

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL  
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL



Unidad Zacatenco  
Departamento de Matemática Educativa

**Análisis Dinámico de Relaciones: Una Estrategia de  
Resolución de Problemas de Optimización con el Uso de  
un Sistema de Geometría Dinámica**

Tesis que presenta  
**Daniel José Ortiz May**

Para obtener el grado de  
**Maestro en Ciencias**

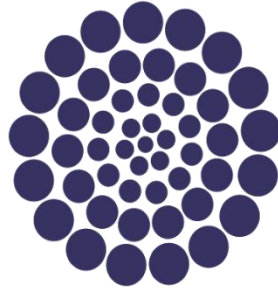
En la especialidad de  
**Matemática Educativa**

Director de la tesis: **Dr. Luz Manuel Santos Trigo**

Ciudad de México

Agosto, 2019





**CONACYT**

*Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología*

Agradecimiento especial al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo brindado al otorgarme la beca para la realización de mis estudios de Maestría en Ciencias en el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN

Becario: 863106



## **Agradecimientos**

Al Dr. Santos Trigo, por su rol fundamental en la consecución de este trabajo de investigación y su importante orientación.

A mis sinodales, el Dr. Moreno Armella y el Dr. Ávila Antuna, por el tiempo dedicado a la revisión y mejora de este trabajo.

A mis profesores de maestría, cuyas enseñanzas valiosas contribuyeron en gran medida a mi formación como investigador.

A mis colegas y compañeros, quienes ofrecieron su apoyo constante a lo largo de la realización de este estudio.

A mi familia, por apoyarme incondicionalmente en todo lo que hago.



## Tabla de contenidos

Resumen.....	iii
<b>PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN .....</b>	<b>1</b>
<b>1.1. Introducción.....</b>	<b>1</b>
<b>1.2. El empleo de sistemas de geometría dinámica en la resolución de problemas .....</b>	<b>3</b>
<b>1.3. La pregunta de investigación .....</b>	<b>7</b>
<b>MARCO CONCEPTUAL .....</b>	<b>11</b>
<b>2.1. Tecnologías digitales en la resolución de problemas .....</b>	<b>11</b>
2.1.1. Sobre <i>affordances</i> .....	14
2.1.2. El análisis dinámico de relaciones como una intersección de heurísticas y <i>affordances</i> ....	16
<b>2.2. Consideraciones teóricas sobre el diseño de la secuencia .....</b>	<b>20</b>
<b>METODOLOGÍA .....</b>	<b>24</b>
<b>3.1. Participantes y procedimiento.....</b>	<b>24</b>
<b>3.2. Estructura de las actividades.....</b>	<b>25</b>
3.2.1. Problemas de introducción a Geogebra.....	26
3.2.2. Introducción a los ejes coordenados.....	29
3.2.3. Resolución de problemas de optimización .....	31
<b>3.3. Recolección de los datos .....</b>	<b>35</b>
<b>ANÁLISIS DE RESULTADOS .....</b>	<b>36</b>
<b>4.1 Primer grupo de problemas: Introducción a GeoGebra .....</b>	<b>36</b>
4.1.1. Problema 1: El punto medio de un segmento.....	36
4.1.2. Extensión del problema: Una familia de triángulos isósceles .....	39
4.1.3. Problema 2: El triángulo rectángulo.....	43
4.1.4. Problema 3: Construcción de un cuadrado.....	49
4.1.5. Discusión de los resultados del primer grupo de problemas .....	53
<b>4.2. Segundo grupo de problemas: Exploración de relaciones dinámicas.....</b>	<b>54</b>
4.2.1. Problema 4: El área de un cuadrado .....	55
4.2.2. Extensión del problema: Construcción de lugares geométricos.....	56
4.2.2. Problema 5: Triángulo rectángulo inscrito .....	58
4.2.3. Extensión del problema: Otras relaciones en la configuración dinámica.....	59
4.2.4. Discusión de los resultados del segundo grupo de problemas.....	63
<b>4.3. Tercer grupo de problemas: Tareas de Optimización .....</b>	<b>63</b>
4.3.1. Problema 6: Rectángulos isoperimétricos .....	64

4.3.2. Extensión del problema: Familia de rectángulos de igual área .....	70
4.3.3. Problema 7: Rectángulo inscrito en un triángulo rectángulo .....	74
4.3.4. Discusión de los resultados del tercer grupo de problemas .....	79
<b>CONCLUSIONES .....</b>	<b>81</b>
<b>5.1. Sobre la pregunta de investigación .....</b>	<b>82</b>
<b>5.2. Reflexiones adicionales .....</b>	<b>86</b>
<b>INVESTIGACIÓN FUTURA .....</b>	<b>90</b>
<b>6.1. Problema de investigación .....</b>	<b>90</b>
<b>6.2. Elementos del marco conceptual.....</b>	<b>92</b>
<b>6.3. Aspectos metodológicos.....</b>	<b>94</b>
<b>6.4. Recolección y análisis de datos .....</b>	<b>99</b>
<b>6.5. Propuesta de desarrollo del estudio .....</b>	<b>99</b>
Referencias .....	101



## Resumen

Utilizar tecnologías digitales en tareas de resolución de problemas permite a los estudiantes adentrarse en diferentes formas de explorar de conceptos matemáticos y analizar múltiples aproximaciones a la solución. En particular, en el proceso de resolución de problemas que involucran fenómenos de variación con apoyo de un Sistema de Geometría Dinámica (SGD) se presentan oportunidades novedosas de explorar ideas matemáticas y realizar conexiones entre diferentes representaciones. ¿Cómo puede promoverse en los estudiantes esta forma de emplear un SGD en la resolución de problemas matemáticos? Tomando esta pregunta como punto de partida se propuso una serie de actividades de resolución de problemas orientadas a la apropiación de estrategias de resolución apoyadas en las funcionalidades (*affordances*) de un SGD (GeoGebra).

Así, en este estudio se reporta el análisis de las estrategias y formas de razonamiento que estudiantes de bachillerato exhibieron durante la implementación de las actividades. Los resultados muestran que cómo el arrastre de objetos, el movimiento ordenado, la medición de atributos y el uso de la visualización de lugares geométricos se emplean para la generación de estrategias basadas en las *affordances* de GeoGebra enfocadas en la graficación de funciones para resolver problemas de optimización en contextos geométricos.

Adicionalmente, la investigación realizada contribuye a la caracterización de estrategias generales de resolución de problemas que involucran la implementación de múltiples heurísticas mediadas por tecnologías digitales.

## **Abstract**

Using digital technologies when working on problem solving tasks allows students to engage in different ways to explore mathematical concepts as well as analysing multiple approaches that emerge while solving the tasks. In particular, the process of solving problems that involve variation phenomena with the use of a Dynamic Geometry System (DGS) poses novel opportunities to delve into mathematical ideas related to the concept of function such as variation, rate of change and the derivative. How to foster this way of using a DGS in students when solving mathematical problems? Taking this question as a departure point, I proposed a series of problem-solving activities oriented towards the appropriation of strategies that rely upon the affordances of an SGD (GeoGebra).

Thus, this study reports on the strategies and ways of reasoning that high school students exhibit during the implementation of problem-solving activities. Results show that affordances such as object dragging, moving objects in an orderly way, object's attributes measurement and loci visualization are employed to construct affordance-based strategies focused on function graphing to solve optimization problems in geometric contexts.

Additionally, this research contributes to the characterization of general problem-solving strategies that involve the implementation of multiple heuristics mediated by digital technologies.

# CAPÍTULO 1

---

## PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Se argumenta que el uso de tecnologías digitales y el enfoque de resolución de problemas son elementos que contribuyen de manera importante en la construcción del pensamiento matemático de los estudiantes. Por un lado, la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas realza aspectos de la naturaleza de la matemática que son propios del quehacer de los matemáticos, alejándose de la visión tradicionalista que promueve una serie de procesos algorítmicos carentes de sentido; por otro lado, la introducción de la tecnología en el salón de clases promueve la generación de distintas estrategias de resolución de problemas.

### 1.1. Introducción

El avance tecnológico sin precedentes que se experimenta en la actualidad ha ocasionado una transformación rápida y compleja de los espacios sociales. La NCTM (2000) señala que existe una necesidad cada vez mayor de competencias matemáticas necesarias en actividades esenciales para la vida diaria como tomar decisiones correspondientes a la adquisición de bienes o servicios, la selección de seguros médicos convenientes o incluso votar de manera informada. Ante ello, es indispensable que el enfoque de los sistemas educativos esté orientado a proporcionar a los estudiantes herramientas que les permitan hacer frente a las exigencias de un mundo tecnológicamente sofisticado, como la adquisición de habilidades relacionadas con el pensamiento flexible e innovativo, o la comunicación y presentación de ideas entre sus pares (English y Kirshner, 2016; Gros, Kinshuk & Maina, 2016).

En este sentido, es conveniente considerar los estándares establecidos por la NCTM pues plantean un cambio de percepción en la educación matemática, en lugar de ser vista como un conjunto de conocimientos o un cuerpo teórico, puede verse como compuesta por procesos: la *comunicación* con otros, de modo que se genere un entendimiento común de las matemáticas; realizar *conexiones* entre diferentes ideas matemáticas y contextos extraescolares; construir diferentes *representaciones* de ideas matemáticas para modelar fenómenos; y, finalmente, *resolver problemas* en vez de simplemente aprender algoritmos y técnicas. Es decir, en los estándares se proponen formas novedosas del quehacer matemático al enfocar la atención hacia el desarrollo del entendimiento matemático, el trabajo colaborativo y la resolución de problemas (Schuck y Pereira, 2011).

La resolución de problemas es uno de los focos principales de la educación matemática ya que encierra una de las principales características de las matemáticas que son relevantes para la vida cotidiana y laboral. Silver (1997) argumenta que bajo un enfoque de resolución de problemas los estudiantes desarrollan componentes relacionados con la creatividad involucrada en distintos aspectos de la actividad humana: la fluidez mental se desarrolla cuando los estudiantes resuelven problemas abiertos cuya respuesta no es única, o bien, que poseen distintos caminos de solución; cuando los estudiantes son motivados a presentar distintas formas de solución, se pone en juego el aspecto de flexibilidad; y se promueve la innovación cuando se presentan nuevas formas de resolver un problema después de haber analizado distintos enfoques.

Por lo tanto, la resolución de problemas no solamente consiste en uno de los objetivos de la educación, sino en una manera de aprender y concebir a las matemáticas de un modo dinámico y, por lo tanto, podría considerarse como uno de los elementos de mayor relevancia en la educación. Así, se considera que los objetivos y propósitos de esta investigación no están centrados alrededor del aprendizaje de contenidos matemáticos, sino hacia la comprensión y entendimiento de las matemáticas como una serie de procesos cognitivos que son útiles dentro y fuera del ámbito escolar. Es decir, los contenidos matemáticos no se consideran el objetivo primordial de la educación, sino que pueden fungir como la plataforma desde la cual realizar prácticas orientadas al desarrollo de pensamientos relacionados con las matemáticas, las cuales se promueven a partir de la resolución de problemas.

A pesar de que no existe un acuerdo universal acerca de cómo debe ser la enseñanza bajo un enfoque de resolución de problemas, entre las características principales se incluye utilizar problemas como punto de partida para estudiar y entender aspectos de un concepto matemático al participar activamente en la exploración de la situación. En el proceso, debe existir una interacción entre estudiantes y profesores que motive el descubrimiento y la invención de estrategias que se sustentan en distintos recursos que los estudiantes poseen (Cai, 2010). El enfoque específico de resolución de problemas como un ambiente de enseñanza que deberá entenderse en este estudio es el de un ambiente en el que se promueve que las ideas matemáticas sean construidas activamente por los estudiantes, de similar a como lo hacen los matemáticos. La resolución de problemas, en términos de enseñanza, se puede pensar como una forma de interactuar y pensar los problemas y conceptos matemático, que se caracteriza por hacer énfasis en la necesidad de que los estudiantes *problematicen* los contenidos, es decir, que se establezcan

dilemas que necesitan ser representados, analizados y resueltos a partir de emplear recursos matemáticos (Santos-Trigo, 2013). Es importante que los estudiantes movilicen recursos matemáticos hacia la conformación de estrategias conscientes para resolver problemas; en el proceso, se ponen en práctica acciones propias de la matemática como la comunicación de ideas, la estructuración de planes de solución, exploraciones y generación de conjeturas, comprobar o refutar hipótesis y realizar tareas de extensión hacia otros problemas matemáticos. Al respecto, los ambientes digitales interactivos ofrecen herramientas dinámicas para construir e interactuar con objetos y configuraciones matemáticas que, en esencia, apuntan al desarrollo de sentido espacial y razonamiento matemático al permitir la generación de conjeturas que pueden ser comprobadas a través de seleccionar, construir o manipular objetos que obedecen reglas matemáticas (Mariotti, 2003; Hegedus & Moreno-Armella, 2011). Adicionalmente, el uso de tecnología ofrece la oportunidad de introducir herramientas en el salón de clase que permite que la atención de los estudiantes sea enfocada en la planeación de estrategias y deja los detalles tediosos, o aquellos relacionados con cálculos aritméticos, como una actividad de segundo plano (Kuzzle, 2017). En particular, tecnologías digitales como los Sistemas de Geometría Dinámica (SGD) permiten que los estudiantes se enganchen en actividades de formulación de problemas y transforman tareas de rutina en nuevos problemas o tareas de indagación y observar la manera en que distintas maneras de representar y resolver un problema se conectan (Santos-Trigo, Aguilar-Magallón y Reyes-Martínez, en prensa) y facilita la tarea de encontrar patrones, invariantes y establecer relaciones matemáticas (Santos-Trigo, 2008; Baccaglini y Mariotti, 2010). Es decir, los salones de clases no solamente cuentan con la posibilidad de compartir medios digitales que ayuden a los profesores a organizar discusiones matemáticas abiertas y a adoptar una costumbre de reflexión continua, sino que, en estos espacios el significado de las entidades matemáticas evoluciona con las oportunidades de manipularlas (Moreno-Armella y Santos-Trigo, 2016).

## **1.2. El empleo de sistemas de geometría dinámica en la resolución de problemas**

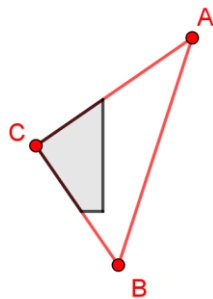
El concepto de heurística, acuñado por Polya (1945), es uno de los más importantes en el marco de resolución de problemas. En términos generales, las heurísticas son estrategias generales o modo de proceder que un individuo emplea al resolver un problema como realizar analogías (considerar problemas similares o relacionados), descomponer y recomponer el problema

(relajar las condiciones del problema), dibujar una figura o esquema, razonar el problema en forma regresiva, buscar objetivos particulares, obtener el resultado de diferentes maneras, entre otras. El tipo de estrategias o heurísticas que los estudiantes emplean en ambientes digitales son distintas a las que se presentan en lápiz y papel, en la medida que se conciben y se consolidan a medida que se comprende el uso de artefactos digitales (Santos-Trigo y Moreno-Armella, 2016).

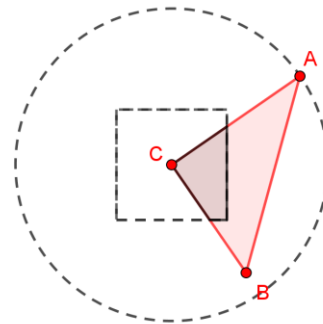
Por ejemplo, las situaciones que frecuentemente son empleadas en geometría en escenarios estáticos de lápiz y papel suelen involucrar la demostración de la propiedad de alguna figura mediante un proceso deductivo compuesto por proposiciones axiomáticas conocidas que encadenen un razonamiento lógico. En un ambiente donde los estudiantes cuentan con ayuda de un SGD, el proceso de demostración (prueba) se convierte en un proceso muy similar a la resolución de problemas (Wares, 2010), pues pueden realizarse exploraciones visuales, proponerse subproblemas y verificar rápidamente si ciertas condiciones se cumplen. Con la finalidad de ilustrar estas ideas, se analizará el siguiente problema:

*En la Figura 1, el ángulo  $ACB$  es de  $90^\circ$  y  $C$  es el centro de un cuadrado cuyo lado mide 1 y que está recortado por el triángulo. ¿Cuánto vale el área sombreada?*

Este problema puede parecer desafiante cuando se resuelve de manera tradicional, es decir, con lápiz y papel, pues aparenta necesitar datos adicionales. La generalidad del enunciado sugiere



**Figura 1.1.** ¿Cuál es la medida del área sombreada?



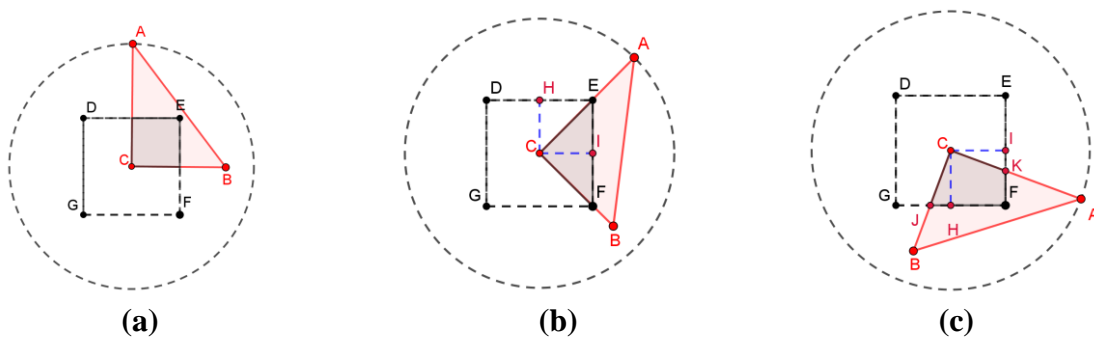
**Figura 1.2.** Representación dinámica del problema.

que las medidas de  $|AC|$  y  $|BC|$  no deberían interferir en su solución y la solución y la forma de resolverlo depende en gran medida de las propiedades geométricas que puedan identificarse. En contraste, si se introduce un SGD como herramienta para resolver el problema, primero deben establecerse formas de representarlo, ¿qué elementos deben poder moverse? ¿cuáles deben permanecer invariantes? Así, reproducir la figura consiste en una actividad interesante

ya que resulta en el surgimiento de otras preguntas respecto al problema, por ejemplo, es claro que el triángulo se encuentra *orientado* de cierta manera con respecto al cuadrado y, dado que no se ofrece la medida de ningún ángulo del triángulo (o de alguno de sus catetos) en el enunciado, es natural suponer que la solución debe ser independiente de la posición del triángulo con respecto al cuadrado. En términos dinámicos esto significa que, en la representación de este problema en un SGD, el triángulo debe poder moverse de tal forma que el punto  $C$  sea un pivote el área sombreada debería permanecer invariante.

Adicionalmente, deben poder modificarse las medidas de los catetos del triángulo sin que esto influye en el resultado. En la Figura 1.2, el vértice  $A$  se mueve a lo largo de la circunferencia punteada, de modo que el triángulo  $ABC$  rota alrededor del punto  $C$ . El segmento  $AB$  se puede construir sobre una recta perpendicular a  $AC$ , de modo que pueda modificarse su longitud y mantenerse perpendicular. Modificar el radio de la circunferencia resulta en la variación del cateto  $AC$ , mientras que el cateto  $CB$  también puede modificarse. El primer desafío en la resolución de este problema consiste en poder generar objetos que cumplan con las propiedades anteriores descritas, siguiendo las *reglas* del SGD empleado. Sin embargo, una vez realizada la representación puede verificarse de manera empírica con ayuda de herramientas de medición que el área sombreada siempre es  $1/4$ , independientemente de las medidas de los catetos del triángulo y de la posición del punto  $A$ . Saber el valor del área es solo una parte de la solución, pues el problema demanda de manera implícita generar un argumento que sostenga que el área siempre es  $1/4$ . El movimiento en el SGD permite observar distintos casos, dependiendo de la posición del punto  $A$ , los cuales se muestran en la Figura 1.3

En el primer caso, es claro que el área sombreada es de  $1/4$ , pues se genera un cuadrado cuyos lados miden la mitad del cuadrado original.



**Figura 1.3. Empleo del SGD para obtener un argumento para resolver el problema.**

En el segundo caso, se observa que los triángulos  $ECH$  y  $FIC$  son congruentes y poseen la misma área (Figura 1.3b). Entonces:

$$\text{Área}(FIC) + \text{Área}(CIE) = \text{Área}(ECH) + \text{Área}(CIE) = \text{Área}(CIEH)$$

Luego, el polígono  $CIEH$  es un cuadrado cuyos lados miden la mitad del cuadrado original. En la Figura 1.3c, los triángulos  $JHC$  y  $KIC$  son congruentes y con la misma área, de modo que el argumento presentado para la Figura 1.3b aplica de manera semejante. Al rotar el triángulo alrededor del punto  $C$  se observa que cualquier posición del triángulo  $ABC$  está representada por alguno de los casos de la Figura 1.3. A partir de la idea visual de que siempre es posible *recomponer* la figura sombreada (la intersección del triángulo con el cuadrado) en un cuadrado cuyos lados miden  $1/2$  se obtiene una guía que orienta al resolutor hacia la solución del problema, es decir, el problema consiste en demostrar la congruencia de triángulos rectángulos y establecer una relación de suma-resta de áreas. Por otra parte, es posible notar que el problema tiene sentido siempre que la hipotenusa  $\overline{AB}$  no se corte con alguno de los lados del cuadrado de modo que, por ejemplo, podría derivar un subproblema relacionado con determinar la medida mínima de los catetos del triángulo para que el problema tenga solución o incluso preguntarse, ¿qué ocurre con el área sombreada cuando esta condición no se cumple?

En síntesis, introducir un SGD como herramienta de resolución de problemas modifica y potencia el uso de heurísticas como el análisis de casos particulares y ofrece acercamientos que motivan diferentes episodios de resolución de problemas que involucran aspectos relacionados con la visualización, exploración y validación de conjeturas además de la generalización y exploración de resultados (Aguilar-Magallón y Poveda, 2017; Santos-Trigo y Aguilar-Magallón, 2018). El uso de SGD también permite que los usuarios se enganchen en discusiones propias del pensamiento matemático, permite comparar y conectar diferentes representaciones de un problema (Santo-Trigo, Moreno-Armella y Camacho-Machín, 2016) y ofrece herramientas particulares y funcionalidades (*affordances*) que determinan los procesos de acción y respuesta que puede implementar el estudiante (Mackrell y Bokhove, 2017). En esta misma dirección, Leung (2011) menciona que las *affordances* que ofrece el SGD juegan un papel importante en el aprendizaje de las matemáticas:

En el proceso de aprender cómo utilizar herramientas en una tarea matemática, los aprendices gradualmente construyen ideas matemáticas que son moldeadas por el



empleo de las herramientas y que dan lugar a conceptos expresables en términos de la herramienta (p. 326).

De esta manera, las motivaciones de este trabajo recaen en el estudio de los fenómenos que derivan del desarrollo de estrategias y heurísticas de resolución de problemas cuando se incluye un SGD como parte del proceso de aprendizaje.

### **1.3. La pregunta de investigación**

Aguilar-Magallón (2014) identificó algunas ventajas que resultan de implementar una secuencia de aprendizaje que involucra el uso de un SGD (como GeoGebra), entre las que se destaca que:

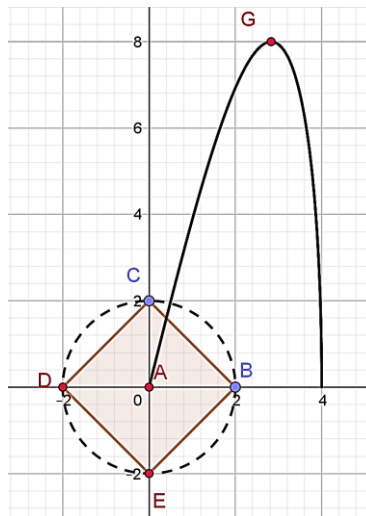
- Permite el estudio de distintas representaciones de conceptos matemáticos.
- Ofrece información empírica que apoya el proceso de generalización.
- Promueve mayor tiempo y análisis a los momentos de exploración de problemas, que resulta en mayor comprensión de este.
- Permite transformar problemas rutinarios en actividades matemáticas.
- Favorece la transición de razonar los problemas de forma discreta y estática a formas continuas y dinámicas, con especial atención en la variación.

Por otra parte, un aula en la que se resuelven problemas con ayuda de un SGD constituye un espacio en el que la variación y la visualización del movimiento propician la aparición de ideas conceptuales acerca de la variación, tales como la identificación de relaciones invariantes, conexiones estructurales (Leung, 2008; Leung, Baccaglioni-Frank & Mariotti, 2013). De este modo, el dinamismo de las acciones que pueden realizarse dentro de un SGD promueve que los estudiantes reflexionen en torno a la variación y el cambio de las medidas de los atributos de los integrantes de una familia de objetos geométricos (Reyes-Rodríguez, Vargas-Alejo, Cristóbal-Escalante y Soberanis-Cruz, 2015). Siguiendo las ideas anteriores, Santos-Trigo (2015) menciona que:

La construcción de representaciones dinámicas de los conceptos o problemas ofrece al estudiante la oportunidad de visualizar el comportamiento de objetos matemáticos a partir de observar invariantes o propiedades de lugares geométricos. De manera general, la exploración dinámica promueve y representa una forma de razonar acerca del comportamiento de los objetos a partir de la consideración de familias de casos que resultan al mover objetos dentro de la configuración (p.176).

En los ambientes de geometría dinámica es posible llevar a cabo tareas matemáticas en donde el movimiento y la variación se relacionan de manera natural, ofreciendo recursos alternativos a los estudiantes para interpretar y explorar ciertos fenómenos relacionados con el cálculo. Por un lado, la herramienta es un recurso poderoso para simplificar el entendimiento de situaciones relacionadas con la variación y por otro, extiende y permite la conexión de conceptos.

Los estudiantes frecuentemente emplean objetos matemáticos como recursos para resolver tareas sin contar con un entendimiento completo de los procesos analíticos o formales que los sustentan. Esto no necesariamente implica una desventaja, pues les permite comprender el tipo de situaciones en el que los conceptos matemáticos son empleados (Zandieh, 2000). Por ejemplo, un estudiante puede emplear el concepto de función para resolver un problema de optimización sin que necesariamente cuente con los recursos matemáticos del análisis que sustentan el criterio de la primera derivada.



**Figura 1.4. ¿Cuáles son las medidas del rectángulo de mayor área inscrito en una circunferencia?**

En la Figura 1.4 se observa una configuración que representa el problema de inscribir el rectángulo de mayor área posible en una circunferencia dada. Para ello, se fijan los puntos  $B$  y  $D$ , mientras que  $C$  se mueve a lo largo de la circunferencia. El punto  $G$  es un punto dinámico definido como  $G = (|CB|, s)$ , donde  $s$  es el área del rectángulo  $BCDE$  al mover el punto  $C$  sobre la circunferencia.

Con ayuda del lugar geométrico, puede visualizarse la curva que describe la relación lado-área del rectángulo y mover el punto  $C$  de tal manera que provoque el movimiento de  $G$  hasta situarlo en el *pico* de la función. Así, se concluye que si la circunferencia es de radio  $r$ , entonces los

lados del rectángulo de mayor área medirán  $\sqrt{2}r$  y el área máxima será de  $2r^2$ . Sin el SGD, resolver el problema consiste principalmente en plantear de manera algebraica la función  $A(x) = x\sqrt{4r^2 - x^2}$  para calcular el valor de  $x$  para el cual  $A'(x) = 0$  de modo que el énfasis cognitivo de la tarea yace sobre el desarrollo algebraico y la aplicación algorítmica del criterio de la primera derivada. En contraste, la solución dinámica demanda principalmente comprender que el lugar geométrico representa la relación variacional entre el lado del rectángulo y su área; es decir, puede emplearse el concepto de función como una relación entre dos magnitudes, sin requerir de un trasfondo analítico.

Esta forma de emplear el SGD como una herramienta de resolución de problemas ha sido reportada en diversas investigaciones (Santos-Trigo & Reyes-Rodríguez, 2011; Barrera-Mora & Reyes-Rodríguez, 2013; Olvera, 2015; Santos-Trigo & Moreno-Armella, 2016; Aguilar-Magallón, 2018), sin embargo, el tipo de estrategias o heurísticas empleadas por los participantes en esos estudios tienden a surgir de manera espontánea o casual, aunque existe una estructura y objetivos a ser alcanzados, la presentación de múltiples caminos de solución y la exploración de ellos tiende a diversificar las actividades llevadas a cabo.

Una educación matemática exitosa tiene su base en el desarrollo de habilidades de resolución de problemas, pues encontrar soluciones a problemas cuidadosamente seleccionados ayuda a desarrollar, refinar y cultivar el pensamiento matemático (Eisenmann, Novotná, Pribyl, et al., 2015). Así, la motivación de este trabajo consiste en plantear y documentar la implementación de un conjunto de problemas con estudiantes de bachillerato orientados a la apropiación de estrategias de resolución de problemas medidas por las *affordances* que ofrece el SGD. Mousoulides y Sriraman (2014) mencionan que la enseñanza de heurísticas presenta dificultades epistémicas, pues estas tienden a ser estrategias específicas por cada problema y estudiante; además, la enseñanza basada alrededor de heurísticas suelen consistir en la presentación de diversos problemas para los cuales cierta heurística es aplicable. Cuando las heurísticas son presentadas de esta manera, ya no pueden considerarse como heurísticas en el sentido que Polya establece. Entre las sugerencias que establece Schoenfeld (1992) relacionadas con una instrucción eficiente orientada hacia las heurísticas se consideran las siguientes:

- La enseñanza de una heurística de resolución de problemas específica, en lugar de enseñar métodos demasiado generales, que puedan transferirse a problemas estructuralmente similares.
- Enseñar estrategias metacognitivas (control) que vinculen los recursos de los estudiantes con las heurísticas a ser utilizadas.

Estos elementos se consolidan en la estrategia mostrada en el problema de la Figura 1.4, la cual consiste en un análisis dinámico de relaciones (estrategia ADR), pues el lugar geométrico obtenido describe la relación entre los atributos de una figura dinámica. De este modo, la pregunta de investigación de este trabajo es:

¿Qué estrategias y formas de razonamiento exhiben estudiantes de bachillerato al resolver problemas que involucran fenómenos de variación en un ambiente de aprendizaje basado en la resolución de problemas y uso de un SGD?

En la medida en que se desarrolla la implementación de los problemas con miras a la apropiación de la estrategia ADR, conviene reportar el tipo de estrategias y recursos que los estudiantes emplean en tareas de resolución de problemas. En los diferentes momentos en que se implementan actividades basadas en la resolución de problemas, surgen discusiones referentes a distintas nociones matemáticas (Ortiz-May y Aguilar-Magallón, 2019).

Por un lado, resulta necesario presentar los principios a partir de los cuales se estructuraron los problemas, en términos de sus propósitos particulares y el orden en el que se presentaron. El uso y comprensión de la estrategia depende fundamentalmente de la articulación de recursos matemáticos y el funcionamiento de comandos o herramientas del SGD, de modo que también se documentan los elementos de la estructuración de los problemas que promovieron la apropiación de la estrategia ADR por parte de los estudiantes.

## CAPÍTULO 2

---

### MARCO CONCEPTUAL

Se discuten los elementos teóricos necesarios para dar sustento a los principios que componen el conjunto de problemas que se implementaron, sus intencionalidades y los aspectos subyacentes empleados para su estructuración. Es decir, se persigue responder a la pregunta ¿cómo se diseña un conjunto de problemas en los que se emplean tecnologías digitales para la apropiación una estrategia de resolución de problemas? Para ello, es importante incluir aspectos esenciales del marco de resolución de problemas en términos de la acción de los estudiantes, de modo que ofrezca un contexto para interpretar los modos de abordar los problemas, la descripción detallada de la estrategia del análisis dinámico de relaciones como un recurso para resolver problemas y antecedentes relacionados con la estructuración de tareas con ayuda de herramientas digitales.

#### 2.1. Tecnologías digitales en la resolución de problemas

Un *problema* debe ser percibido como una actividad que representa un desafío al que lo resuelve, no como un ejercicio o una tarea que demanda la aplicación inmediata de algún procedimiento, sino que de manera inherente plantea un conflicto intelectual. Entre las múltiples definiciones de problema en la agenda de investigación de la resolución de problemas en educación matemática, se puede definir como “una tarea presentada a los estudiantes en un escenario de enseñanza que plantea una pregunta a ser respondida, pero para la cual los estudiantes no tienen un procedimiento a disposición inmediata para responderla” (Lester y Cai, 2016, p. 122). Adicionalmente, Santos (2014) establece que las características o propiedades que una tarea matemática posee para ser considerada como un problema son:

- i. **La existencia de un interés por parte de aquél o aquellos que desean resolverla.** El problema debe ser un punto de partida hacia una reflexión profunda, debe representar un reto.
- ii. **La no existencia de una solución inmediata.** Parte del interés de la tarea debe provenir del hecho de no contar con un procedimiento o algoritmo para resolverla de manera instantánea.

- iii. **La presencia de múltiples caminos de solución.** Si bien, puede que no existe un modo de resolver de manera rápida la tarea, el o los resolutores deben poseer suficientes recursos para concebir distintos modos de resolverla.
- iv. **La atención para llevar a cabo un plan.** Quienes resuelven un problema, deben tener el interés suficiente para llevar a cabo las acciones necesarias que permitan resolver el problema.

Estas cuatro características son relevantes en la instrucción matemática basada en la resolución de problemas, en la cual se considera que un problema funge como un punto de partida para que los profesores y estudiantes inicien reflexiones matemáticas. Por ejemplo, la resolución de problemas en el salón de clase puede orientarse hacia la constitución de una comunidad matemática en donde los participantes son orientados a resolver problemas de distintas maneras, a compartirlas ante el grupo, discutirlos y están motivados a encontrar caminos alternativos que no hayan sido mencionados.

Schoenfeld (1985) propuso un marco para analizar el proceso de resolución de problemas a partir de cuatro elementos resumidos en la Tabla 2.1: recursos, heurísticas, control y sistemas de creencias.

No es intención en este trabajo ahondar en la caracterización de estos elementos, sin embargo, a lo largo de este documento, se hará referencia a los conceptos de recursos y heurísticas para explorar y detallar el trabajo de los estudiantes en sus procesos de resolución de problemas.

Ahora bien, el uso de la tecnología puede moldear la manera en la que los estudiantes piensan y abordan problemas e impacta la forma en la que se generan y exploran conjeturas (Santos-Trigo y Cristóbal-Escalante, 2008), de modo que es importante examinar las formas en las que los estudiantes emplean herramientas (artefactos) o bien, la manera en la que el dominio de los estudiantes sobre estos artefactos influye en los procesos de resolución de problemas.

Cuando se emplea de manera adecuada, el uso de un SGD facilita el acercamiento de los estudiantes a la solución de problemas no-rutinarios. Por ejemplo, los estudiantes pueden conjeturar de manera empírica antes de generalizar, pueden experimentar antes de construir una prueba y pueden dedicar un momento a entender mejor el problema previo a elegir un enfoque determinado (Kuzle, 2017).

