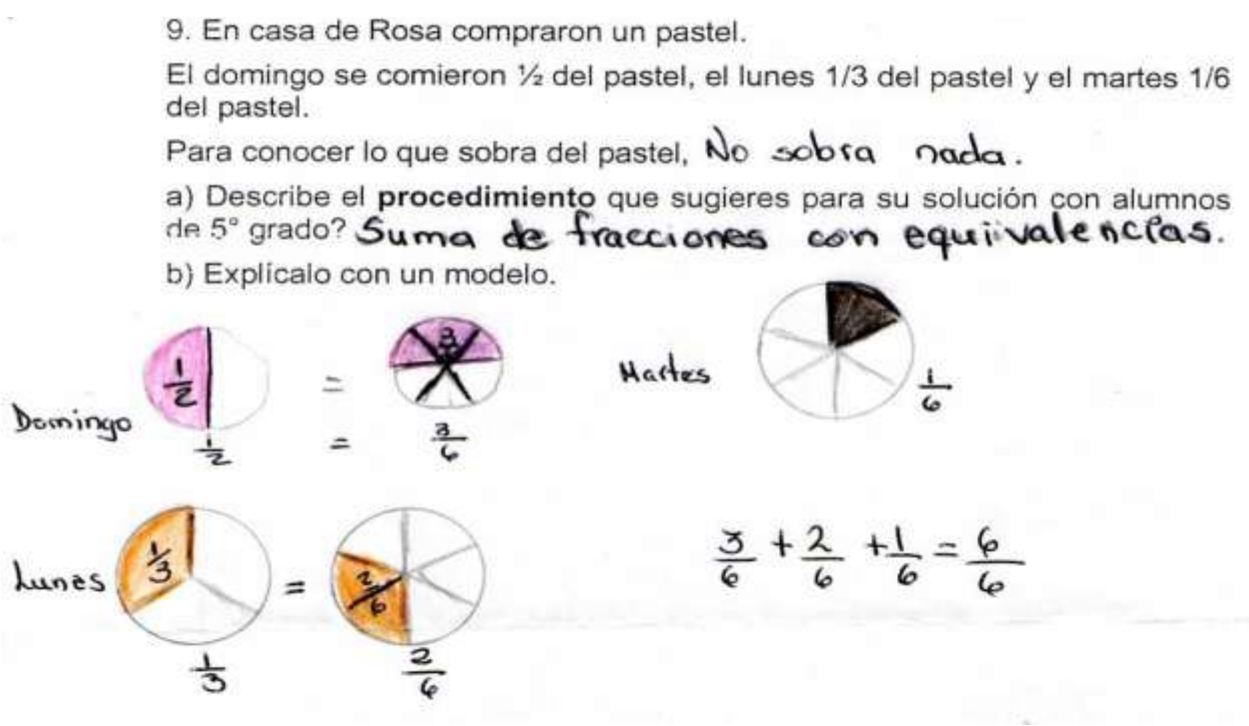


Figura 4.2. Representación gráfica de la solución realizada por la profesora Lidia.

Paty. Use las regletas de fracciones.

Isaías. Represente el pastel con un círculo dividido en sextos porque es la última fracción. El domingo se representa de un color, es un medio que equivale a tres sextos, el lunes se comió un tercio que equivale a dos sextos, de otro color, y el martes un sexto de otro color, y se le va descontando cada día.

El segundo problema: *El siguiente domingo, Rosa compró otro pastel. El día domingo se comieron ½ del pastel, el lunes 1/3 del pastel restante y el martes 1/3 parte de lo que sobro del lunes.* Se presenta la solución que aportó la profesora Anabel *(véase Figura 4.3).*

Anabel. Bueno primero represento el pastel completo y un medio del domingo, el lunes nos comemos una tercera parte de lo que sobra y entonces si dividimos nos damos cuenta de que la tercera parte de todo el pastel completo es entonces dos sextos que es igual a un tercio, el martes nos comemos un tercio de pastel que era lo que queda del pastel. A mí no me sobró nada en este ejercicio.

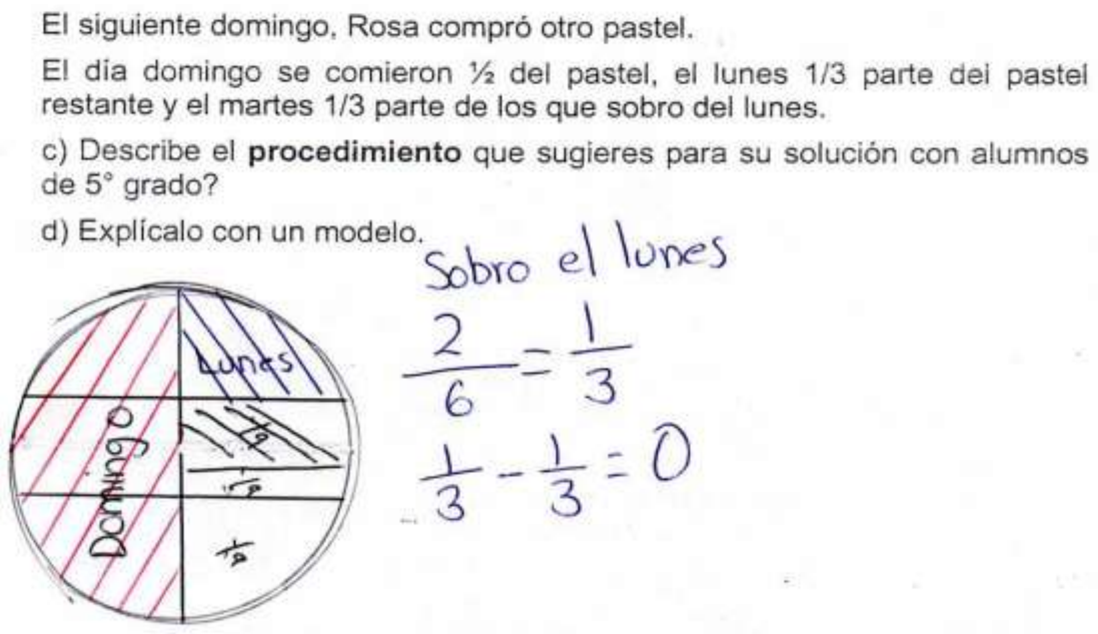
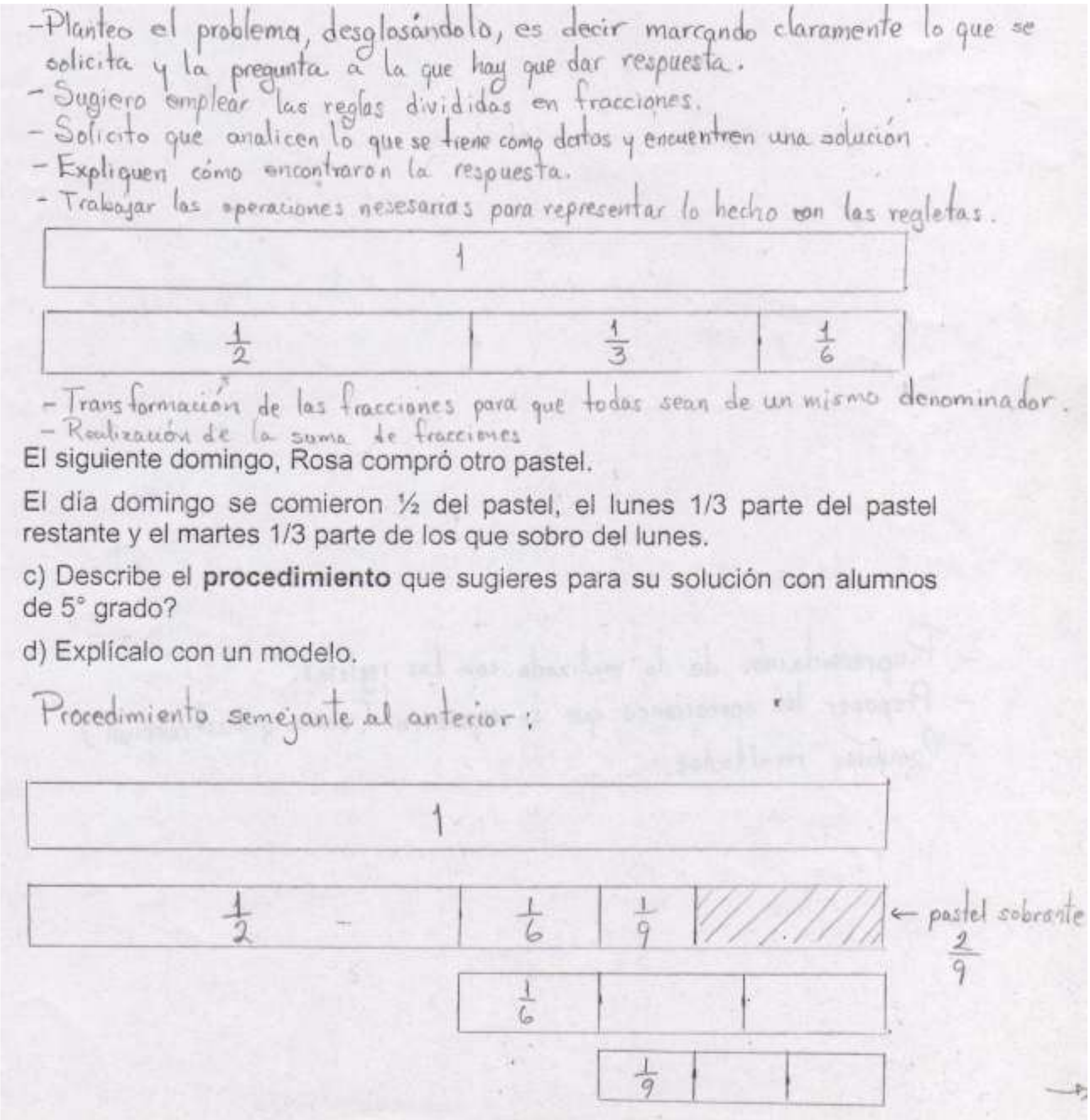


Figura 4.3. Representación gráfica de la solución realizada por la profesora Anabel.

La explicación de la profesora Anabel inicia dividiendo en forma correcta la mitad del domingo, divide la mitad que sobra en tres partes que no son equitativas, y entonces se percata que lo que sobra son dos sextos, ayudada por la forma en que dividió el círculo, estos dos sextos los relaciona con el tercio del martes, sin considerar que se refiere a lo que sobra del lunes y concluye que no le sobra fracción alguna. Ella aceptó no haber entendido el problema y no saber cómo representarlo, pero la explicación de sus compañeros le ayudó a comprender el texto del problema y su solución.

Una explicación que ayudó a la profesora Anabel fue la de la profesora Paty, que utilizó regletas, que es un material que conoce y con el cual trabaja con sus alumnos, se presentan las respuestas a los dos problemas *(véase Figura 4.4).*



-Planteo el problema, desglosándolo, es decir marcando claramente lo que se solicita y la pregunta a la que hay que dar respuesta.
- Sugiero emplear las reglas divididas en fracciones.
- Solicito que analicen lo que se tiene como datos y encuentren una solución
- Expliquen cómo encontraron la respuesta.
- Trabajar las operaciones nesesarias para representar lo hecho con las regletas.

- Transformación de las fracciones para que todas sean de un mismo denominador.
- Realización de la suma de fracciones

El siguiente domingo, Rosa compró otro pastel.

El día domingo se comieron ½ del pastel, el lunes 1/3 parte del pastel restante y el martes 1/3 parte de los que sobro del lunes.

c) Describe el **procedimiento** que sugieres para su solución con alumnos de 5° grado?

d) Explícalo con un modelo.

Procedimiento semejante al anterior:

Figura 4.4. Representación gráfica de la solución realizada por la profesora Paty.

En la solución de estos problemas observamos las diferentes representaciones que tienen los profesores para comunicar ideas matemáticas, y cómo de la elección de la representación, a partir de las características del problema ésta se vuelve eficaz para dicho propósito.

Los profesores ante sus alumnos eligen formas de representación, en las que consideran los conocimientos previos y los conocimientos a desarrollar.

La diversidad de representaciones que poseen forma parte de un *conocimiento matemático para la enseñanza* que se pueden incrementar con el diálogo y la reflexión compartida entre compañeros profesores, y así, lograr mejores resultados al resolver un problema de enseñanza.

Para la siguiente lección se dejó una hoja de trabajo en donde deberán escribir los conceptos involucrados en preguntas sobre fracciones para alumnos de quinto y sexto grado.

4.1.5. Quinta sesión

La sesión se inició con la revisión del ejercicio propuesto en la sesión anterior *(véase Figura 4.5)* se comentó que los ejercicios que se proponen en el salón de clase tienen la intensión de valorar los conocimientos del alumno, para ello se distingue el contenido matemático del ejercicio, que está acorde con el conocimiento que tiene el alumno y el conocimiento al que se quiere que acceda, esto último mediante una serie de actividades e interacciones.

Iniciamos con la pregunta uno: "*Encierra en un círculo las figuras que están dividas en cuartos"*.

Los profesores resolvieron el ejercicio y observaron que aun cuando algunas figuras están divididas en cuatro partes, estas no son equitativas, por lo que no se pueden considerar como cuartos, en este aspecto valoran la intención del ejercicio.

Pregunta dos: "*Escribe la fracción que representa la parte sombreada en cada una de las siguientes figuras".*

Conductor. ¿Qué concepto se quiere revisar con este ejercicio?

Isaías. Queremos significar el numerador y el denominador, ejemplificar lo que representa la expresión un tercio; una de tres partes en que está dividido el entero.

Javier. Es como ver si tiene el concepto de numerador y denominador.

La representación numérica de una fracción, se limita a poder definir el numerador y el denominador en una situación de partición.

Pregunta tres: "*Localiza dos enteros un cuarto en la recta numérica".*

Los profesores argumentan que este ejercicio tiene la intención de saber si el alumno puede localizar el segmento que corresponde a la fracción en la recta, que puede servir para verificar entre dos fracciones cual es mayor. No expresan como utilidad significativa el poder representar fracciones equivalentes, al reconocer el mismo punto sobre la recta o intuir la propiedad de densidad de los números racionales.

Pregunta cuatro: "*Este es un cuarto del entero, dibuja el entero".*
Este es un tipo de ejercicio poco frecuente en el salón de clases.

Lidia. Quiere decir que faltan tres cuartos.
Anabel. Si dos cuadros son un cuarto y si faltan tres cuartos entonces hay que dibujar seis cuadros.
Y que se resuelve, pero falta identificar que se propone el ejercicio, aun cuando el desarrollo de la reversibilidad como habilidad matemática está presente en el plan de estudios.

Pregunta cinco: "*Estos son dos tercios de un conjunto de canicas. Dibuja el conjunto de canicas".*
Liliana. Nos damos cuenta de que cada tercio tiene tres, falta un tercio, faltan tres canicas.
Conductor. ¿Qué conceptos están implicados?
Paty. Complementación, y representaciones diferentes del entero.
Lourdes. Yo lo hice con mis alumnos, nos ayudó que un niño llevaba canicas y pudimos realizar varios ejercicios, como: un entero tiene quince canicas ¿cuántas canicas son un tercio, un quinto? Y así empecé con ellos, a que completaran el entero, después de realizar ejercicios, les puse el de la hoja, no tuvieron problemas, casi todos lo lograron.

Los profesores aplicaron el ejercicio a sus alumnos y alguno de ellos tuvo que realizar ejercicios previos valiéndose de material concreto, para obtener mejores resultados, ellos consideran el contenido de fracciones importante; para resolver problemas cotidianos y para la futura vida académica de los alumnos.

La realización del ejercicio por los alumnos de algunos profesores, no era parte del trabajo que éstos deberían de haber realizado, pero sirvió para reflexionar, en cómo nos puede ayudar una evaluación para reconocer los conceptos adquiridos y los aprendizajes pendientes, en los que hace falta retomar actividades propicias y formas de representación para mejorar los aprendizajes.

Las *Figuras 4.5 y 4.6,* muestran el ejercicio resuelto por dos profesores en el que se les solicitó escribir los conceptos que se involucran. Como se puede observar la diferencia es notoria, el segundo profesor es capaz de determinar mayor número de contenidos en cada uno de los ejercicios, esto muestra un conocimiento matemático y una capacidad para relacionar diferentes contenidos.

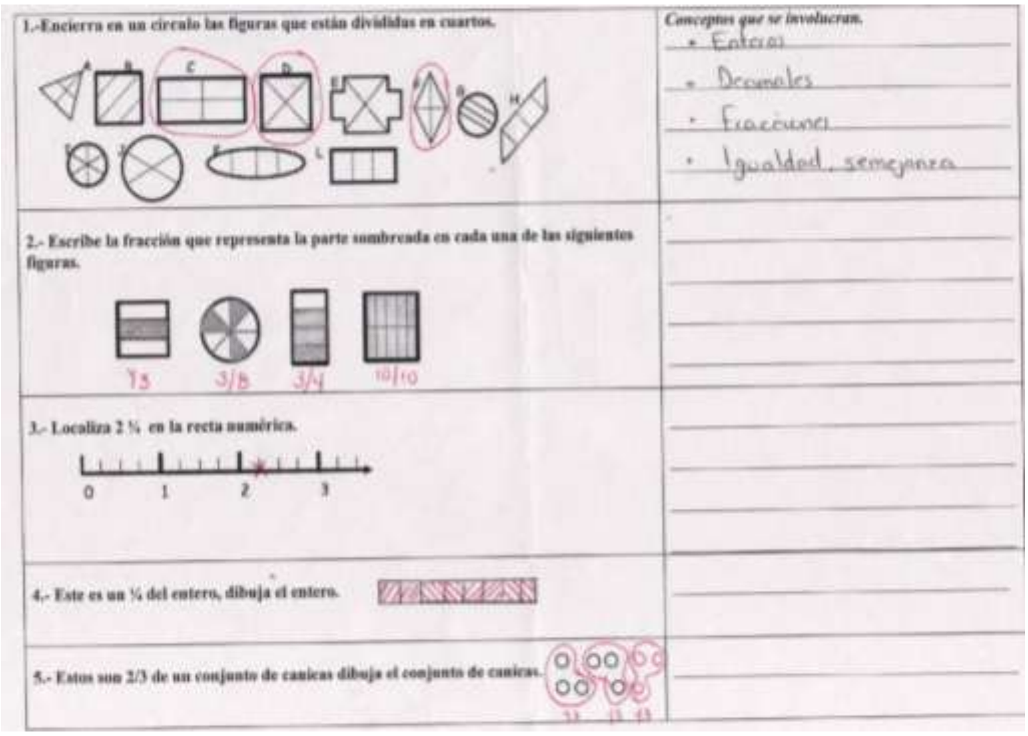


Figura 4.5. Ejercicio resuelto por la profesora Lidia.

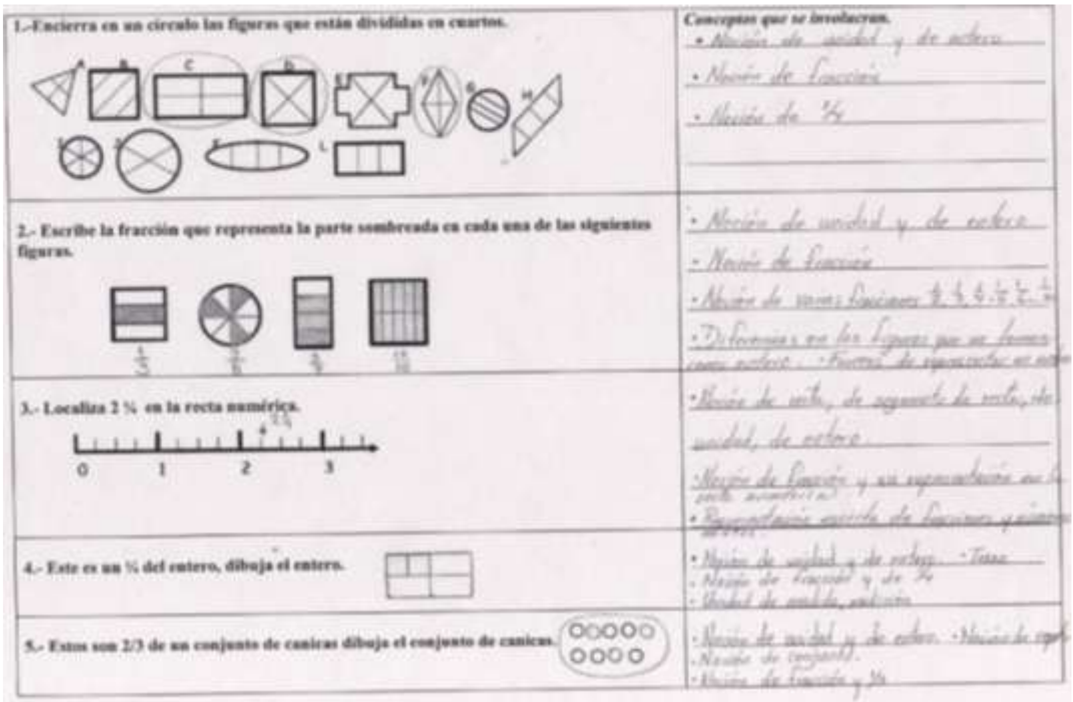


Figura 4.6. Ejercicio resuelto por la profesora Paty.

Después se les solicitó a los profesores revisar dos ejercicios propuestos:

1. Describe cómo explicarías a tus estudiantes la razón del resultado de cada una de las operaciones siguientes (no el algoritmo):

   a) $4 \text{ x } \frac{3}{2} = 6$

   b) $\frac{3}{4} \text{ x } 20 = 15$

2. Ilustra la forma en que representarías a tus alumnos las siguientes multiplicaciones de fracciones.

   c) $\frac{3}{2} \text{ x } 4 = 6$

   d) $\frac{3}{4} \text{ x } \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$

Javier. Yo digo que la multiplicación es una suma abreviada, por lo tanto, $4 \text{ x } \frac{3}{2} = 6$, es sumar 4 veces $\frac{3}{2}$ y lo hice en forma gráfica, $\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}$ me da un total de $\frac{12}{2} = 6$.

Anabel. Yo nada más, porque no me dio tiempo de trabajar los demás, se los puse a los alumnos, les dije que el resultado de esa operación era correcto y les pregunte ¿saben lo qué es la multiplicación?, empezaron con varias ideas: es varias veces un número, para no sumarlas cuando son iguales, nada más se dice cuatro por seis, entonces ¿qué significa esto?

Un alumno contestó "cuatro veces tres medios", entonces yo le dije, y cuatro veces tres medios dan seis, entonces empezaron, todavía sin dibujos, mencionaron que se podía resolver multiplicando cuatro por tres y el de abajo, como no tenía el otro se quedaba así, un niño dijo: "cambiamos los enteros por medios para multiplicarlos y tenemos ocho medios por tres medios, nos da veinticuatro cuartos, cambiamos a enteros y da seis".

Conductor. ¿Estas estrategias fueron de los alumnos?

Anabel. Si, y concluyeron que la más sencilla es ponerle el uno al entero, y la otra es cambiar el entero a fracción.

Conductor. Así se resuelve con algoritmo, pero ¿cuál es la razón del resultado?, el segundo ejercicio nos puede ayudar.

$\frac{3}{4}$ x 20 = 15

Isaías. Sería igual que el anterior, por medio de circulitos, representamos tres cuartos, tres cuartos, tres cuartos… veinte veces y vamos a ver que nos da quince enteros; fui juntando los enteros que se marcan con tres cuartos, son veinte y se suman tres más tres más tres… y nos da quince enteros.

Lidia. Al resolver el ejercicio, que nos solicitas ilustrar, la forma en que representarías a tus alumnos las siguientes multiplicaciones con fracciones. La segunda fue la que provocó conflicto ($\frac{3}{4}$ x $\frac{2}{3}$ = $\frac{1}{2}$). ¿Por qué dos fracciones al multiplicarse dan una fracción menor? pero al escuchar las explicaciones se me hace más fácil entender, nada más que representarlo me costó trabajo, hice la representación con decimales, hice la conversión de la fracción tres cuartos igual a setenta y cinco centésimos, dos tercios que es sesenta y seis centésimos, da un total de cuatrocientos noventa y cinco milésimos, pero con la explicación que han dado tendría que sumar tres cuartas partes de dos tercios, que no se entiende porque son partes de una fracción, por eso la pase a decimales, el resultado que me da es una aproximación. No sé si queda claro.

