CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

CATEGORÍAS PARA VALORAR EL DESEMPEÑO DE ESTUDIANTES SOBRESALIENTES DE TERCERO DE SECUNDARIA ANTE TAREAS DE CONGRUENCIA DE POLÍGONOS: UNA PROPUESTA DE ORDENAMIENTO CONCEPTUAL

Tesis presentada por:

Cristian Andrey Peña Acuña

Para obtener grado de:

Maestro en Ciencias

En la especialidad de:

Matemática Educativa

Directora de la Tesis:

Dra. Mirela Rigo Lemini

Ciudad de México Febrero de 2019

Agradezco al
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt)
quien, a través de su apoyo,
me ha permitido realizar mis estudios de maestría.
Cristian Andrey Peña Acuña
CVU 790046

AGRADECIMIENTOS

"No estudio por saber más, si no por ignorar menos"

Sor Juana Inés de la Cruz.

Ofrezco gracias primeramente a Dios quien me ha permitido cumplir cada una de las metas y retos que se me han presentado, a él toda la gloria.

Quiero agradecer a mi abuela, madre y hermano quienes nunca me han dejado desfallecer aún en los momentos en lo que me he dado por rendido, para ellos mis mas grandes y sinceros agradecimientos, sin ustedes yo no estaría ni cerca de ser la persona que soy.

Agradezco de corazón a la Dra. Mirela pues me apoyó aún sin conocerme, me auxilió en los momentos de premura, me orientó y llevó durante todo el proceso de formación que supuso el desarrollo de este trabajo de investigación. A la Dra Mirela le ofrezco mis más sinceros agradecimientos.

Agradezco a mis amigos, los mismos que han confiado en mi mas de lo que yo mismo confío. A ellos infinitas gracias, agradezco a Dios el conocerlos.

Agradezco a mi familia en México Irma, Juan, Richy, Betsi, Bere y Lalo quienes acogieron a un extranjero como parte de su familia, a ustedes les debo mucho más de lo que puedo escribir, muchas gracias.

Por último, quiero agradecer a los doctores que me apoyaron en este proceso de formación, espero algún día trasmitir todas sus enseñanzas a generaciones futuras.

DEDICATORIA

Este trabajo se lo dedico a mi madre Ana Victoria Acuña y a mi Abuela Domitila Rodríguez. Ustedes dos son las personas que más amo, mi razón para dar un paso a diario, a quienes les debo lo que soy y por quienes quiero ser cada día una mejor persona.

Sé que no es mucho, pero espero que esta dedicatoria exprese todo el amor, cariño, respeto y admiración que les tengo.

Resumen

En este documento se presenta un trabajo de investigación cuyo tema central es la congruencia de polígonos. Se consideró importante estudiar a la congruencia debido al papel ineludible que tiene en la enseñanza de la geometría en niveles básicos y a la importancia que supone el trabajo con la congruencia para el desarrollo de diferentes geometrías.

Por lo dicho anteriormente el presente trabajo tiene como propósito dar cuenta del desempeño de estudiantes de tercero de secundaria frente a tareas cuyo tema principal es la congruencia de polígonos.

Para cumplir con el propósito de esta investigación en el trabajo se ha desarrollado un conjunto de categorías para interpretar y valorar el desempeño de estudiantes frente a tareas de congruencia de polígonos; este conjunto de categorías, con un orden y una jerarquización entre ellas, cumplen con ser un ordenamiento conceptual. Debido a la dificultad que supone la construcción de categorías analíticas para investigaciones cualitativas se propuso, como objetivo secundario de este trabajo, exponer el proceso metodológico de construcción de las mismas, así como las herramientas interpretativas utilizadas para dicho proceso de construcción.

En este trabajo se muestra cómo haciendo uso de las categorías se pueden definir perfiles basados en las respuestas dadas por los alumnos; cómo el proceso de construcción de las categorías permite distinguir posibles dificultades de los alumnos al momento de trabajar con la congruencia.

A manera de conclusión en este trabajo se presentan algunas reflexiones sobre la aplicación metodológica que tiene la Teoría Fundamentada en la elaboración de categorías analíticas de corte cualitativo; algunas reflexiones en relación a las bondades del uso y construcción de categorías basadas en los datos empíricos; un

conjunto de categorías que resulta ser una propuesta inicial de orden conceptual. Es importante resaltar que los autores consideran a las categorías como su aporte principal debido a que las categorías resultan ser relativamente novedosas y aparentemente inexistentes (esto último basado en la revisión bibliográfica realizada en este trabajo de investigación).

ABSTRACT

This document presents a research work whose central topic is the congruency of polygons. It was considered important to study congruency due to the inescapable role it has when teaching geometry at basic levels and the importance of working with congruency to the development of different geometries.

Therefore, the purpose of this work is to present the performance of third-year secondary students facing tasks whose main topic is the congruency of polygons.

In order to fulfil the purpose of this research, a set of categories were developed to interpret and evaluate the performance of students facing tasks of congruency of polygons; this set of categories, with an order and a hierarchy among them, obey with being a conceptual ordering. Due to the difficulty involved in the construction of analytical categories for qualitative research, it was proposed, as a secondary objective of this research, to present the methodological process of construction of of itself, as well as the interpretive tools used on that construction process.

This document shows how it is possible to define profiles based on the answers given by the students with the use the categories; how the process of construction of the categories allows you to distinguish possible difficulties among students when working with congruency.

As a conclusion in this document, some reflections are presented on the methodological application of the Grounded Theory in the elaboration of qualitative analytical categories; some reflections in relation to the benefits of the use and construction of categories based on empirical data; a set of categories that turns out to be an initial proposal of conceptual order. It is important to highlight that the authors consider the categories as their main contribution because the categories turn out to be relatively new and apparently non-existent (the last comment based on the bibliographic review carried out in this research).

ÍNDICE

1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Al inicio de la investigación, los autores de este documento[1] se plantearon la posibilidad de realizar un estudio cuyo tema matemático central fuera la congruencia de polígonos en la educación básica.

El plantearse este objetivo llevó a la necesidad de documentar la relevancia del tema de la congruencia de polígonos tanto en la enseñanza de las matemáticas como en las matemáticas formales.

Al buscar dar respuesta a este objetivo se encontró que: La Secretaria de Educación Pública (en adelante SEP) plantea, para la enseñanza de la geometría, el estudio de las figuras geométricas a largo de toda la educación básica. Sugiere, de manera particular para secundaria, que una de las temáticas a trabajar sea la relación de semejanza y congruencia de polígonos (SEP, 2017). La semejanza y congruencia de triángulos es un tema central e imprescindible en casi cualquier plan de estudios de geometría del nivel básico de educación.

Por otro lado, al revisar diferentes versiones de la geometría por ejemplo, de la geometría euclidiana (según se expone en Escobar, 2000; Puertas, 1991), de la geometría de Legendre, según está en Gilman (1984) y la geometría de Hilbert (1996), se observó que la congruencia forma parte importante de muchas de las demostraciones de teoremas que ahí se exponen, por ejemplo en *Elementos de geometría* de Escobar (2000) se explicitan axiomas de congruencia (pp. 25) que se consideran necesarios para el trabajo con la geometría. Por otro lado, en todas las versiones de geometría que se estudiaron se demuestran los criterios de

[1] Este documento se escribe en primera persona del plural, ya que fue escrito por el sustentante y revisado puntualmente por la directora del trabajo.

congruencia; por ejemplo en Gilman (1984) se demuestran los criterios LAL, ALA y LLL en las proposiciones VI, VII y XI respectivamente. En Escobar (2000), se demuestran los criterios ALA y LLL de congruencia en los teoremas 12, 17 y se asume como axioma el criterio de congruencia LAL (p. 31), además de esto se hace uso de los criterios de congruencia para la demostración de diversos teoremas. A manera de ejemplo, en Gilman (1984) se demuestran, entre otras, las proposiciones XII, XIII, XV, XVI haciendo uso de la idea de congruencia de triángulos. Por otro lado, en Escobar (2000) se hace uso explícito de la idea de congruencia en los teoremas del 13 al 17.

A partir de la revisión bibliográfica expuesta previamente, se llegó a la conclusión de que la congruencia de polígonos tiene un importante papel en la matemática de la educación básica y particularmente en la geometría, por lo que se consideró que el estudio del desempeño de los estudiantes al trabajar en la congruencia de polígonos es relevante en la investigación en la educación matemática.

Esto llevó a la necesidad de buscar trabajos de investigación en educación matemática en donde su tema central fuera la congruencia de polígonos. Como resultado, se encontraron diversos trabajos (Carbó y Mántica, 2010; Piatek, 2008; Zakiz y Leron, 1991); sin embargo, se observó que todos ellos se centran en presentar propuestas didácticas para la enseñanza de la congruencia de polígonos y no hacen uso de categorías o criterios que den cuenta del desempeño de los estudiantes en este tema, que permitan interpretar y valorar las producciones de los estudiantes en tareas relacionadas con la congruencia (como se mostrará con mayor detalle en la revisión bibliográfica que se expone más adelante).

Lo anterior fortaleció la consideración de que la elaboración de un trabajo de investigación cuyo tema central sea el desempeño de los estudiantes frente a tareas relacionadas con la congruencia de polígonos, podría resultar un interesante aporte a la investigación en educación matemática.

1.1 Pregunta y objetivos de investigación

Debido a la importancia de la congruencia de polígonos en la enseñanza en secundaría y en desarrollo de diversas geometrías, y a falta de trabajos cuyo tema central sea el evaluar el desempeño de los estudiantes en tareas relacionadas con la congruencia, este trabajo de investigación plantea como pregunta de investigación: ¿qué niveles de desempeño presentan estudiantes de tercero de secundaria al realizar tareas que se relacionan con la congruencia de polígonos?

Para dar respuesta a la pregunta de investigación se plantearon como objetivos de investigación:

- Construir un conjunto de categorías que den cuenta del nivel de desempeño en tareas relacionadas con la congruencia que se soporte en la producción de los estudiantes.
- Distinguir perfiles de estudiantes a la luz de las categorías construidas
- Distinguir dificultades de los estudiantes al trabajar en tareas de congruencia de polígonos

Por otro lado, debido a la importancia metodológica y las dificultades que en la investigación en educación matemática, de tipo cualitativo, conlleva la construcción de categorías basadas en los datos empíricos (sobre todo en los estudios que llevan a cabo los investigadores noveles), se decidió proponer los dos siguientes objetivos metodológicos complementarios:

- Explicitar aquellos matices (que no se dan a conocer en manuales de investigación cualitativa) sobre el proceso de construcción de categorías que surgen de datos empíricos

1.2 ESTRUCTURA DE LOS CAPÍTULOS

En el capítulo 2 se presentan los resultados obtenidos de la revisión bibliográfica dividiéndolos en tres grupos de trabajos: en los que se recurre al modelo de Van Hiele; los centrados en la congruencia de polígonos; y los que contienen categorías, niveles, descriptores o parámetros para el análisis de las producciones de los estudiantes en geometría en general.

En el capítulo 3 se describe la metodología empleada en la investigación. Debido al papel central que en esta investigación juega la Teoría Fundamentada (TF) y sus herramientas analíticas, se presenta una breve descripción de la Teoría Fundamentada (según la versión de Corbin y Strauss, 2015), así como de las herramientas analíticas propias de la Teoría Fundamentada y que se utilizaron en este trabajo de investigación y una breve síntesis de la importancia que tienen las categorías para la TF (según la versión de Corbin y Strauss, 2015).

En el capítulo 4 se describen los sujetos que participaron en la investigación y los instrumentos utilizados en la recolección de los datos empíricos.

En el capítulo 5 se presentan algunas de las ideas tomadas de Sfrad y Linchevski (1994) y Wenger (2001) que se utilizaron como inspiración para la construcción del las categorías que integran el ordenamiento conceptual que aquí se propone. Estas ideas permitieron en gran medida dar una jerarquía y un orden al conjunto de categorías.

En el capítulo 6 se describe una aportación de tipo metodológico que consiste en la explicación detallada del proceso de construcción de categorías que se siguió en este trabajo de investigación. La descripción de la construcción se divide en tres momentos: construcción de encabezados conceptuales, paso de las etiquetas a las categorías y categorías finales.

En el capítulo 7 se presenta, como segundo resultado, la propuesta de categorías que surge como respuesta al objetivo central de este trabajo de investigación.

Derivados de las categorías definidas, en el capítulo 8 se presentan, en una tercera parte de resultados, algunas dificultades que dejaron ver los estudiantes que participaron en el estudio, asociadas a las tareas de congruencia de polígonos, y se caracterizan algunos perfiles de esos estudiantes.

Por último, en el capítulo 9 se exponen algunas de las reflexiones y consideraciones finales de este trabajo de investigación.

2 REPORTE DE LA BÚSQUEDA DE BIBLIOGRAFÍA

Es importante mencionar que, ya que este trabajo toma como base las ideas de la Teoría Fundamentada (Corbin y Strauss, 2015), la revisión bibliográfica no jugó el mismo papel que el rol que suele jugar en otros trabajos de investigación (tanto cualitativos como cuantitativos). Es decir; al inicio del estudio se hizo una revisión para saber si existía un conjunto de categorías que permitieran valorar el desempeño en tareas de congruencia, sin encontrar propuestas conceptuales que se centraran en la congruencia de polígonos. Esto llevó a plantear la necesidad de construir el conjunto de categorías que aquí se pone a la consideración del lector. Una vez realizada esta construcción de 'ordenamiento conceptual' (ver definición en Capítulo III de Metodología), una segunda revisión de la bibliografía permitió corroborar la consistencia entre el conjunto de categorías aquí propuesto y las categorías generales sobre geometría que proponen otros autores (como Van Hiele, 1984; Balacheff, 2000; Jaime & Gutiérrez, 1990), y corroborar también la pertinencia del ordenamiento conceptual que aquí se plantea. A pesar de que esta segunda revisión fue posterior a la elaboración de las categorías (y después de haber obtenido los resultados que se presentan en los capítulos 6, 7 y 8), se expone previo a su descripción atendiendo a estándares de formato. Incluso, si el lector lo considera pertinente, puede postergar su lectura después de leer el Capítulo 7.

