CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
Unidad Distrito Federal

Departamento de Matemática Educativa

FORTALECIENDO LA NOCIÓN DE TAMAÑO DE LOS NÚMEROS RACIONALES A TRAVÉS DE UN VIDEOJUEGO DE AVENTURA

Tesis que presenta

Alfonso Olvera Ventura

para obtener el Grado de
Maestro en Ciencias

en la Especialidad de
Matemática Educativa

Directores de Tesis:
Dra. Olimpia Figueras Mourut
Dr. Hugo Rogelio Mejía Velasco

México, Distrito Federal Abril de 2014

ÍNDICE

I

UNA RAZÓN PARA JUGAR

Para los estudiantes no es fácil entender la naturaleza compuesta de las fracciones, lo que se demuestra en su resistencia a abandonar los algoritmos de suma y resta que con éxito aplicaron a los números enteros y decimales. En efecto, si las fracciones son números, ¿por qué no han de sumarse de la misma manera que los demás?

En el salón de clase las fracciones suelen ser presentadas mediante situaciones que ya no pueden resolverse únicamente por medio del conteo (Behr y Post, 1992). El que la adición y la sustracción cedan su lugar como las operaciones protagónicas ante la multiplicación y la división exige una reconceptualización de la unidad (Steffe, 1988) por parte del estudiante que por primera vez observa cómo la multiplicación puede hacer más chico y la división puede hacer más grande, fenómenos inexplicables desde la interpretación del proceso de multiplicación como suma iterada y del proceso de división como repartición equitativa. Por último, en tanto los enteros describen sólo cantidades discretas o discretizadas, con las fracciones se puede hacer referencia a cantidades continuas: en tanto los enteros hablan del cuánto, por medio de las fracciones se puede hablar del qué tanto.

Diversos autores (Behr, Harel, Post y Lesh, 1993; Freudenthal, 1983; Kieren 1980; Ohlsson, 1988; Vergnaud, 1988) concuerdan con que un entendimiento apropiado del esquema de las fracciones implica entender un conjunto de subconstrucciones matemáticas distintas pero unificadas a través de ciertos conceptos, como el de unidad, partición y tamaño.

En particular, la noción de tamaño, es decir la percepción de que dos objetos o situaciones tienen en común alguna propiedad que permite compararlos, es un concepto fundamental anterior a las operaciones aritméticas. En su obra seminal, Piaget y Szeminska (1964/1982) conducen una serie de estudios acerca del desarrollo del concepto de número a partir de situaciones en las que los niños experimentan la invariancia de los conjuntos y la correspondencia término a término de sus elementos. Posteriormente se ha sugerido (Freudenthal, 1983; Behr, Wachsmuth y Post, 1984) que los conceptos de tamaño, equivalencia y orden deben priorizarse en los primeros acercamientos que los estudiantes tienen con los números racionales. Cramer, Post y del Mas (2002) sostienen que en estos primeros acercamientos se debe permitir a los estudiantes la interacción con diversos modelos manipulativos, trasladarse entre distintos modos de representación (verbal, simbólica y pictórica) y relacionar estas ideas con situaciones en el mundo real.

Con el auge de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación y la cada vez mayor aceptación de los entornos virtuales como medios eficientes para el trabajo y el entretenimiento, autores como Malone (1981) y Rieber (1996) han planteado la posibilidad de aprovechar las cualidades lúdicas de los videojuegos en la educación, apoyando su tesis en ciertas evidencias de que el aprendizaje es mayor y más duradero cuando se genera en el marco de una experiencia agradable para quien aprende (ver por ejemplo Lepper, Greene y Nisbett, 1973; Pellegrini, 1995; Squire, 2003).

Algunos estudios han mostrado cierta relación estadística entre la experiencia que una persona ha tenido con videojuegos de acción y su habilidad psicomotora (por ejemplo Clark, Fleck y Mitroff, 2011; Donohue, Woldorff y Mitroff, 2010; Green y Bavelier, 2003), lo que ha motivado el desarrollo de terapias y programas virtuales de rehabilitación para personas con discapacidades físicas o enfermedades neurodegenerativas. En México, Meridia (http://www.meridia.mx) ofrece algunos de estos programas para personas de la tercera edad.

De ser posible el desarrollo de videojuegos que involucren a los estudiantes de nivel básico en situaciones que los motiven a reflexionar sobre los conceptos asociados a la noción de tamaño, resultaría sensato agregar a la prescripción hecha por Cramer, Post y del Mas (2002) el recurso de los videojuegos educativos.

I.1 Preguntas de investigación

Ante estas consideraciones puede plantearse las pregunta: ¿Es posible ayudar a estudiantes de educación básica a fortalecer su noción de tamaño de los números racionales por medio de un videojuego?

Si la respuesta fuera afirmativa, además de tratar de delinear las características de tal videojuego cabría preguntarse lo siguiente: ¿Por qué no se ha desarrollado hasta ahora un videojuego educativo que reporte consistentemente resultados positivos tras su aplicación? ¿Cuáles son algunas de las habilidades que un videojuego debería promover para sostener que efectivamente ayuda a fortalecer la noción de tamaño de los números racionales?

I.2 El tamaño de los números racionales

Suponiendo que la respuesta a la pregunta principal es afirmativa, responder la última pregunta podría servir de guía en el diseño con el cual videojuego educativo debe concebirse.

Si se toma como definición de tamaño la cualidad de cierta propiedad común a dos objetos o situaciones que nos permite compararlos y ordenarlos, entonces es claro que una habilidad que evidencia la noción de tamaño de los números racionales es la de producir estrategias para comparar y ordenar cualesquiera dos de ellos.

Debe notarse que, debido a la complejidad de la construcción matemática de los números racionales, cuando se habla de estrategias de comparación usualmente se hace referencia a una comparación de fracciones.

En el CAPÍTULO II de esta tesis se distinguen los criterios de comparación de fracciones de las estrategias de comparación de fracciones:

- Una estrategia de comparación de fracciones es una secuencia de acciones con las que un individuo transforma la situación planteada por un problema, buscando que la nueva situación pueda ser resuelta por medio de una combinación de criterios de comparación de fracciones.
- Un criterio de comparación de fracciones es la aplicación de alguna proposición demostrable del campo ordenado de fracciones para establecer la relación de orden entre dos fracciones.

La noción de tamaño puede entonces valorarse en el conocimiento de criterios válidos de comparación de fracciones y en la habilidad para producir estrategias basadas en ellos.

Noelting (1980a, 1980b) ha notado que los estudiantes pueden establecer dos tipos de estrategias generales al comparar razones. La primera consiste en comparar las relaciones al interior de cada razón (numerador-denominador contra numerador-denominador) y la segunda consiste en comparar las relaciones al exterior de cada razón (numerador-numerador contra denominador-denominador).

A pesar de que en el experimento de Noelting la tarea de los estudiantes es comparar la razón de dos cantidades en espacios de medida diferentes, las estrategias que los estudiantes producen para comparar las razones son efectuadas sobre la grafía a/b de las fracciones, y por lo tanto las observaciones acerca de las relaciones internas y externas son válidas también en la comparación de fracciones.

En el CAPÍTULO II, la relación al interior de cada fracción es llamada relación intraduplar (RinA) y la relación al exterior es llamada relación interduplar (RinE), en referencia a la notación $(a, b) = a/b$.

En un experimento posterior, Karplus, Pulos y Stage (1983) observan que la elección del tipo de estrategia depende de la configuración numérica del problema: los estudiantes en general prefieren estrategias basadas en RinAs, pero optan por una estrategia basada en RinEs cuando uno de los numeradores es múltiplo del otro, o cuando uno de los denominadores es múltiplo del otro.

Otra habilidad que refleja la noción de tamaño de los racionales es la de estimar el tamaño de una fracción relativo a un patrón de medida. Esta tarea puede asociarse a la representación de fracciones en un modelo parte-todo previamente construido, donde la unidad de medida queda determinada por el número de partes, así como a la localización de fracciones sobre una recta numérica previamente graduada, donde la unidad de medida queda determinada por la graduación.

Behr, Lesh, Post y Silver (1983) señalan que el diseño irrelevante, incompleto e inconsistente de las claves perceptuales, es decir las figuras, modelos y diagramas sobre los cuales los estudiantes deben representar las fracciones, influye sobre la elección de estrategias y el éxito con que son empleadas.

La promoción y evaluación de estas habilidades, discutidas con mayor profundidad en el CAPÍTULO II de esta tesis, debe ser uno de los focos en el diseño de nuestro videojuego educativo. Pero aún es necesario reflexionar sobre la forma en que tal promoción y evaluación puede tener lugar como parte integral del juego. Tratar de responder la otra pregunta secundaria es benéfico en este sentido.

I.3 Por qué trabajar con videojuegos educativos

La explosión de neologismos y la invasión descontrolada de extranjerismos ha ocasionado una terminología con frecuencia desafortunada para describir actividades que hace apenas 50 años eran inconcebibles.

El correo electrónico, por ejemplo, no es realmente un medio de comunicación virtual, aunque se le suela describir de este modo. El medio es real y la comunicación es real, aunque el buzón en el que se reciben los mensajes sea virtual. Las personas que se reúnen en foros en internet para discutir los temas de su común interés no conforman una comunidad virtual, sino una comunidad real que se reúne en un espacio virtual. No debe pensarse, entonces, que el objetivo de un videojuego educativo es el aprendizaje virtual, sino el aprendizaje real a través de entornos virtuales.

Los entornos virtuales ofrecen ciertos beneficios para quienes la realidad supone una limitación espacial, temporal, económica o de otra índole. Además, a diferencia de lo que sucede en un entorno real, en un entorno virtual pueden experimentarse a voluntad todas las eventualidades de una situación. Este hecho es aprovechado en diversos programas de instrucción. Por ejemplo, un aspirante a piloto aviador puede prepararse para enfrentar situaciones poco probables pero altamente riesgosas, como volar cerca de un huracán, por medio de simuladores de vuelo.

Sin embargo, el mayor beneficio que los entornos virtuales pueden proveer es el de suspender las consecuencias estrictas de las leyes naturales o de la acción humana para enfatizar algún aspecto del objeto o situación que el usuario desea conocer.

Pero si algunos entornos virtuales ya han sido aplicados con fines didácticos, como es el caso de los simuladores de vuelo, ¿qué ha impedido que este uso se extienda de manera regular al aprendizaje en el salón de clase?

En el CAPÍTULO III de esta tesis se hace una revisión de la literatura relativa al diseño de entornos intrínsecamente motivantes, entendiendo por motivación intrínseca la cualidad de una actividad en la que una o más personas desean involucrarse sin requerir recompensas externas, aunque ellas existan.

Partiendo del análisis realizado por Sutton-Smith, Pellegrini (1995) postula que toda actividad lúdica alberga cuatro propósitos: el desarrollo de alguna habilidad, declarar un vencedor, experimentar situaciones alternativas a la realidad y ser divertida.

Malone (1981) añade que las fuentes que generan motivación intrínseca son el reto, la curiosidad, el control y la fantasía. La fantasía merece una atención especial al ser simultáneamente raíz y fruto de la experiencia lúdica. Por esta razón, Rieber (1996) expone que un diseño adecuado del juego educativo debe integrar su mecánica y su fantasía con el contenido educativo. En otras palabras, el desarrollador debe cuidar que la mecánica de juego emerja de manera natural de la fantasía y a su vez proponga al jugador actividades que impacten directamente la habilidad que desea desarrollar.

Al final del CAPÍTULO III de esta tesis se hace una crítica a cuatro videojuegos educativos que exhiben los fallos más comunes en el cumplimiento de la teoría propuesta de la motivación intrínseca. El uso limitado de videojuegos educativos en una época en la que las tecnologías digitales y los entornos virtuales influyen positivamente en otras áreas de la actividad humana se explican por la falta de atención a las cuatro fuentes de motivación intrínseca, sin cualquiera de las cuales los propósitos de la lúdica, entre ellos el desarrollo de habilidades, no pueden ser consistentemente alcanzados.

I.4 Diseño de la experiencia

El libro de arena es un videojuego de aventura diseñado con la idea de aprovechar las características de los entornos intrínsecamente motivantes para contextualizar actividades como la comparación y localización de fracciones. Sus características son comentadas en el CAPÍTULO IV.

Para validar el diseño de *El libro de arena* se eligieron dos niñas y tres niños inscritos en el curso de sexto año de primaria en la ciudad de Tlaxcala. Ninguno de ellos es compañero de otro en la misma escuela.

Los cinco estudiantes contestaron un pretest en la última semana de septiembre de 2013 para caracterizar su noción de tamaño de los números racionales.

Luego de contestar el pretest, se les pidió su colaboración para probar *El libro de arena* y reportar cualquier error de programación. Se hicieron visitas semanales de 45 minutos durante cuatro semanas, en las cuales se comentaban aspectos del juego como los controles de navegación o la ubicación de items, pero no se hicieron observaciones respecto a las estrategias empleadas para resolver los puzzles y avanzar en el juego.

Todas las actividades se realizaron fuera de la escuela, en el hogar de cada niño. Se pidió a los padres de familia que permitieran jugar a los niños tan frecuentemente como ellos lo desearan, siempre que esto no interfiriera con sus actividades académicas. Cada niño tuvo una experiencia individual según su gusto personal por el juego, avanzando a su propio ritmo, sin la promesa de recompensas externas al juego y sin intervención didáctica de parte del investigador.

En la visita de la quinta semana se aplicó un postest para identificar cambios en las características de su noción de tamaño de los números racionales respecto a las determinadas en el pretest.

Una breve entrevista al término de cada evaluación permitió aclarar la intención de los estudiantes en sus estrategias de resolución de los items.

I.5 Reporte de la experiencia

Los capítulos v y vi de esta tesis reportan los resultados de la experiencia y las conclusiones.

La distinción entre criterios, falsos criterios y estrategias de comparación de fracciones ha permitido detectar ciertas deficiencias en la noción de tamaño con que los estudiantes interpretan las fracciones. Por otro lado, la atención a una casuística de configuraciones numéricas que considere la existencia de relaciones interduplares (RinE) e intraduplares (RinA) de múltiplos enteros en el diseño de problemas de comparación de fracciones podría ser importante en una secuencia didáctica cuyo objetivo sea fomentar el desarrollo de los 7 criterios de comparación de fracciones descritos en el capítulo ii.

En cuanto al diseño de videojuegos educativos, el poco éxito con que han sido adaptados a contenidos matemáticos puede ser explicado por la atención superficial a la teoría de la motivación intrínseca.

El libro de arena ha sido un primer intento por ofrecer una experiencia en la que los cuatro propósitos de la lúdica (diversión, fantasía, poder y progreso) son tratados con la misma importancia, y en la que se recurre a todas las fuentes de motivación intrínseca (control, curiosidad, fantasía y reto) para promover la interacción voluntaria del jugador con situaciones que pueden ser resueltas mediante la aplicación de conceptos matemáticos relacionados con el tamaño de los números racionales.

Los diversos grados de interés y experiencia que los participantes poseen por los videojuegos, así como sus antecedentes académicos, se vieron reflejados en el éxito con que *El libro de arena* influyó sobre la noción de tamaño de los números racionales que cada participante mostró en el postest en comparación con lo mostrado en el pretest. Esto indica, independientemente de que la experimentación permita conocer los efectos directos del juego, que los videojuegos pueden ser usados como una herramienta válida y viable de aprendizaje que debe ser estudiada seriamente.

II

EL TAMAÑO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Diversos autores han señalado que el reconocimiento de equivalencias y la noción de que una cosa es más grande que otra precede fenomenológicamente a cualquier operación aritmética (Freudenthal, 1983; Behr, Wachsmuth y Post, 1984). Esto concuerda con las observaciones hechas por Piaget y Szeminska (1964/1982), quienes postulan que los niños atraviesan las etapas: a) de evaluación global de conjuntos o cantidades continuas, b) de correspondencia de elementos o propiedades como altura y espacio cubierto, pero aún sin equivalencia durable, y c) de correspondencia numérica con equivalencia necesaria, mucho antes de estar preparados para considerar una colección como una reunión de unidades de la forma $1 + 1 + 1 + \ldots$

Consecuentemente se ha sugerido que la instrucción sobre operaciones aritméticas con fracciones debe posponerse para priorizar los conceptos de orden y equivalencia durante los primeros años de educación (Bezuk y Cramer, 1989; Cramer y Henry, 2002; Cramer, Post y del Mas, 2002).

Entre los autores que apoyan esta idea se encuentran aquellos que conforman el Proyecto de Número Racional (RNP, por sus siglas en inglés), un proyecto de investigación iniciado en los EE. UU. en el año 1979, concentrado en la enseñanza y el aprendizaje de los números racionales a través de distintas interpretaciones de las fracciones, principalmente con estudiantes de cuarto y quinto grado (alrededor de los 10 años de edad). A lo largo de los años 80 y 90, en el RNP se diseñó una secuencia de enseñanza en torno al desarrollo de los conceptos de orden y equivalencia de las fracciones y un concepto flexible de la unidad, precediendo éstos al desarrollo de los procedimientos simbólicos de la adición y sustracción (Cramer, Behr, Post y Lesh, 2009; Cramer, Wyberg y Leavitt, 2009).

Al comparar el desempeño entre estudiantes bajo la "secuencia curricular comercial" y estudiantes bajo la secuencia de enseñanza del RNP (Cramer, Post y del Mas, 2002) se observó un promedio estadístico superior en el puntaje logrado por el segundo grupo en un test, consecuencia de aplicar estrategias más conceptuales, a diferencia de las estrategias procedimentales comúnmente aplicadas por los estudiantes del primer grupo.

Por ejemplo, un estudiante de cuarto grado bajo la secuencia del RNP ubicó correctamente la suma de 2/3 y 1/6 sobre una recta numérica entre 1/2 y 1, siguiendo el razonamiento "*dos tercios es más que un medio; luego agregas un sexto; no es más grande que uno; un sexto es menos que un tercio*" (Cramer, Post y del Mas, 2002), demostrando la habilidad de juzgar los tamaños relativos de dos tercios y un sexto para llegar a una estimación razonable sin necesidad de realizar operaciones aritméticas formales. Por supuesto, el conocer el resultado de una adición requiere de algo más que sólo tener una idea de su tamaño, pero sin la noción de tamaño el resultado de la adición carece de sentido.

Los conceptos de unidad, orden y equivalencia están asociados con la noción de tamaño, una característica fundamental en toda interpretación de las fracciones.

II.1 La fragmentación y la unidad fraccionaria

En el marco de su hipótesis de la reorganización, la cual sostiene que "los esquemas relacionados con fracciones emergen como acomodaciones de los esquemas de conteo" (pág. 1), Steffe y Olive (2010) afirman que una vez que un niño ha construido la unidad iterable (al generar lo que en su estudio es llamado *secuencia numeral explícitamente anidada*) está preparado para enfrentar con éxito problemas de repartición justa de cantidades continuas.

La primera forma en que un niño puede lograr la repartición justa de una cantidad continua es por medio de la equisegmentación. En la equisegmentación, al intentar dividir, por ejemplo, una barra de longitud b en cuatro partes iguales, un niño:

- Proyectará la imagen de una barra de menor longitud u sobre la original.
- Iterará la barra de longitud u a lo largo de la barra de longitud b.
- Si al final de cuatro iteraciones la longitud $4u$ es perceptiblemente mayor que b, el niño elegirá una nueva barra de longitud u' menor que u; si la longitud $4u$ es perceptiblemente menor que b, el niño elegirá una nueva barra de longitud u' mayor que u; si la longitud $4u$ es igual que b, el niño ha resuelto el problema.

La segunda forma en que el problema puede ser resuelto es por medio de la equipartición. En la equipartición, al intentar dividir la misma barra de longitud b, un niño:

- Proyectará la imagen de cuatro barras conectadas sobre la original.
- Coordinará las longitudes de cada barra hasta que todas ellas tengan la misma longitud u.
- Una vez fijas las cuatro barras en su lugar, el niño ha resuelto el problema.

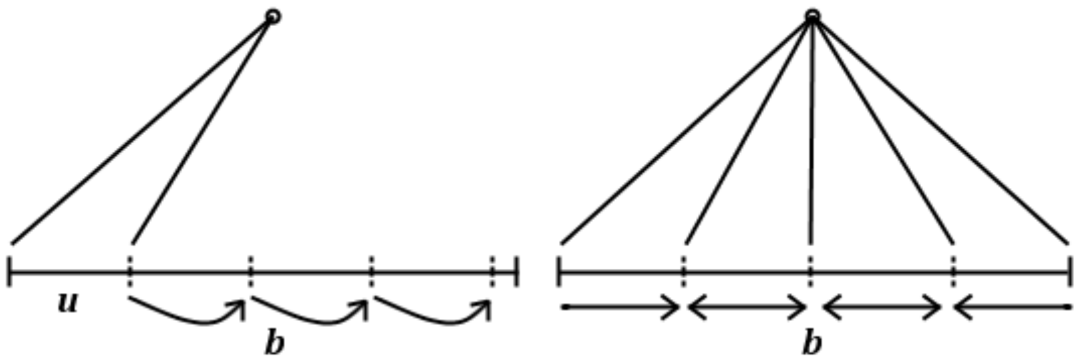


FIGURA II.1 – Dos vías de repartición: equisegmentación (izquierda) y equipartición (derecha)

En ambos casos, cada barra individual propuesta por el niño representa una fracción unitaria 1/4 del todo que el niño ha dividido en partes iguales. La diferencia fundamental entre la equisegmentación y la equipartición es que en ésta última la proyección de las unidades sobre la cantidad se efectúa en un único acto compuesto y no en una secuencia de actos, pero ambas constituyen esquemas de fragmentación.

Es posible que el niño, en una reflexión posterior a la equifragmentación de la cantidad continua *b*, reagrupe los fragmentos para producir descripciones alternativas del resultado de la repartición. Por ejemplo, si la barra que ha sido dividida en cuatro partes debe ser repartida entre dos personas, el niño puede concluir que la porción que corresponde a cada persona es 2/4 o, alternativamente, 1/2. En ese caso, el niño habrá construido la unidad fraccionaria compuesta 1/2 a partir de la fracción unitaria 1/4.

Para entender la diferencia entre el concepto de fracción unitaria y el concepto de unidad fraccionaria compuesta, puede pensarse en dos interpretaciones distintas de la FIGURA II.2:

- La longitud del lápiz es la longitud de 10 centímetros (diez fracciones unitarias 1/100 de un metro).
- La longitud del lápiz es la longitud de 1 “deca-centímetro” (una unidad fraccionaria compuesta de 10 fracciones unitarias conectadas).

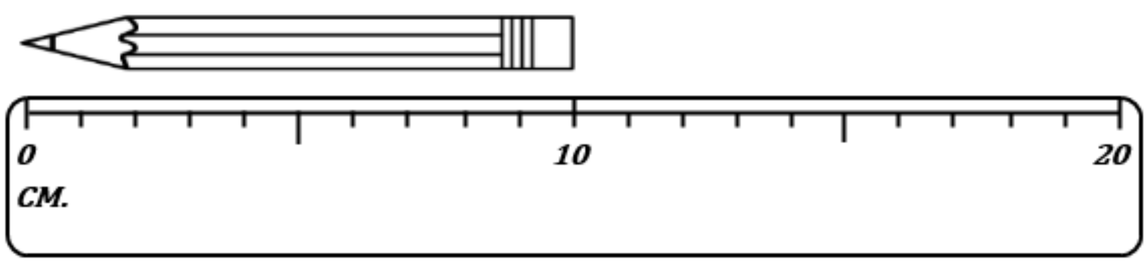


FIGURA II.2 – 10 centímetros o 1 deca-centímetro

El hecho de que la unidad fraccionaria de medida “deca-centímetro” sea idéntica en longitud al “decímetro” no es independiente del hecho de que las fracciones 2/4 y 1/2 son llamadas equivalentes.

Los conceptos de equivalencia y orden, esenciales en el desarrollo de la noción de tamaño, serán discutidos en la SECCIÓN II.3. Antes de ello se dará una reseña del modelo de las subconstrucciones de los números racionales con el fin de mostrar la importancia de la noción de tamaño en el aprendizaje y la aplicación de los racionales.

II.2 El modelo de las subconstrucciones

Las dificultades que los estudiantes experimentan al enfrentarse a las fracciones han sido explicadas principalmente por las diferencias estructurales existentes entre los números racionales y los números enteros. Es un consenso general que los números racionales pueden ser caracterizados como un conjunto de subconstrucciones matemáticas relacionadas entre sí pero distintas en su origen, su significado y su función.

El término "subconstrucciones" para referirse a las distintas interpretaciones fenomenológicas y funcionales de los números racionales fue usado por primera vez por Kieren (1980). Entender los números racionales, explica Kieren (1993), implica contestar a la pregunta: ¿Qué es capaz de hacer una persona que conoce los números racionales?

Las subconstrucciones más comúnmente identificadas son parte-todo, medida, operador, cociente y razón (Behr, Harel, Post y Lesh, 1993), aunque algunos autores difieren en la categorización de sus conceptos (por ejemplo, Freudenthal, 1983; Ohlsson, 1988; Vergnaud, 1988), agregando o descartando diversas interpretaciones de repartición, número decimal, vector binario, tasa y probabilidad, que agrupan, subdividen, reemplazan o redefinen los conceptos anteriores.

II.2.1 Razón y cociente

Freudenthal (1983) define la razón como una relación de equivalencia en el conjunto de pares ordenados de valores de magnitud, observando que al interpretar una razón como un cociente se le despoja de lo que la hace valiosa y distinta de las demás subconstrucciones de los números racionales, que es su categoría de relación y no de valor de magnitud. La intención de la razón es distinguir si un par ordenado pertenece o no a cierta clase de equivalencia sin la necesidad de conocer la magnitud del número racional asociado a ella.

La razón difiere del cociente en que el cociente se refiere a la igualdad operativa de a/b y c/d. Si se divide a entre b el resultado numérico es el mismo que se obtiene al dividir c entre d. La razón, en cambio, sólo puede expresarse por un número o valor de magnitud u hasta una vez que se ha elegido una unidad e (Freudenthal, 1983), de manera que la magnitud a es tantas veces la de b como la magnitud u es tantas veces la de la unidad e. Pero, de nuevo, el sentido real de la razón radica en el "es tantas veces como" y no en el valor de magnitud u.

A pesar de esta distinción, no sólo es posible sino, con frecuencia, útil interpretar a la razón como un cociente, pues, señala Schwartz (1988), estas relaciones pueden cuantificarse y, de hecho, es posible operar aritméticamente sobre tales cantidades. Schwartz llama cantidad intensiva al resultado de componer dos cantidades, similares o distintas, en una tercera que no es similar a ninguna de las cantidades originales, y al proceso de composición lo clasifica como composición transformadora del referente. La cuantificación de la razón es, por lo tanto, una composición transformadora del referente, excepto cuando la razón relaciona dos números sin referente, o cantidades no adjetivales. A estos referentes Vergnaud (1983) los ha llamado "espacios de medida", y sobre ellos ha basado un estudio de las estructuras multiplicativas que emergen de las situaciones de proporcionalidad (ver también Vergnaud, 1988).

II.2.2 Parte-todo y medida

Si dos cantidades x y y son conmensurables y x es menor que y, es posible representar numéricamente a x en relación con y sin presuponer una representación numérica de y. La solución consiste (Ohlsson, 1988) en realizar una equipartición de y en b partes de tamaño t, eligiendo b de manera que t cabe un número entero a de veces en x. Entonces se dice que el tamaño de x es a partes de b en que se divide y, o a/b de y.

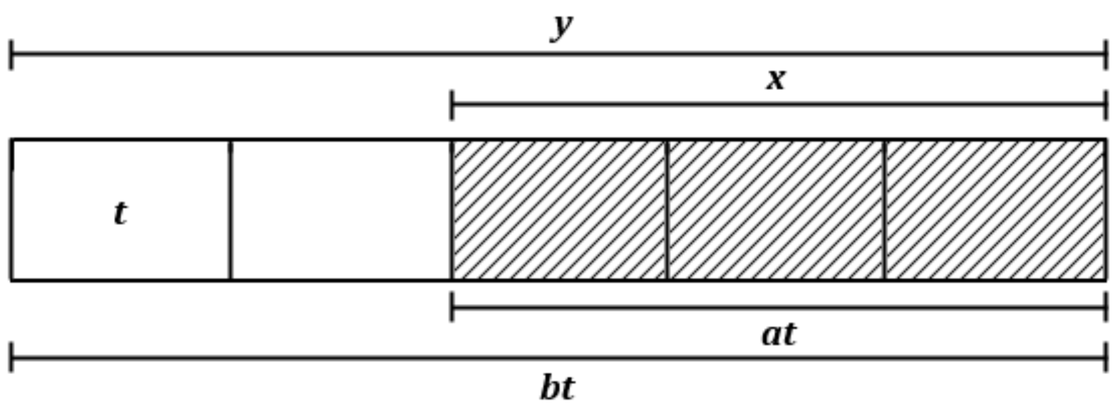


FIGURA II.3 – Representación de la subconstrucción parte-todo

Ohlsson (1988) interpreta este proceso como la aplicación fraccional de los números racionales. Kieren (1980), en cambio, lo identifica con la subconstrucción parte-todo y lo señala como fuente de lenguaje y simbolismo para el resto de las subconstrucciones, lo que permitiría resolver toda una gama de tareas de relación, partición, medición y comparación de conjuntos, cantidades y otros fenómenos. Posteriormente Kieren (1988) reorganiza su modelo de las subconstrucciones e identifica la generación del modelo parte-todo como un medio para relacionar el resto de las subconstrucciones. Puesto que en esta tesis se considera a las fracciones una construcción matemática compleja que comparte propiedades con los números racionales, pero no una mera aplicación de ellos, se relacionará al proceso de construcción de la FIGURA II.3 con el modelo parte-todo.

El papel del modelo parte-todo como apoyo conceptual puede apreciarse claramente en la subconstrucción de medida.

Cuando se cuenta con una cantidad de referencia y, llamada unidad, y un mecanismo de equifragmentación que produce b partes de igual tamaño t por unidad, puede determinarse la medida de cualquier cantidad x.

El proceso de medición se efectúa extrayendo y de x tantas veces como sea posible sin pasarse, es decir hasta que el restante de x sea menor que y; cuando esto sucede, se prosigue extrayendo t del restante de x. La medida de x es, entonces, a/b veces y, donde a es el número de partes de tamaño t que son necesarias para cubrir completamente a x, y b es el número de partes de tamaño t que son necesarias para cubrir la unidad y.

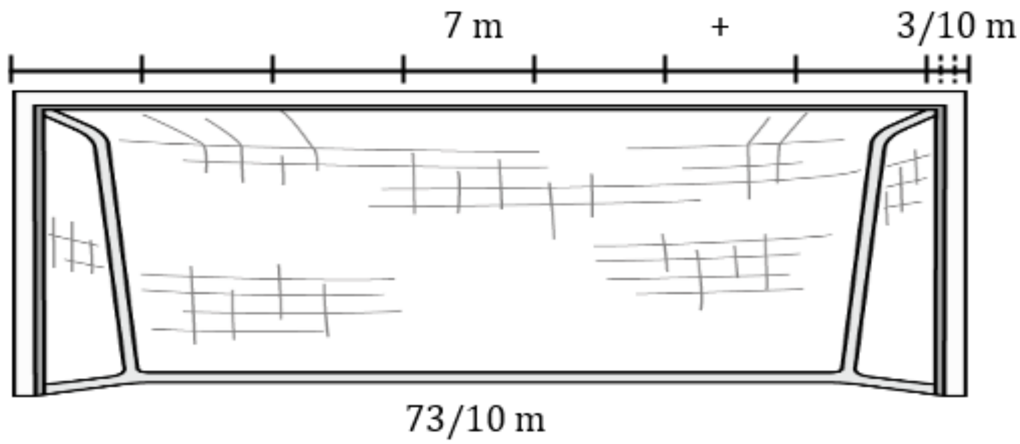


FIGURA II.4 – Medida de la longitud x de una portería de fútbol con $y = 1\ m$ y $b = 10$

Es de destacar que, aunque el modelo parte-todo, como se ha definido, queda originalmente restringido a cantidades x necesariamente contenidas en la cantidad y (ver FIGURA II.3), la subconstrucción de medida permite comparar cualquier cantidad x con la unidad y sin importar cuál de ellas es mayor, como en la FIGURA II.4.

La localización de puntos sobre la recta numérica, por ejemplo, atiende a la subconstrucción de medida porque la construcción de la recta es, en esencia, la construcción de una regla graduada en la que una unidad de longitud es elegida en representación de cualquier espacio de medida, y la interpretación de la posición de un punto x sobre ella es la medida a/b veces y desde el punto cero.

II.2.3 Operador

La última de las subconstrucciones, operador, a pesar de su importancia en la conformación del concepto de número racional, no involucra los conceptos de tamaño, orden y equivalencia en la manera en que razón, cociente, parte-todo y medida resultan relevantes para esta tesis, y por lo tanto no será discutida.

Puede encontrarse un análisis detallado por Behr, Harel, Post y Lesh (1983), en el que se elabora sobre las interpretaciones de duplicador-reductor y estirador-encogedor de las fracciones, recurriendo a un sistema de notación que enfatiza la relación entre las fracciones unitarias y las unidades fraccionarias compuestas.

II.3 Comparación de fracciones

Debido a la complejidad de la construcción matemática de los números racionales, cuando se habla de estrategias de comparación más comúnmente se hace referencia a una comparación de fracciones que a una comparación de números racionales.

Como lo expone Freudenthal (1983), las situaciones de repartición, en las cuales usualmente una persona entra en contacto por primera vez con los números racionales, pueden dar origen a las expresiones, por ejemplo, 1/2, 2/4, 3/6, etc. Todas ellas hacen referencia al mismo objeto matemático, el número racional a cuya clase de equivalencia pertenecen, pero emergen de manera natural de situaciones distintas.

El resultado de comparar dos fracciones no sólo puede ser “a/b es mayor que c/d” o “a/b es menor que c/d”, sino “a/b es igual a c/d” cuando a/b y c/d son expresiones del mismo número racional. En realidad lo que se compara son los tamaños de los números racionales, pero la comparación se realiza a través de fracciones y, de hecho, todas las operaciones aritméticas con números racionales aprendidas en la escuela se realizan sobre la grafía a/b de las fracciones, es decir, sobre una composición numerador-denominador.

Para entender la diferencia entre las estrategias informales de comparación de fracciones y el procedimiento formal de comparación, será necesario discutir algunas propiedades de las fracciones entendidas como un campo ordenado.

II.3.1 Propiedades del campo de fracciones

Sea F el conjunto de fracciones:

$$F = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$

Dos fracciones cualesquiera (a_1, b_1) y (a_2, b_2) pueden relacionarse de la siguiente forma:

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 b_2 = a_2 b_1$$

La igualdad de dos fracciones establece una relación de equivalencia que parte al conjunto F en clases de equivalencia. La colección de estas clases de equivalencia es el conjunto de los números racionales y es usualmente denotado por $\mathbb{Q}$.

Al definir la suma:

$$(a_1, b_1)S(a_2, b_2) = (a_1 b_2 + a_2 b_1, b_1 b_2)$$

y el producto:

$$(a_1, b_1)P(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$$

sobre los elementos de F, se puede hablar del campo de fracciones ya que en las operaciones así definidas se cumplen las propiedades: a) de cerradura, b) conmutativa, c) asociativa, d) distributiva, e) de existencia de elementos neutros para suma y producto, y f) de existencia de elementos inversos para suma y producto.