<b>Tabla 2.1. Conocimiento y comportamientos adecuados necesarios en la resolución de problemas (Schoenfeld, 1985, p. 15).</b>
<p><i>Recursos:</i> Conocimiento matemático que posee el individuo y puede ser ejercido en el problema</p> <p>Intuiciones y conocimiento informal</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Hechos</li> <li>• Procesos algorítmicos</li> <li>• Procesos ‘rutina’ no algorítmicos</li> <li>• Conocimiento proposicional (reglas sobre el trabajo de cierto dominio matemático)</li> </ul>
<p><i>Heurísticas:</i> Estrategias y técnicas para progresar en problemas no-estándar o poco familiares. Reglas de oro para resolver problemas eficientemente.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Dibujar figuras; introducir notación adecuada</li> <li>• Emplear problemas relacionados y más simples</li> <li>• Reformular problemas; visión retrospectiva</li> <li>• Procesos de prueba y error</li> </ul>
<p><i>Control:</i> Decisiones globales relacionadas con la selección e implementación de recursos y estrategias.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Planeación</li> <li>• Monitoreo y autoevaluación</li> <li>• Toma de decisiones</li> <li>• Actos metacognitivos conscientes</li> </ul>
<p><i>Sistema de creencias:</i> Visión personal del “mundo matemático”. Es el conjunto de factores determinantes del comportamiento de un individuo.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Sobre uno mismo</li> <li>• Sobre el ambiente</li> <li>• Sobre el tema</li> <li>• Sobre las matemáticas</li> </ul>

Santos-Trigo y Camacho (2013) proponen cuatro episodios de resolución de problemas cuando se utiliza una herramienta digital:

- ▶ **Comprensión del problema.** Debe replantearse el problema no solo en términos de las relaciones matemáticas que están implicadas, sino en función de las *reglas* o posibilidades que el SGD ofrece. Esto implica identificar elementos invariantes (o aquellos que deben variar) y asociar esta idea con los comandos que el software ofrece para poder obtener una representación dinámica del problema.
- ▶ **Episodio de exploración.** Una vez representado el problema dentro del SGD y con ayuda del movimiento, pueden generarse conjeturas cuya validez puede concretarse o refutarse de manera inmediata con ayuda de los comandos del software.
- ▶ **Búsqueda de múltiples soluciones.** Con ayuda del SGD, es posible encontrar una solución empírica al problema. En este episodio, los estudiantes pueden utilizar la

información recabada para plantear argumentos numéricos, algebraicos, geométricos, etcétera.

- ▶ Integración y extensión. Por un lado, se analizan los diferentes enfoques llevados a cabo tanto por el individuo como por sus pares para compararlos y estudiarlos. En este proceso, se identifican conceptos matemáticos que fueron importantes en la resolución del problema. Adicionalmente, en este episodio también es posible plantearse otras interrogantes que lleven a la modificación o extensión del problema, planteando un nuevo punto de partida.

Cuando se resuelven problemas con GeoGebra, los estudiantes pueden desarrollar medios a través de los cuales el conocimiento previo se conecta a través de imágenes mentales generadas mediante la operación de representaciones dinámicas con el objetivo de visualizar relaciones. Por tanto, el proceso de resolver problemas con el uso de un SGD afecta profundamente la estructuración de esquemas mentales o redes de conocimiento (Guerrero-Ortiz, Reyes-Rodríguez y Espinosa-Pérez, 2016). Es decir, las posibilidades de acción dentro del sistema (como el arrastre de objetos, el movimiento, la cuantificación de parámetros, los lugares geométricos, etc.) ofrece nuevas rutas y acercamientos a la resolución de problemas que impacta directamente en la construcción de conocimiento y heurísticas.

### 2.1.1. Sobre *affordances*

Las herramientas pueden ser vistas como mediadores entre el mundo material en el que los seres humanos se encuentran y el mundo conceptual, sobre el que se desarrollan las ideas matemáticas. Nuestra interacción con herramientas o artefactos, deberían ser considerados más que como elementos auxiliares, pues influyen en el desarrollo del conocimiento matemático (Leung y Bolite-Frant, 2015). Moreno-Armella y Hegedus (2009) argumentan que la actividad humana ha sido medida a través del uso de artefactos y herramientas, desde su concepción. Desde el empleo de la escritura, el uso de instrumentos rudimentarios hasta la actual implementación de calculadoras y tecnologías digitales en los salones de clases. A medida que un usuario emplea una herramienta de cierta forma, reorienta la actividad que realiza y esto conlleva a la redefinición de la herramienta como tal. A través de emplear una herramienta digital, tal como lo es un SGD, se redefine la forma de pensar acerca de los objetos matemáticos



y, consecuentemente, se conciben nuevas maneras de emplear la herramienta para expresar y concebir ideas matemáticas como la condicionalidad, la argumentación, la variación.

Es decir, un SGD y su usuario mantienen una relación dinámica que presenta permisibilidades y restricciones; por un lado, se conciben y abordan fenómenos matemáticos de maneras particulares que moldean el aprendizaje y, por otro, el uso del software delimita y enfoca la atención de los individuos hacia elementos matemáticos específicos (Calder y Murphy, 2018). Tanto aquellos elementos que permiten como los que restringen forman parte de la manera en que un individuo emplea un SGD para realizar actividades de resolución de problemas, este conjunto de permisibilidades y limitantes es lo que deberá entenderse como *affordances*. En términos concretos, las *affordances* son las acciones y potencialidades que ofrecen los comandos, o herramientas en los procesos de construir representaciones dinámicas de los conceptos y problemas que permiten explorar relaciones y formas de solución. Por ejemplo, los estudiantes pueden graficar relaciones matemáticas a partir de las cuales realizar deducciones, modelar situaciones, experimentar y poner a prueba conocimiento matemático emergente; es decir, tienen la posibilidad de visualizar conceptos matemáticos abstractos (Venturini y Sinclair, 2017). Otra *affordance* que distingue a los SGD, es la del arrastre de objetos y conforma una herramienta esencial que permite a los estudiantes construir la idea de dependencia lógica, en términos del contexto matemático, a través del movimiento indirecto de objetos, es decir, del movimiento que resulta al mover otros objetos de manera directa. Así, por ejemplo, los estudiantes se enfrentan a la tarea cognitiva de transformar la información perceptual que reciben del SGD en proposiciones de condicionalidad o implicación lógica (Baccaglioni-Frank y Mariotti, 2010).

El empleo de las *affordances* de un SGD para la resolución de problemas también depende de la experiencia o habilidad del usuario, de su *fluencia* tecnológica en el uso de herramientas digitales. Es decir, esta relación intrínseca entre individuo y *affordances* implica que el proceso de resolución de problemas se convierta en una producción de conocimiento matemático mediada por herramientas digitales, asumiendo que el sujeto está inmerso social y culturalmente en un ambiente tecnológico que moldea y es moldeado por su actividad (Jacinto, Nobre, Carreira y Amado, 2018). La manera en la que un SGD conforma un medio a través del cual se construye conocimiento a través de resolver problemas subyace en el potencial de las tecnologías digitales como potenciadores o amplificadores de capacidades cognitivas. Salomon

y Perkins (2005) se refieren al término de *herramienta cognitiva* en la medida en que una herramienta digital, como puede serlo un DGS, influye en los procesos de regulación y cognición de un individuo. Es decir, una herramienta cognitiva no es simplemente un auxiliar para realizar cálculos o para visualizar gráficas, sino que influye directamente en comportamientos de control de resolución de problemas como regular sus recursos, evaluar la eficiencia de su pensamiento y experimentación o bien, ser consciente de los procedimientos a ser realizados.

Kuzle (2017) evidenció el potencial que posee un SGD para permitir a resolutores de problemas funcionar en niveles que trascienden sus habilidades cognitivas, mejorando sus destrezas en la resolución de problemas con ayuda de *affordances* como el arrastre o la retroalimentación visual. Al respecto, Kuzle observó tres grados de uso con el SGD:

- ▶ Como controlador de la cognición humana, donde el usuario es cognitivamente dependiente y supeditado a la tecnología.
- ▶ Como un acompañante creativo y cognitivo, donde la tecnología es usada de manera creativa para aumentar las capacidades cognitivas del usuario.
- ▶ Como una extensión cognitiva del usuario, donde se integran diferentes recursos en la mejora de los procesos cognitivos de uno mismo.

El grado en el que los estudiantes emplean el SGD para resolver problemas depende de factores como el escenario de resolución de problemas, las metas, el rol de profesor, los recursos con los que cuentan y su percepción con respecto al uso que se le otorga a la herramienta. En este sentido, es conveniente introducir a los estudiantes en el uso de un SGD como una herramienta útil para resolver problemas y que ofrece oportunidades de exploración matemáticas, haciendo mayor énfasis en estas cualidades, de modo que se extienda el uso más allá del uso habitual que se le da como graficador o, en el caso de GeoGebra, como un software de cálculos algebraico.

### 2.1.2. El análisis dinámico de relaciones como una intersección de heurísticas y *affordances*

Como se ha dejado ver en las secciones anteriores, los individuos y los ambientes digitales se entrelazan en una dialéctica dinámica cuando se resuelven problemas. Las *affordances* de una herramienta se convierten en mediadores de conocimiento matemático y, por tanto, generan

nuevas rutas de reflexión matemática. De esta manera, el uso de herramientas digitales impacta en la manera en que los estudiantes conciben y ejecutan estrategias de resolución de problemas. Hollebrands (2007) describió que el uso de un SGD detona la aparición de estrategias *reactivas* en los estudiantes, es decir, sin una meta específica y orientadas a encontrar o generar conjeturas. Con el uso de un SGD, los estudiantes pueden mover objetos o medir atributos sin un fin específico, esperando a encontrar algún patrón o invariante en las representaciones dinámicas. Las estrategias *proactivas* (que poseen un fin específico) que Hollebrands describe, se alcanzan solamente cuando existe un enfoque sobre relaciones matemáticas y requiere de ciertos recursos en los estudiantes. En este sentido, estudiantes que carecen de habilidades espaciales sofisticadas pueden emplear las *affordances* de los SGD como un punto de partida a partir del cual se realizan exploraciones en las que se detectan conjeturas o posibles caminos de solución, y así establecer metas de acción para resolver problemas (Hollebrands y Okumus, 2017).

Santos-Trigo y Reyes-Rodríguez (2011) observaron que el empleo de un SGD ayudó a los participantes a abordar problemas de variación mediante el reconocimiento y aplicación de heurísticas como relajar las condiciones del problema, encontrar el lugar geométrico de objetos particulares, uso del sistema cartesiano e implementar un análisis retrospectivo.

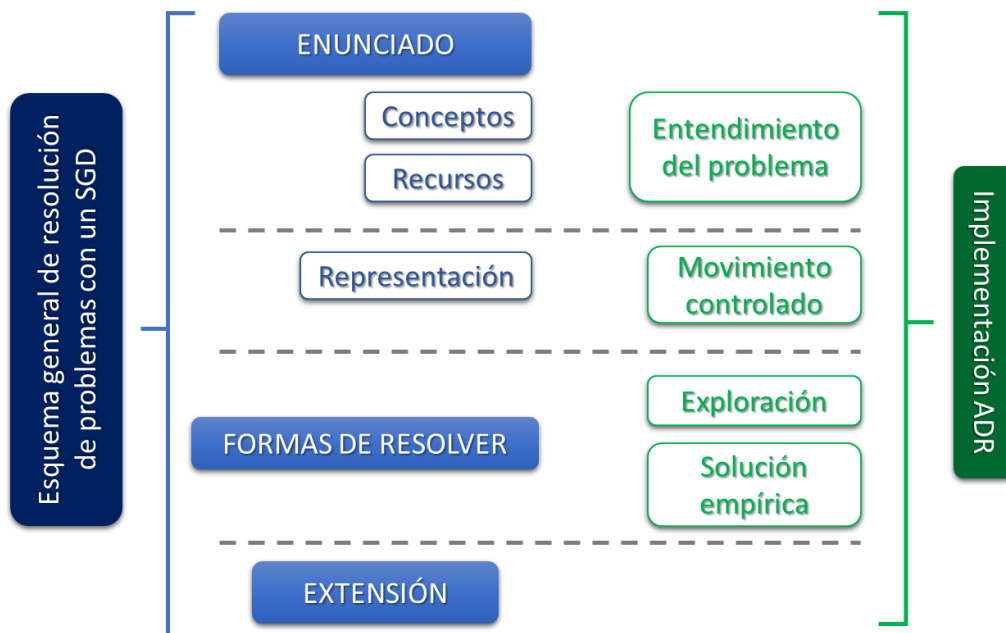
La búsqueda de ‘casos especiales’, las exploraciones por prueba y error, el análisis de diversos casos particulares puede llevarse a cabo en un SGD a partir del movimiento de objetos, permitido por el arrastre de objetos, extendiendo y modificando el alcance de estas estrategias cuando se compara con su ejecución en ambientes de lápiz y papel, en particular, en exploraciones que involucran el análisis de lugares geométricos, representaciones gráficas y la visualización de patrones de manera perceptual. Es decir, los artefactos ofrecen recursos de acción sobre los problemas que, simultáneamente, regulan el pensamiento matemático relativo con la resolución de problemas (Santos-Trigo y Moreno-Armella, 2016; Santos Trigo, 2008). Dado que el uso de *affordances* de herramientas digitales ofrecen diversas formas de explorar conceptos y resultados matemáticos, es importante cuestionarse acerca de las maneras en que el SGD se utiliza en la activación de estrategias y heurísticas de los estudiantes (Santos-Trigo, Reyes-Martínez y Aguilar-Magallón, 2015).

El análisis dinámico de relaciones (ADR) es una estrategia de resolución de problemas que se concibe a través de las *affordances* de un SGD (en este caso, GeoGebra). Aguilar-Magallón

(2018) describió esta estrategia como resultado de identificar y categorizar un conjunto de acercamientos comunes para trabajar con problemas de variación a partir de generar el lugar geométrico de un punto dinámico cuyas coordenadas representan la relación de dos atributos de una configuración dinámica: longitudes, áreas, perímetros, ángulos, pendientes, por mencionar algunos. Está enmarcada dentro del esquema de resolución de problemas propuesto por Santos-Trigo y Camacho (2013), en este sentido, la solución de un problema de variación con ayuda de las *affordances* del SGD se lleva a cabo en tres fases:

- ▶ Fase de representación
- ▶ Fase de exploración
- ▶ Fase de solución empírica

En la fase de representación, se debe primero identificar conceptos y relaciones matemáticas importantes en el problema, así como sus condiciones y objetivos, en términos de construcción de figuras y del control de su movimiento. El fin principal de esta fase es el de construir un modelo dinámico robusto del problema por lo que también es importante emplear de manera conveniente el plano coordenado que los SGD ofrecen.



**Figura 2.1. Paralelismo entre los episodios de resolución de problemas y la implementación de la estrategia ADR.**

En la fase de exploración se visualizan y analizan las formas de variación que competen al problema. Para ello deben identificarse los atributos que interesan, en función del movimiento de puntos dentro del modelo dinámico. En un SGD, el movimiento de los objetos puede ser directo o indirecto. Es directo si el movimiento del objeto ocurre bajo el control directo del ratón (o del dedo en una pantalla táctil) e indirecto si su movimiento ocurre como consecuencia del movimiento directo de otro elemento (Baccaglioni-Frank y Mariotti, 2010; Baccaglioni-Frank, 2019). A través del arrastre, el usuario ejerce control sobre un elemento que puede ser movido de manera directa, ejerciendo simultáneamente una acción de movimiento indirecto sobre otros elementos del modelo dinámico (Baccaglioni-Frank, 2019). Por ejemplo, en el problema de encontrar el rectángulo de mayor área inscrito en una circunferencia planteado en la Figura 1.4, la variable independiente es la longitud  $l$  de uno de los lados del rectángulo y la variable dependiente  $s$  es la medida del área; así, se define un punto dinámico  $G = (l, s)$  cuya variación indirecta depende del movimiento directo (llámese, punto de control) de algún otro punto en la configuración (en la Figura 1.4, el punto de movimiento directo es uno de los vértices del rectángulo).

Cuando el movimiento directo de este punto es *controlado* (es decir, se mueve sobre un objeto bien definido como lo es una circunferencia, un segmento, una recta o cualquier otra curva) entonces es posible generar el lugar geométrico del punto de movimiento indirecto, es decir, del punto dinámico relacional cuando el punto de control se mueve. A través de estas acciones, se pueden percibir vínculos causales, o en caso de problemas de variación, vínculos correlacionales. En este sentido, en la fase de exploración pueden identificarse las variables independientes y dependientes del problema.

Finalmente, la fase de solución empírica involucra el manejo de la heurística de identificar patrones, junto con los recursos visuales del SGD para obtener una conjetura a partir de interpretar la información que el punto de control ofrece en términos del problema. En el caso del problema ejemplificado anteriormente, la solución empírica se obtiene cuando, al mover el punto de control, el punto dinámico relacional se sitúa sobre el vértice de la parábola obtenida. Esto ocurre cuando el vértice del rectángulo está sobre el eje Y, de modo que se forma un cuadrado, tal como se observó en la Figura 1.4.

**Tabla 2.2. Recursos, *affordances* y heurísticas importantes en la estrategia ADR**

<b>Fase</b>	<b>Representación</b>	<b>Exploración</b>	<b>Solución empírica</b>
<b>Recursos</b>	Propiedades de figuras, eje cartesiano	Propiedades de figuras, eje cartesiano	Relaciones, funciones, variables, lugar geométrico
<b>Affordances</b>	Movimiento controlado	Arrastre	Puntos dinámicos, lugar geométrico
<b>Heurísticas</b>	Analizar casos particulares	Analizar casos particulares	Visualizar y analizar patrones

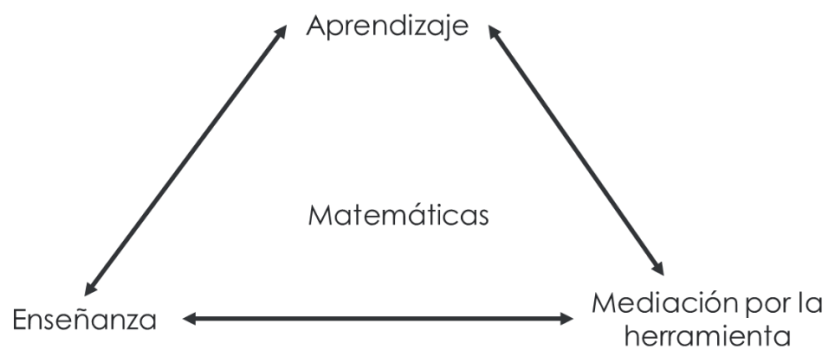
## 2.2. Consideraciones teóricas sobre el diseño de la secuencia

Un ambiente de aprendizaje basado en la resolución de problemas se caracteriza por el desarrollo y aplicación de principios inquisitivos por parte de profesores y estudiantes desarrollen, a partir del cual se sumerjan en conceptos matemáticos. Al mismo tiempo, deben favorecerse en los aprendices formas de apoyarse en las *affordances* de las herramientas digitales para identificar y sustentar ideas y relaciones matemáticas (Liljedahl, Santos-Trigo, Malaspina y Bruder, 2016). Un principio clave para estructurar y adoptar actividades de resolución de problemas en ambientes de aprendizaje es ayudar a los estudiantes a identificar y comprender conceptos matemáticos, y a cómo usar esos conceptos durante el proceso de resolver problemas. Buscar por formas alternativas de representar y resolver problemas es una estrategia potente para que los estudiantes identifiquen y contrasten el rol que juegan los conceptos y sus representaciones (Santos-Trigo y Moreno-Armella, 2016).

Con el uso de la tecnología, nuevas rutas pueden emerger que permitan a los estudiantes construir y comprender conocimiento disciplinario, es decir, ¿cómo los ambientes de aprendizaje se transformarán para aprovechar las ventajas de los desarrollos digitales? Los profesores necesitan trabajar en tareas matemáticas como miembros de una comunidad que valora y considera la participación de todos los miembros. Es central para la comunidad interactiva promover un ambiente colaborativo que ayude a examinar las tareas matemáticas que guíen u orienten las prácticas instruccionales de los profesores (Santos-Trigo, 2010). Dado que el uso de herramientas digitales no es neutral en ambientes de aprendizaje con tecnología, es necesario que al diseñar secuencias de enseñanza se tome en cuenta el proceso de apropiación de la herramienta empleada a la par del desarrollo de ideas matemáticas pues al actuar dentro de un SGD, el potencial didáctico de actividades de resolución de problemas en contextos geométricos (Mariotti y Baccaglioni-Frank, 2018).

En este sentido, es importante que al introducir un SGD en un diseño de aprendizaje, el tipo de acciones que los estudiantes deban realizar para la solución de las tareas no puedan llevarse a

cabo solamente con lápiz y papel; es decir, que las tareas sean tales que los estudiantes aprovechen las *affordances* del sistema. (Mackrell y Bokhove, 2017; Sinclair y Zazkis, 2017). Al respecto, Leung y Bolite-Frank (2015) mencionan que el diseño de tareas en donde se emplean herramientas tecnológicas apunta hacia el enriquecimiento de las interacciones estudiante-estudiante y estudiante-recursos en la producción de prácticas matemáticas. Adicionalmente, el trabajo tareas situadas en ambientes que incluyen un SGD permite crear discursos generados a partir de las experiencias fenomenológicas producto de la actividad en el sistema que poseen el potencial de reconciliar significados entre las experiencias matemáticas a priori de los estudiantes y el conocimiento matemático que sea ser enseñado/aprendido (Leung, 2011; Leung, 2017).



**Figura 2.2. Relaciones entre los componentes en un ambiente pedagógico basado en herramientas (Leung y Bolite-Frant, 2015, p. 192).**

Por su parte, Santos-Trigo, Moreno-Armella y Camacho-Machín (2016) mencionan que el *Espacio de Trabajo Matemático* involucra el diseño de un escenario de aprendizaje orientado al desarrollo y enriquecimiento de la práctica matemática de los estudiantes. En este, se emplea el uso de tecnología para establecer una conexión cercana entre el plano epistemológico de la disciplina y el plano cognitivo relacionado con los estudiantes, a la par que se genera un ambiente propicio para concebir conceptos matemáticos y desarrollar habilidades de resolución de problemas.

Para ello, se consideran tres elementos: La génesis instrumental, en la cual el rol de las herramientas se considera importante durante las experiencias de resolución de problemas, como puede ser apoyarse en GeoGebra para representar objetos matemáticos; La génesis semiótica, que se refiere al rol de las representaciones en el análisis de relaciones entre objetos matemáticos o conceptos. Las *affordances* del SGD permite al usuario interactuar con distintas

formas de representación que promueve la vinculación entre representaciones; y la génesis discursiva, o bien, las diferentes formas de razonar en la validación y comunicación de resultados. Las características y formas de emplear el SGD por los usuarios durante las tareas son esenciales para transformar el artefacto en un instrumento de resolución de problemas pues a través de exploraciones empíricas, pueden identificarse propiedades matemáticas que sirven como apoyo para concretar razonamientos formales.

Ahora bien, el tipo de problemas y los objetivos con los que se utilizan en el aula ofrecen diversas rutas de análisis sobre el aprendizaje. Para ahondar en las representaciones, estrategias y formas de razonar que surgen de los enfoques de resolución de problemas con tecnología, Santos-Trigo (2019) exhibe la categorización de cuatro tipos de tareas, en términos de cómo la tecnología moldea los procesos de solución de problemas:

- Tareas de reconstrucción de figuras. Aquellos en los que se enfatiza la importancia de los SGD en la reconstrucción de figuras incorporadas en enunciados de problemas. En este tipo de tareas, los estudiantes deben reflexionar cómo, en qué orden y qué propiedades son importantes para *dibujar* o reconstruir la figura a partir del uso de un SGD. En el proceso de reconstruir una figura puede llevar al resolutor a plantearse extensiones al problema como lo es buscar distintas formas de reconstruir la figura.
- Tareas de investigación. Tareas donde se fomenta la transformación de problemas rutinarios que aparecen en libros de texto en una serie de actividades matemáticas. ¿Qué conceptos están involucrados en la tarea de representación? ¿Cómo pueden ser representados vía las *affordances* del SGD? En general, el proceso de transformar problemas rutinarios promueve experiencias de resolución de problemas en los estudiantes.
- Tareas de variación. Formas de representar y analizar tareas que involucran algún fenómeno de variación en el cual un modelo gráfico se obtiene sin tener un modelo algebraico explícito de la situación. En el proceso, asuntos acerca del dominio de movimiento de los elementos dentro de la representación dinámica en el SGD se vuelven cruciales para dotar de sentido a las relaciones matemáticas y los resultados o soluciones. Este tipo de problemas son idóneos para el uso de la estrategia ADR.



- Configuraciones dinámicas. Construcción de representaciones dinámicas que fomentan actividades de planteamiento de problemas y de explorar e identificar formas de validar relaciones matemáticas. Si bien, todos los problemas dentro de un SGD requieren de una configuración dinámica, esta categoría se refiere a problemas abiertos, en cuya configuración dinámica algún elemento varía (se mueve) y esto da como resultado la observación de alguna invariante o relación entre los atributos de ciertos objetos, por ejemplo, para responder a la pregunta ¿cuál es el lugar geométrico que describe el centro de una familia de rectángulos de perímetro fijo que se genera al mover uno de los vértices?

Las *affordances* del SGD ofrece a los estudiantes oportunidades para expandir o ampliar no solamente heurísticas importantes de resolución de problemas (construcción de modelos dinámicos, búsqueda y análisis de lugares geométricos de objetos, uso de deslizadores, cuantificación de parámetros, análisis de casos particulares, visión retrospectiva, etc.) sino para construir e incorporar formas de razonamiento asociadas con el uso de la herramienta (Santos-Trigo, 2019).

## CAPÍTULO 3

---

### METODOLOGÍA

El fin principal de este capítulo es explicitar los elementos del diseño y procedimiento del estudio, caracterizar el tipo de participantes y el rol del investigador en la implementación. Dado que los objetivos de la investigación se orientan al análisis de los procesos cognitivos exhibidos por el trabajo de los estudiantes, resulta conveniente enmarcar el trabajo en una metodología de tipo cualitativo, pues no interesa cuantificar el grado de habilidad de los estudiantes en el uso de la estrategia ADR, sino emplear los resultados para profundizar en el tipo de características que son esenciales o que requieren ser incorporadas en la estructuración de actividades de aprendizajes orientadas a la apropiación de heurísticas de resolución de problemas.

#### 3.1. Participantes y procedimiento

Las actividades se llevaron a cabo como parte de un curso de Cálculo compuesto por un grupo originalmente de 22 estudiantes de último semestre de bachillerato con edades entre 17 y 18 años del Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM. Se consideró solamente el trabajo de 14 de los estudiantes, pues fueron los que mantuvieron una participación constante y activa a lo largo de la implementación. El grupo de participantes cuyas producciones constituyen la unidad de análisis está conformado estuvo constituido por los siguientes:

- |           |           |            |           |
|-----------|-----------|------------|-----------|
| 1) Adrián | 5) Lisa   | 9) Mary    | 13) Donna |
| 2) Aurea  | 6) Israel | 10) Ángela | 14) Luis  |
| 3) Mario  | 7) David  | 11) Rhonda |           |
| 4) Ana    | 8) Manuel | 12) Job    |           |

De estos, solamente Ángela y Mary mencionaron haber empleado GeoGebra en algún momento de su trayectoria escolar, mientras que el resto de los estudiantes afirmaron estar poco familiarizados con el empleo del SGD como una herramienta de uso regular dentro o fuera del aula. La implementación de las actividades se desarrolló en diez sesiones, distribuidas en dos sesiones por semana. Cada sesión tuvo una duración de 2 horas y se desarrolló en un aula de cómputo equipada con computadores con el SGD (GeoGebra) instalado para cada estudiante, y con una computadora principal para el investigador, conectada a un proyector. A pesar de que

cada estudiante contaba con su propia computadora, se les motivó a trabajar en grupos con el fin de fomentar la discusión de ideas entre pares. Las sesiones estuvieron coordinadas por el responsable de la investigación y el profesor del curso.

En general, en la dinámica de trabajo se incluyeron tres momentos principales:

- a) Planteamiento de un problema: Las sesiones iniciaban con la presentación de un problema que funcionaría como punto de partida. En este sentido, el investigador estuvo encargado de exponer el problema y discutir la fase de comprensión del problema con los estudiantes. Posteriormente, los estudiantes trabajaban de manera individual o grupal el problema durante un tiempo aproximado de 20 minutos.
- b) Discusión del problema: El profesor del curso se encargó de monitorear el trabajo de los estudiantes y asegurarse que se estuviera trabajando sobre los problemas. Después de haber explorado el problema, se les solicitaba utilizar la computadora principal para exponer sus aproximaciones al problema ante el resto del grupo con el fin de discutir sus enfoques. Ante la necesidad de comunicar sus resultados, los estudiantes se enfrentan a la necesidad de organizar y presentar sus ideas en forma convincente, de modo que el trabajo en grupo les ofrece oportunidad de validar sus razonamientos o conjeturas (Santos-Trigo, 2013).
- c) Cierre: El investigador cerraba la sesión con una síntesis de las acciones llevadas a cabo y, de ser conveniente, se discutían extensiones del problema o soluciones alternativas a los problemas planteados.

Si bien los momentos descritos anteriormente fungieron como guía general de la dinámica de las sesiones, no todas se llevaron de manera rígida conforme a ellos, pues en las sesiones podría trabajarse uno o varios problemas. En caso de que los coordinadores de la sesión mostraran una construcción en plenaria, los estudiantes debían siempre reproducirla en sus computadoras y estar al tanto de los detalles de la construcción.

### **3.2. Estructura de las actividades**

La implementación de los problemas se realizó apuntando a la apropiación de la estrategia ADR como una herramienta de resolución de problemas. Si bien las tareas de resolución de problemas favorecen el desarrollo de habilidades visuales de los estudiantes, actuar dentro de un SGD fortalece el potencial de las actividades geométricas de construcción (Mariotti y Baccaglini-

Frank, 2018). En este sentido, se seleccionaron problemas de modo que fomentaran en los estudiantes el uso de un SGD durante el proceso de solución. Actividades de este estilo son poco usuales para los estudiantes de bachillerato, por lo que la resolución de los problemas apuntó hacia una apropiación paulatina del SGD mediante la guía de preguntas relevantes orientadas a conectar diferentes recursos matemáticos involucrados en la aplicación de la estrategia ADR. Para ello, se organizaron las actividades en torno a tres grupos de problemas, los cuales se describen en las secciones siguientes.

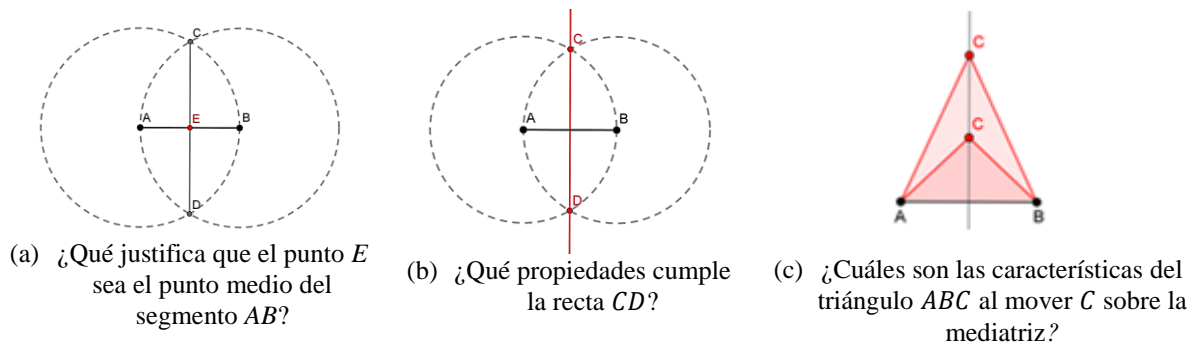
### 3.2.1. Problemas de introducción a Geogebra

El primer grupo de problemas está orientado a la comprensión de los elementos técnicos de las funciones básicas de GeoGebra como el trazo de segmentos, circunferencias, polígonos, ángulos, rectas paralelas y perpendiculares; medir atributos de figuras; construir puntos con movimiento controlado, etcétera. Para ello, se plantean problemas de construcción de figuras en los cuales los estudiantes deben preguntarse, ¿en qué consiste construir una figura robusta? ¿cómo se utilizan las herramientas de GeoGebra, como la medición o el arrastre, para verificar conjeturas o apoyar resultados matemáticos? O bien, ¿cómo se emplean las herramientas del SGD para explorar propiedades de objetos geométricos? Los problemas empleados se describen a continuación.

**Problema 1.** Trazar el punto medio de un segmento dado  $AB$ .

Este problema inicial se propuso como el primer acercamiento de los estudiantes a la resolución de problemas a través del empleo de un SGD como un escenario de reflexión matemática. En un primer momento, se plantea a los estudiantes proponer (o recordar) los trazos geométricos para hallar el punto medio del segmento, y una vez resuelto, ofrecer argumentos o justificaciones que validen la construcción. La naturaleza ejecutable de las representaciones en un SGD como GeoGebra dota de movimiento a los objetos matemáticos que usualmente son estáticos en el papel, de modo que introduce nuevos enfoques de resolución de problemas de los estudiantes y su proceso de aprendizaje de las matemáticas (Santos-Trigo y Moreno-Armella, 2016); Por ejemplo, los estudiantes pueden notar que al mover los puntos  $A$  y  $B$  que definen al segmento, la construcción continúa siendo válida (el punto  $E$  sigue equidistando de  $A$  y  $B$ ). Los estudiantes, entonces, comprueban sus conjeturas a través de la invariabilidad de los resultados cuando la configuración inicial se somete al movimiento. Es decir, la prueba

puede establecerse como un argumento informal orientado a *explicar* por qué ciertos resultados se obtienen, por encima de *demostrar* que algo es cierto (Ortiz-May, 2018).



**Figura 3.1. El problema 1 y sus extensiones.**

Una vez que este primer problema ha sido resuelto, conviene presentar a los estudiantes la idea de extender el problema como resultado de un interés inquisitivo en la matemática, en la Figura 3.1, se expone de manera resumida una serie de planteamientos como resultado del proceso de extensión. Ligada a la construcción del punto medio de un segmento, se encuentra el trazo de la mediatriz, que se obtiene a partir de unir los puntos de intersección de las circunferencias empleadas para el trazo del punto medio. La mediatriz puede ser interpretada como un objeto estático (una recta) y como un lugar geométrico (un conjunto de puntos que satisface una condición). Si se construye entonces un triángulo cuya base es  $AB$  y su tercer vértice  $C$  está sobre la mediatriz, ¿qué puede decirse de ese triángulo? En este momento, los estudiantes pueden usar las herramientas de medición (para segmentos y ángulos) del SGD con el fin de comprobar las propiedades de la mediatriz. Otras preguntas pueden ser como siguen: ¿existe alguna ubicación de  $C$  para que el triángulo  $ABC$  sea equilátero? ¿Existe alguna para que sea rectángulo? ¿Cómo puede encontrarse la ubicación de  $C$  de manera robusta, es decir, que supere la *prueba del arrastre*? Esta última pregunta es esencial para el resto de las actividades, pues es la pauta con la que se garantizará que los pasos geométricos realizados para resolver un problema sean invariantes ante el movimiento de los objetos en la configuración resultante.

