CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

ANÁLISIS COMPARATIVO DE LAS ESTRATEGIAS VARIACIONALES DE ESTUDIANTES DE INGENIERÍA DE MÉXICO Y CUBA.

Tesis que presenta:

Susana Pacheco Campos

Para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias

En la especialidad de Matemática Educativa

Director de Tesis:

Dr. Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza

Ciudad de México, México **Febrero, 2018**

Agradecimiento

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de Maestría en el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Susana Pacheco Campos

Becario No. 593400

Agradecimientos

A mis muy queridos padres, Balbina y Francisco, gracias por todo, por mi vida, por el apoyo que siempre me han brindado en todo momento, tanto personal como profesional, por hacerme una persona de bien e inculcarme el espíritu de superación en todos los aspectos. ¡Los extraño y quiero muchísimo!

A mi esposo Alain Figueredo, por el apoyo que siempre me has dado, desde que nos conocimos, en la enfermedad y en todo lo bueno, por la espera, por la llegada y estar siempre a mi lado. Por la presión y ayuda para llevar a buen término este maravilloso proyecto. Por esto y más, gracias.

A mi asesor de tesis, Dr. Ricardo Cantoral, no encuentro palabras para agradecerle todo lo que a Ud. debo, pero aun así le daré las gracias por darme la oportunidad de venir hasta estas tierras maravillosas mexicanas, por creer en mí como persona y como investigadora, por su orientación en la construcción de este proyecto, por darme todo el apoyo y nunca, pero nunca, perder la confianza en mí. Gracias por absolutamente todo.

A mis profesores en este período, Dra. Farfán, (a quien también le agradezco por aceptar ser sinodal e incorporarse en esta travesía investigativa), Dra. Montiel, Dra. Acuña y Dr. Cantoral; que en el transcurso de los dos años del programa nos brindaron de su conocimiento y apoyo.

A mis amigos acá en México: Rodolfo, no podré agradecerte acá por todo, sino creo que sería casi otra tesis, aun así, ¡Gracias! Gaby, igual para ti, mi apoyo, mi amiga, todo. A Cristian, Cristina, Zule, por hacerme parte de esta familia maravillosa desde que llegué, alejar mi soledad y sentirme como en casa. A toda la generación, Uzziel, Karina, Kristel, Gerardo, Sergio, Cynthi, Francisco, Laura. A Fabián, que, aunque no es académicamente de la generación en alma sí lo es, y claro que no puede faltar Naty, gracias. A Mario, tu trabajo es mi guía, Angélica, Kike, Luis, por darme la oportunidad de aprender de ustedes y contagiar con su amor hacia nuestro campo investigativo.

A Daniela Reyes, a ti, gracias por hacer tuyo este proyecto también, por correr y apoyarme para aplicar las actividades, tanto en Cuba como en México, por enseñarme mucho más. Por permitirme formar parte de la familia maravillosa del PIDPME y participar en proyectos que me permitieron conocer, aprender e intercambiar con estudiantes y maestros mexicanos, a ellos gracias también. Junto a ti, le agradezco también a César y Fausto, gracias por todo.

A Toñita y Ana Paula, gracias a ustedes mis primeros días en México, lejos de mi familia fueron más llevaderos, gracias por acogerme en el seno de la suya y que hasta la actualidad seguimos siendo una familia. Gracias a Gelvis de Armas, mi primo Paquitín. Muchas gracias, saben por qué.

Al Dr. José A. Moreno y al Maestro Álvaro Anzueto Ríos, por su apoyo para aplicar las actividades en la UPIITA, en la Carrera de Ingeniería Biónica. Maestro Álvaro, muchas gracias por darme la oportunidad en su grupo y brindarme su espacio para obtener los resultados de esta investigación.

A la Dra. Olga L. Pérez González, mi guía siempre, mi tutora en todas mis etapas estudiantiles, por luchar por mí para que me incorporara a este nuevo proyecto académico y así a todos los profesores del Departamento de Matemática de la Universidad de Camagüey "Ignacio Agramonte Loynaz", mis profesores y colegas. Gracias a ustedes, con mucho amor, cariño y respeto.

A Adriana Parra, mis primeros días en el DME, fueron muy tranquilos gracias a tu apoyo cuando llegué sin todo lo que necesitaba realmente, eres un ejemplo y una maravilla de persona. A Jadde, gracias por todo. A todas las personas del DME. Gracias también a nuestro muy querido Lic. Rodolfo, Ud. donde quiera que este, sepa que fue fundamental su apoyo y sus grandes deseos de siempre ayudar.

A todas mis amistades y familiares en Cuba, que siempre están presentes.

A todos(as), muchísimas gracias.

Susana Pacheco Campos

Índice

Resumen

En la actualidad, las investigaciones en Matemática Educativa, enmarcadas en el Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV), han tratado las dificultades presentadas por estudiantes y maestros para dotar de significado a temas del Cálculo relacionados con la variación. Una gran parte de estas investigaciones, se centran en la búsqueda de los problemas que se presentan debido al discurso Matemático Escolar (dME) por no fomentar el desarrollo de ideas variacionales y trabajan en el desarrollando situaciones de aprendizaje que aplican a poblaciones muy parecidas, ya sea, de un mismo colegio, estado o país. No obstante, en la búsqueda e investigación, encontramos que no se han realizado comparaciones en el uso de estrategias variacionales como medidoras del desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de poblaciones socioculturalmente diferentes, por lo que el objetivo de nuestra investigación se basó en el análisis comparativo de las estrategias variacionales desarrolladas por estudiantes de carreras de Ingeniería en México y Cuba, cubriendo las variables que mencionamos con anterioridad y que no se han tomado en cuenta en las investigaciones.

Nuestro objetivo también se relaciona para conocer si las diferencias o similitudes de las estrategias variacionales utilizadas para dar respuesta a las actividades, son debidas al currículo matemático o a pensamientos variacionales propios de la población. Para desarrollar nuestro trabajo nos apoyamos de la Teoría Socioepistemológica ya que nos interesó conocer el uso de estrategias variacionales como medidoras del desarrollo de pensamiento variacional por parte de los estudiantes. Para llevar a cabo esta investigación, elaboramos una situación didáctica que aplicamos en instituciones de educación superior de México y Cuba, analizamos las estrategias utilizadas para la solución de las actividades y las comparamos entre los estudiantes de las distintas poblaciones. Los resultados alcanzados los mostramos en la siguiente investigación, así como los aportes que nos brinda la misma.

Abstract

Currently, research in Educational Mathematics, framed in the Thought and Variational Language (PYLV), have addressed the difficulties presented by students and teachers to give meaning to topics of Calculus related to variation. A large part of these investigations focus on the search for the problems that arise due to the School Mathematical Discourse (dME) because they do not encourage the development of variational ideas and work in developing learning situations that apply to very similar populations. either from the same school, state or country. However, in the search and research, we found that no comparisons have been made in the use of variational strategies as measurers of the development of variational thinking in students from socioculturally different populations, so the objective of our research was based on the comparative analysis of the variational strategies developed by students of Engineering careers in Mexico and Cuba, covering the variables that we mentioned previously and that have not been taken into account in the investigations.

Our objective is also related to know if the differences or similarities of the variational strategies used to respond to the activities, are due to the mathematical curriculum or variational thoughts of the population. To develop our work we rely on the Socio-Epistemological Theory since we were interested in knowing the use of variational strategies as measurers of the development of variational thinking on the part of the students. To carry out this research, we elaborated a didactic situation that we applied in higher education institutions in Mexico and Cuba, we analyzed the strategies used for the solution of the activities and we compared them among the students of the different populations. The results achieved are shown in the following research, as well as the contributions that it provides.

Introducción

Los resultados de investigaciones dentro de la Matemática Educativa, bajo el enfoque del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV) y guiados por la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), han demostrado que, en la actualidad, en los distintos niveles de enseñanza, fundamentalmente, en el nivel medio – superior, la variación es estudiada con estrategias que se convierten en tecnicismos sin significados ni análisis ante lo que cambia, cómo y por qué cambia, algo que es fundamental para interiorizar conceptos dentro del Cálculo.

Estas investigaciones no solo se han destinado a hallar las dificultades presentes en el discurso Matemático Escolar (dME), sino que también se guiaron hacia la búsqueda de ideas e iniciativas que permitieran modificar para bien dicho discurso y dentro de esta búsqueda, muchos trabajos se centraron en el estudio de la variación como un tema fundamental que permite la significación de ideas y conceptos y cómo luchar para que el ya mencionado dME no se mantuviera analizando a la variación a través de estrategias mecánicas y sin sentido.

Muchas investigaciones, centradas en el estudio de la variación, destinaron su trabajo a la elaboración de situaciones de aprendizajes de las cuales se pudieran rescatar estrategias variacionales utilizadas por estudiantes o profesores, que demostraran el desarrollo de un pensamiento variacional. En esta línea se dirige nuestro trabajo, en el cual iniciamos con un recorrido por toda la experiencia e investigación que nos inspiró a desarrollarlo y el interés marcado dentro de la TSME, el conocer si las condiciones socioculturales, influyen en el surgimiento de estrategias variacionales por parte de los estudiantes.

Guiándonos por tesis como (Caballero, 2012), (González, 1999), (Marcolini, 2003); el libro de la TSME de (Cantoral, 2013) y el análisis de los volúmenes del Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME), encontramos que el mayor número de investigaciones donde se aplicaban situaciones de aprendizaje, eran en poblaciones similares, lo que nos llevó a querer investigar si en poblaciones completamente diferentes social y culturalmente, las estrategias variacionales que surgirían tendría similitudes o diferencias y si estas eran provocadas por el currículo matemático o provendrían exclusivamente de formas de pensamientos variacional.

Para realizar nuestro trabajo, nos guiamos por las pautas de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa desde el enfoque de Pensamiento y Lenguaje Variacional, analizando las investigaciones relacionadas con los estudios de estrategias variacionales y la elaboración de una situación variacional, con una serie de actividades que buscaban el surgir de estrategias variacionales por parte de los estudiantes. Esta situación no buscó en ningún momento, que los estudiantes aprendieran un concepto al realizar las actividades, sino que se motivó a que, con las herramientas y conocimientos que ya poseen, cómo podrían dar respuesta a las actividades que se elaboraron de una forma tan diferente a la que ellos están acostumbrados.

A partir del diseño de la situación variacional, y los niveles en los que fue aumentando el trabajo con la variación, consideramos a la derivada en su concepto general, como la organización de las derivadas sucesivas que deberían interpretar los estudiantes.

Con todo lo expresado hasta el momento, nos planteamos la siguiente pregunta: ¿En poblaciones socioculturalmente diferentes, el surgimiento de las estrategias variacionales será ocasionado por el currículo matemático o surgirán exclusivamente de formas de pensamiento variacional?

Para llevar a cabo esta investigación nos trazamos un plan secuenciado que nos permitiría analizar a profundidad las investigaciones anteriores relacionadas con el estudio de la variación y el surgimiento de estrategias variacionales, así como los trabajos de donde podríamos obtener las actividades que conformaron la situación variacional que se presentó, con la idea de que no existía necesidad de la creación de una situación completamente nueva, si podíamos utilizar las ya elaboradas y adecuarlas a nuestros intereses y contexto. Para lograr esto, nos apoyamos en ideas presentadas en (Marcolini, 2003):

1. Se realizó una revisión sobre los estudios vinculados a la TSME llevados a cabo dentro del grupo de investigación y bajo el enfoque del Pensamiento y Lenguaje Variacional.

2. Determinamos las investigaciones que nos servirían de guía para la elaboración de la situación variacional y así poder seleccionar las actividades que las conformarían.
3. Aplicamos la situación didáctica a un grupo de expertos con el objetivo de perfeccionar las actividades para lograr nuestro objetivo.
4. Se aplicaron las actividades a estudiantes de Ingeniería de países como México y Cuba.
5. Se analizaron las respuestas que se obtuvieron por parte de los estudiantes para brindar las conclusiones con respecto a lo que investigamos.
6. Por último, llegamos a conclusiones e ideas de cómo continuar este análisis en futuras investigaciones.

Con todo lo presentado, pasamos a conocer la historia y los inicios de esta investigación.

El camino recorrido durante la investigación y plasmado en el presente documento, lo estructuramos en cuatro capítulos:

En el capítulo 1, describimos la problemática en la cual registramos nuestro trabajo y los antecedentes que nos llevaron a querer realizarlo. Comentamos los objetivos que queremos alcanzar, las preguntas que nos realizamos ante toda la evidencia que surgía luego de la investigación y la estrategia y línea de investigación que nos guiaría para lograr dichos objetivos y poder llegar a las conclusiones de nuestra búsqueda.

En el capítulo 2 mostramos la metodología que utilizamos para obtener la información que necesitamos, mostrando la selección de las actividades que conformaron nuestra situación didáctica, la población donde la aplicamos y comentamos sobre el método de investigación que nos llevaría a alcanzar los valores esperados.

En el capítulo 3 mostramos un análisis detallado de cada actividad, así como de los apartados de cada una para mostrar la situación en la que se encuentran los estudiantes de las poblaciones seleccionadas. Iniciamos con los estudiantes de la UPIITA – IPN, México y luego con los estudiantes de la Universidad de Camagüey “Ignacio Agramonte Loynaz”, Cuba.

En el capítulo 4, brindamos un análisis no tan detallado como en el capítulo anterior, pero sí un estudio de las actividades donde pudiéramos establecer semejanzas y deferencias cometidas por los estudiantes en la solución de sus tareas. Llegamos a conclusiones que responden a las preguntas que nos trazamos desde el inicio de la investigación.

Capítulo 1. Presentación y planteamiento del problema y pregunta de investigación

1.1 Introducción.

En este capítulo describiremos la problemática que nos llevó a la realización del presente trabajo. Los antecedentes, intereses; analizando diferentes aspectos que llevaron a la elaboración de las preguntas de investigación, así como las hipótesis que consideramos presentar y para lograr todo un entendimiento, narraremos la importancia y la línea de trabajo que nos permitió llegar a los resultados que mostraremos.

1.2 Antecedentes de investigación y motivación.

En la actualidad, en los salones de clases de bachillerato y de universidad, las clases de Cálculo se han convertido en la impartición de conceptos y reglas que los estudiantes deben aprenderse para poder aplicar en las diferentes actividades académicas que se les presenten. Podemos verlo en el trabajo con derivadas, donde al conocer la expresión a analizar, aplican las reglas para obtener las derivadas que se les indiquen, pero sin tener un significado real para el proceso que están realizando, solamente lo ven como un tema más a aprobar en su año académico. Para los estudiantes universitarios, esto representa una frustración, ya que no consideran que sea un tema que los forme como profesionales, considerando que no podrán aplicar los conceptos para enfrentar y/o resolver problemas de la sociedad.

Investigadores de diferentes países en el campo de la Matemática Educativa, han reportado situaciones similares a la expresada con anterioridad y a la vez, demostrado la importancia del Cálculo en el desarrollo de la sociedad y en sus diversas aplicaciones en la ciencia y la tecnología. No obstante, a pesar de las demostraciones que implican su importancia, investigaciones en la misma rama muestran que a pesar de cursar varias asignaturas de Cálculo, los estudiantes no logran una comprensión satisfactoria de los conceptos e ideas más relevantes presentes en este. (Caballero, 2012)

Ejemplos de esta situación las podemos ver en (Marcolini, 2003), (Sánchez-Matamoros, García, Mercedes, & Llinares, 2008), (Cantoral, Teoría Socioepistemológica de la

Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento, 2013), (Caballero, 2012), etc., donde las estrategias y argumentos que utilizan los estudiantes y profesores dan muestra de la carencia de significado que tiene para ellos la derivada, usando algoritmos memorísticos y sin considerar las ideas variacionales que forman este concepto. En estas mismas investigaciones, se mostró especial interés ante el análisis que realizaran con respecto a la tercera derivada y el estudio de todas las estrategias que podían presentar para hablar de ella. Los reportes fueron, que la mayoría de los estudiantes o profesores a los que se les aplicaron las actividades, no tenían referencias para argumentar sobre el comportamiento de la tercera derivada, solamente los especialistas en el tema pudieron realizar un análisis gráfico. (Caballero, 2012)

Estos reportes nos llevan a interpretar que existe una falta de significación para estos temas, que traen implícito y necesario el uso de estrategias variacionales para dar respuestas al análisis del cambio y la variación, causa que a su vez originó investigaciones donde se elaboraron situaciones de aprendizaje que se puedan introducir dentro del discurso Matemático Escolar (dME), para así, motivar el desarrollo de ideas variacionales por parte de los estudiantes y así se expresa en (Reséndiz, 2004) citado en (Caballero & Cantoral, 2013)

Investigaciones como (González, 1999), (Chimal, 2005), (Acuña, 2007), (Marcolini, 2003), (Caballero, 2012), (Báez, Martínez-López, Pérez, & Pérez, 2017), etc., son ejemplos de trabajos que se ocuparon del diseño de actividades que propiciaran el desarrollo de estrategias variacionales con diferentes grados de dificultad por parte de estudiantes de diversos niveles educativos, pero que a la vez, además de notificar el uso de dichas estrategias para dar solución a las actividades, reportaron las dificultades que presentaron los mismos en las soluciones y el interés de conocer las causas que las provocan, presentando como causa mayor al dME cuando se notifica que un porcentaje elevado de estudiantes utilizan conceptos, teoremas factuales o estrategias que no demuestran un pensamiento variacional.

Con las investigaciones mencionadas y los ejemplos que utilizan observamos la dificultad presente en los estudiantes y maestros para trabajar temas relacionados a la variación y a su vez desarrollar un pensamiento variacional. Vemos que los estudios que se han realizado, tienen como objetivo, la construcción de conocimientos matemáticos a través de la aplicación de situaciones variacionales o el análisis de estas para determinar las estrategias de solución que usan sus poblaciones y demostrar si existe un desarrollo del pensamiento variacional, pero en estos estudios no se reportaron aplicaciones de las actividades en diferentes poblaciones de estudiantes o maestros donde se puedan comparar las estrategias variacionales que utilicen y poder determinar si estas están normadas solamente por el dME o por el conocimiento sociocultural presente.

La dirección por la que planteamos nuestra investigación va sobre la comparación y análisis de estrategias variacionales desarrolladas por estudiantes de dos países y poder así determinar si estas son ocasionadas por el currículo matemático o provienen exclusivamente de formas del pensamiento variacional.

Continuamos en la búsqueda de investigaciones donde pudiéramos ver la realización de esta comparación con las estrategias variacionales como centro de atención y notamos que si se realizaban comparaciones se trataban en poblaciones socioculturalmente parecidas como en (Ávila Godoy, Ávila Godoy, & Bravo Tapia, 2016) donde trazaron como objetivo investigar el papel del contexto de la enseñanza en la formación y desarrollo de los significados de los objetos matemáticos que construyen los estudiantes, específicamente los de ingeniería de una Universidad al Norte de la República Mexicana, haciendo hincapié en la elaboración de las actividades y brindando algunos resultados pero no todos. Este trabajo nos interesó por el tema que tratan, así como la población, estudiantes de ingeniería, pero no lo usamos como base, pues no tienen como objetivo comparar las estrategias de los estudiantes al realizar las actividades y estos últimos, son de una misma población sociocultural, lo que podría indicar que las respuestas podrían ser similares, pero eso lo dejaremos para próximos resultados de esta investigación.

Luego del análisis de varias investigaciones, vimos que las variables comparación de estrategias variacionales desarrolladas por estudiantes de diferentes países, en su conjunto no estaban reportados, por lo que consideramos es un tema de investigación innovador y que nos brinda datos muy interesantes. A partir de este punto, surgieron las interrogantes que guiaron nuestra investigación, con respecto a cómo obtendríamos los datos (situación variacional y medio), dónde lo aplicaríamos y cómo los analizaríamos.

1.3 Estrategias variacionales y los estudiantes.

En las investigaciones en Matemática Educativa, bajo la línea del Pensamiento y Lenguaje Variacional, se han reportado las dificultades que presentan los estudiantes ante situaciones variacionales presentadas, por lo que nos guiamos por estas para conocer hacia dónde debían dirigirse las actividades que aplicaríamos en búsqueda de estas dificultades ya reportadas.

(Chimal, 2005) citada en (Caballero, 2016), realiza su investigación con base en la perspectiva covariacional, diseñando actividades de llenado de recipientes donde encuentra que, en su mayoría, los estudiantes no hacen uso del concepto de derivada o pendiente, pero en muchos casos brindaron respuestas correctas.

Azcárate (1990, pg. 27) citado en (Marcolini, 2003), reporta que después de llevar a cabo unos tests en las últimas clases de Bachillerato acerca de los temas de derivadas y de integrales planteados a partir de representaciones gráficas, los resultados demostraron un nivel de éxito muy bajo. La mayoría de los estudiantes utilizaron la gráfica solamente para hallar una expresión algebraica que les resultara familiar y que luego podían derivar o integrar con las reglas ya conocidas por ellos, pero olvidaron por completo la gráfica inicial luego de iniciar el trabajo con la expresión algebraica.

En (Cantoral, Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento, 2013, pág. 197), se comenta sobre los problemas de visualización al presentar una serie de gráficas donde debían señalar solamente los intervalos donde la función y las derivadas, en un orden creciente, fueran positivas. Para el caso del análisis de la función original, se reporta que los estudiantes recuerdan (demostrando un aprendizaje memorístico, pero sin significado) que esta es positiva en los cuadrantes I y II, o sea, si está encima del eje de las *x*. Para los intervalos donde la primera derivada sea positiva, con frecuencia se presencia la confusión del signo de la primera derivada con el de la función original y otros estudiantes recuerdan la relación con el signo de la pendiente de la recta tangente, coincidiendo los intervalos positivos, donde la pendiente sea positiva. A partir del análisis de los intervalos para conocer dónde es positiva la segunda derivada, se demuestra la dificultad de los estudiantes, ya que alguno sí recurren a su memoria y asocian lo que están analizando a la concavidad que presenta la gráfica, pero sin dar una explicación de por qué podían utilizarlo. La actividad se complica más para los estudiantes (no solamente para ellos, sino para los profesores también) al tener que realizar el mismo análisis para la tercera derivada, donde no pudieron construir una respuesta convincente.

De forma general, investigaciones como Cantoral y Farfán, (1998), Arrieta y Díaz, (2015), Font, Godino y Gallardo, (2013) citados en (Báez, Martínez-López, Pérez, & Pérez, 2017), reportan la existencia de limitaciones ante el análisis del comportamiento y variación de gráficas; identificación de las cantidades que intervienen en una situación, cuáles cambian y cuáles permanecen fijas; determinación de las relaciones de dependencia entre dos variables; establecimiento de la relación entre razón de cambio y cociente incremental, y conversión del registro verbal al registro gráfico.

En Reséndiz (2005) citada en (Maury Mancilla, Palmezano Sarmiento, & Cárcamo Barriosnuevo, 2012), las dificultades detectadas en los estudiantes fueron: "determinación de las cantidades (variables y constantes) que intervienen en la situación, establecer relaciones de dependencia entre las variables, generar datos que debían consignar en una tabla, determinar los intervalos de variación de las variables y explicar los procedimientos utilizados para dar solución a las preguntas planteadas".

Tomamos las dificultades planteadas en las investigaciones aquí reportadas, como guía para la realización de una situación variacional que aplicaríamos en diferentes poblaciones de estudiantes, las cuales fueron seleccionadas por la característica de la investigadora: Profesora de Matemáticas en la Universidad de Camagüey "Ignacio Agramonte Loynaz" y estudiante de la Maestría del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav – IPN, por lo que representa dos poblaciones de fácil acceso, aunque completamente diferentes en muchos sentidos, fundamentalmente en el ámbito educativo.

A todo lo analizado hasta el momento, se le adiciona la idea, innovadora en la línea de Pensamiento y Lenguaje Variacional, de utilizar una herramienta de gestión de aprendizaje que nos permita aplicar las actividades a las poblaciones ya mencionadas, sin necesidad de la presencia de la investigadora y así obtener una mayor cantidad de información. Por resultar ser un tema nuevo en el grupo de PyLV, fue origen de grandes debates en los seminarios, pues se consideraba que se podía obtener más información si se les aplicaba la situación a los estudiantes a través de papel y lápiz, y que el investigador estuviera presente. En este trabajo, decidimos continuar con el uso de la herramienta como medio, ya que consideramos que por esta vía podíamos llegar a una mayor cantidad de estudiantes sin la limitante de que sólo fueran los que el investigador tuviera cerca.

Para obtener los datos que deseamos comparar, determinamos que aplicaríamos la situación variacional a estudiantes de carreras de ingeniería tomando en cuenta que estos reciben una mayor complejidad de la materia y estos estudiantes deberían ya haber pasado los cursos de Cálculo.

1.4 Cálculo Diferencial en las carreras de Ingeniería de México y Cuba

Tanto en México como en Cuba, los cursos de Cálculo se desarrollan en los primeros años de la carrera seleccionada por el estudiante. En México, los alumnos inician algunos conceptos de Cálculo Diferencial en el Bachillerato, pero en Cuba, su primer encuentro con este curso está ubicado en el primer año de la carrera. En ambos casos, el estudiante llega a los salones de clases de la Universidad, sin una base clara de lo que es el trabajo con las derivadas, ni estrategias desarrolladas para analizar el cambio y la variación.

A pesar de las dificultades con las que llega el estudiante a la carrera universitaria y el papel que juega del desarrollo del pensamiento variacional en la realidad y contexto de los futuros profesionales, en los planes de estudios de ambos países, se le dedica un solo semestre al Cálculo diferencial.

Figura 1: Ubicación de asignatura Cálculo Diferencial en México

Negro Currículo Base
Verde Currículo Propio
Azul Currículo Electivo
Rojo optativo

PLAN D ING. MECÁNICA
CURSO REGULAR DIURNO

Indicaciones generales del MES:
Carga lectiva máxima semanal. 26hrs. Primero a tercero.
20hrs. cuarto y quinto.
Exámenes finales máximo: 6 por año de primero a tercero.
4 por año cuarto y quinto.

PRIMER AÑO.

Curso Introductorio	1er.Sem	Eval	Vacaciones	2er.Sem	Eval	TrabSocial	Vacaciones	Total Curso
6	16	3	1	16	3	0	6	51

1er. Semestre (16 semanas)		2do. Semestre (16semanas)	
Matemática I (Cal dif. e Int. Univ y Multiv, Vec) (*)	96	Matemática II (*)	80
Inglés Fines Generales I	32	Inglés Fines Generales II	32
Álgebra lineal y Geom. Analítica. (*)	64	Química General	80
Informática I	32	Filosofía y Sociedad. (*)	64
Geometría Descriptiva	48	Física I(*)	80
Introducción a la Ingeniería Mecánica	48	Dibujo I	48
Historia de Cuba	32		
Electiva	32		
TOTAL HORAS.	**384**	**TOTAL HORAS**	**384**
HORAS / SEMANA:	**24**	**HORAS / SEMANA:**	**24**

(*) Con examen final

Educación Física I	48	Educación Física II	48

Figura 2: Ubicación de asignatura Cálculo Diferencial en Cuba

Como se comentó inicialmente y se puede comprobar en las imágenes presentadas, en ambos países, se trabaja en el primer semestre la asignatura Cálculo diferencial e integral, y tomando como ejemplo documentos docentes de Cuba podemos ver que, dentro de las habilidades planificadas de la Disciplina, no se encuentra el desarrollo del pensamiento variacional por parte de los estudiantes para su futura utilización en su vida profesional. (Anexo 1)

Con esta información, podemos seguir viendo a México y Cuba como dos países con características diferentes, pero por lo menos, en el ámbito educativo de la planificación de las asignaturas, la ubicación determinada para el Cálculo diferencial es la misma en ambos y con un solo semestre.

Con todo lo visto, nos trazamos la siguiente pregunta de investigación: ¿existirán similitudes o diferencias en las estrategias variacionales desarrolladas por estudiantes de carreras de ingeniería de México y Cuba?

Con todo lo analizado hasta el momento, nos trazamos la tarea de realizar una situación variacional que se aplicaría a estudiantes de carreras de Ingeniería de México y Cuba, con el objetivo de comparar las estrategias variacionales que utilizaran en el proceso de respuesta de las actividades, pero para hacer esta comparación, debemos hacerlo desde un punto de vista teórico.

1.5 Socioepistemología

Se tomó como referente teórico a la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), la cual se interesa por entender las razones, los procedimientos, las explicaciones, las escrituras o las formulaciones verbales que el alumno construye para responder a una tarea matemática, del mismo modo que se ocupa por descifrar los mecanismos mediante los cuales, la cultura y el medio contribuyen en la formación de pensamiento matemático y también porque le interesa entender, aun en el caso de que la respuesta a una pregunta no corresponda con el conocimiento que se busca, lo que considera una respuesta matemáticamente correcta, las razones por las que su pensamiento matemático opera como lo hace (Cantoral, Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento, 2013).

La TSME se ocupa entonces, específicamente, del problema que plantea la construcción social del conocimiento matemático y el de su difusión institucional (Cantoral, Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento, 2013), ya que el problema que motiva a nuestra investigación es identificar las estrategias variacionales que surgen en los estudiantes al presentárseles una situación variacional y ver si las mismas tienen una influencia institucional (guiándonos por el currículo matemático) o son pensamientos variacionales presentes en todo ser humano influenciado por la sociedad y las prácticas de su actividad diaria.

Prestamos especial atención al énfasis que la Socioepistemología ha puesto en las prácticas sociales, lo que permite vislumbrar la importancia de salir de un dominio propiamente matemático, que es el más usado en un salón de clases y en el que deberían incorporar prácticas de referencia que motiven al estudiante a dar sentido y significación a los conceptos que estudian y relacionarlo con respecto a su futuro y cómo lo usarán, por ejemplo, en Ingeniería, Medicina, etc. Es pues, la praxis desarrollada dentro de estos contextos, la que favorece (y permite) el surgimiento y significación de un determinado concepto, noción, proceso o procedimiento. Particularmente en el Cálculo, esta praxis hace referencia a las prácticas propias de la variación, que surgen de la necesidad de predecir estados futuros, aspectos que son atendidos por la línea de investigación del PyLV (Caballero, 2016).

Es claro, por todo lo que hemos analizado hasta el momento, que la Socioepistemología centra su atención en la noción de práctica, como se muestra en (Caballero, 2016), por estar ligada a las bases de la actividad humana y el desarrollo de estas es normado por prácticas sociales, las cuales entenderemos no como la acción (por ejemplo, medir), sino como la orientación estratégica de la práctica (por qué medimos y por qué lo hacemos de esa manera).

Todo el desarrollo de prácticas y su comportamiento, podemos verlo agrupado en el esquema de anidación progresiva de prácticas, donde se muestra la jerarquía de las prácticas que miden la construcción social del conocimiento matemático mediante la problematización del saber matemático transversal a ellas, como se reporta en Cantoral y Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini (como citó Caballero, 2016).

Figura 3: Esquema de la anidación progresiva de prácticas (Cantoral, 2013; Caballero, 2016)

Basándonos en este esquema, es que analizamos la importancia que le ha puesto la Socioepistemología a las prácticas sociales, vislumbrando la necesidad de salir de un contexto puramente matemático y adaptarlo a prácticas de referencia como la Ingeniería, la Toxicología, la Física, etc. Guiándonos por este criterio es que interpretamos las respuestas de los estudiantes ante las preguntas de la situación, donde veremos, primeramente, las acciones que desarrollen para dar respuesta a las actividades y perfilar una práctica que podamos considerar como orientadora de la práctica de referencia de los estudiantes de ingeniería.

1.6 Mirando desde el Pensamiento y Lenguaje Variacional

De acuerdo con lo planteado en Caballero (2012), el Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV) surge como línea de investigación en la Matemática Educativa, para comprender los fenómenos de enseñanza – aprendizaje del conocimiento matemático propio del Cálculo y el Análisis, enfatizando en el carácter variacional de las ideas matemáticas y no únicamente en su manejo simbólico y analítico. De esta manera, son las prácticas propias de la variación las que dotan de significado a los conceptos matemáticos y los procedimientos que se asocian a ellos. La idea base de esta línea es el estudio del cambio y la variación, nociones que dieron vida y permitieron el desarrollo de las ideas del Cálculo.

Apoyándonos en los planteado por Marcolini (2003), el Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV) estudia los fenómenos de enseñanza y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida. Pone particular atención en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con los que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales. Es una línea de investigación que posee una triple orientación. Por un lado, se ocupa de estructuras variacionales específicas desde un punto de vista matemático y epistemológico, en segundo término, estudia las funciones cognitivas que los seres humanos desarrollan mediante el uso de conceptos y propiedades matemáticas del cambio; en tercer lugar, tiene en cuenta los problemas y situaciones que se abordan y resuelven en el terreno de lo social mediante las estructuras variacionales consideradas en la escuela, el laboratorio y la vida cotidiana.

Cantoral, Sánchez y Molina, (citados en Caballero, 2012), argumentan que por cambio se entiende a la modificación de estado, apariencia, comportamiento o condición de un cuerpo, sistema y objeto, en tanto que la variación en una situación específica implica conocer qué es lo que cambia, cuánto cambia y cómo cambia.

