Centro de investigación y de estudios avanzados del IPN

Departamento de Matemática Educativa

Tesis Doctoral:

Orquestación instrumental de recursos didácticos digitales para apoyar la enseñanza y el aprendizaje de conceptos del álgebra lineal.

Que presenta el:

M. en C. Yani Betancourt Gonzalez

Para obtener el grado de doctor en ciencias.

Bajo la dirección del:

Dr. Carlos Armando Cuevas Vallejo

México, D.F., Julio 2014

Agradecimientos

El amor es lo único de lo cual nunca tenemos bastante,
y también es lo único que no damos suficiente.
Henry Miller

A Concacyt por su apoyo económico.

A Cinvestav por su excelencia como institución educativa y científica.

Al Departamento de Matemática Educativa por haberme formado como investigador.

Al Dr. Carlos Armando Cuevas por dirigirme y ser un buen amigo.

Al Dr. Humberto Madrid por su dirección, su amistad y muchos momentos compartidos.

Al Dr. Luc Trouche por su amistad y transmisión de conocimientos.

Al Instituto Francés de la Educación por su hospitalidad, su enseñanza y los buenos amigos.

Al Dr. Francois Pluvinage por su excelente trato y sabiduría compartida.

Al Dr. Hugo Mejía por su calma y amistad.

A mis hermanos Mauricio y Saira por su apoyo, su confianza y su eterna compañía.

A Carmen, mi madre por sus oraciones y su infinito amor.

A Jorge, mi padre por sus consejos y su ejemplo.

A mis amigos, Oscar y Mauricio, por sus comentarios y por compartir la vida conmigo.

En especial, a mis hijos, Carlos, Jorge y Emiliano, por entender mis ausencias y por llenarme de amor, paz y orgullo.

A mi compañera de vida, mi esposa Karla por su incondicional apoyo, su amor inconmensurable y su eterna alegría.

Con mucho amor a mi abuelo Santos que me dejo una infinidad de momentos llenos de risas y de sabiduría de un hombre de pueblo, sincero y directo.

Introducción

El álgebra lineal se ha convertido en una potente herramienta en la solución de problemas en nuestra actual era digital, en contraparte, su enseñanza parece sufrir un estancamiento, ya que por un lado no hemos logrado vincularla con sus aplicaciones tanto actuales como clásicas para enriquecer y darle significado a los conceptos, así como al proceso de aprendizaje. Además, el álgebra lineal en México es un contenido matemático exclusivo del nivel superior (a los más dos cursos son ofrecidos por carrera profesional), que sumado al hecho que sus conceptos son formales y abstractos por naturaleza propia, los estudiantes atraviesan por dificultades considerables en su comprensión como lo veremos en el capítulo 1 de este documento.

Por lo antes mencionado, este trabajo de investigación se centra precisamente en el desarrollo de una propuesta didáctica que permita apoyar la enseñanza y ayudar a mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos asociados a un primer curso de álgebra lineal. En particular, se ha desarrollado una metodología para el diseño de recursos didácticos digitales y su orquestación instrumental Trouche (2005), sustentada por la didáctica Cuevas y Pluvinage (2004) y la propuesta teórica de la génesis instrumental y génesis documental de Trouche (2004; 2005) y, Gueudet y.Trouche (2009).

En sentido, este documento presenta en su primer capítulo un panorama general sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal por medio del estudio de diversos trabajos de investigación. El capítulo inicia con la presentación de algunos de los planes de estudio de ciertas formaciones universitarias y obtener una versión balanceada de los temas recurrentes en un primer curso de álgebra lineal. En el capítulo también presentamos un par de aplicaciones del álgebra lineal para destacar su riqueza conceptual. El capítulo finaliza con la presentación del problema de investigación y las respectivas preguntas de investigación.

El segundo capítulo se concentra en presentar los elementos teóricos que dan sustento al desarrollo del trabajo de investigación. La teoría que consideramos se conforma y nutre de tres áreas del conocimiento: la matemática, la didáctica de las matemáticas y la tecnología digital. El capítulo inicia con la presentación de conceptos básicos del álgebra lineal como los son: vector, dependencia e independencia lineal, espacio columna y nulo, espacio vectorial, valor propio y vector propio. Hay que mencionar que esta presentación concuerda con los planes de estudio de la educación superior. La segunda parte de este capítulo se concentra en presentar la didáctica de las matemáticas denominada Proyecto de Acción Práctica de Cuevas y Pluvinage (2003), en cuyas líneas encontramos elementos que se emparejan con nuestros propósitos en este trabajo de investigación.

El segundo capítulo expone también la aproximación teórica de la génesis instrumental (Trouche, 2004; 2005) y la génesis documental (Gueudet y Trouche, 2009), en ellas se encuentra precisamente una explicación del proceso psicológico que sufren los individuos al utilizar herramientas y recursos en sus actividades, en particular en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. El capítulo finaliza con una propuesta que combina la didáctica Cuevas y Pluvinage con la génesis instrumental.

El capítulo 3 presenta una metodología basada en los elementos didácticos y teóricos presentados en el capítulo 2. Dicha metodología que hemos denominado PAP-AI por Poryecto de Acción Práctica y Aproximación Instrumental es para nosotros uno de los productos de este trabajo investigación, el cual nos permitió la elaboración de recursos didácticos para apoyar la enseñanza de los conceptos del álgebra lineal. Después de presentar la metodología, presentamos un par de ejemplos de recursos didácticos digitales, el primero ha sido denominado: descarga de archivos informáticos pues es el problema inicial que se presenta a los estudiantes para estudiar conceptos como vector y el uso de los sistemas de ecuaciones lineales. El segundo lo hemos llamado: Colapso del puente Tacoma Narrow dado que la solución a este problema requiere de la comprensión de los conceptos de valor y vector propio.

Finalizamos el tercer capítulo presentado el diseño de las orquestaciones instrumentales elaboradas para poner en práctica los recursos didácticos.

El cuarto capítulo y último se divide en dos grandes secciones: (1) experiencias didácticas y (2) conclusiones. En la primera sección presentamos un par de experiencias didácticas con el propósito de observar en la práctica los defectos y virtudes de los recursos didácticos y las orquestaciones instrumentales puestas en marcha. La segunda sección y final del capítulo presenta las conclusiones de este trabajo de investigación, así como algunas de nuestras perspectivas a futuro.

Índice de contenido

Capítulo 1. Antecedentes y el problema de estudio.

> El estudio de los sistemas de ecuaciones lineales y la búsqueda de un análisis geométrico intrínseco fueron las dos principales fuentes que dieron origen a la teoría de linealidad.
>
> Dorier (1995)

En este primer capítulo, presentamos el panorama donde yace nuestro problema de investigación, en términos generales se trata de un breve análisis de los planes de estudios de la educación media superior y superior en torno a la enseñanza del álgebra lineal, así como una revisión de ciertos trabajos de investigación que muestran las dificultades por la que atraviesan estudiantes en el aprendizaje del álgebra lineal, con estos antecedentes formulamos una propuesta para aproximarnos a una propuesta de solución del problema, la que en términos generales se basa en la combinación de tres áreas del conocimiento científico: la matemática, la tecnología digital y la didáctica de las matemáticas, cuyo propósito es mostrar que por medio del conocimiento de la resolución y significado de los sistemas de ecuaciones lineales y su geometría, es posible abordar y construir conceptos básicos del álgebra lineal, que apoyados con herramientas digitales específicas facilita la comprensión de conceptos como combinación lineal, dependencia e independencia lineal, base, dimensión, espacio columna, espacio renglón, subespacio y espacio vectorial, valores y vectores propios, y transformaciones lineales, conceptos que forman parte de un primer curso de álgebra lineal.

En este sentido, hemos organizado este primer capítulo en cuatro secciones, donde la primera plantea nuestra percepción actual sobre el álgebra lineal en el contexto educativo en México, lo cual nos permite posicionar nuestra investigación sobre cierta problemática en un nivel educativo específico, en particular el nivel superior. La segunda sección, presenta el análisis de diversas investigaciones sobre el aprendizaje y enseñanza del álgebra lineal (Dorier, 1998; Hillel, 2000; Sierpinska, 2000; Britton y Henderson, 2009; Parraguez y Asuman, 2000; Stewart y Thomas, 2009; Wawro, Sweeney y Rabin, 2011), estos trabajos, muestran desde dificultades de estudiantes frente a conceptos del álgebra lineal, propuestas didácticas, hasta perspectivas teóricas sobre el aprendizaje del álgebra lineal.

En la segunda y tercera parte respectivamente presentamos un par de aplicaciones del álgebra lineal en nuestra era digital en su forma más simple, como apoyo a la propuesta didáctica, así como una aproximación de una primera caracterización de los diferentes tipos de libros del álgebra lineal. Nuestro objetivo es mostrar con esto, un panorama general de posibles materiales de apoyo que pueden utilizarse tanto en la enseñanza del álgebra lineal como en su aprendizaje.

Concluimos este capítulo con el planteamiento del problema de investigación, que bosqueja el propósito general de nuestra investigación: el diseño y desarrollo de una trayectoria didáctica articulada bajo cierto marco teórico que apoye la construcción de los conceptos en un primer curso de álgebra lineal instrumentando las tecnologías digitales en el aula. A continuación iniciamos con una breve exploración de los planes de estudios de diferentes formaciones en la educación superior.

1.1. El álgebra lineal en el contexto educativo en México.

En México, la primera vez que se introduce un curso de álgebra lineal es en el nivel educativo denominado: *educación superior*, que incluye universidades, institutos tecnológicos y el instituto politécnico. El álgebra lineal aparece como una materia en los planes de estudios de diferentes carreras de educación superior como matemáticas, física, química, economía, administración, arquitectura, electrónica, etcétera. En la mayoría de las carreras, y en el mejor de los casos sólo hay un curso de álgebra lineal en toda la formación profesional; estas y otras características, serán detalladas en el apartado 1.1.1, permitiéndonos determinar algunas características invariables y variables, independientemente del enfoque del curso.

Es pertinente mencionar, en el nivel educativo inmediato anterior al superior, no hay un curso como tal de álgebra lineal o que preparen a los estudiantes en esta materia, en comparación con el de cálculo diferencial e integral que forma parte del plan de estudios del último año en algunas instituciones de nivel medio superior. Sin embargo, podemos encontrar temas aislados que forman un constructo de ideas y conceptos previos, no siempre correctos, como la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y el estudio de las funciones lineales, que en realidad son de un espacio afín al espacio vectorial, además, en algunos casos se imparte un curso de geometría analítica con vectores o análisis vectorial y donde se estudian también las ecuaciones lineales. Hay que resaltar que hasta antes del año 2012 la educación media superior en México no era obligatoria y cada tipo de institución en este medio organizaba su plan de estudios a su manera.

Por otra parte, la matemática de la educación secundaria, nivel educativo previo al medio superior, organiza el contenido matemático en cuatro ejes: sentido numérico y pensamiento algebraico; forma, espacio y medida; manejo de la información; y actitud hacia el estudio de las matemáticas. Prácticamente en los dos primeros ejes se encuentran elementos matemáticos previos a los conceptos del algebra lineal, como función lineal y resolución de sistemas de ecuaciones lineales, mismo caso de la educación media superior, obviamente bajo un enfoque didáctico acorde a la edad de los alumnos que en promedio va de los 12 a 14 años.

A continuación, presentaremos un breve análisis de los planes de estudios en la educación superior.

1.1.1. El álgebra lineal en la educación superior.

El álgebra lineal es un contenido matemático que forma parte de un considerable número de planes de estudios de educación superior en México; según el catálogo de carreras de licenciaturas de Universidades e Institutos Tecnológicos del 2007 elaborado por la ANUIES (Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior), los estudios de educación superior en México se dividen en 6 áreas de conocimiento: Ciencias Agropecuarias, Ciencias de la Salud, Ciencias Naturales y Exactas, Ciencias Sociales y Administrativas, Educación y Humanidades, e Ingeniería y Tecnología. Las áreas con una mayor carga de cursos de matemáticas son Ciencias Naturales y Exactas, Ingeniería y tecnología, y con una menor carga matemáticas los estudios profesionales que integran el área de Ciencias sociales y Administrativas; en las restantes áreas de conocimiento, por el tipo de formación, los cursos de matemáticas son mínimos o no hay, como el caso de las ciencias de la salud humana o veterinaria.

El curso de álgebra lineal está ubicado en los primeros semestres, es básico y obligatorio en la mayoría de las licenciaturas e ingenierías que integran las 3 áreas de conocimiento mencionadas arriba, en la tabla 1.1.1 presentamos una muestra de la ubicación del curso de álgebra lineal en los planes de estudio de diferentes formaciones en educación superior. Esta información fue tomada de la página Web de la Universidad Nacional Autónoma de México (http://oferta.unam.mx/escuelas-facultades.html) que estamos seguros representa adecuadamente la situación en el país, ya que muchos de los planes de estudios de otras instituciones son muy parecidos.

Licenciatura o ingeniería	**Área de conocimiento**	**Semestres**	**Año de inicio del plan de estudios**
Licenciatura en Matemáticas	Ciencias Naturales y Exactas	Tercer semestre Algebra lineal I Cuarto semestre Álgebra lineal II	1984
Licenciatura en Química	Ciencias Naturales y Exactas	Primer semestre Algebra superior	2006
Ingeniería Civil	Ingeniería y tecnología	Segundo semestre Álgebra lineal	2005
Ingeniería en Computación	Ingeniería y tecnología	Segundo semestre	2005

		Álgebra lineal	
Licenciatura en economía	Ciencias sociales y administrativas	Tercer semestre Calculo diferencial multivariado y álgebra lineal.	1994

Tabla 1.1.1. Ubicación del curso de álgebra lineal en algunas Licenciaturas e ingenierías de la UNAM.

En conclusión, el álgebra lineal aparece en alguno de los dos primeros años de cierto tipo estudios de educación superior, y sólo en el caso de la licenciatura de matemáticas se dan dos cursos, lo cual es evidente, por el tipo de formación. El caso de la licenciatura en química, el curso de álgebra superior incluye dos unidades relacionadas con el álgebra lineal. Ahora veremos, que ese único y primer curso de álgebra lineal en las diferentes formaciones es muy parecido en su estructura temática.

A continuación presentamos la estructura temática de las 5 formaciones de la tabla 1.1.1, únicamente mostrando los temas principales, en todo caso, si el lector así lo desea puede hacer una revisión directamente en los vínculos a las respectivas páginas *Web* que referenciamos:

Licenciatura en Matemáticas

Número de horas	**Unidades temáticas (álgebra lineal I)**
15	1. Espacios vectoriales
10	2. Matrices
12	3. Transformaciones lineales
12	4. Transformaciones lineales y matrices
17	5. Producto escalar
4	6. Transformaciones simétricas
Página web consultada el 28 de enero de 2014: http://www.fciencias.unam.mx/licenciatura/asignaturas/217/5	

Licenciatura en Química

Número de horas	Unidades temáticas (algebra superior)
15	2. Sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes.
20	**5. Álgebra lineal** 5.1 Motivación (geometría, fuerzas y desplazamientos). 5.2 Los espacios $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^n$. 5.3 Otros espacios vectoriales (polinomios, matrices y funciones). 5.4 Combinaciones lineales. 5.5 Independencia lineal. 5.6 Base y dimensión. 5.7 Geometría en $\mathbb{R}^n$. 5.8 Variedades lineales.
Página web consultada el 28 de enero de 2014: http://www.quimica.unam.mx/materias.php?id_rubrique=326&id_article=716&color=227AB9&rub2=326	

Ingeniería Civil

Número de horas	Unidades temáticas
4.5	1. Introducción al álgebra lineal
16.5	2. espacios vectoriales
21	3. Transformaciones lineales
15	4. Espacios con producto interno.
15	5. Operadores lineales en espacios con producto interno.
Página web consultada el 28 de enero de 2014: http://www.ingenieria.unam.mx/paginas/Carreras/planes2010/ingCivil_Plan.htm	

Ingeniería en Computación

Número de horas	Unidades temáticas
4.5	1. Introducción al álgebra lineal
16.5	2. espacios vectoriales
21	3. Transformaciones lineales
15	4. Espacios con producto interno.
15	5. Operadores lineales en espacios con producto interno.
Página web consultada el 28 de enero de 2014: http://www.ingenieria.unam.mx/paginas/Carreras/planes2010/ingComputo_Plan.htm	

Licenciatura en Economía

Número de horas	Unidades temáticas (cálculo diferencial multivariado y álgebra lineal)
--	1. Puntos (vectores, rectas y planos)
--	2. Sistemas de ecuaciones
--	3. Transformaciones lineales de $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$.
--	4. Determinantes.
--	5. Temas complementarios.
Página web consultada el 28 de enero de 2014: http://132.248.45.5/etsprof/carrera3.htm	

El plan de estudios de la licenciatura en economía, no sugiere el número de horas para la enseñanza de cada tema, únicamente menciona que el número de horas a la semana destinadas al curso de cálculo diferencial multivariado y álgebra lineal es de 4 horas.

Llama la atención que el único curso de álgebra lineal cuyo temario no incluye a los espacios vectoriales es el correspondiente a la licenciatura en economía, en los demás es un tema común, así como los determinantes y las transformaciones lineales. Además, este primer curso de álgebra lineal tiene una duración aproximada de 70 a 80 horas.

Como es posible observar, el principal objetivo en un primer curso de álgebra lineal es la enseñanza de conceptos tales como espacio vectorial, determinantes, transformaciones lineales, valores y vectores propios, la profundidad con que se abordan depende de la formación profesional en la que se ofrece el curso, en los planes de estudio de las 5 formaciones de educación superior que escogimos como ejemplo los objetivos son ciertamente diferentes, aunque concuerdan en que el curso es "teórico" a pesar de existir actualmente variadas aplicaciones y una buena gama de software de matemáticas tanto libre como comercial para darle el perfil no sólo teórico sino también aplicado. Es cierto también, que 70 o 80 horas no son suficientes para construir los conceptos que se proponen.

En conclusión, tenemos un primer curso de álgebra lineal en distintas formaciones profesionales con casi el mismo contenido matemático, el curso es teórico, aunque se trate de profesiones con una fuerte tendencia hacia la aplicación como la ingeniería en computación. Además, proponemos la inclusión del uso de la tecnología digital en el aula, como una herramienta de apoyo que facilita su enseñanza y aprendizaje, con esto no queremos decir que los profesores que imparten este curso no utilicen alguna herramienta tecnológica, sino que a nivel del plan de estudios no hay una propuesta específica sobre el uso de la tecnología, a pesar de que su uso es algo común en los estudiantes.

Por otra parte, vale la pena citar a Dorier y Sierpinska (2002, p.259) cuando afirman que los estudiantes que toman por primera vez un curso de álgebra lineal sienten que han llegado a un nuevo mundo donde nada es claro para ellos. En México, además de este sentimiento que el estudiante padece, se agrega el choque cognitivo al presentar una matemática con fuerte carga conceptual y con una presentación formal del contenido matemático (definición–teorema–demostración), que se contrapone a toda su formación matemática anterior también sucede regularmente que no hay cursos previos de álgebra lineal, si bien existen cursos pre-universitarios de geometría analítica con vectores (que posiblemente podría ser el curso más cercano al álgebra lineal), los dos últimos semestres de matemáticas de la educación media superior, en el mejor de los casos, están dedicados al cálculo diferencial e integral con un enfoque operativo; de este modo, el estudiante comúnmente finaliza la educación media superior y se dirige hacia áreas de conocimientos de ciencias naturales y exactas, ingeniería y tecnología o ciencias sociales y administrativas sin la base matemática suficiente para exitosamente aprobar un primer curso de álgebra lineal.

Por otra parte, consideramos que muchas de las aplicaciones del álgebra lineal deberían ser nichos de análisis y reflexión en clase, por su riqueza conceptual y su riqueza metodológica, evidentemente, que la dirección del análisis de estas aplicaciones requiere de profesores que dominen ampliamente el tema y que sean afines a la formación profesional. A continuación explicamos un par de ejemplos de aplicaciones del álgebra lineal en su forma básica con la intención de mostrar la riqueza conceptual y metodológica.

1.2. Algunas aplicaciones del álgebra lineal.

El actual protagonismo del álgebra lineal en nuestra era digital es impactante, sus aplicaciones, por mencionar algunas, se pueden encontrar en el procesamiento de imagenes digitales (Gonzalez y Woods, 2002) o en la construcción de motores de búsqueda eficientes para internet como es el caso de *Google* cuyo éxito según Brian y Leise (2006) se debe en gran parte a su algoritmo *PageRank*.

Bajo estas aplicaciones se esconden tratamientos matemáticos donde han sido utilizados hábilmente los conceptos del álgebra lineal. Nuestra intención es retomar estos saberes sabios, transponerlos didácticamente con el fin de hacerlos un saber asequible a estudiantes de matemáticas, física, ingeniería y licenciaturas; los detalles de esta transposición didáctica se darán en el tercer capítulo de esta investigación. A continuación se presenta una primera aplicación del álgebra lineal, en este caso se trata del tratamiento de imágenes digitales, en particular de la restauración de una imagen cuando ésta ha sufrido algún daño como mutilaciones.

1.2.1. Tratamiento de imágenes digitales.

El procesamiento de imágenes digitales, considerado el campo de los métodos y técnicas que nos permiten manipular imágenes digitales, en particular imágenes en la computadora, es actualmente un importante nicho de trabajos de investigación en matemáticas aplicadas. Aquí, presentaremos un ejemplo sencillo sobre la restauración de una imagen digital utilizando un método basado en el concepto matemático de independencia lineal y espacio columna. Hay que enfatizar la importancia que ha tenido el tratamiento de imágenes digitales para la astronomía y la medicina, esto por supuesto tiene un impacto científico y en el desarrollo de mejor tecnología para la detección de enfermedades; a la vez, en un contexto educativo, es posible que resulte atractivo para más de un estudiante.

Ahora bien, una imagen digital es posible representarla a través de una matriz de $m \times n$ pixeles con $m, n \geq 0$, donde cada elemento $f(i, j)$ de la matriz representa el color de un pixel en la posición (i, j); en el caso de una imagen en escala de grises, $f(i, j)$ puede tomar valores entre 0 y 255, donde el 0 es el color negro y el 255 es el color blanco, por ejemplo, la matriz de pixeles de la imagen 1.2 representa a la imagen digital en escala de grises que muestra la imagen 1.1.

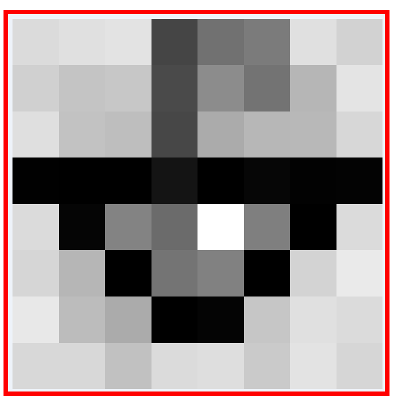


Figura 1.1. Barco sencillo en escala de grises.

219	224	227	69	113	123	224	210
208	196	199	74	140	115	182	228
223	194	190	71	171	183	184	215
1	0	0	20	0	6	2	3
105	109	113	117	255	127	0	219
106	110	114	118	129	0	211	234
107	111	115	119	4	198	224	219
108	112	116	120	222	202	227	214

Figura 1.2. Matriz 8×8 con elementos numéricos entre 0 y 255 que representa a la figura 1.1.

Se puede observar que la figura del barco es una imagen formada por una matriz de 8 por 8 pixeles, y su matriz asociada representa la posición del pixel y su tono en la escala de grises, e. g., $f(3,2) = 194$.

En el estudio del tratamiento de imágenes digitales, hay un tema dedicado al estudio de la restauración de imágenes digitales; su propósito es mejorar una imagen digital dañada mediante un proceso de reconstrucción. El procedimiento de restauración implica la puesta en juego de ideas, objetos y conceptos del álgebra lineal, así como del cálculo de varias variables y la estadística. Sin embargo, en el ejemplo que veremos sólo utilizaremos conceptos básicos del álgebra lineal.

Así, de una imagen degradada o dañada $g(i, j)$ se necesita obtener la forma aproximada de la imagen original $f(i, j)$. Un caso particular de imagen digital dañada es el caso de la mutilación, como la imagen que muestra la figura 1.3, mutilada en la esquina superior derecha, por lo que cabe la pregunta ¿cómo es *f* en esos puntos?

Figura 1.3. Imagen digital mutilada del óleo creado por el pintor William-Adolphe Bouguereau en 1873 llamada *Ninfas y Sátiro*.

Un método sencillo, que no ocupa del cálculo de varias variables ni de la estadística es el propuesto por Madrid (2010), el cual consiste en dividir la imagen dañada por mutilación en cuatro submatrices y a partir de las submatrices conocidas determinar los valores aproximados donde la imagen ha sido mutilada, suponiendo que estos valores son una combinación lineal de ciertos vectores columna.

Sea *M* la matriz $m \times n$ cuyos elementos son $g(i, j)$ con $i = 1,\dots,m$ y $j = 1,\dots,n$, entonces

$$M = \begin{bmatrix} S_1 & X \\ S_2 & v \end{bmatrix}$$

Donde X es la submatriz de elementos que se desconocen. Las submatrices S_1 y S_2 tienen orden $q\times r$ y $(m-q)\times r$ respectivamente.

El método que a continuación mostraremos se basa en la suposición que $S=\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}$ es un espacio columna de M, por lo tanto cada columna de $Y=\begin{bmatrix} X \\ v \end{bmatrix}$ es una combinación lineal de las columnas de S_2

$$S\Lambda = Y$$

Donde Λ es la matriz de orden $r\times(n-r)$ cuyos elementos satisfacen que

$$\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 + \ldots + \lambda_r s_r = y_i$$

Con $s_1, s_2, \ldots, s_r$ son columnas de S y y_i es una columna de Y.

Claramente $S_2\Lambda = v$ y $S_1\Lambda = X$. Supongamos que S_2 es cuadrada y no singular entonces $\Lambda = S_2^{-1}v$ por lo tanto $X = S_1 S_2^{-1} v$, de este modo la matriz que representa a la imagen restaurada es

$$\begin{bmatrix} S_1 & S_1 S_2^{-1} v \\ S_2 & v \end{bmatrix}$$

En este método se han puesto en escena varios conceptos del álgebra lineal, matriz y submatriz, inversa de una matriz, combinación lineal y espacio columna, este último concepto permite el desarrollo del método.

Lo anterior supone claramente un buen dominio del conocimiento matemático utilizado, en este caso, un conocimiento de los conceptos del álgebra lineal; sin duda, el bajo nivel de conocimientos haría imposible una introducción y tratamiento de aplicaciones actuales del álgebra lineal en su enseñanza. Sin embargo, bajo una transposición didáctica adecuada, es posible que estás aplicaciones conformen una enseñanza significativa del álgebra lineal.

1.2.2. Sistema de posicionamiento global.

De acuerdo con Strang y Borre (1997) el sistema de posicionamiento global revolucionó la ciencia del posicionamiento y medición sobre el planeta Tierra, por su exactitud, velocidad, simplicidad y costo (p. 447). Lo cierto es que actualmente es un dispositivo indispensable en la topografía y la ingeniería civil. El GPS por sus siglas en ingles *Global Positioning System* es un sistema de posicionamiento sobre la superficie terrestre que utiliza 24 satélites artificiales que orbitan alrededor de la tierra y 5 estaciones terrestres, así como un receptor que ayuda a determinar la ubicación de cualquier objeto sobre la tierra.

Si bien existen bastantes detalles técnicos que están fuera de nuestro alcance con relación a las componentes del GPS: los satélites, las estaciones terrestres y los receptores, la idea central del modelo matemático es un tanto sencilla. Como lo señalan Strang y Borre (1997) un hecho básico que merece atención es que se trata de medir distancias y no ángulos. Así que tratamos con una trilateración y no con una triangulación. (p. 448)

Básicamente, el problema es determinar la posición del receptor y el modelo matemático utiliza la información sobre la posición de los satélites, el tiempo que tarda en viajar la señal emitida del satélite al receptor, así como las distancias entre receptor y satélites, una vez conocida está información, entonces aplicamos la idea de trilateración, es decir, un punto sobre la esfera terrestre es determinado a partir de conocer las distancias de dicho punto respecto a tres puntos conocidos.

En general, dado que el reposo de un cuerpo no existe, el modelo general del GPS cálcula el error para ofrecer una aproximación tan cercana a la real como Strang y Borre (1997, p. 448) mencionan: "si suponemos que la posición del receptor es totalmente fija entonces es suficiente con saber la posición de tres satélites, sin embargo en la realidad esto no es cierto, invariablemente se toma en cuenta el error y se necesita la posición de más de 4 satélites.".

Por otra parte, Kalman (2002) presenta un modelo matemático del GPS omitiendo la toma en cuenta de los errores pero la idea es básicamente la misma; en lo que sigue utilizamos el modelo que propone Kalman.

La posición de un objeto-receptor sobre la tierra (ver figura 1.4) es representada por la coordenada (x, y, z) y se conocen las posiciones de cuatro satélites, digamos $S_1 = (1,2,0)$, $S_2 = (2,0,2)$, $S_3 = (1,1,1)$ y $S_4 = (2,1,0)$. Para calcular la distancia del receptor a cada satélite se utiliza el producto de la velocidad de la luz (que equivale a la velocidad de las ondas radio) por la diferencia entre el tiempo en que la señal de radio fue emitida por el satélite y recibida por el receptor:

$$d = c(t - t_m)$$

Donde $c \approx 299,792,458\, {}^{m}\!/\!{}_{s}$ es la velocidad de la luz (en unidades *radii* por milisegundo $c = 0.047\, {}^{radii}\!/\!{}_{ms}$ donde 1 *radii* $\approx 6,371.009 km$); *t* es el tiempo en el que la señal llega al receptor y t_m es el tiempo en el que la señal fue enviada por el satélite.

Supongamos que la tierra es una esfera unitaria, así que cualquier objeto-receptor que se encuentre sobre la superficie terrestre debe cumplir la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Los satélites tienen sus orbitas bien establecidas y es relativamente fácil determinar sus coordenadas, además la señal de radio enviada por el satélite al receptor lleva consigo el tiempo t_m. Estos valores nos permitirán determinar los valores de las cuatro incógnitas *x*, *y*, *z* y *t*.

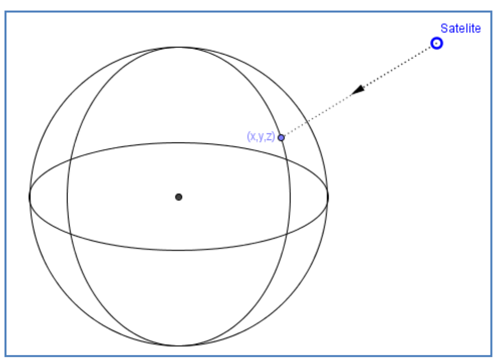


Figura 1.4. Representación de la tierra y un satélite.

Además, la distancia entre un objeto en la tierra y un satélite es:

$$d = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$$

Donde (x_1, y_1, z_1) es la posición del satélite.

Así por ejemplo, si tenemos la posición de cuatro satélites con sus respectivos tiempos:

Satélite	Posición	Tiempo t_m
S1	$(2,5,2)$	2
S2	$(6,8,3)$	4
S3	$(-2,2,4)$	7
S4	$(4,-2,5)$	3

Obtenemos el sistema de ecuaciones no lineales siguiente

$$\begin{aligned}(x-2)^2+(y-5)^2+(z-2)^2&=c^2(t-2)^2\\(x-6)^2+(y-8)^2+(z-3)^2&=c^2(t-4)^2\\(x+2)^2+(y-2)^2+(z-4)^2&=c^2(t-7)^2\\(x-4)^2+(y+2)^2+(z-5)^2&=c^2(t-3)^2\end{aligned}$$

Al desarrollar los términos cuadráticos de cada ecuación y ordenarlos, llegamos al sistema siguiente

$$\begin{aligned}2x+10y+4z-4c^2t-33+4c^2&=x^2+y^2+z^2-c^2t^2\\12x+16y+6z-8c^2t-109+16c^2&=x^2+y^2+z^2-c^2t^2\\-4x+4y+8z-14c^2t-24+49c^2&=x^2+y^2+z^2-c^2t^2\\8x-4y+10z-4c^2t-33+4c^2&=x^2+y^2+z^2-c^2t^2\end{aligned}$$

Dado que en cada ecuación aparece la expresión $x^2+y^2+z^2-c^2t^2$, vamos a sustituirla por la variable *w*, quedando un sistema de cuatro ecuaciones (en apariencia lineales) con 5 incógnitas

$$\begin{aligned}2x+10y+4z-4c^2t-33+4c^2&=w\\12x+16y+6z-8c^2t-109+16c^2&=w\\-4x+4y+8z-14c^2t-24+49c^2&=w\\8x-4y+10z-4c^2t-33+4c^2&=w\end{aligned}$$

Dado que $c=0.047$, el sistema de ecuaciones queda así

$$\begin{aligned}2x+10y+4z-0.00884t-32.99&=w\\12x+16y+6z-0.01767t-108.96&=w\\-4x+4y+8z-0.03093t-23.89&=w\\8x-4y+10z-0.00884t-32.99&=w\end{aligned}$$

Aplicando eliminación gaussiana para eliminar *w* de las ecuaciones 2, 3 y 4 obtenemos el siguiente sistema equivalente

$$\begin{aligned} -w + 2x + 10y + 4z - 0.00884t &= 32.99 \\ 10x + 6y + 2z - 0.00883t &= 75.97 \\ -6x - 6y + 4z - 0.02209t &= -9.1 \\ 6x - 14y + 6z &= 0 \end{aligned}$$

Prácticamente se trata de resolver el sistema de ecuaciones lineales de 3×4 siguiente

$$\begin{aligned} 10x + 6y + 2z - 0.00883t &= 75.97 \\ -6x - 6y + 4z - 0.02209t &= -9.1 \\ 6x - 14y + 6z &= 0 \end{aligned}$$

De resolver este sistema obtenemos los valores de x, y y z en términos de t

$$z = 0.006184t + 9.39$$

$$y = 0.001988t - 5.15$$

$$x = -0.001613t + 2.46$$

El valor de t queda determinado por la ecuación

$$-w + .032547t + 60.93 = 0$$

Donde $w = 0.002164t^2 - 0.125680t - 120.75$ resultando la ecuación cuadrática

$$-0.002164t^2 + 0.158227t + 181.68 = 0$$

Esta aplicación del álgebra lineal, como puede notarse, tiene una fuerte carga en los cálculos numéricos de cantidades en forma decimal; resolver el sistema de ecuaciones lineales y la ecuación cuadrática a lápiz y papel sería un trabajo arduo y sinuoso, para ello se propone el uso de la computadora como apoyo en este tipo de cálculos.