**Problema 2.** Construir un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es un segmento dado  $AB$ .

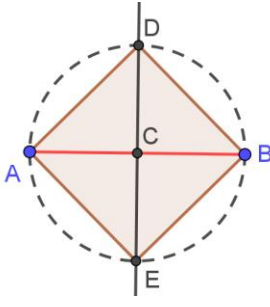
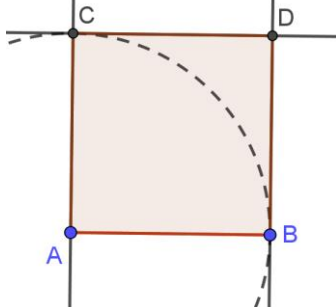
Este problema es planteado como una forma de extender la última reflexión del Problema 1, es decir, el triángulo obtenido es rectángulo e isósceles. Así, las preguntas guía para el trabajo de los estudiantes con este problema son: ¿cómo construir un triángulo rectángulo que no sea necesariamente isósceles? ¿qué tipos de triángulos rectángulos particulares son conocidos? ¿la

solución es única? ¿cómo generar una familia de soluciones? La condición de la hipotenusa es necesaria pues incluye cierto control en la construcción. Si  $AB$  funge como cateto, entonces puede trazarse una perpendicular desde  $A$  o  $B$  y colocar cualquier punto sobre ella. De este modo, conviene establecer la condición de que  $AB$  sea la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Una extensión al problema surge al reflexionar ¿cuál es el lugar geométrico del vértice  $C$  que cumplen que el triángulo  $ABC$  es rectángulo, con hipotenusa  $\overline{AB}$ ? Así, la justificación del Problema 2 está relacionada con el teorema siguiente: Un triángulo es rectángulo si y solo si su tercer vértice se encuentra sobre la circunferencia que tiene por diámetro la hipotenusa y por centro el punto medio de la hipotenusa

**Problema 3.** Construir un cuadrado cuyo lado sea un segmento dado  $\overline{AB}$ .

¿A partir de qué elementos puede construirse un cuadrado? Por un lado, si el cuadrado se construye partiendo del segmento  $AB$  como la diagonal, los pasos a seguir consisten en la repetición de los trazos empleados en los problemas anteriores (Problema 1 y Problema 2), sin embargo, si se toma como condición que el segmento  $AB$  sea el lado del cuadrado, esto demanda que los estudiantes generen una nueva secuencia de trazos para resolver el problema (Ver Tabla 3.1).

**Tabla 3.1. Construcción de un cuadrado a partir de elementos iniciales.**

El segmento $AB$ como la diagonal	El segmento $AB$ como el lado
	
<p><b>Construcción:</b> Se traza la mediatriz de <math>AB</math>. Se construye la circunferencia cuyo centro <math>C</math> es el punto medio de <math>AB</math>, y que tiene por diámetro al segmento <math>AB</math>. Las intersecciones de la circunferencia con la mediatriz son los otros dos vértices del cuadrado.</p>	<p><b>Construcción:</b> Desde cada extremo del segmento <math>\overline{AB}</math>, se trazan dos perpendiculares. Se construye la circunferencia con centro en <math>A</math> y que pase por <math>B</math>. Se toma una intersección <math>C</math> de la circunferencia y la perpendicular en <math>A</math>, el cuál es el tercer vértice. Se emplea una perpendicular a <math>AC</math> o una paralela a <math>AB</math>, cuya intersección con la perpendicular en <math>B</math> es el cuarto vértice del cuadrado.</p>

### 3.2.2. Introducción a los ejes coordenados

A través de la solución del segundo grupo de problemas, se procuró que los estudiantes fueran capaces de construir e interpretar las gráficas de relaciones entre los atributos de una figura. Para ello, resulta crucial que los estudiantes sean capaces de utilizar elementos de GeoGebra como la vista gráfica, la barra de entrada, la definición de parámetros y puntos dinámico como recursos para la generación de conjeturas en problemas que involucran fenómenos de variación. Así, se retoman figuras trabajadas anteriormente (un cuadrado construido a partir de su lado y un triángulo rectángulo construido a partir de su hipotenusa) y se emplean los ejes coordenados para añadir un aspecto cuantitativo al estudio de sus propiedades, por ejemplo, ¿cómo es la variación de algún atributo de la figura con respecto a otro? Para ello, deben construirse puntos dinámicos en términos de medidas de longitudes o áreas para estudiar su movimiento, es decir, los estudiantes deben preguntarse ¿cómo es que el lugar geométrico de un punto dinámico puede emplearse para analizar la relación entre dos magnitudes? Y, al respecto, ¿Cómo es que el lugar geométrico del punto dinámico permite justificar una conjetura? A continuación, se describen los problemas que conforman este grupo.

**Problema 4.** ¿Cómo se comporta el área de un cuadrado cuyo lado es un segmento con uno extremo en el origen y el otro se mueve sobre el eje X?

El propósito de este problema es el de analizar la construcción de lugares geométricos en el SGD mediante puntos cuyas coordenadas son magnitudes variables. Para ello, se retoma la construcción del Problema 3 y se introducen los ejes coordenados como un sistema de referencia que permite cuantificar atributos geométricos; es decir, se construye un cuadrado que tiene por lado un segmento con uno de sus extremos en el origen y el otro es un punto cualquiera sobre el eje X. Es claro que en esta configuración dinámica (ver Figura 3.2) el único elemento que puede moverse es el vértice  $B$  del cuadrado. ¿Qué atributos de la figura varían como resultado del movimiento del vértice  $B$ ? ¿Cuál es la conexión entre un lugar geométrico y la expresión algebraica asociada a él? Estas preguntas fungen como guía para introducir a los estudiantes al uso de recursos de GeoGebra como la vista gráfica y la identificación de parámetros que conllevan a la construcción de puntos dinámicos. El área del cuadrado, su diagonal o su perímetro son algunos de los atributos que varían como resultado del movimiento directo sobre  $B$ . Por ejemplo, el área del cuadrado está representada por una variable denotada por  $c1$  en la vista gráfica de GeoGebra, mientras que la medida de su lado por la literal  $f$ .

Así, puede definirse el punto dinámico  $E = (f, c1)$  que permite observar cómo es la relación entre el lado del cuadrado y su área.

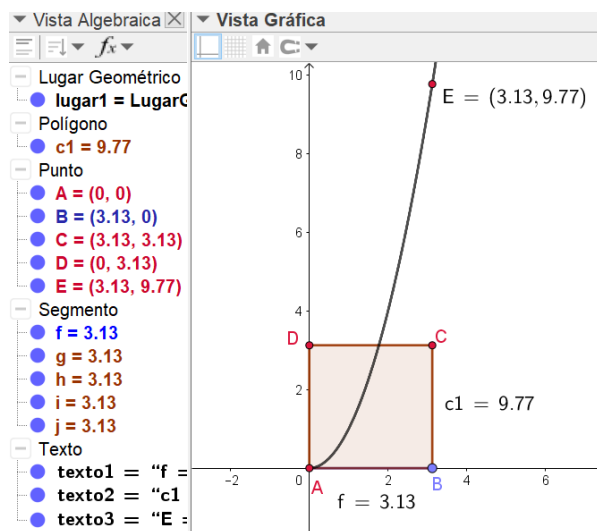


Figura 3.2. Uso de la vista gráfica en el Problema 4.

Puesto que el movimiento del punto  $B$  es controlado (se mueve sobre el eje  $X$ ), es posible trazar el lugar geométrico del punto  $E$  cuando  $B$  se mueve. ¿Qué tipo de curva se describe? ¿Cómo se describe esa curva en términos de la relación algebraica entre sus coordenadas? Estas preguntas se aprovechan para guiar una discusión que apunta a la comprensión que los estudiantes poseen acerca de la función. En este sentido, la ecuación  $y = x^2$  representa la relación entre el lado del cuadrado y su área en términos algebraicos, de modo que las coordenadas de  $E$  representan condiciones de la configuración dinámica.

En cuanto a las extensiones de este problema, el análisis puede dirigirse hacia otro tipo de atributos o figuras, por mencionar algunos ejemplos: ¿cuál es la relación entre el lado del cuadrado y su perímetro? ¿la relación entre el lado del cuadrado y la medida de su diagonal? ¿Qué relaciones pueden encontrarse en un triángulo equilátero?

**Problema 5.** Estudiar la variación del área de un triángulo cuya base es el diámetro de una circunferencia y su tercer vértice está sobre la circunferencia.

El Problema 5 se compone de dos tareas: la construcción de un modelo dinámico y en el estudio de una forma de variación en la relación de atributos geométricos. La configuración dinámica en este problema consiste principalmente en la construcción de un triángulo rectángulo con hipotenusa fija, sin embargo, el lugar geométrico de un punto dinámico que relacione la abscisa del tercer vértice del triángulo con su área resulta en una curva cuya altura alcanza un valor



máximo. Es decir, este problema funge como un escenario en el que se puede discutir la idea que ciertas funciones poseen un punto para el cual la variable dependiente alcanza un valor máximo o mínimo posible. En términos del problema, ¿Cuál es la posición del vértice del triángulo rectángulo para la que se alcanza un área máxima posible?

Por otra parte, este problema plantea la oportunidad para permitir a los estudiantes proponer el análisis de la relación entre algún par de atributos de la figura (catetos, áreas, ángulos, perímetro) y obtener conjeturas al preguntarse: ¿la gráfica de la relación propuesta posee un máximo o un mínimo? ¿Cuándo se alcanza? ¿Cómo se expresa dicha conjetura en términos de la situación?

### 3.2.3. Resolución de problemas de optimización

Los siguientes dos problemas implican la resolución de un problema de optimización apoyados por GeoGebra. ¿Qué conceptos geométricos están involucrados en el enunciado de los problemas? ¿Cómo pueden ser representados por medio de las *affordances* del SGD? Estas preguntas apuntan a la obtención de una configuración dinámica que permita representar una situación relacionada con la variación del problema; sin embargo, los estudiantes deben cuestionarse, ¿qué elemento de la configuración dinámica genera la variación del atributo a optimizar? Es decir, ¿Cuáles son los atributos de la figura que conviene emplear para la generación de un punto dinámico? Estas preguntas son necesarias para la elaboración de un argumento empírico que justifique la solución a los problemas de optimización planteados. Una vez obtenido el lugar geométrico del punto dinámico, ¿cómo se emplea para obtener las condiciones que optimicen el atributo deseado? ¿qué tipo de recursos matemáticos pueden utilizarse para apoyar dicha conjetura?

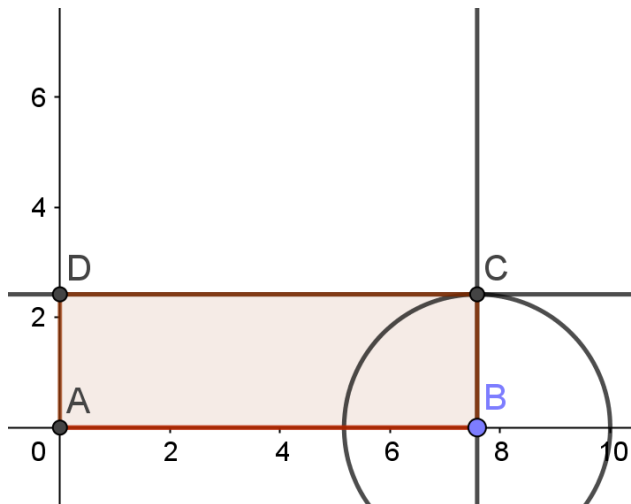
A continuación, se describen los problemas de optimización empleados.

**Problema 6.** De todos los rectángulos posibles de perímetro dado, ¿cuáles son las medidas de aquél de mayor área?

A través de este problema se presentaron los aspectos a considerar en la resolución de problemas, en particular, los que corresponden a las fases de la estrategia ADR. En términos de la construcción de la configuración dinámica, conviene preguntarse ¿Cómo construir un rectángulo robusto? ¿Qué elementos del rectángulo pueden modificarse? ¿Cómo utilizar la vista gráfica o la definición de parámetros de GeoGebra para la construcción dinámica? Una vez

obtenida la configuración dinámica, los estudiantes deben preguntarse, ¿Cuáles son las condiciones que debe satisfacer el rectángulo para que su área sea máxima? ¿Cómo el lugar geométrico del punto dinámico ofrece un argumento empírico que indica las medidas del rectángulo de área máxima?

En la Figura 3.3, se muestra una representación dinámica del problema, en la cual el punto  $B$  se mueve sobre el eje  $X$ . Se define, la variable  $p = 5$  asociada al perímetro del rectángulo. La circunferencia con centro en  $B$  posee un radio dinámico  $r$ , definido como  $r = p - AB$ , de modo que el rectángulo  $ABCD$  tiene perímetro  $2p$ , independientemente de la posición de  $B$ . Cabe destacar que GeoGebra permite construir circunferencias a partir de un punto como centro y de introducir una variable o constante como radio, de modo que esta manera de construir la configuración dinámica del problema está sustentada directamente en las *affordances* del SGD.



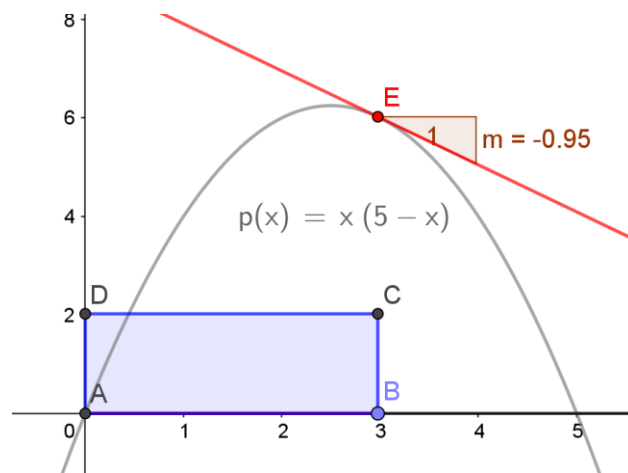
**Figura 3.3. Representación dinámica del Problema 6.**

Cabe destacar que si, por ejemplo,  $p = 5$  entonces  $B$  no puede colocarse a la derecha de  $(5, 0)$ , pues no se formará un rectángulo. En términos generales, ¿Cuáles son las condiciones para el lado  $|AB|$  y la variable  $p$  que permiten la generación de un rectángulo?

Una vez obtenida la configuración dinámica del problema, se procede a la creación de un punto dinámico relacional y su lugar geométrico con el objetivo de obtener una solución empírica al problema. Adicionalmente, parte importante en el problema consiste en que los estudiantes deben concluir de manera general acerca de la solución al problema a partir de emplear distintos valores de  $p$ ; es decir, si  $p = 5$ , la solución se alcanza cuando  $ABCD$  es un cuadrado de lado 2.5, sin embargo, en términos generales la solución se alcanza cuando  $ABCD$  es un cuadrado

de lado  $\frac{p}{4}$ . Posteriormente, conviene realizar un análisis sobre la conexión del criterio de la primera derivada. En la Figura 3.4 se aprecia la recta tangente al punto dinámico relacional  $E$ , cuya abscisa es la misma que la del punto  $B$  y cuya ordenada es el área del rectángulo  $ABCD$  cuyo perímetro es 10. El lugar geométrico que genera es una parábola cuyo punto máximo es  $(2.5, 6.25)$ .

Esta breve exploración permite asociar el proceso analítico del criterio de la primera derivada con la estrategia ADR, pues encontrar el valor de la abscisa de  $E$  para el cual la pendiente de la recta tangente es cero equivale a resolver la ecuación  $f'(x) = 0$ , donde  $f$  es la función del área del rectángulo en términos de  $x$ , la longitud del lado  $\overline{AB}$ .

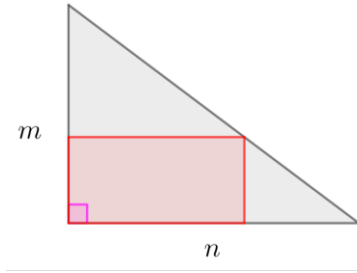


**Figura 3.4.** La pendiente de la recta tangente en el punto  $E$  se aproxima a 0 cuando éste se encuentra cerca del vértice de la parábola.

El Problema 6 puede extenderse al invertir las condiciones iniciales: ¿cómo es el comportamiento del perímetro de la familia de rectángulos de área fija? ¿Posee un máximo o un mínimo? ¿Qué similitudes existen entre la configuración dinámica de esta variación con el problema original?

**Problema 7.** Encontrar las medidas del rectángulo de mayor área posible que puede inscribirse en un triángulo rectángulo cuyos catetos miden  $m$  y  $n$ , si además dos de los lados del rectángulo están sobre los catetos del triángulo. ¿Cuál es el área máxima?

Este problema fue planteado a los estudiantes como un medio para inspeccionar la medida en que se apropiaron de las estrategias generales de resolución de problemas mediante el empleo de la tecnología y el uso de la estrategia ADR. La Figura 3.5 muestra un diagrama que fue presentado a los estudiantes, asociado al problema.



**Figura 3.5. ¿Cuáles son las medidas del rectángulo inscrito en el triángulo rectángulo para las que su área es máxima?**

Parte esencial del problema consiste en la reconstrucción de la figura por medio del SGD, ¿Cómo podrían emplearse los ejes coordenados en la configuración dinámica? ¿qué elementos de la figura deben ser dinámicos? ¿Cuáles son las formas en el que el movimiento de los objetos permite generar conjeturas acerca del problema? Es decir, ¿qué función cumple el movimiento de los vértices de las figuras de la configuración dinámica en la obtención de un rectángulo de área máxima?

**Tabla 3.2. Síntesis de la implementación de los problemas.**

Problema	Tipo de tarea	Descripción
1. Trazar el punto medio de un segmento dado.	Investigación	Se analizan conceptos clave de la construcción y se plantean posibles extensiones al problema.
2. Construir un triángulo rectángulo dada su hipotenusa.	Investigación	¿Cómo se extiende una tarea matemática hacia la obtención de un lugar geométrico?
3. Construir un cuadrado dado uno de sus lados	Construcción de figuras	Debe concebirse un plan a partir de una reflexión sobre las propiedades de perpendicularidad y de la circunferencia.
4. Analizar el lugar geométrico del área de un cuadrado	Variación	Construir puntos dinámicos que relacionen atributos de una figura.
5. Construir una familia de triángulos rectángulos inscritos en una circunferencia	Configuración dinámica	¿Qué elementos de la configuración pueden moverse? ¿Qué atributos en la figura varían y cuáles no? ¿Cómo analizar su relación?
6. Determinar las medidas del rectángulo de mayor área, con perímetro fijo.	Variación	¿Cómo incluir el perímetro constante en la configuración dinámica? ¿Cuáles son los elementos que deben moverse para obtener una función de área?
7. Determinar las medidas del rectángulo de mayor área inscrito en un triángulo rectángulo.	Variación	¿Cómo representar la figura estática de manera dinámica? ¿Cuáles son los elementos que deben moverse para obtener una función de área? ¿Cómo se expresa la generalidad del problema?

### 3.3. Recolección de los datos

Los datos del estudio se obtuvieron del trabajo de los estudiantes a través de sus archivos de GeoGebra, videograbaciones de las sesiones y las notas de campo del investigador. A continuación, se detalla la manera en la que se llevó a cabo la recolección de datos a través de los diferentes medios empleados.

Archivos de GeoGebra. Estos archivos debían ser enviados vía correo electrónico al investigador. La herramienta de *protocolo de construcción* de GeoGebra permite observar cada uno de los pasos llevados a cabo para la obtención de una configuración dinámica. Adicionalmente, se indicó a los estudiantes incluir explicaciones sobre sus construcciones en los archivos que enviaran, con ayuda de la herramienta de *procesador de texto* de GeoGebra. Esto con el fin de motivar a los estudiantes a reflexionar sobre sus propias rutas de solución y de ofrecer al investigador un modo de indagar en los procesos de solución de los estudiantes de manera individual.

Videograbaciones de las sesiones. El objetivo de los videos recopilados fue el de llevar a cabo un registro del desarrollo de las sesiones. Al contar con una videocámara, esta fue enfocada principalmente hacia la imagen del proyector conectado al monitor principal y, en caso de que hubiera anotaciones, en el pintarrón. Para ello, se llevó a cabo una dinámica en la que los estudiantes debían constantemente presentar su trabajo ante el resto del grupo de modo que: 1) se registrara en video el trabajo de los estudiantes, y 2) comunicaran sus ideas y aproximaciones a los problemas al resto de sus compañeros. El profesor del curso se encargó de coordinar el orden en el que los estudiantes presentaban sus producciones, para ello, en diversas ocasiones llevó a cabo diálogos con los estudiantes con relación a las rutas que seguían para resolver problemas. Estas conversaciones de clase fueron también videograbadas.

Notas de campo. Tanto el profesor del curso como el investigador llevaron a cabo la tarea de registrar eventos relevantes de cada sesión con respecto obstáculos o ideas particulares que algún estudiante haya presentado. Estas ayudaron tanto al desarrollo de las sesiones (por ejemplo, para hacer hincapié en algún aspecto conceptual o técnico del SGD con el que los estudiantes tuvieran dificultades) como al análisis de datos.

## CAPÍTULO 4

---

### ANÁLISIS DE RESULTADOS

En esta sección se discuten las producciones de los estudiantes acerca de cada uno de los problemas empleados, es importante recalcar que el énfasis recae en los procesos cognitivos que muestran los participantes a partir del uso de las *affordances* del SGD mediante la apropiación de la estrategia ADR como una herramienta para resolver problemas de optimización.

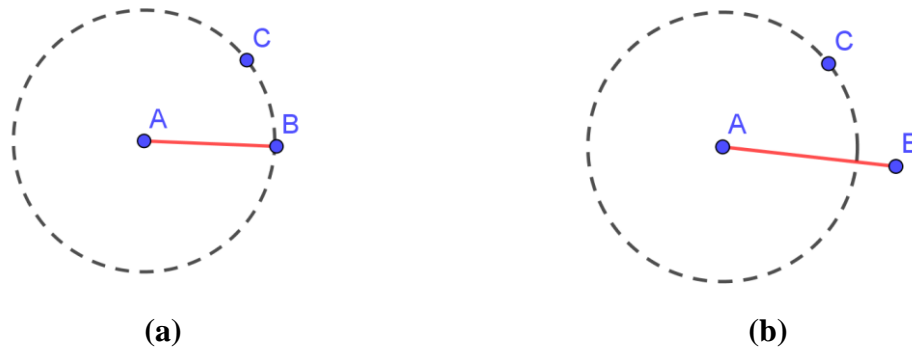
#### 4.1 Primer grupo de problemas: Introducción a GeoGebra

A la par de la introducción a las herramientas del SGD, se promovieron habilidades propias de la resolución de problemas, como la generación, validación y análisis de conjeturas. En un primer momento, se discute para cada uno de los problemas la manera en que se desarrollaron las actividades con los estudiantes y, posteriormente, se destacan los aspectos más representativos de los recursos y estrategias empleados por los estudiantes en este primer grupo de problemas.

##### 4.1.1. Problema 1: El punto medio de un segmento

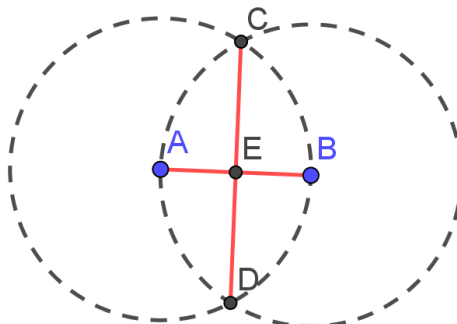
El primer problema presentado consiste en construir el punto medio de un segmento dado  $AB$ . Los estudiantes fueron capaces de recordar que esta construcción inicia con el trazo de dos circunferencias, cada una con centro en uno de los extremos del segmento y cuyo radio fuera el segmento dado. Al reproducir la figura frente a todos, se indicó el funcionamiento de los comandos de GeoGebra necesarios para construir segmentos y circunferencias. Para el caso de la circunferencia, se requiere como *input* la selección o creación de dos puntos: el primero será el centro y el segundo será el punto por el que pasa. Cuatro de los estudiantes (Rhonda, Luis, Lisa e Israel) emplearon el comando como lo harían al utilizar un compás en lápiz y papel: tomaron como punto de partida el centro y, sin soltar el botón izquierdo, arrastraron el ratón hasta que *pareciera* que la circunferencia pasara por el punto  $B$  (Ver Figura 4.1a). Al construir la circunferencia de esta manera, no se ha obtenido una construcción robusta pues si se mueve el punto  $B$  del segmento dado, el radio de la circunferencia ya no es igual al segmento dado (ver Figura 4.1b). Así, se discutió con los estudiantes la importancia de que las construcciones mantengan las propiedades deseadas al modificar la configuración dinámica. Esto también

implica concebir los objetos geométricos que aparecen en un SGD como definidos por otros elementos, y no solo como figuras estáticas (por ejemplo, un segmento está definido por sus puntos extremos y una circunferencia por su centro y su radio).



**Figura 4.1. Trazo no robusto realizado a partir de nociones estáticas.**

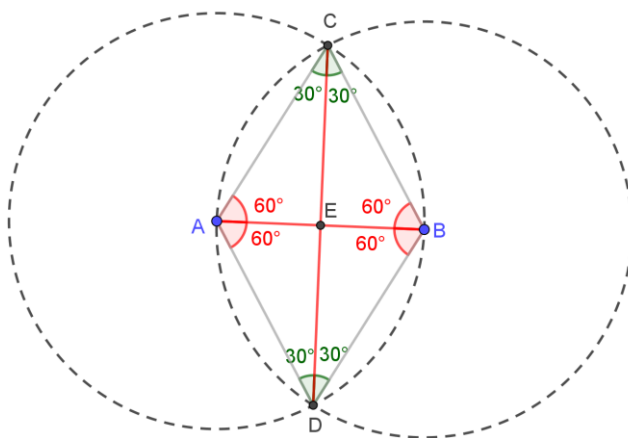
Una vez aclarada la idea de garantizar la robustez de las construcciones se construyeron dos circunferencias con centro en  $A$  y  $B$ , de radio  $|AB|$ . Posteriormente, Israel propuso encontrar los puntos de intersección  $C$  y  $D$  y trazar el segmento que une esos dos puntos. Finalmente, se traza la intersección de  $\overline{CD}$  con  $\overline{AB}$ , obteniendo el punto medio  $E$  (Ver Figura 4.2).



**Figura 4.2. Trazo del punto medio de un segmento.**

¿Qué es el punto medio de un segmento, en términos matemáticos? Se sugirió a los estudiantes utilizar la herramienta de medición, para cuantificar las distancias  $|AE|$  y  $|EB|$  al mover los puntos  $A$  y  $B$  de manera libre y observar que ambas distancias siempre eran iguales. Por un lado, volvió a hacerse énfasis en la robustez de la figura, pues los trazos realizados garantizan que  $E$  siempre es el punto medio del segmento  $AB$  y, por otro lado, se abrió la pregunta siguiente para los estudiantes: ¿qué argumentos geométricos explican que la construcción siempre genere el punto medio de  $\overline{AB}$ ? Para ello, en un primer momento los estudiantes debían señalar algunas relaciones geométricas presentes en la configuración dinámica. Por ejemplo, Aurea identificó

los radios  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AD}$  y  $\overline{BD}$  y concluyó que son todos congruentes, ya que ambas circunferencias poseen el mismo radio. A partir de notar esos radios y de trazarlos, Job y Dona identificaron dos triángulos  $ABC$  y  $ADB$  los cuales son equiláteros congruentes, ya que sus tres lados miden lo mismo. Utilizando la herramienta de medición de ángulos de GeoGebra, se identificaron varios ángulos congruentes en la configuración dinámica, mostrados en la Figura 4.3. A partir de ello, Aurea concluyó que  $AEC$  y  $BEC$  son congruentes por el criterio  $ALA$  y, por ende,  $|AE| = |EB|$ .



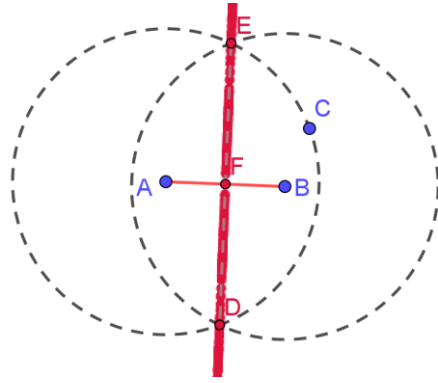
**Figura 4.3. Demostración que el punto  $E$  es punto medio de  $\overline{AB}$ .**

Sin embargo, se solicitó a los estudiantes que ofrecieran argumentos para explicar la congruencia observable de ciertos ángulos. Ana explicó que los ángulos  $EAC$  y  $CBE$  son congruentes ya que ambos miden  $60^\circ$  al ser los ángulos interiores de un triángulo equilátero. Por otro lado, los ángulos  $ACE$  y  $ECB$  son congruentes al ser los ángulos correspondientes de los triángulos congruentes  $DAC$  y  $DBC$ . Esta última congruencia se deriva de observar que dichos triángulos comparten un lado (el segmento  $DC$ ) y el resto de sus lados son segmentos congruentes. Ahora bien, siguiendo con el razonamiento anterior, el profesor del curso hizo notar a los estudiantes que  $\angle ACE \cong \angle ECB$  y  $\angle ACE + \angle ECB = \angle ACB = 60^\circ$ , por lo tanto, se sigue que  $\angle ACE = \angle ECB = 30^\circ$ .

¿Qué condiciones debe poseer el radio de las circunferencias para la construcción del punto medio? Al plantear esta pregunta ante los estudiantes, Israel comentó que el radio de la circunferencia debía ser más grande que la mitad del segmento dado. Para realizar esta exploración, los estudiantes trazaron una circunferencia  $AC$  y, con la herramienta de compás, una circunferencia congruente con centro en  $B$  (Ver Figura 4.4). Al mover el punto  $C$  de manera



libre, se observó que, en ciertas posiciones, el punto medio  $F$  no era generado (al no existir intersección de las circunferencias). Aurea agregó que el radio de las circunferencias debiera ser mayor a la mitad de la longitud segmento  $AB$  con el fin de que las circunferencias se intersequen.



**Figura 4.4.** El método general para encontrar el punto medio.

¿Qué tan grande puede ser el radio de la circunferencia para que la construcción siga generando al punto medio  $F$ ? Los estudiantes notaron que  $|AC|$  puede ser tan grande como se desee, o bien, en términos generales debe cumplirse que

$$|AC| > \frac{1}{2}|AB|$$

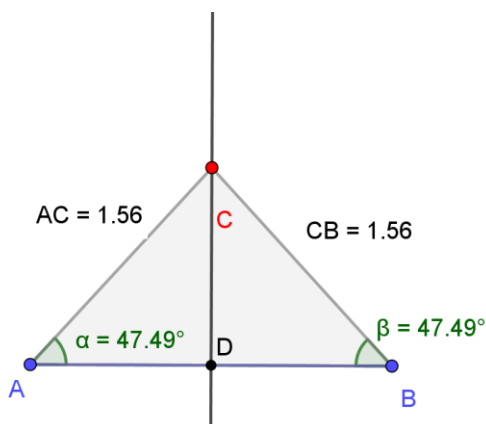
Sin embargo, en un contexto de lápiz y papel, la magnitud del radio  $|AC|$  está limitada por el tamaño del compás que se emplea para trazar el círculo mientras que, en un SGD, no existe un límite para la longitud del radio. Al activar el rastro de los dos puntos de intersección  $E$  y  $D$ , se puede apreciar una recta que se forma al mover  $C$  en el plano, la cual fue identificada por los estudiantes como la mediatriz. De aquí se comentó a los estudiantes que entonces la propiedad de perpendicular inferida para el caso particular  $|AC| = |AB|$  también se satisface para cualquiera que sea el radio de las circunferencias iniciales, es decir, que la mediatriz es perpendicular al segmento y además pasa por el punto medio.

#### 4.1.2. Extensión del problema: Una familia de triángulos isósceles

Se presentó a los estudiantes el comando de *mediatriz* de GeoGebra a partir de seleccionar un segmento  $\overline{AB}$ . Luego, se introdujo la idea de *movimiento controlado* de GeoGebra al construir un punto  $C$  sobre la mediatriz del segmento  $\overline{AB}$ . ¿Cuáles son las propiedades del triángulo  $ABC$ ?

A nivel conjetura, las herramientas de medición de ángulos y segmentos son suficientes para *convencer* a los estudiantes que dicho triángulo es siempre isósceles (Figura 4.5).

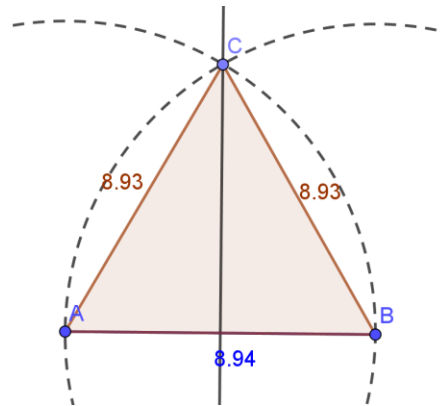
Sin embargo, se presentó a los estudiantes la tarea de elaborar argumentos geométricos que explicaran la conjetura anterior. Lisa y Adrián observaron que los triángulos  $ADC$  y  $BDC$  son rectángulos y tienen dos lados congruentes  $\overline{AB}$  y  $\overline{BD}$ , pues  $\overline{CD}$  es la mediatriz de  $\overline{AB}$ ; además, comparten el lado  $\overline{DC}$  por lo que son congruentes por el criterio  $ALA$ .



**Figura 4.5.** Uso de la medición para comprobar que  $ABC$  es un triángulo isósceles.

De lo anterior se deduce que  $|AC| = |CB|$ , al ser las medidas de los lados correspondientes de dos triángulos congruentes. Así, el profesor del curso explicó a los estudiantes que este hecho se traduce en la mediatriz como un *lugar geométrico*, como un conjunto de puntos que equidistan de  $A$  y  $B$ .

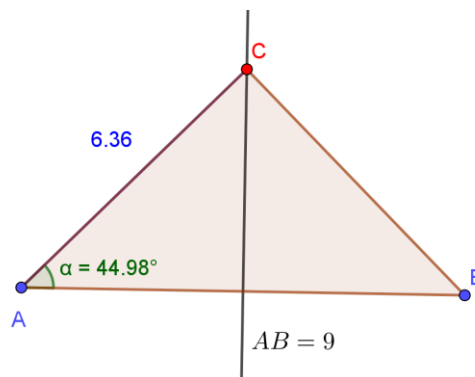
Continuando con la exploración de esta construcción, se nota que parece existir una ubicación de  $C$  para la cual  $ABC$  es equilátero, ¿cómo hallar dicha posición? Pues bien, Aurea e Israel sugirieron trazar dos circunferencias de radio  $|AB|$  tal como se hizo en la construcción del punto medio, pues en ella se obtuvo un triángulo equilátero. Cabe destacar que estos estudiantes no utilizaron la herramienta de *intersección* para encontrar la ubicación de  $C$ , sino que a partir que movieron el punto  $C$  hasta que parecía estar posicionado justo en la intersección de las circunferencias. En la Figura 4.6 se observa la producción de Aurea e Israel, quienes emplearon la medición de segmentos como una forma de obtener evidencia para apoyar su construcción. Al ser presentada la construcción con el resto de la clase, el profesor señaló que solo es suficiente emplear una de las dos circunferencias y la mediatriz del segmento  $\overline{AB}$ . Además, se explicó la importancia de emplear el comando de intersección como una forma de ofrecer la solución del problema, pues genera una construcción robusta.



