CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

Falsas interpretaciones en la solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales

Tesis que presenta

José del Carmen Orozco Santiago

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

En la especialidad de

Matemática Educativa

Directores de tesis

Dr. Carlos Armando Cuevas Vallejo

Dr. Humberto Madrid de la Vega

México, D.F. Diciembre del 2014

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico proporcionado para la realización de mis estudios de maestría que culminan con el presente trabajo de tesis de grado.

Becario 324176

AGRADECIMIENTOS

A ti mi Dios, por no abandonarme, por demostrarme que soy uno de tus hijos preferidos… Gracias por ayudarme a levantarme en mis fracasos, por aprender de ellos y principalmente por permitirme realizar uno más de mis sueños.

Unas hojas no bastan ni son suficientes para agradecerles a mis familiares, amigos y muchas otras personas más, por su apoyo e impulso para el desarrollo de este trabajo. Muchas son las personas que han contribuido para el mismo, directa o indirectamente.

Agradezco al **Departamento de Matemática Educativa**, que sin más me abrió las puertas de su honorable centro para permitirme seguir con mis estudios. Gracias por la confianza y el apoyo.

Agradezco a mis sinodales: **Dra. Sonia Ursini Legovich y el Dr. François Charles Bertrand Pluvinage**, quienes con su tiempo, conocimiento y talento han enriquecido en el desarrollo de esta tesis.

A mis profesores: la Dra. Olimpia Figueras, Dra. Silvia Mayén, Dr. Manuel Santos, Dr. Gonzalo Zubieta, Dr. Hugo Mejía, Dr. Luis Moreno y el Dr. Jesús Riestra; por compartirme sus conocimientos y experiencias, las cuales han contribuido en mi formación académica como investigador.

A mis amigos y compañeros: Alfredo, Arturo, Freddy, Gabriel, Jose Manuel, Oscar, Yani.

A mis amigos de Biaani: Juan Carlos de la Cruz, Enrique Rivelino y Julio Cesar Vivas.

A mis buenos amigos: **Miguel Ángel Martínez, Juan Carlos Lagunas., Carlos Arturo Villalobos, Daniel Tatian, Inti Villalobos, Ayax Resendiz y Jose Luis Morales.**

A la señora **Sara Rivas**, por abrirme las puertas de su casa, por ser una mujer adorable. Por brindarme su sabiduría, amabilidad y dulzura. Por estar siempre dispuesta a ofrecer consejos.

A mi amada compañera **Samantha Sugei** quien lloró y rió junto a mí. Gracias por impulsarme y motivarme a realizar mis estudios, le doy gracias a Dios por haberte puesto en ese momento en mi camino.

A toda mi familia, por sus palabras de aliento y sus buenos deseos, especialmente a mis tíos (Ricardo, Valentín, Jacinto †) y tías (Elia †, Roselia, Teófila, Teresa, Minerva, Sobeida †).

A Adriana Parra, Gabriela Rodríguez y Nancy Mena que con sus amabilidades y siempre buena disposición, facilitan los procedimientos extra académicos.

A mi amigo y asesor **Dr. Humberto Madrid de la Vega** por la oportunidad de trabajar con él, por su entrega, por ofrecerme su amistad, por compartir su experiencia y conocimiento.

Asimismo deseo agradecer al **Dr. Carlos Armando Cuevas Vallejo**, mi director de tesis por toda la paciencia, valioso tiempo y conocimientos, que me fueron de gran ayuda, tanto personal, como profesionalmente.

¡Muchas gracias!

DEDICATORIA

A mi padre **Mariano Orozco Terán** (†). De quien tengo presente sus enseñanzas, don de gente, las cuales han definido y fortalecido mi carácter.

A mi madre **María Reyes Santiago Guerra**, por tu gran amor, apoyo ilimitado e incondicional que siempre me has dado, por tener siempre la fortaleza de salir adelante sin importar los obstáculos, por haberme formado como un hombre de bien, y por ser la mujer que me dio la vida y me enseño a vivirla… no hay palabras en este mundo para agradecerte, mamá. Es por ello que hoy te dedico este trabajo.

A mis hermanas Sonia y Brigida, gracias por preocuparse por su manito.

A mis sobrinas Azeneth y Mariana Sicarú, por contagiarme sus alegrías.

A mis abuelos (Flavia y Andrés) porque han sido y serán siempre un ejemplo incuestionable de fortaleza, integridad, sabiduría y responsabilidad, gracias por los consejos que han sido de gran ayuda para mi vida y crecimiento.

Na Flavia, mi examen profesional te lo dedico con todo mi corazón.

Contenido

Resumen

Este trabajo de investigación se elabora en base a un problema detectado en los cursos de Álgebra Lineal y corresponde a que un gran porcentaje de estudiantes presentan problemas al resolver un sistema de ecuaciones lineales (SEL). El problema observado se divide en tres partes:

- Problema en el significado de ecuación
- Problemas en el significado de solución de una ecuación y
- Problemas en el proceso de resolución de una ecuación.

Hemos comprobado que en una generalidad estos tres problemas se presentan al resolver un SEL lo que representa un grave obstáculo en un curso tradicional de álgebra lineal a nivel superior.

En consecuencia en este trabajo se proponen actividades en la idea de promover en los estudiantes una alternativa de solución que permita solventar este problema de mala representación en los mismos.

Para analizar esta problemática, establecemos la hipótesis que este problema se origina desde la enseñanza elemental, por esta razón el análisis parte desde la enseñanza básica y se hará un recorrido desde este punto hasta un primer curso de álgebra lineal, en el nivel superior.

Los conceptos formales del Álgebra Lineal, como combinación lineal, independencia y dependencia lineal, pueden surgir a partir de problemas de significado o teoría de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Esto acarrea graves problemas en el Álgebra Lineal porque si no saben resolver un sistema lineal de ecuaciones, impiden el avance hacia lo que sigue después de esta primera introducción, es ya ver la solución como parte de un Subespacio Vectorial, todas estas cosas van a quedar entre tinieblas mientras la gente no pueda ver o interpretar que es la solución de un sistema lineal de ecuaciones.

Para realizar las actividades nos apoyaremos en SELyTEC un software desarrollado con este propósito.

Abstract

This research was made based on a problem encountered in Linear Algebra courses and corresponds to a large percentage of students present problems to solve a system of linear equations (SEL). The observed problem is divided into three parts:

- Problem in the meaning of equation
- Problems in the meaning of solution of an equation and
- Problems in the process of solving an equation.

We have found that in general these three problems when solving a SEL, which is a serious obstacle in a traditional linear algebra course at a higher level.

Therefore in this work activities are proposed on the idea of promoting students an alternative solution so as to solve this problem of misrepresentation in them.

To analyze this issue, we establish the hypothesis that this problem stems from elementary education, therefore the analysis starts from the basic education and will tour from this point to a first course in linear algebra, on the upper level.

Formal concepts of linear algebra, as a linear combination, linear dependence and independence may arise from problems of meaning or theory of solving systems of linear equations. This has serious problems in linear algebra because if they can not solve a linear system of equations, hampering progress towards what follows after this first introduction, is already seeing the solution as part of a vector subspace, all these things will be in darkness as people can not see or interpret the solution of a linear system of equations.

To perform activities SELyTEC we will rely on software developed for this purpose.

Introducción

El presente trabajo de investigación surge a raíz de la experiencia en las aulas de educación universitaria, al notar que los alumnos presentan problema al resolver un SEL, por no tener el significado de la(s) solución(es) de un sistema de ecuaciones lineales.

Aunque muchos de ellos tienen cierta destreza operacional para resolver sistemas de forma rutinaria y algorítmica, usando diversos métodos, lo ejecutan de forma mecánica y resolviendo problemas típicos, al presentarse soluciones que no lo son se desconciertan y no logran identificar el problema presentado.

Los profesores que hemos impartido un primer curso de álgebra lineal hemos detectado que es un curso complejo para los estudiantes y con grandes contenidos conceptuales, muchos son los factores (v.gr. gran contenido de temas en el programa de estudios, carencia de un texto adecuado, problemas en la educación matemática precedente, problemas socioculturales, etc.) que inciden en porque los estudiantes observan problemas en su aprendizaje; pero esto es un reclamo internacional puesto que la enseñanza del álgebra lineal es universalmente reconocida como una tarea difícil cualquiera sea la orientación que se dé a la materia (geométrica, axiomática, matricial, computacional) debido a las dificultades conceptuales y al tipo de pensamiento requerido para la compresión de la asignatura (Dorier, 2000).

En los últimos años diversos grupos de investigadores están trabajando sobre la didáctica del álgebra lineal. Entre ellos un grupo francés integrado por Jean Luc Dorier, Aline Robert, Jacqueline Robinet, Marc Rogalski, Michele Artigue, Marlene Alves Dias, Ghislaine Chartier, un grupo canadiense con Anna Sierpinska y Joel Hillel, en EEUU Guershon Harel y Ed Dubinsky, y en México con Armando Cuevas, Humberto Madrid, Asuman Oktaç, Yani Betancourt, Osiel Ramírez, entre otros.

Algunos autores sitúan los sistemas de ecuaciones lineales como “el problema central del álgebra lineal” (Strang, (2007); Cuevas & Madrid, (Inédito, 2006); Noble y Daniel, (1989)). En efecto, los conceptos formales del álgebra lineal, como combinación lineal, independencia y dependencia lineal, pueden surgir a partir de problemas de significado o teoría de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Sin embargo, la mayor parte de los libros de texto presentan de manera formal el estudio del álgebra lineal. Esto es, inician con espacios vectoriales, transformaciones lineales, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, espacios con producto interno, formas bilineales y cuadráticas, etc (Johnson, 1974; Moore (1968); Friedberg (1982); etc.) Y de alguna manera estos contenidos y orden definen los programas de estudio en las universidades[1].

Diversos trabajos de investigación en el campo de la enseñanza y aprendizaje de contenidos de álgebra lineal, han abordado las dificultades asociadas a la interpretación del concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales que se les presentan a los alumnos ofreciendo remediación local, sin embargo, estos trabajos conducen a nuevas preguntas, problemas y dificultades. En el capítulo I mostraremos conclusiones comunes de diversos trabajos de investigación realizados en las carreras de ingenierías y analizados en esta tesis.

De forma anticipada podemos mencionar que este problema es consecuencia de una mala representación que se establece desde la educación elemental hasta que llegan a los sistemas de ecuaciones lineales. Para muchos de nuestros alumnos el objetivo de la resolución de una ecuación es encontrar un procedimiento para llegar a uno o varios valores como solución; sin considerar que no es necesario comprobar, ya que juzgan que el propio procedimiento justifica su validez. De esta manera, el proceso de comprensión del significado de ecuación y de su resolución queda incompleto, porque para completar el ciclo del significado, es necesario sustituir y comprobar que

---

Información consultada en la página Web:
1
http://www.matematicas.unam.mx/images/Planes_de_Estudio/Matematicas/Matematicas_(Plan_1983)/Archivos_PDF/Por_Semestre/Semestre_3/0005_-_Algebra_Lineal_I.pdf
http://www.controlescolar.esfm.ipn.mx/PlanesDeEstudioWeb/ALGEBRAII.htm
http://mat.izt.uam.mx/mat/documentos/coordinaciones/LICMAT/2131143.pdf

efectivamente ese valor comprueba o satisface la ecuación. No hacerlo trunca el proceso y trunca el concepto.

Por otra parte, al resolver ecuaciones los procedimientos reducen la ecuación o sistema estableciendo en cada paso una relación de equivalencia, pero en muchos casos de manera inconsciente se viola este principio sin que el estudiante lo perciba obteniendo una ecuación o sistema no equivalente y por lo tanto surgen desconciertos al comprobar que el valor o valores obtenidos al resolver la ecuación no son solución.

La ausencia de significado es uno de los principales problemas que se plantean en el siguiente trabajo, por lo que es importante que el alumno tenga una idea clara del concepto de ecuación equivalente, pues es éste el que da significado a las técnicas de resolución y métodos.

Es así como nuestro trabajo apunta en esta dirección y consiste en el desarrollo de una propuesta didáctica que promueva una mejor comprensión en el significado y resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales, apoyándose en el uso de un ambiente computacional.

Para dar evidencia de lo anterior, se ha organizado la exposición de este trabajo de investigación en 5 capítulos.

En el Capítulo I **"Antecedentes"**, presentamos brevemente algunas investigaciones en matemática educativa relacionadas con la problemática acerca del concepto de sistemas de ecuaciones lineales y su conjunto solución.

En este capítulo se presentan algunas investigaciones (Eslava y Villegas, 1998; Barrera et al, 1998; Panizza et al, 1999; Mora, 2001; DeVries y Arnon, 2004; Cutz, 2005; Ramírez, 2005 y 2008; Alcocer, 2007; Manzanero, 2007; Barrera, 2008; Monroy, 2008; Ochoviet, 2009) las cuales consideramos como antecedentes importantes por la estrecha relación con nuestra investigación en cuanto a su tema y por compartir hasta cierto punto el perfil de los estudiantes entrevistados. Posteriormente se realiza una revisión de algunas investigaciones que se apoyan en tecnología (Vázquez, 1992; Pérez, 2007; Betancourt, 2009 y 2014).

En el Capítulo II se abordarán de manera breve y no exhaustiva, algunas teorías, enfoques y propuestas didácticas relacionadas con la enseñanza de las matemáticas, que coadyuvarán a interpretar y explicar las diferentes dificultades que presentan los estudiantes, incluye también una inspección de la propuesta didáctica para la enseñanza de las matemáticas de Cuevas & Pluvinage (2003), con la cual se fundamenta en gran parte el marco didáctico de este trabajo y en la última parte, exponemos una breve visión de la computadora como herramienta de apoyo en la enseñanza de las matemáticas (Cuevas, 1998). Este capítulo ha sido denominado **Marco Teórico.**

En el capítulo III **"Aspectos metodológicos"**, se presentará la forma en que se llevó a cabo el estudio, se hará una descripción de la población a la cual se aplicó el cuestionario diagnóstico, test, así como una propuesta alternativa para promover una mejor comprensión del concepto de solución y resolución de un SEL. Para finalmente presentar el postest, explicando el propósito de cada actividad y las posibles respuestas que pudieran presentar los estudiantes.

Posteriormente, en el Capítulo IV **"Análisis de datos: Cuestionario diagnóstico, Test y Postest"** se presenta un análisis de forma detallada de las actividades contenidas en los instrumentos empleados durante la investigación.

Finalizamos el reporte de nuestra investigación con el Capítulo V **"Conclusiones e investigaciones futuras"**, en la que presentamos las conclusiones teóricas de nuestro trabajo de investigación, así como algunas reflexiones y sugerencias para futuras investigaciones de acuerdo a los resultados obtenidos. Además de incluir, lo que consideramos sería un proyecto de investigación apropiado para estudios de doctorado.

Capítulo I. Antecedentes

No es posible decir cuál es la mejor forma de
enseñar, pero sí, cuál no es la mejor.
Cuevas C. A.

1.1. Problemática.

En el sistema educativo tradicional el tema de Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL) y su conjunto solución se introduce por primera vez en la escuela secundaria, evidencia de ello se encuentra en la última reforma a la educación básica, donde el plan de estudios[2] estructurado por *bloques temáticos* contiene en el bloque número cinco del segundo grado, el subtema denominado *Resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de un sistema de ecuaciones* 2×2 *con coeficientes enteros*; donde se sugiere enseñar a utilizar los procesos de simplificación algebraica (suma y resta, igualación o sustitución), así como la *representación gráfica de un sistema de ecuaciones* 2×2 *con coeficientes enteros*, en la que se sugiere enseñar a reconocer el punto de intersección de sus gráficas como la solución del sistema. En el tercer grado, se retoma el tema de la resolución de sistemas con la condición de plantear y resolver sistemas de ecuaciones a partir de "problemas reales". Tanto en el segundo y tercer grado, los sistemas están formados por dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y coeficientes enteros. Esta introducción suele ser algorítmica y trata sólo con el caso de dos ecuaciones con dos incógnitas, debido a lo cual muchos estudiantes se acostumbran a recurrir a episodios memorizados cuando se enfrentan con problemas a resolver, relacionados con este tema.

Durante el primer semestre de bachillerato[3], en la materia de Matemáticas I en los bloques VI, VII y VIII se repiten el mismo esquema que la educación secundaria, salvo que los coeficientes ahora pueden ser números reales e incluyen sistemas 3×3.

Información consultada en la página Web:

[2] http://www.curriculobasica.sep.gob.mx/images/PDF/prog-secundaria/sec_matematicas2011.pdf

[3] http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/01-programasdeestudio/1er_SEMESTRE/Matematicas_I_biblio2014.pdf

En los programas citados se omite el estudio de los tres casos posibles al resolver un SEL; cuando el SEL no tiene solución única, se produce la confusión puesto que los métodos de resolución enseñados los llevan a una ecuación o absurdos y los estudiantes se confunden sin llegar a una solución. En el caso de solución única los profesores en general omiten la comprobación de si la solución encontrada es efectivamente solución al SEL, por considerarlo una pérdida de tiempo. De esta manera el proceso de resolución de un SEL queda incompleto y lo más grave es que se forma en los estudiantes una mala representación "bad conceptions" (Tall and Vinner, 1981), considerando esta parte del proceso de resolución innecesario y con métodos que no ofrecen una solución adecuada a SEL con una infinidad de soluciones o sin solución. Esto influye en que los estudiantes no comprendan bien el concepto de ecuación y mucha de las veces hace crisis en los cursos de álgebra lineal en el nivel superior, en donde los estudiantes al intentar resolver un SEL aplicando los métodos tradicionales, obtienen una falsa solución y se desconciertan y no atinan a descifrar por qué cuando una propuesta de un conjunto solución satisface un cierto número de ecuaciones del SEL pero no todas ellas; no constituye un verdadero conjunto solución del SEL.

De nuevo la resolución de un SEL queda incompleta, en la mayoría de los casos el profesor o los profesores concluyen el proceso presentando el conjunto solución pero sin comprobar que efectivamente sean solución del SEL. Estos problemas en el aprendizaje previo de los SEL, influyen negativamente en el aprendizaje de nuevas estructuras introducidas en los niveles posteriores, como por ejemplo las que tienen que ver con temas como combinaciones lineales, dependencia e independencia lineal, transformaciones lineales, entre otros.

El álgebra lineal representa una problemática en la educación superior al ser considerada como una de las más difíciles de enseñar y de aprender por el alto número de estudiantes que fallan por un primer intento (Betancourt, 2009) y la poca comprensión que se da a los conceptos claves del álgebra lineal (Dorier, 2000). Este fallido intento educativo tiene varias causas, entre ellas podemos mencionar que el álgebra lineal es un curso de matemáticas inevitablemente formal y abstracta, además que la manera en que son abordados los conceptos resultan ser algunos de los factores que influyen en las dificultades que los estudiantes se enfrentan a la hora de construir y utilizar estos conceptos; así lo reportan diversas investigaciones (Dubinsky, 1997; Sierpinska et al, 1999; Dorier, 2008; Betancourt, 2009; Oktaç & Trigueros, 2010), las cuales fueron realizadas desde algún enfoque o teoría de los diversos grupos de investigación alrededor del mundo, particularmente en Francia, Canadá, Estados Unidos y México.

Otra causa sería la poca reflexión en la comunidad docente de los procesos cognitivos en el desarrollo de este curso y la carencia de poder establecer estrategias de enseñanza que conlleven al estudio de diversos obstáculos epistemológicos (Sierpinska & Oktaç, 2002) y la necesidad de instrumentar transposiciones didácticas, esto solamente por mencionar algunas de las causas por las cuales este curso representa un gran obstáculo en la educación superior para los estudiantes en general.

Existen diferentes enfoques para abordar los cursos de álgebra lineal, algunos de ellos involucran el uso de tecnología al apoyarse en algún software para realizar cálculos y/o en la construcción de figuras que les permita visualizar el comportamiento bajo alguna instrucción precisa. Incluso existen en el mercado textos de algebra lineal apoyados en Matlab (Kleinfeld y Kleinfeld, (2001); Kolman & Hill (2006); Lay (2007); Strang (2007); Grossman (2008)). Sin embargo e independientemente del enfoque, investigaciones reportadas (Eslava y Villegas, 1998; Barrera et al, 1998; Panizza et al, 1999; Mora, 2001; DeVries y Arnon, 2004; Cutz, 2005; Ramírez, 2005 y 2008; Alcocer, 2007; Manzanero, 2007; Barrera, 2008; Monroy, 2008; Ochoviet, 2009; Betancourt, 2009 y 2014) tanto con el uso o no de tecnología, ponen en relieve las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes en relación a los sistemas de ecuaciones lineales. Tales dificultades se presentan en relación al significado de la resolución de los sistemas de ecuaciones ya que muchos estudiantes lo hacen de forma mecanizada y no presentan un aprendizaje significativo lo que origina que la resolución de un SEL se encuentre carente de significado y consecuentemente el tiempo de olvido es de un periodo breve (Ausubel, 1983).

Existen otros problemas y dificultades en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, sin embargo, el presente trabajo centra su interés en cómo promover una mejor comprensión del concepto de resolución de un SEL.

Comenzamos describiendo una investigación realizada por Eslava y Villegas (1998) en la que analizaron la representación de las posibles posiciones relativas de tres rectas en el plano, para ello realizaron entrevistas a ocho estudiantes del nivel medio superior. Los autores concluyeron que los alumnos entrevistados presentaron dificultades para identificar de manera detallada las diferentes posiciones relativas de tres rectas en el plano (sistemas de tres ecuaciones con dos incógnitas). Además, los estudiantes no tienen claro el concepto de solución de un sistema de ecuaciones; puesto que algunos pensaron que la solución del sistema de ecuaciones es la intersección de las rectas con los ejes coordenados. Al plantearles el caso de tres rectas en el plano que se intersecan dos a dos de tal forma que los puntos de intersección son vértices de un triángulo en el plano.

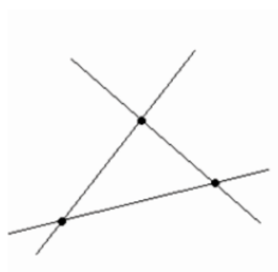


Figura 1: Sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas sin solución

Más de la mitad de los estudiantes entrevistados afirmaron que el sistema representado tiene tres soluciones. Esto revela que los estudiantes asocian cualquier intersección entre rectas como la solución del sistema. Los estudiantes presentaron también dificultades para relacionar los dos tipos de pensamiento sintético-geométrico y analítico-aritmético, al no corresponder sus gráficas diseñadas con sus ecuaciones propuestas.

Barrera et al. (1998) estudiaron la relación y coexistencia que se presenta entre los modos de pensamiento geométrico y analítico en el estudiante, partiendo de una representación geométrica hacia una representación analítica y también analizan el concepto que los estudiantes tienen de solución de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. La investigación se desarrolló con base en una entrevista, partiendo de una descripción verbal, pasando posteriormente a una representación gráfica y finalizando con una parte analítica, todo aplicado a los sistemas 3×3. Las entrevistas fueron propuestas a un grupo de maestros que impartían la materia de álgebra lineal a nivel superior.

Observaron que el concepto solución de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, en la mayoría de los entrevistados, está entendido a través de la definición pero no está aprendido, ya que manifiestan dificultades al aplicarlo en una situación geométrica. El nivel de entendimiento en sistemas 2×2 es mayor, ya que su representación geométrica se realiza en el plano y aparece en la mayoría de los textos de álgebra lineal. Razón por la cual los profesores lo manejan en su discurso matemático escolar.

Obtuvieron evidencias de que tres planos que se intersecan dos a dos y dos planos paralelos y uno secante a ellos, son considerados por los entrevistados como sistemas que tienen solución (las rectas de intersección), cuando en realidad estos sistemas no poseen solución. La categoría menos pensada por los entrevistados fue la de tres planos coincidentes porque consideraban que se trataba de un solo plano.

Concluyeron que en el discurso matemático escolar vigente, el concepto de solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es tratado en el contexto analítico aritmético, a través de algoritmos y métodos para la obtención del conjunto solución. Esto conduce a estudiantes y profesores a trabajar en forma mecánica y no se logra interiorizar el concepto de solución. Proponen que se trabaje también en el ámbito del pensamiento sintético-geométrico y en la relación entre estos dos tipos de pensamiento para poder llegar así a un nivel de pensamiento analítico-estructural.

Panizza et al. (1999) presentaron el trabajo de seis estudiantes en relación al tema ecuación lineal con dos variables. Los estudiantes previamente habían elaborado la concepción de ecuaciones como igualdades numéricas en las que las letras designan números a ser encontrados y habían además estudiado recientemente los sistemas de ecuaciones 2×2. Las autoras se preguntaron si los estudiantes podrían concebir una ecuación con dos variables aislada de los sistemas de ecuaciones, si serían capaces de otorgar entidad al objeto ecuación de dos variables y al mismo tiempo reconocerlo como parte de un sistema de ecuaciones lineales y cómo enfrentarían la situación de que una ecuación puede tener infinitas soluciones, habida cuenta de la concepción de las letras como incógnitas que habían elaborado previamente. También se cuestionaron si los conocimientos aritméticos ayudarían a los estudiantes como cuando estudiaron ecuaciones con una incógnita y si la noción de variable es utilizada en el trabajo con los estudiantes en el ámbito de las ecuaciones o su mención se restringe al contexto de las funciones que en general se enseñan de forma separada.

Si bien señalan que no es su intención contestar a todas estas interrogantes, las autoras concluyen que la ecuación lineal con dos variables no es reconocida por los estudiantes como un objeto que define un conjunto de infinitos pares de números. Cuando la ecuación aparece en un sistema, estos adaptan bien la concepción de letra como incógnita a la resolución de sistemas con solución única en el sentido de que ahora en lugar de determinar únicamente a x hay que determinar x e y. Parecería que la noción de incógnita no resultaría eficaz para interpretar el rol de las letras en una ecuación con dos variables, objeto que debería ser comprendido si los sistemas de ecuaciones lineales fueran concebidos como un conjunto de condiciones independientes a las cuales se les exige que se deben cumplir a la vez. Por otra parte, a pesar del tratamiento de la ecuación lineal con dos variables como ecuación de la recta, los alumnos tienen dificultades en establecer una relación entre los puntos de la recta y las soluciones de la ecuación correspondiente.

La posibilidad de aproximarse a las infinitas soluciones de una ecuación lineal con dos variables apareció bajo dos concepciones diferentes y centradas en objetos distintos.

Un estudiante interpretó la ecuación lineal como una función lineal, a partir de la cual pudo construir soluciones otorgándole valores a una de las variables. Los otros estudiantes, concibieron las infinitas soluciones a partir de las distintas soluciones únicas que se fueron encontrando a sistemas de ecuaciones donde una misma ecuación permanecía fija. Estos alumnos parecen estar más lejos de hacer confluir en el objeto ecuación lineal las nociones de variable y de dependencia para obtener soluciones. Esto significa que si centran su atención en la concepción de letras como incógnitas, estarían más lejos de construir un sentido para el nuevo objeto. Las investigadoras que llevaron adelante este trabajo dejan asentada finalmente la importancia de avanzar en el conocimiento de la relación que existe entre el aprendizaje de las nociones de incógnita y variable, para arrojar luz sobre la relación entre la aritmética y el álgebra.

Mora (2001) estudió algunas dificultades asociadas a la interpretación del concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales. Menciona lo reportado por Eslava y Villegas (1998) que detectaron que la mayoría de los estudiantes contestan que un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas donde las rectas asociadas a las ecuaciones se intersecan dos a dos, de tal forma que los puntos de intersección son vértices de un triángulo en el plano, tiene tres soluciones pues las asocian a los puntos de corte que surgen de tomar las rectas dos a dos.

Mora también menciona que en las prácticas de aula, los docentes evitan proponer a los estudiantes sistemas de ecuaciones incompatibles o indeterminados, sobre todo al momento de emplear un método algebraico de resolución, pues conducen a situaciones donde aparecen por ejemplo expresiones del tipo $0 = 0$ *ó* $0 = 5$, que acarrean dificultades al momento de ser interpretadas. Específicamente, Mora se propuso entonces estudiar qué afirman los estudiantes cuando al resolver un sistema de ecuaciones lineales llegan a expresiones del tipo $0 = 0$ *ó* $0 = r$ donde r es un número real distinto de cero, y trató de explicar a lo largo de su investigación, qué significado tiene esto para los estudiantes en el contexto de los sistemas de ecuaciones, y cómo podría darse a estas expresiones una interpretación geométrica. Su objetivo de investigación fue lograr una conexión en los modos de pensamiento analítico y sintético-geométrico a través de una secuencia de problemas que permitieran ver en juego estos dos modos de pensamiento enfocando la construcción de la noción de solución de un sistema de ecuaciones.

En la secuencia que aplicó a los estudiantes aparecían sistemas de ecuaciones que no tenían solución y sistemas que tenían infinitas soluciones. La intención fue provocar un debate entre los estudiantes que los condujera a una situación de aprendizaje, de tal manera que estuviera en juego el concepto de solución de un sistema y pudieran distinguir los tres casos que se pueden presentar en un sistema, tanto analítica como geométricamente. Comprobó que el modo de pensamiento geométrico funciona como una herramienta de apoyo para dar significado a los procedimientos analíticos y además motiva a la reflexión matemática en el estudiante. Al analizar las expresiones del tipo $0=0 \quad y \quad 0=1$, observó que los estudiantes ofrecen algunas respuestas basadas únicamente en la memoria, recordando lo que sus profesores les enseñaron. Lo que sí mostraron con claridad al resolver la secuencia es que buscar la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, gráficamente es encontrar las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas.

Mora señala que el hecho de que el $0=0$ sea siempre cierto y que $0=1$ sea siempre falso desde un punto de vista aritmético podría constituir un tipo de obstáculo para permitir profundizar en su significado geométrico dentro de los sistemas de ecuaciones; la falta de una interpretación geométrica directa de estas expresiones causa dificultad.