Con las bases del pensamiento y lenguaje variacional, la idea de cambio puede analizarse de diferentes formas: mediante tablas con valores numéricos que representen una función y que el estudiante tenga que analizar los cambios de signos, dónde es creciente y dónde decreciente para poder argumentar sobre la primera derivada, o puede analizarse mediante una gráfica donde no conozca la expresión matemática que la caracteriza y así analizar las diferencias de las alturas en distintos momentos (Caballero, 2012), o generalizando "pueden plantearse problemas en forma verbal, de tal modo que el pensamiento de los estudiantes imagine comportamientos", comenta Gonzáles(como se citó en Caballero, 2012) .

Dentro de la TSME, la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV), se ocupa de estudiar los fenómenos de enseñanza y de aprendizaje del conocimiento matemático propios de la matemática del cambio, como plantea Cantoral (citado en Caballero, 2016). Ampliando el sentido, estudia las formas de pensar, argumentar, organizar, tratar y comunicar matemáticamente fenómenos de cambio que no es lo mismo que cuando nos referimos a la variación. La primera la podemos analizar como la modificación de un estado, posición, forma, etc. pero la variación la analizamos como una cuantificación del propio cambio, la medida que usamos para decir cuánto cambió algo.

Por otra parte, la variación puede ser de naturaleza diversa, a lo que se denomina órdenes de variación, dependiendo qué cambio se cuantifique. Por ejemplo, si consideramos un objeto en movimiento y analizamos su posición respecto al tiempo, el cambio de posición corresponde al primer orden de variación, luego, el cambio de dicho cambio de posición se refiere al segundo orden de variación y así sucesivamente, dándonos entrada a ver el concepto de derivada como una sucesión de estas, según lo que estemos analizando, por ejemplo en la asignatura Física estos órdenes de variación corresponden con la velocidad y la aceleración (Caballero, 2016) y si continuamos analizando, el cambio del segundo cambio, se refiere al tirón, no muy mencionado en las clases, demostrando la dificultad no solo del estudiante para argumentar sobre el significado de la tercera derivada, sino también la dificultad presente por parte de los maestros para argumentar y explicar sobre ella. Al ver todos los análisis de los cambios, nos percatamos que existe un interés en seguir conociendo lo que pasará, o sea, en una necesidad de predecir lo que puede ocurrir en un estado futuro, siendo consciente de que no podemos adelantar el tiempo, pero sí queremos conocer qué puede pasar.

Es centrado en el estudio y análisis del cambio y la variación en la que trabajamos en esta investigación, a través de actividades donde los estudiantes tendrán que hacer uso de estrategias variacionales que demostrarán o no el desarrollo y uso de pensamiento variacional y para poder determinar cuáles corresponden o no a este pensamiento, se requieren criterios que permitan realizar esta diferenciación (Caballero, 2012).

Para ello, nos guiamos por la caracterización de los elementos del Pensamiento y Lenguaje Variacional desarrollado en Caballero (2012), resultado de su análisis de trabajos sobre el PyLV, que permitieron observar que los elementos que caracterizan al PyLV no viven de manera aislada dentro de los diseños de las situaciones de variación, ni tampoco en lo que se refiere al pensamiento variacional. Estos elementos interactúan, y esta interacción es la que permite generar el desarrollo del pensamiento variacional.

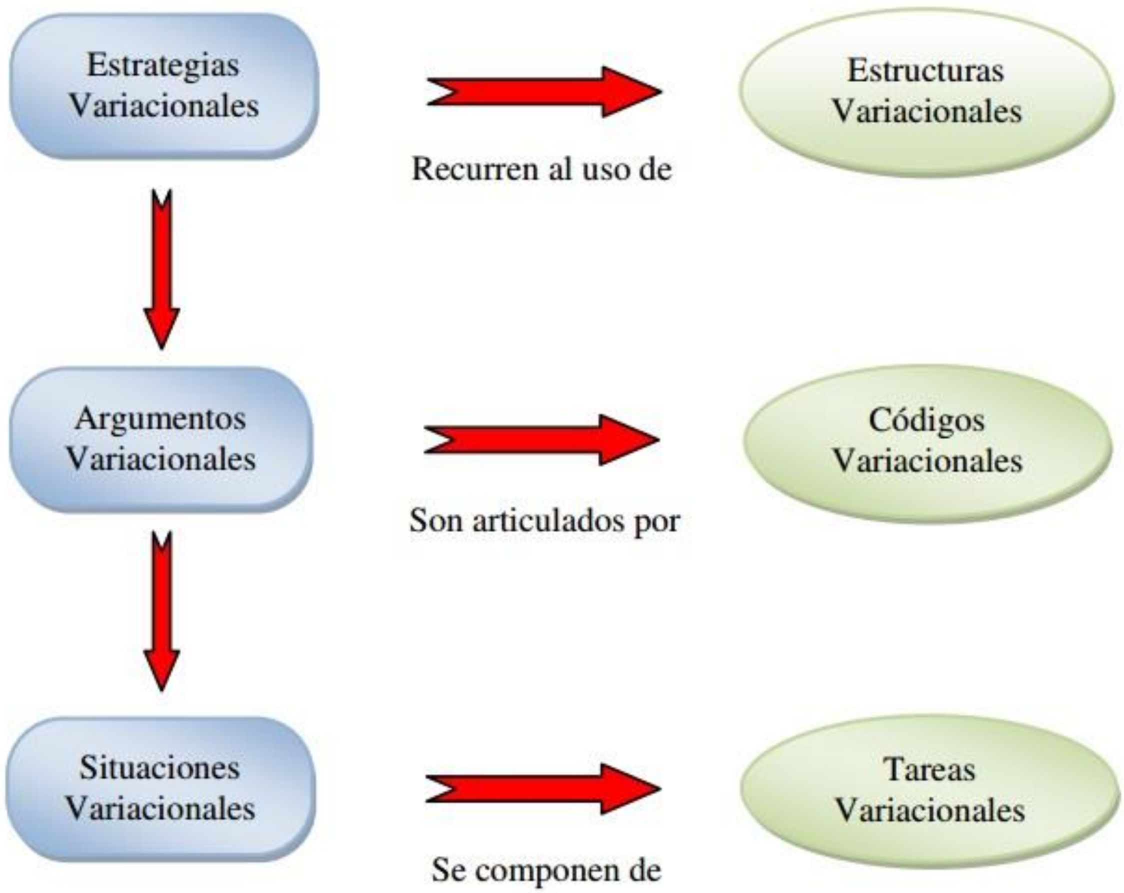


Figura 4: Modelo de interacción de los elementos PyLV. (Caballero, 2012)

Como podemos ver en el esquema, son las estrategias variacionales las generadoras del pensamiento variacional, pero que a su vez se apoyan en uno o varios elementos variacionales. Estas estrategias variacionales recurren al uso de estructuras variacionales para analizar el cambio y la variación presente en un fenómeno variacional y que necesita del uso de argumentos variacionales para su explicación, los que podemos ver con los códigos variacionales que se presenten. De esta forma, una situación variacional es resuelta por medio del uso de argumentos variacionales, y se caracteriza por el empleo de estrategias variacionales. Por otra parte, estas situaciones pueden ser dividas en una o más tareas variacionales, lo que permite organizar el estudio de la variación de las situaciones variacionales en acciones y objetivos más específicos dentro de contextos particulares (Caballero, 2012).

Como se demuestra en lo expresado anteriormente, se muestra la importancia de las estrategias variacionales como un paso a identificar para conocer si se está desarrollando un pensamiento variacional al solucionar una actividad, uno de nuestros objetivos en el trabajo para poder compararlas en las poblaciones, por lo que consideramos necesario, retomar lo planteado en Caballero (2016): "Un elemento central del modelo es el uso de las estrategias variacionales, estas consisten en una forma particular de razonar y actuar ante una situación de variación para tratar con el cambio y la variación" (p. 31).

Las estrategias variacionales reportadas en Caballero (2012) y (2016) son:

- ✓ Comparación: Asociada a la acción de establecer diferencias entre estados, uno anterior y uno posterior, o bien, dos estados de dos fenómenos diferentes, lo que permite identificar y analizar el cambio. Por ejemplo, dados dos segmentos A y B la comparación consiste en evaluar cuál de los dos es más largo, incluso determinar cuánto es más largo uno respecto al otro.
- ✓ Seriación: Consiste en analizar estados consecutivos y no únicamente dos, con el objetivo de encontrar una relación o propiedad entre ellos que describa el comportamiento variacional en esos estados. Por ejemplo, dada la secuencia numérica (1, 2, 4, 8, 16) la seriación consiste en determinar el patrón de crecimiento de los números a partir de analizar los incrementos de un elemento a otro. De modo tal que se determina que los valores de la secuencia corresponden a un comportamiento exponencial, en concreto 2^n. Nótese que dicho patrón se determina al comparar los incrementos en todos los elementos, no bastaría considerar únicamente dos.
- ✓ Predicción: Asociada a la acción de anticipar un estado o valor con base en el análisis de la variación en estados previos, de manera que se sintetiza y abstrae esta información en modelos predictivos. Por ejemplo, dada una sucesión de números se pregunta por el valor de una posición posterior o la posición que tendrá un determinado valor.
- ✓ Estimación: Asociada a la acción de anticipar comportamientos o tendencias en la variación del fenómeno de manera global. Por ejemplo, en el análisis de temperaturas, la estimación se usa pasa saber si habrá un crecimiento o disminución en un periodo determinado, en tanto que la predicción para determinar los valores máximos o

mínimos de la temperatura o bien el valor de la temperatura en un tiempo determinado.

Para el uso de estas estrategias variacionales iniciaremos como se ve en Caballero (2016), con la comparación de estados para cuantificar e identificar el cambio y con la seriación, vista como una colección de comparaciones, según reporta López (citado en Caballero, 2016), donde tenemos que analizar varios estados, no dos solamente. Luego pasamos a la estimación y predicción como medio para organizar la información que se obtenga con el objetivo de predecir comportamientos, causa fundamental en cualquier proceso humano, la necesidad de la predicción para anticiparse y tomar decisiones. Podemos concluir, que el desarrollo del pensamiento variacional, lo ubicaremos en el trabajo con una situación variacional, que necesitará del desarrollo de estrategias variacionales, las cuales serán medidas con el uso de argumentos y códigos variacionales que demuestren el análisis del cambio y la variación para dar respuesta a la situación variacional.

> Estas estrategias permiten atender los tipos de estudio del cambio presentados, donde la identificación del cambio comienza con la estrategia de comparación, ya que permite identificar modificaciones en los valores de las variables (la forma, la posición y, en general, las cualidades que se estudian). La caracterización cualitativa de la naturaleza de cambio precisa de la estrategia de seriación, pues a través del estudio de varios estados sucesivos se determina, por ejemplo, si el crecimiento es constante, es cada vez mayor, es cada vez menor, etc. La caracterización cuantitativa de la naturaleza de cambio recurre tanto a la comparación como a la seriación, pues con la primera se determina la cantidad de cambio de un estado a otro, en tanto que la segunda el patrón de crecimiento o decrecimiento del cambio. Finalmente, la información obtenida del estudio del cambio mediante las estrategias variacionales anteriores permite la anticipación de estados futuros con base en la predicción para el caso de estados puntuales y la estimación en comportamientos globales. (Caballero, 2016, p. 32)

Relacionando lo expresado y el esquema de anidación de prácticas, obtenemos los planteado en (Caballero, 2016):

Práctica Social	Prædicere
Práctica de referencia	Ingeniería
Práctica	Predicción Estimación
Actividad	Comparación Seriación
Acción	Ordenar, Agrupar, Medir, Girar, Mover, etc.

Tabla: Anidación de prácticas del PyLV

Guiándonos con los elementos ya mencionados en este capítulo, decidimos pasar al desarrollo de una situación didáctica, en la que incluimos actividades donde se necesitara la articulación de los elementos para poder determinar la presencia o no de un pensamiento variacional por parte de los estudiantes.

Capítulo 2. Metodología de investigación

En el presente capítulo, mostramos la metodología utilizada para la elaboración de la situación didáctica, las actividades desarrolladas en sí y detallamos más de las poblaciones donde se aplicaron las actividades.

2.1 Diseño de la situación variacional.

Como se comentó en el capítulo anterior, el interés de esta investigación está presente en conocer y poder comparar las estrategias variacionales que utilizarán estudiantes de distintos países y analizar si estas presentan similitudes y/o diferencias y a su vez si están normadas por el currículo matemático propio de cada sistema educativo o por el pensamiento variacional propio en cada ser humano.

Para lograr este análisis, se decidió diseñar una situación didáctica valorando que, en esta, estuvieran presentes todos los elementos de la caracterización del Pensamiento y Lenguaje Variacional resumidos en (Caballero, 2012). Considerando la trayectoria maravillosa de investigaciones reportadas dentro de la línea de PyLV y la serie de trabajos donde se desarrollaron actividades que ayudaran al rediseño del dME, decidimos seleccionar actividades de trabajos de investigación que cumplieran con la necesidad en sus respuestas de acudir a los elementos del PyLV y así poder analziar las estrategias variacionales que utilizarían los estudiantes.

Para nuestro análisis, decidimos utilizar como base, la tesis de maestría no publicada "Un estudio de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en profesores de bachillerato" (Caballero, 2012), donde ya analizamos que se hace un estudio bien detallado de los trabajos mencionados con anterioridad y utiliza las actividades con un nuevo contexto, por lo tanto, más cercano al nuestro.

A la par de este trabajo analizamos también la tesis doctoral "Ingeniería Didáctica en Física Matemática", (Marcolini, 2003), donde se presenta una situación didáctica que utiliza como práctica de referencia la ingeniería, lo que captó enseguida nuestra atención por la relación que podrían ver los estudiantes, al poder realizar análisis variacionales con respecto a temas que ven en su propia carrera y que podrán utilizar en su cotidiano como profesionales.

Otro trabajo fue el documento de Memoria Pre-Doctoral “Los Sistemas de Referencia: El papel de la causalidad y la temporalización en el tratamiento del cambio y la variación. Un estudio socioepistemológico de su construcción”, (Caballero, 2016), ya que se le da seguimiento al trabajo (Caballero, 2012).

Consideramos que, para el cierre de la situación didáctica, debíamos incluir la actividad propuesta en (Cantoral, Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento, 2013), causa de varios análisis por las confusiones y dificultades que se presentan tanto en estudiantes como maestros a la hora de argumentar sobre el cambio y la variación en un orden tres.

La combinación de estos trabajos dio la oportunidad de la elaboración de la situación didáctica que se presenta en esta investigación.

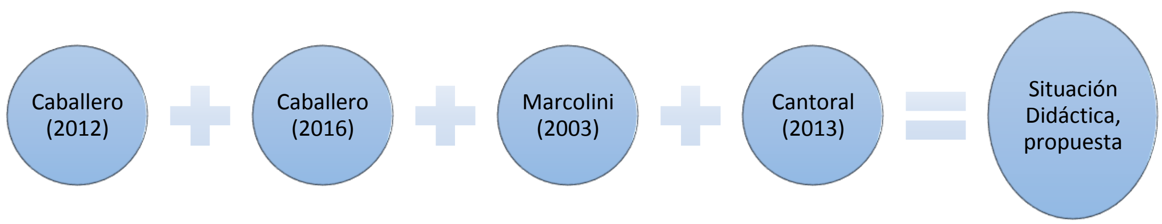


Figura 5: Bases investigativas de Situación variacional.

De los trabajos de investigación ya mencionados, se seleccionaron un total de 10 actividades, a las cuales se les realizaron en algunos casos, modificaciones para contextualizarlas más en los tiempos actuales y en la búsqueda de nuestros intereses. Para comprobar que las actividades cumplían con los objetivos propuestos por nosotros, la situación se le aplicó a un grupo de expertos que nos brindaron resultados muy interesantes y que ayudó a rediseñarla en vísperas de alcanzar nuestros objetivos con los estudiantes, así como nos apoyó en el análisis de las diferentes estrategias variacionales que podrían surgir por parte de estos últimos.

De las 10 actividades, seleccionamos 8 basándonos en el tiempo de solución y en el orden que debían tener las actividades. Con respecto al tiempo de solución, nos guiamos por el tiempo que demoraron los expertos en realizar la situación. El menor tiempo de solución fue de una hora y media, lo que provocó preocupación en parte porque no se quería perder el interés del estudiante y con este mismo objetivo, se organizaron las actividades en bloques con la siguiente descripción:

Bloque 1: Llenado de recipientes

En este bloque se seleccionaron dos actividades desarrolladas en Caballero (2016, pág. 86) para lograr caracterizar un comportamiento lineal, a partir de considerar incrementos constantes o comparar la razón de cambio, tomando en cuenta como tarea variacional la construcción de gráficas con la variación como punto de referencia.

Bloque 2: Hablando con las gráficas

En este bloque se seleccionaron dos actividades desarrolladas en Caballero (2012, pg. 52 - 57) considerando la tarea variacional Análisis gráfico con la variación como punto de referencia, con el objetivo de extraer información de las gráficas relativa a la variación de primer y segundo orden. El nombre del bloque fue inspirado al escuchar a la Dra. Gabriela Buendía en una exposición en un grupo de trabajo desarrollado en la EIME XIX, donde comentó sobre un artículo presentado por ella con ese nombre debido al poder de interpretar a las gráficas como si estuviéramos hablando con ellas y como las actividades de este bloque quieren alcanzar ese objetivo, obtener información de las gráficas, nos pareció muy llamativo dicho nombre.

Bloque 3: Orden superior

En este bloque se seleccionaron cuatro actividades, tres desarrolladas en Marcolini (2003, pg. 88, 91, 94) y como cierre la actividad propuesta en Cantoral (2013, pg. 197). En estas actividades, se hace un bosquejo de lo trabajado en las actividades anteriores con respecto a los primeros órdenes de variación, pero se introduce el trabajo con el tercer orden de variación.

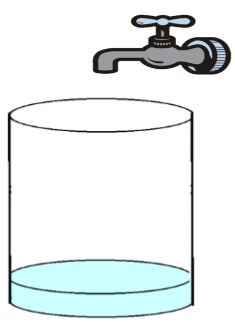
2.2 Las actividades.

En esta sección presentamos las actividades propuestas, haciendo hincapié en los objetivos particulares de cada uno y lo que queremos lograr para poder contrarrestar a los resultados derivados de las respuestas de los estudiantes.

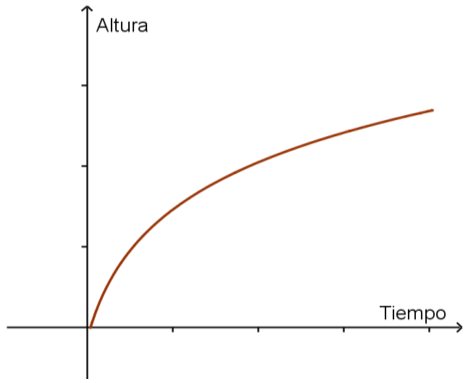
Para cada actividad, elaboramos una tabla con las posibilidades estrategias variacionales (EV) que podrían surgir en las respuestas de los estudiantes y las posibles respuestas que también podrían aparecer que no consideraremos como EV, esto como ya se comentó anteriormente, nos guiamos por las respuestas ofrecidas por los especialistas a los que se les aplicó inicialmente la situación.

Actividad 1

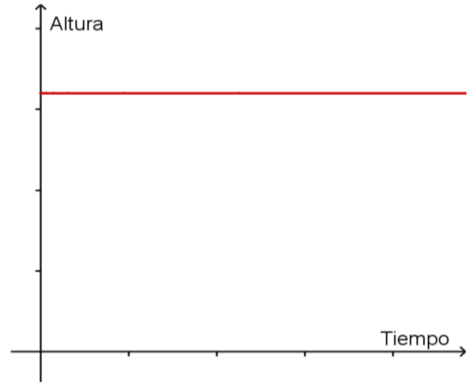
Un recipiente vacío de forma cilíndrica es llenado mediante una llave que deja salir agua a flujo constante. En la imagen siguiente se muestra la altura que alcanza el cuerpo del agua al transcurrir un segundo de tiempo.



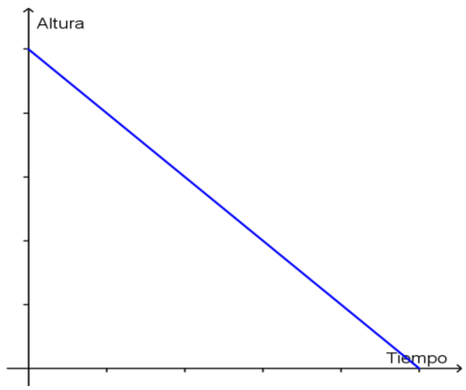
1. ¿Cuántos segundos considera tardará en llenarse el recipiente? Justifica tu respuesta.
2. A continuación, presentamos una serie de gráficas que corresponden a la forma de llenado de recipientes. Determina cuál de ellas cumple con la forma de llenado del recipiente en cuestión. Argumenta tu elección y explica por qué las otras gráficas no corresponden a la forma de llenado del recipiente analizado.



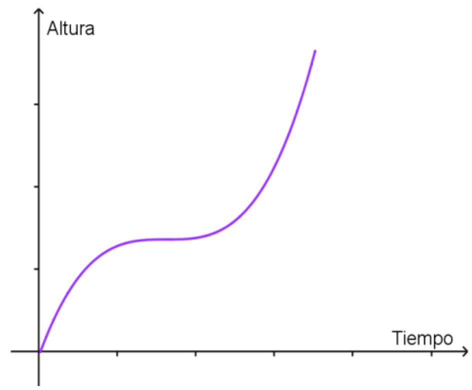
a)



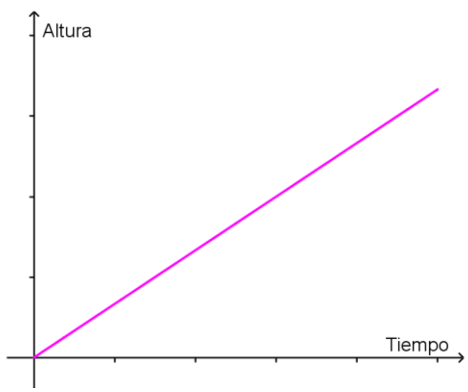
b)



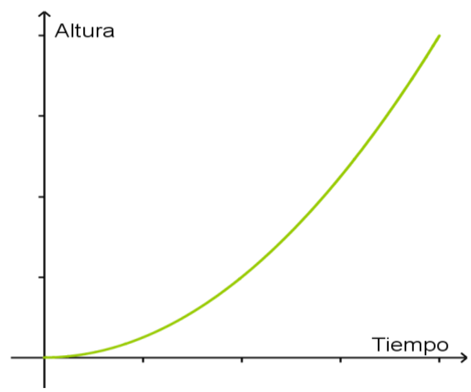
c)



d)



e)



f)

Esta actividad fue seleccionada de Caballero (2016). Modificada con respecto a la cantidad de apartados presentados en la actividad original. Se seleccionaron estos dos apartados nada más, pues se quiere que el estudiante inicie con el análisis del comportamiento lineal en el apartado 1 y lo relacione en la búsqueda de este mismo comportamiento lineal desde el punto de vista gráfico en el apartado 2, y se pregunte a sí mismo sobre los comportamientos no lineales que se muestran también gráficamente, por qué no corresponden con lo que expresa en el apartado 1.. En esta actividad se consideró la Tarea variacional Tabulación como variación numérica, pues se le asigna un valor a la variable altura para observar su posición al transcurrir el tiempo y que así los estudiantes puedan utilizar estrategias como seriación, estimación o comparación.

En el apartado 1, se proporciona un recipiente de forma cilíndrica, donde se le especifica al estudiante que la parte señalada en azul es la altura que alcanza el agua al transcurrir un segundo con la llave abierta. Tiene como objetivo que analice y determine como variables a la altura y el tiempo para poder determinar qué tiempo demorará en llenarse el envase utilizando como unidad de medida el espacio pintado de azul. Al nivel de acción pueden utilizar varios códigos variacionales para ir midiendo el cambio que ocurre en el nivel del agua cada segundo.

En el apartado 2 el estudiante se enfrenta a un análisis gráfico con la variación como punto de referencia pues se le presentan un conjunto de gráficas para que los determinen patrones y analiza cuál de ellas cumple con la forma de llenado del recipiente anterior. El objetivo de este apartado es que se pueden identificar que esa misma unidad de medida seleccionada en el apartado anterior, corresponde al cambio constante que verán en la gráfica que corresponde al llenado del envase presentado y analizar que no es constante en la forma deseada, el cambio que ocurre en las restantes gráficas. Podemos ver como estrategia variacional el análisis que realicen con respecto al cambio de la altura, cuánto y cómo cambia, con frases que lo apoyen como: “altura cambia más rápido”, “altura no cambia”, “altura decrece”, etc.

A continuación, se presentan las tablas con las estrategias variacionales que se esperan por parte de los estudiantes para determinar si tienen un pensamiento variacional diferente al visto ya en el análisis de los planes de estudio.

Apartado 1:

Estrategias variacionales	Selecciona como variables a analizar altura/tiempo y utiliza estrategias variacionales como estimación, seriación o comparación.
	Selecciona como variables a analizar volumen/tiempo y utiliza estrategias variacionales como estimación, seriación o comparación.

No Estrategias Variacionales	Argumentos que no demuestran un pensamiento variacional: operatividad con respecto a las fórmulas y procedimientos mecánicos en matemática.
	No respuesta.

Apartado 2:

Estrategias variacionales	Selección de gráfica e, con argumentación del porqué de su selección, donde consideramos las palabras que utiliza para ver si demuestran estrategias variacionales.
	Selección de gráfica c, con argumentación del porqué de su selección, considerando el razonamiento que se pueda aplicar.
No Estrategias Variacionales	Selección de las gráficas a, b, d y f sin justificación.
	Selección de gráfica b argumentando que es constante.
	No respuesta.

Actividad 2

Considera los siguientes recipientes A y B (con forma cilíndrica), C y D (con forma "cónica"). Los cuatro recipientes son llenados con agua con el mismo flujo constante.


Recipiente A


Recipiente B


Recipiente C


Recipiente D

1. ¿Qué diferencia hay en el crecimiento de la altura del agua de los recipientes?

2. Bosqueja, en el mismo plano cartesiano, las gráficas $h(t)$ (altura en función del tiempo) asociada con el llenado de los recipientes A, B, C y D (los recipientes A y B, tienen diferentes dimensiones, pero misma capacidad). Compara las gráficas y escribe todo lo que puedas concluir sobre ellas. (Recomendamos utilizar diferentes colores para las gráficas).

3. Bosqueja, en otro plano cartesiano, la tasa de variación o velocidad de cambio de $h(t)$, para cada uno de los casos anteriores. Compáralas y describe su comportamiento en relación con las gráficas de $h(t)$ obtenidas en el apartado 2.

Esta actividad fue creada y modificada de dos actividades de (Caballero, 2016) y se le incluyó un apartado seleccionado de (Marcolini, 2003), considerando que él estudiante podría ir adentrándose en lo que se les está pidiendo en las actividades. En esta actividad se consideraron las tareas variacionales Comparación de áreas y Tabulación como variación numérica, pues se presentan cuatro envases con formas diferentes donde se espera que los analicen ya sea por separado o por pareja entre los más parecidos y así poder determinar las diferencias que existen entre ellos y que así los estudiantes puedan utilizar la estrategia de comparación.

En el apartado 1, se les pide a los estudiantes que, analizando los envases que se les presentan, comenten la diferencia que hay en la manera en que crece la altura del agua. Para esta actividad, pueden retroalimentarse con el pensamiento que tuvieron en la actividad anterior al analizar las gráficas para determinar cuál correspondía al llenado del recipiente que se les mostraba y por qué las otras gráficas no. Nuevamente tendrán que iniciar especificando que las variables que deben analizar son la altura y el tiempo, considerando que en todos los recipientes el flujo de la entrada de agua es constante. A nivel de acción en la anidación de prácticas, esperamos que establezcan la altura de los envases y los comparen, pueden hacerlo analizando los cuatro envases por separado, o analizando los que tienen forma cilíndrica y los que tienes forma cónica por separado. Al seleccionar analizar por parejas, pueden ver en el caso de los envases de forma cónica que, para hacer la comparación, deben considerar no solamente la altura, sino que uno de los recipientes es más angosto que el otro, por lo que habrá variación en el llenado. Frases como la mencionada, son las que se esperan por parte de los estudiantes dentro del análisis de las estrategias variacionales. Lo mismo pasa con los envases de forma cónica, donde deben ver el inicio de cada uno y qué deben considerar para poder compararlos.

En el apartado 2, los estudiantes deben bosquejar en un mismo plano cartesiano, las gráficas relacionadas al cambio de la altura con respecto al tiempo al llenarse los recipientes de agua y comparar dichas gráficas para poder llegar a conclusiones sobre ellas, que les permitirían incluso considerar su pensamiento con respecto a la actividad 1. Como en este caso, ya tienen los recipientes y deben graficar el comportamiento del llenado, pueden ver la relación existente entre ambas actividades y asignar un significado que les permita argumentar más sobre lo que deben hacer. En este apartado se consideró la tarea variacional Construcción de gráficas con la variación como punto de referencia, apoyándose en los comentarios que hayan realizado en el apartado anterior al comparar los envases y esperando como estrategias variacionales: comparación y seriación

En el apartado 3, se les solicita a los estudiantes que bosquejen la tasa de variación o velocidad de cambio de h(t) para cada uno de los casos que analizaron anteriormente, que las comparen y describan su comportamiento en relación con las gráficas que obtuvieron en el apartado 2. La importancia de este apartado es que pueden reflexionar sobre lo que varía, respecto a qué y cómo varía, esto significa que distingan contextualmente lo que han visto en sus clases, como h(t) y h'(t). Podrán analizar lo que sucede en las gráficas y seguir argumentando sobre lo que analizan que está cambiando. Se consideró nuevamente la tarea variacional Construcción de gráficas con la variación como punto de referencia y con acciones como la graficación o explicación de lo que consideren qué es lo que cambia y cómo, que diferencien claramente los valores de la función de los valores de la variación poniendo a prueba la iniciativa para utilizar la idea intuitiva sobre la variación y el cambio y la capacidad que pueden tener para traducirlo en una gráfica. (Marcolini, 2003)

A continuación, se presentan las tablas con las estrategias variacionales que se esperan por parte de los estudiantes para determinar si tienen un pensamiento variacional diferente al visto ya en el análisis de los planes de estudio.

Apartado 1:

Estrategias variacionales	Comparar altura con respecto a la forma del recipiente, utilizando frases que demuestren un análisis variacional donde esté presente el cambio.
No Estrategias Variacionales	No respuesta.

Apartado 2:

Estrategias variacionales	Elaborar gráfica donde se vea el comportamiento del llenado de los recipientes cilíndricos y cónicos y la relación entre los recipientes de la misma forma.
No Estrategias Variacionales	La misma curva para los recipientes cilíndricos.
	Curvas con igual comportamiento (ambas cóncavas hacia arriba o ambas cóncavas hacia abajo) pero con transformación de estiramiento de la curva.
	No respuesta.

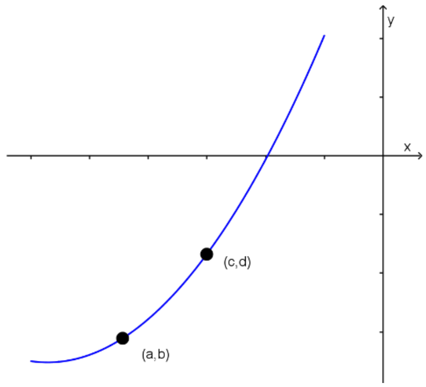
Apartado 3:

Estrategias variacionales	Curvas que demuestren la velocidad del cambio que sufrió la altura en cada recipiente con argumentos que lo demuestren
No Estrategias Variacionales	Curvas que demuestran que los estudiantes conocen que la curva original es una de la forma f(x) = ax, entonces la curva de la derivada será una constante y = a, demostrando que no le dio sentido al cambio de la altura y lo mismo en el caso de los recipientes cónicos, determinando que parecen parábolas por lo que la gráfica de la derivada es una función lineal.
	No respuesta.

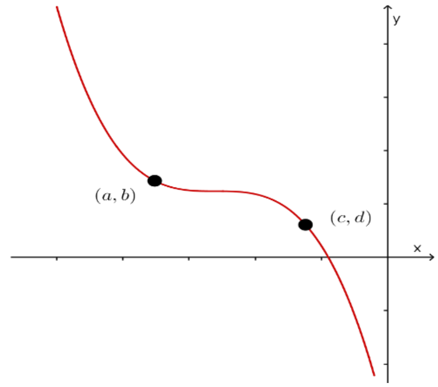
Actividad 3

A partir de las siguientes gráficas, determina si el valor numérico de la primera derivada en a es mayor, menor o igual al valor numérico de la primera derivada en c. En cada caso justifica el procedimiento realizado.

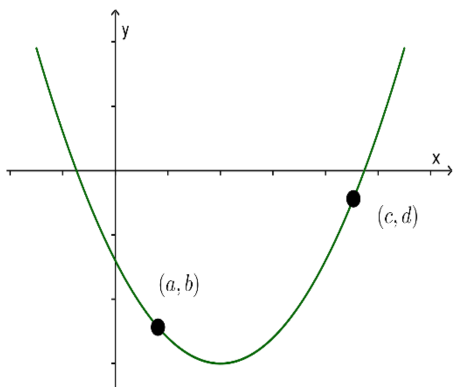
1.