Existe un procedimiento para justificar un resultado, que no es claro, la explicación del por qué en ocasiones al multiplicar dos fracciones el resultado es menor que los factores no existe.

Conductor. ¿Todas las fracciones se pueden convertir a decimal?

Paty. Las fracciones propias.

Conductor. ¿Y las demás se pueden convertir?

Elsa. Si.

Conductor. Vamos a convertir un tercio a decimal.

Los maestros. Algunos realizan operaciones en su cuaderno.

Lidia. Treinta y tres centésimos

Isaías. Treinta y tres y después puntitos porque es infinita.

Conductor. ¿Un tercio es mayor menor o igual a tres décimos?

Javier. Es mayor, un tercio es mayor.

Conductor. ¿Por qué?

Javier. En decimal da treinta y tres centésimos y ahí nada más tengo tres décimos que son treinta centésimos.

Lourdes. Si es mayor, puede ser porque está más fraccionado.

Conductor. Si represento como fracción tres décimos, ¿qué fracción es?

Paty. Tres décimos.

Conductor. Entonces puedo comparar tres décimos que es igual a tres décimos, con otra fracción que es un tercio, para compararlas las convierto a fracciones con el mismo denominador. En este caso es:

$1/3 = 10/30$ y $3/10 = 9/30$ se puede observar cuál es mayor.

Elsa. Otra forma es con productos cruzados.

Conductor. ¿Cómo? Profesora.

Elsa. Se multiplica tres por tres y uno por diez.

Conductor. ¿Qué notan ustedes de parecido en estos dos procedimientos?

Isaías. Es el mismo, se sacó la equivalencia, pero solamente los numeradores.

Conductor. Lo primero que vimos es una explicación del procedimiento que nos dijo la profesora. Entonces ¿qué puedo hacer para comparar dos fracciones?, ¿Qué procedimiento puedo utilizar?

Elsa. Cambiar a decimales.

Anabel. Cambiar a fracciones con el mismo denominador.

Javier. Utilizar los productos cruzados.

Isaías. Es bueno que nos recuerde algunas cosas sobre estos contenidos.

Javier. Le estoy entendiendo más.

Lidia. Lo que nos falta es trabajar con esta clase de ejercicios, atractivos y que los alumnos puedan realmente pensar.

Javier. Es que las fracciones son confusas.

Conductor. Las fracciones son variadas en sus representaciones y significados, tener un conocimiento de ellas nos es muy útil. Entendido lo anterior, hagamos el siguiente ejercicio. Ordenen de menor a mayor las siguientes fracciones.

$$\frac{3}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{9}{5} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{6}{5}$$

El ejercicio se realiza con la participación de todos los profesores.

Conductor. Alguien podría dar una regla que sirva para ordenar este tipo de fracciones.

Elsa. Tienen el mismo denominador por eso es fácil.

Liliana. Se ordenan según el numerador.

Conductor. Ahora ordenemos las siguientes fracciones.

$$\frac{2}{6} \quad \frac{2}{9} \quad \frac{2}{12} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{2}{3}$$

Conductor. Ahora observen que los numeradores son iguales, ¿cómo hacen para ordenarlos de menor a mayor?

Elsa. Ahí la mayor es dos medios, porque es el entero.

Paty. La menor es dos doceavos porque se divide entre más partes.

Conductor. Con esto que dicen ¿puedo seguir ordenando las otras fracciones?

Anabel. Si quedaría (anota en el pizarrón) $\frac{2}{12} \quad \frac{2}{9} \quad \frac{2}{6} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{2}{2}$

Conductor. ¿Qué observan?

Lourdes. El valor de los denominadores va decreciendo.

Conductor. ¿Podrías dar una regla para comparar dos fracciones que tienen el mismo numerador?

Los profesores observan.

Lidia. Tiene que ver con el valor del denominador.

Paty. Es mayor si el denominador es menor.

Se resaltó la importancia de las fracciones y su relación con porcentajes; el tanto por ciento es una fracción con denominador cien.

A los alumnos se les dificulta el contenido de fracciones, por la complejidad de sus representaciones y significados, agregado a esto, está el conocimiento matemático de los profesores y las formas de representación favorables a la adquisición del conocimiento por los alumnos.

Se observó una inclinación a lo procedimental, teniendo al algoritmo como sustento de la validez del resultado.

En particular el contenido de fracciones es complejo, existen problemas de dominio matemático y de formas de representación. Cuando los profesores resuelven problemas explicando sus estrategias se dan cuenta de lo limitadas que pueden ser éstas, al escuchar a sus compañeros pueden adquirir otras o corregir la propia estrategia.

Ellos aceptan que se está dando un aprendizaje cuando expresan "le estoy entendiendo más" o "es bueno que nos recuerde algunas cosas sobre estos contenidos".

4.1.6. Sexta sesión

En esta sesión se comentó la lectura "El papel del maestro en cambiar afirmaciones por argumentos".

Seis de los profesores comentaron no haber leído el documento, dos de ellos no tienen la lectura, se les facilitó nuevamente el documento y se propuso realizar una lectura comentada.

Conductor. En el mundo se han realizado evaluaciones en los sistemas educativos de nivel básico, después de saber los resultados, algunos gobiernos han realizado investigaciones y reformas para mejorar su nivel educativo, el presente documento nos habla de cómo el maestro puede cambiar afirmaciones por razones. Antes de iniciar la lectura que opinan de esto que les acabo de comentar.

Isaías. En ocasiones los alumnos no desean hablar más.

Anabel. Es difícil que los alumnos se expresen sobre los contenidos.

Conductor. ¿Se puede ayudar a los alumnos para que realicen argumentaciones?

Lourdes. Para mi es difícil, hasta que den respuestas cortas.

Paty. Lo que yo he hecho, es hacer que hablen sobre cosas que ellos dominan, por ejemplo de futbol.

Javier. Sería propiciar la argumentación, o sea, que el niño explique, y no solamente dé una respuesta cerrada, sino que diga por esto. Muchas veces los niños al expresarse no lo saben hacer de manera correcta, sino que ellos mismos se traban, no saben cómo expresar sus ideas, tienen la idea, saben tal vez como resolver un ejercicio, pero no saben explicar, ahí entra lo que dice acá, que argumente, que diga por qué, por qué sale esto, de dónde, y que sea una explicación coherente, que utilice las palabras adecuadas para darse a entender con sus compañeros y en general.

Conductor. El profesor nos dice que los alumnos tienen la idea; pero se les dificulta expresarla ¿por qué creen que existe esa dificultad?

Lidia. Porque estamos acostumbrados a darles los conceptos, no dejar, que ellos lo creen, porque es un poco más tardado, es un poco más difícil y cedemos a la presión de tiempo, si analizamos bien que es un proceso gradual, aunque al principio lo veamos lento, habrá un tiempo en que la costumbre de argumentar y de hacer la construcción de su conocimiento va a generar el aprendizaje.

A lo mejor a nivel primaria no se ve, lo podemos ver a nivel secundaria, siempre y cuando llevemos ese proceso correcto en el nivel primaria. La presión del tiempo para dar ciertos conceptos y que el alumno los aprenda; siento que ese puede ser el error que traemos, de darles el concepto para agilizar procesos, sin darnos cuenta que es contraproducente, es como cuando haces una receta de algún guiso, no es lo mismo que te digan: se hace así, que cuando te dicen toma prepáralo, a lo mejor no lo apuntas pero ya nunca se te olvida, nosotros damos los conceptos sin hacer que ellos experimenten, haciendo que el conocimiento sea más firme.

Conductor. Retomando lo que dice la profesora, cuando le decimos a una excelente cocinera “explica cómo se hace”, es otro proceso, porque ella nos puede decir “es que yo lo sé hacer”, pero le estamos solicitando que nos explique, es diferente hacer y explicar, en el alumno tenemos que desarrollar ambas habilidades, cuando hacemos cambios en la interacción de la comunicación podemos observar que, al expresar su razonamiento aprenden o reafirma lo que saben.

Paty. En ocasiones llega un niño con un error, que nosotros ya vimos, y le solicitamos que nos lo explique, el niño dice “estoy mal”, inició la explicación y se dio cuenta de su error.

Conductor. En la explicación que requiere de un razonamiento el alumno puede percatarse del error, explicar algo requiere de una lógica.

Lourdes. Pareciera que no hemos hecho nada, a veces tenemos que aguantar, y no decirles las cosas a los alumnos.

Elsa. Los alumnos no se saben expresar, nosotros los condicionamos a hacerles todo y luego en los exámenes no leen, no comprenden, no saben que van a hacer, cuando les explicamos, dicen “ya entendí”. Les damos digerido lo que van a hacer, no les ayudamos a que expresen lo que comprenden.

Isaías. Los tiempos, la presión de las autoridades, vamos limitando al alumno, rápido para dar el conocimiento, no dejamos que se forme en su cabeza.

Conductor. Se hacen formas de trabajo en el salón de clase. El alumno se acostumbra a que el maestro le dé todo y ya no hace el esfuerzo, los maestros encontramos esto fácil y rápido, no les hemos dado la oportunidad de expresarse. ¿Cómo podemos desarrollar la habilidad de la argumentación en nuestros alumnos?

Javier. Es difícil, mucho de eso es poniéndolos a leer pequeños ejercicios y cuestionándolos sobre eso. Yo lo veo en los exámenes, se van al “tín marín”, ni siquiera por eliminación, no procesan información, cuando les digo: sus exámenes serán escritos, ellos contestan “no, me da flojera”.

Anabel. Habría que preguntarles y dejarlos hablar, que digan lo que piensan para que generen más ideas.

Conductor. El salón de clases es el lugar para que los alumnos se equivoquen y así puedan aprender.

Javier. Yo acostumbro ponerlos a leer en voz alta, dos alumnos no leían, los deje y platique con ellos, leían con traba, tartamudeando, sólo necesitan confianza; leer se aprende leyendo. Hay que superar los miedos ahora son los que más quieren que se lea, muchos de los temores de nuestros alumnos los generamos con conductas y actitudes hacia ellos.

Lidia. Yo les digo que tengo a los alumnos más listos el mundo y el que no saca diez es por flojo, depende de ellos. Les resalto que son los mejores.

Anabel. Motivarlos deja de ser una palabra hueca, tiene que funcionar en estos aspectos. Lo mismo pasa en las matemáticas.

Lidia. Hay que crearles seguridad a nuestros alumnos. Yo recibí la motivación para dibujar, de una maestra y hasta la fecha me gusta dibujar; el detalle de esa maestra que mostraba con orgullo mi dibujo a sus compañeros, marcó mi vida. Lo mismo trato de hacer con mis alumnos, les resalto sus cualidades, sus defectos, los invito a corregirlos.

Conductor. Debemos crear un ambiente propicio para la argumentación. Un argumento tiene que ser valorado como un esfuerzo. El alumno es motivado cuando su argumento se valora.

El maestro enseña a argumentar con su ejemplo. Los temas sencillos pueden facilitar la participación de los alumnos. La descalificación del maestro a la argumentación del alumno inhibe su participación.

Solicitar argumentaciones más que afirmaciones, representa enfrentar los problemas descritos por los profesores, se toma el camino fácil, se evita, con las consecuencias que esto tiene para la formación del alumno y el conocimiento del nivel de aprendizaje de los alumnos por parte del docente.

Se hace entrega para la próxima sesión de las lecturas “Cálculo mental y estimación” y “Describiendo la práctica de maestros eficaces”.

4.1.7. Séptima sesión

Cálculo mental y estimación. Se inició trabajando el documento “Cálculo mental y estimación”.

Conductor. El cálculo mental es algo que vamos a desarrollar en los alumnos, pero les pregunto ¿qué estrategia utilizan para realizar el cálculo mental?

Elsa. Por ejemplo asociar decenas, centenas, al sumar por ejemplo, une las unidades y luego las decenas y las englobas.

Anabel. Hay que ver la relación, por ejemplo, 74 + 24, primero las decenas 7 + 2, y después las unidades.

Conductor. Tenemos cuatro números que se suman, vean y expliquen que caminos pueden seguir sus alumnos (60 + 16 + 4 + 5)

Lidia. Yo lo hice así 60 + 10 = 70, 70 + (6+ 4) = 70 + 10 = 80, 80 + 5 = 85

Paty. Yo sume 16 + 4 = 20, 20 + 60 = 80, 80 + 5 = 85

Conductor. Las estrategias se adaptan según el problema. En el cálculo mental interviene la memoria.

Anabel. ¿Qué necesita saber el alumno para poder realizar cálculo mental?

Conductor. Debe de dominar cálculos elementales cómo adiciones de dos dígitos, las tablas de multiplicar y su inversa las de dividir y comprender los principios del sistema de numeración decimal.

Javier. A mí me ha dado resultado recalcar con mis alumnos la multiplicación y división abreviada con potencias de diez.

Conductor. ¿Qué es lo que pasa en la multiplicación por potencias de diez?, ¿Qué hacemos cuando multiplicamos por diez?

Anabel. Pasamos el número integro y le agregamos el cero del diez.

Conductor. ¿Y si ahora tenemos 45 x 100?

Anabel. Pues igual se pone el 45 y se le agregan dos ceros.

Conductor. ¿Y con decimales 3.5 x 1000?

Isaías. Se mueve el punto decimal tres lugares a la derecha.

Paty. El punto decimal se mueve a la derecha tantas cifras como ceros tiene el factor.

Conductor. ¿Por qué?

Lidia. Así lo dice la regla.

Paty. Es una consecuencia del algoritmo.

Lidia. Si hacemos muchos ejercicios veremos que eso se cumple.

Conductor. Eso también tiene que ver con el sistema decimal, si tenemos diez unidades de un orden obtenemos una unidad de orden inmediato superior. Al multiplicar 32 x 11 podemos resolverlo como 32 x (10 + 1); multiplicar 32 x 10 es fácil y le sumamos 32. 320 + 32 = 352. La multiplicación por potencias de diez nos ayuda a realizar cálculo mental. ¿A qué es igual 52 x 102?

Paty. Ponemos 5200 y le agregamos 104, esta suma da 5304.

Conductor. Cuando realizamos cálculo mental no le debemos solicitar a los alumnos que lo verifiquen, deben de confiar en sus procedimientos.

Se realizaron ejercicios en los casos que señala la lectura, se subrayó la importancia de desarrollar esta habilidad, porque resuelve problemas prácticos y académicos.

Se debe de aprovechar cualquier oportunidad para aplicar el cálculo mental y la estimación.

Se comentó la lectura "Describiendo la práctica de maestros eficaces de matemáticas". (Véase Anexo).

Conductor. Existen diferencias en las formas de enseñanza de los profesores. Los investigadores han tratado de describir las acciones que realiza un profesor que obtiene buenos resultados, esta investigación nos da algunos puntos importantes a considerar. ¿Qué pueden ustedes comentar al respecto?

Elsa. Del punto tres que se refiere a la conexión de ideas; el maestro debe de manejar juegos con material o utilizar todo aquello que se encuentra en el aula para ejemplificar los contenidos.

Anabel. A los alumnos les gusta la acción, debemos proponer actividades con movimiento.

Paty. En el punto cuatro que dice: que alientan a los estudiantes a describir sus métodos y su razonamiento, eso es lo referente a la argumentación.

Isaías. Cuando en la lectura nos indica que estos maestros ponen énfasis en las conexiones se me ocurre el ejemplo del sistema de numeración decimal que tiene una conexión directa con las conversiones.

Conductor. Esto es importante porque recuerden que es el profesor quien tiene el conocimiento y puede adelantar sucesos en el aprendizaje de sus alumnos.

Lidia. Nos hace falta a los profesores, conocer el trabajo del compañero que atendió el grupo el ciclo escolar anterior, así podremos conocer más de los alumnos.

Javier. En el punto seis nos indican que estos maestros enfatizan la importancia de utilizar procedimientos mentales sobre procedimientos escritos que es exactamente la lectura del cálculo mental y estimación.

Lourdes. Antes lo trabajaba con operaciones sencillas y los alumnos anotaban el resultado en su cuaderno, los recogía y los calificaba (5 x 3 + 6), los alumnos tenían una retroalimentación rápida (en la calificación), pero poco atractiva. Ahora trato de hacerlo con sentido en una situación real y eso me da mejor resultado.

Isaías. Yo realizo cálculo mental con material recortable en las que participa todo mi grupo.

Elsa. En el punto ocho nos dice: que hacen énfasis en establecer conexiones entre las diferentes ideas matemáticas, me recuerda cuando vimos fracciones y las convertimos a decimal y la fracción a tanto por ciento ahí existe esta relación que debemos recalcar.

Anabel. Les pongo ejercicios de lo que pasa en el salón, en una ocasión la cuarta parte de mi grupo no trajo la tarea y les dije: hoy la cuarta parte del grupo no cumplió con la tarea ¿Qué porcentaje trajo la tarea? Parece mentira pero estuvieron interesados en resolver ese problema.

Liliana. Cuando los alumnos pueden plantearse problemas que piensan que pueden resolver con sus conocimientos están metidos en la actividad.

Lidia. El punto nueve, habla de alentar la resolución colaborativa de problemas, eso lo hacemos cuando trabajamos en equipo o un solo problema para todo el grupo.

Javier. Los maestros que trabajamos en equipo, a veces no nos damos cuenta de los que trabajan.

Lidia. Los motivo, el primer equipo que termine tiene un punto.

Conductor. Esto es una muestra de que el profesor debe innovar cada día, el ser impredecible, motiva y atrae la atención de los alumnos.

Anabel. También podemos dar estímulos como estampas o reconocimientos en público.

Paty. Nosotros también necesitamos de ese reconocimiento.

Conductor. En la lectura nos presentan las características principales de maestros eficaces, ¿qué relación observan de estas características con su labor docente?

Elsa. La letra “o” nos dice que construye sobre las ideas o estrategias matemáticas de los niños. Cuando trabajo un concepto lo trato de forma sencilla y sondeo el conocimiento que ellos tienen, parto de eso, trato de que el concepto se construya en clase. Que lo puedan expresar con sus palabras y a su nivel.

Javier. En la letra “h” que dice: que atrae el pensamiento matemático de los niños a través de una actividad introductoria, trato siempre de llevar algo para que se motiven y de eso parto, ahora he llevado fichas y palos, tratando que sean diferentes para atraer su atención.

Anabel. En la letra “j” en el que dice que estos maestros utilizan diferentes tipos de cuestionamientos para sondear y desafiar el pensamiento y razonamiento de los niños, procuro siempre darles confianza y que expresen lo que creen, trato de que ellos formulen preguntas, hagan conjeturas, trato de no decirles “estás mal” sino ayudarles. El primero que lo hace mal, le digo, "escucha a los demás para que observes algo interesante".

Identificarse con algunas características de los profesores eficaces que describe la lectura fue un ejercicio motivador. Observar aquellas que hace falta desarrollar, puso a reflexionar a los profesores. Dos características fueron en las que se pronunciaron principalmente como una necesidad para desarrollar: extraer ideas matemáticas clave durante y al final de la lección y confiar en el propio conocimiento matemático para el nivel que enseñan. Porque las matemáticas de la enseñanza básica no son básicas, son complejas, amplias y diversas. Se reconoce la falta de conocimiento. Y eso debería movernos para su solución.

4.1.8. Octava sesión

En esta sesión se trabajó la lectura de porcentajes, antes de iniciar la sesión surgió un comentario de los profesores con respecto a la observación de clases.

Anabel. A mí en lo personal, la vez que fue a observarme estuve muy nerviosa, muy diferente, tal vez por la cámara, es diferente como dar las clases, me costó trabajo, la cámara a mí no me gusta.

Conductor. Entonces haríamos la siguiente observación sin cámara.

Anabel. En esta semana estamos terminando temas, a mí me faltan cinco para terminar. La observación sería en cómo trabajan los niños. Al menos que a los niños se les dificultara entonces yo tendría que explicarles.

La observación de clase representa un reto para el profesor, al que no está acostumbrado, cuando se realiza como una acción de reflexión sobre su práctica docente ayuda a autoevaluar la acción y la interacción alumno y profesor con el conocimiento matemático. Exponerse a ella ayuda a concientizar los problemas de enseñanza.

Anabel. A lo mejor tema nuevo no, va a haber ejercicios, tema nuevo que empecemos desde cero no, serían ejercicios más complejos.

Lidia. De hecho, a mí me sucedió, cuando fue a observar, dije: "chin para que hice eso, chin y enfrente de la cámara, cómo pude ser capaz de hacer esto", cómo que a uno no le cae el veinte de algunas cosas.

La reflexión de lo realizado en clase, tiene presencia en el profesor cuando sabe que existe testimonio documental. Deberíamos de reflexionar que aportamos al conocimiento en los alumnos.

Discusión de la lectura de porcentajes.

Conductor. ¿Cómo se utiliza el tanto por ciento en la vida cotidiana?

Javier. En las ofertas, aumentos salariales, aumento poblacional.

Isaías. El nivel de reprobación.

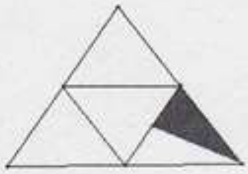
Conductor. Y los alumnos ¿dónde utilizan el tanto por ciento en la vida cotidiana?

Anabel. En la televisión, en los descuentos.

Pasamos a la revisión de los ejercicios de la hoja de trabajo, *(véase Figura 4.7)*

Nombre del profesor: ______________________________

1. ¿Qué porcentaje del triángulo grande representa el triángulo sombreado? Explica tu respuesta.



2. Antonio y José discuten sobre el porcentaje de descuento de una televisión. Antonio le dice a José que el 28% de descuento equivale a 7/25 del precio de la televisión.
   a) ¿Es cierto lo que dice Antonio?
   b) ¿Por qué?
   c) ¿Cómo le explicarías esto a José?

3. El 70% de los mexicanos tienen el factor RH positivo. Según esta información ¿aproximadamente cuántos alumnos de la escuela tienen este factor si la población es de 600 alumnos? Anota dos formas de solución de este problema.

Figura 4.7. Hoja de trabajo. Porcentajes.

Javier. Les puse el ejercicio a los alumnos sin ninguna explicación, el primero que resolvieron fue el tercero, fue el más sencillo, el primero costó trabajo porque era de porcentaje y no de fracción. De todo el grupo fueron contados los que lo resolvieron, porque tenían que hacer diferentes operaciones y no les llama la atención resolverlo. De fracción tenían que pasar a decimal y después a porcentaje.

Conductor. Este ejercicio era para ustedes. Lo que dice el profesor es fundamental, el porcentaje tiene una representación principalmente decimal.

Lidia. Yo lo estoy haciendo ahora, con lo que dijeron me estoy dando cuenta como se resuelve.

Javier. Un niño de la fracción se fue a porcentaje y lo cuestioné, ¿cómo lo sacaste? *Es que agarre la fracción y me fije en el denominador y como el entero representaba el cien por ciento, lo dividí entre cuatro que son los triángulos mayores, ese 25 que representa el triángulo lo dividí entre dos que está sombreada.* Le dije, está bien, si ese es tu procedimiento, solo que yo quería, que pasaras por fracción decimal y después porcentaje, pero está bien no hay problema.

Conductor. El niño tiene clara la relación entre fracción y porcentaje.

Javier. Cuando yo explique el método, él me dijo, *es igual*.

Conductor. ¿Qué fracción representa la parte sombreada?

Todos. Un octavo.

Lourdes. Yo doy el porcentaje con el algoritmo, a partir del algoritmo los alumnos razonan y verifican.

Conductor. ¿Sus alumnos son capaces de resolver problemas sencillos de porcentaje sin utilizar algún algoritmo escrito?

Lourdes. No ellos tienen que utilizar lápiz para obtenerlo.

Conductor. ¿Nosotros podemos obtener el diez por ciento de una cantidad sin necesidad de hacer operaciones con lápiz y papel?

Lourdes. Pero ellos están aprendiendo.

Paty. Pero nosotros tenemos que hacerlos más eficientes.