En su análisis pudo constatar que los estudiantes manejan un pensamiento analítico y un pensamiento geométrico más o menos elaborado, pero no logran establecer una relación clara entre ambos pensamientos. Después de haber analizado algunas expresiones verbales y escritas de los estudiantes pudo detectar algunos trazos de pensamiento analítico y sintético-geométrico y vio que este último les proporciona información más natural para contestar correctamente ciertas cuestiones matemáticas.

Es en la interacción entre ideas intuitivas y formales que los estudiantes no logran establecer, por ejemplo, las equivalencias entre una expresión $0=0$ y dos rectas coincidentes.

DeVries y Arnon (2004) reportaron una investigación realizada en el marco de la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema), que aborda el concepto de solución de un sistema de ecuaciones. Las entrevistas que realizaron revelan varias concepciones erróneas del concepto solución de una ecuación.

El propósito del trabajo que reportaron fue lograr una aproximación a las ideas que los estudiantes poseen sobre solución y comenzar a realizar una primera versión de descomposición genética para este concepto.

En particular, señalan que en esta primera fase de su investigación y de acuerdo a las deficiencias del cuestionario que aplicaron, pudieron obtener muy poca información acerca del concepto de solución de una ecuación.

Reportan que algunos estudiantes confunden la solución de una ecuación (o sistema),con la constante que está a la derecha de la igualdad, en muchos casos, a la derecha de la ecuación (o sistema), es decir cuando la ecuación está escrita de la forma $f(x)=k$ con k real. Esto guarda relación con las investigaciones que señalan que estudiantes de diferentes edades tienden a pensar que el signo de igualdad significa “el resultado es”, en lugar de que simboliza la equivalencia. Como la equivalencia llevada a cabo cuando se sustituye una solución en ambos lados de las ecuaciones (Kieran, 1981).

Otros estudiantes confunden el concepto de solución con resolver. Es decir que, en lugar de utilizar el procedimiento de verificación para determinar si estamos o no frente a una solución, optan por resolver en lugar de sustituir. En este caso los autores interpretan que el concepto de solución que desarrollaron los estudiantes consiste en la acción de resolver una ecuación (o sistema de ecuaciones), más que en la acción de sustituir. En el nivel de acción el estudiante tampoco puede predecir cuál será la forma de la solución que obtendrá sin pasar por el proceso de resolución. Los investigadores predicen que usar la acción de sustituir como base para el desarrollo del concepto de solución favorecerá la interiorización de la acción y su transformación en un proceso.

Los autores terminan sugiriendo una secuencia de aprendizaje que surge de la descomposición genética por ellos realizada. Proponen comenzar ayudando a los estudiantes a construir el nivel de Acción del concepto de ecuación, incluyendo el concepto de solución, la habilidad de identificar en ella dos funciones, la intersección de sus dominios, sus codominios, y solución como un elemento del dominio, tal que al realizarse la sustitución permite obtener una proposición verdadera. En esta instancia proponen sustituir por elementos del dominio común y ver si son o no soluciones.

Para el nivel de ecuación como Proceso, incluyendo el concepto de solución, sugieren que se debe enseñar a los estudiantes a identificar las dos funciones, sus dominios y codominios para diversas formas de la ecuación. No se les aportan soluciones de las ecuaciones y se les pide que describan el formato de las posibles soluciones y no soluciones.

Para alcanzar el nivel Objeto del concepto de solución, recomiendan trabajar con conjuntos finitos. Con ayuda del programa ISETL se les pide a los estudiantes diseñar un programa tal que al ingresar una ecuación, la computadora les devuelva el conjunto solución. El programa va revisando uno por uno los elementos del conjunto dado y de allí obtiene los que verifican. Cuando los estudiantes enfrenten más tarde sistemas de ecuaciones sobre conjuntos infinitos, deberán sentir la necesidad de otros métodos, ya que no es posible la verificación uno a uno de los elementos del conjunto dado por ser infinito. Aprender a resolver algoritmos incluirá ahora el entendimiento de lo que el algoritmo hace: produce solamente sustituciones que generan proposiciones verdaderas. A partir de esto diseñaron un segundo cuestionario para continuar con sus investigaciones.

En Segura (2004) se reportó un trabajo cuyo objetivo consistió en diseñar y poner a prueba una secuencia de enseñanza que hiciera asequible el aprendizaje y solución de los objetos sistemas de ecuaciones lineales, con miras a propiciar comportamientos matemáticos y cognitivos en el quehacer de los alumnos, haciendo que el tratamiento y pasaje de registros de representación fuera el eje para la construcción de las actividades.

En este trabajo se mencionan algunas dificultades de los estudiantes asociadas a los sistemas de ecuaciones, por ejemplo, se señala que los estudiantes resuelven un sistema de ecuaciones y no verifican la solución. Es decir, que existe una desarticulación entre el objeto sistema de ecuaciones lineales y su conjunto solución (Panizza et al, 1995; referido en Segura, 2004). Se ha observado también que los estudiantes no realizan correctamente el pasaje del registro verbal al algebraico de un problema que involucre un sistema de ecuaciones lineales y recurren pocas veces al pasaje del registro gráfico al algebraico para resolver un sistema de ecuaciones lineales (Pérez Donoso, 1998; referido en Segura, 2004). Por otra parte, se señala que los alumnos dan al registro de representación gráfico un estatus inframatemático, no utilizándolo para resolver sistemas de ecuaciones lineales (Ramírez, 1997; referido en Segura, 2004).

En cuanto a la situación didáctica diseñada, se buscó que las actividades giraran en torno al pasaje entre registros de representación semiótica y tratamiento entre ellos, es decir la conversión dentro del mismo registro. Los registros utilizados fueron el verbal, el gráfico y el algebraico. Se trabajó en el campo de los números reales, abarcando sistemas de ecuaciones lineales con conjunto solución unitario, vacío o infinito.

Con el fin de desarrollar y observar los comportamientos matemáticos de los alumnos se utilizó la teoría de situaciones, mientras que para los cognitivos la teoría de registros de representación semiótica.

Al término de la secuencia, y de todas las actividades planificadas la autora afirma que pudo constatar el logro de las intenciones didácticas propuestas y el respeto al objeto matemático seleccionado. En forma posterior a la experimentación con la secuencia, se observó que quedaron subsanados algunos fenómenos como la desarticulación entre los sistemas de ecuaciones lineales y su solución. Esto se logró partiendo de la solución del sistema y generando las ecuaciones lineales que tuvieran esa solución. Luego de esto se pasaría a la forma habitual de enseñar los sistemas, que consiste en empezar por los sistemas y hallar la solución.

El trabajo con los tres registros de representación posibilitó que el alumno identificara al objeto sistema de ecuaciones en todos los registros ya que se emplean en forma indistinta para simbolizarlo. Es importante destacar que la secuencia utilizada no asocia el objeto sistema de ecuaciones lineales con los métodos de resolución, por lo cual evita que se confunda el objeto con los procesos de resolución.

Cutz (2005) analizó algunos fenómenos relacionados con la representación geométrica del concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas, y las dificultades de los estudiantes relativas al tránsito entre diferentes representaciones de los sistemas de ecuaciones lineales: la geométrica y la analítica.

Utiliza como marco teórico el presentado en Sierpinska (2000) relativo a los diferentes modos de pensamiento en álgebra lineal y propone diversas actividades a los estudiantes que ponen en juego estos modos de pensamiento. Cutz concluye que la mayoría de los estudiantes entrevistados presenta una gran dificultad para lograr un tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales tanto de dos como de tres incógnitas. En particular, los estudiantes presentan problemas con el concepto solución en el momento de efectuar un pasaje del modo sintético-geométrico al analítico-aritmético o analítico-estructural. También quedó en evidencia que los estudiantes tienden a relacionar a la solución de un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas, con el punto de intersección de al menos dos de las rectas que representan gráficamente al sistema.

Recomienda relacionar a la solución de un sistema de ecuaciones lineales con su representación gráfica y poner mayor atención al significado del concepto, evitando que la explicación quede sujeta a los métodos de resolución. Sugiere buscar estrategias que favorezcan el tratamiento de los sistemas en los diferentes modos de pensamiento y proponer actividades a los estudiantes que requieran el tránsito entre ellos.

Ramírez (2005) se planteó identificar y analizar las dificultades que presentan los estudiantes en la representación gráfica y la presentación analítica de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Utilizó como marco teórico los modos de pensamiento presentados por Sierpinska (2000).

Los estudiantes que entrevistó evidenciaron dificultades al trabajar con sistemas con infinitas soluciones y su representación gráfica; tuvieron problemas para plantear las ecuaciones de un sistema dado, mostrando dificultades con el tránsito entre el modo de pensamiento geométrico y el modo analítico. Manifestaron dificultades también para interpretar la expresión $0=0$ señalando que el sistema no tiene solución. Ramírez recomienda el diseño de situaciones novedosas que involucren diferentes modos de pensamiento y que requieran tanto el análisis de sistemas con solución única, como los casos sin solución o con infinitas soluciones, sin privilegiar el primero de ellos.

Alcocer (2007) se propuso profundizar en el entendimiento de las dificultades que presentan los estudiantes del nivel superior con el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales en los contextos analítico y geométrico, considerando los casos de solución única, infinitas soluciones y el caso de no solución. Como marco teórico utiliza los modos de pensamiento propuestos por Sierpinska (2000). Alcocer observó que los estudiantes de Ingeniería con los que trabajó, consideran como solución de un sistema de ecuaciones lineales los puntos de intersección de las rectas del sistema tomadas de a dos o los puntos de intersección de las rectas del sistema con los ejes coordenados. También observó que los estudiantes piensan que el número de soluciones de un sistema está relacionado con el número de incógnitas del sistema, esto es, si un sistema tiene dos incógnitas tendrá dos soluciones, si tiene tres incógnitas tendrá tres soluciones, etc. Los estudiantes con los que se trabajó no pudieron distinguir los diferentes casos de solución para un sistema, presentando por ejemplo un sistema con solución única cuando se les pedía un sistema sin solución. Estas concepciones erróneas permanecieron aún después de un curso de álgebra lineal que tuvo énfasis en corregir los errores antes mencionados. Alcocer sugiere entonces que no basta con tratar ejemplos aislados, sino que es necesario dotar de sentido a los conceptos y procedimientos que se desea enseñar.

Manzanero (2007) identifica las dificultades que presentan los estudiantes al estudiar el concepto de conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales. Sustenta su trabajo en la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema). Entrevistó a seis estudiantes del nivel superior y observó que ningún estudiante mostró tener una concepción objeto para el concepto de conjunto solución y que pocos de ellos mostraron haber construido un proceso de solución, en particular en el caso de los sistemas con tres variables. También se apreciaron dificultades con la parametrización.

Manzanero recomienda que en vías de lograr la encapsulación es necesario presentar a los estudiantes la solución de los sistemas de ecuaciones en forma algebraica, trabajando en forma coordinada con la construcción y solución del sistema en forma geométrica. La coordinación de estas dos representaciones permitirá lograr una mejor comprensión en la solución de los sistemas de ecuaciones. También sugiere presentar a los alumnos todos los casos posibles de solución de un sistema de ecuaciones, utilizando diferentes representaciones y no limitarlos a la solución de ejemplos prototípicos. Recomienda además presentar a los estudiantes problemas no triviales para la resolución de sistemas de ecuaciones con el fin de que se enriquezca su esquema del concepto de solución. Estos problemas necesitarán al menos de una concepción proceso para resolverse y deben incluir preguntas que inviten a la reflexión para lograr la encapsulación; un ejemplo son los problemas que involucran parámetros o los problemas presentados en un contexto geométrico.

Barrera (2008) analiza los modos de pensamiento sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural propuesto por Sierpinska (2000), que se ponen en juego en la solución y planteamiento de una selección de problemas de sistemas de ecuaciones lineales homogéneos con dos incógnitas, y su relación con conceptos de dependencia e independencia lineal, así como las estrategias y dificultades que presentan los estudiantes de los primeros semestres de la carrera de ingeniería. Barrera detecta que existen dificultades en la transición entre los diferentes modos de pensamiento y con el concepto de sistema homogéneo. Detecta también que no existe una conexión entre los distintos modos de pensamiento en los estudiantes al abordar los problemas de sistemas de ecuaciones lineales y de conceptos estructurales relacionados con la combinación lineal y dependencia lineal. Observa que los estudiantes utilizan un modo de pensamiento y no recurren a otros aun cuando la situación matemática lo requiera; por ejemplo, algunos estudiantes utilizan el modo de pensamiento analítico-estructural, y no otros, mientras que algunos estudiantes trabajan en el modo de pensamiento sintético-geométrico y no pueden pasar a los otros modos de pensamiento.

Ramírez (2008) retoma los resultados que obtuvo en Ramírez (2005) y se aboca en este trabajo a profundizar en el entendimiento de las concepciones de los estudiantes de nivel superior respecto a los sistemas de ecuaciones lineales de dos y tres ecuaciones con dos incógnitas, utilizando como marco teórico los modos de pensamiento propuestos por Sierpinska (2000). Los cinco estudiantes con los que trabajó habían terminado un curso de álgebra lineal en donde habían estudiado los sistemas de ecuaciones lineales. Ramírez concluye que la mayoría de los estudiantes no logra determinar el caso de infinitas soluciones de un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, analíticamente tres ecuaciones equivalentes y gráficamente tres rectas coincidentes. Los estudiantes evidencian dificultades en el modo de pensamiento analítico-estructural pues no consideran las propiedades de los sistemas.

Monroy (2008) estudió las estrategias y dificultades que presentan los estudiantes de los primeros semestres de la licenciatura de la carrera de ingeniería y los profesores de matemática que imparten álgebra lineal a nivel de licenciatura, en relación al concepto de solución y planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales homogéneos con tres o más incógnitas y su relación con conceptos de dependencia e independencia lineal. Realizó su análisis en base a los tres modos de pensamiento: sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural, propuestos por Sierpinska (2000).

Monroy encuentra evidencias de que los estudiantes y algunos profesores de álgebra lineal tienen dificultades para transitar entre los diferentes modos de pensamiento al trabajar con sistemas de ecuaciones lineales homogéneos que tienen diferente número de ecuaciones que de incógnitas así como en la interpretación del concepto de solución en relación con el concepto de dependencia e independencia lineal.

Recomienda que tanto los libros de texto como el profesor en clase, den menor relevancia al pensamiento analítico-aritmético en los sistemas homogéneos, dedicando menos tiempo a la parte algorítmica con los casos más comunes (problemas con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas con solución trivial). Monroy sugiere dar mayor importancia a los casos que permitan unir un conocimiento con otros mediante el diseño de actividades donde el estudiante descubra la relación que tiene este tema en particular con los conceptos de dependencia e independencia lineal, base, dimensión, transformación lineal y espacio vectorial. Asimismo sugiere que los libros de álgebra lineal y el profesor, tengan en cuenta el desarrollo histórico de los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos para implementar actividades didácticas que permitan al estudiante reflexionar y construir su propio conocimiento recreando quizás, las condiciones en que fue creado.

Monroy concluye que el modo de pensamiento estructural es el menos favorecido en el tratamiento de sistemas de ecuaciones lineales homogéneos tanto en el desarrollo del tema que aparece en los libros de texto como por parte de los profesores, por lo tanto recomienda trabajar en sentido inverso de cómo se trabaja normalmente: partir de conocer la solución del sistema homogéneo (pensamiento analítico-estructural) para plantear el sistema correspondiente (pensamiento analítico-aritmético) y hacer su gráfica si existe (pensamiento sintético-geométrico). También sugiere que la utilización de algún software podría facilitar el trabajo con temas fundamentales del álgebra lineal como los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos.

Ochoviet (2009) estudia que concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales construyen los estudiantes uruguayos (de 14-15 años y 17-18 años) si la enseñanza del tema se inicia a través de los sistemas 2×2. Después de identificar las dificultades se propuso diseñar una secuencia de enseñanza sobre el concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas tomando en cuenta los datos obtenidos en la primera parte de su investigación; cabe aclarar que esta secuencia de enseñanza la pone en práctica sólo con los estudiantes que se encuentran entre los catorce y quince años.

Ochoviet (2009) señala en sus conclusiones que el concepto de sistema y de solución de un sistema que los estudiantes construyen está fuertemente influenciado por el significado que tienen estos conceptos en el ámbito de los sistemas lineales 2×2. Considera que en muchos casos, estos significados obstaculizan visiones más generales de estos conceptos, incluso en estudiantes que han avanzado en sus estudios y han estudiado matrices, determinantes y sistemas con cualquier número de ecuaciones e incógnitas. Las concepciones y dificultades que más persisten en los estudiantes son considerar punto de corte como solución del sistema y concebir un conjunto de rectas paralelas como única configuración gráfica de un sistema sin solución. También observa que algunos estudiantes no logran interpretar en cada punto un par ordenado de números reales y en cada recta una ecuación. Menciona en cuanto a la concepción de sistema, que algunos estudiantes consideran que es un conjunto de dos ecuaciones y que esta noción aparece asociada a algo que se resuelve.

Ochoviet (2009) realiza un conjunto de recomendaciones generales a la luz de los resultados obtenidos en la primera parte de su investigación en cuanto a la enseñanza del tema solución de un sistema de ecuaciones lineales. Entre dichas recomendaciones podemos mencionar la de no comenzar la enseñanza de este tema exclusivamente con los sistemas 2×2, considera conveniente presentar a estos sistemas entre tantos otros con dos incógnitas al menos en las fases de presentación del concepto de sistema, de solución de un sistema y de la discusión del número de soluciones de un sistema con dos incógnitas. Sugiere proponer a los estudiantes actividades que los conduzcan a analizar el número de soluciones que puede tener un sistema de ecuaciones lineales y a rechazar los que no pueden tener: un número entero mayor que uno, entre otras.

Con este conjunto de recomendaciones Ochoviet (2009) diseña una serie de actividades y una secuencia de enseñanza que pone en práctica con los estudiantes de entre catorce y diecisiete años de edad y nuevamente indaga sobre las concepciones de los estudiantes. Concluye que estudiar específicamente que un sistema puede tener una solución, infinitas soluciones o ninguna, ayudó a varios estudiantes a un cambio de opinión en el sentido deseado. Para la mayoría de los estudiantes, a través de la forma de enseñanza propuesta, fue posible alcanzar un modo de pensamiento estructural en ese nivel de escolarización (14-15 años); señala que el estudio del concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales requiere de avances en este modo de pensamiento. Considera que las tareas diseñadas para ser usadas durante la enseñanza del concepto, fueron altamente provechosas para poner en juego el concepto solución de un sistema en diferentes modos de pensamiento y con ello contribuirá una visión del concepto que abarque su complejidad.

Häggström (2006) analiza tres lecciones sobre la enseñanza de los sistemas de ecuaciones 2×2 por parte de tres profesores en diferentes lugares geográficos (Hong Kong, Shanghai y Suecia) y encuentra entre ellas diferencias importantes. Sostiene que lo que los estudiantes aprenden o no aprenden, en cierto contexto, depende de las características y de los contenidos con los que los estudiantes pueden experimentar. Su marco teórico es la Teoría de la variación que sostiene que es necesaria la experiencia en la variación para poder discernir sobre nuevos aspectos de un objeto de aprendizaje. Como ejemplo propone el caso en que a un estudiante se le ofrecen tres sistemas de ecuaciones 2×2 para resolver, uno con solución única, otro con infinitas y el tercero sin solución. Dice que un estudiante que experimenta con estos tres tipos de sistemas seguramente advertirá que el número de soluciones de un sistema no es algo que podamos dar por supuesto. En el artículo hace mención a Pang (2002) que en su tesis demostró que lo que aprenden los estudiantes, o no aprenden, puede ser explicado por los patrones de variación que se les han ofrecido a través de la enseñanza. El autor menciona que sigue el estudio por lo cual esta publicación será parte de un estudio más acabado.

En las observaciones de clase, el autor detecta varias diferencias en las características del concepto sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas que se presentó a los estudiantes. Uno de los aspectos refiere al concepto de sistema como método para resolver problemas. En una de las clases observadas, a diferencia de las otras dos, los sistemas no se presentaron como una herramienta para resolver problemas. Señala que es difícil que los estudiantes de esa clase adviertan este aspecto de los sistemas de ecuaciones, al menos durante la secuencia de aprendizaje observada. Otro aspecto diferente que encuentra entre las tres clases es que en una de ellas el profesor plantea a sus alumnos varios sistemas de ecuaciones para que ellos indiquen si son lineales y en dos incógnitas. Les permite a los estudiantes experimentar y analizar diferentes tipos de ecuaciones y sistemas, y brinda elementos para poder decidir cuándo están ante un sistema lineal y cuándo no. Esta experiencia no fue ofrecida a los estudiantes de los otros dos grupos sino que se pasó inmediatamente de la presentación de un sistema a su resolución. Estos últimos estudiantes podrían dar por supuesto que cualquier sistema es lineal y con dos incógnitas. Häggström no saca conclusiones terminantes por ahora, sino que señala que debe continuar con su investigación, analizando más clases para poder obtener mayor información.

A continuación mencionaremos algunas investigaciones en el campo de la enseñanza del álgebra lineal apoyados con uso de Microcomputadoras.

En mayo de 1992 en la entonces sección de matemática educativa se presentó la tesis intitulada “Programa de apoyo para un curso de álgebra lineal (Software de Apoyo en la Educación)” (Vázquez, 1992). Esta tesis se caracterizó por la creación de un software educativo para apoyar a estudiantes de ingeniería en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante la aplicación del método de Gauss a la matriz aumentada del sistema. Fue desarrollado en el lenguaje Pascal con subrutinas para el manejo de racionales en lenguaje de máquina. Aunque la autora no lo publicó, gozo de mucha popularidad en la universidad donde laboraba.

Es necesario mencionar que dicha tesis se realizó en una época en donde no había amplia investigación en el campo de la enseñanza del álgebra lineal. En este sentido, puede denominarse a este trabajo, con sus reservas, pionero en el campo de la enseñanza del álgebra lineal con el uso de tecnología en México. La idea principal del trabajo gira en torno a eliminar las operaciones aritméticas entre los coeficientes de las ecuaciones en el proceso de resolución. En ese tiempo no existía el amplio software de resolución como Matlab que existe el día de hoy.

En el año 2007 se presentó otra tesis de maestría titulada: “Nuevas tecnologías y diseño de ambientes virtuales” (Pérez, 2007). El trabajo de investigación que se reporta en esta tesis, ofrece un panorama general del estado que guarda el uso de las nuevas tecnologías en la educación; sobre todo el uso de la computadora como herramienta que ayuda a generar aprendizaje. De acuerdo con el autor, el objetivo de su investigación se centra en el diseño de programas y actividades en la computadora basándose tanto en las investigaciones como en las perspectivas teóricas en didáctica de las matemáticas.

Desde nuestro punto de vista, lo anterior es una característica importante en el desarrollo de ambientes computacionales. El diseño de un ambiente computacional debe tomar en cuenta las aportaciones de las investigaciones relacionadas con los problemas en la enseñanza y aprendizaje del tema de interés, así como sustentar su diseño en una perspectiva didáctica. Vale la pena señalar que el autor desarrolló actividades para mejorar la comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales a partir de la perspectiva teórica de Sierpinska (2000) sobre los tres modos de pensamiento, sin embargo, su propuesta está limitada a SEL de 2×2, lo que de ninguna manera demerita su valor.

Betancourt (2009) analiza algunos fenómenos relacionados con la solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales mediante la eliminación gaussiana y la aritmética fraccionaria que habitualmente se desarrolla apoyado de un ambiente computacional denominado ALSEL, donde los cálculos aritméticos no causen problemas o dificultades tanto a profesores como a estudiantes en el proceso de resolución.

Una de las dificultades por las que atraviesan profesores y alumnos en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales utilizando Gauss, está relacionada con los cálculos aritméticos (Gómez, 2006; referido en Betancourt).

El marco teórico usado es la didáctica de Cuevas-Pluvinage (2003) y proponiendo diversas actividades a los estudiantes que ponen en juego cada uno de los puntos de dicha didáctica. Betancourt concluye que la mayoría de los estudiantes entrevistados a raíz de dotarlos de una herramienta como ALSEL, se olvidaron de las dificultades aritméticas al resolver un sistema de ecuaciones lineales, y enfocaron su atención al proceso de resolución a las operaciones elementales como única herramienta matemática para generar sistemas de ecuaciones lineales equivalentes. Y fue tal el efecto, que pudieron interpretar y resolver problemas que implican el proceso inverso.

Las investigaciones mencionadas estudian las dificultades de los estudiantes del nivel medio superior, superior y de docentes del nivel superior que enseñan álgebra lineal en relación a los sistemas de ecuaciones, la interpretación del concepto solución y el tránsito entre las distintas representaciones. Estos trabajos dan cuenta de la problemática, aportan conclusiones y sugerencias didácticas pero no avanzan en el diseño de una secuencia de enseñanza del tema que recoja sus hallazgos.

Nuestro trabajo se propone por un lado dar cuenta de la problemática en torno al aprendizaje del concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales en estudiantes del nivel medio, medio superior y un primer curso de álgebra lineal en el nivel superior para luego proponer una secuencia de enseñanza del concepto.

Es nuestro objetivo brindar elementos concretos para mejorar la enseñanza del tema y no ubicar nuestro trabajo en el puro análisis de las dificultades de los estudiantes. Deseamos brindar información y actividades de clase, basadas en la investigación, que puedan resultar útiles a los profesores de matemática para repensar sus prácticas.

1.2. Preguntas de investigación.

La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es una tarea compleja en la cual estamos comprometidos todas las personas dedicadas a la docencia; las dificultades son debidas a distintas razones, de ahí que existen diversas propuestas sustentadas en diferentes marcos didácticos, como alternativas para resolver este problema, dentro de ellas podemos mencionar: Socioepistemología (Cantoral, 2013), APOE (Dubinsky, 1996), PDCP (Cuevas & Pluvinage, 2003), Reificación (Sfard, 1992), Registros de representaciones semióticas (Duval, 1993), los tres mundos de las matemáticas (Tall, 2013), etc. y, en los últimos años se agrega el empleo de las nuevas tecnologías.

De la problemática planteada surgen las siguientes preguntas:

- ¿Puede la tecnología, mediante una propuesta didáctica, promover una mejor comprensión del concepto de resolución de un SEL?
- ¿Puede la tecnología favorecer la modelación matemática de situaciones reales que conduzcan a un Sistemas de Ecuaciones Lineales?
- ¿Un Ambiente Computacional para el aprendizaje del Álgebra Lineal, puede promover un ambiente de aprendizaje individual y colaborativo?

Capítulo II. Marco Teórico

Didáctica es el arte de enseñar algo a alguien
que no desea aprenderlo.
G. Brousseau

En este capítulo se abordarán de manera breve y no exhaustiva, algunas teorías, enfoques y propuestas didácticas relacionadas con la enseñanza de las matemáticas, que coadyuvarán a interpretar y explicar las diferentes dificultades que presentan los estudiantes, detectados por diversos investigadores (Eslava y Villegas, 1998; Barrera et al, 1998; Panizza et al, 1999; Mora, 2001; DeVries y Arnon, 2004; Cutz, 2005; Ramírez, 2005 y 2008; Alcocer, 2007; Manzanero, 2007; Barrera, 2008; Monroy, 2008; Ochoviet, 2009; Betancourt, 2009 y 2014). Incluye también una inspección de la propuesta didáctica para la enseñanza de las matemáticas de Cuevas & Pluvinage (2003), con la cual se fundamenta en gran parte el marco didáctico de este trabajo. La propuesta de programa didáctico de Cuevas & Pluvinage, que en realidad es una ingeniería didáctica, retoma elementos de corte psicológico de diversas propuestas relacionadas con la enseñanza de las matemáticas. Por ejemplo, incluye aportaciones teóricas de Brousseau (2000), de la teoría de los registros de representación semiótica de Duval (1998), y fundamentalmente de la teoría de la inteligencia de Piaget. En esta propuesta didáctica proponen acciones que rompen con el esquema tradicional de enseñanza en un curso de matemáticas. De ahí su elección, y por último, revisamos algunos trabajos relacionadas con la implementación y uso de la computadora en la enseñanza de las matemáticas, particularmente la creación y uso del software educativo (Cuevas, 1998; Mochón, 2006; Nielsen, 2003, Betancourt 2009).

2.1. Sistemas de Ecuaciones Lineales

En el libro Elements of Algebra de Euler (edición traducida por John Hewlett, 1984), se considera a una ecuación de primer grado como:

> Aquella donde las cantidades desconocidas no tienen potencias mayores que la primera y no hay productos de dos o más cantidades desconocidas y estas ecuaciones tienen la forma:

$$ax + by + cz = d$$

> Donde a,b,c,d son números conocidos y x,y,z las cantidades desconocidas. (p. 206).

Actualmente a este tipo de ecuación se le denomina ecuación lineal. La "definición" de Euler permanece hasta nuestros días vigente, con pequeños cambios como llamar variable o incógnita a la cantidad desconocida y coeficientes a los números conocidos, además de extenderlos a elementos de cualquier campo (Johnson, 1969).

La expresión algebraica general de una ecuación lineal en n variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ es de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n = b_1$$

En donde los coeficientes se representan por $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ y las variable o incógnitas por $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ y deberán tener exponente 1 y el término independiente otro número $b_1 \in \mathbb{R}$.

2.1.1. Ecuación lineal con una incógnita.

El primer SEL a examinar será el de una ecuación con una variable o incógnita. Una ecuación lineal de una variable con una incógnita o $SEL(1\times1)$, es una expresión de la forma:

$$ax = b$$

En donde la variable se denota por x, y los coeficientes a y b son números reales. Es decir $a,b \in \mathbb{R}$.