Para la identificación de documentos de investigación que versan sobre el tema de congruencia en educación matemática se realizó una búsqueda bibliográfica en diversas fuentes y bajo distintos criterios. Se hizo la búsqueda bajo términos relacionados con el tema de estudio (desempeño en geometría, congruencia, condiciones mínimas y necesarias, congruencia de polígonos y criterios/niveles de desempeño en geometría) en las siguientes bases de datos: del JRME, del ESM y de Springer en general.

Dentro de esta muestra bibliográfica se presentan tres tipos de documentos, aquellos en los que se expone el modelo de Van hiele, aquellos documentos que muestran propuestas didácticas centradas en la congruencia, y aquellos documentos en donde se hace un análisis de la producción de los estudiantes de nivel básico y nivel medio básico en tareas relacionadas con la geometría en el que se distinguen un conjunto de categorías, niveles, parámetros o descriptores.

2.1 Trabajos de investigación geométrica en los que se recurre al modelo de Van Hiele

En este apartado se exponen una serie de trabajos en los que se recurre al modelo de Van Hiele como marco para interpretar producciones de contenido geométrico de estudiantes de distintos niveles. Se consideró pertinente mostrar esos trabajos por la importancia que el modelo de Van Hiele tiene en la investigación en educación matemática debido a su reiterado uso en diferentes trabajos de investigación centrados en esta disciplina.

En este apartado se presentan, en un primer momento, algunas de las ideas que se plantean en la traducción realizada por Fuys, Geddes y Tischler (1984) de los escritos de Dina y Pierre Van Hiele, para con esto tener un panorama general de la manera en cómo se definen los niveles de Van Hiele. Luego, en un segundo momento, y con el fin de profundizar en las interpretaciones del modelo de Van Hiele, se presentan algunos artículos en donde se interpretan y caracterizan los niveles de Van Hiele. Por último en un tercer momento se exponen algunas consideraciones en relación al uso que en este trabajo se hizo del modelo de Van Hiele.

Fuys, Geddes y Tischler (1984) presentan algunas ideas de Dina y Pierre Van Hiele que permiten caracterizar cada uno de los niveles de Van Hiele; en lo que sigue se presentan algunas de las ideas asociadas a cada nivel.

Nivel 0 Pensamiento indiferenciado (estructuración global):

En este nivel se consideran todos aquellos pensamientos en los que, desde el punto de vista geométrico, todo es global. Este nivel es el punto de partida, en él los alumnos establecen conexiones entre los objetos y sus nombres.

En este nivel el trabajo se realiza por medio de manipulaciones, esto se hace en busca de que los alumnos se adapten a los objetos de estudio. Las formas en su conjunto se perciben de manera concreta.

No se pueden establecer relaciones ni entre las figuras ni al interior de las figuras.

Nivel 1, formación de estructuras Visual geométricas:

"Se reconoce al dominio como una totalidad de las relaciones" (Fuys et al. 1984, p.195). El pensamiento se desplaza hacia la red de relaciones que se encuentran en las figuras. Aunque se tiene una percepción concreta de las figuras los niños comprenden algunas de las propiedades que las caracterizan.

En este nivel aún se interpreta a una forma geométrica en su totalidad, sin embargo, a diferencia del nivel 0, en este nivel la totalidad se ve en términos de las propiedades geométricas. Dicho de otra forma, en este nivel los alumnos pueden describir a un cuadrilátero como una figura de 4 lados, pero no establecer relaciones entre los lados del cuadrilátero.

Se llega este nivel si el estudiante hace un uso operativo de propiedades conocidas en figuras con las que está familiarizado. El alumno que tiene estructuras geométricas visuales a su disposición puede aplicar propiedades conocidas a una figura que le es familiar de una manera operativa, sin embargo, no puede ir más allá incorporando a su conocimiento el trabajo que realiza en su razonamiento.

En este nivel se observa un aumento creciente del conocimiento del espacio en un sentido geométrico. Además del conocimiento del espacio en un sentido geométrico, los niños aprenden a conocer el espacio en un sentido físico, biológico, etc.

Este nivel está orientado hacia el resultado, la estructura, las propiedades de las formas. Este nivel solamente indica que el alumno ve que las figuras geométricas se caracterizan por ciertas propiedades, que pueden aplicar propiedades conocidas de una manera operativa a una figura conocida y que esto les permite buscar ciertas características. Esto no implica que se haya llegado a una clasificación de figuras geométricas.

Los alumnos aún no son capaces de diferenciar definiciones y proposiciones. Las relaciones lógicas no son todavía un objeto de estudio adecuado para los alumnos que están en el primer nivel de pensamiento. En este nivel las propiedades aún no representan un conocimiento tácito, es decir que no se debe esperar que en este nivel se determine una figura a partir de ciertas propiedades dadas.

Nivel 2 Estructuración del contexto geométrico, Desarrollo del pensamiento lógico

Este nivel se alcanza cuando el alumno es capaz de manipular relaciones geométricamente operacionales. Este segundo nivel "implica la comprensión de la esencia de la geometría." (Fuys et al. 1984, p.237). Esto quiere decir que el estudiante ya no solo comprende cómo se ven las propiedades geométricas sino que además comprende el porqué de las mismas, entiende que un cuadrado es un cuadrado ya que cumple las condiciones de ser un cuadrilátero y además ser regular, comprende que la hipotenusa de un triángulo rectángulo es su lado más largo ya que al ser un triángulo rectángulo cumple que la suma de las longitudes de sus catetos cada una al cuadrado es igual a la medida de la hipotenusa al cuadrado, y ya que todas las longitudes son positivas, esto tiene como implicación que la longitud de la hipotenusa siempre será mayor a la de los catetos.

En este nivel los resultados se registran en un ordenamiento de las relaciones geométricas. El alumno ha captado el concepto de qué es la geometría. Son capaces de diferenciar distintas definiciones y establecer proposiciones, se dice que los estudiantes comprenden la esencia de la geometría. Se generan principios organizativos del contexto matemático; estos principios proporcionan características geométricas en lugar de un aspecto global. Los alumnos pueden establecer un orden en las relaciones, pueden buscar nuevas relaciones por sí mismos partiendo de relaciones dadas, pueden ordenar un número de relaciones dadas o pueden hacer uso operativo de las relaciones.

En este nivel no se espera que los niños expresen sus respuestas en términos técnicos, sin embargo muestran resultados teóricos, esto implica una modificación del contexto para observar así nuevos aspectos de la geometría.

En síntesis, en este nivel se da a conocer la estructura de enlace de la geometría, se lleva a la comprensión de las formas, se resalta el aspecto de la geometría y el pensamiento matemático ahora adquiere estructura.

Nivel 3 Deducción, comprensión del sujeto de la teoría de la geometría

Los alumnos establecen un ordenamiento de la geometría en un sistema de teoremas. En este nivel las relaciones lógicas en sí mismas se insertan y podemos comenzar a investigar la naturaleza de estas relaciones. En este nivel los alumnos comprenden el sistema axiomático de la geometría euclidiana.

Se empieza a contemplar la teoría de la geometría, se comienza a estudiar un sistema eficaz de proposiciones, es decir la manera en que interactúan los teoremas, definiciones, propiedades y axiomas. En este nivel es posible ser consciente de la existencia de diferentes demostraciones y diferentes definiciones para un mismo objeto. El alumno que se encuentra en este nivel razona de manera formal.

En síntesis, en este nivel el alumno reconoce y trabaja la estructura de las matemáticas. La comprensión de la geometría evoluciona porque el pensamiento ya no implica una acción concreta con una forma geométrica. Los alumnos destacan por su argumentación lógica.

Nivel 4 Conocimiento científico, pensamiento exacto

En este último nivel el alumno es capaz de ver a la geometría de manera abstracta. Puede trabajar en una variedad de sistemas axiomáticos, esto quiere decir que puede trabajar más allá de la geometría euclidiana y adentrarse a geometrías no euclidianas. El estar en este nivel implica comprender la axiomática propia de las diversas geometrías (Fuys et al., 1984).

Los alumnos pueden ayudar a construir un sistema deductivo a partir de los fundamentos. Entre ellos, y solo ellos, se encuentran personas que pueden comparar diferentes teorías, puede buscar axiomas faltantes en otras geometrías y pueden establecer los fundamentos de una nueva teoría y construir un sistema deductivo en ella.

2.1.1 Algunas de las interpretaciones de los niveles de Van Hiele

Fouz y Donotsi (2001) señalan que para los investigadores Van Hiele en la base del aprendizaje de la Geometría hay dos elementos importantes: el lenguaje utilizado y la significatividad de los contenidos. Mencionan que adquirir un lenguaje adecuado es necesario para dar significado a los contenidos, por lo que, de no tenerlo, es necesario emprender su enseñanza antes de empezar con nuevos conocimientos en geometría.

Señalan además que para los esposos Van Hiele, “alcanzar un nivel superior de pensamiento significa que con un nuevo orden de pensamiento, una persona es capaz, respecto a determinadas operaciones, de aplicarlas a nuevos objetos” (Fouz y Donotsi 2001, p.68).

Fouz y Donotsi (2001) describen los niveles de Van Hiele de la siguiente manera:

Nivel 0 Visualización o reconocimiento:

Las personas que se encuentran en este nivel cumplen las siguientes características:

- Perciben a los objetos en su totalidad como una unidad, sin diferenciar o reconocer sus atributos, propiedades y componentes.
- Describen a los objetos por su apariencia física mediante descripciones meramente visuales y asemejándoles a elementos familiares del entorno (una rueda, una ventana, una mesa, un dado)
- No tienen un lenguaje geométrico básico que les permita llamar a las figuras por su nombre correcto.

Nivel 1 Análisis:

Las personas que se encuentran en este nivel muestran las siguientes características:

- Perciben los componentes y propiedades (condiciones necesarias) de los objetos y figuras, logran percibirlo desde la observación y la experimentación.
- Pueden describir de manera informal las figuras por sus propiedades pero no les es posible relacionar unas propiedades con otras o unas figuras con otras, esto lleva a que no pueden elaborar definiciones de las figuras a partir de sus propiedades.
- Pueden establecer nuevas propiedades experimentando con figuras u objetos

- No realizan clasificaciones de objetos y figuras a partir de sus propiedades. Sin embargo empiezan a realizar generalizaciones muy incipientes señalando figuras que cumplen cierta propiedad.

Nivel 2 Ordenación o Clasificación:

Las personas que se encuentran en este nivel muestran las siguientes características

- Describen las figuras de manera formal, es decir, se señalan las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir.
- Realizan clasificaciones lógicas de manera formal. Esto significa que reconocen cómo unas propiedades derivan de otras, estableciendo relaciones entre propiedades y las consecuencias de esas relaciones.
- Pueden llevar el hilo de una demostración pero, en la mayoría de los casos, no entienden la estructura misma de una demostración.

Nivel 3 Deducción Formal:

La persona que se encuentra en este nivel muestra las siguientes características

- Realiza deducciones y demostraciones lógicas y formales.
- Comprende y maneja las relaciones entre propiedades y las formaliza en sistemas axiomáticos.
- Comprende cómo se puede llegar a los mismos resultados partiendo de proposiciones o premisas distintas.
- Tiene una visión globalizadora de las Matemáticas.

Nivel 4 Rigor:

La persona que se encuentra en este nivel muestra las siguientes características

- Conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos geométricos y puede analizarlos y compararlos.
- Trabaja la Geometría de manera abstracta, esto quiere decir que no tiene necesidad de recurrir a ejemplos concretos para argumentar sus resultados.

Los autores sintetizan las características implícitas y explícitas de los niveles de Van hiele en la siguiente tabla:

Tabla 2-1
Elementos implícitos y explícitos de los niveles de Van Hiele (Fouz y Donotsi, 2001, p.71)

	Elementos explícitos	Elementos Implícitos
Nivel 0	Figuras y objetos	Partes y propiedades de las figuras y objetos
Nivel 1	Partes y propiedades de las figuras y objetos	Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos
Nivel 2	Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos	Deducción formal de teoremas
Nivel 3	Deducción formal de teoremas	Relación entre los teoremas (sistemas axiomáticos)

Jaime y Gutiérrez (1990) describen también el modelo de razonamiento y aprendizaje que proponen los esposos Van Hiele. Dentro de la interpretación que dan del modelo de Van Hiele distinguen las siguientes características para cada uno de los niveles.

Nivel 1 Reconocimiento:

Los estudiantes

- Perciben las figuras geométricas en su totalidad, incluyendo en muchas ocasiones atributos irrelevantes en las descripciones que proporcionan (es de color azul, es de madera, está hecho de plástico)
- Perciben las figuras como objetos individuales, es decir no son capaces de reconocer características de una figura en otra del mismo tipo.
- Los estudiantes se limitan a describir el aspecto físico de las figuras.
- Describen las figuras basándose en las semejanzas que encuentran con otros objetos de su diario vivir.
- No suelen reconocer explícitamente las partes que componen las figuras, lo que lleva a no poder reconocer las propiedades matemáticas de las mismas.

Nivel 2 Análisis:

Los estudiantes

- Dan cuenta de que las figuras geométricas están formadas por partes y que estas figuras tienen propiedades matemáticas.
- Describen las partes de las figuras y enuncian de manera informal las propiedades de las figuras.
- Pueden llegar a generalizar propiedades a partir de la experimentación.
- No pueden establecer relaciones entre las propiedades, lo que nos les permite hacer clasificaciones lógicas de las figuras basadas en sus elementos o sus propiedades.

Nivel 3 Clasificación:

Los estudiantes

- Son capaces de reconocer que unas propiedades se deducen de otras y descubrir a partir de ello algunas implicaciones.
- Pueden clasificar lógicamente diferentes familias de figuras.
- Sus razonamientos se apoyan en la manipulación empírica de las figuras
- Pueden dar definiciones formales de las figuras, comprenden el papel de las definiciones y los requisitos de una definición correcta.
- No comprenden la estructura de una demostración, aunque comprenden cada uno de los pasos de una demostración de una manera aislada, esto lleva a que puedan comprender la demostración que se les presenta pero no puedan construir una ellos mismos.
- No comprenden la estructura axiomática de las matemáticas.