Lourdes. Pero ellos tienen que pasar por este proceso.

Conductor. Podemos hacer que el niño razone y que el algoritmo le ayude a la obtención del porcentaje, pero también que pueda hacer cálculos, sin utilizar el algoritmo. Por ejemplo que sepa que el cincuenta por ciento equivale a la mitad, el veinticinco a una cuarta parte, el veinte a la quinta y el diez por ciento a la décima parte.

Paty. La lectura tiene muchas ideas que se pueden hacer en el salón de clases.

Isaías. Yo puse la tabla y me sorprendieron los razonamientos que fueron capaces de hacer.

Anabel. Un niño me dijo: *maestra siempre es más fácil sacar el uno por ciento*. Le solicité que le explicara a sus compañeros, su explicación fue un poco confusa pero, es verdad, al sacar el uno por ciento se facilita la comprensión.

Lourdes. En mi clase, trato que un problema de porcentaje tenga varios cuestionamientos.

Conductor. ¿Cómo cuáles?

Lourdes. Si sacamos un descuento, podemos sacar cuánto va a pagar, si el pago lo hace en abonos, cuánto pagara cada abono.

Surgió la discusión de la solución del siguiente problema: Se sabe que el precio de una estufa con el impuesto del 8% incluido es de $9 277.20, y se desea obtener el precio original sin impuesto.

Javier. Es sacar el ocho por ciento de esa cantidad y después restárselo a nueve mil doscientos setenta y siete punto veinte centavos.

Isaías. Pero esa cantidad ya tienen el ocho por ciento incluido al cien por ciento del valor.

Javier. Saco el ocho por ciento y se los resto, quito el mismo ocho por ciento y entonces va a quedar el precio original.

Conductor. Usted profesora ¿Qué nos puede decir? (observa que la profesora Paty está muy pensativa en el problema).

Paty. El precio…

Anabel. Podría ser, por ejemplo, obtener el ocho por ciento de nueve mil y agregarlo a ver si nos da esa cantidad.

Conductor. ¿Los doscientos setenta y siete pesos con veinte centavos, se los quita, saca el ocho por ciento de nueve mil y lo que le dé se lo suma a nueve mil, para ver si le da nueve mil doscientos setenta y siete punto veinte?

Lidia. Yo estoy de acuerdo con el razonamiento de Javier.

Conductor. Vamos a realizarlo y lo comprobamos de esa manera. Sacamos ¿qué profesor?

Javier. El ocho por ciento.

Conductor. Eso ¿cuánto es? (Los profesores hacen operaciones).

Javier. Setecientos cuarenta y dos punto ciento setenta y seis.

Conductor. Ahora se los restamos. ¿Cuánto da?

Isaías. Me da ocho mil quinientos treinta y cinco punto cero veinticuatro.

Conductor. Este sería el precio sin impuesto, si al precio sin impuesto le aumentamos el ocho por ciento nos da nueve mil doscientos setenta y siete punto veinte.

Realizan operaciones

8535.024 x 1.08 = 9217.8259.

Conductor. No sale.

Paty. A mí me sale que el precio es ocho mil quinientos noventa.

Conductor. ¿El precio de la estufa?, lo comprobamos.

8590 x 1.08 = 9277.20

Conductor. Explíquenos cómo lo obtuvo.

Paty. Ya no sé. Pero lo que pasa es que este precio ya tiene el cien por ciento que sería el uno, pero también tiene el cero punto cero ocho, que sería el ocho por ciento, entonces lo que hice fue dividir el precio entre uno punto cero ocho y me salió el precio de la estufa, luego verifique el ocho por ciento de ocho mil quinientos noventa, se lo sume y me dio la cantidad.

Conductor. ¿Habrá otra manera? La lectura dice:

¿Cantidad? x forma decimal del porcentaje = a porcentaje de la cantidad,

Sustituyendo es: ¿cantidad? x 1.08 = 9277.20.

¿Cómo obtenemos el factor desconocido?

Isaías. Dividimos el producto entre el factor conocido.

Conductor. Nos ayuda lo que expresaba el alumno, de la facilidad para resolver problemas obteniendo el uno por ciento, solo hay que pensar que nueve mil doscientos setenta y siete punto veinte representa el ciento ocho por ciento. Para obtener el uno por ciento, tenemos que dividir entre 108.

9277.20 ÷ 108 = 85.9

Al multiplicarlo por cien para obtener el cien por ciento obtenemos 8590 que es el precio de la estufa sin impuesto.

Javier. Ir a la unidad siempre será una opción.

Conductor. Es una forma que nos ayuda a entender el algoritmo.

Paty. Esto también se utiliza en las conversiones.

Lourdes. Por qué el ciento ocho por ciento no me queda claro.

Conductor. Podemos pensar como si conociéramos todas las cantidades. (Anota en el pizarrón).

El precio de la estufa sin impuesto.	Impuesto	Precio de la estufa con impuesto.
100%	8%	108%

Lourdes. Ahora si ya me quedó claro.

Los profesores han implementado actividades con sus alumnos propuestas en el Taller, exponen sus resultados y eso retroalimenta las sugerencias del grupo. Dan validez a lo que ellos hacen y comparten. Un avance que se observa es la participación propositiva y el cuestionamiento cuando se tiene alguna duda.

4.1.9. Novena sesión

Para esta sesión se trabajó la lectura "Colaboración con maestros para mejorar el aprendizaje de las matemáticas: Pedagogía de tres niveles" (Anexo).

De los asistentes a la sesión solamente uno había realizado la lectura; por lo que se decidió hacer una lectura comentada. A continuación, los cometarios que hicieron de la lectura.

Lidia. Del punto nueve del apartado de aprendizaje profesional, dice que, se reconoce que el cambio es gradual, difícil y a veces doloroso, lo entiendo que es tanto para maestros como para alumnos.

Conductor. Se habla de aprendizajes profesionales de los maestros, en esta afirmación se reconoce que hacer cambios en la práctica docente es un proceso que lleva tiempo porque la innovación tiene que romper con inercias y costumbres; formas que el profesor tiene desde que era estudiante, cambiar las formas de trabajo representa correr riesgos y hacer correcciones.

Anabel. En qué tiempo se podrían ver cambios.

Conductor. Los cambios dependen de factores personales e institucionales; la disposición, la actitud, el trabajo individual y colectivo, aunado a un apoyo por la autoridad, puede hacer que los cambios se aceleren. Sin evadir su pregunta, afirmó que los presentes deben de considerar que la enseñanza tiene una responsabilidad, a la que se le hace frente con conocimientos y habilidades, el cambio debe de ser continuo y permanente y reflexionando sobre lo que se hace.

Producto de este trabajo, ya se deben de ver cambios en sus salones de clase. Cuando estamos enfermos, buscamos al mejor médico; así nosotros debemos ser los mejores maestros para nuestros alumnos.

Isaías. Pero parece que este es un problema mundial.

Conductor. Si lo es, en la lectura nos comentan las acciones que pretenden apoyar la acción que se desarrolla en el salón de clases, ver las condiciones que hacen y aseguran una labor efectiva.

Anabel. ¿Qué cambios cree usted ver en nosotros?

Conductor. Espero sean sustantivos, la búsqueda del conocimiento en este caso el matemático debe de suceder como consecuencia al percatarse de la falta de él, las formas de representación, la consideración de las características de los alumnos, la forma en que promueven la relación del conocimiento con el alumno. El profesor y el alumno se dan cuenta de la efectividad de la actividad, debemos abrir a la crítica y a la reflexión la labor educativa.

Lidia. Esta información es de Australia, en otros países hay condiciones diferentes.

Conductor. Pero muchas condiciones y características son muy similares.

Un problema que presenta el programa de desarrollo profesional implementado como Taller, es el compromiso, que se concretiza en la realización de las tareas por los profesores. El logro de los propósitos de la sesión se afecta por implementar actividades que sustituyan lo no realizado con antelación, porque el tiempo es factor, para poder profundizar en la reflexión de la propia práctica se requiere de la experiencia común.

4.1.10. Décima sesión

Se comentaron las respuestas al cuestionario final.

Los profesores expresaron que todo lo relacionado a los conceptos pedagógicos se puede aplicar. Lo mismo que se hizo con los contenidos de aritmética se puede hacer con los contenidos de la geometría. Por ejemplo: hacer que el alumno argumente y reflexionar sobre las formas de representación.

A la pregunta dos. *"qué se podría aplicar a otras asignaturas como historia, español o geografía".* Todos estuvieron de acuerdo que es necesario dominar el conocimiento y las estrategias pedagógicas para exponerlo a los alumnos, se dieron ejemplos específicos: en historia; al representar la línea del tiempo, en geografía; la distancia entre dos ciudades, latitud, longitud, en español; la argumentación como un dominio de la lengua.

En la pregunta *"da una lista de conceptos y habilidades aritméticas que consideras ahora más importantes"*, de las habilidades los profesores expresaron: el cálculo mental, la estimación, la flexibilidad del pensamiento, reversibilidad y hacer conjeturas; de los conceptos: las fracciones, decimales, tanto por ciento y las operaciones aritméticas.

En la pregunta *"por qué es importante deducir lo que entienden o no los niños"*, la mayoría estuvo de acuerdo en que: no hemos desarrollado esa habilidad, en ocasiones nos damos cuenta hasta el día en que se presenta el examen, pero aun así hacemos poco. Debería de servir para corregir la enseñanza, mejorar las representaciones, buscar nuevas formas en las cuales los alumnos interactúen con el conocimiento.

Con respecto a la pregunta cinco, *"qué obtuviste para mejorar tu práctica docente con tu participación en el Taller de discusión"*, destacaron: volví a repasar algunos contenidos y refresque algunos conocimientos, ideas pedagógicas, el intercambio de estrategias y aprendí como trabajar algunos contenidos de forma diferente. Todos expresaron que han trabajado actividades propuestas en el taller, han modificado algunas actitudes y formas de trabajo, uno de ellos expresó: *"algunas veces estoy dando clases y me acuerdo de las sugerencias pedagógicas y las pongo en práctica"*.

En la respuesta a la pregunta *"describe alguna actividad realizada con tus alumnos en la que se utilizó una idea obtenida del Taller"*

Isaías: Puse en práctica los tableros multibase y los resultados fueron buenos, tanto para la comprensión de los principios de un sistema de numeración posicional como para el cálculo mental.

Paty: Puse actividades de cálculo mental, a los niños les gusto, ahora son ellos los que me piden actividades para este contenido. Puse una actividad, la nombre "venta de garaje" coloque el precio de varios artículos, los precios eran muy bajos y a veces ridículos, ellos compraban varios artículos, y hacían su cálculo mental del total de su compra.

Las características que debe tener una clase de matemáticas. Los profesores dijeron:

- Un buen maestro: que sepa lo que va a enseñar y cómo lo va a enseñar.
- Material que sirva para hacer representaciones acordes con los contenidos.
- Organización en horarios, lugares de trabajo y condiciones en el interior del salón de clase.
- Alumnos que quieran aprender.
- Deben ser interesantes, amenas, entretenidas, con ejemplos y ejercicios que refuercen los contenidos.

Los profesores saben que la solución está en ellos, que es necesaria su participación comprometida para realizar cambios sustantivos, algunos de ellos ven la dificultad de la falta de tiempo para poderse actualizar, el problema económico para poder comprar un libro, que les dé una nueva visión sobre su práctica. Dos profesores expresaron con desánimo: *"cada día es más difícil enseñar a los niños, como profesores hemos perdido autoridad y la situación social nos ha arrebatado el argumento de la necesidad de estudiar y prepararse para salir adelante".*

4.1.11. . Extendiendo ideas

En esta sesión el Dr. Simón Mochón participó en el Taller, comentando sobre el conocimiento matemático necesario para la enseñanza en la escuela primaria. Se presenta el análisis de esta sesión.

Enseñar matemáticas en primaria, secundaria o cualquier nivel requiere de dos elementos: matemáticas y pedagogía. Entre ellos hay algo que no está cubierto y que los profesores aprenden en la práctica. Es a lo que llamamos *conocimiento matemático para la enseñanza* que aparece como la mezcla de cuestiones pedagógicas y matemáticas, pero que son de alto nivel; son matemáticas especializadas para la enseñanza, para el salón de clases.

Porque el trabajo del profesor es plantear problemas que preparen a los alumnos para lo difícil, los ejemplos no prototípicos sirven para este fin. El estudiante refleja más entendimiento cuando hace algo que no se le enseñó. En la primaria se debe aprovechar el planteamiento de situaciones reales; lo que acontece en el mercado en la tienda, etc., y así poder ver la utilidad del conocimiento.

El odio hacia las matemáticas se debe a la presentación que hace el profesor de ellas, existe una relación entre los profesores que tienen un gusto por las matemáticas y el gusto que presentan sus alumnos por la asignatura, parece ser que el disfrute se contagia del profesor al alumno. Es la manera en que se desenvuelve en la enseñanza, haciendo uso de elementos diversos, lo que provoca en los alumnos un interés y aprecio hacia este conocimiento.

Un buen profesor es aquel, que sabe qué debe hacer, reflexiona sobre la práctica, busca nuevas formas de representación. Hace frente a situaciones que le presenta la clase, aprovecha las participaciones, cuestiona y no teme verse involucrado en dificultades conceptuales, porque cuenta con un conocimiento consistente, que le hace posible dirigir el razonamiento de los alumnos hacia la construcción del conocimiento.

Los profesores mostraron su inquietud por las evaluaciones que se realizan a los niños, y que se ven orillados a prepararlos, porque con los resultados de alguna manera son evaluados ellos mismos.

El profesor conoce los conceptos que dominan sus alumnos, sabe que alumnos pueden tener problemas para resolver un problema de un nivel determinado, la aplicación del examen es una norma que hay que seguirla, pero podemos calificar los reactivos y podemos decir: este reactivo es confuso, es de alto nivel o requiere una explicación extra.

Se ejemplifica el análisis de un reactivo de la prueba enlace *(véase Figura 4.8).*

Pregunta 31 Grado de Dificultad Alto

Tema: Números fraccionarios.

Contenido: Significados.

Propósito: Calcular la fracción de números enteros en una situación cotidiana.

Porcentaje de respuestas por opción y estrato:

	PARTICULAR	GENERAL	INDIGENA	CONAFE	NACIONAL
A	15	21	23	23	21
B	20	20	23	22	20
C	30	28	22	20	28
D	30	28	30	26	28

Reactivo:

José compró 57 quesos para vender; 25 eran Oaxaca y 32 Manchego. Si le quedaron $\frac{2}{5}$ de Oaxaca y $\frac{2}{8}$ de Manchego, ¿cuántos quesos vendió?

A) 18
B) 20
C) 39
D) 49

Respuesta Correcta: C

Figura 4.8. Reactivo de examen enlace.

Este reactivo es de alta dificultad, según las estadísticas, la tercera parte lo hizo bien, pero no es cierto; porque son de opción múltiple, se tiene el veinticinco por ciento por probabilidad en cada opción, lo que se expresa es que los niños no saben nada, están contestando al azar.

Es confusa y el resultado es lamentable porque es un nivel que los niños no alcanzan, necesitamos saber ¿por qué?

Es una pregunta que no da información sobre el conocimiento de los niños, es para que ellos se la lleven a casa, la trabajen y se discuta en clase, parece complicada para meterla en un examen, presenta un problema de lenguaje, que no es sobre las matemáticas. Por cómo están estructuradas las preguntas no se sabe que conocimiento está arrojando de los niños.

Lo primero que se debe hacer es una lista de lo esencial para un alumno de sexto grado y así poder diseñar preguntas para saber cuántas matemáticas saben los niños y no cuántas matemáticas de las del programa deben de saber.

Se tienen que diseñar preguntas de lo que se cree que es valioso para los niños y no para tratar de atraparlos; la respuesta que dan los niños es en muchas ocasiones su forma de pensar.

Lo primero que tiene que haber es confianza en el profesor, una evaluación externa que nos diga cómo están los niños sale sobrando, los profesores lo saben, los han visto durante doscientos días, si el maestro ha observado el trabajo de sus alumnos, reconoce el desarrollo de cada uno de ellos.

Los niños en cada momento nos dicen cómo piensan, ellos nos dan la información de muchas maneras, nos enseñan; de nosotros depende aprender.

En esta sesión los profesores fueron reflexivos sobre lo realizado en el Taller, las prácticas en el aula y de su visión sobre el *conocimiento matemático para la enseñanza*, el encuentro de investigadores de la educación con los responsables directos de impartir la educación primaria es siempre en beneficio para ambos.

4.2.Análisis de las observaciones de clase. Inicial y final

Se presentan las observaciones: inicial y final, de cuatro profesores que participaron en el Taller, haciendo un comparativo del desempeño del profesor ante sus alumnos; antes de haber participado en las actividades del Taller y después de haber realizado la reflexión de su práctica en trabajo colegiado con sus compañeros de quinto y sexto grado. Para el análisis se utilizaron los parámetros de Askew.

4.2.1 Observaciones de clase, profesor Isaías.

El profesor Isaías tiene veinte años de trabajo docente, formación normalista, estudios de licenciatura en la Universidad Pedagógica Nacional, atiende un grupo de treinta y cinco alumnos de sexto grado.

4.2.1.1. Observación inicial.

Contenido: cálculo mental y conversiones de unidades de tiempo (horas y minutos).

Material: tarjetas de cálculo mental, libro de texto y Enciclomedia. Inicia la clase con una actividad de cálculo mental; repartió 40 tarjetas, una a cada alumno (algunos alumnos tienen dos tarjetas). La tarjeta inicial la lee el profesor y dice:

Yo tengo el 20	**¿Quién tiene mi mitad más ocho?**

Se realiza el cálculo propuesto, el alumno que tiene la tarjeta con el resultado, lee:

Yo tengo el 18	**¿Quién tiene mi doble menos 4?**

Así se leyeron todas las tarjetas, participando todos los alumnos en forma entusiasta, el profesor los animó, y aun cuando ya habían leído su tarjeta siguieron participando realizando el cálculo de la tarjeta en turno, el ejercicio terminó con la tarjeta que dice:

Yo tengo el 24	**Y eso es todo.**

Pasó a la revisión de la lección 45 del libro de texto “el maratón de baile”, en donde se presentó el problema de convertir minutos a horas y viceversa. La revisión se hizo con la ayuda de Enciclomedia, los alumnos ayudaron a la lectura del ejercicio y dieron las respuestas; el profesor las escribió en el pizarrón. Las preguntas fueron para todo el grupo, el profesor eligió entre los alumnos que levantaron la mano. La segunda parte de la lección se resolvió en el pizarrón de Enciclomedia. Se siguió la misma forma: los alumnos leyeron la pregunta y contestaron con la ayuda del profesor y pasaron al pizarrón a mostrar su procedimiento. El profesor cuestionó:

-No me digan quién bailo más tiempo, sino, que necesito hacer para saberlo.
-no me den el resultado, vamos a ver como lo sacamos.
_ ¿Qué tenemos que hacer?

Cuando el profesor percibió alguna dificultad solicitó que un alumno pasara a mostrar su procedimiento y realizara sus operaciones.
En el ejercicio 4 de la página 103. Un alumno leyó el ejercicio:

> *4. Arturo fue uno de los encargados de recoger los boletos en la entrada; estuvo desde las 6:10 p.m. hasta las 8:40 p.m.; después descansó 40 minutos y continuó hasta las 11:00 p.m. ¿Cuándo tiempo estuvo Arturo recogiendo los boletos en la entrada?*

El profesor inició la resolución animando a los alumnos a cooperar, solicitando:

-de 6:10 a 8:40 ¿Qué tiempo es?	Respuesta	2:30
-Más 40 minutos		9:20
-De 9:20 a 11:10 es		1:50
-Sumamos 2:30 + 1:50 da		4:20 hrs.

Un alumno participó, diciendo como lo resolvió:

-*Alumno.* Saque el tiempo entre 6:10 y 11:10, que son 5 horas. A 5 horas le reste 40 minutos que fue el descanso y da 4:20 horas.

El profesor comentó: ahí tienen otra forma de resolverlo.

El alumno resuelve el problema con un razonamiento inmediato, lógico y fácil, el profesor deja pasar estas intervenciones que pueden aportar al razonamiento que otros alumnos están haciendo del problema y lograr generalizaciones de visiones ingeniosas que aportan soluciones correctas.

Los alumnos presentan formas de solución que rebasan a las expuestas por el profesor, difundirlas, darles el espacio para su explicación, conlleva una actitud y una sensibilidad para entender analizar métodos y soluciones diferentes de las propias comprobando su validez.

El profesor terminó la clase con un ejercicio de conversión. Ejemplo:

5:34 horas = ___________minutos 135 minutos = ___________ horas.

En la actividad de cálculo mental se obtuvo la participación de todos los alumnos en forma entusiasta, fue un buen ejercicio. Todos estuvieron atentos realizando las operaciones mentalmente.

En la revisión de la tarea y resolución de la segunda parte de la lección, se debió aprovechar la participación de los alumnos para promover las formas de solución que se presentaron. La disposición de las bancas no ayudó a la interacción entre los alumnos y profesor.

Parámetros de observación

Tarea: fueron apropiadas, pero hicieron falta variables, más ejemplos de situaciones cercanas a los alumnos, como tiempo de juego en un partido de futbol, etc.

Desafío matemático: la tarea de cálculo mental representó un desafió de un nivel apropiado y logró rescatar el interés de los alumnos. El ejercicio del libro de texto sirvió para consolidar conocimientos de los alumnos.

Integridad y significación: se logró tener conexiones significantes al nivel de descripción, sin llegar a desglosar ideas dentro del esquema matemático.

Captar el interés: los alumnos tuvieron un interés inicial en la actividad del libro, pero pocos fueron los que lo mantuvieron, llegando inclusive a sólo copiar los resultados.

Conversación: es necesario tener mayor información matemática sobre los conceptos para agregar a la exposición.

Conversación del profesor: trabajó solamente con los significados que se encuentran en el texto y no valoró la utilización de otras formas de solución.

Conversación profesor-alumno: hubo un bajo nivel de discusión, los alumnos participaron cuando se les solicitó.

Conversación alumno-alumno: los alumnos expresaron sus razonamientos, algunos fueron aprovechados y se limitaron a dar respuestas cortas.

Manejo de la conversación: no se aprovecharon las oportunidades para que los estudiantes participaran, las explicaciones que dieron los alumnos fueron dirigidas al profesor.

Herramientas: son limitadas, aun cuando se utilizó enciclomedia, no se aprovecha en todo su potencial.

Herramientas y estilos de aprendizaje: solamente se utilizó el libro de texto, sin contextualizar a situaciones más cercanas a los alumnos.

Variedad de modelos de presentación: solamente el que presenta el libro de texto, aun cuando se utilizó el recurso de Enciclomedia, se hizo únicamente para presentar las páginas del libro. La página del libro en la pantalla se utilizó para identificar donde colocar el resultado.

Relaciones y normas: el profesor atiende las demandas de los alumnos y muestra empatía.

Comunicación de las normas: las normas ayudaron a la organización de la clase, aun cuando fueron muchos alumnos, se pudo escuchar sus participaciones y las explicaciones del profesor.

Empatía: el profesor mostró alto nivel de empatía con todos sus alumnos, los motivó y reforzó sus participaciones con frases cortas. Ejemplo: bien, bien hecho, que bien.

4.2.1.2. Observación final

Tema: Principios del Sistema de numeración decimal. Diferentes bases.

El profesor trabajó con tableros hechos con hojas marcadas por dobleces que dividen la hoja en cuatro partes, se utilizan fichas para representar los valores absolutos, los valores relativos se especifican en cada tablero.

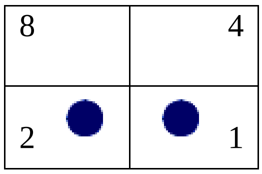
Sacaron fichas, el profesor indicó

Profesor. Vamos a escribir los valores que tienen estos lugares, el tablero debe quedar así (muestra el tablero como sigue).

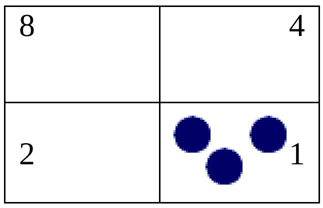
8	4
2	1

Profesor. En este tablero y respetando los valores de los diferentes lugares, representen el número tres, colocando las fichas necesarias.