Una solución de la ecuación $ax = b$, es un número s de tal forma que la igualdad $a(s) = b$ se satisface. Como no es posible plantear una solución general al sistema, la solución dependerá del valor de los coeficientes, por esta razón se divide el análisis en tres posibles casos.

Caso 1. $a \neq 0$

Para encontrar la solución de la ecuación:

$$ax = b \quad \ldots\ldots\ldots(I)$$

Como $a \neq 0$ se multiplican ambos lados de la ecuación por a^{-1} (inverso multiplicativo).

$$\Leftrightarrow \quad a^{-1}ax = a^{-1}b$$

$$\Leftrightarrow \quad x = a^{-1}b$$

Dicho de otra forma, se despeja la incógnita x, con lo que se obtiene la ecuación equivalente y solución:

$$x = \frac{b}{a} \quad \ldots\ldots\ldots(II) \ .$$

Es decir, transformamos mediante el álgebra, el sistema o ecuación (I) en el sistema o la ecuación (II). Pero tenemos que advertir que el término a^{-1} solo se define cuando $a \neq 0$. Es decir, el cociente $\frac{b}{a}$ es posible realizarlo, cuando $a \neq 0$. Si $a = 0$, no podríamos resolver la ecuación de esta manera, puesto que la división entre cero, no está definida.

Ejemplo

Si se dan los valores $a = 2$ y $b = 8$, en la ecuación $ax = b$; se forma la ecuación: $2x = 8$, cuya solución es: $x = \frac{8}{2} = 4$. En forma equivalente se dice que $x = 4$, es solución de la ecuación $2x = 8$; puesto que $2(4) = 8$.

Caso 2. $a = 0$ **y** $b = 0$**.**

Este caso se plantea el siguiente sistema

$$0x = 0$$

Evidentemente no es posible seguir la línea de argumentación, del caso 1, puesto que como se ha mencionado el valor 0 no puede dividir a un número y por lo tanto no se puede despejar a la variable x.

Sin embargo, al sustituir cualquier número real s en la ecuación $0x=0$, ésta se satisface, es decir, $0(s)=0$ para toda $s\in\mathbb{R}$. Por ejemplo $0(-5)=0$; $0(0)=0$; $0(2.7816)=0$; etc. Por lo tanto, la ecuación: $0x=0$ tiene una infinidad de soluciones. A saber, cualquier número real satisface la ecuación.

Caso 3. $a=0$ **y** $b\neq 0$

En este caso el sistema adquiere la forma: $0x=b$.

Este caso no tiene solución, ya que cualquier número multiplicado por cero resulta cero y como $b\neq 0$, ningún número real satisface la igualdad.

Resumiendo la información anterior:

Un sistema de ecuaciones lineales de 1×1 o una ecuación con una incógnita o variable es de la forma:

$$ax=b$$

Con a y b números reales y la incógnita x también un número real. Resolver un sistema $ax=b$, es encontrar uno o más valores para la variable x tales que al sustituir el valor o los valores en la ecuación original se satisfaga la igualdad.

Dada una ecuación lineal con una incógnita; también llamado sistema de ecuaciones lineales 1×1 o $SEL\,(1\times 1)$:

$$ax=b$$

Tenemos tres casos posibles: solución única, infinidad de soluciones y sin solución.

1. Si $a\neq 0$ entonces, el $SEL\,(1\times 1)$ tiene una única solución y está dada por: $x=a^{-1}b$.

2. Si $a=0$ y $b=0$, entonces el $SEL\left(1\times 1\right)$ tiene una infinidad de soluciones. A saber, cualquier número real.
3. Si $a=0$ y $b\neq 0$, entonces el $SEL\left(1\times 1\right)$ no tiene solución.

2.1.2. Ecuación Lineal de dos variables

Una ecuación de la forma:

$$ax+by=c$$

Donde $a,b,c\in\mathbb{R}$ es una ecuación lineal de dos variables. Los números a,b se llaman coeficientes y c es el término independiente. Las letras x,y son las variables o incógnitas y es sencillo reconocer que es lineal pues las dos variables tienen exponente 1.

La solución de la ecuación lineal $ax+by=c$ está dada por los valores s_1 y s_2 con $x=s_1$ y $y=s_2$ tales que satisfacen la igualdad anterior, es decir, $a\left(s_1\right)+b\left(s_2\right)=c$.

La gráfica de la ecuación es una recta en el plano xy.

Si $b\neq 0$ expresamos a la variable y en términos de la variable x, de esta manera tenemos la ecuación de una recta en la forma pendiente – intersección:

$$y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$$

La pendiente de la recta está indicada en el coeficiente de x, es decir, $m=-\frac{a}{b}$.

Cuando la pendiente es positiva la recta tiene un comportamiento creciente, y si la pendiente es negativa la recta es decreciente.

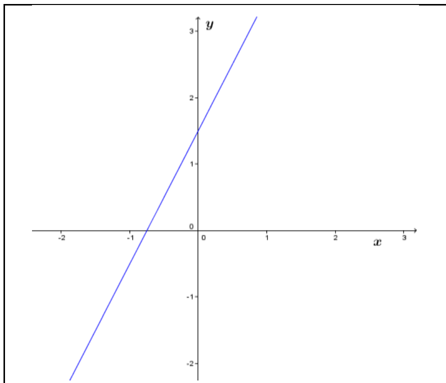


Figura 2: Recta con pendiente positiva

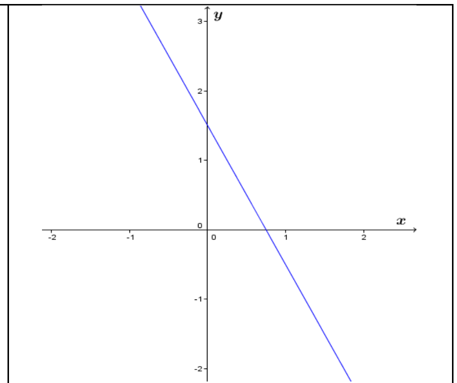


Figura 3: Recta con pendiente negativa

Hay dos situaciones particulares para la ecuación $ax + by = c$

- Si $a = 0$, se tiene una recta horizontal: $y = \frac{c}{b}$.

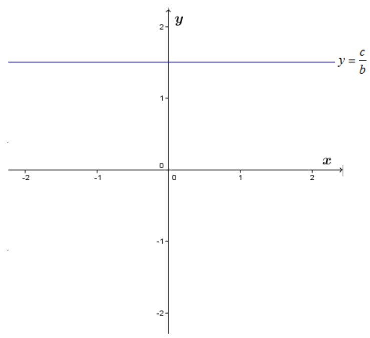


Figura 4: Recta con pendiente cero

- O bien si $b = 0$, se trata de una recta vertical: $x = \frac{c}{a}$.

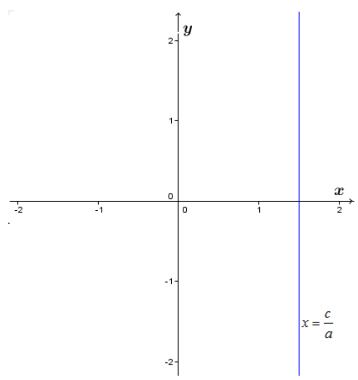


Figura 5: Recta con pendiente infinita

Para la solución de $ax+by=c$ con $a,b,c\in\mathbb{R}$; el $SEL(1\times 2)$ tiene, tres posibles casos:

Caso 1. Solución única:

Si $a\neq 0$ y $b=0$, entonces el $SEL(1\times 2)$ tiene una única solución y está dada por: $x=a^{-1}c$.

Si $a=0$ y $b\neq 0$, entonces el $SEL(1\times 2)$ tiene una única solución y está dada por: $y=b^{-1}c$.

Caso 2. Infinidad de soluciones:

Si $a\neq 0$ y $b\neq 0$, entonces el $SEL(1\times 2)$ tiene una infinidad de soluciones. A saber, cualquier pareja de números reales $"x,y"$ que satisfagan la ecuación $ax+by=c$.

Si $a=0$, $b=0$ y $c=0$, entonces el $SEL(1\times 2)$ tiene una infinidad de soluciones. A saber, cualquier pareja de números reales $"x,y"$ que satisfagan la ecuación $ax+by=c$.

Caso 3. El $SEL(1\times 2)$ no tiene solución.

Si $a=0$ y $b=0$ y $c\neq 0$ entonces, el $SEL(1\times 2)$ no tiene solución.

2.1.3. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas x,y recibe el nombre de sistema de dos por dos o $SEL(2\times 2)$:

Por ejemplo: $$\left.\begin{array}{ccccc} a_{11}x & + & a_{12}y & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & = & b_2 \end{array}\right\}$$

Donde $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ y b_1,b_2 pertenecen a los reales. Una solución al sistema es una pareja $u=(s_1,s_2)$ que satisface simultáneamente a ambas ecuaciones lineales.

Para encontrar la solución de un $SEL(2\times 2)$ existen en los programas de estudio los siguientes métodos de resolución:

a) Numérico, basado en el uso de determinantes.

b) Algebraico, se fundamenta en la eliminación por sustitución, igualación, reducción (suma y resta).

c) Gráfico.

Exigiendo en dichos programas que el estudiante resuelva los sistemas por todos y cada uno de los métodos citados. Como veremos más adelante, este es un vicio de la educación elemental y básica, dados que los métodos anteriores ofrecen respuestas absurdas o tautológicas cuando el sistema planteado no tiene solución única. Más aún el "método" gráfico si se aplica a un $SEL\left(2\times 2\right)$ y el sistema tiene solución única donde los números no son enteros, difícilmente el estudiante podrá visualizar la solución a dicho sistema.

Analizando la solución de un $SEL\left(2\times 2\right)$ también se tienen 3 posibles casos, los cuales se pueden visualizar geométricamente. En efecto, sabemos que una ecuación lineal de dos variables ($a_{11}x+a_{12}y=b_1$ con a_{11},a_{12} y b_1 reales) tiene como gráfica en $\mathbb{R}^2$ una recta. Por tanto, si l_1 representa la recta relacionada con la primera ecuación y l_2 representa a la segunda ecuación, en el $SEL\left(2\times 2\right)$, suceden tres posibles casos:

i). La recta l_1 intersecta a la recta l_2 en un solo punto.

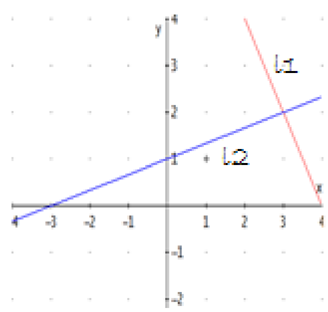


Figura 6: SEL 2x2 con solución única

ii). La recta l_1 es paralela a la recta l_2.

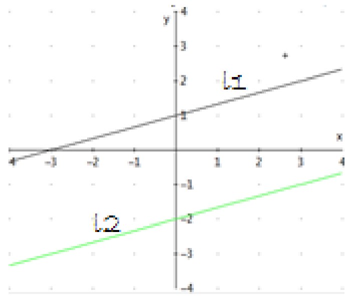


Figura 7: SEL 2x2 sin solución

iii). La recta l_1 es igual a la recta l_2.

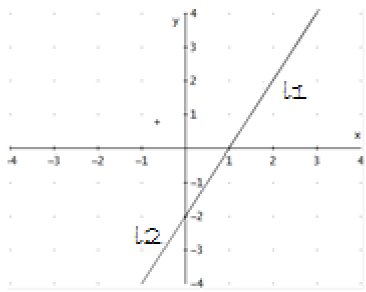


Figura 8: SEL 2x2 con infinitas soluciones

Caso i)

Las rectas, que representan a cada ecuación, se cortan en un solo punto. Esto significa que existe una única solución al sistema, que es precisamente el punto de corte. Pero para que las líneas rectas se corten, es necesario que las pendientes sean distintas (ver figura 6).

La forma pendiente-ordenada al origen de la ecuación $a_{11}x + a_{12}y = b_1$ es:

$$y = -\frac{a_{11}}{a_{12}}x + \frac{b_1}{a_{12}}, \text{ cuya pendiente es } m_1 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}$$

Y la forma pendiente-ordenada al origen de la ecuación $a_{21}x + a_{22}y = b_2$ es:

$$y = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x + \frac{b_2}{a_{22}}, \text{ cuya pendiente es } m_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}$$

Ahora bien, la condición para que el $SEL(2\times 2)$ tenga solución única, obliga a que:

$$m_1 \neq m_2$$

Es decir:

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} \neq \frac{a_{21}}{a_{22}} \text{ o bien } \frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}$$

Caso ii)

Las rectas son estrictamente paralelas, es decir que, tienen las mismas pendientes y diferente ordenada al origen (no son coincidentes). Por lo tanto, las rectas nunca se cortan y consecuentemente es imposible encontrar una solución (ver figura 7).

La condición de paralelismo obliga a que:

$$m_1 = m_2$$

Es decir:

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22}} \text{ o bien } \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}}$$

Y la condición de que no coincidan (es decir, que no esté una recta sobre la otra) está dada por:

$$\frac{b_1}{a_{21}} \neq \frac{b_2}{a_{22}} \text{ o bien } \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{a_{21}}{a_{22}}$$

En síntesis para que un $SEL(2\times 2)$ no tenga solución, los coeficientes deben estar en la proporción:

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22}} \text{ y } \frac{a_{11}}{a_{12}} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

Caso iii)

El siguiente caso se presenta, geométricamente, cuando las dos rectas son coincidentes, es decir, tienen la misma pendiente y una está sobre la otra (ver figura 8). Pero a diferencia del caso anterior, la razón de los términos independientes $\left(\frac{b_1}{b_2}\right)$ también es igual a la de las pendientes. Es decir:

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22}} \text{ y } \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{b_1}{b_2}$$

En resumen:

Un sistema 2×2 está formado por dos ecuaciones lineales con dos variables. La solución de este sistema es cualquier par ordenado de números reales que satisfaga simultáneamente a cada una de las ecuaciones. Si tenemos un $SEL\left(2\times 2\right)$

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x & + & a_{12}y & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & = & b_2 \end{array}$$

Entonces, tenemos los siguientes tres casos posibles:

a) El sistema tiene solución y es única si y sólo si $\frac{a_{11}}{a_{12}} \neq \frac{a_{21}}{a_{22}}$ o bien $\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}$.

b) El sistema no tiene solución si y sólo si $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22}}$ y $\frac{a_{11}}{a_{12}} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

c) El sistema tiene una infinidad de soluciones si y sólo si $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2}$.

Observemos que encontrar la solución de un $SEL\left(2\times 2\right)$ consiste en hallar una solución común a todas y cada una de las igualdades del sistema.

2.1.4. Ecuación lineal de tres variables

Una ecuación lineal de tres variables x, y, z tiene la forma:

$$ax + by + cz = d$$

Donde a,b,c,d son números reales; a,b,c reciben el nombre de coeficientes y d recibe el nombre de término independiente.

Si $a \neq 0, b \neq 0$ y $c \neq 0$, la gráfica de la ecuación $ax + by + cz = d$ es un plano en el espacio tridimensional.

La estrategia fundamental para dibujar el plano $ax + by + cz = d$ en un paquete graficador de superficies es, si $c \neq 0$, expresar a z en función de x y y :

$$z = \frac{d - ax - by}{c}$$

Dicho plano intersecta a los ejes x, y, z en los puntos:

$$\left(\frac{d}{a},0,0\right), \left(0,\frac{d}{b},0\right) y \left(0,0,\frac{d}{c}\right)$$, respectivamente.

Esta noción a veces es utilizada por los profesores de matemáticas para dibujar un plano manualmente en el pizarrón.

Al resolver el $SEL\,(1\times 3)$ $ax + by + cz = d$ con $a,b,c,d \in \mathbb{R}$; se tienen tres posibles casos:

Caso 1. Solución única:

El $SEL\,(1\times 3)$ $ax + by + cz = d$ tendrá una única solución en cualquiera de los tres sub casos siguientes:

Si $a = 0$, $b = 0$ y $c \neq 0$, entonces la única solución está dada por: $z = c^{-1}d$.

Si $a = 0$, $c = 0$ y $b \neq 0$, entonces la única solución está dada por: $y = b^{-1}d$.

Si $b = 0$, $c = 0$ y $a \neq 0$, la única solución está dada por: $x = a^{-1}d$.

Caso 2. Infinidad de soluciones:

Si $a=0$, $b=0$, $c=0$ y $d=0$, entonces el $SEL\,(1\times 3)$ tiene una infinidad de soluciones. A saber, cualquier terna de números reales "x, y, z" que satisfagan la ecuación $ax+by+cz=d$.

Si cualesquiera 2 de los tres coeficientes *a, b* y *c* son diferentes de cero, entonces el $SEL\,(1\times 3)$ tiene una infinidad de soluciones. A saber, cualquier terna de números reales "x, y, z" que satisfagan la ecuación $ax+by+cz=d$.

Caso 3. El $SEL\,(1\times 3)$ no tiene solución.

Si $a=0$, $b=0$, $c=0$ y $d\neq 0$, entonces el $SEL\,(1\times 3)$ no tiene solución.

Si en la ecuación $ax+by+cz=d$ uno o dos de los coeficientes son cero (asumiendo que $d\neq 0$) no solo la expresión algebraica se hace más sencilla, sino que los planos respectivos tiene características reconocibles a simple vista. Veamos los casos cuando un coeficiente es cero y los otros dos no, así como su geometría correspondiente:

- Si $a=0$ y $b,c\neq 0$, tenemos un plano paralelo al eje x.

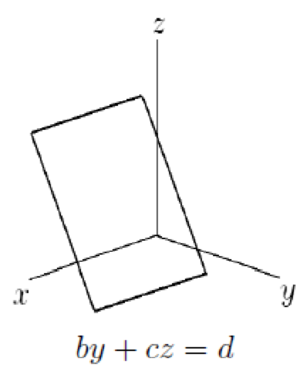


Figura 9: by + cz = d

- Si $b=0$ y $a,c\neq 0$, es un plano paralelo al eje y.

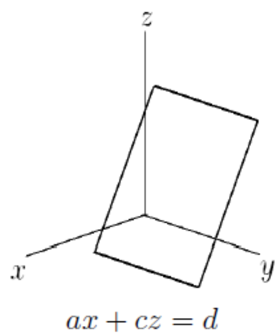


Figura 10: ax + cz = d

- Si $c=0$ y $a,b\neq 0$, el plano es paralelo al eje z.

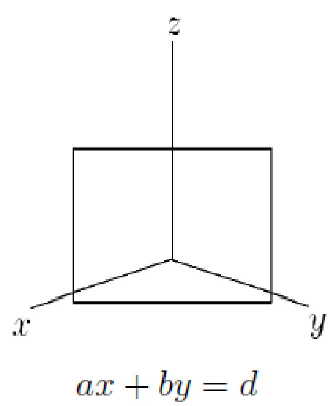


Figura 11: ax + by = d

2.1.5. Sistema con tres ecuaciones lineales de tres variables o con tres incógnitas.

Hemos visto que una ecuación de la forma $a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1$ tiene como gráfica en $\mathbb{R}^3$ un plano (siempre y cuando al menos dos de los tres coeficientes a_{11},a_{12},a_{13} sean distintos de cero). Así pues, si tenemos planos P_1,P_2,P_3, se pueden visualizar gráficamente tres posibles casos para su resolución:

Caso 1: Solución única

Un sistema 3×3 tiene solución única si los tres planos se intersectan en un solo punto (x_0, y_0, z_0).

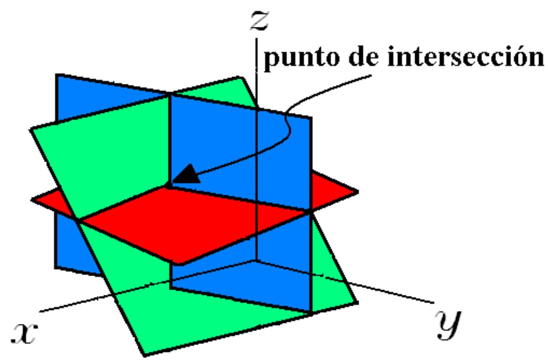


Figura 12: Tres planos que coinciden en un solo punto

Caso 2: Infinidad de soluciones

Un sistema 3×3 tiene infinidad de soluciones si:

i). Los tres planos están superpuestos.

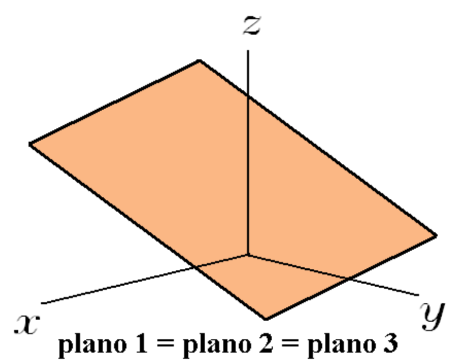


Figura 13: Tres planos coincidentes

Aquí el conjunto solución consta de todos los puntos del plano determinado por la primera ecuación, pues ellos satisfacen la segunda y tercera ecuación.

ii). Los tres planos se intersectan en una recta

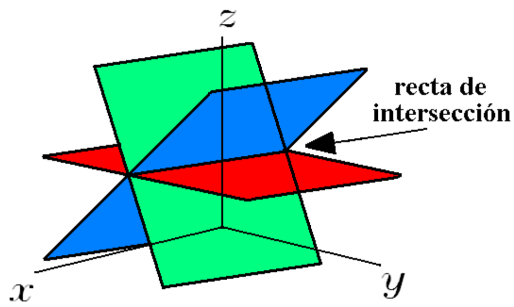


Figura 14: Tres planos que coinciden en una recta

El conjunto solución son todos los puntos de la recta que es común a los tres planos.

iii). Dos de los planos superpuestos y otro plano que los corta en una recta.

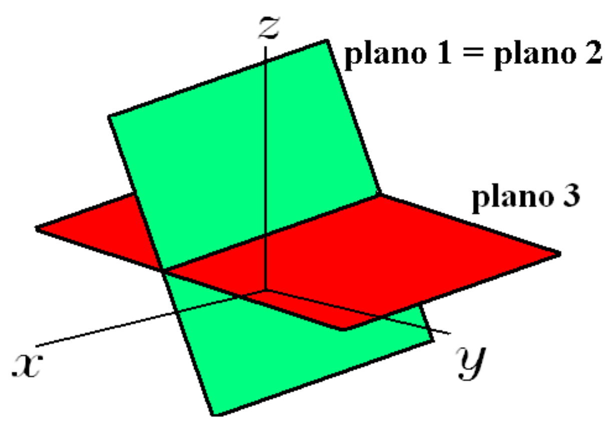


Figura 15: Dos planos coincidentes y el otro oblicuo

Es un caso particular del inciso anterior.

Caso 3: No tiene solución

Un sistema 3×3 no tiene solución si:

i). Los tres planos son paralelos

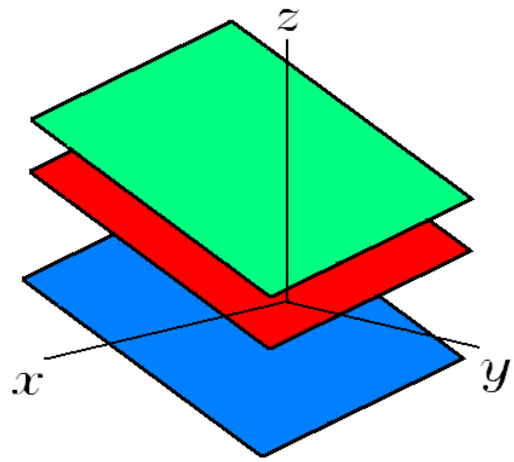


Figura 16: Tres planos paralelos

Es claro que ningún punto (x, y, z) puede estar a la vez en los tres planos.

ii). Dos planos superpuestos y el otro paralelo a ellos.

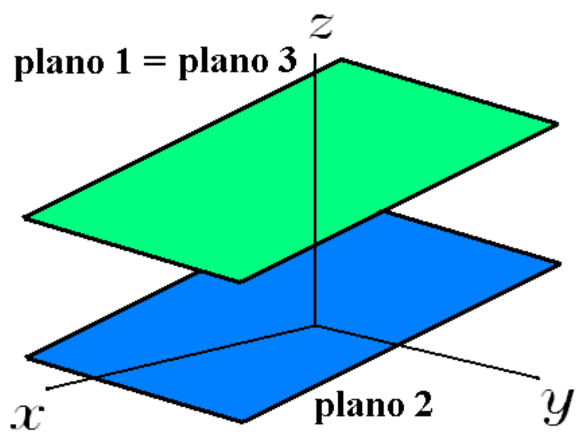


Figura 17: Dos planos superpuestos y el otro paralelo.

Se trata de un caso particular del inciso anterior. Es sencillo razonar que algebraicamente para dos de las ecuaciones se tiene que una es múltiplo de la otra, generando geométricamente planos superpuestos, mientras que para la ecuación restante solamente su lado izquierdo es múltiplo del lado izquierdo de las primeras, dando geométricamente el plano paralelo.

iii). Dos planos paralelos y el otro oblicuo (o perpendicular) a ellos.

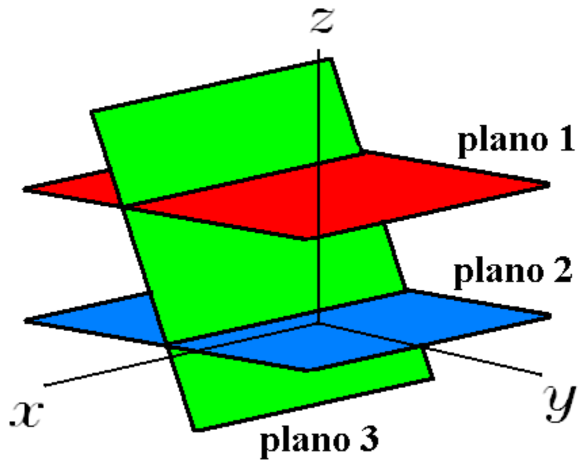


Figura 18: Plano que intersecta a dos planos paralelos.

La disposición de los planos genera dos rectas paralelas entre sí cada una de las cuales es común solamente a dos de los planos.

Al revisar las ecuaciones de este caso se observa que para dos de ellas se tiene que el lado izquierdo de una de ellas es múltiplo del lado izquierdo de la otra (planos paralelos) y los coeficientes de la ecuación restante no tiene ninguna relación con las dos anteriores.

a. Tres planos paralelos
b. Dos planos paralelos y otro que los corta
c. Plano paralelo a la línea de corte de los otros dos
d. Dos planos superpuestos y el otro paralelo

iv). Los tres planos son no concurrentes

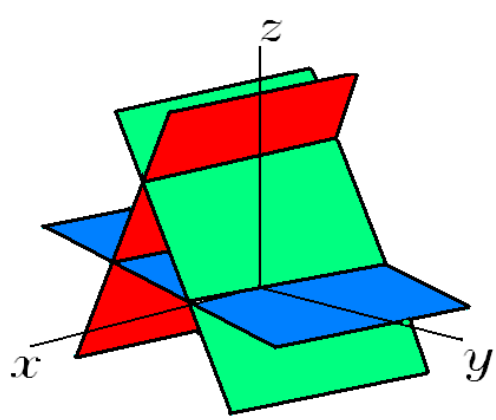


Figura 19: Tres planos no concurrentes

Los planos se intersectan de manera que generan tres rectas cada una de las cuales es común solamente a dos de los planos.

Examinemos ahora el caso general desde el punto de vista algebraico.

Definición

Un sistema de ecuaciones lineales o también llamado un sistema lineal de ecuaciones es una colección de una o más ecuaciones lineales, donde cada ecuación contiene, a lo más, el mismo número de incógnitas. En otras palabras, un sistema lineal de ecuaciones es un sistema de la forma:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} \; SEL\left(m\times n\right)$$

Este sistema es también llamado $SEL\left(m\times n\right)$, porque contiene: m ecuaciones lineales; m términos independientes $b_1,b_2,b_3,\ldots,b_m$; n incógnitas $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ y $m\times n$ coeficientes $a_{11},\ldots,a_{1n};a_{21},\ldots,a_{2n};\cdots;a_{m1},\ldots,a_{mn}$.

En un sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} \; S_1$$

Decimos que $x_1=s_1,\, x_2=s_2,\, x_3=s_3,\cdots,x_n=s_n$ es una solución al sistema S_1 si al sustituir los respectivos valores de $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ en el sistema S_1, por los valores $s_1,s_2,s_3,\ldots,s_n$, se cumple o satisfacen todas y cada una de las m ecuaciones.

En este caso que generaliza todos los casos examinados anteriormente, nos preguntaremos ¿cuantos posibles casos se tienen al resolver este sistema?, para poder dar respuesta a esta interrogante mencionaremos que fuera de los errores aritméticos y/o algebraicos, la única manera de evitar obtener falsas soluciones a un SEL es resolviendo mediante un método que produzca SELs equivalentes. Para esto se darán algunas definiciones y teoremas.

Definición

Dos sistemas lineales SEL_1 y SEL_2 son equivalentes si toda solución de SEL_1 es solución de SEL_2 y viceversa. Es decir, toda solución de SEL_2 es solución de SEL_1.

Los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales se basan en la idea de transformar el sistema original del cual queremos encontrar sus soluciones, en otro equivalente que tenga una estructura más sencilla. Solo mediante lo que se conoce como operaciones elementales, se producen sistemas equivalentes.

Definición

Dado un sistema lineal de ecuaciones definimos a las operaciones elementales como:

I) Multiplicar por un número distinto de cero a cualquier ecuación.
II) Intercambiar cualesquiera dos ecuaciones.
III) Adicionar a una ecuación un múltiplo de otra ecuación.

Teorema

Si un sistema lineal de ecuaciones SEL_1, se transforma en otro sistema SEL_2 mediante la ejecución de una o más operaciones elementales. Entonces el sistema SEL_1 y el sistema SEL_2 son equivalentes.

Demostración del inciso 3.