Conjuntando la información presentada en la sección 1.1 y esta sección, tenemos a lo más un curso universitario de álgebra lineal, el que según los planes de estudio ha de ser teórico, en contraposición al hecho que hoy en día el álgebra lineal es una de las áreas de las matemáticas más aplicables, además, al parecer el uso de la computadora como herramienta de apoyo en la solución de problemas del álgebra lineal es una necesidad. Además, dada las experiencias en diferentes cursos impartidos de álgebra lineal por parte del Dr. Humberto Madrid y el Dr. C. Armando Cuevas, de plantear a los estudiantes problemas o situaciones reales de su interés, facilitan la introducción de los conceptos matemáticos que nos interesan sean construidos y aprendidos.

Siguiendo con nuestro planteamiento del problema, la sección siguiente abordará ciertos trabajos de investigación que consideramos importantes dentro de lo que podríamos llamar: didáctica del álgebra lineal. Además de una simple caracterización de los tipos de libros que consideramos existen como apoyo en la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal.

1.3. Dificultades en la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal.

La matemática es uno de los conocimientos humanos necesarios para el desarrollo científico y tecnológico de toda sociedad, por ende, aprenderla y transmitirla en sus diferentes niveles son actividades igualmente necesarias. Ahora bien, tanto el aprendizaje como la enseñanza de las matemáticas presentan dificultades inherentes en cada nivel educativo y en cada contenido matemático; la detección de estas dificultades y su estudio permiten establecer tratamientos didácticos con el propósito de mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en algunos casos este tipo de investigaciones conllevan al desarrollo de nuevas teorías.

En este sentido, el objetivo de este apartado es revisar el estado del arte sobre las investigaciones u otras fuentes bibliográficas relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal. Para esto, iniciamos con una revisión no exhaustiva de algunos libros de texto de álgebra lineal, libros que consideramos comúnmente son utilizados en los cursos en nuestro país, en muchos de los casos propuestos en el mismo plan de estudios de la materia; el propósito esencial de esta acción, es establecer una primera caracterización de los enfoques didácticos de tales libros, dado que estos, además de ser la principal fuente fidedigna de consulta tanto de profesores como de alumnos, son también una fuente de inspiración de planteamientos didácticos por parte del docente.

1.3.1. El álgebra lineal en los libros.

Hemos considerado conveniente iniciar con la caracterización que se derivó de la revisión no exhaustiva de algunos textos que consideramos se utilizan de forma regular en los cursos de álgebra lineal en diferentes universidades e instituciones de nivel superior en México:

- Formales.
- Presentación formal con desarrollos operativos (Formales – operativos).
- Formales con aplicaciones (Formales – aplicaciones).
- Formales con contenidos de métodos numéricos (Formales – Numéricos).

A continuación explicaremos como llegamos a esta caracterización y concluiremos con algunos cuestionamientos y reflexiones sobre este fenómeno.

Como se puede notar, lo formal es la parte común entre cada clase de la caracterización, entendiéndose por formal a la presentación axiomática de la matemática y que desarrolla a través de tales axiomas, teoremas y sus respectivas demostraciones y definiciones. Un representante de la clase formal es uno de los libros del profesor Lang (1986), intitulado *Introduction to Linear Algebra* propuesto por él mismo como un libro para un primer curso de álgebra lineal. El texto tiene la mencionada estructura formal, por ejemplo, en la página 20 presenta y demuestra el siguiente teorema:

Sea x un número entonces $\|xA\| = |x|\|A\|$ *(Valor absoluto de x veces por la norma de* A*)*

Es de resaltar, que este teorema es parte del capítulo 1 bajo el tema de norma de un vector. Otro texto con este enfoque es el de Marcus y Minc (1988), casualmente con el mismo título *Introduction to Linear Algebra*.

Por otra parte, libros como *Elementary Linear Algebra* de Anton (2010) o Álgebra Lineal de Grossman (2008), son ciertamente formales pero no tan rigurosos (no siempre se demuestran los teoremas) y se acompañan de una buena cantidad de ejercicios operativos, por ejemplo, en Grossman (ídem, pp. 63-64) se presenta el teorema sobre la ley asociativa para la multiplicación de matrices, no se demuestra pero si se presenta un ejemplo con matrices particulares. Estos libros los clasificamos como formales – operativos.

La tercera clase formales – aplicaciones surge a partir de la revisión de los libros Álgebra lineal y sus aplicaciones del profesor Strang (1982) y Álgebra lineal: una introducción moderna de Poole (2007), en ambos casos la presentación del contenido matemático cumple con la formalidad matemática aunque a veces no sea rigurosamente explícito, y regularmente concluyen el capítulo o abordan en algún momento aplicaciones clásicas y contemporáneas del álgebra lineal, como las gráficas y redes, o bien, el GPS.

Finalmente, tenemos la clase formal – numéricos donde se trata de mostrar al lector algunos resultados e ideas del álgebra lineal numérica, por ejemplo, el libro del profesor Strang (2003) que lleva por título *Introduction to linear algebra*, tiene una sección dedicada a hablar y explicar el pivoteo parcial en la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

De acuerdo con esta clasificación, la formalidad matemática es parte recurrente en los libros de álgebra lineal, sin embargo, libros como los del profesor Strang con enfoques de aplicación y numéricos han abierto las formas de enseñanza pues es evidente que la principal fuente de apoyo del docente para preparar una clase son los libros, de aquí que el enfoque didáctico del curso de álgebra lineal en algunos casos sea bajo una mezcla de las clases de la clasificación mencionada. Sin duda la formalidad en las matemáticas es una de sus características como ciencia, sin embargo, en la construcción de conceptos en estudiantes, este formalismo a veces oscurece los significados y dificulta la compresión, como lo señala Dorier (1998). Un poco más adelante revisaremos éste trabajo.

De acuerdo con lo hasta ahora tratado en este capítulo, el álgebra lineal es un contenido matemático abstracto, cuya comprensión requiere cierta madurez matemática o de pensamiento matemático; por otro lado, el álgebra lineal es cada vez más utilizada para modelar problemas reales. En este sentido, creemos que una enseñanza basada en la manipulación de situaciones reales permite la construcción de los conceptos fundamentales del álgebra lineal sin pérdida rigor y esperamos probar o proporcionar elementos que permitan dar un fundamento científico a esta aseveración.

Para nosotros el álgebra lineal y en general la matemática ha de construirse gradualmente; en el álgebra lineal los objetos y conceptos se necesitan unos a otros, no es adecuado presentarlos como disjuntos, así que su enseñanza y aprendizaje no puede partir del concepto que generaliza y unifica a un conjunto de objetos algebraicos en una estructura algebraica con características bien definidas; además, los trabajos relacionados con el desarrollo y evolución histórica del álgebra lineal (Dorier, 1995; Moore, 1995) muestran la axiomatización del álgebra lineal como el último escaño en su consolidación.

A continuación presentaremos las dificultades por las que estudiantes atraviesan cuando la enseñanza del álgebra lineal es invariablemente formal.

1.3.2. El formalismo en la enseñanza del álgebra lineal.

En la sección anterior se aludió al formalismo de los libros de álgebra lineal, e insistimos en el aparente fenómeno didáctico debido a su influencia en la enseñanza; ahora, como otra gran cuestión nos preguntamos ¿cómo influye una enseñanza formalista del álgebra lineal en su aprendizaje? En principio, de acuerdo con Dorier & Sierpinska (2001) el formalismo es un lenguaje. Lo que evidentemente conduce a pensar que un individuo aprende a utilizar un lenguaje dominando su sintaxis y entendiendo su semántica. Esto introduce un considerable grado de dificultad a toda la matemática, porque además de aprender el lenguaje, se requiere de comprender y de entender los conceptos de la teoría matemática que se genera. El caso del álgebra lineal en México es peculiar por no decir especial, ya que durante la enseñanza básica y media superior, los contenidos matemáticos más cercanos a esta área de las matemáticas son los sistemas de ecuaciones lineales, así que en realidad, un primer curso de álgebra lineal es un curso de verdaderas nuevas ideas y conceptos, nada triviales, que sumados a una enseñanza en lenguaje formal hará sentir a muchos estudiantes como Dorier (1998, p.142) menciona "… una sensación de haber aterrizado en un nuevo planeta, siendo incapaces de encontrar su camino en este nuevo mundo".

El rol del formalismo en matemáticas es sin duda importante, sin embargo, en el contexto educativo puede resultar un obstáculo para muchos estudiantes, como Easdown (2009, p.1) afirma "… los estudiantes que eligen especializarse en matemática pura disfrutan la prueba y el rigor, de hecho lo prefieren por encima de únicamente una explicación en palabras. Mientras que hay muchos más estudiantes que se alejan o rechazan la disciplina porque no les gusta la prueba y el rigor, sobre todo cuando el nivel de abstracción o detalle es tedioso u obscurece las principales ideas o aplicaciones."

Nosotros consideramos que los conceptos matemáticos han de construirse con significado, y el formalismo habrá de surgir como una necesidad y no como una imposición, inclusive en las carreras universitarias de matemáticas o afines. Además, el álgebra lineal, por ser una de las áreas de la matemática que generaliza y unifica a las estructuras algebraicas con la propiedad de la linealidad, hace ineludible el formalismo, por lo que hay que considerar en su enseñanza una construcción en paralelo entre los conceptos y el formalismo inherente. Por ejemplo, Dorier (1998, p. 150) sugiere que la enseñanza del álgebra lineal ha de dar a nuestros estudiantes mejores formas de conectar los objetos formales de la teoría con sus concepciones previas, a fin de tener un mejor aprendizaje intuitivo.

Es necesario puntualizar que sería un error imputarle tantos males al formalismo, dado que como Dorier y Sierpinska (2002, p. 259) mencionan:

> "Las dificultades de estudiantes con los aspectos formales de la teoría de espacios vectoriales no son justamente un problema con el formalismo sino principalmente una dificultad de entendimiento del uso específico del formalismo con la teoría de espacios vectoriales y la interpretación de los conceptos formales en relación con contextos más intuitivos como la geometría o los sistemas de ecuaciones lineales, que de ellos históricamente emergieron.".

El álgebra lineal es un contenido matemático que trata con conceptos muy generales, e. g., la independencia lineal. Esto hace al álgebra lineal tan compleja, condenando a su enseñanza y a su aprendizaje a ser actividades difíciles, donde el formalismo es sólo uno de los distintos problemas.

Insistimos pues en la necesidad del formalismo en el álgebra lineal, pero claramente una enseñanza del álgebra lineal tan formal provoca serias dificultades en su aprendizaje, y en ocasiones se llegan a errores conceptuales graves. Dorier, Robert, Robinet y Rogalsiu mediante una investigación longitudinal encontraron la existencia de un obstáculo "masivo" que se repitió generación tras generación de estudiantes, al que llamaron el **obstáculo del formalismo**. En este trabajo se muestra como muchos de los errores que un estudiante comete se deben principalmente a la falta de conocimiento o dominio de la teoría de conjuntos y la lógica.

Es evidente que tanto la teoría de conjuntos como la lógica tienen lenguajes propios, esto hace pensar que en el álgebra lineal convergen o hay diferentes lenguajes en juego. En el siguiente apartado se aduce de la existencia de ciertos lenguajes en el álgebra lineal.

1.3.3. Los modos de descripción de Hillel.

El álgebra lineal, en un primer acercamiento, es la geometría euclidiana extendida a espacios de n dimensión, evidentemente esta visión es una versión acotada aunque válida para un primer curso de algebra lineal. Estrictamente el álgebra lineal es la generalización y la unificación de objetos matemáticos que comparten una misma estructura algebraica: espacio vectorial. Por supuesto, esto último es uno de los grandes logros de la matemática moderna, sin embargo, esta característica implica un mayor esfuerzo intelectual tanto para su enseñanza como para su comprensión.

Siendo más puntuales, la generalización y unificación necesita de un amplio dominio de la matemática y su lenguaje; no es casual que el álgebra lineal albergue más de un lenguaje en su construcción conceptual y axiomática, así fue concebida. En este apartado analizamos un trabajo de investigación sobre las dificultades a las que se enfrentan estudiantes en un curso de álgebra lineal a causa del uso de diferentes representaciones en su enseñanza.

De acuerdo con Hillel (2000, p.192) un curso típico de álgebra lineal generalmente incluye varios modos de descripción de los objetos básicos y sus operaciones. Estos modos de descripción coexisten, son a veces intercambiables, pero ciertamente no equivalentes.

Un modo de descripción es un lenguaje técnico que permite la comunicación, manipulación y tratamiento de los objetos matemáticos y sus conceptos; el trabajo de Hillel detecta por lo menos tres lenguajes básicos o modos de descripción: el abstracto, el algebraico y el geométrico.

El modo abstracto usa el lenguaje formal, incluye el uso de los conceptos de espacio vectorial, subespacio, conjunto generador, dimensión, operadores, kernel, etcétera.

El modo algebraico usa el lenguaje y los conceptos de la teoría en $\mathbb{R}^n$ como n-tuplas, matrices, rango, solución de sistemas de ecuaciones, espacio renglón, etcétera.

El modo geométrico usa el lenguaje y los conceptos de los espacios de 2 y 3 dimensiones como segmentos de línea dirigidos, puntos, líneas, planos, transformaciones geométricas, etcétera.

Sobre esta identificación general de Hillel sobre los lenguajes utilizados en un curso de álgebra lineal, aparecen distintos fenómenos didácticos, entre ellos el cambio injustificado de un modo de descripción a otro por parte del profesor y el abuso del lenguaje en determinado modo de descripción. En ambos casos, el aprendiz puede atravesar por una confusión seguida de formación de ideas incorrectas, e. g., en el modo geométrico exhibe como el uso indiferenciable entre flecha y punto para representar a un vector geométricamente en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, por parte de los profesores, genera errores conceptuales en los estudiantes.

Este abuso de lenguaje aparentemente no tiene repercusiones cuando se trata de vectores que pertenecen a $H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by=0\}$, ya que los alumnos trazan la recta y sobre ella flechas con punto inicial en $(0,0)$ y final (x,y). Sin embargo, cuando se trata de vectores que pertenecen a $I=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by=c \text{ con } c\neq 0\}$ dibujan flechas sobre la recta $ax+by=c$, en lugar de vectores con punto inicial $(0,0)$ y punto final sobre la recta. Al respecto, Hillel externa una primera conclusión: “La experiencia mostró que la relación entre las flechas y los puntos sobre una línea (plano) no es clara, particularmente si uno se aleja del origen” (p. 196). Y es extraña la forma en que los estudiantes trazan las flechas sobre las líneas rectas que no pasan por el origen, todas con la misma dirección (ver imagen 1.3.3.1), mientras que las flechas trazadas sobre las líneas rectas que pasan por el origen parten del origen en direcciones distintas (ver imagen 1.3.3.2).

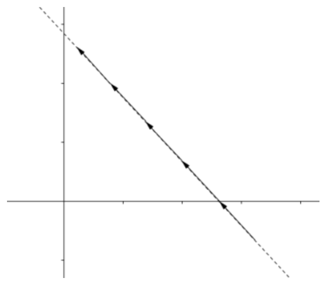


Imagen 1.3.3.1

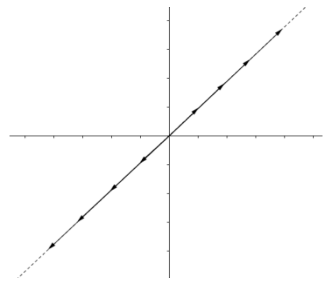


Imagen 1.3.3.2

Nosotros pensamos que en este caso, los estudiantes posiblemente no tienen claro el significado de un vector geométrico como un segmento que va del origen hacía cualquier punto en el plano (lo que sugiere una dirección y una inclinación, e. g., los puntos en $\mathbb{R}^2$ $P_1 = (-2,4)$ y $P_2 = (2,-4)$ generan dos vectores con direcciones opuestas e inclinaciones distintas). Aunado a que posiblemente no alcanzan a notar que todo vector en el plano cuyo punto inicial no parte del origen es la suma o resta de un par de vectores que parten del origen. En efecto, como Hillel menciona que aun cuando el estudiante piense en los vectores en términos de flechas en el plano, continúan viendo el sistema de coordenadas como algo determinado por los ejes más que por un par de vectores base.

De acuerdo con Hillel, a partir de 1980 muchos instructores y autores de textos de álgebra lineal introductoria inician con el modo geométrico se mueven, sin precaución alguna entre $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$ y V usando los tres diferentes lenguajes de la teoría. En México, nuestra experiencia es distinta, frecuentemente los tratamientos son operativos, formales o seudoformales más que geométricos, sin embargo, acontece un fenómeno equivalente al mencionado por Hillel en el proceso de enseñanza de los conceptos, pues se suele pasar de un modo de descripción a otro y cambiar de notación sin la debida explicación. Por ejemplo, en el concepto de transformación, el profesor transita entre los tres modos de descripción de vectores sobre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ aplicando matrices de transformación, hasta llegar al caso en $\mathbb{R}^n$ y finalmente denotar de forma general cualquier espacio vectorial de dimensión finita como V y a sus elementos como vectores v; por otro lado, la matriz de transformación ahora considerada como una transformación lineal.

Aun llegando a tal abstracción de una transformación, el profesor recurrirá a ejemplos en los casos particulares de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^n$. Claramente esto introduce la necesidad de cuidados con el uso de diferentes registros de representación o notaciones en un curso de álgebra lineal, así como una clara y conveniente explicación de su utilidad en el momento, sin olvidar que las notaciones llegan a caducar; además, y es imprescindible, que los translaciones entre un modo de descripción a otro, sean debidamente justificadas.

Bajo nuestra experiencia, cambiar de un modo de representación a otro acontece por necesidad, no así por gusto, aunque también es cierto, según Duval (1985) un concepto estudiado en varios registros de representación y debidamente articulados generan en el individuo una mejor comprensión del concepto mismo.

Por otro lado, algunas formas de representación tienen limitaciones, por ejemplo el registro geométrico, en álgebra lineal es el más limitado, basta con querer representar geométricamente un vector en un espacio de cuatro dimensiones. Además, según Gueudet (2004) el uso de la geometría en la enseñanza del álgebra lineal puede ayudar al estudiante y a la vez generarle dificultades específicas, llamadas obstáculos didácticos.

En su trabajo, Hillel concluye que en un curso típico de álgebra lineal (con típico se refiere a la enseñanza de los conceptos de vector y transformación en los espacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$ y el espacio vectorial abstracto V) existen dos tipos de obstáculos epistemológicos. El primero, se debe a la familiaridad con la geometría analítica y las coordenadas estándar, ya que, según él, los vectores y transformaciones en un contexto geométrico se vinculan a nociones geométricas más familiares para el alumno, formándose un obstáculo para pensar en bases, además de no permitir emerger la necesidad de un cambio de base.

El otro obstáculo se relaciona a las nociones especificas a $\mathbb{R}^n$ aprendidas por los estudiantes; en este caso, de acuerdo con Hillel, dado que entre un espacio vectorial V de dimensión finita (de polinomios de grado $\leq n$, funciones, matrices, etcétera) y $\mathbb{R}^n$ existe un isomorfismo, se piensa que es razón suficiente para que una vez aprendidos los conceptos relacionados con la teoría de espacios vectoriales en $\mathbb{R}^n$, el estudiante comprenderá y entenderá la teoría general, y aceptará otros tipos de objetos como funciones, polinomios o matrices como vectores; la evidencia de su trabajo demuestra que los alumnos al resolver una variedad de problemas continuamente recurren a la noción central de sistemas de ecuaciones lineales, llegando a ser un obstáculo.

Desde nuestro punto de vista, y de acuerdo al marco didáctico es favorable que la enseñanza del álgebra lineal sea gradual, además ha de evitar anclajes de conceptos que no permitan desarrollar ideas más generales de los conceptos, por ejemplo, sabemos que un vector es un elemento de un espacio vectorial, es decir cumple con cada uno de los axiomas del espacio vectorial; sin embargo, en un curso tradicional, esta definición parece no ser tomada en cuenta por el docente, ya que con cierta frecuencia se forma en el estudiante la noción de que un vector es una *eneada* o $n-tupla$ y no una matriz o un polinomio, o bien una función. Evidentemente, para cambiar la concepción sobre el objeto vector se necesitará de una ruptura, lo cual no es trivial, por lo que creemos que para una visión global del álgebra lineal es conveniente, utilizar diferentes contextos.

En el siguiente apartado analizaremos un trabajo que aborda esta visión de hacer gradual la enseñanza del álgebra lineal, bajo la combinación de un par de marcos teóricos particularmente diseñados para la enseñanza del contenido matemático en la educación superior.

1.3.4. Una propuesta didáctica para la enseñanza del álgebra lineal.

Stewart y Thomas (2009) proponen una enseñanza del álgebra lineal bajo la combinación de dos perspectivas teóricas: la teoría constructivista de la APOE (Acción

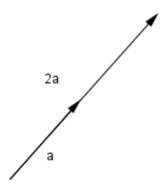
– Proceso – Objeto – Esquema) de Dubinsky (2001) y el marco teórico de Tall (2004), al que ha denominado: Tres Mundos de las Matemáticas.

Ambos propuestas teóricas tienen la particularidad de estar pensadas para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas universitarias, e. g., Tall (2010) menciona: "Cuando pensamos en un vector, en la escuela es una cantidad con magnitud y dirección que puede ser visualizada como una flecha, o un símbolo con coordenadas que puede ser afectado por matrices. En las matemáticas de la universidad este es un elemento de un espacio vectorial axiomático." (p. 1).

Con esta explicación, para nosotros, Tall introduce el panorama general de su propuesta epistemológica del pensamiento matemático avanzado, a través de las tres diferentes maneras de pensar en la actividad matemática: el pensamiento que emerge de las percepciones físicas; el que se genera de las operaciones simbólicas; y el que emerge del formalismo. En el capítulo 2 de este trabajo detallaremos más acerca de esta perspectiva.

De acuerdo con Stewart & Thomas: "las acciones, procesos y objetos pueden existir igualmente bien en las matemáticas de lo visual, geometría, el mundo de las sensaciones y en el mundo formal, y aplicar esto al álgebra lineal." (p. 952). Bajo esta premisa combinan la teoría de la APOE y la de los tres mundos en matemáticas, generando así un "nuevo" constructo teórico, con dos propósitos generales; el primero enfocado a la enseñanza de los conceptos de vector, producto escalar, combinación lineal, dependencia e independencia lineal, conjunto generador, base, valores propios y vectores propios. Y el segundo, se refiere a que este marco teórico permite evaluar el entendimiento conceptual del algebra lineal de los estudiantes.

Para cumplir con sus propósitos, combinan acciones, procesos y objetos con los tres mundos en matemáticas mediante una matriz de 3×3 donde los renglones están relacionados con la acción, proceso y objeto; y las columnas con los tres mundos en matemáticas: el mundo de las sensaciones, el mundo simbólico (en dos diferentes representaciones, la algebraica y la matricial) y el mundo formal. Por ejemplo, las acciones en los tres mundos del concepto de vector tienen el siguiente diseño didáctico de acuerdo con Stewart y Thomas (2009, p. 953):

Mundos APOE	Mundo sensorial	Mundo simbólico		Mundo formal
		Representación algebraica	Representación matricial	
acción	Un vector se puede ver como el desplazamiento de *A* a *B*  Efecto de una multiplicación escalar 	Se puede multiplicar un vector por un escalar, por ejemplo, 3ª	Se pueden sumar vectores $\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\3\\1\end{bmatrix}$ Se pueden multiplicar vectores por un escalar $2\begin{bmatrix}4\\3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\6\\2\end{bmatrix}$	

En cada mundo se determina la acción particular, aunque en este caso el mundo formal ha quedado vacío, aunque para nosotros, en el mundo formal bien pueden aparecer ciertos planteamientos como que un polinomio es un vector; la suma de dos polinomios es otro polinomio y su multiplicación por un escalar da otro polinomio.

Esta forma de ver el contenido matemático del álgebra lineal, para nosotros cumple con la visión de una enseñanza gradual del álgebra lineal, ya que, hay un abordaje en cada mundo de las matemáticas mediante un proceso natural del aprendizaje según la APOE. Sin embargo, en apariencia para Stewart & Thomas el mundo de las sensaciones en matemáticas, en el caso del álgebra lineal, es el geométrico, el cual como ya vimos en el trabajo de Hillel (2000), hay un alto riesgo de provocar un obstáculo epistemológico. Para nosotros, en el caso del mundo geométrico se tendría que tomar previsiones para evitar anclajes conceptuales debido al uso de vector como flecha.

El marco teórico propuesto por Stewart & Thomas resulta muy interesante y se presta a una evidente polémica, pero el propósito de este capítulo es el de presentar trabajos de investigación asociados a la enseñanza y aprendizaje del algebra lineal.
A continuación presentaremos el planteamiento del problema de investigación, producto del panorama previo.

1.4. Planteamiento del problema y preguntas de investigación.

Durante los apartados anteriores se mostró un panorama en torno a las condiciones sobre las que se desarrolla la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal. Se vio que el álgebra lineal es:

- un curso universitario y sólo las carreras universitarias afines a las matemáticas ofrecen más de un curso.

En este sentido, para nosotros la prioridad en un primer curso de álgebra lineal es construir correctamente la mayor cantidad de conceptos que el plan de estudios enmarca, evidentemente que esto también depende de la orientación profesional por lo que es necesario buscar una solución para mostrar al alumno la importancia de los conceptos, y en la medida de lo posible su utilidad. No hay que perder de vista que cada concepto matemático tiene su complejidad inherente tanto para entenderlo como para explicarlo, de aquí que para nosotros existe una necesidad de herramientas que apoyen a estas actividades.
Por otra parte, tenemos que:

- un curso de álgebra lineal, en ciertos casos es formal y en otros poco riguroso, en otros más operativo que no llega a cumplir los objetivos, además de ser un curso teórico.

En el caso de un curso formalista matemáticamente hablando, el obstáculo epistemológico es inminente y también los posibles errores conceptuales posteriores en los estudiantes. En el caso de una enseñanza poco rigurosa y operacional, los conceptos no se ven o se tratan con poca profundidad, la actividad del curso se reduce a realizar cálculos y reproducir recetas.

Por supuesto que ambos extremos son indeseables en la enseñanza de las matemáticas, pero creemos que un adecuado marco didáctico puede lograr una combinación fecunda y equilibrada de estás dos formas de enseñanza para mejorar el aprendizaje del álgebra lineal. En particular, nosotros consideramos como una necesidad actual el uso de herramientas digitales para promover y apoyar el aprendizaje de los conceptos matemáticos de interés.

De lo anterior surge un primer cuestionamiento:

- ¿Pueden las herramientas digitales, bajo un marco didáctico promover una mejor comprensión, de los conceptos matemáticos inherentes a un primer curso de algebra lineal sin caer en un formalismo excesivo ni en curso poco riguroso y operacional?

Este cuestionamiento nos conduce a otras dos importantes cuestiones:

- ¿Qué tipo de tecnología digital sería la más apropiada?
- ¿Qué programa didáctico favorecería este proceso?

Por otra parte, las aplicaciones del álgebra lineal en la actualidad se han incrementado y en contraparte, el discurso escolar del álgebra lineal, en gran parte, sigue siendo el mismo. En general, pocos profesores llegan a incluir alguna aplicación del álgebra lineal bajo una adecuada transposición didáctica. Tenemos la hipótesis que bajo el planteamiento de aplicaciones actuales del álgebra lineal, dotaremos al contenido matemático de significado y será motivante para el estudiante, así tenemos:

- ¿Cómo presentar e interactuar con problemas reales donde se apliquen los conceptos matemáticos de un primer curso de algebra lineal sin que los cálculos aritmético-algebraicos sean un complejo obstáculo en la reflexión y adquisición de tales conceptos?

Sabemos que un tratamiento de los conceptos del álgebra lineal con la geometría puede provocar errores conceptuales, sobre todo con el concepto de base como lo menciona Gueudet (2004), pero también puede promover una mejor comprensión de los conceptos, por lo que cabe la cuestión:

- ¿Cómo utilizar la representación geométrica de los conceptos matemáticos de un primer curso de álgebra lineal sin que provoque obstáculos y que promueva la compresión de los conceptos?

Al principio de este capítulo, a manera de epígrafe se citó a Dorier (1995): "*El estudio de los sistemas de ecuaciones lineales y la búsqueda de un análisis geométrico intrínseco fueron las dos principales fuentes que dieron origen a la teoría de linealidad.*", nosotros estamos convencidos que por medio del uso de la teoría de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y su geometría, es posible introducir conceptos más sofisticados del álgebra lineal sin perder rigor y ganando comprensión.

En este sentido, este trabajo de investigación tiene como propósito ofrecer una alternativa en la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos básicos del álgebra lineal bajo la dirección de los cuestionamientos planteados. De esta forma, el trabajo de investigación se centra en el diseño, construcción y aplicación de una propuesta didáctica que instrumente las tecnologías digitales para apoyar la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos matemáticos de un primer curso de álgebra, utilizando situaciones reales, así como la representación geométrica en la medida de lo posible y la teoría alrededor de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

En el siguiente capítulo se establecerá el constructo teórico que necesitamos para el desarrollo de nuestra investigación, que con el trabajo de Stewart y Thomas (2009) tenemos un ejemplo donde algunas perspectivas teóricas pueden combinarse o articularse, digamos que seguiremos esa visión en este trabajo.

Capítulo 2. Elementos teóricos sobre espacio vectorial, valores y vectores propios, didáctica de las matemáticas y la génesis instrumental.

Este capítulo tiene como propósito exponer brevemente los elementos teóricos sobre los conocimientos que se consideran necesarios para realizar este trabajo de investigación. Como hemos mencionado, este trabajo es una combinación de tres ciencias distintas de conocimiento como lo son la matemática, la sicología del aprendizaje en particular la didáctica de las matemáticas y las tecnologías digitales; por tal motivo hemos organizado este capítulo en cuatro secciones, tres de las cuales dedicadas a exponer los elementos teóricos de los contenidos relacionados con las tres áreas del conocimiento mencionadas y una cuarta sección para explicar la articulación entre los elementos teóricos para alcanzar el propósito de esta investigación. Iniciamos con una exposición del contenido matemático relacionado con los espacios vectoriales, los valores propios y vectores propios, temas que, como se vio en el primer capítulo, son parte de un primer curso universitario de álgebra lineal, para los cuales hemos elaborado materiales didácticos digitales bajo el diseño didáctico que construiremos en la última sección de este capítulo. La segunda y tercera sección de este capítulo está centrada en presentar los elementos teóricos didácticos sobre los que hemos decidido basar el desarrollo del trabajo, son por lo menos tres las razones consideradas: (1) el álgebra lineal es un contenido matemático conformado por conceptos generales y abstractos; (2) el primer curso de álgebra lineal aparece en la educación superior o la universidad; y, (3) el álgebra lineal es una de las ramas de las matemáticas con crecientes aplicaciones en el mundo tecnológico digital; por tales razones, elegimos la teoría que sustenta la ingeniería didáctica de Cuevas y Pluvinage (2003) que ellos mismos han denominado como *proyecto de acción práctica*.

En la sección tres presentamos una perspectiva teórica que explica el proceso mediante el cual un individuo se apropia de una herramienta, en nuestro caso, herramientas digitales utilizadas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Esta perspectiva teórica es llamada: *génesis instrumental* en el aprendizaje de las matemáticas (Trouche, 2004); también analizaremos la necesidad de dirigir este proceso con el propósito de producir armonía entre las herramientas, la matemática y el alumno, actividad realizada por el profesor y denominada por Trouche (2004) como *orquestación Instrumental*.

Finalmente concluimos este capítulo con la sección cuatro, en la que llevamos a cabo un ensamblaje de todos los aspectos teóricos presentados en las secciones anteriores con la idea de constituir una articulación sobre la cual será fundamentada: una metodología para la elaboración de material digital para apoyar la enseñanza y aprendizaje de conceptos de un primer curso de álgebra lineal y una metodología para la implementación de estos materiales.

2.1. Sobre los espacios vectoriales de dimensión finita, los valores y los vectores propios.

Cuando estudiamos por primera vez objetos matemáticos como los números, las ecuaciones lineales, los polinomios, las funciones, etcétera, es ciertamente difícil pensar que los conjuntos de números, las ecuaciones lineales, los polinomios, las funciones u otros objetos matemáticos, son bajo ciertas condiciones, elementos de estructuras algebraicas abstractas como la de espacio vectorial. En esta sección damos un resumen de los conceptos de espacio vectorial, valores y vectores propios. Para comenzar, la subsección 2.1.1 presenta la definición axiomática de un espacio vectorial de dimensión finita. En la subsección 2.1.2 abordamos brevemente algunas ideas en torno al concepto de vector, en particular las ideas relacionadas con el vector geométrico y vector puntual. En la subsección 2.1.3 se aborda el tema de combinación lineal, espacio columna y espacio nulo. En la subsección 2.1.4 analizamos brevemente los conceptos de independencia lineal y de dependencia lineal. Y finalmente, en la sección 2.1.5 presentamos un breve resumen de los conceptos de valor y vector propio.

2.1.1. Definición axiomática de espacio vectorial.

De acuerdo con Dorier (1995, p. 246) "En 1888, Peano publicó un texto que resume su lectura sobre el trabajo de Grassman, trabajo intitulado *Calcolo geometrico*. Al final de este tratado, en un pequeño capítulo, él da una definición axiomática de lo que llamó un sistema lineal, la cual es la primera definición axiomática de un espacio vectorial (en su versión moderna)." Sirva esta cita para destacar que el concepto de espacio vectorial es la consecuencia de una larga observación de conjuntos de objetos matemáticos que cumplen o tienen características similares, y su axiomatización fue el resultado final; además, el concepto de espacio vectorial es la suma de varios conceptos en una etapa madura de la matemática, por mencionar algunos tenemos el concepto de combinación lineal o los conceptos de dependencia e independencia lineal, de aquí su dificultad epistemológica.

A continuación los 8 axiomas que conforman la definición axiomática de espacio vectorial tomada del libro *Finite-Dimensional Vector Spaces* de Halmos (1987, pp.3–4) :

Definición I Un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ (el cuerpo de los reales $\mathbb{R}$ o el campo de los complejos $\mathbb{C}$) es un conjunto V de elementos llamados vectores que satisfacen los siguientes axiomas:

A) Sean x, y y z vectores en V. A todo par de vectores x y y le corresponde un vector $x+y$ en V, llamado *suma* de x y y, de tal forma que

   1) $x+y=y+x$, la suma es conmutativa,
   2) $x+(y+z)=(x+y)+z$, la suma es asociativa,
   3) Existe en V un único vector 0 tal que $x+0=x$ para todo vector x,
   4) A todo vector x en V le corresponde un único vector $-x$ tal que $x+(-x)=0$.