- **Propiedad de cerradura en la suma**. $\forall\, (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in F$
  $(a_1, b_1)S(a_2, b_2) = (a_1 b_2 + a_2 b_1, b_1 b_2)$
  Pero $a_1 b_2 + a_2 b_1 \in \mathbb{Z}$ y $b_1 b_2 \in \mathbb{Z}$
  $\therefore (a_1, b_1)S(a_2, b_2) \in F$

- **Propiedad conmutativa en la suma**. $\forall\,(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in F$
  $(a_1,b_1)S(a_2,b_2)=(a_1b_2+a_2b_1,b_1b_2)$
  $(a_2,b_2)S(a_1,b_1)=(a_2b_1+a_1b_2,b_2b_1)=(a_1b_2+a_2b_1,b_1b_2)$
  $\therefore (a_1,b_1)S(a_2,b_2)=(a_2,b_2)S(a_1,b_1)$

- **Propiedad asociativa en la suma.** $\forall\,(a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_3)\in F$
  $[(a_1,b_1)S(a_2,b_2)]S(a_3,b_3)=(a_1b_2+a_2b_1,b_1b_2)S(a_3,b_3)$
  $=(a_1b_2b_3+a_2b_1b_3+a_3b_1b_2,b_1b_2b_3)$
  $(a_1,b_1)S[(a_2,b_2)S(a_3,b_3)]=(a_1,b_1)S(a_2b_3+a_3b_2,b_2b_3)$
  $=(a_1b_2b_3+a_2b_1b_3+a_3b_1b_2,b_1b_2b_3)$
  $\therefore [(a_1,b_1)S(a_2,b_2)]S(a_3,b_3)=(a_1,b_1)S[(a_2,b_2)S(a_3,b_3)]$

- **Propiedad de cerradura en el producto**. $\forall\,(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in F$
  $(a_1,b_1)P(a_2,b_2)=(a_1a_2,b_1b_2)$
  Pero $a_1a_2\in\mathbb{Z}$ y $b_1b_2\in\mathbb{Z}$
  $\therefore (a_1,b_1)P(a_2,b_2)\in F$

- **Propiedad conmutativa en el producto**. $\forall\,(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in F$
  $(a_1,b_1)P(a_2,b_2)=(a_1a_2,b_1b_2)$
  $(a_2,b_2)P(a_1,b_1)=(a_1a_2,b_1b_2)$
  $\therefore (a_1,b_1)P(a_2,b_2)=(a_2,b_2)P(a_1,b_1)$

- **Propiedad asociativa en el producto.** $\forall\,(a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_3)\in F$
  $[(a_1,b_1)P(a_2,b_2)]P(a_3,b_3)=(a_1a_2,b_1b_2)P(a_3,b_3)$
  $=(a_1a_2a_3,b_1b_2b_3)$
  $(a_1,b_1)P[(a_2,b_2)P(a_3,b_3)]=(a_1,b_1)P(a_2a_3,b_2b_3)$
  $=(a_1a_2a_3,b_1b_2b_3)$
  $\therefore [(a_1,b_1)P(a_2,b_2)]P(a_3,b_3)=(a_1,b_1)P[(a_2,b_2)P(a_3,b_3)]$

- **Propiedad distributiva del producto sobre la suma.**
  $\forall\,(a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_3)\in F$
  $(a_1,b_1)P[(a_2,b_2)S(a_3,b_3)]=(a_1,b_1)P(a_2b_3+a_3b_2,b_2b_3)$
  $=(a_1a_2b_3+a_1a_3b_2,b_1b_2b_3)$
  $[(a_1,b_1)P(a_2,b_2)]S[(a_1,b_1)P(a_3,b_3)]=(a_1a_2,b_1b_2)S(a_1a_3,b_1b_3)$
  $=(a_1a_2b_1b_3+a_1a_3b_1b_2,b_1b_1b_2b_3)$
  Por la definición de equivalencia:
  $(a_1a_2b_3+a_1a_3b_2,b_1b_2b_3)=(a_1a_2b_1b_3+a_1a_3b_1b_2,b_1b_1b_2b_3)$
  $\therefore (a_1,b_1)P[(a_2,b_2)S(a_3,b_3)]=[(a_1,b_1)P(a_2,b_2)]S[(a_1,b_1)P(a_3,b_3)]$

- **Existencia de un elemento neutro aditivo $\mathbf{0}_F$.**
  $\forall\,(a_1,b_1)\in F,(a_2,b_2)=(0,1)$
  $(a_1,b_1)S(a_2,b_2)=(a_1,b_1)S(0,1)=(a_1,b_1)$
  $\therefore \exists\,(a_2,b_2)=0_F\in F:\ (a_1,b_1)S(a_2,b_2)=(a_1,b_1)\ \forall\,(a_1,b_1)\in F$

- **Existencia de un elemento neutro multiplicativo $\mathbf{1}_F$.**
  $\forall\ (a_1, b_1) \in F, (a_2, b_2) = (1, 1)$
  $(a_1, b_1)P(a_2, b_2) = (a_1, b_1)P(1, 1) = (a_1, b_1)$
  $\therefore \exists\ (a_2, b_2) = 1_F \in F :\ (a_1, b_1)P(a_2, b_2) = (a_1, b_1)\ \forall\ (a_1, b_1) \in F$

- **Existencia del elemento inverso aditivo.**
  $\forall\ (a_1, b_1) \in F, (a_2, b_2) = (-a_1, b_1)$
  $(a_1, b_1)S(a_2, b_2) = (a_1, b_1)S(-a_1, b_1) = (a_1b_1 - a_1b_1, b_1b_1) = (0, b_1b_1)$
  Pero por la definición de equivalencia $(0, b_1b_1) = (0, 1) = 0_F$
  $\therefore \forall\ (a_1, b_1) \in F\ \exists\ (a_2, b_2) \in F :\ (a_1, b_1)S(a_2, b_2) = 0_F$

- **Existencia del elemento inverso multiplicativo.**
  Sean $(a_1, b_1) \in F, (a_1, b_1) \neq 0_F, (a_2, b_2) = (b_1, a_1)$
  $(a_1, b_1)P(a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2) = (a_1b_1, a_1b_1)$
  Pero por la definición de equivalencia $(a_1b_1, a_1b_1) = (1, 1) = 1_F$
  $\therefore \forall\ (a_1, b_1) \in F\ \exists\ (a_2, b_2) \in F :\ (a_1, b_1)S(a_2, b_2) = 1_F$

II.3.2 Propiedades del campo ordenado de fracciones

El campo de las fracciones está, además, completamente ordenado. La relación de orden entre dos fracciones (a_1, b_1) y (a_2, b_2) con $b_1, b_2 > 0$ está dada por[1]:

$$(a_1, b_1)R(a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1b_2\ R\ a_2b_1$$

De manera que, en cualquier conjunto de fracciones, la relación de orden cumple las propiedades: a) de tricotomía, b) reflexiva, c) transitiva, d) de invariancia en la traslación, y e) de invariancia en la amplificación.

- **Propiedad de tricotomía.** $\forall\ (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in F$
  Por la definición de relación de orden:
  $a_1b_2 = a_2b_1 \Longrightarrow (a_1, b_1) = (a_2, b_2)$
  $a_1b_2 < a_2b_1 \Longrightarrow (a_1, b_1) < (a_2, b_2)$
  $a_1b_2 > a_2b_1 \Longrightarrow (a_1, b_1) > (a_2, b_2)$
  $\therefore \forall\ (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in F$ exactamente una de las siguientes es válida: $(a_1, b_1) = (a_2, b_2), (a_1, b_1) < (a_2, b_2), (a_1, b_1) > (a_2, b_2)$

- **Propiedad reflexiva.** $\forall\ (a_1, b_1) \in F$
  Por la definición de equivalencia:
  $a_1b_1 = a_1b_1 \Longrightarrow (a_1, b_1) = (a_1, b_1)$
  $\therefore \forall\ (a_1, b_1) \in F :\ (a_1, b_1) = (a_1, b_1)$

- **Propiedad transitiva.**
  $\forall\ (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in F, (a_1, b_1)R(a_2, b_2), (a_2, b_2)R(a_3, b_3)$

---

[1] Restringir la definición de relación de orden a pares de fracciones con denominadores positivos no impide el comparar fracciones negativas (con numeradores negativos). Sin esta restricción, la relación de orden se invierte cuando uno de los denominadores es negativo, pero se mantiene cuando ambos denominadores son negativos.

Por la definición de relación de orden:
$(a_1, b_1)R(a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1b_2 \ R \ a_2b_1 \wedge (a_2, b_2)R(a_3, b_3) \Leftrightarrow a_2b_3 \ R \ a_3b_2$
Multiplicando la primera relación por b_3 y la segunda relación por b_1:
$a_1b_2b_3 \ R \ a_2b_1b_3 \wedge a_2b_1b_3 \ R \ a_3b_1b_2$
Por la propiedad transitiva en los números enteros:
$a_1b_2b_3 \ R \ a_2b_1b_3 \ R \ a_3b_1b_2 \ \Rightarrow a_1b_2b_3 \ R \ a_3b_1b_2$
Simplificando: $\Leftrightarrow a_1b_3 \ R \ a_3b_1$
Por la definición de relación de orden:
$\Leftrightarrow (a_1, b_1)R(a_3, b_3)$
$\therefore (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in F$:
$(a_1, b_1)R(a_2, b_2) \wedge (a_2, b_2)R(a_3, b_3) \Rightarrow (a_1, b_1)R(a_3, b_3)$

- **Propiedad de invariancia en la traslación**.
$\forall\ (a_1, b_1), (a_2, b_2), (p, q) \in F$
$(a_1, b_1)S(p, q) = (a_1q + pb_1, b_1q)$
$(a_2, b_2)S(p, q) = (a_2q + pb_2, b_2q)$
Por la definición de relación de orden:
$(a_1q + pb_1, b_1q)R(a_2q + pb_2, b_2q) \ \Leftrightarrow (a_1q + pb_1)b_2q \ R \ (a_2q + pb_2)b_1q$
Reagrupando los términos: $\Leftrightarrow (a_1b_2)qq + pb_1b_2q \ R \ (a_2b_1)qq + pb_1b_2q$
Simplificando: $\Leftrightarrow a_1b_2 \ R \ a_2b_1$
Por la definición de relación de orden:
$\Leftrightarrow (a_1, b_1)R(a_2, b_2)$
$\therefore \forall\ (a_1, b_1), (a_2, b_2), (p, q) \in F$:
$[(a_1, b_1)S(p, q)]R[(a_2, b_2)S(p, q)] \Leftrightarrow (a_1, b_1)R(a_2, b_2)$

- **Propiedad de invariancia en la amplificación**.
$\forall\ (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in F, (p, q) > 0_F$
$(a_1, b_1)P(p, q) = (a_1p, b_1q)$
$(a_2, b_2)P(p, q) = (a_2p, b_2q)$
Por la definición de relación de orden:
$(a_1p, b_1q)R(a_2p, b_2q) \ \Leftrightarrow a_1pb_2q \ R \ a_2pb_1q$
Simplificando: $\Leftrightarrow a_1b_2 \ R \ a_2b_1$
Por la definición de relación de orden:
$\Leftrightarrow (a_1, b_1)R(a_2, b_2)$
$\therefore \forall\ (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in F, (p, q) > 0_F$:
$[(a_1, b_1)P(p, q)]R[(a_2, b_2)P(p, q)] \Leftrightarrow (a_1, b_1)R(a_2, b_2)$

II.3.3 Proposiciones del campo ordenado de fracciones

El procedimiento formal de comparación de fracciones está naturalmente contenido en la definición de su relación de orden. Para un par de fracciones (a_1, b_1) y (a_2, b_2), calcular los productos cruzados a_1b_2 y a_2b_1 conduce inmediatamente a la conclusión. En particular:

Si $a_1b_2 < a_2b_1$ entonces $(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$

Pero es posible desarrollar otros procedimientos para determinar el orden de un conjunto de fracciones. Estos procedimientos son consecuencia de la validez de las siguientes proposiciones, que a su vez tienen fundamento en las definiciones de equivalencia y de relación de orden.

Dados $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (p_1, q_1), (p_2, q_2) \in F$

- **Proposición 1**. Si $b_1 = b_2$ y $a_1 < a_2$, entonces $(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$.

  Prueba:

  Por la condición $b_1 = b_2$:

  $$(a_1, b_1)R(a_2, b_2) \Leftrightarrow (a_1, b_1)R(a_2, b_1)$$

  Por la definición de la relación de orden:

  $$\Leftrightarrow a_1 b_1 \; R \; a_2 b_1$$

  Simplificando: $\Leftrightarrow a_1 \; R \; a_2$

  Pero $a_1 < a_2$

  $$\therefore \text{Si } b_1 = b_2 \wedge a_1 < a_2 \Longrightarrow (a_1, b_1) < (a_2, b_2)$$

- **Proposición 2**. Si $a_1 = a_2$ y $b_2 < b_1$, entonces $(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$.

  Prueba:

  Por la condición $a_1 = a_2$:

  $$(a_1, b_1)R(a_2, b_2) \Leftrightarrow (a_1, b_1)R(a_1, b_2)$$

  Por la definición de la relación de orden:

  $$\Leftrightarrow a_1 b_2 \; R \; a_1 b_1$$

  Simplificando: $\Leftrightarrow b_2 \; R \; b_1$

  Pero $b_2 < b_1$

  $$\therefore \text{Si } a_1 = a_2 \wedge b_2 < b_1 \Longrightarrow (a_1, b_1) < (a_2, b_2)$$

- **Proposición 3**. Si $(a_1, b_1) = (p_1, q_1)$, $(a_2, b_2) = (p_2, q_2)$ y $(p_1, q_1) < (p_2, q_2)$, entonces $(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$.

  Prueba:

  Por la definición de la relación de orden:

  $a_1 q_1 = p_1 b_1;\ p_1 = a_1 q_1 / b_1$

  $a_2 q_2 = p_2 b_2;\ p_2 = a_2 q_2 / b_2$

  $p_1 q_2 < p_2 q_1$

  Sustituyendo las dos primeras relaciones en la tercera:

  $$a_1 q_1 q_2 / b_1 < a_2 q_1 q_2 / b_2$$

  Simplificando: $\Leftrightarrow a_1 b_2 < \; a_1 b_1$

  Por la definición de la relación de orden:

  $$\Leftrightarrow (a_1, b_1) < (a_2, b_2)$$

  $$\therefore \text{Si } (a_1, b_1) = (p_1, q_1) \wedge (a_2, b_2) = (p_2, q_2) \wedge (p_1, q_1) < (p_2, q_2)$$
  $$\Longrightarrow (a_1, b_1) < (a_2, b_2)$$

- **Proposición 4**. Si $(a_1, b_1) < (p_1, q_1)$ y $(p_1, q_1) < (a_2, b_2)$, entonces $(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$.
  Prueba:
  Es un caso particular de la propiedad transitiva.
- **Proposición 5**. Si $(a_1, b_1) - (p_1, q_1) < (a_2, b_2) - (p_1, q_1)$, entonces $(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$.
  Prueba:
  Es un caso particular de la propiedad de invariancia en la traslación.

- **Proposición 6**. Si $(p_1, q_1) - (a_2, b_2) < (p_1, q_1) - (a_1, b_1)$, entonces $(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$.
  Prueba:
  Reescribiendo la condición usando los inversos aditivos para (a_1, b_1) y (a_2, b_2):
  $(-a_2, b_2) + (p_1, q_1) < (-a_1, b_1) + (p_1, q_1)$
  Se sigue como en la prueba de la propiedad de invariancia en la traslación.

II.3.4 Criterios y estrategias de comparación de fracciones

Un criterio de comparación de fracciones es la aplicación de alguna proposición demostrable del campo de fracciones para establecer la relación de orden entre dos fracciones. Tal aplicación consiste en relacionar las premisas de una proposición con observaciones acerca de la configuración numérica de las fracciones a ser comparadas, es decir con los valores de los numeradores y denominadores.

Las seis proposiciones descritas en la sección II.3.3 conducen a los criterios: del mismo denominador, del mismo numerador, transitivo directo, transitivo indirecto, residual por defecto y residual por exceso, respectivamente. Estos criterios, de cuya aplicación sobre a_1/b_1 y a_2/b_2 resulta $a_1/b_1 \leq a_2/b_2$, se reproducen en la tabla II.1.

La relación de orden $\boldsymbol{a_1/b_1 < a_2/b_2}$ se cumple si		
CRITERIO	PREMISA / OBSERVACIÓN 1	PREMISA / OBSERVACIÓN 2
Denominadores comunes	$b_1 = b_2$	$a_1 < a_2$
Numeradores comunes	$a_1 = a_2$	$b_1 > b_2$
Transitivo directo	$a_1/b_1 = p_1/q_1$ y $a_2/b_2 = p_2/q_2$	$p_1/q_1 < p_2/q_2$
Transitivo indirecto	$a_1/b_1 < p_1/q_1$	$p_1/q_1 < a_2/b_2$
Residual por exceso	$a_1/b_1 > p_1/q_1$ y $a_2/b_2 > p_1/q_1$	$a_1/b_1 - p_1/q_1 < a_2/b_2 - p_1/q_1$
Residual por defecto	$a_1/b_1 < p_1/q_1$ y $a_2/b_2 > p_1/q_1$	$p_1/q_1 - a_2/b_2 < p_1/q_1 - a_1/b_1$

TABLA II.1 - Criterios de comparación de fracciones con los que se determina $a_1/b_1 \leq a_2/b_2$

La segunda premisa del criterio residual por exceso es equivalente a la segunda premisa del criterio residual por defecto, obteniéndose una al multiplicar por -1 la otra. Se muestran separadas, sin embargo, porque los estudiantes, en particular aquéllos que cursan el nivel básico, no suelen restar m a n cuando m es mayor que n, sino siempre buscan restar a la cantidad mayor la cantidad menor, y por lo tanto la observación que efectúan es la que se muestra en la tabla II.1 para cada caso.

En el RNP se han llamado estrategias informales de comparación de fracciones a estos criterios (Behr, Wachsmuth, Post y Lesh, 1984), sin embargo no se ha reportado la validez matemática de su aplicación con fundamento en las propiedades del campo ordenado de fracciones, ni se ha hecho una distinción entre los criterios transitivo directo e indirecto, o entre los criterios residuales por defecto y por exceso, todos los cuales se agrupan en lo que ellos llaman estrategia del punto de referencia.

En esta tesis se ha preferido el término criterio, y se llamará estrategia, en cambio, a toda secuencia de acciones con las que un individuo transforma la situación planteada por un problema, buscando que la nueva situación pueda ser resuelta por medio de una combinación de criterios de comparación de fracciones.

Para determinar si 3/5 es mayor o menor que 4/10, por ejemplo, un estudiante puede ejecutar alguna de las siguientes estrategias:

Estrategia 1.

- Multiplicar por 2 el numerador y el denominador de 3/5 para obtener la fracción equivalente 6/10;
- aplicar el criterio de denominadores comunes para concluir que 6/10 es mayor que 4/10;
- aplicar el criterio transitivo directo para concluir que 3/5 es mayor que 4/10.

Estrategia 2.

- Proponer la fracción 1/2 como referencia;
- multiplicar por 4 el numerador y el denominador de la fracción 1/2 para obtener la fracción equivalente 4/8;
- aplicar el criterio de numeradores comunes para concluir que 4/10 es menor que 4/8;
- aplicar el criterio transitivo directo para concluir que 4/10 es menor que 1/2;
- multiplicar por 3 el numerador y el denominador de 1/2 para obtener la fracción equivalente 3/6;
- aplicar el criterio de numeradores comunes para concluir que 3/6 es menor que 3/5;
- aplicar el criterio transitivo directo para concluir que 1/2 es menor que 3/5;
- aplicar el criterio transitivo indirecto para concluir que 3/5 es mayor que 4/10.

II.3.5 Falsos criterios de comparación de fracciones

Dado que los estudiantes pueden y suelen construir y apegarse a criterios informales, e interpretar incorrectamente aquellos discutidos en el salón de clase, es conveniente proponer una distinción entre un criterio y un falso criterio. En tanto un criterio puede plantearse como un silogismo, en el cual de la proposición de dos premisas sigue necesariamente una conclusión (como en la TABLA II.1), un falso criterio es esencialmente una falacia, es decir que no puede confiarse en su aplicación para generar verdades, independientemente de que en ocasiones sus conclusiones sean verdaderas.

Un ejemplo de falso criterio es el siguiente:

- **Proposición falsa.** Si $a_1 < a_2$ y $b_1 < b_2$, entonces $a_1/b_1 < a_2/b_2$.

A pesar de que para ciertos valores de a_1, a_2, b_1 y b_2 sea verdad que a_1/b_1 es menor que a_2/b_2 (por ejemplo, $1/2 < 3/4$), en general este criterio no identifica correctamente la mayor de dos fracciones (por ejemplo, $2/1$ no es menor que $3/4$).

II.3.6 Relaciones intraduplares e interduplares

Noelting (1980a, 1980b), en su estudio de las etapas de desarrollo del pensamiento proporcional, clasifica las relaciones entre los parámetros de la mezcla de jugo de naranja y agua, sobre las cuales un grupo de estudiantes de 14 a 15 años de edad deciden si la mezcla "sabe más a naranja" en un estado u otro entre dos opciones. En el experimento propuesto por Noelting, un estado del sistema naranja-agua es descrito por un par ordenado.

A pesar de que cada par ordenado en el experimento de Noelting debe ser interpretado como la razón de dos cantidades en espacios de medida diferentes (en el sentido que le da Vergnaud, 1983), las estrategias que los estudiantes producen para comparar las razones son efectuadas sobre la grafía a/b de las fracciones, independientemente de los espacios de medida, por lo que las observaciones hechas por Noelting son válidas igualmente en la comparación de fracciones.

Ante la tarea de decidir en cuál de los dos estados el sistema sabe más a naranja, Noelting observó que los estudiantes: a) buscan la regla de correspondencia dentro de cada par ordenado y posteriormente comparan estas dos relaciones internas (*within strategy*), o b) buscan la regla de correspondencia término a término para posteriormente comparar las relaciones externas (*between strategy*). En otras palabras, dadas dos fracciones a_1/b_1 y a_2/b_2, representadas por los pares (a_1, b_1) y (a_2, b_2), se pueden comparar: a) las reglas de correspondencia internas $a_1 \rightarrow b_1$ y $a_2 \rightarrow b_2$, o b) las reglas de correspondencia externas $a_1 \rightarrow a_2$ y $b_1 \rightarrow b_2$.

En adelante se usarán los términos *relación intraduplar* (RinA) y *relación interduplar* (RinE), en referencia al orden en que un estudiante establece las reglas de correspondencia entre las cantidades que describen el estado del sistema, primero al interior de cada par ordenado, o primero al exterior de cada par ordenado.

Establecer estas relaciones es útil para determinar el rumbo de la estrategia, es decir qué equivalencias o fracciones de referencia se han de proponer para poder aplicar los criterios de comparación de fracciones.

Por ejemplo, para determinar si $a_1/b_1 = 1/2$ es mayor o menor que $a_2/b_2 = 2/6$, un estudiante puede ejecutar alguna de las siguientes estrategias:

Estrategia RinE.

- Observar que a_2 es el doble de a_1 (RinE);
- obtener las equivalencias $a_1/b_1 = 2/4$ y $a_2/b_2 = 2/6$;
- aplicar el criterio de numeradores comunes para concluir que $2/4$ es mayor que $2/6$;
- aplicar el criterio transitivo directo para concluir que a_1/b_1 es mayor que a_2/b_2.

Estrategia RinA.

- Observar que b_2 es el triple de a_2 (RinA);
- obtener las equivalencias $a_1/b_1 = 1/2$ y $a_2/b_2 = 1/3$;

- aplicar el criterio del numerador común para concluir que $1/2$ es mayor que $1/3$;
- aplicar el criterio transitivo directo para concluir que a_1/b_1 es mayor que a_2/b_2.

Interesados por identificar las configuraciones numéricas que los estudiantes enfrentan con mayor dificultad, Karplus, Pulos y Stage (1983) rediseñaron el experimento de Noelting, eligiendo los valores de los parámetros, en este caso jugo de limón y azúcar, para producir una casuística completa de las posibles relaciones inter e intraduplares.

La TABLA II.2 ejemplifica la casuística estudiada por Karplus, Pulos y Stage. La primera columna indica si las razones son iguales o desiguales. Las columnas siguientes indican si es posible encontrar al menos una relación intraduplar o interduplar de múltiplos enteros. La X indica que no es posible encontrar ninguna de ellas:

RAZONES	RinA - RinE	RinA	RinE	X
Iguales	$(2,6)$ y $(8,24)$	$(3,6)$ y $(7,14)$	$(3,7)$ y $(6,14)$	$(4,6)$ y $(10,15)$
Desiguales	$(3,6)$ y $(9,15)$	$(4,12)$ y $(6,16)$	$(4,6)$ y $(12,16)$	$(3,5)$ y $(7,11)$

TABLA II.2 - Casuística de la configuración numérica en una comparación de fracciones

Los resultados de su estudio muestran que los estudiantes tienen mayor éxito con las situaciones en las que al menos una relación intraduplar es de múltiplos enteros, disminuyendo su eficiencia al resolver situaciones en las que sólo es posible encontrar relaciones interduplares de múltiplos enteros, y resultando las situaciones donde ni las relaciones intraduplares ni las interduplares son de múltiplos enteros las más difíciles de resolver.

II.3.5 Modos de representación

Hasta ahora se han discutido estrategias que se efectúan dentro de un único modo de representación, ya sea el modo simbólico de la grafía (a,b) o el de la grafía a/b. Sin embargo, es posible que, como parte de una estrategia, se efectúe una traslación de un modo de representación a otro.

En el RNP se señala que la adquisición y práctica de conceptos de los números racionales se lleva a cabo en y entre representaciones verbales, simbólicas, pictóricas y físicas (Cramer, Post y del Mas, 2002; Post, Wachsmuth, Lesh y Behr, 1985).

Los dibujos de conjuntos de los cuales se colorea un subconjunto son un modo de representación pictórica muy común cuando se trabaja con cantidades discretas. La recta numérica y las gráficas circulares son otros modos de representación pictórica, pero ellas son más apropiadas para representar cantidades continuas.

Cuando una cantidad no está asociada con un espacio de medida, como sucede al leer la fracción $3/5$, es posible representarla por medio de un conjunto de objetos lo mismo que de una recta numérica o una gráfica circular.

Para determinar si $3/5$ es mayor o menor que $4/10$, por ejemplo, un estudiante puede ejecutar, además de las dos estrategias descritas en la SECCIÓN II.3.4, alguna de las siguientes. La notación $(a)/b$ indica que una observación se realiza sobre la representación pictórica:

Estrategia 3.

- Construir una recta numérica de 0 a 1 equipartida en cinco partes;
- contar los segmentos para identificar el tercero;
- equipartir la recta de nuevo, esta vez en diez partes;
- contar los nuevos segmentos para identificar el cuarto;
- proponer el cero como punto de referencia;
- observar que ambas, (4)/10 y (3)/5, son mayores que (0);
- observar que (4)/10 está más cerca de (0) que (3)/5 de (0);
- regresar al modo simbólico para concluir que 4/10 está más cerca de 0 que 3/5 de 0;
- aplicar el criterio residual por exceso para concluir que 3/5 es mayor que 4/10.

Estrategia 4.

- Construir un conjunto de cinco círculos, de los cuales se colorean tres;
- construir un conjunto de diez círculos, de los cuales se colorean cuatro;
- observar que en (3)/5 más de la mitad de los círculos está coloreada;
- observar que en el conjunto (4)/10 menos de la mitad de los círculos está coloreada;
- regresar al modo simbólico para concluir que 3/5 es mayor que 1/2 y 4/10 es menor que 1/2;
- aplicar el criterio transitivo indirecto para concluir que 3/5 es mayor que 4/10.

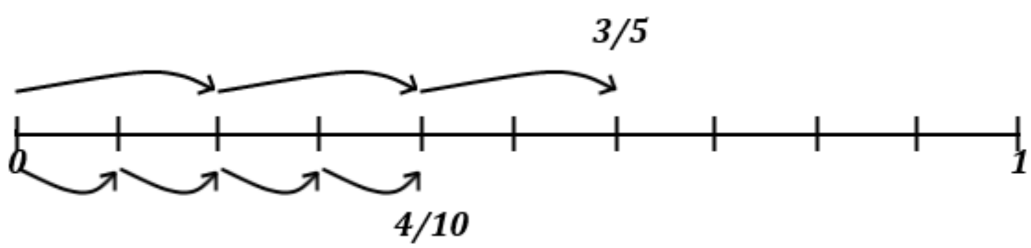


FIGURA II.5 - Recurso de la recta numérica en la **Estrategia 3**

FIGURA II.6 - Recurso de la representación de conjuntos en la **Estrategia 4**

El esfuerzo por coordinar traslaciones de ida y vuelta entre dos modos de representación con acciones transformadoras dentro de un mismo modo puede beneficiar la adquisición de conceptos como el de equivalencia (Post, Wachsmuth, Lesh y Behr, 1985).

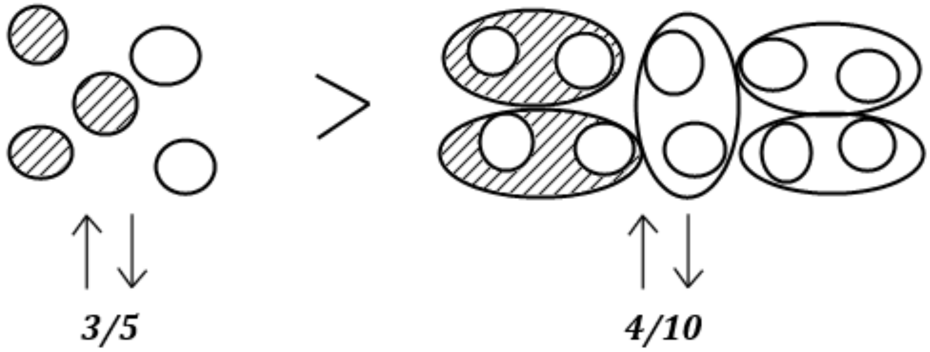


FIGURA II.7 – Traslación coordinante

La FIGURA II.7 muestra cómo la transformación de un conjunto de diez círculos con cuatro coloreados a un conjunto de cinco óvalos con dos coloreados es un antecedente para la equivalencia $4/10 = 3/5$. Este proceso, que Post, Wachsmuth, Lesh y Behr (1985) llaman traslación coordinante, se sintetiza en la siguiente estrategia:

Estrategia 5.

- Construir un conjunto de cinco círculos, de los cuales se colorean tres;
- construir un conjunto de diez círculos, de los cuales se colorean cuatro;
- agrupar los elementos del segundo conjunto (componiendo una nueva unidad) en cinco subconjuntos, de los cuales se colorean dos;
- reconocer la equivalencia $(4)/10 = (2)/5$;
- regresar al modo simbólico para concluir que $4/10 = 2/5$;
- aplicar el criterio del denominador común para concluir que $3/5$ es mayor que $2/5$;
- aplicar el criterio transitivo directo para concluir que $3/5$ es mayor que $4/10$.

Para sostener la validez de las estrategias en que se recurre a una traslación entre distintos modos de representación es necesario postular un séptimo criterio de comparación de fracciones de acuerdo con el cual se conservan las relaciones entre las fracciones en el tránsito de un modo de representación a otro.

La relación de orden $\boldsymbol{a_1/b_1 < a_2/b_2}$ se cumple si		
CRITERIO	PREMISA / OBSERVACIÓN 1	PREMISA / OBSERVACIÓN 2
Denominador común	$b_1 = b_2$	$a_1 < a_2$
Numerador común	$a_1 = a_2$	$b_1 > b_2$
Transitivo directo	$a_1/b_1 = p_1/q_1$ y $a_2/b_2 = p_2/q_2$	$p_1/q_1 < p_2/q_2$
Transitivo indirecto	$a_1/b_1 < p_1/q_1$	$p_1/q_1 < a_2/b_2$
Residual por exceso	$a_1/b_1 > p_1/q_1$ y $a_2/b_2 > p_1/q_1$	$a_1/b_1 - p_1/q_1 < a_2/b_2 - p_1/q_1$
Residual por defecto	$a_1/b_1 < p_1/q_1$ y $a_2/b_2 > p_1/q_1$	$p_1/q_1 - a_2/b_2 < p_1/q_1 - a_1/b_1$
Traslación coordinante	$a_1/b_1 = (a_1)/b_1$ y $a_2/b_2 = (a_2)/b_2$	$(a_1)/b_1 < (a_2)/b_2$

TABLA II.3 - Criterios de comparación de fracciones con los que se determina $a_1/b_1 \leq a_2/b_2$

Aunque el número de criterios de comparación de fracciones es pequeño, y en este capítulo se han descrito siete de ellos, el número de estrategias, es decir todas las secuencias de acciones con las que puede transformarse una situación planteada, es muy grande, y la elección de una estrategia particular depende de diversos factores, como la configuración numérica del par de fracciones a compararse, la flexibilidad del concepto de unidad, la familiarización con múltiples modos de representación y la habilidad para trasladarse dentro de y entre ellos.

II.3.6 Claves y distractores perceptuales

En el RNP se define el término "clave perceptual" como toda figura, modelo o diagrama con que se acompañan las actividades escolares que involucran números racionales (Behr, Lesh, Post y Silver, 1983). Estas claves pueden ser consistentes o inconsistentes con la tarea que debe realizarse. Las claves consistentes pueden ser subdivididas en tres categorías: completas, incompletas e irrelevantes. Una clave inconsistente es llamada "distractor perceptual".

La TABLA II.4 ilustra las distinciones entre los tipos de claves perceptuales.

Ante la tarea de representar la fracción 3/4 usando como apoyo distintos tipos de claves perceptuales como se muestra en la TABLA II.4, un estudiante puede proceder como sigue:

1. Colorear tres de las cuatro partes.
2. Demediar cada una de las partes; colorear tres de las cuatro partes resultantes como en 1.
   2'. Alternativamente, colorear una de las partes; demediar la parte no coloreada; colorear una de las dos partes resultantes.
3. Agrupar las partes en parejas; establecer cada pareja como una parte de cuatro; trabajar con la fracción unitaria compuesta como en 1.
4. Ignorar todas las divisiones; equifragmentar el diagrama en cuatro partes; colorear tres de las cuatro partes como en 1.
   4'. Alternativamente, iterar la bipartición hasta producir veinte partes iguales; componer la unidad fraccionaria 5/20; colorear tres de las cuatro unidades fraccionarias compuestas.

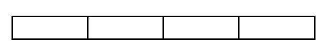
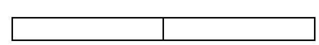
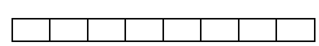
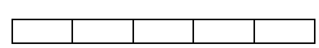
TIPO DE CLAVE PERCEPTUAL (PARA REPRESENTAR LA FRACCIÓN 3/4)	
1. Consistente-Completa Contiene información necesaria y suficiente para realizar la tarea.	
2. Consistente-Incompleta Contiene información necesaria pero no suficiente.	
3. Consistente-Irrelevante Contiene información suficiente pero más de la necesaria.	
4. Inconsistente (Distractor perceptual) Contiene información conflictiva con la tarea.	

TABLA II.4 – Ejemplos de diseño de los distintos tipos de clave perceptual

Tras realizar un experimento en el que 77 niños de cuarto grado (alrededor de los 10 años de edad) resuelven tareas de representación e identificación de fracciones sobre los distintos tipos de claves perceptuales, Behr y sus asociados notaron que la conceptualización de las fracciones como puntos sobre la recta es más difícil de lograr para los estudiantes que la de una región continua en un modelo parte-todo (Behr, Lesh, Post y Silver, 1983). También notaron que los errores de interpretación de las claves perceptuales se incrementan al pasar de los diseños completos a los incompletos, a los irrelevantes y, finalmente, a los inconsistentes.