Nivel 4 Deducción formal:

Los estudiantes

- Pueden entender y realizar razonamientos lógicos formales
- Le dan sentido a las demostraciones y comprenden la necesidad de demostrar para verificar la verdad de una afirmación
- Comprenden la estructura axiomática de las matemáticas
- Aceptan la posibilidad de llegar a un mismo resultado desde diferentes premisas

Por otro lado Crowley (1987) presenta también una interpretación de los niveles de Van Hiele, en este documento se caracterizan a los niveles de la siguiente manera.

Nivel 0 Nivel básico, Visualización:

Los estudiantes

- Son conscientes del espacio solo como algo que existe alrededor de ellos.
- Ven a los conceptos geométricos como entidades totales en lugar de observarlas en término de sus componentes o atributos. Sin embargo en ocasiones pueden percibir algunos componentes muy iniciales (un ángulo recto, un lado paralelo a otro)
- Reconocen las figuras geométricas por su forma y apariencia física, no por sus partes o propiedades.
- Pueden aprender vocabulario geométrico, pueden identificar formas específicas y pueden reproducir dichas formas.

Nivel 1 Análisis:

Los estudiantes

- Comienzan un análisis de los conceptos geométricos.

- Por medio de la experimentación empiezan a discernir características de las figuras.
- Reconocen a las figuras por sus partes (lados y ángulos por ejemplo)
- Se empiezan a conceptualizar clases de formas.
- Las relaciones entre las propiedades no se pueden explicar.
- No perciben las interrelaciones entre las figuras.

Nivel 2 Deducción informal:

Los estudiantes

- Pueden establecer interrelaciones dentro de las figuras.
- Deducen propiedades y clases de figuras.
- Consideran significativas a las definiciones.
- Pueden seguir y comprender argumentos informales, sin embargo no comprenden el orden lógico de una demostración.

Nivel 3 Deducción:

Los estudiantes

- Comprenden la importancia de la deducción formal dentro de un sistema axiomático,
- Pueden establecer interrelaciones entre axiomas, postulados, definiciones y teoremas.
- Pueden construir demostraciones o pruebas formales
- Se entiende la interacción entre condiciones necesarias y suficientes

Nivel 4 Rigor:

Los estudiantes

- Pueden trabajar una variedad de sistemas axiomáticos (trabajar en geometrías no euclidianas)
- Perciben a la geometría de manera abstracta

Por otro lado Gualdron y Gutiérrez (2007) proponen descriptores de los niveles de razonamiento que presentan los estudiantes en torno a actividades de semejanza partiendo del modelo de Van Hiele.

En este trabajo los autores parten del modelo de Van Hiele para diseñar una unidad de enseñanza para la semejanza de polígonos; de este trabajo derivan una descripción inicial de las características de los dos primeros niveles de Van Hiele específicas para la semejanza.

A manera de conclusión los autores proponen descriptores que se asocian a los dos primeros niveles de Van Hiele. En lo que sigue se muestran estos resultados.

Descriptores en el nivel 1 (reconocimiento):

- Los estudiantes reconocen figuras semejantes basándose principalmente en la apariencia de ellas. En este nivel los estudiantes ven las figuras como un todo y describen las diferencias y semejanzas de ellas usando términos como más grande, más pequeño, estirado, ampliado.
- Los estudiantes empiezan a percibir algunas características matemáticas de la semejanza, pero aún lo hacen de manera aislada.

Descriptores en el Nivel 2 (Análisis):

- Los estudiantes se centran en aspectos matemáticos específicos de las figuras tales como las longitudes de los segmentos y las medidas de los ángulos.
- Las transformaciones usadas en semejanza, las ampliaciones y reducciones, son centrales en todas las actividades en las cuales los estudiantes crean figuras semejantes.
- La orientación de las figuras semejantes es vista como irrelevante.

- Pueden realizar construcciones de figuras semejantes al darles el factor de semejanza y además predecir si la figura resultante será una ampliación, una reducción o una figura idéntica a la dada.
- Los estudiantes realizan la deducción de propiedades matemáticas mediante experimentación y generalización.
- Realizan demostraciones de propiedades que tienen que ver con la semejanza de figuras verificando que se cumplen en algunos casos.

Los niveles de Van hiele representan un referente muy importante para el análisis de producciones de contenido matemático realizadas por estudiantes o incluso quizás profesionales de las matemáticas, ya que permiten jerarquizar dichas producciones. Ese modelo posee un gran potencial de aplicabilidad en distintos temas de la geometría; los ejemplos precedentes son una pequeña evidencia de ello.

No obstante, si bien en este trabajo se tomaron algunas ideas de ese modelo interpretativo, se vio la necesidad de construir otro conjunto de categorías debido a las razones que se exponen a continuación:

- Por lo general, las respuestas dadas por los alumnos que sirvieron como participantes en este trabajo de investigación que se pueden situar en los niveles de Van Hiele están únicamente en el nivel 1 y 2. Esto permite concluir que mucha de la riqueza de los niveles de Van Hiele no puede ser aprovechada en este estudio.
- Y viceversa, parte de la riqueza encontrada en las producciones de los estudiantes no se puede describir, con el nivel de minuciosidad, especificación y detalle que se buscaba en este estudio, apelando a las categorías generales del modelo de Van Hiele.

De manera general, se puede decir que la decisión de recurrir a un conjunto de categorías distinto a las contenidas en el modelo de Van Hile obedeció, básicamente, a que dichos niveles no permitían cumplir con el objetivo de este trabajo: dar cuenta del desempeño de los estudiantes de tercero de secundaria frente a trabajos relacionados con la congruencia de polígonos.

2.2 PROPUESTAS DIDÁCTICAS CENTRADAS EN LA CONGRUENCIA

Es necesario aclarar que, en la búsqueda bibliográfica sobre la congruencia, se buscaron trabajos de investigación cuyo tema central era la congruencia. Sin embargo, lo que mayoritariamente se encontró fueron propuestas didácticas sobre la congruencia que carecían de algún marco teórico que pudiera servir como referente para el análisis de los datos empíricos generados en el presente trabajo. En lo que sigue se exponen una síntesis de esas propuestas didácticas sobre la congruencia.

Carbó y Mántica (2010) realizan una propuesta didáctica en torno a la congruencia. Con ella, se busca promover en los alumnos las habilidades para validar los procedimientos matemáticos tales como la exploración, conjeturación, argumentación y validación; con ella se busca a su vez contribuir con una propuesta didáctica que ayude al desarrollo de habilidades necesarias para el trabajo con la congruencia.

Carbó y Mántica (2010) presentan un taller en donde a partir de ciertos elementos dados a los estudiantes (lados y ángulos) se le solicita construir triángulos que cumplan ciertas condiciones (dado dos lados construir un triángulo, dado un triángulo construir otro igual, dibujar un triángulo isósceles con medidas dadas, etc.); anexo a cada ítem los autores brindan un posible abanico de respuestas, que consideran, darían los alumnos y hacen una reflexión de cómo trabajar en cada una de las posibles respuestas. Todo el trabajo presentado por estos autores se enfoca hacia el objetivo de que los estudiantes consideren las condiciones necesarias y suficientes para la construcción de triángulos de donde, en un momento posterior, deriva la congruencia de polígonos.

Piatek (2008) presenta una secuencia didáctica que tiene como fin dar herramientas a los estudiantes que permitan argumentar el por qué de los criterios de congruencia LAL (Lado, Ángulo, Lado) ALA (Ángulo, Lado, Ángulo) y LLL (Lado, Lado, Lado) permiten asegurar la congruencia. Señala en su trabajo la importancia que tiene la congruencia de triángulos en la geometría euclidiana, lo que lleva a la importancia que este tema tiene en la enseñanza de la geometría en la escuela, ya que ésta usualmente se basa en la geometría euclidiana. Señala por otra parte, la importancia de la congruencia para la demostración en la geometría euclidiana.

Zakiz y Leron (1991) comparan la manera en la que la geometría de la tortuga y la geometría euclidiana tratan la similitud y la diferencia de figuras planas (congruencia y semejanza de figuras no necesariamente polígonos). Dentro de las conclusiones a las que llegan se destaca en particular que el uso de Logo podría convertirse en una "herramienta de pensamiento" que permitiría romper con las restricciones inherentes a cualquier lenguaje de programación.

2.3 TRABAJOS DE INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA QUE CONTIENEN CATEGORÍAS, NIVELES, DESCRIPTORES O PARÁMETROS PARA EL ANÁLISIS DE LA PRODUCCIÓN EN GEOMETRÍA EN GENERAL

En este apartado se describen los hallazgos encontrados en documentos en los que se presentan categorías o criterios para valorar el trabajo matemático en general y en particular, en geometría, realizado por estudiantes de distintos niveles educativos. Se consideró pertinente presentar en esta revisión documentos relacionados con el análisis de datos centrados en la geometría en los que se distinguen categorías, niveles, parámetros o descriptores por dos aspectos: la búsqueda realizada en el marco de la investigación (documentos cuyo tema central es la congruencia de polígonos) no arrojó como resultado trabajos en los que se definieran categorías que se consideraran adecuadas para el análisis de la producción de los estudiantes, por lo que se optó por explorar en los trabajos que aportaran a la geometría categorías que pudieran servir para cumplir el propósito de este trabajo de investigación; y un segundo aspecto, conocer el trabajo que se realiza en la investigación en educación matemática cuando el tema central es la geometría centrándose en el uso y enfoque con el que se construyen las categorías, parámetros, niveles o descriptores que apoyan el análisis de los datos, esto último con el propósito de diferenciar y situar el trabajo que en este documento se presenta frente a lo realizado en otros trabajos de investigación.

Balacheff (2000) habla de la importancia de las prácticas de demostración en los procesos de aprendizaje y enseñanza; centra su atención principalmente en los procedimientos que utiliza el alumno para validar o refutar una proposición matemática, en particular se centra en la argumentación en geometría. Aborda este tópico desde los procedimientos necesarios para establecer la veracidad de una proposición o tratar una refutación.

En su trabajo distingue cuatro tipos de pruebas: el empiricismo ingenuo, la experiencia crucial, el ejemplo genérico y la experiencia mental. Plantea una jerarquía en estos tipos de prueba (mismo orden en el que se les presenta en lo que sigue), determinado por su nivel de generalidad, y por el nivel de conceptualización que demandan.

Nivel 1 El empiricismo ingenuo: este tipo de prueba "consiste en asegurar la validez de un enunciado después de haberlo verificado en algunos casos" Balacheff (2000).

Nivel 2 La experiencia crucial: En este tipo de prueba se realiza una experimentación que permite escoger entre dos hipótesis, en donde se sabe de antemano que solo una de ellas es verdadera. El problema con este tipo de prueba es que aunque es posible que se rechace la hipótesis falsa, no se argumenta por qué la otra es correcta.

En este nivel también se consideran los procesos que "consisten en verificar una proposición de un caso para el cual no se asume que 'si funciona ahora, entonces funcionará siempre'" Balacheff (2000, p.27).

Nivel 3 El ejemplo genérico: En términos de Balacheff (2000, p.27) "consiste en la explicación de las razones de validez de una aserción para la validación de operaciones o transformaciones de un objeto en calidad de representante característico de determinada clase." Dicho en otros términos, en este nivel se consideran aquellas pruebas en donde se dan explicaciones y razones que justifican el porqué de una propiedad en un caso particular, el cual es representativo de un conjunto; esto permite extender la propiedad y la prueba a otros elementos del conjunto.

Nivel 4 La experiencia mental: En este nivel se consideran las pruebas en donde es posible centrarse en la acción, despegándose de un representante en particular. En este nivel no se realizan operaciones sobre elementos particulares; la experiencia mental es el caso genérico de las pruebas que aparecieron en el estudio del autor citado.

En este nivel se exige el conocimiento de teoremas, propiedades o argumentos verificados previamente que sirven para realizar la prueba.

Se destaca que los niveles que expone Balacheff (2000) tipifican distintos tipos de razonamientos puntuales en geometría. Estos niveles brindan una herramienta general para el análisis de todos los tipos de prueba que se dan en matemáticas, particularmente en la geometría, sin embargo al ser tan generales, no son adecuados para distinguir matices finos en relación al desempeño de los estudiantes, por el contrario el análisis de la producción de los estudiantes arrojaría un cúmulo amplio de respuestas en los dos primeros niveles (Empiricismo ingenuo y la experiencia crucial) y un mínimo de respuestas en el nivel 3 (ejemplo genérico), sin permitir con esto diferenciar en muchos de los casos producciones cuyo desempeño es diferente.

Komatsu (2016) reflexiona sobre las pruebas y refutaciones de los estudiantes en tareas de contenido geométrico. El trabajo realizado en ese artículo se centra en responder ¿cómo puede usarse una prueba no solo para establecer la verdad de una declaración dada sino también para generar nuevos conocimientos matemáticos?

Para dar respuesta a su pregunta de investigación y analizar los resultados, Komatsu toma como base las reglas heurísticas que propone Lakatos las cuales sintetiza en el diagrama que se presenta en la Imagen 1.

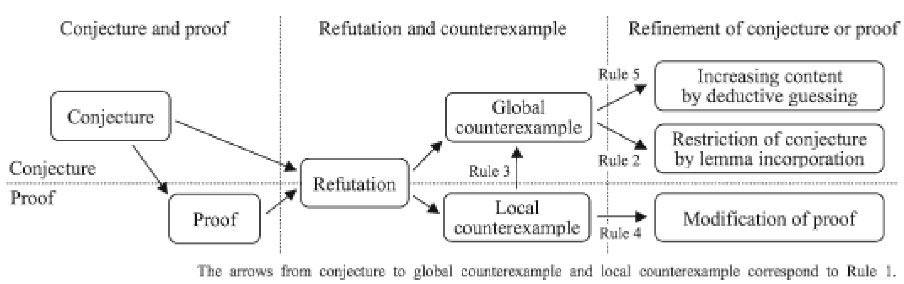


Imagen 1. Un marco descriptivo basado en reglas heurísticas en Pruebas y refutaciones (Komatsu 2016, p.149)

La Imagen 1 muestra tres niveles al trabajar con pruebas (conjetura y prueba, refutación y contra ejemplo y refinamiento de la conjetura o prueba) en los cuales distingue ciertos momentos que asocia a la construcción de una prueba (conjetura, prueba, refutación, contraejemplo global, contra ejemplo local, modificación de la prueba, restricción de la conjetura por la incorporación de un lema e incremento del contenido por adivinación deductiva).