Alumno. (Hace la siguiente representación).



Otro Alumno. (Representa así)



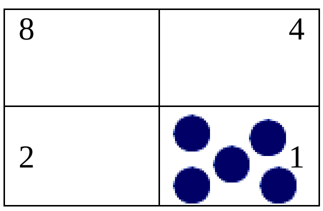
Profesor. Ambos están bien, pero vamos a representar las cantidades con el menor número de fichas, si nos acatamos a esta regla que les acabo de decir ¿cuál será el correcto?

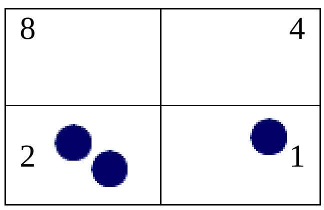
Alumno. Una ficha en el valor dos y una ficha en el valor uno; porque utilizamos dos fichas y en la otra tres.

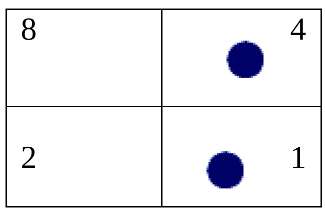
Profesor. Bien, ahora representen el cinco. Hay diferentes formas de representación.

Los alumnos observan el trabajo de sus compañeros. El profesor deja que ellos se pregunten y corrijan, la solución correcta casi se unificó en el grupo. Algunos alumnos realizan cambios sobre los tableros, lo que demuestra un trabajo previo y una asimilación de las reglas.

Ejemplos de las respuestas dadas.







Los alumnos que tuvieron incorrecta la representación, corrigieron.

Profesor. Representen el número siete.

Los alumnos iniciaron la representación utilizando diferentes estrategias. Inician colocando tres en el dos y una en el uno y cambiaron dos del dos por una de cuatro. Colocaron siete en el uno, y combinaron cuatro de uno por una de cuatro, dos de uno por una de dos. Directamente observaron que el mayor valor que se puede representar es una de cuatro, les faltan tres, colocaron una de dos y falta uno, colocaron una de uno. Estas acciones se observaron; los alumnos las hicieron patentes al quitar y poner, quitar y mover fichas en su tablero.

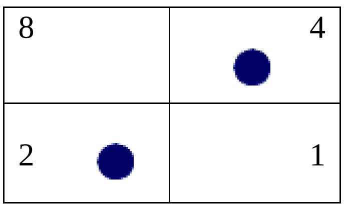
Profesor. Vamos con el seis.

Fue visible la rapidez con la que representaron en el tablero el número seis. Los alumnos levantaron la mano para solicitar dar respuesta, otros la dijeron en voz alta para demostrar que ya la había realizado.

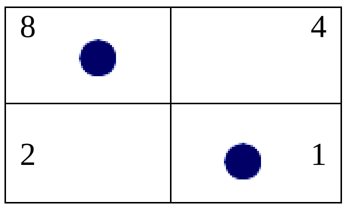
El profesor propone ejercicios con mayor dificultad y presiona en el tiempo para su realización. Los alumnos realizan cálculos para representar correctamente el número, se percibe que algunos practican estrategias que tratan de validar.

Profesor. Vamos a realizar la siguiente, tomen dos fichas y representen con esas dos fichas una cantidad.

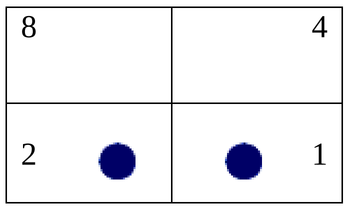
El profesor anota las diferentes representaciones en el pizarrón.



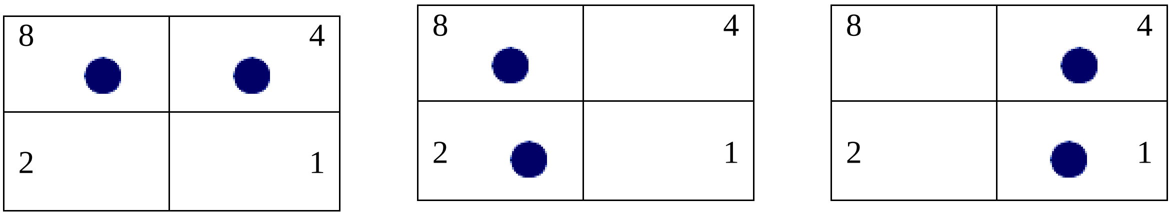
6



9



3



12 10 5

Profesor. ¿Cuál de ellas representa la cantidad mayor?

Alumnos. El doce.

Profesor. ¿Cuál la menor?

Alumnos. El tres.

Profesor. ¿Por qué una es mayor y otra menor. Si en las dos utilizo la misma cantidad de fichas?

Alumno. Son los valores del tablero.

Con esta actividad el profesor hace una reflexión, los alumnos muestran interés y sorpresa al notar esta relación entre valor absoluto y relativo.

Profesor. Ahora vamos a hacer el tablero de base tres.

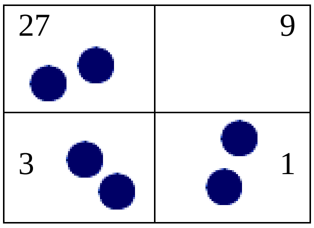
27	9
3	1

Profesor. En esta base podemos colocar mayor número de fichas en cada posición, ¿hasta cuántas? Vamos a realizar ejercicios y se van a dar cuenta. El veinte.

Se realizan varios ejercicios, los alumnos van identificando las relaciones entre los valores de las posiciones, afinan sus estrategias

Profesor. Vamos con el sesenta y dos.

Se les dificultó realizar los cálculos, colocaron una en el veintisiete y colocaron una más, algunos realizaron operaciones con lápiz y papel, “llevo cincuenta y cuatro” “faltan ocho” “dos de tres y dos de uno”. Se muestra el siguiente tablero.



Profesor. Vamos con el tablero base cinco.

125	25
5	1

Representan varias cantidades.

Profesor. Vamos a hacer el tablero base diez.

1000	100
10	1

Se presenta el problema sobre la cantidad de fichas.

Profesor. ¿Hasta cuántas fichas puedo colocar en cada posición?

Alumno. Diez, no nueve.

Profesor. ¿Por qué hasta nueve, es el número de fichas que puedo colocar?

Alumno. Si tenemos diez de diez se forma una de cien.

Al realizar ejercicios, los alumnos observaron que los podían hacer sin realizar operaciones con lápiz y papel.

Profesor. ¿Cuál se les hizo más fácil?

Alumnos. El de base diez.

Profesor. Se les facilitó el de base diez porque lo han utilizado desde hace mucho tiempo. La primera posición son las unidades, la segunda las decenas, la tercera las centenas y la cuarta las unidades de millar, este tablero puede seguir, vamos a recortar el tablero y colocarlo en forma horizontal.

1000	100	10	1

Profesor. Ahora si vemos los valores posicionales como los utilizamos cotidianamente, pero los podemos trabajar en el tablero. Díganme cómo queda el ocho mil setecientos sesenta y tres.

Alumnos. Ocho de mil, siete de cien, seis de diez y tres de uno.

Los alumnos realizan varios ejercicios de notación desarrollada. Ejemplo:

$$5364 = 5 \times 1000 + 3 \times 100 + 6 \times 10 + 4 \times 1$$

Había un trabajo previo con los tableros, pero fue en esta sesión cuando se llegó a la base diez. La actividad es propicia para representar los valores absolutos y relativos de los sistemas de numeración posicionales, se utiliza el cálculo mental para representar los números.

El profesor comentó que su propósito fue que los alumnos observaran los principios de un sistema posicional, para ello utilizó esta idea que trabaja con las diferentes bases.

Parámetros de observación.

Tarea: la tarea fue atractiva, los alumnos se interesaron, en todo momento participaron.

Desafío matemático: el profesor supo graduar los niveles de complejidad de los ejercicios, que resultó un reto para los alumnos.

Integridad y significación: no se aprovechó el interés de los alumnos para cuestionarlos y conducirlos a la enunciación matemática de los principios de un sistema de numeración posicional.

Captar el interés: los alumnos estuvieron interesados y participativos.

Conversación profesor-alumno: el profesor dio instrucciones pertinentes para la actividad.

Conversación alumno-alumno: los alumnos conversaron sobre la actividad, faltando utilizar conceptos.

Dominio de la conversación: al cuestionar a los alumnos, se debió formalizar el contenido matemático.

Herramientas y estilos de aprendizajes: las representaciones fueron innovadoras, sencillas y atractivas, la mayoría de los alumnos respondieron positivamente a ellas.

Variedad de modelos de representación: realizó variaciones sobre el mismo modelo para acercarse a la representación cotidiana de las cantidades en un sistema de numeración posicional.

Normas: los participantes no respetaron los turnos para participar, lo que dificultó la comprensión de las participaciones, no siguen las indicaciones del profesor en esperar el turno para participar.

Se llevó al salón de clases una experiencia de enseñanza expuesta en una sesión del Taller, se aprovechó el ejercicio de cálculo mental para trabajar con las propiedades de los sistemas de numeración posicional.

A continuación se presentan los concentrados de los parámetros de observación de las dos sesiones impartidas por el profesor Isaías. *(Véanse figuras 4.9 y 4.10).*

PARÁMETROS DE OBSERVACIÓN

Nombre del Profesor Isaías Grupo 6º. **INICIAL**

TAREAS.	A	B	C	D
Desafío matemático.		x		
Integridad y significación.		x		
Capta el interés.			x	

CONVERSACIÓN	A	B	C	D
Conversación del profesor.			x	
Conversación profesor-alumno.			x	
Conversación alumno-alumno.			x	
Dominio de la conversación.			x	

HERRAMIENTAS.	A	B	C	D
Herramientas y estilos de aprendizajes.			x	
Variedad de modelos de presentación.				x

RELACIONES Y NORMAS.	A	B	C	D
Comunicación de las normas.	x			
Empatía.		x		

Figura 4.9. Parámetro de observación, sesión inicial.

PARÁMETROS DE OBSERVACIÓN

Nombre del Profesor Isaías Grupo 6º. **FINAL**

TAREAS.	A	B	C	D
Desafío matemático.	x			
Integridad y significación.		x		
Capta el interés.		x		

CONVERSACIÓN	A	B	C	D
Conversación del profesor.		x		
Conversación profesor-alumno.		x		
Conversación alumno-alumno.			x	
Dominio de la conversación.		x		

HERRAMIENTAS.	A	B	C	D
Herramientas y estilos de aprendizajes.		x		
Variedad de modelos de presentación.		x		

RELACIONES Y NORMAS.	A	B	C	D
Comunicación de las normas.	x			
Empatía.		x		

Figura 4.10. Parámetro de observación, sesión final.

Comparando los parámetros de las observaciones inicial y final, notamos un avance en la elección de la tarea para el propósito de enseñanza. Lo que ocasionó captar el interés de los alumnos y mantenerlos en la actividad, desarrollando un razonamiento matemático. En la conversación en la que interviene el profesor se pudo observar un dominio del contenido y de la actividad, falta en este aspecto provocar una comunicación entre los alumnos. El trabajo de los alumnos es individual.

Las herramientas mejoraron, se presentó una actividad que no está en el libro de texto, que requiere una mayor interacción del alumno con material concreto, y se aprovechó el interés para plantear cuestionamientos que propiciaron una reflexión sobre las acciones realizadas. En lo referente a las relaciones y normas, el profesor mantiene un buen nivel, su relación con los alumnos es propicia para la realización de la enseñanza y el aprendizaje.

4.2.2. Observaciones de clase, profesora Paty

La profesora tiene 24 años de trabajo docente, tiene formación normalista, estudios de pedagogía en la Escuela Normal Superior de México, atiende a veintiséis alumnos de quinto grado, la escuela donde labora es de tiempo completo, es decir, labora en un horario de 8.00 horas a 16.00 horas.

4.2.2.1 Observación inicial.

Tema: fracciones.

La profesora escribió el nombre del tema en el pizarrón: conjuntos y fracciones. Solicitó a los alumnos que sacaran su cuaderno y lápiz, repartió unos círculos de colores de 7 cm. de diámetro y un puño de semillas de frijol, los alumnos estuvieron organizados en equipos de 4 o 5 elementos cada uno, en cada equipo había un recipiente.

La profesora indicó: con los círculos y las semillas, se van a formar enteros y fracciones.

Profesora. Con los círculos vamos a formar enteros y fraccionarios, si yo les digo que formemos un entero en cuartos, ¿cuántos círculos vamos a poner?

Los alumnos responden a coro.

Alumnos. Cuatro.

Profesora. Muy bien póngalos; un entero en cuartos.

Los alumnos colocaron cuatro círculos en el centro de la mesa.

Profesora. Ahora si yo le digo que su entero va a estar en quintos.

Alumno. Cinco.

Profesora. Les voy a hacer una pregunta; ¿el entero que estaba en cuartos es del mismo tamaño del que ahora está en quintos?

Alumno. No.

Profesora. ¿Por qué?

Se escuchó una voz que dijo: *"sí"*

Profesora Si ¿por qué? –señala a un alumno solicitando la respuesta.

Roberto. Porque nada más cambiamos de número.

Profesora. Y aquí ¿por qué dicen que no? Señala a otro alumno.

Omar: Porque aumentamos una figura.

Profesora. ¿Será igual o será más grande? Quiero que hagan esta inferencia, solamente por facilidad de repartir nuestro entero. Si tuviéramos la facilidad de tener un solo entero del mismo tamaño que pudiéramos repartir en medios, tercios, cuartos, sextos, novenos; y que pudiéramos repartir rapidito pues sería formidable, en este caso va a ser un entero que va a estar modificándose porque necesitamos dividirlo en diferentes partes, pero dijéramos que es la unidad. Siempre vamos a estar trabajando nuestro conjunto como una unidad.

Estas situaciones propuestas por la profesora para trabajar el contenido de fracciones muestran como se arman actividades que funcionan solo en el aula, con un argumento que hace énfasis en la facilidad para el alumno, que llegan a confundirlo y a crear en él conceptos erróneos.

Profesora. Ahora un conjunto de 24 frijoles.

Los alumnos contaron y formaron el conjunto de 24 frijoles, en cada uno de los equipos. Lo dividieron en medios, tercios, cuartos, sextos, octavos y doceavos. Calcularon cuantos frijoles tiene cada fracción.

Con esta actividad se resuelve en parte la dificultad planteada por la profesora en la actividad con los círculos. Podemos proponer enteros que se pueden dividir en diferentes fracciones sin ningún problema y observar relaciones de orden entre las fracciones obtenidas.

Profesora. Vamos a hacer un repasito.

Las fracciones con su correspondiente número de frijoles fueron leídas a coro por los alumnos.

Profesora. Si yo quisiera ordenar estas fracciones de mayor a menor o de menor a mayor, como quedaría. Vamos a anotar de mayor a menor. Heriberto pasa a ordenarlas.

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{24}$$

La profesora hizo que todos los alumnos verificaran visualmente.

Profesora. Quién me dice la razón por la cual están ordenados de mayor a menor.

Erick: Porque cuanto más grande es el número de abajo, cuantas más partes se va a dividir, en cambio, el número de abajo es más pequeño se va a ser más grande.

Profesora. Antes de que continuemos vamos a repasar las partes de la fracción.

Escribió en el pizarrón la fracción $\frac{3}{4}$ y con ayuda de los alumnos le anotaron su nombre al 3 y al 4. Numerador y denominador.

Profesora. ¿Que nos indica el numerador?

Karla: Es la cantidad que está en los cuartos.

Profesora. Bueno.

Señaló a otro alumno para recibir otra respuesta.

Carlos: El numerador es la cantidad que se toma del entero y se va a dividir entre el denominador.

Profesora. El denominador nos dice en cuantas partes se va a dividir. Y ahora el numerador ¿para qué nos sirve?

Héctor: Para ver en cuantos cuartos se dividió, es la cantidad que se va a dividir.

La profesora puso un ejemplo utilizando los círculos, formó un entero con cuatro círculos.

Profesora. Si digo tres cuartos que hago con el entero.

Alumno. Separo tres, aparto tres.

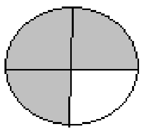
Profesora. Entonces que indica ese tres.

Lupita: Que es la cantidad que se va haciendo más chiquita.

La profesora pidió que lo hicieran y comentó en cada uno de los equipos, dio tiempo para ello; después de esto pidió a una alumna la respuesta.

Wendy: El numerador nos indica cuantos cuartos vamos a apartar.

Pone otra fracción para verificar que los alumnos entendieron ($\frac{4}{7}$), el ejercicio se hace con ayuda de los círculos y solicita que lo expliquen, lo explican con dificultad, la profesora regresa a la fracción de $\frac{3}{4}$ y hace la representación con un círculo.



Solicitó la explicación del numerador y del denominador, los alumnos contestaron correctamente.

La complejidad de la enseñanza de fracciones en este grado, aumenta cuando los conocimientos previos de alumno presentan errores conceptuales, si así es, el profesor empleará estrategias que favorezcan la creación de conflictos cognitivos, a fin de lograr el deseado cambio conceptual, ayudando al alumno a ser consciente del conflicto, enfrentándolo al problema con sus ideas y estableciendo las diferencias al asumir nueva información. Pero es necesario que anime a los alumnos a dar explicaciones que permitan detectar cuáles son las ideas o teorías que maneja.

Profesora. Ya he recordado como se llaman los elementos de una fracción, traten de explicar por qué está ordenado de mayor a menor.
Jesús: Cuanto más pequeño sea el denominador de una fracción, más grandes serán los pedazos,
Omar: Como va subiendo el denominador van quedando pedazos más chiquitos.
Profesora. Ahora vamos a darle el orden de menor a mayor.

La profesora debe de aprovechar estas participaciones de los alumnos para formalizar el conocimiento, los alumnos deben de reconocer en sus aportaciones la validez matemática. La existencia de una nueva explicación supone que los alumnos han establecido nuevas relaciones entre los diferentes conceptos, que tiene como consecuencia la formación de estructuras mentales diferentes.

La profesora explicó que son fracciones equivalentes e hizo que los alumnos participaran reafirmando las igualdades.

Profesora: Ahora les voy a pedir que ustedes hagan un conjunto de frijoles y busquen la manera de ir haciendo fracciones, y van anotando cuánto vale una de esas fracciones que vayan formando en equipo. Elijan primero el número de frijoles que tenga su entero.

Los alumnos trabajaron, formando su entero y dividiéndolo en cuartos, décimos, octavos, etc., según se puede dividir el entero elegido por ellos. La profesora pasó a los equipos, resolvió dudas, organizó e hizo observaciones individuales.

Los alumnos expusieron al grupo su trabajo, expresaron el número de elementos de su conjunto y las fracciones en que puede ser dividido.

Utilizando los ejercicios de los alumnos podría haberse ejercitado la reversibilidad, es decir, que un equipo dijera que su conjunto se podía dividir en determinadas fracciones y que el grupo expresará el número de elementos que podría tener dicho conjunto.

La clase concluyó cuando la profesora propuso un ejercicio en el pizarrón: *escribe fracciones equivalentes a las que se te dan*; los alumnos realizaron el ejercicio en su cuaderno.

Parámetros de observación

Tarea: estuvieron constituidas por ejercicios con material concreto, para su realización en equipos.

Desafío matemático: se tuvieron que realizar ejercicios para revisar y repasar los conocimientos previos de los alumnos, para los que no tenían ese problema los ejercicios no representaban un reto.

Integridad y significación: hubo intención de desarrollar conexiones significantes entre los conceptos de fracciones, a pesar de la confusión en la representación arbitraria del entero, se dio la oportunidad de que los alumnos expresaran sus ideas buscando que utilicen un lenguaje matemático.

Captar el interés: los alumnos participaron, compartieron la actividad del equipo, resolvieron los ejercicios y no existió cuestionamiento de parte del alumno al profesor.

Conversación: la profesora promovió la comunicación constantemente, animó e impuso respeto a las participaciones de los alumnos.

Conversación de la profesora: la profesora dio explicaciones y escuchó la de los alumnos, pero faltó cuestionar apropiadamente para que utilizaran significados matemáticos.

Conversación profesor alumno: la discusión fue limitada por la actitud de la profesora que escuchó la participación del alumno, y éste esperó junto con sus compañeros la aceptación de la docente.

Conversación de los alumnos: algunos alumnos participaron comprometiéndose con la tarea que realizaban en equipo, aportaron y escucharon razones, otros (los menos) permanecieron pasivos.

Manejo de la conversación: las participaciones individuales de los alumnos fueron limitadas y sus explicaciones las dirigieron a la profesora, en el trabajo de equipo fue diferente, la interacción entre los alumnos fue activa y la profesora buscó resolver y ayudar en el razonamiento que realizaban.

Herramientas: se utilizaron modelos discontinuos; frijoles y círculos, en forma mecánica, con el inconveniente de formar enteros con un número de elementos que fue propicio para la partición.

Herramientas y estilos de aprendizajes: los círculos y los frijoles respondieron al estilo de aprendizaje de algunos alumnos, hubiera sido interesante que formaran un entero con los elementos que existen en el salón de clases, con tiras de papel, un palito de paleta, figuras geométricas, etc.

Variedad de modelos de presentación: los modelos utilizados fueron limitados, no se logró la integración entre los diferentes conceptos.

Relaciones y normas: existió entre los alumnos una participación y aceptación de las normas y las relaciones de trabajo, que propició una buena actividad al interior de los equipos, imperaron el respeto y la tolerancia.

Comunicación de las normas: los alumnos trabajaron respetuosamente, el profesor respetó e hizo respetar las reglas, que propició un trabajo efectivo y provechoso.

Empatía: la relación de la profesora con sus alumnos fue de lazos estrechos, ella trabajó para que ellos comprendieran y se sintieran bien por su esfuerzo realizado.

4.2.2.2. Observación final.

Tema: tanto por ciento.

Los alumnos estuvieron sentados en equipos de tres y cuatro integrantes. La clase inició resolviendo los problemas que se dejaron de tarea el día anterior: precios de productos a los que se les aumenta o se les descuenta el 10 %. Para verificar sus resultados algunos alumnos lo hacen con calculadora.

Ejemplo: pantalla de plasma $10249.00 descuento 10 %

Precio aplicando el descuento. $9224.10.

Profesora. Les voy a dar un ejercicio y en equipo lo van a resolver. (Cada alumno recibe una hoja de trabajo).

Dos de los cuatro ejercicios fueron:

1) Si al repartir un premio de $600.00 a Midori, le corresponde el 50 %
   ¿Cuánto le tienen que dar? ________________________________
   ¿Qué fracción del premio le dan? ___________________________
   ¿Cómo se representa esta fracción en forma decimal?___________
2) Si al repartir 500 chocolates, a Jaqueline le corresponde el 25 %
   ¿Cuánto le tienen que dar?________________________________
   ¿Qué fracción le dan?____________________________________
   ¿Cómo se representa esta fracción en forma decimal?___________

(Los equipos trabajaron en la solución de los ejercicios, la profesora pasó y revisó el trabajo que realizaban).

Profesora. ¿Cómo van? Bien, ¿alguna dificultad?

(La profesora escuchó las dudas, los razonamientos y los cuestionó para que encontraran la solución).

Alumno. Tengo una duda al repartir 500 chocolates, ¿qué fracción le tocó?
Profesora. ¿Qué fracción le tocó?
Alumno. Un cuarto.

Profesora. ¿Qué forma decimal le corresponde a un cuarto?

Alumno. La cuarta parte del entero.

Profesora. Si el entero yo lo parto en cuatro ¿cuánto va a valer cada pedacito en fracción decimal? ¿Cuánto valdría por ejemplo la mitad?

Alumno. Doscientos cincuenta.

Profesora. Estamos empalmando dos cosas, estamos empalmando el número de cosas que estamos repartiendo, dicen que es un cuarto, entonces un cuarto ¿Cómo se puede representar en decimal? Desde antes tienen el problema, regresamos al primero. No le borren primero vamos a ver. ¿Quién lee la primera?