B) Para cada par de α (llamado "escalar") y x donde α está en $\mathbb{F}$ y x es un vector de V, hay un correspondiente vector αx en V, llamado el *producto* de α y x, de tal forma que

5) la multiplicación por un escalar es asociativa $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$ con $\beta \in \mathbb{F}$ un escalar,

6) $\exists 1 \in \mathbb{F} \ni \forall x \in V$ se cumple que $1x = x$,

C) Además,

7) la multiplicación escalar es distributiva respecto a la suma de vectores $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$,

8) la multiplicación escalar es distributiva respecto a la suma escalar $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$.

En este trabajo de investigación únicamente se tratan los espacios vectoriales finitos sobre el campo de los reales.

La definición muestra la forma de la estructura algebraica del espacio vectorial sobre la base de dos operaciones, así como por la necesidad de la existencia de dos elementos fundamentales: el neutro aditivo y el opuesto o inverso aditivo. A estos conceptos se suma el concepto de vector, y aunque por definición un vector es un elemento de un espacio vectorial, el concepto existe aún antes de la definición axiomática de espacio vectorial, emergiendo de la física y la geometría (Hoffmann, 1975).

Por esta razón, la siguiente subsección está dedicada a este concepto fundamental.

2.1.2. Sobre el concepto de Vector.

Hoffmann (1975) menciona que: "*A vector is often defined as an entity having both magnitude and direction. But that is not good definition.*" (p. 1).

En un sentido estrictamente matemático, en efecto, la definición a la que se refiere Hoffmann, no es una buena definición, y sin embargo, es una de las definiciones más utilizadas de este concepto en los cursos elementales de física y no es incorrecta pero si reductiva, en el sentido de que un vector es un elemento que pertenece a un espacio vectorial, en consecuencia un vector puede ser cualquier objeto matemático siempre y cuando cumpla con las condiciones que definen a un espacio vectorial.

Así un vector puede ser una $n-tupla$ en $\mathbb{R}^n$, un segmento de recta dirigido en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, un polinomio de grado n, una función, una matriz $m\times n$, etcétera. Madrid, en una conferencia (2010) menciona que hasta una nota de servicio de restorán puede ser un vector. Por esta razón, nosotros pensamos, que una forma de aproximarse a la comprensión del significado del concepto de vector, es necesario representarlo en diversos contextos.

Por ejemplo, si elegimos un segmento de recta dirigido en $\mathbb{R}^2$ entonces tenemos una primera definición de vector o *vector geométrico*, que de acuerdo con Dorier (1995, p. 235) uno de los primeros matemáticos en trazar esta noción fue Möbius alrededor del año 1818.

La noción de vector geométrico nace a partir de considerar la dirección en un segmento de recta, y se les denomina segmentos dirigidos, e. g., dado el segmento entre los puntos A y B es posible construir los vectores $\overline{AB}$ (con dirección de A a B) y $\overline{BA}$ (con dirección de B a A); es claro que sus direcciones son opuestas, así que $AB=-BA$.

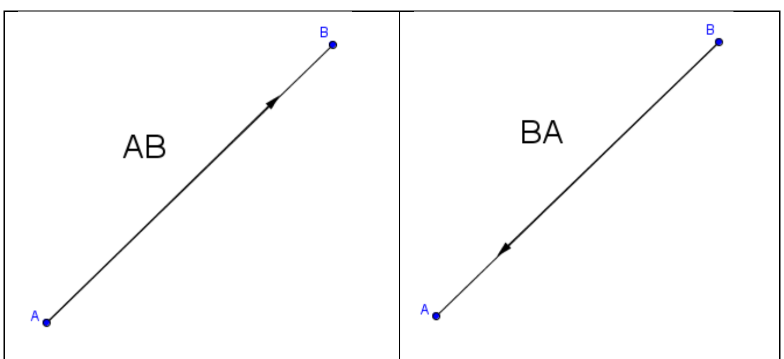


Imagen 2.1.1 Vector geométrico.

Con la introducción de las operaciones como la adición y multiplicación por un escalar se genera un conjunto de objetos matemáticos con las propiedades algebraicas de linealidad; así por ejemplo, la suma de un par de vectores geométricos genera otro vector geométrico de acuerdo con la ley del paralelogramo; la multiplicación por un escalar a un vector geométrico, también produce otro vector geométrico; sin embargo, no todas las operaciones entre vectores son cerradas. Por ejemplo, el producto punto o producto interior entre vectores geométricos ya no produce un vector geométrico. Esta característica juega un papel fundamental en la conformación de una estructura algebraica, a menudo poco explicada en un primer curso tradicional de álgebra lineal.

Otro vector comúnmente utilizado es el vector punto, es decir, la $n-tupla$ o un punto en $\mathbb{R}^n$, representada por $(x_1, x_2, ..., x_n)$. En general, su representación geométrica es un punto, e. g., la $1-tupla$ representada por (x) es un punto en la recta numérica real que representa a $\mathbb{R}$; cada $2-tupla$ representada por (x, y) es un punto en el plano cartesiano que representa a $\mathbb{R}^2$; la $3-tupla$ representada por (x, y, z) es un punto en el espacio de tres dimensiones representado por $\mathbb{R}^3$. De la misma forma que los vectores geométricos, el conjunto de vectores puntuales, satisface las mismas propiedades con las operaciones suma y multiplicación por un escalar.

Tanto el vector geométrico como el vector puntual son elementos de un espacio vectorial. En general, cualquier objeto matemático, elemento de un conjunto que cumpla con cada uno de los axiomas de espacio vectorial será un vector, como por ejemplo, un polinomio de grado *n*.

A continuación trataremos con otro concepto del álgebra lineal que literalmente combina las operaciones de suma y multiplicación por un escalar entre vectores, este concepto es fundamental en dentro de la teoría algebraica de lo lineal, así como transcendental en la teoría de espacios vectoriales. También expondremos de forma breve los conceptos de espacio columna y espacio nulo.

2.1.3. El concepto de combinación lineal, espacio columna y espacio nulo.

Quizá la versión preliminar más conveniente para analizar el concepto de combinación lineal sea a través del estudio de los sistemas de ecuaciones lineales bajo su representación vectorial; este cambio de representación implica un tratamiento diferente, y conlleva a la producción de nuevas ideas matemáticas relacionadas con la linealidad.

Todo sistema de ecuaciones lineales de $m \times n$ (m ecuaciones con n incógnitas) cae en algún de tres casos posibles: (1) solución única; (2) sin solución; e (3) infinidad de soluciones. El cambio de representación del sistema de ecuaciones lineales a su forma vectorial implica un tratamiento diferente, más el propósito esencialmente es el mismo. En los términos de tal representación, resolver un sistema de ecuaciones lineales implica determinar el valor de los escalares que satisfacen la ecuación lineal vectorial.

En este sentido, un sistema de ecuaciones lineales $A\vec{x} = \vec{b}$ $m \times n$ (m ecuaciones con n incógnitas) tiene la siguiente representación vectorial:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Bajo esta representación, el sistema de ecuaciones lineales se convierte en una ecuación vectorial lineal, entonces la ecuación tendrá solución si existen escalares $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que satisfagan dicha ecuación. Aún más, la ecuación vectorial lineal tendrá solución si el vector $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^t$ pertenece al conjunto

$$V_{cl} = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n : \alpha_i \in \mathbb{R}, v_i \in \mathbb{R}^m\}$$

Este conjunto, es un objeto matemático que requiere ser minuciosamente analizado, pero antes de pasar a ello, concluyamos la parte asociada con el sistema de ecuaciones lineales. Como se ha dicho, si $\vec{b} \in V_{cl}$ entonces el sistema de ecuaciones lineales asociado tiene solución o infinitas soluciones. Por otra parte, si $\vec{b} \notin V_{cl}$ entonces el sistema no tiene solución.

A continuación presentamos la versión geométrica de las ideas anteriores a través de los tres sistemas de ecuaciones lineales 2×2 siguientes:

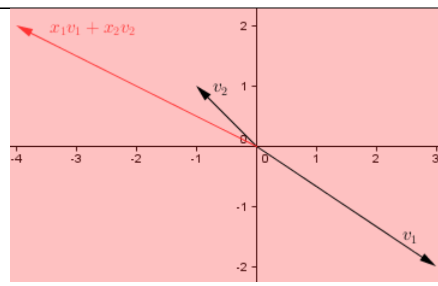
SEL1	SEL2	SEL3

$3x_1 - x_2 = 2$ $-2x_1 + x_2 = -1$	$2x_1 - 3x_2 = 1$ $-4x_1 + 6x_2 = -2$	$2x_1 - 3x_2 = 1$ $-4x_1 + 6x_2 = -1$

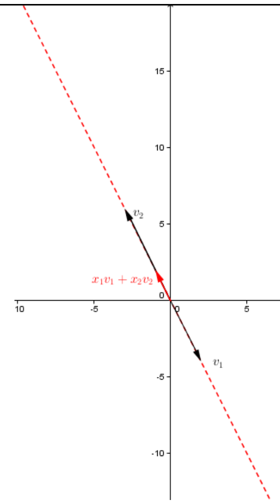
En primer lugar, transformamos cada sistema de ecuaciones lineales a su representación vectorial

SEL1	SEL2	SEL3
$x_1\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$	$x_1\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$	$x_1\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

A continuación se muestra una aproximación gráfica de los conjuntos V_{cl} generados por los lados derechos de cada sistema de ecuaciones lineales y los vectores de coeficientes que generan el conjunto:

<table>
<tr>
<td>$x_1\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$</td>
<td>

El conjunto genera todo $\mathbb{R}^2$</td>
</tr>
</table>

$x_1\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$	 El conjunto genera una recta para los casos de los SEL2 y SEL3

Finalmente, en el caso del SEL1, dado que el conjunto generado por el lado derecho del sistema es todo el plano, el sistema tiene solución con $x_1 = 1$ y $x_2 = 1$. En el caso de SEL2, tenemos infinitas soluciones, pues el vector de términos independientes se encuentra sobre la recta que representa al conjunto generado por el lado derecho del sistema; sin embargo para el caso de SEL3, no hay solución, ya que el vector de términos independientes no pertenece al conjunto generado por el lado derecho del sistema como lo muestra la siguiente gráfica

Ahora bien, el conjunto V_{cl} tiene por elementos vectores de la forma

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

Esta expresión algebraica vectorial lineal, es la combinación de n vectores, bajo dos operaciones: la suma vectorial y la multiplicación escalar, dos operaciones que se definen en un espacio vectorial; además, estás dos operaciones se utilizan para definir la linealidad, por lo tanto, la expresión $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$ es una combinación lineal real de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

En general, la combinación lineal puede ser aplicada a una variedad de objetos matemáticos como las matrices o los polinomios.

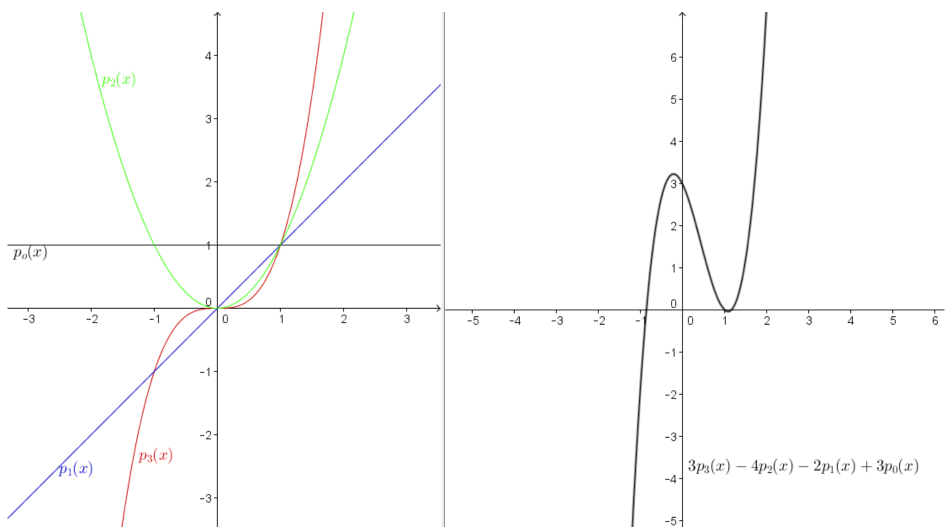
Por ejemplo, el polinomio de grado n

$$p(x)=\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$$

con $\alpha_i\in\mathbb{R}$, es la combinación lineal de los polinomios de la forma $q_i(x)=x^i$ con $i=0,\ldots,n$, tal como se expresa a continuación

$$\alpha_n q_n(x)+\alpha_{n-1}q_{n-1}(x)+\ldots+\alpha_1 q_1(x)+\alpha_0 q_o(x)$$

Está combinación lineal de monomios de la forma x^i es posible visualizarla geométricamente sin dificultad alguna, más aún hoy en día con las posibilidades digitales. Por ejemplo, tomemos $n=3$ entonces cualquier polinomio de grado ≤ 3 es la combinación lineal de $p_3(x)$, $p_2(x)$, $p_1(x)$ y $p_0(x)$, la siguiente imagen muestra la representación geometrica de una combinación lineal de vectores como polinomios



Una vez establecida la combinación lineal, es posible utilizarla en el análisis de los mismos sistemas de ecuaciones lineales. Un sistema de ecuaciones lineales como se dijo al principio de este apartado (ver pág. 38) es la ecuación vectorial

$$x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}+\ldots+x_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

Un vistazo a esta ecuación nos permite concluir que los vectores de la combinación lineal

$$x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}+\ldots+x_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}$$

son las columnas de la matriz A y cada vector columna es a su vez una *m-tupla* que pertenece al espacio $\mathbb{R}^m$. Esto quiere decir que la combinación lineal de estos vectores genera un subconjunto de $\mathbb{R}^m$ y que denominaremos **espacio columna de** A y representaremos por $C(A)$.

Ya habíamos mencionado (ver páginas 38 y 39) que el vector de términos independiente b puede o no pertenecer a $C(A)$, es decir, el sistema $Ax=b$ tendrá solución si y solo si b pertenece al espacio columna de A.

Hasta el momento, el centro de nuestra atención han sido los vectores columna de la matriz A; ahora veamos que acontece con los x_i que satisfacen la ecuación $Ax=0$, para tal objetivo, veámoslo por medio de un ejemplo, tomemos el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix}2 & 5\\6 & 15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

La solución de este sistema es el vector en $\mathbb{R}^2$ de la forma $(-\frac{5}{2}s, s)$ con $s\in\mathbb{R}$.

Geométricamente tenemos una recta en que pasa por el origen, y podemos representarla en forma vectorial como

$$\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\1\end{pmatrix}s$$

Una recta que pasa por el origen es un subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. De hecho, el conjunto solución de sistema de ecuaciones lineales $Ax=0$ es precisamente un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, en algunos casos, este subespacio sólo consta del vector cero cuando el sistema sólo tiene la solución trivial. Lo anterior, es precisamente **el espacio nulo de** A y se denota por $N(A)$.

Hemos visto dos espacios vectoriales estrechamente ligados a los sistemas de ecuaciones lineales y al concepto de combinación lineal. En el siguiente apartado seguimos estudiando el sistema de ecuaciones lineales $Ax=0$, en particular que información nos da el vector x sobre los vectores columna de A; el propósito es introducir los conceptos de dependencia e independencia lineal.

2.1.4. Los conceptos de independencia lineal y dependencia lineal.

Uno de los vectores que consideramos importante, es el denominado vector nulo o cero representado por O; en este contexto, nosotros vemos su importancia en el sentido que el vector nulo bien puede ser la combinación lineal de otros vectores distintos. En esta dirección de ideas, vamos a analizar la ecuación vectorial lineal homogénea

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = O$$

El análisis lo haremos en dos partes; la primera retomando los resultados acerca de los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos, y la segunda parte, una análisis general, a través de un par de hipótesis.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que cada $v_i \in \mathbb{R}^n$ entonces tenemos un sistema de ecuaciones lineales homogéneo $n \times n$. De acuerdo, con la teoría sobre los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos, estos siempre tienen solución, por lo tanto, su solución puede ser la trivial $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (0, 0, \ldots, 0)$ o bien, puede tener infinitas soluciones, en cuyo caso, hay un subconjunto de α_i que dependen de un subconjunto de α_j distintos de cero con $j \neq i$.

Siempre es posible encontrar valores para $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ que satisfagan la igualdad $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (0, 0, \ldots, 0)$, pero cuando la solución no es la trivial, entonces en el conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ existen algunos de ellos que son la combinación lineal de otros, es decir, existe una dependencia en relación con otros vectores, una *dependencia lineal*. En consecuencia, el caso opuesto, en donde no hay dependencia, es decir, cuando $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = (0, 0, ..., 0)$ es la única solución tendremos *independencia lineal* entre los vectores.

De acuerdo con Dorier (1995), esta idea de establecer la independencia lineal entre vectores a través del estudio de sistemas de ecuaciones lineales homogéneos aparece esencialmente en el trabajo de Frobenius en 1875; en el mismo trabajo, aparece la definición actual de independencia lineal.

Definición II Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ en $\mathbb{R}^n$ es linealmente independiente si la ecuación vectorial lineal homogénea:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = O$$

Se satisface únicamente cuando todo $\alpha_i = 0$.

Muchos libros presentan la definición de dependencia lineal en la definición misma de independencia lineal, y aunque su relación es inevitable, son desde nuestro punto de vista dos conceptos distintos, por lo tanto ahora presentamos la definición de dependencia lineal.

Definición III Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ en $\mathbb{R}^n$ es linealmente dependiente si existe al menos un $\alpha_i \neq 0$ tal que la ecuación vectorial lineal homogénea se satisface:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = O$$

Para concluir este apartado, hablaremos brevemente sobre el concepto de cerradura, que desde nuestro punto de vista, es un concepto que sirve para vincular y articular los conceptos de combinación lineal, independencia lineal y dependencia lineal permitiendo así la construcción de una primera versión del concepto de espacio vectorial.

Uno de los conceptos matemáticos que utilizamos desde la matemática de la educación básica hasta la matemática más formal, es la *cerradura*; el caso es, que como regularmente se trabaja sobre el campo de los números reales, y este conjunto es cerrado bajo la suma y multiplicación, es conmutativo y distributivo, existe el inverso aditivo y multiplicativo, etcétera. El concepto de cerradura es olvidado.

Sin embargo, cuando hay que enfrentarse a estructuras algebraicas diferentes, como la de espacio vectorial, el concepto se hace necesario, dado que la condición para que un conjunto de vectores sea un espacio vectorial es que las operaciones entre sus elementos siempre deben producir un elemento del mismo conjunto.

El concepto de cerradura es inherente al concepto de estructura algebraica, y desde nuestro punto de vista se construye junto con la misma estructura algebraica; a continuación damos una definición acorde a nuestras necesidades de conjunto cerrado porque es importante en la construcción del concepto de espacio vectorial.

Definición IV Sea X un conjunto y $\odot$ una operación binaria definida para el conjunto. Se dice que el conjunto X es cerrado bajo la operación $\odot$ si $x \odot y = z \in X$ para todo $x, y \in X$. Un conjunto puede ser cerrado bajo diferentes operaciones binarias.

Los conceptos matemáticos presentados hasta este momento no sólo forman una base para la teoría de los espacios vectoriales, sino también para otros conceptos del álgebra lineal, este es el caso de los denominados valores y vectores propios. A continuación presentamos un breve resumen de la matemática que yace en los conceptos de valor propio y vector propios.

2.1.5. Valores y vectores propios.

Una de las ecuaciones más importantes dentro del álgebra lineal es la que relaciona el producto de una matriz $n \times n$ por un vector de $\mathbb{R}^n$ y el producto del mismo vector por un escalar

$$Ax = \lambda x$$

En esta ecuación, la matriz A es conocida y las incógnitas son el vector x y el escalar λ; el problema es precisamente resolver esta ecuación, encontrar el o los vectores x y el o los valores de λ que satisfagan dicha ecuación. A λ se le conoce como **valor propio** de A y a x **vector propio** de A.

Por otra parte, la ecuación $Ax = \lambda x$ es equivalente a la ecuación

$$Ax = \lambda Ix$$

donde I es la matriz identidad $n \times n$.

Esto nos lleva a la siguiente ecuación

$$(A - \lambda I)x = 0$$

Sabemos que un sistema de ecuación lineales homogéneo tiene (1) solución trivial (por lo tanto, en este caso $x = 0$), o (2) Tiene infinitas soluciones (en este caso $x \neq 0$).

Es el caso 2 sobre el que nos centraremos; en tal caso, la matriz $A - \lambda I$ es singular, por lo tanto su determine es igual a cero

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Al calcular el determinante de $A - \lambda I$ es fácil percatarse que este tiene la forma

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + c_1\lambda + c_0$$

Llamado polinomio característico de A. El siguiente paso es resolver la ecuación polinómica

$$\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + c_1\lambda + c_0 = 0$$

De esto podemos concluir, que existen n valores propios de una matriz A $n \times n$ y cada valor propio nos permite determinar el correspondiente vector propio de A.

Los valores y vectores propios no solo son un tema importante dentro del álgebra lineal, también tienen importancia en otras áreas de la ciencia, por ejemplo la física. A continuación presentamos los elementos teóricos acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que hemos seleccionado de acuerdo a los propósitos de este trabajo de investigación.

2.2. Aspectos teóricos sobre la didáctica de las matemáticas.

La didáctica de las matemáticas ha tenido un desarrollado considerable en las últimas tres décadas. Diversas teorías sobre la psicología del aprendizaje de las matemáticas han surgido para explicar distintos fenómenos, así como propuestas de enseñanza de las matemáticas justificadas en tales teorías. Por ejemplo, el caso de la propuesta de los tres mundos en matemáticas (Tall, 2004) que se desarrolla a partir del descubrimiento de un fenómeno particular:

> *"We were also intrigued by the way in which experiences in elementary mathematics were re-conceptualised from concepts that necessarily had properties, to the formalism of advanced mathematics where specified properties are stated first as axioms and definitions, then other properties are deduced by formal proof.[Intrigados por la manera en las que las experiencias en las matemáticas elementales fueron re-conceptualizadas desde los conceptos que necesariamente tenían propiedades, al formalismo de las matemáticas avanzadas donde propiedades especificas son primero expresadas como axiomas y definiciones, entonces otras propiedades son deducidas por pruebas formales.]"*(p. 29)

Este apartado precisamente tiene el propósito de exponer las propuestas teóricas y didácticas que desde nuestro punto de vista son las más convenientes para cumplir los objetivos de este trabajo de investigación.

Por este motivo, dado que nuestro trabajo de investigación está relacionado con la enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático que por lo general se estudia en el nivel superior o universitario, requerimos de una propuesta didáctica, de una ingeniería didáctica (Artigue, 1996) y dado que nuestros planteamientos son muy específicos, requerimos de una ingeniería didáctica cuyo sustento teórico contemple la construcción de los conceptos matemáticos partiendo de situaciones reales, y transitando por diferentes representaciones como la algebraica y la geométrica. Tal propuesta didáctica la encontramos en la que sus autores denominan *Proyecto de Acción Practica* (Cuevas y Pluvinage, 2003) y será revisada en la sección 2.2.2. Esta propuesta es una combinación de ideas de diferentes marcos teóricos como la teoría de Jean Piaget y la teoría de los registros de representación semiótica de Duval (1995), esta será expuesta en la sección que precede.

2.2.1. Los registros de representación semiótica en la matemática.

En 1801, Carl Friedrich Gauss a través de su libro intitulado "*Disquisitiones Arithmeticae*" introdujo lo que hoy conocemos como Aritmética Modular; es de llamar la atención, como Gauss también introduce símbolos para representar una idea matemática, es el caso de la congruencia entre números enteros bajo cierto módulo, que representa con el símbolo "$\equiv$". Así, dados los enteros a, b y c representamos la idea matemática de que b es residuo de a bajo el módulo c por $a \equiv b(\mathrm{mod}\, c)$. A partir de esta definición, Gauss establece ciertas reglas y propiedades, para continuar con un proceso de construcción de nuevas ideas y conceptos, a través tanto de ideas previas como de la manipulación de sus respectivas representaciones, y claro está, de la lógica matemática inherente.

En general, esta es la forma que tiene el trabajo en matemáticas, donde el uso de un sistema de signos y símbolos con reglas establecidas es esencial, es decir, en matemáticas es fundamental el uso de sistemas semióticos para representar sus conceptos e ideas. Y como bien señala Duval (1995), hay una relación entre el desarrollo de sistemas semióticos y los progresos en el conocimiento:

> "*D'une façon plus globale, on peut constater que le progrès des connaissances s'accompagne toujours de la création et du développement de systèmes sémiotiques nouveaux et spécifiques qui coexistent plus ou moins avec le premier d'entre eux, celui de la langue naturelle.[De forma más global, podemos confirmar que el progreso de los conocimientos se acompañó siempre de la creación y del desarrollo de sistemas semióticos*

> *nuevos y específicos que coexistieron más o menos con el primero de entre ellos, la lengua natural.]"* (p. 3).

Este fenómeno es transparente en la matemática, se puede encontrar en su historia, en su desarrollo y evidentemente en su estado actual, en cada una de las áreas que la conforman: aritmética, geometría, algebra, cálculo, etcétera, que como el mismo Duval (1995) lo menciona:

> *"Les Mathématiques sont le domaine où ce phénomène est le plus ancien, le plus spectaculaire et, puet-être aussi, le plus indispensable. [Las matemáticas son el dominio donde este fenómeno es el más antiguo, el más espectacular y, quizá también, el más indispensable.]"* (p. 4).

Esta afirmación también despierta la inquietud científica por saber qué relación hay entre la representación semiótica de un concepto matemático y el aprendizaje del mismo, en este sentido, nos interesa saber: (1) ¿Cuáles son las características esenciales de los registros de representación semiótica? Y (2) ¿Qué relación guardan con el aprendizaje de las matemáticas?

En primer lugar, está a la vista que en matemáticas coexisten varios sistemas de representación semiótica, es decir, sistemas de signos y símbolos con sus reglas y operaciones de interacción bien definidas, como en el ejemplo de congruencia. En cada sistema de representación semiótica, se puede llevar a cabo el tratamiento de cierto tipo de información; esto implica que la información que se recibe será transformada en una representación dentro del sistema semiótico que se elija, y en él se llevará a cabo una manipulación de su representación a través de sus reglas y operaciones, Duval (1995) se refiere a esta actividad cognitiva como *Traitement [tratamiento]* (p. 16).

El tratamiento de una representación semiótica ciertamente tiene un efecto sobre el pensamiento del individuo. Desde pequeños vamos registrando imágenes y sensaciones del exterior convirtiéndolas en representaciones mentales, que con el tiempo y a través del tratamiento de uno o varios sistemas semióticos vamos exteriorizando como representaciones semióticas, esta es otra actividad cognitiva que

Duval (1995) detecta y se refiere a ella como *représentation mentale* [representación mental](p. 15).

Ahora bien, como dijimos, en matemáticas coexisten varios sistemas de representación semiótica, esto nos permite representar un mismo objeto matemático en diferentes sistemas de representación semiótica, por ejemplo, un vector en $\mathbb{R}^2$ puede representarse a través de un par ordenado (x, y), o como un segmento de recta dirigido en el plano cartesiano. Notemos que cuando un objeto matemático, como en el caso del vector en $\mathbb{R}^2$, tiene la posibilidad de ser representado a través de distintos sistemas semióticos, entonces ha de existir una relación entre ellos, reglas de asociación que permiten esta transformación de representaciones de un mismo objeto, a esta actividad cognitiva Duval le llama *conversion* (p.36).

Estas tres actividades cognitivas no son propias a todas los sistemas semióticos (Duval, 1995):

> "*Tous les systèmes sémiotiques ne permettent pas ces trois activités cognitives fondamentales, par example le morse ou le code de la route. Mais le langage naturel, les langues symboliques, les graphes, les figure géométrique, etc. les permettent. Nous parlerons alors de **registres de représentation sémiotique**.* [No todos los sistemas semióticos permiten estás tres actividades cognitivas, por ejemplo, el código morse o el código carretero. Pero el lenguaje natural, las lenguas simbólicas, las gráficas, las figuras geométricas, etc. las permiten. Nosotros hablaremos entonces de **registros de representación semiótica**.]" (p. 21).

De esta forma, todo aquel sistema semiótico de representación que cumpla con estas tres actividades cognitivas fundamentales es por lo tanto un registro de representación semiótica.

Los registros de representación semiótica no pueden desligarse del desarrollo de conocimiento, incluso, contar con un registro de representación semiótica "incompleto" puede evitar el desarrollo del conocimiento. Finalmente, el desarrollo del conocimiento es proporcional a la construcción de los registros de representación semiótica (Duval, 1995): *"… il n'y a pas de connaissance qui ne puisse être mobilisée par un sujet sans activité de représentation."*(p. 15)

Entonces, el aprendizaje de las matemáticas se encuentra relacionado con la construcción de registros de representación semiótica, en consecuencia con el desarrollo de sus tres actividades cognitivas fundamentales: representaciones mentales, tratamiento y coordinación. En este sentido, una representación mental se construye, se forma a través del tratamiento de las ideas, información e incluso objetos en un registro de representación, produciéndose una transformación dentro del registro bajo ciertas reglas de conformidad (Duval, 1995): *règles de conformité* (p. 37).

La existencia de varios registros de representación semiótica en matemáticas nos da la posibilidad de llevar a cabo tratamientos de un mismo objeto en distintos registros, enriqueciendo la comprensión del concepto, pues cada registro ofrece o pone en evidencia diferentes características del objeto matemático. A continuación presentamos una ingeniería didáctica que toma en cuenta varias de las ideas hasta ahora expuestas.

2.2.2. Una ingeniería didáctica: proyecto de acción práctica.

De acuerdo con Artigue (1996, p. 246) en esencia la ingeniería didáctica es una forma de trabajo didáctico, comparable al trabajo que realiza un ingeniero para llevar a cabo un proyecto específico, a través del uso del conocimiento científico, de su dominio y de las herramientas necesarias. En este sentido, una propuesta didáctica para la enseñanza y/o aprendizaje de las matemáticas puede ser denominada una ingeniería didáctica, sin embargo, debe cumplir otros elementos, como su reproducibilidad.

Cuevas y Pluvinage (2003) han diseñado una ingeniería didáctica específica, una que se dirige a la construcción de conceptos matemáticos pre-universitarios y universitarios, es reproducible y se basa en diversos elementos teóricos de la teoría piagetana como las operaciones concretas y la reversibilidad; también retoma algunos elementos de la teoría de los registros de representación de Duval, como la necesidad del tratamiento de un concepto en por lo menos dos o tres registros de representación diferentes y fomentar la respectiva articulación entre los distintos registros y en Brousseau con elementos de su propuesta didáctica.

A continuación presentamos los nueve puntos que conforman a dicha ingeniería didáctica, cuyos autores han denominado *proyecto de acción práctica*:

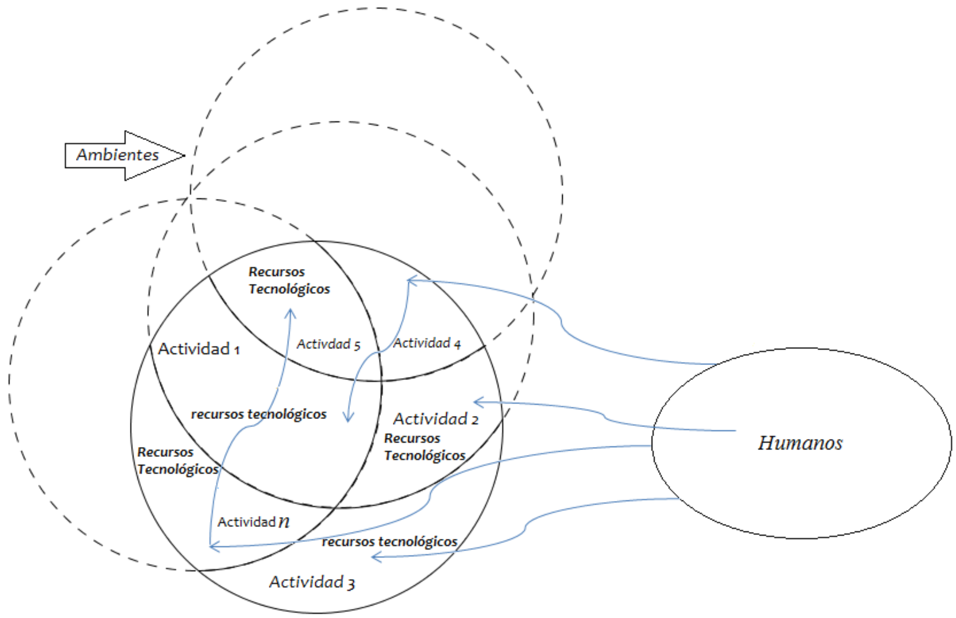
1. Inducir constantemente a los alumnos a resolver o intentar resolver problemas. Es esencial que el alumno este siempre efectuando una acción. Es en efecto él mismo quien, por medio de la resolución de problemas específicos gradualmente dosificados, construye y llega los conceptos deseados.
2. Para cada introducción de un concepto o de una noción matemática, partir de un problema general que se sitúe en un contexto susceptible de presentar interés por el alumno. Proponer ejercicios que generen problemas o sub-problemas cuya solución, bajo una forma estructurada y coordinada, llegue a expresar o designar el concepto matemático deseado.
3. Inducir al estudiante, una vez resuelto el problema planteado, a validar sus resultados, verificando que ellos tengan un sentido lógico y estén de acuerdo con el problema.
4. Cuando se trate de enseñar cierto tema o concepto matemático complejo, por medio de la resolución de un problema establecido, descomponer o dividir el problema en sub-problemas que representen las operaciones parciales constitutivas; anotando todas las operaciones y/o conceptos que resulten de este análisis y que son necesarias para que el estudiante resuelva el problema inicial. Generar así, un plan de acción, el cual, por medio de ejercicios gradualmente dosificados, lleve de manera coordinada y coherente a conseguir el objetivo.
5. Cada vez que se realicen operaciones que nos lleven a conceptos matemáticos, emplear en la medida de lo posible la operación inversa.
6. Cuando una forma o un método de resolución del problema es mostrado, intentar dar una forma de solución alternativa. En ningún caso imponer una forma de solución.

7. Construir problemas donde el concepto recientemente adquirido sea un elemento de análisis para un tema más avanzado o complejo, o construir problemas que requieren el concepto fuera del contexto didáctico en el que fue enseñado. Eso significa pensar en problemas donde el concepto enseñado forme parte de la estructura con la que el alumno debe analizar y resolver la cuestión planteada.
8. Cada vez que un concepto matemático se presente en cierto registro de representación semiótica, trabajar (si el concepto lo permite) en otros registros de representación apropiados.
9. Si un concepto matemático está presente en más de un registro de representación semiótica, instrumentar operaciones directas e inversas que favorezcan la articulación (la transferencia) entre los diferentes registros.