En su análisis de los resultados, Behr y sus asociados sugieren que un diseño de las claves perceptuales que cause cierta confusión conduce a un mayor aprendizaje, al requerir del estudiante un mayor énfasis en la noción de tamaño de las fracciones unitarias.

III

POR QUÉ TRABAJAR CON VIDEOJUEGOS EDUCATIVOS

Decir que una persona está a favor de la tecnología es una expresión sumamente ambigua. Hay tecnología en todo lo que el hombre crea, desde las plumas estilográficas y las camisas de poliéster, hasta los refrigeradores y el tren metropolitano. Pero es el género de la informática digital al que más comúnmente se hace referencia cuando se habla de tecnología, y, ciertamente, las computadoras personales se han convertido en una de las principales herramientas de trabajo y fuentes de entretenimiento alrededor del mundo. Millones de personas, hoy en día, no conciben la sociedad contemporánea sin el internet, un medio de comunicación que no llega a los treinta años en el dominio público.

Ahora, pensando en una persona a la que le guste el salmón, sería difícil imaginar que se le atribuya estar a favor del salmón. Dependiendo de las proporciones de su consumo, el pez le verá más como a un antagonista que como a un aliado. Por otra parte, esta hipotética persona podría estar a favor de la preservación de sus hábitats naturales y de la regulación de su pesca, lo que el salmón apreciará, sin duda, aunque su única motivación para ello sea el no privarse nunca de su sabor.

Esta referencia al salmón, que puede sonar a broma, es pertinente porque puede asumirse una postura muy similar respecto a la tecnología. Alguien adquiere una computadora personal porque le es útil, porque con ella puede realizar tareas significativas que no podría realizar de otra forma, o que le implicarían un esfuerzo mayor o un retraso en otras actividades que también le son significativas. Pero no adquiere, en general, compromisos emocionales hacia tal artefacto del tipo que le impidan sustituirlo por otro que se ajuste mejor a sus intereses y necesidades cuando estos evolucionen o cambien de dirección.

Se puede estar a favor, por tanto, del desarrollo de tecnología porque esto representa un aumento en las posibilidades de acción, y se puede estar, asimismo, a favor de su implementación, si ello implica mejores condiciones de vida.

Pero el corolario más interesante de decir que alguien, en particular, está a favor de la tecnología, es que hay quienes están en contra de ella o, en el mejor de los casos, quienes mantienen una postura neutral hacia ella. Tal implicación, fuera de un particular contexto político, laboral o religioso, de rechazar la tecnología, cuyo fin es servir al hombre, resulta un tanto extravagante.

Diversos autores señalan (por ejemplo, Antinucci, 2000; Attewell, Suazo-Garcia y Battle, 2003; Durkin y Barber, 2002) que uno de los conceptos en torno a los cuales gira gran parte de la confusión por parte de los detractores de la tecnología en la educación es la "virtualidad".

III.1 Virtualidad

Frente a la palabra "virtual", de inmediato se piensa en algún tipo de sistema computacional que permite al usuario tener la sensación de estar inmerso en un entorno físico diferente de aquél en el cual se encuentra realmente. En realidad, el concepto es mucho más amplio, pero por ahora basta esta concepción, que se refiere a la tecnología digital. A la virtualidad se le suele asociar, entonces, con simulaciones de la realidad por medio de una computadora, un conjunto de dispositivos de entrada y salida de información y algún paquete informático.

Vale la pena señalar que una simulación de la realidad es mucho más compleja que una reproducción de la realidad. La fotografía y el cine son reproducciones de la realidad que permiten al espectador percibir diferentes aspectos de ciertos escenarios, pero no le permiten interactuar con ellos. Un episodio específico de un programa de televisión transcurre siempre de la misma manera, no importa cuántas veces se reproduzca, independientemente del espectador, y la única decisión que se puede tomar al respecto es verlo o no verlo. Una simulación de la realidad permite actuar sobre una copia de ella. Sin transformar el objeto o la situación original, la intervención de un agente le permite probar, comprobar y descubrir los efectos de cualquier acción. A diferencia de una reproducción, sobre la cual se tiene menos libertad que sobre la realidad, una simulación está por completo sometida a la voluntad de quien la experimenta.

Los simuladores, además, permiten acciones que por uno u otro motivo el individuo común no podría realizar jamás, aún si contara con las condiciones geográficas, atmosféricas e instrumentales. Por ejemplo, enfrentar en combate a algún pugilista histórico o competir en un circuito de Fórmula 1.

Por último, y quizá el mayor beneficio de contar con simuladores, es que en ellos, a diferencia de lo que sucede en un entorno real, se pueden experimentar a voluntad todas las eventualidades de una situación. En el fútbol la posibilidad de realizar una jugada depende de cómo llega el balón, de la distribución topográfica de los compañeros y adversarios, y de otras condiciones, en general, fuera de control.

El siguiente ejemplo podría ser aún más ilustrativo. En el currículo de adiestramiento de un piloto de aviación es importante la preparación para afrontar situaciones extremadamente difíciles e imprevisibles, como una avería mecánica o una tormenta eléctrica. En la realidad, estas situaciones son tan peligrosas que naturalmente se hace todo lo posible por evitarlas y es muy poco probable que un piloto experimente cualquiera de ellas en su período de adiestramiento, justo cuando se encuentra acompañado por colegas expertos. Puesto que sería absurdo dirigir el avión hacia un huracán sólo para evaluar el desempeño de los aspirantes a piloto, la alternativa es el diseño y construcción de simuladores de vuelo tan completos que no sólo replican de manera exacta una cabina de avión, sino que el piloto puede percibir el entorno virtual a través de imágenes, sonidos e incluso cambios de aceleración generados por mecanismos hidráulicos.

Pero, hablando en términos más generales, los entornos virtuales no necesariamente simulan la realidad como es, sino que se toman ciertas licencias según el aspecto del objeto o situación que el desarrollador desea enfatizar. Un simulador de guerra espacial, algo que en general se clasificaría como videojuego de acción, podría simular ciertas leyes de la mecánica, como la inercia y la atracción gravitacional, e ignorar deliberadamente que el sonido no puede propagarse en el vacío y que la definición usual de color no tiene sentido fuera de la atmósfera terrestre. En tal caso, el desarrollador estaría apelando al color y al sonido como señales perceptuales y elementos de retroalimentación en tiempo real, sacrificando la oportunidad de exponer algunas propiedades de los fenómenos ondulatorios y proponiendo a cambio una continua evaluación de ciertas facultades visuales del jugador, como la habilidad de localizar un objetivo entre un conjunto de formas distractoras (Green y Bavelier, 2003; Wu y Spence, 2013), la habilidad de atender a una secuencia de señales presentadas a corta distancia temporal una de la otra (Cain, Landau y Shimamura, 2012; Donohue, Woldorff y Mitroff, 2010), y la habilidad de atender a varios objetos al mismo tiempo (Clark, Fleck y Mitroff, 2011; Sungur y Boduroglu, 2012).

Es decir, en un entorno virtual se puede, a diferencia de lo que ocurre en la realidad física, ignorar tantos aspectos de la realidad como convenga a la particular interpretación de determinado objeto o situación, suspendiendo las estrictas consecuencias de la acción y ofreciendo la oportunidad de interactuar con tantos y tan variados escenarios como se necesite o se desee.

III.2 Los motivos de la lúdica

Quizá la faceta de los entornos virtuales que se subestima con mayor frecuencia es la del juego (Rieber, 1996), y esto puede deberse a la dificultad para definir lo que lo constituye (Malone, 1981).

Se suele pensar en el juego como lo opuesto al trabajo, considerando que, en tanto el juego es voluntario, el trabajo es obligatorio, o que, a diferencia del juego, el trabajo es difícil y requiere de preparación y concentración. Sin embargo, ambas aserciones pueden ser rebatidas, pues el trabajo puede fácilmente convertirse en juego si éste es tan apasionante o satisfactorio para quien lo realiza que el pago por realizarlo es sólo uno de los beneficios, lo cual puede ser el caso para profesionistas del deporte. Por otra parte, actividades como el ajedrez o la ejecución de un instrumento musical pueden ser realmente muy complejas. Además, la voluntariedad puede verse reprimida dentro de ciertos contextos culturales donde la tradición, el orgullo o los objetivos curriculares de la educación exigen la práctica de actividades que aún entonces pueden entenderse como juego. De este modo, trabajo y juego no son necesariamente lo opuesto uno de otro, pero se puede aprovechar este primer acercamiento para construir una definición menos excluyente.

Cuando se habla de un empleo, éste puede o no ser motivante. Un juego, en cambio, es siempre intrínsecamente motivante, es decir, no requiere de recompensas externas a la propia mecánica del juego, aunque ellas existan. Esto es así al menos para quien verdaderamente considera a determinada actividad un juego. ¿Cuál es el objetivo del juego, entonces, si se le propone como carente de cualquier fin externo a él?

En su análisis sobre el trabajo de Sutton-Smith, Pellegrini (1995) resume en cuatro divisiones los propósitos que puede albergar una actividad lúdica:

- El propósito de progreso radica en usar el juego como un medio para desarrollar alguna habilidad, ya sea física, mental o social.
- El propósito de poder se exhibe en competencias en las que se declara un ganador y uno o varios perdedores en el contexto de algún tipo de conflicto.
- El propósito de fantasía se refiere a la proposición de situaciones alternativas, dentro de las cuales se cumplen normas distintas a las leyes físicas y normas sociales vigentes, o bien se toma como punto de referencia un pasado distinto al vivido o un futuro posible.
- Por último, el propósito de diversión se centra en la calidad de la experiencia en sí misma, siendo el ideal lo que Csikszentmihalyi (1990) llama flujo de la experiencia óptima y define como un estado de inmersión tal que desaparece la autoconsciencia del individuo, se distorsiona su percepción del tiempo, y en el cual desea permanecer aún a costa de algún sacrificio.

En realidad todo juego tiene influencia de cada uno de estos propósitos, aunque en cada juego prevalezca uno de ellos en particular. Todos los juegos están diseñados para servir de alguna manera como entretenimiento, y un juego que no consiga divertir es señalado como un mal juego o un juego aburrido. En todo juego se desarrolla alguna habilidad, aunque la utilidad de esa habilidad sea debatible de acuerdo con el contexto sociocultural de quien juega. El tenis desarrolla una habilidad de coordinación entre ojo y mano, por ejemplo, distinta a la habilidad de equilibrio que se desarrolla en el patinaje sobre hielo, a la disciplina y habilidad administrativa que se desarrolla en el póquer, y a la rápida toma de decisiones en base a inspecciones breves en el juego *Tetris*. También hay una lucha por ser el vencedor en cada juego, ya sea el vencedor individual en una partida de damas inglesas, en conjunto en un partido de básquetbol, contra una inteligencia artificial en el juego *Pac Man*, contra las leyes naturales en la construcción de una pirámide de cartas, o contra el azar en la ruleta rusa. Finalmente, todo juego tiene también una fantasía que sirve como marco para las acciones que se realizan y en parte justifica las reglas y los criterios para nombrar al ganador.

La fantasía, como cualidad de una actividad lúdica, tiene una importancia especial como parte de sus propósitos porque, además de ser un propósito en sí misma, es un elemento fundamental de la motivación intrínseca (Malone, 1981; Rieber, 1996).

III.3 Motivación intrínseca

Bandura (1999) ha notado que la noción de refuerzos externos, que los conductistas sostuvieron como la principal fuente de motivación, pierde importancia en la psicología del hombre, pues, gracias a sus capacidades representativas, una persona es capaz de anticipar cualquier recompensa, incluso sin recibirla nunca. En efecto, ciertas conductas humanas no se explican dentro del marco estricto de refuerzos, como lo son la profesión de alguna fe o la adquisición periódica de boletos de lotería.

Harlow (1949) fue el primero en distinguir cierto tipo de motivación que no obedece a necesidades biológicas ni a recompensas externas y la describió como la recompensa intrínseca de completar una tarea, al observar cómo un grupo de monos resolvieron un conjunto de puzzles, sin ser premiados por su desempeño, de manera más eficiente que un grupo de monos premiados con alimento por cada puzzle resuelto.

La disminución de la motivación intrínseca por obra de recompensas fue posteriormente estudiada en humanos por Deci (1971). En su experimento, se invita a dos grupos de personas a resolver un conjunto de puzzles. Al cabo de cierto tiempo, se les presenta otro conjunto de puzzles, pero esta vez a cada persona del primer grupo se le paga un dólar por problema resuelto, en tanto el segundo grupo permanece como grupo de control. En un tercer período, se le deja solo a cada grupo con un conjunto más de puzzles y, observados por cámaras ocultas, se mide el tiempo que cada grupo dedica a resolverlos una vez que el entrevistador se despide de ellos. Durante este último periodo no sólo se observó que el grupo de control dedicó más tiempo a la actividad que el grupo recompensado, sino que el grupo recompensado dedicó menos tiempo a ella que en los dos periodos anteriores.

Este resultado fue confirmado por otras experiencias, como la de Lepper, Greene y Nisbett (1973), en la que tres grupos de niños participaron en una actividad de dibujo. El primer grupo participó con la promesa de recibir un diploma y un listón si hacían un buen trabajo, el segundo grupo participó sin conocer de antemano que se les daría una recompensa y el tercer grupo participó sin esperar ni recibir recompensa alguna. Entre una y dos semanas después de la primera sesión, se les permitió elegir libremente una actividad durante un periodo de tiempo. En promedio, el porcentaje del tiempo libre que dedicaron los niños del segundo y tercer grupo a la actividad de dibujo fue notablemente mayor que el que dedicaron los niños del primer grupo.

Con el objetivo de diseñar actividades educativas que aprovecharan esta cualidad, es decir, que los estudiantes decidieran por sí mismos participar en ellas sin la necesidad de un supervisor, Malone se propuso identificar las fuentes de la motivación intrínseca, distinguiéndolas en cuatro grupos: reto, curiosidad, control y fantasía.

III.3.1 Reto

En 1959, White postula por primera vez (Barto, 2013) que el ser humano responde no únicamente a motivaciones biológicas, como lo proponía Cannon, sino también a otro tipo de motivaciones que tienen su origen en la consciencia de sus propias capacidades. De acuerdo con Cannon, los organismos desarrollan comportamientos de búsqueda para compensar las necesidades a escala metabólica, en un proceso que él llama homeostasis. White señala que la homeostasis aparece esporádicamente durante la vigilia de un organismo y que es en las actividades de exploración y manipulación del entorno, lo que en conjunto denomina competencia, que un organismo ocupa la mayor parte del día. A diferencia de la sed o el hambre, esta necesidad de eficiencia, de sentirse en control de un entorno por medio de la rapidez, la fuerza o la destreza, nunca es realmente satisfecha y no obedece a un proceso biológico que requiera ser regulado.

Para Malone (1981), el reto es precisamente la fuente de este tipo de motivación de eficiencia, y se determina por el balance entre la autoestima del jugador y la incertidumbre del resultado.

En cuanto a la autoestima, Bandura (1999) afirma que, sin importar los factores que sirvan de motivación, la acción de una persona está condicionada por la confianza de tener el poder de producir cambios a partir de sus acciones. Es sobre la base de la autoconfianza que una persona decide qué retos aceptar, cuánto esfuerzo invertir y por cuánto tiempo intentar alcanzar una meta, y, a menos que tal confianza exista, cualquier incentivo es insuficiente para actuar o perseverar ante las dificultades.

Pero una persona actúa tanto a partir de la confianza en lo que es capaz de hacer como de cierto grado de certeza sobre el resultado satisfactorio una vez que efectúe la acción. Por ejemplo, un velocista que desea ganar una competencia confía, en primer lugar, en poder superar cierta marca de tiempo y, en segundo lugar, en que superar tal marca le bastará para vencer a sus oponentes.

Malone sostiene que en una actividad no hay reto si la persona que se involucra en ella tiene la seguridad de ser capaz o incapaz de alcanzar la meta y propone cuatro métodos para asegurar esta incertidumbre del resultado. Estos son: ofrecer distintos niveles de dificultad, elegibles por el jugador o determinados por el desarrollador; multiplicidad de metas, ya sean de igual o distinta naturaleza; ocultar cierta información al jugador y revelarla selectivamente según su desempeño; y procurar una aleatoriedad en las condiciones de partida.

La dificultad variable puede ser automáticamente determinada de acuerdo con la habilidad del jugador, elegida por el propio jugador al inicio del juego, o determinada por el desarrollador del videojuego. La multiplicidad de metas puede referirse a metas del mismo tipo pero con distinto grado de dificultad, o simplemente a metas de distinta naturaleza. Ocultar cierta información útil y revelarla de manera selectiva conforme al avance y desempeño del jugador contribuye también a la sensación de reto. Por último, la aleatoriedad en los datos de partida, la información provista o incluso en la actividad que se realiza es una forma más de generar en el jugador la incertidumbre del resultado necesaria para la sensación de reto.

III.3.2 Curiosidad

Otro aspecto importante de una actividad intrínsecamente motivante es la forma en que continúa excitando y satisfaciendo una curiosidad. En general, la curiosidad se despierta al encontrar un objeto novedoso o sorprendente, pero éste no debe ser tan novedoso y sorprendente que resulte incomprensible. Un entorno óptimamente complejo, es decir, uno que conjuga novedad y sorpresa para mantener la curiosidad despierta del individuo, es aquél en que el individuo se siente lo suficientemente familiarizado como para formularse hipótesis de lo que cabe esperar en ese entorno, pero donde esas hipótesis no son siempre correctas.

Existe una serie de elementos compartidos por el reto y la curiosidad. Ambos requieren un nivel óptimo, de dificultad, el primero, y de complejidad, el segundo. Y ambos niveles óptimos pueden lograrse modificando el entorno hasta que coincida con la habilidad del individuo. De hecho, curiosidad y reto parecen retroalimentarse mutuamente. El reto percibido por una persona podría definirse como la curiosidad que siente por sus propias habilidades, en tanto su curiosidad puede ser explicada como un reto a su propio entendimiento del mundo.

La curiosidad es evocada por el prospecto de equilibración de acuerdo con la teoría del desarrollo cognitivo de Piaget. Malone (1981) supone que las personas se motivan al intentar dotar de completitud, consistencia y parsimonia a su esquema cognitivo. Si una persona lee una novela policiaca excepto por el último capítulo se sentirá motivada por saber la identidad del criminal y completar así su conocimiento de la historia en cuestión. Si una persona que conoce a grandes rasgos el proceso fotosintético de las plantas descubre que en el sótano de su casa crece un musgo, se sentirá motivada a resolver esta aparente incongruencia. Por último, una persona que reconozca ciertas características similares en una serie de fenómenos distintos, se sentirá motivada a formular una regla general que acumule el mayor poder explicativo en la menor cantidad de conceptos.

III.3.3 Control

Interesado por entender el fenómeno social de los videojuegos durante los años 80, Bowman aplicó la teoría del flujo de la experiencia óptima, propuesta por Csikszentmihalyi, para explicar el éxito del videojuego *Pac Man*, concluyendo que la sensación de control que tienen los jugadores sobre sus acciones es un aspecto fundamental de este fenómeno (citado en Squire, 2003). Al comparar la experiencia de los jóvenes en el rol de videojugadores con su experiencia en el rol de estudiantes, Bowman destacó que los estudiantes tienen poco control sobre lo que se pretende que aprendan, cómo se propone que lo aprendan y a qué ritmo se desea que lo aprendan.

Según Squire, las observaciones de Bowman pueden resumirse en los siguientes puntos:

- El jugador controla cuándo juega y por cuánto tiempo. El estudiante es forzado a revisar los temas al mismo ritmo que sus compañeros.
- El jugador se involucra activamente en situaciones dinámicas. El estudiante participa pasivamente en actividades rutinarias, como leer y copiar textos.
- El jugador practica hasta sentirse satisfecho con su nivel de destreza. El estudiante está restringido en un tiempo predefinido.
- El jugador trabaja cooperativamente con otros jugadores, compartiendo consejos e intercambiando secretos. El estudiante se desempeña de manera aislada.
- El desempeño es subjetivo, depende del grado de maestría al que cada jugador aspira. El estudiante es calificado normativamente, sin atender a sus aptitudes e intereses.

Moore y Anderson (1969) ya habían postulado, en este sentido, tres principios que cumplen los entornos eficaces de aprendizaje:

- **El principio de perspectiva** supone que el aprendizaje ocurre más rápido y a un nivel más profundo si el aprendiz experimenta el entorno desde tantas perspectivas como sea posible. Las perspectivas pueden ser, en principio, de cuatro tipos. La perspectiva de agente es la de un sujeto activo, por ejemplo en un rompecabezas. La perspectiva paciente es la de un sujeto pasivo, por ejemplo en un juego de azar. La perspectiva recíproca es la de un sujeto creativo, por ejemplo en el ajedrez. La perspectiva de réferi es la de un juez entre dos sujetos que compiten entre ellos. Moore y Anderson suponen, en este sentido, que los estudiantes, en particular los estudiantes en educación básica, no tienen intervalos cortos de atención, sino intervalos cortos de perspectiva. En otras palabras, los niños no padecen de un bajo nivel de concentración, sino de un bajo interés en mantener una misma perspectiva por mucho tiempo.
- **El principio de productividad** indica que un entorno es más productivo que otro si sus propiedades permiten a un individuo descubrir mediante exploración o deducción aspectos de él que no se muestran directamente. La estructura lógica de un sistema matemático permite a un individuo, por ejemplo, deducir teoremas libremente a partir de un conjunto de axiomas y reglas de transformación. Otro ejemplo de un entorno bien diseñado de acuerdo con este principio es la tabla periódica de los elementos, que en su configuración actual es mucho más productiva que si los elementos en ella estuvieran ordenados alfabéticamente.
- **El principio de personalización** reúne varios postulados respecto a un entorno de aprendizaje diseñado de manera óptima, pero principalmente los siguientes: en el entorno se permite al individuo explorar libremente, permitiéndole descubrir por cuenta propia los problemas que deben resolverse; en el entorno se informa al individuo sobre las consecuencias de sus actos; en el

entorno se permite al individuo avanzar a su propio ritmo, aunque también es posible regular el ritmo si éste es demasiado rápido o demasiado lento; en el entorno se promueve la consciencia del propio desempeño.

III.3.4 Fantasía

Una situación fantástica es aquella que evoca imágenes mentales de objetos no presentes a los sentidos. Estas imágenes mentales pueden aludir a objetos físicos o a situaciones sociales, sin atender a su factibilidad dentro del entorno en que una persona se desenvuelve. La fantasía es estimulante porque atiende a la creatividad, recurre a los deseos y temores para poner al individuo en acción.

Tanto Rieber (1996) como Malone (1981) entienden dos tipos distintos de fantasía, una fantasía profunda y una fantasía superficial. Rieber llama endógena a la primera y exógena a la segunda. Malone las designa intrínseca y extrínseca, respectivamente. Ambos tienen una perspectiva muy similar de la fantasía de tipo profundo, no obstante difieren de forma sutil en cuanto a la fantasía de tipo superficial.

Malone entiende la fantasía superficial como una fantasía que depende de la habilidad que el juego intenta desarrollar, pero de manera que la relación inversa no se cumple. Rieber, por su parte, la entiende como una fantasía sobre la cual puede imponerse cualquier contenido. De manera que, para Malone, el diseñador de un juego con fantasía superficial tiene en claro su propósito de progreso antes de decidir la fantasía de que lo dotará, pero, para Rieber, el diseñador construye libremente una fantasía e introduce posteriormente cualquier dinámica que se ajuste a sus parámetros.

Estos dos enfoques parecen ser opuestos a primera vista. Sin embargo, no son excluyentes uno del otro, al menos no en cuanto a las consecuencias de una fantasía superficial. En realidad, ambos ven en la fantasía superficial un recurso que vuelve más atractivo al entorno, pero que no afecta la mecánica del juego. Un ejemplo de esto es el juego *Serpientes y escaleras*, en el que los participantes toman turnos para avanzar un número de casillas, determinado por el resultado de lanzar uno o varios dados, a través de un recorrido repleto de trampas, en la forma de serpientes, y ayudas, en la forma de escaleras.

Malone vería en *Serpientes y escaleras* una fantasía extrínseca, pues el juego consiste, fundamentalmente, en lanzar uno o más dados por turnos y acumular los puntos hasta que algún jugador obtenga una cantidad meta de puntos. Luego se introduce el concepto de trampas y ayudas para enriquecer la dinámica del juego y se usa un tablero que representa gráficamente el recorrido, las posiciones de las trampas y ayudas y la cantidad meta de puntos a acumular. La dinámica del juego no se vería afectada si en lugar de serpientes y escaleras se usaran toboganes y cuerdas, o barrancos y trampolines. Rieber vería en *Serpientes y escaleras* una fantasía exógena porque, usando la misma idea de serpientes que obligan a retroceder y escaleras que ayudan a avanzar a lo largo de un recorrido, puede usarse la resta y no la suma de los puntos de los dados, usarse las tablas de multiplicar, e incluso puede idearse una forma de practicar las conjugaciones de los verbos usando dados con pronombres en vez de puntos y casillas representadas por verbos conjugados. Ambos enfoques tienen en común que la fantasía no está ligada al contenido del juego, porque el contenido persiste aunque varíe la fantasía y a una misma fantasía pueden asociarse distintos contenidos.

La fantasía profunda es, a decir de Malone, mucho más estimulante y mucho más instructiva. Esta fantasía es intrínseca porque depende de la habilidad que se desarrolla al mismo tiempo que la habilidad depende de la fantasía, y es endógena porque no es fácil señalar el punto donde termina el contenido y comienza la fantasía. Esto significa que la fantasía se construye a partir de las acciones que se realizan y las acciones tienen sentido únicamente en el contexto de las fantasía que las enmarca. Además, los problemas del entorno son presentados en términos de los elementos del mundo ficticio en que se desarrollan las acciones.

Entre las ventajas que presenta la fantasía profunda sobre la fantasía superficial destacan los aspectos cognitivos y emocionales. Una fantasía profunda ofrece la posibilidad de formular metáforas y analogías que ayudan al individuo a aplicar conocimientos anteriores en la comprensión de nuevos conceptos. Además, la fantasía profunda tiene el potencial de satisfacer las necesidades emocionales de las personas que se involucran en ella. Debido a que distintas personas tienen distintos gustos e inquietudes, diseñar una fantasía en la que confluyan diversas emociones puede resultar en una experiencia más atractiva para una mayor audiencia. Tal es el caso de series de videojuegos que, como *The Legend of Zelda* o *Final Fantasy*, conjugan drama y miseria con comedia y esperanza, y se encuentran entre las más exitosas tanto crítica como lucrativamente.

Lograr la identificación emocional del jugador con el juego es muy importante. De acuerdo con Rieber, la fantasía endógena tiene un gran potencial educativo por la relación estrecha que los jugadores pueden encontrar entre la fantasía y el contenido educativo.

III.4 Qué es un videojuego

Tomando como base las fuentes de la motivación intrínseca y los propósitos de toda actividad lúdica, puede definirse al juego como un conjunto de actividades en que se involucran uno o más participantes en una lucha por cumplir ciertas condiciones de éxito en el marco de un conjunto de reglas definidas para tiempos y espacios finitos.

El videojuego es, por extensión, un juego en que el jugador interactúa con los elementos de un entorno virtual a través de una interfaz electrónica.

No debe pensarse que, por tratarse de un entorno virtual, carecen de validez los propósitos del videojuego. En particular, a pesar de tratarse de un entorno virtual, las habilidades desarrolladas son completamente reales. No debe hablarse de aprendizaje virtual sino de aprendizaje a través de entornos virtuales, de la misma manera que el correo electrónico, a pesar de verse representado por un buzón virtual, es un medio real de comunicación real.

III.4.1 Mecánica de juego

La mecánica de juego es el subconjunto de las reglas del juego que se refieren específicamente a la interacción directa del jugador con los elementos del entorno. En otras palabras, la mecánica de juego hace referencia a lo que el jugador efectivamente hace para modificar el entorno virtual.

III.4.2 Clasificación

Aunque resulta tentador clasificar los videojuegos según su fantasía (por ejemplo, guerra, deportes, ciencia ficción), en analogía con la literatura o la cinematografía, con frecuencia la fantasía de un videojuego no está íntimamente relacionada con la mecánica de juego, es decir, su fantasía es superficial y no constituye un buen criterio para catalogar videojuegos con características comunes.

Por ejemplo, *Super Puzzle Fighter II Turbo*, por su fantasía, podría clasificarse como un juego de peleas. Sin embargo, su mecánica de juego consiste en agrupar dominós, generados aleatoriamente, en regiones de un mismo color, por lo que sería más acertado compararlo con *Tetris* que con *Super Street Fighter II*. Un ejemplo más conocido, aunque no en el terreno de los videojuegos sino en el de juegos con lápiz y papel, es el de *El ahorcado*, cuya fantasía describe a un hombrecillo a punto de ser ejecutado en la horca, pero cuya mecánica de juego consiste en elegir letras del abecedario para descifrar una expresión verbal oculta.

En ese sentido, un criterio más común de clasificación es el de la mecánica de juego, aunque la comunidad de críticos, desarrolladores y jugadores no ha llegado a un consenso sobre la taxonomía de los videojuegos según este criterio (Thomas, Orland y Steinberg, 2007). De acuerdo con la mecánica de juego, pueden proponerse las siguientes categorías: acción, administración y estrategia, aventura, pelea, plataformas, preguntas y acertijos, puzzle, ritmo, rol, sigilo, y simulación.

- En el videojuego de acción se pone énfasis en la eliminación de grandes cantidades de enemigos (por ejemplo, *Double Dragon*). Los videojuegos de disparos en primera persona (como *Call of Duty*) y en tercera persona (como *Metal Slug*), así como aquéllos en los que el jugador toma el control de un vehículo de combate (como *Star Fox*), entre otros, son subgéneros del videojuego de acción.
- En el videojuego de administración y estrategia se ponen a disposición del jugador recursos de cualquier clase, incluyendo recursos humanos, naturales y monetarios, para que sean tomadas decisiones en base a éstos y permitan alcanzar un objetivo. La fantasía puede abarcar cualquier escenario, por ejemplo, una granja (en *Harvest Moon*), una ciudad (en *Sim City*), un parque de diversiones (en *Rollercoaster Tycoon*) o un imperio (en *Age of Empires*). Adaptaciones de algunos juegos de mesa y de cartas (como el ajedrez, *Monopoly*, el póquer y el *mahjong*) tienen cabida en ésta categoría.
- En el videojuego de aventura se pone énfasis la inspección del entorno en la solución de problemas situacionales (por ejemplo, *Tomb Raider*). Los

videojuegos de aventura gráfica (por ejemplo, *Myst*) y aventura de texto (por ejemplo, *Colossal Cave Adventure*) son subgéneros del videojuego de aventura.
- En el videojuego de pelea se permite el combate de dos (como en *The King of Fighters 98*) hasta cuatro combatientes (como en *Super Smash Bros.*) controlados por computadora o por jugadores humanos. Se diferencia del videojuego de acción en el número limitado de combatientes además de la complejidad del sistema de combate.
- El videojuego de plataformas se caracteriza por presentar desafíos de navegación entre obstáculos que requieren de saltos precisos entre plataformas de distintos tamaños. Quizá el ejemplo más conocido es *Super Mario Bros*.
- El videojuego de preguntas y acertijos se constituye de adaptaciones de juegos de palabras y de conocimiento (como *Scrabble* y *Maratón*).
- En el videojuego de puzzle se presenta al jugador una tarea y le pide encontrar la única, o bien la mejor, solución posible. Las tareas en el videojuego de puzzle están asociadas a habilidades geométricas (como *Puzzle Bobble*), topológicas (como *Sokoban*), aritméticas (como *Picross*) y de combinatoria (como adaptaciones de *Sudoku*).
- El videojuego de ritmo gira en torno a la sincronía de acciones con una secuencia de señales visuales y/o auditivas, como una pista de audio (ejemplos notables son *Dance Dance Revolution*, *Rock Band* y *DJ Hero*).
- En el videojuego de rol se pone énfasis en la interacción del jugador, por medio de su personaje o equipo de personajes, con personajes controlados por computadora, para involucrarse y ser asistido en misiones, así como el desarrollo de parámetros estadísticos de cada personaje controlado por el jugador. *Chrono Trigger* y *Dragon Quest*, dirigidos a un sólo jugador a la vez, se encuentran entre los ejemplos más conocidos, pero juegos masivos multijugador en línea (como *World of Warcraft*) son también videojuegos de rol.
- El videojuego de sigilo comparte características con el videojuego de acción, sin embargo, en tanto el videojuego de acción suele premiar la eliminación de grandes cantidades de enemigos, el videojuego de sigilo recompensa la discreción y el involucrarse en la menor cantidad de conflictos posible (ejemplos de éste género son *Metal Gear* y *Tom Clancy's Splinter Cell*).
- El videojuego de simulación se enfoca en la mejor replicación posible de algún aspecto de alguna situación real. Videojuegos de deportes (como las franquicias *Tigger Woods PGA Tour*, *Madden NFL* y *FIFA*) y de carreras (como las franquicias *Burnout*, *Gran Turismo* y *Need for Speed*) están englobados en esta categoría y se distinguen de los videojuegos del género de administración y estrategia en que se interesan por replicar sólo uno o pocos aspectos de una situación mucho más compleja. Los simuladores de vuelo, por ejemplo, tan complejos como pueden ser, no suelen incluir en la mecánica de juego el control sobre la torre de control. De hacerlo así se perdería parte del realismo, pues el piloto no se encuentra en la cabina al mismo tiempo que en la sala de control.

En adelante, al nombrar por primera vez un videojuego se notará entre paréntesis la categoría que mejor represente su mecánica de juego y el año de su publicación.

III.5 El videojuego educativo y el videojuego comercial

Como se ha mencionado, todo juego, y, por lo tanto, todo videojuego, alberga un propósito de progreso, de manera que catalogar un juego o un videojuego como educativo parece algo redundante.

No obstante, otros términos son menos afortunados. El propósito de quienes llaman a ciertos medios "edutenimiento", por ejemplo, es señalar cómo la educación y el entretenimiento no son necesariamente incompatibles. El problema, como lo señala Resnick (2004), es que la etimología del edutenimiento refleja demasiado bien la postura de los desarrolladores de estos productos. La palabra sugiere que la educación y el entretenimiento son servicios que se ofrecen de manera separada y que sólo a través de una combinación artificial pueden ofrecerse conjuntamente: la educación como una medicina necesaria, pero amarga, y el entretenimiento como el endulzante que permite su consumo. Esta idea, que permea en la gran cantidad de aplicaciones web que presentan las mismas tareas escolares, de memorización de hechos y replicación de algoritmos, adornadas con colores, sonidos y animaciones irrelevantes a la mecánica de juego, ignora la naturaleza educativa del juego y limita su verdadero potencial.

Otros, como la compañía de juguetes LEGO y el Instituto de Tecnología DigiPen, han llamado a estos esfuerzos "juego serio", implicando, con el adjetivo, que los juegos en general son actividades infantiles cuyo único propósito es el gasto de recursos como tiempo y energía excedentes.

Para distinguirse de esta filosofía, el término "videojuego educativo" ha de usarse, no como reafirmación del objetivo de progreso en la actividad lúdica, sino como proposición dentro de un contexto social, referente a que las habilidades que el jugador puede desarrollar como consecuencia de la mecánica de juego se consideran favorables en el cumplimiento de un conjunto de objetivos curriculares. El término "videojuego comercial" ha de usarse, en contraste, para referirse a los videojuegos que no han sido diseñados para cumplir con este objetivo.

La siguiente comparación de videojuegos, por un lado videojuegos diseñados expresamente para ser educativos y por otro videojuegos comerciales, mostrará de qué manera ha sido aprovechada y desaprovechada la motivación intrínseca con fines instructivos. Se contrastará, en particular, la atención que los diseñadores han puesto en el reto, la curiosidad, el control (en cuanto a los principios de perspectiva, productividad y personalización) y la fantasía de los videojuegos.