**Figura 4.6.** Uso de la circunferencia para *aproximar* la ubicación de  $C$  tal que  $ABC$  es equilátero.

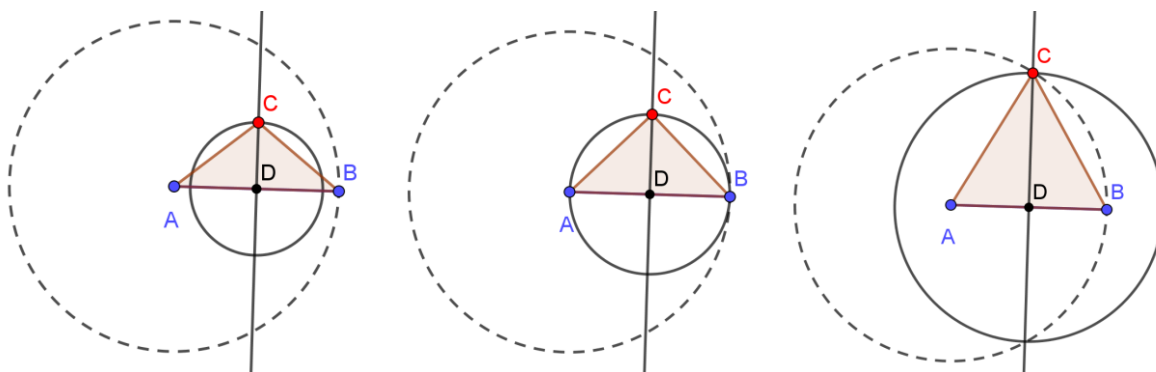
Continuando con esta serie de exploraciones matemáticas, se preguntó a los estudiantes ¿existe alguna posición para la que  $ABC$  sea rectángulo? En un principio, dos estudiantes (Marco y Luis) expresaron que no era posible la existencia de dicho rectángulo, ante lo cual Job propuso usar la medición del ángulo  $ACB$  y mover el punto  $C$ , observando así que en efecto existe una posición de  $C$  para la que  $ABC$  es rectángulo. Al requerir otras formas de encontrar la solución al problema, y de ser posible ofrecer una solución robusta, tres de los estudiantes (Adrián, Mario y Aurea) ofrecieron algunas aproximaciones al problema.

Aunque Adrián no ofreció un procedimiento geométrico sólido, realizó una exploración trigonométrica (Ver Figura 4.7). Trazó el segmento  $AB$  de tal forma que midiera 9 unidades y argumentó que si  $ABC$  es isósceles y además se desea que sea rectángulo, entonces los ángulos en  $A$  y  $B$  serán de  $45^\circ$ . Por ello, debe cumplirse que  $\sin 45^\circ = |AC|/|AB|$ , y al realizar un despeje,  $|AC| = 9 \sin 45^\circ \approx 6.36$ . Así, Adrián movió el punto  $C$  hasta el momento en el que el SGD mostrara que  $|AC| = 6.36$ . Este estudiante empleó el SGD como un modo de apoyo para sustentar de manera visual un razonamiento trigonométrico-aritmético, de modo que las *affordances* de GeoGebra fueron empleadas para dar sustento a sus procesos algebraicos.



**Figura 4.7.** Producción de Adrián.

Por otro lado, Mario trazó una circunferencia con centro en  $D$ , el punto medio de  $\overline{AB}$ , y que pasa por  $C$ , un punto móvil sobre la mediatriz y otra circunferencia con centro en  $A$  de radio  $|AB|$  (ver Figura 4.8).

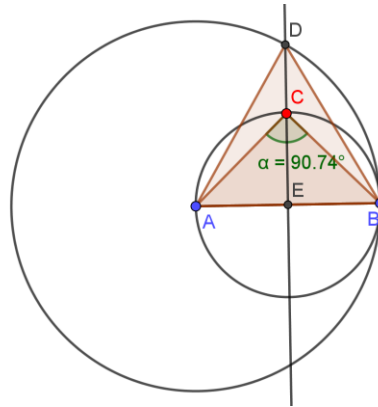


**Figura 4.8. Movimiento en la producción de Mario.**

Mario señaló que la posición de  $C$  para la cual el triángulo  $ABC$  es rectángulo, se encuentra cuando circunferencia  $DC$  es tangente a la circunferencia  $AB$  en  $B$ , se habrá encontrado. La justificación que ofrece Mario se basa en la idea del momento en el que el polígono  $ABC$  será un *medio cuadrado*. De igual manera, cuando la circunferencia  $DC$  es secante a la circunferencia  $AB$  en los puntos donde la circunferencia  $AB$  interseca a la mediatriz, se encuentra la ubicación de  $C$  para la cual  $ABC$  es equilátero. Si bien la circunferencia  $DC$  es innecesaria para encontrar la ubicación de  $C$  tal que  $ABC$  sea un triángulo equilátero, su construcción permite vincular ambas construcciones a partir de una sola idea.

Aurea, Mary y Job siguieron un razonamiento similar, pues argumentaron que si se deseaba que  $ABC$  fuera un triángulo rectángulo, el ángulo en  $C$  debía ser recto. Así, trazaron una circunferencia con centro en el punto medio  $E$  y de diámetro  $|AB|$ . Job y Mary movieron  $C$  hasta que se *encontrara* en la intersección de esta circunferencia con la mediatriz de  $\overline{AB}$  de modo solo pudieron aproximarse lo suficiente a donde se supone que está la posición solución (Ver Figura 4.9), mientras que Aurea sí empleó el comando de intersección de GeoGebra y al momento de compartir sus soluciones ante el grupo señaló ese aspecto a sus compañeros.

Mientras que Job y Mary utilizan las *affordances* visuales del SGD para encontrar la solución empírica del problema, Adrián y Mario emplean elementos numéricos (el valor deseado de  $|AC|$ ) o visuales (la aparente tangencia de las circunferencias) para controlar la precisión de su solución.

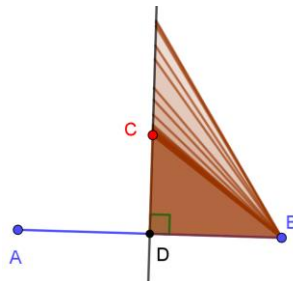


**Figura 4.9.** Uso de circunferencias para guiar el movimiento de  $C$ .

Si bien el empleo del movimiento controlado es una estrategia útil para formular una respuesta, el último paso consiste en ofrecer una construcción que se mantenga a pesar de modificar las condiciones iniciales. Por ejemplo, tomando la construcción de Aura, al trazar el punto de intersección de la circunferencia con la mediatriz da como resultado el tercer vértice del triángulo, e independientemente de la posición de  $A$  y  $B$ , dicha construcción se mantiene. Conviene notar que, para este momento, no se exigió a los estudiantes ofrecer pruebas formales que justifiquen sus construcciones. En la Tabla 4.1 se sintetizan las acciones más relevantes llevadas a cabo por los estudiantes para el Problema 1 y sus extensiones.

#### 4.1.3. Problema 2: El triángulo rectángulo

En la última exploración derivada del Problema 1 se discutió la construcción de un triángulo rectángulo isósceles, ahora bien, ¿cómo construir un triángulo rectángulo no necesariamente isósceles? Un grupo de 4 estudiantes propuso la construcción ilustrada en la Figura 4.10, en donde el punto  $C$  se mueve a lo largo de la mediatriz de  $\overline{AB}$ .

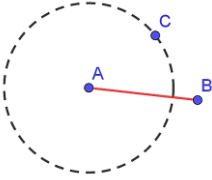
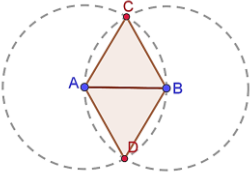
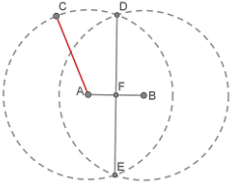
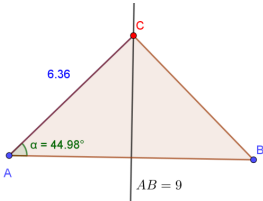
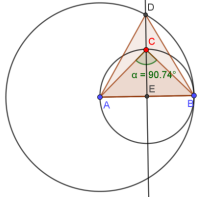


**Figura 4.10.** Familia de triángulos rectángulos con cateto  $\overline{BD}$

Esta exploración es sumamente similar a la del Problema 1, de modo que, para extender la reflexión hacia otras formas de razonamiento se hizo notar a los estudiantes que el cateto  $DB$

es fijo al mover  $C$  a lo largo de la mediatriz, ¿cómo construir un triángulo rectángulo cuyo elemento fijo sea la hipotenusa? Es decir, que se construya de tal forma que su hipotenusa sea un segmento  $\overline{AB}$  dado.

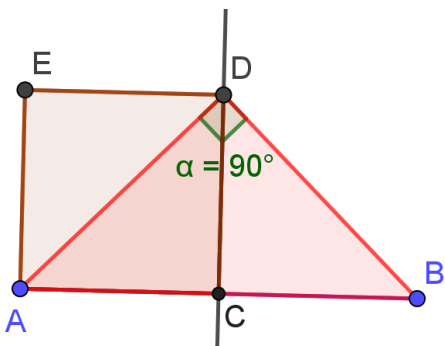
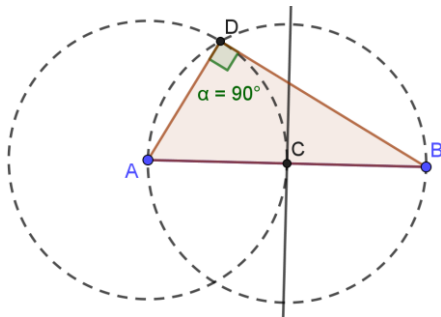
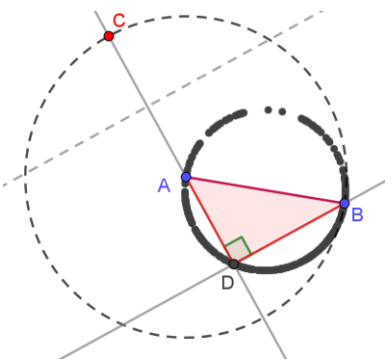
**Tabla 4.1. Resumen del trabajo de los estudiantes para el Problema 1.**

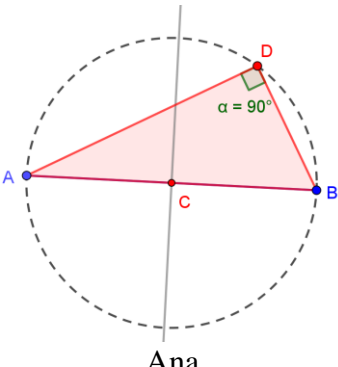
Problema 1: El punto medio de un segmento		
Aspecto relevante	Estudiantes involucrados	
	<p><i>La importancia de trazos robustos:</i> la construcción de circunferencias está definida por dos puntos (centro-radio), de lo contrario, no superarán la prueba del arrastre.</p>	Rhonda, Luis, Lisa, Israel
	<p><i>Argumentos formales basados en la visualización:</i> Identificación de triángulos congruentes que conllevan a una demostración formal de la obtención del punto medio</p>	Aurea, Job, Donna
	<p><i>Análisis sobre la extensión de la construcción:</i> Las circunferencias deben tener el mismo radio <math>r</math>, y este puede ser tan grande como se desee, siempre que:</p> $r > \frac{1}{2}  AB $	Israel, Aurea
Extensión: Familia de triángulos isósceles		
	<p><i>Aproximación numérica:</i> Uso de las <i>affordances</i> de medición para comprobar razonamientos algebraicos</p>	Adrián
	<p><i>Construcciones basadas en el arrastre:</i> uso de los trazos geométricos como guías para <i>situar</i> un punto con movimiento controlado, obteniendo una construcción aproximada.</p>	Aurea, Israel, Mario, Mary, Job

Algunos de los estudiantes (Luis, Manuel e Israel) procedieron construyendo triángulos  $ABC$  (con  $C$  móvil sobre el plano) que visualmente parecían rectángulos, sin embargo, al mover

cualquier vértice este no conservaba las propiedades de un triángulo rectángulo. Este hecho fue discutido con el resto del grupo, haciendo énfasis en la necesidad de obtener construcciones robustas. Estas aproximaciones se muestran en la Tabla 4.2. Cabe destacar que algunas de ellas presentaron oportunidades de discusión (extensiones) que se realizaron de manera grupal, dirigidas por el investigador.

**Tabla 4.2. Soluciones robustas mostradas por los participantes al Problema 2**

Construcción	Descripción
 <p>Ángela y Mary</p>	<p>Se trazó la mediatriz de <math>\overline{AB}</math> para ubicar el punto medio del segmento <math>\overline{AB}</math>, y empleó la función de polígono regular de GeoGebra para construir un cuadrado de lado <math> AC </math>. El tercer vértice del cuadrado, <math>D</math>, será tal que <math>ABD</math> es rectángulo y tiene por hipotenusa a <math>\overline{AB}</math>. El razonamiento de las estudiantes consistió en pensar que la mitad de un triángulo rectángulo isósceles es un <i>medio cuadrado</i>, por lo que consideran que el problema se resuelve si se traza un cuadrado</p> <p><b>Recursos:</b> Mediatriz, polígonos regulares, herramienta de <i>polígono regular</i> de GeoGebra.</p> <p><b>Estrategias:</b> Considerar el problema resuelto.</p>
 <p>Adrián y Lisa</p>	<p>Se trazó la mediatriz de <math>\overline{AB}</math> para encontrar el punto medio <math>C</math> y, a continuación, una circunferencia con centro en <math>C</math> que pasa por <math>A</math> y otra circunferencia con centro en <math>A</math> que pasa por <math>C</math>. La intersección <math>D</math> de las circunferencias es tal que <math>ABD</math> es un triángulo rectángulo.</p> <p><b>Recursos:</b> Mediatriz, circunferencias.</p> <p><b>Estrategias:</b> Medición de atributos a través del SGD para comprobar que <math>\angle ADB = 90^\circ</math>.</p> <p><b>Extensión:</b> ¿Cuáles son las características particulares del triángulo obtenido?</p>
 <p>David</p>	<p>Se traza la circunferencia con centro en <math>A</math> y que pasa por <math>B</math>, para colocar un punto <math>C</math> móvil sobre ella. Se traza la mediatriz de <math>\overline{AC}</math>, de la cual David argumenta que provendrá la perpendicularidad. Se traza una recta paralela a la mediatriz desde <math>B</math> y finalmente una perpendicular a esta recta, que pase por <math>A</math>. El punto de intersección de estas dos últimas rectas es <math>D</math>, y <math>ABD</math> es un triángulo rectángulo</p> <p><b>Recursos:</b> Mediatriz, circunferencia, paralelismo y perpendicularidad, movimiento controlado.</p> <p><b>Estrategias:</b> Arrastre de objetos y medición para verificar la robustez de la construcción.</p> <p><b>Extensión:</b> ¿Cómo se comporta el punto <math>D</math> cuando el punto móvil <math>C</math> se mueve a lo largo de la circunferencia?</p>
Construcción	Descripción

 <p style="text-align: center;">Ana</p>	<p>Ana se traza la circunferencia cuyo centro es el punto medio de <math>\overline{AB}</math> y que pasa por A (el punto medio se obtuvo con la herramienta mediatriz). Sobre la circunferencia, se coloca un punto <math>D</math> y se traza el triángulo <math>ABD</math>. Al mover <math>D</math>, se comprueba con ayuda del SGD, que <math>\angle ADB</math> siempre es recto.</p> <p><b>Recursos:</b> Mediatriz, circunferencia, movimiento controlado.</p> <p><b>Estrategias:</b> Arrastre de objetos y medición para verificar la robustez de la construcción.</p> <p><b>Extensión:</b> ¿Qué argumentos geométricos sustentan esta construcción?</p>
--	--

### ***Comentarios sobre las producciones de los estudiantes***

La construcción de Ana y Mary se destaca por hacer uso del conocimiento de comandos de GeoGebra que ambas poseían de manera previa al inicio del curso, sin embargo, el triángulo obtenido sigue siendo isósceles. El resto de los estudiantes utilizaron los *affordances* del SGD (arrastre de objetos y medición de atributos) para verificar sus construcciones, de modo que se realizaron discusiones grupales orientadas a encontrar argumentos geométricos que justifiquen las construcciones.

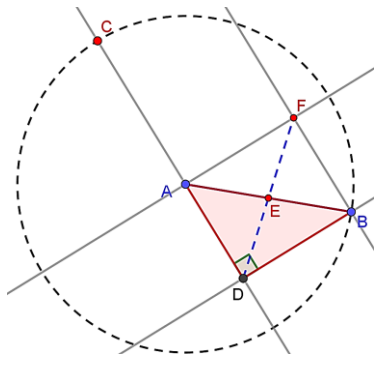
Para la construcción de Adrián y Lisa, Aurea señaló que  $|AB| = 2|AD|$ , pues las dos circunferencias trazadas poseen el mismo radio y  $\overline{AB}$  es un diámetro, mientras que  $\overline{AD}$  es un radio. Adicionalmente, Ana hizo notar que si se traza el segmento  $DC$ , el triángulo  $ABD$  se concibe como compuesto por dos triángulos: el triángulo equilátero  $ADC$  y el triángulo isósceles  $CDB$ . Con ayuda de GeoGebra, se señalaron las relaciones que se infieren de lo anterior, es decir,  $\sphericalangle ADC = 60^\circ$  y  $\sphericalangle CDB = \sphericalangle DBC = 30^\circ$ .

A partir de un análisis retrospectivo de la solución de David, se observa la implementación de una estrategia de generalización importante: con ayuda de la circunferencia con centro en  $B$  y el punto móvil  $C$  sobre ella, se generó una familia infinita de rectas  $BC$ . Un fenómeno que se observa en este acercamiento es que el trazo de la mediatriz no es necesario (puede trazarse la recta  $AC$  directamente), sin embargo, es posible que el estudiante sintiera la necesidad u obligación de utilizar a la mediatriz, que había sido un recurso abordado en actividades anteriores. Dado que el movimiento del punto  $D$  depende del movimiento del punto  $C$ , se planteó a los estudiantes utilizar la herramienta *trazo* de GeoGebra para estudiar la trayectoria



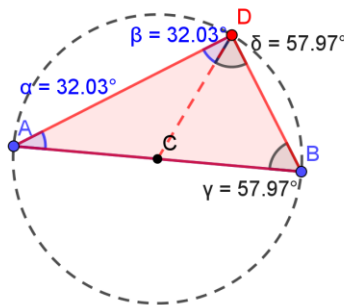
descrita por  $D$ . Los participantes conjeturaron que la trayectoria seguida por el punto  $D$  es una circunferencia, cuyo centro estaría situado sobre el punto medio de  $\overline{AB}$ .

**Tabla 4.3. Demostración ofrecida por el investigador para la construcción de David.**

Figura	Análisis
	<p><math>C</math> se mueve sobre una circunferencia de radio fijo <math> AB </math>. Se traza la recta <math>AC</math> y su perpendicular desde <math>B</math>. Estas se cortan en <math>D</math>. ¿Qué lugar geométrico describe <math>D</math> cuando <math>C</math> se mueve?</p> <p><b>Prueba:</b> Se trazan perpendiculares a <math>\overline{AD}</math> y a <math>\overline{BD}</math>, que se cortan en un punto <math>F</math>. El cuadrilátero <math>BDAF</math> es un rectángulo y sus diagonales, <math>\overline{DF}</math> y <math>\overline{AB}</math>, se bisecan mutuamente en <math>E</math>. Dado que las diagonales de un rectángulo son congruentes, se sigue que <math> DE  =  AE  =  EB </math>, y dado que <math> AE </math> es una magnitud fija, entonces <math>D</math> se mueve de tal modo que equidista de <math>E</math>. ■</p>

Con apoyo de la herramienta de medición, los participantes observaron que la longitud de los segmentos  $ED$  y  $EB$  son iguales y constantes cuando  $C$  se mueve, esto consiste en un argumento empírico sobre el hecho que  $D$  está siempre a la misma distancia que  $E$ . Con base en estas ideas, el investigador presentó un argumento geométrico resumido en la Tabla 4.3.

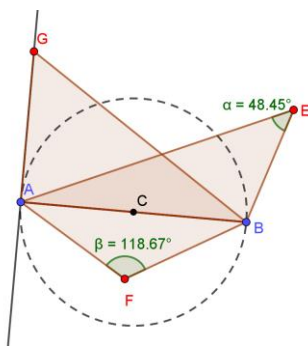
Para la construcción de Ana, se indicó a los estudiantes trazar el segmento  $\overline{DC}$  y medir los ángulos interiores del triángulo  $ABD$  (Figura 4.11). Mediante una exploración empírica, se observó que al mover el punto  $D$ , se cumplía que  $\alpha = \beta$  y  $\delta = \gamma$ , ¿qué es lo que justifica que esto siempre se cumpla? Rhonda señaló que los triángulos  $ADC$  y  $BDC$  son isósceles y los ángulos de su base son iguales. Finalmente, el investigador indicó que  $\alpha + \beta + \delta + \gamma = 180^\circ$ , ya que  $\alpha, \beta + \delta$  y  $\gamma$  son las medidas de los ángulos interiores del triángulo  $ABD$ . Esto implica que  $2\beta + 2\delta = 180^\circ$  y, por lo tanto, que  $\sphericalangle ADB = \beta + \delta = 90^\circ$ .



**Figura 4.11. Uso del SGD como apoyo de la argumentación.**

Las construcciones de David y de Ana poseen una relación de reciprocidad, pues la producción de David garantiza la obtención de un triángulo rectángulo y debe demostrarse que el tercer vértice se mueve sobre una circunferencia mientras que la construcción de Ana parte del movimiento del tercer vértice sobre una circunferencia y debe demostrarse que el triángulo obtenido es rectángulo. En este caso, el punto de partida de uno lleva al punto de partida del otro.

Como una forma de extender la exploración se planteó a los estudiantes lo siguiente: ¿es posible construir un triángulo rectángulo con hipotenusa  $AB$  tal que su tercer vértice **no** esté sobre dicha circunferencia? Para ello, se construyeron puntos dentro o fuera de la circunferencia y se trazaron los triángulos. En la Figura 4.12 se muestra esta exploración. Marco expresó que al construir una recta perpendicular en  $A$  a  $\overline{AB}$  y colocar un punto  $G$  sobre dicha perpendicular, se obtiene un triángulo rectángulo. Aurea y Ana argumentaron que dicho triángulo no tenía por hipotenusa  $\overline{AB}$ .



**Figura 4.12. Triángulos con base  $AB$  cuyo tercer vértice no está sobre la circunferencia.**

Así, el investigador propuso a los estudiantes consensuar una conclusión grupal, ante la cual los estudiantes concluyeron que al colocar un punto  $E$  fuera de la circunferencia, el ángulo  $AEB$  es agudo, mientras que al construir un punto  $F$  dentro de la circunferencia, el ángulo  $BFA$  es obtuso. De manera empírica, se concluyó que no era posible realizar la construcción planteada.

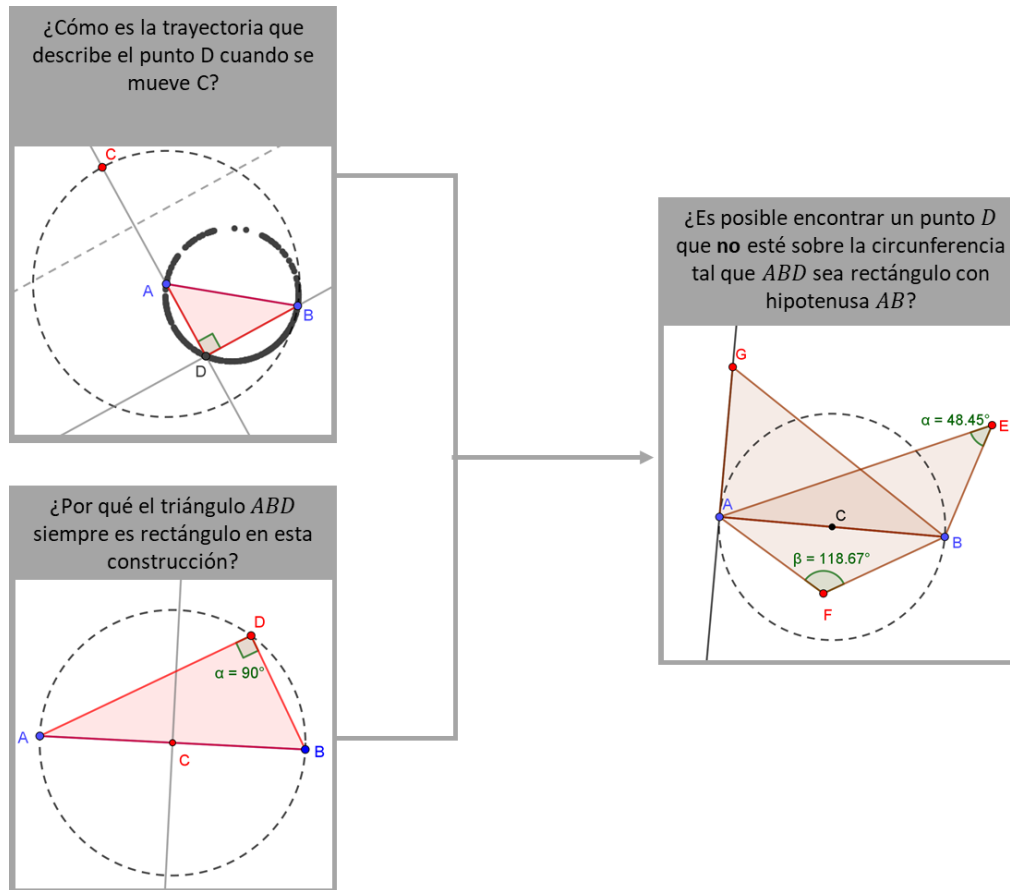


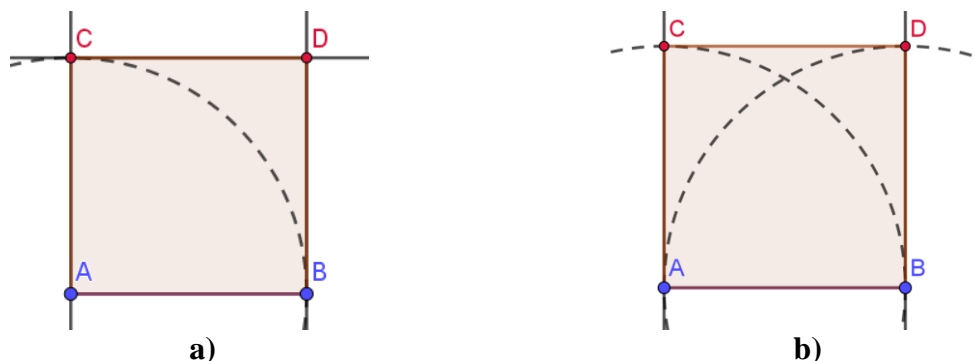
Figura 4.13. Esquema general del trabajo en el Problema 2.

#### 4.1.4. Problema 3: Construcción de un cuadrado

Con base en las soluciones de los problemas anteriores, se sigue que construir un cuadrado cuya diagonal es  $\overline{AB}$  es equivalente a la construcción del triángulo rectángulo isósceles, al tomar ambas intersecciones de la circunferencia con la mediatriz (ver Figura 4.8). Sin embargo, ¿de qué manera puede construirse un cuadrado si se toma como elemento de partida que  $\overline{AB}$  sea uno de sus lados? En este sentido, se dio la tarea a los estudiantes de construir un cuadrado a partir de un segmento dado. Los estudiantes fueron capaces de obtener construcciones satisfactorias comunes al trabajar en grupo. En la Figura 4.14 se observan las dos construcciones realizadas por el grupo, en donde 6 de los estudiantes llevaron a cabo la construcción mostrada en la Figura 4.14a mientras que los otros 8, la representada en la Figura 4.14b.

La primera construcción (Figura 4.14a) consiste en el trazo de dos rectas perpendiculares a  $\overline{AB}$ , desde cada uno de los extremos del segmento, pues de esta manera se generan los ángulos rectos

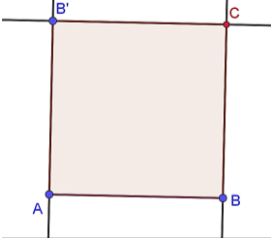
del cuadrado. A continuación, se traza la circunferencia con centro en  $A$  y que pasa por  $B$ , cuya intersección con la perpendicular en  $A$  es el tercer vértice,  $C$ ; en este trazo, los estudiantes señalaron el uso de la circunferencia como una herramienta que traslada distancias (compás).

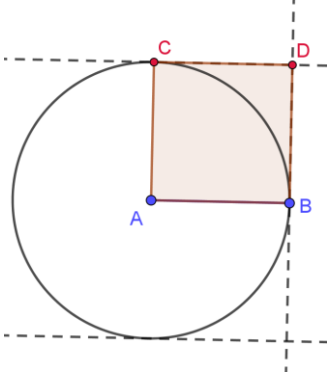
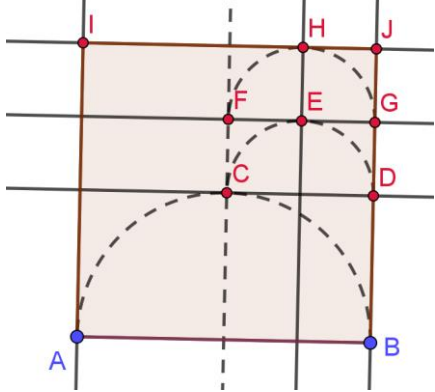
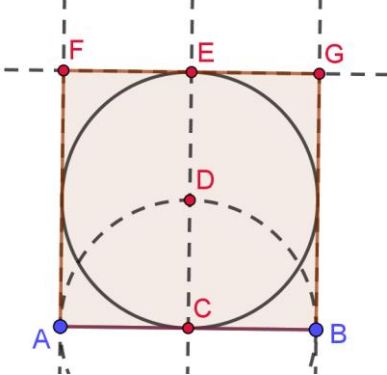
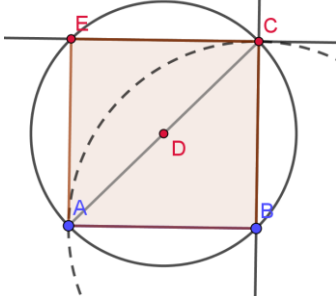


**Figura 4.14. Dos variaciones realizadas por el grupo para la construcción de un cuadrado.**

El cuarto vértice se encuentra al trazar una perpendicular a  $\overrightarrow{AC}$  desde  $C$ , la cual corta en el punto  $D$  a la perpendicular trazada desde  $B$ . Algunas variaciones de esta construcción presentadas por los estudiantes sustituyen el trazo de la perpendicular en  $C$  por el de una paralela a  $\overline{AB}$  en  $C$ . La segunda construcción (Figura 4.14b), llevada a cabo por la mayoría de los estudiantes, se basa en el trazo de circunferencias. Por un lado, la mayoría de los estudiantes se apoyó en recursos conocidos para llevar a cabo la solución de los problemas (la circunferencia ha sido el recurso protagónico en las construcciones hasta el momento), mientras que algunos decidieron explorar el uso de distintos recursos matemáticos con ayuda de GeoGebra (como lo es el uso de trazos de paralelismo o perpendicularidad). Seguidamente, los investigadores solicitaron a los estudiantes encontrar y compartir soluciones alternativas al Problema 3, de modo que se generaron oportunidades para que los estudiantes exploraran algunas relaciones geométricas o herramientas específicas de GeoGebra (ver Tabla 4.4).

**Tabla 4.4. Aproximaciones de los estudiantes al Problema 3.**

Construcción	Análisis
 <p style="text-align: center;">Donna</p>	<p>Con ayuda de la herramienta de rotación de GeoGebra, se construye <math>B'</math>, una rotación de <math>90^\circ</math> de <math>B</math> con respecto a <math>A</math>. Después, se trazan desde <math>B'</math> y <math>B</math> las rectas paralela y perpendicular a <math>\overline{AB}</math>, respectivamente.</p> <p><b>Recursos y estrategias:</b> Rotación, Ángulos de un cuadrado, paralelismo y perpendicularidad.</p>

Construcción	Análisis
 <p style="text-align: center;">Mario</p>	<p>Se construye una circunferencia con centro en <math>A</math> y que pasa por <math>B</math>, y a continuación, se traza desde <math>B</math> la perpendicular a <math>\overline{AB}</math>. Al emplear la herramienta de tangente de GeoGebra, selecciona la circunferencia <math>AB</math> y el segmento <math>\overline{AB}</math>, lo que traza las tangentes a dicha circunferencia que son paralelas al segmento seleccionado. Así, los otros dos vértices del cuadrado buscado son el punto <math>C</math> (punto de tangencia de la circunferencia y una de sus tangentes) y el punto <math>D</math>, la intersección de una de las tangentes con la recta perpendicular en <math>B</math>.</p> <p><b>Recursos:</b> Tangencia y circunferencia.</p>
 <p style="text-align: center;">Manuel</p>	<p>Construyó la semicircunferencia <math>AB</math> y trazó la mediatriz de <math>\overline{AB}</math>, la intersección de ambos objetos es el punto <math>C</math>. Desde <math>B</math> trazó una perpendicular a <math>\overline{AB}</math> y desde <math>C</math>, una paralela a <math>\overline{AB}</math>. La intersección de ambas rectas es el punto <math>D</math>. Acto seguido, trazó la semicircunferencia <math>CD</math> y repitió el proceso descrito anteriormente, hasta obtener el punto <math>H</math>.</p> <p><b>Recursos:</b> Mediatriz, paralelismo y perpendicularidad, comando de semicircunferencia.</p>
 <p style="text-align: center;">Ana</p>	<p>Se traza la mediatriz de <math>\overline{AB}</math> para ubicar su punto medio <math>C</math>, el cual es el centro de una circunferencia que pasa por <math>A</math>; la intersección de dicha circunferencia con la mediatriz es el punto <math>D</math>. Se traza una circunferencia que con centro en <math>D</math> que pasa por <math>C</math> y la intersección de esta circunferencia con la mediatriz es el punto <math>E</math>, desde el cual se traza la paralela a <math>\overline{AB}</math>. Finalmente, se trazan las perpendiculares a <math>\overline{AB}</math> desde los puntos <math>A</math> y <math>B</math>, y los puntos en los que cortan a la recta paralela son los otros dos vértices del cuadrado.</p> <p><b>Recursos:</b> Mediatriz, circunferencia inscrita, paralelismo y perpendicularidad.</p>
 <p style="text-align: center;">Aurea</p>	<p>Comienza con el trazo de una perpendicular a <math>\overline{AB}</math> en <math>B</math> y con la circunferencia con centro en <math>B</math> que pasa por <math>A</math>. La intersección de estas dos figuras es el punto <math>C</math>, el tercer vértice del cuadrado. Trazó la diagonal <math>\overline{AC}</math> y ubicó su punto medio <math>D</math> el cual se toma como centro de una circunferencia que pasa por <math>C</math>. Al trazar la paralela a <math>\overline{AB}</math> desde <math>C</math>, el punto de intersección con la circunferencia es el cuarto vértice del cuadrado.</p> <p><b>Recursos:</b> Paralelismo y perpendicularidad, circunferencia circunscrita.</p>
Construcción	Análisis

<p style="text-align: center;">Luis</p>	<p>Se trazan dos circunferencias de radio <math>\overline{AB}</math> una con centro en <math>A</math> y la otra, en <math>B</math>. Sobre la circunferencia con centro en <math>B</math> se coloca un punto móvil <math>C</math>, y desde éste se traza la circunferencia de radio <math>\overline{BC}</math>. El punto <math>D</math> es la intersección de la circunferencia con centro en <math>C</math> y la circunferencia con centro en <math>A</math>, obteniendo de este modo el rombo <math>ABCD</math>.</p> <p><b>Estrategia:</b> Se trazan las perpendiculares a <math>\overline{AB}</math> desde <math>A</math> y <math>B</math> como guías visuales para la solución, que se obtiene cuando al mover <math>C</math>, ocurre que <math>\overline{AD} \perp \overline{AB}</math>.</p> <p><b>Recursos:</b> Circunferencia, movimiento controlado, paralelismo y perpendicularidad.</p>
<p style="text-align: center;">Ángela y Mary</p>	<p>Otra forma de trazar un cuadrado es construir un <i>medio</i> triángulo rectángulo isósceles, el cuál posee ángulos de <math>45^\circ</math>. Por ello, emplearon la herramienta de bisectriz de GeoGebra; al trazar las bisectrices de los ángulos rectos en <math>A</math> y <math>B</math>, estas cortan en los puntos <math>C</math> y <math>D</math> a las perpendiculares.</p> <p><b>Recursos:</b> Perpendicularidad, bisectriz de un ángulo.</p>

### **Comentarios sobre las producciones de los estudiantes**

De las producciones descritas, se observa que Donna, Mario y Manuel exploraron el uso de comandos de GeoGebra que no habían sido empleados hasta el momento. Así, Donna empleó la herramienta de rotación para encontrar rápidamente otro de los vértices del cuadrado mientras que Mario explicó que la forma de utilizar la herramienta de tangente empleada en su construcción fue descubierta al tratar de encontrar una manera de construir una recta tangente a la circunferencia que pasa por el punto “*directamente arriba de A*” y Manuel aprovechó esta tarea para experimentar con el uso de la herramienta de semicircunferencia de GeoGebra. En vez de seleccionar un centro y un punto por el que pase, para construir una semicircunferencia en GeoGebra deben seleccionarse dos puntos, tales que el segmento que los une será el diámetro de la semicircunferencia. Así, Manuel utilizó la semicircunferencia como una herramienta que permite trasladar medidas de manera vertical; sin embargo, lo hace de manera espontánea o bien, sin un plan de acción explícito ya que es posible hacer la construcción utilizando solo dos semicircunferencias.