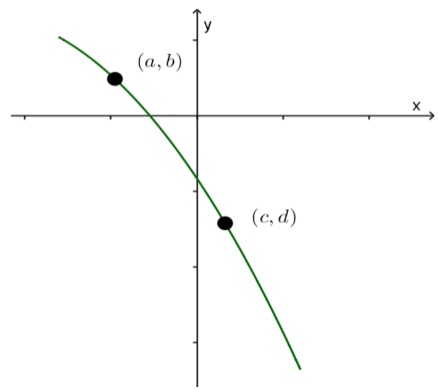
2.



3.



4.



Esta actividad fue seleccionada de (Caballero, 2012), modificada con respecto a la cantidad de gráficas que se piden que se analicen, pues en estas se pueden alcanzar las estrategias variacionales que se quieren analizar. Se consideró la tarea variacional Análisis gráfico con la variación como punto de referencia, recayendo la actividad, en que, los estudiantes deben obtener información relativa a la variación de cada una de las gráficas y como estrategia variacional, la comparación de la posición de los puntos y características de las gráficas en estos para poder dar las respuestas.

Tomando en cuenta lo planteado en (Caballero, 2012), la elección de estas gráficas se basó en la idea de analizar cómo los estudiantes procederían ante los distintos comportamientos que se muestran en las mismas, ya que, en algunos casos, hay gráficas con valores decrecientes pero cóncavas hacia arriba o hacia abajo y aunque en esos casos, la primera derivada es negativa, cambian de manera diferente, por lo que tienen que recurrir a la comparación de los valores numéricos de dichas primeras derivadas para establecer cuál es mayor, esto sería, comparando los ángulos de inclinación de las rectas tangentes a los puntos que se están analizando y así ver cuál posee una inclinación positiva o negativa mayor o menor.

Para todos los apartados se tomó en cuenta que en (Caballero, 2012), luego de basarse en las investigaciones (González, 1999) y (Salinas, 2003), se decidió hacer uso particular de la posición relativa de los ejes coordenados, pues en estas investigaciones se demuestra que la posición con respecto a los ejes influye en las respuestas que se pueden brindar. Por ejemplo, si los puntos que se analizan se encuentran debajo del eje X, se considera que la primera y la segunda derivada son negativas, sin tener en cuenta la pendiente de la recta tangente en los puntos analizados y lo mismo puede pasar si el punto está por encima del eje X, pero tiene una pendiente negativa, aun así, por encontrarse por encima del eje X, ya pueden considerar que la primera y la segunda derivada son positivas.

El objetivo de ello es ver la forma de razonar ante la situación, ya que, si se basa en la posición de los ejes y no de la variación, entonces podemos decir que no se está haciendo uso de un pensamiento variacional. (Caballero, 2012)

Para analizar las estrategias, también consideraremos frases que hayan utilizado para justificar el porqué del procedimiento que realizaron.

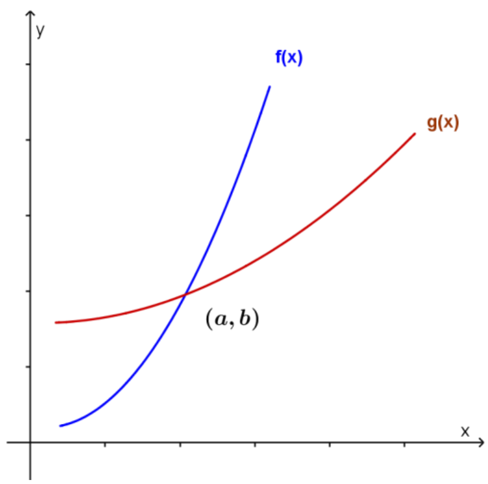
A continuación, se presenta la tabla con las estrategias variacionales que se esperan por parte de los estudiantes para determinar si tienen un pensamiento variacional diferente al visto ya en el análisis de los planes de estudio. Será la misma tabla para los cuatro apartados.

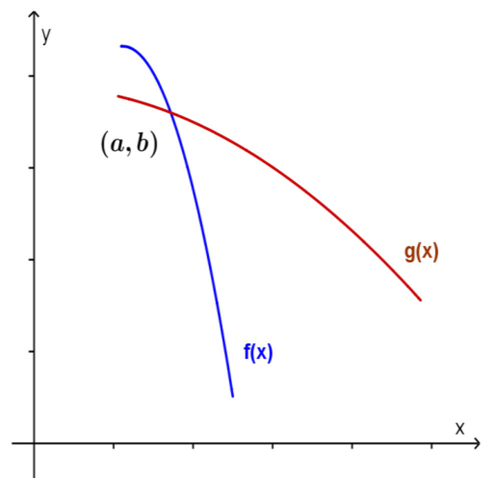
<table>
<tr><td rowspan="2">Estrategias variacionales</td><td>Comparando los ángulos resultantes al trazar las rectas tangentes a los puntos que se están analizando. Estos ángulos son los que se muestran con respecto al eje de las X.</td></tr>
<tr><td>Observar los cambios en una vecindad cercana a los puntos que se analizan y comparar dichos cambios para ver dónde es mayor o menor el incremento.</td></tr>
</table>

No Estrategias Variacionales	Considerar que la primera y la segunda derivada son negativas porque se encuentran por debajo del eje X.
	Considerar que la primera y la segunda derivada son positivas porque se encuentran por encima del eje X.
	No respuesta.

Actividad 4

A continuación, se presentan segmentos de las gráficas de dos funciones f y g, las cuales se cortan en un mismo punto. ¿Es $f''(a)$ mayor, menor o igual a $g''(a)$? Detalla el razonamiento empleado en cada inciso.

1.


2.


Esta actividad se tomó de (Caballero, 2012) modificada con respecto a la cantidad de gráficas presentadas. Acá se proporcionan dos curvas juntas que presentan comportamientos parecidos, en la primera, ambas son crecientes y cóncavas hacia arriba, y en la segunda, ambas son decrecientes y cóncavas hacia abajo, por lo que se quiere lograr que busquen otra estrategia para argumentar sobre la segunda derivada. Es en esta actividad, donde consideramos que ya lo analizado en las actividades anteriores, les permitirían dar el paso a un análisis con derivadas de orden superior, específicamente este caso, de orden dos, que siempre resulta un poco más complicado para los estudiantes si no tienes la expresión algebraica, aunque pueden usar de las herramientas ya recibidas en cursos pasados, el trabajo con la concavidad y el análisis de esta para el trabajo con la segunda derivada. Se utilizó la tarea variacional Análisis gráfico con la variación como punto de referencia, cayendo el objetivo en la extracción de información de la gráfica para analizar y determinar en cuál de las dos curvas es mayor, menor o igual, la segunda derivada y así poder detallar el razonamiento que emplearon.

Para responder esta pregunta se requiere prestar atención a la forma en que van cambiando los valores de la gráfica, para lo cual es necesario hacer uso de la estrategia de Seriación para analizar la variación de cada gráfica, y la de Comparación para determinar cuál presenta mayor variación. (Caballero, 2012)

A continuación, se presenta la tabla con las estrategias variacionales que se esperan por parte de los estudiantes para determinar si tienen un pensamiento variacional diferente al visto ya en el análisis de los planes de estudio. Será la misma tabla para las dos gráficas.

Estrategias variacionales	Analizar cómo van cambiando los valores de la gráfica.
	Comparar los incrementos de la altura en la vecindad de los puntos que se analizan para determinar dónde es mayor o menor.
No Estrategias Variacionales	Respuesta al azar sin justificación, ni razonamiento variacional. u ofrecer ejemplos de funciones analíticas dando sus expresiones
	No respuesta.

Actividad 5

Un móvil se desplaza con movimiento rectilíneo no uniforme. En la siguiente tabla se muestran las posiciones (en metros, desde el origen de coordenadas) en ciertos instantes.

$t\ (segundos)$	0	1	2	3	4	5
$s\ (metros)$	3	2	5	-2	0	3

1. A partir de estos datos, determina (razonando tu respuesta) para cuántos valores de t, como mínimo, el móvil tiene velocidad instantánea cero.

2. ¿Para cuántos valores de t, como mínimo, la aceleración es cero? ¿Por qué?

3. ¿Se puede asegurar que la variación instantánea de la aceleración $s'''(t)$, conocida como tirón, toma el valor cero en algún instante dentro del intervalo considerado? Explica con detalle los motivos y razones de tu respuesta.

Esta actividad se tomó de (Marcolini, 2003), manteniendo el objetivo de su elección, que los estudiantes predigan ciertas características de un fenómeno de la cinemática, adaptado a estudiantes de Ingeniería como es el caso, donde el comportamiento de las variables viene dado a través de una tabla, por lo que nos apoyamos en la tarea variacional Análisis de datos de tablas numéricas, analizando en dicha tabla los cambios en el crecimiento o decrecimiento de la primera derivada, analizándola como la velocidad instantánea y que esta a su vez provoca cambios en la aceleración, reflejada en los signos de dichos cambios que debería ayudarles a determinar la cantidad de ceros presentes en ese intervalo, pretendiendo que evolucione su concepción de que la derivada es un concepto dinámico que nos sirve para cuantificar el cambio. Como acciones podemos esperar que los estudiantes analicen el crecimiento/decrecimiento que muestran los valores en la tabla, los signos que se obtiene, pero también consideramos que con la información brindada pueden utilizar como estrategia la construcción de una gráfica que les ayude a analizar la monotonía y la concavidad.

En el apartado 1, se le pide a los estudiantes que al analizar la tabla, determinen para cuántos valores de t, como mínimo, el móvil tiene velocidad instantánea cero, por lo que deben en este caso, analizar los cambios de crecimiento y decrecimiento, y analizar que no son sol valores que están en la tabla los que van a ver, sino el cambio entre esos valores en la distancia (en metros) tomando como estrategia, la resta de los valores, por ejemplo, 2 – 3 = -1 y es este signo el que analizarán como lo que cambia y cómo cambia. Con la variación de los signos, pueden recordar, que están en presencia de máximos (signo de positivo a negativo/ creciente a decreciente) y mínimos (signo de negativo a positivo / decreciente a creciente), donde la velocidad instantánea, como primera derivada tiene valor cero. Si realizan una gráfica, verán los cambios de monotonía y podrán identificar los máximos y mínimos, aunque el objetivo acá es que lo analicen directamente de la tabla.

En el apartado 2, se les solicita determinar para cuántos valores de t, la aceleración es cero en ese intervalo y que lo justifiquen. Como estrategia, esperamos que, al seguir analizando los valores numéricos, le den continuación con los valores del primer cambio que obtuvieron en el apartado 1, recordando que la aceleración es la primera derivada de la velocidad instantánea, por lo que pueden hacer el mismo procedimiento, pero con los nuevos valores del cambio. También esperamos como estrategia, analizando que, según la cantidad de cambios en la monotonía, si existen al menos un máximo y un mínimo, o viceversa, podrán encontrar un punto de inflexión, lo que quiere decir que allí, la aceleración es cero. Con respecto a la estrategia de la construcción de la gráfica, igual pueden llegar a esa conclusión al ver los máximos/mínimos que aparecen.

Es a partir del apartado 3 donde, volvemos a considerar que ya luego de analizadas las estrategias para el trabajo con la primera y segunda derivada, podemos pasar al análisis de órdenes de variación superior, específicamente, orden tres, el cual, reportado en (Cantoral, Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento, 2013), es uno de los temas que todavía cuesta mayor trabajo con respecto a la asignación de un significado. Si los estudiantes (aunque no solamente a estos) no tienen la expresión algebraica a la que le puedan aplicar las reglas de derivación, se les dificulta más tener estrategias que les brinde el apoyo necesario para poder determinar en el intervalo que les dan, ¿dónde la variación instantánea de la aceleración $s'''(t)$, conocida como tirón, toma valor cero en algún instante? Los estudiantes que hayan determinado continuar analizando con los valores de los cambios que obtienen de la tabla, podrían utilizar la misma estrategia que en el apartado anterior, pero tendríamos que ver las estrategias que pueden surgir con respecto a los que decidieron construir una gráfica.

A continuación, se presentan las tablas con las estrategias variacionales que se esperan por parte de los estudiantes para determinar si tienen un pensamiento variacional diferente al visto ya en el análisis de los planes de estudio.

Apartado 1

Estrategias variacionales	Analizar el cambio que ocurre con los valores de la tabla para ver los cambios de signos y determinar los valores de t dónde la velocidad instantánea es cero.
	Pasar los valores de la tabla a una gráfica para determinar máximos y mínimos donde v = 0.
No Estrategias Variacionales	Determinar que no hay ningún valor de t donde la velocidad instantánea sea cero.
	Dar como respuesta que v = 0 en t = 4 porque considere que el móvil está en reposo.
	Analizar los cambios de signos directamente de los valores que están en la tabla sin considerar los cambios que ocurren.
	Determinar v = 0 en intervalos donde se mantenga una trayectoria constante.
	No respuesta.

Apartado 2:

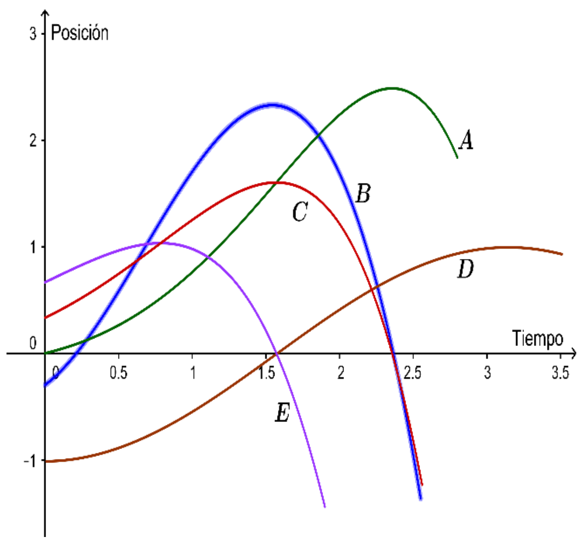
Estrategias variacionales	Continuar analizando los valores de cambio hallados en la actividad 5.1 para ver nuevamente dónde ocurren los cambios de signos.
	Analizar en la gráfica que, para pasar de máximos a mínimos, deben estar presentes puntos de inflexión donde la aceleración es cero.
No Estrategias Variacionales	Determinar que no hay ningún valor de t donde la aceleración sea cero.
	Dar como respuesta que a = 0 en t = 4 porque allí v = 0 considerando que el móvil está en reposo.
	No respuesta.

Apartado 3:

Estrategias variacionales	Analizar la 3ra variación con los mismos valores que han visto desde la tabla para determinar dónde existe un cambio de signo.
	En la gráfica, luego de determinar los valores donde a = 0, determinar que entre estos s''' = 0 en algún valor.
No Estrategias Variacionales	No respuesta.

Actividad 6

En la siguiente gráfica se representan la función de movimiento, $s(t)$, la velocidad, $s'(t)$, y la aceleración, $s''(t)$, de un móvil.



1 ¿Puedes identificar cada una? ¿Cómo?

2 Determina aproximadamente los intervalos dónde $s'''(t)$ es positiva.

3 Describe cuáles son las características de la función que, a tu juicio, son más relevantes a la hora de trazar las gráficas de su primera, segunda y tercera derivada.

Esta actividad se seleccionó de (Marcolini, 2003), modificada, pues se aumentó la cantidad de curvas que presentó en su trabajo de investigación, para dar entrada a una mayor cantidad de estrategias variacionales y argumentos variacionales que pueden utilizar los estudiantes. Con esta actividad se quiere que el alumno reconstruya el concepto de derivada; que logre visualizar el comportamiento de las derivadas sucesivas y hallar sus regularidades a través de los signos de s'(t) y s''(t). (Marcolini, 2003)

Se utilizó como tarea variacional Análisis gráfico con la variación como punto de referencia, pues se le presenta a los estudiantes una gráfica con varias curvas, brindándoles la información de que una de dichas curvas, representa el comportamiento de la función de movimiento de un móvil y que, dentro de las otras, se pueden hallar, la curva que representa el comportamiento de la velocidad s'(t) y la que representa el comportamiento de la aceleración, s''(t). Deben obtener toda la información directamente de la gráfica sin necesidad de conocer otras características que podrían evidenciar fácilmente qué curvas representan lo que se solicita para así visualizar las situaciones de cambio a través de las derivadas sucesivas.

En el apartado 1, se les solicita identificar cuál de las curvas es la que representa la función de movimiento s(t), cuál la que representa la velocidad s'(t) y cuál representa la aceleración s''(t) y la justificación para cada una. Para hallar cuál es la función de movimiento pueden seleccionar una de las curvas al azar y confirmar que es la correcta al hallar las que cumplen con ser la primera y segunda derivadas de esta. Para hallar la primera derivada, esperamos que la estrategia variacional de los estudiantes sea determinar en s(t) su máximo y localizar la curva que en ese punto esté en cero, volviendo a recordar de actividades pasadas lo que ocurre en los puntos críticos y utilizar esa misma estrategia para hallar s''(t) pero analizando s'(t).

En el apartado 2, se le solicita al estudiante que determine aproximadamente el o los intervalos donde s'''(t) es positiva, por lo que depende de la respuesta que haya en el apartado anterior. Como estrategia variacional consideramos que analice la curva que representa s''(t) e identifique dónde la pendiente de la recta tangente a la curva es positiva y es ese el intervalo que debe seleccionar.

En el apartado 3 esperamos que los estudiantes comenten y expliquen todas las estrategias que utilizarían para graficar a partir de una función, sus derivadas, esperando que surjan palabras como monotonía, concavidad, signos, etc., salgan a relucir.

A continuación, se presentan las tablas con las estrategias variacionales que se esperan por parte de los estudiantes para determinar si tienen un pensamiento variacional diferente al visto ya en el análisis de los planes de estudio.

Apartado 1:

Estrategias variacionales	Al determinar una curva como s(t), hallar s´(t) y s´´(t) analizando los ceros de las funciones. Máximo de s(t) es cero para s´(t).
	Analizar las pendientes para ver el cambio que ocurre en ellas.
No Estrategias Variacionales	Selección al azar de curvas sin justificación.
	Selección de curva s(t) porque inicia en cero.
	Selección de curvas que cumplen con características de ser s(t) y s'(t) pero no está presente curva que cumpla con ser s''(t) si se guían por las anteriores.
	No respuesta.

Apartado 2:

Estrategias variacionales	Al determinar qué curva representa s''(t), analizar crecimiento de la curva.
No Estrategias Variacionales	Al determinar qué curva representa s''(t), afirmar que s´´´(t) es positiva en el intervalo de la curva s´´(t) que está por encima del eje X.
	Al determinar qué curva representa s''(t), afirmar que s´´´(t) es positiva en intervalo de la curva s´´(t) que está por debajo del eje X.
	No respuesta.

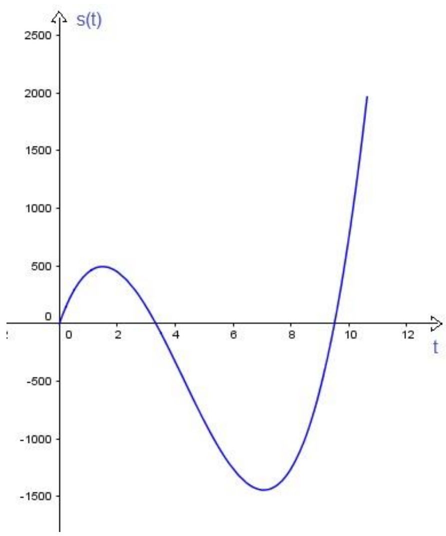
Apartado 3:

Estrategias variacionales	Mencionar características como: Máximos y mínimos, creciente/decreciente, signos, punto de inflexión, concavidad hacia arriba o hacia abajo
	Mencionar características como:

No Estrategias Variacionales	Inicio de cada gráfica, puntos de intersección de las gráficas, intervalos donde no hay aceleración.
	No respuesta.

Actividad 7

La función posición $s(t)$ del movimiento de una locomotora que se desplaza sobre una vía recta viene descrita por la gráfica que se muestra.



1. Indica en qué intervalo o intervalos de tiempo va marcha atrás.
2. En forma aproximada, da los intervalos de tiempo donde la velocidad es positiva y dónde es negativa.
3. Indica los intervalos de tiempo donde la aceleración es positiva y dónde negativa.
4. ¿La tercera derivada toma el valor cero en algún instante? ¿En cuántos? ¿Por qué?

Esta actividad se seleccionó de (Marcolini, 2003), no se realizó ningún cambio pues se quería lograr el mismo objetivo, percibir y trabajar la noción de cambio a través de las variaciones presentadas por la gráfica que representa s(t) y así hallar elementos de esta que permitan determinar los signos de la primera, segunda y tercera derivada. Se utilizó la tarea variacional Análisis gráfico con la variación como punto de referencia, donde las relaciones de las variables se conocen sólo a través del gráfico que los estudiantes tienen que interpretar para obtener la información que se le solicita. A través de esta actividad, queremos que los estudiantes vean el concepto de función derivada como una herramienta que les sirve para estudiar los cambios. Es otra actividad donde los estudiantes analizarán las derivadas sucesivas desde un marco gráfico.

Las estrategias que esperamos salgan a relucir en estas actividades son: el análisis de la monotonía para ver los intervalos donde es creciente o decreciente, el signo de la pendiente de la recta tangente y en muchos casos, graficar las curvas de las derivadas para así poder analizar las características antes mencionadas, pero por separado.

En el apartado 1 se solicitan el o los intervalos en los que la locomotora va marcha atrás. En este caso, los estudiantes pueden utilizar de forma muy mecánica, sin tener un significado real, los conceptos que han recibido en cursos anteriores y determinar que el intervalo donde la locomotora va marcha atrás, es aquel que está por debajo del eje X, recordando que es donde la función tiene valor negativo, pero si analiza verdaderamente las variables a considerar, que en este caso son, posición y tiempo, puede interpretar que va marcha atrás en otro intervalo, lo cual podrá corroborar en el próximo apartado.

En el apartado 2, se les pide a los estudiantes los intervalos de tiempo donde la velocidad es positiva y dónde negativa. Esperamos que los estudiantes, continúen utilizando las estrategias de actividades pasadas para analizar la velocidad de cambio de la variable posición con respecto al tiempo, ya sea con los signos de la pendiente de la recta tangente o construyendo la gráfica de la primera derivada guiándose por la original. es en esta actividad, donde verán la relación con el apartado 1, pues en muchos casos, se preguntarán el porqué de una velocidad negativa y podrán verlo con un significado diferente, referente al sentido en el que se mueve la locomotora.

En el apartado 3, se va aumentando el orden de variación y se solicitan los intervalos de tiempo donde la aceleración es positiva y dónde negativa. Para este apartado, las estrategias pueden ser varias: analizan directamente la gráfica para determinar los cambios de concavidad o analizan la gráfica resultante de la derivación de la primera derivada.

En el apartado 4, se pregunta si la tercera derivada toma valor cero en algún instante. Al estar tratando con este orden de variación, aparte del análisis de la gráfica resultante de la derivada de la aceleración $s''(t)$, esperamos ver que surjan otras estrategias para el análisis de esta.

A continuación, se presentan las tablas con las estrategias variacionales que se esperan por parte de los estudiantes para determinar si tienen un pensamiento variacional diferente al visto ya en el análisis de los planes de estudio.

Apartado 1:

Estrategias variacionales	Estimar que el intervalo de tiempo en el que va marcha atrás es donde decrece la función, o sea, disminuye la posición.
No Estrategias Variacionales	Determinar que el intervalo de tiempo en el que va marcha atrás es el que está por debajo del eje X.
	No respuesta.

Apartado 2:

Estrategias variacionales	Aproximación de los intervalos de tiempo donde la velocidad es positiva: crecimiento de la función, pendiente de la recta tangente positiva.
	Aproximación de los intervalos de tiempo donde la velocidad es negativa: decrecimiento de la función, pendiente de la recta tangente negativa
	Graficar la curva de la primera derivada y analizar monotonía o signo de la pendiente de la recta tangente.
	Si consideró que el intervalo de tiempo en que va marcha atrás es el que está por debajo el eje X, entonces puede mostrar pensamiento variacional considerando que la velocidad es positiva a partir de donde esta deja de ser negativa.
No Estrategias Variacionales	No respuesta.

Apartado 3:

Estrategias variacionales	Aproximación de los intervalos de tiempo donde la aceleración es positiva: cóncava hacia arriba.
	Aproximación de los intervalos de tiempo donde la aceleración es negativa: cóncava hacia abajo.

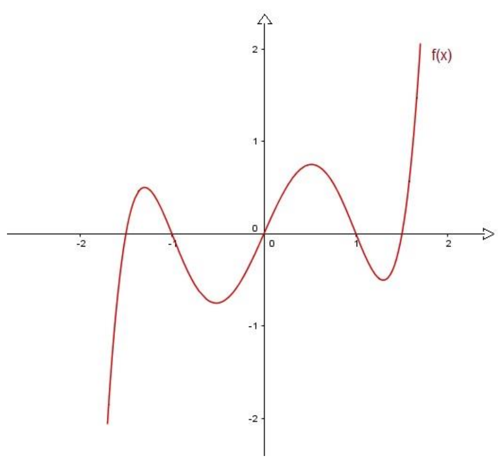
	Graficar la curva de la segunda derivada y analizar monotonía o signo de la pendiente de la recta tangente.
No Estrategias Variacionales	No respuesta.

Apartado 4:

Estrategias variacionales	Analizar que, si tienen un único cambio de signo con respecto a la segunda derivada, o un solo punto de inflexión, la tercera derivada es constante por lo que no toma valor cero.
	Analizando la gráfica de la segunda derivada, determinar que la tercera es una constante.
No Estrategias Variacionales	Seleccionar un valor al azar.
	No respuesta.

Actividad 8

En la siguiente gráfica de la función $f(x)$, que aparece enseguida, determina los intervalos donde se cumplen las siguientes condiciones:



1 $f(x) > 0$
2 $f'(x) > 0$
3 $f''(x) > 0$
4 $f'''(x) > 0$

Esta actividad fue tomada de (Cantoral, Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento, 2013), donde se presenta como una propuesta más ligada al Cálculo Diferencial y que se reconoce como uno de los problemas, que se plantea en el libro, sobre visualización y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, pues se va analizando desde la función original hasta la derivada sucesiva de orden tres. Utilizamos esta actividad como cierre de la situación didáctica, pues en un mismo contexto (selección de intervalos positivos) se van tratando las derivadas de orden sucesivas, una a continuación de otra y está reportado en bibliografía el problema que representa el llegar al apartado 4 y las estrategias que en la mayoría de los casos utilizan los estudiantes.

En este caso se les muestra a los estudiantes, una única gráfica, de la que deben extraer la información para determinar los intervalos donde la función y sus derivadas son positivas y el porqué de su selección. Se les brindó una sola gráfica para que pudieran ir relacionando los intervalos que hallan con el siguiente que deben hallar.

En el apartado 1, analizaremos las estrategias variacionales que pueden surgir por parte de los estudiantes, aparte de la generalizada y ya documentada como la que más utilizan referente a que en el caso del análisis de la función original, esta es positiva en los intervalos que están por encima del eje X.

En el apartado 2, esperamos que los estudiantes analicen e identifiquen lo que cambia y cómo cambia, analizando los intervalos donde crece la función y dónde la pendiente de la primera derivada sea positiva.

En el apartado 3, los estudiantes podrán analizar la concavidad de la gráfica y determinar los intervalos donde esta es cóncava hacia arriba. Ya desde este apartado, a los estudiantes se les puede ir complicando la información que se les está pidiendo y más porque deben obtener la información desde una gráfica que no tienen un significado para ella.

En el apartado 4, veremos las estrategias variacionales que pueden surgir fuera del análisis gráfico que pueden ir realizando de cada una de las gráficas de las derivadas.

A continuación, se presentan las tablas con las estrategias variacionales que se esperan por parte de los estudiantes para determinar si tienen un pensamiento variacional diferente al visto ya en el análisis de los planes de estudio.

Apartado 1:

Estrategias variacionales	Intervalos donde la curva esté por encima del eje X.
No Estrategias Variacionales	No respuesta.

Actividad 8.2

Estrategias variacionales	Intervalos de monotonía, creciente/decreciente.
No Estrategias Variacionales	No respuesta.

Actividad 8.3:

Estrategias variacionales	Intervalos de concavidad, hacia arriba/hacia abajo
No Estrategias Variacionales	No respuesta.

Actividad 8.4:

Estrategias variacionales	Analizar los intervalos que se obtuvieron de la segunda derivada para argumentar que hay un solo intervalo donde la tercera derivada será positiva.
	Graficar todas las derivadas para lograr una respuesta guiándose por la visualización.
No Estrategias Variacionales	No respuesta.

2.3 Población de estudio

Como estrategia y causa fundamental de esta investigación, las poblaciones que se seleccionaron fueron las correspondientes a estudiantes de carreras de Ingeniería de México y Cuba, específicamente, en el primero, estudiantes de Ingeniería Biónica de la UPIITA – IPN y en el segundo país, estudiantes de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Camagüey “Ignacio Agramonte Loynaz”, ambas instituciones por contar con apoyo tanto académico como administrativo para aplicar la actividad con los estudiantes.

Aplicación de la situación didáctica en Cuba:

En la carrera de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Camagüey “Ignacio Agramonte Loynaz”, la situación didáctica se aplicó en el mes de abril del 2017. Lo primero que se hizo, luego de seleccionado el grupo de estudiantes de 2do año de la carrera que ya se encontraban cursando las materias del 2do semestre (4to semestre en general), fue presentarles el trabajo de investigación, nuestros objetivos, lo que se quería analizar y sobre el tema que lo estábamos analizando, de esta manera logramos el compromiso por parte de los estudiantes para la participación y a su vez el interés para saber de qué otra manera se podían realizar preguntas sobre Derivadas que no implicara el uso directo de las reglas de derivación ni de los conceptos de forma mecánica en contenidos matemáticos.

El día planificado para aplicar la actividad, gracias a los directivos de la Alta Casa de Estudios de Camagüey, se pudieron utilizar los laboratorios informáticos que cuentan siempre con conexión a Internet para que así ellos pudieran acceder a la plataforma luego de entregados los usuarios y contraseñas. Antes de iniciar, se les pidió permiso para que se les pudieran tomar fotografías mientras trabajaban con fines investigativos.

El inicio fue muy prometedor, los estudiantes trabajando con la plataforma y leyendo las actividades e indicadores, sorprendidos que las preguntaras estuvieran relacionadas con contenido de Cálculo Diferencial e Integral, o por lo menos por la redacción de estas. En las primeras actividades, se les veía con diferentes estrategias para obtener resultados, algunos estudiantes, en la Actividad 1, Apartado 1, utilizaban reglas para posicionarlas en las pantallas y así poder medir aproximadamente la altura alcanzada por el líquido al transcurrir un segundo. Otro estudiante para esta misma actividad, ante la falta de regla, se auxilió con la punta de su lápiz para establecer una unidad de medida que lo ayudara a trabajar. Estas fueron algunas de las estrategias que observamos en el transcurso de la aplicación de la situación didáctica.

Mientras trabajaban, comenzaron a presentarse dificultades con la conexión a internet, por lo que se tomó la decisión de que se les entregaría a los estudiantes la situación didáctica que ya se llevaba impresa para evitar imprevistos como estos, por eso en algunos casos del análisis de las actividades, se ven graficas bosquejadas por los estudiantes, ya que se tomaron de los documentos en los que ellos trabajaron. No podemos negar que consideramos que esta situación en general (el estar preocupados por si se guardaban o no las respuestas que ellos introducían en la plataforma), provocó desinterés por parte de algunos estudiantes, lo que consideramos afectaron los resultados de sus actividades.

Con las dos variantes para darle solución a la actividad, los estudiantes se tomaron 2 horas y 35 minutos aproximadamente.

Aplicación de la situación didáctica en México:

En la Ciudad de México, gracias a la colaboración del Dr. José Moreno y del M. en C. Álvaro Anzueto Ríos, la situación didáctica se pudo aplicar a estudiantes del 4to semestre de la carrera de Ingeniería Biónica de la UPIITA – IPN. Por la experiencia adquirida en Cuba a la hora de resolver la situación didáctica, se solicitó el apoyo del Maestro con dos sesiones para dar tiempo a que los estudiantes pudieran responder todas las actividades. Las sesiones se realizaron en mayo del 2017.

En el primer encuentro, se les explicó a los estudiantes el tema de investigación que se estaba desarrollando, lo que queríamos lograr con las respuestas que ellos dieran a las actividades y todo lo que pudiera familiarizarlos con la investigación, que no tuvieran temor a evaluación y que, con la mayor seguridad, escribieran lo que sabían y podían responder. En este caso, las dos sesiones fueron en el laboratorio destinado para las clases del Maestro Anzueto.

Como si estuviéramos en Cuba nuevamente, las primeras actividades para los estudiantes de la carrera de Ingeniería Biónica resultaron muy sencillas, se veían estrategias parecidas a las desarrolladas por los estudiantes cubanos y era maravilloso ver cómo se repetían por personas que nunca se han visto ni intercambiado.

En las dos sesiones se logró el objetivo y fue que los estudiantes respondieran todas las actividades, por lo que podemos hacer un aproximado de que nos tomó también 2 horas y 30 minutos (quitando el tiempo que dedicamos a la presentación del tema para los estudiantes) el desarrollo de la situación.