Komatsu se apoya en el diagrama mostrado en la Imagen 1 para interpretar la producción de los estudiantes con los que trabaja; del análisis de la producción de los estudiantes Komatsu resalta dos casos, el primer caso "restricción de conjeturas por incorporación de lemas y aumento. Contenido por adivinación deductiva" y el segundo "transición del contraejemplo local al contraejemplo global, restricción de conjeturas mediante la restricción de excepciones y aumento de contenido. Por adivinación deductiva".

En el caso 1: restricción de conjeturas por incorporación de lemas y aumento. Contenido por adivinación deductiva; está dado por el trayecto que se describe en la Imagen 2.

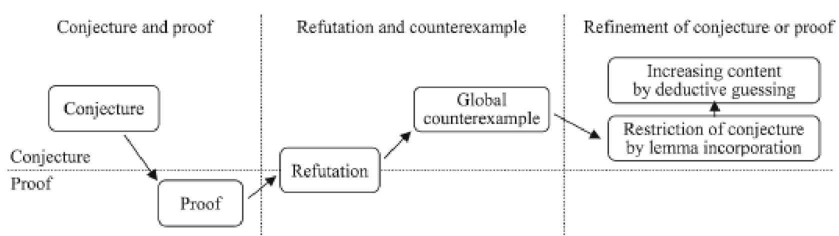


Imagen 2. Visión general del proceso en el primer caso (Komatsu, 2016, p.155)

En el caso 2: transición del contraejemplo local al contraejemplo global, restricción de conjeturas mediante la restricción de excepciones y aumento de contenido. por adivinación deductiva; está dado por el trayecto que se describe en la Imagen 3.

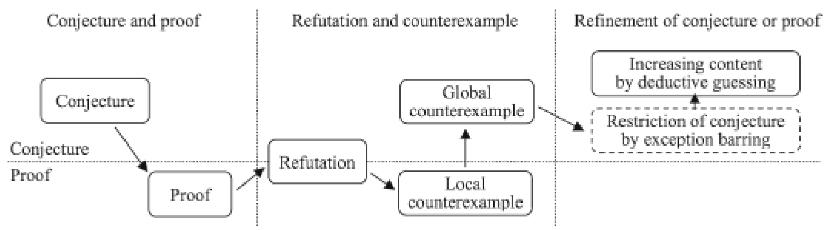


Imagen 3. Visión general del proceso en el segundo caso (Komatsu, 2016, p.159)

En síntesis, Komatsu (2016) define y realiza un análisis de las trayectorias de razonamiento que siguen estudiantes al realizar pruebas de contenido geométrico. Las trayectorias que se proponen permiten definir perfiles que describan la manera en cómo los estudiantes pueden llegar a realizar una prueba. Aunque dichas trayectorias muestran la manera en cómo los estudiantes razonan no establecen niveles de conceptualización, una jerarquización de las trayectorias.

Bell (1976) presenta un estudio que habla sobre los intentos de los alumnos por construir pruebas y explicaciones en situaciones simples de las matemáticas. Realiza este estudio con el propósito de proponer e indagar en torno a maneras óptimas de fomentar el desarrollo de los alumnos al momento de construir pruebas y explicaciones.

Dentro del trabajo de Bell (1976) se presentan un conjunto de categorías que utiliza para clasificar las respuestas dadas por los alumnos. Estas categorías se dividen en dos subconjuntos, uno primero que incluye respuestas de tipo empírico y uno segundo que incluye las de tipo deductivo.

En el subconjunto de las categorías de tipo empírico se consideran todas las respuestas en las que no se observa un elemento deductivo en la prueba. Bell (1976) considera los siguientes niveles.

- *O:* No genera ejemplos correctos o no cumple con las condiciones dadas.
- *X:* Extrapolación: Afirmación general inferida de un subconjunto de los casos que es relevante; cualquier razón aparente son afirmaciones de este

conjunto. Se han cumplido las condiciones, o se han añadido fragmentos. La base de la inferencia es claramente empírica.

- *\$:* No sistemático: Se encuentran algunos de los casos necesarios, no hay subconjuntos completos, se ignoran los requisitos para encontrar el todo.
- *S\$:* Parcialmente sistemático: Encuentra algunos subconjuntos de casos parcialmente completos; tiene cierta conciencia del requisito de encontrarlo todo.
- *S:* Sistemático: Encuentra a lo menos algunos subconjuntos completos de casos, claramente hay un intento de encontrar el todo.
- *F:* Comprobación del conjunto completo de casos finitos.

Para el subconjunto de categorías de tipo deductivo se consideran aquellas pruebas en donde se observa al menos un elemento de tipo deductivo. Se establecen los siguientes niveles:

- *Φ:* No dependencia: Uno o más ejemplos funcionaron correctamente, pero no se utilizaron para probar la declaración general; hay una falta de conciencia de la conexión entre la conclusión y los detalles de los datos.
- *D:* Dependencia: Intenta hacer un enlace deductivo entre los datos y la conclusión, pero no logra alcanzar ninguna categoría superior.
- *Rgr:* Relevante, actualización general: No hace un análisis de la situación, no menciona aspectos relevantes más allá de lo que realmente está en los datos, pero representa la situación como un todo, en términos generales, es como si estuvieran conscientes de la existencia de una conexión deductiva pero no la pueden exponer.
- *Rcd:* Relevante, Detalles colaterales: Hace un análisis de la situación, menciona aspectos relevantes que podrían formar parte de una prueba,

posiblemente identifica diferentes subclases, pero no puede construirlas en un argumento coherente.

- *Einc:* Conectado, incompleto: Tiene un argumento unido a una explicación de calidad, pero es incompleta.
- *Ecs:* Conectado, S: flaqueza que se debe solo al apelar a los hechos o principios que no están más de acuerdo en general que la propia proposición.
- *Ecomp:* a partir de los datos, hechos o principios generalmente acordados.

En síntesis, Bell (1976) presenta distintos tipos de razonamientos empíricos y deductivos al trabajar en pruebas de tipo matemático. Algunas de las ideas que se exponen en las categorías son afines a los resultados que este trabajo presenta y aunque brindaban una jerarquización de la producción de los estudiantes, estas categorías no permiten ahondar en los niveles de conceptualización que se registran en la producción de los estudiantes al momento de trabajar con congruencia de polígonos, perdiendo con esto parte de la riqueza que guardan los datos y evitando profundizar de la manera en la que se requiere para este trabajo.

Yang y Lin (2008) investigan la comprensión lectora que se requiere en las pruebas geométricas. El propósito de hacer esta investigación es estudiar las facetas que componen a la prueba en geometría: conocimiento básico, estado lógico, integración o resumen, generalidad, aplicación o extensión y apreciación o evaluación y conocer la estructura de las facetas. Dentro de sus resultados Yang y Lin (2008) se centran en las 5 primeras facetas; los resultados de la conceptualización de las primeras 5 facetas se presentan a continuación.

- *Conocimiento básico:* Se refiere a la medición de la comprensión de los términos matemáticos, figuras o símbolos.

- *Estado lógico:* Se refiere a la medición del reconocimiento del estado de un argumento; dichos estados pueden ser premisas, conclusiones o propiedades aplicadas en la prueba.
- *Resumen:* En ésta se busca medir la comprensión de la idea dada, la afirmación o la comprensión de una prueba crítica.
- *Generalidad:* Se refiere a medir el reconocimiento de la precisión de una proposición o prueba y lo que justifica una prueba.
- *Aplicación:* En esta faceta se mide la capacidad de saber cómo aplicar una proposición en otra situación.

En síntesis Yang y Lin (2008) presentan niveles muy generales que abarcan todo el trabajo con prueba en geometría, esto no permite establecer niveles de desempeño de los estudiantes frente a tareas de congruencia, pues la generalidad que tienen no permite distinguir matices y diferencias finas entre los estudiantes, propósito central de este trabajo de investigación

2.4 Reflexiones con relación a la revisión bibliográfica

De manera general, en la revisión se observó que investigadores y expertos en la educación matemática han realizado un amplio trabajo en el análisis de los tipos de prueba y justificaciones necesarios para la construcción de los conceptos de la geometría.

Por otro lado, se encontraron trabajos en los que se recurre a los ya conocidos niveles de Van Hiele, quienes presentan lo que consideran las principales características para reconocer niveles de razonamiento matemático. Si bien estos niveles podían, en principio, cubrir ciertas necesidades de este trabajo, por su carácter de generalidad no permitieron distinguir diferencias sutiles en las producciones recuperadas de los estudiantes en esta investigación, que hubieran dado la posibilidad de ahondar en esas producciones.

Por otro lado, no se encontraron categorías, niveles, parámetros o descriptores que sirvieran como marco interpretativo para el análisis de la conceptualización de contenidos propios de la congruencia.

Aquellos trabajos encontrados en esta revisión cuyo tema central es la congruencia, se centran en la generación de propuestas didácticas para la enseñanza de este concepto y no en el análisis de la conceptualización de la congruencia o de dificultades conceptuales asociadas a esta idea.

Así que, en la revisión bibliográfica hecha para este trabajo no se encontraron categorías que permitieran evaluar, de una manera cuidadosa y fina, el desempeño de los estudiantes en tareas relacionadas con la congruencia. Esto llevó a plantear la necesidad de construir un conjunto de categorías que permitiera valorar el desempeño de los estudiantes en tareas relacionadas con la congruencia, categorías que se presentan posteriormente en este documento.

3 ASPECTOS METODOLÓGICOS

3.1 SOBRE LA TEORÍA FUNDAMENTADA DE CORBIN Y STRAUSS

Este trabajo ha sido guiado por la Teoría Fundamentada (TF) que presentan Corbin y Strauss (2015). Aunque el propósito final de la TF es elaborar una teoría partiendo de los datos empíricos (dicho de otra forma, desarrollar marcos teóricos explicativos) no se limita únicamente a este propósito. La TF permite realizar investigaciones cualitativas cuyo objetivo se oriente a hacer descripción; a realizar un ordenamiento conceptual esto quiere decir la organización de datos en categorías discretas de acuerdo con sus propiedades y dimensiones. Dichas categorías tienen un orden, una jerarquía y una interrelación entre ellas. Y por supuesto, a construir teoría. En particular, para este trabajo se realiza un ordenamiento conceptual de los datos empíricos recolectados.

Para realizar un trabajo con la TF, es necesario tener una mente abierta que permita salir de ideas preconcebidas o, en términos de Corbin y Strauss (2015), permitirse pensar fuera de la caja. Es importante tener un pensamiento flexible ya que esto permite a los investigadores examinar los temas y comportamientos relacionados desde muchos ángulos y puntos de vista, desarrollando con esto explicaciones exhaustivas.

Si bien es cierto que el estar abierto a diferentes interpretaciones permite visualizar de manera diferente a los datos y así observarlos bajo diferentes lentes, Corbin y Strauss (2015) son conscientes que esto lleva a que la ambigüedad sea mayor a la de otros métodos de investigación; es por eso que señalan la importancia de ser consciente de esta ambigüedad y saber vivir con ella dentro de la investigación.

La TF ofrece una amplia gama de procedimientos que pueden usarse para descubrir las creencias y significados subyacentes a la acción, para relacionar aspectos racionales y no racionales del comportamiento y para demostrar cómo la lógica y la emoción se combinan para influir en cómo las personas responden a los eventos. Estos mismos procedimientos pueden usarse para obtener nuevos conocimientos sobre viejos problemas, así como para estudiar áreas nuevas y emergentes que necesitan investigación. Para el caso de este trabajo se hizo uso de la TF ya que, como se dijo previamente, permite abordar áreas no exploradas.

Corbin y Strauss (2015) señalan que para la aplicación de la TF no se recomienda partir de un marco teórico, ya que el propósito principal de la TF es justamente crear un marco interpretativo. Sin embargo, esto no implica que la literatura y los marcos teóricos no puedan ser usados dentro de la TF. Cobrin y Strauss (2015) señalan en reiteradas ocasiones que el uso de la literatura, en particular la literatura técnica, debe ser cuidadosamente abordado; la manera en como recomiendan hacer uso de la literatura es siendo siempre consecuente del propósito con el que se usa y evitando que la literatura termine siendo parte de los datos, logrando con esto cerrar nuestra visión, sin permitir explorar los datos y constriñendo nuestros resultados.

Corbin y Strauss (2015) mencionan algunos de los usos que ellos consideran pertinentes para la literatura dentro de la TF:

- Sensibilizar a los investigadores frente a los matices sutiles en los datos.
- Confrontar los resultados encontrados en la investigación propia con la información obtenida en otras investigaciones ya sea para confirmar los datos encontrados o ilustrar concepciones simplificadoras o parciales de otras investigaciones
- Comparar la teoría construida con teorías ya establecidas para establecer similitudes y diferencias y de esta manera ser capaz de encuadrar los resultados de la investigación en marcos teóricos más amplios

Estos usos que se describen son justamente los usos que se le dan a la literatura en este trabajo investigativo.

Otro aspecto que resalta en la TF de Corbin y Strauss (2015) es el análisis. Los autores definen al análisis como un proceso intuitivo que requiere confiar en uno mismo para tomar las decisiones más acertadas. Señalan además la importancia de tomarse tiempo para considerar todos los significados al realizar el análisis. Por otro lado, explican que delinear el contexto o las condiciones bajo los cuales sucede algo, se dice, se hace o se siente es tan importante como idear el concepto "correcto", es decir, el más adecuado, conveniente o convincente.

En un inicio, el análisis es abierto y exploratorio, tomando así la forma de una lluvia de ideas. Para lograr buenos resultados en esta primera parte del análisis es necesario realizar preguntas exploratorias que permitan eventualmente determinar los conceptos que resumirán los datos con los que se trabaja.