En contraste, los estudiantes Ana, Aurea y Luis utilizaron herramientas conocidas de GeoGebra para estudiar propiedades geométricas. Ana y Aurea se propusieron a encontrar las circunferencias inscritas y circunscritas del cuadrado cuyos centros coinciden con el centro del cuadrado. Luis realizó una construcción que no es robusta, sin embargo, con apoyo de esta

construcción, fue posible discutir con el resto del grupo acerca del tipo de figura que se formó y las propiedades que cumple: es un rombo pues sus cuatros lados son congruentes, aunque sus ángulos no sean congruentes entre sí. La figura siempre es un rombo, independientemente de la posición de  $C$  (a menos que  $C$  pertenezca a  $\overleftrightarrow{AB}$ ), de modo que se puede inferir que el cuadrado como figura geométrica es un caso particular del rombo.

Por otra parte, Ángela y Mary observaron que las bisectrices se cortan entre sí en un ángulo recto y utilizó la herramienta de medición de ángulos de GeoGebra para comprobarlo. De aquí concluyeron que basta con utilizar el comando de bisectriz una vez, y la otra se obtiene a partir de trazar una recta perpendicular a ella. En seguida, se les preguntó ¿qué argumentos geométricos explican que las bisectrices de un cuadrado se corten en un ángulo recto? Las estudiantes expresaron que, si  $ABCD$  es un cuadrado y las rectas  $AD$  y  $BC$  son bisectrices, entonces  $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CBA = 45^\circ$ , y dado que las medidas de los ángulos interiores de un triángulo suman  $180^\circ$ , se sigue que  $\sphericalangle AEB = 90^\circ$ .

Al pensar en los objetos geométricos en términos del SGD, los estudiantes se apoyaron en las *affordances* para comprobar conjeturas de manera casi inmediata a través del arrastre, el cual se convirtió en el criterio fundamental empleado los estudiantes para corroborar la exactitud de sus construcciones. En el trabajo de este grupo de problemas, los estudiantes no solamente se familiarizaron con las funciones básicas de GeoGebra, sino que las emplearon para la observación de patrones e invariantes (por ejemplo, al emplear la traza de puntos para inferir trayectorias). La búsqueda de distintas soluciones a los problemas planteados fue utilizada como un medio de verificación de estrategias y como una oportunidad de explorar las relaciones entre las propiedades geométricas de figuras.

#### 4.1.5. Discusión de los resultados del primer grupo de problemas

De manera general, se observó que la circunferencia, la mediatriz y la congruencia de triángulos fueron recursos matemáticos primordiales para la elaboración de argumentos matemáticos que sustentaron las producciones de los estudiantes.

La medición de ángulos o segmentos fue el principal medio que los estudiantes emplearon para validar sus construcciones. Así mismo, la medición junto con el arrastre de objetos fue importante para concebir a la mediatriz y circunferencia como lugares geométricos que involucran la equidistancia de puntos y para estructurar demostraciones formales a partir de

observar triángulos congruentes en las configuraciones dinámicas. El arrastre de objetos también se empleó para verificar la *robustez* de las construcciones de los estudiantes y para la visualización de la trayectoria del movimiento de objetos (lugares geométricos) con ayuda del comando de *traza*.

**Tabla 4.5. Principales *affordances* involucrados en el primer grupo de problemas.**

Affordance	Problema 1	Problema 2	Problema 3
<b>Medición</b>	El punto $E$ es punto medio del segmento $AB$ , ya que al medir las distancias $ AE $ y $ EB $ se observa que estas son iguales.	Los estudiantes comprobaron que los triángulos obtenidos eran rectángulos al medir sus ángulos interiores.	Se medían los lados del cuadrilátero obtenido para asegurarse que las medidas de sus lados fueran iguales.
<b>Arrastre</b>	Se verifica que la condición de equidistancia del punto medio se mantiene al mover de manera libre los extremos del segmento dado.	El arrastre se usó para verificar la robustez de las construcciones y para observar lugares geométricos.	Se utilizó para verificar la robustez de las construcciones.
<b>Visualización</b>	Se observa que el radio de las circunferencias para la construcción del punto medio debe ser mayor que $\frac{1}{2} AB $ , de lo contrario, no se genera el punto medio.	Con ayuda de las herramientas visuales, se identificaron propiedades geométricas de las construcciones.	El rombo construido es un cuadrado cuando dos de sus lados coinciden con dos rectas perpendiculares que fungen como guías.

#### 4.2. Segundo grupo de problemas: Exploración de relaciones dinámicas

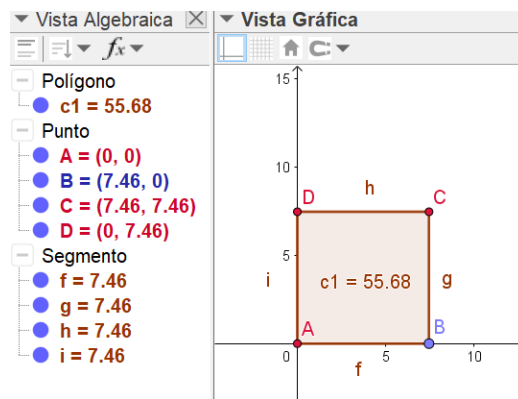
La construcción de una configuración dinámica es esencial para implementar la estrategia ADR en la resolución de problemas, sin embargo, se requiere que los estudiantes midan o cuantifiquen los atributos involucrados en las relaciones geométricas presentes en dicha configuración. En este grupo de problemas, se tomaron las configuraciones dinámicas que los estudiantes ya habían trabajado (un cuadrado dado su lado y un triángulo rectángulo dada su hipotenusa) y se agregaron los ejes cartesianos con el fin de emplear funcionalidades del SGD relacionadas con la cuantificación de atributos (vista algebraica, definición de variables, barra de comandos, puntos dinámicos y barra de comandos).



#### 4.2.1. Problema 4: El área de un cuadrado

¿Cómo se comporta el área de un cuadrado cuyo lado es un segmento con uno extremo en el origen y el otro se mueve sobre el eje X?

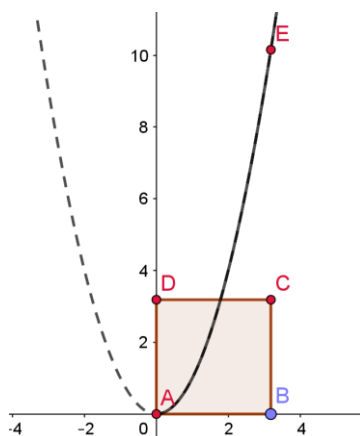
Los estudiantes construyeron un cuadrado de modo que el segmento que une esos dos puntos sea su lado, entonces se observa que a medida que el estudiante mueve el vértice sobre el Eje X, el área del cuadrado cambia de cierta manera. Se introdujo a los estudiantes la herramienta de *vista algebraica*, en el cual el SGD asigna un *nombre* a las distintas variables involucradas en la configuración dinámica. Así, la medida del área y los segmentos del cuadrado poseen una literal asociada (Figura 4.15).



**Figura 4.15.** Uso de la vista algebraica y gráfica de GeoGebra para la definición de variables.

A continuación, los estudiantes generaron un punto dinámico relacional  $E = (f, c1)$ . El lugar geométrico se presentó como una herramienta que muestra visualmente el movimiento que seguiría el punto dinámico relacional  $E$  al mover el punto inicial  $B$ . Así, se obtiene una semi-parábola (ver Figura 4.16), sin embargo, al preguntar a los estudiantes si reconocían que curva era, Ana, Rhonda y Job aseguraron que era una curva exponencial, mientras que Mary y Aurea respondieron que era una parábola. En este momento, los estudiantes se basaron solamente en concepciones visuales de las curvas exponenciales o parabólicas, de modo que el investigador sugirió a los estudiantes llevar a cabo un análisis algebraico entre la relación de la abscisa y la ordenada del punto  $E$  (es decir, parametrizar la curva).

Ana estableció que si la abscisa  $x$  del punto es el segmento  $f$  y la ordenada  $y$  es el área del cuadrado, entonces  $y = x^2$ , de modo que comprobó que su conjetura inicial era errónea. En este sentido, el lugar geométrico descrito por  $E$  representa una relación numérica entre dos atributos de la configuración dinámica, de modo que las funciones son recursos útiles para estudiar la *forma* en la que la variación de una magnitud influye sobre la otra.



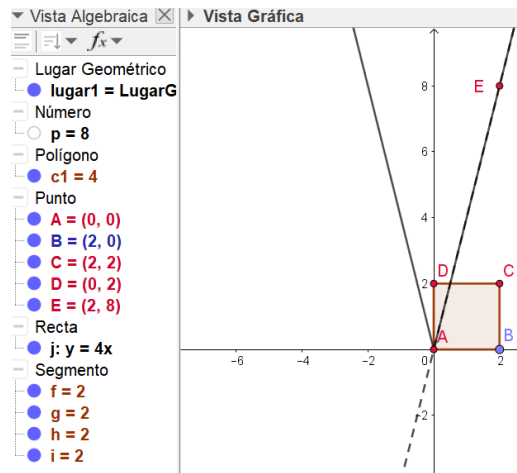
**Figura 4.16.** Lugar geométrico descrito por  $E$  y la curva punteada  $y = x^2$ .

#### 4.2.2. Extensión del problema: Construcción de lugares geométricos

Como una forma de sustentar esta idea, se indicó a los estudiantes introducir en la barra de entrada de expresiones de GeoGebra la expresión  $y = x^2$  y verificar si la gráfica asociada a esta expresión corresponde al lugar geométrico del punto  $E$ . Lo que los estudiantes observaron fue que la curva  $y = x^2$  parecía sobreponerse al lugar geométrico de  $E$ , sin embargo, estaba *incompleta*. A partir de esta observación, comenzó una discusión acerca de por qué el LG obtenido solo genera una mitad de la parábola y no la curva completa. Adrián señaló que esto ocurre porque la abscisa siempre es positiva ya que es el lado de un cuadrado. En términos del contexto del problema, es adecuado que el lugar geométrico no incluya valores de la abscisa negativos, pues expresa la relación entre una longitud y un área, sin embargo, para generar un lugar geométrico *completo*, se sugirió a los estudiantes el uso del comando  $x(B)$ , que devuelve la abscisa del punto  $B$  ya que  $|x(B)| = f$  y al definirse  $E = (x(B), c1)$  se obtiene exactamente la curva  $y = x^2$ . A esta estrategia de identificar la relación algebraica asociada a un lugar geométrico se le denominó *parametrizar* la curva, es decir, incluir parámetros (variables) que describan la relación numérica entre las coordenadas del punto dinámico que produce el lugar geométrico estudiado.

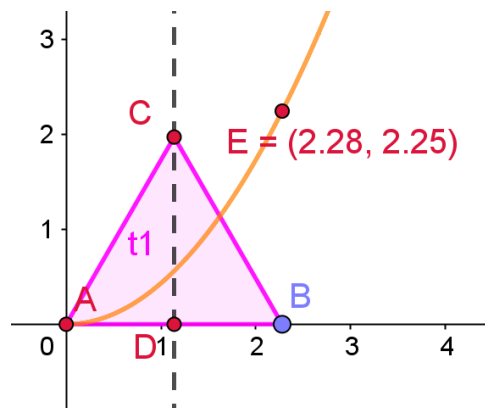
Para continuar con estas exploraciones, se propuso a los estudiantes graficar la relación entre el lado de un cuadrado y su perímetro, mediante la creación de un punto dinámico relacional. Adrián, Aurea y Ana definieron la variable  $p = f + g + h + i$ , es decir, calcularon el perímetro del cuadrado (ver Figura 4.17) para generar el punto  $E = (x(B), p)$ . Mary y Ángela notaron que, si se denota  $x = f$ , entonces la relación asociada al lugar geométrico es  $y = 4x$ . Al

introducir dicha expresión en GeoGebra se obtiene una curva que solo coincide en la parte positiva del eje X. Estos estudiantes explicaron que lo anterior ocurre porque  $p$  siempre es un valor positivo, mientras que  $x(B)$  puede tomar valores negativos por lo que es importante considerar el dominio de la situación: dado que se está estudiando el lado del cuadrado y su perímetro, solo tiene sentido tomar en cuenta magnitudes positivas.



**Figura 4.17.** Relación entre el perímetro de un cuadrado y su lado.

¿Cómo es la relación entre el lado de un triángulo equilátero y su perímetro? Rhonda y Donna no tuvieron problemas en concluir que dicha relación está descrita por la expresión  $p = 3l$ , donde  $l$  es el lado del triángulo y  $p$  es su perímetro. Sin embargo, parametrizar el lugar geométrico del punto dinámico que relaciona el lado del triángulo y su área no es una tarea sencilla. En la Figura 4.18 se observa el lugar geométrico del punto dinámico  $E = (AB, t_1)$ . Ana y Lisa mencionaron que dicha curva podría ser una parábola.



**Figura 4.18.** Relación del lado de un triángulo equilátero y su lado.

Estas dos estudiantes trazaron la mediatriz de  $\overline{AB}$  y señalaron que se forman dos triángulos rectángulos. Así, definieron  $x = |AB|$  y, por el teorema de Pitágoras, se sigue que  $|CD| = \frac{\sqrt{3}x}{2}$ . Puesto que  $|CD|$  es la altura del triángulo, su área para cualquier posición de  $B$  está dada por  $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ . Finalmente, las estudiantes comprobaron si la expresión es correcta al introducir  $y = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$  en la barra de entrada, y observaron que la curva se sobrepone al lugar geométrico.

### ***Comentarios sobre las producciones de los estudiantes***

La parametrización de las curvas fue introducida a los estudiantes como una forma de comprobar resultados algebraicos con ayuda de la visualización de curvas. En este sentido, la exploración de problemas abiertos que involucran explorar las relaciones dos atributos de una figura favorece la conexión entre diferentes representaciones. Por ejemplo, la expresión  $y = x^2$  describe de manera numérica la relación entre las coordenadas de un punto dinámico y al mismo tiempo representa la forma en que se define el área de un cuadrado a partir de su segmento. Es decir, las expresiones algebraicas pueden interpretarse en términos de objetos geométricos que conforman una configuración dinámica.

#### **4.2.2. Problema 5: Triángulo rectángulo inscrito**

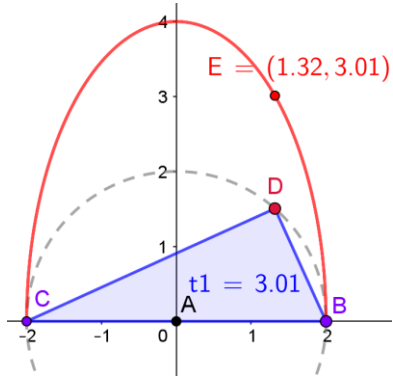
Se retomó la construcción del triángulo rectángulo del Problema 2 y se empleó como un punto de partida para iniciar un análisis variacional. Es decir, se situó el centro de la circunferencia sobre el origen (ver Tabla 4.6). ¿Qué atributos de la figura varían y pueden ser estudiados? El investigador propuso a los estudiantes explorar el área del triángulo en función de la abscisa del punto  $D$ . En este caso, el punto  $D$  funge como el punto inicial de la estrategia ADR, y su trayectoria de movimiento está bien definida (dentro de una circunferencia).

Los estudiantes definieron el punto dinámico relacional  $\mathbf{E} = (\mathbf{x}(D), t1)$ , donde  $t1$  es el valor numérico del área del triángulo  $CBD$ . Empleando la herramienta de lugar geométrico, los participantes trazaron la trayectoria descrita por el punto  $E$  a medida que  $D$  se mueve, obteniendo la mitad de una elipse. ¿Qué puede inferirse del comportamiento del área de este triángulo a medida que  $D$  se mueve?

Rhonda y Donna mencionaron que cuando  $D$  se coloca *directamente sobre* el punto  $A$  (es decir, cuando  $D$  está en el eje  $Y$ ), se obtiene un triángulo rectángulo isósceles y su área es máxima.

Visualmente, notaron que para cualquier otra posición de  $D$  el triángulo tenía un área menor, pues la altura de la gráfica del lugar geométrico es menor. Ana señaló que otra condición para que el área sea máxima es que si la posición del punto se encuentra directamente sobre el punto medio del triángulo rectángulo. Es decir, se propuso una conjetura general de la construcción para casos en los que el centro de la circunferencia no está en el origen.

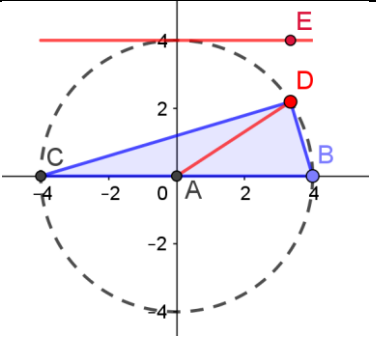
**Tabla 4.6. Estrategia ADR en la optimización del área de un triángulo rectángulo.**

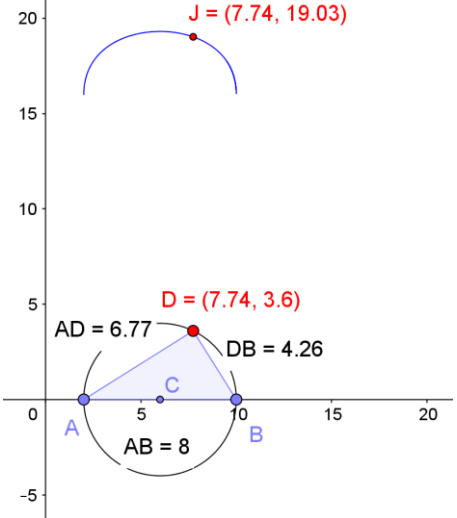
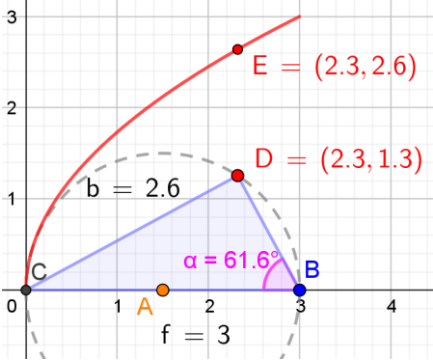
Construcción dinámica	Aproximación
	<p><b>Recursos clave:</b> Triángulo inscrito en un semicírculo, área de un triángulo, lugar geométrico, movimiento controlado, comando de abscisa de Geogebra.</p> <p><b>Fase de representación:</b> Para obtener una configuración dinámica, se traza una circunferencia de radio <math>AB</math> (con centro en el origen) y un triángulo con base igual al diámetro <math>CB</math> cuyo tercer vértice móvil <math>D</math> se mueve sobre la circunferencia.</p> <p><b>Fase de exploración:</b> Definir el punto dinámico <math>E</math> cuya abscisa es la misma que la del punto <math>D</math> y su ordenada es el área del triángulo <math>BDC</math>. El lugar geométrico que describe <math>E</math> cuando <math>D</math> se mueve es una cónica. En este caso, se ha decidido explorar el comportamiento del área del triángulo.</p> <p><b>Solución empírica:</b> Cuando <math>D</math> se coloque sobre el Eje <math>Y</math> se alcanza el punto máximo sobre la curva.</p>

4.2.3. Extensión del problema: Otras relaciones en la configuración dinámica

Posteriormente, se les solicitó a los estudiantes trabajar en parejas, o individualmente, en proponer y estudiar relaciones entre diferentes atributos de la configuración dinámica y analizar si producen gráficas en la que existen máximos (o mínimos). En la Tabla 4.7 se presentan las exploraciones relacionadas con los lugares geométricos construidos por los estudiantes, basados en la configuración dinámica mostrada en la Tabla 4.6.

**Tabla 4.7. Lugares geométricos explorados por los estudiantes**

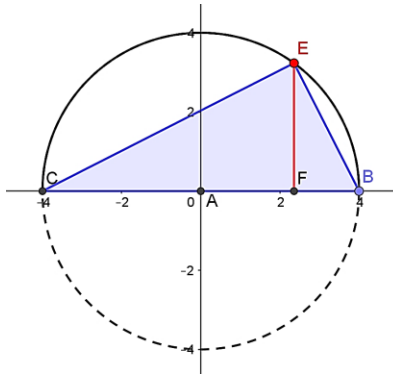
Construcción	Descripción
 <p style="text-align: center;">Job, Donna, Luis, David, Israel</p>	<p>Se propuso analizar la relación entre la abscisa de <math>D</math> y la altura del triángulo. Se trazó el segmento <math>\overline{AD}</math> y se generó el punto <math>E(x(D), AD)</math>. ¿Cómo es el lugar geométrico que describe <math>E</math>? Los estudiantes discutieron acerca de si la curva obtenida era correcta.</p>

 <p>Ana, Ángela, Mary, Aurea</p>	<p>Se define la variable <math>p =  AD  +  DB  +  AB </math>, y el punto dinámico relacional <math>J = (x(D), p)</math>, obteniendo una semi-elipse que describe la relación entre la abscisa del punto <math>D</math> y el perímetro del triángulo. Las estudiantes establecieron que el perímetro tiene un punto máximo cuando el punto que esta sobre la circunferencia (<math>D</math>) esta <i>directamente arriba</i> del punto medio del segmento <math>AB</math>, o bien, cuando <math>ABC</math> es un triángulo isósceles.</p>
 <p>Adrián, Lisa, Mario, Manuel</p>	<p>Para analizar la relación entre la abscisa del punto <math>D</math> y uno de los catetos del triángulo, se define el punto dinámico relacional <math>E</math> tiene por coordenadas <math>(x(D), b)</math>, donde <math>b</math> es la longitud del lado <math>\overline{CD}</math>. El lugar geométrico que describe <math>E</math> a medida que <math>D</math> se mueve permite observar que <math>D</math> puede aproximarse a <math>B</math> tanto como se desee, incrementando arbitrariamente <math> CD </math>. ¿Sigue considerándose <math>ABC</math> como triángulo cuando <math>D</math> coincide con <math>B</math>?</p>

### Comentarios sobre las exploraciones de los estudiantes

El lugar geométrico que representa la relación entre la abscisa del punto  $D$  y la altura del triángulo fue motivo de discusión por parte de los estudiantes, puesto que no *parecía* ser correcto. Se planteó ante a todo el grupo ofrecer una explicación del por qué es incorrecto. Así, Donna definió la variable  $m = |AD| \cdot |BC|$  y observó que al mover  $D$ , el número no coincidía con la medida del área del triángulo. Por otra parte, Aurea comentó que la altura del triángulo debe ser variable pues el área del triángulo lo es, y la base  $\overline{BC}$  es fija.

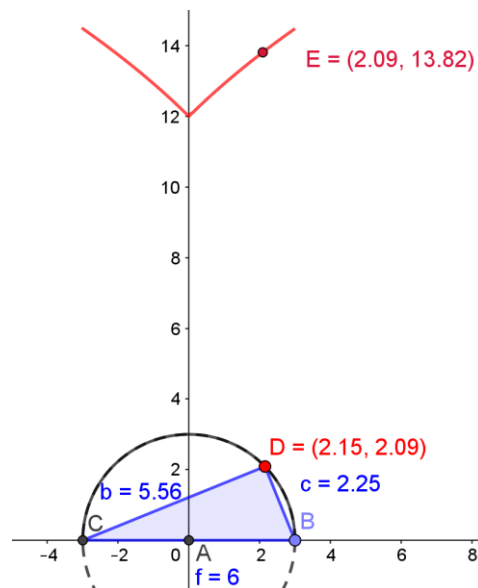
Rhonda, ofreció la construcción correspondiente a la altura del triángulo, al trazar un segmento perpendicular al eje X que pase por  $D$ . Al definir el punto dinámico  $E = (x(D), |DF|)$  y el lugar geométrico generado por este al mover  $D$ , se obtiene una curva que se superpone a la circunferencia trazada (una semicircunferencia).



**Figura 4.19. Lugar geométrico de la altura del triángulo.**

Rhonda notó que la altura del triángulo es justamente la abscisa del punto  $D$ , lo que explica por qué  $E = D$ , y por lo tanto su movimiento es el mismo (Figura 4.19). Así,  $E$  alcanza un máximo cuando  $D$  está en la misma posición para la cual el área del triángulo es máxima. A partir de esta idea puede construirse un argumento geométrico acerca de la solución al problema del área: Dado que la base del triángulo es fija, la variación del área depende solamente de la altura, por lo que el problema de encontrar el área máxima se traduce en encontrar la altura máxima; ahora bien, puesto que el segmento  $\overline{EF}$  es una semi-cuerda su longitud máxima posible es cuando es el radio de la circunferencia, lo cual ocurre cuando  $x(D) = 0$ .

Ahora bien, al trabajar sobre el lugar geométrico del perímetro se conjeturó que, de todos los triángulos rectángulos con la misma hipotenusa, el isósceles posee el mayor área y perímetro de todos.



**Figura 4.20. Relación entre la ordenada del punto  $D$  y el perímetro del triángulo.**

Como una variante del lugar geométrico planteado, Ángela y Mary propusieron definir el punto dinámico relacional como  $E = (y(D), p)$ , donde  $y(D)$  es la ordenada del punto  $D$  obteniendo la gráfica mostrada en la Figura 4.20.

Lo interesante de este lugar geométrico es la interpretación de lo que ocurre al mover  $D$ . Cuando se coloca  $D$  justo *por encima* o *por debajo* de  $A$ , el punto  $E$  es máximo. Cuando  $D$  coincide con  $B$  o con  $C$ , se obtiene el punto más bajo de  $E$ . Comprender que el valor numérico de la abscisa de  $E$  es igual al de la ordenada de  $D$  es un reto considerable para los estudiantes, sin embargo, de este modo se comentó a los estudiantes que de la misma manera en la que se han discutido puntos máximos de fenómenos de variación, también existen puntos mínimos. Es decir, un problema de optimización consiste en determinar las condiciones para las cuales el atributo de un objeto alcanza su valor mínimo o máximo.

En relación con el lugar geométrico de la relación entre la abscisa del punto  $D$  y uno de los catetos del triángulo, cabe destacar que Adrián presentó una exploración algebraica-trigonométrica. Adrián identificó la relación  $\sin \alpha = |AB|/|BC|$  y generó otro punto dinámico relacional  $F$  que tiene por coordenadas  $(x(D), e)$ , en donde  $e = f \cdot \sin \alpha$  y  $f$  es la hipotenusa del triángulo. El estudiante comprueba que su razonamiento es correcto ya que, al definir ese punto,  $E$  y  $F$  siempre están superpuestos al mover el punto  $D$ , e incluso cuando el diámetro de la circunferencia inicial incrementa. La producción de este estudiante exhibe la manera en que los objetos que se observan en el SGD constituyen una plataforma que favorece la abstracción de las variables. Es decir, aunque solo puedan percibirse instancias particulares (por ejemplo, en la Figura 4.31,  $|CB| = 3$ ), es posible concebir que las medidas estáticas que observan en la pantalla representan magnitudes que pueden variar libremente. Adrián no emplea el valor particular de  $\overline{AB}$  para establecer la relación trigonométrica del cateto, aunque  $AB$  se mantenga constante cuando  $D$  se mueve, sino que introduce el *nombre* que el SGD asigna a la hipotenusa, pues es consciente de que todos los elementos de la construcción pueden variar. concebir que las medidas estáticas que observan en la pantalla representan magnitudes que pueden variar libremente. Es decir, no utiliza el valor particular de  $\overline{AB}$  para establecer la relación trigonométrica del cateto, aunque  $\overline{AB}$  se mantenga constante cuando  $D$  se mueve, sino que introduce el *nombre* que el SGD asigna a la hipotenusa, pues es consciente de que todos los elementos de la construcción pueden variar.



#### 4.2.4. Discusión de los resultados del segundo grupo de problemas

El lugar geométrico es un concepto fundamental en este momento, sin embargo, sin dejar de considerar aspectos geométricos relacionados con figuras como cuadrados, triángulos. En este sentido, se retomaron configuraciones dinámicas que los estudiantes trabajaron en los problemas de introducción a GeoGebra y se reconstruyeron empleando los ejes coordenados con el fin de llevar a cabo discusiones analíticas acerca del área, perímetro y longitudes de los lados de figuras geométricas.

En estos problemas, el arrastre y la medición de atributos se emplean para observar la variación de distintas magnitudes. El cambio observable en las medidas de áreas o perímetros promueven la comprensión de funciones como una forma de relacionar la variación de dos atributos asociados a una figura. Estas actividades se realizaron al crear puntos dinámicos cuyo movimiento depende del arrastre con movimiento ordenado de un punto clave en la configuración dinámica de modo que permite a los estudiantes analizar una infinidad de casos particulares. En este sentido, comienzan a sentarse las bases de la estrategia ADR, pues los estudiantes emplean el movimiento ordenado de puntos para observar el comportamiento de un punto dinámico que se mueve sobre un lugar geométrico con el fin de obtener conjeturas.

Adicionalmente, se emplean recursos visuales de GeoGebra para validar procedimientos algebraicos: los estudiantes robustecen lugares geométricos al plantear igualdades algebraicas las cuales son graficadas por GeoGebra de modo que debe coincidir con el lugar geométrico en cuestión.

**Tabla 4.8. Contenidos y estrategias principales en el segundo grupo de problemas.**

Contenidos matemáticos	Estrategias
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Función</li> <li>• Sistema cartesiano</li> <li>• Área y perímetro de figuras</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Arrastre con movimiento ordenado</li> <li>• Visualización de lugares geométricos</li> <li>• Generación de puntos dinámicos</li> </ul>

#### 4.3. Tercer grupo de problemas: Tareas de Optimización

En esta última etapa, los estudiantes utilizaron de manera activa las herramientas de GeoGebra para la resolución de problemas bien definidos y se explicitaron las fases de la estrategia ADR, apuntando a la concepción de un modo sistemático de actuar. Parte importante de la estrategia consiste en la decisión de los estudiantes de seleccionar las variables adecuadas para ser estudiadas.

#### 4.3.1. Problema 6: Rectángulos isoperimétricos

De todos los rectángulos posibles de perímetro dado, ¿cuáles son las medidas de aquél de mayor área?

##### ***Exploraciones relacionadas con la comprensión del problema***

Para resolver este problema, los estudiantes debían ser conscientes de la forma de dar respuesta al problema, es decir, debían describir las condiciones de dicho rectángulo para las cuales su área es máxima. De aquí surgen dos cuestionamientos, ¿cómo construir un rectángulo? Y, una vez construido el rectángulo, ¿cómo puede imponerse la condición del perímetro constante?

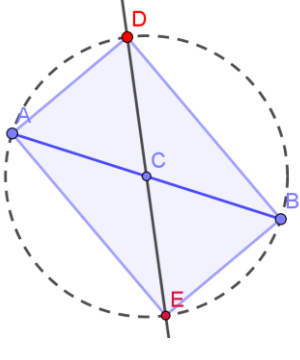
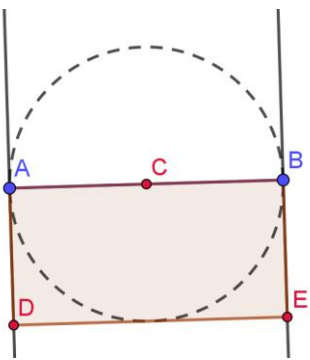
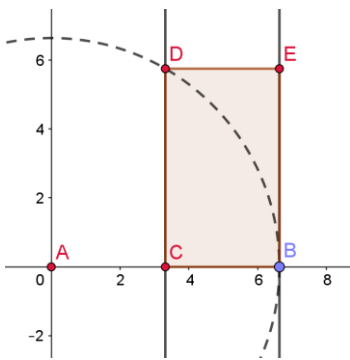
Israel y Luis construyeron varios casos de rectángulos particulares en los cuales todos poseían el mismo perímetro (8 unidades), sin embargo, lo hicieron situando puntos libres sobre el plano con ayuda de la cuadrícula de GeoGebra. Por ello, se solicitó a los estudiantes construir rectángulos robustos, sin que necesariamente posean un perímetro fijo (ver Tabla 4.9).

A partir de estas tres construcciones se discutió con los estudiantes acerca de las distintas formas de variación de los rectángulos y de los elementos que se mantienen invariantes en cada construcción. Así, en el trabajo de Job, Donna y Manuel, la diagonal del rectángulo se mantiene constante cuando se mueve el punto  $D$ . El tamaño de la diagonal puede controlarse mediante el segmento  $\overline{AB}$ .