Para nuestros propósitos, estos puntos que resumen la propuesta didáctica para enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos, pueden ser combinados con la propuesta teórica de la génesis instrumental (Trouche, 2005) conformando así una ingeniería didáctica con más elementos y afín a nuestros requerimientos. Esta unión se expondrá más adelante, dado que es necesario exponer primeramente los elementos de la teoría de la génesis instrumental, pues nuestro propósito es explotar las tecnologías digitales y conformar un ambiente de aprendizaje mediado por la tecnología digital. Estas ideas se expondrán en la siguiente sección.

2.3. La tecnología en el aprendizaje de las matemáticas.

La dinámica de la vida del humano transcurre entre ambientes dotados por diferentes recursos, estos pueden ser los dados por la propia naturaleza, o como en la mayoría de los casos, son creados conforme a las necesidades de la actividad. Así por ejemplo, en un ambiente escolar tenemos que el pizarrón es un recurso tecnológico utilizado para apoyar al profesor en la enseñanza de un conocimiento. Prácticamente, por cada ambiente existen distintas actividades con sus respectivos recursos, por lo que, el desarrollo de una actividad en cierto ambiente por parte de un humano depende del dominio de uso de los recursos tecnológicos.



Representación de la relación entre los humanos y los ambientes, las actividades, y los recursos tecnológicos.

De acuerdo con esta visión, la relación entre los recursos y los humanos se da en tres distintos niveles asociados con el status del dominio de uso del recurso por el usuario-humano (Touche, 2005, p. 93):

> *"… **artefact** désignera **un objet technique nu,** indépendamment de toute relation avec un usager (un artefact peut être une calculatrice, une notation, un compas ou un panier) ;*
>
> *… **outil** désignera **un objet technique intégré,** ou **susceptible d'être intégré** par un usager dans ses gestes (scolaires, professionnels ou quotidiens) ;*
>
> *… **instrument** désignera **une entité mixte composée de l'objet technique et de modes d'utilisations** construits par un usager.*

Bajo estos términos, todo recurso es un *artefacto*, transformándose en *herramienta* a partir del momento en que se concibe su simple uso. En este orden, la herramienta será transformada en un instrumento bajo cierto proceso de construcción de varios y diferentes modos de utilización.

Es precisamente este proceso de transformación del artefacto en instrumento el que nos interesa, por lo que en esta sección presentamos un par de perspectivas teóricas que estudian y describen este fenómeno en un ambiente educativo bajo dos actividades particulares, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La subsección 2.3.1 aborda el caso de génesis instrumental en los individuos, es decir, ese proceso de transformación que sufre un artefacto para convertirse en instrumento. La subsección 2.3.2 introduce la génesis documental, que se encuentra asociada al proceso de transformación que sufren los recursos para convertirse en documentos como parte de la actividad misma de los profesores de matemáticas.

2.3.1. Génesis instrumental.

No está por demás retomar la idea inicial bajo una interpretación similar: los humanos necesitamos de herramientas para nuestro desarrollo y actividad diaria. Una escalera, un taladro o un cuchillo son herramientas, así como nuestras manos y pies también lo son; el lenguaje, ya sea escrito o hablado son herramientas. Una cuestión interesante en diferentes áreas de ciencia, es cómo el humano aprende a usar estás herramientas, hasta el punto en que se convierten en un órgano más de nuestro complejo cuerpo. Desde pequeños, en el ambiente escolar y familiar se nos enseña a utilizar herramientas, en ocasiones lo hacemos por descubrimiento, pero es bajo el uso continuo, que el artefacto llega a integrarse al individuo, convirtiéndose así en un instrumento (constructo psicológico); el lenguaje por ejemplo es un artefacto sumamente complejo útil para la comunicación, pero primero es necesario aprenderlo, asimilarlo y utilizarlo, hasta que llega a convertirse en un instrumento utilizado en múltiples actividades, como lo señala Trouche (2004):

> *"…an instrument can be considered as an extension of the body, a functional organ made up of an artifact component (an artifact, or the part of an artifact mobilized in the activity) and psychological component.[… un instrument puede ser considerado como una extension del cuerpo humano, un organo functional hecho de un component artefacto (un*

artefaco, o la parte de un artefacto movilizado en la actividad) y una componente psicológica.]" (p.285)

Con la transformación del artefacto en instrumento (proceso general llamado génesis instrumentación), dos procesos particulares tienen lugar: la instrumentación y la instrumentalización. Valga la siguiente analogía para explicarlo, aunque hay que resaltar que entre tales procesos existe una dialéctica: una vez instrumentado el lenguaje, el individuo procederá a utilizar el lenguaje, no solo para comunicar simples ideas, sino para explicar pensamientos más complejos, al grado de enriquecer el lenguaje creando nuevos términos con sus respectivas definiciones y usos, hará con el instrumento actividades que ni siquiera imaginamos, este proceso, en el que el individuo utiliza el instrumento para actividades para las que no fue, en esencia, creado, se denomina instrumentalización. De este modo, la génesis instrumental es el proceso mediante el cual un artefacto se transforma en instrumento, conformándose en el individuo esquemas cognitivos de la herramienta que vienen y se desarrollan por el uso dado a tal herramienta. Los esquemas construidos son tanto individuales como sociales.

En contexto de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas por medio del uso de alguna herramienta computacional, acontecen estos mismos procesos, sin embargo, dado que se requiere la construcción de conceptos matemáticos, la instrumentación e instrumentalización requieren de cierta dirección, de enfoques y trayectorias didácticas que lleven ambos procesos a la comprensión de los conceptos matemáticos; a esta interacción se le llama Orquestación Instrumental (Trouche, 2006, pp.296 - 304).

Los ambientes de aprendizaje computarizados requieren de una orquestación instrumental, de papeles bien definidos para los alumnos, profesor e artefacto (computadora, calculadora, etcétera). Claramente la instrumentación depende de las virtudes y defectos del artefacto, del contenido matemático, del profesor y de la didáctica. La instrumentalización depende del alumno y de la visión del profesor para generar este proceso. En resumen, se necesita diseñar una orquestación instrumental por herramienta y contenido matemático:

> *"An instrumental orchestration is defined by didactic configurations (i.e., the layout of the artifacts available in the environment, with one layout for each stage of the mathematical treatment) and by exploitation modes of this configurations."* (p. 296).

Como se ha mencionado en el capítulo 1, la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal tiene sus dificultades inherentes. Por otra parte, en la actualidad el álgebra lineal es muy aplicada (e. g., en el sistema de posicionamiento global), por lo que creemos que a través de una transposición didáctica adecuada, estás aplicaciones se pueden convertir en actividades didácticas que permitan la construcción del concepto de Espacio Vectorial. En el estudio de las aplicaciones del álgebra lineal, nos hemos encontrado que trabajan con mucha información numérica, por lo que la necesidad de un software es evidente, ya sea construido para un propósito educativo o bien de propósito general pero de matemáticas. En este sentido, el constructo teórico de la génesis instrumental viene a bien a nuestro trabajo, así como la idea de orquestación instrumental.

2.3.2. Génesis documental.

Actualmente, la cantidad de recursos digitales (software o la internet) y no digitales (e. g., un libro impreso es un recurso no digital) que existen es inmensa. Por lo que parece razonable cuestionarnos sobre cómo afecta al ambiente educativo toda esta diversidad de recursos; en específico a la actividad de los profesores de matemáticas.

Gueudet y Trouche (2009) llevaron a cabo un estudio sobre este fenómeno, consolidando así una nueva perspectiva teórica: *la génesis documental*.

Basados en las ideas y componentes teóricas de la génesis instrumental (Trouche, 2004), así como en el análisis del fenómeno didáctico acontecido con 9 profesores de matemáticas en la educación secundaria francesa en su actividad docente, particularmente de su evolución profesional a partir de la observación sobre el efecto que producen los recursos:

> *"We want to introduce here a general perspective for the study of teachers' professional evolution where the researcher's attention is*

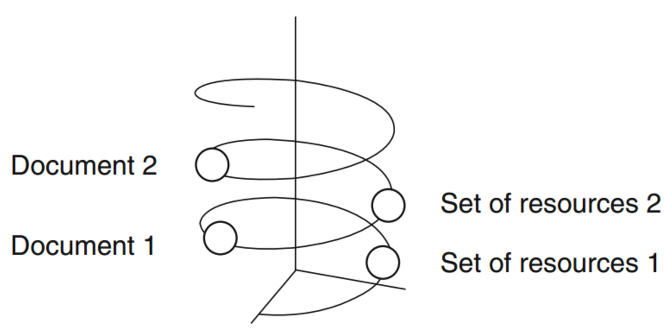
focused on the resources, their appropriation and transformation by the teacher or by a group of teaching working together." (p.199, 200)

En primer lugar definen un documento en términos de los esquemas de utilización del conjunto de recursos, en este sentido, un documento es el resultado final de un proceso de construcciones de esquemas de utilización sobre el recurso.

El proceso por el cual un conjunto de recursos llega a ser un documento es denominado génesis documental. Dado que un recurso es finalmente un artefacto, entonces la interacción entre los recursos y el profesor es mediada por un proceso tanto de instrumentación como de instrumentalización; ambas dimensiones del proceso resultan en la conversión del conjunto de recursos en un documento. Es decir, el profesor ha construido esquemas de utilización del recurso (instrumentación) y ha desarrollado, movido por sus objetivos, usos específicos de los recursos para su propia actividad docente o personal (instrumentalización).

Ahora bien, dado que la actividad docente atraviesa regularmente por una variedad de situaciones no planteadas, uno de sus efectos podría ser la unión de uno o varios recursos al conjunto de recursos previo o bien la modificación del documento, convirtiéndose así en un nuevo recurso que será transformado bajo la génesis documental en un nuevo documento; de acuerdo con Gueudet y Trouche (2009) este proceso es continuo, finalmente generado por la dialéctica entre recurso y documento.

Vale la pena retomar el esquema proponen para representar el proceso de documentación (p. 206) y que muestra la continuidad del proceso:



Es importante también el papel que juegan dentro del proceso de documentación las componentes: material, contenido matemático y didáctica. Evidentemente, estas tres componentes dan sentido a la documentación, de ahí que, cada componente, material (computadora, *usb*, papel, etc.), matemática (nociones, tareas matemáticas y técnicas, etc.), y didáctica (elementos de organización, etc.), generan un esquema de utilización sobre los recursos; de esta forma por cada recurso se forma un esquema de utilización.

De acuerdo con los autores, en un esquema de utilización existen aspectos observables y aspectos invisibles, estos últimos aspectos son las operaciones invariantes. Los aspectos observables: *corresponds to the regularities in the teacher's action for the same class of situations through different contexts* (p. 208). Los autores llaman a estos aspectos observables: *usos "usage" (p.208)*. Los usos son conductas estables y organizadas de la actividad que un profesor tiene con y sobre el recurso; de esta forma los autores llegan a una última igualdad:

$$Documento = \mathrm{Re}\,curso + Usos + Operacione\ In\,\mathrm{var}\,iantes$$

Una par de preguntas naturales sobre los usos de un recurso son: cómo localizarlos y qué elementos los conforman. Los autores manifiestan, que son las reglas de acción las que permiten localizar los usos y son estas las que finalmente conforman a los usos, inclusive permiten determinar operaciones invariantes.

Finalmente, la génesis documental produce cambios en el profesor, a este cambio veámosle como evolución; prácticamente está evolución, de acuerdo con Gueudet y Trouche (2009) se debe a la relación dialéctica entre lo productivo y lo constructivo. La producción de documentos implica un proceso de construcción, los cambios o transformaciones también, de aquí que la relación dialéctica entre productivo y constructivo genere una evolución de la misma práctica profesional del maestro.

La génesis documental y la génesis instrumental son dos marcos que pueden implementarse en la elaboración de material didáctico digital de matemáticas. Este material didáctico finalmente terminará por ser un recurso que bajo una cuidadosa instrumentación y una adecuada instrumentalización puede llegar a ser un instrumento potencial para mejorar el aprendizaje de las matemáticas, así como un documento que apoye de manera potencial la actividad profesional del docente.

2.4. Un modelo didáctico para el aprendizaje de las matemáticas universitarias.

Esta es la última sección del capítulo, y tiene como principal propósito tratar de articular la ingeniería didáctica de Cuevas y Pluvinage (2003) y la teoría de la génesis instrumental, expuestas en las secciones anteriores. Su dimensión psicológica y didáctica cubre el aprendizaje de las matemáticas pre-universitarias y universitarias. Y nuestro principal argumento para que sea posible una articulación entre tales teorías se debe principalmente a que todas parten de los fundamentos teóricos del desarrollo de la inteligencia piagetiana.

También existen consideraciones comunes en las dos teorías en torno a la visión de construcción del conocimiento. Y esta visión queda, desde nuestro punto de vista ampliada a través de la teoría de la génesis instrumental de Trouche (2004 y 2005), dado que ésta introduce no sólo la construcción de conocimiento como una actividad individual sino también como una actividad social, mediada por el trabajo colaborativo.

Concluimos la sección con la propuesta de un modelo didáctico para la elaboración de material o herramientas de aprendizaje, que forma parte de una secuencia de aprendizaje basada en la propuesta de la ingeniería didáctica de Cuevas y Pluvinage (2003).

2.4.1. Articulación de la didáctica Cuevas & Pluvinage con la génesis instrumental.

De acuerdo con la teoría de la génesis instrumental, una herramienta se convierte en un instrumento a través de un proceso complejo llamado: génesis instrumental. Que de acuerdo con Trouche (2004, p.289) un instrumento es una entidad conformada por una componente dada y una componente psicológica: esquemas. Los esquemas tienen aspectos individuales como aspectos sociales, además, existen dos niveles de esquemas, los esquemas de uso y los esquemas de acción instrumentada.

Para nosotros, cada representación en matemáticas puede tener asociado un conjunto de herramientas, incluso pueden compartir esquemas de uso. Sin embargo, en cada representación se conforman esquemas de acción instrumentada de formas diferentes, y desde nuestro punto de vista, la construcción de este tipo de esquemas está asociada a la actividad de construir un concepto matemático.

El esquema de acción instrumentada termina asociado al esquema mental formado para el concepto matemático. Nosotros proponemos una articulación como se propone en la siguiente tabla, en donde un concepto matemático es construido en cierto registro de representación por medio de acciones específicas del individuo bajo la instrumentación de herramientas:

Registro de representación geométrico	Acciones	**Individuos**
Herramientas	-> Instrumentación ->	
Registro de representación algebraico	Acciones	
Herramientas	-> Instrumentación ->	
Registro de representación formal	Acciones	
Herramientas	-> Instrumentación ->	

Propuesta A. Registro de representación y la génesis instrumental.

Para que la génesis instrumental se complete, es necesario considerar los dos procesos que la conforman, la instrumentación y la instrumentalización. Para nosotros, la instrumentación de una herramienta en cada representación es orquestada por medio de la didáctica Cuevas y Pluvinage en torno al concepto matemático de interés, sin embargo el proceso de instrumentalización, como dice Trouche (2004) no se puede distinguir fácilmente, quizá por ser un proceso inverso al de instrumentación. Nosotros

creemos se puede impulsar la instrumentalización a través de tareas semi-abiertas, es decir, problemas cercanos a la realidad (ficción realista).
Por lo que la articulación total de las dos teorías se alcanza con la inclusión de las ideas de la propuesta de Cuevas y Pluvinage (2003).

2.4.2. Esquema final de articulación.

La propuesta de Cuevas y Pluvinage se basa en tres ideas centrales:

1) La acción debe corresponder al estudiante.
2) Promover procesos intelectuales tanto directos como inversos.
3) Usar diversos registros de representación semiótica.

Para mantener activos a los estudiantes, los autores proponen la resolución de problemáticas atractivas y cercanas a la realidad y que permitan el desarrollo del concepto deseado. Actualmente circula en el medio el término **Ficción Realista** para denotar aquellos problemas que plantean una situación cercana a la realidad y son utilizados para la enseñanza de algún concepto matemático. De esta manera, la articulación entre las teorías se alcanza a través de la inclusión de ficciones realistas a nuestro esquema B, quedando así:

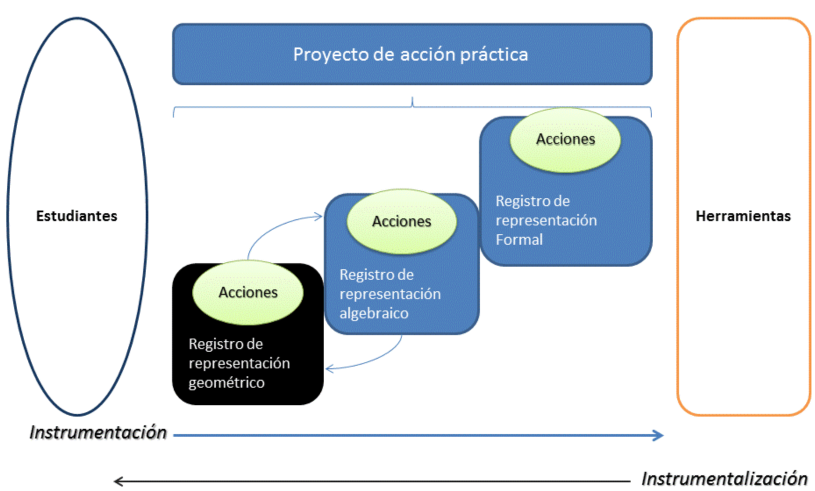
<table>
<tr><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td>Registro de representación geométrico</td><td>Acciones</td><td rowspan="6">Individuos</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Herramientas</td><td>-> Instrumentación -></td></tr>
<tr><td><- Instrumentalización <-</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Registro de representación algebraico</td><td>Acciones</td></tr>
</table>

Herramientas	-> Instrumentación ->	
	<- Instrumentalización <-	
Registro de representación formal	Acciones	
Herramientas	-> Instrumentación ->	
	<- Instrumentalización <-	

Propuesta B. Articulación Cuevas & Pluvinage y la génesis instrumental.

Finalmente, la propuesta B, es desde nuestro punto de vista, la base para la elaboración de recursos digitales didácticos para apoyar y mejorar la comprensión de un concepto matemático pre-universitario o universitario; también es la base de una secuencia de aprendizaje.

Una manera alternativa de representar la propuesta B es através del siguiente esquema:



Representación final de la propuesta B.

En esta representación se puede observar el proceso de la génesis instrumental, mediado por la visión didáctica basada en un proyecto de acción práctica pasando por diferentes registros de representación donde le individuo realiza diferentes acciones.

Damos por concluido este capítulo para dar pie a la presentación de una metodología para el diseño de materiales didácticos para apoyar la enseñanza y el aprendizaje de conceptos asociados a un primer curso de álgebra lineal y su respectiva orquestación instrumental.

Capítulo 3. Elementos metodológicos: recursos didácticos y orquestación instrumental.

A través de este capítulo se establecen los elementos metodológicos que dirigen dos actividades fundamentales de esta investigación: 1) la elaboración de recursos didácticos-digitales para la enseñanza de algunos conceptos inherentes a un primer curso de álgebra lineal en un entorno de aprendizaje digital y 2) la orquestación de la puesta en práctica de los recursos didácticos. En este sentido, el primero de los apartados de este capítulo versa sobre la metodología que utilizaremos para diseñar y elaborar recursos didácticos, la cual se basa en los elementos didácticos introducidos en el capítulo anterior. La segunda sección, muestra la aplicación de esta metodología por medio de dos ejemplos para apoyar la enseñanza y promover el aprendizaje de los conceptos: resolución y significado de sistemas de ecuaciones lineales, combinación lineal, valores y vectores propios en ambientes dotados con tecnologías digitales.
La tercera sección pone en práctica el concepto de orquestación instrumental en la enseñanza de las matemáticas (Trouche, 2004) exponiendo un diseño particular de una orquestación instrumental para poner en movimiento los recursos didácticos digitales elaborados para la construcción de conceptos de un primer curso de álgebra lineal.

3.1. Metodología para el diseño de recursos didácticos.

Como hemos expuesto en el primer capítulo, el álgebra lineal es uno de los contenidos matemáticos integrados a los planes de estudio de diferentes formaciones universitarias de México, aunque en otros países como Francia acontece algo equivalente. Ahora bien, si pensamos en los individuos que reciben este tipo de educación, la mayoría ha superado la adolescencia, por lo tanto, el proceso de aprendizaje tiene características particulares como lo señalan Dubinsky y McDonald

(2002). En este sentido, la enseñanza de las matemáticas en este nivel educativo necesita de elementos que promuevan un aprendizaje significativo, más cercano a las necesidades y la realidad de la profesión, no tanto por imitación como la enseñanza tradicional promueve (Cuevas y Pluvinage, 2003, p. 274), sino más activa, donde el estudiante enfrentándose a situaciones didácticas se convenza por sí mismo de los hechos, como mencionan Cuevas y Pluvinage (2003) : "…es indispensable la participación del estudiante, dicho de otra forma, en su implicación en tanto que son ellos los actores en el proceso de aprendizaje." (p. 275). La metodología que a continuación expondremos, toma en consideración esta situación como una condición necesaria en su edificación.

Aunado a esto, también hay que considerar que el álgebra lineal es un conocimiento matemático complejo, epistemológicamente difícil (Sierpiska, 2000), por su generalidad y formalismo (Dorier, 1998); esta condición también tiene implicaciones en la metodología que proponemos, pues ésta requiere de establecer una forma, a considerar, adecuada para construir los conceptos , que al tomar en cuenta la didáctica de Cuevas y Pluvinage (2013) que representaremos en adelante como PAP por Proyecto de Acción Práctica, es necesario construir los conceptos por medio de la resolución de problemas en diferentes niveles interrelacionados. Además de utilizar la representación geométrica hasta donde sea posible y algebraica.

Además de las dos condicionantes anteriores, existe una tercera: el uso de herramientas para mediar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En este caso, el uso de herramientas digitales que promuevan el aprendizaje de los conceptos básicos del álgebra lineal. Así, nuestra metodología también se ve impregnada de varios elementos tomados de la aproximación instrumental (AI) que propone Trouche (2004).

El propósito de esta metodología se centra en establecer un método que nos permita producir recursos didácticos para apoyar la enseñanza del álgebra lineal bajo las tres condiciones planteadas anteriormente. A continuación, exponemos a detalle los planteamientos metodológicos.

3.1.1. Una metodología de acción práctica colaborativa con herramientas digitales PAP-AI.

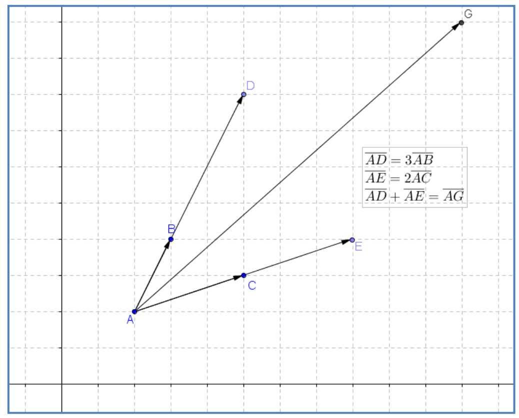
De acuerdo con nuestra interpretación sobre la teoría de los registros de representación semiótica, un concepto matemático alcanza una mejor aprehensión si se trabaja en más de un registro de representación y se suscita su conversión. Y como lo señala la PAP de Cuevas y Pluvinage (2003) en uno de sus elementos: "Cada vez que un concepto matemático se presente en un cierto registro, trabajarlo (si el concepto lo permite) en otros registros apropiados." (p. 280)

En nuestro caso, desde el capítulo anterior hemos elegido tres registros de representación posibles: la representación geométrica con sus restricciones, la representación algebraica y la representación formal. Si bien no hay una trayectoria única entre estos tres registros de representación, es decir, conversiones de un registro a otro, comenzaremos por exponer la trayectoria que nosotros hemos elegido entre los registros de representación mencionados, y posteriormente se abordará el caso de la trayectoria a seguir dentro de cada registro de representación.

Respecto a las posibles conversiones, hay que tomar conciencia de algo más: la representación formal de la matemática, en el caso de un primer curso de álgebra lineal, no es recomendable como punto de partida de una trayectoria entre los registros de representación, sobre todo en nuestro caso, pues bien se ha puntualizado en el primer capítulo de esta tesis, el obstáculo epistemológico generado por el formalismo, estudiado profundamente por Dorier (1998). Por lo tanto, proponemos como trayectoria para la introducción de los conceptos básicos del álgebra lineal, la que parte del registro de representación geométrico y va al registro de representación algebraico, o viceversa; cuyo punto final en cualquier caso, será el registro de representación formal.

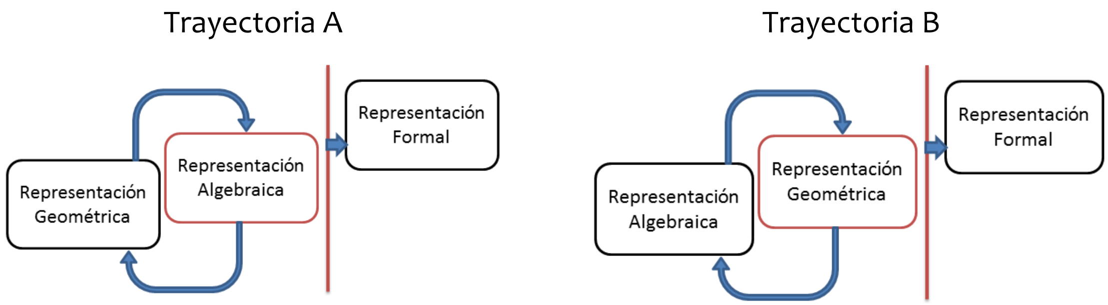
De esta forma, enunciamos así los dos primeros elementos que conforman la metodología para la elaboración de recursos didácticos-digitales para apoyar la enseñanza y del aprendizaje de un primer curso de álgebra lineal.

Primer elemento. Ubicar el concepto matemático de interés en los registro de representación: geométrico, algebraico y formal. Por ejemplo, el concepto de combinación lineal tiene las siguientes representaciones

Representación Geométrica	(I) Vectores en $\mathbb{R}^2$: 
Representación Algebraica	(I) Vectores como pares ordenados: $i)$ 3(1,3)+2(3,2)=(9,13) $ii)$ $3\vec{u} + 2\vec{v} = \vec{w}$
Representación Formal	**Definición 3.1.** Sea V un espacio vectorial arbitrario, y sean $v_1, v_2, ..., v_n$ elementos de V. Sean $x_1, x_2, ..., x_n$ números. Una expresión del tipo $x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n$ es llamada combinación lineal de $v_1, v_2, ..., v_n$. Los números $x_1, x_2, ..., x_n$ son entonces llamados los coeficientes de la combinación lineal (Lang, 1986).

Segundo elemento. Desarrollar el concepto o los conceptos básicos del álgebra lineal a través de los tres registros de representación semiótica elegidos de ser posible. En específico, nosotros proponemos dos posibles trayectorias, digamos la **trayectoria A**

que toma como punto inicial de la trayectoria la representación geométrica del concepto, y la **trayectoria B**, que inicia en el registro de representación algebraico; en cualquier caso el punto final de la trayectoria se propone sea la representación formal del concepto.



De acuerdo con este elemento, si utilizamos la trayectoria A, entonces iniciaremos en el estudio geométrico del concepto matemático, para después pasar al estudio algebraico y llevándose así un ciclado entre estas representaciones. Al final se deja el establecimiento formal del concepto matemático.

Por otro lado, Cuevas y Pluvinage (2003) dentro de su PAP, proponen siempre iniciar la enseñanza de un concepto matemático con el análisis de un problema real adecuado y sencillo de entender, aunque no necesariamente de resolver, que evidentemente contenga en su resolución el concepto o los conceptos matemáticos de interés. En este sentido, el siguiente elemento de nuestra metodología retoma este principio de la didáctica de Cuevas y Pluvinage, como una forma de atraer la atención del estudiante, por la proximidad a los sentidos y aquello que el estudiante conciba desde su percepción. Si bien la PAP habla de situaciones reales, nosotros no descartamos los problemas propios del concepto dentro de la matemática misma.

Tercer elemento. Buscar y seleccionar problemas reales o aplicaciones reales de las matemáticas que comprendan los conceptos matemáticos de interés. O bien, problemas propios de la matemática igualmente relacionados con el concepto de interés.

Sobre este elemento es necesario destacar la necesidad preponderante de aplicar una transposición didáctica del problema real, problema matemático o aplicación, con el propósito de hacerlo tratable por el estudiante, es decir, pasar del saber sabio al saber enseñable como lo señala Chevallard (1985). Esta transposición didáctica depende sobre todo del concepto a tratar y del desarrollo cognitivo actual de los estudiantes.

Continuando con la conformación de la metodología, los elementos que siguen se enfocan a establecer una forma de tratar el concepto matemático, de construirle; lo que a nuestra consideración es equivalente en cada representación de las matemáticas. Para esta empresa, es necesario realizar un análisis inicial del o los conceptos matemáticos de interés, en específico, un análisis de cómo se construye y aprende el concepto, un análisis inicial en la dirección que Asila et al (1996) menciona: "…based primarily on the researchers' understanding of the concept in question and on their experiences as learners and teachers of the concept." (pp. 5-6). En efecto, para proponer un tratamiento de un concepto matemático para apoyar su enseñanza y aprendizaje se requiere de un análisis inicial del concepto con el fin de descomponerlo adecuadamente; lo que implica la necesidad de un sustento científico que sirva de base para llevar a cabo esta descomposición, en la que la experiencia juega un papel importante también.

En este sentido, utilizamos los tres primeros principios de la PAP de Cuevas y Pluvinage (2003), principios que proponen llevar al estudiante a la construcción de conceptos matemáticos a partir de la resolución de problemas, siendo ellos quienes lleven a cabo tal actividad y siendo ellos quienes verifiquen a través de sus medios los resultados que vayan obteniendo. Para esto es necesario, que el profesor previamente realice un análisis de los conceptos matemáticos de interés, resolviendo los problemas a presentar a los estudiantes, desglosándolos en sub-problemas y establecer rutas cognitivas previas a la actividad con los estudiantes.

Cuarto elemento. Establecer las acciones, mediante actividades asociadas al concepto que permitan al alumno manipularle, sentirle, tratarle en los registros de representación semiótica que sean propios. En este sentido, las actividades deben ser parte de la solución de un problema o sub-problemas, una actividad que permita la reflexión por parte del estudiante de las acciones que lleva a cabo.

Es necesario hacer hincapié, que hay actividades asociadas a un concepto en cada representación de las matemáticas. En este sentido, construir un concepto matemático requiere de construir actividades en cada uno de las representaciones, estimulando al estudiante a llevar a cabo reflexiones sobre las acciones tomadas en cada registro de representación, además es esencial formar vínculos entre cada uno de las representaciones, siempre dejando al final las formalidades matemáticas.

Así por ejemplo, para construir el concepto de sistemas de ecuaciones lineales en el registro algebraico, requerimos de la resolución de diferentes sistemas de ecuaciones lineales cuadrados, partiendo del más pequeño de estos, es decir, un sistema con una ecuación lineal y una incógnita, digamos que es necesaria una graduación del concepto. El propósito de esta acción, es identificar los tres posibles casos en los que un sistema de ecuaciones lineales puede caer: (1) solución única; (2) sin solución; y, (3) infinitas soluciones. Esta misma acción se realiza con sistemas 2×2, 3×3, hasta el caso $n\times n$.

De acuerdo con los fundamentos psicológicos de la inteligencia de Piaget que sustenta los principios didácticos de la PAP, cada concepto matemático yace en el individuo, organizado bajo estructuras mentales. Cuando un individuo se encuentra ante una situación problema, este evoca parte de su conocimiento concentrado en tales estructuras mentales; reconstruye ese conocimiento, es decir, reconstruye cierta trayectoria mental del concepto, evoca conocimientos previos, cómo Piaget (1991) menciona: “No hay estructuras innatas; toda estructura supone una construcción. Todas estas construcciones se remontan paso a paso a estructuras anteriores y que nos remiten finalmente.” (p. 187). En términos prácticos, una trayectoria de construcción del concepto matemático es la inherente a los profesores, que al ponerla en práctica se nutrirá de las evidencias que emergen en la construcción del concepto matemático en clase. Tal como Cuevas y Pluvinage (2003) señalan en su cuarto y quinto principio:

"…descomponer o dividir el problemas en sub-problemas que representen las operaciones parciales constitutivas… Cada vez que se realicen operaciones que nos lleven a conceptos matemáticos, en la medida de lo posible realizar las operaciones inversas." (p. 277), por lo tanto evitar la creación de malos hábitos y producir operaciones inteligentes. De esta manera planteamos el siguiente elemento de nuestra metodología:

Quinto elemento. Descomponer el concepto de interés en las acciones de acuerdo con la experiencia propia. Primero reconstruyendo el concepto matemático y después analizando los elementos que conforman esta reconstrucción, tomando en cuenta las operaciones directas e inversas. Esta descomposición será en principio una forma de organizar nuestras actividades en torno al concepto matemático de interés.

Insistimos que esta trayectoria no es lineal ni fija, se nutrirá de su puesta en práctica, así como de los aciertos y de los errores, y se consolidara a través del tiempo.

Para finalizar nuestra propuesta metodológica, recurrimos a la teoría de la aproximación instrumental (Trouche, 2004), dado que un recurso didáctico (digital o de cualquier tipo) es una herramienta, y a su vez está conformado de herramientas que el estudiante tendrá que utilizar y dominar.

La génesis instrumental es el proceso mediante el cual un humano se apropia de un artefacto, lo hace parte de sí, a través de su uso en una o varias actividades, no solo físicamente sino también cognitivamente:

> "More precisely, an instrument can be considered as an extension of the body, a functional organ made up of an artifact component (an artifact, or the part of an artifact mobilized in the activity) and a psychological component. The construction of this organ, named instrumental genesis, is a complex process, needing time, and linked to the artifact characteristics (its potentialities and its constraints) and to the subject's activity, his/her knowledge and former method of working." (Trouche, 2004, pp. 285-286)

Entonces, si en el proceso de aprendizaje de un concepto matemático tenemos una o varias herramientas de ayuda para realizar la actividad matemática, es necesario tomar bien en cuenta la existencia de un proceso de apropiación de la herramienta por parte de los estudiantes.