Sin pérdida de generalidad haremos la demostración para un sistema 3×3, en un sistema de mayor dimensión, solo aumenta la notación.

Para ello proponemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{lllllll} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \ldots\ldots(a) \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \ldots\ldots(b) \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3 \ldots\ldots(c) \end{array}\right\} \quad SEL_1$$

Ahora sumemos a la ecuación (c), k veces la ecuación (a) con lo cual se produce el sistema SEL_2

$$\left.\begin{array}{rllllllll} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 & \ldots\ldots(a) \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 & \ldots\ldots(b) \\ (a_{31}+ka_{11})x_1 & + & (a_{32}+ka_{12})x_2 & + & (a_{33}+ka_{13})x_3 & = & b_3+kb_1 & \ldots\ldots(c') \end{array}\right\} \quad SEL_2$$

Supongamos que $x_1 = s_1, x_2 = s_2, x_3 = s_3$ es cualquier solución de SEL_1, probaremos que también lo es de SEL_2.

Sea S el conjunto solución y (s_1, s_2, s_3) un elemento de S, entonces

$$\begin{array}{lllllll} a_{11}s_1 & + & a_{12}s_2 & + & a_{13}s_3 & = & b_1 \\ a_{21}s_1 & + & a_{22}s_2 & + & a_{23}s_3 & = & b_2 \\ a_{31}s_1 & + & a_{32}s_2 & + & a_{33}s_3 & = & b_3 \end{array}$$

Se satisface, y como las ecuaciones (a) y (b) son las mismas en ambos sistemas SEL_1 y SEL_2, es obvio que se satisfacen, veamos que sucede con la ecuación c' de SEL_2. Para ello sustituyamos los valores de la solución en esta ecuación.

$$(a_{31}+ka_{11})s_1 + (a_{32}+ka_{12})s_2 + (a_{33}+ka_{13}) = b_3 + kb_1$$

Efectuando operaciones:

$$a_{31}s_1 + ka_{11}s_1 + a_{32}s_2 + ka_{12}s_2 + a_{33}s_3 + ka_{13}s_3 = b_3 + kb_1$$

Reacomodando los términos tenemos:

$$\underbrace{a_{31}s_1 + a_{32}s_2 + a_{33}s_3}_{(b_1)} + \underbrace{k(a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + a_{13}s_3)}_{(kb_2)} = b_3 + kb_1$$

Por hipótesis $a_{31}s_1 + a_{32}s_2 + a_{33}s_3 = b_3$ y $a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + a_{13}s_3 = b_1$, entonces la ecuación c' se satisface por partes; y se cumple la igualdad.

Entonces $x_1 = s_1, x_2 = s_2, x_3 = s_3$ es también solución de SEL_2. Para concluir la demostración tenemos que tomar ahora cualquier solución de SEL_2 y constatar que también es solución de SEL_1. De nuevo, supongamos ahora que $x_1 = s_1, x_2 = s_2, x_3 = s_3$ es cualquier solución de SEL_2, probaremos que también lo es de SEL_1. Como (s_1, s_2, s_3) pertenece al conjunto solución de SEL_2, entonces se cumple que:

$$\begin{array}{rcrcrcl} a_{11}s_1 & + & a_{12}s_2 & + & a_{13}s_3 & = & b_1 \\ a_{21}s_1 & + & a_{22}s_2 & + & a_{23}s_3 & = & b_2 \\ (a_{31}+ka_{11})s_1 & + & (a_{32}+ka_{12})s_2 & + & (a_{33}+ka_{13})s_3 & = & b_3+kb_1 \end{array}$$

De nuevo las dos primeras ecuaciones coinciden en ambos sistemas, por lo tanto a partir de que $(a_{31}+ka_{11})s_1 + (a_{32}+ka_{12})s_2 + (a_{33}+ka_{13}) = b_3 + kb_1$, tenemos que concluir que $a_{31}s_1 + a_{32}s_2 + a_{33}s_3 = b_3$. Para ello,

$$(a_{31}+ka_{11})s_1 + (a_{32}+ka_{12})s_2 + (a_{33}+ka_{13}) = b_3 + kb_1$$
$$(a_{31}s_1 + a_{32}s_2 + a_{33}s_3) + (ka_{11}s_1 + ka_{12}s_2 + ka_{13}s_3) = b_3 + kb_1$$

Por hipótesis $ka_{11}s_1 + ka_{12}s_2 + ka_{13}s_3$, luego

$$(a_{31}s_1 + a_{32}s_2 + a_{33}s_3) + (\cancel{k}b_1) = b_3 + \cancel{k}b_1$$
$$a_{31}s_1 + a_{32}s_2 + a_{33}s_3 = b_3 \quad q.e.d.$$

El único método que existe que reduce ecuaciones creando sistemas equivalentes y que además es el más sencillo, en el sentido de menos operaciones, es el método de Gauss que a continuación mencionaremos.

2.1.6. Método de Eliminación de Gauss.

El método de Gauss consiste en que mediante la aplicación de operaciones elementales, se reduce el sistema original a otro sistema equivalente la cual se resuelve fácilmente.

La forma de entender la eliminación es por medio de un ejemplo (Sin pérdida de generalidad la haremos para un sistema 3×3).

Sistema original	$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 2 \\ 4x & - & 6y & & & = & 2 \\ -2x & + & 7y & + & 2z & = & -3 \end{array}$

Paso 1. Examinar que si el primer coeficiente de la ecuación 1 es distinto de cero. De ser así, se elige y se le denomina *pivote*. En este caso su valor es 2.

Paso 2. Eliminar la variable x de las ecuaciones que están debajo de la ecuación que contiene el pivote. Primero eliminamos a x de la ecuación 2 del sistema original. Se hace lo siguiente: multiplicamos a la ecuación 1 por (-2) y el resultado lo sumamos a la ecuación 2; es decir, aplicamos la tercera operación elemental al sistema original con $k=-2$ y obtenemos el siguiente sistema equivalente:

Sistema equivalente (SE_1)	$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 2 \\ & - & 8y & - & 2z & = & -2 \\ -2x & + & 7y & + & 2z & = & -3 \end{array}$

Ahora eliminamos a x de la ecuación 3 de SE_1 aplicando la tercera operación elemental de la siguiente manera $Ecu3 \to Ecu3 + k(Ecu1)$ con $k=1$, y se obtiene el siguiente sistema equivalente:

Sistema equivalente (SE_2)	$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 2 \\ & - & 8y & - & 2z & = & -2 \\ & & 8y & + & 3z & = & -1 \end{array}$

Nos olvidamos momentáneamente de la ecuación 1 de SE_2 para fijarnos únicamente en las ecuaciones 2 y 3, que forman digamos, un sistema de orden 2×2:

$$\begin{aligned} -8y - 2z &= -2 \\ 8y + 3z &= -1 \end{aligned}$$

Y procedemos a aplicar los pasos 1 y 2. Primero examinamos el coeficiente de y en la ecuación 2 y como es diferente de cero, se elige como pivote y eliminamos a y de la ecuación 3; de esta manera obtenemos el siguiente sistema equivalente

Sistema equivalente (SE_3)	$\begin{aligned} 2x + y + z &= 2 \\ -8y - 2z &= -2 \\ 1z &= -3 \end{aligned}$

Observamos que éste sistema equivalente al sistema original tiene una forma triangular, en consecuencia, finaliza el proceso de eliminación y lo siguiente es determinar los valores de x, y, z.

Paso 3. Aplicar la sustitución regresiva al sistema escalonado para obtener el valor o los valores de las variables. Primero resolvemos la ecuación 3 del sistema SE_3, la cual es más fácil de resolver. De esta manera obtenemos que $z = -3$.

Ahora sustituimos el valor de z en la ecuación 2 de SE_3 para encontrar el valor de y:

$$\begin{aligned} -8y - 2z &= -2 \\ -8y - 2(-3) &= -2 \\ -8y &= -8 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Por último sustituimos los valores de y y z en la ecuación 1 de SE_3. De esta manera obtenemos que

$$\begin{aligned} 2x + (1) + (-3) &= 2 \\ 2x - 2 &= 2 \\ 2x &= 4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Para comprobar que la solución encontrada es solución del sistema original (por la posibilidad de una equivocación aritmética), verificamos que efectivamente $(x = 2, y = 1, z = -3)$ es solución del sistema. Para verificar, basta con sustituir a

$(x=2, y=1, z=-3)$ en cada una de las ecuaciones del sistema original, tal como se muestra a continuación

$2(2) + (1) + (-3) = 2$	$4 + 1 - 3 = 2$	$2 \equiv 2$
$4(2) - 6(1) = 2$	$8 - 6 = 2$	$2 \equiv 2$
$-2(2) + 7(1) + 2(-3) = -3$	$-4 + 7 - 6 = -3$	$-3 \equiv -3$

Con la cual podemos afirmar que la solución satisface a cada ecuación del sistema original.

El ejemplo anterior nos permite observar la eficacia y eficiencia del pivote en el proceso de resolución de un SEL. Con el afán de no perder la línea discursiva, se dice que un pivote es aquel coeficiente $a_{ij} \neq 0$ de un SEL de orden $m \times n$, por medio del cual y junto con la aplicación sucesiva de la tercera operación elemental es posible eliminar la variable x_j de las $m-i$ ecuaciones debajo de la $Ecu\ i$.

La estructura del método de Gauss para resolver un SEL es la propia de un algoritmo formado únicamente de 2 etapas; donde la primera etapa está enfocado a la eliminación de las variables y el segundo, totalmente enfocado a resolver el sistema por medio de una sustitución regresiva. Además el método de Gauss ilustrado, es el algoritmo que menos operaciones aritméticas requiere para obtener la solución de un SEL (Strang, 1982, p.4).

Cuando resolvemos un sistema de ecuaciones lineales arrastramos con todos los elementos simbólicos que conforman al sistema, como son, las variables, los signos $(+, -, =)$ y los coeficientes. Entonces, una manera más eficiente de operar los coeficientes, en la resolución de un SEL sería representar al SEL mediante matrices.

2.1.7. Representación matricial de Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Consideramos un sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} SEL\,(m\times n)$$

Este sistema se puede escribir en la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Donde

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ llamada matriz de coeficientes del sistema

$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ matriz de variables

$\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ matriz de términos independientes

Si aumentamos la matriz de coeficientes a la derecha con los términos independientes tenemos la matriz aumentada del sistema:

$$\left[A\middle| b\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Las operaciones elementales sufren una ligera modificación, ya que las ecuaciones se remplazan por los renglones de la matriz.

2.1.8. Operaciones elementales con renglones de una matriz.

A las operaciones elementales con un sistema de ecuaciones lineales les corresponden las siguientes *operaciones elementales con renglones* de la matriz aumentada del sistema:

- Multiplicar por un número distinto de cero a cualquier renglón.

  Notación: $R_p * = \lambda$, donde $p \in \{1,\ldots,m\}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- Intercambiar (permutar) cualesquiera dos renglones.

  Notación: $R_p \leftrightarrow R_q$, donde $p,q \in \{1,\ldots,m\}$, $p \neq q$.

- Adicionar un múltiplo de un renglón a otro renglón.

  Notación: $R_q + = \lambda R_p$, donde $p,q \in \{1,\ldots,m\}$, $p \neq q$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

El proceso de aplicar las operaciones elementales con renglones para simplificar una matriz aumentada se llama reducción por renglones. Si las matrices aumentadas de dos sistemas lineales son equivalentes por renglones, entonces los dos sistemas tienen el mismo conjunto solución.

Al aplicar el método de Gauss sobre la matriz aumentada, se llega a una matriz triangular la cual se conoce como matriz escalonada.

2.1.9. Matriz escalonado.

Dado un sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Mediante notación matricial este sistema se transforma en

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Y la matriz aumentada

$$\left[A \mid \vec{b}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Mediante el método de Gauss se transforma en una matriz equivalente más simple, de la forma:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{*} & \cdots & a_{2n}^{*} & b_2^{*} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn}^{**} & b_m^{*} \end{array}\right]$$

Que representa al sistema y a esa última matriz obtenida se le llama ***matriz escalonada***.

Una matriz está en forma escalonada si tiene las tres propiedades siguientes:

1. Todos los renglones distintos de cero están arriba de cualquier renglón integrado solo por ceros.
2. Cada entrada principal de un renglón está en una columna situada a la derecha de la entrada principal del renglón que se encuentra arriba de dicha entrada.
3. Todas las entradas que se localicen en una columna situada debajo de una entrada principal son ceros.

Otra forma de resolver un SEL que evita el producir sistemas no equivalentes en su resolución es el método matricial.

2.1.10. Sistemas escalonados y su representación matricial.

Ejemplo 1.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ 3x & + & 6y & - & 5z & = & 0 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & = & 1 \end{array}$$

Solución. Obteniendo la matriz aumentada del sistema y aplicando el método de Gauss, tenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Como la última matriz ya se encuentra en su forma escalonada, representa al sistema

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ & & y & - & 4z & = & -10 \\ & & & & z & = & 3 \end{array}$$

y de este sistema, al realizar la sustitución regresiva, se obtienen los valores $z = 3$; $y = 2$ y $x = 1$.

Por último se tiene que verificar que esta solución $(1, 2, 3)$, satisface el sistema original

$(1) + (2) + 2(3) \stackrel{?}{=} 9$	$1 + 2 + 6 \stackrel{?}{=} 9$	$9 = 9$
$3(1) + 6(2) - 5(3) \stackrel{?}{=} 0$	$3 + 12 - 15 \stackrel{?}{=} 0$	$0 = 0$
$2(1) + 4(2) - 3(3) \stackrel{?}{=} 1$	$2 + 8 - 9 \stackrel{?}{=} 1$	$1 = 1$

Con la cual podemos afirmar que la solución satisface el sistema original.

Ejemplo 2.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ -6x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & = & -3 \\ -4x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \end{array}$$

Solución. Obteniendo la matriz aumentada del sistema y aplicando el método de Gauss, tenemos:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & 3 \\ -6 & 6 & 5 & -3 \\ -4 & 5 & 4 & 0 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Al escalonar la matriz se observa que el sistema original es equivalente a:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ & & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 6 \end{array}$$

Con la cual la solución queda de la forma: $x_1 = \dfrac{15 + x_3}{6}$; $x_2 = \dfrac{6 - 2x_3}{3}$; $x_3 \in \mathbb{R}$, o puesta en forma de vector quedaría como $S = \left(\dfrac{15 + x_3}{6}, \dfrac{6 - 2x_3}{3}, x_3 \right)$. Es decir, para cada valor de x_3, se obtiene una solución del sistema. Por lo tanto, El sistema tiene una infinidad de soluciones.

Ejemplo 3.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & = & -2 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & = & 5 \\ -3x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & = & -1 \end{array}$$

Solución. Obteniendo la matriz aumentada del sistema y aplicando el método de Gauss, tenemos:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \\ -3 & 5 & 4 & -1 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & -1 & -5 & -7 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Al escalonar la matriz se observa que el sistema original es equivalente a:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & = & -2 \\ & & x_2 & + & 5x_3 & = & 9 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & = & 2 \end{array}$$

La cual se observa que el sistema no tiene solución; dado que ningún valor para las variables hace de la ecuación algo distinto de cero. Por lo tanto el sistema no tiene solución.

2.2. Didáctica de las Matemáticas

2.2.1. La enseñanza tradicional

Por enseñanza tradicional nos referimos a un sistema derivado de la escuela sensorio-empirista, en este tipo de enseñanza (la cual es de tipo presencial) el docente es quien provee los conocimientos y por consiguiente es el centro de la actividad en clase. En este proceso el estudiante solo observa en forma pasiva y en el mejor de los casos lo lleva a ser un simple imitador del maestro.

Un cuadro típico de esta enseñanza se ilustra cuando el profesor elabora contenidos y los expone en clase a través de una serie de conceptos que el estudiante recibe de manera pasiva mientras observa atento al pizarrón (en el mejor de los casos). La responsabilidad del estudiante, por tanto, recae en repetir por imitación el procedimiento o algoritmo que ha visto ejecutarse y aplicarlo una y otra vez en los ejercicios que el profesor propone al terminar la clase. Este tipo de acercamiento resulta insuficiente pues como bien señala Dubinsky (1991) la imitación y memorización no induce en los estudiantes procesos cognitivos y suprime en ellos el deseo por aprender a través de ir construyendo su propio conocimiento. Más aún, aunque los objetos mentales y procesos existan en la mente del profesor, estos no se pueden trasmitir de manera verbal o a través de imágenes a los estudiantes, se requiere involucrarlos en un proceso activo de construcción de su propio conocimiento. Puesto que como afirma Piaget, la acción, por parte del educando, es el elemento fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje (Citado por Cuevas & Pluvinage, 2003).

Un primer inconveniente, para este tipo de enseñanza, es el desconcierto en los estudiantes cuando los problemas que se plantean se salen del esquema en el que fueron "enseñados".

Por ejemplo es usual que un estudiante promedio, desde el nivel medio al superior, que resuelve, aceptablemente bien, un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, se confunda y en general no llegue a resolver el mismo sistema cuando las literales que representan las variables no sean las que está acostumbrado a ver y/o la ecuación no se le presenta en la forma usual.

V. gr., si se le propone resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3q - 8p &= 23 \\ -8p &= 4q - 1 \end{aligned} \quad \ldots\ldots(\mathrm{I})$$

En lugar de:

$$\begin{array}{l} 3x-8y=23 \\ 4x+8y=1 \end{array} \;\ldots\ldots\text{(II)}$$

Se encontrará que el hecho de reemplazar las variables x e y por otras literales como q y p, es razón suficiente para no poder resolverlo. Incluso he tenido la experiencia, de que cuando a algunos alumnos se les pide resolver un sistema como (I), lo primero que hacen es intercambiar las literales q y p, por x e y para después resolverlo con éxito.

Puede concluirse diciendo que la enseñanza de las matemáticas de manera tradicional, se centra más en la manipulación sintáctica de los símbolos y reglas que en el significado de los mismos. Creando en el alumno un conocimiento demasiado frágil y volátil, pues basta dejar pasar un tiempo (breve) para olvidar el hábito adquirido. En concordancia con Cuevas (2005), con este tipo de enseñanza, a lo más que se puede aspirar es a producir hábitos en el individuo, esto es, adiestrar al educando a repetir procesos matemáticos que se enuncien y se escriban en la misma forma que el maestro los realizó.

2.2.2. Escuela activa

Después de la escuela tradicional surgió la escuela activa, que fundamenta la actividad del educando como algo vital y de gran importancia para su aprendizaje. El individuo mismo es quien efectúa las acciones concretas (que posteriormente Piaget retoma como *acciones efectivas*) para la adquisición de los conceptos o nociones que se pretendan enseñar. Sus máximos precursores fueron: Dewey, Montessori, Decroly, Claparède, y Freinet (Château, 2001). En común todos recalcan la importancia de que el educando realice la actividad y tenga un grado de libertad al hacer las cosas, sin requerir de la autoridad del profesor al dirigir completamente las acciones del estudiante, generando la posibilidad de que él plantee su propio espacio hacia el descubrimiento.

La didáctica Cuevas & Pluvinage (2003) toma como gran importancia este punto, y sugiere que el estudiante sea quien siempre realice la acción siendo guiado por el maestro. Realizar una acción no siempre se refiere un esfuerzo físico, sino puede ser mental, por eso una forma que el estudiante realice acciones es por medio de la resolución de problemas, los cuales se deberán plantearse gradualmente hasta llevar al estudiante al concepto deseado, puesto que como dice Halmos:

> *El modo más efectivo para enseñar matemáticas es resolviendo problemas, desafiar constantemente a los alumnos con problemas que estén justo al alcance de su mano (Halmos, P. 1994. p. 851).*

Teniendo en cuenta lo anterior, el estudiante es quien debe adquirir una aptitud activa, y el maestro ser un guía para él. El dirigir las acciones no se trata de dar órdenes sino de suministrar al estudiante los conocimientos previos y pautas para poder llegar a los conceptos. Halmos (1994) argumenta la importancia de que el individuo realice por sí mismo las acciones, y sugiere al maestro conducirse más como un coach o entrenador que como un "maestro":

> *…considerar el papel de un maestro como el de un entrenador. Ciertamente, nadie puede nadar por mí, nadie puede tocar el piano con mis dedos, y nadie puede hablar francés por mí, pero alguien puede ahorrarme mucho tiempo si me enseña rápidamente el camino correcto (p. 850)*

En seguimiento de la escuela activa, J. Piaget resaltó la acción como elemento fundamental del pensamiento. Por otra parte, Hans Aebli propuso los cursos de acción como una forma de enseñar al estudiante, a partir de las acciones encausadas a la construcción de los conceptos.

2.2.3. Teoría Piagetiana y de Hans Aebli

J. Piaget y Hans Aebli conformaron una escuela más moderna. Para Piaget, "*el elemento fundamental del pensamiento es la acción"* (Piaget, 1947, citado de Aebli, 1995), pues cada operación matemática surge a partir de ella, es decir, para la adición la acción de juntar cantidades, la sustracción de retirarlas, la multiplicación de tomar repetidas veces una misma cantidad; y la división, de retirar repetidas veces una misma cantidad total, o bien de distribuir una cantidad total en un determinado número de partes iguales.

Por otra parte, Aebli (1995), menciona que antes de iniciar un determinado tema, el profesor debe elaborar un plan o “curso de acción” donde sea el estudiante quien desarrolla y construye los conceptos, y el maestro solo dirige de manera lógica al educando, suministrando problemas que puedan a su vez ser indicaciones, que proporcionen elementos para que sea el mismo estudiante quien construya la solución del problema. A este principio Aebli le llamó el principio de mínima ayuda.

Pero ¿qué se puede plantear en un curso de acción para que el estudiante adquiera una aptitud activa? Como ya habíamos mencionado, una forma que el estudiante se mantenga activo y realice acciones mentales, es a través de la resolución de problemas cuya idea esencial en la enseñanza de las matemáticas es que el alumno resuelva diferentes problemas matemáticos en los que se enfrente a una diversidad de situaciones, en donde sea necesario analizar y evaluar numerosas estrategias en la solución de éstas. Sin embargo, muchos de los problemas resultan complicados para el estudiante por lo que sugiere Polya (1945) *métodos heurísticos*, para subdividirlos en cuatro etapas que son: comprensión del problema, concepción de un plan, ejecución de un plan y visión retrospectiva. Así mismo los esposos Van Hiele (Jaime & Gutiérrez, 1990), proponen para la enseñanza de la Geometría, una serie de niveles jerarquizados en los cuales el estudiante aprende los conceptos de manera dosificada.

Muchos de los planteamientos anteriores, provenientes de la principales teorías del aprendizaje, son fundamentales en el planteamiento de la didáctica Cuevas & Pluvinage (2003), las cuales enmarcan el diseño de actividades del presente trabajo.

2.2.4. Registros de representación semiótica

Los seres humanos construimos una representación mental de cada objeto, que varía fuertemente de persona a persona, que depende de su contexto, así como de los juicios que ese individuo se ha formado del mismo, es decir, el significado que asume ese objeto para él, es así como cualquier pensamiento necesita de una representación para su comunicación.

En tal sentido, se debe tener presente que es diferente la representación de un objeto (ya sea concreto o abstracto) y el objeto propiamente dicho; una cosa es “Juan” como sujeto concreto (perceptible directamente) y otra una fotografía, una caricatura o una descripción verbal (oral o escrita) que se haga de él.

La matemática es una ciencia formada por objetos intangibles, como un número, un triángulo, una operación, una función, las cuales no son objetos físicos ni reales, sino mentales e ideales, creados por el hombre para modelizar la realidad, y por lo tanto, no son directamente accesibles por la percepción. La única manera de acceder a ellos y comunicarlos es por medio de alguna de sus representaciones.

Según la Real Academia Española (RAE) una representación “es una figura, imagen o idea que sustituye a la realidad”. Por ejemplo, la representación algebraica de un sistema de ecuaciones lineales de orden $m \times n$ es:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} \quad S_{m\times n}$$

Entonces la representación algebraica de un sistema de ecuaciones lineales no es el objeto matemático en sí mismo.

En este sentido, la única forma de acceder a los objetos matemáticos, es por medio de alguna de sus representaciones. De hecho, la actividad en matemáticas está basada en gran medida en la manipulación y abstracción de las representaciones de los objetos matemáticos.

Duval (1998) manifiesta que las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propios constreñimientos de significancia y de funcionamiento. De tal manera, un sistema de signos puede ser un registro de representación, si permite las tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis:

1. La formación de una representación identificable.
2. El tratamiento de una representación.
3. La conversión de una representación.

Acerca de la tercera actividad, Duval (2006) comenta que "es más compleja que el tratamiento porque cualquier cambio de registro requiere primero del reconocimiento del mismo objeto entre dos representaciones cuyos contenidos tienen muy seguido nada en común" (p. 112). Más precisamente, es común que dos representaciones de un mismo objeto en distintos registros no sean congruentes. La congruencia de representaciones está determinada por tres condiciones según Duval (1999):

> *"… correspondencia semántica entre las unidades significantes que las constituyen, igual orden posible de aprehensión de estas unidades en las dos representaciones, y [la posibilidad de] convertir una unidad significante en la representación de salida en una sola unidad significante en la representación de llegada" (p. 6)*

Siendo las unidades significantes las partes más pequeñas en que se puede descomponer una representación. Es importante señalar que cuando se tiene congruencia entre dos representaciones en un sentido, no necesariamente se mantiene la congruencia en el otro sentido de la conversión. Asimismo se pueden cumplir parcialmente, en diferente medida, los tres criterios de congruencia lo cual nos permite comparar la congruencia entre distintas representaciones y hablar de representaciones más o menos congruentes que otras.

Diversos conceptos en álgebra lineal como por ejemplo sistemas de ecuaciones, dependencia e independencia lineal, transformaciones lineales, al trabajarlos en $\mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$, pueden representarse en por lo menos tres *registros de representación semiótica*: el algebraico, el geométrico y el matricial. Sin embargo, cuando el sistema de ecuaciones lineales depende de más de tres incógnitas, el registro de representación geométrico simplemente se anula, por nuestra imposibilidad de graficar en $\mathbb{R}^n$ con $n > 3$.

La formación de una representación semiótica en un registro dado debe respetar las reglas de formación que son propias al sistema empleado y más que reglas de producción son reglas de conformidad, ya que, la función de éstas es asegurar las condiciones de identificación y de reconocimiento de la representación, así como la posibilidad de su utilización para los tratamientos (Duval, 1998, p. 177).

Las reglas de conformidad son las que definen a un sistema de representación, y se refieren a la determinación de unidades elementales como signos, símbolos, vocabulario, etcétera; así como a las combinaciones admisibles de unidades elementales para formar unidades de nivel superior; y a las condiciones para que una representación de orden superior sea una producción pertinente y completa (Duval, 1999, pp. 41-42).

Por otra parte, el tratamiento de una representación semiótica es la transformación de esta representación en el mismo registro donde ha sido formada respetando las reglas propias del registro de representación (Duval, 1998, pp.177-178). Por ejemplo, en el caso de un sistema de ecuaciones lineales, el proceso de resolución podría decirse que es el tratamiento de la representación semiótica del SEL dentro del mismo registro algebraico. En donde, algunas de las reglas para llevar a cabo dicho tratamiento son las operaciones elementales entre ecuaciones lineales.

Un considerable número de investigadores (Kaput, Janvier, Duval, Pluvinage, etc.), han dado cuenta de la importancia de poderle ofrecer a un estudiante, la posibilidad de analizar un problema utilizando diferentes representaciones. Más aún, en las investigaciones se ha logrado detectar que un estudiante puede resolver un determinado problema dentro de un determinado registro y extraviarse en otro Duval (1998, p. 125).

Más específicamente, hacemos uso de los registros de representación semiótica, en el ánimo de identificar los elementos participativos de un determinado registro de representación, y de la necesidad de que un concepto matemático pueda ser instanciado y resuelto en los diversos registros de representación. En este sentido coincidimos totalmente con Duval, cuando señala la necesidad de varios registros de representación y el carácter central de la actividad de conversión para el funcionamiento cognitivo del pensamiento (Duval, 1998, p. 199), puesto que como el mismo afirma cada registro de representación semiótica, aporta ciertos aspectos cognitivos que no cubre otro registro, es decir, que *toda representación es parcial cognitivamente con respecto a lo que ella representa* (Duval, 1998, p.185). En otras palabras, los registros se complementan.

Pero también nos apunta que la existencia de los registros no basta, es necesaria la conversión de un registro en otro, afirmando que para la aprehensión conceptual de los objetos es necesaria la coordinación de los diversos registros (Duval, 1998, págs. 176, 181, 185, 189).

> *Se puede observar en todos los niveles un encasillamiento de los registros de representación en la gran mayoría de los alumnos. Estos no reconocen al mismo objeto a través de las representaciones que se dan de él en sistemas semióticos diferentes (Duval, 1998, p.191).*

Janvier (1987) también menciona al respecto que, uno de los principales problemas es el poder articular o trasladarse de un registro de representación semiótica a otro, señalando la importancia de poder ofrecer diferentes registros a una noción o concepto.

Desde luego, que la conversión entre registros no es algo sencillo de llevar a cabo, ya que, no sólo es presentar al alumno las distintas representaciones de un objeto matemático sino hacerlo consiente de las ventajas y desventajas de una y otra representación, que puede transitar entre una y otra sin confundirse. Y en la medida de lo posible, determinar las características que una u otra representación ofrece del objeto matemático que representa.

En fin, la teoría de los registro de representación es desde mi punto de vista bastante amplia y un análisis concienzudo de la misma no es mi propósito, sino simplemente una descripción de lo que considero los aspectos más importantes de la teoría.