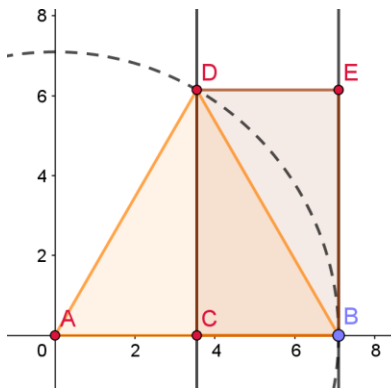
En la construcción de Rhonda, Ángela mencionó que su largo es siempre el doble de su ancho, independientemente de la longitud del segmento inicial. Es decir, puede modificarse el segmento  $\overline{AB}$  para cambiar la medida de los lados del rectángulo, pero la razón de sus lados siempre es 1:2.

En el caso de la construcción de Aurea, determinar una propiedad invariante fue una tarea mucho más compleja. Mario notó que al mover el punto  $B$ , el rectángulo se “*achica o agranda, pero no cambia su forma*”, lo que significa que la razón entre sus lados también debía ser constante. Con un análisis numérico, se calculó la razón  $\frac{|DC|}{|BC|} \approx 1.73$ , por lo que algunos estudiantes la asociaron con la raíz cúbica de 3.

**Tabla 4.9. Construcciones de rectángulos robustos.**

 <p><b>Job, Donna y Manuel</b></p>	 <p><b>Rhonda</b></p>	 <p><b>Aurea y David</b></p>
Descripción	Descripción	Descripción
<p>Se traza el segmento <math>\overline{AB}</math> y la circunferencia con centro en <math>C</math> (el punto medio de <math>\overline{AB}</math>) y que pasa por <math>A</math>. Se coloca un punto móvil <math>D</math> sobre la circunferencia y se traza la recta <math>DC</math>, que corta a la circunferencia en <math>E</math>.</p>	<p>Trazó el segmento <math>\overline{AB}</math> y tomando como centro su punto medio, construyó la circunferencia que tiene por diámetro dicho segmento. A continuación, trazó las tangentes a la circunferencia paralelas a su diámetro y, desde <math>A</math> y <math>B</math> trazó las perpendiculares a las tangentes.</p>	<p>Utilizando el origen como centro, se trazó una circunferencia que pasa por <math>B</math>, un punto en el Eje <math>X</math>. Se trazan dos perpendiculares, una desde <math>B</math> y la otra desde el punto medio <math>C</math> de <math>\overline{AB}</math>. La perpendicular en <math>C</math> corta a la circunferencia en <math>D</math> y desde este punto se traza una paralela al eje <math>X</math> que corta a la otra perpendicular en el punto <math>E</math>.</p>

Por otro lado, Ana mencionó que si se trazan los segmentos  $\overline{AD}$  y  $\overline{BD}$ , se forma el triángulo equilátero  $ABD$  (ver Figura 4.21).



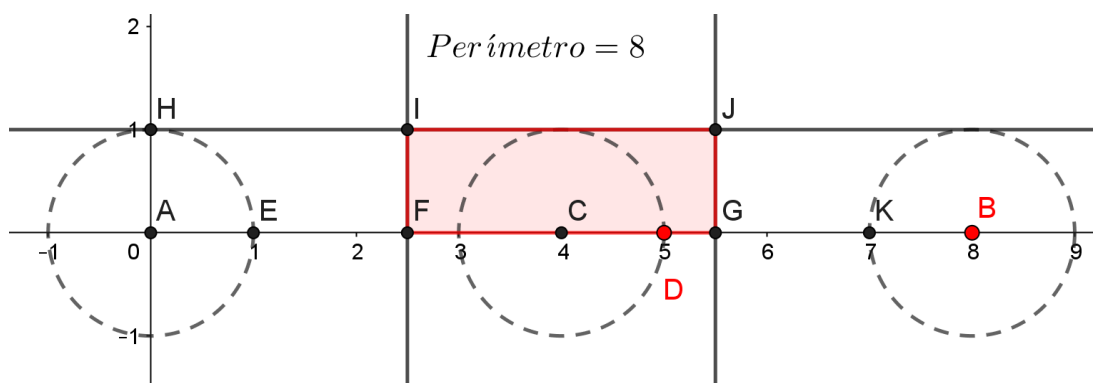
**Figura 4.21. Razón entre los lados del rectángulo de Aurea.**

Retomando el procedimiento que siguió en el Problema 4 para encontrar el área de un triángulo equilátero en función de su lado, estableció que  $|DC| = \frac{\sqrt{3}}{2} |AB|$ , sin embargo, tuvo dificultades para poder conectar esta idea con la razón de los lados del rectángulo. El profesor del curso

intervino mencionando que  $|BC| = \frac{1}{2}|AB|$  y, por ende,  $\frac{|DC|}{|BC|} = \sqrt{3}$ . Ahora bien, las condiciones invariantes de estos rectángulos fueron encontradas una vez hecha la construcción, para resolver mediante el ADR, los estudiantes deben ser capaces de generar una configuración dinámica tomando en cuenta que satisfaga una condición deseada.

### ***Construcción de una configuración dinámica: Fase de representación del ADR***

Para brindar una idea de cómo abordar la tarea de construir un rectángulo de perímetro fijo, se presentó a los estudiantes la analogía de tomar una tira metálica de 8 cm de largo y doblarla para formar un rectángulo ¿Cómo el doblar físico de formar un rectángulo con una tira metálica se traslada a una serie de trazos en el SGD? Con esta idea en mente, Ángela y Mary obtuvieron la construcción presentada en la Figura 4.21.



**Figura 4.21. Construcción de un rectángulo de perímetro fijo por Ángela y Mary.**

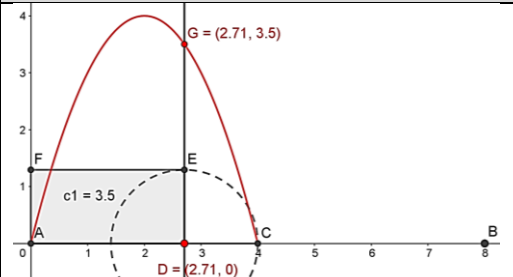
Se traza el segmento  $\overline{AB}$ , cuya longitud representa el perímetro del rectángulo.  $C$  es el punto medio del segmento inicial y  $D$  es un punto móvil sobre ese segmento. Se traza la circunferencia con centro en  $C$  que pasa por  $D$  y, con la herramienta de compás, se trazan circunferencias congruentes en  $A$  y  $B$  de radio  $|CD|$  las cuales cortan a  $\overline{AB}$  en los puntos  $E$  y  $K$ , respectivamente. Se encuentran los puntos medios de  $\overline{EC}$  y  $\overline{CK}$  ( $F$  y  $G$ , respectivamente) y desde ellos se trazan perpendiculares al eje  $X$ . La intersección de la circunferencia  $AE$  con el eje  $Y$  es el punto  $H$ , y desde él se traza la paralela al eje  $X$ , que corta a las dos perpendiculares trazadas en los puntos  $I$  y  $J$ . Así, el perímetro del rectángulo  $FGJI$  siempre es igual a la longitud del segmento  $\overline{AB}$ . La creación de círculos y el trazo de perpendiculares representan la acción de *doblar* la tira hacia arriba, y el procedimiento en general sigue la idea de conservar la longitud. Los estudiantes se mostraron sorprendidos ante la complejidad de la construcción y

la aparente imposibilidad de ofrecer una justificación de que la construcción mantiene un perímetro fijo.

El investigador ofreció un argumento geométrico que consiste en lo siguiente: Al ser  $C$  punto medio, y dado que  $|AE| = |BK|$ , se sigue que  $|EC| = |CK|$ . Ahora bien, puesto que  $|EF| = |FC|$  y  $|CG| = |GK|$  se sigue que  $|EF| = |FC| = |CG| = |GK| = b$ . Esto significa que  $|FG| = 2b$  y que  $|EK| = 4b$ ; es decir,  $|EK| = |IJ| + |FG|$ . Además,  $|IF| + |JG| = |AE| + |KB|$  por lo que los cuatro lados del rectángulo caben exactamente sobre el segmento  $\overline{AB}$ .

Como una forma de simplificar el procedimiento de Mary y Ángela, el profesor del curso propuso una nueva manera de generar un rectángulo de perímetro fijo, que se resume en Tabla 4.10.

**Tabla 4.10. Configuración dinámica del Problema 6.**

Construcción dinámica	Aproximación
	<p>Se trazó el segmento <math>\overline{AB}</math> y se ubicó el punto medio <math>C</math>. Sobre <math>\overline{AC}</math>, se coloca un punto móvil <math>D</math> y se construye una circunferencia con centro en él y que pase por <math>C</math>. Se levanta una perpendicular al eje <math>X</math> desde <math>D</math>, que corta a la circunferencia en <math>E</math>. Desde <math>E</math>, se traza una paralela al eje <math>X</math> que corta al eje <math>Y</math> en <math>F</math>. El rectángulo <math>ADEF</math> tiene entonces perímetro igual a <math> AB </math>.</p>

Cabe mencionar que se presentaron ligeras diferencias en las construcciones dinámicas de los estudiantes (por ejemplo, utilizar dos círculos en vez de la paralela). Una variante adicional que se mencionó a los estudiantes fue la de construir la circunferencia mediante la herramienta de GeoGebra de *centro-radio*: se define la variable  $r = |AC| - |AD|$  y se construye la circunferencia con centro en  $D$  y radio  $r$ .

Al mover el punto  $D$ , se observó que el rectángulo mantiene el mismo perímetro, pero su área varía dependiendo de la posición de  $D$ . Una restricción importante que Aurea destacó fue el hecho de que  $D$  no debe colocarse a la izquierda de  $C$ , pues el rectángulo no se formará si su largo posee una medida mayor a la mitad del perímetro.

### ***Fase de exploración y solución empírica del ADR***

Ahora bien, ¿cómo encontrar las medidas del rectángulo de área máxima? Para ello, los estudiantes acordaron que debía construirse un punto dinámico que relacionara el área del rectángulo con la posición del punto  $D$ . Lisa propuso que la ordenada del punto debe ser el área

del rectángulo mientras que su abscisa sería la longitud de alguno de los lados del rectángulo. Sin embargo, Lisa preguntó ¿afectará en el resultado del problema elegir uno u otro de los lados del rectángulo? Para ello, la mitad del grupo seleccionó  $|AD|$  como la variable independiente mientras que la otra mitad utilizó la medida  $|ED|$ . En la Tabla 4.10 se observa el lugar geométrico del punto dinámico  $G$ , el cuál es el mismo independientemente de si la abscisa de  $G$  está dada por la medida de  $|AD|$  o  $|ED|$ . Posteriormente, mediante una exploración dinámica, los estudiantes concluyeron que al formarse un cuadrado el punto  $G$  se encuentra en su punto más alto sobre su lugar geométrico, de modo que los lados del rectángulo de área máxima miden 2 unidades cada uno.

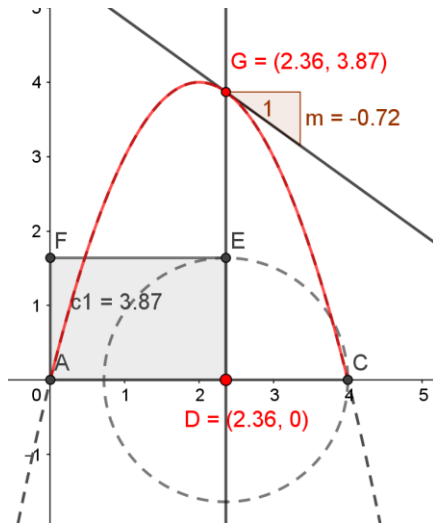
***Extensión: Robustecimiento del lugar geométrico***

¿Qué tipo de curva es el lugar geométrico del punto dinámico obtenido en ese problema? Ana, Ángela y Mary consideraron la variable  $x$  como el lado  $|AD|$  del rectángulo. Así,  $|ED| = |DC|$  al ser radios del mismo círculo, y  $|DC| = 4 - |AD|$  ya que es lo que le sobra de 4 al restar  $|AD|$ ; así, se sigue que  $|ED| = 4 - x$ . Considerando que el área del rectángulo es  $|AD| \cdot |DE|$ , la curva que describe el lugar geométrico está dada por  $y = x(4 - x)$ , cuya comprobación se obtiene con ayuda del SGD al notar que esa curva y el lugar geométrico de  $G$  se superponen. Al respecto, Aurea añadió que si  $|ED| = x$ , el procedimiento algebraico conduce a la misma expresión del lugar geométrico, explicando por qué la elección de cualquiera de las variables genera la misma curva.

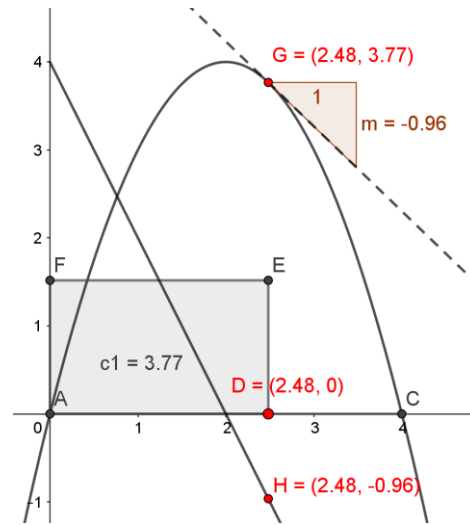
Sin embargo, se hizo notar a los estudiantes que si se mueve el punto  $B$  causando que el perímetro fijo sea distinto, la curva  $y = x(4 - x)$  ya no coincidirá con el lugar geométrico. Ante ello, Donna sugirió sustituir el 4 en la expresión algebraica por el término  $|AC|$ , obteniendo una expresión general cuya curva siempre coincide con la del lugar geométrico del punto dinámico

Aprovechando que se tenía la curva robusta del lugar geométrico de  $G$ , se introdujo a los estudiantes a una exploración que relaciona el uso de la derivada con la solución de problemas de optimización. Se trazó una recta tangente a  $y = x(|AC| - x)$  desde el punto  $G$  y se encontró la pendiente de la recta tangente. Cuando  $D$  se aproxima al punto de optimización, la pendiente de la recta tangente se acerca a cero, claro está, que esto es una conjetura (Figura 4.22).

Los estudiantes presentaron dificultades en distinguir la derivada como la pendiente de una recta tangente y el proceso de derivación para la obtención de una función, por lo que se desarrolló una exploración adicional con ayuda del SGD. Se definió un nuevo punto dinámico,  $H$  cuya abscisa es la misma que  $G$  y su ordenada es el valor de la pendiente de la recta tangente al lugar geométrico en  $G$ . El lugar geométrico que describe  $H$  al mover  $D$  es aparentemente una línea recta que corta al eje  $X$  en el punto en el que se alcanza el área máxima (Figura 4.23).



**Figura 4.22. Exploración gráfica del criterio de la primera derivada.**



**Figura 4.23. La derivada como un lugar geométrico.**

Posteriormente, los estudiantes derivaron la función  $f(x) = x(|AC| - x)$ , resultando en  $f'(x) = |AC| - 2x$  y al ser introducida en la barra de entrada como  $y = AC - 2x$ , la curva obtenida coincide con el lugar geométrico de  $H$ . De esta manera, se construyó la curva de  $f'(x)$  como un lugar geométrico generada por el punto dinámico. Así, se planteó a los estudiantes un argumento gráfico a partir del cual se obtiene un método analítico para el cual se encuentra el valor de  $x$  que optimiza la función  $f$ . Dado que  $f'(x) = |AC| - 2x$ , entonces la medida del largo del rectángulo para la cual el área es máxima está dada por  $x = \frac{|AC|}{2}$ . Con ayuda de esta configuración dinámica, también es posible verificar que si la abscisa de  $G$  es menor que  $\frac{|AC|}{2}$ , la pendiente de la recta tangente es positiva y cuando la abscisa es mayor que  $\frac{|AC|}{2}$ , la pendiente de la recta tangente es negativa. De esta manera, el investigador presentó a los estudiantes una manera de utilizar los valores de  $f'(x)$  para obtener conclusiones acerca del comportamiento de la función, es decir, a partir del análisis de los valores de la derivada se puede establecer que

en el intervalo  $(-\infty, \frac{|AC|}{2})$  la función es creciente, mientras que en el intervalo  $(\frac{|AC|}{2}, \infty)$  es decreciente.

#### 4.3.2. Extensión del problema: Familia de rectángulos de igual área

¿Qué otro tipo de relaciones pueden plantearse a partir de la configuración dinámica de este problema? Dos estudiantes, Job y Donna, propusieron estudiar el comportamiento de la medida de las diagonales de la familia de rectángulos isoperimétricos. Dado que las diagonales de los rectángulos son congruentes, bastó con emplear la medida de una de ellas. Se invitó al resto del grupo a trabajar con este problema, el cual se resume en la Tabla 4.11.

Aunque no se le solicitó a los estudiantes robustecer el lugar geométrico del punto dinámico  $G$ , Adrián y Mario ofrecieron el siguiente razonamiento: Si se denota  $|AD| = x$  y considerando que  $|AE|^2 = |AD|^2 + |DE|^2$  y si  $|AD| = x$ , entonces la longitud de la diagonal está dada por la expresión  $d = (x^2 + |DE|^2)^{1/2}$ . Al exponer esta idea ante el grupo, Manuel y David mencionaron que la expresión de la diagonal debería estar completamente en términos de  $x$ , por lo que sugirieron la relación  $y = (x^2 + (|AC| - x)^2)^{1/2}$  la cual fue comprobada con ayuda de la graficación de curvas de GeoGebra.

**Tabla 4.11. Obtención del rectángulo isoperimétrico de diagonal mínima**

Configuración dinámica	Estrategia ADR
<p>¿Existe una diagonal máxima o mínima para la familia de rectángulos isoperimétricos?</p>	<p><b>Fase de representación:</b> Se construye el segmento <math>\overline{AC}</math> con <math>A</math> en el origen. Se coloca un punto <math>D</math> en <math>\overline{AC}</math> y se traza el punto <math>E = (x(D),  AC  -  AD )</math> para obtener el rectángulo <math>ADEF</math> de perímetro <math>2 AC </math>.</p> <p><b>Fase de exploración:</b> Se traza la diagonal <math> AE </math> y se define el punto dinámico <math>G = ( AE , c1)</math>, donde <math>c1</math> es el área de <math>ADEF</math> y se encuentra el lugar geométrico de <math>G</math> con respecto a <math>D</math>. En este caso, la curva posee un mínimo absoluto.</p> <p><b>Fase de solución empírica:</b> Cuando <math>D</math> es punto medio de <math> AC </math> se alcanza la diagonal de longitud mínima, o bien, cuando <math>ADEF</math> es un cuadrado.</p>

Continuando con el proceso de extensión de problemas, el investigador propuso el siguiente enunciado:

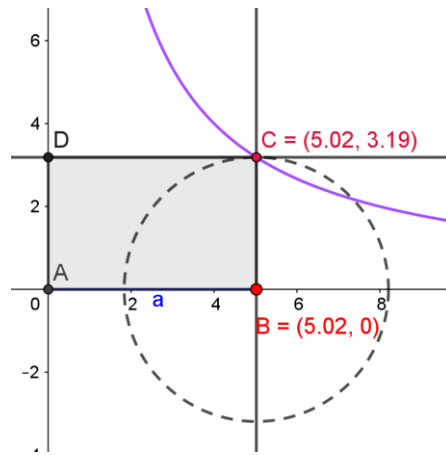
Encontrar las medidas de un rectángulo de área fija, tal que su perímetro es máximo.



Es decir, se invirtieron las condiciones del Problema 6. Los estudiantes observaron la similitud entre la configuración dinámica del problema original con respecto a esta variante, y fueron capaces de construir su propia configuración dinámica al trabajar en grupos.

### *Fase de representación de ADR*

Se colocó sobre el eje X punto  $B$  móvil, el cuál permitirá el control de la longitud del largo del rectángulo, que tiene medida  $a$  y se definió un parámetro  $s$  que será la medida del área fija (ver Figura 4.24).



**Figura 4.24. Lugar geométrico de la altura del rectángulo de área fija.**

Aurea mencionó a sus compañeros que si el largo del rectángulo mide  $a$  unidades, el ancho tiene que medir  $s/a$  unidades. Así, con la herramienta de círculo-radio de GeoGebra, se construyó una circunferencia con centro en  $B$  y radio  $\frac{s}{a}$ . Posteriormente se traza una perpendicular al eje X desde  $B$  y su con la circunferencia es el punto  $C$ , el tercer vértice del rectángulo. Finalmente, se traza una recta paralela al eje X desde  $C$ , que corta al eje Y en el punto  $D$ .

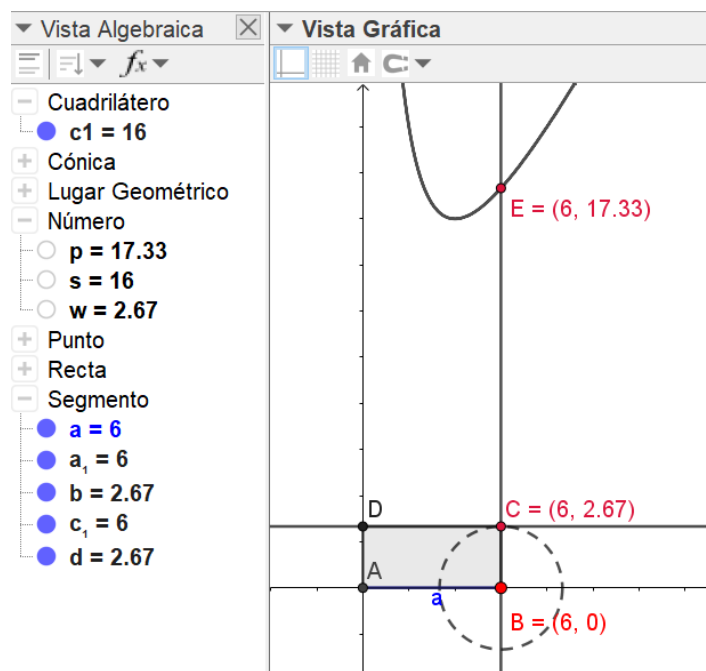
Al mover el punto  $B$  y observar la variación del rectángulo  $ABCD$ , se preguntó a los estudiantes si existía algún límite para la medida del lado  $\overline{AB}$ , de manera similar a como se discutió en el Problema 6.

Ángela y Mary mencionaron que el largo (o ancho) del rectángulo puede ser tan grande como se desee, sin que exista una restricción para la generación del rectángulo, pues por muy grande que sea el valor de  $a$ , siempre se puede calcular la medida del ancho. Cuando la longitud del largo del rectángulo es cercana a cero, la longitud del ancho es sumamente grande y viceversa. Al respecto, Israel añadió que la relación entre el largo y el ancho es inversamente proporcional,

pues su producto es constante. Al denotar  $x = |AB|$ , la altura del rectángulo es  $y = \frac{s}{x}$ . Este tipo de análisis es posible gracias a las *affordances* del SGD, que permite a los estudiantes realizar exploraciones de casos extremos con relativa facilidad.

### ***Fase de exploración del ADR y solución empírica***

Para generar el punto dinámico relacional del perímetro del rectángulo, los estudiantes definieron la variable  $p$  como la suma de los lados del rectángulo, por lo que las coordenadas del punto fueron  $(a, p)$ , tal como se ilustra en la Figura 4.25. De ahí, se concluyó que el perímetro es mínimo cuando se forma un cuadrado.



**Figura 4.25. Comportamiento del perímetro de un rectángulo de área fija**

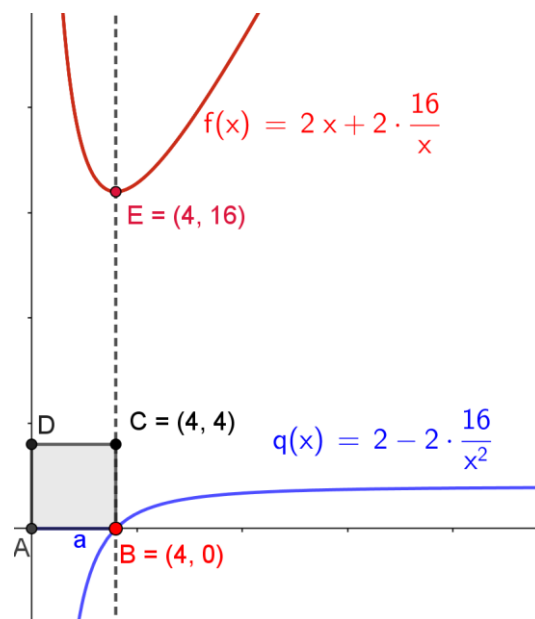
Ahora bien, cada grupo de estudiantes que trabajó en conjunto construyó configuraciones dinámicas con valores del área distintos. Mientras que, por ejemplo, para un grupo de estudiante los cuatro lados del rectángulo solución medían 4 unidades, para otro grupo medía 3 unidades. Con la finalidad de generar un consenso grupal, Donna concluyó que los cuatro lados del rectángulo de perímetro máximo miden la raíz cuadrada del área dada, es decir,  $\sqrt{s}$ .

### ***Exploración sobre la derivada***

Nuevamente, algunos de los estudiantes (Adrián, Aurea, Mario, Job y Ana) emprendieron una exploración algebraica para generar una función que esté asociada a la curva. Puesto que el

perímetro de la curva está dado por  $p = 2a + 2w$ , donde  $w$  es el ancho del rectángulo, se sigue que  $p = 2a + \frac{2s}{a}$  por lo que la relación  $y = 2x + \frac{2s}{x}$  fue introducida en GeoGebra para comprobar que la expresión obtenida es correcta al sobreponerse sobre el lugar geométrico del punto dinámico  $E$ . Cabe destacar que al cambiar el valor de  $s$ , tanto la función  $f(x) = 2x + \frac{2s}{x}$  como el lugar geométrico de  $E$  siguen coincidiendo, de modo que el dinamismo fue parte fundamental del razonamiento algebraico de los estudiantes al trabajar dentro del SGD.

La derivada  $f'(x) = 2 - \frac{2s}{x^2}$  obtenida por Adrián y Ana también fue introducida al SGD (Figura 4.26).



**Figura 4.26. Representación gráfica del criterio de la primera derivada.**

Adrián notó que la posición de  $B$  para la cuál se alcanza el mínimo es precisamente el punto donde la gráfica de la función derivada corta al eje X. Al modificar los valores de  $s$ , esta condición se mantiene invariante, de modo que preguntó, ¿esto siempre se cumple? Para responder a su pregunta, retomó la configuración dinámica generada en el problema de los rectángulos isoperimétricos (Figura 4.23) y observó que la posición del punto  $D$  para la cual el rectángulo  $ADEF$  posee un área máxima también coincide con la intersección de la gráfica de la función derivada con el eje X. Al presentar esta discusión ante el resto del grupo, Aurea mencionó que encontrar el punto en el que la función derivada corta al eje X es el equivalente gráfico de encontrar el valor de  $x$  para el cuál  $f'(x) = 0$ .

### **Comentarios sobre el trabajo con el Problema 6**

Las *affordances* del SGD permiten obtener representaciones visuales del comportamiento de los atributos de las figuras, permitiendo identificar puntos de altura máxima o mínima en la gráfica de una función. Aunque no se consideró parte esencial de la implementación de las actividades trabajar con el criterio de la primera derivada para resolver problemas de optimización de manera algebraica, el uso de GeoGebra facilitó establecer una conexión entre dicho método y el manejo de lugares geométricos.

Estudiantes como Adrián, Aurea y Ana aprovecharon en gran medida los recursos visuales de GeoGebra para asociar objetos manipulables (como segmentos movibles) con el manejo de cantidades abstractas de forma algebraica. Por otra parte, el resto de los estudiantes que no poseen recursos algebraicos sólidos, se apoyaron en las *affordances* de la visualización y el movimiento para comprender los procedimientos algebraicos que sus compañeros proponían ante el grupo.

Para el cierre de la sesión, se concretó con los estudiantes una secuencia de procesos necesarios en la solución de problemas de optimización mediante el uso del SGD, el cual es el siguiente:

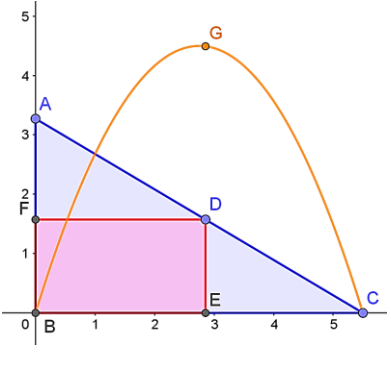
- Seleccionar las variables a estudiar
- Realizar una construcción dinámica que involucra la variación de algún elemento
- Construir un punto dinámico relacional y su lugar geométrico
- Obtener una solución empírica con ayuda de los recursos visuales del SGD.

Esto con el fin de brindar cierta estructura a las actividades llevadas a cabo, pues al extender un problema, puede perderse cierta claridad del momento en que se ha concluido con un problema y se ha iniciado otro.

#### 4.3.3. Problema 7: Rectángulo inscrito en un triángulo rectángulo

En la última sesión de la implementación de actividades se propuso a los estudiantes resolver el Problema 7 el cual fue resuelto correctamente por la mayoría de los estudiantes de manera similar por medio de la estrategia ADR. En la Tabla 4.12 se sintetiza el proceso de resolución del Problema 7, que consiste en encontrar el rectángulo de mayor área inscrito en un triángulo rectángulo.

**Tabla 4.12. Estrategia ADR en la solución del Problema 7.**

Construcción dinámica	Aproximación
	<p><b>Recursos clave:</b> Perpendicularidad, área de un triángulo, área de rectángulos, movimiento controlado, lugar geométrico</p> <p><b>Fase de representación:</b> Se traza el triángulo <math>ABC</math> cualquiera, con catetos sobre los ejes. Se construye un punto <math>D</math> móvil sobre la hipotenusa y se trazan las perpendiculares hacia cada eje. El rectángulo <math>BEDF</math> cumple las condiciones iniciales.</p> <p><b>Fase de exploración:</b> El punto dinámico <math>G</math> relaciona la posición de <math>D</math> sobre la hipotenusa y el área del rectángulo correspondiente. El lugar geométrico de <math>G</math> cuando <math>D</math> se mueve es una parábola.</p> <p><b>Solución empírica:</b> Si <math>D</math> es el punto medio de la hipotenusa, <math>G</math> se ubica en el vértice de la parábola. Los lados del rectángulo <math>BEDF</math> miden la mitad de los catetos del triángulo <math>ABC</math> y por ende, el área del rectángulo máximo es un medio de la del triángulo.</p>

### Sobre las producciones de los estudiantes

A pesar de que no fue parte del problema ofrecer una solución analítica, Adrián, Lisa y Mario emprendieron la tarea de obtener la expresión algebraica asociada a la función del área del rectángulo. Entre sus exploraciones, determinaron que al mover el punto  $D$ , los triángulos formados  $AFD$  y  $DEC$  son semejantes con el triángulo inicial  $ABC$ . En la Figura 4.27 se incluyen algunas de las cantidades exploradas por ambos:  $s$  es la razón  $m:n$  entre los catetos del triángulo inicial y, al ser  $DEC$  semejante a  $ABC$ , también es la razón entre los catetos de  $DEC$ .

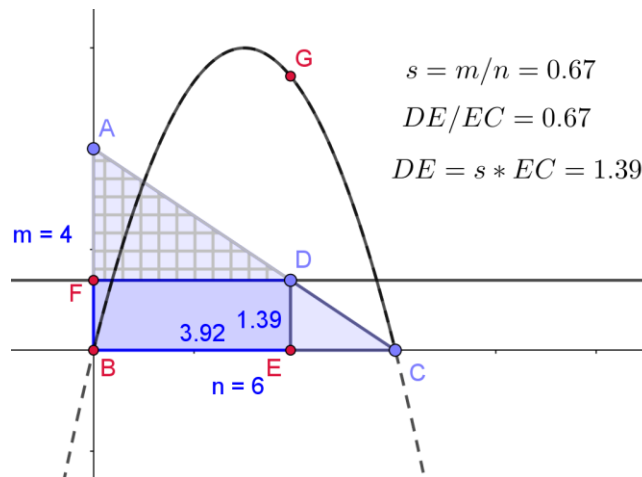
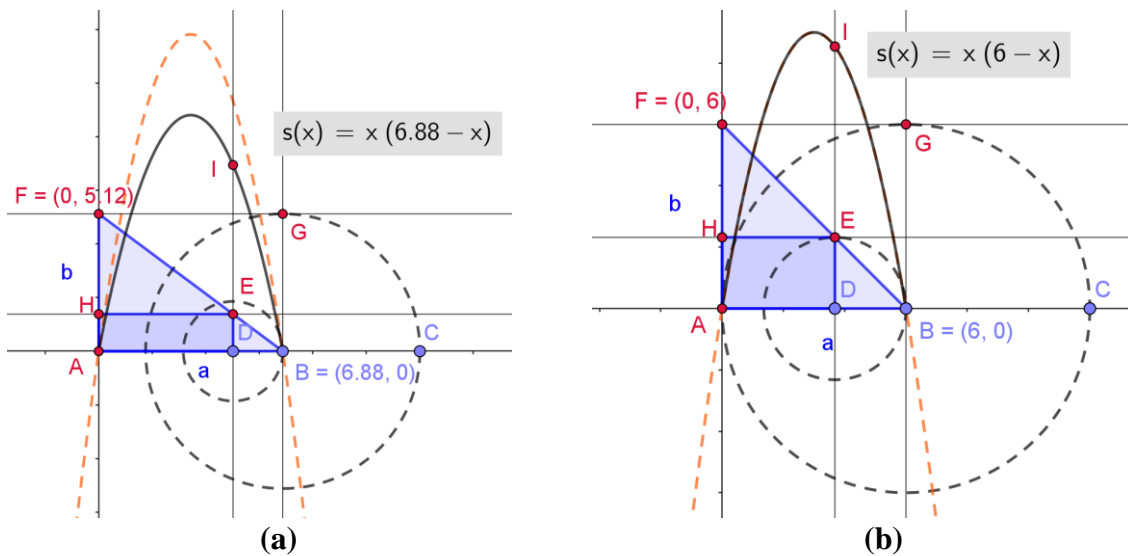


Figura 4.27. Exploración de semejanza por Adrián y Mario.

A partir de las observaciones numéricas, concluyeron que  $|DE| = s \cdot |CE|$  cuando se mueve el punto  $D$ , o bien, cuando se modifican las medidas del triángulo. Si  $|BE|$  se denota por  $x$ , entonces  $|EC| = n - x$  por lo que  $|DE| = s(n - x)$ . Utilizando la fórmula del área del

rectángulo, se obtiene que  $y = x(s(n - x))$  es la curva que corresponde al lugar geométrico; en la Figura 4.41, se observa esta curva punteada superpuesta con el lugar geométrico de  $G$ . Finalmente, estos estudiantes derivaron la función  $f(x) = nsx - sx^2$  para obtener  $f'(x) = ns - 2sx$ , y con el criterio de la primera derivada concluyen que  $x = \frac{n}{2} = |BE|$  y  $|DE| = \frac{m}{2}$ . En la Figura 4.28, se muestra el trabajo realizado por Aurea, David, Israel y Manuel. Se traza el segmento  $\overline{AB}$  y un punto  $C$  en el eje X. Desde  $B$  se traza una perpendicular al eje X que corta a la circunferencia trazada en  $G$ . Desde  $G$  se traza una paralela al eje X que corta a Y en el punto  $F$  para así obtener el triángulo rectángulo  $ABF$  cuyos catetos miden  $a$  y  $b$ . Para el rectángulo inscrito, se utilizó un punto móvil  $D$  sobre  $\overline{AB}$ .