Como se menciona en la literatura, la génesis instrumental es la dialéctica entre dos procesos: (1) la instrumentación y (2) la instrumentalización. El proceso de instrumentación es aquel donde el estudiante va reconociendo el artefacto por medio de la manipulación y adaptándose al uso de éste. Y recordemos que la instrumentalización es el proceso mediante el cual el estudiante adapta y utiliza el artefacto en actividades distintas para las que propiamente fue hecho. En este sentido proponemos el siguiente elemento metodológico:

Sexto elemento. Es recomendable que al diseñar actividades matemáticas mediadas con herramientas digitales (calculadoras, computadoras, hojas de trabajo, aplicaciones *Web*, etcétera) que permitan el desarrollo de las actividades asociadas al concepto matemático de interés; planificar con cuidado los *esquemas de acción instrumentada*. Esto implica el reconocimiento, de las potencialidades y defectos de la herramienta – *esquemas de uso*; por lo tanto, la articulación entre varias herramientas para desarrollar una actividad matemática es posible.

Claramente, entre más compleja sea una herramienta o el conjunto de herramientas a utilizar sea más numeroso, entonces la instrumentación se vuelve más compleja:

> "We have also noticed that, the more complex the environment, the larger the differentiation of instrumentation processes. The behaviors of two students searching for a function limit unknown by the calculator… in a symbolic calculator environment…
>
> What appears mainly is the great difference between the two instrumentation processes for the two students:

- Student 1 can articulate all the artifacts available in the environment (calculator, paper–pencil, and theoretical results);
- Student 2 uses only one key (the limit key) of only one application of only one artifact. (The more complex is the artifact, the more simple seems the activity.)" (Trouche, idem, pp. 292-293).

En este sentido, un criterio para elegir las herramientas para ser utilizadas en el proceso de aprendizaje de un concepto matemático, es desde nuestro punto de vista y experiencia, la herramienta cuyos posibles esquemas de uso se encuentren próximos al propósito didáctico.

Por ejemplo, el sistema tutorial inteligente denominado *CalcVisual* (Cuevas y Mejía, 2003) ha probado ser una herramienta accesible y amigable en la construcción de los conceptos básicos del cálculo diferencial de una variable real, cabe destacar que fue creado precisamente para este propósito.

Continuando con la propuesta metodológica, un penúltimo elemento metodológico se encuentra asociado al proceso de instrumentalización. Recordemos que este proceso se puede resumir como el surgimiento de usos que el usuario da a la herramienta para los que no fue creada o pensada. Por lo que se recomienda:

Séptimo elemento. Generar actividades o situaciones que promuevan un uso de las herramientas en contextos de interés, que impliquen la resolución de problemas asociados al concepto matemático que promuevan un uso de la herramienta, más allá de los propósitos para los que fue creada. Es decir, sin que haya de por medio un posible esquema de acción instrumentada. Ejemplo de esto, es el uso de Excel en educación, cuando fue creada como herramienta de contabilidad.

Por ejemplo, el software educativo denominado *AlSel* (Betancourt, Cuevas y Trouche, 2013) fue diseñado y creado para apoyar la resolución de sistemas de ecuaciones lineales de hasta 9 ecuaciones con 9 incógnitas, utilizando el método de la eliminación gaussiana. En una experiencia llevada a cabo en el aula, utilizando AlSel, después de un cierto proceso de instrumentación, se proponían en las actividades un problema inverso que consistía en proponer un sistema de ecuaciones lineales 3×3 cuya solución fuese $(2,-1,3)$. Al plantear a los alumnos este problema, se les dejó en libertad de resolverlo con las herramientas que ellos decidieran. Sorpresivamente, la mayoría de los estudiantes utilizó *AlSel*, que en principio no fue creado para este tipo de problemas, y sin embargo, los estudiantes lograron usar con éxito AlSel para plantear una solución al problema. El uso dado de la herramienta por los estudiantes en un caso típico de instrumentalización.

Por otro parte, como bien lo señala Trouche (2004):

> "…un instrumento es el resultado de una construcción por un sujeto, en una comunidad de práctica, sobre la base de un artefacto dado, a través de un proceso, la génesis instrumental. Un instrumento es una entidad combinada, con una componente dada (un artefacto, o la parte de un artefacto se moviliza para realizar una cierta actividad) y una componente sicológica (los esquemas organizando la actividad en el sujeto). Todo esquema tiene un aspecto individual y social." (p. 289)

En este sentido, vale la pena promover el trabajo colaborativo en el aprendizaje de las matemáticas, más aun en esta era digital, donde la posibilidad de interactuar y comunicarse a distancia es prácticamente inevitable. Desde nuestra experiencia, un estudiante constantemente está en interacción con otros estudiantes, pregunta sobre cómo y para qué se usa tal cosa u objeto, por lo tanto, nuestra metodología toma a bien este aspecto y finalmente tenemos el último elemento metodológico.

Octavo elemento. En la medida de lo posible promover un trabajo colaborativo mediante la interacción entre estudiantes a través de discusiones sobre un tema o problema matemático. El trabajo colaborativo puede ser mediado por la tecnología digital, ya sea mediante foros o aplicaciones web diseñadas para este tipo de actividad.

Con esto damos por finalizado nuestro planteamiento metodológico para la creación de recursos didácticos digitales para apoyar la enseñanza y dirigir la construcción de conceptos matemáticos, en particular de conceptos de un primer curso de álgebra lineal.

Sin duda, la metodología propone la puesta en acción de una diversidad de herramientas, por lo tanto ha de ser organizada y mediada de alguna forma por el profesor, de aquí la necesidad de una *orquestación instrumental* como Trouche (2004) lo señala, lo que abordaremos en la sección 3.3. Enseguida presentamos la aplicación de esta metodología en la creación de recursos didácticos digitales para algunos conceptos de un primer curso de álgebra lineal.

3.2. Elaboración de material didáctico.

A continuación expondremos, a manera de ejemplo, un par de aplicaciones de la metodología PAP-AI en la elaboración de recursos didácticos para promover una mejor comprensión de los conceptos matemáticos de un primer curso algebra lineal. Estos recursos didácticos se apoyaran con herramientas digitales.

En este caso, desarrollaremos ambientes didácticos interactivos para conceptos como: vector, sistemas de ecuaciones lineales, dependencia e independencia lineal, así como valores y vectores propios.

La primera situación real planteada en la sección 3.2.1, nació a partir de una propuesta del Profesor Humberto Madrid de la Vega de analizar y modelar el proceso de descarga de archivos informáticos. Para él, una buena aproximación a la descripción de la manera en cómo se descarga un archivo informático es a través de líneas rectas, cuyas pendientes cambian en distintos instantes de la descarga, de ahí que la estimación del tiempo de duración de la descarga cambie, de mayor a menor o de menor a mayor, de un instante a otro o de intervalos de tiempo, más adelante se darán detalles de esta situación.

Por otra parte, los recursos didácticos relacionados con la mencionada situación han sido desarrollados en una versión al francés, pues durante la creación de estos, nos encontrábamos realizando una estancia de estudio en el Instituto Francés de la Educación de la Escuela Normal Superior de Lyon en Francia, bajo la tutoría del Profesor Luc Trouche (Ver anexo 1).

Primero comenzaremos por mostrar el problema real que hemos seleccionado, su posible modelo matemático e iremos haciendo hincapié en los conceptos del álgebra lineal necesarios para resolver el problema. Después presentaremos los recursos elaborados con la metodología propuesta, en particular las hojas de actividades.

La sección 3.2.2 de este apartado, trata con una situación real relacionada con un momento histórico: el colapso del primer puente colgante *Tocoma Narrows*. Este suceso acontecido en 1940 en los Estados Unidos, derivó en un profundo estudio para determinar por qué el puente colapsó. Si bien, el estudio de este fenómeno requiere por un lado conceptos e ideas de la física, por otro lado requiere de objetos y conceptos matemáticos, en particular de los conceptos de ecuaciones diferenciales y de valores y vectores propios del algebra lineal. Esta es la razón primordial por la que elegimos este problema, aunque el tratamiento que daremos aquí sea únicamente para el caso en $\mathbb{R}^2$.

A continuación, presentamos la primera situación real y los respectivos recursos didácticos elaborados.

3.2.1. Un modelo lineal para estimar el tiempo de descarga de archivos informáticos.

Descargar archivos informáticos por internet como software, videos, música, libros, etcétera, es actualmente una actividad frecuente. La idea básica de la descarga se centra en la transferencia de información digital a una computadora a través de la red de internet. La descarga puede realizarla el mismo navegador o bien algún software especializado, por ejemplo, la figura 1.1 muestra la interfaz de descarga de un vídeo usando el software *RealPlayer Downloader*.

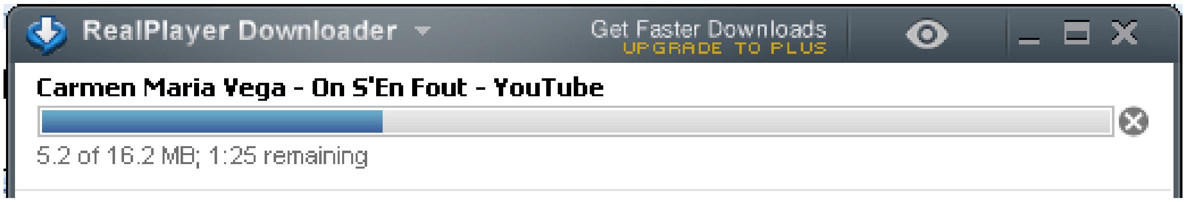


Imagen 3.2.1. Interfaz de descarga de un vídeo.

Generalmente, la interfaz de descarga presenta varios datos relacionados con el proceso de transferencia, por ejemplo, en la imagen3.2.1 se observan ordenadamente las cantidades: 5.2 MB, 16.2 MB y 1:25 (1 minuto y 25 segundos) que son la cantidad de *megabytes* descargados del vídeo, la cantidad total de megabytes del vídeo y el tiempo estimado que resta para finalizar la descarga del vídeo respectivamente. De acuerdo con esta información, es claro que existe una velocidad de trasferencia, que por lo general depende de otros elementos informáticos, como la velocidad de la red de internet.

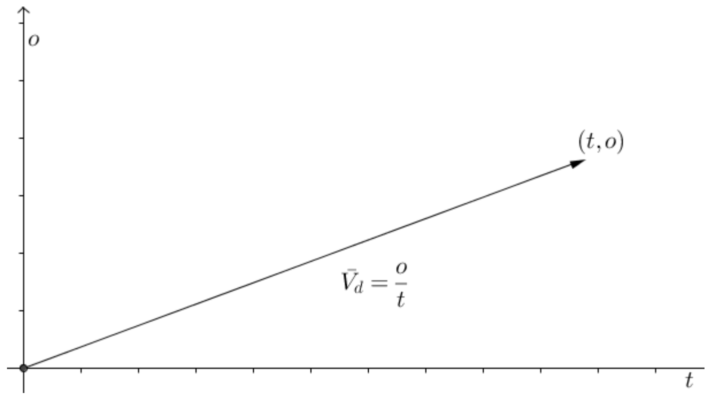
El propósito de este trabajo, es establecer un modelo matemático del proceso de descarga de un archivo informático, y para lograr esto, el proceso de modelización estará guiado por las siguientes dos preguntas:

- ¿Cuál es la velocidad de descarga?
- ¿Cómo podemos estimar el tiempo que resta en la transferencia de la información?

La descarga de un archivo informático puede expresarse como la cantidad de megabytes transferidos por unidad de tiempo, es decir, si denotamos el tiempo como t, el byte como o entonces la velocidad instantánea de descarga V_d es

$$V_d = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta o}{\Delta t}$$

En la realidad, al descargar un archivo lo que tenemos son instantes de la forma (t, o) que podemos representar geométricamente como vectores cuya inclinación es la razón entre o y t, es decir, la velocidad promedio de descarga $\overline{v} = \frac{o}{t}$

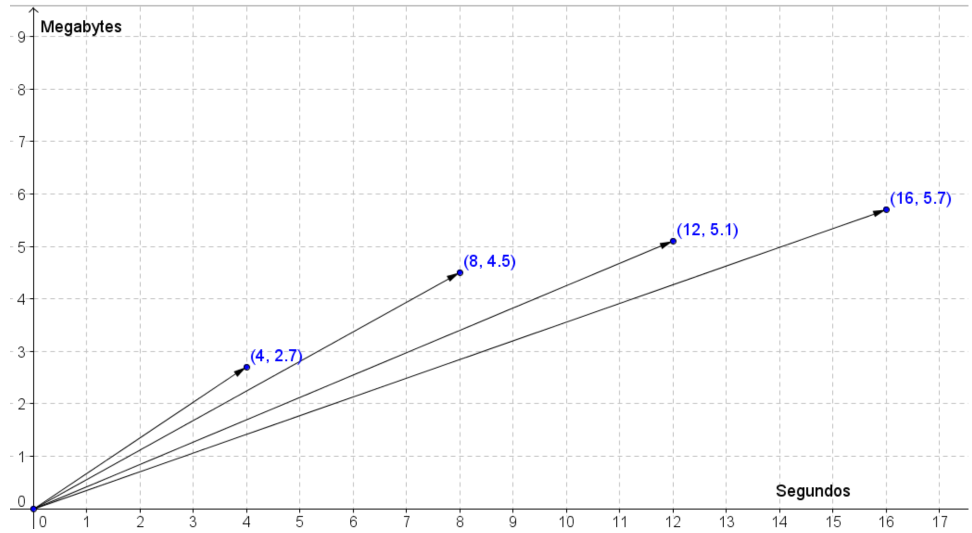


Gráfica 3.2.2. Representación gráfica de instante en la descarga.

En la práctica, el software de descarga no muestra el tiempo real durante el proceso de transferencia, por lo que es difícil determinar si la velocidad es constante o no. Sin embargo, siempre es posible saber el tiempo por otros métodos, por ejemplo, se puede grabar el momento de la descarga para después obtener los pares ordenados (tiempo real de descarga, megabytes descargados) y representarlos gráficamente para comparar sus pendientes y determinar que la velocidad de descarga en general no es constante. Bajo esta idea hemos recolectado la siguiente información de la descarga de un video que pesa 20.5MB:

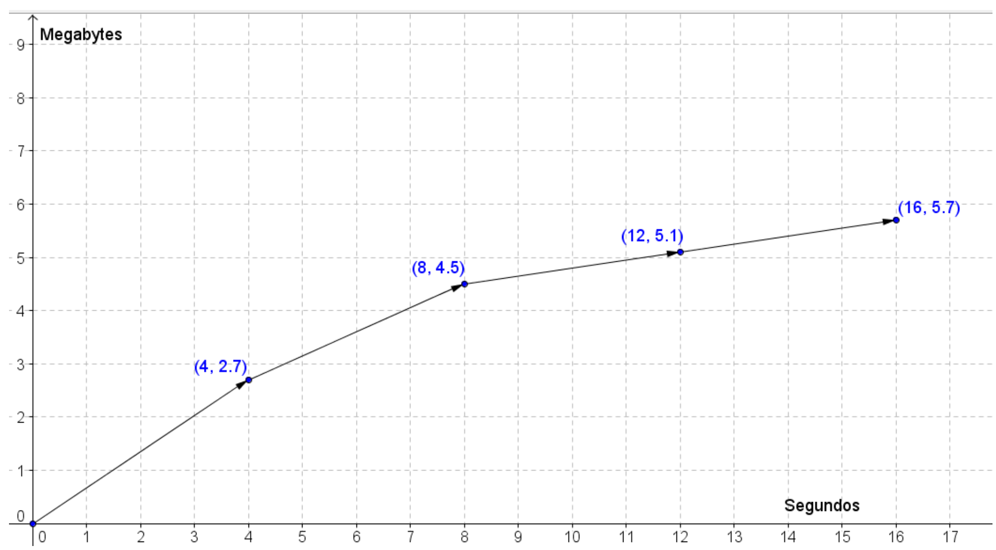
Tiempo real de descarga (segundos)	Cantidad descargada del archivo (megabytes)
0	0
4	2.7
8	4.5
12	5.1
16	5.7

De cuya gráfica (Gráfica 3.2.3) podemos concluir que la velocidad de descarga no es constante y esta conclusión se basa en el hecho de que la inclinación de cada vector es diferente o bien $\vec{v}_i \neq k\vec{v}_j$ con $i \neq j$ y $k \neq 0$.



Gráfica 3.2.3. Diferentes instantes en una descarga.

Una manera alternativa y que ofrece una representación más cercana del comportamiento de la descarga, son los vectores diferencia entre cada instante, es decir $(t_{i+1}-t_i, o_{i+1}-o_i)$ y la inclinación de cada vector en intervalos de 4 segundos es la velocidad promedio $\vec{v}_i = \dfrac{o_{i+1}-o_i}{t_{i+1}-t_i}$ en cada intervalo. Utilizando la información de la tabla anterior obtenemos la siguiente gráfica



Gráfica 3.2.4. Vectores diferencia.

De esta manera, podemos concluir firmemente que la velocidad de descarga en lo general no es constante dado que la velocidad promedio en por lo menos tres intervalos es diferente

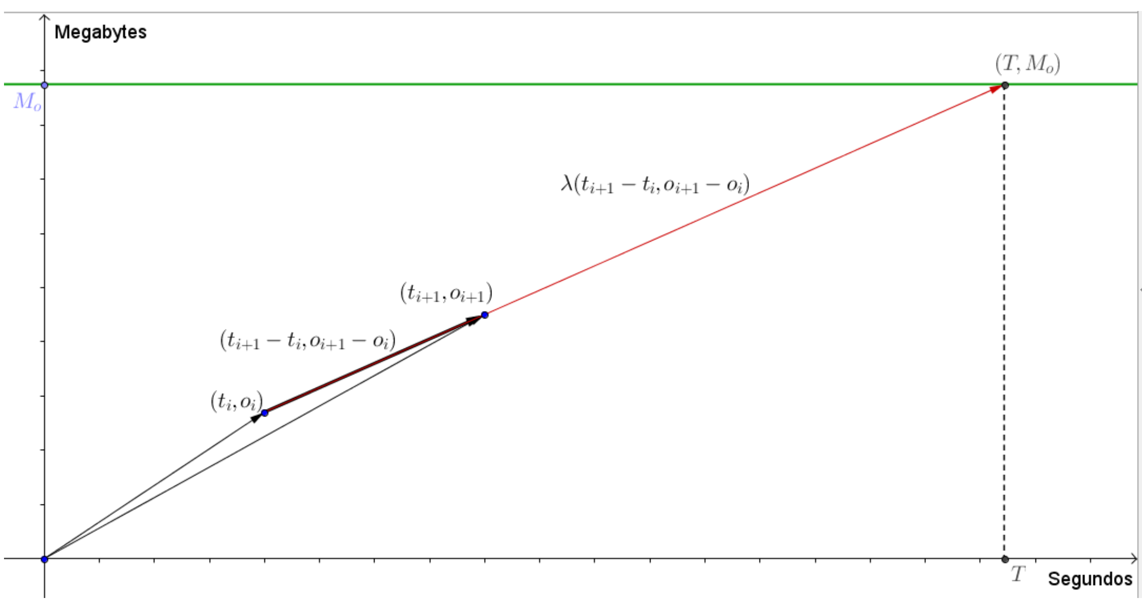
Intervalo	Velocidad promedio
[0,4]	0.675 MB/s
[4,8]	0.45 MB/s
[8,12]	0.15 MB/s
[12,16]	0.15 MB/s

Esta última representación gráfica (gráfica 3.2.4) del proceso de transferencia de un archivo informático ofrece una buena idea para estimar el tiempo que resta para finalizar la descarga.

Dado que la velocidad promedio de pequeños intervalos es una buena aproximación de la velocidad de descarga entonces el vector que resulta de la multiplicación del vector cuya inclinación es precisamente la velocidad promedio y un escalar λ debe ser igual al vector (T, M_o) = (tiempo total de descarga, megabytes totales del archivo informático)

$$(T, M_o) = \lambda(t_{i+1} - t_i, o_{i+1} - o_i) \text{ con } \lambda \neq 0$$

En términos geométricos tenemos



Gráfica 3.2.5. Estimación del tiempo restante T.

Claramente que la estimación del tiempo que resta para finalizar la descarga cambia durante el proceso de transferencia pues depende de la velocidad de descarga, que sabemos no es constante. En este sentido, en diferentes momentos debe restimarse el tiempo de descarga por medio del sistema de ecuaciones lineales 2×2

$$T-(t_{i+1}-t_i)\lambda=-t_{i+1}$$
$$(o_{i+1}-o_i)\lambda=o_i-M_o$$

En general, dado que λ y T son las incógnitas entonces la combinación lineal

$$T(1,0)+\lambda(t_i-t_{i+1},o_{i+1}-o_i)$$

que debe ser igual al vector $(-t_{i+1},M_o-o_i)$. Los valores que satisfacen esta ecuación lineal son

$$\lambda=(M_o-o_i)/(o_{i+1}-o_i)$$
$$T=\lambda(t_{i+1}-t_i)-t_{i+1}$$

Ahora utilizamos este resultado para estimar el tiempo que resta en la descarga del video en cada intervalo, cuyo peso es de 20.5 MB:

Intervalo	Tiempo estimado
[0,4]	$T\approx 26s$
[4,8]	$T\approx 32s$
[8,12]	$T\approx 95s$
[12,16]	$T\approx 87s$

Aparentemente, esta parece ser una buena forma de estimar el tiempo que resta en la descarga de un archivo informático.

Este proceso de modelación, es básicamente una forma posible de resolver el problema planteado. En esencia, lo que hasta ahora hemos planteado corresponde a varios de los elementos de nuestra metodología: el planteamiento de un problema real, cuya solución requiere de los conceptos a enseñar; El tratamiento y conversión en diversos registros de representación, la reconstrucción de conceptos y. sin embargo, aún nos hace falta establecer claramente las actividades que consideramos necesarias que el estudiante realice para bien resolver el problema que se plantea.

También se puede observar, la existencia de la representación geométrica y de la representación algebraica; lo que sigue es entrar en detalle del tratamiento de los conceptos que aparecen como necesarios en la solución del problema como vector, sistemas de ecuaciones lineales y combinación lineal. Por último, dados los propósitos de nuestro trabajo de investigación, necesitamos elegir y seleccionar de acuerdo con nuestra metodología la o las herramientas que nos apoyen en resolución de la situación planteada, como un software de geometría dinámica, videos que capten la descarga de diferentes archivos digitales y una aplicación o software para apoyar la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

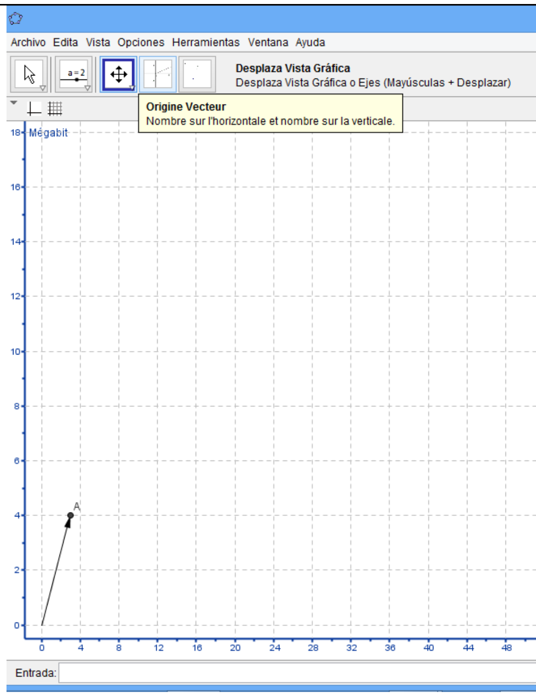
3.2.1.1. Una hoja de actividades: la descarga de archivos informáticos.

Como resultado final de nuestro planteamiento metodológico, tenemos la elaboración de una hoja de actividades (ver anexo 1), conformada por 5 actividades.

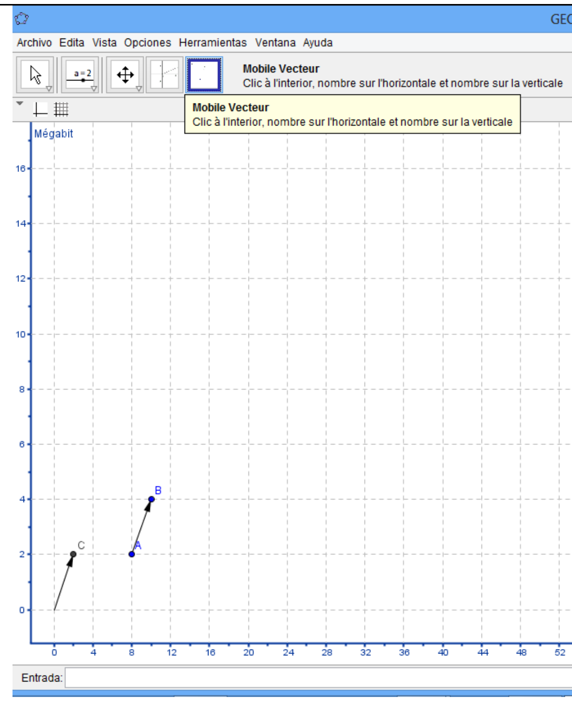
La actividad inicial o introducción, plantea la situación real y una pregunta general. Prácticamente, esta actividad está basada en la aplicación del elemento de nuestra metodología asociado al planteamiento de situaciones de interés para el estudiante.

La primera actividad, se basa en dos elementos metodológicos: la representación geométrica y la reconstrucción del concepto, pues cuestiona al estudiante sobre el problema planteado, particularmente sobre el cómo representaría gráficamente el proceso de descarga con la información dada en la introducción. Desde nuestro punto de vista, habrá por lo menos dos distintas representaciones geométricas que los estudiantes aporten: puntos y segmentos de recta. El propósito es dirigir estas actividades del estudiante hacia la representación de un vector geométrico en $\mathbb{R}^2$.

Precisamente, es la segunda actividad donde inicia este proceso de construcción del concepto de vector en el registro geométrico. Para esto incluimos dos herramientas de apoyo para realizar la actividad: un video que muestra la descarga en tiempo real de video musical y una interfaz gráfica en GeoGebra. Nuestro propósito es que el estudiante represente el proceso de descarga a través de vectores que parten del origen y de vectores fuera del origen. Por las condiciones del problema, esta actividad se dirige a formar las operaciones entre vectores, como la diferencia.



Interfaz en GeoGebra de vector en el origen.



Interfaz en GeoGebra de vector móvil.

La interfaz gráfica creada en *GeoGebra* (como se muestra en la imagen anterior) obedece a otro de los elementos de la nuestra metodología asociado a la instrumentación, pues no es la interfaz usual de *GeoGebra* pues ha sido modificada: se han eliminado las herramientas que no se usan para este problema, para evitar distracciones innecesarias y se han añadido dos herramientas: vector origen y vector móvil, es decir, esta modificación se hace por la necesidad didáctica de generar las operaciones entre vectores geométricos.

Los videos son herramientas necesarias (ver anexo 1 en las instrucciones para descargar el material digitalmente) para que el estudiante sienta y explore el problema que se plantea, además le permite manipular la información fácilmente y es él mismo quien la extrae, es decir, es el estudiante quien lleva la acción, otro de los elementos de la metodología planteada.

Hasta aquí, vale la pena hacer dos comentarios. El primero va en el sentido de la dirección que siguen las actividades; esta trayectoria es la misma que muestra el modelo del problema real. La segunda, es torno a la aplicación de los elementos metodológicos en esta trayectoria didáctica, que como podemos observar no han seguido un orden o por lo menos no el mismo con el que se presentan.

Retomamos la explicación de las actividades que conforman la hoja de actividades. La tercera actividad tiene como propósito construir la noción de multiplicación de un vector por un escalar por medio del desarrollo de ciertas acciones tanto geométricas como numéricas. Este es el caso en que se lleva a cabo la conversión entre la representación geométrica y la algebraica. Igualmente se utilizan el video y la interfaz gráfica modificada en *GeoGebra*.

Las dos últimas actividades tienen como propósito que estudiante establezca una estimación del tiempo restante de la descarga del archivo informático. El centro de la actividad es sobre el registro de representación algebraico. En estas actividades, emergen objetos matemáticos: los sistemas de ecuaciones lineales y las combinaciones lineales. Su tratamiento es parecido a la de las actividades anteriores, pues el propósito es desarrollar actividades que permitan la construcción de estos conceptos.

Es importante agregar que en la última actividad, se introduce *AlSel* como herramienta de apoyo en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

La hoja de actividades que hemos presentado, es básicamente una guía para apoyar la construcción de las nociones de vector en $\mathbb{R}^2$, los sistemas de ecuaciones lineales y la combinación lineal. Está guía es finalmente un recurso didáctico que debe ser puesto en escena, probado en clase; esto implica una organización, una metodología. Tomando en cuenta, que dentro de las actividades que propone la hoja de actividades se encuentran varias herramientas a utilizar entonces consideramos la necesidad de una orquestación instrumental, tema que abordaremos en la sección 3.3.

Antes de presentar el diseño de una orquestación instrumental para cada situación, vamos a continuar con la presentación del segundo problema real elegido y los recursos didácticos elaborados para tal situación.

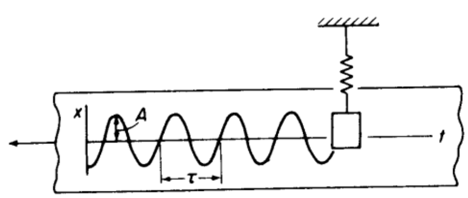
3.2.2. El colapso de un puente colgante.

Es conocido el hecho acontecido en el año de 1940 en el noreste de los Estados Unidos de Norteamérica del colapso del primer puente colgante *Tacoma Narrows*.

El evento hizo historia en varios sentidos, entre ellos tenemos que el fenómeno fue video grabado, por lo que se tiene evidencia visual desde momentos previos al colapso. En otro sentido, el fenómeno atrajo la atención de los científicos de la época, en particular del físico húngaro-estadunidense Theodore Von Kármán, a quien se le atribuye la explicación que hoy conocemos como el fenómeno de resonancia mecánica, que en términos simples, se trata del efecto de una fuerza externa que se aplica repetidamente a un sistema con la frecuencia natural del mismo (Thompson, pp. 1-2).

El caso del colapso de puente Tacoma, es un ejemplo del efecto catastrófico de la resonancia, su modelo matemático es ciertamente complejo, dado que el puente es en cierto sentido un sistema armónico de $m \times n$ masas. Aquí explicaremos el fenómeno de la resonancia para una masa y dos masas respectivamente, siendo el segundo caso el de más interés en este trabajo por la aparición clara del cálculo de valores y vectores propios.

La siguiente imagen representa el caso del movimiento armónico simple de un sistema con una masa:



Se sabe que el modelo matemático para este fenómeno físico resulta en una ecuación diferencial de segundo orden:

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t)$$

Donde m es la masa y k es el coeficiente de rigidez del resorte.
La solución de esta esta ecuación es

$$x(t) = Asen\omega t$$

Donde A es la amplitud de las oscilaciones y $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la frecuencia natural del sistema.

Para este caso, determinar la frecuencia natural del sistema no es difícil. A continuación veremos el efecto catastrófico de la resonancia.
Ahora supongamos que se aplica repetidamente una fuerza externa $F_0 sen\omega t$ al sistema, el resultado es la siguiente ecuación diferencial que modela el fenómeno

$$m\ddot{x}(t) = -kx + F_0 sen\omega t$$

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x + a_0 sen\omega t$$

Cuya solución es

$$x(t) = Asen\omega t + Bsen\omega_o t$$

Al sustituirla en la ecuación diferencial tenemos que

$$Asen\omega t = \frac{a_0}{\omega_0^2 - \omega^2} sen\omega t$$

Esto implica que la amplitud de las oscilaciones depende ahora de la frecuencia natural ω y de la frecuencia ω_0 relacionada con la introducción al sistema de la fuerza externa. Como podemos ver, si ω_0 tiende a ω la amplitud tiende hacía infinito, lo que se traduce en el acontecimiento del fenómeno de resonancia, que en el caso del puente resulto en el colapso, de aquí la importancia de calcular las frecuencias naturales del sistema.
Por otra parte, si en lugar de una masa, tuviéramos un sistema de $m \times n$ masas, como lo es un puente colgante, el modelo matemático resulta en un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden como el que sigue

$$M\ddot{x} + Kx = 0$$

Donde M es la matriz cuadrada de masas, k la matriz cuadrada de coeficientes de rigidez y X el vector de desplazamiento en el tiempo t.

Supongamos que M tiene inversa, entonces

$$I\ddot{X} = -AX$$

Si asumimos movimiento harmónico, entonces $\ddot{X} = -\lambda X$

Con $\lambda = \omega^2$, por lo tanto,

$$AX = \lambda X$$

O bien,

$$(A - \lambda I)X = 0$$

Esta ecuación vectorial implica el estudio de los valores y vectores propios de A, conceptos del álgebra lineal que nos interesa abordar desde un punto de vista didáctico.

El problema de determinar las frecuencias naturales de un sistema de vibración libre nos lleva a calcular los valores y vectores propios. En el siguiente apartado presentamos los detalles sobre el diseño de los recursos didácticos para construir estos conceptos matemáticos con la metodología PAP-AI.

3.2.2.1. Hojas de actividades: El colapso del puente Tacoma Narrows.

En el anexo 2 se encuentran las hojas de actividades que se diseñaron bajo la metodología PAP-AI, a continuación explicaremos como aplicamos la metodología para su diseño.

Una actividad previa, es la explicación dela situación real planteada. Como se dice en la metodología, la situación real ha de ser transpuesta didácticamente para ser presentada a los alumnos, en este sentido, como actividad inicial con los estudiantes se propone:

1- La presentación de un video en *YouTube* que muestra el fenómeno http://www.youtube.com/watch?v=hdoo1wbnnbw.

2- Presentación del modelo matemático para el caso de una masa.

3- Presentación del modelo matemático para el caso de una matriz de masas 2×2 y llegar a la ecuación vectorial $AX=\lambda X$.

A partir de este momento, entra en marcha otro elemento de nuestra metodología, el asociado a que la acción la lleve el estudiante, proponiéndose como medio de discusión, retroalimentación y trabajo colaborativo *Etherpad*.

La primera actividad (ver anexo 2) tiene como propósito estudiar la representación geométrica de una matriz cuadrada 2×2, así como la representación geométrica de las siguientes expresiones vectoriales:

- Ax con A una matriz 2×2 y x un vector en $\mathbb{R}^2$.
- λx con λ un escalar y x un vector en $\mathbb{R}^2$.

Al final de la actividad se propone un problema inverso: encontrar la matriz A y el vector x cuyo producto sea un vector conocido b.

Para apoyar el estudio geométrico, se propone apoyarse en el uso de *GeoGebra* y el trabajo colaborativo utilizando *Etherpad*.