2.2.5. Modelo didáctico Cuevas-Pluvinage

Esta didáctica nació por la preocupación de sus creadores, por aportar elementos para la construcción de un programa didáctico, orientado a la enseñanza de las matemáticas en un nivel post-elemental (Media superior y Superior), que evite que la enseñanza de las matemáticas se conduzca de una forma rutinaria y memorística, puesto que la mayor parte de teorías y didácticas, en aquel entonces, estaban dirigidas a los niños. Así que, eligiendo determinados principios de Aebli, Dewey, Claparéde, Brousseau, Duval y la psicología de la inteligencia de Jean Piaget, conformaron los cimientos de su didáctica, y toman como elementos primarios tres grandes principios de la escuela activa.

- **Primer elemento.** En la enseñanza es **primordial la acción.** En el caso de la enseñanza de las matemáticas, la acción más que una acción física, ésta sería mental.

  Es esencial que el estudiante esté siempre desarrollando una acción, por lo que a través de la resolución de problemas específicos, gradualmente dosificados, construya o llegue al concepto deseado.

- **Segundo elemento.** En cada introducción de un concepto o una noción matemática, **se debe partir de un problema contextualizado y que resulte interesante para el estudiante.** Este problema puede conducir a otros ejercicios o sub-problemas cuyas soluciones forman una estructura coordinada, que lleva al estudiante a definir o demostrar el concepto matemático deseado.

  Es la decisión del profesor elegir los conceptos apropiados. En cualquier caso, **nunca, introducir un concepto a partir de su definición formal.**

- **Tercer elemento.** Este apoya al anterior. Una vez resuelto el problema presentado, el estudiante debe de validar sus resultados, verificando que tenga un sentido lógico, de acuerdo con el problema planteado.

Los demás elementos que conforman la propuesta didáctica de Cuevas – Pluvinage son:

- **Cuarto elemento.** Al enseñar un concepto matemático complejo, mediante la resolución de un determinado problema. Es necesario descomponer o dividir este problema en subproblemas que representen las operaciones parciales que lo constituyen y registrar todas las operaciones y/o conceptos que resultan de este análisis, necesario para que el estudiante resuelva el problema original. Construir a partir de ahí un plan de acción, que **a través de ejercicios gradualmente dosificados, nos lleven en forma coordinada y coherente a la consecución de la meta.**

Piaget (1987, pp. 50-51) nos dice que la movilidad de una operación se define por la reversibilidad y la asociatividad. Obviamente, determina una diferencia fundamental respecto al hábito o costumbre que se da en la escuela tradicional, cuya característica rigidez la lleva a ser irreversible. Así, aunque la anterior caracterización no indica cómo enseñar, define claramente a una didáctica contraria a la creación de hábitos en los individuos. Es decir, si nos dice que no hacer.

- **Quinto elemento.** Intentar en lo posible, cada vez que se realicen operaciones que nos lleven a los conceptos matemáticos, **implementar las operaciones inversas.**
- **Sexto elemento.** Cuando se ilustre una forma o método para resolver un problema, **intentar dar algún otro tipo de alternativa.** En ningún caso, imponer una única forma de solución.
- **Séptimo.** Elaborar los problemas de acuerdo al principio de adecuación óptima; es decir, que la dificultad de los problemas sea gradual de manera que requieren

del esfuerzo del estudiante para fomentar su interés, pero no en exceso como para desanimarlo.

- **Octavo.** El principio de mínima ayuda, no dar indicaciones demasiado directas que resuelvan el problema sino sólo elementos para que el alumno construya por sí mismo la solución del problema.
- **Noveno.** Cada vez que se propongan problemas o ejercicios que apoyen la enseñanza de un determinado concepto matemático, en un determinado sistema o registro, plantear actividades semejantes al mismo, en los diversos sistemas de representación que le sean propios, si la actividad lo permite.
- **Decimo.** Si un concepto se ilustra mediante ejercicios en más de un registro de representación, instrumentar operaciones directas e inversas que promuevan la translación o articulación de los mismos.
- **Undécimo.** Plantea la necesidad de establecer problemas en donde el concepto recién adquirido sea un elemento de análisis para un tema más avanzado o complejo.

Al tratar de aplicar los elementos didácticos en la enseñanza de un concepto matemático, se enfrenta uno a dificultades para hacerlo. Las mayores dificultades encontradas son tres.

Primera dificultad. Encontrar un problema adecuado para elaborar el plan de acción práctico, que satisfaga las siguientes características:

a) Ser claro y suficientemente simple para ser entendido, pero no necesariamente que la solución sea simple.
b) Ser atractivo y provocador para la mayoría de los estudiantes.
c) Ser lo suficientemente ricos para incluir en la(s) solución(es) concepto(s) de matemáticas(s) para enseñar. Este es un gran reto para que el maestro sea sensible a las preocupaciones de sus estudiantes y para poder plantear cuestiones relacionadas con el futbol, economía, física, astronomía, gobierno, etc. Que de verdad

resulten atractivos y no justificar, de inicio, la matemática con la matemática misma.

Segunda dificultad. Llevar a cabo una inspección para encontrar que conceptos y que capacidades se requieren para que el estudiante llegue a una comprensión del concepto enseñado. Para el profesor, esta investigación representa un trabajo complejo y tedioso, ya que habitualmente el profesor asume implícitamente un conjunto de conocimientos y habilidades que los estudiantes a menudo no poseen. Se recomienda diseñar una especie de mapa conceptual. Que muestre claramente los conceptos matemáticos relacionados y necesarios para la adquisición de la noción a enseñar.

Tercera dificultad. Disponer de facilidades para presentar un concepto matemático en los diferentes registros semióticos que le sean propios. En este sentido hemos encontrado en la computadora una herramienta invaluable para poder representar, mediante modelación los diversos registros asociados.

2.3. Software Educativo

La NCTM (2008) menciona que la tecnología es una herramienta esencial para el aprendizaje de las matemáticas, en el siglo XXI, y todas las escuelas deben de asegurar que sus estudiantes tengan acceso a la tecnología. Profesores efectivos, maximizan el potencial de la tecnología para desarrollar la comprensión en los estudiantes, estimular su interés e incrementar su eficiencia en matemáticas.

El uso de la tecnología es inevitable en el proceso educativo, particularmente de la computadora. El diseño, desarrollo y uso de Ambientes Computacionales de Apoyo para la Enseñanza de las Matemáticas (ACAEM) ha ido acrecentándose a partir de los 60’s y con ello, el esfuerzo por clasificar su uso de acuerdo con las características del ambiente computacional.

2.3.1. Una clasificación de los ambientes computacionales para la enseñanza de las matemáticas.

Iniciemos este apartado sabiendo de antemano que cualquier intento de clasificación del uso de la computadora en el aula se quedará corto, ante el vertiginoso desarrollo de la tecnología y la aún más portentosa imaginación del ser humano.

De acuerdo con Cuevas (1998) "…la computadora en la enseñanza de las matemáticas es en este contexto, un medio y no un fin, por ende la computadora, es una herramienta que nos auxilia a realizar diversas tareas dentro del complejo mundo de la enseñanza de las matemáticas."(p.274). Efectivamente, la computadora tiene ciertas características que la hacen un aparato sofisticado con un fuerte impacto en el quehacer educativo; con su uso, en el contexto educativo, no se pretende delegar a la computadora la "responsabilidad" de enseñar o generar aprendizaje por el simple uso, sino que, por medio de su uso contemplado en un modelo didáctico apoye a la enseñanza de las matemáticas y desde luego al aprendizaje de las mismas.

Con la acotación anterior y de acuerdo con algunas características de la computadora, particularmente de los denominados ambientes computacionales, Cuevas (1998) clasifica los ACAEM en tres apartados, teniendo para cada uno de ellos subdivisiones:

1) La computadora como herramienta sofisticada para propósitos específicos;
2) La computadora como herramienta de propósitos generales; y
3) La computadora como una herramienta capaz de generar matemáticas.

La primera categoría ubica a la computadora como una herramienta muy sofisticada que nos permite la creación de ambientes de aprendizaje inteligentes; esta categoría se subdivide en:

1.1) La Enseñanza de las matemáticas vía enseñanza de la computación.

1.2) La Elaboración de Lecciones Tutoriales por Computadora.

1.3) Los Sistemas Tutoriales Inteligentes; y

1.4) Los Ambientes de Aprendizaje Inteligentes.

De acuerdo con Cuevas, uno de los ambiente computacionales más representativos en la subdivisión 1.1) es LOGO (Feurzeig & Papert, 1967), cuya característica principal es de tener un fácil manejo de gráficas y se crea con la premisa de que su aprendizaje produciría en los estudiantes habilidades matemáticas y lógicas en la resolución de problemas.

En el caso de 1.2) Cuevas dice: "Uno de los primeros intentos al utilizar la computadora en la educación, fue precisamente, producir material educativo a través de lecciones tutoriales en la computadora como auxilio en los cursos de matemáticas e idiomas."(p.277).

Un sistema tutorial inteligente (ITS: Intelligent Tutoring System), que corresponde al caso 1.3) es aquel que: "…se puede contemplar como un extensión de las lecciones tutoriales, es decir, un sistema que contenga una o varias lecciones tutoriales implementadas en una computadora o microcomputadora las cuales al interactuar con el estudiante, tengan un cierto comportamiento inteligente." (Cuevas, 1997, p.279).

Si bien no existe unanimidad sobre el significado del concepto de un ITS, la comunidad informática coincide en que son sistema instruccionales, adaptativos a los estudiantes, y que procuran emular los probados beneficios de la enseñanza uno-a-uno. Los ITS tienen como objetivo imitar a los tutores humanos en su habilidad para determinar en cada caso qué enseñar, cuándo enseñar y cómo enseñar, en lo posible, de un modo autónomo, es decir, en términos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, qué contenido matemático se pretende enseñar, a quién será enseñado y cómo será enseñado. De allí que las componentes de un ITS sean:

- ✓ un módulo experto, el cual contiene el núcleo del conocimiento del tema.
- ✓ El módulo tutor, la componente tutorial es la encargada de presentar los problemas, proponer actividades y dosificar mediante un orden previamente establecido, dentro de cada tema y subtema por la componente didáctica a partir del análisis de los conceptos de mayor trascendencia.
- ✓ El módulo de error o estadístico del estudiante, en la que se contiene una base de datos estructurada de los errores estadísticos más frecuentes que los estudiantes realizan en la resolución de un determinado problema.
- ✓ El módulo instruccional e interfaz, es aquella que establece la comunicación entre el sistema y el estudiante, con una interfaz fácil de usar y diseñada para este fin.

Una pretensión de los ITS en algunos casos es la sustitución del maestro; sin embargo, trabajos como LIREC (Cuevas, 1994) y CalcVisual (Cuevas, 1995) marcan una diferencia sustancial, no pretenden sustituir al profesor; por el contrario promueven al profesor como un elemento vital para un buen desarrollo en la implementación de este tipo de ambientes computacionales. Debemos observar que en el fondo se trata de cumplir el mismo propósito de las dos subdivisiones anteriores: apoyar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En la subdivisión 1.4) de acuerdo con Cuevas (1998) "…lo constituye el uso de la computadora como fabricante o constructor de "herramientas" para el aprendizaje y desarrollo de conceptos matemáticos."(p.281). Un ejemplo de este tipo de ambientes es el conocido Geogebra (Hohenwarter, 2001); un ambiente computacional denominado software interactivo que reúne geometría, álgebra y cálculo.

La segunda categoría, en la que ubica a la computadora como una herramienta de propósito general en la labor cotidiana del docente y/o alumno. Se divide en:

2.1) La Computadora como auxiliar del profesor al elaborar y presentar material didáctico.

2.2) La Computadora como apoyo al trabajo docente y de investigación en la enseñanza de las matemáticas o materias afines.

En el 2.1) existe otra subdivisión:

2.1.1) Como pizarrón y/o cuaderno electrónico.

Tenemos un uso de la computadora enfocado a la enseñanza de contenido matemático por medio de software comercial como: Maple, Mathematica, Derive, Matlab, etcétera. En la que el profesor puede manipular parámetros o datos dependiendo del programa y se refleja en la pantalla el efecto de las variaciones en los parámetros o datos.

2.1.2) Como herramienta en la elaboración de listas, notas, apuntes, textos, etc.

Se habla del uso de la computadora por medio de softwares que ayudan a desarrollar adecuadamente la actividad docente mediante un procesador (WORD, POWER POINT, SCIENTIFIC WORD, MATHCAD, HTML, etc.) por ejemplo, el uso de Microsoft Power Point para la presentación de cierto contenido matemático o bien, Microsoft Excel para la elaboración de listas de calificación, o Microsoft Word para la elaboración de notas de clase o problemarios.

La tercera y última categoría, se refiere en términos generales a la generación de nueva matemática a partir del uso de la computadora, ya sea por el uso de ambientes computacionales existentes o bien, por el desarrollo de ambientes computacionales. El autor da como ejemplo el caso de la denomina Teoría del Caos, la cual nace a partir de la prueba del teorema de los cuatro colores (Appel & Hankel, 1976). La cual se realizó mediante una computadora que examinó la totalidad de casos en un conjunto finito. Este hecho resuelve uno de los problemas más inquietantes de topología algebraica y abre además una perspectiva y discusión alrededor de lo que en matemáticas significa una “prueba”. Otro de los sucesos espectaculares de los últimos tiempos, lo constituye el trabajo de Lorentz (Lorentz, 1963), quien al estudiar los resultados aportados por la solución a una ecuación diferencial para predecir el clima, en una computadora, encontró que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales producían grandes variaciones en el comportamiento a largo plazo.

2.3.2. Características de un buen software educativo.

En este trabajo nosotros consideramos un software educativo como aquel software o ambiente computacional cuyas características estructurales y funcionales sirvan para facilitar los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Mochón (2006), menciona que un buen software educativo debe poseer ciertas características: Dinámico, Interactivo, Exploratorio, Abierto, Universal, No denso, Concentrado, Social, Didáctico y guiado. Hay que señalar que estas características, como el mismo autor lo señala, nacen a partir de un modelo pedagógico del que no daremos detalles, ya que consideramos que independientemente del modelo pedagógico la mayoría del software educativo debe considerar y satisfacer en la medida de lo posible las características mencionadas.

Mochón se refiere con dinámico a la acción, movimiento y cambio; interactivo a que el ambiente no sólo proporcione información, sino que también la reciba; exploratorio a la capacidad de procesar la información y devolver una respuesta; abierto a la capacidad del ambiente de ser utilizado en distintos modelos didácticos; universal a la independencia de un periodo o grupo específico; no denso a lo conciso de los textos (ayuda, información, etcétera) y a la presentación de pocos componentes (los necesarios) en la interfaz; concentrado al tratamiento desde varias perspectivas de una o dos ideas; social a la capacidad de fomentar la interacción entre los estudiantes; didáctico al cumplimiento de un propósito didáctico definido centrado en el desarrollo conceptual; y guiado a dirigir a los estudiantes hacia un objetivo didáctico.

Por otra parte, existen otras características a considerar en la creación de software con un propósito educativo.

2.3.2.1. Usabilidad.

Coloquialmente, suele definirse 'usabilidad' como la propiedad que tiene un determinado sistema para que sea 'fácil de usar y de aprender'; tratándose de una propiedad que no es sólo aplicable a los sistemas software, sino que, como muestran Norman y Drapper (1986) y Norman (1990), es aplicable a los elementos de la vida cotidiana.

Nielsen (1993), sugiere que la usabilidad es un término multidimensional. Indica que un sistema usable debe poseer los siguientes atributos: 'capacidad de aprendizaje', 'eficiencia en el uso', 'facilidad de memorizar', 'tolerancia a errores' y 'subjetivamente satisfactorio'. Nielsen (1993), señala que la aceptabilidad de un sistema es una combinación de su aceptabilidad social y de su aceptabilidad práctica. Lo social tiene que ver con la aceptación que un grupo de personas puede dar a un sistema. Lo práctico incluye costes, soporte, confiabilidad y compatibilidad con los sistemas existentes, etc.. A la vez, la aceptabilidad práctica incluye la utilidad y usabilidad, donde la utilidad implica que el sistema responda a la meta para la cual fue creado.

Para explicar cada parámetro, Nielsen establece en cada uno ciertas preguntas:

Cualidad de aprender: ¿Cuán fácil es para el usuario acoplarse a las tareas básicas del diseño, la primera vez que se enfrenta a él?

Facilidad de aprendizaje: A la hora de interactuar con un recurso su aprendizaje sea accesible y proporcione la facilidad para interactuar con él.

Eficiencia de uso: Mejorar las tareas realizadas con la utilización del recurso alcanzando un nivel alto de productividad.

Facilidad para recordar: Cuando se vuelve a utilizar el recurso se pueda recordar su funcionamiento o tener mayor conocimiento de él que la primera vez que se utilizó.

Pocos errores: Un recurso es accesible cuando el nivel de errores es mínimo o se tienen la facilidad para identificar de qué manera se pueden corregir y no interrumpir su utilización.

Satisfacción: La sensación de haber tenido una grata experiencia de uso.

Preece (1994), propone una definición más intuitiva, como sistemas fáciles de usar y de aprender. Bevan (2005), define la usabilidad como la “facilidad de uso y la aceptabilidad que tiene un sistema o producto para una clase particular de usuarios que llevan a cabo tareas específicas en un entorno específico”.

La usabilidad no se refiere solamente a hacer que los sistemas sean simples, sino que comprende además la satisfacción de los objetivos de los usuarios, el contexto de su trabajo y cuál es el conocimiento y la experiencia de que disponen.

Capítulo III. Aspectos Metodológicos

Para enseñar matemáticas, una condición necesaria es saber matemáticas; pero no es suficiente.
Cuevas C. A.

Los trabajos mencionados en el capítulo I muestran resultados donde explican las representaciones, estrategias y dificultades que presentan los estudiantes sobre las posibles soluciones que puede tener en un sistema de dos y tres ecuaciones lineales con dos o tres incógnitas, en la representación gráfica y analítica. Nosotros aseguramos que el problema es más básico y que en una generalidad los estudiantes poseen una representación errónea acerca del concepto de solución para una ecuación y del proceso de resolución a la misma. La ecuación puede ser lineal con una incógnita, o un SEL $(m \times n)$. Esto representa un gran obstáculo en el desarrollo de un curso de álgebra lineal y más aún cuando la resolución de un SEL constituye el corazón en el desarrollo del curso.

En este capítulo describiremos la manera en la que llevamos a cabo nuestra investigación y comentaremos acerca de los instrumentos que diseñamos, cabe resaltar que el experimento se desarrolló en distintas fases y diversos centros de estudios.

3.1. Diseño y Aplicación del cuestionario diagnóstico.

Los Drs. Cuevas y Madrid han experimentado con este cuestionario en años y se aplica al inicio del curso de álgebra lineal. Los estudiantes de estos cursos proceden de diversas escuelas de matemáticas y de ingeniería en su gran mayoría. Aunque el cuestionario es más extenso sólo tomaremos del mismo las preguntas pertinentes a esta investigación, con el objetivo de observar las estructuras cognitivas que presentan los estudiantes acerca del concepto de la solución a un sistema de ecuaciones lineales, desde su forma más elemental (1×1) lo cual comprueba de alguna manera nuestra hipótesis, de que este problema se origina desde la enseñanza elemental (el cuestionario se presenta en el anexo I).

La pregunta central es resolver la ecuación $ax = b$ en tres modalidades:

(a). $2x = 3$

(b). $0x = 3$

(c). $0x = 0$

Hay dos valores de coeficientes, $0\ y\, 1$que:

- ✓ $0x$ se remplaza normalmente por cero, no se escribe $0x$, y
- ✓ $1x$ se remplaza normalmente solo por “ x ”.

Las ecuaciones del inciso *a,b y c* no son ecuaciones que se encuentran como tal pero que si aparecen en casos con parámetros y que tienen el interés de poner de manifiesto la concepción de solución que tienen los estudiantes.

Este cuestionario se aplicó en 4 diferentes centros de estudios, uno fue aplicado a estudiantes de Maestría de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Coahuila (FCFM-UAdeC); otro se aplicó a estudiantes de diversas licenciaturas e ingenierías de la Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Ciencias Sociales y Administrativas del Instituto Politécnico Nacional (UPIICSA-IPN); una tercera a estudiantes del curso de Álgebra Lineal del tercer semestre del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (DME-CINVESTAV) y finalmente otro cuestionario a estudiantes de recién ingreso al DME-CINVESTAV. Para ello se elaboró y aplicó el primer instrumento de edición, que consistió en un cuestionario diagnóstico, a estudiantes de la FCFM-UAdeC, UPIICSA-IPN y a estudiantes del curso de Álgebra Lineal del DME-CINVESTAV, en donde el propio sustentante de esta tesis fue sujeto de la experimentación. Para la cuarta experiencia se elaboró un cuestionario, que evalúa el proceso y solución a una ecuación a los estudiantes de nuevo ingreso del DME-CINVESTAV.

El análisis de los resultados obtenidos en la aplicación del cuestionario diagnóstico, da la pauta para el diseño de las actividades que forman el cuerpo del nuevo cuestionario.

3.2. Diseño y aplicación del Test

3.2.1. Diseño

Este instrumento se diseñó con el objetivo de observar cuales son las estrategias que utilizan los estudiantes para resolver el problema y cuáles son las dificultades que presentan en cuanto al concepto del conjunto solución de un sistemas de ecuaciones lineales.

3.2.2. Aplicación

La aplicación del Test sólo se llevó a cabo en una unidad académica (UPIICSA-IPN) con el mismo grupo a la que se le aplicó el pre-test o cuestionario diagnóstico. Esta aplicación se da justamente después de haber abordar las unidades temáticas **“Matrices, Determinantes y Sistemas de Ecuaciones Lineales”** (el instrumento se presenta en el anexo II).

3.2.3. Grupo de estudio

El grupo estaba formado por 44 estudiantes que cursaban la materia de álgebra lineal (cuyo programa está en el anexo III). El cual estaba conformado de la siguiente manera:

- ✓ 6 estudiantes de Licenciatura en Ciencias de la Informática,
- ✓ 4 estudiantes de Ingeniería en Informática
- ✓ 24 estudiantes de Licenciatura en Administración Industrial
- ✓ 3 estudiantes de Ingeniería en Transporte
- ✓ 7 estudiantes de Ingeniería Industrial

Para la muestra se seleccionó a los estudiantes de mayor calificación (Si el problema se evidenciaba en ellos, los problemas iban a ser mayúsculos en los alumnos de menor promedio) obtenida mediante tareas y evaluación escrita en la primera evaluación departamental, que comprendía los temas de matrices y determinantes en la idea de que la muestra no contuviera alumnos con problemas en el aprendizaje de los temas precedentes para que los resultados fueran contundentes. Además los estudiantes seleccionados cursaban por primera vez la materia de álgebra lineal. En la carrera de Administración Industrial se seleccionó a 2 estudiantes debido a que tenían exactamente la más alta calificación, y en las demás carreras solo uno correspondiente a la más alta calificación. Sus sobrenombres serán: Alan, David, Fernando, Maricela, Brandon y Gerardo.

3.2.4. Exposición a detalle del Test

En este análisis explicitaremos el propósito de cada una de las preguntas del test y algunas posibles situaciones que se podrían presentar con los estudiantes.

Ítem #1

Dada la siguiente matriz aumentada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & \vdots & -8 \\ -2 & -3 & 6 & \vdots & 5 \\ 3 & -7 & -1 & \vdots & -6 \end{bmatrix}$$

a) Establezca un SEL que tenga dicha matriz aumentada.

En esta pregunta se le presenta al estudiante una matriz aumentada $\left[A \vdots b\right]$ de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas; la respuesta a esta pregunta nos permitirá observar si el estudiante es capaz de pasar de un registro de representación matricial a un registro de representación algebraica.

En el inciso “b” deseamos observar si el estudiante logra relacionar que si un SEL 3x3 la satisface dos ternas, dicho sistema no tiene solamente dos soluciones, sino que tiene una infinidad de soluciones.

Ítem #2

Dado el siguiente SEL.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 11 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & = & 23 \\ -3x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 20 \end{array}$$

a) ¿Es la terna $(4,-4,-5)$ solución del sistema? SÍ, NO, ¿Por qué?

En esta pregunta se le presenta al estudiante un sistema de ecuaciones lineales de tres ecuaciones con tres incógnitas y se le pide que verifique si la terna proporcionada es solución del sistema, además queremos observar las dificultades que presenta al momento de trabajar con el concepto de conjunto solución. Se espera que el estudiante sustituya la terna sin mayor dificultad en el SEL y que observe que satisface la primera y la segunda ecuación, pero no satisface la tercera ecuación y así indicar que dicha terna no es solución del sistema.

Nuestro objetivo es asegurarnos que los entrevistados no tengan dificultad en sustituir la solución en cada una de las ecuaciones de dicho sistema, ya que las dificultades que esperamos que ocurra es que no corroboran la solución en todas las ecuaciones debido a que no relacionan que la solución de un sistema es aquella que satisface a todas las ecuaciones que conforman dicho sistema.

Si el estudiante encuentra el conjunto solución del sistema y afirma que la terna no es solución del sistema, entonces decimos que no ha entendido que es la solución de un SEL y que está acostumbrado a la mecanización.

Ítem #3

Resuelve el siguiente SEL por el método que prefieras.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}$$

En esta pregunta queremos observar cómo aplican el método de resolución de su preferencia para resolver un sistema de ecuaciones lineales de 3×3 con solución única, además queremos observar las dificultades que presenta al momento de trabajar con el concepto de conjunto solución. Se espera que el estudiante sustituya la terna que obtenga sin mayor dificultad en el SEL y que observe que dicha terna obtenida es o no es solución del sistema.

Ítem #4

Dado el siguiente SEL.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & 6x_3 & = & 5 \\ -2x_1 & - & 4x_2 & + & 8x_3 & = & -2 \end{array}$$

a) Las siguientes ternas $(5,-4,-1)$, $(3,-1,0)$, $(-1,2,1)$ ¿son soluciones del sistema?

b) ¿Cuántas soluciones tiene el sistema?

En el inciso "a" se le pide que verifique si cada una de las tres ternas proporcionadas son soluciones del sistema. La idea fundamental es el comprobar que en general el estudiante no considera necesario sustituir la terna en cada una de las tres ecuaciones del SEL, además queremos observar si el estudiante le basta sustituir la terna o resuelve el SEL para comprobar si la solución obtenida coincide con la terna.

En la práctica hemos encontrado que para resolver el problema el estudiante recurre a lo siguiente:

- El estudiante solo sustituye las ternas en una o dos de las tres ecuaciones del SEL.
- El estudiante sustituye en las tres ecuaciones del SEL.
- El estudiante resuelve el sistema dejando a x_1 y x_2 términos de x_3, para luego sustituir el valor dado y comprobar si son solución o no.

En el inciso "b" deseamos observar si el estudiante logra relacionar que si un SEL 3x3 la satisface dos ternas, dicho sistema no tiene solamente dos soluciones, sino que tiene una infinidad de soluciones. Tenemos que recordar que este test se aplicó después de que el estudiante conoce el resultado de que al resolver un SEL solo se tienen tres posibilidades. Solución única; infinidad de soluciones y sin solución.

Ítem #5

Partimos del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{cccccc} 2x & + & \lambda y & = & 1 \\ \lambda x & + & 2y & = & 1 \end{array}$$

Donde λ es un número real.

a) Escribir la ecuación matricial de este sistema

b) Hallar los valores de λ para los cuales el sistema tenga:

   i. exactamente una solución.

   ii. no tenga solución.

   iii. infinitas soluciones.

c) Realizar una interpretación geométrica de $(i), (ii)$ y (iii).

En esta pregunta se le presenta al estudiante un sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas. Con esta pregunta queremos observar las estrategias que presenta el estudiante al momento de querer determinar los términos faltantes y las dificultades que puede presentar al averiguar la relación del conjunto solución.

3.3. Propuesta alternativa para promover una mejor comprensión del concepto de solución y resolución de un SEL.

Uno de los mayores problemas para comprobar si una determinada eneada es solución o no de un SEL es la complejidad aritmética por los engorrosos cálculos numéricos asociados. Entonces una forma de reducir este trabajo es con el uso de la tecnología digital. De tal forma que el estudiante pudiera delegar al software los cálculos numéricos pero sin deterioro de la parte conceptual. En este sentido se diseñó y elaboró un software que pudiera representar una herramienta cognitiva útil para los estudiantes y a la vez promoviera el concepto de solución.

3.3.1. Descripción del trabajo realizado

En la idea de aportar una alternativa de apoyo con el recurso de las nuevas tecnologías al problema de la enseñanza de las matemáticas; se diseñó y desarrolló un Ambiente Computacional de Apoyo a la Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática (ACAEM) el cuál llamamos SELyTEC (**S**istema de **E**cuaciones **L**ineales **y TEC**nología). La creación de un ACAEM es una actividad en la que intervienen, por lo menos, tres áreas de conocimiento: matemática, cognición y computación. Por lo tanto, el estudio y reflexión de cada conocimiento es esencial e ineludible.

Hay muchos elementos de corte didáctico-psicológico que son difíciles de llevar a cabo con los medios de la enseñanza tradicional, como por ejemplo la visualización de los diversos registros de representación (Duval, 1998), o la acción personalizada por parte del educando (Piaget), o partir de proyectos de acción práctico (Aebli, 1968), etc. Este es precisamente uno de los problemas de la educación ¿Cómo instrumentar una didáctica? En este sentido, si se contempla a la computadora como una herramienta capaz de procesar complejos cálculos numéricos y gráficas sofisticadas, ésta no pasará de una herramienta poderosa pero poco útil para el proceso de aprendizaje; Sin embargo, “si se le visualiza y se utiliza" como una herramienta cognitiva que hace posible la implementación en el aula de diversas propuestas de corte didáctico; sistemas como el SELyTEC podrán constituirse en una herramienta útil tanto para el profesor como para el alumno.