Realizar este proceso de preguntas no es solo propio de la etapa inicial del análisis. Es necesario que durante todo el proceso del análisis se mantenga un dialogo constante con los datos empíricos, lo que se logra justamente realizando preguntas. Por supuesto, estas preguntas varían en propósito; mientras en un inicio las preguntas buscan tener un panorama amplio de los datos, en cuanto avanza el análisis las preguntas se encaminan a descubrir y desarrollar conceptos (representados en los encabezados conceptuales) para, en una etapa posterior, modificar estos encabezados conceptuales y desarrollarlos en términos de propiedades y dimensiones y así, en una etapa posterior, generar categorías.

Para la TF es indispensable que el análisis de datos sea sólido y creativo, que se haga constantemente un cuestionamiento astuto frente a los resultados que se obtengan, que el investigador se adentre en una búsqueda incesante de respuestas que deriven de sus datos, que se haga una observación activa y un preciso repaso de los resultados.

Aunque el análisis que propone Corbin y Strauss (2015) en la TF tiene como propósito final crear teoría, esto no quiere decir que la descripción no juegue un papel importante dentro del análisis. La descripción juega un papel en el desarrollo teórico al completar los detalles una vez que se da forma a la estructura teórica.

El objetivo principal del análisis en la TF es reducir la cantidad de datos con los que los investigadores deben trabajar delineando, conceptos para representar, organizar y agrupar los datos. Estos conceptos varían en niveles de abstracción. Los conceptos de niveles básicos son llamados encabezados conceptuales (o nombres conceptuales); estos son los nombres que dan los investigadores a los datos en bruto. Los conceptos de niveles superiores son llamados categorías. Las categorías son términos más abstractos que denotan el tema principal al que apunta un grupo de conceptos de niveles básicos. El usar conceptos de nivel básico (encabezados conceptuales) como la base del análisis asegura no alejarse de los datos empíricos, algo muy importante para la TF pues son los datos los actores protagónicos dentro de la teoría.

Se sabrá que un conjunto de categorías se ha desarrollado de buena manera cuando se hallan vínculos entre las categorías y entre la categoría central. Para Corbin y Strauss (2015) la categoría central es lo que el investigador identifica como el tema principal de estudio. Esta categoría proporciona la estructura a la teoría.

Corbin y Strauss (2015) presentan un abanico de estrategias mentales analíticas o procedimientos flexibles muy claramente descritos que pueden utilizar los investigadores para realizar el análisis; a estas estrategias las llaman herramientas.

Estas herramientas contribuyen a la construcción de categorías que permiten dar una interpretación cualitativa a datos de tipo empírico.

En la TF se resaltan cuatro de estas herramientas como las más importantes: las comparaciones constantes, las preguntas, los memos y el muestreo teórico. En lo que sigue se hablará sobre estas cuatro herramientas analíticas. Se describen únicamente estas cuatro herramientas pues son justamente las que se usaron para construir las categorías que en este documento se presentan.

3.1.1 Preguntas

Hacer preguntas permite al investigador realizar un sondeo y desarrollar respuestas provisionales que contribuyan al avance y profundidad del análisis. La TF distingue cierto tipo de preguntas cuyos propósitos varían. A continuación, se presentan este tipo de preguntas

- Preguntas que sensibilizan: éstas permiten que el investigador se sintonice con los posibles significados de los datos. Se destacan preguntas como, ¿cómo varían los significados que dan a sus acciones en otros contextos?, ¿cómo definen a este objeto?
- Preguntas teóricas: Estas preguntas ayudan al investigador a ver el proceso, la variación y las conexiones entre los conceptos. Se realizan preguntas como ¿qué relación existe entre estos significados?, ¿en qué se diferencia o se asemeja este concepto de este otro?, ¿Qué propiedades tiene este concepto?
- Preguntas prácticas: Estas preguntas brindan orientación para el muestreo teórico y contribuyen a la estructura teórica. Se resaltan preguntas como ¿qué conceptos están bien desarrollados?, ¿he logrado el punto de saturación?, ¿Qué tipo de datos necesito?

- Preguntas orientadoras: estas preguntas son las que guían nuestra recolección de información y análisis de los datos.

Aunque Corbin y Strauss (2015) tipifican a las preguntas es importante aclarar que por la naturaleza del análisis no hay preguntas que se deban o no se deban hacer. Cualquier pregunta que permita aproximarse a los datos y desarrollar nuestros conceptos (encabezados conceptuales o categorías) en términos de propiedades y dimensiones es válida y puede utilizarse.

3.1.2 Comparaciones constantes

En la TF se definen a las comparaciones constantes como al acto de tomar una pieza de los datos y examinarlas contra otra pieza de los datos, de cierta manera rompe los datos para con esto poder compararlos. El propósito de realizar esta comparación es determinar si los datos comparados son semejantes o diferentes, conceptualmente hablando, y así agrupar en encabezados conceptuales aquellos datos que son similares. Esto permitirá reducir los datos a un abanico de encabezados conceptuales que los agrupan, los cuales, luego de ser desarrollados, modificados, fusionados, eliminados, etc, basándose en sus propiedades y dimensiones, terminarán siendo las categorías.

Para la TF, las comparaciones constantes es tal vez la herramienta analítica más importante; esto debido a que sus características permiten que el investigador parta de los datos para definir categorías en términos de propiedades y dimensiones, mostrar cómo varía el concepto en cuestión en distintas condiciones y relacionar las categorías entre sí y con la categoría central. Esto permite brindar una estructura a la teoría y además brindar validez a las categorías que se soportan en los datos empíricos.

Al ser la herramienta analítica que orientó la construcción de las categorías que este documento presenta, posteriormente se hará una explicación más detallada de la aplicación de las comparaciones constantes en un análisis cualitativo.

3.1.3 Memos

Para Corbin y Strauss (2015) los memos son una herramienta analítica que permite llevar un registro organizado de la conversación que tiene el investigador con los datos y son una parte vital de un buen análisis.

Conservar el dialogo entre los datos y el investigador, permite observar cómo los conceptos que surgen de los datos interactúan entre sí; dicho en términos de Corbin y Strauss (2015), el utilizar los memos permite desarrollar conceptos en términos de sus propiedades y dimensiones, esto permite a su vez definir, densificar y refinar conceptos.

Dentro de la TF se considera a los memos como una herramienta primordial pues permite al investigador mantener un registro de los cambios y progresos del análisis, algo de vital importancia en la investigación cualitativa, pues ésta implica un pensamiento complejo y acumulativo.

Los memos pueden tener diferentes formas y funciones dependiendo de la etapa y el propósito de la investigación. No hay una manera única de realizar estos memos. Cada investigador debe hacerlos de la manera que considere mejor. Lo importante es lograr hacer una lluvia de ideas y soltar los pensamientos que surjan de la exploración de los datos.

Hay que recordar que los memos se deben hacer desde la primera sesión de análisis de los datos y continuar realizándolos durante todo el proceso; de esta manera los memos comenzarán como representaciones rudimentarias del pensamiento y crecerán en complejidad, densidad, claridad y precisión a medida que avanza la investigación.

En síntesis, los memos son anotaciones escritas que van reflejando el pensamiento, dudas, inquietudes, sugerencias, hipótesis del investigador y que surgen libremente durante todo el trabajo. El objetivo es variado y depende de las condiciones de la investigación: puede ser dejar registro de una lluvia de ideas, al inicio del trabajo, o pueden emplearse para valorar el avance en el análisis, o para sintetizar ideas y expresarlas en conceptos y categorías.

3.1.4 Muestreo teórico

Para Corbin y Strauss (2015) el muestreo teórico (MT) es una herramienta analítica que permite al investigador valorar si un conjunto de categorías representa a un conjunto de datos, los cuales comparten características comunes con el conjunto de datos originales con base en los cuales se construyeron las categorías. Este permite evaluar el potencial de aplicación de un conjunto de categorías. Con él se puede repetir iterativamente hasta que el investigador considere que las categorías han llegado a un punto de saturación: cuando no están surgiendo, de los nuevos conjuntos de datos, nuevas categorías o temas relevantes.

El propósito del MT es el estudio y desarrollo de las categorías. Al utilizar el MT es posible:

- Identificar propiedades y dimensiones de las categorías, esto es, dotar a las categorías de densidad;
- Identificar y profundizar en propiedades y dimensiones de la categoría central;
- Establecer variaciones dentro de las categorías.

La lógica de la TF permite acumular las propiedades y dimensiones de las categorías en cada nueva aplicación del muestreo teórico enriqueciendo, con esto, a las categorías. Con cada nueva aplicación del instrumento se contribuye al desarrollo de los conceptos bajo diferentes perspectivas. Es decir, por un lado, permite profundizar las categorías y por otro da la posibilidad de ensanchar la visión del problema bajo estudio.

Los investigadores expertos tienen sensibilidad para decidir cuándo un concepto está lo suficientemente desarrollado para los fines de su investigación. Dependiendo de las limitaciones del estudio, saben que es necesario detenerse en algún punto sin haber cubierto todas las posibles perspectivas e incluso sin haber llegado al punto de saturación de las categorías. Corbin y Strauss (2015), sin embargo mencionan que se sabe que se ha producido suficiente muestreo teórico cuando las principales categorías demuestran especificidad, son densas en términos de propiedades, muestran variación dimensional y están bien integradas.

Es importante mencionar que la TF aclara que el MT:

- No puede ser planificado antes de adentrarse al estudio
- Busca intencionalmente eventos o situaciones que favorezcan el desarrollo de las categorías
- Por su naturaleza, puede continuar indefinidamente.
- No requiere nuevos datos para ser utilizado; en ocasiones es suficiente regresar a datos previamente analizados, para que estos sean releídos bajo los nuevos conceptos encontrados.

Corbin y Strauss (2015) sugieren algunos criterios que dan validez a la teoría y a los ordenamientos conceptuales construidos con ayuda de las herramientas analíticas de la TF. Algunos de estos criterios –que se describen en lo que sigue-fueron empleados en la presente investigación para valorar la validez de las categorías que aquí se exponen.

- Las categorías deben estar desarrolladas sistemáticamente en términos de sus propiedades y dimensiones
- Las categorías deben demostrar cohesión: en la TF se dice que las categorías demuestran cohesión, entre otras cosas, cuando se designa un concepto más abstracto que el resto de las categorías, el cual las engloba y cuando hay consistencia entre ellas y no existen huecos lógicos.
- Las categorías deben estar interrelacionadas entre ellas y con la categoría central
- Las categorías deben haber llegado a un punto de saturación suficiente para los fines del estudio
- Las categorías deben representar a los datos que se utilizaron para definirlas; es decir, las categorías deben ser densas, en el sentido de que no existan datos que no puedan ser representados por las categorías.
- Las categorías deben estar soportadas por conceptos de nivel básico o encabezados conceptuales.

3.1.5 Uso de las categorías en la investigación educativa

Hasta este punto se ha hablado de las herramientas que nos permiten construir categorías en la TF, sin embargo, no se ha hablado de la importancia y bondades del uso de dichas categorías en la investigación y labor docente. Siguiendo los lineamientos de la TF (Corbin y Strauss, 2015), tiene sentido afirmar que las categorías (de teorías o de ordenamientos conceptuales) no solo tienen el propósito de dar cuenta del desempeño de los estudiantes, uso que se le dio a las categorías construidas en este trabajo de investigación, sino también tienen algunos usos, como los que se mencionan a continuación:

- Permiten analizar los datos: En términos de Corbin y Strauss las categorías permiten interpretar los datos asignándoles significados. Estos significados no son exactamente igual a los que el estudiante le otorga a un concepto, o a una tarea, o a una resolución; i.e., ninguna categorización permite atrapar los significados textuales de los estudiantes; sin embargo, y a sabiendas de lo relativo de las interpretaciones, el investigador siempre busca ser fidedigno a los datos empíricos, para con esto estar lo más cerca posible de los significados con los que el estudiante orientó sus respuestas.
- Permiten explorar un tema sin salir de los márgenes de la coherencia: ésta es tal vez una de las características más importantes del uso de las categorías al realizar análisis, pues evita que el investigador o profesor tenga que enfrentarse a los datos en bruto sin un horizonte, lo que hace más fácil la interpretación y clasificación de la producción de los estudiantes.
- Permiten transformar los datos en conceptos: esto con el fin de trabajar en torno a los conceptos y no con una muestra tan dispersa y heterogénea como son los datos en bruto.
- Permiten agrupar los datos en diferentes niveles: Al realizar análisis se crean encabezados conceptuales que clasifican la producción de los estudiantes, a los que se les puede atribuir un orden. Esto permite tomar decisiones en torno al objetivo de la clasificación, por ejemplo para establecer una secuencia de actividades para el aprendizaje o hacer deducciones frente algún tipo de respuesta.
- Permiten trabajar a cualquier nivel de profundidad: La importancia de este punto es que dependiendo del interés se pueden utilizar las categorías para

hacer análisis muy iniciales, generales y abarcativos o mucho más detallados, profundos y particulares de cada alumno, esto por supuesto a reserva del interés del investigador/profesor.

4 MÉTODO: RECUPERACIÓN DE DATOS EMPÍRICOS

4.1 SOBRE LOS SUJETOS QUE PARTICIPARON EN LA INVESTIGACIÓN

En la investigación participaron 11 estudiantes de tercero de secundaria (14 a 15 años) de una escuela pública de la ciudad de México. Se seleccionó esta escuela debido a las facilidades de tiempo que brindaban para trabajar con los alumnos.

Se seleccionaron los estudiantes que destacaban en clase de matemáticas (álgebra y geometría) debido a su razonamiento lógico y facilidades argumentativas. Se recurrió al juicio de los maestros de matemáticas para establecer qué estudiantes cumplían con estos criterios. El propósito de trabajar con estos estudiantes era el tener mayores posibilidades de encontrar argumentos en sus producciones.

Es importante señalar que los alumnos ya habían estudiado en segundo de secundaria el tema de congruencia de triángulos, particularmente conocían y habían trabajado los criterios de congruencia para triángulos (LLL, LAL y ALA).

4.2 SOBRE LOS CUESTIONARIOS

Se aplicaron a los 11 estudiantes seleccionados cuatro cuestionarios que fueron resueltos en 6 sesiones de clase (50 minutos cada sesión de clase); el total de las sesiones se desarrollaron en el lapso de una semana. Se dividió el trabajo sobre los cuestionarios de la siguiente manera: para el cuestionario 1 y 2 se dispusieron las dos primeras sesiones de trabajo, para la solución del cuestionario 3 y 4 se dispusieron 4 sesiones de clase. En los anexos de este documento se encuentran todos los cuestionarios que se utilizaron en este trabajo de investigación.