La segunda actividad se enfoca al estudio geométrico de la ecuación $AX=\lambda X$ con A una matriz 2×2 y X un vector en $\mathbb{R}^2$. Esta actividad se dividen en el análisis y estudio de tres casos; el primero tiene como objetivo estudiar la ecuación vectorial cuando la matriz está formada por vectores columna linealmente independientes y se propone realizar tal análisis utilizando un recurso digital diseñado previamente en *GeoGebra* como lo muestra la siguiente imagen:

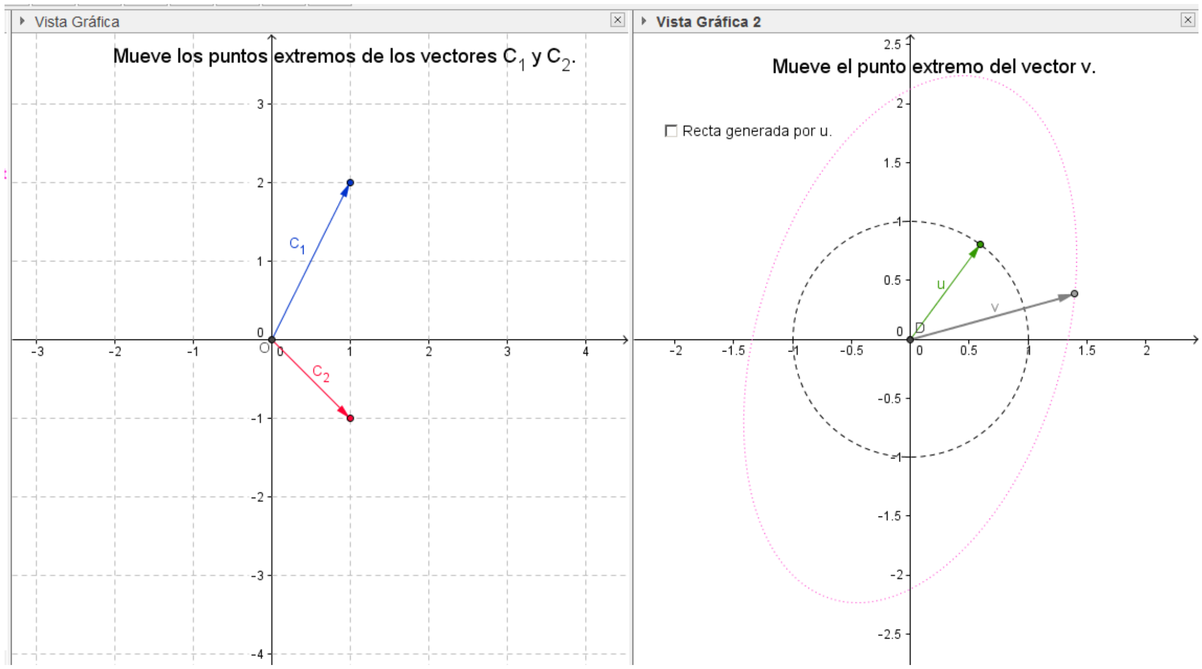


Imagen 3.2.6. Representación geométrica de $AX = \lambda X$ con los vectores columna de A L.I.

El segundo caso propone el estudio geométrico de la misma ecuación vectorial con los vectores columna de A linealmente dependientes, y también se acompaña esta actividad con recurso digital diseñado en *GeoGebra* como la imagen siguiente lo muestra:

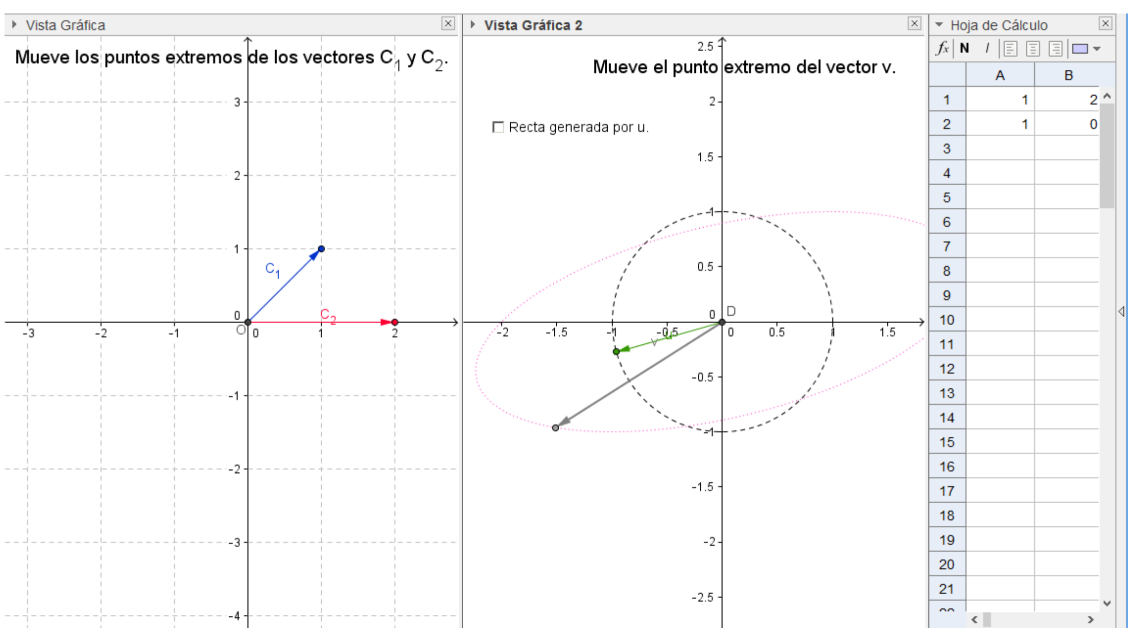
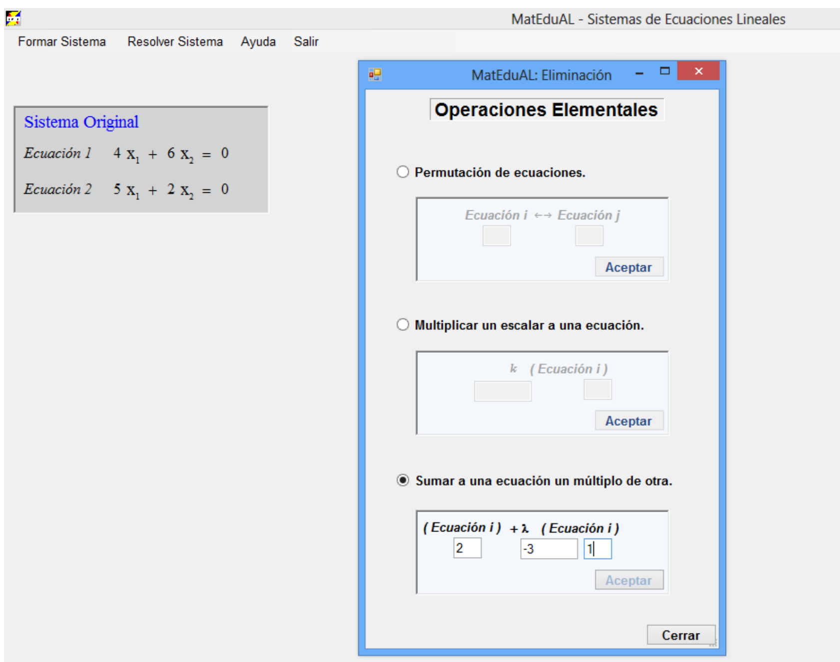


Imagen 3.2.7. Representación geométrica de $AX = \lambda X$ con los vectores columna de A L.D.

La segunda actividad finaliza con el estudio de otros casos, por ejemplo, cuando la matriz A es triangular superior y tenemos multiplicidad en los valores propios de la matriz A.

Finalmente, las actividades 3 y 4 se centran en la ecuación vectorial de la forma $AX = \lambda X$. La primera subactividad se centra en determinar los valores propios de tres matrices 2×2 específicas, dejando abierto el uso de *GeoGebra* o cualquier otra herramienta para resolver el problema planteado. La subactividad que le sigue es determinar los vectores propios y en este caso si se ofrece una herramienta digital diseñada en *GeoGebra*.

Las siguientes subactividades están enfocadas a encontrar la solución general a la ecuación $(A - I\lambda)X = 0$ estudiando primero el caso $AX=0$ utilizando AlSel.



Interfaz de AlSel.

Se trata pues, de que el estudiante concluya que necesariamente $A - \lambda I = 0$ y determinar el polinomio característico.

Vale la pena mencionar, que tenemos pensado incluir Calvisual en un futuro para abordar en este punto los casos de matrices 3×3 y 4×4 para resolver los respectivos polinomios característicos.

Con esto damos por concluida esta sección y ahora pasamos a la sección dedicada a diseñar una orquestación instrumental que movilice y organice los recursos didácticos digitales.

3.3. Orquestación instrumental.

Trouche (2004) introduce el término de *orquestación instrumental* para explicar la necesidad de una dirección y organización del proceso de génesis instrumental: "I introduce the term *instrumental orquestration* to point out the necessity (for a giving institution – a teacher in her/his class, for example) of external steering of students' instrumental génesis." (297). Por lo tanto, el profesor es en esta metáfora, es una especie de director de un grupo musical, que ha de organizar a los miembros del grupo y los artefactos en torno a un propósito específico, en nuestro caso, profesores dirigiendo y organizando orquestas en salones de clase con el propósito de aprender y comprender los conceptos matemáticos.

Para Trouche (ídem) la orquestación instrumental se conforma de dos elementos: las configuraciones didácticas y los modos de explotación. La configuración didáctica se refiere a la selección de cada uno de los elementos que serán utilizados en el proceso de ejecución, en la enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos: "A *didactical configuration* is an arrangement of artefacts in the environment, or, in other words, a configuration of the teaching setting and the artefacts involved in it."(Drijvers et al, 2010, p. 215). Los modos de explotación son entonces, las elecciones didácticas que el profesor decide para explotar las configuraciones didácticas.

Claramente, la orquestación instrumental tiene un propósito, un fin a alcanzar. Como en el caso de una orquesta sinfónica, un grupo de jazz o una banda de rock, se trata de alcanzar una armonía, un dominio de los instrumentos, etc. Que se ve reflejada en la manera de interpretar una canción; en este mismo sentido, dentro de un salón de clase habrá de desarrollarse paulatinamente la armonía y el dominio de los artefactos a fin de interpretar, aprender y comprender los conceptos matemáticos de interés.

Antes de establecer nuestra propuesta metodológica para la elaboración de una orquestación instrumental, es necesario tomar en cuenta la extensión hecha por Drijvers et al (2010) respecto a la caracterización de la orquestación instrumental. Para Drijvers et al (ídem), una orquestación instrumental además de la configuración didáctica y los modos de explotación, existe un tercer elemento: el desempeño didáctico:

> "A *didactical performance* involves the ad hoc decisions taken while teaching on how to actually perform in the chosen didactic configuration and exploitation mode: what question to pose now, how to do justice to (or to set aside) any particular student input, how to deal with an unexpected aspect of the mathematical task or the technological tool, or other emerging goals."(p. 215).

Básicamente se trata de la toma de consciencia del director de la orquesta sobre lo que funciona o no en la orquestación, de aquello que permite encaminarse hacia el objetivo, que aparece como relevante para alcanzar el éxito, y también desde luego, de las dificultades y limitantes didácticas.

Esta última característica de la orquestación instrumental, a nuestro juicio hace posible la reconfiguración de la orquestación instrumental en términos prácticos. Es decir, como en la metáfora musical, un director de orquesta tiene sus métodos, sus creencias, una experiencia que le permite diseñar un arreglo musical muy al principio; esta finalmente se modifica, se transforma a raíz de la consciencia del director sobre los errores y aciertos en las prácticas musicales, tomando por lo tanto decisiones y llevando a cabo cambios, sobre todo los modos de explotación. En el caso particular de la enseñanza de las matemáticas, las transformaciones de una orquestación instrumental, dependen de las dificultades que los estudiantes tengas en el aprendizaje del concepto matemático de interés, del nivel de instrumentación e instrumentalización alcanzado, del tiempo y de los recursos didácticos.

Ahora bien, nuestro planteamiento metodológico tiene como propósito establecer los elementos necesarios para diseñar una orquestación instrumental para apoyar la enseñanza y dirigir la instrumentación e instrumentalización de los recursos didácticos elaborados con la metodología PAP-AI para la comprensión y aprendizaje de conceptos del álgebra lineal en un primer curso universitario. En esta dirección, los elementos metodológicos que a continuación procederemos a describir están asociados a los dos primeros elementos que conforman una orquestación instrumental: una configuración didáctica y un modo de explotación.

3.3.1. Una configuración didáctica.

Como ya se ha mencionado, la configuración didáctica es un arreglo de los artefactos o herramientas que estarán disponibles en el proceso de enseñanza y aprendizaje, además de una configuración del escenario de enseñanza; ambos elementos necesarios para alcanzar el propósito didáctico. Estos dos elementos que conforman una configuración didáctica, conforman nuestros primeros dos elementos metodológicos para el diseño de nuestra orquestación instrumental.

Primer elemento (arreglo de artefactos). Elección de las herramientas (de los instrumentos en términos de la metáfora) adecuadas para desarrollar la o las actividades propias de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Además, de llevar a cabo un análisis breve de las ventajas y desventajas que cada herramienta introduce en su respectivo uso.

Por ejemplo, si se tiene como propósito únicamente la visualización geométrica de sistemas de ecuaciones lineales 2×2, es posible que *GeoGebra* sea una herramienta adecuada, sin embargo, *GeoGebra* cuenta con un amplio menú de herramientas en el que nuestros estudiantes podrían entretenerse innecesariamente, por lo que convendría la restricción del menú de sus herramientas, dejando sólo a disposición del usuario-estudiante una herramienta conveniente.

Sin duda, la elección de un arreglo de artefactos adecuado no es sencilla, requiere del conocimiento de las herramientas a usar, de ser consciente en sus ventajas y desventajas, pues juegan un papel esencial en el proceso de adquisición de ideas y conceptos matemáticos. Además, éstas son parte del escenario de enseñanza, espacio en donde se llevan a cabo procesos de reflexión, de expresión de ideas, de planteamientos personales y grupales, de discusiones en la resolución de un problema o actividad. Por lo tanto, el escenario de enseñanza también juega un papel primordial en la puesta en práctica de la orquestación instrumental.

Segundo elemento (composición del escenario). Establecer la composición del escenario donde se llevará a cabo le orquestación. Es decir, determinar espacios para herramientas, estudiantes y profesor.

Por ejemplo, una composición del escenario de enseñanza puede ser el clásico salón de cómputo, en donde cada estudiante está dispuesto frente a una computadora, con espacio suficiente en el escritorio para tomar nota de las explicaciones frecuentes del profesor siempre frente ellos y a través de un pizarrón electrónico. Una composición del escenario de enseñanza diferente a la anterior surge con tan solo cambiar la posición del profesor, que en lugar de estar siempre frente al grupo, se movilice dentro de la sala, ya sea para observar la actividad del estudiante y/o para apoyarle directamente en dudas que aparezcan.

3.3.2. Un modo de explotación.

Nosotros proponemos un modo de explotación que promueva: (1) el trabajo individual de los estudiantes, así como (2) el trabajo colaborativo entre los estudiantes. En ambos casos, las actividades y los recursos didácticos elaborados con la metodología conforman la trayectoria didáctica a seguir durante la orquestación.

El profesor ha de jugar varios papeles, en ocasiones ha de ser el experto, en otros momentos un especie de “coach” que ayuda y/o cuestiona, dado que el propósito es que el estudiante construya el concepto, enfrentándose a las dificultades mismas que implica resolver un problema en matemáticas.

Por otra parte, se sugiere que el profesor determine los momentos en que las herramientas habrán de ser utilizadas; los tiempos en que los estudiantes habrán de desarrollar una actividad individual o bien un trabajo colaborativo. Decidirá cuando finaliza una actividad, seleccionará miembros del grupo de estudiantes para explicar sus ideas y soluciones del problema o actividad matemática planteada.

En términos generales es complejo establecer un modo de explotación específico, dado que regularmente cada profesor concibe y lleva a cabo orquestaciones basadas en sus creencias, experiencias y metodologías propias, por lo que esta sección se deja a modo de sugerencias generales para explotar una configuración didáctica. Además el trabajo de Drijvers et al (2010) ha mostrado la existencia de más de un tipo de orquestación instrumental, y quizá el siguiente paso sea responder a la pregunta: ¿Cuál de ellas es más exitosa en términos del aprendizaje de los conceptos matemáticos?

En cualquier caso, el modo de explotación que aquí proponemos y que utilizaremos para el diseño de nuestra orquestación instrumental no lo vemos como inamovible, sino todo lo contrario, y esperemos a su puesta en marcha para observar los aciertos y desaciertos, es decir, analizaremos el desempeño didáctico. A continuación presentamos la orquestación instrumental diseñada para la construcción de conceptos del álgebra lineal.

3.4. Diseño de una orquestación instrumental para la enseñanza de las matemáticas.

Comenzaremos por repetir el objetivo de la orquestación instrumental es diseñar: la orquestación de los diversos “artefactos” que se utilizarán en la construcción de conceptos básicos del álgebra lineal; organizar la intervención de las tecnologías, la participación del docente; la componente didáctica; la actividad interactiva; etc. Para promover una mejor comprensión de conceptos como vector, sistemas de ecuaciones lineales y combinación lineal

La configuración didáctica en nuestro caso es la siguiente:

1. Un problema que simule una situación real.

2. Hojas de trabajo que guíen las actividades.

3. Recursos digitales

    3a) (acceso en la red de: videos, páginas, etc.).

    3b) Software de geometría dinámica *GeoGebra*.

    3C) Software educativo *AlSel*.

4. Aplicación en línea para el trabajo colaborativo *Etherpad*.

5. Recursos físicos

6. Microcomputadoras del tipo PC.

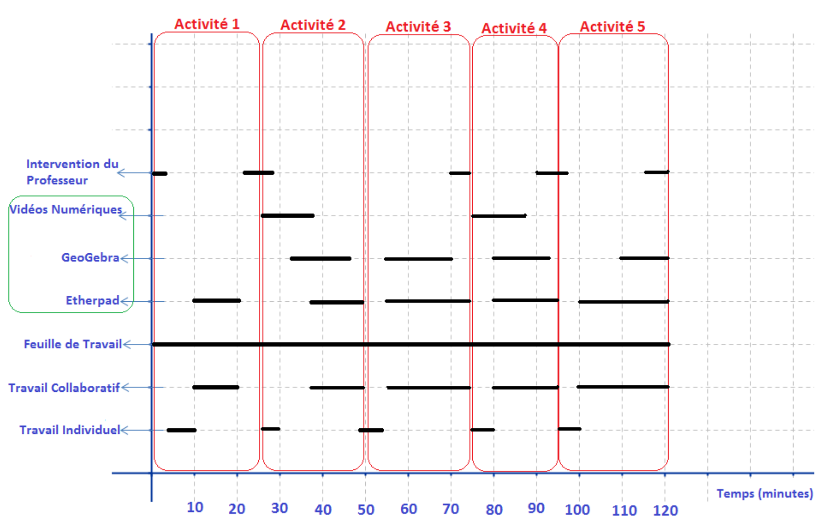
7. Cañón de proyección

8. Papel y lápiz.

9. Pizarrón tradicional.

La hoja de trabajo guían la actividad del alumno en base a la trayectoria didáctica a seguir. Se inicia con el planteamiento de un problema real y se desarrollan las correspondientes actividades que giran en torno a los conceptos de vector y sistemas de ecuaciones lineales, combinación lineal, dependencia e independencia lineal, vectores y valores propios.

En el primer caso, relacionado con la descarga de archivos informáticos, el tiempo disponible fue de 120 minutos para llevar a cabo todas las actividades, a continuación presentamos la organización de tiempos y configuración didáctica:

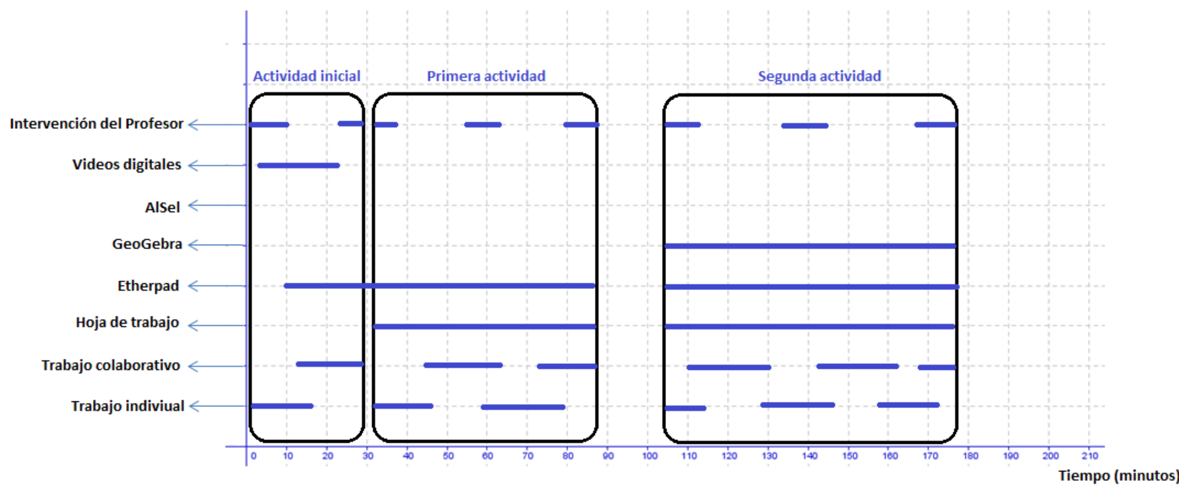


Como se puede observar en la gráfica anterior, nuestro diseño propone intervenciones del profesor hacía el inicio de cada actividad. Los recursos digitales como los videos son parte de la segunda y cuarta actividad, por lo que el profesor tendrá que proporcionar a los estudiantes el recurso a su debido tiempo. Esto mismo sucede con los otros recursos como *GeoGebra* y *Etherpad*.

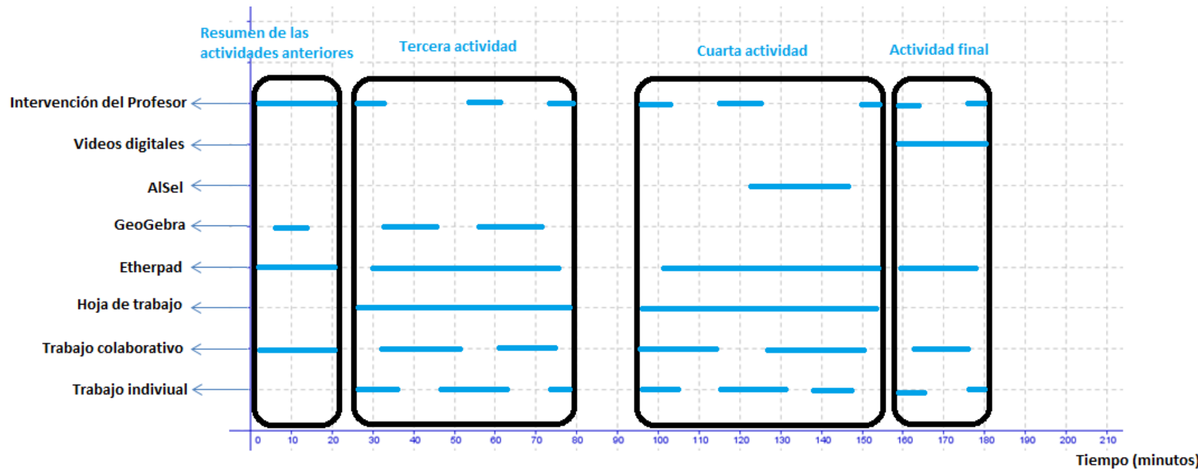
La hoja de trabajo, en nuestro diseño está presente todo el tiempo, pues se proporciona a cada uno de los estudiantes en papel.

Finalmente, nuestro diseño marca momentos específicos de trabajo colaborativo y trabajo individual.

Para el otro caso, relacionado con el fenómeno de resonancia, contamos con un tiempo de 6 horas repartidas en dos sesiones por día de 3 horas cada sesión, por lo que la organización de tiempos y configuración didáctica quedo representada así:



Representación de orquestación de primera sesión.



Representación de orquestación de segunda sesión.

Es así como damos por finalizado este capítulo. En el siguiente capítulo reportamos la puesta en práctica tanto de los recursos digitales elaborados como de la orquestación instrumental diseñada.

Capítulo 4. Experiencias didácticas y conclusiones.

En este último capítulo tiene como propósito exponer la experiencia desarrollada al poner en práctica los recursos didácticos digitales elaborados bajo la metodología PAP-AI (ver capítulo III, sección 3.1) para apoyar le enseñanza y con ello promover el aprendizaje del álgebra lineal apoyada en ambientes computarizados; los pormenores surgidos al implementar una orquestación instrumental; y finalmente las conclusiones de este trabajo de investigación. En este sentido, la primera sección versa alrededor de las características asociadas a los grupos de estudiantes en los que se probaron los recursos didácticos digitales y la orquestación instrumental diseñadas. La segunda sección presenta un análisis cualitativo no exhaustivo de la implementación de los recursos didácticos digitales y la orquestación instrumental en relación con los propósitos didácticos introducidos por la metodología PAP-AI. La tercera sección, presenta el origen de las transformaciones de la orquestación instrumental utilizada, así como ciertos cambios realizados a algunos de los recursos didácticos; sugeridos por la experiencia. Estas transformaciones y cambios se encuentran relacionados a errores, dificultades y objetivos no alcanzados que se observaron durante el desempeño didáctico de la orquestación. Finalizamos el capítulo con la exposición de las conclusiones finales del trabajo de investigación que reporta este documento y con algunas perspectivas a futuro.

4.1. Características generales de los grupos de estudiantes.

La orquestación instrumental de los recursos didácticos digitales diseñados bajo la metodología PAP-AI para promover la comprensión de conceptos asociados a un primer curso de álgebra lineal, se llevó a cabo con dos grupos de estudiantes en diferente lugar y tiempo. El primer un grupo estuvo conformado por estudiantes de maestría de la Universidad de Lyon 1 en Francia, nos referiremos en adelante a este grupo como el grupo **A**; el segundo fue un grupo de estudiantes de maestría de departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN en México y será referenciado como grupo **B**.

Con el grupo A se orquestaron en el otoño de 2012 los recursos didácticos asociados a la situación real que denominamos: descarga de archivos informáticos; con el grupo B se implementaron en el otoño de 2013 los recursos didácticos asociados a la situación del colapso del puente Tacoma. A continuación una breve descripción del entorno institucional que en su momento cada grupo atravesaba.

La Universidad de Lyon 1 (Université de Lyon 1[1]) en su oferta educativa, ofrece un posgrado o maestría en Enseñanza, Aprendizaje y Difusión de las Matemáticas (Enseignement, Apprentissage et Diffusion des Mathématiques[2]), posgrado al que pertenecían el grupo A. En este cuadro, los estudiantes cursan varias materias para adquirir las competencias que marca el posgrado, en particular, una de las materias se denomina *e*-cultura (*e*-culture). En el año 2012, entre los meses de septiembre a diciembre, esta materia estuvo a cargo del Profesor Luc Trouche y dado que nos encontrábamos realizando una estancia de estudios de doctorado bajo su dirección, fue posible la orquestación de los recursos didácticos digitales con estudiantes de esta maestría. Cabe destacar que los estudiantes de este posgrado son de formación matemática, es decir, realizaron estudios de licenciatura en matemáticas.

El grupo B fue un grupo de estudiantes de maestría del departamento de Matemática Educativa[3] del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN[4]. Este grupo se encontraba tomando el curso denominado como Nuevas Tecnologías y Educación Matemática impartido por los doctores Luis Manuel Santos Trigo y François Pluvinage en el otoño de 2013; agradezco el apoyo de estos dos reconocidos investigadores, en particular agradezco al Dr. François Pluvinage por cederme un par de días del curso para orquestar los recursos digitales desarrollados para promover una mejor

[1] http://www.univ-lyon1.fr/
[2] http://math.univ-lyon1.fr/capes/spip.php?rubrique61
[3] http://www.matedu.cinvestav.mx/
[4] http://www.cinvestav.mx/

comprensión de los conceptos de vector y valor propio mediante la metodología PAP-AI, además de sus relevantes comentarios y sugerencias.

A continuación entramos en detalle sobre las dos experiencias didácticas desarrolladas, iniciamos con el grupo A.

4.1.1. Sobre el curso e-culture y el grupo A.

El curso *e*-cultura tiene como propósito general mostrar al estudiante las ventajas y desventajas de utilizar herramientas tecnológicas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Varias áreas de las matemáticas son tocadas en la duración del curso, como la geometría, teoría de números y álgebra, y también, diferentes herramientas tecnológicas y computacionales son propuestas para ser utilizadas, tal es el caso de Cabri Géomètre, GeoGebra, LaTeX, *Etherpad, SlideShare, Claroline* e *Intergeo* por mencionar algunas.

Veintiocho estudiantes en total recibieron el curso, en la mayoría de las sesiones los estudiantes se dividían en dos subclases, una con 15 estudiantes y otra con 13. Los estudiantes son de formación matemática y el propósito de la maestría es formarles para ingresar como profesores de matemáticas en el sistema educativo francés público o privado, ya sea en educación primaria (l'école élémentaire), en educación secundaria (le collège) o en educación media superior (le lycée).

Dado que los estudiantes tienen una formación matemática, un curso de álgebra lineal fue parte de su formación profesional. En este sentido, objetos matemáticos tales como vector geométrico, sistema de ecuaciones lineales y combinación lineal no son desconocidos para ellos, sin embargo, la formación matemática tiene una orientación más formal y pura, en comparación con nuestra propuesta didáctica, que tiene un enfoque más conceptual.

A continuación daremos algunos detalles de la sala de cómputo, de los recursos materiales disponibles, así como de las sesiones y su duración.

4.1.2. Sobre el escenario y los tiempos con el grupo A.

La mayoría de las sesiones correspondientes al curso de *e*-cultura se realizaron en una sala de cómputo dotada con quince computadoras de escritorio (ver Imagen 4.1.2). Cada computadora con acceso a *internet* sin restricciones, con la posibilidad de descargar aplicaciones o instalar software.

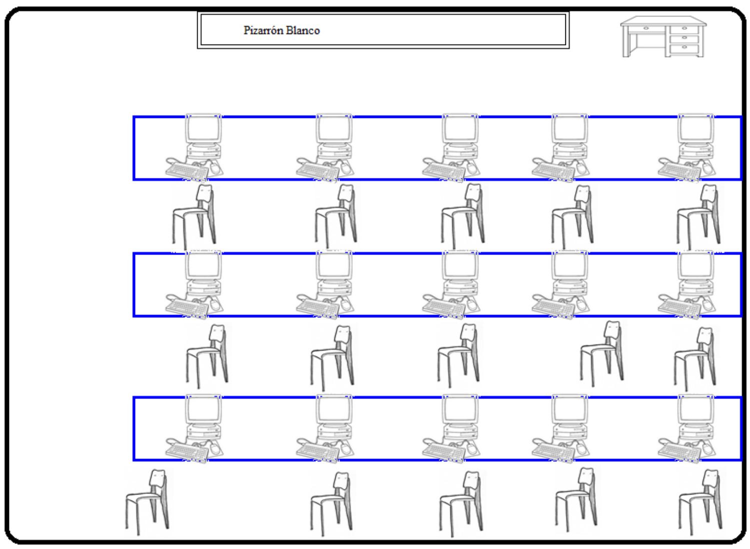


Imagen 4.1.1. Sala de cómputo.

El salón está acondicionado para un máximo de 15 personas, la posibilidad de que una computadora pueda ser ocupada por dos personas es casi nula. Esta es una de las razones por la que la cantidad total de estudiantes inscritos al curso se dividió en dos subclases como ya se mencionó en la sección 4.1.1. El curso era impartido una vez a la semana, regularmente los miércoles de las 15h00 a las 17h00.

Para probar nuestros recursos didácticos y poner en marcha la orquestación instrumental diseñada para la enseñanza y aprendizaje de conceptos básicos de un primer curso de álgebra lineal, se utilizó una sesión del curso, el día 14 de octubre de 2012. De esto es necesario resaltar que los estudiantes ya habían tenido un par de sesiones usando *GeoGebra* y *Etherpad*, es decir, ya había una instrumentación de estos artefactos.

En resumen tenemos que:

- Las sesiones son de dos horas.
- Las sesiones se realizan en una sala de cómputo.
- La clase se divide en dos subclases, una con 13 elementos y otra con 15.
- Estudiantes con formación matemática.
- Estudiantes con al menos un curso previo de álgebra lineal.
- La génesis instrumental de los artefactos GeoGebra y Etherpad en cada estudiante del curso ha comenzado.
- Un estudiante por computadora.

En general, este es el escenario previo a la implementación de los recursos didácticos digitales para promover el aprendizaje de conceptos básicos de un primer curso de álgebra lineal, así como a la puesta en marcha de nuestra orquestación instrumental. A continuación, explicamos brevemente como se llevó a cabo la recolección de la información de la experiencia didáctica realizada el 14 de octubre de 2012.

4.1.3. Sobre la recolección de información del grupo B.

Para llevar a cabo la recolección de información asociada a la implementación y puesta en marcha de los recursos didácticos digitales y la orquestación instrumental diseñada respectivamente, se acudió a la videograbación de la sesión completa y al registro del trabajo colaborativo entre los estudiantes a través de *etherpad*.
En el caso de la videograbación, la cámara ocupo un lugar fijo en una de las esquinas para hacer una toma completa de la clase, además, por las condiciones de espacio de la sala de cómputo consideramos como pertinente y adecuada esa posición, sin embargo, en algunas ocasiones pudo registrar momentos particulares de la interacción entre los estudiantes, la interacción entre estudiante y computadora, así como estudiantes y profesor.

Etherpad, como ya hemos mencionado, es un editor de texto en línea en tiempo real, diseñando especialmente para el trabajo colaborativo entre varias personas. Para distinguir a cada persona que interactúa en un mismo documento, se le asigna un color, además del nombre o seudónimo que el participante elija.