Alumno. Si al repartir un premio de seiscientos a Midori le corresponde el cincuenta por ciento ¿Cuánto le tienen que dar? Trescientos.

Profesora. Trescientos ¿Por qué?

Alumno. Es la mitad de seiscientos.

Profesora. Trescientos representa, dicen que un medio, muy bien. Ahora aquí donde dice ¿qué forma decimal le corresponde a un medio?, todo el entero serían los seiscientos, trescientos está representando al medio, ¿cómo representas la mitad?, ¿la mitad? ¿la mitad? No es la mitad de seiscientos, es la mitad de su unidad. Si tuviéramos todo el entero sería uno, pero solo tengo la mitad de ese uno, ¿cuánto es la mitad de uno? y entonces ¿cuánto sería?

Alumno. Punto cincuenta.

Profesora. Punto cincuenta o punto cinco, entonces aquí están equivocados, creo yo. Corrijan. Ya quedó la primera. Bórrale bien, ahí parece punto quinientos. Ya le comprendieron esto de la fracción decimal, muy bien vamos con la siguiente, a ver si encuentran las respuestas. Ahorita regreso.

La profesora atendió a otro equipo que la solicitó.

Profesora. Ya se volvieron a atorar, aquí les están pidiendo ¿qué?

Alumno El veinte por ciento.

Profesora. Su cien, si lo van dividiendo: veinte, veinte, veinte, veinte, veinte, ¿cuántos veintes les salen?

Alumno. Cinco.

Profesora. Entonces veinte representa.

Alumno. Un quinto.

Profesora. Y un quinto sería esta partecita del cien ¿cuánto valía?

Alumno. Veinte.

Profesora. Veinte, pero ahora regresamos al total, ¿cuánto es?

Alumno. Ochocientos.

Profesora. Entre cuanto lo tiene que dividir, ya me lo dijeron ¿entre cuánto?

Alumno. Veinte.

Alumno. Un quinto.

Profesora. A ver, ¿cuántos veintes te salieron del cien?

Alumno. Cinco.

Profesora. Entonces ¿entre cuánto?

Alumno. Cinco.

Profesora. Entre cinco, a ver ¿a cómo le tocará? Oye ¿estás leyendo?, dice ¿Qué fracción del premio le dan?

Alumno. Un quinto.

Profesora. Un quinto, pero regresamos arriba al número tres.

Alumno. Si reparto ochocientos lápices de colores a Ulises le corresponde el veinte por ciento. ¿Cuántos le tengo que dar?

Profesora. Para saber cuántos le tengo que dar, ¿Qué hacemos? Ya me lo dijeron hace rato, ¿qué fracción le dieron?

Alumno. Un quinto.

Profesora. Y entonces ¿entre cuánto tengo que repartir?

Alumno. Cinco.

Profesora. Si Mario ¿qué es lo que vas a repartir? hijo.

Alumno. Un quinto.

Otro alumno. No ochocientos.

Profesora. ¿Cuánto le van a dar nada más?, ¿Qué parte de ese ochocientos le van a dar?

Alumno. El veinte por ciento.

Profesora. El veinte por ciento que está representado ¿por…?

Alumno. Un quinto.

Profesora. Un quinto, entonces le tengo que dar la quinta parte. ¿Cómo le hago para sacar la quinta parte de ochocientos? ¿Dividir entre…?

Alumno. Ochocientos entre cinco.

Profesora. Órale.

La profesora se retiró del equipo.

Alumno. Es el diez por ciento, más el diez por ciento, el diez por ciento es ochenta, más otro diez por ciento, es ciento sesenta.

(El equipo resuelve correctamente los siguientes ejercicios).

Los equipos explican sus procedimientos

Profesora. Si nos pones los datos.

25% de 500 = 125

Fracción $\frac{1}{4}$, forma decimal 0.25

Profesora. ¿Cómo fue que obtuvieron 125?, ¿alguien del equipo quiere ayudar?

Alumno. Sacamos el veinticinco por ciento que es un cuarto, entonces dividimos quinientos entre cuatro, y nos salió ciento veinte cinco, en la fracción pusimos; un cuarto y en forma decimal pusimos punto veinticinco.

Profesora. ¿Por qué no le podemos poner uno punto veinticinco?

Alumno. Porque se pasaría.

Profesora. Uno punto veinticinco ¿Cómo cuantos cuartos sería?

Alumno. Cinco cuartos.

(Se llena la tabla, la profesora pregunta).

Profesora. ¿Quién tuvo dificultad para resolver algún ejercicio?

Alumno. El veinte por ciento.

Profesora. ¿Por qué Omar?

Omar. Porque no encontrábamos la fracción.

La profesora entregó una tarjeta a cada uno de los alumnos con la ilustración de muebles o electrónicos para el hogar, con la descripción y el precio. Los alumnos propusieron un ejercicio que pudiera ser de aumentar un impuesto o aplicar un descuento, se resolvió en equipo y posteriormente lo explicaron a sus compañeros. Los equipos trabajaron con entusiasmo y presentaron los trabajos.

Parámetros de observación.

Tarea: los ejercicios de las hojas de trabajo y las ilustraciones fueron pertinentes para la actividad.

Desafío matemático: la dificultad del ejercicio consistía en la conexión de la representación del tanto por ciento, en fracción y número decimal. Tal vez proponiendo un problema en el cual la representación significa una ventaja o utilidad fuera más atractivo para el alumno.

Integridad y significación: la conexión era explicita en el ejercicio, no se llegó a consolidar plenamente, por inclinarse por un procedimiento mecánico.

Captar el interés: los alumnos estuvieron interesados y participativos, la segunda actividad detonó la inventiva y la diligencia para hacer su ejercicio.

Conversación: la comunicación es directa y fluye sin problemas, la profesora busca el encuentro con los alumnos y está atenta para escucharlos.

Conversación de la profesora: la forma de cuestionar requiere de más elementos para impulsar el razonamiento del alumno, parece que se le quiere dar la respuesta en la pregunta.

Conversación profesor alumno: la profesora impone un ritmo acelerado en el cuestionamiento, que provoca las respuestas cortas del alumno, el cual se da cuenta cuando su respuesta no es correcta, porque surge un nuevo cuestionamiento sobre el mismo tópico.

Conversación de los alumnos: intercambian comunicación matemática con facilidad y aprovechan la participación de sus compañeros.

Manejo de la conversación: se observa una premura en la actitud de la profesora; cuando solicita una respuesta o responde a una pregunta, los alumnos se quedan con dudas aun cuando obtienen la aceptación a su respuesta por la profesora.

Herramientas: fueron pertinentes, pero faltó un ejemplo con material concreto o cercano a los alumnos.

Herramientas y estilos de aprendizajes: no se aprovechó el cálculo mental, un razonamiento más estructurado, partiendo de un ejemplo que presentara una dificultad extra, por ejemplo la cantidad de agua en el cuerpo humano, el medidor de gasolina en el automóvil, etc.

Variedad de modelos de presentación: falta de modelos concretos, visibles o imaginarios, cercanos a los alumnos.

Relaciones y normas: los alumnos trabajan con respeto y tolerancia, respetan las normas y disfrutan de un ambiente propicio para el aprendizaje.

Comunicación de las normas: existen colaboración y compromiso en el trabajo como una regla de aula.

Empatía: la profesora da atención, ánimo, estrecha lazos de cordialidad y aceptación hacia sus alumnos.

Se presentan los parámetros de observación de la sesión inicial y final. (Véanse *figuras 4.11 y 4.12*).

PARÁMETROS DE OBSERVACIÓN

Nombre de la Profesora: Paty Grupo 5º. **INICIAL**

TAREAS.	A	B	C	D
Desafío matemático.			x	
Integridad y significación.		x		
Capta el interés.		x		

CONVERSACIÓN	A	B	C	D
Conversación del profesor.		x		
Conversación profesor-alumno.		x		
Conversación alumno-alumno.		x		
Dominio de la conversación.			x	

HERRAMIENTAS.	A	B	C	D
Herramientas y estilos de aprendizajes.			x	
Variedad de modelos de presentación.			x	

RELACIONES Y NORMAS.	A	B	C	D
Comunicación de las normas.	x			
Empatía.	x			

Figura 4.11. Parámetro de observación, sesión inicial.

PARÁMETROS DE OBSERVACIÓN

Nombre de la Profesora: Paty Grupo 5º **FINAL**

TAREAS.	A	B	C	D
Desafío matemático.		X		
Integridad y significación.		X		
Capta el interés.		x		

CONVERSACIÓN	A	B	C	D
Conversación del profesor.	X			
Conversación profesor-alumno.	x			
Conversación alumno-alumno.		X		
Dominio de la conversación.		x		

HERRAMIENTAS.	A	B	C	D
Herramientas y estilos de aprendizajes.		X		
Variedad de modelos de presentación.		x		

RELACIONES Y NORMAS.	A	B	C	D
Comunicación de las normas.	X			
Empatía.	x			

Figura 4.12. Parámetro de observación, sesión final.

La profesora muestra organización, producto de una planeación de sus actividades apoyándose con materiales que provocan el interés y trabajo de los alumnos, mantiene la atención y ella atiende a las necesidades cognitivas que los alumnos presentan. Los alumnos se relacionan con respeto y con reglas definidas.

4.2.3. Observaciones de clase, Profesora Anabel.

La profesora tiene 4 años como docente, labora en una escuela particular, su formación académica: estudios de Psicología en la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza de la UNAM. Atiende a nueve alumnos de sexto grado.

4.2.3.1 Observación inicial.

Tema: razón y proporción.

La clase inició con la solución de dos páginas del libro complementario de matemáticas de editorial particular, en la que se presentaron ejercicios como el siguiente:

“Oscar le dijo a sus amigos que su hermano era el más chico de su familia, cuando llegaron a recogerlo, todos notaron que su hermano era más bajo que su mamá”

Otro enunciado que leyeron los alumnos en este libro fue el siguiente: "*la profesora de Oscar les pidió que escribieran oraciones utilizando los adjetivos grande y pequeño, por lo tanto, escribieron las siguientes oraciones: La gallina es grande y el elefante es pequeño".*

Profesora. Ustedes creen que tenía razón.

Los alumnos contestaron a coro: no.

La profesora preguntó ¿por qué?

Los alumnos afirmaron que el elefante es grande y la gallina es pequeña.

Profesora. ¿Cómo es el tamaño de ustedes comparado con el de una jirafa?

Alumno. Pequeño.

Profesora. ¿Cómo es la gallina comparada con una hormiga?

Alumno. Grande

Después de varios ejercicios parecidos a los anteriores se concluyó en el libro: una cantidad se puede considerar grande o pequeña dependiendo de con qué otra se le compare: relativamente grande o relativamente pequeña. Se sugirieron algunos ejercicios como el siguiente:

"La gallina es un animal grande". La profesora les indicó: escriban oraciones utilizando ésta. Dio tiempo y observó que todos trabajen.

Profesora. ¿Qué puso Carlos?

Carlos: La gallina es relativamente grande a comparación con un gusano.

La profesora propuso un problema.

Profesora. Una señora hace doce porciones de sopa con una cucharada de sal, ahora hace seis porciones y le pone una cucharada de sal ¿la sal es mucha o poca?

Los alumnos no entendieron la pregunta, no sabían qué contestar,

Profesora. Ahora va a ser menos sopa, va a ser seis y le pone igual cantidad de sal ¿cómo va a quedar esa sopa?

Los alumnos seguían sin contestar.

Profesora. Va a quedar salada. Y entonces la cantidad de sal que ella puso ¿es grande o es pequeña?

Alumno. Es grande.

Después de realizar otro ejercicio parecido y proponerles uno al cual los alumnos contestaron, no convencidos. Propuso.

Profesora. Traigo sopa para 20 personas y ustedes que son 9 se la comen toda ¿cómo es la cantidad de sopa que comieron?

Alumno. Grande.

Profesora. Ahora vamos a nuestro libro de la SEP lección 61 "relativamente grande o chico" en esta lección vamos a ver cosas que ya hemos visto: regla de tres, ¿se acuerdan de la regla de tres?, vamos a ver proporcionalidad que es lo mismo que la regla de tres, porcentaje y tablas de frecuencia relativa que ya las hemos analizado, pero las vamos a ver en una sola lección.

Les solicitó a los alumnos sacar su cuaderno y su calculadora, le pidió a Angélica que leyera, solicitándole a los demás que cada quien redacte su respuesta. En la lección existe una relación entre el primer ejercicio y el segundo, esto dificulta la solución del último; los alumnos entienden después de dos ejemplos más. En el libro se lee "compara tus respuestas con las de tus compañeros", pero la lección se ha ido resolviendo entre todos por lo que no hay ningún comentario. Se resolvió el ejercicio de la página 137 siendo necesario utilizar el pizarrón para explicar la tabla. La profesora preguntó a los alumnos sobre sus respuestas. La profesora ejemplificó la proporción: "si 5 vasos de agua necesitan 3 de jugo, 20 vasos de agua ¿cuánto necesitan de jugo?" y escribió en el pizarrón.

5 --- 3

20 --- ?

20×3 y $60 \div 5 = 12$

Alumno. Sólo hay que multiplicarlo por cuatro.

Profesora. ¿Por qué por cuatro?

Alumno. 5 x 4 son 20.

Profesora. Haber de regreso Carlos.

Carlos: así está la regla de tres, pero si se multiplica 5 x 4 ya son 20 y si multiplico 3 x 4 da 12

Profesora. Si exactamente, recuerden que la magia, las matemáticas son un juego de números y hay muchas formas de llegar a un resultado.

Se continuó trabajando colectivamente, que por ser un grupo muy reducido (9 alumnos) facilitó el observarlos y verificar su trabajo. Se copió la tabla de los vasos de naranjada, vasos de jugo y vasos de agua y se resolvió preguntando a los alumnos; se presentó un problema al preguntar si $\frac{2}{5}$ se pueden simplificar, las respuestas fueron divididas.

La profesora resolvió esta duda y alentó a los alumnos para que expliquen sus procedimientos de los siguientes ejercicios.

El siguiente ejercicio se resolvió en equipos, la profesora dio opción a la formación de los equipos de dos personas, como los alumnos quieran o a la suerte, siendo esta última forma la que determinó la conformación de los equipos, se dio tiempo para la resolución del ejercicio 4. La profesora escuchó a los alumnos y los cuestionó para asegurarse que comprendían los procedimientos que ella explicó en el pizarrón. Los alumnos que tuvieron dudas en el trabajo en equipo acudieron al escritorio donde la profesora les explicó.

La profesora calificó el ejercicio, los alumnos que presentaron errores regresaban a su lugar a corregirlo y volvían para calificarse, se dio por terminada la clase con esta actividad.

Parámetros de observación

Tareas: son las propuestas por los libros de texto, no cercanas a los alumnos.

Desafío matemático: las tareas representaron un reto y respondieron al interés de los alumnos, pero faltó precisión para una mejor comprensión de lo que se quería razonar.

Integridad y significación: se desarrollaron conexiones superficiales debido a que los problemas planteados no respondieron a las vivencias de los niños.

Captar el interés: los alumnos estuvieron interesados y atentos, participaron y escucharon con atención la participación de sus compañeros.

Conversación: la profesora no aprovechó las oportunidades para la participación de los alumnos, las explicaciones no se alejaron del texto.

Conversación del profesor: existió atención para desarrollar significados, pero faltó precisión, sentido, para que los alumnos tuvieran seguridad sin argumentar una posible magia.

Conversación profesor-alumno: los alumnos participaron cuando se les pidió, existió un nivel bajo de discusión.

Discurso de los alumnos: algunos alumnos proporcionaron sus razones y comprensiones, otros sólo dieron respuestas cortas sin ser fundamentadas.

Manejo del discurso: los alumnos explicaron sus razones principalmente a la profesora, no todos los alumnos participaron y la profesora no los animó.

Herramientas: libros de texto, calculadora y cuaderno, no hay referentes concretos que apoyen un razonamiento.

Herramientas y estilos de aprendizajes: no se consideraron los estilos de aprendizaje, se limitó la clase al uso de los libros de texto.

Variedad de modelos de presentación: los modelos se utilizaron como ejemplos, sin ser aprovechados para la comprensión y el razonamiento.

Relaciones y normas: el número de alumnos ayuda al orden y la disciplina, existieron respeto y trato cordial por la profesora.

Comunicación de las normas: las normas fueron explicitas y los alumnos las reconocen y se respetan en el trabajo cotidiano.

Empatía: la profesora mostró un nivel alto de empatía con sus alumnos, los hizo sentir bien con las tareas realizadas.

4.2.3.2. Observación final

Tema: tanto por ciento.

La profesora entregó a sus alumnos una hoja de trabajo en donde se expone: “un centro comercial publicó las siguientes ofertas”:

Toda la ropa 40 % de descuento	Todos los juguetes 50 % de descuento
Todos los zapatos 45 % de descuento.	Todos los muebles 20 % de descuento.
Tenis 30 % de descuento	CDs 35 % de descuento.

La profesora inició con ejercicios sencillos, ejemplo.

Profesora. ¿Cuánto pago por un pantalón que vale cien pesos?

Alumno. Cuarenta pesos.

Profesora. ¿Por qué cuarenta pesos?

Alumno. Porque es el cuarenta por ciento.

Profesora. Pero… (La profesora observa manos levantadas). Toño ayúdame.

Toño. El precio es de cien pesos, el descuento se le resta al precio del pantalón.

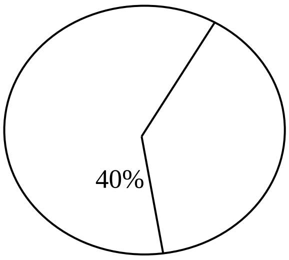
Profesora. ¿Quién me explica que es un descuento? Dime Carmen.

Carmen. Todas las cosas tienen precio, si se hace descuento eso se le quita al precio.

Profesora. En este caso del pantalón, el precio de cien pesos y el descuento ¿de cuánto es?

Alumnos. Cuarenta por ciento.

Profesora. Eso quiere decir que se le va a descontar cuarenta pesos. Ejemplo. Si representamos el precio del pantalón, esto se pagaría, pero el descuento es la parte del precio que no se paga, que es el cuarenta por ciento (en el pizarrón anotó).



Profesora. Quiero comprar un carrito de control remoto que cuesta doscientos cuarenta pesos, ¿cuánto pagaré?

Alumno. Ciento veinte pesos.

Profesora. ¿Por qué ciento veinte?

Alumno. Juguetes tienen el cincuenta por ciento que es la mitad de precio. Ciento veinte es la mitad de doscientos cuarenta.

Profesora. ¿Otra forma para resolver este problema?

Alumno. Se multiplica doscientos cuarenta por punto cincuenta.

Profesora. Toño pasa a realizar la operación.

El alumno realizó la operación correctamente. La profesora dio indicaciones para que resolvieran la hoja de trabajo. El siguiente problema presentó dificultad para ser resuelto por los alumnos.

Si pagó con tres billetes de $200.00, un par de zapatos de $360.00 y un par de tenis de $300.00 ¿recibiré cambio?____

Algunos alumnos se acercaron a la maestra para expresarle sus dudas, la profesora decidió explicarlo a todo el grupo.

Profesora. Vamos a ver primero, si entendemos el problema (lo lee en voz alta) ustedes que creen ¿me darán cambio?

Alumnos. No, sí.

Profesora. Los que dicen no ¿por qué dicen no?

Alumno. Si sumamos trescientos sesenta más trescientos, da seiscientos sesenta, y él paga con seiscientos.

Alumno. Pero no has sacado el descuento.

Profesora. ¿Esos artículos tienen descuento?

Alumno. Sí.

Profesora. ¿Qué descuento tienen?

Alumno. Los zapatos el cuarenta y cinco y los tenis el treinta por ciento.

Toño. Yo saque el precio de los zapatos quitándole el descuento y me dio ciento noventa y ocho pesos.

Profesora. ¿Cómo lo hiciste?

Toño. Multiplique trescientos sesenta por punto cuarenta y cinco y me dio ciento sesenta y dos, a trescientos sesenta le reste ciento sesenta y dos.

Profesora. Y ahora ¿qué sigue?

Alumno. Sacar cuanto paga por el par de tenis.

Profesora. El par de tenis cuestan trescientos el descuento es de treinta por ciento. ¿Cuánto paga? Multipliquen trescientos por punto treinta.

Alumno. Son noventa, yo saque el treinta por ciento de cada cien y son…(la profesora interrumpió la explicación del alumno)

Profesora. Al precio hay que restarle noventa.

Alumno. Son doscientos diez.

Alumno. Yo lo hice mentalmente.

Profesora. Para saber cuánto paga por los zapatos y el par de tenis sumamos, ciento noventa y ocho más doscientos diez. ¿Cuánto da esa suma?

Alumno. Cuatrocientos ocho.

Alumno. Si dan cambio.

Profesora. ¿Cuánto dan de cambio?

(Después de un tiempo durante el cual los alumnos realizan algunos cálculos)

Alumnos. Ciento noventa y dos pesos.

Parámetros de observación.

Tareas: se representaron ejercicios de repaso, con situaciones cotidianas para los alumnos.

Desafío matemático: las tareas no representaron un reto, ejercicios parecidos habían sido resueltos por los alumnos y sólo se les solicitó la aplicación de procedimientos más que de un razonamiento.

Integridad y significación: no se aprovechó ampliamente la participación de los alumnos en la conexión de los conceptos de porcentaje, cálculo mental, representación decimal y completar un entero.

Captar el interés: la profesora captó el interés de los alumnos quienes se comprometen con la tarea.

Conversación: se enfocó hacia procedimientos y resolución de operaciones dejando a un lado los conceptos.

Conversación del profesor: faltó enfatizar la relación de tanto por ciento-fracción-número decimal; aprovechar la participación para utilizar el cálculo mental en el procedimiento de resolución.

Conversación de los alumnos: compartieron sus dudas con su profesora y compañeros, fueron capaces de dar argumentos.

Manejo de la conversación: se solicitó argumentación a los alumnos; no se atendió la solicitud de los alumnos, cuando éstos no entendieron.

Herramientas: por ser un ejercicio de repaso sería suficiente la hoja de trabajo, pero se pudieron haber aprovechado materiales que existen en el salón de clases.

Herramientas y estilos de aprendizaje: se utilizaron representaciones en el pizarrón, en la hoja de trabajo y explicaciones cuando los alumnos lo requirieron. La hoja de trabajo como ejercicio de repaso fue algo novedoso para los alumnos.

Variedad de modelos de representación: los problemas sólo presentaban un formato: precio, descuento igual a nuevo precio; hubiera sido significativo jugar con las cantidades y hacer representaciones gráficas para deducir relaciones.

Relaciones y normas: la profesora y alumnos lograron una convivencia eficaz para el trabajo.

Comunicación de las normas: existió un respeto a la participación y las relaciones entre profesor y alumno, alumno-alumno, que es correcta.

Empatía: la profesora dio su atención a todos los alumnos considerando su participación.

La profesora motivó la participación, solicitó argumentaciones, no aprovechó totalmente los pronunciamientos para realizar conexiones con otros conceptos. Escuchar al alumno y deducir lo que está pensando, a partir de lo que expresa es una habilidad que la profesora debe utilizar para acercar el conocimiento al alumno.

Se presentan los parámetros de observación de ambas sesiones. *(Véanse figuras 4.13 y 4.14)*.

PARÁMETROS DE OBSERVACIÓN

Nombre de la Profesora Anabel Grupo 6º. **INICIAL**

TAREAS.	A	B	C	D
Desafío matemático.			x	
Integridad y significación.			x	
Capta el interés.		x		

CONVERSACIÓN	A	B	C	D
Conversación del profesor.		x		
Conversación profesor-alumno.		x		
Conversación alumno-alumno.			x	
Dominio de la conversación.			x	

HERRAMIENTAS.	A	B	C	D
Herramientas y estilos de aprendizajes.				x
Variedad de modelos de presentación.				x

RELACIONES Y NORMAS.	A	B	C	D
Comunicación de las normas.		x		
Empatía.	x			

Figura 4.13. Parámetro de observación, sesión final.