Se hizo uso de nociones provenientes de la geometría euclidiana, tomando como base lo propuesto en Escobar (2000) y Puertas (1991), algunas de las ideas de la geometría de Legendre, tomadas de Gilman (1984) y las ideas de la geometría de

Hilbert (1996). Se realizó la exploración en estas diferentes versiones de la geometría con el fin de identificar los distintos tratamientos que en esos trabajos se hacía del concepto de congruencia y en particular, la manera en la que se introducían y operaban los criterios de congruencia de triángulos; esto permitió identificar las definiciones, nociones básicas, teoremas y conocimientos previos necesarios que, en cada documento consultado, resultaban necesarios para trabajar la congruencia de polígonos. Con la información de esta búsqueda los autores de este documento elaboraron las definiciones, nociones básicas, construcciones y teoremas que se encuentran en los cuestionarios. De igual manera la lectura de las distintas versiones de la geometría anteriormente mencionadas orientó la secuencia de preguntas que en los cuestionarios se presenta.

De manera general, para el caso del cuestionario 1 y 2 se buscó brindar herramientas al estudiante que le permitieran trabajar con la congruencia (nociones básicas, construcciones de figuras geométricas con regla y compás, definiciones de la congruencia y teoremas en acción afines al trabajo con congruencia de polígonos). Como el propósito del cuestionario 1 y 2 era ayudar a los estudiantes, se consideró pertinente que la solución de estos dos cuestionarios fuera orientada por el docente y socializada por los alumnos y el maestro a cargo.

Por otro lado, los cuestionarios 3 y 4 se construyeron con la finalidad de valorar el desempeño de los estudiantes al trabajar en preguntas relacionadas con la congruencia de polígonos. Para esto se pidió a los estudiantes que trabajaran de manera individual en esos cuestionarios (salvo una parte del cuestionario 4 en donde explícitamente se pidió trabajar en pares), para asegurar con esto que los razonamientos fueran propios de los estudiantes y no de sus compañeros.

Es importante mencionar que en un inicio del trabajo de investigación se pretendía establecer posibles relaciones entre el desempeño en tareas relacionadas con la congruencia de los polígonos y los estados de seguridad que manifestaban tener los estudiantes; debido a esto en todos los cuestionarios se encuentran preguntas relacionadas con la congruencia de polígonos y preguntas en donde explícitamente se les pide a los estudiantes asociar sus respuestas con un nivel de seguridad (totalmente seguro, muy seguro, seguro, poco seguro o nada seguro), dando argumentos que justifiquen el porqué de su nivel de seguridad. Con el paso del trabajo de investigación, y debido a la falta de categorías que, en la literatura consultada en la revisión, evaluaran el desempeño de la congruencia y se adecuaran al propósito de este trabajo de investigación, se decidió centrar este trabajo únicamente en la construcción de categorías que permitieran evaluar el desempeño en tareas relacionadas con la congruencia de polígonos, dejando, para trabajos futuros, la exploración de las posibles conexiones entre el desempeño y la seguridad. Por esta razón no se hablará, en lo que sigue, de las preguntas relacionadas con el nivel de seguridad que se muestran en los cuestionarios.

De manera particular, en lo que sigue, se describen cada uno de los 4 cuestionarios y se explicita el propósito de cada uno de ellos.

Cuestionario 1: Los propósitos de este cuestionario son brindar algunas de las nociones básicas necesarias para el trabajo con la congruencia y realizar una primera aproximación a la congruencia en geometría. En este cuestionario se trabajaron 3 ideas centrales (nociones básicas, congruencia de segmentos y congruencia de polígonos). En lo que sigue se describe cada uno de estas ideas:

- Nociones básicas relacionadas con segmentos y rectas: Para el trabajo con las nociones básicas se recurrió a plantear preguntas como por ejemplo: cuando trazas una recta con tu regla, ¿cuántos puntos de referencia es necesario tener?, ¿cuál es la cantidad mínima de puntos de referencia necesarios para crear una recta en geometría?, si dos rectas distintas se cruzan ¿en cuántos puntos como máximo se cortan?

- Congruencia en segmentos: Se planteó una actividad con material concreto en la cual los estudiantes comparaban, por medio de la superposición, palitos que representaban segmentos. Seguido de esto, se introdujeron construcciones con regla y compas para la comparación de segmentos dados.
- Congruencia de ángulos: Se realizó un trabajo análogo al propuesto para los segmentos; inicialmente se compararon, por medio de la superposición, ángulos construidos con palitos, para luego introducir la construcción y comparación de ángulos con regla y compas.

Cuestionario 2: El propósito de este cuestionario es presentar las definiciones formales de congruencia para polígonos, la definición por superposición de polígonos, el teorema "a ángulos mayores les corresponde lados mayores" (dados dos triángulos ABC y DEF, si $AB \cong DE$ y $BC \cong EF$ entonces si $\sphericalangle ABC < \sphericalangle DEF$ entonces $AC < DF$) y el criterio de congruencia LLL para triángulos. Para presentar las definiciones y los teoremas se dieron a los estudiantes secuencias de preguntas que los condujeran a construir las definiciones y a dar validez a los teoremas. Al finalizar cada secuencia de preguntas el docente a cargo socializaba los resultados buscando con ello unificar las respuestas.

Cuestionario 3: El propósito de este cuestionario era la recolección de información que diera cuenta del desempeño de los estudiantes en trabajos de congruencia de triángulos, en particular las preguntas se orientaron a explorar los argumentos que daban los estudiantes cuando se trabajaba en torno a los criterios de congruencia LAL y AAL. Para este primer cuestionario el interés principal era evaluar el desempeño de los estudiantes en tareas relacionadas con la congruencia que previamente habían sido abordados en la escuela.

Ya que de este cuestionario se tomó la mayor parte de los datos que sirvieron como base para la construcción de las categorías, en lo que sigue se presentan las preguntas que se realizaron al hablar del criterio de congruencia LAL, para que el lector pueda tener un panorama más claro del instrumento que se utilizó.

1. Dibuja dos triángulos ABC y DEF de tal manera que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ (es decir, que dos de sus lados sean congruentes).
    1.1. ¿cuántos posibles triángulos puedo formar con las condiciones dadas en el punto 1?, justifica tu respuesta

Ninguno	
Uno	
Muchos	
Infinitos	

    1.2. ¿Los dos triángulos que dibujaste en el punto 1 son congruentes? Si tu respuesta es SI, ¿qué te permite asegurar la congruencia?, si tu respuesta es NO, ¿Es posible dibujar dos triángulos ABC y DEF congruentes sabiendo que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ (que dos de sus lados son congruentes) y sin saber nada entre la relación de $\overline{CA}$ y $\overline{DF}$?
    1.3. Esas dos condiciones (es decir, dos lados congruentes) ¿son suficientes para garantizar la congruencia de los dos triángulos?
    1.4. ¿Qué otro u otros datos (mínimos) debemos conocer en relación a los dos triángulos para asegurar que el triángulo ABC es congruente con el triángulo DEF si no se sabe nada de la relación entre $\overline{CA}$ y $\overline{DF}$?. Si te das cuenta, te estamos pidiendo que propongas otro criterio de congruencia para garantizar que dos triángulos son congruentes, es decir, que

propongas las condiciones mínimas que deben cumplir los componentes de dos triángulos que garanticen que esos dos triángulos son congruentes. A este segundo criterio de congruencia le vamos a llamar Criterio de congruencia 2.

1.5. Comprueba el nuevo criterio de congruencia planteado en el punto 1.4 dibujando dos triángulos ABC y DEF con los nuevos datos que propusiste, ¿son congruentes los triángulos ABC y DEF?

1.6. ¿Es posible quitar alguno ó algunos de los datos extra que propusiste y seguir asegurando que el triángulo ABC y DEF son congruentes?, si tu respuesta es SI ¿cuántos y cuáles puedes quitar?, si tu respuesta es NO justifica ¿por qué al quitar alguno(s) elemento(s) de los que has propuesto ya no se asegura una congruencia? (apóyate en dibujos para justificar tu respuesta)

1.8. ¿Recuerdas al amigo muy inteligente al que le tuviste que argumentar en la sesión pasada?, ¿Cómo le argumentarías a una persona muy inteligente que este nuevo criterio asegura la congruencia entre ABC y DEF?

Con la misma estructura y de manera análoga se plantearon una secuencia de preguntas para trabajar el criterio de congruencia ALA.

Cuestionario 4: Al igual que en el cuestionario 3, el propósito del cuestionario 4 era servir como puente para recolectar datos que permitieran conocer el desempeño que tienen los estudiantes frente a la congruencia. La diferencia del cuestionario 3 y el cuestionario 4 es que en el cuestionario 4 se buscó explorar el desempeño en temas relacionados con la congruencia que no se estudian en la escuela y que, por lo tanto, los estudiantes no habían trabajado previamente. Es importante aclarar que en este cuestionario se realizó un trabajo en parejas, que se propuso con el fin de observar posibles cambios en el desempeño de los estudiantes al interactuar con un par; si bien para el momento de presentar este documento se encontraron algunos resultados relacionados con este aspecto, los autores de este documento decidieron exponer dichos resultados en trabajos futuros.

Este cuestionario se pensó en tres momentos. En lo que sigue se describen cada uno de estos momentos.

- *Primer momento:* Se presentó una actividad en donde los alumnos respondían a preguntas relacionadas con la congruencia de polígonos de 4 y 5 lados. En este primer momento se buscaba indagar la manera en la que los estudiantes razonaban frente a criterios de congruencia erróneos y observar si les era posible establecer criterios de congruencia correctos para polígonos de 4 y 5 lados.
- *Segundo momento:* Se solicitó a los alumnos trabajar en parejas; el trabajo se centraba en construir criterios de congruencia para polígonos de 4, 5 y 6 lados. Se buscaba observar si con el intercambio de ideas entre los pares de alumnos, ellos construían argumentos que justificaran la veracidad de los criterios de congruencia que proponían. Este segundo momento, es el único momento que no se trabajó de manera individual en la solución del cuestionario 3 y 4.
- *Tercer momento:* Cada estudiante hace un trabajo sobre los criterios de congruencia en polígonos de 4, 5 y 6 lados considerando lo hecho previamente en el trabajo de parejas. Se buscaba observar los cambios en la manera de argumentar de los estudiantes en relación con lo observado en el primer momento.

Es importante señalar que para la elaboración de las categorías que en este documento se presentan se hizo uso principalmente de las respuestas del cuestionario 3 y 4, sin considerar el trabajo en pares del cuestionario 4. Solo se recurrió a los cuestionarios 1 y 2 como apoyo para la interpretación de algunas de las producciones encontradas en el cuestionario 3 y 4.

5 REFERENTES LITERARIOS: APOYO CONCEPTUAL PARA LA CONSTRUCCIÓN DE CATEGORÍAS

Cómo se mencionó en el capítulo previo, el uso de la literatura, lo que Corbin y Strauss (2015) llaman referentes literarios, ofrece distintas oportunidades o posibilidades al momento de desarrollar categorías (de ordenamientos conceptuales o de teorías) siguiendo los principios de la TF. En esta investigación se hizo uso de esos referentes literarios justamente para inspirar a los investigadores y sensibilizar su mirada frente a los matices sutiles que no alcanzaban a mirar en los datos y frente a los huecos conceptuales que no lograban resolver durante la construcción de las categorías. En particular, el uso de los referentes literarios permitió a los autores dotar al conjunto de categorías de un orden y una jerarquía. En lo que sigue se exponen las ideas de Sfard y Linchevski (1994) y Wenger (2001) que sirvieron como referente literario para inspirar la propuesta de ordenamiento conceptual que aquí se expone.

5.1 SOBRE LA TEORÍA DE LA REIFICACIÓN DE SFARD Y LINCHEVSKI

En lo que sigue se exponen las ideas que sobre la teoría de la reificación de Sfard y Linchevski (1994) se usaron en la construcción de las categorías que en este documento se presentan.

Sfard y Linchevski (1994) inician su planteamiento formulando una pregunta: ¿qué entiendes por $3(x+5)+1$?; para algunas personas esta expresión podría referirse a un proceso computacional; para otras personas puede representar un número el cual se debe calcular, pero para otras puede representar una función. Estas diferentes maneras de interpretar a la expresión $3(x+5)+1$ dependen, por un lado, del contexto que acompaña a la expresión pero, por otro lado, de lo que puede interpretar la persona que lo lee.

Sfard y Linchevski (1994) consideran que, en general, las expresiones matemáticas se pueden mirar de dos formas: una primera en la que se considera a la expresión como un proceso y una segunda en donde se considera a la expresión como un objeto.

Las autoras mencionan que un estudiante percibe a la expresión como un proceso cuando lo ve como una secuencia de instrucciones que se deben cumplir para obtener un resultado. En este caso, el estudiante lo que distingue en la expresión $3(x+5)+1$ es el proceso de sumar a la x cinco unidades, para luego multiplicar el resultado por tres y finalmente sumarle uno.

Por otro lado, cuando un estudiante considera a la expresión como un objeto es capaz de verla como un elemento matemático al que le puede asociar propiedades; para el caso de la expresión $3(x+5)+1$, ese estudiante podría por ejemplo hablar en términos de funciones diciendo que $3(x+5)+1$ es una función lineal.

Sfard y Linchevski (1994) mencionan además que estas dos maneras de percibir o relacionarse con las expresiones matemáticas son justamente los extremos de un continuo y que a medida que un estudiante se aleja de las consideraciones como proceso (en las que se ve a la expresión algebraica como una secuencia de instrucciones que se deben realizar), se aproxima a considerarlas como un objeto, visión que le permite concebir a la expresión de una manera más abstracta mostrando mayor generalidad en su respuesta y dando evidencia de un manejo fluido, íntegro y económico.