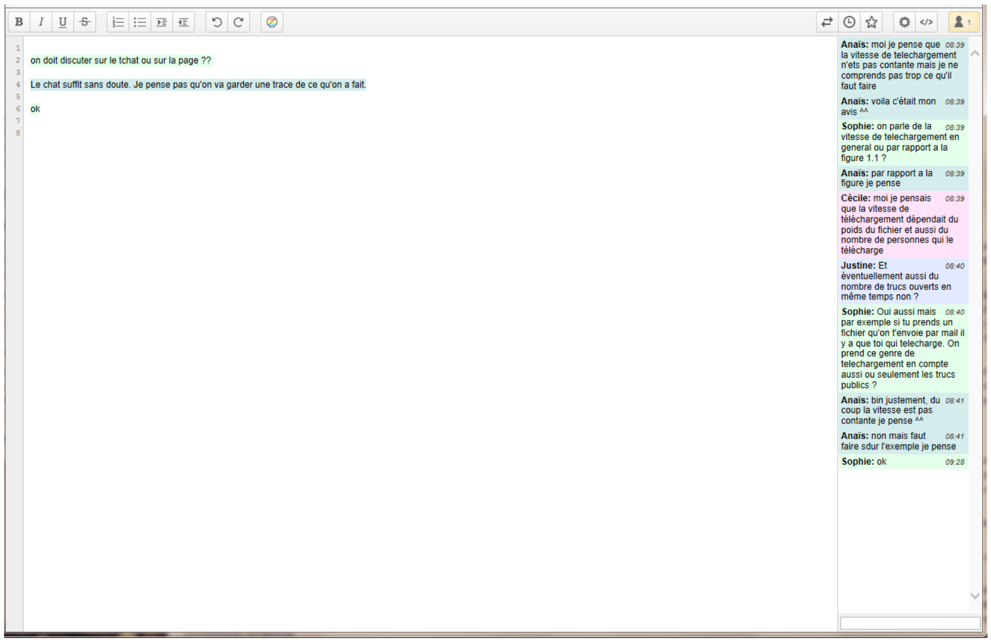


Imagen 4.1.2. Interfaz de Etherpad.

Cada documento tiene su propia URL, por lo tanto, lo que se escriba y dialogue en el chat permanecerán en línea hasta que la dirección URL sea eliminada evidentemente. Esta es una ventaja para nuestro trabajo de investigación, pues el trabajo colaborativo entre los estudiantes queda grabado en *Etherpad* y por lo tanto, es posible analizar los diálogos entre los estudiantes, sus ideas, sus dudas, sus dificultades e incluso los tiempos, pues *Etherpad* cuenta con una herramienta para reconstruir en el tiempo la colaboración.

A la víspera de la sesión para probar nuestros recursos didácticos digitales y la orquestación instrumental para apoyar la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal, generamos cuatro URL's para formar subgrupos de 3 o 4 estudiantes para el trabajo colaborativo durante la sesión.

A continuación presentamos los acontecimientos que consideramos como importantes durante la experiencia didáctica, así como un análisis paralelo.

4.1.4 Grupo B y el curso de Educación y Nuevas Tecnologías.

Dentro del marco de la maestría en ciencias con especialidad en Matemática Educativa se ofrece el curso de Educación y Nuevas Tecnologías, en términos generales este curso tiene como propósito promover el uso de las nuevas tecnologías en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como el desarrollo de metodologías que permitan mejoras las implementaciones de la tecnología en el aula. En el curso, se abordan diferentes áreas de la matemática, como el álgebra y la geometría, utilizando diferentes herramientas tecnológicas, en particular el uso de la computadora, aplicaciones web y software especializado, como *GeoGebra*.

El grupo B se conformaba de 8 estudiantes de diferentes formaciones: 3 licenciadas en matemáticas aplicadas, 2 licenciadas en matemáticas, un actuario, una ingeniero industrial y un ingeniero metalúrgico. En el momento que se llevó a cabo la experiencia didáctica, los estudiantes se encontraban en el tercer mes del curso, por lo que ya habían avanzado en el proceso de instrumentación de ciertas herramientas digitales como GeoGebra. Hay que destacar, que todos los estudiantes de maestría ya habían tomado un curso de álgebra lineal en sus respectivas licenciaturas.

A continuación describiremos el ambiente físico donde se desarrolló la experiencia didáctica con el grupo B.

4.1.5 Sobre el escenario y los tiempos con el grupo B.

El desarrollo de la experiencia didáctica se realizó en la sala de cómputo del departamento de matemática educativa que es representada en la siguiente imagen:

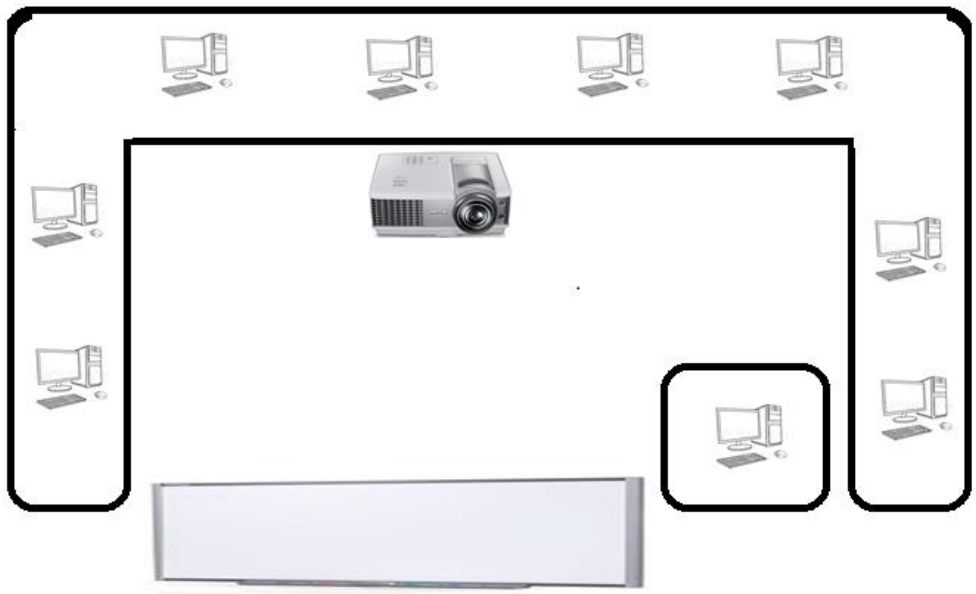


Imagen 4.1.3.Representación de sala de computó Matemática Educativa Cinvestav.

La sala de cómputo cuenta con computadoras de escritorio con acceso a internet, en éste caso, cada estudiante tuvo a su cargo una computadora durante la duración de la experiencia didáctica. La sala también cuenta con un proyector, un pizarrón blanco y una computadora de escritorio con acceso a internet para el profesor. Estas son las condiciones generales respecto al escenario físico donde se desarrollaron las actividades correspondientes a los conceptos de vectores y valores propios.

Por otra parte, el tiempo total de la experiencia didáctica fue de 6 horas, distribuidas en dos sesiones, cada sesión tuvo una duración de 3 horas. Las sesiones se llevaron a cabo de dos días entre las 09h00 y 12h00. Aunque vale la pena señalar que por medio de *Etherpad* se continuó con la comunicación y discusión de algunos temas propuestos en las actividades, dicha interacción virtual se realizó por la tarde.

En resumen tenemos que:

- Cada estudiante tiene a su cargo una computadora de escritorio.
- Dos sesiones de tres horas en dos días.
- Estudiantes con formaciones distintas.
- Cada estudiante ha tomado un curso de álgebra lineal.

- Los estudiantes no tienen experiencia con *Etherpad*.
- Los estudiantes utilizan sin problemas las herramientas de *GeoGebra* necesarias para el desarrollo de las actividades.

Es necesario hacer hincapié en el hecho que los estudiantes no conocían *Etherpad* ni habían escuchado antes sobre él previo a las dos sesiones. Como en el caso del grupo A se crearon diferentes *URL's* en *Etherpad* en su versión para *Google* y estás se entregaron a los estudiantes por parejas, es decir, dos estudiantes tenían la misma *url* para comunicarse y discutir entre ellos con intervenciones del profesor como mediador, realizando así un trabajo colaborativo.

De la misma forma que el grupo A, la información derivada de la experiencia didáctica realizada en las dos sesiones con el grupo B se recolectaron por medio de videograbación y por medio de *Etherpad*. Hay que puntualizar que el análisis de la información no es exhaustivo y tiene un enfoque cualitativo, gira en torno principalmente a contestar dos preguntas:

- ¿Qué funcionó bien?
- ¿Qué funcionó mal?

Evidentemente que ambas preguntas se encuentran estrechamente ligas al funcionamiento de los elementos de nuestra metodología, es decir, qué no funcionó en el diseño y desarrollo de la orquestación de los recursos digitales para apoyar la enseñanza y promover una mejor comprensión de los conceptos de un primer curso de álgebra lineal. A continuación presentamos el análisis de las experiencias.

4.2. Análisis de las experiencias didácticas.

Antes de iniciar con el análisis cualitativo de la experiencia didáctica, vamos a delinear algunos detalles de organización sobre la forma en cómo realizamos esta actividad y bajo que propósitos.

Se ha mencionado a lo largo de este trabajo de investigación que la orquestación instrumental tiene como objetivo dirigir la instrumentación e instrumentalización de los artefactos utilizados en actividades específicas, en nuestro caso, orquestar recursos didácticos digitales para apoyar el aprendizaje de los conceptos asociados a un primer curso de álgebra lineal.

En este sentido, hemos considerado llevar a cabo un análisis cualitativo bajo los siguientes propósitos:

- Determinar defectos y desventajas de nuestros recursos didácticos digitales.
- Identificar los tratamientos y construcciones de los conceptos matemáticos de interés por parte del estudiante bajo la metodología PAP-AI.
- Establecer las debilidades de la orquestación instrumental: ¿Cuánto del objetivo se cumplió? y ¿Qué fallo de nuestra orquestación?

Para alcanzar nuestros propósitos, analizaremos la información recabada en video y en *Etherpad*, básicamente nos centraremos en los siguientes aspectos:

- uso de los recursos didácticos digitales por parte de estudiantes y profesor;
- uso de otras herramientas por parte de los estudiantes;
- dirección de la orquestación instrumental;
- cambios en la orquestación; y,
- reconstrucciones de conceptos por parte de los estudiantes.

Dado que tenemos dos experiencias didácticas, dividiremos el análisis por cada experiencia. A continuación el análisis de la primera experiencia.

4.2.1. Análisis de la primera experiencia.

Como sabemos, la primera experiencia giro en torno a la situación real que denominamos: descarga de archivos digitales o informáticos, cuyos objetivos son la construcción del concepto de vector geométrico, la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y el uso de la combinación lineal.

El primer paso como lo dicta la metodología PAP-AI, es proponer a los estudiantes la situación real. Aquí salta una de las primeras observaciones, la orquestación instrumental diseñada no dedicó un tiempo específico para esta actividad, de hecho se propone como parte de la primera actividad. Del análisis del video, es posible observar como los estudiantes muestran bastante interés en el problema planteado y a la vez externan sus dudas, por lo que consideramos necesario ampliar la hoja de actividades, incluyendo como primera actividad el análisis de la situación real.

La primera actividad como se propone en la hoja de actividades diseñada (ver anexo 1) tiene como propósito adentrar al estudiante en el problema real planteado y que ellos mismos propongan una representación gráfica de la situación. Para ello, el profesor en turno, entrega a cada uno de los estudiantes las hojas de trabajo con las cinco actividades a desarrollar en las siguientes dos horas. Inmediatamente después, les explica la forma en que se llevará a cabo el trabajo: habrá momentos de trabajo individual y momentos de trabajo colaborativo a través de *Etherpad*.

Un primer inconveniente que aparece al inicio de la sesión es la entrega de los recursos didácticos digitales a los estudiantes, pues aunque estos habían sido "montados" sobre *mediafire* para ser descargados posteriormente, algunos de los estudiantes atraviesan por inconvenientes por su falta de habilidad y desconocimiento al usar esta aplicación en línea.

Esta situación se llevó un tiempo aproximado de 10 minutos, y no fue tomada en cuenta para el diseño de la orquestación instrumental, pues prácticamente nuestro diseño parte de la primera actividad. Evidentemente, estos 10 minutos se le restarían a alguna actividad posterior.

A continuación dividiremos nuestro análisis en las acciones llevada a cabo por el profesor y las acciones llevadas a cabo por los estudiantes.

Acciones del profesor:

- Apoyo constante a los estudiantes en cuestiones técnicas: Descargar de los recursos y uso de los recursos.
- Constantes intervenciones en el proceso de análisis de la situación real propuesta.
- Cuestionamientos constantes a los estudiantes sobre su interpretación de la situación real.

Si bien el diseño de la orquestación instrumental propone momentos de intervención del profesor en la actividad, estas intervenciones no obedecen el orden propuesto por el diseño.

Acciones de los estudiantes:

La mayoría de los estudiantes muestran un interés inmediato por la situación real planteada y comienzan expresar su pensar al respecto. Por ejemplo, una estudiante dialoga abiertamente con el profesor:

- Estudiante: Yo creo que la velocidad de descarga no es constante.
- Profesor: de acuerdo, pero cómo explicas a los otros que efectivamente la descarga no tiene un comportamiento constante.
- Estudiante: yo pienso que la descarga depende del número de personas que descarguen al mismo tiempo el archivo informático.
- Profesor: eso está bien… pero a través de la información que hay en la hoja de trabajo, cómo tu puedes establecer gráficamente que la velocidad de descarga es efectivamente no constante.

Este dialogo muestra evidentemente el proceso de comprensión de la situación real en los estudiantes y el profesor intenta guiarlos hacia el establecimiento de una representación gráfica de la información que explique el comportamiento no lineal de la descarga.

Cabe destacar que en esta actividad las herramientas que utilizan los estudiantes son el lápiz y el papel, y *etherpad*, a continuación un dialogo que muestra el trabajo colaborativo:

Alors?

Personnellement,je pense que ça n'est pas toujours constant.

Pareil

Le coefficient directeur entre a et b est de 0,275

Celui entre b et c de 0,175.

Donc...

donc pas constant ? c'est tout ce qu'il faut dire ?

Je pense

T'as mis quoi pour justifier le graphique ?

Que c'était la représentation la plus simple pour constater une vitesse constante:le temps en abscisse et la "distance parcourue" en ordonnée

ok j'ai mis la même chose à peu près

Este diálogo muestra cómo los estudiantes justifican que la velocidad de descarga no es constante calculando la pendiente de un segmento y su gráfica es la relación entre el tiempo y la "distancia recorrida", en realidad debería ser la cantidad de megabytes descargados. Para nosotros esta concepción matemática inicial de los estudiantes del problema es la esperada y confirma los supuestos que se hacen al diseñar la actividad.

La segunda actividad ha sido pensada bajo este primer esquema que los estudiantes tienen del problema y se encargara de depurar dos cosas: la velocidad con la que tratan no es la instantánea sino la promedio, y es la pendiente del segmento de recta generado por un intervalo de tiempo (abscisas) y por un intervalo de megabytes (ordenada).

Sin embargo, hasta este punto, no se han dado cuenta que el tiempo que han utilizado no es el tiempo real de descarga sino el tiempo estimado. Este es un defecto que obstruye la continuación de las actividades, pues el problema sólo cuestiona sobre la velocidad y no sobre la estimación del tiempo, por lo que necesariamente habrá que modificar esta parte en la hoja de actividades.

Además, esta actividad se realiza en aproximadamente en 30 minutos que sumados a los 10 minutos iniciales de inconvenientes técnicos da un total de 40 minutos. De acuerdo con nuestro diseño de orquestación instrumental se debía estar en el final de la segunda actividad.

Análisis de la segunda actividad (vector geométrico en $\mathbb{R}^2$).

La falta de una pregunta en el planteamiento inicial del problema real sobre la estimación del tiempo que resta de la descarga confunde a los estudiantes, dado que para ellos el problema ha sido resuelto. De esto se da cuenta el profesor, he interviene nuevamente para explicar que el propósito es establecer un modelo matemático que explique el comportamiento de la descarga de ficheros informáticos y cómo se estima el tiempo que resta en la descarga. Una vez dada esta explicación se inicia la segunda actividad.

El propósito de esta actividad se centra en la construcción del concepto de vector geométrico en el origen y vector geométrico fuera del origen.

En esta actividad dos recursos didácticos digitales son puestos a la disposición de los alumnos: *GeoGebra* y un video montado en *youtube* que muestra la descarga en tiempo real de un video musical.

Nuevamente surge un primer inconveniente, la cantidad de datos que se pide que recaben los estudiantes son muchos y toma más tiempo de lo diseñado al extraer los datos, y su importancia no es trascendental para la actividad.

Por otra parte, aunque los estudiantes ya han avanzado en la instrumentación de GeoGebra, el recurso didáctico producido con este software tiene características distintas, pues de entrada todas las herramientas del software han sido suprimidas y sólo hay dos herramientas: vector en el origen y vector móvil. Entonces, un nuevo proceso de génesis instrumental aparece.

Esta actividad no resulta sencilla en general, los estudiantes se confunden, tardan tiempo en entender las herramientas, y por lo tanto el tiempo transcurre, prácticamente son 40 minutos los que se llevan en realizar la actividad.

Si bien si llegan a la construcción del objeto vector geométrico, detectamos una falta de ejercicios que permitan bien construir el concepto y otros problemas para reforzar el concepto y su comprensión.

Dadas las circunstancias el profesor toma la dirección completa de la actividad y toma los 30 minutos restantes para explicar el modelo matemático que permite estimar de forma lineal el tiempo que resta en la descarga de archivos informáticos.

Evidentemente, que esto nos permite concluir que orquestar los recursos didácticos digitales para apoyar la construcción de los conceptos antes mencionados requiere de más tiempo, prácticamente del triple del tiempo utilizado en la experiencia, es decir, unas seis horas.

Por otro lado, el uso de *Etherpad* es un promotor de los debates entre los estudiantes, además de promover los intercambios de ideas y cuestionamientos que en muchas ocasiones no se atreven a externar a toda la clase o al mismo profesor.

En resumen,

- Se requiere de más tiempo para orquestar los recursos didácticos digitales.
- Se ve necesario diseñar un instrumento de medición que evalúe o muestre el grado de conocimiento del tema, antes de la actividad.
- Es necesario incluir una hoja de ejercicios y problemas relacionados con el concepto de interés para reforzar los conceptos que van construyéndose.
- Es necesario dedicar un espacio propio a la compresión del problema real planteado como actividad inicial.
- Hay que reorganizar la orquestación instrumenta, sobre todo en tiempos e intervenciones del profesor, además de tener claro que con Etherpad el trabajo colaborativo es abierto y continuo.

A continuación se presenta el análisis de la segunda experiencia que parte del problema real asociado al colapso del puente Tacoma.

4.2.2. Análisis de la segunda experiencia.

La segunda experiencia tuvo como propósito probar y orquestar los recursos didácticos digitales diseñados para apoyar la construcción y comprensión de los conceptos de vector y valor propio de una matriz A de 2×2.

A causa de la primera experiencia didáctica, la orquestación instrumental que se diseñó para esta experiencia, propone como actividad inicial la presentación del problema real. La experiencia inicia con algunas explicaciones sobre el uso de *Etherpad*, dado que ninguno de los estudiantes había tenido contacto con esta aplicación; esta actividad toma un aproximado de 5 minutos. Enseguida se inicia la proyección de un video relacionado con el colapso del primer puente Tacoma; al finalizar el video el profesor cuestiona a diferentes estudiantes sobre el fenómeno que muestra el video, en particular les pide una explicación de acuerdo a sus creencias y formación profesional del por qué colapsa el puente, llamando la atención las respuesta de una estudiante que termina por decir: "sólo se me ocurre que hubo un error de cálculos". Está respuesta el profesor la toma como un hilo conductor para que ellos comiencen a pensar en el modelo matemático y les siguiere discutan en *Etherpad*.

Después el profesor ofrece una explicación, presentado el modelo matemático y centrándose en la aparición de la ecuación vectorial característica.

En este punto, la experiencia marcha bien, en apariencia los estudiantes han comprendido la situación y están de acuerdo que el problema se encuentra en resolver la ecuación vectorial. Es importante señalar un par de cosas:

- *Etherpad* en su versión para Google tuvo problemas de conexión, continuamente se desconectaba y por lo tanto se cortaban las conversaciones entre los estudiantes, así que las discusiones en momentos se daban fuera de *Etherpad* en forma grupal.
- Todos los estudiantes mostraron un notorio interés por el tema y también aceptaron recordar muy poco sobre el mismo.
- Según los estudiantes, la presentación inicial con el video y la explicación posterior del profesor les resulto clara y poco convencional.

Hay que mencionar, que hasta este momento la orquestación de los recursos llevaba buen ritmo, es decir, los tiempos estipulados en el diseño se estaban cumpliendo.

Análisis de la primera actividad

Después de la explicación del modelo matemático de la situación real planteada, se inició con la primera actividad. Recordemos que esta actividad tiene como propósito estudiar geométricamente las expresiones de la forma Ax y λx. Al respecto, es necesario señalar que la mayoría de los estudiantes se mostraron confundidos con la petición de representar una matriz geométricamente, aunque no tardaron mucho en hacerlo y sobre todo, hacerlo bajo argumentos válidos. Desde nuestro punto de vista, el hecho de que los estudiantes se muestren confundidos al pedirles una interpretación geométrica de objetos matemáticos vectoriales o ecuaciones algebraicas vectoriales, quizá se deba a la poco o nula relación que en cursos previos se da a la geometría con temas algebraicos.

Por otro lado, hubo un par de representaciones geométricas:

- Columnas como puntos.
- Columnas como segmentos de recta dirigidos.

La mayoría de los estudiantes recurrió a la búsqueda de información por *internet* y al uso de *GeoGebra*, también resulta relevante, que por medio de *Etherpad* se pasaban información e ideas hasta concretar una idea común respecto al tema.

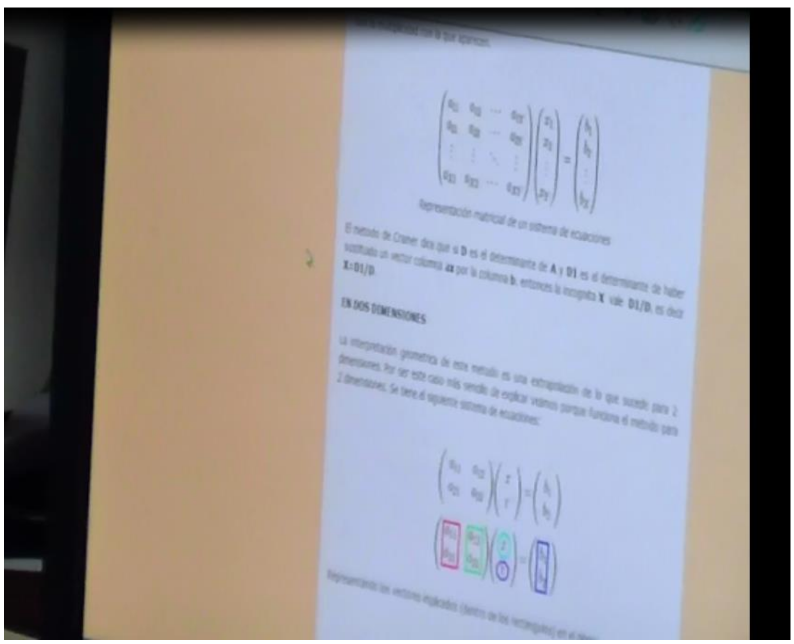


Imagen 4.2.1. Información consultada por un estudiante.

Un hecho interesante es la tendencia del estudiante a ocultar sus acciones ante el profesor y esto evita desde nuestro punto de vista una observación más objetiva por parte del profesor sobre proceso de construcción de los conceptos matemáticos, sin embargo con *Etherpad*, es posible cerrar un poco esta brecha entre profesor y estudiante, más adelante retomaremos este punto.

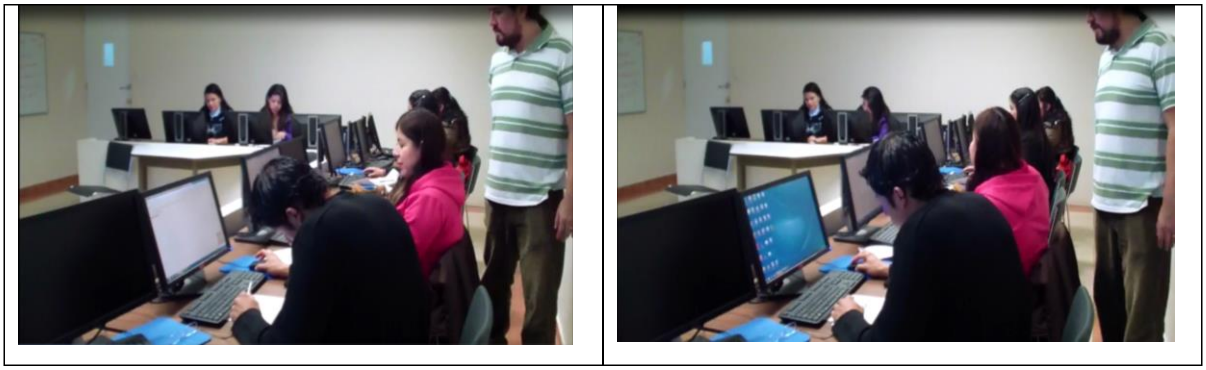


Imagen 4.2.2. Momentos en que un alumno oculta la interfaz de Etherpad cuando se acerca el profesor.

Durante el desarrollo de esta actividad, fue una constante que los estudiantes recurrieran a buscar información en internet, esto nos representa un proceso de investigación en el momento, pues se trata de encontrar elementos que les ayuden a resolver el problema planteado y se da con la combinación de un trabajo individual y colaborativo.

Un elemento a destacar dentro de la orquestación, es el papel del profesor, en este caso tiene un papel muy activo, acercándose a cada estudiante para apoyar en el proceso de instrumentación de *Etherpad* y la resolución de los problemas matemáticos planteados. Además, en diferentes ocasiones sugiere a algunos estudiantes para explicar la manera en cómo han resuelto los problemas, como se muestra en la siguiente imagen:

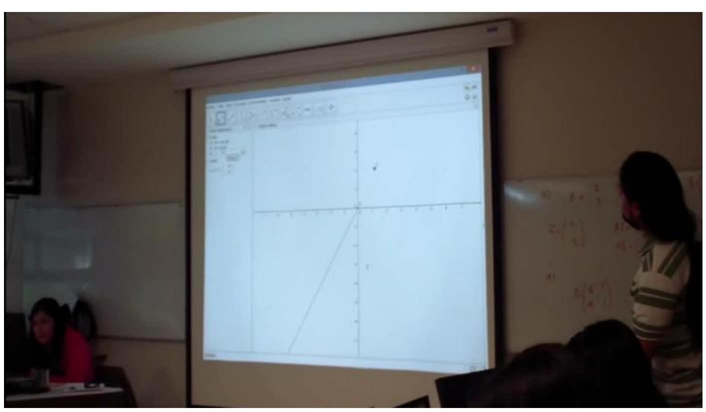


Imagen 4.2.3. Estudiante explicando la representación geométrica de Ax con GeoGebra.

Al analizar el video, el profesor tiene intervenciones constantes después de alguna de las explicaciones de los estudiantes, ya sea para reforzar las ideas presentadas por los estudiantes o bien para agregar alguno que u otro detalle.

Análisis de la segunda y tercera actividad.

Recordemos que la tercera y cuarta actividad diseñadas para la construcción de los conceptos de vector y valor propio, se centran en el estudio y análisis de la ecuación vectorial de la forma $Ax - \lambda x = 0$.

Para el desarrollo de esta segunda sesión de la experiencia didáctica, se recurrió al uso de *Etherpad* en su versión para *Firefox*, esto a causa de que en la primera sesión hubo problemas de conexión, estás son las url's (última visita el 28 de mayo de 2014):

https://etherpad.mozilla.org/k43r6W4Sk2
https://etherpad.mozilla.org/pUiIRbsvmH
https://etherpad.mozilla.org/ts4yYyoVy5
https://etherpad.mozilla.org/aAHExa4A7I

A diferencia de la primera sesión, *Etherpad* funcionó correctamente durante toda la sesión. A continuación presentamos el diálogo entre un par de estudiantes en *Etherpad* (este dialogo puede consultarse en https://etherpad.mozilla.org/k43r6W4Sk2):

En este espacio sí es posible escribir! Hola compañera... sorry Hola Gabriel! por renglones para la matriz B quedaria 1 -l, 4 2 , -1-l se obtiene el determinante, se iguala a cero y resuelve el sistema l^2 - 9 = 0 Qué es -l? ya .. lambda sí, entonces 3 y -3? y en geogebra? estoy checando Ya quedó Dime qué hiciste??

Que te salio de lamba?
en la matriz B me da -3 y 3
en la matriz C me da 0 y 5
en la matriz D me da -7/2

lo hice algebraicamente, y lo comprobe en geogebra
lo que se busca es que los vectores de la segunda vista grafica coinicidan
Sip. igual
Ya entendí!
yo hice de nuevo el archivo de geogebra jejeje qué zonza!
si yo tmbn no le hallaba muy bien al principio al geogebra pero ya
Cómo hiciste el sistema de ecuaciones???
para los vectores??
pues se sustitiye el valor de lamba
en la primer matriz
1 - l , 4
2 , -1 - l

y susituyes cada valor de lamda,
si tienes como???
en el primero si lamda es 3, el vector es x = 2y
si lamda es -3 el vector es x = -y
en el segundo si lamda es 0, el vector es x = 2y
si lamda es 5 el vector es -2x = y
en el tercero, el vector es y = 0
Sí, voy en el segundo
Por qué dice que los vectores columna son linealmente independientes???
porque no son multiplos una columna de la otra, y su determinante seria cero
Pero yo sí los veo múltiplos, creo que no estoy viendo la matriz correcta
?????
se puede o no compañera??
ahh creo que ya esta... es lo del prinicipio
sip
y ahorita dijo dependientes!!!

En este diálogo es posible observar como los estudiantes se validan unos a otros los resultados obtenidos e inclusive aquel que no llega comprender algo, el otro le ofrece alguna explicación, como por ejemplo:

Por qué dice que los vectores columna son linealmente independientes???

porque no son multiplos una columna de la otra, y su determinante seria cero

También se puede observar que los recursos digitales que se orquestan cumplen la función de "comprobadores" de las soluciones encontradas por el estudiante:

Que te salio de lamba? en la matriz B me da -3 y 3 en la matriz C me da 0 y 5 en la matriz D me da -7/2 lo hice algebraicamente, y lo comprobe en geogebra lo que se busca es que los vectores de la segunda vista grafica coinicidan

En este diálogo también es posible encontrar elementos que nos permiten confirman el proceso de instrumentación de los recursos así como el proceso de comprensión de las ideas matemáticas que estos recursos promueven en un evidente trabajo colaborativo.

En esta segunda sesión, la orquestación instrumental se realizó conforme a los tiempos establecidos en el diseño. Dentro de los recursos digitales a orquestar en esta sesión se encuentra AlSel, un software didáctico diseñado para resolver sistemas de ecuaciones lineales bajo el método de eliminación gaussiana. Este recurso didáctico digital se orquestó en la tercera sub-actividad cuyo propósito es analizar los sistemas 2×2 de la forma $Ax=0$, para esto, el profesor hizo un resumen de la forma en cómo funcionaba dicho software, enseguida sugirió a uno de los estudiantes pasar a utilizarlo para resolver unos de los problemas propuestos. Después de un par de intentos, el estudiante resolvió con ayuda de sus compañeros utilizando el AlSel, nosotros creemos que la rapidez de instrumentación de un artefacto se da cuando el artefacto se usa bajo los propósitos que fue creado y cuando tiene un grado de usabilidad aceptable, en este caso, muchos de los estudiantes tenían memorizado por sus cursos previos el algoritmo de eliminación gaussiana.

Al final, el profesor invitó a algunos estudiantes a dar su opinión general sobre las dos sesiones. Todos los estudiantes cuestionados mencionaron haber tomado por lo menos un curso, pero que poco recordaban de él; además, mencionaron que la parte geométrica nunca fue vista en esos cursos y que para ellos haber acompañado la parte algebraica con la geométrica le había dado significado y sentido a los conceptos matemáticos. En Etherpad se pudo captar también está impresión:

Lily como vas?? ohhh me gusto como fuimos determinando ya que le dimos significado a muchas de las cosas que hemos aprendido con anterioridad.

Para finalizar este apartado es necesario volver a mencionar que los recursos didácticos digitales orquestados fueron diseñados para el caso de una matriz 2×2, nuestro objetivo hacia el futuro es elaborar más recursos para el caso 2×2 bajo el mismo esquema didáctico, esto es, utilizar la metodología PAP-AI. A continuación presentamos nuestras conclusiones finales.

4.3. Conclusiones.

El trabajo de investigación que este documento ha reportado, ha tenido como propósito adaptar una didáctica para diseñar recursos didácticos y orquestarlos con el objetivo de apoyar la enseñanza y mejorar el aprendizaje de los conceptos de un primer curso de álgebra lineal.-

El análisis presentado en el apartado anterior, aunque no ha sido exhaustivo, nos permite concluir que:

- A causa de la dependencia de diferentes factores en el ambiente educativo como por ejemplo la infraestructura, siempre hay que estar dispuesto a rediseñar la orquestación instrumental.
- Es necesario incluir ejercicios en cada actividad que permitan reforzar los conceptos de interés.
- Es necesario medir adecuadamente los tiempos tomando en cuenta los contratiempos técnicos que puedan surgir al utilizar recursos digitales.

A continuación daremos algunas conclusiones más puntuales respecto a los siguientes aspectos: reproducibilidad, trabajo colaborativo, desarrollo de comunidades recursos digitales para la enseñanza del álgebra lineal, orquestación instrumental, reconstrucción de conceptos y, comprensión y dificultades de los conceptos del álgebra lineal.

Nosotros consideramos que toda enseñanza se ve afectada por las creencias, la experiencia y el conocimiento del profesor, que sumado al hecho que todo grupo de alumnos o estudiantes se comporta de manera totalmente distinta, tenemos que el éxito o fracaso de una puesta en escena de ciertos recursos didácticos resulte impredecible. Sin embargo, con los años de investigación y de transformar las experiencias en didácticas, desde nuestro punto de vista ha ido acercándonos a la reproducibilidad. Esto es para nosotros la metodología PAP-AI, cuya base teórica didáctica nace precisamente de años de experiencia e investigación, y se posiciona como actual al tomar hace conciencia del uso de las tecnologías digitales, haciéndola desde nuestro punto de vista reproducible.

De las experiencias didácticas (somos conscientes que hace falta realizar más experiencias didácticas), pudimos observar que no importa el contexto del estudiante, una situación real siempre resulta atractiva. También, observamos como las representaciones geométricas, para muchos estudiantes ofrecen un significado que sustenta a la representación algebraica del concepto, y como sabemos, en el fondo, al menos teóricamente, amplia en el estudiante su comprensión sobre el concepto matemático (punto 6 de la propuesta didáctica). Por otro lado, el uso de recursos digitales, no hace más que poner una enseñanza al nivel de nuestros alumnos y estudiantes actuales, y si esos recursos son diseñados y creados bajo propósitos didácticos específicos, la posibilidad de que promueven una mejor comprensión de los conceptos matemáticos es amplia.