III.5.1 Reto y curiosidad

The Blood Typing Game (simulación, 2011) fue el ganador de los premios *Swedish Learning Awards 2012* en la categoría "mejor juego" y se encuentra en la primera posición de las sugerencias de edutenimiento en el sitio web oficial de los Premios

Nobel [http://www.nobelprize.org/educational].

En *The Blood Typing Game* el jugador toma una muestra de sangre de la víctima de algún accidente y la mezcla en tres recipientes, con anticuerpos A, B y Rh. Dependiendo de la reacción de la sangre del paciente con los anticuerpos, el jugador debe elegir qué bolsa de sangre de entre ocho opciones (A+, A-, B+, B-, AB+, AB-, O+, O-) puede transferir al paciente.

Al inicio de una partida, *The Blood Typing Game* genera aleatoriamente el tipo de sangre del paciente que se debe tratar, persiguiendo una de las formas en que puede presentarse el reto (aleatoriedad de los datos de partida). Sin embargo, no hay consecuencias por la determinación incorrecta del grupo sanguíneo. Además, desde el inicio del juego hay suficientes bolsas con todos los tipos sanguíneos posibles, y éstas se resurten con cada paciente nuevo, de manera que el juego no provee una sensación de incremento en la dificultad. Por último, y ésta es la deficiencia más grave de *The Blood Typing Game* desde el enfoque de la motivación intrínseca, no hay consecuencias por transferir al paciente un tipo de sangre incompatible con el suyo. El jugador puede gastar todas las bolsas "incorrectas" hasta que queden únicamente las "correctas", transferirlas, y la misión se considerará completada.

Esta mecánica limitada de juego puede tener como consecuencia que el jugador crea haber experimentado todas las circunstancias posibles y se aleje del juego, aún antes de haber categorizado al donador universal o al receptor universal (dotando su conocimiento de completitud), o de entender la relación entre los antígenos de un grupo sanguíneo y la compatibilidad de éste (dotando su conocimiento de parsimonia).

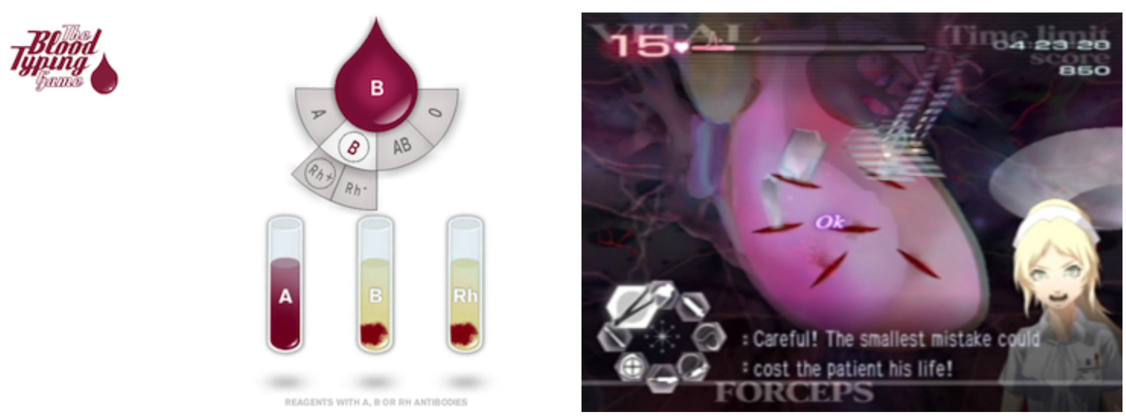


FIGURA III.1 – *The Blood Typing Game* (izquierda) y *Trauma Center: Second Opinion* (derecha)

Por su parte, *Trauma Center: Second Opinion* (simulación, 2006) presenta al jugador una serie pacientes con distintos cuadros clínicos, que van desde una herida superficial que debe ser desinfectada y vendada hasta el diagnóstico y tratamiento de tumores cancerígenos y trombosis venosa.

El reto en *Trauma Center: Second Opinion* se ve enriquecido por misiones en que se debe tratar a un paciente con múltiples males o a diferentes pacientes al mismo tiempo (multiplicidad de metas), además de misiones en las que una operación se efectúa con poca iluminación, en un vehículo en movimiento o con escasez de medicamentos (dificultad variable) y con el riesgo latente de que una mala decisión o una acción a destiempo provocará la muerte del paciente. Para solventar estos problemas, el jugador tiene a su disposición doce instrumentos médicos, incluyendo jeringas, fórceps y desfibriladores.

Al no estar pensado como una actividad curricular para estudiantes de medicina, *Trauma Center: Second Opinion* con frecuencia presenta casos de enfermedades inexistentes y propone curas bioquímicamente cuestionables, pero, por la variedad de actividades e instrumentos médicos que ofrece al jugador y el incremento de la dificultad en sus misiones, es un ejemplo de cómo aprovechar el reto y la curiosidad en un entorno motivador de aprendizaje.

III.5.2 Principio de perspectiva

Number Line (acertijos, 2009) fue el ganador del concurso *Virginia Mobile Learning Apps Development*, patrocinado por el departamento de educación de Virginia en 2009, como parte de su iniciativa "Aprendizaje sin fronteras".

En *Number Line* el jugador debe ordenar ocho esferas etiquetadas, cada una con una fracción, número decimal o porcentaje, en orden de menor a mayor sobre una recta, sumando puntos según el tiempo restante en el cronómetro.

Los números que deben compararse en cada nivel parecen ser generados de forma aleatoria, sin intención de generar estrategias específicas de comparación de números racionales distintas al cálculo de cocientes. Esta estrategia del cálculo de cocientes toma por completo el protagonismo de la mecánica de juego y reduce la probabilidad de que el jugador enriquezca su esquema de comparación de fracciones debido a la constante necesidad de comparar fracciones con números decimales.

Pero la mayor confusión de *Number Line* aparece cuando el jugador debe comparar fracciones y números decimales con porcentajes. Cuando se compara una fracción con un número decimal, se lo hace en la interpretación de la fracción como cociente, un número absoluto, y esto es claramente lo que *Number Line* promueve. Un porcentaje, en cambio, no es un número, sino la fracción $x/100$ interpretada como operador. Este operador debe aplicarse antes sobre alguna cantidad para poder compararse con un número. Por ejemplo, 20% de 25 es mayor que 4 y 33% de 1 es menor que 1/3.

En cuanto al principio de perspectiva, *Number Line* sólo involucra al jugador en un rol de agente, cuya única tarea es acomodar las esferas en el orden correcto.

Tetris (puzzle, 1984) es otro videojuego en el que deben acomodarse objetos, tetrominós que caen al fondo de un pozo. Los tetrominós, presentes en todas sus formas posibles, se suceden de manera aleatoria para caer uno a uno desde la parte superior de la región de juego. El jugador decide, por rotación en giros de 90 grados sexagesimales y traslación horizontal, la posición en que cada pieza cae, procurando completar la mayor cantidad de líneas horizontales que le sea posible mediante el teselado. Cuando una línea horizontal se completa, esa línea desaparece y todas las piezas que están por encima descienden una posición, liberando espacio de juego y facilitando la tarea de situar nuevas piezas. La caída de las piezas se acelera progresivamente. El juego acaba cuando las piezas se amontonan hasta salir del área de juego.

Una última regla de *Tetris* diversifica las estrategias que puede seguir un jugador y esto le permite asumir entre una postura activa y una creativa. Esta regla determina que al completar dos líneas simultáneamente se ganan más puntos que al completar sólo una, al completar tres líneas simultáneamente se ganan más puntos que al completar dos y al completar cuatro líneas simultáneamente se ganan más puntos que al completar tres. En consecuencia, un jugador puede completar líneas, de una en una, tan pronto como le sea posible (perspectiva de agente), o planificar e invertir en una disposición de piezas riesgosa pero redituable (perspectiva recíproca).

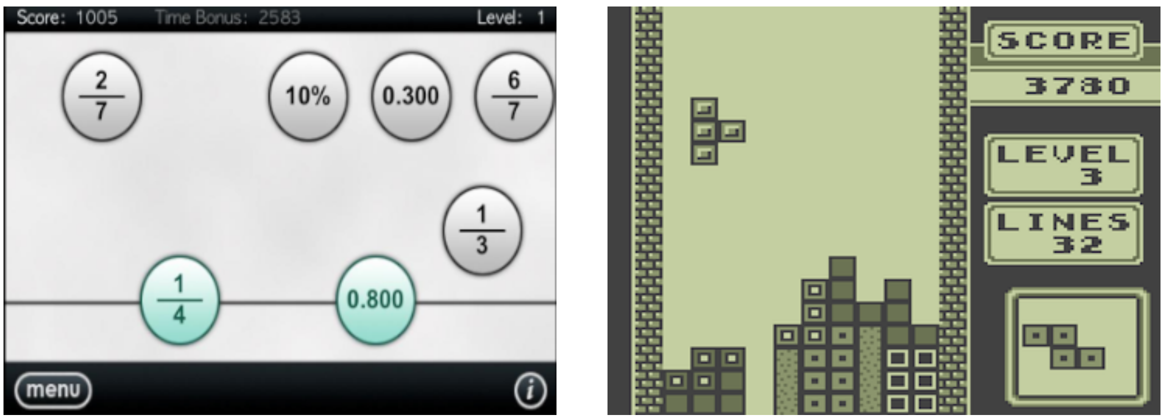


FIGURA III.2 – *Number Line* (izquierda) y *Tetris* (derecha)

Lo que distingue a *Tetris* de *Number Line* y otros videojuegos educativos similares es que, como en el ajedrez, no hay una sola jugada correcta (salvo posiciones críticas), y siguiendo diferentes razonamientos pueden construirse diferentes estrategias válidas.

III.5.3 Principio de productividad

Mickey's Adventure in Numberland (plataformas, 1994), aunque está dirigido a niños de 3 a 6 años de edad, puede tomarse como representante de una clase de videojuegos de plataformas cuyo contenido educativo no está ligado a la fantasía del juego, de manera que el jugador no puede deducir ni descubrir, a partir de la exploración del entorno, más información que la que explícitamente se le provee.

En *Mickey's Adventure in Numberland*, el jugador debe navegar por una serie de laberintos, con el objetivo de encontrar el número natural indicado al inicio del laberinto. Esto es análogo a encontrar un barril de petróleo o un par de baterías en un videojuego que pretenda hacer tomar conciencia de la contaminación del agua, o una tarjeta con la tercera ley de Newton en un videojuego que pretenda enseñar física, a través de una mecánica de juego que tiene poca relación con estos temas.

En *Super Mario Bros. 3* (plataformas, 1988) se pone a prueba la habilidad del jugador para sortear obstáculos de navegación mediante el uso de diferentes items. Estos items son tantos y tan variados que, sin la posibilidad de incluir un manual en la lengua oficial de cada país en que el juego se distribuiría, los desarrolladores se preocuparon por diseñarlos con un aspecto y utilidad altamente intuitivos.

Por ejemplo, al inicio del primer nivel de *Super Mario Bros. 3* el jugador encuentra una caja dorada con un gran signo de interrogación. Al golpear la caja, una hoja salta desde su interior y cae lentamente, permitiendo que el jugador la tome antes de que toque el suelo. Así se obtiene el traje de mapache, representado por unas orejas y una cola que adornan a *Mario*, personaje que controla el jugador. A continuación se extiende una superficie sin obstáculos que invita al jugador a correr con libertad. Al hacerlo, una tira de seis flechas se colorea de blanco, *Mario* extiende los brazos y un sonido estimulante avisa que algún evento se ha activado. La superficie termina en un precipicio, sobre él se alza una escalera de monedas brillantes y, al saltar, la cola del traje ondea al tiempo que *Mario* levanta las piernas. Intuitivamente, el jugador que desea alcanzar el resto de las monedas presiona repetidamente el botón para saltar. El resultado de esta secuencia de acciones es el vuelo de *Mario*. Mediante el diseño del entorno, el desarrollador del juego ha sido capaz de guiar al jugador a través de una primera lección de vuelo.

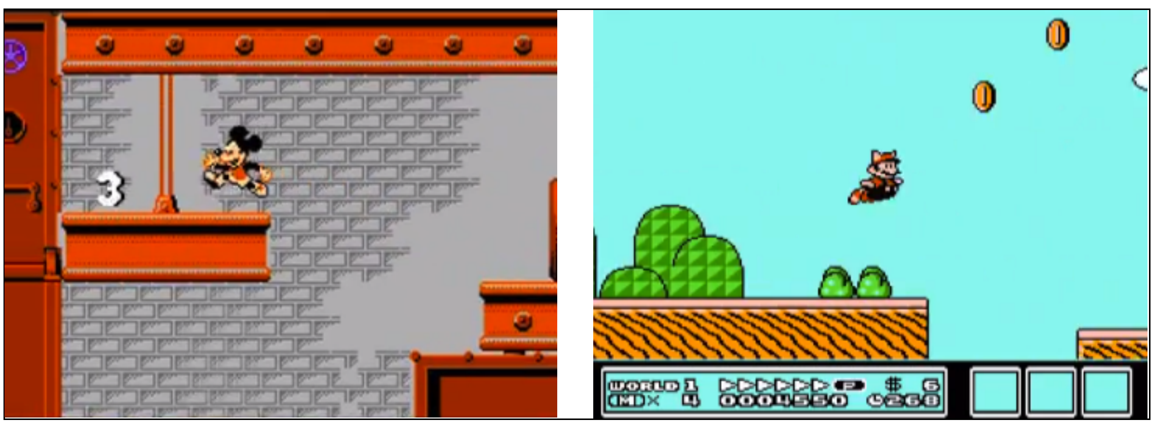


FIGURA III.3 – *Mickey's Adventure in Numberland* (izquierda) y *Super Mario Bros. 3* (derecha)

Sin necesidad de manuales de referencia o diálogos dentro del juego, el entorno de *Super Mario Bros. 3* es altamente instructivo sobre lo que el desarrollador desea que el jugador aprenda: el uso de los items en el juego.

III.5.4 Principio de personalización

Jumpstart Advanced (acertijos, 2002) puede tomarse como representante de la clase predominante de videojuegos educativos, especialmente de las matemáticas de educación básica. Éste es el tipo de videojuego que presenta las mismas actividades que se realizan en el salón de clase, simplemente adornadas con colores y sonidos, desaprovechando el potencial de la interactividad que ofrece la virtualidad y la fantasía que ofrece la lúdica.

Debe notarse que no se cuestiona la calidad ni la efectividad de los ejercicios propuestos. Para formular un juicio al respecto sería necesario revisar cada uno de manera individual. Lo que se cuestiona es la calidad de la experiencia lúdica en base a las propiedades que se han descrito, defendiendo la proposición de que la calidad del aprendizaje se incrementa en proporción directa con la motivación intrínseca.

Jumpstart Advanced se compone de varios minijuegos, es decir actividades independientes de corta duración, cuyas reglas varían entre una actividad y otra. Estos minijuegos consisten, por ejemplo, en resolver una situación como la siguiente:

Un personaje del juego se prepara para una competencia deportiva y requiere de una comida balanceada. El jugador debe preparar varias pizzas de distintas formas e ingredientes según lo propone un ratón, por ejemplo, una pizza triangular con una tercera parte de su superficie cubierta de gusanos de goma y dos terceras partes cubiertas de peperoni.

No sólo una situación como la anterior es esencialmente igual a otra que pudiera enunciarse verbalmente en un salón de clase, sino que la fantasía no justifica la elaboración de una pizza triangular.

El jugador puede jugar los minijuegos en el orden en que lo desee, lo cual da a la experiencia una sensación de personalización. Sin embargo, el resultado de una actividad no tiene consecuencias para el resto del juego, con lo que decae la relevancia de la personalización, pues el control que ostenta el jugador al elegir el orden en que realiza las actividades es finalmente intrascendente.

FIGURA III.4 – *Jumpstart Advanced* (izquierda) y *The Legend of Zelda* (derecha)

En *The Legend of Zelda* (aventura, 1986), el jugador, en control del personaje *Link*, debe enfrentar en combate al demonio *Ganon*, pero para ello debe encontrar antes su escondite. El entorno en que ocurre la aventura es un mundo virtual llamado *Hyrule*. El jugador, que en un inicio desconoce la ubicación del antagonista, puede explorar el mundo libremente, tomar cualquier ruta. En su camino encontrará calabozos, ruinas y cuevas con items que podrá reclamar si vence a los enemigos que los guardan, y estos items a su vez le ayudarán a descubrir y transitar nuevos caminos. También encontrará otros personajes que le prestarán ayuda o le revelarán secretos. Explorar *Hyrule* facilita la misión principal del jugador, que es vencer a *Ganon*, pero, en realidad, es completamente posible dirigirse al escondite, ya sea por conocer la ruta directa o por casualidad, y terminar el juego, aunque sin el uso de items la dificultad es muy elevada.

Debido a la cantidad de items en el juego, y a la gran libertad que tiene el jugador para explorar *Hyrule* y el impacto que el completar submisiones tiene sobre la dificultad y los caminos que pueden recorrerse, *The Legend of Zelda* ofrece una experiencia con un gran potencial de personalización.

III.5.5 Fantasía profunda

Videojuegos como *Mickey's Adventure in Numberland* y *Jumpstart Advanced* presentan una fantasía superficial, como la entienden Malone (1981) y Rieber (1996). Su fantasía no está alineada con su contenido educativo y, en consecuencia, la mecánica de juego no necesariamente ayuda al jugador a desarrollar las habilidades que el desarrollador espera. Además de esto, no existe una suficiente empatía hacia el juego que motive al jugador a aprender sobre todos los aspectos relacionados a él, incluido el contenido educativo.

Age of Empires II: The Age of Kings (administración, 1999) es un videojuego de estrategia en tiempo real, lo que significa que todas las acciones de cada jugador se realizan en un tiempo continuo, a diferencia de los juegos de estrategia por turnos.

En *Age of Empires II: The Age of Kings*, el jugador toma control de una civilización y la guía a través de cuatro edades, las etapas en que se divide una partida de juego: alta edad media, edad feudal, edad de los castillos y edad imperial. En cada una de estas edades, el jugador debe desarrollar la estructura socioeconómica de su civilización hasta alcanzar determinados hitos sociales y tecnológicos para avanzar a la siguiente edad. Algunos de los objetivos son generales a todas las civilizaciones. Por ejemplo, incrementar la eficiencia de la agricultura inventando el arnés, el arado y la rotación de cultivos. Otros objetivos son particulares a cada civilización (por ejemplo, inventar la pólvora si se controla a los chinos).

Sin anunciarse como un videojuego educativo, la fantasía de *Age of Empires II: The Age of Kings* contextualiza la mecánica de juego de manera que el jugador se involucra con conceptos económicos, políticos y militares, siendo testigo de la importancia que la religión y la ciencia, los recursos naturales y el comercio tuvieron para diversos pueblos.

Lo destacable de videojuegos con fantasía profunda, y la razón por la que más desarrolladores de videojuegos educativos deben prestar atención a las características de videojuegos comerciales como *Age of Empires II: The Age of Kings*, es que los jugadores más competitivos, o los que, por la empatía que sienten hacia el juego, desean incrementar su competitividad, estudian voluntariamente todos los aspectos del juego con el propósito de prever situaciones difíciles. Por ejemplo, un jugador puede analizar el uso de la alabarda para defenderse de los elefantes de guerra persas, o bloquear el acceso al mar a los vikingos. Fuera de la fantasía que provee el juego, es posible que un estudiante considere aburridos o intrascendentes ciertos hechos históricos, pero por medio de una buena coordinación entre la fantasía y la mecánica de juego se puede proporcionar la motivación por conocer que el estudiante no encuentra en los libros de texto o en el salón de clase.

IV

DISEÑO DE LA EXPERIENCIA

Malone (1981) señala que en el diseño de un videojuego educativo deben confluir las cuatro fuentes de motivación intrínseca (reto, curiosidad, control y fantasía) si el desarrollador desea que los jugadores se involucren con el juego de manera voluntaria y aprovechen el potencial de progreso de la actividad lúdica. Esta consideración es importante y ha de ser atendida con seriedad por parte del desarrollador de videojuegos educativos porque debe competir por el gusto del jugador contra los desarrolladores de videojuegos comerciales, quienes tienen una amplia y rica experiencia en esta área. La persona que en su tiempo libre desea jugar un videojuego elige aquéllos que le parecen intrínsecamente más motivantes, independientemente del objetivo con que han sido desarrollados.

Como parte de esta tesis se ha diseñado y desarrollado un videojuego educativo con atención a las cuatro fuentes de motivación intrínseca en un período de tres años y en dos partes. El producto de la primera parte es *Aritbán* (puzzle, 2011), y el producto de la segunda parte es *El libro de arena* (aventura, 2013).

IV.1 Una primera experiencia con aritbán

En 2011, en el contexto del curso de Metodología de la investigación, asignatura obligatoria de la Maestría en Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, se realizó una indagación para observar la experiencia que un grupo de cinco estudiantes de primer año de secundaria, alrededor de los 12 años de edad, tuvo con *Aritbán*, un videojuego educativo desarrollado para apoyar en el fortalecimiento de las estrategias de comparación de fracciones.

Para el diseño de *Aritbán* se consideró el popular videojuego *Sokoban* (puzzle, 1984), cuya mecánica es empujar cajas, una a la vez y sin posibilidad de tirar de ellas, hasta lugares designados dentro de un laberinto reducido en el menor número posible de pasos, y se agregó el requerimiento de acomodar los objetos en orden de menor a mayor.

Cada nivel de *Aritbán* es un reto por ordenar rocas etiquetadas con fracciones de menor a mayor entre dos pilares. Cada conjunto de fracciones, representadas por rocas etiquetadas, es elegido como promotor de un modelo específico de comparación de fracciones, tomando como base tres modelos de comparación de fracciones similares a los descritos por Behr, Wachsmuth, Post y Lesh (1984): denominador común, numerador común y punto de referencia (discutidos en el CAPÍTULO II).

Se pidió a los estudiantes que resolvieran un test antes y después de 200 minutos de juego, distribuidos en lapsos de 50 minutos a lo largo de dos semanas. El objetivo de estos tests fue registrar diferencias en las estrategias de comparación de fracciones antes y después de la experiencia de juego. No hubo intervención didáctica referente a la comparación de fracciones por parte de profesores o investigadores durante las dos semanas de la experiencia con el juego.

Un estudiante, durante el pretest, intentó auxiliarse de la recta numérica para encontrar una fracción mayor que 1/9 y menor que 1/8, pero la dificultad para dividir la recta con precisión en nueve segmentos iguales le impidió determinar si 1/9 era menor o mayor que 1/8. En el postest, al intentar encontrar una fracción entre 1/6 y 1/7 , y luego de otro intento fallido por construir una recta numérica lo suficientemente precisa, el mismo estudiante se concentró en producir fracciones equivalentes para facilitar su tarea, respondiendo finalmente 13/84. No es claro si el estudiante, en el postest, reconoce que 13/84 se ubica entre 1/6 y 1/7 o si piensa que las transformaciones que ha efectuado lo han trasladado a una situación diferente de la inicial.

Otros estudiantes modificaron también sus estrategias, prefiriendo el uso de expansiones decimales, rectángulos en modelos parte-todo y algoritmos para producir fracciones equivalentes, aunque sólo el estudiante que se ha referido logró encontrar una equivalencia de fracciones útil para resolver el ítem.

Los estudiantes se mostraron entusiasmados e interesados en continuar jugando una vez que las dos semanas de prueba concluyeron. Todos mostraron, además, una mejora gradual en su desempeño con *Aritbán*, lo que es notable, pues no se dio ningún tipo de asesoría con el juego. La hipótesis planteada para explicar estos cambios radica en: a) el desarrollo de una habilidad para interpretar el tamaño de las fracciones, b) una habilidad para resolver laberintos, c) el estudio voluntario de las operaciones con fracciones con el propósito de mejorar en el juego, o d) alguna combinación de las proposiciones anteriores.

La mecánica de juego de *Aritbán* se tomó como punto de partida para continuar con *El libro de arena*, enriqueciendo sus puzzles con elementos de acción y rol e integrándolos con una fantasía profunda.

IV.2 Diseño de El libro de arena

El libro de arena debe su nombre al objeto inconcebible descrito en el relato homónimo de Jorge Luis Borges (1975): un libro de volumen finito compuesto por un número infinito de hojas infinitamente delgadas, cada una de las cuales se desdobla indefinidamente en otras tantas.

Aunque no era ésta la intención de Borges, con algunas modificaciones esta concepción de un libro que no tiene principio ni fin puede convertirse en una alegoría de los números racionales. Si sólo las páginas pares, o bien sólo las impares, estuvieran enumeradas, sería imposible encontrar dos números consecutivos en la numeración, pues según la descripción dada es imposible tener una única hoja entre los dedos. Pero no por ello es necesario renunciar al orden en la numeración de las páginas, si a cambio se renuncia a la numeración por medio de enteros. Ciertamente, la proposición es inusual, pero el libro propuesto es también inusual.

Entre la página 1 y la 2 bien puede encontrarse la página 3/2, y a su vez la página 7/4 entre las dos últimas. Así mismo, anterior a la página 1 puede encontrarse la página 1/3, y la página 2/7 antes de ésta. Para evitar ambigüedad, la numeración se expresaría siempre con la fracción equivalente de menor denominador, asegurando la unicidad de cada página. No podría encontrarse la primera página del libro, como no puede determinarse el primer racional mayor que 0, y tampoco podría encontrarse la última página.

IV.2.1 Fantasía

En el videojuego, el libro de arena es una reliquia para los *petrinos*, descritos como "hombres como moles", que llegan en una expedición desde un planeta lejano para buscarla en la Tierra, sin importar que su llegada súbita y su comportamiento hermético provoquen un conflicto con los seres humanos. Una tercera civilización está al tanto de estos eventos y envía a *Xayak*, quien es controlado por el jugador, para estudiar a los humanos y determinar si, por su potencial científico y tecnológico, sería benéfica una alianza con ellos para combatir a los *petrinos*.

FIGURA IV.1 – Menú de pausa de *El libro de arena*

Durante la aventura, el jugador conocerá a distintos personajes controlados por computadora, indagará la motivación y el plan de los los *petrinos* y descubrirá la misteriosa naturaleza del libro de arena y la numeración de sus páginas.

Para poder interactuar con los humanos sin que ellos se sientan intimidados, *Xayak* asume una nueva identidad, cambiando su nombre y apariencia por la de un hombre o una mujer, a elección del jugador. Pero, al hacerlo, adquiere también las debilidades de los humanos, como el agotamiento físico y la pérdida de concentración. Ser lastimado en combate deteriora la salud física de *Xayak* y errar en los puzzles afecta negativamente su concentración.

Estos parámetros, salud (abreviado *S*) y concentración (abreviado *C*), pueden restablecerse, mediante el descanso o el consumo de jugos, e incrementarse en su capacidad al subir de nivel, lo cual se logra derrotando enemigos en combate y resolviendo puzzles. Tales actividades, que el jugador realiza constantemente durante su misión, pueden clasificarse en dos grupos según la manera en que involucran la noción de tamaño de los números racionales: comparación de fracciones y localización de fracciones. Éstas se describirán en las SECCIONES IV.2.4 y IV.2.5.

La FIGURA IV.1 muestra el menú de pausa de *El libro de arena*. Desde el menú es posible acceder a los items adquiridos, revisar el manual de juego y salvar el estado de la partida. En el menú se indica el estado de otros parámetros del juego, además de *S* y *C*. La reputación (abreviado *Rep*) funciona como moneda de cambio: se incrementa al ayudar a los personajes controlados por computadora y decrece cuando se reciben bienes o servicios de vuelta. La resistencia (abreviado *Res*) se incrementa cuando *Xayak* asciende de nivel, como resultado de vencer un número específico de enemigos; el daño recibido por los ataques de un oponente está en una proporción inversa al parámetro de resistencia. El último de los parámetros, las unidades flash recuperadas (abreviado *UFs*) representa la acumulación de conocimiento que *Xayak* ha reunido sobre la ciencia y tecnología desarrollada por los humanos. Un total de 25 unidades flash están ocultas en los varios escenarios del juego.

IV.2.2 Reto y curiosidad

Aparte del contenido matemático, *El libro de arena* presenta desafíos de ritmo, de resolución de laberintos y de inspección visual.

En los desafíos de ritmo el jugador debe recorrer algún camino a la vez que evita obstáculos móviles con un patrón definido de desplazamiento. Si el jugador no logra evitarlos, los obstáculos, que pueden ser piedras como en la FIGURA IV.2, provocan que el jugador pierda momentáneamente el control sobre *Xayak* y deducen puntos de concentración.

Si en algún momento el parámetro de concentración de *Xayak* llega a cero, cualquier daño que reciba será multiplicado por un factor de 1.5. Si el parámetro de salud llega a cero, el juego termina y el jugador debe restaurar la partida desde el último punto en que salvó sus avances.

Este tipo de desafíos es común en videojuegos de acción con elementos de ritmo inspirados por *Frogger* (ritmo, 1981).

FIGURA IV.2 – *Frogger* (izquierda) y *El libro de arena* (derecha)

Los desafíos de resolución de laberintos son heredados de *Aritbán*, cuya mecánica de juego está basada, a su vez, en *Sokoban*. El reto, descrito en la SECCIÓN IV.1, puede visualizarse en las FIGURAS IV.3 y IV.6. Con la restricción de empujar un único elemento a la vez, con la imposibilidad de jalarlo, el jugador de *Sokoban* debe trasladar todas las cajas a los lugares designados para ellas.

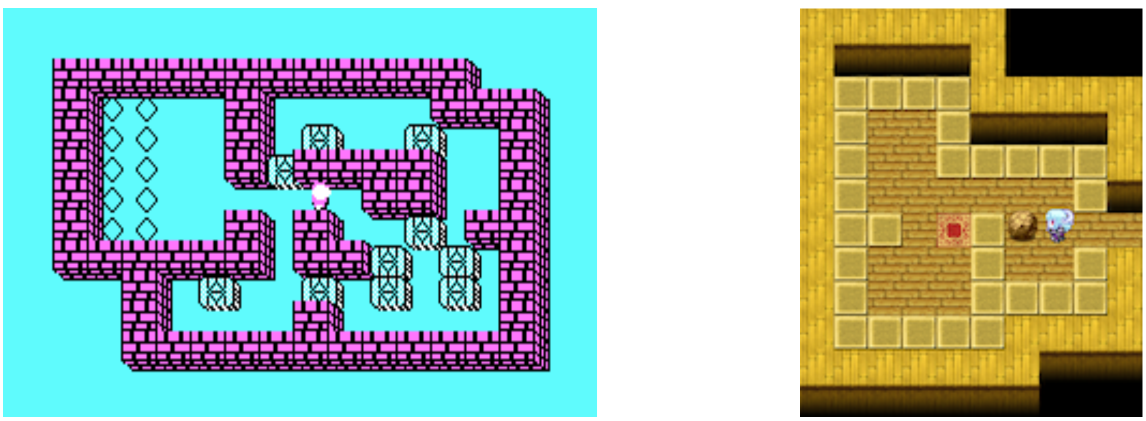


FIGURA IV.3 – *Sokoban* (izquierda) y *El libro de arena* (derecha)

Por último, el jugador debe estar atento a las pistas que ofrece el entorno para utilizar sus items donde correspondan. Los explosivos, en particular, pueden colocarse junto a estructuras débiles para descubrir caminos ocultos, algunos de los cuales guardan *UFs* y otros son de paso obligatorio. Aunque la historia de *El libro de arena* transcurre independientemente de la cantidad de *UFs* reunidas por *Xayak*, el jugador es motivado a reunir la mayor cantidad de ellas que le sea posible. La motivación proviene de la curiosidad por interactuar con los elementos del entorno por medio de los 20 diferentes items que puede adquirir durante las misiones. Esta relación entre el reto y la curiosidad por la inspección del entorno y los items disponibles es una característica de los videojuegos de aventura como *The Legend of Zelda: A Link to the Past* (aventura, 1991).

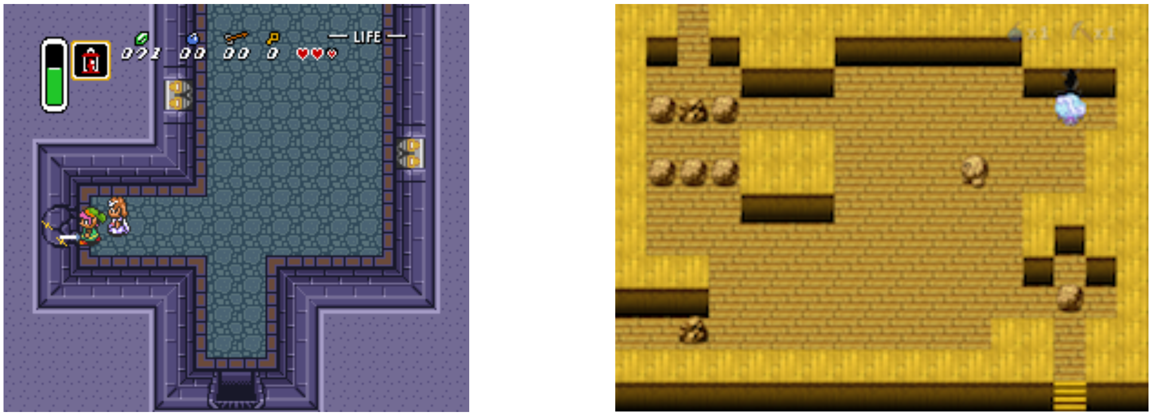


FIGURA IV.4 – *TLoZ: A Link to the Past* (izquierda) y *El libro de arena* (derecha)

En *El libro de arena*, así como en *The Legend of Zelda: A Link to the Past*, una pared agrietada es un buen lugar para estallar un explosivo, un terrón o una piedra frágil puede desmoronarse con la ayuda de un pico, una habitación oscura puede iluminarse con una lámpara de aceite. Éstas son algunas de las observaciones que el jugador puede y debe hacer para avanzar en el juego.

IV.2.3 Control

En cuanto al control que el jugador debe sentir sobre su experiencia, se ha procurado cumplir para el diseño de *El libro de arena* con los tres principios discutidos en la SECCIÓN III.3.3.

Los principios de perspectiva y personalización radican en las distintas posturas y distintos grados de libertad con que el jugador interactúa con el entorno.

- El jugador puede navegar con completa libertad entre los escenarios, experimentando con los diferentes items a voluntad, gracias a que éstos pueden ser resurtidos en tiendas, a cambio de *Rep*, hallados en cofres ubicados en posiciones específicas a lo largo del juego y aleatoriamente conseguidos al derrotar ciertos enemigos.
- La libertad se reduce en las actividades de comparación de fracciones, puesto que la relación de orden de cada conjunto de fracciones es objetiva, pero el jugador puede encontrar más de una forma para resolver cada laberinto y llevar las piedras etiquetadas con fracciones hasta sus posiciones correctas.
- La libertad es aún más reducida en las actividades de localización de fracciones sobre la recta numérica, ya que la solución es única y la estrategia que el jugador puede aplicar para llegar a una respuesta correcta depende de las claves perceptuales provistas por el juego, pero estas actividades son, en general, optativas para el jugador.

Aunque las actividades de localización de fracciones sobre la recta numérica son esencialmente optativas, el jugador tiene buenas razones para optar por realizarlas. La idea detrás de esta dinámica fue inspirada por *Elevator Action* (acción, 1983), juego que presenta al jugador el desafío de sumar puntos recorriendo la mayor cantidad de laberintos sin ser alcanzado por un proyectil enemigo o, alternativamente, sumar puntos eliminando la mayor cantidad de enemigos, o una combinación de ambas tareas.