PARÁMETROS DE OBSERVACIÓN

Nombre del Profesor____Anabel________________Grupo____6º.____________**FINAL**

TAREAS.	A	B	C	D
Desafío matemático.			x	
Integridad y significación.			x	
Capta el interés.		x		

CONVERSACIÓN	A	B	C	D
Conversación del profesor.		x		
Conversación profesor-alumno.			x	
Conversación alumno-alumno.			x	
Dominio de la conversación.			x	

HERRAMIENTAS.	A	B	C	D
Herramientas y estilos de aprendizajes.			x	
Variedad de modelos de presentación.			x	

RELACIONES Y NORMAS.	A	B	C	D
Comunicación de las normas.	x			
Empatía.	x			

Figura 4.13. Parámetro de observación, sesión final.

4.2.4. Observaciones de clase, Profesora Lidia.

La profesora tiene veinte años como docente, formación normalista, realizó estudios en Pedagogía en la UNAM. A tiende a treinta alumnos de sexto grado. Labora en una escuela de gobierno.

4.2.4.1 Observación inicial

Tema: conversiones: hectárea, kilómetro cuadrado, metro cuadrado y hectómetro cuadrado.

La profesora inició recortando material con ayuda de una alumna; repartió a cada alumno un cuadrado de 10 cm. por lado, en papel milimétrico y dio indicaciones.

Profesora. Cada uno de ustedes tiene una figura ¿qué figura es Roberto?

Roberto: Es un cuadrado.

Profesora. Bien. Vamos a imaginarnos que este cuadrado es una figura a escala de un hectómetro cuadrado, si yo quisiera saber cuánto mide en medidas reales mi hectómetro por este lado (señala un lado del cuadrado) ¿cuánto mide?

Alumno. 10.

Profesora. No, no. Es a escala, un hectómetro ¿cuántos metros mide?

Alumno. 1000.

Profesora. No, de lado, hectómetro ¿cuántos metros mide?

Los alumnos dudaron.

Alumno. 10 000.

Profesora. Ustedes ya están viendo los cuadrados. Y todavía no estamos viendo los cuadrados, solamente este lado. (Señala uno de los lados del cuadrado) ¿Cuánto mide?

La profesora cambió la pregunta, porque nadie le contestó.

Profesora. Un decámetro ¿cuánto mide por lado un decámetro cuadrado?

Alumno. 10.

Profesora. Mide 10, pero yo no les pregunte decámetro, les pregunte hectómetro. ¿Cuánto mide por este lado?

Alumno. 100.

Profesora. Y de este lado (señalando otro lado del cuadrado).

Todos contestaron 100.

Profesora. ¿De este lado? (señala otro lado del cuadrado)

Así lo hizo con los cuatro lados.

Profesora. Yo lo quiero dividir en forma vertical en decámetros, ¿cuántas partes debería de tener?

Alumno. Diez.

Profesora. Con su color azul marquen líneas y a fracciones en forma vertical de este hectómetro en decámetros, es a escala, con su color azul, no necesitan su regla, por eso utilizamos papel milimétrico, recuerden que cada línea representa un, un…

Alumno. Decámetro.

Profesora. Háganlo.

Los alumnos se dedicaron a realizar la tarea propuesta por la profesora, ella revisó el trabajo de los alumnos pasando por las filas. En la pared trasera del salón se observa un trabajo semejante formando un metro cuadrado.

Profesora. Ahora vamos a dividirlo en forma horizontal, márquenlo con su color ¿cuántos decámetros cuadrados hay en un hectómetro?
Alumno. Cien.

La profesora lo verificó con los alumnos, contando de uno en uno el primer renglón y después de 10 en 10 por renglones sucesivos.

Profesora. ¿De qué otra manera pueden saberlo?
Alumno. Multiplicando diez por diez.
Profesora. Un hectómetro tiene ¿cuántos decámetros cuadrados?, lo acaban de decir ustedes.
Alumno. Cien.
Profesora. Cien decámetros cuadrados, imagínense ustedes que cada milímetro es equivalente a. ¿Qué sería…?
Alumno. Decámetro.
Profesora. No lo que sigue. Cada milímetro equivale a un metro. En cada línea ¿cuántos metros hay en un hectómetro, lineales?
Alumno. Mil, cien mil, diez.
Profesora. No, no, lineales.
Alumno. Mil, diez mil.
Profesora. No, lineales. Se refiere a que de mi hectómetro hice 10 decámetros (los cuenta) ahora ¿cuántos serán?
Alumno. Cien.
Profesora. Son 100, de este lado y de este lado 100 ¿cuántos metros cuadrados hay en un hectómetro?
Alumno. Mil, diez mil.
Profesora. Multiplicamos ¿qué?
Alumno. Cien por cien.

Profesora. Y ¿cuántos nos da?

Alumno. Diez mil.

Profesora. Diez mil metros cuadrados, cada decámetro cuadrado tiene cien, en una línea. Se van contando de cien en cien.

Alumno. Mil metros cuadrados.

Profesora. ¿Cuántos habrá en todo el hectómetro?

Alumno. Diez mil.

Profesora. Se acuerdan a que equivale un hectómetro cuadrado

Alumno. Diez mil, cien, diez mil.

Profesora. Si, si, pero, pero tenemos, ¿Qué utilizamos para medir terrenos?

Alumno. Hectárea.

Profesora. La hectárea, a ¿qué es igual?

Alumno. A un hectómetro cuadrado.

Profesora. A un hectómetro cuadrado que son ¿cuántos metros? (Señaló a un alumno)

Alumno. Diez mil metros cuadrados.

Profesora Entonces un hectómetro cuadrado ¿cuántos decámetros cuadrados tiene?

Alumno. Cien.

Profesora. Y ¿cuántos metros cuadrados?

Alumno. Diez mil.

La profesora dio instrucciones para resolver la lección del libro.

Profesora. Vamos a sacar nuestro libro de matemáticas, y lo abrimos en la lección treinta y siete, página ochenta y seis.

La profesora formó equipos numerando a los alumnos del uno al cinco, después inició con la lectura de la lección.

Profesora. Vamos a empezar a leer *"¿Qué tan grande es una hectárea?"* empieza a leer Raúl. No vamos a resolver nada, sólo vamos a leer. Amalia sigue leyendo con voz fuerte, Amalia sigue leyendo.

Los alumnos leyeron la lección: páginas 86 y 87 en donde se plantean conversiones.

Profesora. Hasta aquí ya leímos lo que tenemos que resolver en equipo ¿hay alguna duda?, entonces empezamos a trabajar. Les entregue hojas para que tracen los ranchos y después cada equipo nos de su respuesta y ¿por qué?

La profesora pasó a los equipos, pero existen muchas dudas, los alumnos no entendieron el trabajo y no saben cómo empezar. La profesora se acerca a los equipos, les leyó los datos, les pidió que le digan que es lo que tienen que hacer, recalcó como está dada la superficie de los estados: Chihuahua en kilómetros cuadrados y de Tlaxcala con una diferencia con la superficie de Chihuahua pero expresado en hectáreas. Cuando los equipos trabajaron dudaron en sus razonamientos, y algunos no supieron cómo resolver las cuestiones. Después de 30 minutos de iniciada la actividad en equipos, la profesora expresó.

Profesora. Ya se nos va a acabar el tiempo muchachos.

A la profesora la solicitan en la dirección y antes de salir les dijo que a su regreso solicitará la respuesta de los equipos (tardó 7 min.). Los alumnos siguen sin encontrar solución y un equipo recortó cuadritos de un cm^2, que no utilizará posteriormente. Regresando la profesora continuó

Profesora. Vamos a ir sacando las conclusiones, equipo de Vero.

El equipo leyó la pregunta y dio la respuesta.

Profesora. Los equipos ¿están de acuerdo?

Con la siguiente pregunta sucedió algo semejante.

Profesora. ¿Quién está de acuerdo con el equipo de Juana? ¿Qué equipo está de acuerdo en que son cien?

Todos levantan la mano.

Profesora. Juana explica por qué cien.

Juana explica correctamente el ejercicio.

Profesora. Siguiente pregunta, atención; yo sé que todavía no terminan, ya no lo terminen, lo vamos a sacar en conjunto, porque si no, no lo vamos a concluir. Vamos a poner atención (dirigiéndose a un equipo). Para quién no le dio tiempo de hacerlo puede pensar y decir si el equipo que lo hizo, lo hizo bien o ustedes tienen otra propuesta. Escuchen.

La profesora leyó la siguiente pregunta y dijo lo que hizo el equipo.

Profesora. El equipo de Enrique lo dividió en decímetros y cada decímetro cuadrado representa el hectómetro y luego dice cuantas hectáreas tiene un kilómetro cuadrado ¿cuántas? El equipo de Roberto dice que son cien. Levanten la mano quién está de acuerdo con el equipo de Roberto. Bien, vamos a escuchar la explicación del equipo de Roberto, te escuchamos Roberto. ¿Por qué lo dividiste en cien y no en mil?

Un alumno del equipo contesta.

Alumno. Porque saldrían muchos cuadritos.

La profesora afirmó que el kilómetro tiene 10 hectáreas; queriendo decir que un kilómetro es igual a 10 hectómetros.

Profesora. Veo como que están muy dispersos, viene el difícil, vamos a ver quienes si lo lograron (la profesora lee) el estado más grande de la República Mexicana es Chihuahua, tiene 247 087 km^2 de superficie. Chihuahua tiene 24 317 300 ha, más que Tlaxcala, que es el estado más chico de la República. ¿Cuánto mide la superficie de Tlaxcala en Km^2? Haber como lo hicieron Enrique. Pásale al pizarrón, puedes llevarte la calculadora.

Enrique escribió una división en el pizarrón y trató de resolverla usando la calculadora.

247 087 ÷ 100

Profesora. Llévalo a fracciones. 87 para que alcance ¿qué haces? ¿Por qué dividiste?
Enrique: Para pasar de kilómetros a hectáreas.
Profesora. El kilómetro es mayor o menor que la hectárea.
Alumno. Mayor.
Profesora. Entonces si quieres convertir kilómetros a hectáreas.
Alumno. Divides, multiplicas.

No hay una solución única en el coro de los niños.

Profesora. Juana.
Juana. Yo dividí 24 317 300 entre 100 para que me dieran kilómetros cuadrados y luego le resté a 247 087 km² y me salió 3914 km² .
Profesora. Tu idea estuvo bien, pero en vez de convertir los kilómetros a hectáreas… atentos porque aquí hay otro proceso. Ahora le vamos a pedir a Juana que nos lo explique.

Juana hizo operaciones en el pizarrón dividió las hectáreas entre 100 y la convirtió en km² hizo la resta y obtuvo la superficie de Tlaxcala.

Profesora. Aquí hay otro procedimiento. Pasa Roberto.

Roberto multiplicó 247 087 por 100, restó las dos cantidades en hectáreas dándole como resultado 391400 que dividió entre 100 y le dio 3914.

Profesora. ¿Por qué fue diferente su procedimiento?
Alumno. Porque dividió y multiplicó.

La profesora escribió los datos para resolver el ejercicio 3 que se resolvió con ayuda de Juana, Enrique y Omar, para terminar la clase, la profesora les dijo a sus alumnos.

Profesora. Ahora paso a revisar sus respuestas.

Se dio por terminada la clase que duró 2 horas.

Parámetros de observación

Tarea: las tareas propuestas por la profesora carecieron de sentido para los alumnos, no han entendido conceptos básicos para enfrentar esta lección.

Desafío matemático: la tarea no representó un reto graduado para el nivel de la mayoría del grupo.

Integridad y significación: las conexiones entre los significados fueron mínimas, no se logró captar el contenido de la lección para la mayoría de los estudiantes.

Captar interés: los estudiantes estuvieron poco interesados y no dirigieron su actividad a responder a los cuestionamientos.

Conversación: la profesora confundió conceptos que debilitan el razonamiento matemático, su interpretación y las conexiones con otros.

Conversación del profesor: no rescató las informaciones del texto: confundió el hectómetro con el hectómetro cuadrado.

Conversación profesor alumno: la aceptación de las respuestas se dio por votación, la aceptación fue levantando la mano.

Conversación de los alumnos: los alumnos en general no expresaron razones o comprensiones, la profesora aceptó las respuestas correctas escogiéndolas de las participaciones en coros.

Manejo de la conversación: no estuvo dirigida en forma efectiva, faltó estructura, subrayar información y conceptos.

Herramientas: las utilizadas fueron pocas y limitadas en su potencial.

Herramientas y estilos de aprendizajes: no se consideraron las dificultades de los alumnos ni se estructuraron en forma lógica.

Variedad de modelos de presentación: los modelos utilizados no lograron integrar los conceptos.

Relaciones y normas: Al no existir una estructura en el trabajo los alumnos no tienen la seguridad en lo que están realizando, cuestión que perjudica en el tiempo y la realización de la tarea.

Comunicación de las normas: las normas separaron al profesor de los niños, las formas de trabajo están organizadas para resolver el ejercicio correctamente, pasando a segundo término la comprensión y la duda de los alumnos.

Empatía: La profesora demostró empatía con algunos alumnos, que fueron los que ayudaron a la solución de los ejercicios de la lección.

4.2.4.2 Observación final

Tema: proporcionalidad.

La profesora inició la clase relatando la compra de naranjas en el mercado: “encontré un letrero que decía; cinco kilogramos de naranjas a veinte pesos, pero quiero comprar ocho kilogramos”

Solicitó la atención de los alumnos.

Profesora. Pónganme atención. Para saberlo hacemos una tabla de equivalencia (escribe en el pizarrón).

Kilogramos 5	8
Precio 20	?

Ningún número multiplicado por cinco da ocho. Entonces reducimos a la unidad.

Kilogramos	5	1
Precio	20	**4**

Dividimos entre cinco los dos números, un kilogramo cuesta cuatro pesos. Así podemos calcular el valor buscado.

Kilogramos	5	1	8
Precio	20	4	32

Multiplicamos por ocho los dos números, ocho kilogramos de naranjas cuestan treinta y dos pesos. (La profesora enfatiza) cuando queremos calcular cantidades proporcionales que no están relacionadas entre sí por un número, es muy fácil reducir a la unidad. Ahora ustedes van a resolver estos ejercicios. Recuerden la regla que acabamos de ver, (la profesora escribe los ejercicios en el pizarrón, los alumnos los anotan en su cuaderno. Algunos alumnos se distraen).

Profesora. Vamos a dar diez minutos para que los resuelvan, recuerden primero es individual y después comenten con su equipo. (Los alumnos están sentados en grupos de cuatro personas. Se anotan a continuación los ejercicios propuestos por la profesora).

Dona	2	5
precio	13	

Pastel	3	20
Nueces	18	

Equipos	7	2
alumnos	63	

A los quince minutos la profesora llamó la atención de sus alumnos.

Profesora. Atención, pongan atención, vamos a verificar los resultados que encontraron, ¿Quién hace el primero?

Alumnos. Yo (en coro).

Profesora. A ver Vero.

Vero. El resultado es treinta y dos pesos con cincuenta centavos.

Profesora. ¿Está bien Vero?

Alumnos. Si (en coro).

Profesora. ¿Pero cómo lo resolviste?

Vero. Saque cuánto cuesta una dona dividí trece entre dos y me dio seis cincuenta y como son cinco multiplique por cinco y me da treinta y dos cincuenta.

Profesora. ¿Está bien Vero?

Alumnos. Si (en coro).

Profesora. ¿Quién hace el segundo? Pasa Miguel.

Miguel. Para seis pasteles necesito treinta y seis nueces y para nueve cincuenta y cuatro; entonces vimos que para seis pasteles eran treinta y seis nueces entonces para un pastel eran seis nueces y así sacamos para diez pasteles. Para diez pasteles son sesenta nueces, entonces para veinte pasteles es el doble, ciento veinte.

Profesora. Para un pastel ¿cuántas nueces utilizas?

Miguel. Para uno son seis.

Profesora. ¿Está bien Miguel?

Alumnos. Si (en coro).

Profesora. Vamos a ver el tercer ejercicio.

Sandra. Yo no le entendí.

Profesora. ¿Por qué?

Sandra. Porque ahora la segunda es menor.

Refiriéndose a que el dos es menor que el siete.

Profesora. Con sesenta y tres alumnos hago siete equipos, y quiero saber ¿con cuántos alumnos formo dos equipos?

Sandra. Ah, ya entendí.

La alumna no parece convencida.

Profesora. A ver Víctor explícame tu respuesta. Pon atención Sandra.

Víctor. Son dieciocho.

Profesora. ¿Está bien Víctor?

Alumnos. Si (en coro).

Profesora. ¿Quién me explica cómo obtuvo el dieciocho? *Vero.*

Vero. Sesenta y tres lo dividí entre siete y me da nueve, el nueve lo multipliqué por dos y da dieciocho.

Profesora. Bien, ¿todos entendieron? (la profesora dicta el siguiente problema). *Para hacer dos pasteles de manzana José empleo doce manzanas. ¿Cuántas manzanas necesitará para hacer nueve pasteles?* Tienen cinco minutos y después yo digo quien pasa a resolverlo al pizarrón.

Pasaron ocho minutos y en ese tiempo la profesora sólo se acercó a los equipos que están cerca de su escritorio.

Profesora. ¿Quién quiere pasar?

Muchos niños levantaron la mano, la profesora mostró satisfacción ante esta respuesta.

Profesora. Arturo pasa al pizarrón y explícanos cómo lo resolviste.

Arturo hace una tabla.

Arturo. Dividí doce entre dos y me dio seis, lo multiplique por nueve y me dio cincuenta y cuatro.

Pasteles	2	9
Manzanas	12	

Profesora. ¿Está bien Arturo?

Alumnos. Si (en coro).

La profesora dio por terminada la clase. Comentó que se propuso no tardar más de cincuenta minutos.

Parámetros de observación

Fue un ejercicio centrado en el procedimiento, los cuestionamientos de la profesora fueron entorno a las operaciones que se realizan, no se rescató la razón de las operaciones realizadas como un camino para poder entender la regla. Se desaprovechó las diferentes formas de solución que presentaron los alumnos.

Tareas: Fue un ejercicio de repaso, con el propósito de ejercitar un procedimiento. No existe una dificultad cognitiva para el alumno.

Desafió matemático: La dificultad consistió en aplicar un procedimiento en forma mecánica, no se razonó en él, los alumnos fueron receptores y aplicadores, no se resolvieron las dudas que se presentaron.

Integridad y significación: No se hicieron conexiones con otros significados, faltó flexibilidad para atender a las dudas e incorporar otros procedimientos.

Capta el interés: Los alumnos resolvieron los ejercicios siguiendo las indicaciones dadas por la profesora, el interés por resolver la tarea se limitó a la aplicación de la regla.

Conversación: Existió una intensión por dialogar con los alumnos, motivándolos para que expresaran sus argumentaciones sin tener mucho éxito en ello, los alumnos se comunicaron poco matemáticamente.

Herramientas: Las formas de representación fueron limitadas para un contenido con tantas posibilidades.

Relaciones y normas: Los alumnos reconocieron normas, pero esto no ayudó a dinamizar la clase en un sentido de mejora del aprendizaje.

Se presentan los parámetros de observación de ambas sesiones. *(Véanse figuras 4.14. y 4.15).*

PARÁMETROS DE OBSERVACIÓN

Nombre de la Profesora: Lidia Grupo 6º **INICIAL**

TAREAS.	A	B	C	D
Desafío matemático.				x
Integridad y significación.				x
Capta el interés.			x	

CONVERSACIÓN	A	B	C	D
Conversación del profesor.			x	
Conversación profesor-alumno.			x	
Conversación alumno-alumno.			x	
Dominio de la conversación.				x

HERRAMIENTAS.	A	B	C	D
Herramientas y estilos de aprendizajes.				x
Variedad de modelos de presentación.				x

RELACIONES Y NORMAS.	A	B	C	D
Comunicación de las normas.			x	
Empatía.				x

Figura 4.14. Parámetro de observación, sesión inicial.

PARÁMETROS DE OBSERVACIÓN (cambiar)

Nombre de la Profesora: Lidia Grupo 6º **FINAL**

TAREAS.	A	B	C	D
Desafío matemático.			x	
Integridad y significación.			x	
Capta el interés.		x		

CONVERSACIÓN	A	B	C	D
Conversación del profesor.			x	
Conversación profesor-alumno.		x		
Conversación alumno-alumno.			x	
Dominio de la conversación.			x	

HERRAMIENTAS.	A	B	C	D
Herramientas y estilos de aprendizajes.			x	
Variedad de modelos de presentación.			x	

RELACIONES Y NORMAS.	A	B	C	D
Comunicación de las normas.			x	
Empatía.			x	

Figura 4.15. Parámetro de observación, sesión final.

La reflexión sin tener presente la acción, nos lleva a lo anecdótico, es responsabilidad del docente reflexionar sobre su práctica considerando la importancia de su labor porque la complejidad de la enseñanza requiere de un compromiso, pero sobre todo de buscar nuevas formas de resolver los problemas pedagógicos que se presentan en el aula. La acción docente debe responder a los requerimientos de los alumnos y para ello la formación con un conocimiento amplio de la asignatura y de la pedagogía puede lograr resultados esperados.

En las acciones realizadas en el Taller y lo visto en las observaciones de clase nos dice que hay mucho por hacer y que es el docente, en lo individual y en colectivo quien puede dar una respuesta a las situaciones planteadas.

Capítulo quinto

Conclusiones

En este capítulo se presentan los resultados y las conclusiones de la investigación, producto del análisis de los datos obtenidos bajo la perspectiva de la literatura revisada.

5. Resultados y conclusiones.

Por organización presentamos las conclusiones atendiendo al análisis de: el *conocimiento matemático para la enseñanza* de los profesores en el Taller de discusión, el *conocimiento matemático de los profesores* en su práctica en el aula (observaciones de clase) y un tercer apartado al que denominados “Cambios en la práctica docente”.

5.1 El conocimiento matemático para la enseñanza en el Taller de discusión

El espacio de discusión, análisis y reflexión que representó el Taller permitió a los profesores pensar y hablar críticamente sobre su práctica, que es en sí un aprendizaje para el profesional de la educación, que no está acostumbrado a realizarlo de forma sistemática.

La actividad que realiza el profesor es por definición una acción social, que en la mayoría de los casos la realiza en forma individual y con la puerta del salón cerrada a sus colegas; así resuelve sus problemas, con sus elementos teóricos y prácticos, pero al fin, solamente los suyos.

El trabajo en el Taller proporcionó la experiencia de trabajar en colegiado aumentando las posibilidades de éxito en las tareas emprendidas; aportando su experiencia, producto de su práctica laboral y preparación profesional. Este hecho significó mantener dispuestos e interesados al grupo de profesores, hablando sobre sus prácticas y resolviendo situaciones de enseñanza, en las que se puso en juego su *conocimiento matemático para la enseñanza*.

Por la participación en las últimas sesiones, podemos afirmar que hubo un cambio en la visualización de los problemas de enseñanza que enfrenta; sus dudas las compartió y buscó solución, sus estrategias las expresó y las enriqueció al escuchar los comentarios de sus compañeros.

Reconstruir la práctica de los profesores tuvo como propósito dar respuesta a cuestionamientos tales como: ¿cuáles son los conocimientos matemáticos que deben tener mis alumnos al término del ciclo escolar?, ¿cuáles son las dificultades que pueden presentar en el desarrollo de su aprendizaje?, ¿qué pretendo que los alumnos aprendan al proponer esta actividad? y ¿cuál es la mejor representación de un contenido para que los alumnos aprendan de acuerdo con sus características e intereses?

Al contestar estas preguntas en el Taller los profesores, dieron indicios de un *conocimiento matemático para la enseñanza,* por la forma en que expusieron sus respuestas a situaciones planteadas como: representar o explicar un contenido a sus alumnos de quinto y sexto grado e identificar causa y alternativas de soluciones a conceptos erróneos o ideas equivocadas de los alumnos.

Al realizar estas reflexiones se toma conciencia de la necesidad de realizar cambios en la práctica docente para lograr mejores resultados. Esto se logra al intercambiar estrategias, resolver dificultades de enseñanza y mejorar el conocimiento matemático con la participación de los compañeros. Posibilita un cambio en las formas de enseñanza, en la forma de pensar sobre la práctica; al lograr que el profesor externe causas y consecuencias de un hecho pedagógico, nos acercamos a propuestas de solución factibles y que en su pronunciación surge el compromiso.