**Figura 4.28.** ¿En qué condiciones la curva de  $s(x)$  coincide con el lugar geométrico de  $I$ ?

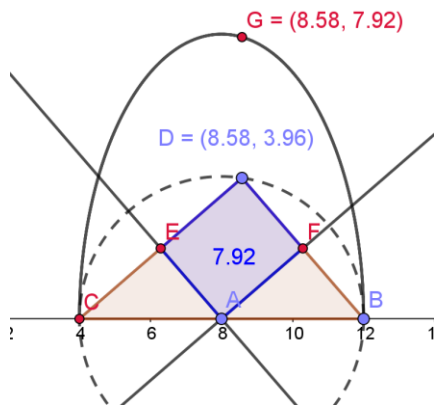
El punto dinámico  $I = (|AD|, c1)$ , donde  $c1$  es el valor del área del rectángulo  $ADEH$ , es el que se utiliza para obtener el lugar geométrico y concluir que el área máxima se alcanza cuando  $D$  es punto medio de  $\overline{AB}$  y  $H$  es punto medio de  $\overline{AF}$ . Al tratar de encontrar una expresión analítica, estos tres estudiantes retomaron la misma función que la obtenida en el Problema 6. Es decir, introdujeron la curva  $y = x(a - x)$  en el SGD y observaron que el lugar geométrico y la función no coinciden (Figura 4.28a). Al mover el punto  $B$  el lugar geométrico y la parábola  $y = x(a - x)$  también se modifican de modo que es posible encontrar condiciones para los que ambas gráficas coinciden. Los estudiantes explicaron que cuando  $a = b$ , las dos curvas se superponen (Figura 4.28b), es decir, la expresión  $y = x(a - x)$  no siempre corresponde al lugar

geométrico del área del rectángulo, pero sí lo hace cuando el triángulo es isósceles, de modo que generaron una justificación con respecto al caso particular:

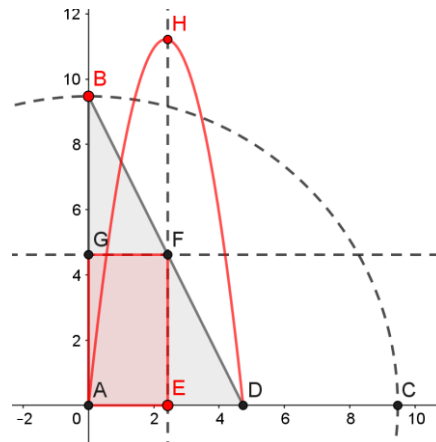
*Sabemos que para sacar el área de un rectángulo utilizamos base por altura, por lo tanto, en este caso usé la fórmula de  $S = x(a - x)$  tomando en cuenta que  $x$  es el segmento  $AD$  la cual tomaríamos como base [mientras que]  $a - x$  es el segmento  $DE$ . Para justificar esto se hizo una circunferencia de radio  $DB$  y vemos que la altura es igual al radio del círculo,  $DE$  y  $DB$  son iguales.*

Nótese que el argumento anterior solo funciona cuando el triángulo dado es isósceles. En la Figura 4.28a se comprueba de manera visual que el punto  $E$  no pertenece a la circunferencia con centro en  $D$  que pasa por  $B$ . Al preguntárseles por qué el modelo algebraico  $y = x(a - x)$  no corresponde con el lugar geométrico de  $I$  cuando  $a \neq b$ , concluyeron que el hecho de que  $E$  no esté en la circunferencia  $DB$  impide que pueda encontrarse de manera directa una expresión algebraica de  $|DE|$  en términos de  $|DB|$ , de la misma forma en la que se hizo en el análisis algebraico del lugar geométrico obtenido en el Problema 6.

Donna y Job presentaron conflictos en poder representar un modelo dinámico general, pues intentaron reproducir lo realizado en el Problema 5 (ver Figura 4.29).



**Figura 4.29.** El rectángulo  $AFDE$  siempre mide la mitad del triángulo  $CDB$ .



**Figura 4.30.** Construcción dinámica de un triángulo con catetos en razón 1:2.

Desde  $A$  se trazaron perpendiculares a los lados del triángulo, obteniendo así un rectángulo y definieron el punto dinámico  $G = (x(D), c1)$ . Las deficiencias de esta construcción yacen en el hecho que al variar el punto  $D$ , las medidas del triángulo no son fijas. Por otra parte, el área del rectángulo  $AFDE$  siempre es la mitad que el área del triángulo de modo que el lugar geométrico descrito por  $G$  solamente muestra el comportamiento de la mitad del área del

triángulo. Es decir, el investigador señaló a los estudiantes que parte importante de la configuración dinámica consiste en construir un triángulo que permanezca invariante ante la variación de las medidas del rectángulo inscrito.

Ana, Ángela y Mary realizaron una construcción que da lugar a triángulos rectángulos cuyos catetos están en razón 1:2 (Figura 4.30). Como parte de su construcción dinámica, se trazó una circunferencia de radio  $|AB|$  con centro en el origen, que corta al eje X en  $C$ . Se traza el punto medio de  $\overline{AC}$  y se construye el triángulo  $ABD$ . El punto  $E$  se construye sobre el lado  $\overline{AD}$  y desde el se levanta una perpendicular que corta a lado  $\overline{BD}$  en  $F$  y, desde ese punto, se traza una paralela al eje X que corta al eje Y en  $G$ . En la etapa de exploración, se definió el punto  $H(|AE|, c1)$ , donde  $c1$  es el área del rectángulo, y al trazar el lugar geométrico de  $H$  cuando  $E$  se mueve, la solución empírica se obtiene cuando  $E$  es el punto medio de  $\overline{AD}$ . Si bien, las estudiantes que llevaron a cabo esta construcción plantearon soluciones generales (los lados del rectángulo de área máxima miden la mitad que los catetos del triángulo) no fueron conscientes que las condiciones bajo las que se formuló la conjetura no fueron totalmente generales. Por ejemplo, las argumentaciones textuales de Ángela y Mary con respecto al problema fueron las siguientes:

*El área máxima se encontrará cuando la base y la altura del triángulo midan la mitad de los catetos en los que se encuentran. Por lo tanto, el área máxima del rectángulo mide la mitad del triángulo rectángulo:*

- Área del triángulo rectángulo:  $\frac{mn}{2}$
- Área del rectángulo:  $\frac{m}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{mn}{4}$

*Lo que [nos] llevó a pensar que es la respuesta correcta es que en ese punto que el rectángulo mide la mitad del triángulo es el único en el que se presentan esas medidas, así que si la base se alarga o se achica alcanzará otras medidas: los lados se pueden agrandar pero los otros dos se harán más cortos, y en el área máxima los lados tienen una congruencia entre sí tal que mida la mitad del triángulo.*

Finalmente, Luis construyó un triángulo rectángulo isósceles y concluyó que la respuesta se obtiene cuando se forma un cuadrado (Figura 4.31).



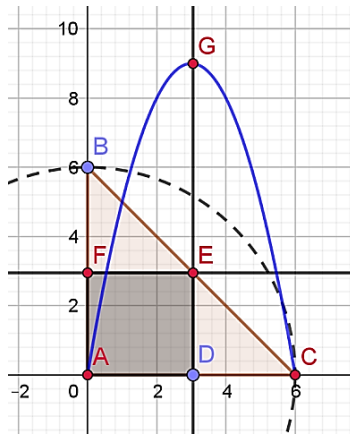


Figura 4.31. Solución particular cuando el triángulo es isósceles.

Uno de los aspectos interesantes de esta solución particular, es que permitió generar un razonamiento geométrico de la solución del área máxima, ya que Luis indicó que cuando el punto dinámico se encuentra en el punto más alto del lugar geométrico, se observa que los triángulos  $BFE$  y  $EDC$  son congruentes. Haciendo una analogía de movimiento, explicó que si el triángulo  $EDC$  se *rota* en torno a  $E$  de tal manera que  $EC$  coincida con  $BE$ , se obtiene un cuadrado  $FECB$  que es congruente con  $ADEF$ . Es decir, que el área máxima del rectángulo es la mitad que la del triángulo rectángulo.

#### 4.3.4. Discusión de los resultados del tercer grupo de problemas

Los estudiantes exhibieron procesos de generalización de soluciones como producto del análisis de múltiples casos particulares por medio del arrastre. En este último grupo de problemas, la generación de puntos dinámicos fue incorporado como la estrategia central a partir de la cual se llevaron a cabo los episodios de resolución de problemas. Los estudiantes debían interpretar, representar y resolver los problemas planteados en términos de acciones relacionadas con el punto dinámico: ¿Cómo se definen las coordenadas del punto de modo que se analicen las variables importantes del problema? Así, debían identificarse atributos geométricos dentro de la configuración dinámica que mantengan una relación de covariación ¿Cómo es su lugar geométrico? Es decir, ¿en dónde se observa que la gráfica de la relación alcanza alturas máximas o mínimas? ¿Cuáles son las condiciones del problema que deben satisfacerse, a partir de las coordenadas del punto dinámico? Para ello, debía identificarse para qué posición el punto móvil inicial de la configuración dinámica se consigue que el punto dinámico se encuentre en la posición más alta del lugar geométrico descrito.

Por otra parte, visualizar segmentos en la vista gráfica asociados con magnitudes numéricas enlistadas en la vista algebraica constituyó un recurso que permitió a los estudiantes emplear parámetros para definir funciones generales; es decir, observar la manera en que la variación de ciertas magnitudes intervienen (o no) en el cambio de otras favorece la comprensión de que una función con diferentes variables (o parámetros) como  $f(x) = x(a - x)$  representa una relación de variación entre la variable  $f$  y la variable  $x$ , cuando  $a$  se mantiene invariante. Por ejemplo, la exploración de los estudiantes mostrada en la Figura 4.28 muestra una manera en la que el SGD permite visualizar la forma en la que cambia la gráfica de una función a partir de variar uno de sus parámetros mediante el movimiento ordenado de puntos.

De manera general, se observó cómo los estudiantes pudieron apoyarse en la estrategia ADR para dar sentido a la solución de problemas que involucran identificar las condiciones de una configuración dinámica en las que se satisface alguna propiedad relacionada con un problema de variación (por ejemplo, el área máxima de un rectángulo). El arrastre de objetos, el movimiento y la visualización son elementos que favorecen la comprensión de los estudiantes hacia este tipo de problemas, incluso para aquellos que presentan deficiencias algebraicas y, al mismo tiempo, posibilitan la extensión de diferentes tipos de análisis formales de estudiantes que cuentan con conocimientos sólidos del álgebra.

## CAPÍTULO 5

---

### CONCLUSIONES

En este capítulo se sintetizan y organizan los resultados presentados en el anterior con miras a responder la pregunta de investigación. El trabajo con los estudiantes estuvo marcado por la consecución de objetivos que contribuyeran a la implementación del ADR. En un principio, se trabajó con problemas de construcción de figuras cuyo objetivo fue promover la argumentación, la validación de conjeturas y la discusión de resultados con apoyo en las *affordances* del SGD: los estudiantes comprobaban sus resultados con ayuda de la medición de segmentos y ángulos, o verificando que sus construcciones se mantuvieran coherentes ante el arrastre de los puntos involucrados.

Los objetos geométricos pasaron de ser figuras estáticas-abstractas a objetos dinámicos definidos por distintos elementos (una recta definida por dos puntos, la circunferencia por dos puntos, la mediatriz por un segmento o dos puntos, etc.) debido a que los comandos de GeoGebra requerían de esos elementos para su creación. Uno de los recursos más empleados en esta etapa fue la circunferencia, la cual pasó de ser vista como un trazo estático a un recurso geométrico empleado en la construcción de figuras para trasladar medidas. Como ejemplo, se observó que, en la construcción de un cuadrado a partir de su lado, los estudiantes emplearon el trazo de la circunferencia para trasladar sobre la recta perpendicular la medida del lado  $\overline{AB}$ . La búsqueda de distintas soluciones a los problemas planteados fue utilizada como una oportunidad de explorar las relaciones entre las propiedades geométricas de figuras por estudiantes como Ángela y Mary, quienes al explorar una construcción del cuadrado por medio del trazo de bisectrices observaron que las diagonales del cuadrado se cortan en ángulos rectos. Posteriormente, se introdujo el plano cartesiano como una forma de introducir el estudio cuantitativo de los objetos presentes en las figuras construidas a través de la exploración de las medidas de atributos como longitudes, áreas y posición de puntos clave (a través de sus coordenadas). El estudio de la variación del cuadrado tuvo por objetivo estudiar la medida de segmentos y valores de área con el fin de dar sentido a las gráficas como formas de representar relaciones variacionales. El uso del SGD probó ser de gran ayuda en la abstracción de variables por parte de los estudiantes, ya que estas eran representadas por objetos cuya variación podía ser percibida de manera concreta, tal como se observó en la argumentación de Ana para explicar

por qué la gráfica de la función lado-área de un cuadrado está asociada a la expresión  $y = x^2$ . La generación de puntos dinámicos fue un elemento esencial para la conciliar la noción de función y de lugar geométrico dentro de un sistema cartesiano, esto con el fin de darle sentido a las curvas que el SGD mostraba con la herramienta de lugar geométrico. Finalmente, los estudiantes fueron capaces de integrar recursos geométricos y visuales para la construcción de configuraciones dinámicas como representaciones de un problema y, a partir de los elementos ofrecidos por el SGD, obtener conjeturas y soluciones robustas de problemas de optimización. En la Tabla 5.1 se resumen los resultados de la implementación de las actividades.

**Tabla 5.1. Síntesis de los elementos relevantes de la implementación de los problemas.**

Idea gobernante	Aspectos relevantes	Recursos importantes
Implementación de modos de pensar en términos de Geogebra	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Redefinición de los objetos geométricos como elementos de un SGD</li> <li>• Exploración de las propiedades geométricas de los objetos a través de la búsqueda y comunicación de múltiples soluciones a los problemas</li> <li>• El empleo de la medición y observación de invariantes en los procesos de argumentación para sustentar conjeturas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Circunferencia</li> <li>• Mediatriz</li> <li>• Medición de atributos</li> <li>• Arrastre de objetos</li> <li>• Movimiento ordenado</li> </ul>
Los lugares geométricos como expresión de la variación	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Uso activo movimiento controlado para generación de conjeturas</li> <li>• Uso de la barra de entrada de GeoGebra</li> <li>• Estudio de la variación</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Movimiento ordenado</li> <li>• Sistema cartesiano</li> <li>• Lugar geométrico</li> <li>• Punto dinámico</li> </ul>
Solución de problemas de optimización mediante puntos dinámicos y lugar geométrico	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Conexiones entre representaciones</li> <li>• El álgebra auxiliada por los recursos de GeoGebra</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Función</li> <li>• Variación</li> <li>• Parametrización de lugares geométricos</li> <li>• Derivada</li> </ul>

### 5.1. Sobre la pregunta de investigación

¿Qué estrategias y formas de razonamiento exhiben estudiantes de bachillerato al resolver problemas que involucran fenómenos de variación en un ambiente de aprendizaje basado en la resolución de problemas y uso de un SGD?

En el trabajo de los estudiantes a lo largo de la implementación de las actividades, se distinguieron cuatro estrategias principales basadas en las *affordances* del SGD que fueron fundamentales para la apropiación de la estrategia ADR: el arrastre de objetos, la visualización, la medición y el movimiento ordenado. A medida que se trabajaron con los distintos grupos de problemas, los estudiantes desarrollaron las formas en las que se emplearon estas estrategias en la resolución de problemas, que se describen a continuación.

#### ► Arrastre de objetos

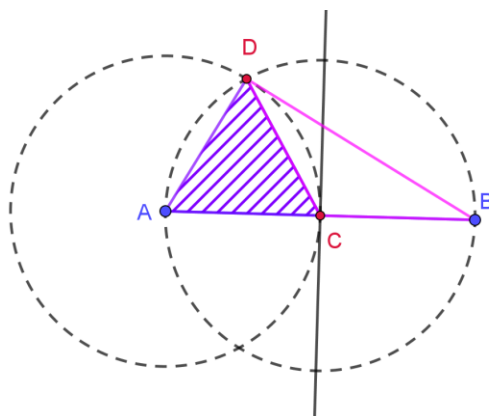
Los estudiantes emplearon el arrastre como una forma de verificar la *robustez* de las construcciones a partir de mover los puntos libres con el fin de garantizar que la figura construida mantenga sus condiciones. Por ejemplo, Aurea e Israel construyeron la circunferencia con centro en  $A$  que pasa por  $B$  y concluyeron que un punto  $C$  que se mueve sobre la mediatriz se puede colocar en la posición donde la circunferencia corta a la mediatriz para obtener un triángulo equilátero (Figura 4.6) no generaron una construcción robusta, pues el punto  $C$  puede moverse de tal forma que  $ABC$  no es equilátero. En este sentido, usar el comando de *intersección* garantiza la robustez de la figura, pues al mover los puntos  $A$  o  $B$  la construcción sigue manteniendo sus propiedades.

Posteriormente, el arrastre de objetos fue empleado para observar invariantes ante la variación de ciertos objetos. Por ejemplo, al mover los puntos  $A$  o  $B$  del largo del rectángulo de Rhonda (Tabla 4.9) se notó que la *forma* del rectángulo se mantenía invariante, lo que se traduce en que la relación de sus lados es constante (en razón 1:2). Finalmente, el arrastre de objetos se consolida como una estrategia para mover algún punto clave de una configuración dinámica que produce la variación de atributos geométricos como el perímetro o el área, con el fin de encontrar la posición de dicho punto para la cual se alcanza una condición deseada, es decir, se encuentra estrechamente relacionado con el uso del movimiento ordenado.

#### ► Visualización

Los objetos que se construyen dentro del SGD gozan de gran precisión y permiten observar relaciones geométricas o numéricas que no son conocidas *a priori* por parte del estudiante a partir de trazar de manera exploratoria segmentos o rectas dentro de la configuración dinámica. Por ejemplo, en el triángulo rectángulo que Adrián y Lisa construyeron para el Problema 2,

Ana trazó el segmento  $\overline{DC}$  lo que le permitió identificar que  $ABD$  está *compuesto* por dos triángulos: el equilátero  $ADC$  y el isósceles  $BDC$  (Figura 5.1).



**Figura 5.1.** El triángulo  $ABD$  se puede ver como compuesto por dos triángulos isósceles.

Así, fue posible determinar que los ángulos interiores del triángulo  $ABD$  tienen por medidas  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  y  $90^\circ$ . Adicionalmente, Aurea pudo generar un argumento geométrico sobre la relación entre los catetos de este triángulo al observar los círculos de radios congruentes. En este sentido, agregar trazos auxiliares a las configuraciones dinámicas favorece la identificación de ciertas propiedades geométricas. Por otro lado, al momento de trabajar con problemas de variación, los estudiantes emplean las *affordances* visuales de GeoGebra para graficar relaciones algebraicas, de modo que la superposición de curvas se convierte en una forma visual de validar sus procedimientos algebraicos. En el Problema 7, Aurea, David, Israel y Manuel se percataron de que la gráfica de la expresión  $y = x(a - x)$  no corresponde a la relación del lado del rectángulo con su área, pues no se superpone con el lugar geométrico del punto dinámico relacional (Figura 4.28).

Por último, la visualización de lugares geométricos es la estrategia primordial en la estrategia del ADR, pues permite observar el comportamiento de una relación de magnitudes variables a través de distinguir intervalos de crecimiento o decrecimiento y, con ello, puntos en donde se alcanzan valores máximos o mínimos de la variable dependiente. Esta visualización facilita a los estudiantes comprender y discutir acerca del comportamiento de funciones sin que necesariamente posean conocimientos avanzados del análisis, o justificaciones formales sobre el criterio de la primera derivada. En este sentido, la conexión entre el concepto de derivada y de razón de cambio pueden mantenerse a nivel intuitivo o gráfico.

### ► **Medición de atributos**

Los estudiantes emplearon funciones de GeoGebra como la medición de segmentos y ángulos para verificar de manera empírica sus construcciones, dado que los estudiantes no se encuentran familiarizados con las prácticas argumentativas formales. Por ejemplo, para comprobar si se había construido un triángulo rectángulo, los estudiantes medían los ángulos interiores del triángulo obtenido con el fin de observar si alguno de ellos era de  $90^\circ$ , o bien, para el caso del cuadrado, se medían sus cuatro lados con la finalidad de verificar que estos tuvieran la misma medida. Por su parte, Adrián empleó la medición como una forma de guiar el movimiento de un punto  $C$  sobre la mediatriz del lado  $\overline{AB}$ , de tal forma que  $|AC|$  tuviera una medida congruente con el resultado que obtuvo de calcular  $|AB| \cdot \sin 45^\circ$  (Figura 4.7).

La medición también fue empleada por los estudiantes para estudiar el comportamiento numérico de ciertos atributos de los objetos involucrados en las configuraciones dinámicas lo que ofreció una forma de razonar las relaciones algebraicas obtenidas o bien, establecer generalizaciones acerca de las respuestas a los problemas. Por ejemplo, para encontrar las medidas del rectángulo de perímetro fijo de área máxima, los estudiantes construyeron sus configuraciones dinámicas a partir de valores de perímetro distintos, sin embargo, la respuesta general que los estudiantes consensuaron fue que el rectángulo debía ser un cuadrado, cuyos lados tuvieran por medida un cuarto del perímetro fijo. Como un ejemplo adicional, vale la pena destacar el trabajo de Adrián, Lisa y Mario en el Problema 7, pues obtuvieron una curva robusta del lugar geométrico del punto dinámico, a partir de establecer relaciones de semejanza que fueron identificadas mediante un análisis numérico con ayuda de GeoGebra.

### ► **Movimiento ordenado**

En el primer grupo de problemas, los estudiantes construyeron configuraciones dinámicas en el plano euclídeo sin la necesidad de considerar puntos o ejes de referencia. Sin embargo, los estudiantes identificaron la importancia de construir puntos que puedan moverse sobre trayectorias bien definidas como líneas, circunferencias o segmentos para resolver problemas empleando el lugar geométrico generado por puntos dinámicos que relacionen dos atributos de una figura.

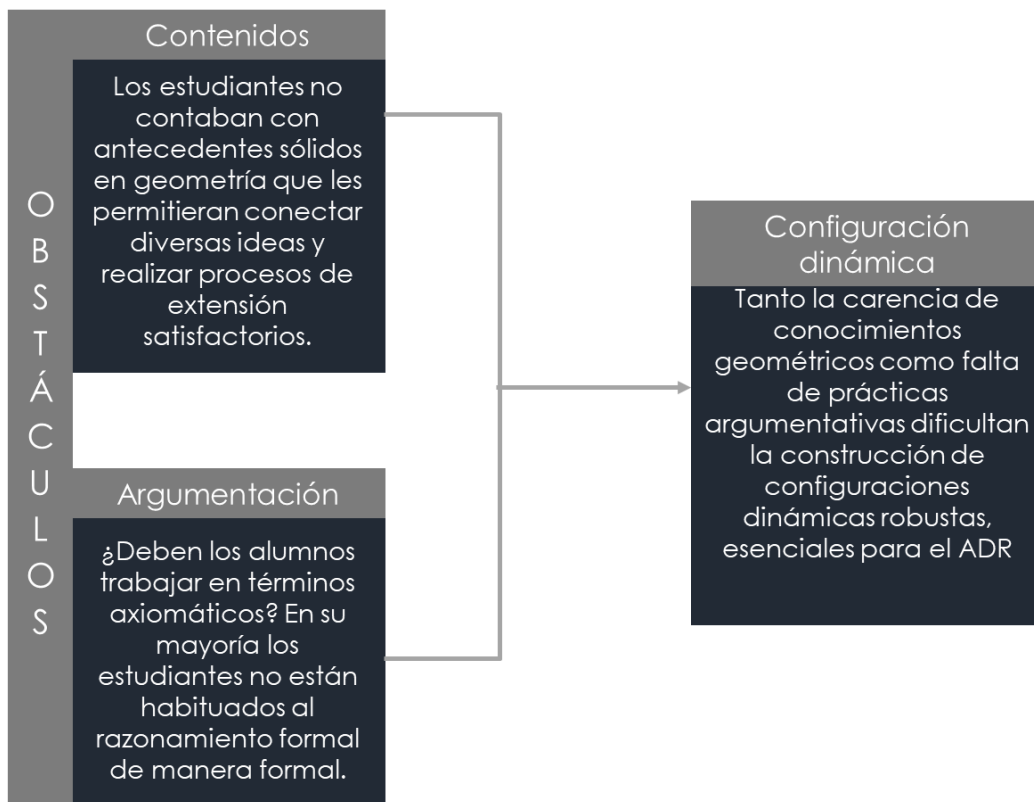
En la construcción de configuraciones dinámicas, identificar el tipo de movimiento (directo o indirecto) de los objetos fungió como una estrategia para identificar la dependencia e

independencia de las variables. Los estudiantes asociaban la abscisa de un punto móvil en la configuración dinámica como variable independiente, pues a partir del movimiento de este se generaban cambios en otros atributos; por ejemplo, en el Problema 5, la mayoría de las relaciones variacionales que los estudiantes emplearon para definir puntos dinámicos utilizan la abscisa del punto cuyo movimiento implica la variación del área, el perímetro o alguno de los catetos del triángulo rectángulo inscrito.

Junto con el arrastre de objetos y la visualización de lugares geométricos, el movimiento ordenado de puntos es otra de las estrategias clave que los estudiantes emplearon para resolver, de manera empírica, problemas que involucran la optimización de alguna magnitud.

## 5.2. Reflexiones adicionales

Entre las limitaciones que se observaron al inicio de la implementación de las actividades se encuentra la poca familiaridad de los estudiantes en emplear herramientas digitales como GeoGebra para la resolución de tareas matemáticas de una forma que va más allá de la obtención de gráficas. En este sentido, algunos estudiantes mostraron dificultad en aprovechar sus *affordances* en la generación de estrategias.



**Figura 5.2. Obstáculos principales para la apropiación de la estrategia ADR.**



Por otro lado, se observó en ocasiones una dependencia total del SGD en formas de abordar problemas, dejando de lado los aspectos argumentativos y de control en la resolución de problemas. Es decir, se presentaba poca o nula racionalidad con respecto a los procedimientos que se van llevando a cabo en GeoGebra (Por ejemplo, la construcción de Manuel con el empleo consecutivo de semicircunferencias). Al obtener de manera espontánea la solución al problema, no se lleva a cabo un proceso de razonamiento que justifique (y eventualmente, refine) la construcción que se realizó.

Este problema puede adjudicarse al desconocimiento de los estudiantes acerca de los procesos formales de argumentación en matemáticas y la falta de recursos axiomáticos para elaborar pruebas matemáticas. Tanto los problemas relacionados con el contenido matemático y la práctica argumentativa resultan en que algunos estudiantes no cuenten con un desempeño óptimo en la construcción de diferentes representaciones dinámicas, lo cual es un elemento fundamental en la implementación de la estrategia ADR.

En contraste, conviene destacar la manera en que el diseño de problemas basados en la tecnología, en conjunto con una forma de trabajo enfocada en el trabajo en equipo por parte de los estudiantes y las discusiones grupales, favoreció ciertas prácticas que son importantes en la resolución de problemas:

► **Exploración de múltiples casos**

con ayuda del arrastre de objetos, los estudiantes podían observar y explorar diversos casos particulares de manera simultánea. Al respecto, GeoGebra permitió discutir con los estudiantes casos extremos o especiales para diferentes configuraciones dinámicas. Una de ellas, fue el dominio del radio de las circunferencias utilizadas para encontrar el punto medio de un segmento: dentro del SGD no se cuentan con las restricciones del tamaño del compás que existen en ambientes de lápiz y papel, de modo que los estudiantes pueden mover un punto para hacer el radio de las circunferencias arbitrariamente grandes o pequeños. Otra, el caso de Luis, quien construyó un rombo en el Problema 3, y al arrastrar uno de sus vértices se podía llegar a obtener un cuadrado. ¿Puede decirse que un cuadrado es un rombo? Esta pregunta es útil para movilizar conceptos geométricos en los estudiantes, relacionados con el tipo de características que satisfacen ciertas figuras geométricas. Como tercer ejemplo, se encuentra la construcción del triángulo rectángulo inscrito en una semicircunferencia del Problema 5, pues al observar la gráfica de la relación entre la abscisa del punto sobre la circunferencia y uno de los catetos del

triángulo, se observó que la longitud máxima del cateto se obtiene cuando el vértice móvil del triángulo coincide con uno de los otros dos. ¿Puede decirse que se ha formado un triángulo? Esta exploración dinámica permitió a los estudiantes observar uno de los casos extremos de un triángulo: cuando sus tres vértices son colineales. Esta discusión puede emplearse para generar consensos grupales acerca de cómo se definen figuras geométricas que admitan (o no) configuraciones especiales.

#### ► **Comprobación y discusión de resultados**

Los estudiantes no estaban habituados a exponer su trabajo ante el resto de sus compañeros, o bien, a comentar acerca del trabajo de sus pares. En la medida en que resolvían problemas a los que no están habituados (de construcción de figuras), también desarrollaban sus habilidades en el manejo de GeoGebra. Esto motivó a que los estudiantes hicieran sugerencias a sus compañeros al momento de presentar sus construcciones, en términos de formas distintas de utilizar el SGD para la resolución del problema en cuestión. Eventualmente, esto se convirtió en una práctica habitual para los estudiantes, de modo que el aula de clases se transformó en un espacio de trabajo grupal donde los participantes constantemente presentaban sus resultados. Ante esta práctica, los alumnos se enfrentaron a la necesidad de encontrar estrategias de verificación de resultados mediante el arrastre como forma de verificar la robustez de las figuras o el uso de la medición de atributos.

#### ► **Generación de conexiones**

Los estudiantes fueron capaces de proponer, en ocasiones, exploraciones a partir de la configuración dinámica de un problema, ya sea en el Problema 5 en el que los estudiantes propusieron las relaciones entre variables a estudiar a través de lugares geométricos o en el Problema 6, cuando se propuso estudiar el comportamiento de la diagonal de los rectángulos isoperimétricos. En este sentido, la posibilidad de explorar diferentes propiedades en las configuraciones dinámicas favoreció que los estudiantes tomaran un rol más activo en el desarrollo de las actividades de las sesiones. A través de las exploraciones propuestas por los estudiantes, se conectaban ideas abordadas en los diferentes problemas con la finalidad de establecer rutas de solución que pudieran ser empleadas en diferentes problemas, o bien, estudiar conceptos matemáticos presentes en diversos enfoques de resolución.

Al respecto, el trabajo algebraico de estudiantes como Ana, Adrián, Aurea, Ángela y Mary fue utilizado como una forma de realizar conexiones entre diferentes representaciones de las relaciones de variación estudiadas en la solución de los problemas de optimización. La necesidad de robustecer el lugar geométrico generado por un punto dinámico deviene de la limitación de GeoGebra para *interactuar* con lugares geométricos, es decir, encontrar intersecciones o construir tangentes en puntos sobre ellos. De esta manera, fue necesario obtener la curva robusta a partir de encontrar una expresión algebraica con el fin de poder trazar rectas tangentes y realizar una exploración que vinculara la exploración y solución empírica de la fase ADR con el procedimiento analítico de encontrar el valor de  $x$  para el cual  $f'(x) = 0$ .

## CAPÍTULO 6

---

### INVESTIGACIÓN FUTURA

En este estudio se presentó un acercamiento general a la implementación de actividades orientadas a la apropiación por parte de los estudiantes de un Sistema de Geometría Dinámica (SGD) como herramienta de resolución de problemas a través de estrategias basadas en un Análisis Dinámico de Relaciones (ADR). Para ello, se mostró una posible vía de trabajo en la que se pavimentó el camino para la comprensión y uso de la estrategia del ADR por medio de problemas que recalcaron el uso de la tecnología.

Cuando se emplea el ADR como estrategia para resolver un problema intervienen diferentes estrategias heurísticas y recursos matemáticos mediados por las *affordances* de un SGD. Por lo tanto, es importante explicitar y promover actividades y tareas que destaquen el uso de un lugar geométrico en la resolución de problemas. Para ello, es necesario presentar y enfocar la atención hacia los elementos centrales que se ponen en juego al resolver problemas por medio del ADR e identificar caminos que permitan presentar y explorar las tareas en términos de las estrategias y recursos asociados con el uso del lugar geométrico en el análisis dinámico de relaciones.

Cabe destacar que, existen diferentes formas de obtener lugares geométricos al trabajar problemas en los que se explora el movimiento de objetos: Por ejemplo, en el Problema 2, el tercer vértice del triángulo de hipotenusa fija es el resultado de la intersección de una perpendicular y una recta móvil, la trayectoria de ese punto describe un lugar geométrico. Este fue el único problema en donde el lugar geométrico estudiado no fue resultado del movimiento de un punto dinámico, sino de la intersección de objetos que poseen propiedades por sí mismo. En este sentido, se pretende incluir la exploración de este tipo de estrategias de resolución de problemas. Por lo tanto, como parte de la evolución de este trabajo, resulta importante caracterizar los elementos esenciales que los estudiantes deben apropiarse para desarrollar diferentes formas de emplear lugares geométricos como parte de estrategias de solución de problemas mediante el uso de tecnologías digitales.

#### 6.1. Problema de investigación

La irrupción de las tecnologías digitales en la sociedad ha modificado la manera en que los individuos llevan a cabo sus actividades cotidianas, y la educación matemática no es excepción. Al trabajar con tareas matemáticas con el uso de un SGD, los estudiantes tienen oportunidad de

apoyarse en los recursos que la tecnología ofrece para representar y explorar formas de entender conceptos matemáticos y resolver problemas (Santos-Trigo, 2019). Así, conviene precisar las interacciones entre los procesos cognitivos de los estudiantes y las *affordances* de la tecnología cuando se resuelven problemas, pues la consolidación de estrategias por parte de los estudiantes es un elemento clave en la agenda de investigación de la resolución de problemas.

Santos-Trigo, Aguilar-Magallón y Reyes-Martínez (En prensa) argumentan que el uso sistemático de tecnologías expande y potencia las oportunidades de los estudiantes de activar y trabajar en actividades importantes en el marco de Schoenfeld (2015) tales como: identificar y aplicar recursos matemáticos, establecer metas de acción, emplear heurísticas y monitorear la toma de decisiones. ¿Cómo se llevan a cabo estos procesos cuando se trazan lugares geométricos con ayuda de un SGD en la resolución de problemas de variación? En particular, al emplear el ADR como una estrategia para resolver problemas de optimización, los estudiantes deben hacer uso de diferentes recursos matemáticos geométricos y algebraicos para construir una configuración dinámica robusta. Para ello, es necesario generar planes de acción que apunten hacia la generación de un lugar geométrico: ¿cuál será el punto dinámico de interés? ¿cómo construirlo? ¿cómo el movimiento ordenado en la configuración dinámica permitirá la generación de un lugar geométrico? Heurísticas como el análisis de múltiples casos particulares se potencian a través del arrastre de objetos y la visualización, es decir, con apoyo de las *affordances* del SGD. Finalmente, los estudiantes pueden llevar a cabo un proceso de control de sus aproximaciones al problema, ¿la respuesta obtenida da solución al problema? Por ejemplo, pueden medir el atributo que se desea ser optimizado para la posición del punto inicial con el fin de comprobar que su análisis ha sido correcto.