En *El libro de arena*, el jugador puede enfrentarse a los enemigos que encuentra en su camino o evitarlos, y sólo en algunas ocasiones es necesario vencerlos para continuar su avance. Sin embargo, la posibilidad de subir de nivel y, por lo tanto, de incrementar los parámetros *S*, *C* y *Res*, de conseguir items valiosos y de mejorar la reputación de *Xayak* son buenos alicientes para realizar esta actividad aún cuando el juego no lo requiere obligatoriamente.

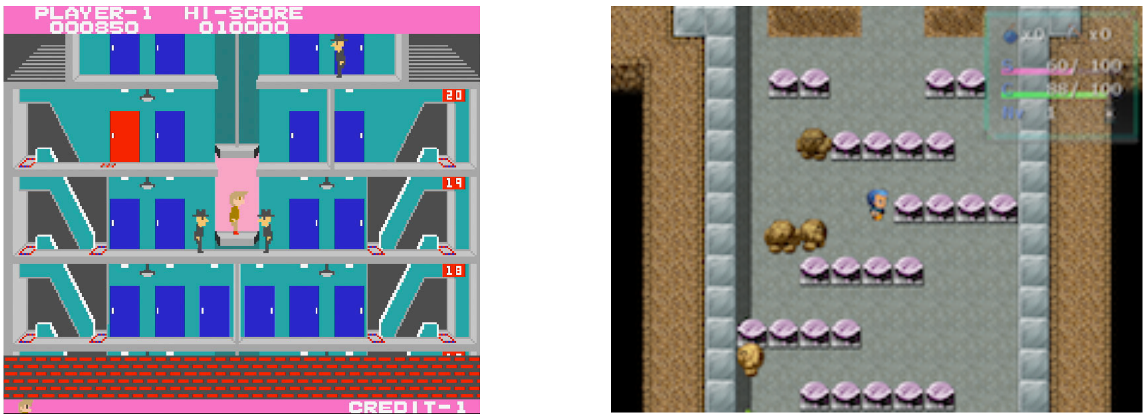


FIGURA IV.5 – *Elevator Action* (izquierda) y *El libro de arena* (derecha)

De este modo, la flexibilidad de exploración permite que el jugador elija trasladarse entre una perspectiva recíproca y una de agente.

El principio de productividad se logra con la configuración numérica de las fracciones que han de ser comparadas, ordenadas y localizadas en la recta numérica. Las fracciones que el jugador encontrará en *El libro de arena* han sido elegidas con ciertas características para promover el reconocimiento de los criterios de comparación de fracciones presentados en la SECCIÓN II.3.

IV.2.4 Comparación de fracciones

En este tipo de actividad se integra la mecánica de juego de *Aritbán*. El jugador debe conducir cada roca de un grupo de dos o tres a través de un laberinto, empujando una a la vez, sin la posibilidad de tirar de ellas y ordenándolas de menor a mayor según estén etiquetadas, de izquierda a derecha, entre dos pilares. Para inspeccionar cada roca basta que *Xayak* se aproxime a ella y, al presionar la flecha en dirección de la roca, aparecerá sobre su cabeza un globo con una fracción expresada en la grafía a/b.

Las fracciones que el jugador debe comparar y ordenar están preestablecidas para cada laberinto y se han elegido para promover los criterios de comparación de fracciones identificados en la TABLA II.3, tomando como modelo la casuística propuesta por Karplus, Pulos y Stage (1983), representada en la TABLA II.2.

La TABLA IV.1 muestra los conjuntos de fracciones que un jugador encontrará durante su experiencia con *El libro de arena*.

FIGURA IV.6 – Comparación de fracciones: las rocas deben ser ordenadas de menor a mayor

CASO	CONJUNTOS DE FRACCIONES		
	PROPIAS	IMPROPIAS	COMBINADAS
RinE-DC-NC	$2/7 < 2/5 < 3/5$	$5/4 < 6/4 < 6/3$	-
RinE-DC	$1/4 < 2/4 < 3/4$	$3/2 < 4/2 < 5/2$	$2/3 < 4/3 < 5/3$
RinE-NC	$3/7 < 3/5 < 3/4$	$5/4 < 5/2 < 5/1$	$4/5 < 4/3 < 4/2$
RinA-RinE-D-N	$2/6 < 1/2$	$8/6 < 4/2$	$3/9 < 9/6 < 6/3$
RinA-RinE-D	$3/8 < 2/4$	$6/2 < 5/4$	$3/6 < 7/9 < 4/1$
RinA-RinE-N	$2/5 < 4/8$	$4/3 < 8/2$	$3/7 < 6/4 < 9/3$
RinA-1-2	$2/8 < 3/9$	$6/3 < 8/2$	$2/6 < 1/2 < 4/2$
RinA-2	$2/7 < 3/6$	$7/5 < 8/4$	-
RinA-1	$2/6 < 3/8$	$8/4 < 7/3$	-
RinE-D-N	$4/9 < 2/3$	$3/2 < 9/4$	$1/4 < 3/8 < 5/2$
RinE-D	$5/8 < 3/4$	$7/6 < 5/3$	-
RinE-N	$3/5 < 6/8$	$4/3 < 8/5$	-

TABLA IV.1 – Configuración de conjuntos de fracciones por caso en *El libro de arena*

La primera columna identifica los tipos de razón entera en que puede apoyarse el jugador para decidir qué estrategia de comparación de fracciones usará. Como se ha convenido en el CAPÍTULO II, dadas dos fracciones a_1/b_1 y a_2/b_2, se dirá que a_1 y a_2 están en relación interduplar (RinE) entera si a_1 es múltiplo o submúltiplo de a_2. Equivalentemente, se dirá que b_1 y b_2 están en RinE entera si b_1 es múltiplo o submúltiplo de b_2. Por otro lado, si a_1 es múltiplo o submúltiplo de b_1, se dirá que a_1 y b_1 están en relación intraduplar (RinA) entera. Equivalentemente, si a_2 es múltiplo o submúltiplo de b_2, se dirá que a_2 y b_2 están en RinA entera.

Mediante un sufijo se identifican los distintos casos en que es posible hallar una RinE entera o una RinA entera. Las fracciones con denominador común o numerador común (DC y NC, respectivamente) son casos particulares en los que b_1 es múltiplo de b_2 (pues $b_1 = b_2$) o a_1 es múltiplo de a_2 (pues $a_1 = a_2$). Con RinE-D se identifican los casos en que los denominadores están en RinE entera. Con RinE-N se identifican los casos en que los numeradores están en RinE entera. Con RinA-1 se identifican los casos en que numerador y denominador están en RinA entera en la fracción menor. Con RinA-2 se identifican los casos en que numerador y denominador están en RinA entera en la fracción mayor.

Los conjuntos de fracciones pueden contener sólo fracciones propias, sólo fracciones impropias, o una combinación de fracciones propias e impropias.

Con la distinción entre fracciones propias y fracciones impropias se pretende fomentar el desarrollo de los criterios residuales en dos partes: por defecto (la unidad es mayor que ambas fracciones) y por exceso (ambas fracciones son mayores que la unidad). Con aquellos conjuntos que contienen fracciones tanto propias como impropias se pretende fomentar el desarrollo de un criterio transitivo, donde la unidad es el punto de referencia desde el cual pueden compararse las fracciones.

A partir del uso de la unidad como punto de referencia el jugador puede enriquecer su abanico de estrategias de comparación de fracciones, probando nuevos puntos de referencia acordes a las circunstancias. Por ejemplo, las fracciones 4/9 y 2/3 pueden compararse, tomando ventaja de la RinE entera, produciendo una fracción equivalente a 2/3, como 4/6 o 6/9, y aplicando el criterio de denominadores comunes o numeradores comunes, según el caso; o bien, pueden compararse tomando como referencia la fracción 1/2 y aplicando el criterio transitivo indirecto.

IV.2.5 Localización de fracciones sobre la recta numérica

La mayoría de los enemigos en *El libro de arena* están protegidos por un campo electromagnético. Para neutralizar los efectos del campo electromagnético el jugador debe hacer coincidir la señal de entrada con la señal de salida en un eliminador de radiación.

Estando en posesión del eliminador de radiación, avanzar hacia un enemigo presionando simultáneamente SHIFT y la flecha direccional en el teclado hará aparecer en pantalla un disco y un rectángulo. En el disco se muestra una fracción, expresada en la grafía a/b, correspondiente a la señal de entrada. La fracción asociada a cada enemigo se genera aleatoriamente y tiene siempre un numerador y un denominador menores que 10. Mantener presionados SHIFT y la flecha direccional ocasionará que se coloree el rectángulo de manera continua, siendo representada la señal de salida por la fracción del rectángulo que está coloreada. Una vez que se libere la tecla SHIFT o la flecha direccional, el eliminador de radiación comparará las señales de entrada y salida, y si éstas coinciden se neutralizará el campo electromagnético del enemigo.

Si se registra una fracción mayor que 1 en la señal de entrada, se mostrará un segundo rectángulo en la señal de salida inmediatamente al colorear por completo el primero, y un tercero inmediatamente al colorear por completo el segundo.

Las figuras iv.7 y iv.8 ilustran este proceso. En particular, la figura iv.8 es una captura de pantalla de dos páginas del manual incluido en el juego. En el manual se describe la función y el modo de empleo del eliminador de radiación. En cambio, no se hace referencia a las fracciones o a la recta numérica con la intención de que sea el jugador mismo quien relacione la fracción, expresada en la grafía a/b, con la recta numérica, representada por rectángulos, a través del funcionamiento del eliminador de radiación. De esta manera, el entorno de *El libro de arena* se convierte en un contexto que puede dar sentido a la localización de fracciones en la recta gracias a su fantasía profunda.

FIGURA IV.7 – Asociación de representaciones en la localización de fracciones sobre la recta

FIGURA IV.8 – Sección del manual incluido en el juego referente al eliminador de radiación

Para facilitar la tarea del jugador, los rectángulos presentan una graduación, que depende de la fracción que deben localizar y del nivel del enemigo al que se enfrentan. Los rectángulos pueden estar divididos en un número de partes: a) que es el indicado por el denominador, b) que es múltiplo del indicado por el denominador, c) que es submúltiplo del indicado por el denominador o d) que no es múltiplo ni submúltiplo del indicado por el denominador, en correspondencia con las claves perceptuales completas, incompletas, irrelevantes e inconsistentes definidas por Behr, Lesh, Post y Silver (1983), ejemplificadas en la TABLA II.4.

El motivo por el que se relaciona esta actividad con la localización de fracciones sobre la recta (y no con la identificación de las partes de un todo) es que la interpretación que debe darse a la fracción a/b para colorear la región correspondiente del rectángulo es fundamentalmente de medida. Aunque con una clave consistente y completa la actividad se reduce a un ejercicio de corroboración de segmentación y conteo, al agregar distractores a la representación pictórica es necesario que el jugador tome la fracción unitaria $1/b$ como patrón de medida y la compare con el rectángulo graduado para determinar qué región debe ser coloreada. Entendidos de manera práctica, los rectángulos graduados pueden ser tratados como rectas numéricas gordas.

A diferencia de la primera actividad, en la que se comparan fracciones sin referente explícito y en un único sistema de representación (simbólico), en esta segunda actividad el referente de las fracciones como cantidades adjetivales es el área del rectángulo, proporcional a la longitud del segmento de recta, y para realizarla el jugador debe coordinar dos sistemas de representación (simbólico y gráfico).

IV.3 Metodología

Con el diseño de *El libro de arena* se ha buscado aprovechar las características de los entornos intrínsecamente motivantes para contextualizar actividades como la comparación y localización de fracciones en un juego de aventura con elementos de acción y rol. El propósito de *El libro de arena*, como videojuego educativo, es servir como herramienta para fortalecer la noción de tamaño de los números racionales por medio de su mecánica de juego.

Para validar el diseño de *El libro de arena* se eligieron dos niñas y tres niños inscritos en el curso de sexto año de primaria en la ciudad de Tlaxcala. Ninguno de ellos era compañero de otro en la misma escuela durante la experiencia.

Los cinco estudiantes contestaron un pretest en la última semana de septiembre de 2013 para determinar las características de su noción de tamaño de los números racionales y sus estrategias de comparación de fracciones, con base en lo siguiente:

- Interpretación de la grafía a/b.
- Aplicación de criterios de comparación de fracciones.
- Habilidad para producir y reconocer fracciones equivalentes.
- Reconocimiento de la densidad en los números racionales.

- Habilidad para trasladarse entre distintos modos de representación.
- Habilidad para conciliar claves perceptuales no completas con tareas de localización de fracciones.
- Existencia de un esquema de equifragmentación.
- Existencia de un esquema de composición de fracciones unitarias.

En el último apartado de este capítulo se da una descripción de cada ítem.

Luego de que los estudiantes contestaran el pretest se les comentó que *El libro de arena* es un videojuego en la última etapa de desarrollo y que se solicitaba el apoyo de varios niños para que lo probaran y reportaran cualquier error de programación. Se hicieron visitas semanales de 45 minutos durante cuatro semanas, en las cuales se comentaban aspectos del juego como los controles de navegación o la ubicación de items, pero no se hicieron observaciones respecto a las estrategias empleadas para resolver los puzzles y avanzar en el juego.

Todas las actividades se realizaron fuera de la escuela, en el hogar de cada niño. Se pidió a los padres de familia que permitieran jugar a los niños tan frecuentemente como ellos lo desearan, siempre que esto no interfiriera con sus actividades académicas. Cada niño tuvo una experiencia individual según su gusto personal por el juego, avanzando a su propio ritmo, sin la promesa de recompensas externas al juego y sin intervención didáctica de ningún tipo.

En la visita de la quinta semana se aplicó un postest para identificar cambios en las características de su noción de tamaño de los números racionales y sus estrategias de comparación de fracciones respecto a las determinadas en el pretest.

Una breve entrevista al término de cada test permitió aclarar algunos aspectos de las estrategias empleadas por los estudiantes en la resolución de los items. Sin embargo, estas entrevistas se vieron limitadas por el tiempo de 45 minutos que duró cada visita.

IV.4 Diseño de los instrumentos de diagnóstico

Con el fin de detectar cambios en el comportamiento de los estudiantes al enfrentar situaciones que involucran el concepto de tamaño de los números racionales, se diseñó un test de cinco items para ser aplicado al inicio y una versión ligeramente modificada del mismo para ser aplicada al final de la experiencia con *El libro de arena*.

IV.4.1 Ítem A

[Pretest] Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones:

2/3

5/3

2/5

Con el primer ítem se pretende detectar la relación que el estudiante establece entre el numerador y el denominador. Por ejemplo, si la lectura de la primera fracción es dos tercios o tres medios, si para interpretarla se auxilia de una recta numérica o la partición de un círculo. Además, la respuesta puede evidenciar la existencia de estrategias de comparación de fracciones basadas en los criterios de denominadores comunes ($2/3 < 5/3$ porque $5 > 2$ y el denominador es igual), de numeradores comunes ($2/5 < 2/3$ porque $5 > 3$ y el numerador es igual) y transitivo indirecto ($2/5 < 5/3$ porque $5/3 > 1$ y $2/5 < 1$), o en falsos criterios como el de mayor numerador ($2/5 < 5/3$ porque $5 > 2$) y mayor denominador ($2/3 < 2/5$ porque $5 > 3$).

[Postest] Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones:

3/4

3/5

5/4

IV.4.2 Ítem B

[Pretest] Encuentra un número entre:

7/8 y 8/9

El hecho de que la diferencia entre ambas fracciones sea 1/64 dificulta su representación gráfica, por lo que en este ítem se pone a prueba la habilidad del estudiante para producir fracciones equivalentes, o bien su habilidad para trasladarse entre dos sistemas de representación simbólica (fracciones a decimales).

La convicción con que un estudiante afirme la posibilidad de encontrar un número entre otros dos números cualesquiera apunta además al potencial desarrollo del criterio transitivo indirecto de comparación de fracciones.

[Postest] Encuentra un número entre:

6/7 y 7/8

IV.4.3 Ítem C

[Pretest] Sin hacer cuentas, estima la suma de:

10/11 y 14/13 Opciones: 1 2 24

El éxito en la estimación del resultado de una operación aritmética, y en particular de la suma, depende de la calidad de la estimación de tamaño de cada operando (Behr, Wachsmuth y Post, 1984; Behr, Wachsmuth, Post y Lesh, 1984). El advertir y usar puntos de referencia apropiados en una estimación apunta al potencial desarrollo de los criterios residuales de comparación de fracciones.

Las opciones incorrectas señalarían, en el caso de elegir 1 como respuesta, la ejecución de sumas directas de numerador con numerador y denominador con denominador, y en el caso de elegir 24 como respuesta, una conceptualización de la fracción donde el numerador y el denominador no tienen la misma importancia, o donde el numerador y el denominador no constituyen una sola entidad.

[Postest] Sin hacer cuentas, estima la suma de:
12/13 y 10/9 Opciones: 1 2 22

IV.4.4 Ítem D

[Pretest] Localiza las fracciones 5/4 y 2/3 en la siguiente recta numérica:

```
|------------'------------|
0                         1
```

El diseño de la recta numérica, compuesta de 24 segmentos y partida a la mitad, contiene distractores perceptuales por irrelevancia, incompletitud e inconsistencia para localizar en ella las fracciones 5/4 y 2/3. Para identificar cuartos, el estudiante debe agrupar los 24 subsegmentos en grupos de 6, y debe luego extender el segmento de recta para poder localizar la fracción 5/4. Para localizar la fracción 2/3, el estudiante debe ignorar la partición en mitades y reagrupar los 24 subsegmentos en grupos de 8.

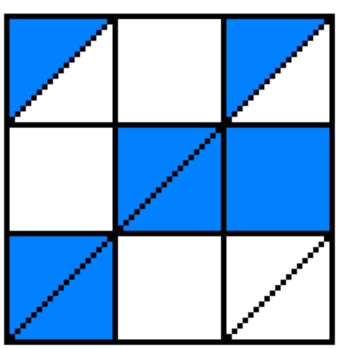
En el postest el diseño presenta un nuevo distractor por inconsistencia, pues los 18 segmentos no pueden agruparse de manera que cada grupo contenga una cuarta parte del total. El estudiante debe, en este caso, partir los segmentos, ignorarlos, o reconstruir la recta, explicando su estrategia durante la entrevista al final del test.

[Postest] Localiza las fracciones 5/3 y 3/4 en la siguiente recta numérica:

```
|---------'---------|
0                   1
```

IV.4.5 Ítem E

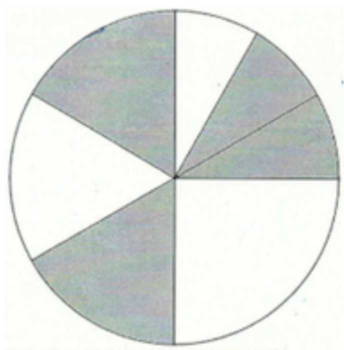
[Pretest] Describe qué fracción del dibujo está coloreada:



En el último ítem se requiere del estudiante la elección y composición de una fracción unitaria adecuada, 1/18 o 1/9. Una respuesta de la forma 7/*b* indicaría la carencia de un esquema de equipartición. La respuesta 7/14 indicaría, además, una incapacidad para evaluar la propia estrategia a partir de una estimación de tamaños, pues la fracción coloreada es menor que 1/2; la respuesta 7/7 indicaría, por otra parte, un desarrollo deficiente de la intepretación parte-todo de la fracción.

En el postest se ha cambiado la representación gráfica de un cuadrado por un círculo, pero la tarea del estudiante es equivalente. Las fracciones unitarias adecuadas son, en este caso, 1/6 y 1/12. El estudiante puede apoyarse en una redistribución de los sectores para concluir que la fracción coloreada es 1/2, pero para ello debe inferir y admitir la equivalencia 2/12 = 1/6.

[Postest] Describe qué fracción del dibujo está coloreada:



IV.4.6 Encuesta

Al pretest se anexó una encuesta acerca de la experiencia de cada estudiante con los videojuegos en general. Ellos contestaron las siguientes preguntas:

- ¿Te gustan los videojuegos?
- ¿Cuántas horas juegas a la semana aproximadamente?
- ¿Qué días sueles jugar videojuegos?
- ¿Cuáles son algunos de tus videojuegos favoritos?
- Por último, se les pidió reconocer títulos de una lista de sesenta videojuegos publicados durante los últimos 35 años.

El propósito de esta encuesta fue comparar los cambios identificados de comportamiento de un estudiante entre el pretest y el postest con los de otro estudiante, según su experiencia previa con distintos géneros de videojuegos, su interés en ellos y el tiempo que dedican a jugarlos.

V

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Los resultados de las evaluaciones previas y posteriores a la experiencia con *El libro de arena* se presentan agrupados por estudiante. Se hará primero una descripción de las respuestas escritas y verbales a cada ítem del pretest, seguida de una descripción de las respuestas escritas y verbales a cada ítem del postest, y posteriormente se analizarán estos resultados contrastando las estrategias empleadas antes de y después de la experiencia con *El libro de arena*, discutiendo las características del videojuego que pudieron fomentar estos cambios.

Para distinguir los ítems en el pretest de los ítems en el postest se añadirá un apóstrofo a la letra que indica el ítem que corresponde al postest.

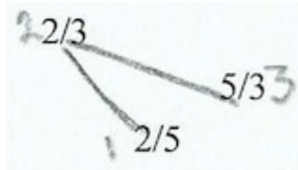
1 Esteban

Esteban declaró jugar alrededor de 4 horas los fines de semana como parte de sus actividades en las redes sociales, particularmente en *Facebook*, pero no se considera un videojugador serio. De la lista de 60 títulos reconoció 21, aunque únicamente ha jugado dos de ellos, *Angry birds* (puzzle, 2009) y *Plants vs. Zombies* (estrategia, 2009), los cuales pueden ser jugados en línea y desde intervalos cortos de tiempo (puede jugarse una partida de *Angry birds* o *Plants vs. Zombies* en menos de cinco minutos).

Con una E se indican las palabras y acciones de Esteban.

1.1 Descripción del Pretest

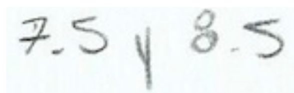
[Ítem A] Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones:



X. ¿Cómo decidiste cuál es mayor y cuál es menor?

E. El cinco [señala el denominador de 2/5] es la cantidad en que se divide. Pero dos está más cercano de tres. Y este [señala la fracción 5/3] es un entero y dos tercios.

[Ítem B] Encuentra un número entre 7/8 y 8/9:



X. ¿Los dos números que escribiste están entre estos dos [señala las fracciones 7/8 y 8/9]?

E. Sí.

X. ¿Este es un número [señala la fracción 7/8]?

E. Sí.

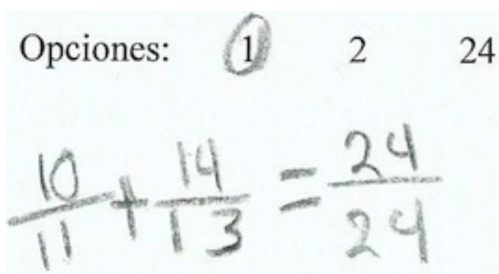
X. ¿Y este es otro [señala la fracción 8/9], verdad?

E. Sí.

X. ¿Y si te pido que me des un número entre este [escribe 4/2] y este [escribe 9/3]?

E. Sería tres y seis.

[Ítem C] Sin hacer cuentas, estima la suma de 10/11 y 14/13:



En un principio Esteban sólo encerró el 1.

X. ¿Cómo elegiste la respuesta?

E. Porque este es más de uno pero no alcanza a dos, y este no alcanza a uno.

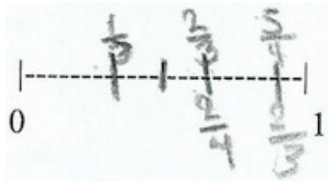
X. ¿Entonces cuál es la suma de los dos?

Procedió entonces a sumar numerador con numerador y denominador con denominador.

X. ¿Entonces cuál es la respuesta?

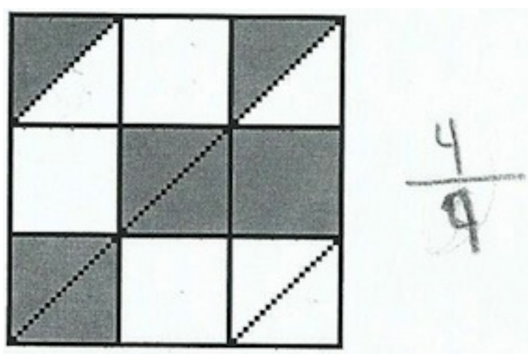
E. Uno.

[Ítem D] Localiza las fracciones 5/4 y 2/3 en la siguiente recta numérica:



X. ¿Dónde van las fracciones?
E. Aquí y aquí [señala las que escribió por encima del segmento de recta].
X. ¿Cómo supiste dónde va cada una?
E. Porque conté las rayitas. Ocho son un tercio y dieciséis son dos tercios.
X. ¿Y el cinco cuartos?
E. Es que no se puede pasar.
X. ¿Pero va ahí?
E. Sí.
X. ¿Y las de acá [señala las fracciones que Esteban escribió debajo del segmento de recta]?
E. No. Es que me equivoqué.

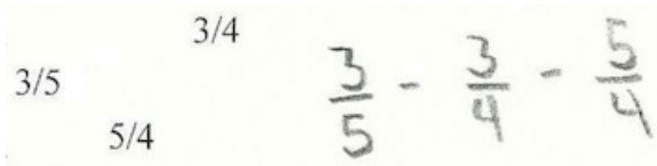
[Ítem E] Describe qué fracción del dibujo está coloreada:



X. ¿Cómo encontraste la respuesta?
E. Porque si este [señala el triángulo sombreado a la derecha] lo paso para acá [señala el triángulo debajo del sombreado a la izquierda] ya son cuatro. Y son nueve cuadrados.
X. ¿Y si te preguntara ahora qué fracción del dibujo no está coloreada?
Luego de contar los cuadrados responde 5/4.

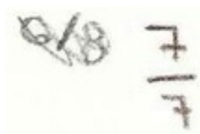
1.2 Descripción del Postest

[Ítem A'] Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones:



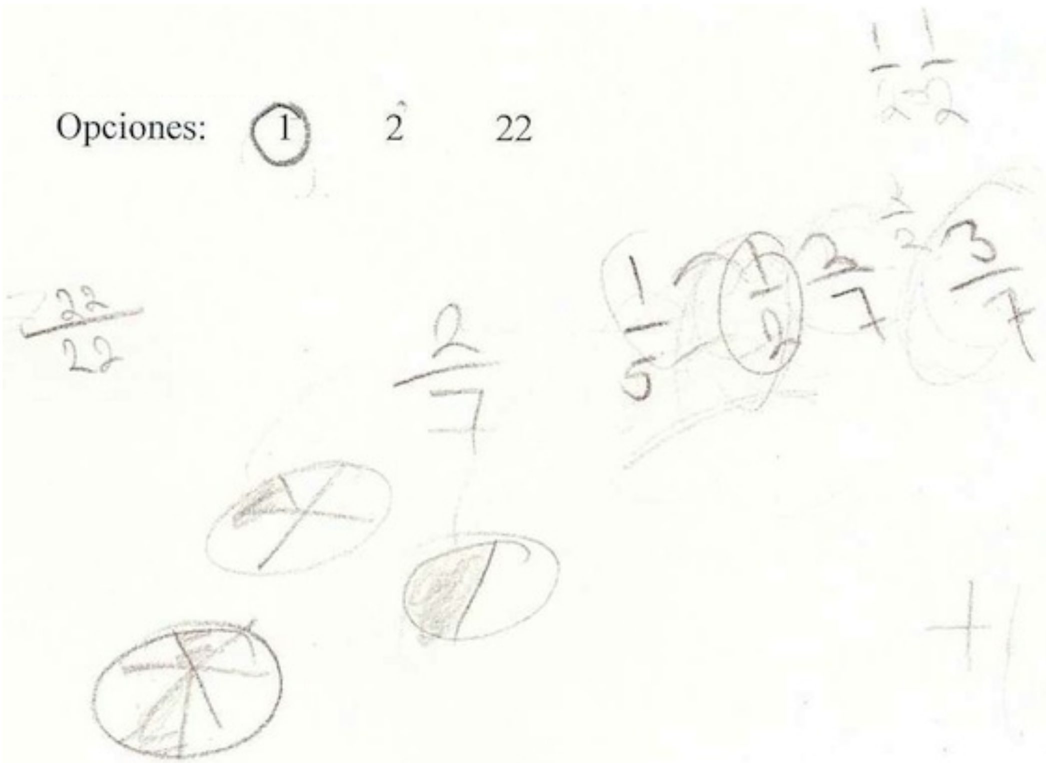
X. ¿Cómo decidiste cuál es mayor y cuál es menor?
E. Porque este [señala el denominador de 3/4] es el principal, porque dice qué tan grande o chica es la parte. Entonces el tres cuartos es mayor que el tres quintos. Y el otro [señala la fracción 5/4], pues es más grande.

[Ítem B'] Encuentra un número entre 6/7 y 7/8:



En un principio Esteban sólo escribió 6/8.
X. ¿Cómo sabes que seis octavos está entre seis séptimos y siete octavos?
E. Porque seis octavos es mayor... no, es menor que siete octavos, y es... todavía menor que seis séptimos.
Luego de cancelar 6/8, escribe 7/7.
X. ¿Ese número sí está entre los otros dos?
E. Sí, porque es mayor que seis séptimos y... no, tampoco. ¡Es muy complicado!
X. ¿Crees que podrías pensar en alguna forma de encontrar un número que sí esté entre seis séptimos y siete octavos?
E. No. En mi opinión no hay una forma fácil.

[Ítem C’] Sin hacer cuentas, estima la suma de 12/13 y 10/9:



En un principio Esteban sólo encerró el 1.

X. ¿Cómo elegiste la respuesta?

E. Porque si sumara las fracciones daría uno. Sale veintidós entre veintidós [escribe la fracción] y eso es uno.

X. ¿Y si te pidiera la suma de un medio y un medio?

E. Ahí sería dos medios, que es uno [escribe 1/2 + 1/2 en la esquina superior derecha y 2/2 abajo de la suma indicada], porque cuando el denominador es igual nada más se suman los de arriba.

X. ¿Y si te pidiera la suma de 1/5 y 1/2?

E. Es dos séptimos [escribe las fracciones 1/5, 1/2 y 2/7].

X. ¿Cuál es la mayor de esas tres fracciones?

E. Dos séptimos [vuelve a escribir 2/7 a un lado].

X. ¿Qué fracción es mayor, un medio o tres séptimos?

Luego de meditarlo un momento, escribe 3/7.

X. ¿Entonces dos séptimos sí es la mayor de estas tres fracciones [señala 1/5, 1/2 y 2/7]?

Esteban representa las fracciones mediante círculos, primero 1/5, luego 1/2 y finalmente 2/7.

E. No. Es un medio.

X. ¿Cuál crees que sea la suma de estas dos fracciones [señala 12/13 y 10/9]?

E. Uno.

[Ítem D'] Localiza las fracciones 5/3 y 3/4 en la siguiente recta numérica:

En un principio Esteban trabajó sólo sobre la recta dada.

X. ¿Cómo hiciste para localizar las fracciones?

E. Dividí en cuatro partes la recta y tomé tres [para localizar a 3/4]. Y acá [para localizar a 5/3] dividí en tres partes y tomé cinco.

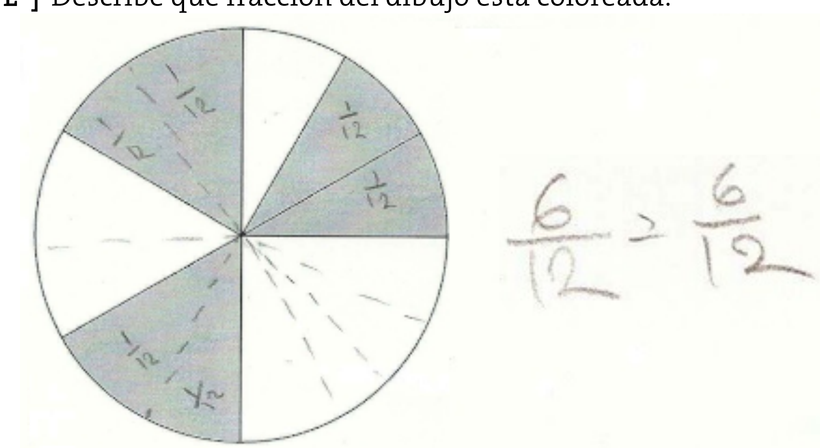
X. ¿Puedes mostrarme cómo dividiste en una recta en limpio?

Esteban dibujó una nueva recta, iteró dos veces la bipartición y escribió 3/4 al final del tercer segmento de los cuatro producidos. Luego remarcó la mitad de la recta, dividió cada mitad en tres y escribió 5/3 al final del quinto segmento de los seis producidos.

X. ¿Por qué cinco tercios va ahí?

E. Porque aquí son cinco [señala su ubicación de 5/3] y aquí son seis tercios [escribe 6/3 al final de la recta].

[Ítem E'] Describe qué fracción del dibujo está coloreada:



Esteban completó mediante líneas punteadas la partición en doceavos y escribió 6/12 como respuesta.

X. ¿Y si pregunto por la fracción que no está coloreada?

E. También son seis de doce [escribe = 6/12 al lado de su respuesta].

1.3 Discusión

Desde el pretest Esteban ha usado estrategias de comparación de fracciones en las que toma a 1 como punto de referencia. En el ítem A, separa a 5/3 de las otras fracciones por ser mayor que 1, y en el ítem C, su primera observación es que 14/13 es "*más de uno*" y 10/11 "*no alcanza a uno*". Sin embargo, su concepto de la unidad pierde jerarquía cuando la interpreta en un modo de representación gráfico como la recta numérica.

En el ítem D, localiza la fracción 5/4 a la izquierda de 1 porque "*no se puede pasar*". Esteban ha localizado correctamente la fracción 2/3 gracias a su composición de la fracción unitaria 1/3 a partir de 8 segmentos de los 24 que componen la recta numérica unitaria, sobreponiéndose al diseño irrelevante de la clave perceptual; pero, con el fin de localizar la fracción 5/4, prefiere ignorar a 1 como punto de referencia, como lo ha tomado en los ítems A y C, antes que agregar información a la clave perceptual.

El falso criterio de comparación aplicado en el ítem A, basado en la cercanía entre el numerador y el denominador, sugiere que Esteban produce y ejecuta procedimientos en los que la fracción, o al menos la grafía a/b de la fracción, es interpretada como una pareja de números enteros independientes entre sí, independientemente de su interpretación en otros contextos. El algoritmo de la suma que Esteban ejecuta en el ítem C y su interpretación del enunciado del ítem B, confirman esta hipótesis.

En el ítem B, Esteban admite que 7/8 es un número, al igual que 8/9, pero la instrucción "encuentra un número entre X y Y" parece no tener sentido para Esteban cuando X y Y son dos fracciones, e inmediatamente lee "7/8 y 8/9" como "7 y 8, 8 y 9". En el ítem C, elige como respuesta 1 a pesar de su observación de que 14/13 es mayor que 1. La suma de fracciones se efectúa independientemente de este hecho, y el resultado no está condicionado por el tamaño de los sumandos.

Las deficiencias de Esteban en el pretest pueden resumirse en: interpretación de la grafía a/b como dos números enteros independientes; aplicación del falso criterio de cercanía numerador-denominador para comparar fracciones; confusión sobre lo que significa encontrar un número entre dos fracciones; concepto de la unidad sometido por la incapacidad para reconocer y sobreponerse a una clave perceptual incompleta. En el postest, algunas de estas deficiencias parecen haber sido corregidas.

En los ítems A' y B', los criterios de numeradores comunes y de denominadores comunes son sistemáticamente aplicados en la búsqueda de una solución. De hecho el cambio más notable en las estrategias de Esteban entre el pretest y el postest ocurre en el segundo ítem.