Ante las tareas realizadas, los profesores expresaron características que debe tener su práctica en el aula: comprender el conocimiento matemático en formación de los alumnos, encontrar formas de representación más eficaces de los contenidos matemáticos, realizar conexiones entre conceptos matemáticos para que el alumno los estructure de forma lógica y privilegiar el análisis de respuestas del alumno con la finalidad de favorecer la adquisición de conocimientos. Lo anterior significa mejorar su *conocimiento matemático para la enseñanza* en un discurso sustentado en una necesidad y en la disposición.

La diversidad de edades, formación y centros de trabajo, de los participantes en el Taller, abonó para enriquecer las aportaciones, que dieron como resultado fortalecer un grupo colegiado con diferentes visiones del problema. Los profesores que laboran en escuelas particulares requirieron de un apoyo pedagógico, justificado por su antecedente académico, y fueron ellos quienes tuvieron una mayor participación en las tareas y asistencia.

En las tareas realizadas predominaron cuatro aspectos que se fortalecieron con respecto al conocimiento matemático: a) comprensión del lenguaje matemático; reconociendo que la precisión del lenguaje asegura una mejor comunicación y conceptualización de las ideas matemáticas. La relación del concepto con la palabra es importante para garantizar la formalización del conocimiento matemático. b) La matemática subyacente en los procedimientos; el profesor observó en los algoritmos relaciones y propiedades matemáticas, c) Las formas de razonamiento; fue importante identificar diferentes formas de solución a una tarea, lo que evidenció la variedad de razonamientos y dominio de los conocimientos. d) Las formas de representación que se vuelven monótonas, rutinarias, predecibles y poco atractivas para provocar la actividad, interés y deseos de participar por parte de los alumnos.

En las tareas se explicitó: “describe cómo lo explicarías a tus alumnos”, este supuesto hizo que las formas de representación que utilizan normalmente, se hicieran presentes para ser analizadas considerando su carácter pedagógico; en las explicaciones dadas se observó el *conocimiento matemático para la enseñanza* en dos aspectos: la utilización de los conceptos y las formas de representación.

Un contenido recurrente en las sesiones fue el de fracciones, debido a la importancia, a la cantidad de lecciones dedicadas en el libro de texto y a la relación que tiene con otros contenidos por ejemplo: proporcionalidad, tanto por ciento y probabilidad. Pero principalmente a la existencia de un problema conceptual en el dominio de este contenido por parte de los profesores, que se reflejó con acciones procedimentales y errores elementales como la exhaustividad y equitatividad en situaciones de reparto.

Los espacios para la reflexión sobre la práctica son pocos, compartir esa reflexión con colegas significó: cuestionarse y plantear preguntas que muchas veces quedan sin respuesta en lo individual o en un grupo de profesores de una misma escuela.

Un conocimiento matemático para la enseñanza parcial provoca inseguridad al realizar el proceso de enseñanza, cuestión que se refleja en el bajo nivel de aprendizaje de los alumnos. Al interrogar a los profesores sobre las razones que provocan estos resultados en el aprendizaje, surgen: la falta de tiempo, las comisiones escolares, la forma de organización al interior de las escuelas, actividades y evaluaciones extraescolares, etc. Esto nos hace pensar que existen niveles de reflexión para poder tomar conciencia y aceptar responsabilidades que nos muevan a la acción individual y en grupos colegiados al interior de las escuelas.

El Taller de discusión es una propuesta que implica esfuerzo, autocrítica, introspección, organización, autoevaluación y un gran compromiso. El taller representó para los profesores hacer un alto en la enseñanza para pensar sobre ella; ver la propia actividad. Hacerse de elementos para realizarla de mejor manera, saber que innovar la práctica es una responsabilidad y una forma de realización, haciendo a un lado la simulación, aprovechar los medios, la comunicación con los colegas y sobre todo aprender de los alumnos.

5.2 El conocimiento matemático para la enseñanza

Cuando iniciamos la investigación y nos propusimos indagar en los cambios en la práctica docente, a partir de incrementar el *conocimiento matemático para la enseñanza*, sabíamos que la diferencia estaría determinada por el deseo genuino y tener razones importantes para realizar los cambios.

En un comparativo de las observaciones de clase de antes y después, se observan cambios sutiles que retomaremos adelante, por el momento expresaremos lo que es común en todas ellas.

- A los profesores se les dificulta convertirse en organizadores y propiciadores del desarrollo del pensamiento matemático, ellos son el centro de la actividad, dicen qué se hace y cómo se hace, no inducen a los alumnos a recopilar, analizar, jerarquizar información y hechos que sean determinantes para confirmar o desechar hipótesis.

- Los profesores ven a la enseñanza como una actividad unidireccional, al descartar las aportaciones de los alumnos en la consecución de la clase, no aprovechan su creatividad en la resolución de problemas.

- La lección del libro de texto, el ejercicio propuesto por el profesor, enmarcan la actividad de la clase, que no se desvía, aun cuando, se presenten indicios de falta de conocimientos previos o falta de interés en las tareas propuestas. Este formalismo oprime la actividad del alumno. Se debe al control que el profesor posee, que asegura sus propósitos de enseñanza y lo alejan de los cuestionamientos, las argumentaciones de los alumnos que exigen un mayor *conocimiento matemático para la enseñanza.*

- En las clases observadas estuvo presente la resolución de problemas, se llegó a soluciones exitosas, se compartieron resultados verificando su validez mediante algunas argumentaciones, se llegó hasta valorar procedimientos correctos y pertinentes, pero no se trabajó la formalización del conocimiento que encerraba la actividad. Rescatar los conceptos, ponerle nombre a los procedimientos y propiedades reconociendo su sustento matemático fueron acciones alejadas de las clases, con el riesgo de provocar la evanescencia del conocimiento matemático; al no concluir su ciclo de construcción, con el riesgo que se diluya.

Resolver problemas es la forma inicial de trabajar con el conocimiento, se debe de llegar a introducir procedimientos formales, elaborar definiciones y reconocer un conocimiento que funciona fuera del ámbito escolar.

- En las observaciones de clase se apreció la ostensión; entendida como el mecanismo al que recurren los profesores para representar el objeto de conocimiento de un solo golpe, lo cual obstruye la posibilidad de que los alumnos desarrollen acciones para recrearlo y lleguen a la institucionalización, este hecho representa un alejamiento del enfoque del Plan y Programas de Estudio.

5.3 Cambios en la práctica docente

Un cambio perceptible al hacer un comparativo entre las observaciones de clase, fue la intención de cuestionar a los alumnos para obtener argumentaciones, hecho que cambia la dinámica de la clase: da elementos al profesor para reconocer formas de pensamiento y estado del conocimiento en formación. Pero existe una prisa por llegar a la solución del problema, a terminar la lección del libro o a evadir el hecho de que algunos alumnos no están entendiendo la clase.

El profesor que da confianza y tienen paciencia para esperar un desarrollo en el razonamiento, ayuda al alumno. Un ejemplo de esto se presentó en la segunda observación de las profesoras, cuando dicen:

Paty. Si lo van dividiendo: veinte, veinte, veinte, veinte, veinte, ¿Cuántos veinte les salen? ¿Alguien del equipo quiere ayudar?

Anabel. ¿Otra forma de resolver este problema?, los que dicen no ¿por qué dicen no?

Lidia. Pero ¿cómo lo resolviste? A ver Víctor explícame tu respuesta.

Colocar al alumno como principal actor dentro del salón de clases, significa para el profesor exponerse a situaciones y cuestionamientos que quizá no pueda resolver; por falta de conocimiento o no contar con los instrumentos necesarios en ese momento, esto es algo que los profesores no han sabido resolver.

Otro cambio sutil que observamos en la práctica fue la propuesta de problemas más cercanos a los alumnos, cotidianos, que motivaron la participación.

Los profesores propusieron tareas más desafiantes a sus alumnos motivando la participación y la argumentación, el trabajo en equipo por parte de los alumnos fue más fructífero.

5.4 Alcances y limitaciones de la investigación

La investigación aportó información que nos da una visión general de un problema que tiene repercusiones importantes para los alumnos, para la sociedad y para el país.

Un taller de discusión representa una opción para mejorar el *conocimiento matemático para la enseñanza* de profesores en servicio, con organización y compromiso, puede funcionar como grupo colegiado a nivel escuela o zona escolar.

Se requiere hacer un seguimiento más cercano y durante más tiempo para confirmar otros cambios en la práctica docente de los profesores participantes.

Romper con las inercias requiere del convencimiento personal, solamente así se iniciará un proceso de innovación, que dé como resultado una mejora en los resultados, al mover estructuras de organización y desarrollar procesos de crítica y reflexión.

La investigación reunió a un grupo de profesores que dedicaron tiempo y esfuerzo para conocer más sobre su práctica docente. La organización del Taller, los contenidos y su presentación se pueden mejorar, pero siempre deben de responder a los intereses que muestren los profesores participantes. Esta investigación representa un paso para mejorar la educación a partir de mejorar el *conocimiento matemático para la enseñanza* de los encargados de impartirla.

Referencias

Álvarez Icaza, A. M. (2002). La enseñanza del número en primer grado: dos estudios de caso. *Tesis de maestría, México. Cinvestav.IPN.*

Amato, S. A. (2006). Improving student teachers´ understanding of fractions. Proceeding of PME-30. *Vol. 2 41-48*

Askew, M., Brown, M., Denvir, H. y Rhodes, V. (2000). Describing primary mathemnatics lessons observed in the Leverhume Numeracy Research Programme: A qualitative framework. Proceeding of PME-24, 2, *17-24.*

Ávila, A. (1996). Los usos reconocidos de los libros de texto de matemáticas. Revista Mexicana de investigación Educativa, *Vol. 1. Núm. 2, 314-342.*

Ávila, A. (2004). La reforma realizada. La resolución de problemas como vía del aprendizaje en nuestras escuelas. *SEP.*

Ávila, A. (2006). Transformaciones y costumbres en la matemática escolar. *Paidós. México.*

Ball, D. L. (2000). Bridging practices. Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. Journal of Teacher Education, *51(3), 241-247.*

Ball, D. L. y Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics, *83-104, Westport, CT: Ablex.*

Baturo, A. R. (2004). Empowering Andrea to help year 5 students construct fraction understanding. *Proceeding of PME-28. Vol. 2 95-102.*

Block, D. (2007). La apropiación de innovaciones para la enseñanza de las matemáticas por maestros de educación primaria. *Revista Mexicana de Investigación.* Vol. 12 Núm. 33. 731-762.

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación Educativa.* La Muralla.

Contreras, J. (1999*). La autonomía del profesorado.* Morata.

De León, H. y Fuenlabrada I. (1996). Procedimientos de solución de niños de primaria en problemas de reparto. *Revista mexicana de investigación educativa.* Vol. 1, núm. 2. 268-282.

Dewey, J. (1989). *Cómo pensamos. Nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo*. Paidós.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa II.* Ed. Hitt. F. México.

Elliott, J. (1994). *La investigación-acción en educación*. Morata. España.

Fierro, C., Fortoul, B. y Rosas, L. (2005). *Transformando la práctica*. Paidós. México.

Grossman, P. L., Wilson, S. M. y Shulman, L. S. (2005). Teachers of substance: Subject matter knowledge for teaching. En M. Reynolds (Ed.), *Knowledge Base for the Beginning Teacher.* (p.23-36). New York: Pergamon.

Hill, H. y Ball, D. L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's Mathematics Professional Development Institutes. *Journal for Research in Mathematic Education,* 35(5), 330-351.

Kamii, C. y De Vries, R. (1979). *Juegos colectivos en la primera enseñanza. Implicaciones de la teoría de Piaget.* Visor.

Kieren, T. (1983). Partitioning, Equivalence and the Construction of Rational Number Ideas. En: Zweng, M. *Proceeding of Fourth International Congress on Mathematical Education,* 506-508.

Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teacher's Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

McDonough, A. y Clarke, D. (2003). Describing the practice of effective teachers of mathematics in the early years. *Proceeding of PME-27,* Vol. 3, 261-268. Hawaii, U.S.A.

National Council of Teachers of Mathematics, Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática. (1992). Sevilla: edición en castellano de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Orton, A. (1990). *Didáctica de las matemáticas. Cuestiones, teoría y práctica en el aula.* Morata. España.

Parra, C. y Saiz, I. (1997). *Didáctica de las Matemáticas.* Paidós. México.

Peterson, J. y Hashisaki, J. (1999). *Teoría de la Aritmética*. Limusa. México.

Piaget, J. (1981). *Psicología y pedagogía.* Ariel-SEP.

Powell, A. B. y Hanna, E. (2006). Understanding teachers' mathematical knowledge for teaching: A theoretical and methodological approach. *Proceedings of PME-30,* Vol. 4, 369-376. Prague, Czech Republic.

Sacristán, J. y Pérez Gómez, A. (2002). *Comprender y transformar la enseñanza.* Morata. España.

Salazar, S. (2005). El conocimiento pedagógico del contenido como estrategia de estudio de la formación docente. *Revista electrónica "Actualidades investigativas en educación". Universidad de Costa Rica.* Volumen 5, número 2.

Savater, F. (1997). *El valor de educar.* Instituto de Estudios Educativos y Sindicales de América. México.

Schön, D. (1998). *El profesional reflexivo. Cómo piensan los profesionales cuando actúan.* Paidós.

Seago, N. y Goldsmith, L. (2006). Learning Mathematics for Teaching. *Proceeding of PME-30*, Vol. 5, 73-81. Prague, Czech Republic.

Secretaría de Educación Pública. (1989). *Programa para la modernización educativa.* México: SEP.

Secretaría de Educación Pública. (1993). *Plan y Programas de Estudio. Educación Básica. Primaria.* México: SEP.

Secretaría de Educación Pública. (1994). *Libro del maestro 5º grado.* México: SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2008). *Plan de estudios 2009. Educación Básica. Primaria.* Etapa de prueba, México: SEP.

Shulman, L. S. (1984). The missing paradigm in research on teaching. *Texto presentado en el Research and Development Center for teacher Education*, Austin. TX.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review,* 57(1), 1-22.

Shulman, L. S. (1989). Paradigmas y programas de investigación en el estudio de la enseñanza: una perspectiva contemporánea. En M. Wittrock (Ed.) *La investigación y la enseñanza I*. Paidós.

Shwarz, B., Hershkowitz, R. y Azmon, S. (2006). The role of the teacher in turning claims to arguments. *Proceedings of PME-30,* Vol. 5, 65-67.

Skemp, R. (1993). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas.* Morata. España.

Vigotsky, L. (2003). *Pensamiento y lenguaje*. Quinto Sol.

Anexos

Lecturas de contenido pedagógico.

EL PAPEL DEL MAESTRO EN CAMBIAR AFIRMACIONES POR ARGUMENTOS[2]

Este estudio trata del papel de los maestros al interactuar con sus estudiantes en actividades de construcción del conocimiento. El propósito es averiguar cómo los maestros:

- Llevan a cabo discusiones con sus estudiantes.
- Propician que den explicaciones.
- Ayudan a que den argumentos coherentes.

¿Por qué es importante conducir las discusiones con los estudiantes?

Los procesos de comunicación son parte integral de la vida del salón de clase. Al discutir, los estudiantes expresan sus ideas y pensamientos a través de la negociación de significados entre ellos mismos y entre ellos y el maestro (Voigt, 1994; Cobb & Bauersfeld, 1995; Mercer, 1997). Por lo tanto, la discusión escolar puede ser un poderoso contexto para aprender y practicar nuevos conceptos y lograr un desarrollo del razonamiento.

El proceso socio-cultural puede influenciar la construcción del conocimiento Vygotsky (1936/1987) argumentó que el desarrollo del conocimiento es un proceso a través del cual uno aprende a utilizar herramientas intelectuales ya desarrolladas por la sociedad y enfatizó el papel crucial de las interacciones sociales en este esfuerzo. El alumno interactúa con herramientas y procesos y especialmente con el lenguaje que el adulto usa, el cual estructura su pensamiento. El alumno puede imitar el comportamiento del adulto, eventualmente internalizando habilidades que llegan a ser herramientas mentales.

La investigación sobre interacciones entre maestros y estudiantes es bastante rica en el contexto escolar. Cazden (1973, 1988) observó **interacciones sociales** entre maestros y estudiantes en los salones de clase. Encontró que el discurso en la interacción es asimétrico y con una estructura "**IRE**" de tres elementos:
I Iniciación, el maestro pregunta.
R- Réplica, los estudiantes responden.
E- Evaluación, el maestro evalúa sus respuestas.

Su investigación dio resultados de las interacciones sociales, sin considerar los procesos cognitivos involucrados en esas interacciones.

[2] Resumen elaborado con base en Schwarz, B., Hershkowitz, R. & Azmon, S. (2006). The role of the teacher in turning claims to arguments. *Proceeding of* PME-30, Vol. 5, 65-67. Prague, Czech Republic.

RESULTADOS DEL ESTUDIO

Para la búsqueda de patrones argumentativos de interacción los autores diferencian las afirmaciones de los argumentos así:
Las **afirmaciones** se refieren a declaraciones o puntos de vista sin explicación alguna.
Los **argumentos** son afirmaciones seguidas de una explicación.

A continuación se presentan los resultados obtenidos al observar la clase de dos maestras voluntarias de los últimos grados de nivel elemental quienes trabajaron con sus alumnos conocimientos conceptuales de probabilidad. Se eligió una situación problemática en la que ambas maestras permitieron una discusión con todo el grupo en el mismo problema, y de esta manera la comparación entre las dos fue posible.

Se observa que la maestra A considera que la construcción del conocimiento debe ser elaborado por los estudiantes, mientras que su papel es mediar la construcción del conocimiento mediante argumentos que reten a los alumnos y dar explicaciones que los animen a cambiar las afirmaciones por argumentos para poder dar explicaciones adecuadas. Gráficamente lo veríamos así:

Maestra A

Afirmación Argumenta Elaboración de explicación
Estudiante o explica estudiante o **maestro**
alumno

Motiva, anima
Maestro

La maestra B hizo preguntas cortas y muy cerradas y los estudiantes contestaron con respuestas cortas y superficiales. Cuando la maestra trató de que sus alumnos dieran respuestas más elaboradas, los estudiantes no respondían. El análisis argumentativo mostró que las preguntas de esta maestra guiaron a los estudiantes a expresar afirmaciones, pero no explicaciones que pudieran haber completado sus argumentos. Todos los participantes en esa clase están satisfechos de que la maestra provea de explicaciones que deberían haber sido dadas por los estudiantes.

Gráficamente lo veríamos así:

Maestra B

Afirmación Elaboración de afirmación
Estudiante estudiante

Evalúa Motivación
Maestro preguntas cortas y cerradas

El contexto del salón tiene el potencial para practicar modelos y propuestas argumentativas y patrones como herramientas mentales que los individuos pueden adoptar a través de las interacciones sociales y eventualmente dirigir hacia la construcción del conocimiento.

¿Cuál es la importancia de ayudar a que el alumno integre argumentos coherentes en lugar de que sólo afirme algo?

Cuando los maestros promueven el cambio de las afirmaciones de los estudiantes por argumentos, les permiten una construcción más sólida de sus conocimientos. Existen diversas investigaciones que así lo muestran, por ejemplo, Van Zee (1997) se centró en el poderoso proceso cognitivo que puede ser estimulado por las preguntas del maestro. Ella ilustró diferentes tipos de preguntas como para abrir la discusión, atrayendo a los estudiantes a pensar activamente acerca de un tema, y para cerrar la discusión.

Estudios educacionales recientes sobre algunos dominios han enfatizado el gran valor de la argumentación para el desarrollo y aprendizaje cognitivo (Pontecorvo y Girardot, 1993; Krummheuer, 1995; Kuhn, 1991). Al establecer consensos a través de propuestas argumentativas se obtuvieron ganancias cognitivas, pues los individuos tratan de ver el punto de vista de otros. Algunos pueden preguntar clarificando cuestiones y al hacerlo, obligar a otros a cambiar el argumento por uno más entendible, suficiente y comprobable.

Además de la importancia de la argumentación como una herramienta para la construcción del conocimiento, algunas investigaciones matemáticas han reconocido su utilidad para analizar el aprendizaje y el proceso de enseñanza. Por ejemplo Cobb y sus colegas identificaron normas sociomatemáticas (Cobb y Bauersfeld 1995; Cobb et al 2001); otros pudieron identificar el desarrollo del conocimiento a través de la ***argumentación colectiva*** (Krummheuer, 1995; Stephan y Rasmussen, 2002).

REFERENCIAS

Cazden, B. C. (1988). *Classroom discourse: The language of teaching and learning.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Cobb, P. & Bauersfeld, H. (1995). *The emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures.* Hillsdale, New Yersey.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), T*he emergence of mathematical meaning* (pp. 229-269). Hillsdale, New Jersey.

Kuhn, D. (1993). Science as Argument: Implications for Teaching and Learning Scientific Thinking. *Science Education*, 77 (3), 319-337.

Mercer, N. (1997). *The guided Construction of knowledge: Talk amongst teachers and learners.* Clevedon. Philadelphia. Adelaida.

Pontecorvo C. & Girardet, H. (1993) Arguing and reasoning in understanding historical topics. *Cognition and instruction* 11(3&4), 365-395.

Stephan, M. & Rasmussen, C. (2002). Classroom mathematical practices in differential equations. *Journal of Mathematical Behavior,* 21, 459-490.

Van Zee, E. & Minstell, J. (1997). Using questioning to guide students thinking. *The Journal of the Learning Sciences*, 6(2), 227-269.

Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 275-298.

Vygotsky, L. S. (1936/1987). *Thinking and Speech.* In R. W. Rieber & A. S. Carton (Eds.), The collected work of L. S. Vygotsky (N. Minick, Trans.). New York: Plenum Pr.

Describiendo la práctica de maestros eficaces de matemáticas[3].

Por muchos años, los investigadores han buscado describir la conducta del maestro que se correlaciona positivamente con el crecimiento en el logro de los estudiantes. Las aulas y escuelas son lugares complejos, de ahí el valor de estudiar las prácticas de aquellos maestros que son eficaces. Al observar marcadas diferencias en los alcances obtenidos entre diversos grupos escolares, se atribuyen los resultados al nivel de eficacia de cada uno de sus profesores.

El **P**royecto de **I**nvestigación de conocimiento **T**emprano de la **A**ritmética (**ENRP** por sus siglas en inglés), se llevó a cabo mediante la colaboración de diversas universidades e instituciones australianas relacionadas con la educación. En este proyecto participaron 70 escuelas.

Como parte de este amplio proyecto, el presente documento muestra los resultados de los estudios de caso de seis maestros altamente eficaces en los tres primeros años de escuela quienes fueron elegidos debido al incremento impresionante en la comprensión de matemáticas de sus estudiantes.

Pero . . . ¿qué es lo que los maestros eficaces hacen?

Observaciones en estudios internacionales (Brown et al. 1998) muestran una relación entre el logro de los alumnos y las cualidades del maestro.

Las entrevistas con maestros eficaces revelaron que éstos:

1. Tenían una clara visión de las experiencias matemáticas que son necesarias, siendo capaces de comprometer a los estudiantes en el trabajo.

2. Estaban preparados para indagar el pensamiento y comprensión de los niños.

3. Conectaban diferentes ideas y representaciones matemáticas por medio de una variedad de vocablos, símbolos y diagramas.

4. Alentaban a los estudiantes a describir sus métodos y su razonamiento.

5. Utilizaron las descripciones como una forma para desarrollar la comprensión a través del establecimiento y el énfasis de las conexiones.

6. Enfatizaron la importancia de utilizar procedimientos mentales sobre procedimientos escritos o métodos electrónicos para la resolución de problemas, permitiendo así el desarrollo de habilidades mentales.

---

[3] Resumen elaborado con base en el texto McDonough, A. & Clarke, D. (2003) Describing the practice of effective teachers of Mathematics in early years. *Proceeding of* PME-27, Vol. 3, 261-268. Hawaii, USA.

7. Utilizan preguntas desafiantes al razonamiento y tareas que requieren pensar más que practicar.

8. Hacen énfasis en establecer, a través del diálogo, significados y conexiones entre las diferentes ideas matemáticas y contextos.