Sumado a lo anterior, pudimos observar como el trabajo colaborativo entre los estudiantes conlleva igualmente a mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos, pues los estudiantes muchas veces por miedo no externan sus dudas ante el profesor, pero ante sus pares, lo hacen y es entre ellos mismos donde se diluyen las dudas, por medio de discusiones y explicaciones, formándose pequeñas comunidades científicas. De aquí que, el trabajo individual tanto como colaborativo en la enseñanza de las matemáticas debe ser puesta al mismo nivel. Tan importante es una como la otra para la construcción de las ideas y conceptos matemáticos.

Para que una reproducibilidad tenga cierta garantía de éxito, nosotros consideramos necesario la creación de comunidades de profesores que compartan sus recursos, estás comunidades habrán de ser más ricas en cuanto más diversidad profesores confluyan. Estas comunidades, pueden verse beneficiadas por la tecnología digital, creándose espacios en internet donde se compartan ideas, experiencias, recursos, investigaciones, etcétera, en este caso información en torno a la enseñanza del álgebra lineal. Nuestro trabajo tiene como objetivos a corto plazo, crear este tipo de comunidades, un primer paso, comunidades por regiones en el país.

Por otra parte, sin duda cuando se introducen herramientas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, la necesidad de poner en movimiento todas estas herramientas conlleva a pensar en el diseño de una orquestación instrumental, siendo quizá la funcionalidad didáctica uno de sus elementos que tras cada experiencia produzca rediseños en la orquestación, dado que este elemento depende prácticamente del profesor. Es por eso, que nosotros hemos considerado ampliar nuestro estudio futuro en este punto pensándolo como transformaciones de una orquestación instrumental, ya que de acuerdo a nuestra experiencia, una vez que el profesor establece la configuración didáctica y los modos de explotación en la orquestación, es desde nuestra experiencia que por allí allá un cambio o transformación, sin embargo, está hipótesis trataremos de probarla en trabajos futuros.

Finalmente, uno de los elementos de la metodología PAP-AI que merecen un último comentario, es el relacionado con la construcción del concepto. Ciertamente cuando un profesor es propuesto para enseñar cierto tema de matemáticas, la manera en como habrá de enseñar los conceptos matemáticos se centra en una reconstrucción personal. Esta reconstrucción puede heredar tanto errores conceptuales como elementos positivos, lo que en investigaciones futuras trataríamos de analizar con mayor detalle, y determinar que tanto la metodología PAP-AI puede diluir sobre todo esos errores conceptuales.

Sin dudarlo, la metodología PAP-AI propone una manera alternativa de enseñanza de las matemáticas, con fundamentos sólidos de la psicología de la inteligencia y del aprendizaje, así como del uso adecuado de herramientas como instrumentos de comprensión de los conceptos matemáticos. Sin embargo, algunos conceptos del álgebra lineal son difíciles de comprender a causa de su generalidad; ese es el caso de vector. De nuestra experiencia, hemos podido constatar que el estudio del concepto a partir de su representación geométrica, efectivamente ofrece una versión intuitiva y enriquecedora, no sabemos cuál es el siguiente momento en la construcción del concepto, pero si sabemos que su estudio geométrico permite la construcción intuitiva de las dos operaciones de linealidad, importante para una siguiente construcción del concepto. Es decir, insistimos en evitar la enseñanza del concepto partiendo de su versión final (elemento de un especio vectorial), sino de su versión histórica, como vector geométrico.

También creemos, que al acompañar el concepto de vector y los sistemas de ecuaciones lineales ofrece un reforzamiento de concepto y permite introducir de una forma suave el concepto de espacio vectorial como espacio columna y espacio nulo. Sin embargo, nos hace falta estudiar más profundamente, en qué medida esta construcción del concepto permite arribar a una comprensión más general del concepto, qué se pierde, qué obstáculos aparecen. Se alude al hecho del isomorfismo entre R y cualquier espacio como el de funciones como algo que puede ser claro y sin dificultades ayudar el estudiante, sin embargo, el concepto de isomorfismo no es en absoluto sencillo.

Bibliografía

Anton, H. (2010). *Elementary linear algebra*. USA : John Wiley and Sons.

Artige, M. (1996). Ingenierie didactique. En J. Brun (ed.), *Didactique des Mathématiques* (pp. 243–274). Neuchâtel, Paris: Delachaux et Niestlé.

Asila, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld y E. Dubinsky (Eds.), *CBMS Conference Board of the Mathematical Sciences, Issue in Mathematics Education: Research in Collegiate Mathematics Education,* (pp. 1-32).

Brian, K., y Leise, T. (2006). The $25,000,000,000 eigenvector: the linear algebra behind Google. *Society for Industrial and Applied Mathematics Review*, 48(3), 569-581.

Britton, S. & Henderson, J. (2009). *Linear algebra revisited: an attempt to understand students' conceptual difficulties*. International Journals of Mathematical Education in Science and Technology, 40(7), 963-974.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes des didactiques mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*,7(2), 33-115.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1985). *La Transposition Didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. Ed. Le pensé sauvage: Grenoble.

Cuevas, C. A. y Mejía H. R. (2003). *Cálculo Visual*. Oxford University Press: México.

Cuevas y Pluvinage (2003). Les projets d'action pratique, éléments d'une ingénierie d'enseignement des mathématiques. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 8, 273-292.

Dorier, J. L. (1995). A general outline of the genesis of vector space theory. *Historia Mathematica*, 22, 227-261.

Dorier, J. L. (1998). The role of formalism in the teaching of the theory of vector space. *Linear Algebra and its applications*, 275-276, pp. 141-160.

Dorier, J., y Sierpinska, A. (2002). Research into the teaching and learning of linear algebra. En D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss y A. Schoenfeld (Eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study (pp. 275-282). Kluwer Academic Publiser*.

Dubinsky, E. y McDonald, M. A. (2002). APOS: a constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. En D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss y A. Schoenfeld (Eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: an ICMI Study* (pp. 275-282). *Kluwer Academic Publiser.*

Duval, R. (1995). *Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels*. Suiza: Peter Lang.

Easdown, D. (2009). Syntactic and semantic reasoning in mathematics teaching and learning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(7),941-949.

Gonzalez, R. C. y Woods, R. E. (2002). *Digital image processing*. New Jersey, U.S.A.: Prentice Hall.

Grossman, E. I. (2008). *Álgebra Lineal* (6ta Ed.). México, D.F.: McGraw-Hill.

Gueudet, G. (2004). Should we teach linear algebra through geometry. *Linear Algebra and its application*, 379, 491-501.

Gueudet, G. y Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics*, 71. (pp. 199–218)

Halmos, P. (1987). *Finite–dimensional vector spaces.* New York: Springer–Verlag.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. En Dorier, J. L. (Ed), *On the teaching in Linear Algebra* (pp. 191-208), Kluwer Academic Publisher.

Hillel, J. (2001). *Computer algebra systems in the learning and teaching of linear algebra: some example*. The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study. Kluwer Academic Publiser. (pp. 371 – 380)

Hoffmann, B. (1975). *About vectors.* New York: Dover Publications.

Kalman, D. (2002). An underdetermined linear system for GPS. *The College Mathematics Journal*,33,384-390.

Lang, S. (1986). *Introduction to Linear Algebra*. New York: Springer.

Marcus, M. y Minc, H. (1988). *Introduction to Linear Algebra*. USA: Dover.

Parraguez, M. y Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and its Applications*, 432(8),2012-2124.

Piaget, J., e Inhelder, B. (2007). *Psicología del niño*. España, Madrid: Ediciones Morata.

Poole, D. (2007). *Álgebra lineal. Una introducción moderna* (2da Ed.). México, D.F.: Thomson.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. En J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*, pp. 209-246.

Steward, S. y Thomas O.J., M. (2009). A frame work for mathematical thinking: the case of linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Techonolog*, 40. (pp. 951-961)

Strang, G. (1982). *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. México, D.F.:Fondo Educativo Interamericano.
Strang, G. (2003). Introduction to linear algebra (3ra Ed.). USA: Wellesley-CambridgePress.

Strang, G. y Borre, K. (1997). *Linear algebra, geodesy and gps*. United States of America: Wellesley-Cambridge Press.

Tall, D. (2004). Building theories: the three worlds of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 24. (pp. 29-32)

Tall, D. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. *Proceeding of the 28th Conferences of the International Group for Psychology of Mathematics Education*, 4, pp. 281-288.

Trigeros, M. y Oktaç, A. (2005). Le théorie APOS et l'enseignement de l'algèbre linéaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 157-176.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9, pp. 281-307.

Trouche, L. (2005). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. R*echerches en Didactique des mathématiques,* 25. (pp. 91-138)

Wawro, M., Sweeney, G. F., y Rabin, J. M. (2011). Subspace in linear algebra: investigating students' concept images and interactions with the formal definition. *Educational Studies in Mathematics*, 78(1),1-19.

Anexos

Anexo 1

(1) Le téléchargement

Avec l’apparition d’internet, le téléchargement de programmes informatiques comme les logiciels antivirus, la musique, les photos, etc., est une activité normale pour la majorité des personnes. Par exemple, l’image 1.1 montre le téléchargement à différents instants d’une vidéo musicale qui « pèse » 16.2 MB.

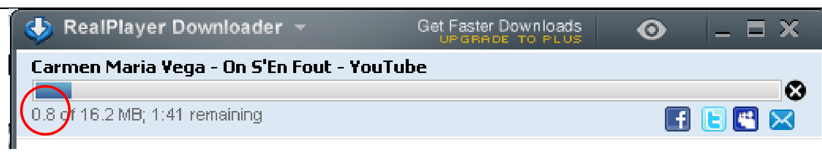
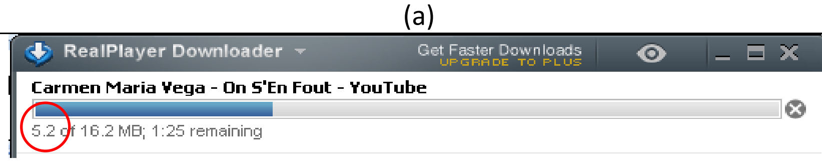
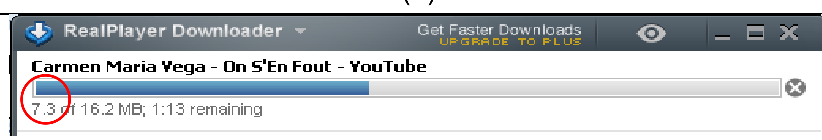
Le temps de téléchargement (secondes)	L’interface du téléchargement
2 s	 (a)
9 s	 (b)
13 s	 (c)

Image 1.1. *Le téléchargement d’une vidéo.*

Vous pouvez observer sur l’image 1.1 comment, à mesure que le temps passe, un clip se télécharge. Régulièrement, on est habitué à penser à la vitesse comme un rapport entre la distance et le temps (vitesse = distance / temps) ; dans le cas d’un ordinateur, on peut parler de vitesse aussi, mais comme un rapport entre le poids du fichier informatique et le temps.

A votre avis, la vitesse de téléchargement est-elle constante ?

De plus, vous pouvez aussi observer qu'à tout instant, le logiciel de téléchargement donne le temps qui reste pour terminer le processus de transmission.

A votre avis, comment le logiciel estime-t-il ce temps ?

Utilisez ***etherpad*** pour discuter avec vos collègues de votre avis sur la vitesse de téléchargement et le temps estimé

Activité 1.1. Le téléchargement d'un clip.

➔ **Attention : Activité individuelle**

L'image 1.1 montre le téléchargement d'un clip avec un certain type de logiciel de téléchargement. Il faut voir que le logiciel donne deux types d'information : la quantité de mégabits téléchargés et une estimation du temps qui reste pour télécharger les mégabits manquant.

Avec l'information que l'image 1.1 présente, répondez aux questions qui suivent et faites les activités demandées.

1. Représentez graphiquement la vitesse du téléchargement entre les instants (a) et (b).

2. Construisez maintenant une représentation graphique de la vitesse de téléchargement entre les instants (b) et (c) :

3. Comparez vos deux graphiques. Quelle conclusion pouvez-vous proposer sur la vitesse entre les deux instants?

4. Pouvez-vous expliquer pourquoi vous avez choisi ce type de graphique ?

Discutez avec vos collègues de vos réponses avec *etherpad*

Activité 1.2. La vidéo d'un téléchargement.

Ouvrez la vidéo « Telechargement01 » et regardez tranquillement celle-ci pour réaliser les activités suivantes.

➔ **Attention : Activité individuelle**

1. À huit instants différents, relevez les quantités de mégabits téléchargés pour la vidéo, à partir du début du téléchargement et jusqu'à sa fin. Attention, la fenêtre de téléchargement apparaît seulement à la 4ème seconde de la vidéo environ.

Secondes								
Mégabits								

2. Utilisez l'information réunie ci-dessus et l'outil « Vecteur Origine » dans le fichier *GEOAL01.ggb* pour élaborer un graphique du téléchargement.

Sauvegardez le graphique que vous avez réalisé sous *GEOAL01_**votre prénom**.ggb*

3. En observant le graphique du téléchargement que vous avez fait répondez aux questions suivantes :

- la vitesse de téléchargement est-elle constante ou variable ?

- Pouvez-vous expliquer pourquoi ?

De nouveau, discutez avec vos collègues de vos réponses avec *etherpad*.

➔ Attention : Activité individuelle

4. Utilisez maintenant le fichier *GEOAL02.ggb* et l'outil « Mobile Vecteur » pour élaborer un autre graphique du téléchargement (utiliser les mêmes données de la dernier activité).

Sauvegardez le graphique que vous avez réalisé sous *GEOAL02_**votre prénom**.ggb*

5. En observant ce 2ème graphique des vitesses moyennes du téléchargement répondez aux questions suivantes:

- est-il possible de conclure que la vitesse du téléchargement n'est pas constante ?

- Pouvez-vous expliquer pourquoi ?

6. Lesquels des graphiques représentent le mieux la vitesse de téléchargement et pourquoi ?

Discutez avec vos collègues de vos réponses avec *etherpad*

7. Observez maintenant l'image 1.2 :

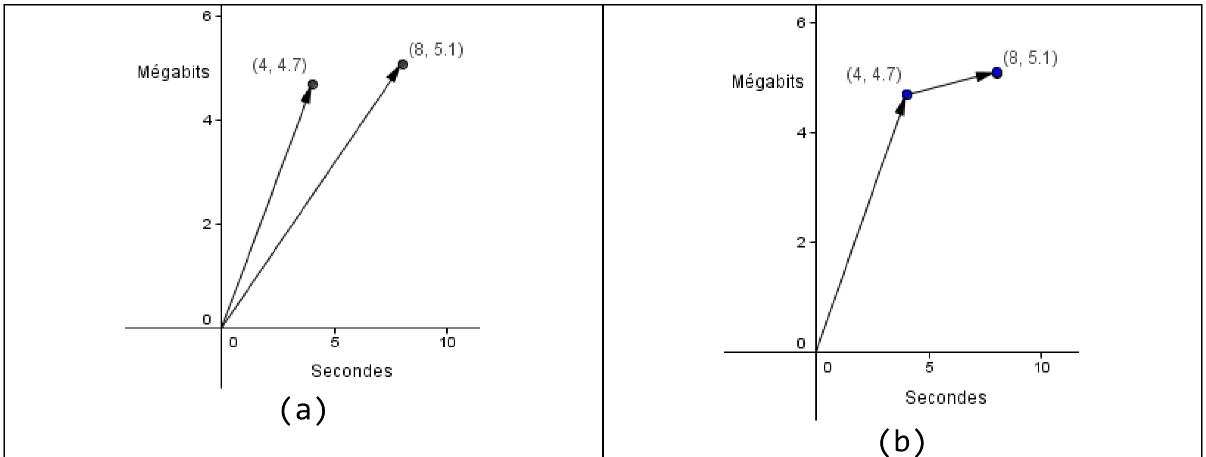


Image 1.2. Les relations.

I. Quelles relations entre les graphiques (a) et (b) observez-vous?

II. Proposez un calcul qui relie les vecteurs du graphique (b) avec un des vecteurs du graphique (a) ?

III. Proposez un calcul qui relie les vecteurs du graphique (a) avec un des vecteurs du graphique (b) ?

Discutez avec vos collègues de vos réponses avec *etherpad*

Activité 1.3. La vitesse du téléchargement est-elle constante ?

Il semble, dans les résultats obtenus à l'activité 1.2., que la vitesse du téléchargement ne soit pas constante. Cependant, il est possible de trouver sur certaines parties du téléchargement des vitesses qui semblent constantes.

➔ Attention : Activité individuelle

1. En observant la vidéo « Telechargement01 » entre les secondes 40 et 50 on obtient l'information suivante :

Instants	Quantité téléchargée (en Mbits)	Position sur la vidéo (en s)
1	8.6	40
2	9.0	43
3	9.4	46
4	9.8	49

Vous utilisez le fichier *GEOAL03.ggb* pour tracer les 4 vecteurs. En observant ce graphique, quelle remarque pouvez-vous formuler sur la vitesse de téléchargement ?

2. Utilisez maintenant l'outil « Mobile Vecteur » pour tracer les trois vecteurs d'un instant à l'autre. Comment sont les vecteurs entre eux ?

Discutez avec vos collègues de vos réponses avec *etherpad*

➔ Attention : Activité individuelle

3. Si vous tracez les vecteurs de l'instant 1 à 3 et de l'instant 1 à 4, quelle est leur relation avec le vecteur de l'instant 1 à 2 ? Quelle est votre conclusion par rapport à la vitesse du téléchargement entre les secondes 40 et 49 ?

Sauvegardez le graphique que vous avez réalisé sous *GEOAL03_**votre prénom**.ggb*

4. Vous utilisez les outils « Curseur » et « Origine Vecteur » sur *GEOAL04.ggb* pour représenter graphiquement l'information suivante issue d'un autre téléchargement :

Instants	Quantité téléchargée (en Mbits)	Position sur la vidéo (en s)
1	0	0
2	0.35	2
3	0.70	4
4	1.05	6
5	1.40	8

En utilisant votre graphique, trouvez l'information pour l'instant 13 ? Pouvez-vous représenter cet instant ?

Sauvegardez le graphique que vous avez réalisé sous *GEOAL04_**votre prénom**.ggb*

Discutez avec vos collègues de vos réponses avec *etherpad*

Activité 1.4. Une estimation du temps de téléchargement.

Vous pouvez voir sur la vidéo « telechargement01 », que pendant le processus de téléchargement un quantité de temps est donné comme une approximation de celui que le logiciel de téléchargement va mettre pour télécharge les mégabits qui manquent (voir l'image 1.3). Avez-vous une idée de comment estimer le temps de téléchargement ?

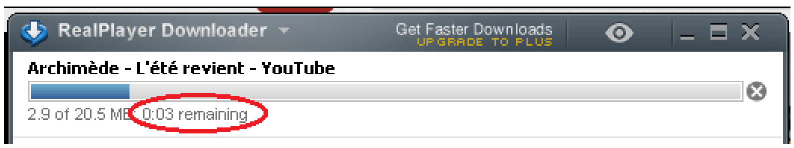
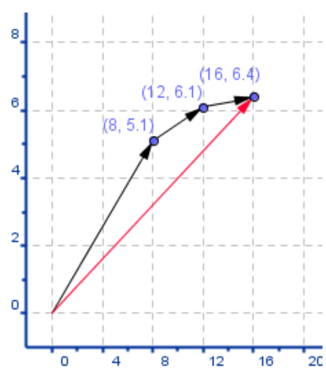


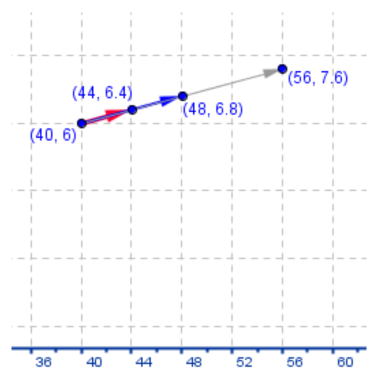
Image 1.3. Fenêtre de téléchargement.

On va maintenant représenter symboliquement chaque instant du téléchargement comme $\vec{\tau} = (t, P)$, $t \in \{0,1,2,3,\ldots,n\}$ et $P \in \mathbb{R}$.

➔ Attention : Activité individuelle

1. Représentez algébriquement les graphiques suivants en utilisant les deux opérations : *addition* et *multiplication par un nombre*:





a) Le vecteur en rouge par rapport aux vecteurs noirs :

b) Les vecteurs bleu et gris par rapport au vecteur rouge :

Discutez avec vos collègues de vos réponses avec *etherpad*

➔ Attention : Activité individuelle

2. Pour estimer le temps de téléchargement des mégabits qui manquent se pose le problème suivant :

> Une idée : on prend les deux instants derniers du téléchargement réel et on suppose que la vitesse du téléchargement est constante.

I) Utilisez les outils « Origine Vecteur », « Mobil Vecteur » et « Curseur » dans le fichier « GEOAL05.ggb » pour représenter graphiquement et estimer le temps de téléchargement pour les mégabits restants d'une vidéo qui pèse 20.5 Mb si les deux derniers instants réels (pris toutes les 4 secondes) du téléchargement ont donné lieu à : $\vec{\tau}_3 = (8\text{s}, 5.1\text{Mb})$ et $\vec{\tau}_4 = (12\text{s}, 6.1\text{Mb})$.

Sauvegardez le graphique que vous avez réalisé sous *GEOAL05_**votre prénom**.ggb*

II) Vous pouvez exprimer cette idée de manière générale en utilisant uniquement des vecteurs et les deux possibles opérations.

Discutez avec vos collègues de vos réponses avec *etherpad*

➔ Attention : Activité individuelle

3. Une deuxième idée pour estimer le temps de téléchargement des mégabits qui manquent consiste à utiliser le pourcentage d'usage du réseau d'internet :

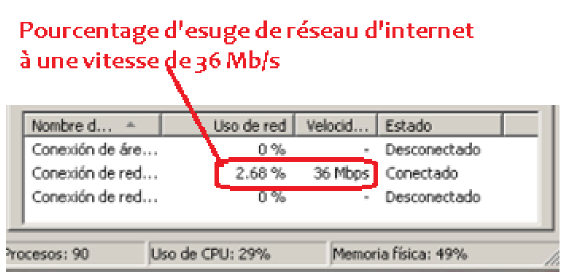


Image 1.4. Usage du réseau d'internet.

La vidéo « Téléchargement02 » montre le téléchargement d'un clip en relation avec le pourcentage d'usage du réseau d'internet.

I. Utilisez cette information pour représenter graphiquement et estimer le temps qui reste pour le téléchargement total du clip en 5 moments différents du téléchargement. Vous pouvez utiliser le fichier « GEOAL06.ggb ».

Sauvegardez le graphique que vous avez réalisé sous *GEOAL06_**votre prénom**.ggb*

II. Vous pouvez exprimer cette idée de manière générale sous en utilisant uniquement des vecteurs et les deux opérations.

Discutez avec vos collègues de vos réponses avec *etherpad*

Section 1.5. Combinaison linéaire et ensemble de vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

Dans les activités précédentes on a introduit un objet qu'on a représenté symboliquement par $\vec{\tau}=(t,P)$. Ces objets sont mis en relation à travers deux lois : l'*addition* et la *multiplication par un nombre*.

Discutez avec vos collègues de toute l'activité

1. Maintenant, on va étendre l'objet vecteur dans le plan comme 2-uplet de la forme (x,y) où x et y sont éléments de $\mathbb{R}$. Pouvez-vous proposer une définition pour chacune des deux lois ?

2. D'un autre côté, ces deux lois peuvent se combiner. Ainsi, si on a les vecteurs $\vec{v}=(2,4)$ et $\vec{w}=(3,1)$ alors $3\vec{v}-2\vec{w}$ est une combinaison des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

   a) Quel est le résultat d'une combinaison des vecteurs ?

   b) Pouvez-vous poser une définition pour ceci?

3. Soit $A=\{(x,y):y=2x\}$ où x est un élément de $\mathbb{R}$. Utilisez le fichier « GEOAL07.ggb » et la combinaison des vecteurs pour répondre aux questions suivantes:

a) Le vecteur $(-1,2)$ est-il un élément de A?

b) Le vecteur $(-7.5,-14)$ est-il un élément de A?

Sauvegardez le graphique que vous avez réalisé sous *GEOAL07_**votre prénom**.ggb*

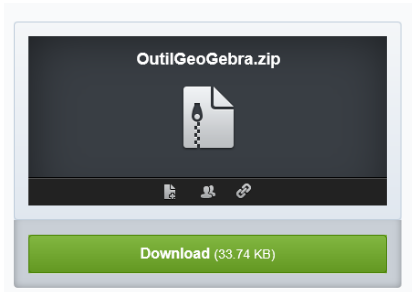
4. Utilisez le logiciel « AlSel » pour établir les valeurs de k et l qui satisfont l'égalité $k(2,4)+l(3,1)=(2,4)$.

Instructions pour télécharger les outils et le matériel digital

Pendant le développement des activités différentes dans la classe, on va utiliser certains outils et matériel digital que vous pouvez télécharger des directions d'internet suivants :

- Vidéo 1 : http://www.mediafire.com/?9o5y64vsvf633dv
- Vidéo 2 : http://www.mediafire.com/?xbtqo47dvbol34a
- Outils : http://www.mediafire.com/?69m025upudafnl6

Quand vous ouvrez les directions, devez donner clic sur le rectangle avec le texte « Download » comme l'image la montre :



Attention : Les fichiers se trouvent comprimés par conséquent il est nécessaire décomprimer après du téléchargement.

Si pour quelque raison il n'est pas possible regarder les vidéos alors vous pouvez le faire en ligne :

- Vidéo 1 : http://www.youtube.com/watch?v=iFrru8tR9jg&feature=youtu.be
- Vidéo 2 : https://www.youtube.com/watch?v=t6byKQgUMbs

Instructions pour voir en ligne les activités

Pendant le développement de la classe on va faire une série d'activités qui se trouvent dans un document sur la suivante direction d'internet:

http://www.slideshare.net/BetancoYan/activites-lineares

Anexo 2

Primera Actividad

Actividad 1. Representación geométrica de A, $A\mathbf{x}$ y $k\mathbf{x}$

26 de noviembre de 2013

1. Representación geométrica de A

Intercambia tus puntos de vista, ideas o conjeturas en *Etherpad*.
Utiliza la matriz A para realizar lo que se solicita:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1.a. Representa geométricamente la matriz A.

1.b. Representa geométricamente la matriz B que se obtiene de multiplicar la primera columna de A por -3.

1.c. Representa geométricamente la matriz C que se obtiene de cambiar el segundo renglón de A por $\begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Representación geométrica de $A\mathbf{x}$

Intercambia tus puntos de vista, ideas o conjeturas en *Etherpad*.
Analiza y resuelve los siguientes planteamientos:

2.a. Toma un vector $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ con $x_1 \neq 0$ y representa geométricamente $A\mathbf{x}$.

2.b. Toma un vector $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$ con $x_2 \neq 0$ y representa geométricamente $A\mathbf{x}$.

2.c. Toma la matriz B del inciso 1.b y el vector $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ¿Para qué valores de x y y, $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$? Representa geométricamente la situación.

2.d Toma la matriz C del inciso 1.c y encuentra los vectores $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ tal que $C\mathbf{x} = b$ con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$

1

3. Representación geométrica de $k\mathrm{x}$

Intercambia tus puntos de vista, ideas o conjeturas en *Etherpad*.

Utiliza los vectores $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ para realizar lo siguiente:

3.a. Representa geométricamente los vectores $k\mathbf{u}$ para valores de $k = -4, -2, 0, 2$ y 4.

3.b. Representa geométricamente los vectores $k\mathbf{v}$ Para valores de $k = -3, -1, 0, 1$ y 3.

3.c. Representa geométricamente los vectores $k(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ para $k \in \mathbb{R}$.

4. Representación geométrica de b en la forma $A\mathrm{x}$

Analiza y discute con tus compañeros en *Etherpad* la siguiente situación:

4.a. Encuentra la matriz A y vector $\mathbf{x}$ que cumplen que $A\mathbf{x}$ es igual a $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$. Explica el por qué de tu elección.

4.b. Representa geométricamente la situación anterior.

Segunda Actividad

Actividad 2. La ecuación $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$

27 de noviembre de 2013

1. Vectores columna de A linealmente independientes

- Utiliza Etherpad para intercambiar ideas y reflexiones.
- Apoyate en GeoGebra para realizar el análisis de la situaciones que se plantean.

1.A. Toma la matriz $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y los vectores $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ tales que $v_1^2 + v_2^2 = 1$.

1.A.1. Representa en GeoGebra la matriz R.

1.A.2. Representa en GoeGebra el producto $R\mathbf{v}$.

1.A.3. Estudia la situación geométrica para determinar que valores reales de λ cumplen que $R\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$

1.B. Utiliza *LabGeoEigenNorm01.html* para generar dos ejemplos de matrices con vectores columna linealmente independientes.

1.B.1. En ambos ejemplos ¿Qué valores reales λ satisfacen la igualdad $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{x}$?

1.B.2. ¿Cuántos valores distintos para λ encontraste en cada ejemplo?

2. Vectores columna de A linealmente dependientes

- Utiliza Etherpad para intercambiar ideas y reflexiones.
- Apoyate en GeoGebra *LabGeoEigenNorm02.html* para realizar el análisis de la situaciones que se plantean.

2.A. Toma la matriz $P = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 1 \\ 1{,}5 & 1 \end{pmatrix}$ y los vectores $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ tales que $v_1^2 + v_2^2 = 1$.

2.A.1. Representa la matriz P.

2.A.2. Representa el producto $P\mathbf{v}$.

2.A.3. Estudia la situación geométrica para determinar que valores reales de λ cumplen que $P\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$

2.B. Generar dos ejemplos de matrices con vectores columna linealmente dependientes.

2.B.1. En ambos ejemplos ¿Qué valores reales λ satisfacen la igualdad $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{x}$?

2.B.2. ¿Cuántos valores distintos para λ encontraste en cada ejemplo?

3. Algunos casos especiales

- Utiliza Etherpad para intercambiar ideas y reflexiones.
- Apoyate en GeoGebra *LabGeoEigenNorm02.html* para realizar el análisis de la situaciones que se plantean.

3.A. Toma la matriz $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y los vectores $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ tales que $v_1^2 + v_2^2 = 1$.

3.A.1. Representa la matriz D.

3.A.2. Representa el producto $D\mathbf{v}$.

3.A.3. Estudia la situación geométrica para determinar que valores reales de λ cumplen que $D\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$

3.B. Toma la matriz $Q = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y los vectores $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ tales que $v_1^2 + v_2^2 = 1$.

3.B.1. Representa la matriz Q.

3.B.2. Representa el producto $Q\mathbf{v}$.

3.B.3. Estudia la situación geométrica para determinar que valores reales de λ cumplen que $Q\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$

Actividad 3. La ecuación $A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = 0$. Actividad 4. Solución general de la ecuación $A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = 0$.

27 de noviembre de 2013

1. Valores propios

- Utiliza *Etherpad* para intercambiar ideas, reflexiones y conjeturas con tus compañeros.
- Utiliza GeoGebra o cualquier otra herramienta que sea de tu gusto.

Encuentra los valores propios de las siguientes matrices:

1.i. $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

1.ii. $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

1.iii. $D = \begin{pmatrix} -3{,}5 & 3 \\ 0 & -3{,}5 \end{pmatrix}$

- ¿Cuántos valores propios tiene cada matriz?
- ¿Qué características tienen las matrices y cómo son sus valores propios? ¿Qué se puede generalizar?

2. Vectores propios

- Utiliza *Etherpad* para intercambiar ideas, reflexiones y conjeturas con tus compañeros.
- Utiliza *LabGeoEigenLibre03.html* para apoyarte en el análisis y resolución de los siguientes planteamientos.

Utiliza las matrices de la sección anterior para determinar:

2.i. El vector o los vectorees $\mathbf{x}$ que satisfacen la ecuación $B\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = 0$.

2.ii. El vector o los vectorees $\mathbf{x}$ que satisfacen la ecuación $C\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = 0$.

2.iii. El vector o los vectorees $\mathbf{x}$ que satisfacen la ecuación $D\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = 0$.

- ¿Cuántos vectores propios tiene cada valor propio para cada matriz?
- ¿Qué características tienen las matrices y cómo son sus vectores propios? ¿Qué se puede generalizar?

3. Un sistema de ecucaciones lineales de la forma $A\mathrm{x} = 0$

Utiliza las matrices B,C y D para:

3.i. establecer el sistema de ecuaciones lineales asociado a la ecuación $B\mathbf{x}-\lambda\mathbf{x} = 0$ y escribelo en la forma $A\mathbf{x} = 0$.

3.ii. Establecer el sistema de ecuaciones lineales asociado a la ecuación $B\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = 0$ y escribelo en la forma $A\mathbf{x} = 0$.

3.iii. Establecer el sistema de ecuaciones lineales asociado a la ecuación $B\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = 0$ y y escribelo en la forma $A\mathbf{x} = 0$.

Por último:

- resuelve los sistemas establecidos con AlSel.
- En general, la ecuación $A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = 0$ resulta en $\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
    - ¿Cómo deben ser los vectores columna de la matriz $\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$?
    - Escribe la matriz $\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$ en términos de A,de la matriz identidad I y λ

4. Solución general de la ecuación $A\mathrm{x} - \lambda\mathrm{x} = 0$

Etherpad para intercambiar ideas, reflexiones y conjeturas con tus compañeros. La ecuación $A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = 0$ que define los valores propios y vectores propios, se expresa comunmente como

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

donde I es la matriz identidad y $\mathbf{0}$ es el vector nulo o cero, en nuestro caso $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ respectivamente.

Etherpad para intercambiar ideas, reflexiones y conjeturas con tus compañeros.

- Estás de acuerdo que toda matriz A 2×2 tiene estrictemente 2 valores propios?
- Estás de acuerdo que los vectores propios son distintos de cero?
- Qu caracteristicas debe cumplir la matriz $(A - \lambda I)$ para satisfacer la ecuación $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$?

4.i. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Resuelve el sistema $\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4.ii. Por definición, el determinante de la matriz A es $ad - bc$, ¿Cúal es el determinante de la matriz $A - \lambda I$?

4.iii. Toma la matriz B del inciso 1.i y calcula el determinante de la matriz $B - \lambda I$ Qu objeto matemático obtienes?