La teoría de la reificación, y en particular la que retoman Sfard y Linchevski (1994), da lugar a un modelo de formación de conceptos que aplican al desarrollo histórico, así como al aprendizaje individual. Ellas muestran evidencias de que en las matemáticas la concepción operacional precede a la estructural. Lo que es concebido como un proceso a un nivel llega a ser objeto en un nivel superior. Es decir, Sfard y Linchevski (1994) miran el desarrollo de los conceptos matemáticos como transiciones de concepciones operacionales a concepciones estructurales. En la Imagen 4 se retoma la gráfica con la que las autoras ilustran su razonamiento. Kaput, de acuerdo con Sfard y Linchevski (1994), hace una observación similar cuando afirma que la construcción de entidades mentales se da a través de la reificación de acciones, procedimientos y conceptos (ie, donde los resultados de las acciones se miran como objetos fenomenológicos), objetos que pueden servir después como base para nuevas acciones, procedimientos y conceptos a un nivel más alto de organización.

Así que el desarrollo de los conceptos matemáticos se da de acuerdo con una estructura multi-nivel donde las ideas que surgen de procesos previos se consideran como objetos que se integran a nuevos procesos, alcanzando cada vez mayores grados de abstracción.

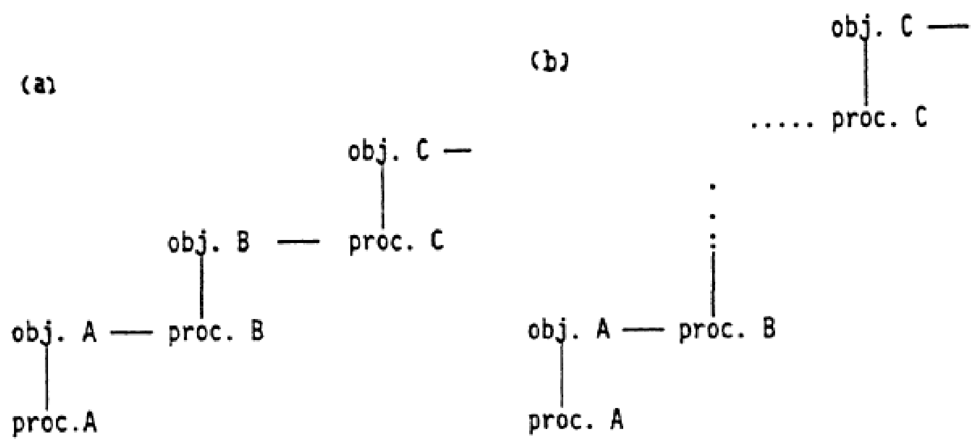


Imagen 4. Desarrollo de los conceptos matemáticos como transición de lo operacional a la concepción estructural (Sfard y Linchevski, 1994, p.221)

Esta idea de desarrollo conceptual desdoblada en etapas iteradas de procesos que dan resultado a objetos, que se integran a su vez a nuevos procesos contribuye a poder establecer una jerarquia y dar orden a los conceptos matemáticos.

En este estudio se hace uso de algunas de las ideas de Sfard y Linchevski (1994) para dotar a las categorías de un orden y una jerarquía. En el siguiente capítulo (construcción de categorías) se expone el uso de este referente literario en la construcción de las categorías.

5.2 Sobre Wenger y la idea de cosificación

Para Wenger (2001) el término cosificación o reificación (en latín res significa cosa) se emplea para referirse a la idea de "convertir algo en cosa, para así tratarlo como tal" (p. 83). Cuando hablamos de cosificar nos referimos al hacer, diseñar, representar, utilizar, nombrar, codificar, describir, percibir, interpretar, reutilizar y estructurar. Esto quiere decir que quien cosifica un objeto es capaz de atribuirle a la idea una serie de significados y propiedades con las cuales manipula el objeto mental y con las cuales se refiere al mismo. Esto permite que la idea mental, ya cosificada, pueda ser tratada como un elemento material y concreto aun cuando no es propiamente un elemento material y concreto.

Wenger (2001) señala que el poder cosificar una idea permite utilizarla para pensar, permite a quien cosifica el concepto hablar sobre la idea como si fuera un objeto que tuviera vida propia. Cuando cosificamos las ideas mentales solidificamos estas ideas dándole forma. En el momento en que cosificamos atribuimos a nuestro significado una existencia independiente, por lo que pareciera que nuestras ideas toman una forma.

5.3 INTERPRETACIÓN DE LOS AUTORES DE LAS IDEAS DE SFARD Y WENGER

Lo que se presenta a continuación es una interpretación que se hizo en el marco del presente trabajo en la que se trata de hacer compatibles las posturas de Sfard y Linchevski y la de Wenger, adecuándola a los fines propios del presente estudio.

Siempre que llevamos a cabo prácticas matemáticas estamos reificando. Porque utilizamos símbolos de números, variables, operaciones y otro tipo de objetos matemáticos.

Lo que nos parece una aportación de Sfard es que, con su distinción entre proceso y objeto, es posible distinguir en qué objetos el estudiante centra su atención y qué tipo de objeto está considerando. Con el ejemplo de Sfard se puede aclarar este punto.

Cuando un estudiante de primero de secundaria con una competencia pseudoestructural resuelve una ecuación, él solo aplica reglas sobre símbolos que denotan números, variables y operaciones. Estos son objetos previamente reificados por el alumno y él centra su atención sólo en la aplicación de reglas (la trasposición de términos) sobre esos objetos. Pero para él, la ecuación como un todo, y sus posibles características y propiedades, no son objetos de consideración ni de reflexión. Los objetos de reflexión del estudiante son los números, variables, operaciones, es decir, los componentes de ese todo, pero no es ese todo (i. e., la ecuación). Distinto es el caso del estudiante que presenta una competencia estructural porque puede mirar la ecuación como un todo (e. g., a través del modelo de la balanza, o como una función). En este caso considera a la ecuación como un nuevo objeto de reflexión con sus propiedades específicas; este nuevo objeto es distinto a los objetos que lo componen y sus propiedades son distintas a las que tienen sus componentes.

6 RESULTADOS PARTE 1: APORTACIÓN METODOLÓGICA SOBRE LA CONSTRUCCIÓN DE LAS CATEGORÍAS QUE COMPONEN EL ORDENAMIENTO CONCEPTUAL

Como se ha dicho previamente, uno de los objetivos de este trabajo es proponer un conjunto de categorías, integradas en un ordenamiento conceptual, que reflejen el desempeño de los estudiantes de secundaria al realizar tareas relacionadas con la congruencia de polígonos. Existe una complejidad inherente a la elaboración de categorías fundamentadas en datos empíricos, en el campo de la educación matemática. En principio, porque en los manuales de TF no se suele explicitar la manera de llevar a cabo este proceso ni se precisan los considerandos y los criterios que hay que tomar en cuenta para ello; adicionalmente, porque en el campo de la educación matemática no suelen haber construcciones conceptuales que sigan los principios de la TF; los ejemplos suelen provenir siempre de dominios ajenos.

Por lo antes dicho, los autores consideraron importante y pertinente no solo presentar como resultado el conjunto de categorías construidas, es decir, el ordenamiento conceptual, sino además plantear, como un segundo objetivo, un análisis metacognitivo del proceso que vivenciaron en la construcción de esas categorías. Esta reflexión está dirigida, sobre todo, a autores noveles (estudiantes o profesores) que estén interesados en hacer investigación siguiendo los lineamientos de la TF.

Las categorías que aquí se describen se construyeron tomando como base los datos en bruto de las producciones que los estudiantes brindaron al solucionar los cuestionarios. Para la construcción se utilizaron principalmente tres herramientas de la TF de Corbin y Strauss (2015): las comparaciones constantes, las preguntas y el muestreo teórico, cuya descripción se hizo en el capítulo sobre la metodología.

Las comparaciones constantes y las preguntas se emplearon durante todo el proceso de construcción de categorías; esto permitió construir las categorías asegurando la correspondencia de los datos con las categorías. Por otro lado, el muestreo teórico permitió, hacia el final de la construcción de las categorías, verificar si dichas categorías se adaptaban a otros datos que tuvieran contextos similares a los datos iniciales que sirvieron para la creación de las categorías. En lo que sigue se presenta el resultado del análisis realizado por los autores en relación a la construcción de las categorías que este documento presenta.

Para la descripción del proceso de construcción de categorías que se hace en lo que sigue, se dividió ese proceso en tres momentos. Un primer momento se enfoca en la construcción de encabezados conceptuales; en éste, y con ayuda de las ideas de las comparaciones constantes, se generó un conjunto variado de encabezados conceptuales que poco a poco fueron ganando generalidad y representando de mejor manera a los datos empíricos. Un segundo momento muestra el paso de los encabezados conceptuales a las categorías muy iniciales; esto se hizo ayudándose de algunas ideas propuestas por autores como Sfard y Linchevski (1994), que en la investigación se tomaron como referentes de la literatura en tanto que sirvieron como inspiración para la construcción de las categorías. Y un tercer y último momento -Categorías finales- en donde se muestra cómo, con ayuda del muestreo teórico y las comparaciones constantes, se modifican las categorías iniciales en un proceso de ir y venir entre las categorías y los datos, permitiendo refinar y dar validez a las categorías que aquí se presentan. En lo que sigue se describen estos tres momentos de la construcción de las categorías.

6.1 Construcción de encabezados conceptuales:

En este primer momento se partió de las ideas previas de los investigadores para explorar los datos empíricos. A partir de esto se empezó el análisis de los datos ‘en bruto’ buscando aspectos que resultaran significativos; esta búsqueda fue guiada mediante preguntas que sensibilizaran a los investigadores, distinguiendo así patrones que agruparan respuestas en términos de semejanzas y diferencias; a cada uno de estos aspectos se les asoció una etiqueta conceptual generando así una amplia gama de etiquetas que al ser confrontadas con los datos en un proceso de ir y venir, proceso en el cuál los investigadores se cuestionaban constantemente frente a los resultados, permitieron poco a poco modificar las etiquetas y redefinir los patrones para obtener etiquetas conceptuales más generales y densas. Esto se realizó iterativamente, asociándose a un proceso en espiral entre los datos, el conjunto de patrones y el conjunto de etiquetas conceptuales resultante.

En cada paso del proceso se revisó y/o modificó el conjunto de las etiquetas conceptuales y los cambios se registraron de nueva cuenta en un registro tabular. En este primer momento y mediante este proceso cíclico iterativo, se aseguró una correspondencia entre el conjunto de etiquetas conceptuales resultante de cada proceso iterativo y el conjunto de patrones encontrados en los datos. No obstante, en este primer momento el conjunto de etiquetas era disperso, heterogéneo y carecía de un principio articulador que las permitiera organizar.

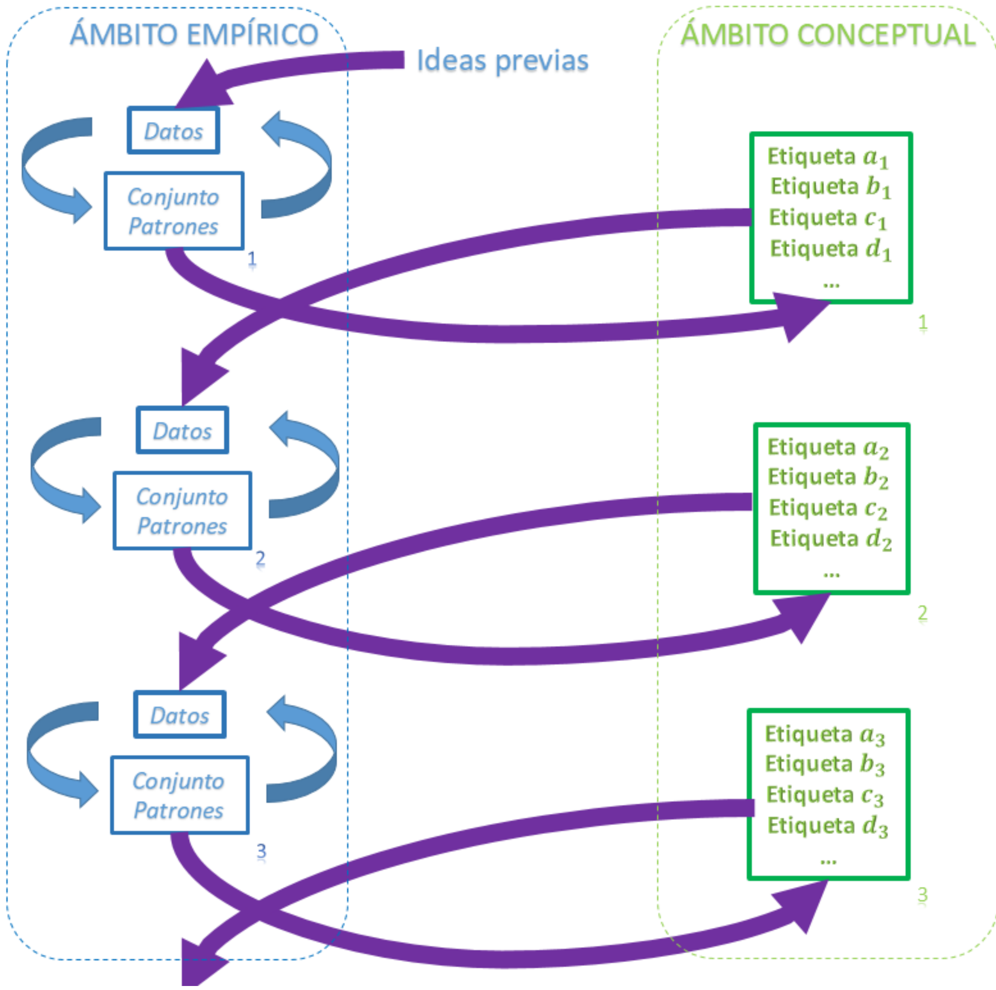


Imagen 5. Proceso de construcción del conjunto de etiquetas conceptuales

En el Imagen 5 se representa el proceso de construcción de los conjuntos de etiquetas conceptuales que se elaboraron en este primer momento. Dentro del Imagen 5 en la parte izquierda se representa el proceso de las comparaciones constantes realizado en el universo de los datos empíricos. Gracias a este proceso es posible romper los datos, organizarlos y reorganizarlos en pro de crear conjuntos de patrones cada vez más adecuados para la construcción de las etiquetas conceptuales. Esta columna representa el mundo de los datos empíricas.