9. Impulsan la resolución colaborativa de problemas en clase y proporcionan más autonomía a los estudiantes para que desarrollen y discutan sus propios métodos e ideas.

En el siguiente cuadro se muestran algunas de las principales características del trabajo de los maestros eficaces:

Características principales de los maestros eficaces.

Foco matemático	a) Se centra en ideas matemáticas importantes. b) Las hace explícitas a los niños.
Características de las tareas	c) Estructura tareas con un propósito que posibilitan la utilización de estrategias diferentes. d) Escoge tareas que atraen a los niños y que los mantiene interesados.
Materiales, herramientas y representaciones	e) Utiliza diversidad de materiales, representaciones y contextos para el mismo concepto.
Adaptaciones, conexiones y vínculos	f) Aprovecha sucesos de la clase como van ocurriendo. g) Hace conexiones con diferentes ideas matemáticas de clases o experiencias previas.
Estilo de organización y métodos de enseñanza	h) Atrae y enfoca el pensamiento matemático de los niños a través de una actividad introductoria de todo el grupo. i) Escoge de una gran variedad de formas individuales y de grupo la que predomina en gran parte de la lección, adaptando su papel como maestro.

Comunidad de aprendizaje e interacción en clase	j) Utiliza diferentes tipos de cuestionamiento para sondear y desafiar el pensamiento y razonamiento de los niños. k) Se frena a decirles todo. l) Anima a los niños a explicar sus ideas o pensamiento matemático. m) Los anima a escuchar y evaluar otras ideas o pensamientos y los apoya con métodos y entendimiento. n) Escucha atentamente a cada uno. o) Construye sobre las ideas o estrategias matemáticas de los niños.
Expectativas	p) Tiene altas expectativas matemáticas pero realistas de todos los niños. q) Promueve y valora el esfuerzo, persistencia y concentración.
Reflexión	r) Extrae ideas matemáticas clave durante y al final de la lección. s) Después de la lección, reflexiona sobre las respuestas y aprendizajes de los niños, junto con las actividades y el contenido de la lección.
Métodos de evaluación	t) Colecta datos, por observación y de lo que escucha de los niños, tomando notas cuando sea apropiado. u) Utiliza diversos métodos de evaluación. v) Modifica la planeación como resultado de su evaluación.
Atributos personales del maestro	w) Cree que el aprendizaje matemático puede y debe ser disfrutable. x) Confía en su propio conocimiento matemático para el nivel que enseña. y) Muestra orgullo y placer en éxitos individuales.

Mejorar los aprendizajes de los alumnos depende en gran medida de las características del trabajo del maestro. Los aprendizajes y las características del maestro son elementos importantes, a los que hoy volvemos la mirada.

Referencia.

Brown, M., Askew, M., Baker, D., Denvir, B., & Millet, A. (1998). Is the National Numeracy Strategy research-based? *British Journal of Educational Studies,* 46(4), 362-385.

COLABORACIÓN CON MAESTROS PARA MEJORAR EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS: PEDAGOGÍA DE TRES NIVELES[4]

Actualmente hay ciertas tendencias que favorecen el desarrollo profesional educativo en la práctica, implicando la planificación colaborativa entre maestros e investigadores. Sin embargo, existe poca investigación disponible, que considere el cambio tanto de la práctica del profesor, como del aprendizaje del estudiante.

Los proyectos que buscan mejorar el aprendizaje de los alumnos mediante un **desarrollo profesional** (DP) en la práctica, involucrando a maestros e investigadores mediante la planificación colaborativa de unidades de enseñanza, planeando secuencias instruccionales e interacciones de clase, tiene la capacidad de investigar simultáneamente el aprendizaje y cambio profesional del maestro así como el aprendizaje y desarrollo del estudiante.

La presente investigación es parte de un amplio proyecto de desarrollo profesional en Queensland, Australia. Los estudios de las autoridades argumentan la necesidad de que los estudiantes para ser enseñados con eficacia y llegar a ser miembros competentes de sus comunidades, necesitan ser preparados en una gama de habilidades matemáticas que puedan aplicar flexiblemente a la solución de diversos problemas del contexto. Sin embargo, no todos los maestros tienen la combinación de habilidad pedagógica y conocimiento matemático estructural, requerido para enseñar eficazmente (Baturo, 2004).

Interacciones en el salón de clase. Las interacciones eficaces en el salón de clase para matemáticas requieren de estudiantes que construyan su propio conocimiento, a través de interacciones e investigaciones con materiales y lenguaje, y desarrollando sus propios significados a través de la discusión con su maestro y compañeros (English y Halford, 1995). Esto es, en un ambiente social de aprendizaje constructivista en el cual el maestro proporciona la guía o dirección (andamiaje cognoscitivo) a los estudiantes, de tal manera que ellos puedan ir de la dependencia de los expertos o pares a ser capaces de resolver problemas independientemente (Baturo et al., 2004; RAND, 2003).

Las interacciones acertadas en el aula de matemáticas, pueden considerar los cuatro componentes de Askew, Brown, Denvir & Rhodes, (2000):

a) Actividades: Deben estimular y desafiar el intelecto de los estudiantes, ser significativas e interesantes y ser íntegras, matemáticamente hablando.

b) Conversación: Debe facilitar el aprendizaje, centrándose en significados y entendimiento y motivar la participación de todos los alumnos y entre ellos mismos. Abarca la conversación del profesor, profesor - alumno y la de los alumnos.

c) Herramientas: Deben cubrir una variedad de estilos de aprendizaje y de modelos efectivos.

[4] Resumen elaborado con base en: Cooper, T. J., Baturo, A.R. & Grant, E.J. (2006). Collaboration with teachers to improve mathematics learning: Pedagogy at three levels. *Proceeding of PME-30,* Vol. 2. 361-368. Prague. Czech Republic.

d) Relaciones y normas: Deben servir para crear una atmósfera propicia para que los estudiantes se sientan bien y puedan desenvolverse de manera adecuada.

Las interacciones en la clase también reflejan la calidad del contenido matemático y conocimiento pedagógico del maestro (Baturo et al., 2004; RAND, 2003; Shulman, 1986). Si las interacciones son resultado de la colaboración de investigadores y maestros o modelaciones por los investigadores, deben mostrar la calidad de los contenidos matemáticos y contenidos pedagógicos reforzando simultáneamente el conocimiento matemático de los profesores, corrigiendo sus ideas falsas y construyendo su conocimiento pedagógico mediante secuencias eficaces de tareas de enseñanza.

Aprendizaje profesional. El aprendizaje profesional es optimizado cuando el desarrollo profesional:

1) Reúne el apoyo de la administración, estudiantes, padres/tutores y la comunidad de la escuela en general.

2) Permite a los maestros identificar los problemas.

3) Solicita el compromiso consciente de los maestros.

4) Aproxima la actividad de clases a modelos deseados.

5) Discute los impedimentos para hablar del crecimiento profesional de los maestros.

6) Realiza cambios en las creencias de los maestros acerca de la enseñanza y el aprendizaje derivados de una prolongada práctica docente y la observación de los avances del aprendizaje de los alumnos.

7) Da tiempo y oportunidad para la planeación, reflexión y retroalimentación para compartir “sabiduría práctica”.

8) Estimula la confianza de los profesores por su participación en la toma de decisiones por ser considerados compañeros verdaderos.

9) Reconoce que el cambio es gradual, difícil y a veces doloroso.

10) Anima a los participantes a ponerse objetivos más lejanos para su crecimiento profesional (Clarke, 1994).

El amplio proyecto. Dos escuelas fueron parte de un gran proyecto del Gobierno de Australia para estudiar los factores de enseñanza matemática que mejorarían los resultados de matemáticas de los estudiantes. El estudio consistió en observaciones de clase, entrevistas, diarios y utilización de materiales, además los investigadores y maestros trabajaron colaborativamente para planear, implementar y evaluar nuevos programas de enseñanza matemática. Los logros y actitudes de los estudiantes se midieron antes y después de dicha colaboración.

El éxito del aprendizaje profesional dependía de la calidad de las relaciones entre los investigadores y los maestros, es decir el espíritu práctico inmediato de los recursos y actividades, el proporcionar apoyo “justo a tiempo”, la calidad y la profundidad de este apoyo y las respuestas de los estudiantes a las pruebas (Baturo et al., 2004; Bobis, 2004).

Se presentaron diferencias en los niveles de éxito en términos de aprendizaje de los estudiantes y aprendizaje de los maestros. Las comparaciones de observaciones mostraron que las colaboraciones acertadas contenían las pedagogías que funcionaron en tres niveles:

- **Técnicas**

Se refieren a consejos y sugerencias prácticas relacionados con los aspectos técnicos de una lección particular, una actividad o el uso de un material (este es el tipo que generalmente intercambian los profesores). Por ejemplo en la enseñanza del concepto de fracción parte-todo; los maestros usaron el doblado de papel para introducir la partición de la unidad. Pero los maestros no fueron capaces de involucrar a los estudiantes en el doblado hasta que ellos mismos, aprendieron las técnicas para doblar rápidamente rectángulos en tercios, quintos, séptimos, etc.

- **De dominio**

Se refieren a estrategias de enseñanza apropiados a un tópico particular. Están considerados en los cuatro componentes de Askew (actividades, conversación, herramientas y relaciones y normas).

- **Genéricas**. Son estrategias de enseñanza aplicables a todos los tópicos matemáticos. Algunas de ellas son:

  a) Flexibilidad en las representaciones (ejemplo: 61 es 6 dieces y un 1, también es 11 unidades más que la mitad de cien o una hora un minuto).

  b) Reversibilidad o conexión de representaciones en ambas direcciones (ejemplo: “determina el número de ejes de simetría de esta figura”, es reversible a: “construye una figura con tres ejes de simetría”).

  c) Generalización o búsqueda de modelos, estructuras y relaciones, las cuales trascienden lo particular de los datos y los símbolos (ejemplo: leyes conmutativa y distributiva, estructura parte entero de las fracciones).

  d) Uso de ejemplos no prototípicos (ejemplos: iluminar 0.24 en una rejilla de 5 x 20 ó en una figura de medio círculo).

Las colaboraciones mostraron que el aprendizaje por medio de interrelaciones entre representaciones son más productivas, si las conexiones van en ambos caminos (de lo concreto a los símbolos y de los símbolos a lo concreto) y si hay una multiplicidad de representaciones prototípicas y no prototípicas.

Implicaciones. Cuatro implicaciones resultaron particularmente interesantes:

1. Las interacciones en el salón de clases en las cuales los tres niveles de pedagogía estuvieron presentes, fueron eficaces para los estudiantes porque: garantizaron que la lección fuera trabajada de manera práctica, que el tema particular fuera cubierto completamente con una secuencia apropiada de aprendizaje, posibilitó dar ideas más profundas para que el contenido fuera almacenado y relacionando el tema, a otras áreas de la matemática como una estructura interconectada.

2. Posibilitaron la reflexión para trascender de la matemática específica principal de los problemas actuales de clase y operar en las tres pedagogías simultáneamente. Las actividades técnicas parecieron motivar a los maestros por ser exitosas para el entendimiento del estudiante y las pedagogías genéricas apoyaron el interés para encontrar una ventana para otros usos.

3. La planeación y el desarrollo de la instrucción que incorpora todos los niveles de pedagogía requiere de matemáticas fuertes y conocimiento pedagógico, estos dos son necesarios y ninguno es suficiente por él mismo. Sin embargo, los aumentos incluso limitados en el conocimiento del maestro pueden llevar a mejorías en el estudiante. Algunos maestros sólo tenían conocimiento pedagógico y por lo tanto, estaban restringidos en el uso de instrumentos pedagógicos. Cuando se les suministró un conocimiento matemático semántico y estructural, su conocimiento pedagógico fue suficiente y con una pequeña asistencia en el uso de las herramientas mejoraron sus resultados matemáticos. Ejemplo una maestra que enseñaba numeración decimal como una extensión de la numeración de números enteros, mejoró el resultado de sus estudiantes cuando entendió la relación del valor posicional de los decimales con el concepto de parte-todo de la fracción y aprendió las técnicas pedagógicas de partición para enseñar este concepto.

4. En el más interesante aparece la relación entre estructura matemática y la acción de la pedagogía de todos los niveles. Por ejemplo fracciones, porcentajes y probabilidad todos tienen una base de parte-entero. Estos conceptos son compatibles a las pedagogías que relacionan las partes con el entero como las figuras geométricas, modelos de área, recta numérica, modelos de longitud y otra serie de modelos.

El trabajo en el salón de clases es complejo y el profesor requiere mejorar los resultados de aprendizaje de sus alumnos; considerar las tres pedagogías en la planeación y en la instrucción asegura resultados en la enseñanza.

Referencias

Baturo, A, R. (2004). Empowering Andrea to help Year 5 students construct fraction understanding. In M. J. Hoines & A.B. Fugelstad (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp.95-102).* Bergen, Norway: PME.

Askew, M., Brown, M., Denvir, H. & Rhodes, V. (2000). Describing primary mathematics lessons observed in the leverhulme Numeracy Research Programme: A qualitative framework. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 17-24). Hiroshima, Japan: PME.

Baturo, A. R., Warren, E. A. & Cooper, T. J. (2004). *Queensland Numeracy Research and Development Project Final Report: Teachers enhancing numeracy*. Canberra, ACT: DEST.

Bobis, J. (2004). For the sake of the children: Maintaining the momentum of professional development, In M. J. Hoines & A. B. Fugelstad (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 95-102)*. Bergen, Norway: PME.

Clarke, D. (1994). Ten Key principles from research for the professional development of mathematics teachers. In D. B. Aichele & A. F. Coxford (Eds.), *Professional development for teachers of mathematics: 1994 yearbook* (pp. 37-54). Reston, VA: NCTM.

English, L. & Halford, G. (1995). *Mathematics education: Models and processes.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

RAND. (2003). *Mathematical proficiency for all students: Toward a strategic research and development program in mathematics education. Santa Monica,* CA: RAND.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Tesearcher,* 15(2), 4-14.

INSTRUCCIÓN GUIADA COGNOSCITIVAMENTE

Una Investigación basada en el Desarrollo Profesional del Maestro Programa para Escuelas Elementales de Matemáticas[5]

La Instrucción Cognoscitivamente Guiada (CGI) es un programa de desarrollo profesional basado en un proyecto integrado de investigación enfocado en:

* El desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.
* La instrucción que influye en ese desarrollo.
* El conocimiento y creencias de los maestros que influyen en sus prácticas de enseñanza.
* La manera en que el conocimiento de los maestros, sus creencias, y sus prácticas son influenciados por su comprensión del pensamiento matemático de los estudiantes.

Al inicio, de la investigación se utilizó el desarrollo del pensamiento matemático de los niños como contexto para estudiar el conocimiento de los maestros acerca de éste y la manera en que los maestros podrían utilizar dicho conocimiento en la toma de decisiones instruccionales.
Aunque los maestros tenían cierto manejo intuitivo del conocimiento sobre el pensamiento matemático de los niños, éste era fragmentado, lo cual no los ayudaba a tomar decisiones. Al observar esto, los investigadores diseñaron el CGI para ayudarlos a construir mapas conceptuales del desarrollo del pensamiento matemático de los niños en dominios de contenidos específicos (Carpenter, Fennema y Frank,1996).

En este documento se discute la base de investigación del CGI y se presentan cada uno de sus elementos.

Programa de Desarrollo Profesional CGI.

El programa involucra a los maestros en el aprendizaje del desarrollo del pensamiento matemático de los niños. El contenido analizado para este fin, fue la resolución intuitiva de problemas verbales, modelando la acción y las relaciones descritas en ellos. Por medio de esta idea mostraron cómo los conceptos básicos de la adición, sustracción, multiplicación y división se desarrollan en los niños y cómo los niños construyen conceptos de valor posicional y procedimientos computacionales, multidígitos basados en su conocimiento matemático intuitivo.

La relación con los maestros se maneja a través de dos principios:

1) Se enfocan las interacciones sobre las ideas fundamentales, enfatizando el desarrollo del pensamiento de los niños sobre las matemáticas.

2) Se construye sobre el conocimiento existente de los maestros.

---

[5] Resumen elaborado con base en Carpenter, T.P., Fennema E., Loef, M., Levi, L. & Empson, S.B. (2000). Cognitively Guided Instruction: A Research-Based Teacher Professional Development Program for elementary School Mathematics. *National Center For improving student learning and achievement in Mathematics and science.* Report N° 3. Wisconsin Center for Education Research. University of Wisconsin-Madison.

Se trata de proporcionar un ambiente para el aprendizaje que ofrezca oportunidades para construir y evolucionar estructuras organizativas del pensamiento matemático de los niños.

En una serie de estudios los investigadores encontraron que aprender a entender el desarrollo del pensamiento matemático de los niños podría llevar a cambios fundamentales en las creencias y prácticas de los maestros y que estos cambios eran reflejados en el aprendizaje de los estudiantes.

Ellos reflexionan sobre la relación entre este conocimiento y su enseñanza. No se intenta dirigir la manera en que los maestros llevan a cabo su práctica de enseñanza. Tampoco tener maestros que adopten un juego de conductas de enseñanza. Más bien, se proporciona una estructura para que ellos piensen sobre los entendimientos de matemáticas de sus estudiantes y entonces tomen decisiones instruccionales basadas en los principios subyacentes.

a) Investigación acerca del pensamiento de los niños

El modelo del pensamiento de los niños que es la base del CGI está determinado por una extensa investigación, como ejemplo de ello se muestra un estudio con alumnos que finalizan el jardín de niños y que fueron capaces de resolver problemas verbales modelando la acción o relaciones descritas en el problema

TABLA 1: EL ÉXITO DE NIÑOS DEL PREESCOLAR EN LA RESOLUCIÓN DE VARIOS PROBLEMAS DE PALABRA QUE USAN ESTRATEGIAS ESPERADAS

Problema	% de quienes resolvieron correctamente el problema.
Carla tiene 7 dólares. ¿Cuántos dólares más tiene ella que ganar para tener 11 dólares para comprar un cachorro?	74
James tiene 12 globos. Amy tiene 7 globos. ¿Cuántos globos más tiene James que Amy?	67
19 niños están tomando un microbús al parque zoológico. El autobús tiene 7 asientos. ¿Cuántos niños tendrán que sentarse 3 en un asiento, y cuántos pueden sentarse 2 en un asiento?	51

Para muchos maestros y diseñadores del plan de estudios los problemas anteriores eran demasiado difíciles para niños tan pequeños, pero los resultados proporcionaron evidencias de que ellos podían inventar estrategias para resolver una variedad de problemas si se les daba la oportunidad de hacerlo. En cada caso los niños usaron estrategias predichas por nuestro modelo de desarrollo del pensamiento matemático.

b) Conocimiento y creencias de maestros acerca del pensamiento de los niños.

Los maestros pueden identificar diferencias entre tipos de problemas y tienen idea sobre estrategias de modelado y de conteo que los niños a menudo utilizan. Pero la comprensión de los problemas y estrategias no es adecuada y la mayoría no aprecia el papel crítico que "las estrategias de modelación y conteo" juegan en el pensamiento y entendimiento de los niños, así como las estrategias sofisticadas que pocos estudiantes son capaces de utilizar.

Este estudio también mostró que el conocimiento de los maestros acerca del pensamiento de sus estudiantes estaba relacionado con el logro que éstos presentaban en el aprendizaje. Los estudiantes de los maestros que supieron más sobre el pensamiento de sus estudiantes tenían los niveles más altos de logro en la resolución de problemas que los estudiantes de los maestros que tenían menos conocimiento del pensamiento de sus estudiantes.

c) El efecto de la participación en el CGI sobre conocimiento, creencias e instrucción de los maestros.

Los maestros participantes del CGI:

I) Ponen mayor énfasis en la resolución de problemas y menos en habilidades computacionales.
II) Esperan variadas estrategias más que un solo método.
III) Escuchan más a sus alumnos.
IV) Saben más acerca de su pensamiento.

Como resultado del estudio de las diversas creencias y prácticas de enseñanza se pueden ubicar los maestros en los siguientes niveles:

Nivel 1. Los que creen que los alumnos necesitan ser enseñados explícitamente cómo realizar matemáticas. La instrucción es guiada por un texto adaptado y se centra en el aprendizaje de habilidades específicas. Se espera que los niños resuelvan los problemas aplicando procedimientos estándar pudiendo haber o no, una pequeña discusión de soluciones alternativas.

Nivel 2. Los que se empiezan a cuestionar si los alumnos necesitan una instrucción explicita para resolver el problema y proveen alternativamente oportunidades para que los niños resuelvan los problemas utilizando sus propias estrategias y mostrando los métodos específicos de cada uno.

Nivel 3. Los que creen que los niños pueden resolver problemas sin tener una estrategia provista por ellos (no presentan procedimiento para que los niños los imiten). Los niños reportan una variedad de estrategias, las comparan y las contrastan. Los maestros poseen una fuerte comprensión del pensamiento de los niños y la aplican al seleccionar problemas; comprenden y aprecian la variedad de soluciones que los alumnos construyen mientras resuelven los problemas.

Nivel 4. Los maestros conceptualizan instrucciones en términos del pensamiento de los niños durante la clase, tienen una perspectiva más amplia de su pensamiento, no sólo utilizan su conocimiento para acercarlo a sus estudiantes y para planear su instrucción, también lo toman como un marco para desarrollar una instrucción más profunda en el pensamiento de los niños en general, no conciben arreglar modelos para el aprendizaje, centran su atención en procesos de reflexión lo cual ayuda a los alumnos a organizar su conocimiento y facilita la interpretación del pensamiento de los niños por parte del maestro. Continuamente estos maestros revisan lo que han hecho, modifican, adaptan y expanden sus modelos de acuerdo a las necesidades de sus alumnos.

En un estudio posterior, cuatro años después del final de CGI se observó que todos los maestros continuaron implementando principios del programa en algún nivel y muchos de ellos mostraron un crecimiento continuo.

Ellos no sólo habían sostenido sus creencias y prácticas, su aprendizaje había llegado a ser generativo, sus salones fueron lugares de aprendizaje para ellos y sus estudiantes. Lo que distinguió a estos maestros fue:

a) Vieron el pensamiento matemático de los niños como la parte central de su enseñanza.

b) Poseían conocimiento detallado del pensamiento matemático de sus estudiantes.

c) Tenían marcos bien desarrollados acerca del pensamiento matemático de sus alumnos

d) Se percibían a si mismos, creando y elaborando su conocimiento acerca del pensamiento de los niños.

e) Se apoyaron con sus colegas para la comprensión del pensamiento matemático de los niños.

El cambio es difícil pero necesario. Es un proceso lento y dialéctico, con transformaciones en la construcción de conocimientos e instrucción, uno sobre el otro. Ocurre cuando los profesores intentan aplicar su conocimiento para comprender el de sus estudiantes.

El estudio muestra que cada profesor incrementó sustancialmente su desempeño en conceptos y resolución de problemas de sus estudiantes, siguiendo directamente un cambio en el nivel de su práctica.

d) El logro del estudiante.

Los estudios de caso mostraron cómo los maestros pueden cambiar al aprender acerca del pensamiento de los niños; y cómo la enseñanza se ve privilegiada cuando el pensamiento de los niños tiene la atención primaria en la instrucción. Los estudios ilustraron cómo los maestros proveen un ambiente en el cual el pensamiento de los niños es el centro de atención, los niños se comunicaban acerca de las matemáticas, construían sus propios procedimientos para resolver problemas y los conceptos fueron desarrollados en base a esto. Los estudios de caso describen a maestros comprometidos con el tipo de enseñanza que recogen el espíritu de las reformas y documentos recomendados cuando comprueban que los niños son capaces de aprender en estos ambientes.

Los estudios realizados han demostrado consistentemente que los estudiantes CGI muestran logros significativos en la resolución de problemas, sin detrimento de las habilidades en ejercicios computacionales.

Referencias

Carpenter, T.P., Fennema, E. & Franke, M.L. (1996). Cognitively Guided Instruction: A Knowledge Base for Reform in Primary Mathematics Instruction. *The Elementary School Journal* , 97 (1):3-20