2.4 Sobre el método de investigación

El método con el que se llevó a cabo esta investigación consistió en la implementación de las actividades en la plataforma Moodle del Departamento de Matemática Educativa, la cual presenta una interfaz amigable y ya era conocida por los autores del presente trabajo, por lo que sería de fácil uso para la obtención de la información. A pesar de contar con esta herramienta tecnológica, se implementó también, en el caso de Cuba, por las dificultades de conexión, la entrega de las mismas actividades, pero en un cuadernillo, donde también se le explica el objetivo de la investigación y lo que se quería lograr.

Una vez recopilados todos los datos, separados por las posibles estrategias variacionales que desarrollaran un pensamiento variacional y aquellas que no lo hicieran, se procedió a la comparación de las poblaciones.

Capítulo 3. Análisis de resultados

3.1 Análisis de las respuestas a las actividades

Los resultados obtenidos se analizaron primeramente por país, iniciando con México y dentro de este análisis, las actividades. Ya analizados los resultados de los dos países, mostramos la comparación resultante de ambos países con respecto a las estrategias variacionales que demostraran el desarrollo de pensamiento variacional o no y así poder llegar a determinar si existen diferencia o similitudes en dichas estrategias.

3.2 Análisis de las respuestas a las actividades de los estudiantes mexicanos

Iniciamos con México, donde la población inicial de estudiantes era de 22 y se presentaron 21. De ellos 17 hombres y 4 mujeres.

En los análisis de las estrategias propuestas por los estudiantes, surgieron nuevas opciones que incorporamos a las tablas del uso de estrategias variacionales o no, considerando que todas las respuestas que obtuvimos deben ser analizadas e interpretadas para examinar si tienen de trasfondo un pensamiento variacional o no.

Actividad 1:

Esta actividad con sus dos apartados, al tratarse de análisis de comportamientos lineales, no implica grandes dificultades para los estudiantes, aunque en muchos casos lo que hacen es analizar el llenado del recipiente y la selección de la gráfica como algo meramente mecánico, sin ver lo que realmente significa ese cambio de la altura con respecto al tiempo, sin analizar cómo, cuándo y por qué cambia. En las tablas que se muestran a continuación, se enumeran los ejemplos de lo que consideramos que tienen implícito o no un pensamiento variacional. Luego se muestran ejemplos de lo escrito por los estudiantes para argumentar los resultados que obtuvimos.

Apartado 1

Estrategias variacionales	Selecciona como variables a analizar altura/tiempo y utiliza estrategias variacionales como estimación, seriación o comparación.	13 (61.9%)
	Selecciona como variables a analizar volumen/tiempo y utiliza estrategias variacionales como estimación, seriación o comparación.	3 (14.3%)
	Selección de variables altura/tiempo, pero con estrategia variacional representada analíticamente.	5 (23.8%)
No Estrategias Variacionales	Argumentos que no demuestran un pensamiento variacional.	
	No respuesta.	

En la tabla, se resumen las estrategias seleccionadas por los estudiantes, donde podemos ver que, todos presentaron estrategias que podemos considerar, no se dejó ningún apartado en blanco. A continuación, mostramos algunas imágenes como muestra de los datos, las cuales se tomaron de la propia plataforma utilizada en México para la implementación de la prueba. En esta actividad, tomamos en cuenta que cada estudiante puede haber determinado un valor diferente para la unidad de medida que utilizaron, según la acción que realizaran, pero aun así analizamos su argumentación para demostrar el desarrollo del pensamiento variacional.

Este estudiante muestra la selección de las variables altura/tiempo sin dar un valor aproximado de cuánto tardaría en llenarse el recipiente, pero dentro de su análisis, tiene un pensamiento variacional que le permitió interpretar el cambio en la altura del líquido con respecto al tiempo como la razón de cambio, cosa que demuestra con la fórmula que plantea..

> flujo(F) longitud del recipiente(L) tiempo que tardara en llenarse (t) altura que alcanza el agua en un segundo(h), por lo tanto
> L/h=t seria la cantidad de segundos que toma el recipiente en llenarse, lo cual depende del flujo por lo que
> $L/h=\partial f/\partial t$

En este caso, el estudiante selecciona las variables volumen/tiempo como las que varían y como acción para determinar el tiempo que demorará en llenarse el recipiente argumenta que: "*…hace una inspección meramente visual…*"

> Como el flujo de agua es constante, la misma cantidad que entró al recipiente durante el primer segundo, será el mismo volumen que aumentará por segundo transcurrido. Haciendo una inspección meramente visual, calculo que el recipiente tomará 7 segundos en ser llenado.

Este es un ejemplo de análisis de un estudiante, que para determinar el tiempo que demora en llenarse el recipiente realizó como acción, seleccionar el cursor de la computadora como unidad de medida y así trabajó con la estrategia variacional de estimación hasta encontrar el tiempo que demoraría en llenarse el envase.

> 8 segundos total, tome una medida aproximada de la altura que alcanzo en un segundo comparándolo con el cursor (flecha) en el monitor que controla el mouse y encontré que cabía ocho veces a lo alto del recipiente aproximadamente.

Este estudiante, describe el llenado del recipiente demostrando un pensamiento variacional, pero a través de una expresión analítica que le permitió explicarlo, aunque comentando que debería integrar para obtener el resultado.

> si consideramos que el recipiente tiene una altura total T y el espacio faltante es h, el espacio que se ha llenado es una distancia x que se a alcanzo en 1seg.
> Si quisiéramos conocer el tiempo transcurrido podríamos platear la ecuación h=T-x; con respecto al tiempo, podríamos integrar la ecuación para obtener la distancia que requerirá en cierto tiempo;

Apartado 2

Estrategias variacionales	Selección de gráfica e, con argumentación del porqué de su selección, donde consideramos las palabras que utiliza para ver si demuestran estrategias variacionales.	17 (81%)
	Selección de gráfica e, con análisis de variables volumen/tiempo y con estrategias variacionales.	3 (14.3%)

	Selección de gráfica c, con argumentación del porqué de su selección, considerando el razonamiento que se pueda aplicar.	1 (4.8%)
No Estrategias Variacionales	Selección de las gráficas a, b, d y f sin justificación.	
	Selección de gráfica b argumentando que es constante.	
	No respuesta.	

Este apartado, al igual que el anterior, no presentó problemas para los estudiantes en su análisis. El 81% de la población determinó correctamente la gráfica que mostraba el comportamiento del llenado del recipiente, aunque algunos mantuvieron la selección de la variable volumen como la que cambia con respecto al tiempo.

Este estudiante, a pesar de que las gráficas se señalaron con las variables a analizar altura/tiempo, se mantuvo considerando la variable volumen, como la que está cambiando con respecto al tiempo.

> El flujo de entrada es constante, por lo que el aumento de volumen es directamente proporcional a flujo de entrada. La gráfica que describe este comportamiento está representada por la figura e. También el recipiente descrito en la figura anterior, es un cilindro sin variaciones en el diámetro, por lo que el aumento en la altura del fluido no se ve modificado por este factor.

En este ejemplo, el estudiante justifica la selección de la gráfica refiriéndose a que es "*…CONSTANTE…*" (el aumento), y justifica por qué no pueden ser las otras apoyándose en el flujo del agua o la forma del recipiente.

> Por que el aumento de la altura del nivel del agua es directamente proporcional con el tiempo que transcurre debido a que es CONSTANTE las demás no puede ser por que o se estaría vareando el flujo del agua que sale de la llave o la geometría del envase no seria totalmente cilíndrica.

En este caso, el estudiante hace la selección correcta de la gráfica, pero analizando por qué las otras gráficas no cumplen con el comportamiento que se busca, argumentando que es debido a un cambio en el flujo (a pesar de que en el enunciado se mencionó que el flujo era constante).

> llenado será constante,
> Las gráficas A, D y F no presentan una taza de llenado constante ya que como se observa en las gráficas conforme el tiempo pasa se puede ver un cambio en el crecimiento de estas y esto significa un cambio en el flujo, La gráfica B muestra que la altura no varía esto significa que no existe flujo de agua del todo. La gráfica C muestra un decremento en la altura es decir el recipiente se vacía en lugar de llenarse.

Este estudiante, fue el único en las dos poblaciones de los países, que tuvo un pensamiento variacional a pesar de realizar una estrategia variacional distinta a las pensadas por sus colegas y se trata de su argumento: para él lo que cambia es la altura que está entre la superficie del agua y la salida de la llave, y al ir aumentando la altura de la superficie del agua, esta va disminuyendo, por eso seleccionó la gráfica c, pero con esta explicación demuestra que tiene un pensamiento variacional que le permitió analizar lo que cambiaba, cómo y por qué cambiaba.

> se eligió la (c) porque se considera que la altura que se esta graficando es la que existe entre la superficie del agua y la salida de la llave y esta es en la que se puede apreciar mejor que el flujo es constante, cosa que no se aprecia en la (e). (a) y (f) no se escogieron ya que siguen un comportamiento logaritmico y exponencial . En (d) se aprecia que en algún momento dejó de haber flujo y en (b) que nunca hubo flujo ya que la altura no cambia

Este apartado evidenció nuevamente, que ante el análisis de comportamientos lineales los estudiantes presentan estrategias variacionales para su análisis que le permiten obtener información de lo que se le presenta. Esto lo evidenció lo que consideramos una estrategia completamente distinta a las presentadas por las poblaciones de ambos países y documentada acá.

Actividad 2:

En esta actividad, la mayoría de los estudiantes realizó una comparación de los recipientes por la similitud de sus formas, o sea, analizaron primeramente los cilíndricos, como un envase del que ya conocen su comportamiento y así pasaron a analizar los recipientes con forma cónica como lo nuevo que se estaba tratando en la actividad.

Presentaremos primero las tablas con el análisis de las respuestas de los estudiantes en busca de estrategias variacionales que demostraran un pensamiento variacional y luego mostramos

3 ejemplos con sus secuencias completas para poder analizar el pensamiento de trasfondo de la mayoría de los estudiantes.

Apartado 1

Estrategias variacionales	Comparar altura con respecto a la forma del recipiente, utilizando frases que demuestren un análisis variacional donde esté presente el cambio.	18 (85.7%)
No Estrategias Variacionales	Transformación de las formas de los recipientes a conveniencia de explicación sin estrategias variacionales.	1 (4.8%)
	Comparación del cambio de la altura/tiempo sin argumentos variacionales.	1 (4.8%)
	Selección de variables que cambian volumen/tiempo.	1 (4.8%)
	No respuesta.	

Este apartado en su primera parte (trabajo con recipientes cilíndricos) resultó sencillo para los estudiantes, pues ya desde la primera actividad están analizándolos con su comportamiento lineal del cambio, por lo que pueden dar argumentos variacionales que demuestran un pensamiento variacional ante el análisis del cambio. Se mantuvo, que los estudiantes que desde la actividad 1 seleccionaron al volumen como una de las variables a analizar, mantuvieron su pensamiento en esta. Reportamos también estudiantes que no presentaron estrategia variacional coherente con lo que se esperaba.

Estos son dos ejemplos de argumentos variacionales, donde demuestra el análisis a profundidad que realizaron algunos estudiantes, demostrando un pensamiento variacional.

> Comparando el recipiente A y B, el aumento de la altura será más rápido en el segundo, ya que el diámetro es menor, sin embargo, ambos presentarían un crecimiento constante, pero con rectas de diferente inclinación. Los recipientes C y D tienen una forma similar, pero las entradas se encuentran invertidas, El recipiente C presentará un crecimiento en altura rápido al inicio del llenado, y este decrecerá conforme se alcanza un diámetro mayor. En el recipiente D, la altura aumentará lentamente y este aumento será cada vez más rápido debido a la reducción del diámetro.

> la diferencia, es que en los recipientes A y B, al tener un radio constante en su forma cilíndrica la altura del agua en el recipiente sera proporcional al tiempo que transcurra debido al flujo constante, en el recipiente C y D, al tener una variación de radio , la altura del agua respecto del tiempo sera inversamente proporcional a la variación del radio del recipiente esto quiere decir que entre mayor sea el radio sera mas lento el incremento de altura y entre menor sea el radio mas rápido sera el llenado del recipiente o de esta parte proporcional del recipiente.

Apartado 2:

Estrategias variacionales	Elaborar gráfica donde se vea el comportamiento del llenado de los recipientes cilíndricos y cónicos y la relación entre los recipientes de la misma forma.	13 (61.9%)
	Elaborar una sola gráfica para representar el comportamiento del cambio de la altura/tiempo con respecto a la forma de los recipientes cilíndricos sin analizar la diferencia entre ellos	3 (14.3%)
No Estrategias Variacionales	La misma curva para los recipientes cilíndricos.	3 (14.3%)
	Argumentos que demuestran la falta de estrategias variacionales.	2 (9.5%)
	No respuesta.	

En este apartado, se usó específicamente la tarea variacional Construcción de gráficas con la variación como punto de referencia. Los estudiantes construyeron las gráficas que representaran el comportamiento de la altura del líquido al pasar el tiempo con la información visual de los recipientes y los propios argumentos variacionales que utilizaron en el Apartado 1. Veremos que algunos estudiantes al bosquejar las gráficas no identificaban las variables con las que estaban trabajando y sólo se concentraban en la forma que tenían los recipientes para llegar al comportamiento del llenado de los recipientes.

Tienen ese forma las gráficas debido a la forma del recipiente, entre más ancho el diámetro más tardaran en llenar, y entre menor diámetro el llenado sera más rápido eso seria en el caso de los recipientes cilíndricos; en el caso de los cónicos, el tiempo varia con respecto a la forma del envase, si empieza con una base ancha se llenara lentamente, pero conforme va aumentan de nivel el liquido en el envase, el diámetro de este disminuirá por lo que el tiempo de llenado también y viceversa con el otro envaso cónico.

Apartado 3:

Estrategias variacionales	Curvas que demuestren la velocidad del cambio que sufrió la altura en cada recipiente con argumentos que lo demuestren	9 (42.8%)
No Estrategias Variacionales	Curvas que demuestren la velocidad del cambio que sufrió la altura en cada recipiente, aunque la selección de las variables sea altura/velocidad.	2 (9.5%)
	Gráficas y argumentos que muestran análisis de cambio, pero sin estrategias variacionales, no se identifica lo que realmente cambia y cómo cambia, demuestran desconocimiento del tratamiento de este tipo de actividad.	6 (28.5%)
	No respuesta.	4 (19%)

En esta apartado, los estudiantes construyen las gráficas de la tasa de variación de la altura con respecto al tiempo con la información que obtuvieron en el apartado 2. Este apartado, aunque es el primero en el que los estudiantes pasan del análisis de un comportamiento lineal a uno no lineal con los recipientes de forma cónica, el 42.8% de ellos realizaron diferentes gráficas pero que demostraban un pensamiento variacional con respecto al cambio que analizaban y así lo argumentaron. También se evidencia el paso a este tipo de actividades con el inicio de respuestas en blanco por parte de los estudiantes en el apartado 3 que es el que solicita la graficación de la tasa de variación.

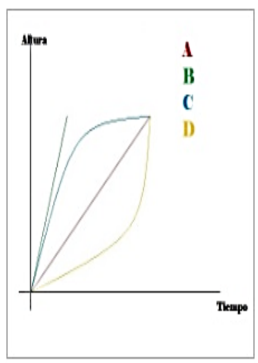
A continuación, mostramos las respuestas de algunos estudiantes en su secuencia completa para poder analizar y ver ejemplos de cómo usan o no estrategias variacionales.

Estudiante 1. Respuesta Apartado 1

Con respecto entre A y B el tiempo de llenado sera diferente debido al diámetro de estos, a menor diámetro este llenara mas rápido, pero B al aparentemente y de acuerdo a las imágenes presentadas llenaria mas rápido por su diámetro menor (aparente) pero al ser mas alto se podría a llegar a compensear el tiempo de llenado ya que hay mas porción del envase a llenar que A. Con respecto entre C y D, el primero empezaria a llenarse mas rápido y con forme el nivel del agua aumente este se llenaria cada vez mas lento, debido al cambio de diámetro del recipiente; mientras tanto con D se daria el caso contrario, comenzaria a llenarse lentamente y aumentaria la velocidad de llenado conforme el liquido va llenando el envase, nuevamente debido al cambio del diámetro

Este estudiante muestra que realizó estrategias variacionales como comparar, estimar, seriar para argumentar sobre el llenado de los recipientes que se muestran. Frases como: "…*a menor diámetro este se llenará más rápido*", *"…se llenaría cada vez más lento…"*, nos muestran el pensamiento variacional del estudiante que le permite analizar las actividades a profundidad.

Respuesta Apartado 2

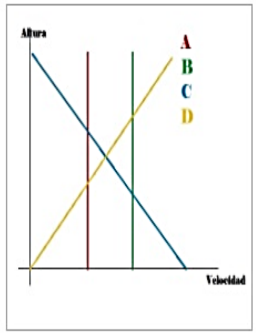


Justifique su respuesta

Tienen ese forma las gráficas debido a la forma del recipiente, entre más ancho el diámetro más tardaran en llenar, y entre menor diámetro el llenado sera más rápido eso seria en el caso de los recipientes cilindricos; en el caso de los cónicos, el tiempo varia con respecto a la forma del envase, si empieza con una base ancha se llenara lentamente, pero conforme va aumentan de nivel el liquido en el envase, el diámetro de este disminuirá por lo que el tiempo de llenado también y viceversa con el otro envaso cónico.

Guiándose por los argumentos variacionales y por la visualización de las formas de los recipientes, el estudiante pudo bosquejar las gráficas que representan el llenado de los recipientes y la argumentación de sus ideas.

Respuesta Apartado 3



Justifique su respuesta

las gráficas variaron debido a que ahora se gráfica la altura contra la velocidad, con los envases cilíndricos solo varia la velocidad con la que se llenan debido a que hay un flujo constante de liquido que lo llena, y con los cónicos este varia debido al radio de los envases con conforme los diámetros de estos aumentan o disminuyen, al momento de que el liquido va subiendo de nivel.

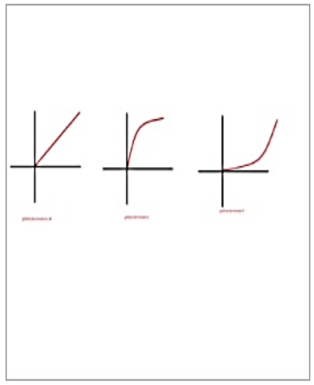
Es en este apartado, donde el mismo estudiante que había presentado argumentos y estrategias variacionales que demostraron un pensamiento variacional, y en el apartado 2 había etiquetado a los ejes como altura/tiempo, en este caso, está graficando con etiquetas altura/velocidad. Aun así, el análisis que realiza puede mostrar que identifica qué es lo que cambia y cómo cambia, pues del eje etiquetado como velocidad, se puede ver el comportamiento del cambio de los recipientes cilíndricos (constante) y de los cúbicos (lineales).

Estudiante 2. Respuesta Apartado 1

en A y B el nivel del agua crece constantemente mientras que en C el agua sube rápidamente de nivel para después disminuir de velocidad y seguir subiendo lentamente. Así mismo en D el agua sube lentamente hasta cierto nivel y después aumenta de velocidad conforme se va encogiendo el diámetro del cono.

En este apartado el estudiante analiza los recipientes según su forma, aunque en el análisis de los recipientes cilíndricos, no ve diferencia entre ellos, solamente argumenta que tienen crecimiento constante. Comenta con argumentos variacionales el llenado de los recipientes cónicos por separado.

Respuesta Apartado 2

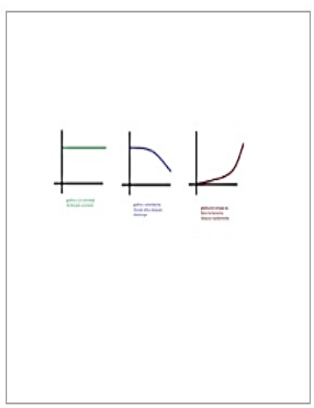


Justifique su respuesta

la gráfica de a y b es una pendiente a 45° ya que el nivel de agua sube constantemente conforme aumenta el tiempo. La gráfica de c muestra una exponencial ya que el agua en el envase comienza a subir rápidamente para después disminuir de velocidad. En d ocurre lo contrario que en c ya que el nivel del agua sube lentamente y después aumenta de velocidad

Es en este apartado donde el estudiante, a pesar del análisis y los argumentos presentados en el anterior demuestra cómo analiza gráficamente la relación entre la altura y el tiempo, o por lo menos así lo consideramos, pues no etiquetó los ejes, pero con los argumentos determinamos que es así. Con la única gráfica para los recipientes cilíndricos, demuestra que no ve cambio entre ellos por la diferencia del área de la base, pero sí demuestra el análisis de los recipientes cónicos.

Respuesta Apartado 3



Justifique su respuesta

la gráfica del envase a y b son constantes ya que al no variar de forma el envase entonces la velocidad de llenado no cambia. En el envase c debido a la forma que tiene la velocidad de llenado es rápida al principio y después disminuye. La gráfica d muestra el caso contrario a c se llena lentamente después aumenta

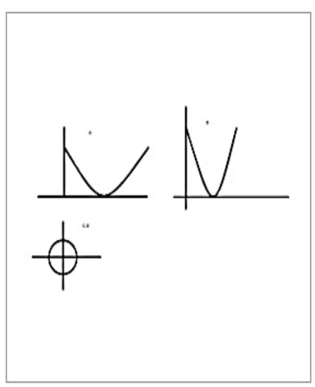
Para este apartado, el estudiante grafica la tasa de variación de la altura que, aunque no haya etiquetado los ejes, tanto este como los otros casos que demuestren este análisis, decidimos considerar que estaban analizando velocidad de cambio/tiempo. En el caso de las gráficas que analizan la velocidad de cambio de los recipientes cilíndricos, muestra argumentos variacionales, pero con estrategias variacionales distintas a las planificadas en la actividad pero que de todas formas plasman la idea del estudiante. Muchos estudiantes, realizaron el análisis de esta manera, con argumentos que demostraban y analizaban cómo y por qué la velocidad de llenado cambiaba, estas respuestas están incluidas en el 42.8% de la población analizada.

Estudiante 3. Respuesta Apartado 1

En los recipientes A y B el crecimiento seria por un lado mas rápido en B ya que su área del circulo es menor que la del A, es to es si el flujo es constante para ambos. Por otro lado C y D teniendo la misma altura su crecimiento seria el mismo si asumimos que tienen las mismas dimensiones.

Este estudiante es otro ejemplo de que la mayoría comparó los recipientes por su forma y no por separado y a eso lo sumamos, que también muchos no analizaron la diferencia existente entre los recipientes A y B.

Respuesta Apartado 2



Justifique su respuesta

Las formas elejidas es con respecto a las formulas del volumen para el caso de un cilindro y para el cono, asi mismo para el cilindro se decidió graficar una parábola, ya que su volumen tiene una variable de orden 2 y para el caso de la C, D se decidió graficar un circulo ya que ambos radios varian y son diferente al variar su altura.

En este apartado, el estudiante no demuestra uso de argumentos variacionales, pues es otro ejemplo de que no selecciona las variables consideradas para este caso y argumenta que las formas elegidas son con respecto a las fórmulas, o sea, de los argumentos mencionados por él mismo en el apartado anterior, no interpretó ninguno para graficarlo y acomodó las condiciones a su comodidad de graficación.

Respuesta Apartado 3

Justifique su respuesta

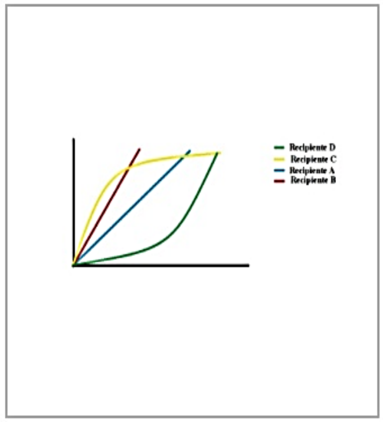
Las gráficas podrian ser el comportamiento de una exponencial, ya que la variación de la altura con respecto al tiempo viene afectado por el diámetro de su circulo. Por otro lado para las restantes de C, D, no se conoce como seria el comportamiento de sus gráficas de la altura con respecto al tiempo.

Los mismo ocurre en este apartado con respecto a lo que está analizando. En resumen, este estudiante es uno de los casos que demuestra no tener estrategias variacionales que le permitan interpretan lo que cambia, cómo cambia y por qué cambia, aunque en algunas ocasiones muestre argumentos variacionales que lo ayudaran a dar respuesta.

Estudiante 4. Apartado 1

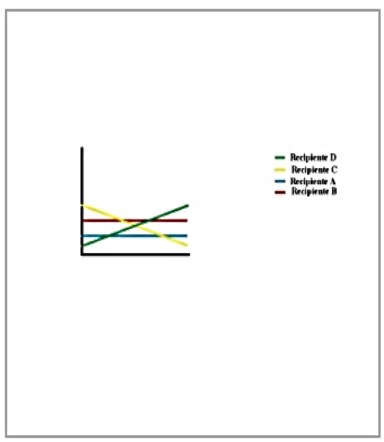
Entre los recipientes A y B, se llenará mas rapidamente el que tiene un area de base menor (en este caso el B), y para los recipientes C y D, se llenara mas rapidamente al principio el C, pero la velocidad de llenado irá decreciendo, mientras para el D se llenara mas lentamente al incio e irá creciendo la velocidad de llenado.

Seleccionamos para mostrar las actividades de este estudiante, pues consideramos es un ejemplo del uso correcto y conocimiento de estrategias variacionales las cuales se demuestran en los argumentos que utiliza para dar respuesta a este apartado.



Justifique su respuesta

La recta B tiene mayor pendiente, dado que la altura subira mas rapido en el tiempo que la A, Las otras dos rectas solo denotan como en el tiempo inicial y final, aceleran o disminuyen la velocidad de llenado.



Justifique su respuesta

Los dos primeros mantendran una velocidad constante, pero el de menor area de base se llenará mas rapido, el C y el D iran decremnetando o incrementando su velocidad de llenado segun la forma.

Se comentan los dos apartados, pues en el análisis se logra apreciar que el estudiante si es conocedor de estrategias variacionales que le permitieron analizar correctamente la variación y el comportamiento de los recipientes.

Actividad 3:

En esta actividad, mostramos una tabla para todos los apartados propuestos, pues las ideas y estrategias que se espera que presenten para su solución, son similares en cada una. Se podrá ver que la estrategia variacional más utilizada fue el análisis de la pendiente a simple vista, considerando la inclinación de esta. Puede que algunos estudiantes hayan visto implícito el análisis del ángulo formado por la pendiente, pero no lo pusieron como argumento por lo que no lo analizamos de esa manera y también veremos que muchos estudiantes presentaron variantes para resolver las actividades, pero no las consideramos como estrategias variacionales pues no tenían una lógica que las explicara.

Estrategias variacionales	Comparando los ángulos resultantes al trazar las rectas tangentes a los puntos que se están analizando. Estos ángulos son los que se muestran con respecto al eje de las X.	1 (4.8%)
		1 (4.8%)
		1 (4.8%)
		1 (4.8%)
	Análisis del comportamiento de la pendiente de la recta tangente en los puntos.	8 (38.1%)
		7 (33.3%)
		9 (42.8%)
		7 (33.3%)
	Observar los cambios en una vecindad cercana a los puntos que se analizan y comparar dichos cambios para ver dónde es mayor o menor el incremento.	
		1 (4.8%)
No Estrategias Variacionales	Considerar que la primera derivada es negativa o positiva por la posición con respecto al eje X.	1 (4.8%)
		1 (4.8%)

	Argumentar respuestas sin evidencia de estrategias variacionales.	7 (33.3%)
		8 (38.1%)
		7 (33.3%)
		9 (42.8%)
	No respuesta.	4 (19%)
		4 (19%)
		4 (19%)
		3 (14.2%)

En esta tabla podemos ver que inician las dificultades para los estudiantes, pues no muchos pudieron comparar los puntos en la gráfica con las estrategias esperadas, demostrando la dificultad presente en ellos para obtener información de la gráfica y poder argumentar sus respuestas. Algunos ejemplos los veremos a continuación, donde primero mostraremos la secuencia de las respuestas de los apartados de un estudiante que con sus argumentos variacionales demuestra el desarrollo de su pensamiento variacional y a continuación ejemplos de los resultados que vemos en la tabla.

Estudiante (todos los apartados): la estrategia que el estudiante utilizó en todos los apartados fue la comparación del valor de los ángulos formados al trazar las rectas tangentes a los puntos que se están analizando.

Si se traza una linea tangente a la curva respecto a los puntos a y c, es claro que la pendiente del punto a es menor que la pendiente de la recta tangente del punto c, por lo que a'<c'.

> En este caso, siguiendo el mismo procedimiento que en el paso anterior, pareciera que las pendientes tienen el mismo valor, ya que se encuentran a la misma distancia del punto del punto de inflexión, además ambas con negativas, por lo que a' igual a c'.

> La inclinación de la tangente en c es mayor que la inclincación de la tangente en a, la pendiente en a es negativa y la pendiente en c positiva, por lo que a'<c'.

> Ambas pendiente en los puntos a y c son negativas, como la pendiente en c es más pronunciada, su valor negativo es mayor que en a, entonces a'>c'

Como podemos ver, en esta secuencia, aparte de la estrategia variacional que utilizó, el estudiante respetó los signos de las derivadas, analizando la pendiente de la recta tangente, ya que veremos ejemplos donde los estudiantes realizan lo ya reportado en Cantoral (2013), confunden el signo de la primera derivada con el signo de la función, considerando que la primera derivada es positiva si está por encima del eje X o es negativa si está por debajo.

Reportamos también con este estudiante que en los apartados 2 y 4, algunos consideraron que las derivadas eran iguales pues veían muy parecidas las rectas tangentes a los puntos analizados, pero algunos estudiantes también vieron la diferencia. Esta podría ser una dificultad del uso de la plataforma, pues el estudiante, según la acción que haga para determinar un aproximado de la recta tangente, será el argumento que use, y en muchos casos no aplican lo que harían si fuera a papel, medir con la regla.

Otros ejemplos de respuestas de los estudiantes:

Apartado 1:

> en a la primer derivada es mayor, ya que conforme se acerca al máximo la derivada se acerca al 0, debido al valor tangencial, y a que en ambos casos sus valores son negativos, por lo tanto A estaría mas próxima al 0 que C

Este sería el primer ejemplo donde los estudiantes confunden el signo de la primera derivada con el signo de la función y determinan que en la gráfica que muestran en el apartado, ambas son negativas, pues se encuentran debajo del eje X.

Apartado 2:

> en este grafico la priemr derivada de A seria mayor a la primer derivada de C debido a que esta se acerca al maximo por la izquierda, siendo un valor positivo lo que obtendremos, y C por la derecha siendo un valor negativo lo que obtendremos.

Para el análisis de este apartado, el estudiante también utiliza la estrategia del trabajo con la pendiente, el cual se ve reflejado en su expresión "*en este gráfico la primera derivada de A sería mayor a la primera derivada de C debido a que esta se acerca al máximo por la izquierda, siendo un valor positivo lo que obtendremos…*". En este caso podemos considerar que está comparando las pendientes con respecto a los puntos y analizando su inclinación y lo demuestra al comentar que se acerca al máximo, analizando que si esto ocurre la inclinación de la recta es mayor, casi cero, pero a la vez que lo analizamos, consideramos errores que afectan también sus estrategias y es considerar la existencia de máximos en gráficas de este tipo, así como asumir que obtendrá derivadas positivas, lo que demuestra que confunde el signo de la derivada con el de la función, pues aunque esté por encima del eje de las X, las primeras derivadas en este caso son negativas.

> a>c debido a que la pendiente en a es menor pero al ser pendiente negativa es mayor que c

Este es un ejemplo de uso del pensamiento variacional que le permitió realizar la comparación entre las derivadas en los diferentes puntos.

Apartado 3:

> Para el primer punto, si hacemos la derivada para esa forma, y hacemos rapidamente un aproximado del valor en la grafica el valor de la derivada en a es menor. Para el segundo siguiendo la misma forma de trabajo el a es mayor. Para el tercero el valor de c deberia ser mayor. Para el cuarto es mayor es c.

> en (1) y (3) la derivada en c es mayor que en a.
> en (2) y (4) la derivada en a es mayor que en c.

Estos son ejemplos de estudiantes que todas las respuestas las ubicaron en un solo apartado y sin argumentos variacionales que nos permitieran analizar verdaderamente el pensamiento que desarrolló para dar estas respuestas.

Apartado 4:

> en este caso f'(a) y f'(c) parecen ser iguales porque parece ser que la pendiente no varia en estos puntos

> a>c debido a que la pendiente en a es menor pero al ser pendiente negativa es mayor que c

Estos ejemplos muestran lo ya comentado con anterioridad, algunos estudiantes consideran, según la acción que hayan realizado, que en los puntos que se analizan, las pendientes tienen valores similares, por lo que consideran que son iguales y otro caso, son los estudiantes que sí ven diferencia y comparan los valores de la pendiente, respetando signos de las derivadas y demostrando uso de estrategias variacionales.

Actividad 4:

En esta actividad, también mostramos una tabla para los dos apartados propuestos, y analizando a la vez los argumentos de los dos, ya que las ideas y estrategias son similares en cada una. Podemos analizar de los resultados que se muestran en la tabla, que el 76.1% de los estudiantes no mostró estrategias variacionales que ampararan un pensamiento variacional, lo que nos indica las dificultades que se mantienen por parte de los estudiantes con el análisis de las gráficas sin conocer las expresiones analíticas de las curvas, y más comparando con respecto a la segunda derivada.