Hemos elegido el modelo didáctico Cuevas & Pluvinage (ver capítulo 2, pp. 67-70), porque en él se encuentran la mayoría de los elementos didácticos necesarios para cubrir nuestro objetivo. Por ejemplo, nosotros deseamos que el estudiante construya su propio conocimiento. En este sentido, la didáctica Cuevas & Pluvinage propone estimular constantemente al alumno a resolver problemas con la finalidad de mantenerlo en un estado de acción, y que sea él, en la medida de lo posible, quien construya y llegue al conocimiento deseado. En este sentido, un elemento importante del diseño, lo constituye la propuesta de ir hacia el proceso y no a la solución y en este sentido en el ambiente, el usuario siempre está en acción.

Para el lector no interesado en las cuestiones técnicas de desarrollo de software y en particular de la elaboración de SELyTEC puede omitir las secciones 3.3.2, 3.3.2.1 y 3.3.2.2.

3.3.2. Desarrollo Computacional de SELyTEC

La programación es un oficio semejante al arte, por ejemplo, así como un pintor dibuja y da forma a sus cuadros, necesita conocer y aprender las técnicas del color; el programador necesita conocer todas las técnicas de programación (esto nos hace eternos estudiantes debido a los cambios vertiginosos en el ámbito computacional) y métodos que le sean posibles para igual que el anterior, poder combinarlas para crear su propia obra de arte, en donde se requiere constancia, habilidad y conocimiento en el lenguaje de programación.

En este apartado describiremos el desarrollo computacional del diseño didáctico de SELyTEC, para empezar, hablaremos brevemente del entorno de desarrollo donde construimos el ambiente computacional.

3.3.2.1. Ambiente de Programación: HTML5

HTML5 no es una nueva versión del antiguo lenguaje de etiquetas HTML, ni siquiera una mejora de esta ya antigua tecnología, sino un nuevo concepto para la construcción de sitios web y aplicaciones en una era que combina dispositivos móviles, computación en la nube y trabajos en red.

Todo comenzó mucho tiempo atrás con una simple versión de HTML (***H**yper**T**ext **M**arkup **L**anguage)* propuesta para crear la estructura básica de páginas web, organizar su contenido y compartir información. El lenguaje y la web misma nacieron principalmente con la intención de comunicar información por medio de texto.

El limitado objetivo de HTML motivó a varias compañías a desarrollar nuevos lenguajes y programas para agregar características a la web nunca antes implementadas. Estos desarrollos iniciales crecieron hasta convertirse en populares y poderosos accesorios. Simples juegos y bromas animadas pronto se transformaron en sofisticadas aplicaciones, ofreciendo nuevas experiencias que cambiaron el concepto de la web para siempre.

Javascript, HTML y CSS se convirtieron pronto en la más perfecta combinación para la necesaria evolución de la web. HTML5 es considerado el producto de la combinación de HTML, CSS y Javascript. Estas tecnologías son altamente dependientes y actúan como una sola unidad organizada bajo la especificación de HTML5.

- ✓ HTML está a cargo de la estructura,
- ✓ CSS presenta esa estructura y su contenido en la pantalla y
- ✓ Javascript hace el resto.

CSS

CSS es un lenguaje de hojas de estilos creado para controlar el aspecto o presentación de los documentos electrónicos definidos con HTML. CSS es la mejor forma de separar los contenidos y su presentación y es imprescindible para crear páginas web complejas.

Separar la definición de los contenidos y la definición de su aspecto presenta numerosas ventajas, ya que obliga a crear documentos HTML bien definidos y con significado completo (también llamados "documentos semánticos"). Además, mejora la accesibilidad del documento, reduce la complejidad de su mantenimiento y permite visualizar el mismo documento en infinidad de dispositivos diferentes.

Al crear una página web, se utiliza en primer lugar el lenguaje HTML para marcar los contenidos, es decir, para designar la función de cada elemento dentro de la página: párrafo, titular, texto destacado, tabla, lista de elementos, etc.

Una vez creados los contenidos, se utiliza el lenguaje CSS para definir el aspecto de cada elemento: color, tamaño y tipo de letra del texto, separación horizontal y vertical entre elementos, posición de cada elemento dentro de la página, etc.

3.3.2.2. Lenguaje de programación: JS y PHP

Javascript

Javascript es un lenguaje de programación utilizado en el desarrollo y diseño de sitios web dinámicos. No requiere de compilación ya que el lenguaje funciona del lado del cliente, los navegadores son los encargados de interpretar estos códigos, aunque existe una forma de JavaScript del lado del servidor (Server-side JavaScript o SSJS).

Muchos confunden el Javascript con el Java pero ambos lenguajes son diferentes.

PHP

PHP es un acrónimo recursivo que significa PHP Hypertext Preprocessor (inicialmente *Personal Home Page Tools*), y se trata de un lenguaje de scripting para la programación de páginas dinámicas de servidor. Es un lenguaje de código abierto (OpenSource). Es decir que se le pueden introducir modificaciones y mejoras y ponerlas a disposición de los demás usuarios del mismo.

Otra característica importante es que se trata de un lenguaje multiplataforma, esto quiere decir que la aplicación web desarrollada en PHP puede funcionar en casi cualquier tipo de plataforma Windows, Unix/Linux (y sus diferentes versiones y distribuciones) y Mac. También ofrece soporte a los motores de base de datos más populares (SQL Server, MySQL, PosgresSQL, Oracle, etc.), como así también acceso ODBC (Open DataBase Conectivity).

Una aplicación web basada en PHP necesita dos tipos de software. El primero es un servidor web que va a atender las peticiones de los usuarios y devolverá las páginas solicitadas. El servidor Apache, tanto su versión Windows como Linux es el más utilizado. El segundo software es el propio PHP, es decir el módulo que se va a encargar de interpretar y ejecutar los scripts que se soliciten al servidor.

Lo que distingue a PHP de algo como Javascript del lado del cliente es que el código es ejecutado en el servidor, generando HTML y enviándolo al cliente. El cliente recibirá el resultado de ejecutar el script, aunque no se sabría el código subyacente que era. El servidor web puede ser incluso configurado para que procese todos los ficheros HTML con PHP, por lo que no hay manera de que los usuarios puedan saber qué se tiene debajo de la manga.

3.4. Diseño y desarrollo de la experiencia didáctica.

La implementación del ambiente computacional SELyTEC, toma en cuenta la didáctica Cuevas & Pluvinage (2003), particularmente en el punto que indica:

> *"Es esencial que el estudiante este realizando siempre una acción, por lo que a través de la resolución de problemas específicos, gradualmente dosificados, construya o llegue al concepto deseado"*.

El SELyTEC permite al estudiante acceder a conceptos necesarios ofreciendo una ayuda contextual en cada paso de la actividad, así como la realización de tareas aritméticas complejas e innecesarias para la comprensión del concepto. Otra ventaja del software es que las ecuaciones se generan de manera aleatoria de tal forma que cada estudiante estará trabajando con ejercicios diferentes en cada una de las actividades.

Se diseñaron cuatro actividades basadas en el SELyTEC; con ellas se pretende que los estudiantes interactúen, exploren y a través de su propia experiencia interioricen el concepto de solución de un SEL. Estas actividades, están constituidas por una guía que les permitirá trabajar con SELyTEC y una sección de ejercicios de retroalimentación que los estudiantes tendrán que realizar después de interactuar con el software.

3.4.1. Actividad I: Ecuación ax=b.

La primera actividad propone a los estudiantes a que sustituyan valores en la ecuación lineal de una sola variable $ax = b$ generando valores de a y b de forma tal que la ecuación pueda tener solución única, infinitas soluciones o sin solución (el instrumento se presenta en el anexo IV).

3.4.2. Actividad II: Ecuación ax + by = c.

La segunda actividad propone a los estudiantes a que sustituyan valores en la ecuación lineal de dos variables $ax + by = c$ de forma tal que la ecuación pueda tener solución única, infinitas soluciones o sin solución (el instrumento se presenta en el anexo V).

3.4.3. Actividad III: Matriz Aumentada.

La tercera actividad propone a los estudiantes a que transite entre el registro algebraico al registro matricial. Esta actividad se necesitará para la siguiente (el instrumento se presenta en el anexo VI).

3.4.4. Actividad IV: ¿Solución o no solución?.

El objetivo de esta actividad es que el estudiante interiorice que la solución de un sistema es aquella que satisface simultáneamente todas las ecuaciones (el instrumento se presenta en el anexo VII).

3.4.5. Actividad V: Aplicaciones.

Esta actividad se desarrolla de acuerdo a la sugerencia de la didáctica Cuevas-Pluvinage que plantea la necesidad de *establecer problemas en donde el concepto recién adquirido sea un elemento de análisis para un tema más avanzado o complejo* (el instrumento se presenta en el anexo VIII).

3.5. Diseño y aplicación del Pos-Test.

Una vez terminadas las hojas de trabajo para los estudiantes y el diseño de las actividades, se requiere de un instrumento que permita establecer una comparativa sobre el nivel de competencia antes y después de desarrollar las actividades (ANEXO

IX). Así, se dispuso el diseño de un instrumento pos-test, cuyos reactivos se detallan a continuación. Cabe señalar que el post-test tiene las mismas características que el test, es decir, el mismo tipo de ítems pero con valores diferentes, esto con la finalidad de determinar el avance que los estudiantes tienen una vez que realicen las actividades propuestas.

3.5.1. Aplicación

La aplicación del pos-test se llevó a cabo en la unidad académica UPIICSA-IPN con el mismo grupo que se llevó acabo el cuestionario diagnóstico y el pre-test. Se llevó a cabo en el horario de clase del profesor, se aplicó en forma individual. Se les proporcionó a los estudiantes hojas blancas y bolígrafos, en la mayoría de las actividades se solicita al estudiante proporcionar alguna justificación para la respuesta que haya propuesto ya que todo el análisis que se requiere hacer alrededor de los resultados del cuestionario se basa en lo que el estudiante haya escrito en las hojas de papel puesto que no se cuenta con grabación alguna de la aplicación de dicho cuestionario.

Hay que recordar que tanto el test como el pos-test se aplicaron a los 44 estudiantes, para no generar en ellos una clasificación de “buenos y malos”.

Capítulo IV. Análisis de datos: Cuestionario diagnóstico, Test y Postest.

En el presente capítulo se describen los resultados obtenidos en cada una de las distintas actividades contenidas en los instrumentos empleados durante la investigación.

4.1. Análisis del Cuestionario diagnóstico.

4.1.1. Experiencias previas:

La pregunta central es resolver la ecuación $ax = b$ en tres modalidades:

(a). $2x = 3$

(b). $0x = 3$

(c). $0x = 0$

Los Drs. Cuevas y Madrid han experimentado con este cuestionario en años y reportan que a la primera pregunta se acierta en un 100%; a la segunda pregunta se responde en forma correcta de un 10% al 15% en promedio y los restantes en forma errónea de diversas maneras. Unos despejan la variable x y llegan a que: $x = \frac{3}{0}$; dando a esta operación errónea en los números reales soluciones del tipo:

$\frac{3}{0} = \infty$, otros $\frac{3}{0} = 3$ y otros más $\frac{3}{0} = 0$.

A la tercera pregunta reportan que se responde en forma correcta un 10% al 20% en promedio.

En ningún caso comprueban que la solución propuesta sea la solución de la ecuación. Esto es, a ellos les basta el proceso realizado y el valor o símbolo que obtienen, para encontrar la solución a la ecuación planteada.

4.1.2. Experiencia en FCFM-UAdeC

El cuestionario diagnóstico fue aplicado a varios grupos en la FCFM-UAdeC, en este estudio tomamos solamente a un grupo de 20 estudiantes.

Ejercicio 1: $2x = 3$

15 alumnos-profesores despejaron a "x" con la idea de que como el 2 está multiplicando pasa dividiendo **(75%)**.

5 alumnos-profesores despejaron a "x" multiplicando por el inverso multiplicativo de 2 a la ecuación **(25%)**.

$$\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)\cancel{2}x = 3\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Solamente 3 alumnos-profesores después de calcular el valor de "x" verificaron su resultado, esto es el **19.23%.**

Ejercicio 2: $0x = 3$

16 alumnos-profesores realizaron el despeje $x = \frac{3}{0}$ **(80%)**.

De ellos:

- 3 alumnos-profesores indicaron que $x = \frac{3}{0}$ es una indeterminación (15%).
- 2 alumnos-profesores indicaron que $x = \frac{3}{0}$ es igual a infinito (10%).
- 4 alumnos-profesores indicaron que la operación $x = \frac{3}{0}$ no está definida (20%).

- 3 alumnos-profesores indicaron que $x = \frac{3}{0} = 0$ (15%).
- 1 alumno-profesor despejó $x = \frac{3}{0}$ de la siguiente manera

$$0x = 3$$
$$\left(\frac{1}{0}\right)0x = 3\left(\frac{1}{0}\right)$$

$$x = \frac{3}{0}$$

Indicando que el inverso multiplicativo de cero es $\left(\frac{1}{0}\right)$, (5%).

Ninguno de estos estudiantes (16 alumnos-profesores) concluye algo sobre la solución, debido a que despejan el cero y después no saben cómo seguir.

Solamente 4 alumnos-profesores responden correctamente e indicaron que todo número multiplicado por cero es igual a cero, que por lo tanto consideran que la ecuación no tiene solución ya que no existe un número en los reales que multiplicado por cero sea igual a 3, esto es él **20%**.

Ejercicio 3: $0x = 0$

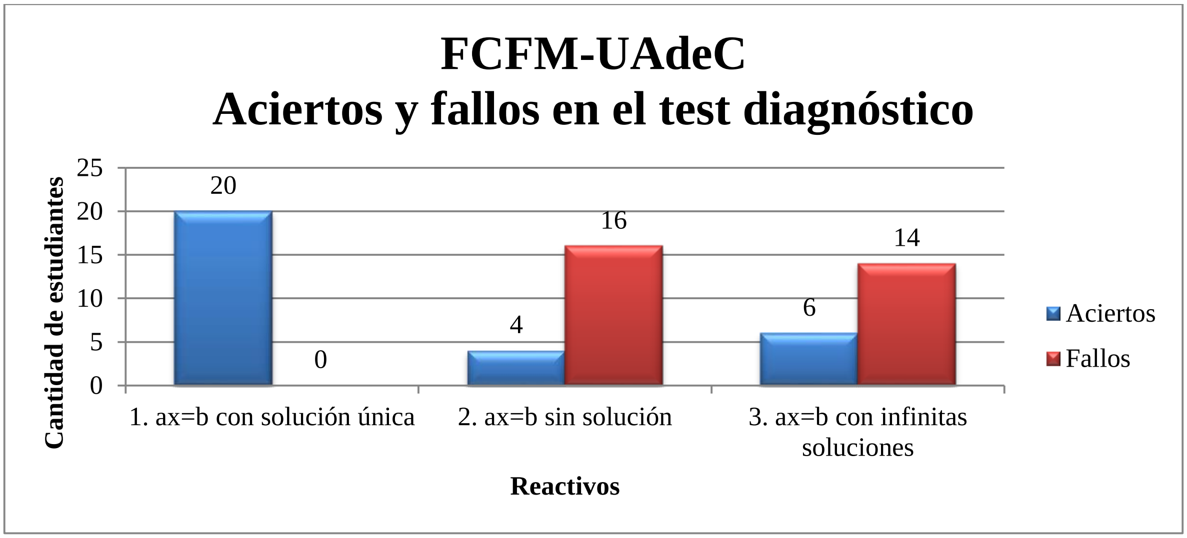
- 14 alumnos-profesor **(70%)** realizaron el despeje $x = \frac{0}{0}$.

  De ellos:

  - ✓ 3 alumnos-profesores (15%) indicaron que $x = \frac{0}{0}$ es igual a cero.
  - ✓ 1 alumno-profesor (5%) indicó que $x = \frac{0}{0}$ es igual a 1.

- ✓ 2 alumnos-profesores (10%) indicaron que $x = \frac{0}{0}$ no está definida.
- ✓ 8 alumnos-profesores (40%) indicaron que la operación $x = \frac{3}{0}$ no está definida.

- 6 alumnos-profesores respondieron correctamente que la ecuación tiene infinitas soluciones, ya que la variable “x” puede tomar cualquier valor de los números reales y esto representa el **30%**, sin embargo 2 de ellos consideraron una posibilidad alternativa despejando $x = \frac{0}{0}$ e indicando que la división es indeterminada.



4.1.3. Experiencia en UPIICSA

El cuestionario diagnóstico fue aplicado a varios grupos en la UPIICSA-IPN, en este estudio tomamos solamente a un grupo de 44 estudiantes que cursaban por primera vez Álgebra Lineal. El grupo estaba formado por:

- ✓ 6 estudiantes de Licenciatura en Ciencias de la Informática,
- ✓ 4 estudiantes de Ingeniería en Informática
- ✓ 24 estudiantes de Licenciatura en Administración Industrial
- ✓ 3 estudiantes de Ingeniería en Transporte

- ✓ 7 estudiantes de Ingeniería Industrial

Ejercicio 1: $2x = 3$

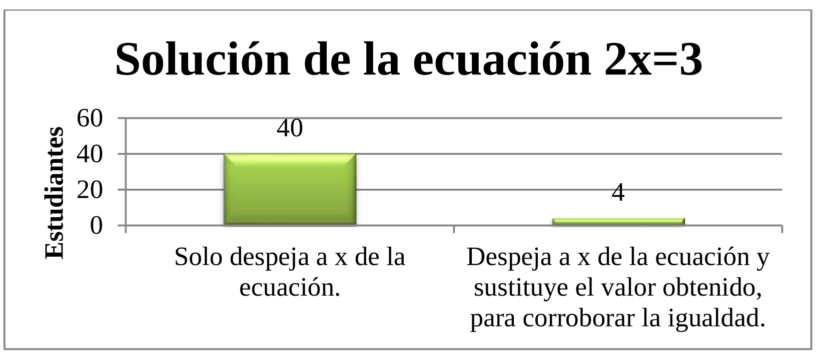
41 alumnos despejaron a "x" con la idea de que como el 2 está multiplicando pasa dividiendo **(93.18%)**.

3 alumnos despejaron a "x" multiplicando por el inverso multiplicativo de 2 a la ecuación **(6.82%)**.

$$\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)\cancel{2}x = 3\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Solamente 4 alumnos de los 44 después de calcular el valor de "x" verificaron su resultado, esto es el **9.09%.**



Ejercicio 2: $0x = 3$

41 alumnos realizaron el despeje $x = \frac{3}{0}$ **(93.18%)**.

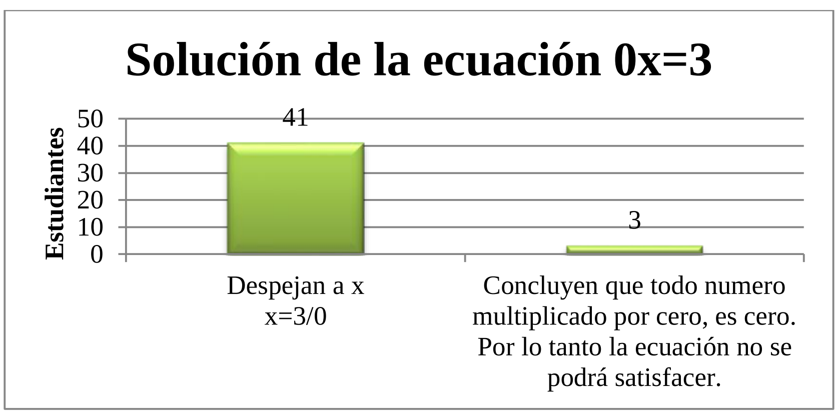
De ellos:

- ➢ 20 alumnos indicaron que $x = \frac{3}{0}$ no está definida (45.45%).

- 10 alumnos indicaron que $x = \frac{3}{0} = 0$ (22.73%).
- 5 alumnos indicaron que $x = \frac{3}{0}$ es igual a infinito (11.36%).
- 5 alumnos indicaron que $x = \frac{3}{0}$ es una indeterminación (11.36%).
- 1 alumno indicó que $x = \frac{3}{0} = 3$ (2.27%).

Ninguno de estos 41 alumnos concluye algo sobre la solución, debido a que despejan el cero y después no saben cómo seguir.

Solamente 3 alumnos responden correctamente e indicaron que todo número multiplicado por cero es igual a cero, que por lo tanto consideran que la ecuación no tiene solución ya que no existe un número en los reales que multiplicado por cero sea igual a 3, esto es él **6.82%**.



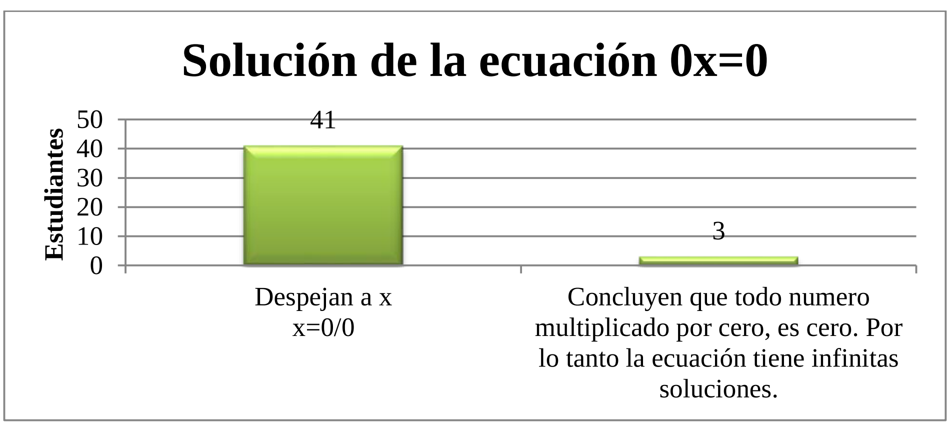
Ejercicio 3: $0x = 0$

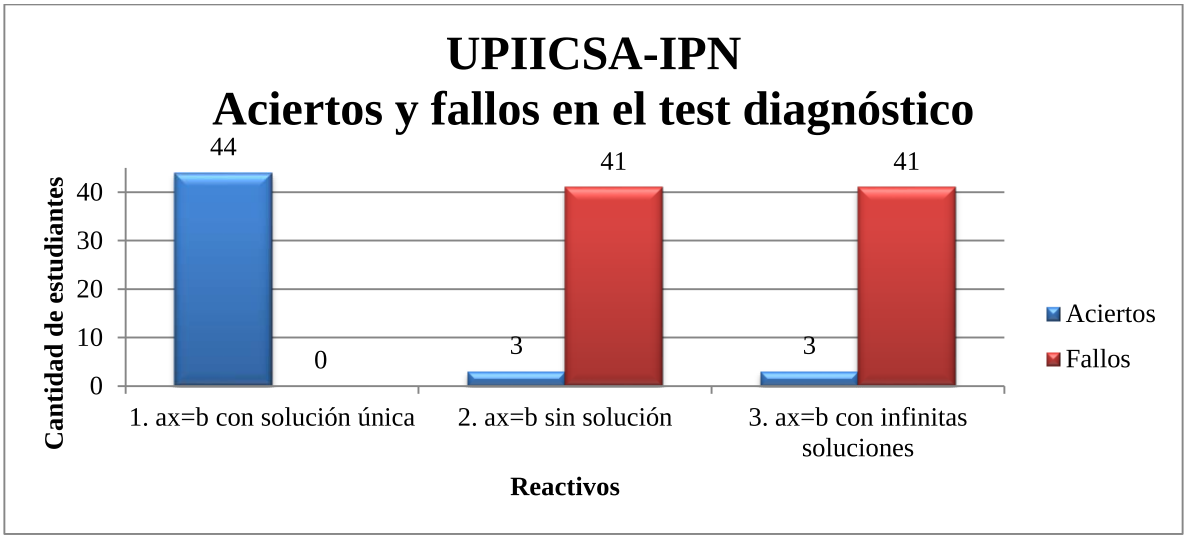
- 41 alumnos **(93.18%)** realizaron el despeje $x = \frac{0}{0}$.

  De ellos:

  - ✓ 21 alumnos (47.73%) indicaron que la operación $x = \frac{0}{0}$ es una indeterminación.
  - ✓ 12 alumnos (27.27%) indicaron que $x = \frac{0}{0}$ es infinito.
  - ✓ 5 alumnos (11.36%) indicaron que $x = \frac{0}{0}$ es igual a cero. De estos, 2 indicaron que $x = \frac{0}{0}$ es igual a cero, argumentando que todo número dividido por cero es cero.
  - ✓ 3 alumnos (6.82%) indicaron que $x = \frac{0}{0}$ es igual a 1 ya que argumentan que todo número dividido por él mismo es 1.

- 3 alumnos respondieron correctamente que la ecuación tiene infinitas soluciones, ya que la variable "x" puede tomar cualquier valor de los números reales y esto representa el **6.82%**.





4.1.4. Conclusión de los resultados obtenidos del cuestionario diagnostico

Esta conclusión se basa en las respuestas que los estudiantes plasmaron en las hojas que se les entregó.

Conclusión del ejercicio 1

La primera pregunta demostró ser frágil y un mal recuerdo por muchos otros, que conduce a la amplia gama de errores que son bien conocidos en la literatura (Matz, 1980; Payne y Squibb, 1990).

Con estos resultados, conjeturamos que la mayoría de los estudiantes no verifican la solución ya que para ellos resolver la ecuación $2x=3$ significa despejar "x", por lo tanto piensan que no hay necesidad de verificar si es la solución.

Conclusión del ejercicio 2

1 Los alumnos siguen pensando que resolver una ecuación equivale a despejar el coeficiente de la "x".

2 No tienen claro que "despejar" es multiplicar por el inverso multiplicativo de $"a"$ y que esto solo es posible sí $a \neq 0$.

3 Hay alumnos que asumen que se puede dividir entre cero.

4 Los alumnos que comentan que $x = \frac{3}{0}$ es “indeterminado, no definido, infinito” es debido a que dichas respuesta se les fue comentado por sus antiguos profesores.

5 Aparentemente los alumnos que mencionan “indeterminado, no definido, no se puede realizar” implícitamente indican que la ecuación no se puede resolver.

Conclusión del ejercicio 3

1 Los alumnos que comentan que $x = \frac{0}{0}$ es “indeterminado, no definido, infinito” es debido a que dichas respuesta se les fue comentado por sus antiguos profesores.

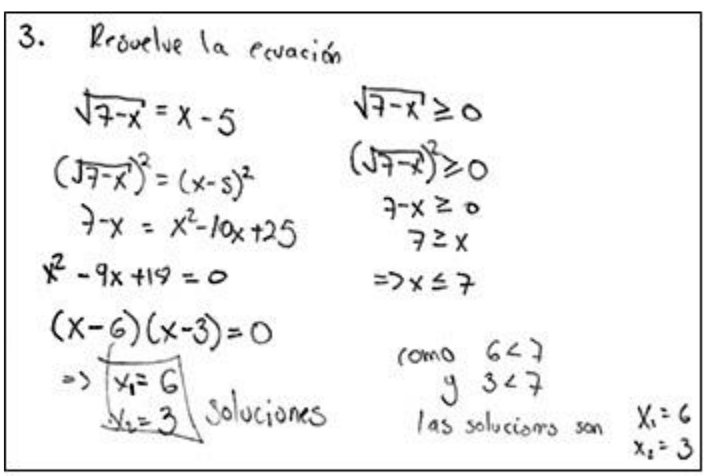
2 Los alumnos que realizaron dos casos, siguen pensando que resolver una ecuación equivale a despejar el coeficiente de la “x”.

4.1.5. Experiencia en estudiantes de nuevo ingreso en DME-CINVESTAV-IPN

El cuestionario fue aplicado un grupo de 15 estudiantes, el grupo estaba formado por:

- ✓ 1 egresado de ingeniería,
- ✓ 3 egresados de escuelas normales, y
- ✓ 10 egresados de Lic. en Matemáticas

Se les presentó la siguiente actividad.



En donde se les pedía que le asignaran una calificación de 0 a 5 (como máximo) a la resolución hecha por un estudiante de tercer año de secundaria a la ecuación $\sqrt{7-x} = x-5$.

Todos coinciden en hacerle comentario al alumno con respecto a la comprobación de sus resultados. Anotando que el 3 no es solución. Sin embargo, ninguno de ellos pudo responder a la pregunta de ¿dónde está el error?. Esto es, ningún alumno percibió que de la segunda a la tercera línea de su solución, se obtiene dos ecuaciones que no son equivalentes, lo que origina que la solución de la última ecuación no sea solución de la primera ecuación.

El problema observado se divide en tres partes:

- Problema en el significado de ecuación
- Problemas en el significado de solución de una ecuación y
- Problemas en el proceso de resolución de una ecuación.

Estos tres componentes tienen en los estudiantes por diferentes motivos, unas representaciones malas o falsas.

Con esto se confirma el segundo punto sobre el proceso de solución, en la que la gente no entiende el significado de resolver una ecuación, no entiende el proceso y no entiende la solución en el sentido de que llegan a soluciones falsas y no la perciben porque no sustituyen los valores obtenidos en la ecuación a resolver.

En el tercer punto cuando se le indica que su resultado es incorrecto el estudiante no sabe reconocer en donde fue su error, porque el acude a revisar su aritmética y su algebra, en la cual no tiene ningún problema, el problema está en que él de pronto dejo, al reducir, de tener ecuaciones equivalentes.

4.2. Análisis del Test

Presentaremos un análisis de los resultados obtenidos en la aplicación del test.

4.2.1. Análisis del ítem #1

En esta actividad se pedía a partir de la siguiente matriz aumentada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & \vdots & -8 \\ -2 & -3 & 6 & \vdots & 5 \\ 3 & -7 & -1 & \vdots & -6 \end{bmatrix}$$

que encontraran el SEL asociada a ella. Solo 5 de los 6 pudieron realizar la transición de estos registros.

4.2.2. Análisis del ítem #2

Dado el siguiente SEL.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 11 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & = & 23 \\ -3x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 20 \end{array}$$

Se pedía determinar si la terna $(4,-4,-5)$ era solución o no y que justificaran la respuesta.