En el ítem B', Esteban interpreta correctamente la instrucción y recurre a los mismos criterios de comparación de fracciones que ha aplicado en el ítem A' para proponer candidatos a solución (6/8 es menor que 7/8...) y verificar si satisfacen la condición (...pero no es mayor que 6/7). Aunque no es capaz de producir una respuesta correcta, Esteban parece entender lo que significa encontrar un número R entre X y Y cuando R, X, y Y son fracciones.

En cambio, los problemas con el algoritmo de la suma persisten. Cuando se le cuestiona sobre sumas cuya respuesta presumiblemente conoce de antemano, Esteban sostiene que el algoritmo de la suma es distinto cuando las fracciones a ser sumadas tienen el mismo denominador y cuando tienen un denominador distinto. Cuando se confrontan las consecuencias de su algoritmo (si $1/5 + 1/2 = 2/7$ entonces $2/7 > 1/2$)

con las consecuencias de realizar la suma en el modelo parte-todo (1/2 es claramente mayor que 2/7), Esteban decide que lo que ocurre en un modo de representación no tiene consecuencias en un modo de representación distinto, ni aún cuando la conclusión en el modelo parte-todo es consistente con los criterios de comparación de fracciones que ha aplicado en el ítem A'.

Un posible diagnóstico, de acuerdo con la teoría expuesta en la SECCIÓN II.3.5, es que Esteban no ha desarrollado el criterio de traslación coordinante, ya que éste es necesario para juzgar la validez de un procedimiento efectuado en el modo de representación simbólico con base en una observación hecha en un modo de representación pictórico.

El comportamiento de Esteban en el ítem D' puede deberse a que no ha superado la idea que expresó en el pretest, que "no se puede pasar" de la recta numérica dada. En el mismo ítem, la unidad pasa de ser representada por la longitud total de la recta, para ubicar a 3/4, a ser representada por la longitud de la mitad de la recta, para ubicar a 5/3, lo que no tiene consecuencias negativas porque 5/3 aparece, como lo esperaba, a la derecha de 3/4.

Aunque no se ha atrevido a extender la recta más allá de la unidad para ubicar la fracción 5/3, ha reconocido, al menos, la necesidad de que 5/3 aparezca a la derecha de 1. También vale la pena notar que los distractores perceptuales no afectan su estrategia.

En *El libro de arena* se pone un gran énfasis en desarrollar los criterios de denominadores comunes y numeradores comunes durante los primeros niveles de juego. Las diferentes configuraciones numéricas de los conjuntos de fracciones en los casos correspondientes debieron servir como prueba suficiente para rechazar el falso criterio de cercanía numerador-denominador.

El hecho de que Esteban haya modificado su estrategia en el ítem D' con respecto al ítem D, pero no su estrategia en el ítem C' respecto al ítem C, es un buen indicador de que su experiencia con *El libro de arena* ha sido una base para comenzar el desarrollo del criterio de traslación coordinante, dado que un tipo de actividad en el juego consiste en localizar fracciones sobre la recta numérica, pero no hay en el juego, en cambio, actividades en las que se requiera sumar fracciones o representarlas en un modelo parte-todo.

Por último, las actividades de comparación de fracciones en las que más de dos fracciones deben ser ordenadas puede haber servido para dotar de un nuevo significado a la instrucción "encuentra un número entre X y Y".

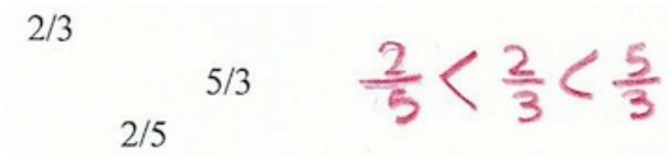
2 Flor

En la encuesta, Flor declaró que, aunque le gustan los videojuegos, sus actividades escolares y extraescolares no le permiten jugar más de una hora los fines de semana. De la lista de 60 títulos reconoció 14, entre ellos *Pac Man* (puzzle, 1980), uno de sus juegos favoritos.

Con una F se indican las palabras y acciones de Flor.

2.1 Descripción del Pretest

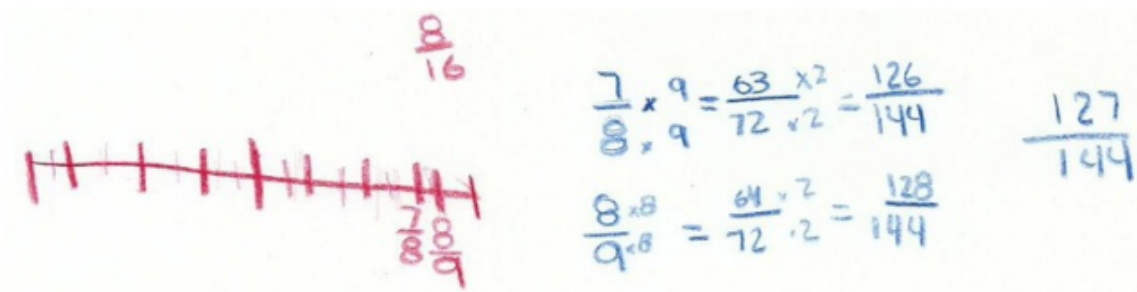
[Ítem A] Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones:



X. ¿Cómo decidiste cuál es mayor y cuál es menor?

F. Me imaginé un rectángulo partido en tres y uno partido en cinco. Estas dos [señala las fracciones 2/3 y 2/5] tienen el mismo numerador pero las tres partes son más grandes, y el cinco es más grande que el dos [refiriéndose a las fracciones 2/3 y 5/3].

[Ítem B] Encuentra un número entre 7/8 y 8/9:



En su primer intento construye una recta numérica. Itera la demediación hasta que la unidad queda dividida en ocho segmentos y ubica la fracción 7/8. Sin efectuar una nueva fragmentación ubica la fracción 8/9 a un lado de 7/8. Divide cada octavo de la recta a la mitad para obtener una fragmentación en dieciseisavos y escribe 8/16 como respuesta.

X. ¿Cómo sabes que ésta [señala 8/16] está entre ésta [señala 7/8] y ésta [señala 8/9]?

F. Ah, me equivoqué. Quería poner quince, no ocho.

X. ¿Y sí va a quedar entre las dos [señala el espacio entre 7/8 y 8/9 sobre la recta]?

Flor cuenta los dieciseisavos hasta el número quince y duda para indicar si 15/16 se encuentra a la izquierda o a la derecha de 8/9.

F. ¡No, mejor así!

Flor recurre a un algoritmo para producir fracciones equivalentes con denominador común y, al obtener equivalencias que difieren en una fracción unitaria, duplica las cantidades para obtener nuevas equivalencias. Su respuesta es 127/144.

[Ítem C] Sin hacer cuentas, estima la suma de 10/11 y 14/13:

X. ¿Cómo elegiste la respuesta?

F. A ésta [señala la fracción 10/11] le falta un onceavo para el entero y a ésta [señala la fracción 14/13] le sobra un treceavo, entonces entre las dos hacen dos enteros.

X. ¿La suma es exactamente dos?

F. Sí.

X. ¿Sabes qué significa estimar?

F. Es como calcular, ¿no?

Después de comentar la diferencia entre calcular y estimar, se insiste sobre la pregunta.

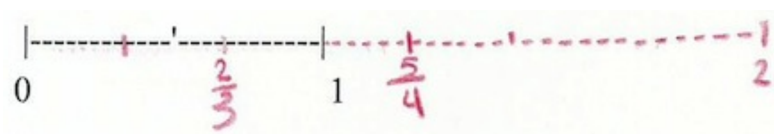
X. Entonces ¿suman más o menos dos, o exactamente dos?

F. Más o menos dos.

X. ¿Cómo sabes que no suman exactamente dos?

F. Porque no tienen el mismo denominador. Para poder sumar siempre se necesita el mismo denominador.

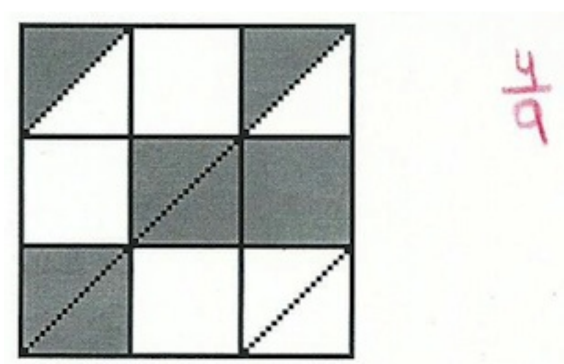
[Ítem D] Localiza las fracciones 5/4 y 2/3 en la siguiente recta numérica:



X. ¿Cómo localizaste cada fracción?

F. Conté las rayitas. Son veinticuatro. Entonces dos tercios está en la dieciséis y cinco cuartos está en la rayita seis después de la unidad.

[Ítem E] Describe qué fracción del dibujo está coloreada:



X. ¿Cómo encontraste la respuesta?

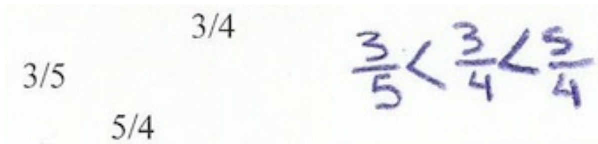
F. Los dos triangulitos forman un cuadrado, y son cuatro de nueve.

X. ¿Y si te preguntara qué fracción del dibujo no está coloreada?

F. Pues cinco novenos, porque cuatro novenos más cinco novenos es un entero.

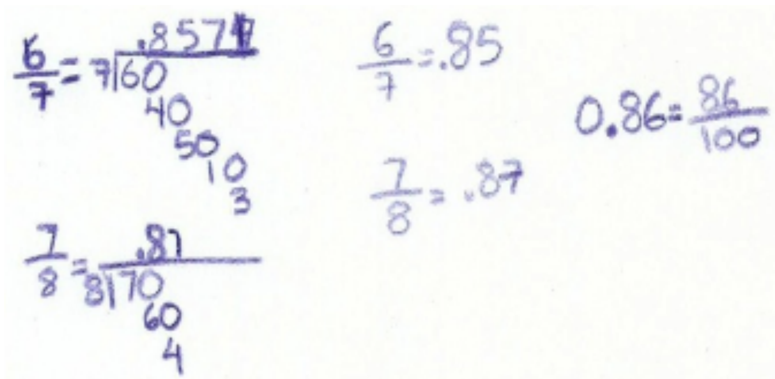
2.2 Descripción del Postest

[Ítem A’] Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones:



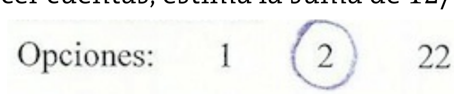
X. ¿Cómo decidiste cuál es mayor y cuál es menor?
F. Un quinto es menor que un cuarto, y cinco es mayor que tres.

[Ítem B’] Encuentra un número entre 6/7 y 7/8:



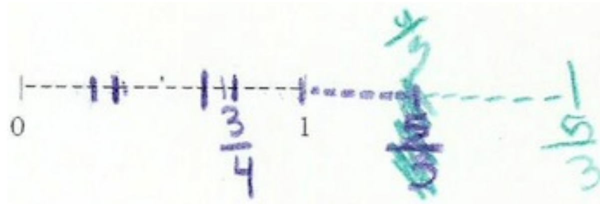
F. No sabía si era necesario regresar a fracción, pero la puse de todos modos.
X. Te pedí un número, y punto ochentaiséis es un número. Pero ochentaiséis sobre cien también está bien. Cualquiera de los dos está bien. La vez anterior hiciste algo distinto, ¿te acuerdas?
F. No me acuerdo. Creo que sí, pero ahora se me ocurrió esto.
X. ¿De qué otra forma podrías encontrar un número entre seis séptimos y siete octavos?
F. Haciendo un dibujo. O si no, multiplico seis séptimos por ocho y siete octavos por siete para igualar las fracciones.

[Ítem C’] Sin hacer cuentas, estima la suma de 12/13 y 10/9:



X. ¿Cómo elegiste la respuesta?
F. A doce treceavos le falta para la unidad, y a diez novenos le sobra. Entonces entre los dos son dos.
X. Y la suma es ¿mayor, menor o exactamente dos?
F. La suma es mayor que dos porque, si comparas, un noveno es mayor que un treceavo.

[Ítem D'] Localiza las fracciones 5/3 y 3/4 en la siguiente recta numérica:



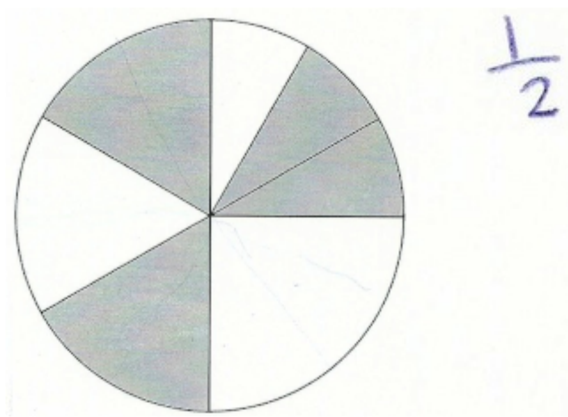
En un principio Flor sólo trabajó hasta donde la fracción 5/3 aparece cancelada.

X. ¿Cómo supiste dónde va cada fracción?

F. Son dieciocho rayitas y para dividir en cuartos sale cuatro punto cinco. Intenté poner a tres cuartos a la mitad de esa rayita. Y con cinco tercios me equivoqué, porque ahí va cuatro tercios. Para cinco tercios son otras seis rayitas.

Cancela 5/3, escribe 4/3 en su lugar y extiende la recta lo suficiente para ubicar a 5/3.

[Ítem E'] Describe qué fracción del dibujo está coloreada:



X. ¿Cómo encontraste la respuesta?

F. Vi la parte más pequeña. Cabe dos veces acá [señala uno de los sectores en el semicírculo izquierdo] y tres veces acá [señala el cuadrante en blanco]. Entonces, tres por cuatro, doce, y están sombreadas seis de las doce partes.

2.3 Discusión

Flor no tiene las deficiencias que muestra el resto de los niños en este estudio. Ya desde el pretest aplica los criterios de denominadores comunes y numeradores comunes, produce fracciones equivalentes, estima apropiadamente el tamaño de un par de fracciones y usa esa noción de tamaño para estimar su suma, se sobrepone al diseño irrelevante e incompleto de la recta numérica dada y ejecuta esquemas de equifragmentación y composición de fracciones unitarias. Aún así, hay ciertas diferencias en sus respuestas en el pretest y en el postest que pueden ser significativas.

En el ítem A, aunque no lo concreta en el papel, Flor recurre a un modelo parte-todo para asegurarse de que 1/3 es mayor que 1/5. En el ítem A', no requiere trasladarse a un modo de representación pictórico cuando la aplicación del criterio de numeradores comunes es inmediata.

En el ítem B’, Flor interpreta las fracciones como cocientes para ordenar los números decimales y proponer un número intermedio.

El comentario que hace al inicio de la entrevista, “*No sabía si era necesario regresar a fracción, pero la puse de todos modos*”, señala al criterio de traslación coordinante. Aprovechando la propiedad posicional del sistema de numeración decimal, Flor se traslada del modo de representación $0.(a_2) > 0.(a_2)$ al modo de representación $a_2/b_2 > a_1/b_1$, donde b_1 y b_2 son potencias de 10, conservando la relación de orden.

En el ítem D’ Flor no extiende la recta en una unidad completa, sino únicamente hasta la posición requerida $5/3$. Ésta es una diferencia pequeña pero destacable con respecto a la extensión en una unidad completa en el ítem D, porque la recta se convierte no sólo en un recurso pictórico que puede ser usado como medio para representar la fracción $5/3$, sino en una representación de la fracción $5/3$ en sí misma. Es decir, no sólo puede representarse a a/b en la recta, sino la recta se convierte en una representación de a/b, de la misma manera en que la recta es una representación de la unidad cuando en su extremo derecho aparece el número 1.

Una posible razón para recurrir a la expresión decimal en el ítem B, a diferencia de las estrategias empleadas en el ítem B, es que en *El libro de arena*, al involucrarse continuamente en actividades de comparación de fracciones de manera no supervisada, Flor se sintió en libertad de experimentar con diferentes estrategias y pudo haber notado que efectuar la división y comparar números decimales puede ser más rápido que producir fracciones equivalentes con denominador común, y más preciso que construir una recta numérica dividida en un número relativamente grande de segmentos. Durante la entrevista, Flor mencionó que la producción de fracciones equivalentes, que es a lo que ella se refiere con “*igualar fracciones*”, y la construcción de una recta numérica son sus alternativas a la comparación de números decimales.

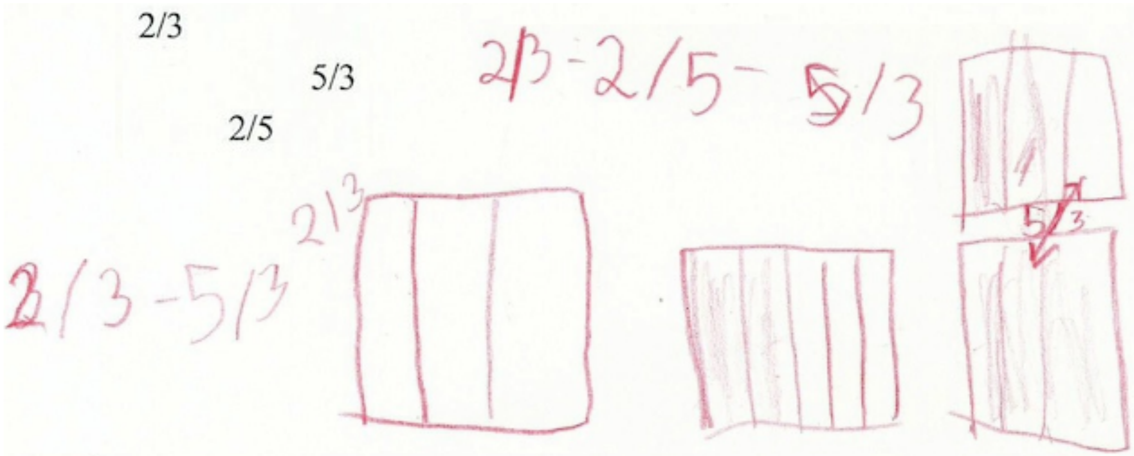
3 Jaime

Jaime dedica de 4 a 6 horas a jugar videojuegos los fines de semana. De la lista de 60 títulos dijo reconocer únicamente 6, sin embargo es posible que no reconociera más de ellos por su dificultad para leer los títulos en inglés. Una evidencia de esto es que al escribir el nombre de su videojuego favorito, *Halo 2* (acción, 2004), lo hace con G en vez de H. Puesto que la H en *Halo* se pronuncia como J, este error es evidencia de alguna dificultad para leer y escribir también en español.

Con una J se indican las palabras y acciones de Jaime.

3.1 Descripción del Pretest

[Ítem A] Ordena de mayor a mayor las siguientes fracciones:



En un principio Jaime sólo escribió 2/3 – 2/5 – 5/3.

X. ¿Cómo sabes cuál es mayor y cuál es menor?

J. Por ejemplo éste [dibuja un rectángulo, lo parte en 3 partes y escribe en una esquina 2/3], tres veces se partió, ¿no? Le toca más grande a cada quien, la cantidad. Y éste se partió cinco veces [dibuja un rectángulo y lo divide en 5 partes] y se comieron dos, o sea que queda más pequeña la cantidad que se van a comer.

X. Entonces ¿cuál es más grande?

J. éste [señala el rectángulo que representa 2/5] es más grande que éste [señala la fracción 2/3] y que éste [señala la fracción 5/3].

X. ¿Y cuál es más grande de éstos dos [señala las fracciones 2/3 y 5/3]?

J. Este lo parto en tres [dibuja un rectángulo, lo divide en 3 partes y colorea las 3 partes], y no alcanza porque se colorean cinco. Ocuparías otro cuadro [dibuja otro rectángulo, lo parte en 3 partes y colorea 2 de ellas]. Se hace más pequeña la cantidad que ocupaste más.

X. ¿Cuál es la cantidad que se hace más pequeña?

J. Ésta [señala el último rectángulo].

X. ¿Qué parte del dibujo representa los cinco tercios?

J. Ésta [señala los dos rectángulos y los deja indicados con una flecha de doble punta].

X. Pero entonces ¿sí es la mayor ésta [señala la fracción 2/5] o no?

J. Sí, porque ésta [señala la fracción 5/3] se divide en tres, tendrías que ocupar otra para darle a todos, y no alcanzaría si sólo das una. Y acá [señala la fracción 2/5] lo divides en cinco y sobra todo esto.

X. ¿Y cuál es más grande entre ésta [señala la fracción 2/3] y esta [señala la fracción 5/3]?

Jaime escribe 2/3 – 5/3.

X. ¿Por qué están en ese orden?

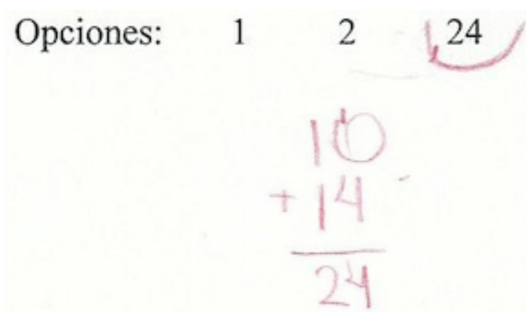
J. Ya me confundí.

Después de esta respuesta, Jaime no quiso continuar con la discusión del ítem A.

[Ítem B] Encuentra un número entre 7/8 y 8/9:

Jaime escribe el número 7, pero luego lo cancela. Parece iniciar la construcción de un modelo parte-todo pero abandona el proyecto en el segundo trazo.
X. ¿Qué problema tuviste aquí?
J. No pude descifrar cuál había entre estos dos.
X. ¿Podrías decirme alguna fracción que creas que esté entre esas dos, aunque no estés seguro?
J. Como la mitad de los dos... sería siete... no. Ocho... un octavo...
Jaime comenzó a suspirar y a negar con la cabeza, y no quiso responder más.

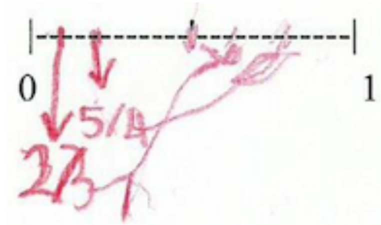
[Ítem C] Sin hacer cuentas, estima la suma de 10/11 y 14/13:



En un principio Jaime dejó en blanco este ítem.
X. ¿Puedes decirme cuánto es nueve más ocho?
J. Espera...
X. No importa que no sea exacto, dime más o menos cuánto es.
J. Diecisiete.
X. Y, más o menos, ¿cuánto es ocho más quince?
J. Dieciocho.
X. Así como me respondiste, que no es exacto, puedes decirme cuánto es diez onceavos más catorce treceavos, aunque no sea exacto.
Jaime suma 10 + 14 = 24 y elige esa opción.
J. Ya me hice bolas.
X. ¿Por qué crees que no sea la que elegiste?
J. No sé. Porque ¿apoco diez más catorce va a dar dos?
X. ¿Entonces no puede ser dos?

J. No, ni uno.

[Ítem D] Localiza las fracciones 5/4 y 2/3 en la siguiente recta numérica:



En un principio Jaime ubicó 2/3 tras la segunda marca y 5/4 tras la quinta marca sobre la recta.

X. ¿Dos tercios es mayor o menor que un medio?

J. Es... ¡ay, creo que ya me equivoqué!

X. ¿Por qué dices que te equivocaste?

J. Porque... ¡ay, ya me hice bolas!

X. ¿No crees que dos tercios deba estar allí?

J. No.

X. ¿Dónde crees que debe estar?

J. Es que un medio sería como por acá [marca la posición de un medio sobre la recta].

X. ¿Y dos tercios?

J. Como por acá [con una flecha localiza a 2/3 tres marcas a la derecha de 1/2].

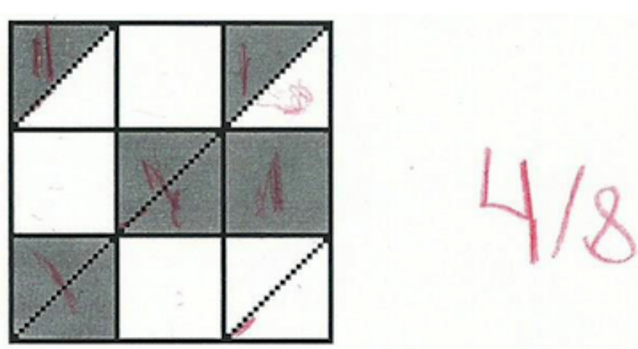
X. ¿Y cinco cuartos?

J. Por acá [con una flecha localiza a 5/4 cuatro marcas a la derecha de 2/3].

X. ¿Entonces cinco cuartos es mayor o menor que un medio?

J. Menor. ¡Ay, ya me equivoqué!

[Ítem E] Describe qué fracción del dibujo está coloreada:



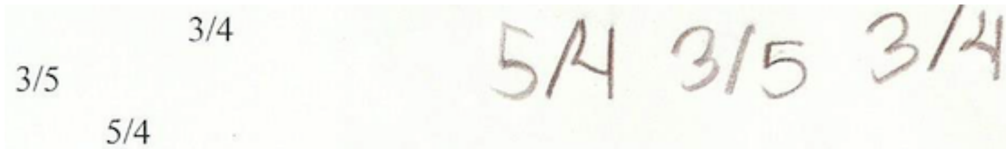
J. ¡Ya no!

X. Sólo dime cuáles son los cuatro octavos.

Jaime señala los triángulos coloreados.

3.2 Descripción del Postest

[Ítem A'] Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones:



X. ¿Cuál es la fracción mayor?

J. Ésta [señala la fracción 5/4].

X. ¿Por qué es la mayor?

J. Porque se divide en más partes y, por ejemplo, ocuparía más hojas.

X. ¿Qué hojas son las que ocuparía?

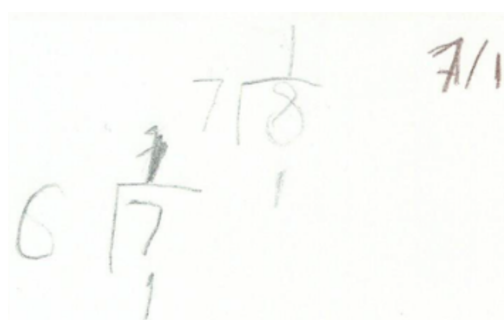
J. Ésta... ¡ya me hiciste bolas! No, es que ésta [señala la fracción 5/4] sólo ocuparía una hoja. La divide en cinco y colorea cuatro. Ésta [señala la fracción 3/5] la divide en tres y colorea cinco. Ésta [señala la fracción 3/4] la divide en tres y colorea cuatro.

X. ¿Entonces cómo las ordenarías de menor a mayor?

J. Por ejemplo ésta [señala la fracción 3/5] la acomodaría en el verde, ésta [señala la fracción 3/4] la pusiera en el medio y ésta [señala la fracción 5/4] acá [en la izquierda], es la menor.

La expresión "*la acomodaría en el verde*" hace referencia al código de colores en *El libro de arena*, en el que la posición reservada para la roca etiquetada con la fracción mayor se indica por el color verde.

[Ítem B'] Encuentra un número entre 6/7 y 7/8:



En un principio Jaime sólo escribió 7/1.

X. ¿Cómo encontraste este número?

J. Pues es que yo digo que sería un séptimo.

X. Pero ¿cómo podrías verificar que sí está entre estos dos [señala las fracciones 6/7 y 7/8].

J. Pues sería con la resta o la suma. O dividirla.

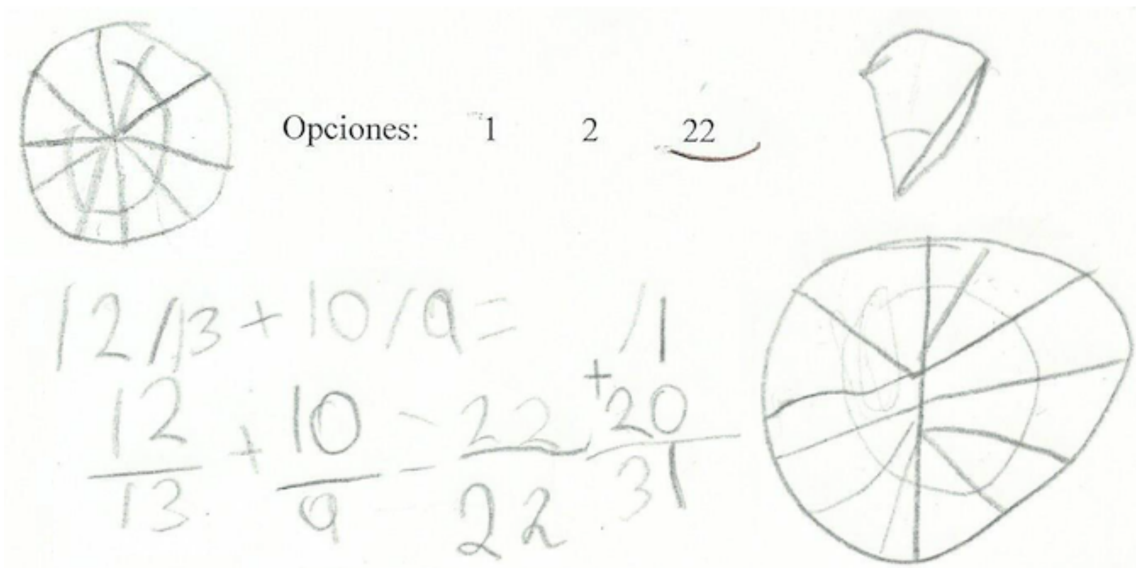
X. A ver, cómo lo harías.

J. No, ya me confundí. Es que siempre me hago bolas con esto.

Jaime intenta usar la división para calcular los cocientes de 6/7 y 7/8, pero divide 7

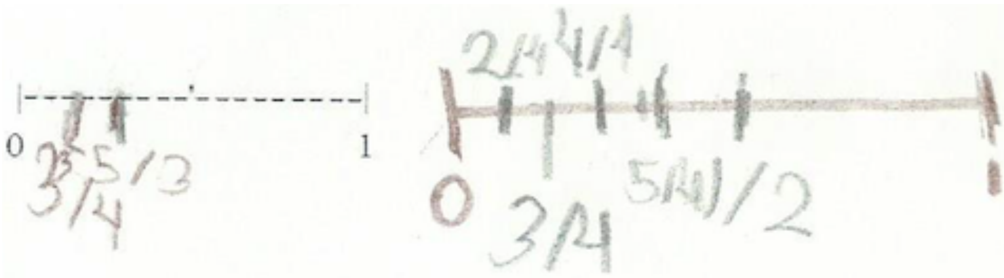
entre 6 y 8 entre 7.
X. ¿Cuánto te salió?
J. Uno y uno.
X. ¿Entonces son iguales?
J. No. No sé. Creo que sí.

[Ítem C'] Sin hacer cuentas, estima la suma de 12/13 y 10/9:



En un principio Jaime dejó en blanco este ítem.
J. Esta la dejé porque no me dejaron hacer la suma.
X. Y si te dejo hacer la suma, ¿cómo la harías?
J. Pues haría... no, ¡ya me hice bolas! ¡Muchas bolas!
X. Bueno, hay que empezar por decir que vamos a hacer una suma.
J. No sé.
X. Si te dijera que hay que sumar once y veinte, ¿cómo los sumas?
Jaime escribe la suma $11 + 20 = 31$.
X. Y si ahora te pido doce treceavos más diez novenos, ¿cómo los sumas?
Jaime escribe la suma $12/13 + 10/9 = 22/22$.
J. Creo que así sería. Aunque ya me hice bolas otra vez.
X. ¿Podrías representarme esta fracción [señala la fracción 12/13] con un dibujo?
Jaime dibuja un círculo, lo divide en 12 partes y dibuja una parte extra para completar 13. Con un trazo indica que todas las partes deben colorearse.
X. ¿Y la otra fracción [10/9]?
Jaime dibuja un círculo, lo divide en 10 partes y con un trazo indica que 9 de ellas deben colorearse.
X. ¿Cuánto serían si los sumaras?
J. Como dos enteros más un veintidosésimo.
X. Entonces, ¿qué opción elegirías?
J. Son veintidós pedacitos [elige como respuesta 22].

[Ítem D’] Localiza las fracciones 5/3 y 3/4 en la siguiente recta numérica:



En un principio Jaime sólo trabajó sobre la recta dada.

X. ¿Por qué cinco tercios va en esa posición?
J. Es que si hubiera estado más grande sí lo pudiera dividir. Pero así más o menos calculé.
X. Si quieres, haz una recta más grande para que quepa bien.
J. No, así está bien.
X. ¿Cuál de los dos es más grande?
J. Éste [señala la fracción 5/3].
X. ¿Por qué?
J. No, ¡ya me hiciste bolas!
X. ¿Entonces es más grande el otro?
J. No. Es éste [señala la fracción 5/3], porque está más lejos.
X. A ver, haz una nueva recta, más grande.

Jaime dibuja la recta numérica de la derecha.

X. ¿Dónde va un medio?

Jaime señala la posición de 1/2.

X. ¿Dónde va tres cuartos?

Jaime ubica a 3/4 relativamente en la misma posición que había identificado sobre la recta dada.

X. ¿Es más grande un medio o tres cuartos?
J. Un medio.
X. ¿Cómo podrías verificar que un medio es más grande?
J. No sé, porque no le puse las rayitas.
X. Si quieres, puedes poner las rayitas.
J. No, así está bien.
X. Bueno. ¿Dónde iría dos cuartos?

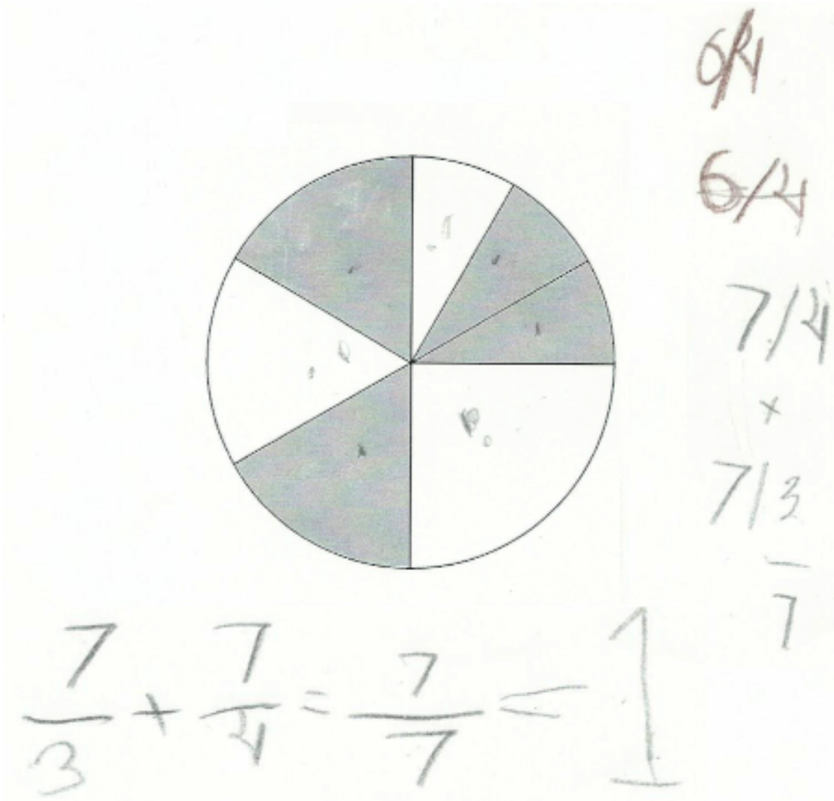
Jaime señala la posición de 2/4 a la mitad de la distancia entre el cero y tres cuartos.