Estrategias variacionales	Comparar gráficas con frases: “más angosto”, “mayor rapidez”, etc o comparar luego de conocer la primera derivada.	4 (19%)
	Comparar los incrementos de la altura en la vecindad de los puntos que se analizan para determinar dónde es mayor o menor la segunda derivada.	1 (4.8%)
No Estrategias Variacionales	Hacer análisis de la pendiente sin argumentar para la segunda derivada.	2 (9.5%)
	Llegar a resultados de comparación haciendo análisis analítico al igualar a funciones conocidas y no obtener información de la gráfica.	2 (9.5%)
	Respuesta al azar sin justificación, ni razonamiento variacional.	8 (38.1%)
	No respuesta.	4 (19%)

Apartado 1 y 2:

a mayor valor en la pendiente(positivo), mayor valor en la derivada por lo que en el caso 1 f''(a) es mayor que g''(a) en el caso de que las pendientes sean negativas es mayor la derivada la que decrece con menor rapidez por lo que g''(a) será mayor

Al derivar se disminuye el orden de la función, al ser funciones cuadráticas (parábolas) al derivar se convierten en funciones de orden menor.
como f crece más rápido su derivada será mayor que en g.

Al derivar se disminuye el orden de la función, al ser funciones cuadráticas (parábolas) al derivar se convierten en funciones de primer orden.
como f decrece más rápido su derivada será menor que en g.

Estos estudiantes utilizan la misma estrategia para comparar los valores de las segundas derivadas de las curvas en el punto señalado. Primeramente, hacen una comparación de los valores de las pendientes para así determinar en su segunda variación cuál sería mayor, lo que demuestra de fondo, que antes de hacerlo, consideraron que las curvas representaban funciones conocidas por ellos para su derivación. Para lo que sería el segundo apartado, analizando las pendientes negativas las compara con el siguiente argumento "*…decrece con menor rapidez…*", "*…decrece más rápido su derivada…*" analizando el cambio del cambio.

1 - a es menor f y g debido a que estas tienden a alejarse de cero
2 - a es mayor que g y f ya que se aproximan a cero

Este estudiante es un ejemplo de no interpretar lo que se solicita en el enunciado y no presentar estrategia variacional que lo apoye en el análisis de las gráficas.

Actividad 5:

En esta actividad, mostramos las tablas del uso o no de estrategias variacionales de los tres apartados, en los cuales podemos observar cómo van disminuyendo el uso de estrategias variacionales para dar solución a los apartados según el tema que trate. A pesar de que se considera como una posible vía de solución para los apartados, la elaboración de una gráfica donde los estudiantes plasmen los datos que se muestran en la tabla, reconocemos que en el uso de la plataforma, no se dio la oportunidad de subir una imagen que representara dicha gráfica y así poder comprobar la estrategia que utilizaron, por lo que nos guiamos por las frases de los estudiantes para interpretar que realizaron la gráfica para guiarse y dar las respuestas. También notamos que muchos estudiantes analizan los valores extremos de la tabla considerando que ocurrían cambios allí también, sin considerar que no tenían argumentos para conocer el comportamiento de la curva en esos puntos.

Apartado 1

Estrategias variacionales	Analizar el cambio que ocurre con los valores de la tabla para ver los cambios de signos y determinar los valores de t dónde la velocidad instantánea es cero.	3 (14.3%)
	Pasar los valores de la tabla a una gráfica para determinar máximos y mínimos donde v = 0 (que demuestre estrategias, aunque las respuestas nos sean correctas).	3 (14.3%)
No Estrategias Variacionales	Determinar que no hay ningún valor de t donde la velocidad instantánea sea cero; brindar argumentos no variacionales que demuestren no uso de estrategia variacionales o análisis mecánico según conceptos.	8 (38.1%)
	Dar como respuesta que v = 0 en t = 4 porque considere que el móvil está en reposo.	2 (9.5%)
	Analizar los cambios de signos directamente de los valores que están en la tabla sin considerar los cambios que ocurren.	
	No respuesta.	5 (23.8%)

Apartado 2:

Estrategias variacionales	Continuar analizando los valores de cambio hallados en la actividad 5.1 para ver nuevamente dónde ocurren los cambios de signos.	1 (4.8%)
	Analizar en la gráfica que, para pasar de máximos a mínimos, deben estar presentes puntos de inflexión donde la aceleración es cero.	
No Estrategias Variacionales	Determinar que no hay ningún valor de t donde la aceleración sea cero.	2 (9.5%)

	Dar como respuesta que a = 0 en t = 4 porque allí v = 0 considerando que el móvil está en reposo.	1 (4.8%)
	Brindar argumentos que demuestren el no uso de estrategias variacionales para dar respuestas o análisis mecánico según conceptos.	13 (61.9%)
	No respuesta.	4 (19%)

Apartado 3:

Estrategias variacionales	Analizar la 3ra variación con los mismos valores que han visto desde la tabla.	
	En la gráfica, luego de determinar los valores donde a = 0, determinar que entre estos s''' = 0 en algún valor.	
No Estrategias Variacionales	Argumentos no variacionales que demuestren desconocimiento del manejo de s´´´(t).	17 (81%)
	No respuesta.	4 (19%)

En esta actividad nuevamente mostramos todos los apartados de respuesta de un estudiante a la vez, ya que existe relación y dependencia en las respuestas entre los apartados y la lógica que siguen en muchos casos, es de los apartados ya realizados.

Estudiante 1:

> Como minimo hay tres puntos donde la velocidad instantánea es 0, ya que hay tres puntos de inflexión en las gráficas, en los que necesariamente la velocidad instantánea tiene que llegar a 0 para cambiar de dirección. Si la velocidad inicial también era cero, entonces hay cuatro puntos.

Igual que en caso anterior, hay tres puntos de inflexión que indican un cambio en el sentido de la aceleración, por lo tanto hay como mínimo 3 puntos donde la aceleración es cero.

Cuando la aceleración es cero, el tirón debe de serlo también, así que sí se puede asegurar que la tercer derivada sea 0.

En el caso de este estudiante, inicia analizando los cambios que ocurren en los valores de la tabla, argumentando que como mínimo hay tres puntos de inflexión, (nos imaginamos los relacione con los puntos críticos donde ocurren los máximos y mínimos locales), entonces deben existir tres puntos donde la velocidad instantánea es cero, pero en este caso, podríamos preguntarnos si esos puntos a los que se refieren son los puntos críticos o los interceptos con el eje X, o sea los ceros.

En el apartado dos, ya muestra las dificultades para analizar los valores con respecto a la primera derivada, por lo que considera que hay la misma cantidad de valores donde se hace la aceleración cero, pues en su estrategia la que prevalece es la analítica, donde considera la regla de derivación de la constante, pues si ya encontró valores donde la velocidad se hace cero, allí mismo se harán cero la aceleración y el tirón (tercera derivada), como lo demuestra en la respuesta del apartado 3. Podemos llegar a la conclusión que el estudiante pudiera tener estrategias variacionales cuando se analiza la primera derivada, pero al pasar a derivadas de orden superior demuestra el poco tratamiento variacional que ha recibido para presentar las estrategias consideradas como variacionales para esta investigación.

Estudiante 2:

Todos las posiciones que cumplan el criterio de "4n + n", si se toman valores de n partiendo de 'n=1' hasta 'n=infinito' aumentando de uno en uno, ejemplo "4(1)+1=5". El primer '0' está en la posición 5.

Todos las posiciones que cumplan el criterio de "4n + n", si se toman valores de n partiendo de 'n=1' hasta 'n=infinito' aumentando de uno en uno, ejemplo "4(1)+1=5". El primer '0' de la aceleración está en la posición 5. Esto se puede comprobar ya que la aceleración es la derivada de la velocidad y, por lo tanto, en un movimiento rectilíneo no uniforme no hay velocidad no hay aceleración, esto se cumple para los casos de 4n+n

Dado que el tirón es la tercera derivada de la posición, esto implica que es la derivada de la aceleración, por lo que en los casos en que la aceleración sea constante el tirón será cero.

Este estudiante es uno de los casos donde demuestra el no uso de estrategias variacionales ni siquiera para el apartado 1, donde argumenta que deben cumplir con el criterio “$4n + n$” desde$n = 1$, el cual analizándolo por punto no cuenta con una base que puede demostrar lo que se quiere en la actividad. Este mismo criterio es el que usa para analizar los valores donde la aceleración se hace cero, hasta llegar al tercer apartado donde ya determina que como el tiró es tercera derivada de la función posición y halló con su criterio que estas son cero, pues la conclusión fue que también la tercera derivada es cero. Con todos estos análisis demuestra la falta de estrategias variacionales para el análisis de la primera derivada las sucesivas.

Estudiante 3:

Los cruces por cero de la velocidad se darian cuando el móvil necesite cambiar en la dirección en la que esta avanzando. Por lo que el número de cruces por cero, seria el número de puntos de inflexión que presente la gráfica de posición.
En este serían 3, en el tiempo 1 seg, alcanza un mínimo local, en el segundo 2 presenta un máximo local y en el segundo 3 se presenta un mínimo local y la gráfica se convierte en creciente.

seria el mismo principio para los cruces de la velocidad por cero, Un cruce de la aceleración por cero indica cambio de dirección. Aunque la gráfica de aceleración y velocidad no sean la misma crucen por cero en los mismos instante, se mantiene el mismo principio.

No se puede asegurar, ya que no se cuenta con la gráfica que describa el movimiento, pero podría suceder en los momentos en que la gráfica de velocidad permanezca constante.

Con las frases planteadas por este estudiante en el apartado 1, podemos llegar a la conclusión que fue uno de los casos donde prefirieron pasar todos los datos de la tabla a una gráfica para poder analizar los cambios que ocurren. En el apartado dos, también nos demuestra la dificultad para tener estrategias variacionales que le permitan analizar tanto de la tabla como de la gráfica lo que ocurre con la primera derivada, no interpreta ni tiene arraigado el concepto de concavidad para el análisis de la segunda derivada ni del cambio como tal analizando signos o la propia gráfica que encontró.

Esta actividad, al ser la primera donde se trabaja con un orden de variación partiendo de la función hacia la primera, segunda y tercera derivada, continúa demostrando las dificultades presentes para analizar ya sea una tabla o un a gráfica donde se pueda analizar el cambio que ocurre en las funciones y el significado que tienen para ellos.

Actividad 6:

En esta actividad preguntamos de otra manera lo visto en las actividades pasadas, donde inicialmente brindamos los datos y algunos pudieron bosquejar la gráfica, en este caso, se les brinda la gráfica, para que pueden determinar quién cumple con las condiciones de ser la función de posición, cuál la de velocidad y cuál la de aceleración, utilizando conceptos que ya dominan o estrategias variacionales que pueden surgir de analizar dichos conceptos.

Apartado 1:

Estrategias variacionales	Al determinar una curva como s(t), hallar s´(t) y s´´(t) analizando los ceros y las pendientes de las funciones.	4 (19%)
No Estrategias Variacionales	Selección al azar de curvas sin justificación.	7 (33.3%)
	Selección de curvas que cumplen con características de ser s(t) y s’(t) y selección sin estrategia variacional de s´´(t) guiándose por las anteriores.	4 (19%)
	No respuesta.	6 (28.6%)

Apartado 2:

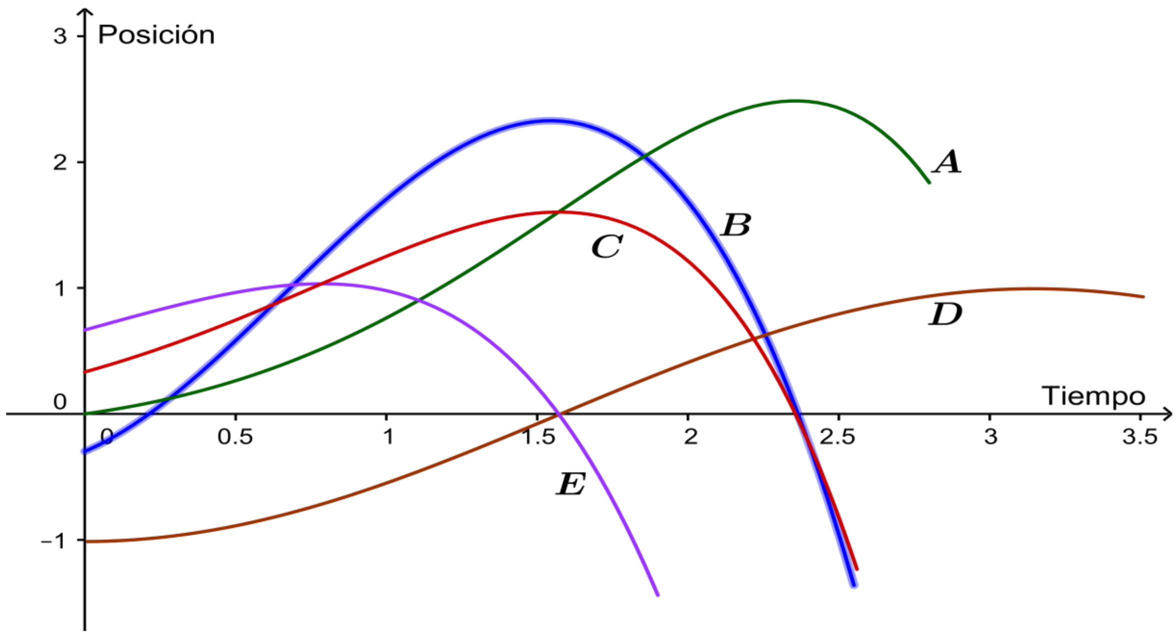
Estrategias variacionales	Analizar monotonía de s''(t).	5 (23.8%)
No Estrategias Variacionales	Al determinar qué curva representa s''(t), afirmar que s´´´(t) es positiva/negativa en el intervalo de la curva s´´(t) que está por encima/debajo del eje X.	10 (47.6%)
	No respuesta.	6 (28.6%)

Apartado 3:

Estrategias variacionales	Mencionar características como: Máximos y mínimos, creciente/decreciente, signos, punto de inflexión, concavidad hacia arriba o hacia abajo	7 (33.3%)
No Estrategias Variacionales	Mencionar características como: Inicio de cada gráfica, puntos de intersección de las gráficas, intervalos donde no hay aceleración, etc.	7 (33.3%)
	No respuesta.	7 (33.3%)

Analizando los datos que se muestran en las tablas, vemos que la mayor problemática se encuentra en el apartado 1, donde los estudiantes deben identificar a quién representan las curvas. En el apartado dos se mantiene que muchos estudiantes consideran que una curva es positiva si está ubicada por encima del eje X, pero no analizan la monotonía de dicha curva. El apartado tres sí resultó sencillo para ellos, ya que enumeran los conceptos que reciben en clases que deberían brindarles las estrategias para tener estrategias que les permitan argumentar más al respecto sobre lo que hicieron para asignar quiénes son las curvas.

Recordando que la gráfica que se mostró tenía estas curvas:



Estudiante 1:

Voy a tomar como referencia los puntos mas altos de cada función ya que es en cada uno de estos donde la derivada es cero, por lo tanto en su gráfica correspondiente (de la primera derivada), en ese mismo punto la gráfica debe cruzar el eje de las abscisas (en el punto donde existe un máximo para la función original) y la el caso de la gráfica de la segunda derivada es igual pero ahora tomaremos como referencia la gráfica de la primera derivada obtenida enfocándonos nuevamente en sus puntos máximos y minimos. Entonces la función de movimiento es la gráfica A, la velocidad es la gráfica B y la aceleración es la D.

[0.2 2.4]

Identificar los máximos y minimos de cada una de las gráficas ya que es en estos puntos donde su derivada es igual a cero, siendo de gran ayuda para trazar su gráfica completa.

Para esta actividad, el estudiante demuestra el análisis variacional realizado a la gráfica demostrando el conocimiento con respecto al trabajo con las derivadas y sus gráficas y condiciones que deben cumplir. Inició analizando los puntos más altos considerando que es allí donde la derivada es cero y que su gráfica en ese punto debe tener intercepto con el eje de las X. Con toda esa información, seleccionó las gráficas que consideró cumplían con los aspectos necesarios.

A pesar de tener muy buenas estrategias variacionales y demostrarlo, el apartado dos representó un problema para la mayoría de los estudiantes que consideraron que el intervalo donde la tercera derivada era positiva coincide con el intervalo donde la segunda derivada está por encima del eje X.

En el apartado tres, menciona todas las estrategias como conceptos matemáticas que utilizó para identificar la gráfica y sus derivadas.

Estudiante 2:

> s(t)=D, s'(t)=A. s''(t)=B. Busqué los puntos donde las derivadas de cada función correspondieran a cero, y que además los puntos máximos de la derivada coincidieran con lo donde se viera la máxima taza de cambio de la función derivada.

> [0.2 2.4]

> Los puntos de inflexión, los máximos y mínimos y los cruces por cero,

La estrategia que presenta este estudiante es al revés del anterior, pero con la misma idea, busca los interceptos de las curvas con el eje X y que a la vez coincida con alguno de los máximos que presentan las otras curvas, pues son en esos puntos donde se cumple que esa primera derivada es cero. Como ya habíamos reportado, se mantiene la dificultad de interpretar dónde la tercera derivada es positiva, aunque conozcan que es la primera derivada de la segunda que ya fue identificada y se mantienen analizando el intervalo donde la segunda derivada es positiva como función, no donde la pendiente es positiva.

Estudiante 3:

> Si. Tomandolo como funciones seno y coseno y obteniendo su derivada en los puntos clave.

En este apartado específicamente, el estudiante para poder analizar las gráficas, les asignó funciones con características conocidas para poder argumentar, todo esto sin estrategias variacionales que permitieran determinar un pensamiento variacional para dar respuesta al apartado.

> 0.25 - 2.3

No conocemos qué curva determinó sería la segunda derivada, pero analizando el intervalo, lo vemos lo suficientemente grande para considerar que aunque no haya determinado quiénes eras las derivadas, determinó que la tercera derivada es positiva en el intervalo donde la segunda derivada como función es positiva.

> cruces por cero, minimos y maximos ya que asi se puede bosquejar de manera total una funcion

Estudiante 4:

> Considerando el cambio de grado que se produce al realizar derivadas consecutivas sobre la posición, podriamos considerar la curva a como la descripción del movimiento, la curva c como la velocidad y la curva e como la aceleración.

> [0 1.6]

Cruces por cero y la intersección entre curvas

Estudiante 5:

Pensando que la forma con las curvas mas marcadas sea la del movimiento seria la A, lo cual manteniendo un razonamiento en el que la derivada nos dejara menos maracadas esas curvas la velocidad seria B y la aceleracion C.

Entre 0 y 2.35

Donde se intersectan con 0, ademas de la curvatura.

Los estudiantes 4 y 5 presentan la misma estrategia en el apartado uno, donde analizan de una forma analítica con qué funciones conocidas podrían comparar las curvas y de esta manera realizar el análisis, pero sin presencia de estrategias variacionales, solo aplicando los conceptos para el análisis de las funciones. En ambos casos consideran que, para poder conocer la derivada, deberían conocer el grado de la función original para así ir disminuyendo en uno dicho grado o como menciona el estudiante 5, dejará menos marcada a la función derivada en el proceso y así van analizando las curvas para determinar, aunque con diferencias, las curvas que corresponder a la función movimiento, velocidad y aceleración.

Ambos mencionan intervalos que corresponden al mismo análisis no variacional, y es que consideran que la tercera derivada es positiva en los intervalos donde la segunda derivada seleccionados por ellos es positiva, o sea, que está por encima del eje X.

Actividad 7:

En esta actividad, notamos que los estudiantes igualan mucho como objetos a los puntos críticos con los puntos de inflexión, por lo que, al considerar la existencia de un punto de inflexión, por los conceptos que tienen, intuyen que allí ya es cero la segunda derivada por lo que la tercera también va a ser cero.

Como vimos en ejercicios pasados, cuando estamos tratando con los objetos función y primera derivada, los estudiantes utilizan sus conocimientos y estrategias para dar las respuestas correctas, pero ya en los apartado donde pasamos al análisis de derivadas de orden superior, vemos que el porcentaje cambia completamente a una mayoría en las celdas donde se agrupan las respuestas que no demuestran uso de estrategias variacionales, lo que no implica que no analizáramos las respuestas de los estudiantes, ya que en muchos casos, no justifican el porqué de su selección de intervalos, pero al ver las respuestas podemos considerar que sí tienen pensamientos, pero no los expresaron.

Apartado 1:

Estrategias variacionales	Determinar que el intervalo de tiempo en el que va marcha atrás es donde decrece la función, o sea, disminuye la posición.	10 (47.6%)
No Estrategias Variacionales	Determinar que el intervalo de tiempo en el que va marcha atrás es el que está por debajo del eje X.	6 (28.6%)
	No respuesta.	5 (23.8%)

Apartado 2:

Estrategias variacionales	Aproximación de los intervalos de tiempo donde la velocidad es positiva/negativa: crecimiento/decrecimiento de la función, pendiente de la recta tangente positiva/negativa.	10 (47.6%)
	Graficar la curva de la primera derivada y analizar monotonía o signo de la pendiente de la recta tangente.	

	Si consideró que el intervalo de tiempo en que va marcha atrás es el que está por debajo el eje X, entonces puede mostrar pensamiento variacional considerando que la velocidad es positiva a partir de donde esta deja de ser negativa.	
No Estrategias Variacionales	Intervalos sin justificación que muestren estrategias variacionales.	5 (23.8%)
	No respuesta.	6 (28.6%)

Apartado 3:

Estrategias variacionales	Aproximación de los intervalos de tiempo donde la aceleración es positiva/negativa: cóncava hacia arriba/cóncava hacia abajo.	2 (9.5%)
	Graficar la curva de la segunda derivada y analizar monotonía o signo de la pendiente de la recta tangente.	
No Estrategias Variacionales	Intervalos sin justificación que muestren estrategias variacionales.	13 (62%)
	No respuesta.	6 (28.6%)

Apartado 4:

Estrategias variacionales	Analizar que, si tienen un único cambio de signo con respecto a la segunda derivada, o un solo punto de inflexión, la tercera derivada es constante por lo que no toma valor cero.	1 (4.8%)
	Analizando la gráfica de la segunda derivada, determinar que la tercera es una constante.	

No Estrategias Variacionales	Seleccionar un valor al azar sin justificación variacional.	14 (67%)
	No respuesta.	6 (28.6%)

Como mencionamos al inicio de la actividad, al ver la distribución de los porcentajes de los primeros apartados comparados con la distribución de los últimos apartados, podemos llegar a la conclusión de que se mantienen problemas con el trabajo y análisis de las derivas de orden superior, pues si no cuentan con la expresión analítica, no tienen los argumentos para responder preguntas como las realizadas en esta actividad que aprovechan para que los propios estudiantes le asignen un significado a los conceptos que han aprendido pero de manera muy mecánica.

Estudiante 1:

> Aproximadamente en entre 1.5 y 7 segundos la locomotora va marcha atrás, entre los dos puntos de inflexión de la gráfica.

> t=0-1.5 y de t=7-... la velocidad es positiva,
>
> t=1.5-7 la velocidad es negativa.

> igual que en el caso de la velocidad:
> t=0-1.5 y de t=7-... la aceleración es positiva,
>
> t=1.5-7 la aceleración es negativa.

> Sí, en dos puntos, que son los puntos de inflexión 1.5t y 7t, ya que la aceleración de esto puntos es cero, y por lo tanto la derivada también.

Este estudiante hace un análisis de la información que brinda la gráfica, fundamentalmente para el apartado 1, donde seleccionó que el intervalo donde la gráfica va marcha atrás es aquel donde la posición del movimiento de la locomotora va disminuyendo, hace hincapié que es entre los dos puntos de inflexión de la gráfica.

Al determinar los intervalos donde es positiva y negativa la velocidad, aunque no justifique podríamos pensar que sí hizo uso de alguna estrategia variacional, pero no argumenta y cuando analizamos las respuestas de los apartados 3 y 4, notamos la dificultad que significa para él, el obtener información de las segunda y tercera derivadas desde la gráfica.

Estudiante 2:

De 3.5 a 9.5

De 0 a 1.7 y de 7 a 10.5 es positiva y de 1.8 a 10.4 es negativa

De 0 a 1.7 y de 7 a 10.5 es positiva y de 1.8 a 10.4 es negativa

En los máximos y mínimos de la función ya que en estos puntos hay un cambio de positivo a negativo en la aceleración, lo que implica que en un instante de tiempo, aunque breve, ésta vale 0, por lo que su derivada también lo es.

En este ejemplo, el estudiante seleccionó como respuesta para el apartado uno, el intervalo donde la función está por debajo del eje de las X, esto demuestra que ese concepto es el significado que él tiene para lo que se está tratando. Lo mismo pasa con los apartados dos y tres, pues pone los mismos intervalos para los dos y dentro de estos intervalos quisiera analizar que al poner varios intervalos, pone una diferencia entre ellos. Así como en el apartado 4, con las bases con las que considera que la tercera derivada toma el valor cero en algún instante, expresa ideas que nos permiten asegurar que no tiene conocimiento ni estrategias variacionales para tratarla, solamente con la condición de que será cero cuando las anteriores sean cero también, por lo que está analizando analíticamente la derivada de cada una hasta llegar a la tercera.

Estudiante 3:

De 2 a 7, ya que la función se vuelve decreciente.

la velocidad sería positiva de 0 a 2 y de 7 en adelante ya que la gráfica es creciente.
Y negativa de 2 a 7.

No se puede determinar, ya que no se puede deducir su comportamiento a partir de una gráfica, pero se puede indicar que hay cambios de signo entre los puntos de inflexión

Solo en uno, porque la curva parece ser de tercer orden, por lo que su segunda derivada sería una recta.

Como se muestra en las respuestas de este estudiante, reiteramos que el análisis de los signos para la función y la primera derivada, no presentan mucho problema, analizando la monotonía para conocer el comportamiento de la segunda derivada, pero cuando se pasa a analizar la segunda y la tercera derivada, argumenta que desde la gráfica no puede obtener la información que se está pidiendo aunque ve un cambio de signo entre los puntos de inflexión y al dar una estrategia para la tercera derivada, su argumento es comparar la forma de la gráfica con una conocida de la cual puede obtener analíticamente la tercera derivada y por eso considera que sí toma valor cero en algún momento.

Actividad 8:

En esta actividad, tomada de Cantoral (2013), no mostramos ejemplos de estudiantes porque se repiten los comportamientos y análisis vistos en las actividades anteriores, donde los estudiantes pudieron dar respuestas con estrategias en las primeras actividades.

En el primer apartado, el 67% de los estudiantes seleccionó los intervalos que están por encima del eje X y para el análisis de la segunda derivada, la estrategia que más utilizaron fue la del análisis de la pendiente. Al igual que se reporta en Cantoral (2013), es en los apartados 3 y 4, donde los estudiantes deben argumentar sobre la segunda y la tercera derivada, las estrategias no salen a relucir, el trabajo con la concavidad o el análisis de la transformación en la propia gráfica, no fueron utilizadas por los estudiantes.

Apartado 1:

Estrategias variacionales	Intervalos donde la curva esté por encima del eje X.	14 (67%)
No Estrategias Variacionales	Intervalos sin justificaciones que demuestren estrategias variacionales.	
	No respuesta.	7 (33.3%)

Apartado 2:

Estrategias variacionales	Intervalos de monotonía, creciente/decreciente.	10 (47.6%)
No Estrategias Variacionales	Intervalos sin justificaciones que demuestren estrategias variacionales.	4 (19%)
	No respuesta.	7 (33.3%)

Apartado 3:

Estrategias variacionales	Intervalos de concavidad, hacia arriba/hacia abajo	1 (4.8%)
No Estrategias Variacionales	Intervalos sin justificaciones que demuestren estrategias variacionales.	11 (52.4%)
	No respuesta.	9 (42.8%)

Apartado 4:

Estrategias variacionales	Analizar los intervalos que se obtuvieron de la segunda derivada para argumentar que hay un solo intervalo donde la tercera derivada será positiva.	
	Graficar todas las derivadas para lograr una respuesta guiándose por la visualización.	
No Estrategias Variacionales	Intervalos sin justificaciones que demuestren estrategias variacionales.	11 (52.4%)
	No respuesta.	10 (47.6%)

3.3 Análisis de las respuestas a las actividades de los estudiantes cubanos.

Continuamos con el análisis de las actividades aplicadas a los estudiantes de la carrera de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Camagüey "Ignacio Agramonte Loynaz", se había planificado la participación de 60 estudiantes y se presentaron 25, de ellos 1 mujer y 24 hombres.

El poder aplicar la actividad en Cuba, es una de las causas por la que decidimos utilizar la plataforma Moodle como medio para llegar a todos los estudiantes allí presentes, y no sólo a estudiantes cubanos, como ya se comentó, la idea del uso de la plataforma es para abarcar más información que nos permita analizar los temas de interés dentro de la TSME. En el caso de Cuba, debemos reconocer que el uso de la plataforma inicialmente funcionó, pero luego por complicaciones de conectividad dentro de la propia Universidad, los estudiantes tuvieron que continuar realizando la actividad en los documentos que se llevaban impresos, ante esta situación, debemos reconocer que puede hablar influido en las respuestas desmotivación por parte de los estudiantes y que esta sea causa también de las actividades sin contestar.

A continuación, haremos el mismo análisis realizado con las estrategias de los estudiantes de México, donde nos apoyaremos mostrando como evidencia las respuestas que consideremos interesantes. No repetiremos el análisis de las actividades y lo que buscamos porque ya se vio en el apartado anterior al analizar las estrategias de los estudiantes mexicanos, mostraremos las respuestas de los estudiantes para luego hacer el estudio entre los estudiantes y llegar a conclusiones.

Actividad 1:

Apartado 1

<table>
<tr><td rowspan="3">Estrategias variacionales</td><td>Selecciona como variables a analizar altura/tiempo y utiliza estrategias variacionales como estimación, seriación o comparación.</td><td>12 (48%)</td></tr>
<tr><td>Selecciona como variables a analizar volumen/tiempo y utiliza estrategias variacionales como estimación, seriación o comparación.</td><td>2 (8%)</td></tr>
<tr><td>Selección de variables altura/tiempo, pero con estrategia variacional representada analíticamente.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">No Estrategias Variacionales</td><td>Argumentos que no demuestran un pensamiento variacional.</td><td>4 (16%)</td></tr>
<tr><td>No respuesta.</td><td>2 (8%)</td></tr>
</table>

Apartado 2

<table>
<tr><td rowspan="2">Estrategias variacionales</td><td>Selección de gráfica e, con argumentación del porqué de su selección, donde consideramos las palabras que utiliza para ver si demuestran estrategias variacionales.</td><td>16 (64%)</td></tr>
<tr><td>Selección de gráfica e, con análisis de variables volumen/tiempo y con estrategias variacionales.</td><td>1 (4%)</td></tr>
</table>

	Selección de gráfica c, con argumentación del porqué de su selección, considerando el razonamiento que se pueda aplicar.	
No Estrategias Variacionales	Selección de las gráficas a, b, d y f sin justificación.	7 (28%)
	Selección de gráfica b argumentando que es constante.	
	Selección correcta de respuesta, pero sin demostración de estrategia variacional.	6 (24%)
	No respuesta.	

En esta actividad tenemos en común que el tema tratado también le resultó muy sencillo a los estudiantes cubanos, brindando diferentes estrategias para dar respuesta. Sorprende que algunos estudiantes dejaron en blanco el apartado 1, pero sí respondieron al apartado 2, demostrando dificultad con el análisis visual de la información. Presentaremos ejemplos de los dos apartados por estudiantes.

Estudiante 1:

> 7 segundos aproximadamente, teniendo en cuenta la altura del cilindro y la altura que el agua alcanza en un segundo

> Es la e) pues representa una linea recta (pendiente constante y positiva), no varia la cantidad de agua por unidad de tiempo que entra. La a) va disminuyendo la cantidad de agua que entra con el tiempo, a la b) no entra agua, la c) sale el agua, la d) varia la cantidad de agua que entra al recipiente con el tiempo y la f) va aumentando la cant de agua que entra con el tiempo

Este estudiante es un ejemplo del uso de estrategias variacionales en los dos apartados. Seleccionó correctamente las variables a analizar y analizó las gráficas seleccionando la que demostraba el comportamiento del fenómeno. A pesar de esto, cuando describió el comportamiento de las gráficas que considera que no cumplen con las características del fenómeno analizado, los argumentos que utiliza para justificar demuestran dificultad en el análisis del cambio para las gráficas que representan el llenado de recipientes con forma distinta a la cilíndrica.

Estudiante 2:

realize una medicion del espacio llenado al pasar un segundo y una medicion del recipiente, con una simple regla de 3 obtengo el tiempo total de llenado. 28.5/3 = i/x donde x es el tiempo total despejando x= 28.5/3*1 el tiempo total sera de 9.5 segundos

1.2 e) seleccioné esta porque la salida de agua de la llave es constante en el tiempo. y no otra porque para un aumento de tiempo no puede haber una disminución de agua en el recipiente, y no utilice una exponencial porque como explique anteriormente la salida de agua de la llave es constante.