Solo cuatro de los seis estudiantes **(Alan, Fernando, Maricela y Brandon)** pudieron justificar que efectivamente la terna $(4,-4,-5)$ no era solución del SEL. Mientras que **David y Gerardo** indicaron que la terna si era solución del SEL debido a que la comprobación solo la realizaron en la primera ecuación del sistema.

4.2.3. Análisis del ítem #3

En esta actividad se pedía a partir de un SEL (3×3)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}$$

Que encontraran la solución del sistema. Todos llegaron a una solución incorrecta, debido a dificultades aritméticas, pero ninguno percibió que la solución era incorrecta, dado que ninguno comprueba la solución que obtuvieron,. De esta manera, el proceso de comprensión del significado de ecuación y de su solución queda incompleto, porque para completar el ciclo del significado, es necesario sustituir y comprobar que efectivamente ese valor comprueba o satisface la ecuación.

4.2.4. Análisis del ítem #4

Dado el siguiente SEL.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & 6x_3 & = & 5 \\ -2x_1 & - & 4x_2 & + & 8x_3 & = & -2 \end{array}$$

Se les proporcionaba 3 ternas de las cuales solo 2 satisfacían el sistema. Cinco de los seis estudiantes verificaron que solo dos de las tres ternas proporcionadas eran soluciones del sistema. El sexto alumno tuvo problemas aritméticos.

Para el inciso “b”, todos los estudiantes responden: *“El sistema tiene infinidad de soluciones”*. No justifican la respuesta porque no se le preguntó explícitamente.

4.2.5. Análisis del ítem #5

En esta actividad los estudiantes no pudieron analizar que para este SEL existen las tres posibilidades de solución, es decir: única solución, infinidad de soluciones y no solución.

En el caso de las representaciones graficas a pesar de los errores de cálculo, todos lograron realizar la representación de cada uno de los casos.

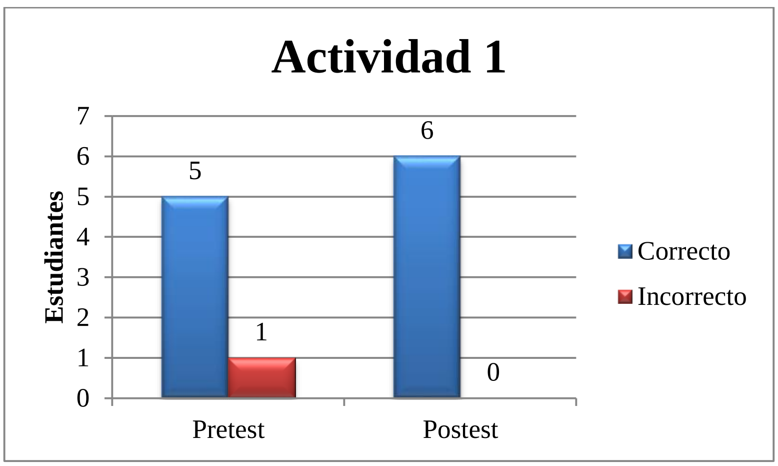
4.3. Análisis del Pos-Test.

4.3.1. Análisis de la actividad 1

En esta actividad se pedía a partir de la siguiente matriz aumentada.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 & \vdots & 11 \\ -4 & 0 & -1 & \vdots & -2 \\ 3 & -1 & 2 & \vdots & 14 \end{bmatrix}$$

que encontraran el SEL asociada a ella. Los 6 estudiantes **Alan**, **David, Fernando, Maricela, Gerardo** y **Brandon** no tuvieron problema de transitar del registro de representación matricial al registro de representación algebraica. Entonces podemos decir que existe una conexión en estas dos representaciones.



La gráfica muestra una mejora notoria en los resultados obtenidos por los estudiantes en ésta actividad; los resultados obtenidos muestran evidencia del progreso en los estudiantes al trabajar con estos registros de representación.

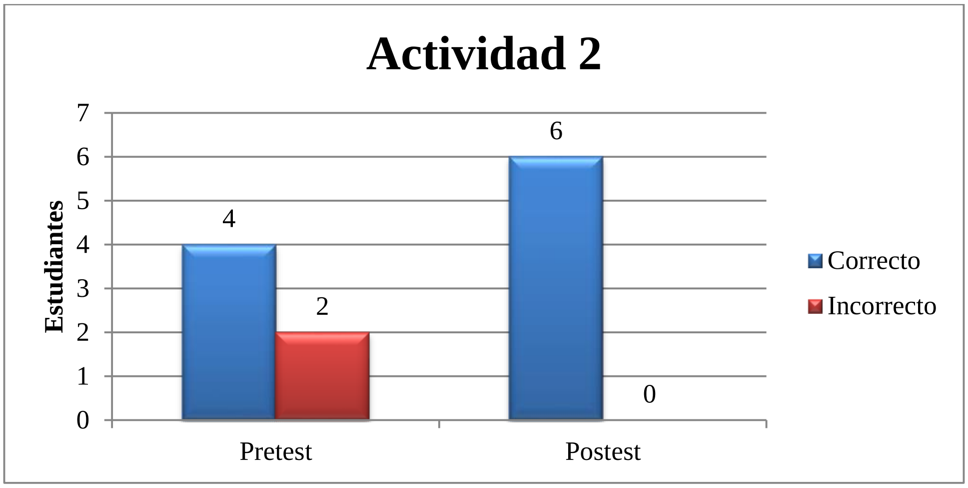
4.3.2. Análisis de la actividad 2

Dado el siguiente SEL.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 4x_2 & - & 2x_3 & = & -10 \\ 2x_1 & - & 10x_2 & + & 7x_3 & = & 57 \\ -2x_1 & + & 9x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{array}$$

Se pedía determinar si la terna $(-10,-3,6)$ era solución o no y que justificaran la respuesta.

Los seis estudiantes **(Alan, Fernando, Maricela y Brandon)** pudieron justificar que efectivamente la terna $(-10,-3,6)$ no era solución del SEL.



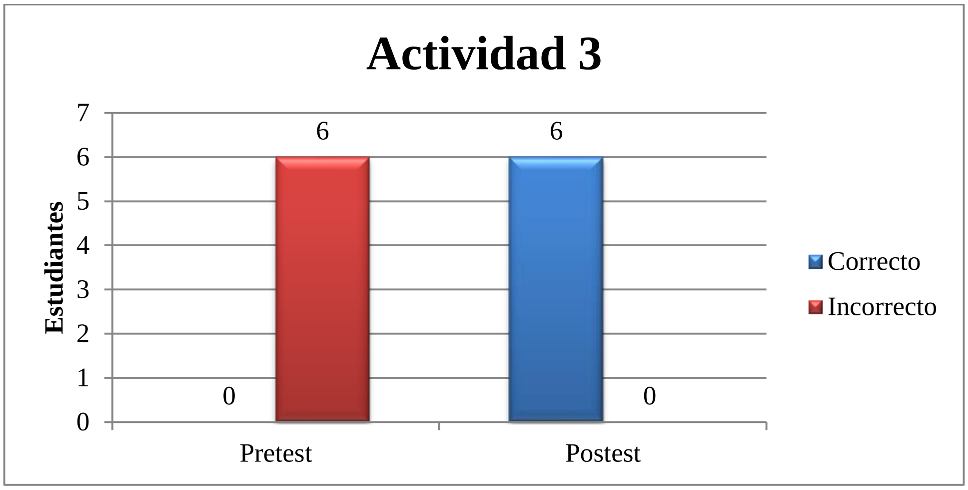
La gráfica muestra una mejora notoria en los resultados obtenidos por los estudiantes en ésta actividad; los resultados obtenidos muestran evidencia del progreso en los estudiantes.

4.3.3. Análisis de la actividad 3

En esta actividad se pedía a partir de un SEL (3×3)

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}$$

Que encontraran la solución del sistema. Todos después de haber obtenido la solución, sustituyeron en cada una de las ecuaciones del SEL e indicaron que el sistema tenía solución única.



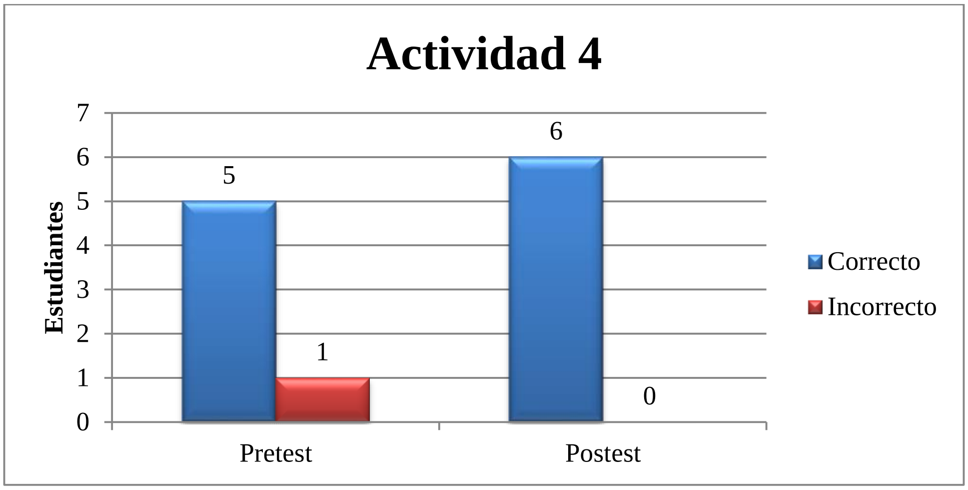
La gráfica muestra una mejora notoria en los resultados obtenidos por los estudiantes en ésta actividad; los resultados obtenidos muestran evidencia del progreso en los estudiantes.

4.3.4. Análisis de la actividad 4

Dado el siguiente SEL.

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 7 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & = & 14 \end{array}$$

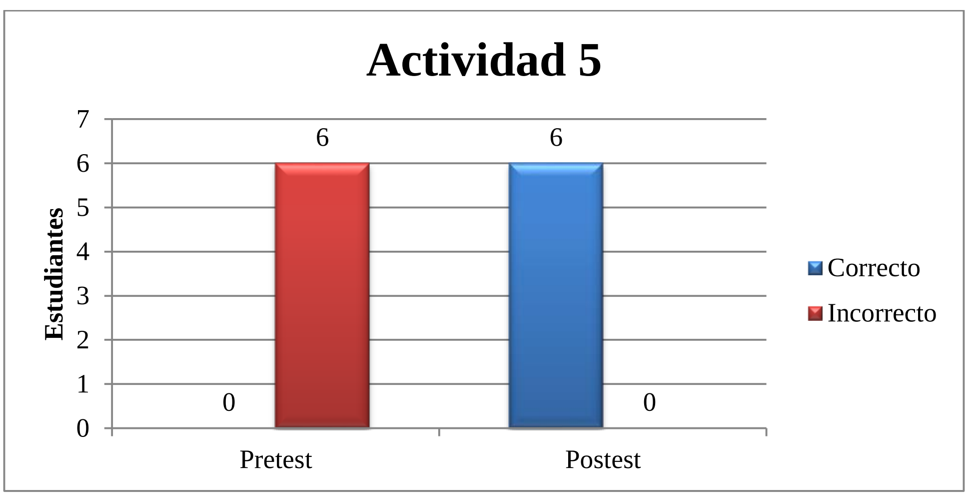
Se les proporcionaba 3 ternas que solo 2 de ellas satisfacían el sistema. Los seis estudiantes verificaron que solo dos de las tres ternas proporcionadas eran soluciones del sistema. Para el inciso "b", todos los estudiantes responden: *"El sistema tiene infinidad de soluciones"*. No justifican la respuesta porque no se le preguntó explícitamente.



4.3.5. Análisis de la actividad 5

A diferencia del test, en esta actividad los estudiantes si pudieron analizar que para este SEL existen las tres posibilidades de solución, es decir: única solución, infinidad de soluciones y no solución.

En el caso de las representaciones gráficas, todos lograron realizar la representación de cada uno de los casos.



Capítulo V. Conclusiones e investigaciones futuras

5.1. Conclusiones

El trabajo de investigación que este documento ha reportado, ha tenido como propósito aplicar una propuesta didáctica con el uso de la tecnología con el objetivo de apoyar la enseñanza y promover una mejor comprensión del concepto de solución de un SEL, esto es importante para entender conceptos fundamentales, como: combinación lineal, dependencia e independencia lineal, base, espacios y subespacios vectoriales, transformaciones lineales, etc.

Al transcurrir cada una de las etapas de nuestra investigación el propósito a cumplir fue el de encontrar respuesta a las interrogaciones planteadas en las preguntas de investigación las cuales sirvieron para delimitar el desarrollo de las etapas en este proceso. En cada una de ellas, el aprendizaje y la experiencia adquirida han sido invaluables. Y de acuerdo con la perspectiva didáctica que guía este trabajo, las acciones desarrolladas por parte del estudiante son parte fundamental en la construcción de conocimiento significativo el cual se origina a partir del momento mismo que enfrenta y realiza acciones ante determinadas situaciones, como lo manifiesta la escuela activa.

Las actividades desarrolladas en este proceso han servido como base para responder al planteamiento realizado en las preguntas de investigación:

- ¿Puede la tecnología, mediante una propuesta didáctica, promover una mejor comprensión del concepto de resolución de un SEL?
- ¿Puede la tecnología favorecer la modelación matemática de situaciones reales que conduzcan a un Sistemas de Ecuaciones Lineales?
- ¿Un Ambiente Computacional para el aprendizaje del Álgebra Lineal, puede promover un ambiente de aprendizaje individual y colaborativo?

Estamos conscientes que la experiencia didáctica desarrollada en este estudio, no es desde luego concluyente pero es promisoria, en la que habría que realizar muchas más experiencias para tener resultados de verdad incuestionables. No obstante, existen investigaciones realizadas por colegas con las que se comparten puntos de vista y que podrían ser de utilidad a futuros trabajos; uno de ellos, es que para cualquier experiencia de enseñanza o actividad de aprendizaje, se requiere de un cuidadoso diseño, bajo un marco didáctico explícito y; el otro, es que por muy bueno que sea el ambiente computacional utilizado (o la tecnología empleada en general), es necesario que el profesor planee con cuidado las actividades que guiarán a los estudiantes. Aunque éstos actúan con autonomía dentro de ciertos ambientes tecnológicos, es necesario dotarlos de actividades, previamente diseñados por el docente, para conducir la actividad al fin deseado, y por medio de una discusión grupal del mismo.

Los resultados obtenidos en cada una de las actividades y en el postest dan evidencia del desarrollo que tuvo el grupo de estudiantes durante esta experiencia. Partiendo de los resultados que se recolectaron en la prueba diagnóstico donde se apreció claramente que los alumnos contaban con pocos elementos prerrequisitos y con graves problemas algebraicos, al ir trabajando con ellos y desarrollando cada una de las actividades se fueron evidenciando cambios significativos en la forma de operar hasta lograr que la gran mayoría de ellos consolidaran su conocimiento sobre el concepto de conjunto solución. Asimismo, fueron capaces de trabajar con dicho concepto y aplicarlo en las actividades que se les propusieron, evidencia de esto es la forma en que ellos resolvieron los ejercicios en las actividades y el pos-test.

Es necesario señalar, que no se pretende, con el desarrollo de dicha propuesta, la sustitución total del profesor en el aprendizaje de un concepto por parte del estudiante, sino más bien se desea contar con una herramienta tecnológica que sirva de apoyo en el planteamiento de problemas, así como en la solución de éstos, donde el usuario (generalmente estudiante), interactué con el sistema en forma individualizada o colaborativa, bajo la tutela de un profesor.

De esta manera se puede concluir que la propuesta basada en un marco didáctico y apoyado en el uso de herramientas digitales puede favorecer una comprensión del concepto de conjunto solución y permite a los estudiantes abordar problemas distintos a los estudiados en clase.

Los logros que se tuvieron fueron:

- ✓ La primera vez que resolvieron los SEL´s no comprobaron si el resultado era el correcto. En el Postest después de terminar de resolver el SEL, todos verificaron
- ✓ Los estudiantes se convencieron que si había dos o más soluciones que satisfacían al SEL, esta tenía infinitas soluciones.
- ✓ Los estudiantes se convencieron que un SEL tiene tres posibles soluciones: solución única, infinitas soluciones o sin solución.

5.2. Investigaciones Futuras

El presente apartado pretende establecer algunas de las posibles líneas de investigación que pueden dar continuidad al presente trabajo, teniendo en cuenta las características de hacer uso de la tecnología y la didáctica para la enseñanza de conceptos matemáticos.

En términos generales, nuestra investigación a futuro nuevamente está centrada en el problema de la enseñanza-aprendizaje de los conceptos del álgebra lineal, siendo nuestro propósito renovar nuestra propuesta didáctica siempre con la premisa de mejorar la comprensión de los conceptos del álgebra lineal.

Es así como surge el interés de continuar desarrollando ambientes computacionales con la integración de las actividades desarrolladas durante el presente trabajo y aquellas que se realizarán en investigaciones futuras, para dispositivos móviles. Las capacidades de procesamiento de estos dispositivos pueden orientarse para el desarrollo de herramientas cognitivas que incluyan actividades de aprendizaje sustentadas en un marco teórico didáctico enriquecidas por diferentes registros de representación interactivos.

En la actualidad existen 2 grandes empresas que se han convertido en protagonistas del desarrollo de plataformas móviles: Google y Apple con sus sistemas Android e IOS, cada uno de los cuales distribuye sus propios contenidos en sus tiendas en línea, Play Store e iTunes respectivamente. Es aquí donde se tiene una gran oportunidad, primero para desarrollar una investigación original que dé luz sobre los lineamientos que debe seguir un material didáctico en matemática educativa que esté orientado para ser ejecutado en un dispositivo móvil.

Bibliografía

Alcocer, I. (2007). Dificultades en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en contextos algebraico y geométrico. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., Thomas, K. (1996), A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education, *Research in Collegiate Mathematics Education II*, CBMS Issues in Mathematics Education, 6, 1–32.

Ausubel, D.P. et al (1983). Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo. México, Editorial Trillas, segunda edición.

Barrera, J. (2008). Modos de pensamiento en la solución y planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales homogéneos con dos incógnitas. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México.

Betancourt, Y. (2009). Ambiente computacional para apoyar la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en la educación superior. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Betancourt, Y. (2014). Uso de recursos didácticos digitales en un primer curso de Álgebra Lineal. Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Bevan N. (2005): Guidelines and Standards for Web Usability. Disponible en: http://www.nigelbevan.com/papers/web%20usability%20standards.pdf. Acceso Noviembre de 2013

Cantoral, R. (2013). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento. Barcelona, España: Gedisa. ISBN: 978-849-7847-94-0

Coulange, L. (2001). Enseigner les systèmes d'équations en troisième. Une étude économique et écologique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 21 (3), 305-354.

Cuevas, C. A. (1994). Sistema tutorial inteligente LIREC. Tesis de Doctorado no publicado. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Cuevas, C. A. (1998). Hacia una clasificación de la computación en la enseñanza de las matemáticas. Investigaciones en matemática educativa. México: Editorial Iberoamérica. (273-288).

Cuevas, C. A. (2002). ¿Que es Software Educativo o software para la enseñanza?. [Consulta: 2 de Septiembre de 2013] Disponible en: http://www.matedu.cinvestav.mx/~ccuevas/SoftwareEducativo.htm

Cuevas, C. A. y Pluvinage, F. (2003). Les projets D' Action practiqué, éléments D' Une Ingéniere D' ensigment des mathématiques. Annales de didactique et de sciences cognitive, Vol. 8. Francia. ISSN 0987-7576. pp. 273-293

Cuevas, C. A. (2005). Curso Seminario de Didáctica de las Matemáticas. Publicación interna del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Cutz, B. (2005). Un estudio acerca de las concepciones de estudiantes de licenciatura sobre los sistemas de ecuaciones y su solución. Tesis de Maestría no publicada. CINVESTAV-IPN. México.

DeVries, D., Arnon, I. (2004). Solution-What does it mean? Helping linear algebra students develop the concept while improving research tools. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2, 55-62.

Dorier, J. L. (1994): The Teaching of Linear Algebra in First Year of French Science University. *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Lisbonne 14, pp 137–144.

Dorier, J. L. et al (2000). El obstáculo del formalismo en Álgebra Lineal. *On the Teaching of Linear Algebra.* Netherlands. Kluwer Academic Publisher, pp 85-124.

Dorier, J. L. (2002). Teaching Linear Algebra at University, ICM 2003 Vol III. pp 875 – 884.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.) Investigaciones en Matemática Educativa II (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Colombia: Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2006), A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, **61.1-2**, 103-131.

Eslava, M. & Villegas, M. (1998). Análisis de los modos de pensar sintético y analítico en la representación de las categorías de tres rectas en el plano. Tesina de Diplomado no publicada. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. For the Learning of Mathematics, Canada, 9(2), 19–25.

Filloy, E., Rojano, T., Solares, A. (2003). Two meanings of the `equal´ sign and senses of comparison and substitution methods. Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4, 223-229.

Filloy, E., Rojano, T., Solares, A. (2004). Arithmetic/Algebraic problem-solving and the representation of two unknown quantities. Proceedings of the 28th

Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2, 391-398.

Friedberg, S. H. (1982). *Álgebra Lineal*. México. Publicaciones Cultural, S.A.

Gómez, D. (2006). Representación de conceptos de análisis estructural con álgebra lineal. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Gómez D. y Madrid, H. (2006). Algoritmo para resolver exactamente sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes enteros. Miscelánea Matemática 43, 117-132.

González, O. (2010). Escenarios Didácticos Virtuales Interactivos (EDVI) y el sistema CalcVisual soportados en un diseño didáctico como apoyo para el aprendizaje de un curso de cálculo diferencial. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Grossman, S. I. (2008). *Álgebra Lineal*. México. McGraw Hill.

Häggström, J. (2006). The same topic - different opportunities to learn. In C. Bergsten & B. Grevholm (Eds), Proceedings of MADIF5, The 5th Swedish Mathematics Education Research Seminar, Malmö, January 24-25, 2006. Linköping: SMDF. En www.mai.liu.se/SMDF/madif5/papers/Haggstrom.pdf (11/11/2013).

Jaime, A. & Gutiérrez, A. (1990): Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele, en S. Linares, M. V. Sánchez (eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (Alfar: Sevilla, Spain), pp 295-384.

Johnson, R. 1974. *Álgebra Lineal*. México. Compañia Editorial Continental, S.A.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. Educational Studies in Mathematics, 12(3), 317–326.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 33-56). Reston, VA: NCTM.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: MacMillan.

Kolman B. & Hill D. R. (2006). *Álgebra Lineal*. México. PEARSON Educación.

Lay, D. C. (2007). Linear Algebra and its applications. USA, Addison-Wesley.

Manzanero, L. (2007). Sistemas de Ecuaciones Lineales: Una perspectiva desde la Teoría APOE. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Marines, J. & Monroy, J. (1998). Dificultades en la transición del pensamiento sintético y analítico en sistemas de tres ecuaciones lineales con tres variables. Tesina de Especialidad no publicada. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México.

Mochón, S. (2006). *Avances y hallazgos en la implementación de la tecnología para la enseñanza de las matemáticas y las ciencias*. Matemática educativa: una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual. Mexico: Santillana. (101-122).

Moore, J. 1968. *Elements of linear algebra and matrix theory*. McGraw Hill. USA.

Monroy, A. (2008). Modos de Pensamiento en Solución y Planteamiento de Sistemas de Ecuaciones Lineales Homogéneos con tres o más Variables. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México.

Mora, B. (2001). Modos de pensamiento en la interpretación de la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Moreno, S. (2003). Ambiente computacional para promover una mejor comprensión de conceptos matemáticos casos: máximos y mínimos. Tesis de Doctorado no publicado. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Nielsen, J. (1993): *Usability Engineering*. Morgan Kaufmann.

Norman, D. (1990): The design of everyday things. Doubleday, Nueva York, NY.

Norman, D. & Drapper, S. (1986): User-Centered System Design. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Oktaç, A., García, C., Ramírez, C. (2007). Diseño de Actividades: Ejemplos de Álgebra lineal. En C. Dolores, G. Martínez, R. M. Farfán, C. Carrillo, I. López, C. Navarro (Eds.), Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula. México: Ediciones Díaz de Santos, 315-327.

Panizza, M., Sadovsky, P., Sessa, C. (1999). *Los primeros aprendizajes algebraicos.* Comunicación REM 95-96.

Panizza, M., Sadovsky, P., Sessa, C. (1999). La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. Enseñanza de las Ciencias, 17 (3), 453-461.

Peréz Donoso, L. (1998). Pasaje de registros: Ecuaciones. Tesis de Magister en Enseñanza de las Ciencias con mención en Didáctica de Matemática. Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Preece, J. (1994): *Human-Computer Interaction*. New York: Addison-Wesley. Academic Press, Inc.

Ramírez, C. (2005). Dificultades que presentan los estudiantes en los sistemas de ecuaciones lineales en los modos geométrico y analítico. Tesis de Licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Ramírez, C. (2008). Concepciones de los estudiantes de nivel superior sobre sistemas de ecuaciones lineales. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Ramírez, M. (1997). El uso de la calculadora graficadora y la resolución de problemas algebraico-verbales en el estudio de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Raymond, A. & Leinenbach, M. (2000). Collaborative action research on the learning and teaching of algebra: a story of one mathematics teacher´s development. Educational Studies in Mathematics, 41 (3), 283-307.

Segura, S. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. RELIME, 7 (1), 49-78.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification-The case of algebra. Educational Studies in Mathematics, 26 (2-3), 191-228.

Sierpinska, A (1992). On understanding the notion of function. En G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), The concept of function. Aspects of Epistemology and Pedagogy. Mathematical Association of America, 25-28.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. En J.-L. Dorier (ed.), On the Teaching of Linear Algebra. Kluwer Academic Publishers, 209-246.

Steffe, L. P. & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En A. E. Kelly y R. Lesh (Eds.), Research Design in Mathematics and Science Education. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 267-307.

Strang, G. (2007). Álgebra lineal y sus aplicaciones. México: Thomson.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics 12, 151-169.

Tall, D., RN, de Lima., L. Healy. (2014). Evolving a three-world framework for solving algebraic equations in the light of what a student has met before. The Journal of Mathematical Behavior 34, 1-13.

Ursini S. & Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas?, *Revista Educación Matemática*, México, Vol. 18, num. 3, Editorial Santillana.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in teaching and learning. En D. Tall (ed) Advanced Mathematical Thinking. Kluwer. Dordretch/Boston/London, 65-81.

Wittmann, E. (1998). Mathematics Education as a “Design Science”. En A. Sierpinska & J. Kilpatrick (eds) Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity, 87-103. Kluwer Academic Publishers. Great Britain.

Zepeda, S. M. (2010). Ambiente computacional de apoyo a la enseñanza y aprendizaje de la matemática: caso introducción de la integral de Riemann. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). Editors’ Introduction: What is Mathematical Visualization?. En W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds), Visualization in Teaching and Learning Mathematics. Mathematical Association of America.

Anexo I. Cuestionario diagnostico

Álgebra Lineal

Nombre:_________________________________ Secuencia:______________

Carrera:_________________________________ Fecha:__________

En los ejercicios 1-3 resuelve las ecuaciones y en el recuadro correspondiente justifica tus respuestas.

1. $2x = 3$

2. $0x = 3$

3. $0x = 0$

4. ¿Que entiendes por resolver una ecuación ?

En los ejercicios 5-7 resuelve los sistemas de ecuaciones y en el recuadro correspondiente justifica tus respuestas.

5. $$\begin{aligned} x - 3y &= -3 \\ 2x + y &= 8 \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} x - 3y &= -7 \\ 2x - 6y &= 7 \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} x - 3y &= 7 \\ 3x - 9y &= 21 \end{aligned}$$

Anexo II. Test

Nombre:________________________________ Secuencia:____________

Carrera:_________________________________ Fecha:__________

Contesta detalladamente a cada pregunta.

1. Dada la siguiente matriz aumentada.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -8 \\ -2 & -3 & 6 & 5 \\ 3 & -7 & -1 & -6 \end{array}\right]$$

   a) Establezca un SEL que tenga dicha matriz aumentada.

2. Dado el siguiente SEL.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 11 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & = & 23 \\ -3x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 20 \end{array}$$

   ¿Es la terna $(4,-4,-5)$ solución del sistema? SÍ, NO, ¿Por qué?

3. Resuelve el siguiente SEL por el método que prefieras.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}$$

4. Dado el siguiente SEL.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & 6x_3 & = & 5 \\ -2x_1 & - & 4x_2 & + & 8x_3 & = & -2 \end{array}$$

   a) Las siguientes ternas $(5,-4,-1)$, $(3,-1,0)$, $(1,2,1)$ ¿son soluciones del sistema?.
   b) ¿Cuántas soluciones tiene el sistema?

5. Partimos del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{ccccc} 2x & + & \lambda y & = & 1 \\ \lambda x & + & 2y & = & 1 \end{array}$$

Donde λ es un número real.

d) Escribir la ecuación matricial de este sistema
e) Hallar los valores de λ para los cuales el sistema tenga:
   i). exactamente una solución.
   ii). no tenga solución.
   iii). infinitas soluciones.
f) Realizar una interpretación geométrica de $(i),(ii)$ y (iii).