X. Y dónde iría cuatro cuartos.

Jaime señala la posición de 4/4 como simétrica a 2/4 respecto de 3/4.

X. ¿La distancia de aquí [señala la fracción 2/4] a aquí [señala la fracción 3/4] es la misma que de aquí [señala la fracción 3/4] a aquí [señala la fracción 4/4]?
J. No. Sí. No sé.
X. ¿Qué fracción podrías encontrar entre cuatro cuartos y un medio?
J. Por ejemplo, aquí iría cinco cuartos [escribe 5/4 entre 4/4 y 1/2].

[Ítem E'] Describe qué fracción del dibujo está coloreada:



En un principio Jaime sólo escribió 6/4 como respuesta.

X. ¿Cuáles son los seis cuartos?

Jaime cuenta los sectores en que se divide el círculo.

J. Ay, me equivoqué al contar. Son siete cuartos.

X. ¿Qué fracción no está coloreada?

Jaime cuenta los sectores en blanco y escribe 7/3.

X. Y si sumas siete cuartos más siete tercios, ¿cuánto crees que salga?

Jaime suma únicamente los denominadores y escribe 7. Luego escribe la suma $7/3 + 7/4 = 7/7$.

X. ¿Cuánto me dirías que vale el círculo completo?

J. Un entero.

X. ¿Qué es mayor, siete séptimos o un entero?

J. Es igual [al lado de 7/7 escribe = 1].

3.3 Discusión

Jaime tiene graves problemas para relacionar los diferentes modos de representación de las fracciones, incluso para expresar sus propias ideas sobre las fracciones por medio del lenguaje.

En el ítem A explica que la porción 2/5 de un rectángulo es menor que la porción 2/3 del mismo rectángulo, pero aún así concluye que 2/5 es mayor que 2/3. Más inquietante es su razonamiento de que 5/3 es la menor de las tres fracciones porque un único rectángulo no alcanza para repartir una cantidad 5/3. En vez de juzgar que 5/3 es mayor que un entero, lo que Jaime hace es vincular la fracción 5/3 con un entero, el rectángulo, que no es suficiente para llevar a cabo una tarea de toma de porción. La fracción 2/3 es análogamente vinculada con una unidad que sí es suficiente para tomar la porción indicada. Por lo tanto, el resultado de procesar la fracción 2/3 es mayor que el resultado de procesar la fracción 5/3.

Ésta interpretación de las fracciones le ha conducido a desarrollar un falso criterio de sobrantes, en el que al comparar dos fracciones es mayor aquella que, al estar vinculada con un entero, deja un mayor sobrante una vez que se ha tomado la porción indicada. Para Jaime el denominador es un indicador de la cantidad de partes en que un entero ha de fragmentarse, pero no un indicador del tamaño de cada fragmento resultante. Luego de la fragmentación, la única cantidad que importa, y con base en la cual se comparan las fracciones, es el numerador, que indica el número de partes que se restan del entero.

La resistencia de Jaime a responder el ítem C es consistente con esta observación. Las fracciones son interpretadas como un proceso de toma de porciones, no como cantidades en sí mismas, y por lo tanto no pueden sumarse aritméticamente. Al poner énfasis en que no se busca un resultado exacto, Jaime simplemente suma $10 + 14 = 24$, ignorando los denominadores porque, de acuerdo con su interpretación, los denominadores no tienen una cualidad de tamaño y sólo intervienen al inicio de un proceso de toma de porción.

En el ítem D, Jaime ubica a 2/3 en la segunda marca y 5/4 en la quinta marca, lo cual es un error común y, de nuevo, consistente con la idea de que sólo el numerador aporta un significado de tamaño. Pero pronto cambia de opinión y localiza la fracción 2/3 a la derecha de 1/2, probablemente por reconocer este ordenamiento de alguna actividad en clase.

Desafortunadamente, Jaime estaba exhausto y no quiso hacer más comentarios, pero al parecer en el ítem E llama octavos a los triángulos coloreados, que son 8 si se divide también el cuadrado de la derecha, y con ellos construye 4 cuadrados, por lo que escribe 4/8.

Las deficiencias de Jaime en el pretest pueden resumirse en: interpretación limitada de la grafía a/b como un proceso de toma de porción; despojo al denominador de su influencia sobre el tamaño de la fracción; interpretación errónea de la recta numérica; interpretación errónea del modelo parte-todo, incluso diferente a la que da cuando es él quien construye el modelo. En el postest muestra encontrarse en un proceso de reconceptualización de la relación numerador-denominador, pero con este proceso han aparecido nuevos problemas.

En el ítem A’, Jaime cambia inmediatamente su respuesta escrita por $5/4 < 3/4 < 3/5$, hablando de las fracciones como si estuviera resolviendo un puzzle en *El libro de arena*. Esta es la misma respuesta que daría si aplicara el falso criterio de los sobrantes que ha aplicado en el ítem A; sin embargo, sus comentarios a lo largo de la entrevista muestran que ha desechado este falso criterio y en su lugar ha comenzado a probar nuevos criterios, pero con una inversión de la grafía a/b por b/a.

No es que confunda el numerador con el denominador, porque en el ítem B' escribe 7/1 y anuncia "*un séptimo*", y en el ítem C representa la fracción 10/9 por medio de un círculo dividido en 10 sectores. Lo que hace simplemente es usar la notación a/b incorrectamente, escribiendo (y leyendo) b/a cuando su intención es escribir (y leer) a/b.

En el ítem B' intenta calcular los cocientes de las fracciones, pero enfrenta dos problemas en el proceso. El primero se debe a su lectura incorrecta de la notación a/b, y lo que hace es intentar dividir b entre a. El segundo problema resulta de no poder proseguir con la división cuando el residuo es menor que el divisor.

En el ítem C' Jaime parece encontrarse a las puertas de un redescubrimiento del denominador, tomándolo en cuenta para la suma $12/13 + 10/9 = 22/22$ (en contraste con la suma sólo de numeradores en el ítem C) y describiendo la suma de la región total coloreada en su dibujo como "*dos enteros más un veintidosésimo*", pero finalmente regresa a la respuesta intuida, 22.

Como sucedió en el pretest, Jaime comenzó a sentir frustración y no fue posible seguir su razonamiento en el ítem D'. En el ítem E', la interpretación que da Jaime al modelo parte-todo es la misma con que responde en el ítem A, en el pretest, con la novedad de su uso erróneo de la notación a/b.

Es evidente en el postest que Jaime no ha desarrollado un esquema de equifragmentación, algo que no se pudo observar en el pretest. En el ítem D' no reconoce que la distancia de 2/4 a 3/4 es la misma que hay de 3/4 a 4/4, y en el ítem E' no presta atención al tamaño de los sectores en que se divide el círculo.

Una última observación es que en el modelo parte-todo reconoce la equivalencia $7/7 = 1$, pero no tiene inconvenientes en ubicar la fracción 4/4 a la izquierda de 1/2. Este comportamiento, consistente con lo observado en el ítem C', sugiere que Jaime no ha desarrollado un criterio de traslación coordinante que le permita trasladar sus conclusiones de un modo de representación a otro. Tampoco hay evidencias confiables de un desarrollo de cualquiera de los criterios de comparación de fracciones discutidos en la SECCIÓN II.3.

La continua autoevaluación de sus estrategias de comparación de fracciones, en particular de su falso criterio de los sobrantes, durante su interacción con *El libro de arena* podrían haber motivado una reflexión sobre su validez, pero no ha sido suficiente para producir criterios válidos y estrategias basadas en éstos. Por otra parte, el hecho de que ha utilizado círculos en el ítem C', en contraste con los rectángulos que utilizó en el ítem A, para representar pictóricamente las fracciones, indica que otras experiencias durante las cinco semanas tuvieron una mayor influencia sobre su concepción de las fracciones, posiblemente actividades de clase.

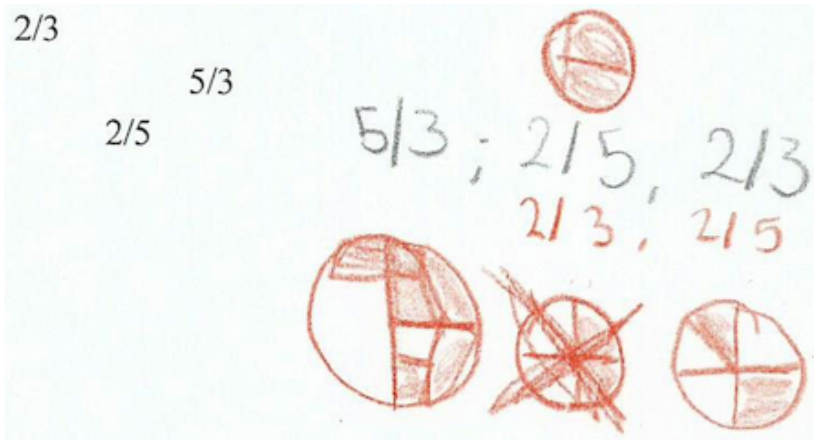
4 Malena

Malena tiene mucho interés por los videojuegos, aunque no tiene videojuegos en su casa. Usará la computadora de sus padres para poder participar en el estudio. De la lista de 60 títulos reconoció 10 de géneros muy variados: aventura, plataformas, puzzle, ritmo, rol y sigilo.

Con una M se indican las palabras y acciones de Malena.

4.1 Descripción del Pretest

[Ítem A] Ordena de mayor a mayor las siguientes fracciones:



Su primera respuesta fue 5/3; 2/5; 2/3.

X. ¿Cómo supiste cuál es mayor y cuál es menor?

M. Aquí partimos una pizza en cinco partes y nos comemos tres [señala la fracción 5/3], ésta la partimos en dos partes y ésta también, pero aquí nos comemos cinco y aquí tres.

Luego de una breve reflexión rectificó su respuesta.

M. Me equivoqué. Es ésta [señala la fracción 2/3 recién escrita] y luego ésta [señala la fracción 2/5].

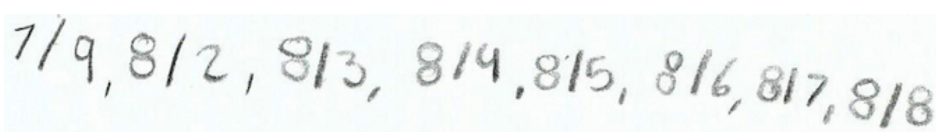
X. ¿Cómo sabes que esta fracción [señala la fracción 5/3] es la menor?

M. Porque nos comemos menos pizza.

X. ¿Podrías dibujarme la pizza?

Malena procede a representar las fracciones dibujando pizzas, fragmentándolas en el número de partes indicado por el denominador.

[Ítem B] Encuentra un número entre 7/8 y 8/9:



Malena trata de escribir todas las fracciones que cumplen la condición.

X. ¿Todas estas están entre siete octavos y ocho novenos?

M. Sí.

X. ¿Cómo sabes eso?

M. Porque el nueve es mayor que el ocho y todos éstos [señala los denominadores del 2 al 8] son menores que nueve.

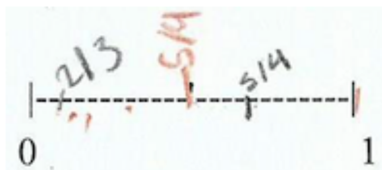
X. ¿Éstas son todas las fracciones que están entre siete octavos y ocho novenos?

M. Sí.

[Ítem C] Sin hacer cuentas, estima la suma de 10/11 y 14/13:

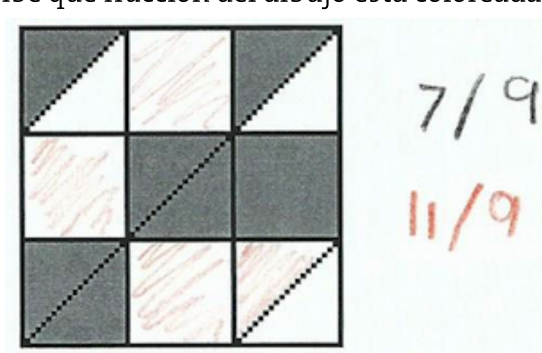
X. ¿Cómo sabes que la suma es veinticuatro?
M. Porque como no son iguales se multiplican, catorce por once y trece por diez.
X. ¿Y después?
M. Y después ya se suman.
X. ¿Y cuánto da?
M. Veinticuatro.
X. ¿Y qué le pasó a los denominadores?
M. Es que como allí no está [las opciones] en fracciones ya no se pone.

[Ítem D] Localiza las fracciones 5/4 y 2/3 en la siguiente recta numérica:



X. ¿Cómo sabes que el dos tercios va aquí?
M. Porque hay dos rayitas, por eso es dos tercios.
X. ¿Y entonces por qué pusiste el cinco cuartos acá [señala la posición en que inicialmente colocó la fracción 5/4, cuatro marcas a la derecha de 1/2]?
M. Porque me equivoqué. Va aquí.
Escribe 5/4 en la marca de 1/2.
X. ¿Por qué va ahí?
M. Porque allí serían cinco medios, cinco cuartos.
X. ¿Dónde iría un medio?
M. Allí [señala la misma marca donde ha ubicado la fracción 5/4].
X. ¿Entonces un medio va en el mismo lugar que cinco cuartos?
M. Sí.

[Ítem E] Describe qué fracción del dibujo está coloreada:



Su respuesta es 7/9.

X. ¿Cómo encontraste la respuesta?

M. Porque todos los cuadritos son nueve y, como en una pizza, se comieron siete partes.

X. Y si coloreo también éstas [colorea tres cuadrados y un triángulo], ¿ahora qué fracción está coloreada?

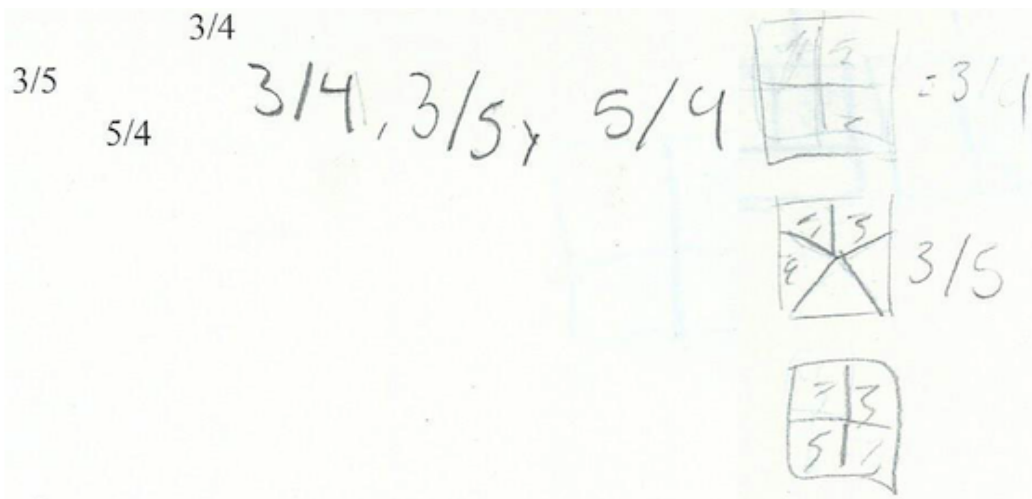
M. Once novenos [escribe 11/9].

X. ¿Y si todo estuviera coloreado?

M. Serían nueve novenos.

4.2 Descripción del Postest

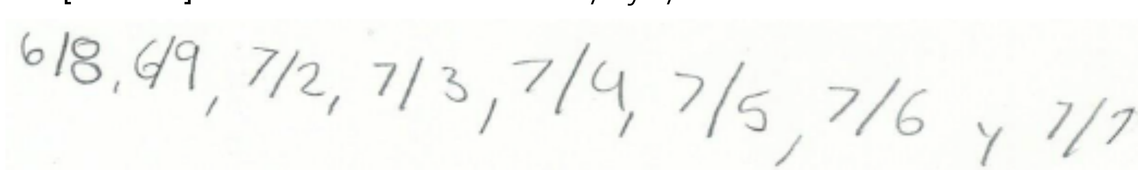
[Ítem A'] Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones:



X. ¿Cómo decidiste cuál es mayor y cuál es menor?

F. Porque aquí [3/4] partimos en cuatro y tomamos tres, aquí [3/5] partimos en cinco y tomamos tres, y aquí [5/4] partimos en cuatro y ya no podemos tomar el quinto.

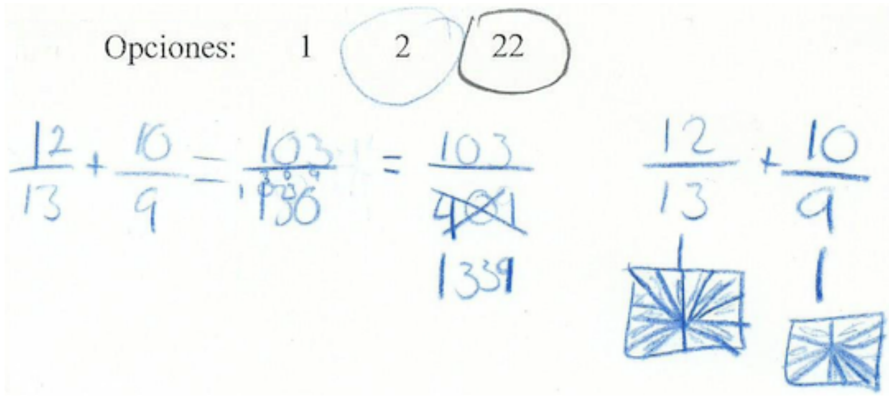
[Ítem B'] Encuentra un número entre 6/7 y 7/8:



X. ¿Todas estas están entre siete octavos y ocho novenos?

M. Sí.

[Ítem C'] Sin hacer cuentas, estima la suma de 12/13 y 10/9:



En un principio Malena sólo encerró el número 22.

X. ¿Cómo sabes que la suma es veintidós?

M. Porque si sumas da veintidós.

X. ¿Podrías realizar la suma para que yo la vea?

M. Sí.

Malena procede a multiplicar 13×10 = 130, lo que escribe como denominador, pero el resto de su procedimiento es difícil de seguir. El numerador pudiera tratarse de una multiplicación fallida 12×9 = 103, en vez de 12×9 = 108. Después de mantenerse sin hablar ni escribir durante cerca de un minuto el entrevistador interrumpe.

X. ¿Qué pasa?

M. Es que está difícil.

X. ¿Podrías pensar en una forma más fácil para saber más o menos cuánto es doce treceavos más diez novenos?

M. No sé.

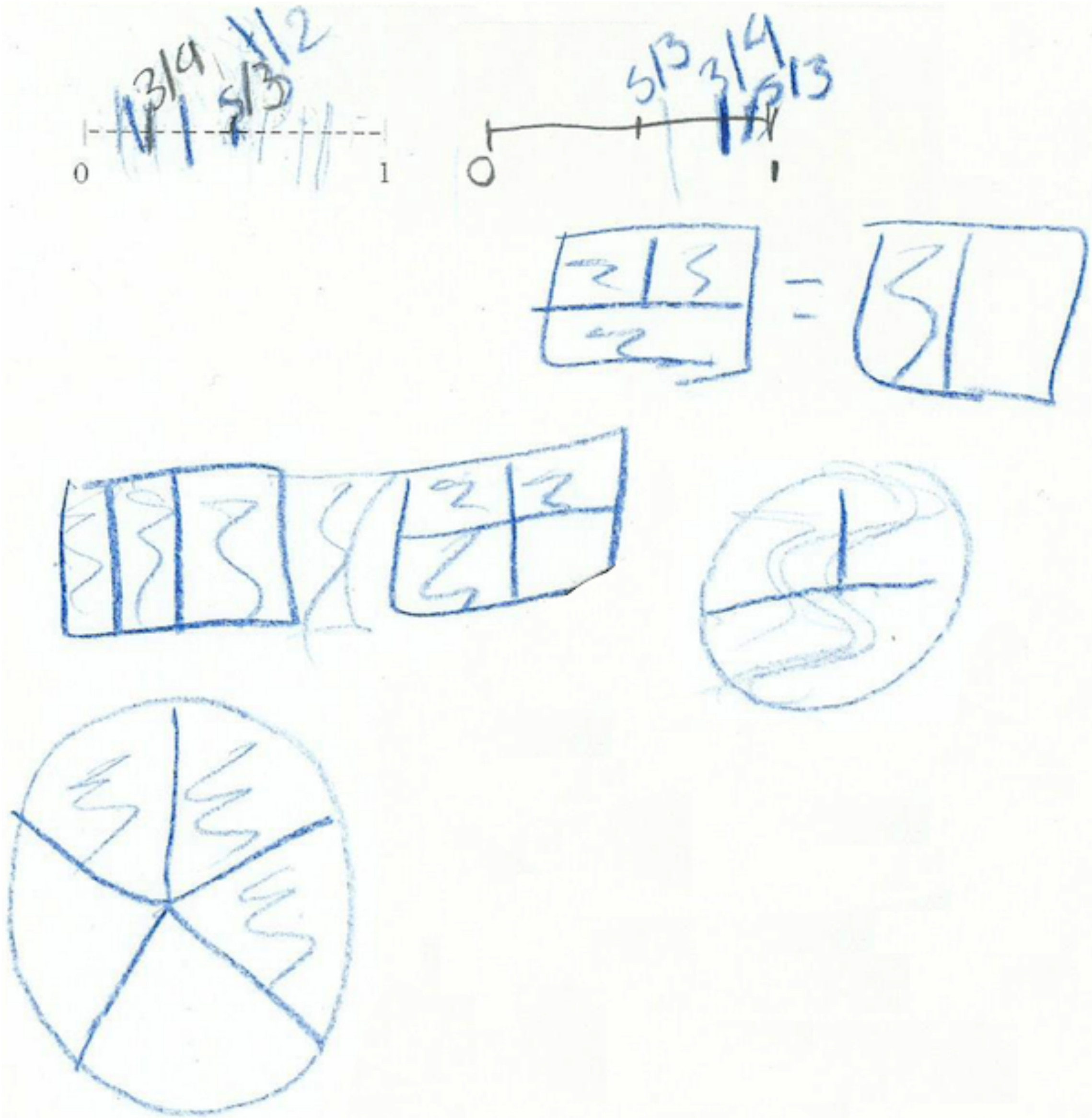
X. Antes representaste las fracciones con unos cuadrados. ¿Crees que se puedan calcular sumas usando los cuadrados?

Malena dibuja dos cuadrados y realiza una fragmentación radial, semejante a la que realizó en el ítem A'.

X. ¿Cuál sería su suma?

M. Creo que sería dos [encierra el número 2].

[Ítem D’] Localiza las fracciones 5/3 y 3/4 en la siguiente recta numérica:



En un principio Malena sólo trabajó sobre la recta dada, y sin escribir todavía la fracción 1/2.

X. ¿Cómo decidiste dónde va cada fracción?

M. Iba a dividirlo en tres, pero entonces tres cuartos quedaba donde puse cinco tercios, entonces lo dividí en más para que quedara antes.

X. ¿Y tres cuartos sí debe ir antes que cinco tercios?

M. Sí.

X. ¿Dónde iría la fracción un medio?

M. Aquí [escribe 1/2 sobre 5/3].

X. ¿En el mismo lugar que cinco tercios?

Malena sólo asiente con la cabeza.

X. Dibújame una nueva recta numérica.

Malena dibuja la recta a la derecha y la parte a la mitad.

X. Ya no hagas más divisiones. Así, sin hacer divisiones, ¿dónde crees que debería ir la fracción tres cuartos?

Malena ubica la fracción 3/4 un poco más a la derecha de su posición correcta.

X. ¿Y dónde debería ir la fracción cinco tercios?

Malena ubica la fracción 5/3 sobre la marca que señala la mitad.

X. ¿De qué manera podrías comprobar que las pusiste en su ubicación correcta?

M. ¿Con dibujos?

X. A ver, ¿cómo serían sus dibujos?

Malena dibuja un círculo, lo equifragmenta sectorialmente en quintos y colorea tres sectores. Algo le hace cambiar de opinión y dibuja círculo dividido en tres partes desiguales, coloreando todas. Luego dibuja los dos rectángulos a la izquierda, uno lo divide en tercios y colorea las tres partes, el otro lo demedia dos veces y colorea tres partes.

X. ¿Cuál es cuál?

M. Éste [señala el que ha demediado dos veces] es tres cuartos. Y éste [señala el que dividió en tercios] es cinco tercios, pero ya no se pueden tomar más [añade otra parte al rectángulo y la colorea].

X. ¿Entonces cinco tercios es igual a un medio?

Malena dibuja dos nuevos rectángulos. Uno lo parte a la mitad e itera la bipartición para producir tres partes desiguales, el otro lo parte a la mitad.

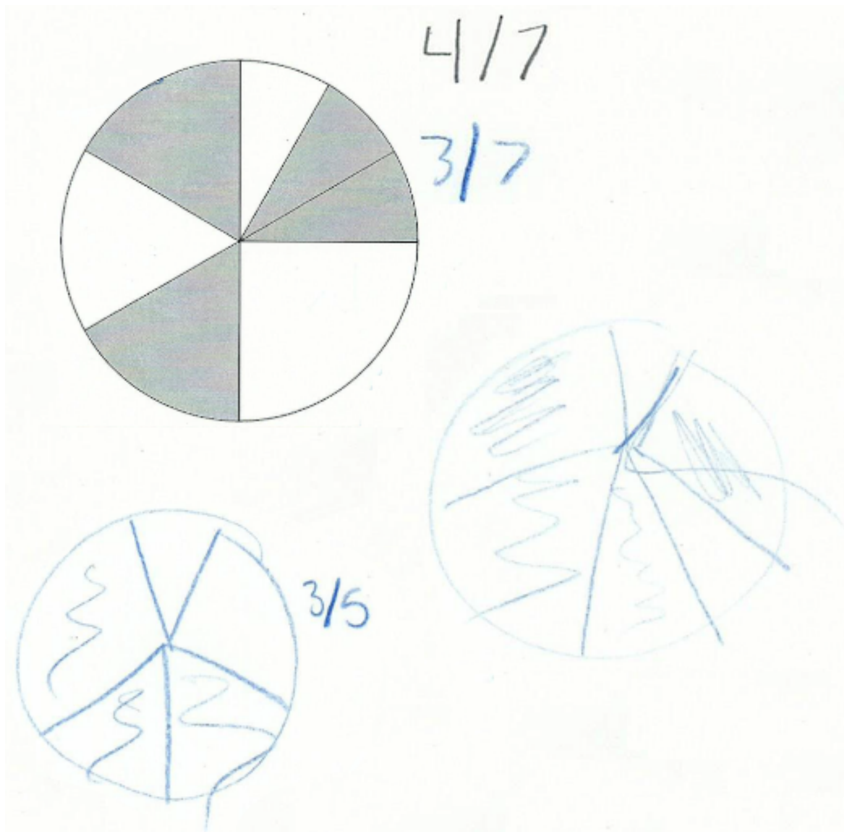
X. ¿Dónde debería ir la fracción cinco tercios sobre la recta?

Malena ubica la fracción 5/3 en algún punto entre 3/4 y 1.

X. ¿Por qué debe estar a la izquierda de uno?

M. Porque no puede pasarse del entero.

[Ítem E'] Describe qué fracción del dibujo está coloreada:



En un principio Malena sólo escribió 4/7.

X. ¿Qué fracción del dibujo no está coloreada?

M. Tres séptimos.

X. ¿Podrías hacer un dibujo en el que todas las partes coloreadas estuvieran juntas?

Malena lo hace en dos pasos. En el primero, combina en un sector los dos más pequeños. En el segundo, junta los tres sectores coloreados resultantes, y los tres sectores no coloreados los combina en dos.

X. ¿Qué fracción está coloreada en tu dibujo?

Malena escribe 3/5.

4.3 Discusión

Al inicio de la entrevista, Malena confunde los roles del numerador y el denominador, interpretando la fracción 5/3 como una pizza dividida en 5 partes de las cuales se comen 3, pero al representar las fracciones en un modelo parte-todo divide los círculos en tantas partes como lo indica el denominador. Al tener en su campo visual simultáneamente la representación simbólica y la representación pictórica corrige su inversión de los roles.

Es claro, por sus respuestas en los items A y E, que no ha desarrollado un esquema de equifragmentación ni una atención a la necesidad de que las partes sean del mismo tamaño. Pero esa no es su única confusión. Una vez que ha dividido en círculo en 3 partes desiguales, mediante una doble bipartición, procede a tomar 5 pedazos independientes de las cinco partes. En otras palabras, la fragmentación que ha hecho del entero según lo indica el denominador es finalmente irrelevante, pues los pedazos que se toman de una nueva fragmentación según el numerador.

Su respuesta en el ítem E confirma esta observación. Malena interpreta las divisiones en la figura como una fragmentación en 9 cuadrados (las partes); y en la figura es posible colorear 7 regiones (los pedazos), incluso 11, sin discriminar entre cuadrados o triángulos.

Ya que las representaciones pictóricas no le proveen información útil en la forma en que están construidas, Malena recurre al falso criterio del mayor denominador para determinar qué fracción es mayor entre dos opciones. Las dudas que pudieran existir en cuanto a si es éste el criterio que aplica Malena en el ítem A se despejan con el ítem B.

En su respuesta en el ítem B, Malena propone la fracción 7/9 como mayor que 7/8 y las fracciones 8/2, 8/3, ..., 8/8 como menores que 8/9.

En el ítem C, Malena menciona que el denominador puede simplemente ignorarse si entre los candidatos a solución de la suma no hay fracciones como opción.

En el ítem D, Malena ignora nuevamente el denominador de 2/3 y ubica esta fracción detrás de la segunda marca, pero luego, sorpresivamente, ubica a 5/4 sobre la mitad de la recta, y declara que en esa misma posición se encuentran las fracciones 1/2, 5/2 y 5/4. Probablemente Malena asocia las limitaciones de su esquema de fragmentación, siempre mediante biparticiones, con los denominadores pares, pues mediante biparticiones nunca puede fragmentarse un entero en un número impar de partes.

Las deficiencias de Malena en el pretest pueden resumirse en: disociación del numerador y el denominador; interpretación del modelo parte-todo como una representación de pedazos y partes que no tiene significado práctico; carencia de un esquema de equifragmentación; aplicación de un falso criterio de denominador mayor.

En el postest Malena parece haber progresado en su esquema de equifragmentación, sin embargo tiene problemas para estandarizarlo. En los items A’ y C’ divide radialmente los cuadrados para representar las fracciones: un procedimiento útil para equifragmentar círculos, pero no cuadrados. En el ítem D’ divide un círculo y un rectángulo en 3 partes cada uno, usando el mismo patrón de bipartición iterada en ambos casos. En ningún caso la bipartición iterada es útil para dividir una figura en un número impar de partes, pero estos intentos sugieren que Malena está en busca de un esquema de equifragmentación general que pueda ser aplicado a todas las figuras.

Malena ha rechazado su interpretación pedazos-partes y comienza a reconocer el significado del modelo parte-todo. Las partes que colorea según lo indica el numerador son siempre partes que su esquema de fragmentación ha producido según lo indica el denominador.

En el ítem C’, ha trasladado una observación hecha en el modo de representación pictórica a una relación válida en el modo de representación simbólica:

si dos fracciones, al ser representadas por modelos parte-todo, aproximadamente suman dos rectángulos coloreados, entonces esas dos fracciones deben sumar aproximadamente dos enteros, incluso si esto es incompatible con su algoritmo de la suma.

También en el ítem D' considera el modelo parte-todo para decidir que la fracción 5/3 debe ubicarse a la derecha de 3/4, pero no se atreve a ubicarla a la derecha de 1, intimidada por el diseño incompleto de las claves perceptuales, tanto de la recta dada como de los rectángulos que ella misma construye.

Su respuesta en B' obedece al falso criterio del denominador mayor, que no ha sido rechazado por Malena. En el ítem A', cuando sus divisiones radiales no le permiten comparar claramente las fracciones 3/4 y 3/5, aplica también este falso criterio.

El hecho de que, en el ítem B', proponga la fracción 7/7 como menor que 7/8, y, en el ítem E', represente la fracción coloreada de una figura con dos fracciones distintas, 3/5 y 4/7, indica que es todavía incapaz de reconocer y producir fracciones equivalentes.

Teniendo en cuenta que *El libro de arena* involucra al jugador con actividades de localización de fracciones sobre rectas numéricas pero no en modelos parte-todo divididos radialmente, y que el falso criterio del numerador mayor sigue siendo aplicado, no es apreciable ningún cambio en las estrategias de Malena que pueda, con razonable certeza, ser atribuido a la influencia de su interacción con el videojuego.

5 Oscar

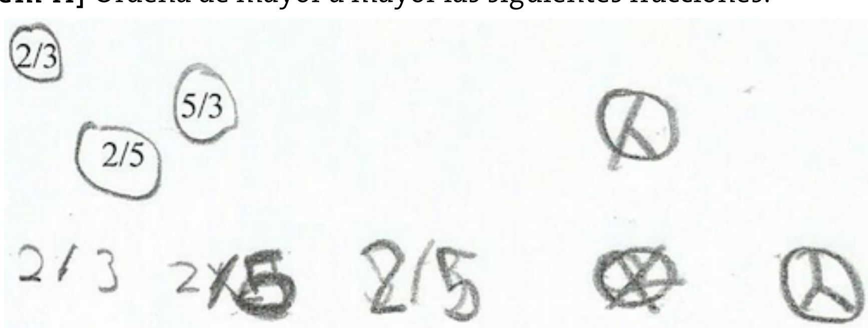
Oscar es un aficionado de los videojuegos. Juega todos los días en diferentes dispositivos. De la lista de 60 títulos reconoció 19 y ha jugado la mayoría de ellos.

Lamentablemente, debido a un problema técnico del videojuego que no pudo resolverse, Oscar jugó únicamente durante tres semanas.

Con una O se indican las palabras y acciones de Oscar.

5.1 Descripción del Pretest

[Ítem A] Ordena de mayor a mayor las siguientes fracciones:

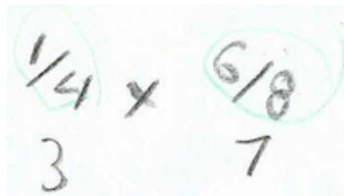


X. ¿Cómo supiste cuál es mayor y cuál es menor?
O. Éstas son dos pizzas que se parten en tres [señala la fracción 2/3], éstas también son dos pizzas pero se parten en cinco [señala la fracción 2/5], y éstas son cinco

pizzas que se parten en tres [señala la fracción 5/3]. Son como tres hermanos que uno es el menor, uno es el mayor y uno es el de en medio.

Su respuesta es $2/3 < 2/5 < 5/3$.

[Ítem B] Encuentra un número entre 7/8 y 8/9:



Oscar dejó en blanco este ítem.

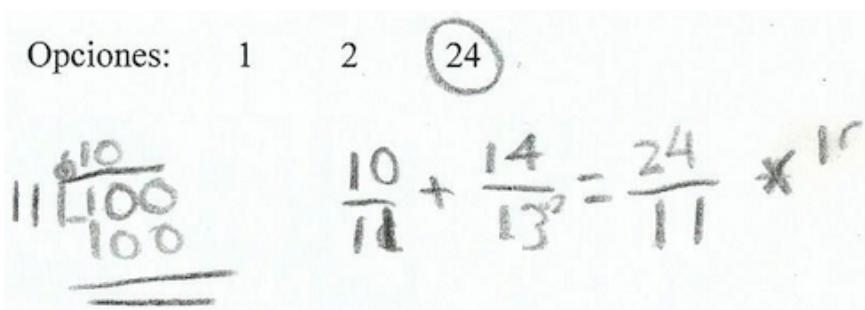
X. ¿Es más difícil éste problema que los otros?