Este estudiante utilizó como estrategia variacional, la seriación, pues determinó primeramente la altura total del recipiente y la altura que alcanzó al pasar un segundo para obtener el tiempo de llenado aplicando pensamiento proporcional o como lo menciona él, la regla de tres.

Estudiante 3:

7.33 segundos

b) porque el recipiente se llena a flujo constante

En este caso, el estudiante demuestra el no uso de estrategias variacionales, pues selecciona la gráfica que a su criterio corresponde al llenado del recipiente. A nuestro criterio, su elección se debió al enunciado donde se especificaba que el llenado del recipiente era a flujo constante y sin analizar la altura del recipiente al pasar el tiempo y la forma del mismo, seleccionó la que demuestra el comportamiento constante, o sea, que se mantiene con la misma altura.

Estudiante 4:

> tardara aproximadamente 10 segundos

> a) es el gráfico que corresponde con el flujo constante porque el recipiente empieza a tomar altura mientras el flujo aumenta

Este estudiante en el apartado 1, notamos que es uno de los que determina que se demora 10 segundos, y aunque no comentó estrategia variacional para su selección, consideramos que esta respuesta puede estar bajo la influencia de la unidad de medida que haya seleccionado. En el apartado 2, la justificación de la elección de la gráfica no describe completamente el comportamiento que tiene dicha gráfica que sí le hubiera indicado que no es esa la que corresponde al llenado del recipiente.

Actividad 2:

En esta actividad, analizando los porcentajes de tipos de respuestas, nos demuestra que en las actividades de los apartados 1 y 2, los estudiantes tienen estrategias variacionales que les permiten dar solución, aunque algunos no lo trabajen, pero con respecto al apartado 3, que corresponde a la gráfica de la tasa de variación de la altura, los estudiantes demuestran las dificultades que tienen para interpretar qué cambia, cómo y por qué y poder graficarlo.

Apartado 1

Estrategias variacionales	Comparar altura con respecto a la forma del recipiente, utilizando frases que demuestren un análisis variacional donde esté presente el cambio.	15 (60%)
No Estrategias Variacionales	Transformación de las formas de los recipientes a conveniencia de explicación sin estrategias variacionales. (también puedo cambiarlo porque lo	2 (8%)

	analicen como funciones, no como gráficas que representan cambios)	
	Comparación del cambio de la altura/tiempo sin argumentos variacionales.	4 (16%)
	Selección de variables que cambian volumen/tiempo.	1 (4%)
	No respuesta.	3 (12%)

Apartado 2:

Estrategias variacionales	Elaborar gráfica donde se vea el comportamiento del llenado de los recipientes cilíndricos y cónicos y la relación entre los recipientes de la misma forma.	11 (44%)
	Elaborar una sola gráfica para representar el comportamiento del cambio de la altura/tiempo con respecto a la forma de los recipientes cilíndricos sin analizar la diferencia entre ellos	2 (8%)
No Estrategias Variacionales		
	Argumentos que demuestran la falta de estrategias variacionales.	9 (36%)
	No respuesta.	3 (12%)

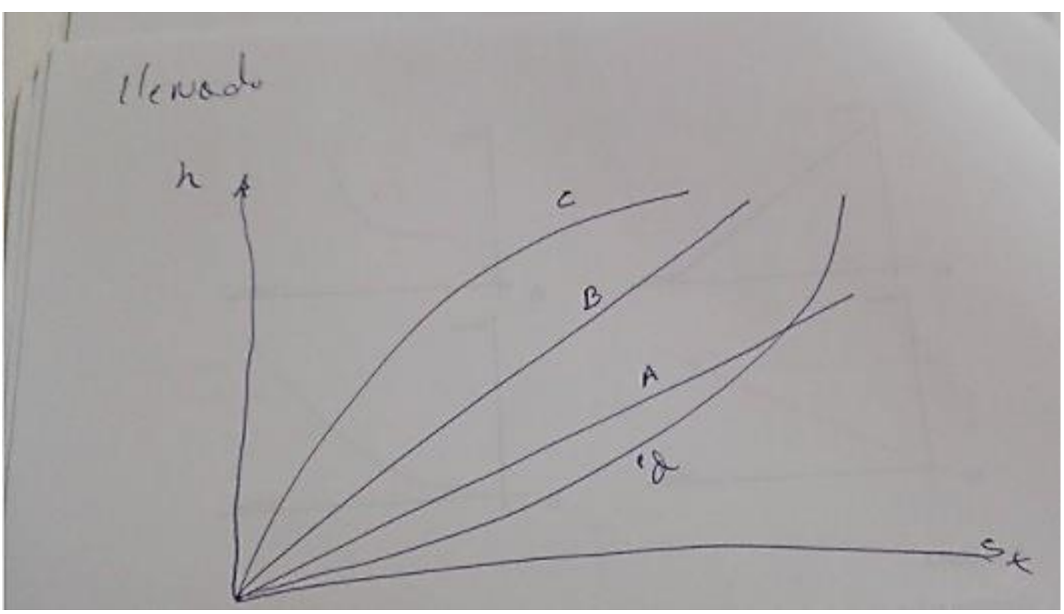
Apartado 3:

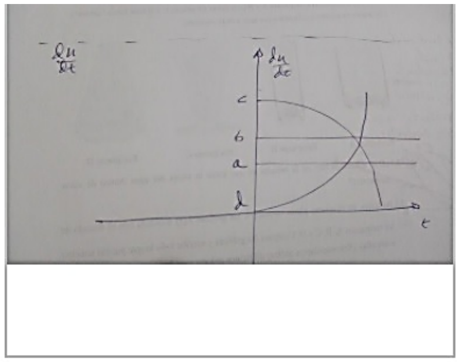
Estrategias variacionales	Curvas que demuestren la velocidad del cambio que sufrió la altura en cada recipiente con argumentos que lo demuestren	3 (12%)
	Argumentos que demuestren que, aunque no hizo la gráfica, desarrolla un pensamiento variacional,	1 (4%)

	interpretando lo que sucede con la velocidad del cambio de la altura.	
No Estrategias Variacionales		
	Curvas que demuestren la velocidad del cambio que sufrió la altura en cada recipiente, aunque la selección de las variables sea altura/velocidad.	
	Gráficas y argumentos que muestran análisis de cambio, pero sin estrategias variacionales, no se identifica lo que realmente cambia y cómo cambia, demuestran desconocimiento del tratamiento de este tipo de actividad.	12 (48%)
	No respuesta.	9 (36%)

Estudiante 1:

A lineal más lento que B que es lineal también. C descendente casi logarítmica. D ascendente casi semi cuadrática.





Justifique su respuesta

1) Si todos los recipientes tienen la misma capacidad (volumen) demorarán el mismo tiempo en llenarse.
2) si analizamos puntos intermedios veremos que C alcanza más rápido el llenado (lo dibujé en los papeles)

Este estudiante plantea algunos argumentos variacionales que le permiten tener una idea del comportamiento de las gráficas que demuestran el llenado de los recipientes, pero en el apartado 2, las comparó con otras gráficas conocidas para argumentar sobre su llenado, pero no con estrategias que nos permitieran entender lo que cambiaba y cómo, así como no brindar argumentos que apoyaran sus explicaciones.

Estudiante 2:

Los recipientes A y B creceran de manera constante,el C crece mas rapido primero y se demora mas despues y el D se demora en crecer y despues crece mas rapido.

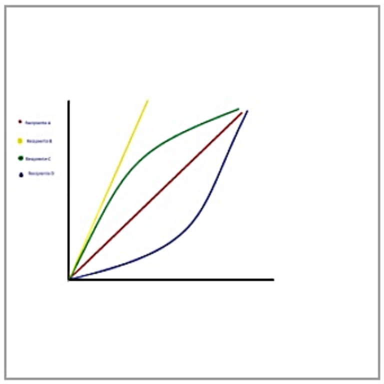
las graficas A y B la altura del agua que se va acumulando va creciendo de manera constante pero la A mas lento que la B a medida que pasa el tiempo, la C al principio crece mas aceleradamente y luego sube mas lento en el mismo espacio de tiempo o sea desacelera su crecimiento y la D primero crece mas lento y cuando pasa el tiempo va creciendo mas aceleradamente con respecto al tiempo, acarar que todo esto sucede asi porque el chorro de agua se comporta de manera constante, las lineas A Y B son lineas rectas pero las C y D son de manera exponenial.

Las aceleraciones se comportan de la manera siguiente:la A crece de manera constante por eso su aceleracion de llenado es cero al igual que la B,la C primero tiene una aceleracion mayor y luego va decreciendo y la D primero es menor y a medida que pasa el tiempo va subiendo.

Este estudiante no realizó ninguna gráfica, pero los argumentos que muestra en cada apartado nos permiten tener la idea de la presencia de estrategias variacionales que le permiten analizar el llenado de los recipientes, así como la primera derivada y la segunda a través de la gráfica.

Estudiante 3:

A: crece de forma constante y lento, B: crece de forma constante pero mas rapidamente que el A (mayor pendiente). C: Comienza a crecer rapidamente pero con el tiempo la pendiente va disminuyendo y con ella la velocidad a que crece la altura del agua, D: Comienza con una velocidad y pendientes pequeñas y a medida que pasa el tiempo la velocidad y la pendiente aumentan



Justifique su respuesta

La grafica del recipiente A es una linea recta pues no varia la velocidad de crecimiento del agua por unidad de tiempo, la del b es recta tambien debido a las caracteristicas del recipiente pero es mas inclinada pues su pendiente es mayor al ser mas estrecho, el c es estrecho en la base por lo que al principio la velocidad de crecimiento es rapida, pero va aumentando el ancho del recipiente por lo cual su pendiente va disminuyendo, el d es lo contrario del c

Recipiente a y b con pendiente constante, b crece mas rapido que a, recipiente c comienza rapido y termina mas lento aunque el cambio es constante debido a la forma de cono por eso las graficas son lineas rectas, d similar a c pero inverso.

En sus respuestas, este estudiante demuestra pensamiento variacional que utiliza para dar respuestas a los apartados, donde a pesar de no bosquejar la gráfica del apartado 3, con sus argumentos demuestra conocimiento de lo que cambia y cómo cambia.

Actividad 3:

Estrategias variacionales	Comparando los ángulos resultantes al trazar las rectas tangentes a los puntos que se están analizando. Estos	1 (4%)
		1 (4%)

	ángulos son los que se muestran con respecto al eje de las X.	1 (4%)
		1 (4%)
	Análisis del comportamiento de la pendiente de la recta tangente en los puntos.	4 (16%)
		3 (12%)
		4 (16%)
		3 (12%)
	Observar los cambios en una vecindad cercana a los puntos que se analizan y comparar dichos cambios para ver dónde es mayor o menor el incremento.	
No Estrategias Variacionales	Considerar que la primera derivada es negativa o positiva por la posición con respecto al eje X.	
	Argumentar respuestas sin evidencia de estrategias variacionales.	15 (60%)
		15 (60%)
		13 (60%)
		14 (56%)
	No respuesta.	5 (20%)
		6 (24%)
		7 (25%)
		7 (25%)

En esta actividad, donde todavía estamos trabajando con derivadas de primer orden, el mayor porcentaje de respuestas de los estudiantes estuvo enmarcado en respuestas que no mostraban estrategias variacionales o a criterio nuestro, que solamente pusieron una respuesta, pero sin analizarla.

Estudiante 1:

> en a es menor q en c, porque se define la primera derivada como el valor de la pendiente de la recta tangente al punto dado y graficamente vemos q si trazamos una tangente al punto c pues esta tendra mayor pendiente q si trazamos en a

> en este caso a tiene a mayor valor de derivada , por la misma justificacion del caso anterior, lo q en este, el valor de la pendiente de la tangente a c es menor

> en c es mayor, igual justificable graficamente

> en a es mayor , justificable por la misma via anterior

Este estudiante utilizó la estrategia de comparar las pendientes de las rectas tangentes a los puntos que se analizan y de la comparación determinó por conceptos que ya maneja, que una es mayor que la otra por la inclinación, sin considerar analizar los ángulos.

Estudiante 2:

> a es menor que c pues la tangente en ese punto esta menos inclinada que la de c

aqui son negativas ambas pendientes, a es mayor que c

a es negativa, c es positiva, a menor que c

a es mayor que c

Este estudiante utilizó la misma estrategia que el anterior, pero con distintos argumentos variacionales.

Actividad 4:

<table>
<tr><td rowspan="4">Estrategias variacionales</td><td rowspan="2">Comparar gráficas con frases: “más angosto”, “mayor rapidez”, etc o comparar luego de conocer la primera derivada.</td><td>1 (4%)</td></tr>
<tr><td>1 (4%)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Comparar los incrementos de la altura en la vecindad de los puntos que se analizan para determinar dónde es mayor o menor la segunda derivada.</td><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td rowspan="6">No Estrategias Variacionales</td><td rowspan="2">Hacer análisis de la pendiente sin argumentar para la segunda derivada.</td><td>2 (8%)</td></tr>
<tr><td>1 (4%)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Llegar a resultados de comparación haciendo análisis analítico al igualar a funciones conocidas y no obtener información de la gráfica.</td><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Respuesta al azar sin justificación, ni razonamiento variacional.</td><td>11 (44%)</td></tr>
<tr><td>11 (44%)</td></tr>
</table>

	No respuesta.	11 (44%)
		12 (48%)

Esta actividad presenta un comportamiento similar a la anterior, donde el mayor porcentaje de soluciones a los apartados se encuentra en las respuestas donde no se utilizan estrategias variacionales, responden sin argumentación o no responden. Podríamos analizar acá también, que se debe por pasar al análisis de procesos de segunda derivación, donde el estudiante no conoce la expresión analítica, solamente la gráfica, evidenciando que ya se presentan problemas en este tipo de pregunta.

Estudiante 1:

> tiene mayor segunda derivada la funcion f ,porque se utiliza la segunda derivada como criterio para identificar maximos y minimos, entonces es el punto tomado en la funcion g la q mas cercana esta de ser un minimo, o sea q el valor de su segunda derivada esta mas cercano a cero q el mismo punto en la funcion f, ya q ambos valores son positivos

> en este caso es mayor el valor de la segunda derivada el de g, por las mismas razones, g esta mas cercana, en este punto a ser maximo q f, por lo q el valor de la segunda derivada estara mas cercano a cero en g q en f. lo q en este caso ambos valore son negativos,por tanto el q mas cercano este de cero sera el mayor,

Este estudiante utiliza como estrategia analizar la cercanía de las funciones al posible mínimo a obtenerse en el apartado 1 o al máximo en el apartado 2. Considero que su estrategia fue utilizando conceptos donde conoce que en los puntos críticos (máximos – mínimos) la primera derivada es cero, por lo que, si la recta tangente se va acercando, significa que la pendiente tendrá menor valor. Este análisis, al continuar analizando la respuesta, vemos que fue el que tomó para comparar los valores de las segundas derivadas de las funciones, o sea, para él, la segunda derivada es cero en los puntos críticos, por lo que podríamos concluir, que el análisis de la segunda variación se le dificulta más si no cuenta con la expresión analítica de la función y no analiza concavidad de las mismas.

Estudiante 2:

f'' es menor que g'' pues la funcion f presenta un cambio mas fuerte en su pendiente que la hace casi constante

f'' es mayor que g''

Este estudiante utiliza un argumento variacional que le permite analizar el comportamiento de la segunda derivada, analizando "*...presenta un cambio más fuerte en su pendiente...*", por lo que podemos analizar que están analizando la variación de la variación.

Estudiante 3:

d ¨ f(x)/dx > d ¨ g(x)/dx
El análisis de la d ¨ y/dx nos da la tasa de cambio de la d´y/dx, como ambas curvas abren hacia arriba su f ¨ son positivas (+), pero al ser g(x) más suave su g ¨ (x) < f ¨ (x)

d ¨ g(x)/dx > d ¨ f(x)/dx por igual deducción, como abren hacia abajo son negativas (-)

Este estudiante, mostró el uso de estrategias variacionales para dar respuesta a la actividad, analizando la concavidad de la curva, como determinó que ambas son positivas, analizó también la variación de la variación con el argumento: "*...pero al ser g(x) más suave...*".

Actividad 5:

En esta actividad también se demuestra la dificultad de los estudiantes para interpretar los valores numéricos en una tabla y de allí obtener información relacionada a las derivadas de orden superior sin tener la expresión analítica de la función. En los tres apartados, analizamos que el mayor porcentaje de las respuestas se encuentran distribuidas en las soluciones que no presentan estrategias variacionales o porque no dieron respuesta.

Apartado 1

Estrategias variacionales	Analizar el cambio que ocurre con los valores de la tabla para ver los cambios de signos y determinar los valores de t dónde la velocidad instantánea es cero.	1 (4%)
	Pasar los valores de la tabla a una gráfica para determinar máximos y mínimos donde v = 0 (que demuestre estrategias, aunque las respuestas nos sean correctas).	3 (12%)
No Estrategias Variacionales	Determinar que no hay ningún valor de t donde la velocidad instantánea sea cero; brindar argumentos no variacionales que demuestren no uso de estrategia variacionales o análisis mecánico según conceptos.	
	Dar como respuesta que v = 0 en t = 4 porque considere que el móvil está en reposo.	10 (40%)
	Analizar los cambios de signos directamente de los valores que están en la tabla sin considerar los cambios que ocurren.	
	Brindar argumentos que demuestren el no uso de estrategias variacionales para dar respuestas o análisis mecánico según conceptos.	8 (32%)
	No respuesta.	3 (12%)

Apartado 2:

Estrategias variacionales	Continuar analizando los valores de cambio hallados en la actividad 5.1 para ver nuevamente dónde ocurren los cambios de signos.	
	Analizar en la gráfica que, para pasar de máximos a mínimos, deben estar presentes puntos de inflexión donde la aceleración es cero.	1 (4%)

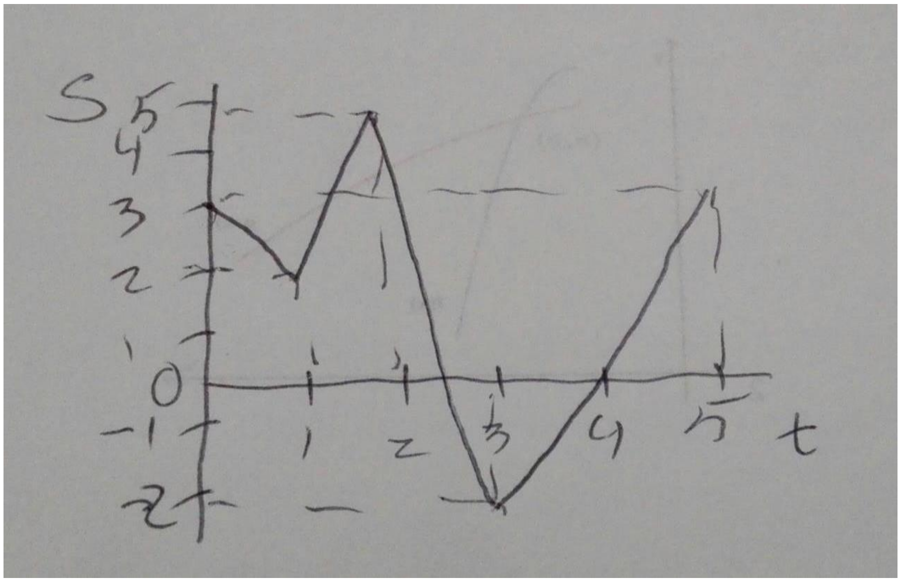
No Estrategias Variacionales	Determinar que no hay ningún valor de t donde la aceleración sea cero.	1 (4%)
	Dar como respuesta que a = 0 en t = 4 porque allí v = 0 considerando que el móvil está en reposo.	8 (32%)
	Brindar argumentos que demuestren el no uso de estrategias variacionales para dar respuestas o análisis mecánico según conceptos.	12 (48%)
	No respuesta.	3 (12%)

Apartado 3:

Estrategias variacionales	Analizar la 3ra variación con los mismos valores que han visto desde la tabla.	
	En la gráfica, luego de determinar los valores donde a = 0, determinar que entre estos s''' = 0 en algún valor.	
No Estrategias Variacionales	Argumentos no variacionales que demuestren desconocimiento del manejo de s´´´(t).	9 (36%)
	No respuesta.	16 (64%)

Estudiante 1:

en 5 instantes , contando el momento de inicio y fin , si hacemos una analisis grafico, vemos los picos q representan los cambios de direccion q necesariamente tuvo v=0 en ese punto de inflexion con excepcion en el cambio de3 a 5 segundos donde mantuvo una sola direccion aunque con velocidades distintas



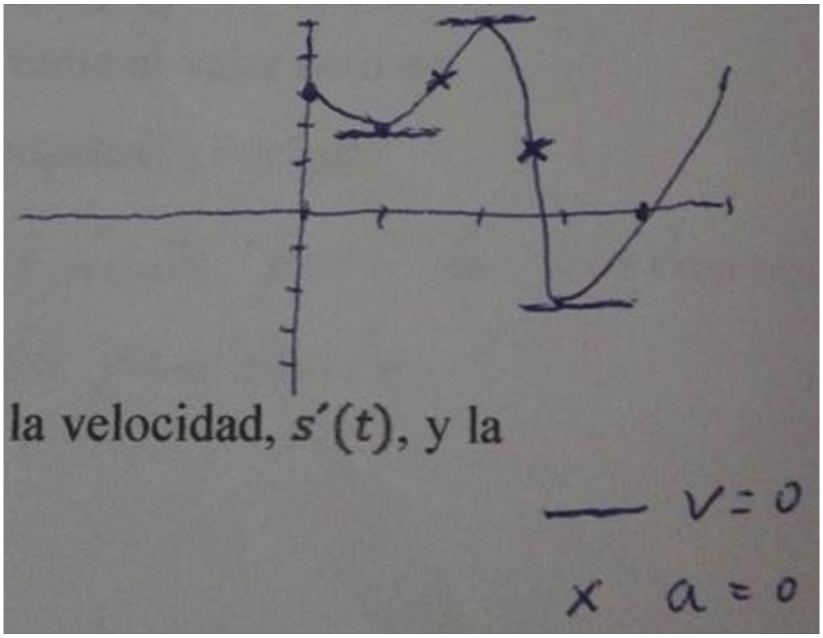
5 puntos igual , contando el inicio y fin pq la aceleracion depende de la variacion de velocidad y si en estos puntos V=0 entonces la aceleracion tambien

Como se había mencionado, en el caso de los estudiantes en Cuba, que por problemas de conexión no pudieron continuar utilizando la plataforma, se les entregaron las actividades en papel, por lo que pudieron apoyarse en gráficas que bosquejaron para hallar los valores que se solicitaban.

En la gráfica y con sus argumentos, se demuestra que analizó que en esos valores críticos las derivadas son cero, o sea, la velocidad, considerando esos cambios de dirección como los cambios en la monotonía de la curva. En el apartado 2 ya demuestra un argumento mecánico donde se guía por las reglas de derivación y no por el análisis de la concavidad de las funciones y la existencia de los puntos de inflexión donde la segunda derivada es igual a cero. Ya el apartado 3 no lo respondió.

Estudiante 2:

-2 -1 0 1 2 3 4 5 3m a 2m (retrocede); 2 a 5 (avanza,) ; 5 a -2 retrocede; -2 a 0 avanza; 0 a 3 avanza (tres cambios) para 3 valores de t como minimo el movil tiene velocidad inst 0



[3m a 2m (retrocede) y de 2 a 5 (avanza,) aceleracion positival; 5 a -2 retrocede, 1er cambio de aceleracion; -2 a 0 avanza; 0 a 3 avanza 2do cambio, la aceleracion es 0 por lo minimo dos veces

[3m a 2m (retrocede) y de 2 a 5 (avanza,) aceleracion positival; 5 a -2 retrocede, 1er cambio de aceleracion; -2 a 0 avanza; 0 a 3 avanza 2do cambio de aceleracion, al menos una vez debe cambiar

Este estudiante demostró en esta actividad un pensamiento variacional que le permitió analizar todos los cambios. La estrategia que utilizó fue pasar los valores numéricos dados en la tabla a una gráfica donde pudo analizar todos los cambios que ocurren y con el uso de conceptos y estrategias, logró dar las respuestas correctas en esta actividad.

Estudiante 3:

Como mínimo el móvil experimentó velocidad instantánea 0 en 3 ocasiones pues para describir este comportamiento en la posición tiene que alterar su sentido un mínimo de 3 veces alcanzando velocidad instantanea 0 en ese instante.

Asumiendo que dicho móvil experimenta un cambio de aceleración entre los instantes de partida de un punto (s;t) y el de llegada el valor de la segunda derivada o la aceleración de dicho cuerpo se hace 0 en 4 instantes

No lo puedo asegurar pues no conozco la descripción exacta (matemática) de dicho movimiento

En el caso de este estudiante, para el apartado 1, realizó un análisis de la monotonía de la función por lo que con su argumento "*…alterar su sentido un mínimo de 3 veces…*", pudo determinar dónde la primera derivada tomaría valor cero, pero ya en el análisis de la segunda y tercera derivadas, demuestra la dificultad que representa para los estudiantes el paso del análisis de la primera derivada y las sucesivas.

Actividad 6:

Apartado 1:

Estrategias variacionales	Al determinar una curva como s(t), hallar s´(t) y s´´(t) analizando los ceros y las pendientes de las funciones.	3 (12%)
No Estrategias Variacionales	Selección al azar de curvas sin justificación de uso de estrategia variacional.	11 (44%)
	Selección de curvas que cumplen con características de ser s(t) y s'(t) y selección sin estrategia variacional de s´´(t) guiándose por las anteriores.	1 (4%)
	No respuesta.	10 (40%)

Apartado 2:

Estrategias variacionales	Analizar monotonía de s’’(t).	4 (16%)
No Estrategias Variacionales	Al determinar qué curva representa s’’(t), afirmar que s´´´(t) es positiva/negativa en el intervalo de la curva s´´(t) que está por encima/debajo del eje X.	5 (20%)
	Seleccionar s’’’(t) al azar sin uso de estrategia variacional para su interpretación.	
	No respuesta.	16 (64%)

Apartado 3:

Estrategias variacionales	Mencionar características como: Máximos y mínimos, creciente/decreciente, signos, punto de inflexión, concavidad hacia arriba o hacia abajo	7 (28%)
No Estrategias Variacionales	Mencionar características como: Inicio de cada gráfica, puntos de intersección de las gráficas, intervalos donde no hay aceleración, etc.	1 (4%)
	No respuesta.	17 (68%)

Estudiante 1:

porque justo cuando la raya morada E (s'''(t)) topa al eje 0 y comienza a ser negativa las rayas roja C y azul B comienzan a disminuir dramáticamente y en mismo instante en que se vuelven negativas la posición de los cuerpos raya verde A y carmelita D disminuye

El valor de s'''(t) será posityivo en el intervalo 0 < x < 0.5

creciente hasta que llega a un pico y cambia el sentido

La estrategia que utilizó este estudiante para poder determinar las curvas que representan a la función y sus derivadas, fue analizando de atrás para adelante, o sea, seleccionó a una de las curvas como la segunda derivada y a partir del análisis de los ceros de esa curva y lo que pasa con otras a partir de ese punto, pudo seleccionar las gráficas que a su criterio cumplen con representar a la función y sus derivadas. También demuestra su estrategia al determinar los intervalos donde la tercera derivada es positiva, considerando el intervalo donde la segunda derivada tiene pendiente positiva.

Estudiante 2:

si, donde el movimiento toma valor maximo o minimo y cambia de direccion la velocidad corta al eje x (es 0), donde tenga un punto de inflexion la aceleracion es cero y la velocidad es maxima; y donde la velocidad tiene un maximo o minimo la aceleracion corta al eje x A es desplazamiento, B es velocidad y E es aceleracion.

de 0 a 0.5

Maximos y minimos, puntos de inflexion

Este estudiante utilizó la estrategia a la inversa que el estudiante 1, inicia analizando la función de movimiento y a partir de sus análisis de los puntos críticos y que en estos la derivada sucesiva tiene intercepto en eje X. También analiza el signo de la pendiente de la curva que designó era la segunda derivada para determinar dónde es positiva la tercera derivada.

Estudiante 3:

> s(t) es B, s´(t) es C y s´´(t) es E, porque a medida que vas derivando la expresion da un resultado mas pequeño y la grafica tambien tiene que ser menor.

> Desde 0.6 por el eje Posicion a 1.6 por el eje Tiempo

> Para mi son la grafica A, por ser una funcion bastante compleja a la hora de ver su estructura, es decir sus maximos, minimos y puntos de inflexion.

Este estudiante es un ejemplo de las ideas, por así decirlo, mecánicas que llegan a tomar en cuenta para aprenderse un contenido y lo demuestra en el apartado 1, donde la estrategia que utilizó fue guiándose por reglas de derivación de donde conoce que algunas funciones al derivarlas disminuyen su grado y determinó que lo mismo pasa con las gráficas y se basó en eso para su elección, demostrando la falta de estrategias variacionales. En el apartado 3 menciona características que sí son las utilizadas para determinar las gráficas y sus derivadas sucesivas, pero consideramos que menciona si asignarle un verdadero significado que lo hubiera ayudado a determinar las curvas correctas con las estrategias variacionales.

Estudiante 4:

> para obtenerlo, realicé un análisis de signo, así determiné f' y f y en análisis de concavidad para f''
> B(azul) -> f, C(roja) -> velocidad, E(morada) -> aceleración

> aproximadamente en 1

puntos de inflexión, concavidad

Este estudiante, aunque comenta que realizó un análisis de signo para poder determinar e identificar las curvas, en el apartado 2 selecciona un único punto donde considera que la tercera derivada es positiva, lo que coincide con el punto máximo de la curva que identificó como segunda derivada, lo que entra en contradicción con lo expresado en el apartado 1.

Actividad 7:

Esta actividad podría servirnos como guía para ver el cambio drástico que sufren las respuestas de los estudiantes al ir aumentando el orden de derivación. Vemos que en el apartado 1 y 2, las respuestas corresponden con uso de estrategias variacionales, pero en el apartado donde se pasa a hacer preguntas con respecto a la segunda y tercera derivadas, disminuyen drásticamente estas respuestas.

Apartado 1:

Estrategias variacionales	Determinar que el intervalo de tiempo en el que va marcha atrás es donde decrece la función, o sea, disminuye la posición.	11 (44%)
No Estrategias Variacionales	Determinar que el intervalo de tiempo en el que va marcha atrás es el que está por debajo del eje X.	9 (36%)
	No respuesta.	5 (20%)

Apartado 2:

Estrategias variacionales	Aproximación de los intervalos de tiempo donde la velocidad es positiva/negativa: crecimiento/decrecimiento de la función, pendiente de la recta tangente positiva/negativa.	11 (44%)

	Graficar la curva de la primera derivada y analizar monotonía o signo de la pendiente de la recta tangente.	
	Si consideró que el intervalo de tiempo en que va marcha atrás es el que está por debajo el eje X, entonces puede mostrar pensamiento variacional considerando que la velocidad es positiva a partir de donde esta deja de ser negativa.	
No Estrategias Variacionales	Intervalos sin justificación que muestren estrategias variacionales.	8 (32%)
	No respuesta.	6 (24%)

Apartado 3:

Estrategias variacionales	Aproximación de los intervalos de tiempo donde la aceleración es positiva/negativa: cóncava hacia arriba/cóncava hacia abajo.	2 (8%)
	Graficar la curva de la segunda derivada y analizar monotonía o signo de la pendiente de la recta tangente.	
No Estrategias Variacionales	Intervalos sin justificación que muestren estrategias variacionales.	13 (52%)
	No respuesta.	10 (40%)

Apartado 4:

	Analizar que, si tienen un único cambio de signo con respecto a la segunda derivada, o un solo punto	1 (4%)

Estrategias variacionales	de inflexión, la tercera derivada es constante por lo que no toma valor cero.	
	Analizando la gráfica de la segunda derivada, determinar que la tercera es una constante.	
No Estrategias Variacionales	Seleccionar un valor al azar sin justificación variacional.	7 (28%)
	No respuesta.	17 (68%)

Estudiante 1:

va marcha atras en el intervalo donde la grafica esta por debajo del eje de las
coordenadas (t)

positiva de 0 a 1.8 t y de 9.5t a final
negativa de 1.8 a 7t
tomando como referencia el eje de coordenadas del gráfico y no realmente el movimiento
de la locomotora

idem al anterior

En esta actividad, donde se proporciona una gráfica para que obtengan información de la función y sus derivadas, el estudiante considera que el intervalo donde se ve reflejado que va marcha atrás la locomotora es la que está por debajo del eje t (tiempo), lo que influye también en la respuesta que brinda en el apartado 2, ya que inicialmente consideramos que sí analiza el signo de la pendiente de la recta tangente donde es positiva, pero si siguiera ese mismo pensamiento, hubiera determinado otro intervalo donde sea positiva la primera derivada, pero dándole continuidad a la respuesta que brindó en el apartado 1, en el segundo intervalo donde considera que la primera derivada es positiva, sí tomó en cuenta el signo de la pendiente, pero solo el tramo de curva que está por encima del eje de las X. Esta es una de las ideas de estas actividades, si el estudiante hubiera analizado bien la estrategia que seleccionó para la respuesta del apartado 2, hubiera valorado nuevamente la brindada en el apartado 1. Ya con los apartados 2 y 3, demuestra la dificultad para el trabajo con las derivadas de orden superior.