Anexo III. Programa de Estudio

I. Matrices y determinantes
   1.1 Definición de una matriz y su notación utilizando subíndices.
   1.2 Operaciones fundamentales: suma, resta, multiplicación por una escalar, producto de matrices y sus propiedades algebraicas.
   1.3 Tipos de matrices: cuadrada, identidad, nula, diagonal, triangular, simétrica, inversa, transpuesta, renglón, columna, Escalar, periódica, etc.
   1.4 Matriz escalonada y escalonada reducida
   1.5 Operaciones elementales entre renglones y Método de Gauss- Jordan
   1.6 Cálculo de la matriz inversa
   1.7 Propiedades de la matriz inversa
   1.8 Rango de una matriz
   1.9 Concepto y notación de un determinante
   1.10 Propiedades de los determinantes
   1.11 Aplicación de las propiedades de los determinantes
   1.12 Menores y cofactores (sesión 2)
   1.13 Cálculo de la matriz adjunta
   1.14 Cálculo de la matriz inversa por el método de la adjunta

II. Sistemas de ecuaciones lineales
   2.1 Definición de un sistema e ecuaciones lineales
   2.2 Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos, no-homogéneos, consistentes e inconsistentes
   2.3 La representación material de un sistema de ecuaciones lineales
   2.4 Métodos de eliminación de Gauss y de Gauss- Jordan
   2.5 Solución de un sistema de ecuaciones lineales mediante la inversa de una matriz
   2.6 Regla de Cramer
   2.7 Aplicaciones

III. Espacios vectoriales
   3.1 Introducción
   3.2 Definición de cantidad vectorial
   3.3 Operaciones en Rn, norma de un vector
   3.4 Producto escalar y producto interior
   3.5 Producto cruz o producto vectorial
   3.6 Definición de espacios vectoriales
   3.7 Subespacios
   3.8 Espacios vectoriales especiales, espacio euclidiano de n dimensiones
   3.9 Combinación lineal, dependencia e independencia lineal, generadores
   3.10 bases y dimensión
   3.11 Matriz de coordenadas, cambio de base

IV. Transformaciones lineales
   4.1 Definición de las transformaciones lineales y notación
   4.2 Propiedades (núcleo, recorrido, rango y nulidad) de las transformaciones lineales
   4.3 Representación matricial de una transformación lineal
   4.4 Obtención de una transformación lineal
   4.5 Matrices de las transformaciones lineales
   4.6 Aplicaciones

V. Diagonalización
   5.1 Definición de valores propios y vectores propios
   5.2 Obtención de la ecuación y de los polinomios característicos
   5.3 Diagonalización de matrices
   5.4 Aplicaciones

Anexo IV. Actividad I: Ecuación ax=b

Nombre:________________________________ Secuencia:_____________

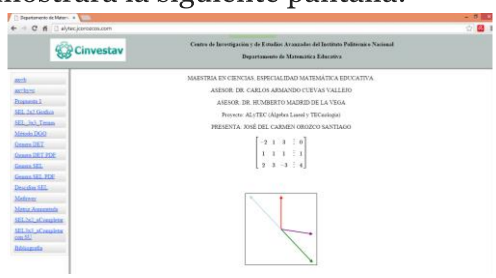
Carrera:________________________________ Fecha:__________

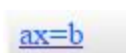
Instrucciones:

1. Abra su navegador preferido.

2. En la barra de dirección que está localizada en la parte superior del navegador de Internet, escribe http://selytec.jcorozcos.com/

   A continuación se mostrara la siguiente pantalla:



3. Haz click en el botón  del menú.

4. Lee atentamente las instrucciones mostradas en pantalla y desarrolla las actividades que te propone el programa. Recuerda que una ecuación de la forma $ax = b$ tiene tres posibles casos: solución única, infinidad de soluciones y sin solución.

   i). Si $a \neq 0$ entonces, el $SEL\left(1\times1\right)$ tiene una única solución y está dada por: $x = a^{-1}b$.

   ii). Si $a = 0$ y $b = 0$, entonces el $SEL\left(1\times1\right)$ tiene una infinidad de soluciones. A saber, cualquier número real.

   iii). Si $a = 0$ y $b \neq 0$, entonces el $SEL\left(1\times1\right)$ no tiene solución.

5. Para apoyo de la actividad el programa te proporciona la información que necesitas dando clic en el ícono AYUDA que se encuentra en la parte derecha de la pantalla.

6. Enseguida da respuesta a las siguientes preguntas.

   1. $4x+1=3$
      a) ¿Me puedes dar un valor de x que hace que la igualdad no se cumpla? Muestra los cálculos que expliquen tu respuesta.

      b) ¿Me puedes dar un valor de x que hace que la igualdad si se cumpla? Muestra los cálculos que expliquen tu respuesta.

      c) ¿Hay otros valores de x que hacen que la ecuación sea verdadera? Sí, No ¿Cómo lo sabes?

   2. $3+x=x+3$
      a) ¿Me puedes dar un valor de x que hace que la igualdad si se cumpla? Muestra los cálculos que expliquen tu respuesta.

      b) ¿Me puedes dar un segundo valor de x que hace que esta ecuación sea verdadera? Muestra los cálculos que expliquen tu respuesta.

      c) ¿Me puedes dar un valor de x que hace que esta ecuación no se cumpla? Explica tu respuesta.

   3. $2(x+1)=2x+1$
      a) ¿Me puedes dar un valor de x que hace que esta ecuación no se cumpla? Explica tu respuesta.

      b) ¿Me puedes dar un segundo valor de x que hace que esta ecuación no se cumpla? Explica tu respuesta.

      c) ¿Me puedes dar un valor de x que hace que esta ecuación se cumpla? Explica tu respuesta.

Anexo V. Actividad II: Ecuación ax + by = c.

Nombre:________________________________ Secuencia:_____________

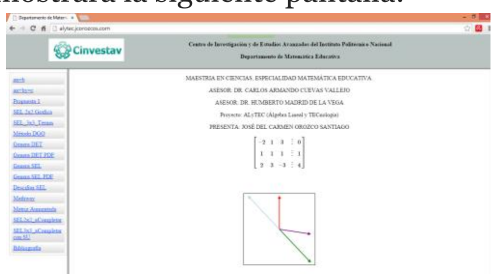
Carrera:________________________________ Fecha:__________

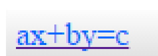
Instrucciones:

1. Abra su navegador preferido.

2. En la barra de dirección que está localizada en la parte superior del navegador de Internet, escribe http://selytec.jcorozcos.com/

   A continuación se mostrara la siguiente pantalla:



3. Haz click en el botón 

del menú.
4. Lee atentamente las instrucciones mostradas en pantalla y desarrolla las actividades que te propone el programa. Recuerda que una ecuación de la forma $ax + by = c$ tiene tres posibles casos: solución única, infinidad de soluciones y sin solución.

   Caso 1. Solución única:

   ✓ Si $a \neq 0$ y $b = 0$, entonces el $SEL\,(1\times 2)$ tiene una única solución y está dada por: $x = a^{-1}c$.

   ✓ Si $a = 0$ y $b \neq 0$, entonces el $SEL\,(1\times 2)$ tiene una única solución y está dada por: $y = b^{-1}c$.

   Caso 2. Infinidad de soluciones:

- ✓ Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces el $SEL\left(1\times 2\right)$ tiene una infinidad de soluciones. A saber, cualquier pareja de números reales "x, y" que satisfagan la ecuación $ax+by=c$.
- ✓ Si $a=0$, $b=0$ y $c=0$, entonces el $SEL\left(1\times 2\right)$ tiene una infinidad de soluciones. A saber, cualquier pareja de números reales "x, y" que satisfagan la ecuación $ax+by=c$.

Caso 3. El $SEL\left(1\times 2\right)$ no tiene solución.

- ✓ Si $a=0$ y $b=0$ y $c \neq 0$ entonces, el $SEL\left(1\times 2\right)$ no tiene solución.

5. Para apoyo de la actividad el programa te proporciona la información que necesitas dando clic en el ícono AYUDA que se encuentra en la parte derecha de la pantalla.
6. Enseguida da respuesta a las siguientes preguntas.
   1. Dada la siguiente ecuación $4x-2y=-4$
      a) Si $x=2$, ¿Da un valor de y que haga que la ecuación no se cumpla? Muestra los cálculos que expliquen tu respuesta.

      b) Si $x=2$, ¿Da un valor de y tal manera que la ecuación si se cumpla? Muestra los cálculos que expliquen tu respuesta.

      c) Si $x=2$, ¿Existe otro valor de y (diferente al que proporcionaste en el inciso anterior) tal manera que la ecuación si se cumpla? Muestra los cálculos que expliquen tu respuesta

   2. Dada la siguiente ecuación $-5x+3y=8$
      a) Si $y=1$, ¿Da un valor de x que haga que la ecuación sea verdadera? Muestra los cálculos que expliquen tu respuesta.

      b) Si $y=-4$, ¿Da un valor de x tal manera que la ecuación sea Verdadera? Muestra los cálculos que expliquen tu respuesta.

   3. Dada la siguiente ecuación $-3x+2y=-9$
      a) Si $x=-1$ y $y=-6$ ¿Estos valores satisfacen la ecuación? Muestra los cálculos que expliquen tu respuesta.

b) Si $x = -5$ y $y = 12$ ¿Estos valores satisfacen la ecuación? Muestra los cálculos que expliquen tu respuesta.

c) Si $x = 5$ y $y = 3$ ¿Estos valores satisfacen la ecuación? Muestra los cálculos que expliquen tu respuesta.

d) ¿podrías proporcionar un valor para x y uno para y de tal manera que satisfaga la ecuación?, ¿Cuáles?

Anexo VI. Actividad III: Matriz Aumentada.

Nombre:______________________________ Secuencia:____________

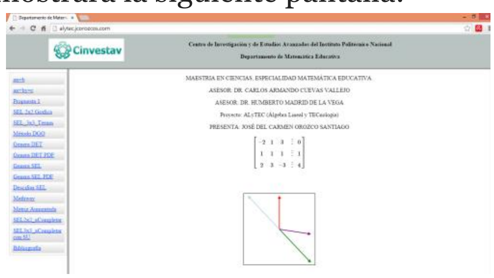
Carrera:______________________________ Fecha:__________

Instrucciones:

1. Abra su navegador preferido.

2. En la barra de dirección que está localizada en la parte superior del navegador de Internet, escribe http://selytec.jcorozcos.com/

   A continuación se mostrara la siguiente pantalla:



3. Haz click en el botón del menú.

4. Lee atentamente las instrucciones mostradas en pantalla y desarrolla las actividades que te propone el programa. Recuerda que una matriz aumentada la obtienes de la siguiente manera:

   Consideramos un sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} SEL\,(m\times n)$$

   La matriz aumentada del SEL se escribe de la siguiente la forma:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

5. Una vez que terminaste con la actividad, resuelve lo siguiente:

i). Dado el siguiente SEL.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 11 \\ 2x_1 & & & + & x_3 & = & 23 \\ -3x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 20 \end{array}$$

Obtenga su matriz aumentada.

ii). Dado el siguiente SEL.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 11 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -6 \\ -3x_1 & - & 7x_2 & & & = & 8 \end{array}$$

Obtenga su matriz aumentada.

Anexo VII. Actividad IV: ¿Solución o no solución?.

Nombre:________________________________ Secuencia:_____________

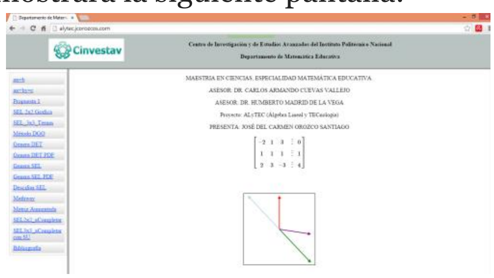
Carrera:________________________________ Fecha:__________

Instrucciones:

1. Abra su navegador preferido.

2. En la barra de dirección que está localizada en la parte superior del navegador de Internet, escribe http://selytec.jcorozcos.com/

   A continuación se mostrara la siguiente pantalla:



3. Haz click en el botón Comprobaciones del menú.
4. Resuelve las siguientes actividades con el apoyo de SELyTEC:

I. Ingresa el siguiente SEL.

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\
3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 13 \\
2x_1 - x_2 - x_3 &= 15
\end{aligned}
$$

De click al botón continuar.

Ingresa la siguiente terna $(1,-1,2)$ y presiona el botón **“Verificar valores”**.

a) ¿La terna $(1,-1,2)$ satisface a la primera ecuación? (SI/NO)_______.

b) ¿La terna $(1,-1,2)$ satisface la segunda ecuación? (SI/NO)_______.

c) ¿La terna $(1,-1,2)$ satisface la tercera ecuación? (SI/NO)_______.

Ingresa la siguiente terna $(-5,1,4)$ y presiona el botón **"Verificar otros valores"**.

d) ¿La terna $(-5,1,4)$ satisface a la primera ecuación? (SI/NO)_______.

e) ¿La terna $(-5,1,4)$ satisface la segunda ecuación? (SI/NO)_______.

f) ¿La terna $(-5,1,4)$ satisface la tercera ecuación? (SI/NO)_______.

Ingresa la siguiente terna $(6,-4,1)$ y presiona el botón **"Verificar otros valores"**.

g) ¿La terna $(6,-4,1)$ satisface a la primera ecuación? (SI/NO)_______.

h) ¿La terna $(6,-4,1)$ satisface la segunda ecuación? (SI/NO)_______.

i) ¿La terna $(6,-4,1)$ satisface la tercera ecuación? (SI/NO)_______.

Ingresa la siguiente terna $(7,1,-2)$ y presiona el botón **"Verificar otros valores"**.

j) ¿La terna $(7,1,-2)$ satisface a la primera ecuación? (SI/NO)_______.

k) ¿La terna $(7,1,-2)$ satisface la segunda ecuación? (SI/NO)_______.

l) ¿La terna $(7,1,-2)$ satisface la tercera ecuación? (SI/NO)_______.

II. Ingresa el siguiente SEL.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 6x_3 & = & 21 \\ x_1 & - & 4x_2 & - & 11x_3 & = & -21 \end{array}$$

De click al botón continuar.

Ingresa la siguiente terna $(10,5,1)$ y presiona el botón **"Verificar valores"**.

a) ¿La terna $(10,5,1)$ satisface a la primera ecuación? (SI/NO)_______.

b) ¿La terna $(10,5,1)$ satisface la segunda ecuación? (SI/NO)_______.

c) ¿La terna $(10,5,1)$ satisface la tercera ecuación? (SI/NO)_______.

Ingresa la siguiente terna $(5,1,2)$ y presiona el botón **"Verificar otros valores"**.

d) ¿La terna $(5,1,2)$ satisface a la primera ecuación? (SI/NO)_______.

e) ¿La terna $(5,1,2)$ satisface la segunda ecuación? (SI/NO)_______.

f) ¿La terna $(5,1,2)$ satisface la tercera ecuación? (SI/NO)_______.

Ingresa la siguiente terna $(6,2,2)$ y presiona el botón **"Verificar otros valores"**.

g) ¿La terna $(6,2,2)$ satisface a la primera ecuación? (SI/NO)_______.

h) ¿La terna $(6,2,2)$ satisface la segunda ecuación? (SI/NO)_______.

i) ¿La terna $(6,2,2)$ satisface la tercera ecuación? (SI/NO)_______.

Ingresa la siguiente terna $(0,-3,3)$ y presiona el botón **"Verificar otros valores"**.

j) ¿La terna $(0,-3,3)$ satisface a la primera ecuación? (SI/NO)_______.

k) ¿La terna $(0,-3,3)$ satisface la segunda ecuación? (SI/NO)_______.

l) ¿La terna $(0,-3,3)$ satisface la tercera ecuación? (SI/NO)_______.

Anexo VIII. Actividad V: Aplicaciones.

Problema I: Ecuaciones de la forma $ax = b$

a) En la carretera México – Puebla se ha instalado un radar vial para detectar la velocidad de los automóviles. Un automóvil particular pasa a una velocidad de 30 m/s (108 Km/h), y 10 segundos después una patrulla de policía empieza su persecución, desplazándose a una velocidad de 40 m/s (144 Km/h). considerando que la velocidad de ambos vehículos se mantiene constante, ¿en qué instante la patrulla alcanza al automotor?.

b) En un supermercado existe la promoción de un paquete de tres envases de aceites de vegetal comestible de 945 ml c/u al precio de $64.80, y un empaque de tres litros (del mismo aceite) al precio de $66.00. ¿Qué promoción escogerías y porque?

Problema II: Ecuaciones de la forma $ax + by = c$

a) Elena y sus amigos comieron quesadillas y tomaron agua de sabor. Por cada quesadilla pagaron $12.00, y por cada agua de sabor $10.00. La cuenta total fue de $178.00, ¿Cuántas quesadillas y aguas de sabor consumieron?

Problema III: SEL (3×3)

Asignación de recursos: Muchísimas aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales involucran la asignación de recurso limitados sujetos a un conjunto de restricciones.

Ejemplo 1: Una bióloga ha colocado tres cepas bacterianas (denotadas como I, II y III) en un tubo de ensayo, donde serán alimentadas con tres distintas fuentes alimenticias (A, B y C). Cada día 2300 unidades de A, 800 de B y 1500 de C se colocan en el tubo de ensayo, y cada bacteria consume cierto número de unidades de cada alimento por día, como se muestra en la siguiente tabla.

	Cepa bacteriana I	Cepa bacteriana II	Cepa bacteriana III
Alimento A	2	2	4
Alimento B	1	2	0
Alimento C	1	3	1

¿Cuántas bacterias de cada cepa pueden coexistir en el tubo de ensayo y consumir todo el alimento?

Sean:

x_1 el número de bacterias de la cepa I

x_2 el número de bacterias de la cepa II

x_3 el número de bacterias de la Cepa III

Puesto que cada una de las bacterias de x_1 de la cepa consume 2 unidades de A por día, la cepa I consume un total de $2x_1$ unidades por día. De modo similar, las cepas II y III consumen un total de $2x_2$ y $4x_3$ unidades de alimento A diariamente. Como queremos acabar con 2300 unidades de A, tenemos la ecuación.

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2300$$

De la misma forma, obtenemos las ecuaciones correspondientes al consume de B y C.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad &= 800 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1500 \end{aligned}$$

Así, tenemos un sistema de tres ecuaciones lineales en tres variables.

Ejemplo 2: Una bióloga ha colocado tres cepas bacterianas (denotadas como I, II y III) en un tubo de ensayo, donde serán alimentadas con tres distintas fuentes alimenticias (A, B y C). Cada día 3000 unidades de A, 1500 de B y 4500 de C se colocan en el tubo de ensayo, y 0cada bacteria consume cierto número de unidades de cada alimento por día, como se muestra en la siguiente tabla.

	Cepa bacteriana I	Cepa bacteriana II	Cepa bacteriana III
Alimento A	2	1	3
Alimento B	1	1	1

Alimento C	3	1	5

¿Cuántas bacterias de cada cepa pueden coexistir en el tubo de ensayo y consumir todo el alimento?

Sean:

x_1 el número de bacterias de la cepa I

x_2 el número de bacterias de la cepa II

x_3 el número de bacterias de la Cepa III

Puesto que cada una de las bacterias de x_1 de la cepa consume 2 unidades de A por día, la cepa I consume un total de $2x_1$ unidades por día. De modo similar, las cepas II y III consumen un total de x_2 y $3x_3$ unidades de alimento A diariamente. Como queremos acabar con 3000 unidades de A, tenemos la ecuación.

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3000$$

De la misma forma, obtenemos las ecuaciones correspondientes al consume de B y C.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1500 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 &= 4500 \end{aligned}$$

Así, tenemos un sistema de tres ecuaciones lineales en tres variables.

Ejemplo 3: Una bióloga ha colocado tres cepas bacterianas (denotadas como I, II y III) en un tubo de ensayo, donde serán alimentadas con tres distintas fuentes alimenticias (A, B y C). Cada día 1150 unidades de A, 900 de B y 1500 de C se colocan en el tubo de ensayo, y 0cada bacteria consume cierto número de unidades de cada alimento por día, como se muestra en la siguiente tabla

	Cepa bacteriana I	Cepa bacteriana II	Cepa bacteriana III
Alimento A	2	1	1
Alimento B	1	1	2
Alimento C	3	1	0

¿Cuántas bacterias de cada cepa pueden coexistir en el tubo de ensayo y consumir todo el alimento?

Sean:

x_1 el número de bacterias de la cepa I

x_2 el número de bacterias de la cepa II

x_3 el número de bacterias de la Cepa III

Puesto que cada una de las bacterias de x_1 de la cepa consume 2 unidades de A por día, la cepa I consume un total de $2x_1$ unidades por día. De modo similar, las cepas II y III consumen un total de x_2 y x_3 unidades de alimento A diariamente. Como queremos acabar con 1150 unidades de A, tenemos la ecuación.

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 1150$$

De la misma forma, obtenemos las ecuaciones correspondientes al consume de B y C.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 900 \\ 3x_1 + x_2 &= 1500 \end{aligned}$$

Así, tenemos un sistema de tres ecuaciones lineales en tres variables.

Los primeros dos ejercicios de asignación de recursos, fueron tomados del libro *"ÁLGEBRA LINEAL Una introducción moderna"* de David Poole, 2ª edición. CENGAGE Learning 2007.

El tercer ejercicio fue creado por nosotros para que fuera un SEL sin solución.

Problema IV: SEL (3×3)

Ejemplo TMP: Trail Mix Embalaje

Suponga que usted es el gerente de producción de una planta de envasado de alimentos y una de sus líneas de productos es mezcla de frutos secos, una merienda saludable popular entre los excursionistas y mochileros, que contienen pasas, cacahuates y trozos de chocolate. Mediante el ajuste de la mezcla de estos tres ingredientes, se venden tres variedades de este artículo. La versión **premium** se venden en paquetes de medio kilo en tiendas comerciales y cuenta con más chocolate y menos pasas, a un mayor precio. La versión **estándar** se vende en paquetes de un kilogramo en los mini-mercados y gasolineras. La versión estándar tiene aproximadamente la misma cantidad de cada ingrediente, no es tan caro como la versión premium. Por último, una versión **económica** se vende en cajas en las tiendas para los consumidores a granel en cantidades de su elección, para su economía esta mezcla tiene muchos más pasas (a expensas de chocolate) y, por tanto, se vende más barato.

Sus instalaciones de producción tienen un espacio de almacenamiento que son capaces de recibir y almacenar cada mañana 380 kilogramos de pasas, 500 kilos de cacahuetes y 620 kilogramos de piezas de chocolate. Como gerente de producción, una de sus tareas más importantes es decidir qué cantidad de cada versión de mezcla de frutos secos realizará todos los días. Claramente, usted puede tener hasta 1500 kilogramos de materias primas disponibles cada día, así como la más productiva es probable que produzca 1500 kilogramos de mezclas cada día. También, usted prefiere no tener ningún ingrediente sobrante cada día, para que su producto final sea tan fresca como sea posible y de modo que usted pueda recibir el máximo de entrega a la mañana siguiente. Pero, ¿cómo estos ingredientes deben ser asignados a la mezcla de Premium, estándar y económicas?

En primer lugar, necesitamos un poco más de información acerca de las mezclas. Los trabajadores mezclan los ingredientes en 15 kilogramos/lotes, y la tabla a continuación da una receta para un lote de 15 kg. Hay información adicional sobre los costos de los ingredientes y el precio que el fabricante puede cobrar por las diferentes versiones de la mezcla de frutos secos.

	Pasas (Kg/lote)	Cacahuates (Kg/lote)	Chocolate (Kg/lote)	Costo ($/Kg)	Precio de Venta ($/Kg)
Económico	7	6	2	3.69	4.99
Estándar	6	4	5	3.86	5.50
Premium	2	5	8	4.45	6.50
Almacenamiento (Kg)	380	500	620		
Costo ($/Kg)	2.55	4.65	4.80		

Como jefe de producción, es importante darse cuenta de que sólo tiene tres decisiones que tomar - la cantidad de mezcla económica, la cantidad de mezcla estándar y la cantidad de mezcla premium a realizar. Todo lo demás está fuera de su control o está a cargo de otro departamento dentro de la empresa. Principalmente, también está limitado por la cantidad de materia prima que puede almacenar cada día. Denotemos la cantidad de cada mezcla para producir cada día, medido en kilogramos, por la cantidad de variables b, s y f .

b la cantidad de paquetes de la mezcla económica,

s la cantidad de paquetes de la mezcla estándar, y

f la cantidad de paquetes de la mezcla Premium.

En primer lugar, no podemos hacer cantidades negativas de cada mezcla, por lo que

$$b \geq 0 \quad s \geq 0 \quad f \geq 0$$

En segundo lugar, si queremos consumir todos nuestros ingredientes cada día, las capacidades de almacenamiento llevan a tres ecuaciones (lineales), uno para cada ingrediente,

$$\begin{aligned} \frac{7}{15}b+\frac{6}{15}s+\frac{2}{15}f &= 380 \quad \textit{Pasas} \\ \frac{6}{15}b+\frac{4}{15}s+\frac{5}{15}f &= 500 \quad \textit{Cacahuate} \\ \frac{2}{15}b+\frac{5}{15}s+\frac{8}{15}f &= 620 \quad \textit{Chocolates} \end{aligned}$$

¿Cuántos paquetes se deberán de realizar?

A partir de los datos obtenidos, sustituya y obtenga la ganancia diaria de este programa de producción:

$$b(4.99-3.69)+s(5.50-3.86)+f(6.50-4.45)=?$$

Problema 2

Ahora el departamento de marketing le ha sugerido que la porción de los productos se ajuste a la siguiente mezcla con diferentes costes, como se indica en la siguiente tabla.

	Pasas (Kg/lote)	Cacahuates (Kg/lote)	Chocolate (Kg/lote)	Costo ($/Kg)	Precio de Venta ($/Kg)
Económico	7	5	3	3.70	4.99
Estándar	6	5	4	3.85	5.50
Premium	2	5	8	4.45	6.50
Almacenamiento (Kg)	380	500	620		
Costo ($/Kg)	2.55	4.65	4.80		

De una manera similar como antes, no podemos hacer cantidades negativas de cada mezcla, por lo que deseamos valores de b, s y f de manera que:

$$b \geq 0 \quad s \geq 0 \quad f \geq 0$$

Si queremos consumir todos nuestros ingredientes cada día, las capacidades de almacenamiento llevan a tres ecuaciones (lineales), uno para cada ingrediente:

$$\begin{aligned} \frac{7}{15}b + \frac{6}{15}s + \frac{2}{15}f &= 380 \quad \textit{Pasas} \\ \frac{5}{15}b + \frac{5}{15}s + \frac{5}{15}f &= 500 \quad \textit{Cacahuate} \\ \frac{3}{15}b + \frac{4}{15}s + \frac{8}{15}f &= 620 \quad \textit{Chocolates} \end{aligned}$$

¿Cuántos paquetes se deberán de realizar?

A partir de los datos obtenidos, sustituya y obtenga la ganancia diaria de este programa de producción:

$$b(4.99 - 3.70) + s(5.50 - 3.85) + f(6.50 - 4.45) = ?$$

¿Esta producción es única?

¿La producción que obtuviste produce el mayor beneficio posible para la empresa?

Problema 3

Nuevamente el departamento de marketing le ha sugerido que la porción de los productos se ajuste a la siguiente mezcla con diferentes costes, como se indica en la siguiente tabla.

	Pasas (Kg/lote)	Cacahuates (Kg/lote)	Chocolate (Kg/lote)	Costo ($/Kg)	Precio de Venta ($/Kg)
Económico	7	6	2	3.70	4.99
Estándar	5	5	5	3.85	5.50
Premium	3	4	8	4.45	6.50
Almacenamiento (Kg)	380	500	620		
Costo ($/Kg)	2.55	4.65	4.80		

De una manera similar como antes, no podemos hacer cantidades negativas de cada mezcla, por lo que deseamos valores de b, s y f de manera que:

$$b \geq 0 \quad s \geq 0 \quad f \geq 0$$

Si queremos consumir todos nuestros ingredientes cada día, las capacidades de almacenamiento llevan a tres ecuaciones (lineales), uno para cada ingrediente:

$$\begin{aligned} \frac{7}{15}b + \frac{5}{15}s + \frac{3}{15}f &= 380 \quad \textit{Pasas} \\ \frac{6}{15}b + \frac{5}{15}s + \frac{4}{15}f &= 500 \quad \textit{Cacahuate} \\ \frac{2}{15}b + \frac{5}{15}s + \frac{8}{15}f &= 620 \quad \textit{Chocolates} \end{aligned}$$

¿Cuántos paquetes se deberán de realizar?

Los primeros dos ejercicios de Trail Mix Embalaje, fueron tomados del libro *"A First Course in Linear Algebra"* de Robert A. Beezer, Department of Mathematics and Computer Science. University of Puget Sound 2004.

El tercer ejercicio fue creado por nosotros para que fuera un SEL sin solución.

Anexo IX. Pos-Test

Nombre:________________________________ Secuencia:____________

Carrera:_________________________________ Fecha:__________

Contesta detalladamente a cada pregunta.

1. Dada la siguiente matriz aumentada.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -3 & 11 \\ -4 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 14 \end{array}\right]$$

   a) Establezca un SEL que tenga dicha matriz aumentada.

2. Dado el siguiente SEL.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 4x_2 & - & 2x_3 & = & -10 \\ 2x_1 & - & 10x_2 & + & 7x_3 & = & 57 \\ -2x_1 & + & 9x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{array}$$

   ¿Es la terna $(-10,-3,6)$ solución del sistema? SÍ, NO, ¿Por qué?

3. Resuelve el siguiente SEL por el método que prefieras.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}$$

4. Dado el siguiente SEL.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 7 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & = & 14 \end{array}$$

   a) Las siguientes ternas $(-1,1,2),(2,-2,3),(4,3,-1)$ ¿son soluciones del sistema?
   b) ¿Cuántas soluciones tiene el sistema?

5. Partimos del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & + & ky & = & -6 \\ kx & + & 3y & = & 6 \end{array}$$

Donde k es un número real.

m) Escribir la ecuación matricial de este sistema
n) Hallar los valores de k para los cuales el sistema tenga:
   i). exactamente una solución.
   ii). no tenga solución.
   iii). infinitas soluciones.
o) Realizar una interpretación geométrica de $(i), (ii)$ y (iii).