O. Es que pusiste los números pegados. Si hubieras dejado espacio sí se podría, pero los pusiste pegados.

X. Entonces si te pidiera que encontraras un número entre un cuarto y seis octavos, ¿sí se podría?

O. [Escribe 1/4 y 6/8] Aquí sería tres y aquí siete [los escribe debajo de las fracciones].

[Ítem C] Sin hacer cuentas, estima la suma de 10/11 y 14/13:



En un principio Oscar sólo encerró el número 24.

X. ¿Cómo sabes que la suma es veinticuatro?

O. Porque si haces la operación sale veinticuatro.

X. A ver, enséñame cómo haces la operación.

Oscar intenta efectuar la división 10 entre 11, pero olvida el algoritmo. Procede a sumar las fracciones.

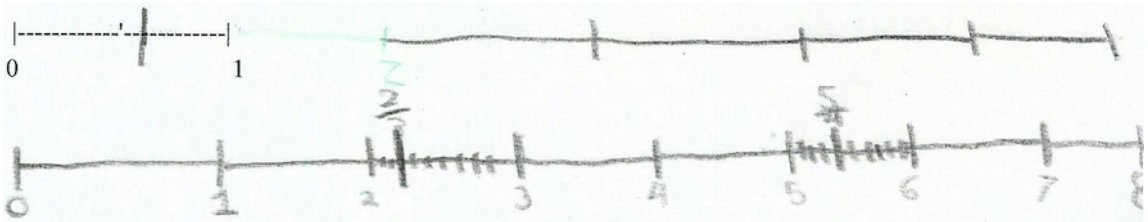
X. ¿Por qué le pusiste un menos dos al trece?

O. Porque siempre deben tener el mismo denominador. Entonces se le quita la cantidad necesaria para que sean iguales.

X. ¿Y por qué no le sumas al once para que las dos fracciones tengan trece?

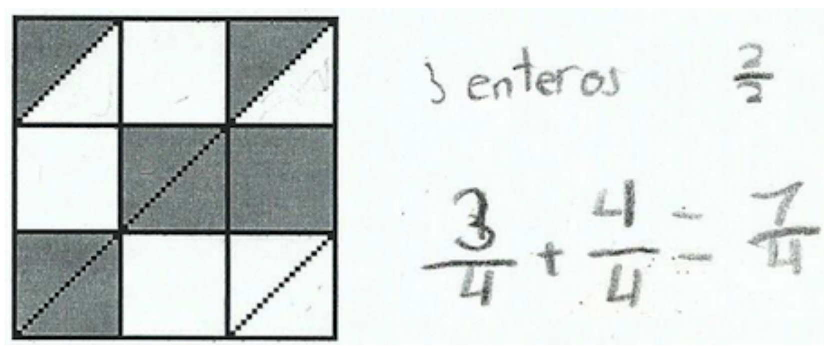
O. Porque siempre se usa el menor.

[Ítem D'] Localiza las fracciones 5/4 y 2/3 en la siguiente recta numérica:



Oscar itera la unidad para extender la recta numérica hasta incluir 10 enteros, pero el espacio en la hoja alcanza apenas hasta el 6. Vuelve a construir una recta numérica y esta vez llega hasta el 8. Divide el tercer entero en 10 partes y, escribiendo la fracción 2/3 en la tercera marca, anuncia "*dos tercios*". Divide el sexto entero en 10 partes y, escribiendo la fracción 5/4 en la cuarta marca, anuncia "*cinco cuartos*".

[Ítem E] Describe qué fracción del dibujo está coloreada:



En un principio sólo escribió su respuesta, 3 enteros 2/2.

O. Éstos son los tres enteros [señala los tres cuadrados coloreados] y éstos son los dos medios [señala los dos triángulos coloreados].

X. ¿Y si te preguntara qué fracción del dibujo no está coloreada?

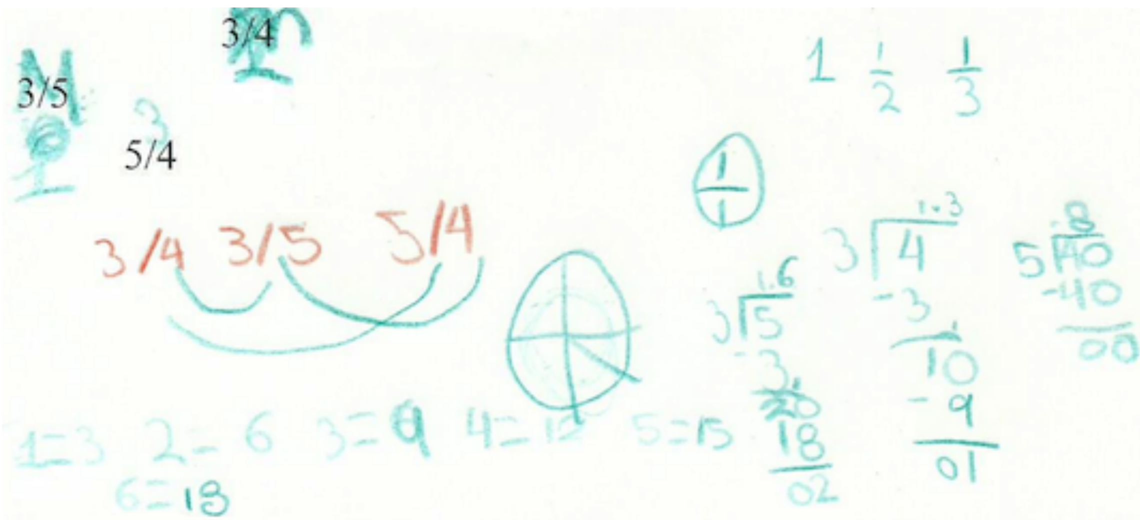
O. Éstos serían tres enteros cuatro cuartos.

X. Y si sumas los tres enteros con los cuatro cuartos, ¿cuánto te daría?

Oscar escribe la suma, asignando a los tres enteros el denominador 4 para poder efectuarla.

5.2 Descripción del Postest

[Ítem A'] Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones:



Inicialmente, Oscar sólo escribió las fracciones en el orden 3/4, 3/5 y 5/4.

X. ¿Cómo supiste cuál es menor y cuál es mayor?

O. Éste [señala la fracción 5/4] es el más grande porque es el único diferente. Y éstos [señala las fracciones 3/4 y 3/5] están seguidos, como uno, un medio, un tercio.

X. De esas fracciones que mencionas, uno, un medio y un tercio, ¿cuál es la menor y cuál es la mayor?

Oscar escribe 1, 1/2 y 1/3. Aclara que 1 es como un entero, escribe la fracción 1/1 y la encierra.

O. Uno es el más grande. Un medio le sigue, y un tercio es más pequeño.

X. Entonces ¿cuál es mayor, tres cuartos o tres quintos?

Oscar dibuja un círculo y lo divide desigualmente en cinco partes.

O. Es que hay que hacer la división. Porque así es como le hacía en el juego.

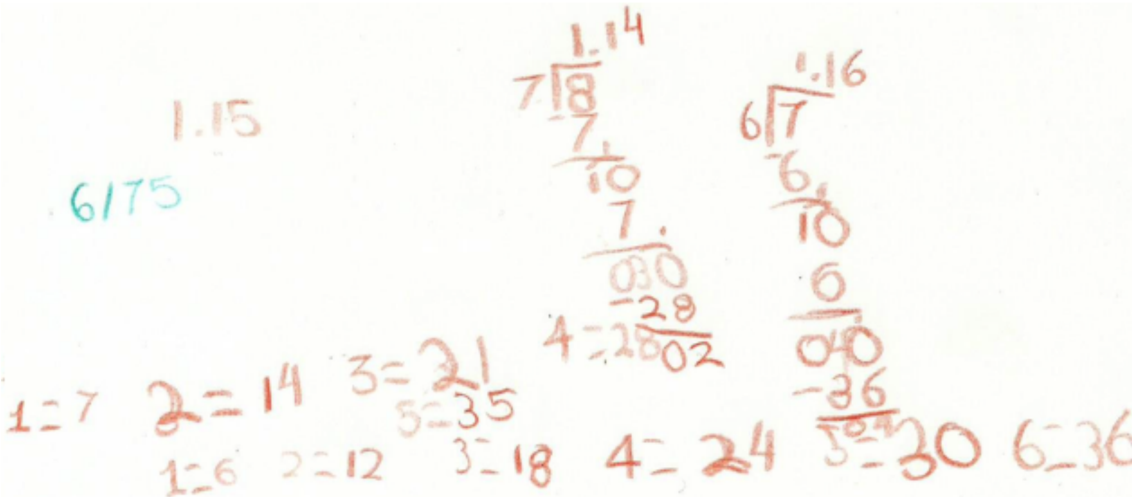
Oscar efectúa las divisiones para calcular los cocientes, pero divide denominadores entre numeradores. Escribe parcialmente la tabla de multiplicación del 3 para apoyarse en la división 5 entre 3. Mediante líneas indica que las fracciones, en el orden que las había escrito, deberían rotar sus posiciones, 5/4 hasta la izquierda, 3/4 a la posición de enmedio y 3/5 hasta la derecha.

X. ¿Entonces cuál es la fracción mayor y cuál es la menor?

O. Le voy a poner una eme mayúscula a la mayor [escribe M y el número 1 sobre la fracción 3/5] y una eme minúscula a la menor [escribe m y el número 2 sobre la fracción 3/4].

Por último escribe un 3 sobre la fracción 5/4, indicando que es la menor de las tres fracciones.

[Ítem B'] Encuentra un número entre 6/7 y 7/8:

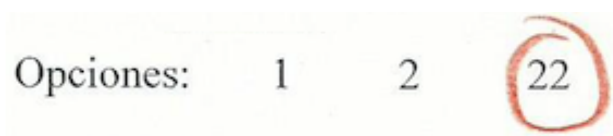


Oscar divide denominadores entre numeradores intentando calcular los cocientes de las fracciones, obteniendo 1.14 y 1.16, y escribe 1.15 como respuesta.

X. ¿De qué otra manera podrías encontrar un número entre seis séptimos y siete octavos?

O. Hay otra manera. Si, por ejemplo, pones un cero al siete [es decir, cambiando la fracción 6/7 por 6/70] y al ocho [cambiando la fracción 7/8 por 7/80], para que estén más separados, entonces, por ejemplo, sería éste [escribe la fracción 6/75].

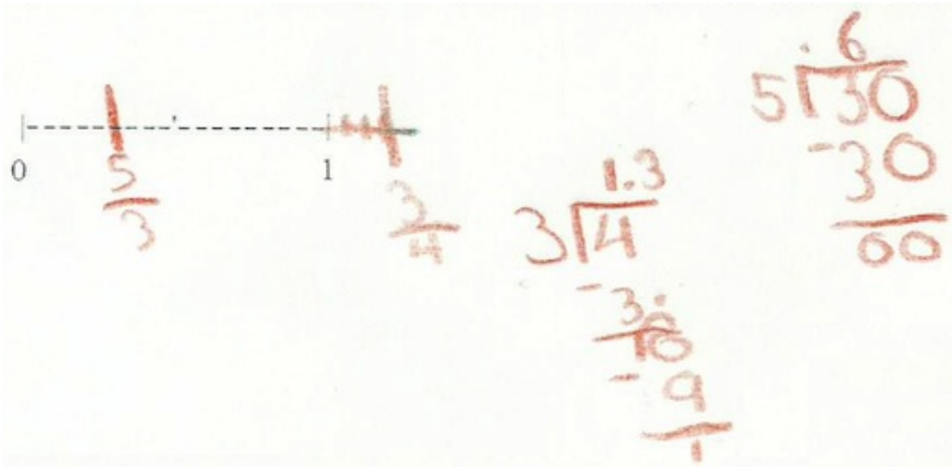
[Ítem C'] Sin hacer cuentas, estima la suma de 12/13 y 10/9:



X. ¿Cómo sabes que la suma es veintidós?

O. Porque, como tienen denominador diferente, se le tiene que cambiar para que sean iguales, y entonces ya se puede sumar. Doce y diez, veintidós.

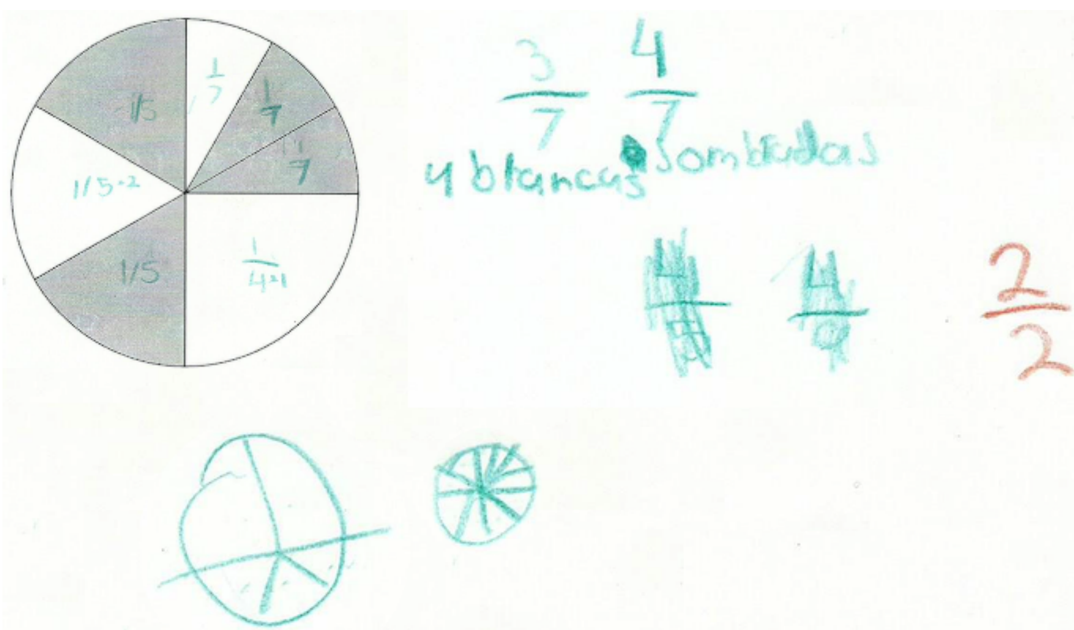
[Ítem D'] Localiza las fracciones 5/4 y 2/3 en la siguiente recta numérica:



X. ¿Cuál es mayor, cinco tercios o tres cuartos?

O. Tres cuartos. Bueno, es que a veces sale de menor a mayor y a veces al revés, porque así le hacía en el juego.

[Ítem E'] Describe qué fracción del dibujo está coloreada:



Oscar dibuja dos círculos, uno de ellos lo divide en 5 sectores y el otro en 10 sectores, todos desiguales. Escribe 4/5 y 4/9, que luego cancela. También escribe 2/2. Etiqueta con fracciones los distintos sectores del círculo dado. En el cuadrante en blanco escribe la fracción 1/4. En cada uno de los tres sectores del semicírculo izquierdo escribe la fracción 1/5. En cada uno de los sectores restantes escribe la fracción 1/7. Como respuesta escribe 4/7 "*sombradas*".

X. ¿Qué fracción del dibujo no está coloreada?

Oscar escribe +1 al denominador de la fracción 1/4 en el cuadrante en blanco, y +2 al denominador de la fracción 1/5 en uno de los tres sectores del semicírculo izquierdo. Finalmente escribe "*y blancas*" 3/7.

5.3 Discusión

Para trasladarse desde el modo de representación simbólico a/b a un modo de representación pictórico, Oscar no interpreta la fracción a/b como un entero que es dividido en b partes de las cuales se toman a partes; Oscar la interpreta como a enteros que, con el fin de ser repartidos entre b sujetos, son fragmentados en un total de $a \times b$ piezas. Es posible que esta asociación que hace de las fracciones con problemas de repartición lo conduzca a una interpretación del tamaño de la fracción como la cantidad total de piezas que se generan en el proceso de la repartición, y no como la cantidad de piezas que corresponde a uno de los sujetos entre quienes la repartición se lleva a cabo. En otras palabras, Oscar estaría aplicando un falso criterio de número total de piezas repartidas, lo que explicaría su respuesta en el ítem A.

Al intentar coordinar los dos modos de representación, el pictórico y la grafía a/b, cuando no tiene que construir la representación sino que es dada, interpreta la fracción a/b de manera diferente.

En los ítems D y E, el numerador es tomado como el número de enteros y el denominador es tomado como el número de fracciones unitarias que se suman al número de enteros. Es por ello que ubica la fracción 2/3 en la posición 2 enteros – 3 décimos sobre la recta numérica en el ítem D, siendo 1/10 la fracción unitaria que él ha elegido. La fracción 5/4 es acordemente ubicada en la posición 5 enteros – 4 décimos. En el ítem E, Oscar describe la fracción coloreada de la figura como 3 (cuadrados) enteros y 2 medios, es decir 2 triángulos, la fracción unitaria que ha elegido representar. Al preguntarle por la región no coloreada, la describe como 3 (cuadrados) enteros y 4 medios, contando como enteros únicamente los cuadrados que no están partidos en esta ocasión.

Para Oscar la suma no tiene un significado práctico, y ciertamente no está vinculada con su noción de tamaño. En el ítem E, no advirtiendo que la cantidad 3 enteros puede expresarse mediante la fracción 3/1, simplemente escribe un 4 como denominador, debajo del número 3, con el fin de poder llevar a cabo un algoritmo mecánico.

En el ítem C, al encontrar denominadores diferentes en las fracciones, modifica uno de los denominadores con el fin de aplicar el algoritmo para fracciones con denominador común. Aunque su respuesta habría sido la misma, $10/11 + 14/13 = 24$, independientemente de qué denominador fuera cambiado, el hecho de que Oscar iguale el denominador mayor al denominador menor porque, en sus palabras, "*siempre se usa el menor*", sugiere un intento por reconstruir el algoritmo de producción de fracciones equivalentes por medio del mínimo común múltiplo.

En el ítem B, Oscar muestra la misma confusión que Esteban. La instrucción "encuentra un número entre X y Y" no tiene sentido cuando X y Y son dos fracciones, y la expresión "7/8 y 8/9" es leída como "7 y 8, 8 y 9".

Las deficiencias de Oscar en el pretest pueden resumirse en: interpretaciones incompatibles de la grafía a/b cuando se traslada de ida y de vuelta entre modos de representación distintos; aplicación del falso criterio de número total de piezas repartidas; confusión sobre lo que significa encontrar un número entre dos fracciones; interpretación de la grafía a/b como a enteros más b fracciones unitarias de tamaño arbitrario.

El cambio más notable en el postest es el uso del cálculo de cocientes como parte esencial de sus estrategias. Desafortunadamente, Oscar no efectúa el algoritmo de la división correctamente y, a lo largo de todo el test, divide denominador entre numerador. Consecuentemente, las respuestas en los items A', B' y D' son incorrectas.

Existen evidencias suficientes para suponer que lo que Oscar confunde es el algoritmo de la división y no la lectura de a/b.

En el ítem A', antes de efectuar la división, Oscar había ordenado las fracciones $3/4 < 3/5 < 5/4$. Cuando Oscar declara que la fracción $5/4$ es "*más grande porque es el único diferente*", probablemente hace referencia al criterio transitivo indirecto, tomando a 1 como referencia. En el ítem E', etiqueta los sectores con fracciones unitarias usando la notación correcta $1/b$.

Oscar está cerca de desarrollar el criterio de denominadores comunes. En el ítem A', al observar que las fracciones unitarias decrecen en tamaño cuando sus denominadores crecen, duda de su juicio inicial $3/4 < 3/5$ y decide comparar sus cocientes. Lamentablemente efectúa mal la división y termina por "confirmar" que $3/4 < 3/5$.

Además ha abandonado su anterior interpretación de la grafía a/b como a enteros más b fracciones unitarias. En el ítem D' usa los cocientes de las fracciones para ubicarlas sobre la recta numérica, tomando la parte entera del cociente, no el numerador, como el número de enteros, y la parte decimal del cociente, no el denominador, como el número de fracciones unitarias que se suman al número de enteros. El error radica de nuevo en el algoritmo de la división, y en suponer por defecto que las marcas representan décimos.

El postest también ha permitido detectar la falta de un esquema de equifragmentación, algo que no fue evidente en el pretest. En el ítem A' Oscar dibuja un círculo dividido en 5 partes desiguales, aunque no lo menciona en su explicación. En el ítem E' tiene problemas para elegir fracciones unitarias apropiadas. Los sectores más pequeños los etiqueta como $1/7$, siendo 7 el número total de sectores de tamaño desigual; el cuadrante en blanco lo etiqueta como $1/4$, siendo 4 el número de cuadrantes que tiene el círculo; los tres sectores en el semicírculo izquierdo los etiqueta como $1/5$ al no ser capaz de reconocer cuántas veces es necesario reproducir uno solo de ellos para cubrir el círculo completo.

A pesar de que Oscar muestra aún serias deficiencias en su noción de tamaño, debe considerarse que los cambios detectados ocurrieron después de tres semanas de juego, al que Oscar mencionó explícitamente mientras explicaba sus estrategias.

De haber prolongado su interacción con *El libro de arena* es posible que se percatara del error en su algoritmo de la división, o al menos de que un error debe existir. Durante la entrevista comentó repetidamente que efectuar la división era una estrategia que solía ejecutar para progresar en el juego, aunque "*a veces sale de menor a mayor y a veces al revés*". Puesto que en *El libro de arena* las fracciones siempre deben ordenarse de menor a mayor, y nunca de mayor a menor, Oscar debía ordenarlas siempre en el orden inverso al que le reportaban sus cálculos.

VI

CONCLUSIONES E INVESTIGACIÓN FUTURA

La distinción entre criterios, falsos criterios y estrategias de comparación de fracciones ha permitido detectar ciertas deficiencias en la noción de tamaño debidas a la incorrecta interpretación que los estudiantes dan a las fracciones. La TABLA VI.1 resume los falsos criterios detectados entre los cinco participantes del estudio.

La relación de orden $\boldsymbol{a_1/b_1} \leq \boldsymbol{a_2/b_2}$ se cumple si		
FALSO CRITERIO	PREMISA / OBSERVACIÓN 1	PREMISA / OBSERVACIÓN 2
Mayor denominador	$a_1 = a_2$	$b_1 \leq b_2$
Piezas repartidas	$a_1 \times b_1 = r_1$ y $a_2 \times b_2 = r_2$	$r_1 \leq r_2$
Sobrantes	$1 - (a_1)/b_1 = r_1$ y $1 - (a_2)/b_2 = r_2$	$r_1 \leq r_2$
División $b \div a$	$b_1 \div a_1 = r_1$ y $b_2 \div a_2 = r_2$	$r_1 \leq r_2$
Cercanía $b - a$	$b_1 - a_1 = r_1$ y $b_2 - a_2 = r_2$	$r_1 \geq r_2$
$a/b = (a)/1 + (b)/10$	$(a_1)/1 + (b_1)/10 = (r_1)$ y $(a_2)/1 + (b_2)/10 = (r_2)$	$(r_1) \leq (r_2)$

TABLA VI.1 – Falsos criterios de comparación de fracciones detectados en el estudio

Caracterizar de esta manera los falsos criterios que los estudiantes aplican en sus estrategias de comparación de fracciones puede ser de gran provecho para diseñar actividades de aprendizaje en las que concepciones e interpretaciones erróneas específicas puedan ser atacadas.

Por otro lado, la atención a una casuística de configuraciones numéricas que considere la existencia de relaciones interduplares (RinE) e intraduplares (RinA) de múltiplos enteros en el diseño de problemas de comparación de fracciones podría ser importante en una secuencia didáctica cuyo objetivo sea fomentar el desarrollo de los 7 criterios de comparación de fracciones descritos en la SECCIÓN II.3.

Estas dos hipótesis sobre los beneficios de una caracterización de criterios de comparación de fracciones y una casuística de relaciones interduplares e intraduplares deberán ser probadas en futuros estudios.

En cuanto al diseño de videojuegos educativos, el poco éxito con que han sido adaptados a contenidos matemáticos puede ser explicado por la atención superficial a la teoría de la motivación intrínseca que los desarrolladores de videojuegos comerciales sí han aprovechado.

El libro de arena ha sido un intento por ofrecer una experiencia en la que los cuatro propósitos de la lúdica (diversión, fantasía, poder y progreso) son tratados con la misma importancia, y en la que se recurre a todas las fuentes de motivación intrínseca (control, curiosidad, fantasía y reto) para promover la interacción voluntaria del jugador con situaciones que pueden ser resueltas mediante la aplicación de conceptos matemáticos relacionados con el tamaño de los números racionales.

Los diversos grados de interés y experiencia que los participantes poseen por los videojuegos, así como sus antecedentes académicos, se vieron reflejados en el éxito con que *El libro de arena* influyó sobre la noción de tamaño de los números racionales que cada participante mostró en el postest en comparación con lo mostrado en el pretest. Esto indica, independientemente de que la experimentación permita conocer los efectos directos del juego, que los videojuegos pueden ser usados como una herramienta válida y viable de aprendizaje que merece ser estudiado seriamente.

Es posible que en el salón de clases se revisaran temas relacionados con las fracciones en el mismo período de tiempo en que los estudiantes interactuaron con *El libro de arena.* De ser así, y debido a la naturaleza de la metodología, en la que se tiene poco control sobre el tiempo que los estudiantes dedican al juego y a actividades específicas dentro del juego, sería difícil distinguir con precisión el progreso debido al juego y el momento y las circunstancias en que tal progreso surge como resultado de la experiencia con el juego. Sin embargo, el hecho de que los cambios reportados se produjeron en cinco semanas, en contraste con el tiempo que en la educación básica se dedica al estudio de las fracciones (desde el tercer grado), sugiere que la fantasía de *El libro de arena* ha provisto de un contexto en el cual ciertas propiedades e interpretaciones de las fracciones tienen sentido. Esta afirmación es apoyada por la diferencia radical en la lectura que hacen Esteban y Oscar de los items B y B'.

Una deficiencia común a Malena y Jaime fue la ausencia de esquemas de equifragmentación debidas a una interpretación débil de los problemas de repartición. En ambos casos, el problema no se limita a una dificultad mecánica en la equipartición o equisegmentación, sino que radica en el concepto no desarrollado de repartición justa. Pero al diseñar las actividades en *El libro de arena* se ha presupuesto que el jugador entiende la importancia de que cada parte en que se divide un todo tenga el mismo tamaño que cualquier otra de ellas. En concreto, las actividades de localización de fracciones no requieren del jugador que efectúe la equifragmentación; los rectángulos se muestran ya divididos en partes iguales y la rapidez con que el jugador debe actuar no le permite corroborar que cada parte es efectivamente igual a cada una de las otras.

IV.1 Investigación futura

En cuanto a la caracterización de las estrategias de comparación de fracciones, se propone crear un catálogo de falsos criterios que ayude a identificar los errores conceptuales más comunes relacionados con la noción de tamaño y orden entre estudiantes de educación básica en México, esto con el fin enriquecer y consolidar la casuística de configuraciones numéricas en pares de fracciones, como se muestra en la TABLA II.1.

En cuanto al desarrollo de videojuegos educativos, mejorar los mecanismos de retroalimentación en la mecánica de juego podría acelerar el reconocimiento de la relación que los objetos en el entorno virtual guardan con los conceptos de tamaño y orden que se pretende fortalecer. Por ejemplo, en una discusión con los directores de esta tesis se ha notado que un jugador podría probar soluciones arbitrarias en el acomodo de las piedras etiquetadas con fracciones y avanzar en el juego sin entender en qué se diferencian las respuestas correctas de las incorrectas.

Se ha notado también que, aunque el análisis de los tests ha permitido detectar un desarrollo en la noción de tamaño y en la producción de estrategias de comparación de fracciones de los estudiantes que interactuaron con *El libro de arena*, no es sencillo distinguir qué aspectos de estos avances deben ser atribuidos a la interacción con el juego y qué aspectos deben ser atribuidos a factores externos al juego. En una experiencia futura, varias entrevistas deberían conducirse a lo largo del estudio en las que se observe y cuestione al estudiante sobre la información relevante en escenarios específicos del juego, las estrategias que él piensa que pueden ayudarle resolver el problema en estos escenarios, y su preferencia por cierta estrategia en particular. Los escenarios han de elegirse de manera que se confronte al estudiante con el fracaso de algún falso criterio identificado en sus respuestas a un pretest.

Es la opinión del autor de esta tesis que un nuevo estudio con estas características mostraría de manera más convincente el potencial benéfico de los videojuegos educativos si en su diseño se pone tanta atención a la naturaleza lúdica como al contenido educativo, siguiendo el ejemplo de los desarrolladores que, desde los años 70, han formado a generaciones de jóvenes en actividades socialmente consideradas inútiles.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Antinucci, F. (2000). *Qué hace la computadora con nuestros hijos*. (Trad. J. Arrambide). Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica. (Computer per un figlio: Giocare, apprendere, creare, 1999, Roma: Giuseppe Latterza & Figli).

Attewell, P., Suazo-Garcia, B., y Battle, J. (2003). Computers and young children: Social benefit or social problem? *Social Forces, 82* (1), 277-296.

Bandura, A. (1999). Social cognitive theory: An agentic perspective. *Asian Journal of Social Psychology, 2*, 21-41.

Barto, A. (2013). Intrinsic motivation and reinforcement learning. En G. Baldassarre y M. Mirolli (Eds.), *Intrinsically motivated learning in natural and artificial systems* (pp. 17-47). Berlín: Springer.

Behr, M., Harel, G., Post, T., y Lesh, R. (1993). Rational numbers: Toward a semantic analysis - Emphasis on the operator construct. En T. Carpenter, E. Fennema y T. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (págs. 13-47). Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., y Silver E. (1983). Rational number concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*, (págs. 91-125). Nueva York: Academic Press.

Behr, M., y Post, T. (1992). Teaching rational number and decimal concepts. En T. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods (2nd Edition)* (págs. 201-248). Boston: Allyn and Bacon.

Behr, M., Wachsmuth, I., y Post, T. (1984). Tasks to assess children's perception of the size of a fraction. En A. Bell, B. Low y J. Kilpatrick (Eds.), *Theory, research and practice in mathematical education* (págs. 179-185). Fifth International Congress on Mathematical Education, Australia Meridional: Shell Centre for Mathematics Education.

Behr, M., Wachsmuth, I., Post T., y Lesh R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 15* (5), 323-341.

Bezuk, N., y Cramer, K. (1989). Teaching about fractions: What, when, and how? En P. Trafton (Ed.), *National Council of Teachers of Mathematics 1989 Yearbook: New directions for elementary school mathematics* (págs. 156-167). Virginia: NCTM.

Borges, J. (1975). *El libro de arena* (pp. 155-165). Buenos Aires: Emecé.

Cain, M., Landau, A., y Shimamura, A. (2012). Action video game experience reduces the cost of switching tasks. *Attention, Perception & Psychophysics, 74*, 641-647.

Clark, K., Fleck M., y Mitroff, S. (2011). Enhanced change detection performance reveals improved strategy use in avid action video game players. *Acta Psychologica, 136*, 67-72.

Cramer, K., Behr, M., Post T., y Lesh, R. (2009). *Rational Number Project: Initial fraction ideas*. Recuperado de http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject.

Cramer, K., y Henry, A. (2002). Using manipulative models to build number sense for addition of fractions. En B. Litwiller y G. Bright (Eds.), *National Council of Teachers of Mathematics 2002 Yearbook: Making sense of fractions, ratios, and proportions* (págs. 41-48). Virginia: NCTM.

Cramer, K., Post, T., y del Mas, R. (2002). Initial fraction learning by fourth- and fifth-grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the Rational Number Project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 33* (2), 111-144.

Cramer, K., Wyberg, T., y Leavitt, S. (2009). *Fraction operations and initial decimal Ideas*. Recuperado de http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject.

Csikszentmihalyi, M. (1990). *Flow: The psychology of optimal experience* (pp. 71-93). Nueva York: Harper & Row.

Deci, E. (1971). Effects of externally mediated rewards on intrinsic motivation. *Journal of Personality and Social Psychology, 18*, 105-115.

Donohue, S., Woldorff, M., y Mitroff, S. (2010). Video game players show more precise multisensory temporal processing abilities. *Attention, Perception & Psychophysics, 72* (4), 1120-1129.

Durkin, K., y Barber, B. (2002). Not so doomed: Computer game play and positive adolescent development. *Journal of Applied Developmental Psychology, 23* (4), 373-392.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures* (págs. 1-27, 133-209). Nueva York: Kluwer Academic.

Green, C., y Bavelier, D. (Mayo, 2003). Action video game modifies visual selective attention. *Nature, 423*, 534-537.

Harlow, H. (1949). The formation of learning sets. *Psychological Review, 56*, 51-65.

Karplus, R., Pulos, S., y Stage, E. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*. Nueva York: Academic Press.

Kieren, T. (1980). The rational number construct – Its elements and mechanisms. En T. Kieren (Ed.), *Recent research on number learning* (págs. 125-150). Ohio: ERIC/SMEAC.

Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers – Its intuitive and formal development. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (págs. 162-181). Virginia: NCTM.

Kieren, T. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. En T. Carpenter, E. Fennema y T. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (págs. 49-84). Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lepper, M., Greene, D., y Nisbett, R. (1973). Undermining children's intrinsic interest with extrinsic reward: A test of the "overjustification" hypothesis. *Journal of Personality and Social Psychology, 28* (1), 129-137.

Malone, T. (1981). Toward a theory of intrinsically motivating instruction. *Cognitive Science, 5* (4), 333-369.

Moore, O., y Anderson, A. (1969). Some principles for the design of clarifying educational environments. En D. Goslin (Ed.), *Handbook of Socialization Theory and Research* (pp. 571-613). Nueva York: Rand McNally.

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part I – The differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics, 11*, 217-253.

Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part II – Problem-structure at successive stages; problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics, 11*, 331-363.

Ohlsson, S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (págs. 53-92). Virginia: NCTM.

Pellegrini, A. (Ed.). (1995). *The future of play theory: A multidisciplinary inquiry into the contributions of Brian Sutton-Smith*. Nueva York: State University of New York Press.

Piaget, J., y Szeminska, A. (1964/1982). *Génesis del número en el niño* (Trad. S. Vasallo) (págs. 83-187). Buenos Aires: Guadalupe. (La gènese du nombre chez l'enfant, Neuchatel: Delachaux et Niestlé).

Post T., Wachsmuth I., Lesh R., y Behr M. (1985). Order and equivalence of rational number: A cognitive analysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 16* (1), 18-36.

Resnick, M. (2004). Edutainment? No Thanks. I Prefer Playful Learning. *Civita Report on Edutainment*. Recuperado de http://www.roboludens.net/Edut_Articoli.htm.

Rieber, L. (1996). Seriously considering play: Designing interactive learning environments based on the blending of microworlds, simulations, and games. *Educational Technology Research & Development, 44* (2), 43-58.

Schwartz, J. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (págs. 41-52). Virginia: NCTM.

Steffe, L., y Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledge*. Nueva York: Springer.

Steffe, L. (1988). Children's construction of number sequences and multiplying schemes. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (págs. 119-140). Virginia: NCTM.

Squire, K. (2003). Video games in education. *International Journal of Intelligent Games & Simulation, 2* (1), 49-62.

Sungur, H., y Boduroglu, A. (2012). Action video game players form more detailed representation of objects. *Acta Psychologica, 139*, 327-334.

Thomas, D., Orland, K., y Steinberg, S. (2007). *The videogame style guide and reference manual*. Recuperado de http://www.gamestyleguide.com

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (págs. 127-174). Nueva York: Academic Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (págs. 141-161). Virginia: NCTM.

Wu, S., y Spence, I. (2013). Playing shooter and driving videogames improves top-down guidance in visual search. *Attention, Perception & Psychophysics, 75*, 673-686.