Estudiante 2:

> va marcha atras de 3 a7

> es positiva de 0 a 2 , y de 7 a 12, y negativa de 2 a 7

> es positiva de 0 a 2 y de 7 a 12, es negativa de 2 a 7

> toma el valor cero en dos instantes en 3 y 9

Este estudiante utiliza la misma estrategia al determinar que el intervalo que indica que la locomotora va marcha atrás es el que se encuentra debajo del eje t (tiempo), el cual entra en contradicción con el intervalo que plantea en el apartado 2, donde el intervalo de $2 < t < 3$, lo considera negativo también. No tiene un significado para lo que representa el intervalo. Se repite la situación con las derivadas de orden superior al no tener estrategias para argumentar el porqué de la selección de los intervalos que señala.

Estudiante 3:

> de 1.5s a 7s

positiva de 0 a 1,5 y de 7 en adelante
negativa de 1.5 a 7

aceleración negativa de 0 a 4
aceleración positiva de 4 a 12

en ningún momento pues la aceleración no cambia su pendiente

Este estudiante, realiza un análisis profundo con los apartados, demostrando el uso de pensamiento variacional que le permitió dar un significado y utilizar argumentos en cada uno al brindar los intervalos donde se cumplen las condiciones establecidas, lo cual demuestra en el apartado 4, donde fue el único estudiante que utilizó un argumento variacional "*…aceleración no cambia su pendiente…*" y así poder concluir la actividad.

Actividad 8:

Apartado 1:

Estrategias variacionales	Intervalos donde la curva esté por encima del eje X.	8 (32%)
No Estrategias Variacionales	No respuesta.	17 (68%)

Apartado 2:

Estrategias variacionales	Intervalos de monotonía, creciente/decreciente.	4 (16%)
	Respuesta de intervalo sin explicación variacional.	5 (20%)

No Estrategias Variacionales	No respuesta.	16 (64%)

Apartado 3:

Estrategias variacionales	Intervalos de concavidad, hacia arriba/hacia abajo	3 (12%)
No Estrategias Variacionales	Respuesta de intervalo sin explicación variacional.	6 (24%)
	No respuesta.	16 (64%)

Apartado 4:

Estrategias variacionales	Analizar los intervalos que se obtuvieron de la segunda derivada para argumentar que hay un solo intervalo donde la tercera derivada será positiva.	
	Graficar todas las derivadas para lograr una respuesta guiándose por la visualización.	1 (4%)
No Estrategias Variacionales	No respuesta.	24 (96%)

Estudiante 1:

8.1 $f(x) > 0$

de -1.5 a -1 U 0 a 1 U 1.5 a infinito

8.2 $f'(x) > 0$

de -1.9 a -1.2 U -0.5 a 0.5 U 1.3 a 2

8.3 $f''(x) > 0$

de -1 a 0 U 1 en adelante

8.4 $f'''(x) > 0$

Este estudiante, aunque no se apoya en ningún argumento variacional, selecciona intervalos que cumplen con las condiciones de que la función y sus derivadas sean positivas y así lo demuestra también en las señalizaciones que hizo en la hoja de la actividad y que presentamos, lo que nos hace pensar qué sí tuvo presente estrategias variacionales para determinar dichos intervalos, pero es también un ejemplo que demuestra la dificultad presente en los estudiantes para interpretar la tercera derivada, aunque se conozcan características de la segunda derivada, situación que se repite en todas las actividades analizadas en esta investigación, donde los estudiantes brindan intervalos que demuestran uso de estrategias variacionales para dar las respuestas, pero al llegar al apartado 4, lo dejan en blanco o colocan algún intervalo que da muestra de una respuesta que ocupa un lugar para no dejarlo en blanco.

En el análisis de las actividades y sus respuestas por parte de los estudiantes de ambos países, pudimos ver en algunos casos similitudes de estrategias con conceptos matemáticos relacionados que les permitió analizarlas y brindar respuestas que nos guiaron para identificar las estrategias que pueden utilizar o no estudiantes mexicanos y cubanos y determinar si existen similitudes o no entre ellos, lo cual podremos ver en el próximo capítulo de esta investigación.

3.4 Análisis general de las respuestas de los estudiantes.

En esta parte del estudio, las conclusiones, la hemos destinado para realizar el estudio con mayor profundidad de las respuestas de los estudiantes ante las actividades presentadas en la situación didáctica y así poder determinar si existen similitudes y/o diferencias en las estrategias variacionales que utilizan y analizar la necesidad o no de algunas estrategias variacionales que se plantearon inicialmente pero que en el análisis podemos ver que no se utilizaron realmente por parte de los estudiantes.

Los resultados que obtuvimos se analizaron inicialmente por los estudiantes de México y luego los de Cuba, revisando cada respuesta proporcionada para determinar si incluía algunas de las estrategias que se comentaron podrían surgir de las actividades y si no, pues se incorporaba, pues se analizó cada uno y cada respuesta era igual de importante.

Para el análisis a profundidad de las posibles estrategias desarrolladas por los estudiantes, usamos como guía en las actividades el sistema de referencia para la segunda derivada planteada en (Caballero, 2016), pues es a partir de este orden de variación, donde analizamos inician las dificultades por parte de los estudiantes y podríamos estudiarlas y reportarlas ante la comunidad. La tabla del sistema de referencia en (Caballero, 2016):

<table>
<tr><th colspan="2">Elementos del sistema de referencia</th><th>Cuestionamiento sobre la variación que atiende</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Variables</td><td>Cualidades del fenómeno</td><td rowspan="3">¿Qué cambia?</td></tr>
<tr><td>La cantidad de cambio</td></tr>
<tr><td>Comportamientos específicos</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidad de referencia</td><td>Valor fijo</td><td rowspan="2">¿Respecto de qué cambia?</td></tr>
<tr><td>Comportamiento prototipo</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidad de medida</td><td>Medida cualitativa</td><td rowspan="2">¿Cuánto cambia?</td></tr>
<tr><td>Medida cuantitativa</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Temporización</td><td>Estado inicial – final</td><td rowspan="3">¿Cómo cambia?</td></tr>
<tr><td>Discretización del cambio</td></tr>
<tr><td>Secuenciación de comportamientos</td></tr>
</table>

Tabla: Elementos característicos del sistema de referencia (Caballero, 2016)

De la tabla del sistema de referencia para la segunda derivada, analizamos las variables, la unidad de referencia y la unidad de medida. Con respecto a la variable, estamos de acuerdo con lo expresado en (Caballero, 2016), que estudiar la variación depende de la variable que se elija para ellos, pues vimos los ejemplos de estudiantes que analizaban las variables altura/tiempo, pero también los que analizaron volumen/tiempo, para su elección, deben preguntarse, ¿qué cambia? ¿las alturas, las pendientes, la forma de la gráfica?

Para explicar y analizar cómo los estudiantes midieron la variación, nos guiamos por Reyes-Gasperirni (citada en Caballero, 2016) para hacer las siguientes preguntas: con la unidad de referencia, ¿respecto de qué cambia? Y con la unidad de medida, ¿cuánto cambia?

Los datos se presentaron en el capítulo 3 por separado, por lo que de manera general lo analizaremos a continuación para dar respuesta a nuestra pregunta de investigación en caso de ser posible.

Realizaremos un análisis al pasar cada tabla de resumen de respuestas de los apartados y una conclusión al final.

Actividad 1

Apartado 1:

		México	Cuba
Estrategias variacionales	Selecciona como variables a analizar altura/tiempo y utiliza estrategias variacionales como estimación, seriación o comparación.	13 (61.9%)	12 (48%)
	Selecciona como variables a analizar volumen/tiempo y utiliza estrategias variacionales como estimación, seriación o comparación.	3 (14.3%)	2 (8%)
	Selección de variables altura/tiempo, pero con estrategia variacional representada analíticamente.	5 (23.8%)	
No Estrategias Variacionales	Argumentos que no demuestran un pensamiento variacional.		4 (16%)

	No respuesta.		2 (8%)

En este apartado, podemos ver que el mayor porcentaje de respuesta en ambas poblaciones demuestra un uso de estrategias similares, como se comentó al presentarlas por separado. En este apartado, la similitud en la selección de códigos variacionales fue increíble, en ambos países, los estudiantes determinaron una unidad de medida, como se reporte en (Caballero, 2016), que les permitiera responderse a la pregunta ¿cuánto cambia? y así determinar el tiempo que demoraría en llenarse el recipiente, ya fuera con el uso de reglas, lápices o el propio señalador del mouse de la computadora.

Como mismo se presentó similitud en el uso de una estrategia que demuestra desarrollo del pensamiento variacional, se presenta similitud en la cantidad de estudiantes que determinaron las variables volumen/tiempo como las que tenían que analizar, pero sin considerar verdaderamente lo que cambiaba, pero demostrando un pensamiento variacional al ver el cambio en el volumen.

Apartado 2:

		México	Cuba
Estrategias variacionales	Selección de gráfica e, con argumentación del porqué de su selección, donde consideramos las palabras que utiliza para ver si demuestran estrategias variacionales.	17 (81%)	16 (64%)
	Selección de gráfica e, con análisis de variables volumen/tiempo y con estrategias variacionales.	3 (14.3%)	1 (4%)
	Selección de gráfica c, con argumentación del porqué de su selección, considerando el razonamiento que se pueda aplicar.	1 (4.8%)	
No Estrategias Variacionales	Selección de las gráficas a, b, d y f sin justificación.		1 (4%)
	Selección de gráfica b argumentando que es constante.		1 (4%)
	Selección correcta de respuesta, pero sin demostración de estrategia variacional.		6 (24%)

	No respuesta.		

En este apartado, al igual que en el anterior, se ve una similitud en la selección de las estrategias, demostrando que para ambas poblaciones, este tipo de actividades y lo que se pregunta en él es muy sencillo, pero a la vez, demuestra y que es nuestro criterio que en este caso, para ambos, el poder responder este tipo de actividad no tiene influencia del currículo matemático, pues con la experiencia de la investigadora como maestra de matemáticas, ejemplos como el tratado en esta actividad y con el significado para el cambio de la primera derivada no se tratan en el salón de clases, por lo que para ambas poblaciones se muestra el uso de formas de pensamiento variacional.

Actividad 2

Apartado 1:

		México	Cuba
Estrategias variacionales	Comparar altura con respecto a la forma del recipiente, utilizando frases que demuestren un análisis variacional donde esté presente el cambio.	18 (85.7%)	15 (60%)
No Estrategias Variacionales	Transformación de las formas de los recipientes a conveniencia de explicación sin estrategias variacionales.	1 (4.8%)	2 (8%)
	Comparación del cambio de la altura/tiempo sin argumentos variacionales.	1 (4.8%)	4 (16%)
	Selección de variables que cambian volumen/tiempo.	1 (4.8%)	1 (4.8%)
	No respuesta.		3 (12%)

En este apartado, fue similar la situación del análisis de la actividad para brindar las respuestas. La mayoría de los estudiantes de ambas poblaciones, realizaron la comparación estableciendo como sistema de referencia la forma de los recipientes, específicamente, iniciando con los cilíndricos por ser los ya conocidos de la actividad anterior y así poder analizar su diferencia con respecto a los dos recipientes cónicos.

En este caso, también el mayor porcentaje de respuesta coincidió para ambas poblaciones, utilizando frases que demostraban un pensamiento variacional y coincidían en ambas, pero ya destacando la dificultad dentro de los estudiantes de Cuba para argumentar sobre lo que cambia y cómo cambia.

Aquí destacamos la estrategia de uno de los estudiantes de México, donde consideró la situación de cambio diferente a lo esperado, pero demostrando de todas formas un pensamiento variacional.

Apartado 2:

		México	Cuba
Estrategias variacionales	Elaborar gráfica donde se vea el comportamiento del llenado de los recipientes cilíndricos y cónicos y la relación entre los recipientes de la misma forma.	13 (61.9%)	11 (44%)
	Elaborar una sola gráfica para representar el comportamiento del cambio de la altura/tiempo con respecto a la forma de los recipientes cilíndricos sin analizar la diferencia entre ellos	6 (28.6%)	2 (8%)
No Estrategias Variacionales	Argumentos que demuestran la falta de estrategias variacionales.	2 (9.5%)	9 (36%)
	No respuesta.		3 (12%)

Ya en este apartado inician las diferencias entre ambas poblaciones. Aunque la mayoría de los estudiantes, bosquejaron gráficas (ya fuera con el uso de diferentes sistemas de coordenadas o uno solo para todas las gráficas), que demostraban su posibilidad de pasar de un registro a otro, en el caso de los estudiantes cubanos, demostraron dificultad para lograr esto, existiendo algunos que dejaron las respuestas en blanco. Dentro de las similitudes encontradas, vemos que, en ambas poblaciones, en muchos casos no ven la diferencia entre los dos recipientes cilíndricos, o sea, no ven la diferencia en el cambio.

Apartado 3:

		México	Cuba
Estrategias variacionales	Curvas que demuestren la velocidad del cambio que sufrió la altura en cada recipiente con argumentos que lo demuestren	9 (42.8%)	3 (12%)
	Argumentos que demuestren que, aunque no hizo la gráfica, desarrolla un pensamiento variacional, interpretando lo que sucede con la velocidad del cambio de la altura.		1 (4%)
No Estrategias Variacionales	Curvas que demuestren la velocidad del cambio que sufrió la altura en cada recipiente, aunque la selección de las variables sea altura/velocidad.	2 (9.5%)	
	Gráficas y argumentos que muestran análisis de cambio, pero sin estrategias variacionales, no se identifica lo que realmente cambia y cómo cambia, demuestran desconocimiento del tratamiento de este tipo de actividad.	6 (28.5%)	12 (48%)
	No respuesta.	4 (19%)	9 (36%)

En este apartado, la similitud de los estudiantes radicó en que en ambas poblaciones se evidencia la dificultad para bosquejar la gráfica donde se evidencie la razón de cambio de las variables que analizaron en los apartados anteriores, destacando mayor complejidad por parte de los estudiantes cubanos, donde la mayoría bosquejó gráficas pero sin argumentos variacionales que permitieran ver el pensamiento que desarrollaron para el análisis del cambio, demostrando un desconocimiento en el tratamiento de este tipo de ejercicio.

En esta actividad, podemos ver el inicio de algunas diferencias por parte de las dos poblaciones, iniciaron de forma muy satisfactoria, comentando con argumentos variacionales las formas de cambio de los recipientes, pero las diferencias iniciaron con el paso de obtener la información visual y pasarla a una gráfica, demostrando mayor problema en la población de estudiantes de Cuba.

Actividad 3

		México	Cuba
Estrategias variacionales	Comparando los ángulos resultantes al trazar las rectas tangentes a los puntos que se están analizando. Estos ángulos son los que se muestran con respecto al eje de las X.	1 (4.8%)	1 (4%)
		1 (4.8%)	1 (4%)
		1 (4.8%)	1 (4%)
		1 (4.8%)	1 (4%)
	Análisis del comportamiento de la pendiente de la recta tangente en los puntos.	8 (38.1%)	4 (16%)
		7 (33.3%)	3 (12%)
		9 (42.8%)	4 (16%)
		7 (33.3%)	3 (12%)
	Observar los cambios en una vecindad cercana a los puntos que se analizan y comparar dichos cambios para ver dónde es mayor o menor el incremento.		
		1 (4.8%)	
No Estrategias Variacionales	Considerar que la primera derivada es negativa o positiva por la posición con respecto al eje X.	1 (4.8%)	
		1 (4.8%)	
	Argumentar respuestas sin evidencia de estrategias variacionales.	7 (33.3%)	15 (60%)
		8 (38.1%)	14 (56%)
		7 (33.3%)	13 (52%)
		9 (42.8%)	14 (56%)
	No respuesta.	4 (19%)	5 (20%)

		4 (19%)	6 (24%)
		4 (19%)	7 (25%)
		3 (14.2%)	7 (25%)

En esta, se demuestra lo comentado en la pasada actividad. La distribución de los datos en la población de estudiantes mexicanos está dividida en un promedio aproximado del 36% en el uso de estrategias variacionales para dar respuesta a los apartados, haciendo hincapié en el trabajo con la pendiente y una estimación de su valor según la posición. El 54% restante de la población se ubicó en el no uso de estrategias variacionales.

En el caso de los estudiantes cubanos, el mayor porcentaje se ubicó en el no uso de estrategias variacionales, demostrando la dificultad que presentan para el análisis e interpretación de las gráficas. En estos apartados, consideramos que la dificultad fue mayor al tratarse del análisis e interpretación del comportamiento de la gráfica de la primera derivada de una función, demostrando a su vez que, al aumentar el orden de variación a analizar, las dificultades y no conocimiento de estrategias variacionales para tratar el tema, aumentan.

Actividad 4

		México	Cuba
Estrategias variacionales	Comparar gráficas con frases: “más angosto”, “mayor rapidez”, etc o comparar luego de conocer la primera derivada.	4 (19%)	1 (4%)
			1 (4%)
	Comparar los incrementos de la altura en la vecindad de los puntos que se analizan para determinar dónde es mayor o menor la segunda derivada.	1 (4.8%)	
No Estrategias Variacionales	Hacer análisis de la pendiente sin argumentar para la segunda derivada.	2 (9.5%)	2 (8%)
			1 (4%)
	Llegar a resultados de comparación haciendo análisis analítico al igualar a funciones conocidas y no obtener información de la gráfica.	2 (9.5%)	

	Respuesta al azar sin justificación, ni razonamiento variacional.	8 (38.1%)	11 (44%)
			11 (44%)
	No respuesta.	4 (19%)	11 (44%)
			12 (48%)

Los estudiantes demuestran en ambas poblaciones, la dificultad que se les presenta al tener que analizar gráficamente el comportamiento de la segunda derivada sin tener una expresión analítica a la que aplicarle las reglas de derivación y así obtener también la expresión analítica que representa a la variación de orden dos, aunque podemos reportar el uso de frases de comparación por parte de estudiantes mexicanos que evidencian un análisis preliminar de la primera variación para dar paso al análisis de la segunda variación, como lo comenta (Caballero, 2016): "más angosta", "cambia con más rapidez", "la pendiente parece ser menos positiva", considerando que en esta respuesta analizó la pendiente como su análisis de la primera derivada y luego, en base a ella, siguió analizando su comportamiento para la segunda derivada. El resto de la población de estudiantes mexicanos no muestran un uso de estrategias variacionales. Un 19% buscó una fórmula algebraica que le ayudara a dar la respuesta y un 57%, respondió al azar, sin justificación variacional o no dio respuesta.

Los estudiantes de la Universidad de Camagüey fueron en aumento con respecto a la dificultad de interpretación de la gráfica, lo cual se demuestra en la tabla anterior, donde se ubica el mayor porcentaje en el trabajo sin estrategias variacionales o dejando la actividad en blanco, sin respuesta.

Actividad 5

Apartado 1:

		México	Cuba
Estrategias variacionales	Analizar el cambio que ocurre con los valores de la tabla para ver los cambios de signos y determinar los valores de t dónde la velocidad instantánea es cero.	3 (14.3%)	1 (4%)

	Pasar los valores de la tabla a una gráfica para determinar máximos y mínimos donde $v = 0$ (que demuestre estrategias, aunque las respuestas nos sean correctas).	3 (14.3%)	3 (12%)
No Estrategias Variacionales	Determinar que no hay ningún valor de t donde la velocidad instantánea sea cero; brindar argumentos no variacionales que demuestren no uso de estrategia variacionales o análisis mecánico según conceptos.	8 (38.1%)	
	Dar como respuesta que $v = 0$ en $t = 4$ porque considere que el móvil está en reposo.	2 (9.5%)	10 (40%)
	Brindar argumentos que demuestren el no uso de estrategias variacionales para dar respuestas o análisis mecánico según conceptos.		8 (32%)
	No respuesta.	5 (23.8%)	3 (12%)

En este apartado, la similitud se presentó en que un porcentaje semejante de estudiantes de ambas poblaciones, decidieron pasar los datos presentados en la tabla a una gráfica, demostrando la dificultad que presentan para obtener información de una tabla con valores numéricos y debido a que en la gráfica, la estrategia que usan es mecánica, pues allí pueden ver los puntos donde $v = 0$, pero no tienen un significado para eso, solamente recuerdan que en los puntos donde ocurren máximos o mínimos, la velocidad es cero, pero no se preguntan por qué.

Otra similitud entre ambas poblaciones, que a la vez se convierte en diferencia es con respecto a que el mayor porcentaje de las respuestas se ubicó en el trabajo con estrategias no variacionales. De los estudiantes mexicanos, un 38% consideró que no existía valor donde t fuera cero y de los estudiantes cubanos un 40% demostró el uso de teoremas factuales como: $s = 0 \rightarrow v = 0$.

Aun así, los estudiantes cubanos demostraron mayor dificultad en este apartado, pues el 84% no mostró argumentos variacionales que demostraran el desarrollo de un pensamiento variacional.

Apartado 2:

		México	Cuba
Estrategias variacionales	Continuar analizando los valores de cambio hallados en la actividad 5.1 para ver nuevamente dónde ocurren los cambios de signos.	1 (4.8%)	
	Analizar en la gráfica que, para pasar de máximos a mínimos, deben estar presentes puntos de inflexión donde la aceleración es cero.		1 (4%)
No Estrategias Variacionales	Determinar que no hay ningún valor de t donde la aceleración sea cero.	2 (9.5%)	1 (4%)
	Dar como respuesta que $a = 0$ en $t = 4$porque allí $v = 0$ considerando que el móvil está en reposo.	1 (4.8%)	8 (32%)
	Brindar argumentos que demuestren el no uso de estrategias variacionales para dar respuestas o análisis mecánico según conceptos.	13 (61.9%)	12 (48%)
	No respuesta.	4 (19%)	3 (12%)

Como está reportado en (Cantoral, Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento, 2013), a medida que aumenta el orden de variación a analizar, los estudiantes van utilizando estrategias memorísticas que le permitan responder a lo que se le está preguntando, aunque no tengan una idea real de lo que comentan. En este apartado se demuestra lo expresado anteriormente, pues la mayoría de los estudiantes de ambas poblaciones (95% de los estudiantes mexicanos y el 96% de los estudiantes cubanos) argumentan con estrategias no variacionales realizando análisis mecánicos según los conceptos que conocen de la materia.

Apartado 3:

		México	Cuba

Estrategias variacionales	Analizar la 3ra variación con los mismos valores que han visto desde la tabla.		
	En la gráfica, luego de determinar los valores donde $a = 0$, determinar que entre estos $s''' = 0$ en algún valor.		
No Estrategias Variacionales	Argumentos no variacionales que demuestren desconocimiento del manejo de $s'''(t)$.	17 (81%)	9 (36%)
	No respuesta.	4 (19%)	16 (64%)

Este apartado es el que da inicio al trabajo con la derivada de orden superior, grado 3 y a su vez, el apartado que demuestra los planteado en (Cantoral, Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento, 2013), pues aunque entienden lo que se les está pidiendo ya que la pregunta los familiariza con s’’’(t), pero no pueden argumentar de manera variacional lo que ocurre con la tercera derivada, demostrando la carencia de elementos cognitivos y didácticos que les permitan construir una respuesta adecuada.

El total de las poblaciones de ambos países, respondieron con argumentos no variacionales o dejando la pregunta en blanco.

Actividad 6

Apartado 1:

		México	Cuba
Estrategias variacionales	Al determinar una curva como $s(t)$, hallar $s'(t)$ y $s''(t)$ analizando los ceros y las pendientes de las funciones.	4 (19%)	3 (12%)
	Selección al azar de curvas sin justificación.	7 (33.3%)	11 (44%)

No Estrategias Variacionales	Selección de curvas que cumplen con características de ser $s(t)$ y $s'(t)$ y selección sin estrategia variacional de $s'(t)$ guiándose por las anteriores.	4 (19%)	1 (4%)
	No respuesta.	6 (28.6%)	10 (40%)

A pesar de ser un apartado de la actividad, donde se inicia con un reconocimiento de las curvas presentes, solamente el 19% de los estudiantes mexicanos y el 12% de los estudiantes cubanos, utilizaron argumentos variacionales para identificar qué graficas cumplían con las condiciones para ser la función original y sus derivadas, con argumentos como determinar el punto máximo de una función y así determinar sus derivadas si en ese punto tienen valor cero la gráfica, pero dentro del análisis que realizan para determinar cuál de todas es la función original, se guían al azar, o sea, algunos seleccionan una gráfica sin justificación del por qué consideran que es la función original y a partir de ella es que analizan sus derivadas.

Nuevamente, la mayoría de los estudiantes dieron respuestas al azar en la selección de las gráficas, donde inicialmente identificaban correctamente una curva y su derivada, pero en el momento de seleccionar cuál sería la curva de la segunda derivada, la seleccionaba al azar, demostrando la dificultad que se presentaba para interpretar el cambio a partir de órdenes de variación superior a uno.

La similitud en este apartado para ambas poblaciones fue elevada, incluso en la cantidad de estudiantes que dejaron la pregunta en blanco.

Apartado 2:

		México	Cuba
Estrategias variacionales	Analizar monotonía de $s''(t)$.	5 (23.8%)	4 (16%)
No Estrategias Variacionales	Al determinar qué curva representa $s''(t)$, afirmar que $s'''(t)$ es positiva/negativa en el intervalo de la curva $s''(t)$que está por encima/debajo del eje X.	10 (47.6%)	5 (20%)

	No respuesta.	6 (28.6%)	16 (64%)

En este apartado, aunque se está solicitando el trabajo con la interpretación de la segunda derivada para determinar dónde es positiva la tercera derivada, o sea, trabajar con la segunda derivada como si fuera la función y utilizar la estrategia del análisis del signo de la pendiente para determinar dónde es positiva su derivada (s’’’(t)), un porcentaje muy bajo en ambas poblaciones fueron los que analizaron la monotonía de la curva para determinar el signo de su derivada.

Lo también reportado en (Cantoral, Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento, 2013), dentro de la población de los estudiantes mexicanos, el 47.6% determinó que la tercera derivada era positiva en el intervalo donde la segunda derivada era positiva, o sea, en el intervalo donde la segunda derivada está por encima del eje de las x.

El 64% de la población de estudiantes cubanos, dejó esta pregunta en blanco

Apartado 3:

		México	Cuba
Estrategias variacionales	Mencionar características como: Máximos y mínimos, creciente/decreciente, signos, punto de inflexión, concavidad hacia arriba o hacia abajo	7 (33.3%)	7 (28%)
No Estrategias Variacionales	Mencionar características como: Inicio de cada gráfica, puntos de intersección de las gráficas, intervalos donde no hay aceleración, etc.	7 (33.3%)	1 (4%)
	No respuesta.	7 (33.3%)	17 (68%)

A pesar de que se podría considerar que este es un apartado que podría resultar sencillo para los estudiantes, considerando que podrían brindar sus argumentos variacionales para describir las características de las funciones y cuáles de ellas son fundamentales para trazar las gráficas. La similitud presente en este caso se trató de que un porcentaje semejante brindó características que demuestran argumentos variacionales, pero con respecto a los estudiantes mexicanos, un 33% se orientó por el teorema factual, reportado en (Marcolini, 2003), de que si $v = 0$ entonces $a = 0$, los llevó a elegir frases como que ambas inician en cero, pasan por (0, 0), concluyendo que tienen una posición privilegiada. La diferencia radica en que un 68% de los estudiantes cubanos dejó la respuesta en blanco, demostrando selección al azar en actividades anteriores.

Actividad 7

Apartado 1:

		México	Cuba
Estrategias variacionales	Determinar que el intervalo de tiempo en el que va marcha atrás es donde decrece la función, o sea, disminuye la posición.	10 (47.6%)	11 (44%)
No Estrategias Variacionales	Determinar que el intervalo de tiempo en el que va marcha atrás es el que está por debajo del eje X.	6 (28.6%)	9 (36%)
	No respuesta.	5 (23.8%)	5 (20%)

Este apartado presentó una semejanza en todos los aspectos, tanto en el uso de estrategias variacionales, como no usarlas o dejar la pregunta en blanco. Ambas poblaciones de estudiantes presentaron porcentajes semejantes en la determinación del intervalo donde decrece la función, o sea, donde disminuye la posición. Lo mismo pasa con la cantidad de estudiantes que determinaron que el intervalo donde se cumple es aquel donde la gráfica está por debajo de cero, pero esto demostró un uso de conceptos matemáticos que no involucran las herramientas matemáticas ni estrategias variacionales que se quieren destacar. Coincidieron la cantidad de estudiantes de ambos países que dejaron la pregunta en blanco.

Apartado 2:

		México	Cuba
Estrategias variacionales	Aproximación de los intervalos de tiempo donde la velocidad es positiva/negativa: crecimiento/decrecimiento de la función, pendiente de la recta tangente positiva/negativa.	10 (47.6%)	11 (44%)
No Estrategias Variacionales	Intervalos sin justificación que muestren estrategias variacionales.	5 (23.8%)	8 (32%)
	No respuesta.	6 (28.6%)	6 (24%)

Este fue uno de los apartados donde se eliminaron estrategias variacionales que se consideraron podrían tomar los estudiantes, pero no fue el caso, tales como: "Graficar la curva de la primera derivada y analizar monotonía o signo de la pendiente de la recta tangente", etc.

Al igual que el apartado anterior, la distribución de las respuestas fue similar, el mayor porcentaje se encontró en que los estudiantes utilizaron como estrategia variacional, la comparación de los signos de las pendientes de las rectas tangentes para así poder demostrar dónde es positiva y dónde negativa.

Aun así, el mayor porcentaje (el 52% de los estudiantes mexicanos y el 56% de los estudiantes cubanos) se encuentra en los estudiantes que dieron respuestas sin argumentos variacionales o dejaron la pregunta en blanco.

Apartado 3:

		México	Cuba
Estrategias variacionales	Aproximación de los intervalos de tiempo donde la aceleración es positiva/negativa: cóncava hacia arriba/cóncava hacia abajo.	2 (9.5%)	2 (8%)
No Estrategias Variacionales	Intervalos sin justificación que muestren estrategias variacionales.	13 (62%)	13 (52%)
	No respuesta.	6 (28.6%)	10 (40%)

En este apartado también se consideró que los estudiantes, utilizando la gráfica original, bosquejaran la gráfica de la segunda derivada, pero esa estrategia no se presentó en ninguno de los casos, por lo que determinó eliminarse de esta tabla.

En este apartado, la similitud radicó la cantidad de estudiantes de ambas poblaciones que respondieron con estrategias variacionales o no, pero parecidas. De ambos grupos, solo 2 estudiantes de cada uno utilizaron el contenido relacionado a la concavidad de la curva para determinar dónde era positiva la aceleración, mientras que el mayor porcentaje estuvo presente en ambas poblaciones en las respuestas sin demostración de uso de estrategias variacionales o preguntas sin respuestas.

Apartado 4:

		México	Cuba
Estrategias variacionales	Analizar que, si tienen un único cambio de signo con respecto a la segunda derivada, o un solo punto de inflexión, la tercera derivada es constante por lo que no toma valor cero.	1 (4.8%)	1 (4%)
	Analizando la gráfica de la segunda derivada, determinar que la tercera es una constante.		
No Estrategias Variacionales	Seleccionar un valor al azar sin justificación variacional.	14 (67%)	7 (28%)
	No respuesta.	6 (28.6%)	17 (68%)

Nuevamente, al ser una actividad donde lo que se solicita es el análisis de la tercera derivada para dar una respuesta, el mayor porcentaje de las poblaciones que se analizan, dieron como respuestas instantes seleccionados al azar, sin poner justificación o como se muestra en la tabla, para la población de estudiantes de Cuba, el mayor porcentaje se encuentra en las respuestas en blanco.

Actividad 8

Apartado 1:

		México	Cuba
Estrategias variacionales	Intervalos donde la curva esté por encima del eje X.	14 (67%)	8 (32%)
No Estrategias Variacionales	Intervalos sin justificaciones que demuestren estrategias variacionales.		
	No respuesta.	7 (33.3%)	17 (68%)

Apartado 2:

		México	Cuba
Estrategias variacionales	Intervalos de monotonía, creciente/decreciente.	10 (47.6%)	4 (16%)
No Estrategias Variacionales	Intervalos sin justificaciones que demuestren estrategias variacionales.	4 (19%)	5 (20%)
	No respuesta.	7 (33.3%)	16 (64%)

Apartado 3:

		México	Cuba
Estrategias variacionales	Intervalos de concavidad, hacia arriba/hacia abajo	1 (4.8%)	3 (12%)
No Estrategias Variacionales	Intervalos sin justificaciones que demuestren estrategias variacionales.	11 (52.4%)	6 (24%)
	No respuesta.	9 (42.8%)	16 (64%)

Apartado 4:

		México	Cuba
	Analizar los intervalos que se obtuvieron de la segunda derivada para argumentar que hay un		

Estrategias variacionales	solo intervalo donde la tercera derivada será positiva.		
	Graficar todas las derivadas para lograr una respuesta guiándose por la visualización.		1 (4%)
No Estrategias Variacionales	Intervalos sin justificaciones que demuestren estrategias variacionales.	11 (52.4%)	
	No respuesta.	10 (47.6%)	24 (96%)

Esta actividad se utilizó como cierre pues ya se han reportado muchos resultados con respecto a esta, pero de forma general, lo que asombra en este caso, es que la mayoría de los estudiantes cubanos, demostrado en los porcentajes que se muestran en las tablas, no dieron respuestas en su mayoría, entrando a debate si será a causa de una desmotivación o por ser la última actividad no le hayan prestado la importancia necesaria.