Cabe destacar que, el ADR puede emplearse para resolver problemas que involucran la variación de elementos no necesariamente orientados a determinar el valor máximo o mínimo de una función y, además, no es la única estrategia de resolución de problemas en las que el lugar geométrico de un punto móvil constituye la pieza fundamental. Trabajos como los de Santos-Trigo (2019), Santos-Trigo y Moreno-Armella (2016) y Santos-Trigo, Reyes-Martínez y Aguilar-Magallón (2015), muestran actividades de resolución de problemas en los que la estrategia fundamental consiste en determinar el lugar geométrico de puntos que surgen de la intersección de dos objetos (segmentos, mediatrices, rectas móviles, circunferencias, etcétera). Así, se distinguen dos aproximaciones para construir el lugar geométrico de un punto en

GeoGebra: a través de un punto dinámico definido por el estudiante que relaciona un punto móvil y un atributo en la barra de comandos o mediante un punto que resulta de la intersección de dos objetos. ¿Qué tipos de heurísticas y recursos se ponen en juego para cada enfoque? Si bien en el estudio realizado se describieron algunos de estos aspectos para la estrategia ADR, conviene hacerlo también para estrategias de resolución de problemas relacionadas con la generación de lugares geométricos de puntos de intersección con la finalidad de detectar elementos centrales que describan el proceso de generación de heurísticas y estrategias de resolución de problemas.

Así, se propone las siguientes preguntas de investigación que sentarán las bases para llevar a cabo el estudio:

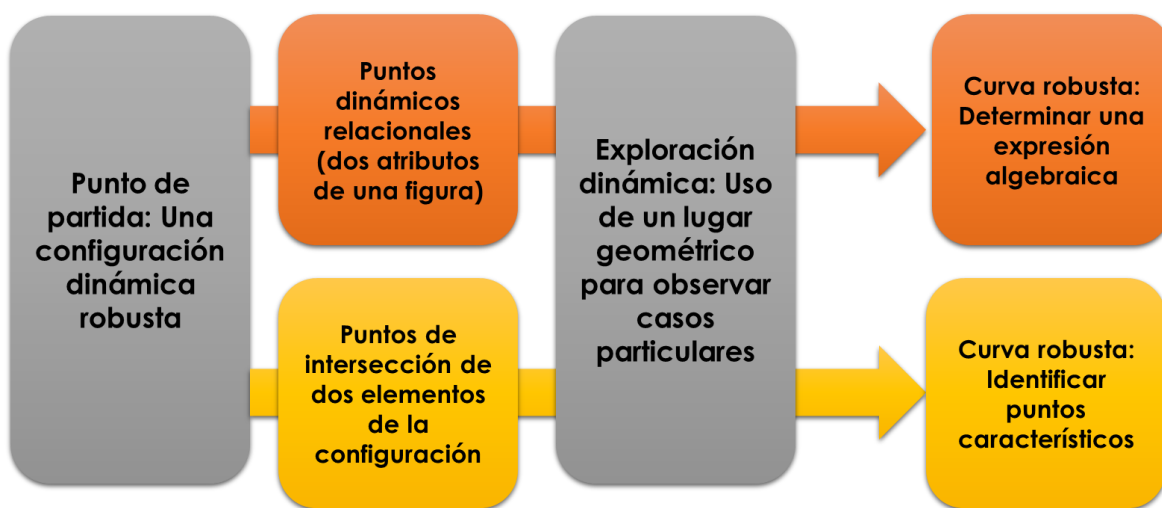
- ¿Qué recursos, estrategias heurísticas y formas de representación y exploración se ponen en juego en la construcción de modelos dinámicos que involucran el trazo de lugares geométricos vía las *affordances* de un SGD? Para ello, es necesario señalar las diferencias y similitudes presentes en los dos acercamientos para la obtención de puntos a partir de los cuales se construyen lugares geométricos.
- ¿En qué medida una implementación de actividades de resolución de problemas orientados al empleo de lugares geométricos favorece la apropiación del SGD como una herramienta para resolver problemas por parte de estudiantes de bachillerato? Es decir, se planteará una serie de actividades orientadas a la resolución del problema guiadas a partir del análisis descrito en la pregunta de investigación anterior, con el fin de obtener resultados sobre formas de promover la apropiación de estrategias de resolución de problemas en estudiantes de bachillerato.

## 6.2. Elementos del marco conceptual

Aguilar-Magallón (2018) presenta un análisis general sobre las estrategias de resolución de problemas que involucran la construcción o visualización de lugares geométricos, dependiente de si este se obtuvo a partir de un punto dinámico o de un punto de intersección. Tanto el empleo de puntos dinámicos como el de puntos de intersección para la construcción de lugares geométrico en la resolución de problemas se basan en la consideración y análisis de múltiples casos particulares en una configuración dinámica para encontrar alguna condición que dé respuesta al problema.

Sin embargo, el uso de la heurística de “relajar las condiciones de un problema” es fundamental en las estrategias basadas en lugares geométricos de puntos de intersección (LGPI).

Mientras que para robustecer el lugar geométrico encontrado en el ADR los estudiantes generalmente usan expresiones algebraicas como forma de validación, en el caso de la estrategia basada en los LGPI, se deben identificar puntos característicos que definen la gráfica. En el caso de la construcción del Problema 2, para definir la circunferencia como un lugar geométrico resulta importante determinar cuál es el centro de la circunferencia y algún punto por el que pase.



**Figura 6.1. Rutas de solución de problemas que involucran lugares geométricos.**

Estas diferencias se señalan con miras a identificar los elementos relevantes para generar rutas de enseñanza con miras a orientar el desarrollo de estrategias de resolución de problemas en los estudiantes.

Con la finalidad de caracterizar las aproximaciones de los estudiantes al uso de estrategias basadas en la construcción de lugares geométricos, conviene retomar el modelo extendido de Schoenfeld (2015) describe el desempeño de un individuo al resolver problemas matemáticos a partir de cuatro dimensiones:

- i. Los recursos matemáticos (conocimiento) a disposición de los estudiantes.
- ii. El uso de heurísticas que permiten progresar hacia la solución del problema.
- iii. El establecimiento de metas y orientaciones.
- iv. La toma de decisiones y autorregulación de las acciones llevadas a cabo en el proceso de resolución.

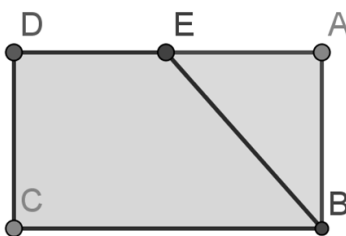
Adicionalmente, se considerará el marco de resolución de problemas y tecnología propuesto por Santos-Trigo y Camacho (2013) para describir los procesos cognitivos mostrados por los estudiantes al resolver problemas con apoyo de un SGD.

### 6.3. Aspectos metodológicos

Debido a la naturaleza de las preguntas de investigación, se realizará un estudio de tipo cualitativo pues interesa describir y caracterizar el proceso desarrollado por los estudiantes al resolver problemas. Para ello, parte importante de este trabajo consiste en la implementación de un diseño de actividades orientadas a la apropiación de estrategias basadas en el uso de lugares geométricos mediante la resolución de problemas.

A continuación, se describen dos problemas que funcionarán como ejemplo y como una manera de identificar las diferencias entre los posibles enfoques de solución de problemas cuando se utiliza alguna de las estrategias descritas.

*Problema A.* Sea  $ABCD$  un rectángulo cualquiera, y sea  $E$  un punto sobre  $AD$  tal que el área del triángulo  $ABE$  es un medio del área del cuadrilátero  $DEBC$ . ¿Cuál es la medida de  $AE$ ?



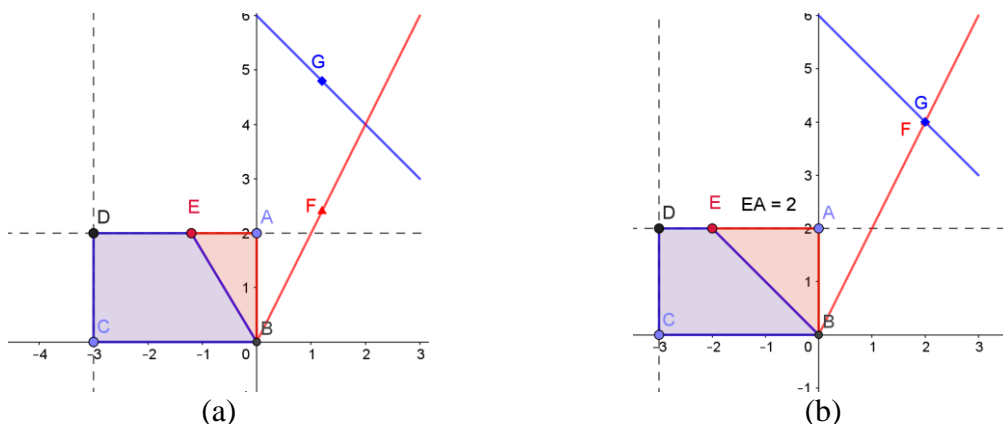
**Figura 6.2.** Figura asociada al Problema A.

A pesar de que este no es un problema de optimización, es posible abordarlo mediante la estrategia ADR, sin embargo, empleando una heurística de relajar las condiciones del problema. Para ello, se construye una configuración dinámica en la que el punto  $E$  es móvil sobre  $AD$  y pueden emplearse lugares geométricos para analizar la variación de las áreas del triángulo  $ABE$  y el cuadrilátero  $DEBC$ . Dado que el problema no indica ningún tipo de especificación acerca de las medidas del rectángulo, la configuración dinámica debe permitir el análisis de casos generales.

En la Figura 6.3a se observa una configuración dinámica en la que  $A$  y  $C$  son móviles sobre los ejes coordenados, de modo que las medidas del rectángulo pueden escogerse a conveniencia.



El punto  $E$  se mueve sobre  $AD$  y se definen los puntos dinámicos  $F(|AE|, 2t_1)$  y  $G(|AE|, c_1)$ , donde  $t_1$  es el área del triángulo y  $c_1$  es el área del cuadrilátero  $BEDC$ .



**Figura 6.3.** Uso del ADR para la solución al problema A.

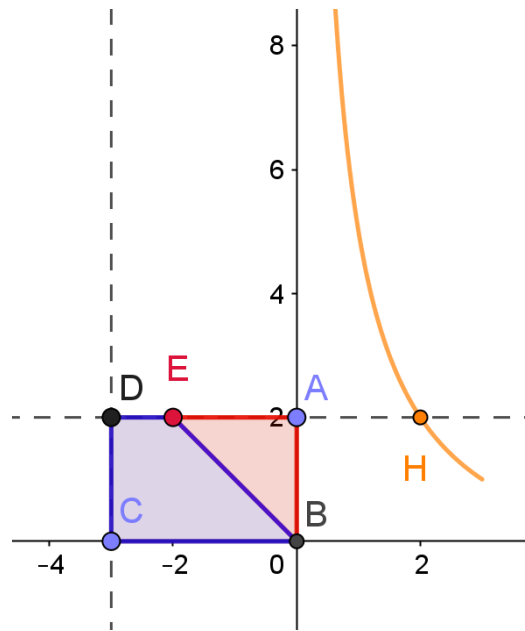
La forma de definir  $F$  empleando la ordenada  $2t_1$  se basa en el hecho de que el área del triángulo debe ser la mitad que el área del cuadrilátero. Al construir los lugares geométricos de  $F$  y  $G$  se observa que existe un punto de intersección entre ellos. La solución al problema se obtiene al mover  $E$  hasta que los puntos  $F$  y  $G$  coincidan. En la Figura 6.3b, se mide la distancia  $|AE|$  para la cual se obtenido la solución, en términos del problema, la medida de  $|AE|$  es dos tercios de la medida  $|BC|$ .

Una forma de comprobar esta conjetura es modificar los puntos  $A$  y  $C$  y observar que esta razón se satisface para cualquiera que sean las medidas del rectángulo  $ABC$ . ¿Cómo son los lugares geométricos obtenidos? Conviene notar que se han obtenido dos rectas, una de pendiente negativa y otra de pendiente positiva. Esto es lógico, ya que a medida que  $|AE|$  aumenta, el área del cuadrilátero  $BEDC$  disminuye mientras que el área el triángulo  $ABE$  aumenta, de ahí que la pendiente de las rectas sea negativa y positiva, respectivamente. ¿Qué argumentos pueden ofrecerse para justificar que los lugares geométricos obtenidos efectivamente son rectas? En el caso del punto  $F$  se debe a que el área del triángulo está dada por el producto  $|AE| \cdot |AB|$ , y dado que  $|AB|$  es fijo, entonces la relación entre el área del triángulo y el lado  $|AE|$  es lineal. De manera semejante, el cuadrilátero  $BEDC$  es un trapecio rectángulo, cuya base mayor y altura son fijas, por lo que su variación es lineal con respecto a la de  $|AE|$ .

Ahora bien, es posible resolver el problema sin emplear el ADR mediante un argumento algebraico: dado que el área del triángulo  $ABE$  es un medio del área del trapecio  $BEDC$ , eso significa que el área del rectángulo  $ABCD$  es tres veces el área del triángulo  $ABE$ . Sean  $m$  y  $n$  las medidas de la base y de la altura, respectivamente, del rectángulo y sea  $|AE| = x$ , entonces:

$$3 \left( \frac{xn}{2} \right) = mn \Rightarrow x = \frac{2m}{3}$$

De donde se concluye que  $|AE|$  es dos tercios de la base del rectángulo. Conviene notar que, en este caso, el uso del ADR no está enfocado a la simplificación de la solución de un problema, sino que permite tomar un problema aparentemente sencillo y realizar exploraciones variacionales sobre el comportamiento de diferentes variables. Ahora bien, la variedad de formas en las que puede generarse una aproximación dinámica al problema mediante el ADR es considerable. Por ejemplo, en la Figura 6.4 se muestra el lugar geométrico del punto dinámico  $H = \left( |AE|, \frac{c_1}{t_1} \right)$



**Figura 6.4. Otra aproximación del ADR al Problema A.**

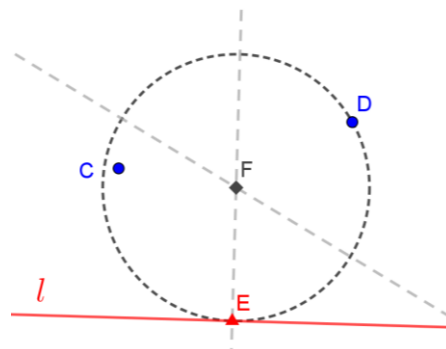
En este caso, la solución consiste en la intersección del lugar geométrico con la recta  $y = 2$ . Al proponer otro lugar geométrico es posible adentrarse en exploraciones variacionales adicionales, ¿qué curva describe  $H$ ? En este sentido, la curva posee una asíntota, pues a medida que  $E$  se aproxima al punto  $A$  el área del triángulo tiende a cero. En términos más específicos, la expresión algebraica de este lugar geométrico está dada por  $y = \frac{2m}{x} - 1$ . ¿En qué medida los estudiantes podrían aprovechar los recursos visuales del SGD para obtener dicha expresión? ¿Qué otro tipo de lugares geométricos pueden obtenerse para este problema?

Cabe mencionar que esta forma de utilizar el ADR no se basa en identificar puntos de mayor o menor altitud en la curva, sino de encontrar la intersección entre dos lugares geométricos.

*Problema B. Dada una recta  $l$  y dos puntos  $C$  y  $D$  fuera de ella, trazar la circunferencia que pasa por ambos puntos y que es tangente a  $l$ .*

Este problema consiste en uno de los problemas de tangencia de Apolonio y, aunque existen múltiples enfoques basados en trazos geométricos estáticos que dan solución al problema, emplear herramientas como el arrastre de objetos y la visualización de lugares geométricos permite simplificar el proceso de solución y promueve el empleo de estrategias de resolución de problemas como relajar las condiciones del problema y el análisis de múltiples casos particulares.

Para resolver este problema, conviene considerar un caso más simple: uno de los puntos sobre la recta  $l$  y el otro fuera de ella. En la Figura 6.5 se observa un punto  $E$  situado sobre la recta  $l$ . Si se desea construir una circunferencia que pase por ambos puntos, su centro debe equidistar de los puntos  $E$  y  $D$  (es decir, está sobre la mediatriz de  $ED$ ) y para que sea tangente a la recta  $l$ , su centro debe estar sobre la recta perpendicular a la recta  $l$  que pasa por  $E$ . Esto se debe a que la circunferencia y la recta compartirán el punto  $E$ . Así, el punto  $F$  es la intersección de la mediatriz de  $\overline{ED}$  y de la perpendicular a  $l$  en el punto  $E$ .



**Figura 6.5.** La circunferencia con centro en  $F$  pasa por  $D$ , pero no necesariamente por  $C$ .

Se traza la circunferencia con centro en  $F$  que pasa por  $E$  y, consecuentemente, pasa también por  $D$ . Ahora bien, al mover el punto  $E$  se observa que existe una posición para la cual la circunferencia también pasa también por  $C$  (ver Figura 6.6).

¿Cómo encontrar la solución robusta al problema? En este sentido, la solución encontrada es aproximada pues depende de la *precisión* del usuario al situar el punto  $E$  y no de las propiedades geométricas de los trazos realizados. Para ello, se realiza una exploración dinámica basada en el movimiento del punto  $F$  al arrastrar  $E$  sobre la recta  $l$ . Con la herramienta de lugar geométrico, se obtiene (aparentemente) una parábola (Figura 6.7).

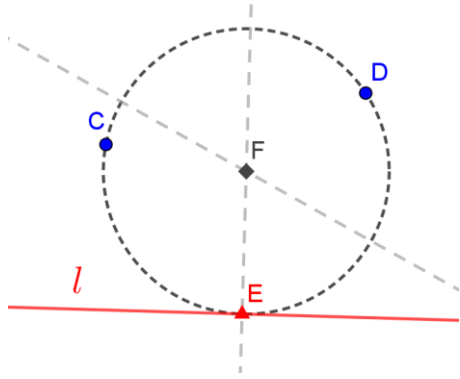


Figura 6.6. Posición de  $E$  para la cual la circunferencia pasa por  $C$  y  $D$ .

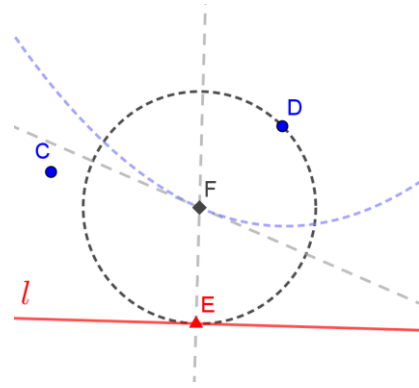
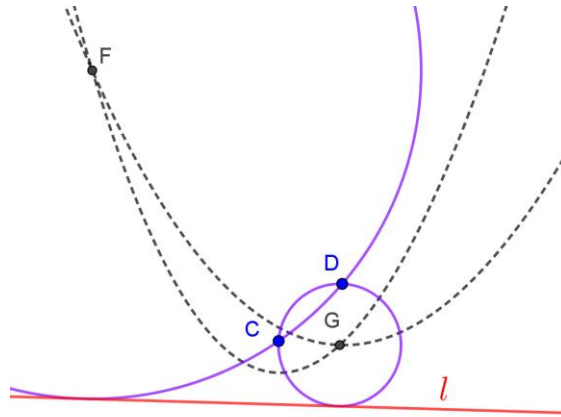


Figura 6.7. Lugar geométrico del punto  $F$  al mover  $E$ .

Es decir, los centros de las circunferencias que son tangentes a la recta  $l$  y que pasa por el punto  $D$  yacen sobre esta parábola. De manera análoga, puede inferirse que existe otra parábola compuesta por los centros de las circunferencias tangentes a la recta  $l$  y que pasan por  $C$ . De este modo, la solución del problema se encuentra al determinar la intersección de ambas parábolas. ¿Cómo trazar de manera robusta ambas parábolas? Para responder a esta pregunta, primero es necesario encontrar un argumento que confirme que la curva mostrada en la Figura 6.7 es, en efecto, una parábola. Obsérvese que  $|DF| = |FE|$  al ser  $F$  un punto en la mediatriz de  $\overline{DE}$  y, además,  $\overline{FE}$  es perpendicular a  $l$ . Considerando que  $F$  es el punto que genera la curva, se concluye que es una parábola pues es el lugar geométrico cuyos puntos equidistan del punto  $D$  y de la recta  $l$ . A partir de este argumento, se obtienen elementos clave para construir la parábola de manera robusta mediante GeoGebra: el foco es el punto  $D$  y la directriz es la recta  $l$ ).

Esto implica que la solución robusta se obtiene al construir dos parábolas cuya directriz es la recta  $l$ , una cuyo foco es el punto  $D$  y la otra con foco en  $C$  (Figura 6.8). ¿La solución es única? En este caso, la solución al problema consiste en trazar una (o varias) circunferencias que satisfagan las condiciones establecidas. Así, si los puntos  $C$  y  $D$  se colocan de forma que estén en semiplanos distintos formados por la recta  $l$ , o bien, si se encuentran ambos sobre la recta  $l$  (y son ajenos), entonces no existe solución; si los puntos coinciden, entonces existen una infinidad de soluciones; si los puntos son ajenos y se encuentran sobre una recta paralela a  $l$ , entonces existe una única solución; Para cualquier otro caso, existen dos soluciones al problema.



**Figura 6.8. Solución robusta al Problema C.**

En síntesis, en el Problema A, la búsqueda de una solución robusta demanda una serie de análisis algebraicos y variacionales con respecto a la configuración dinámica, mientras que en el Problema B se emplea la exploración empírica para encontrar elementos geométricos a partir de los cuales trazar alguna curva. Así, la resolución de problemas a través de estrategias centradas alrededor del uso del lugar geométrico con ayuda de un SGD permitiría integrar múltiples aspectos del conocimiento matemático en los estudiantes.

#### 6.4. Recolección y análisis de datos

Se pretende obtener los datos de la investigación a partir de los archivos GeoGebra de los participantes, de las notas de campo del investigador, de hojas de trabajo diseñadas con la finalidad de que los estudiantes estructuren y comuniquen sus ideas, entrevistas no estructuradas y con los registros de video obtenidos de filmar las sesiones de trabajo.

Para el análisis de los datos, se emplearán los elementos del marco conceptual tales como el esquema propuesto por Santos-Trigo y Camacho (2013) para describir el trabajo de los estudiantes al resolver problemas con herramientas digitales, el marco conceptual de Schoenfeld (2005) para caracterizar los elementos que intervienen en el desempeño de los estudiantes en la resolución de problemas y los aspectos centrales que Aguilar-Magallón (2018) señala sobre el uso de recursos, heurísticas y *affordances* al implementar las estrategias ADR y LGPI.

#### 6.5. Propuesta de desarrollo del estudio

Se presenta el plan de acción para llevar a cabo la investigación, estructurado en cuatro etapas:

- A. Revisión de la literatura y diseño de actividades. Durante el primer año, se realizará una revisión sistemática acerca de los antecedentes referentes a la implementación de actividades orientadas a la resolución de problemas con tecnología (en particular con el uso de lugares geométricos) con la finalidad de establecer los lineamientos y objetivos centrales en un diseño de actividades.
- B. Aplicación de una prueba piloto. Se pretende estructurar e implementar un primer diseño de actividades que incluye los instrumentos de recolección de datos. A partir de los resultados de esta aplicación, se elaborará un documento que será sometido a revisión mediante un examen predoctoral. Se plantea que esta fase se lleve a término dentro de los primeros dos años del proyecto.
- C. Implementación formal del estudio. Con los resultados y observaciones recibidas, se trabajará en la actualización de la literatura y los elementos del marco conceptual; Así mismo, se afinarán los detalles importantes del diseño de las actividades para llevar a cabo una segunda implementación de actividades.
- D. Elaboración del documento doctoral. Finalmente, se realizará el análisis de los resultados obtenidos en la fase anterior, a partir de los cuales se estructurará un primer borrador del documento doctoral.

## Referencias

- Aguilar-Magallón, D. (2014). La resolución de problemas y representación de conceptos de Geometría Analítica en un ambiente dinámico. Tesis de maestría. México.
- Aguilar-Magallón, D. (2018). La formulación y resolución de problemas en un ambiente que promueve el uso de tecnologías digitales. Tesis doctoral. México.
- Aguilar-Magallón, D. & Poveda, W. (2017). Problem posing opportunities with digital technology in problem solving environments. En E. Galindo & J. Newton (Eds.). *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1313-1320. Indianapolis, IN: Hoosier. Association of Mathematics Teacher Educators.
- Baccaglioni-Frank, A. (2019). Dragging, instrumented abduction and evidence, in processes of conjecture generation in a dynamic geometry environment. *ZDM Mathematics Education*, 1-13.
- Baccaglioni-Frank, A. & Mariotti, M. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: the maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 15(3), 225-253.
- Barrera-Mora, F. & Reyes-Rodríguez, A. (2013). Cognitive processes developed by students when solving mathematical problems within technological environments. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1-2), 109-136.
- Cai J. (2010). Commentary on problem solving heuristics, affect, and discrete mathematics: a representational discussion. En B. Sriraman & L. English (Eds). *Theories of Mathematics Education. Advances in Mathematics Education*, 351-358. Springer, Berlin, Heidelberg.
- Calder, N. & Murphy, C. (2018). Reshaping the learning experience through apps: affordances. En L. Ball, P. Drijvers, S. Ladel, HS. Siller, M. Tabach & C. Vale (Eds). *Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education. ICME-13 Monographs*, 145-159. Springer, Cham.
- Eisenmann, P., Novotná, J., Pribyl, J. & Brehovsky, J. (2015). The development of a culture of problem solving with secondary students through heuristics strategies. *Mathematics Education Research Journal*, 27(4), 535-562.

- English, L. & Gainsburg, J. (2016). Problem solving in a 21st century mathematics curriculum. En L. English & D. Kirshner (Eds.) *Handbook of International Research in Mathematics Education, third edition*. 313-335. NY: Routledge, Taylor & Francis.
- English, L. & Kirshner, D. (2016). Changing agendas in international research in mathematics education. En L. English & D. Kirshner (Eds.). *Handbook of international research in mathematics education, third edition*, 3-18. NY: Routledge, Taylor & Francis.
- Gros, B., Kinshuk, & Maina, M. (2016). *The future of ubiquitous learning. Learning Design for Emerging Pedagogies*. New York: Springer.
- Guerrero-Ortiz, C., Reyes-Rodríguez, A. & Espinosa-Pérez, H. (2016). Using a dynamic geometry system to integrate analytic and synthetic knowledge in the solution of geometry problems. *International Journal of Learning Technology*, 11(3), 179-197.
- Hegedus, S. & Moreno-Armella, L. (2011). The emergence of mathematical structures. *Educational Studies in Mathematics*, 77(2-3), 369-388.
- Hollebrands, K. (2007). The role of a dynamic software program for geometry in the strategies high school mathematics students employ. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(2), 164–192.
- Hollebrands, K. & Okumus, S. (2017). Prospective mathematics teachers' processes for solving optimization problems using cabri 3D. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 3(3), 206-232.
- Jacinto, H., Nobre, S., Carreira, S. & Amado, N. (2018). Different levels of sophistication in solving and expressing mathematical problems with digital tools. En N. Amado, S. Carreira & K. Jones (Eds). *Broadening the Scope of Research on Mathematical Problem Solving. Research in Mathematics Education*, 15-41. Springer, Cham.
- Kuzle, A. (2017). Delving into the nature of problem-solving processes in a dynamic geometry environment: different technological effects on cognitive processing. *Technology, Knowledge and Learning*, 22(1), 37-64.
- Lester, F. & Cai, J. (2016). Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research. En P. Felmer, E. Pehkonen & J. Kilpatrick (Eds) *Posing and Solving Mathematical Problems. Research in Mathematics Education*, 83-108. Springer, Cham



- Leung, A. (2008). Dragging in a dynamic geometry environment through the lens of variation. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, 13(1), 135-157.
- Leung, A. (2011). An epistemic model of task design in dynamic geometry environment. *ZDM Mathematics Education*, 43(3), 325-336.
- Leung, A. (2017). Exploring techno-pedagogic task design in the mathematics classroom. En A. Leung & A. Baccaglini-Franck (Eds.). *Digital technologies in designing mathematics education tasks*, 3-16. Switzerland: Springer.
- Leung, A., Bacaglini-Frank, A. & Mariotti, M. (2013). Discernment of invariants in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, 84(3), 439-460.
- Leung A. & Bolite-Frant J. (2015). Designing mathematics tasks: the role of tools. En A. Watson & M. Ohtani (Eds). *Task Design in Mathematics Education. New ICMI Study Series*, 191-225. Springer, Cham
- Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., & Bruder, R. (2016). *Problem Solving in Mathematics Education*. Springer International. Publishing.
- Mackrell, K. & Bokhove, C. (2017). Designing technology that enables task design. En A. Leung & A. Baccaglini-Franck (Eds.). *Digital technologies in designing mathematics education tasks*, 55-73. Switzerland: Springer.
- Mariotti, M. (2003). The influence of technological advances on students' mathematics learning. En L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 695-723. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Mariotti, M. & Baccaglini-Frank, A. (2018). Developing the mathematical eye through problem solving in a dynamic geometry environment. En N. Amado, S. Carreira & K. Jones (Eds). *Broadening the Scope of Mathematical Problem Solving. Research in Mathematics Education*, 153-176. Springer, Cham.
- Moreno-Armella, L. & Hegedus, S. (2009). *Co-action with digital technologies*. *ZDM Mathematics Education*, 41(4), 505-519.
- Moreno-Armella, L. & Santos-Trigo, M. (2016). The use of digital technology in mathematical practices: reconciling traditional and emerging approaches. En L. English & D. Kirshner (Eds.). *Handbook of international research in mathematics education*, third edition, 1311-1345. NY: Routledge, Taylor & Francis.

- Mousoulides N., Sriraman B. (2014). Heuristics in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed). *Encyclopedia of Mathematics Education*, 253-255. Springer, Dordrecht.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: The Council.
- Olvera, C. (2015). El uso de herramientas digitales en el estudio de funciones y el desarrollo de competencia matemática para la enseñanza. Tesis doctoral. México.
- Ortiz-May, D. (2018). Comparaciones entre argumentos formales e informales. En L. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. García & A. Bruno (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XXII*, 437-446. Gijón: SEIEM.
- Ortiz-May, D. & Aguilar-Magallón, D. (2019). Implementación de una estrategia de aprendizaje fundamentada en un sistema de geometría dinámica. *Proceedings of the 41th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. En prensa,
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Poveda, W. (2018). Resolución de Problemas Matemáticos y Uso de Tecnologías Digitales en un Curso Masivo en Línea. Tesis doctoral. Cinvestav, México.
- Reyes-Rodríguez, A., Vargas-Alejo, V., Cristóbal-Escalante, C, & Soberanis-Cruz, V. (2015). Formas de razonamiento que emergen al resolver problemas de máximos y mínimos con un SGD. *Epsilon. Revista de Educación Matemática*, 32 (3), 7-24.
- Salomon, G., & Perkins, D. (2005). Do technologies make us smarter? Intellectual amplification with, of, and through technology. En R. Sternberg & D. Preiss (Eds). *Intelligence and Technology: The Impact of Tools on the Nature and Development of Human Abilities*, 71–86. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Santos-Trigo, M. (2008). An inquiry approach to construct instructional trajectories based on the use of digital technologies. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 4(4), 347-357.
- Santos-Trigo, M. (2010). A problem-solving approach to the construction of instructional routes based on the use of computational tools. En J. Yamamoto, J. Kush, R. Lombard & J. Herzog (Eds.). *Technology Implementation and Teacher Education: Reflective Models*, 296-313. Information Science Reference: New York.

- Santos-Trigo, M. (2014). *La Resolución de Problemas Matemáticos. Fundamentos Cognitivos*. Trillas, México.
- Santos-Trigo M. (2019). Mathematical problem solving and the use of digital technologies. En P. Liljedahl, M. Santos-Trigo (Eds). *Mathematical Problem Solving. ICME-13 Monographs*, 63-89. Springer, Cham
- Santos-Trigo, M., Aguilar-Magallón, D. & Reyes-Martínez I. (En prensa). A Mathematical Problem-Solving Approach Based on Digital Technology Affordances to Represent, Explore and Solve Problems via Geometric Reasoning. En P. Felmer, B. Koichu & P. Liljedahl (Eds.), *Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development*. Springer.
- Santos-Trigo, M. & Camacho, M. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1), 279-302.
- Santos-Trigo, M., & Cristóbal-Escalante, C. (2008). Emerging high school students' problem-solving trajectories based on the use of dynamic software. *The Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 27(3), 325-340.
- Santos-Trigo, M. & Moreno-Armella, L. (2016). The use of digital technology to frame and foster learner's problem-solving experiences. En P. Felmer, E. Pehkonen & J. Kilpatrick (Eds.) *Posing and Solving Mathematical Problems. Research in Mathematics Education*, 189-207. Springer, Cham.
- Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L. & Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space framework. *ZDM Mathematics Education*, 48(6), 827–842.
- Santos-Trigo, M.; Reyes-Martínez, I. & Aguilar-Magallón, D. (2015). The use of digital technology in extending mathematical problem-solving reasoning. En L. Uden, D. Liberona, T. Welzer (Eds.). *Learning Technology for Education in Cloud. LTEC 2015. Communications in Computer and Information Science*, 533. Springer, Cham.
- Santos-Trigo, M. & Reyes-Rodríguez, A. (2011). Teachers' use of computational tools to construct and explore dynamic mathematical models. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 42(3), 313-336.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New York, NY: Academic Press.

- Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. Grouws (Ed). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 334-370. Macmillan, New York.
- Schoenfeld, A. (2015). How we think: A theory of human decision-making, with a focus on teaching. En S. Cho (Ed.). *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, 229-243. Cham, Switzerland.
- Schuck S. & Pereira, P. (2011). *What Counts in Teaching Mathematics? Adding Value to Self and Content*. Springer, Dordrecht
- Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM Mathematics Education*, 29(3), 75-80.
- Sinclair, N. & Zazkis, R. (2017). Everybody Counts: Designing Tasks for TouchCounts. En A. Leung & A. Baccaglini-Franck (Eds.). *Digital technologies in designing mathematics education tasks*, 175-191. Switzerland: Springer
- Venturini, M. & Sinclair, N. (2017). Designing assessment tasks in a dynamic geometry environment. En A. Leung & A. Baccaglini-Franck (Eds). *Digital technologies in designing mathematics education tasks*, 77-98. Switzerland: Springer.
- Wares, A. (2010). Using Dynamic geometry to explore non-traditional theorems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(3), 351-358.
- Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analysing student understanding of the concept of derivative. En E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education*, 4, 103–127. Providence, RI: American Mathematical Society.