Donde sí coinciden ambas poblaciones, es en el apartado 4, donde se analiza la tercera derivada y en la tabla podemos ver que sólo un estudiante utilizó la estrategia de graficar todas las derivadas para argumentar su respuesta con respecto a la tercera derivada, pero el resto de los estudiantes o dejaron la pregunta en blanco o dieron respuestas que no mostraban un uso de argumentos variacionales que demostrara un desarrollo del pensamiento variacional.

Con una descripción por apartado de las similitudes vistas a través de la distribución de los estudiantes con respecto a sus respuestas, podemos llegar a conclusiones más generales al respecto.

3.5 Resumen de los análisis.

Las investigaciones enmarcadas bajo el PyLV han mostrado que el cambio y la variación son nociones ligadas a diversas áreas, contextos y prácticas, por lo que desarrollar estrategias variacionales en búsqueda de la solución, puede ayudar a los estudiantes a tener mayores herramientas para enfrentar estudios superiores, así como problemas de sus ámbitos laboral y cotidiano. Sin embargo, en la enseñanza actual se enfatiza en el desarrollo de destrezas mecánicas, uso de la memoria, y el aprendizaje de algoritmos, reglas y propiedades matemáticas, que no dejan ver el carácter variacional del cálculo (Caballero, 2012).

Los resultados de investigaciones han demostrado las dificultades que presentan tanto estudiantes como profesores para abordar situaciones variacionales, donde tendrían un gran desarrollo con el uso y mezcla de los elementos que caracterizan el PyLV. En este trabajo, nos centramos en analizar si existen similitudes o diferencias en las respuestas y estrategias que utilicen estudiantes de diferentes sistemas socioculturales y poder iniciar un análisis que nos permita continuar con este tipo de investigación en poblaciones diferentes para conocer las estrategias que utilizan y si estas tienen algo en común.

Para iniciar este trabajo, no trazamos la pregunta. ¿existirán diferencias o similitudes en las estrategias variacionales que surjan por parte de estudiantes de diferentes poblaciones en presencia de una situación que lo amerite? Estas diferencias o similitudes, ¿son ocasionadas por el currículo matemático o simplemente serán formas de pensamiento variacional?

Para darnos respuesta a estas interrogantes, diseñamos una situación que nos permitió ver las estrategias que surgen por parte de los estudiantes de carreras de ingeniería de México y Cuba y así poder comparar sus respuestas.

Los resultados derivados del análisis detallado de cada una de las actividades y sus apartados, nos permitió llegar a las siguientes conclusiones, que analizaremos nuevamente por actividades, pero de una forma más general.

Al analizar por separado cada una de las actividades y sus respectivos apartados, nos interesamos por entender las razones, los procedimientos, las explicaciones, las escrituras o las formulaciones verbales que el alumno construye para responder a estas actividades matemáticas. Nos enfocamos en entender, aun en el caso de que su respuesta a una pregunta no corresponda con el conocimiento que se está analizando, lo que consideraríamos una respuesta matemáticamente correcta, las razones por las que su pensamiento matemático les indicó que esa era la respuesta (Cantoral, Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento, 2013).

Para la actividad 1, consideramos que existe una forma generalizada de pensamiento variacional, demostrada por los propios estudiantes con el uso de códigos y argumentos variacionales similares que les permitió dar respuesta a los apartados, demostrando que, para este tipo de actividad, en ambas poblaciones resultó sencillo, pues se estaba en presencia de un análisis de comportamiento lineal y pudieron usar expresiones que son de utilidad en su cotidianeidad. Es impresionante ver la misma situación en países diferentes, en salones de clases distintos, los estudiantes utilizaban las mismas estrategias, medir con la regla en la pantalla para establecerse una unidad de medida, o con otras estrategias que podríamos ver en ambos países.

Surge la duda con respecto a un porcentaje de estudiantes cubanos que no brindaron argumentos variacionales para complementar su selección en el apartado 2. Consideramos que, en esta actividad, se muestran más similitudes que diferencias en ambas poblaciones.

Para la actividad 2, donde los estudiantes iniciaban el paso del análisis del comportamiento lineal al no lineal, se vio la similitud en el trabajo de ambas poblaciones, utilizando en ambos casos argumentos variacionales que demuestran un desarrollo del pensamiento variacional y muy parecidos entre sí, pero ya el paso al apartado 2, marcó una diferencia entre las poblaciones de estudiantes, donde destacaron con sus estrategias y gráficos los mexicanos, pues, aunque los cubanos contaron con un porcentaje alto de uso de estrategias y argumentos para dar respuesta al apartado 2, también se encontraron estudiantes que graficaron sin sentido alguno o sin argumento variacional o dejaron la pregunta en blanco. La situación empeoró para el apartado 3, donde solamente el 20% de los estudiantes cubanos brindaron una respuesta que mostrara un pensamiento variacional, el resto se vio reflejado en el grupo de los que respondieron sin estrategias o argumentos variacionales o dejaron la pregunta en blanco.

En esta actividad, ya iniciamos el reporte de las diferencias que existen entre ambas poblaciones, fundamentalmente en el paso de la información que se brinda a construir una gráfica, habilidad que en el Plan de estudios de la carrera de la Universidad de Camagüey no se tiene en cuenta.

En las actividades 3 y 4, se inicia la diferencia en el trabajo de los estudiantes de ambas poblaciones, demostrando las dificultades que presentan los estudiantes cubanos, no solo en la construcción de las gráficas con el apoyo visual, sino también, la dificultad para interpretar y obtener información de dichas gráficas. Ya se evidenció en epígrafes pasados, las estrategias que utilizaron algunos estudiantes, muy pocos demostrando uso de pensamiento variacional, ya que intentaban relacionar las gráficas con expresiones analíticas conocidas por ellos para aplicarles las reglas de derivación y obtener un resultado. En ambos países, solamente 4 (México) y 2 (Cuba), utilizaron estrategias variaciones como la comparación del ángulo y la pendiente de la recta tangente en la actividad 3 y como apoyo también en la actividad 4 para luego utilizar frases que nos indicaran que sí tenía presente argumentos variacionales con frases como “pendiente parece menos positiva”, “crece con mayor rapidez”, “más angosto”, etc.

De estas dos actividades, podemos ir sacando conclusiones con respecto a las diferencias y similitudes de ambas poblaciones.

Los estudiantes de la carrera de Biónica de la UPIITA – IPN, al igual que los estudiantes de la Universidad de Camagüey, presentan problemas con el análisis de gráficas si se está trabajando con gráficas de derivadas de orden superior, pero ya como diferencia, la población de estudiantes cubanos demostró un mayor problema con la interpretación de la información proveniente de las gráficas, ya sea de la función o de cualquiera de sus derivadas.

Continuaremos viendo las otras actividades, donde también podremos ver diferencias y similitudes de estas poblaciones para poder llegar a lo que lo causa según nuestro criterio.

De la actividad 5, podemos ver que los estudiantes de ambas poblaciones, en su mayoría, decidieron no analizar los datos directamente de la tabla, sino pasarlos a una gráfica, de la cual ya podemos ir analizando que dentro de sus estrategias se encontraron conceptos aprendidos memorísticamente pero que no les representa un significado.

Luego de visto este análisis, notamos que en ambas poblaciones tienen la necesidad de apoyarse con la construcción de una gráfica o si lo hacen directamente de la tabla, se apoyan en fórmulas de la cinemática lo que los acerca más al teorema factual ya comentado, donde ellos consideran que si $s = 0 \to v = 0 \to a = 0$. Para este caso, destacan los estudiantes cubanos, demostrando que utilizan las reglas de derivación sin significado alguno.

Como se reporta en Cantoral (2013), y se demuestra también en esta actividad, a partir del apartado 2, donde se da inicio al análisis de las derivadas de orden superior, ambas poblaciones de estudiantes, en su mayoría, no utilizan estrategias variacionales que nos permitan ver el desarrollo de un pensamiento variacional y así lo demuestra la tabla con los porcentajes del apartado 3, donde se inicia también el trabajo con la tercera derivada y se demuestra la falta, de ambas poblaciones, de herramientas y estrategias para tratar este tema.

De la actividad 6, un gran porcentaje de la población de estudiantes de ambos países realizan lo reportado en Marcolini (2003, pág. 185), seleccionar la curva original y su primera derivada basándose en que su punto de partida fuera el origen, o sea $(0, 0)$, y esto debido al teorema factual que al partir de cero la $s = 0 \rightarrow \ v = 0$, determinan esta como su estrategia para determinar las curvas correspondientes.

En el apartado 3 de esta actividad, se muestra que la mayoría de los estudiantes cubanos no respondieron ante la solicitud de brindar las características que utilizaron para la determinación de las curvas, lo que me lleva a pensar, y como lo viví como maestra, y es que estos alumnos están acostumbrados a partir de una expresión algebraica analizar las curvas que surgen y las características que surgen, pero no directamente desde una misma gráfica.

Al pensar la derivada, solo como un proceso algebraico que necesita de propiedades y reglas para su uso, los estudiantes no encuentran una correspondencia entre lo que hallan al derivar una función, dada en forma analítica, y el trabajo que supone reconocer estas gráficas (Marcolini, 2003), ya que están acostumbrados a un proceso mecánico en sentido opuesto, como lo ya comentado, tener la expresión algebraica e ir derivando.

En la actividad 7, vimos similitudes en las respuestas por estrategias, en el apartado 1, porcentajes semejantes de estudiantes de ambas poblaciones que seleccionaron el intervalo donde va marcha atrás la locomotora, o sea, donde cambia el sentido. Lo mismo pasa para los estudiantes que seleccionaron que el intervalo de tiempo en el que va marcha atrás es que está por debajo del eje de las x. En ambos casos y en ambas poblaciones, la selección de los intervalos no vino acompañada de una explicación que pudiera mostrar el uso de una estrategia variacional que apoyara la selección y la misma situación pasó en los otros apartaos, donde la selección de los intervalos, en un porcentaje elevado fue al azar, sin justificación que mostrara el uso de argumentos variacionales que demostraran el uso de estrategias variacionales.

Dentro de las estrategias que utilizaron los estudiantes, destaca el trabajo con el concepto de las magnitudes físicas que se están analizando $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$y a causa de esto, parte de las estrategias que utilizan los estudiantes, pero sin significado y sin demostración variacional, es el uso de las fórmulas más conocidas por ellas que relacionan estas magnitudes: $v = \frac{s}{t}$, $a = \frac{v}{t}$.

Como consecuencia a todo lo planteado, vemos que, en los primeros apartados, el porcentaje es similar en todas las variantes para ambos países, lo mismo pasa con el apartado dos, demostrando que, para el trabajo con la función original y su primera derivada desde un análisis gráfico, las similitudes son mayores. La situación se invierte cuando pasamos al análisis de la segunda y tercera derivada, donde los porcentajes aumentan hacia las estrategias que demuestran el no manejo de estrategias variacionales que permitieran analizar a profundidad la gráfica.

Destaca la tabla del apartado cuatro, donde se está analizando la tercera derivada y en ambas poblaciones de estudiantes, sólo dos (o sea, un cubano y un mexicano) realizó un análisis variacional en dependencia de los resultados que obtuvo de los apartados anteriores, considerando los cambios en la segunda derivada y qué ocurriría en la tercera.

Como habíamos comentado con anterioridad, la actividad 8 se colocó en esa posición para que fuera el cierre de la situación con el objetivo de comprobar todo lo que se hubiera visto en la situación y compararlo también con lo reportado en el libro de la TSME, (Cantoral, Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento, 2013), pero los resultados fueron los mismos. Los estudiantes inician con intervalos correctos al trabajar con los signos de la función y la primera derivada. A partir del análisis del signo de la segunda derivada se demuestra la dificultad, pues colocan intervalos sin justificación alguna que demuestre el uso de una estrategia variacional y ya en el análisis de la tercera derivada, el porcentaje total está en las respuestas en blanco en ambos países.

Este análisis lo realizamos apoyándonos en los porcentajes de la población estudiantil mexicana, pues ya se había comentado con anterioridad, que considerábamos que, en esta actividad, por ser la última y por todos los incidentes ocurrido, si se vio opacado el trabajo por la desmotivación, por lo que la mayoría dejó en blanco las respuestas, pero con lo que hemos visto hasta el momento del resto de las actividades, podemos concluir que la situación de ambas poblaciones sería similar.

Luego de analizadas todas las actividades con sus apartados, viendo el desarrollo de los estudiantes de ambos países, y las diferencias y similitudes marcadas que mostramos en la siguiente tabla, una síntesis de todo lo tratado:

	México	Cuba
Actividad 1	En ambos el trabajo demuestra similitudes con respecto a las estrategias que utilizan para dar respuesta a las actividades, haciendo hincapié en la selección correcta de las variables que se analizan que cambian y utilizando estrategias variacionales como estimación, comparación o seriación.	
Actividad 2	Al igual que en la actividad anterior, se muestran similitudes en las respuestas. En ambas poblaciones utilizaron frases que demuestran un análisis variacional donde está presente el cambio. No presentaron mayores problemas para bosquejar en una gráfica el comportamiento del llenado de los recipientes. En esta actividad es donde se mostraron por primera vez las diferencias que podrían existir y se presentó en el apartado 3 al bosquejar la gráfica donde se muestra el comportamiento de la razón de cambio de las variables que se analizan.	

	Para la población de estudiantes mexicanos, fue muy sencilla esta actividad y el mayor porcentaje se encuentra en el uso de estrategias variacionales como comparación y estimación.	Para los estudiantes cubanos, este fue el inicio de las diferencias presentadas, pues el 84% de la población bosquejó gráficos que no tenían sentido para ellos ni brindó argumentos variacionales que demostraran el desarrollo del pensamiento variacional
Actividad 3	Esta actividad, inician las similitudes, pero en cuanto a la dificultad que mostraron ambas poblaciones para el análisis e interpretación de las gráficas que se les brindó, aunque reconocemos que los estudiantes cubanos fueron los que presentaron mayores dificultades, con el 79.5% aproximadamente de respuestas que no evidenciaban uso de estrategias variacionales o dejaron la pregunta en blanco.	
Actividad 4	Con el mismo comportamiento de la actividad pasada, en esta ocasión, ambas poblaciones demostraron dificultades en el análisis de la gráfica brindada para que obtuvieran información con respecto a la segunda derivada. Para los estudiantes mexicanos el 77% y para los estudiantes cubanos el 90% dieron respuestas al azar o usaron estrategias que no se podrían considerar variacionales. Dentro de este mismo porcentaje, también dejaron la pregunta en blanco algunos.	

Actividad 5	En esta actividad, ambas poblaciones presentaron dificultades en sus apartados, demostrando la dificultad de analizar el cambio que ocurre entre las variables desde una tabla con valores numéricos. Igual número de estudiantes de ambos países bosquejaron una gráfica para apoyarse, pero a la vez para demostrar el uso de conceptos aprendidos de memoria que pueden obtener de las gráficas. En el apartado 3, ambas poblaciones de estudiantes, o brindaron argumentos no variacionales o dejaron la pregunta en blanco, demostrando que, para todos, el trabajo con la derivada de tercer orden se dificulta o no tienen argumentos para tratarla.
Actividad 6	Como ya hemos visto, en las actividades donde la tarea es obtener la información de un gráfico, ambas poblaciones de estudiantes demuestran dificultades, como mismo en esta actividad, donde en los tres apartados, el mayor porcentaje de respuestas no demuestran el uso de estrategias o argumentos variacionales, ya sea al seleccionar la gráfica de s(t) y sus derivadas, así como determinar los intervalos donde la tercera derivada es positiva, demostrando nuevamente que no tienen un significado real para la estrategia del análisis del signo de la pendiente. En el apartado tres, sorprendió, que el 68% de los estudiantes cubanos dejaron la pregunta en blanco.
Actividad 7	En esta actividad, en los primeros dos apartados, se pueden ver las semejanzas en el uso de estrategias variacionales de los estudiantes, demostrando la facilidad del análisis para la función y su primera derivada a través del signo de la pendiente. Ya en los apartados tres y

	cuatro, al tener que tratar con la segunda y tercera derivada se demuestra que los estudiantes no tienen un significado para tratar este orden de variación y específicamente en el apartado cuatro, el 68% de los estudiantes de Cuba, lo dejaron en blanco.
Actividad 8	La actividad cierre, tenía como objetivo, buscar la posibilidad que, frente a un contexto diferente, tanto poblacional como en actualidad, se presentaran estrategias variacionales que demostraran el trabajo con la tercera variación, pero los resultados coincidieron con lo ya reportado en el 2013: los estudiantes no tienen estrategias ni significado real para la tercera variación.

Capítulo 4. Conclusiones

En el trayecto de toda la investigación, partimos de plantearnos una problemática vigente en el grupo de Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV) relacionado a la búsqueda de similitudes y/o diferencias en el desarrollo del pensamiento variacional a través del uso de estrategias variacionales por parte de estudiantes de diferentes poblaciones. Realizamos un análisis de las investigaciones desarrolladas hasta el momento, que nos permitió elaborar una situación didáctica que aplicamos a estudiantes de Ingeniería de México y Cuba.

De la aplicación de la situación didáctica, pudimos obtener datos de los cuales analizamos la presencia o no de estrategias variacionales que nos permitieran concluir sobre la presencia o no de un pensamiento variacional, apoyándonos en el sistema de referencia planteado en (Caballero, 2016).

Todo lo planteado anteriormente, se realizó con el objetivo de determinar si existían similitudes o diferencias en cuanto a las estrategias variacionales desarrolladas por lo estudiantes de los diferentes países y si se consideraría que estas eran causadas por el currículo matemático o por un pensamiento variacional generalizado socialmente.

Luego de analizadas todas las respuestas de los estudiantes de ambas poblaciones a las actividades propuestas, ver las similitudes y diferencias, pudimos llegar a algunas conclusiones parciales:

- ✓ Ambas poblaciones demostraron el usar estrategias variacionales al tener información visual como en el llenado de recipientes, donde establecieron su unidad de medida para predecir el tiempo que demoraría en llenarse el recipiente. Consideramos que, en esta situación, a ambas poblaciones se les facilitó el análisis por ser una situación que relacionan con su diario y están familiarizados, lo que no pasa cuando se realiza un cambio de registro, hacia las gráficas.
- ✓ Existen más semejanzas en las dificultades que presentaron los estudiantes de ambas poblaciones que diferencias.
- ✓ Los estudiantes cubanos demostraron mayor dificultad en la interpretación de los gráficos para obtener información.

- ✓ Ambas poblaciones presentaron dificultades para analizar el cambio directamente de una tabla con valores numéricos, por lo que pasaron la información a un método conocido por ellos para así poder aplicar los conceptos aprendidos memorísticamente sin significados.
- ✓ Se mantienen los problemas en ambas poblaciones (aunque ya se comentó que los estudiantes cubanos con mayor fuerza) para analizar gráficas de donde sacarán la información necesaria.

También consideramos que está presente en todos los estudiantes un pensamiento variacional socioculturalmente independiente de cada población, pues las mismas prácticas que se desarrollan como humanos, continúan necesitando de la predicción para poder anticiparse a las diferentes situaciones que se le presenten. En el caso del llenado del recipiente, lo ven, en sus culturas completamente diferentes cuando llenan un vaso y deben predecir más o menos cuándo deben retirarlo para que no se les bote. Situaciones así, sin una explicación matemática, fueron las presentadas en esta serie de actividades.

Con todo el análisis presentado, consideramos que la causa mayor por la que existen todos estos problemas mencionados es debido al currículo matemático, que como se comentó al inicio en ambos países, en la Universidad, se le dedica un solo semestre. Continuamos considerándolo así fundamentalmente para Cuba, pues es en el inicio de sus estudios de la carrera donde ve por primera vez todos los temas referidos a Cálculo Diferencial e Integral, asegurando que tenga la práctica de utilizar las reglas de derivación, pero no asegurando que puedan obtener información referente a lo que cambia, cómo y por qué cambia, en cualquier ambiente o contexto.

Para llegar a esta conclusión diseñamos una situación didáctica que permitiera la generación de un pensamiento variacional por parte de los estudiantes y que este desarrollo quedara evidenciado con respecto al uso de estrategias reflejadas en la siguiente tabla:

Actividades	Estrategias (Pistas variacionales)
Actividad 1	Selección de variables a analizar altura/tiempo, establecer unidad de medida para comparar estados y predecir tiempo de

	llenado y con esto poder determinar la gráfica que cumple con lo que analizó con anterioridad.
Actividad 2	Selección de variables a analizar altura/tiempo, establecer unidades de referencia entre los recipientes para poder compararlos utilizando frases que demuestren el análisis del cambio en estos, como las ya reportadas en los capítulos pasados. Realizar gráficas que primeramente demuestren el comportamiento del llenado de ambos recipientes y luego, gráfica donde se vea el comportamiento del cambio.
Actividad 3	Comparar ángulos resultantes de la recta tangente con el eje X. Comparar pendientes de las rectas tangentes. Analizar puntos en la vecindad del punto analizado para comparar sus valores.
Actividad 4	Según (Caballero, 2016), analizar las alturas de las gráficas, las pendientes de las rectas tangentes a la curva, la forma de la gráfica.
Actividad 5	Analizar cambio de signo de los valores numéricos de la tabla para analizar primeramente la monotonía. De los resultados del cambio, analizar nuevamente los signos para determinar concavidad. Del segundo cambio, analizar comportamiento

	y signos para analizar el cambio del cambio con los valores.
Actividad 6	Análisis de las características de las funciones, puntos máximos de funciones que coincidan con valor cero de su derivada. Pendientes de las rectas tangentes.
Actividad 7	Considerar signos de la función, monotonía, concavidad, cambios.
Actividad 8	Considerar signos de la función, monotonía, concavidad, cambios.

Con lo mostrado en la tabla, podemos concluir que la situación didáctica diseñada, es generadora de pensamiento variacional, por el orden de las actividades, partiendo del análisis de un comportamiento lineal para luego pasar al análisis de comportamientos no lineales y que para esto fue necesario utilizar todos los argumentos y estrategias variacionales reportadas, coincidiendo con el sistema de referencias planteado en (Caballero, 2016).

Como otro aporte de nuestra investigación, considerando y concluyendo nuevamente que, a nuestro criterio, es el currículo matemático el causante de las dificultades presentadas en las respuestas de los estudiantes de ambas naciones, podemos influir dentro de este apoyando a los maestros que podrían desarrollar de igual manera situaciones que generen pensamiento variacional siempre y cuando puedan demostrar el uso de las estrategias reportadas.

Como cierre, al igual que en la actividad 8 de (Cantoral, 2013), cierre de la situación didáctica, podemos reportar que en la actualidad se mantiene la dificultad del trabajo con el orden de variación tres, o sea, el cambio del cambio. Los estudiantes no le asignan un significado a lo que trabajan, ya que, en materias como Matemáticas, Física, Química, etc. se llega hasta el análisis de la segunda variación, por lo que, si no lo vemos en el colegio, ya sea en México o Cuba, podemos considerar que fisiológica y culturalmente no somos capaces de analizar un orden de variación mayor a dos, de asignarle un significado que nos permita profundizar en el desarrollo del pensamiento variacional.

Como todo trabajo de investigación, tiene sus posibles mejoras y cambios que se pueden tomar en cuenta en próximas investigaciones:

- ✓ Continuar innovando con el uso de TICs en la TSME desde el enfoque del PyLV.

Aplicar las actividades (adaptándolas a contextos específicos) a otras poblaciones para lograr una comparación más detallada generadora de pensamiento variacional.

Referencias Bibliográficas

Acuña, J. (2007). *Diseño de una ingeniería didáctica para la exploración de aspectos visuales en la relación inversa derivación.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Matemática Educativa.

Ávila Godoy, R., Ávila Godoy, J., & Bravo Tapia, J. M. (2016). Los significados de función y función derivada desarrollados por los estudiantes al estudiar la variación en el contexto de los problemas de ingeniería. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 29*, págs. 93-104. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Báez, A., Martínez-López, Y., Pérez, O. L., & Pérez, R. (2017). Propuesta de Tareas para el Desarrollo del Pensamiento Variacional en Estudaintes de Ingeniería. *Formación Universitaria, 10*(3), 93-106. Obtenido de https://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062017000300010

Buendía, G., & Ordónez, A. (2009). El comportamiento periódico en la relación de una función y sus derivadas: significados a partir de la variación. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 12*(1), 7-28. Obtenido de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362009000100002

Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en profesores de bachillerato.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Departamento Matemática Educativa.

Caballero, M. (2016). *Los Sistemas de Referencia: El papel de la causalidad y la temporalización en el tratamiento del cambio y la variación. Un estudio socioepistemológico de su construcción.* Memoria Predoctoral no publicada, Cinvestav - IPN, Matemática Educativa.

Caballero, M., & Cantoral, R. (2013). El desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional entre profesores de bachillerato. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 26*, págs. 1585-1593. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Obtenido de http://clame.org.mx/actas/

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* Barcelona, España: Gedisa.

Cantoral, R., & Farfán, R. M. (marzo de 2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6*(001), 27-40. Obtenido de http://www.redalyc.org/pdf/335/33560102.pdf

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. *EMA, 8*(2), 121-156. Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/1520/

Chimal, R. (2005). *Una mirada socioepistemológica a la covariación.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Matemática Educativa, México.

Derouet, C., Henríquez, C., Menares, R., & Panero, M. (2016). Estudio comparativo sobre la enseñanza de las funciones: análisis de tareas en libros de textos de Chile, Francia e Italia. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 29*, págs. 182-190. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. – México.

Dolores Flores, C., Alarcón Bello, G., & Albarrán Millán, D. F. (noviembre de 2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. *Revista Latinoamenricana de Matemática Educativa, 5*(3), 225-250. Obtenido de http://www.redalyc.org/pdf/335/33505301.pdf

González, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación.* Tesis de Mestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Departamento de Matemática Educativa, México.

González-Ruiz, I., Batanero, C., López-Martín, M. M., & Contreras, J. M. (2016). El sentido de la dispersión y su desarrollo en el currículo. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 29*, págs. 56-63. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Johnson, H. (mayo de 2015). Together yet separate: Students' associating amounts of change in quantities involved in rate of change. *Educational Studies in Mathematics, 89*, 89-110. Obtenido de https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-014-9590-y

López, L. (2016). *Generalización de patrones. Una trayectoria Hipotética de Aprendizaje basada en el Pensamiento y Lenguaje Variacional.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Matemática Educativa, Ciudad de México.

Marcolini, J. (2003). *Ingeniería Didáctica en Física Matemática.* Tesis Doctoral no publicada, Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales.

Maury Mancilla, E. A., Palmezano Sarmiento, G. J., & Cárcamo Barriosnuevo, S. J. (2012). Sistema de tareas para el desarrollo del pensamiento variacional en 5° grado de educación básica primaria. *Escenarios, 10*(1), 7-16.

Rendón-Mesa, P. A. (2009). *Conceptualización de la razón de cambio en el marco de la enseñanza para la comprensión.* Tesis de Maestría, Universidad de Antioquia, Educación Avanzada, Medellín. Obtenido de https://www.researchgate.net/publication/39971924_Conceptualizacion_de_la_razon_de_cambio_en_el_marco_de_la_ensenanza_para_la_comprension?tab=overview

Reséndiz, E. (2004). *La variación en las explicaciones de los profesores en situación escolar.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Departamento de Matemática Educativa, México.

Rubio Goycochea, V., & Carvajal Romero, S. (2016). Relación entre el desarrollo de las competencias de análisis didáctico, digital y de la ciudadanía en la formación de profesores en el Perú. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 29*, págs. 24-32. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Obtenido de http://clame.org.mx/actas/

Salinas. (2003). *Un estudio sobre la evolución de ideas variacionales en los cursos introductorios al cálculo.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Matemática Educativa, México.

Sánchez-Matamoros, G., García, Mercedes, & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 11*(2), 267-296. Obtenido de http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v11n2/v11n2a5.pdf

Anexos

Anexo 1

Sistema de habilidades de la Disciplina Matemática, Plan D Carrera Ingeniería Eléctrica

- Caracterizar las funciones elementales básicas y realizar transformaciones sencillas en sus respectivos gráficos. Auxiliarse del DERIVE para los casos necesarios.
- Interpretar el concepto de función, sus variantes concretas, así como reconocer la existencia de una función.
- Interpretar el concepto de límite de una función en un punto, así como el límite infinito de funciones reales de variable real.
- Caracterizar el concepto de continuidad y clasificar las discontinuidades de funciones reales de variable real.
- Calcular límites de funciones utilizando las propiedades de los límites, la continuidad y la regla de L'Hôpital.
- Caracterizar e interpretar los conceptos de derivada en un punto y función derivada.
- Obtener derivadas ordinarias de cualquier orden, empleando las reglas de derivación, la regla de la cadena y la definición correspondiente. Auxiliarse del DERIVE para los casos necesarios.
- Interpretar la antiderivada como operación inversa de la derivación.
- Identificar la ecuación diferencial de primer orden y primer grado de variables separables y resolver casos sencillos, a partir de la articulación con Física.
- Modelar y resolver problemas físicos, geométricos o vinculados con la carrera, utilizando derivadas, Auxiliarse del DERIVE para los casos necesarios.
- Resolver problemas en que sea conveniente la linealización de una función, aplicando el concepto de diferencial de funciones de una variable real
- Modelar y resolver problemas de optimización.
- Obtener raíces de ecuaciones aplicando resultados del cálculo diferencial de funciones de una variable real.
- Analizar el comportamiento de funciones reales de una variable aplicando los métodos del cálculo diferencial. Auxiliarse del DERIVE para los casos necesarios.
- Identificar las funciones implícitas definidas por una ecuación y calcular sus derivadas.
- Analizar, explicar y deducir propiedades de funciones utilizando los conceptos y teoremas fundamentales del cálculo diferencial de funciones de una variable real.
- Interpretar la integral indefinida como operación inversa de la derivación.

- Calcular integrales indefinidas utilizando: métodos de integración, tabla de integrales y DERIVE.
- Caracterizar, interpretar e identificar el concepto de integral definida, así como sus propiedades.
- Calcular integrales definidas utilizando los teoremas fundamentales del Cálculo Integral y métodos aproximados con interpretación geométrica sencilla.
- Calcular integrales definidas mediante el empleo del asistente matemático.
- Identificar el concepto de integral impropia.
- Calcular integrales impropias.
- Caracterizar el concepto de curva e identificar las diferentes formas de representarla.
- Representar curvas dadas en forma paramétrica o vectorial empleando las potencialidades que brinda DERIVE.
- Interpretar el concepto de vector tangente a una curva, así como obtenerlo
- Obtener derivadas y calcular integrales de funciones vectoriales de una variable real.
- Interpretar físicamente el concepto de derivada de una función vectorial de variable real y aplicarlo en la determinación de la velocidad y la aceleración de un cuerpo.
- Modelar y resolver problemas geométricos, físicos y/o vinculados con la carrera utilizando los conceptos, teoremas y propiedades del Cálculo integral, seleccionando el modelo de integral adecuado y aplicando los procedimientos de cálculo relacionados con el mismo, a partir de determinar si el problema se corresponde con algún modelo que responda a la integral y si es así plantear y calcular las integrales correspondientes mediante el empleo o no de algún asistente matemático.
- Interpretar el concepto de función de varias variables y su representación gráfica en los casos posibles.
- Interpretar los conceptos de límite y continuidad en funciones de varias variables
- Calcular límites y límites por caminos, utilizando la regla de L'Hôpital, las propiedades de los límites y la continuidad.
- Caracterizar e interpretar los conceptos de derivada parcial, derivada direccional y gradiente.
- Obtener derivadas parciales de cualquier orden, empleando las reglas de derivación, la regla de la cadena y la definición correspondiente. Auxiliarse del DERIVE para los casos necesarios.
- Obtener el gradiente y la derivada direccional de una función. Auxiliarse del DERIVE para los casos necesarios.
- Modelar y resolver problemas físicos, geométricos o vinculados con la carrera, utilizando derivadas parciales, derivadas direccionales o gradientes. Auxiliarse del DERIVE para los casos necesarios.

- Resolver problemas en que sea conveniente la linealización de una función, aplicando el concepto de diferencial de funciones de varias variables.
- Determinar extremos de funciones de dos variables.
- Modelar y resolver problemas de optimización con funciones objetivo de varias variables.
- Identificar las funciones implícitas definidas por una o varias ecuaciones y calcular sus derivadas.
- Analizar, explicar y deducir propiedades de funciones utilizando los conceptos y teoremas fundamentales del cálculo diferencial de funciones de varias variables.
- Construir sólidos expresados en diversas formas y dibujar sus proyecciones.
- Caracterizar los conceptos y las propiedades de las integrales dobles, triples, de línea y de superficie.
- Interpretar geométrica y/o físicamente los teoremas de Green, divergencia y Stokes, así como sus consecuencias.
- Calcular integrales dobles, triples, de línea y de superficies sencillas utilizando una transformación de coordenadas (polares, cilíndricas o esféricas) y/o teorema de Green, divergencia y Stokes en los casos que resulte conveniente.
- Resolver problemas sencillos de índole geométrica, física y/o técnica seleccionando el modelo integral adecuado y aplicando los conceptos, teoremas, propiedades y métodos del cálculo integral multivariado.