Por otro lado, en la parte derecha de la gráfica aparece el conjunto de etiquetas conceptuales resultantes de los patrones encontrados con las comparaciones constantes. Dentro de este conjunto de etiquetas se realiza un proceso iterativo de organización y/o modificación de las etiquetas con el fin de brindarle al conjunto una consistencia interna: Que los elementos del conjunto tengan un orden, sean ajenos entre ellos y estén interrelacionados. El realizar este proceso implica hacer una reflexión en torno al conjunto de etiquetas conceptuales que permita reestructurar y organizar ese conjunto. Es importante resaltar que el proceso de reflexión sobre el conjunto de etiquetas se realiza en el mundo de lo conceptual, pues, aunque las etiquetas emergen de los patrones obtenidos de los datos empíricos, el trabajo de análisis, organización y reestructuración se realiza en el conjunto de las etiquetas. Esta columna representa entonces el trabajo que se desarrolla en el ámbito conceptual.

Es importante señalar que la relación establecida entre el mundo de los datos empíricos y el mundo de lo conceptual, representada en el gráfico con flechas moradas, permite determinar si el conjunto de etiquetas es completo, es decir que representa y abarca a todo el conjunto de datos empíricos; en estos términos, el conjunto de etiquetas es suficiente para interpretar el conjunto de datos dados.

El proceso de construcción de los encabezados conceptuales es posible gracias a las preguntas planteadas, que son acordes a la construcción de las categorías, pues son ellas las que permiten sensibilizar la visión del investigador en torno a los datos, establecer patrones (semejanzas/diferencias), encontrar problemas de consistencia y coherencia y además establecer si las categorías son representativas de los datos.

En pro de ejemplificar el proceso descrito en este primer momento, a continuación se presenta un fragmento de los conjuntos de patrones, conjunto de etiquetas y preguntas que se derivaron de la observación de los datos empíricos durante este primer momento de construcción de las categorías.

En una primera revisión de los datos empíricos, los investigadores se plantearon como pregunta ¿qué diferencias o semejanzas se encuentran en las representaciones gráficas que hacen los estudiantes de los triángulos? Esta pregunta permitió a los investigadores descubrir que en gran parte las respuestas dadas por los estudiantes a la pregunta 1 del cuestionario 3, ellos representaban los triángulos horizontalmente con relación a la hoja (ver imagen 6) y que otra parte de respuestas no presentaban este patrón (ver imagen 7).

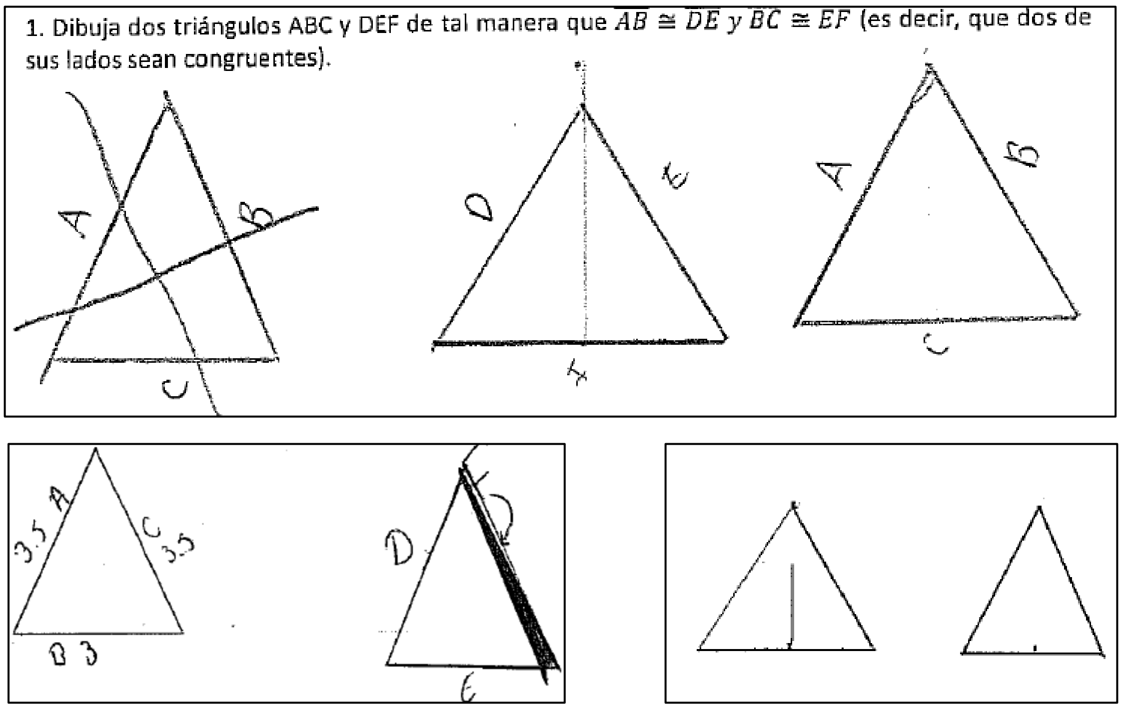


Imagen 6. Algunas respuestas dadas al ítem 1 del cuestionario 3 donde predomina una representación horizontal a la hoja

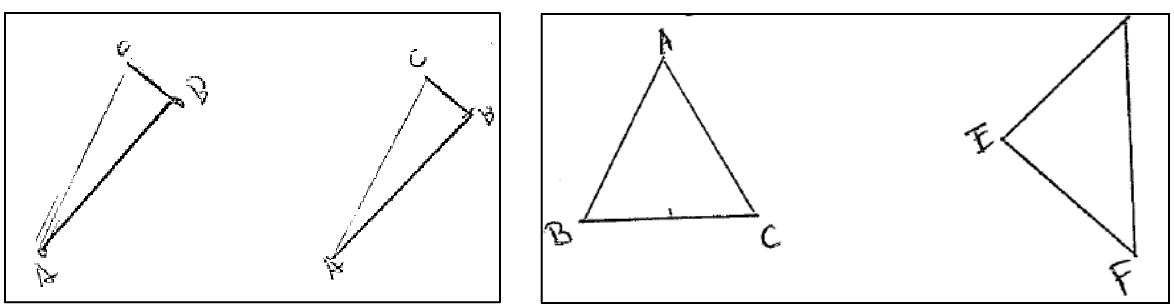
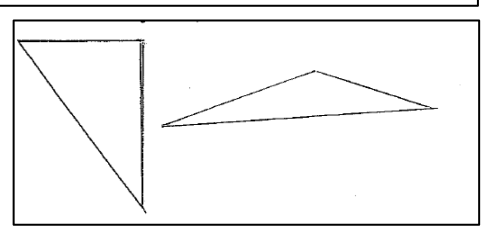


Imagen 7. Algunas respuestas dadas al ítem 1 del cuestionario 3 donde no predomina la representación horizontal a la hoja



El encontrar este patrón que dividía los resultados contribuyó al establecimiento de un encabezado conceptual inicial; a este encabezado conceptual se le denominó "disposición del triángulo en el plano".

Sin embargo, la pregunta que se había planeado no solo permitió establecer este encabezado conceptual. Se encontró además que:

- Un alto porcentaje de los estudiantes durante todo el cuestionario 3 solo utilizaban representaciones típicas de los triángulos (isósceles, equiláteros, rectángulos);
- Había estudiantes que evidenciaban hacer uso de métodos de construcción con regla y compas de algunos triángulos típicos (equiláteros, isósceles, rectángulos);
- Los estudiantes muestran hacer uso de notación geométrica al realizar las representaciones gráficas.

El establecer estos patrones y algunos otros, fue la base que cimentó el primer conjunto de etiquetas conceptuales, lo que se traduce en el diagrama presentado en la Imagen 5 como el paso del ámbito empírico al ámbito conceptual. Al observar este primer conjunto de etiquetas y confrontarlo con el conjunto de datos empíricos fue evidente que el conjunto de etiquetas conceptuales no era completo ni tenía consistencia interna, pues no representaban a todo el conjunto de datos ni mostraban relaciones bien establecidas entre ellas; esto llevó a considerar otras preguntas que orientaran la búsqueda de patrones en los datos empíricos, por supuesto considerando los resultados ya obtenidos.

Inicialmente se planteó la pregunta de ¿cómo generar un conjunto de etiquetas que permitiera dividir las respuestas de cada uno de los estudiantes en diferentes "perfiles", tomando como base los encabezados conceptuales ya encontrados?, de esta pregunta se plantearon nuevos patrones orientados a describir de mejor manera a los datos. Este conjunto de patrones se describe en el listado siguiente.

- Respeta las condiciones que se explicitan en el enunciado del problema, es decir las entienden y las saben interpretar.
- Introduce condiciones nuevas al problema.
- Se centra en la figura o en la relación de las dos figuras.
- Replica los componentes del triángulo

Estos nuevos patrones son producto de una nueva lectura de los datos y una reinterpretación de los mismos que tenía como antecedente los resultados encontrados previamente. Para el caso del primer patrón rescrito "Respeta las condiciones que se explicitan en el enunciado del problema, es decir las entienden y las saben interpretar" resulta de haber encontrado que algunos estudiantes hacían explicito un manejo de la nomenclatura propia de la geometría. Esto llevó a plantearse si aquellos que no lo hacían explicito comprendían o no la nomenclatura que se presentaba en las preguntas. Por otro lado, el observar si "los estudiantes introducían o no nuevas condiciones al problema" surge de cuestionarse que había detrás de que los estudiantes construyeran o no triángulos típicos (equiláteros, isósceles, rectángulos). El "Replicar o no los componentes del triángulo" surge de cuestionarse las diferencias/semejanzas vistas en los triángulos, pues en algunas de las respuestas dadas se observaban réplicas exactas de los triángulos, sin que parezca que consideraran ninguna de las condiciones dadas en los enunciados.

Todo el trabajo realizado previamente llevó a los investigadores a querer profundizar en aspectos más sutiles de las respuestas como considerar ¿qué se solicitaba a los estudiantes y qué condiciones aparecían de más al momento de plantear sus respuestas? este tipo de preguntas fueron poco a poco abriendo un abanico de perspectivas de qué y cómo observar a los datos, lo que llevó a construir mediante la modificación y creación de las categorías ya obtenidas un nuevo conjunto de etiquetas conceptuales más específicas y que mostraban una visión amplia y profunda de los datos.

No está de más aclarar que, aunque aquí se presentan preguntas muy específicas con resultados muy particulares, durante esta primera etapa se realizaron muchas preguntas que terminaron sin conducir a resultados que contribuyeran de la manera en como se muestra en este fragmento del trabajo. También es importante señalar que en varias ocasiones se descartaron etiquetas conceptuales y por ende muchos de los patrones encontrados en los datos; esto se debía principalmente a querer centrar el trabajo en consideraciones muy específicas, pues al ser este un trabajo que permite la libre exploración de los datos empíricos, es de vital importancia saber buscar como descartar en pro de un fin.

Una pequeña muestra de los resultados obtenidos en los conjuntos de patrones y conjuntos de etiquetas en este primer momento se presenta en la Tabla 2.

Tabla 2

Ejemplo de la evolución de los encabezados conceptuales en las 'comparaciones constantes'

CONJUNTO DE PATRONES	*CONJUNTO DE ETIQUETAS*
Primera Versión	
· Los triángulos que se representan son "típicos" (isósceles, equiláteros o rectángulos). · El estudiante muestra conocer los métodos de construcción de los diferentes tipos de triángulos (isósceles, equilátero, rectángulo, escaleno...). · Hay evidencia de que se comprende la notación geométrica que se presenta en las preguntas.	· Notación visible · Congruencia entre triángulos · Congruencia dentro de los triángulos · Disposición del triángulo en el plano
Segunda versión	
El alumno: · Respeta las condiciones que se explicitan en el enunciado del problema, es decir las entienden,	

las saben interpretar. · Introduce condiciones nuevas al problema. · Se centra en la figura o en la relación de las dos figuras. · Replica los componentes del triángulo.	· Disposición en el plano · Consideraciones intra/inter · Consideraciones mínimas · Flexibilidad en la construcción
⋮ ⋮	⋮ ⋮
N'ésima versión	
El estudiante: · Reduce criterios de congruencia a criterios de verificación o considera los criterios de congruencia como una relación entre triángulos · Hace escasa o amplia referencia a la congruencia como una relación · Considera que los criterios de congruencia coinciden con los criterios de verificación · Generaliza en sus procesos (o no lo hace) · Ve la necesidad de generalizar en los criterios de congruencia · Hace reflexiones frente a las propiedades de la congruencia, en particular en torno a los criterios de congruencia	· Nivel 0: Confunde a los criterios de congruencia con los criterios de verificación · Nivel 1: Considera a los triángulos concretos y puede establecer relaciones entre casos particulares de triángulos · Nivel 2: La relación de congruencia de triángulos es resultado de la verificación de relaciones de congruencia entre los componentes del triángulo

Al haber realizado este proceso iterativo, descartando algunas etiquetas conceptuales y desarrollando aquellas que se consideraron pertinentes para el propósito de estas categorías fue posible establecer ciertas preguntas que nos interesaban observar en los resultados de los estudiantes; así fue como se centró el trabajo de los siguientes momentos de la construcción de las categorías en conocer ¿qué consideraban como criterio de verificación los estudiantes?, ¿qué nivel de razonamiento mostraban los estudiantes? y ¿cuáles eran aquellos elementos propios de la congruencia que permitían establecer un nivel de desempeño de los estudiantes?.

6.2 PASO DE LAS ETIQUETAS A LAS CATEGORÍAS:

Para el final del primer momento de la construcción de las categorías ya se había establecido un conjunto de etiquetas conceptuales que representaban los datos empíricos de una manera muy incipiente. Sin embargo, no se había logrado establecer una consistencia al interior de este conjunto de etiquetas conceptuales, pues no había algún orden definido, ni una interrelación bien establecida al interior del conjunto de etiquetas, además las etiquetas conceptuales no necesariamente eran disyuntas entre sí.

Esta falta de consistencia; los múltiples significados asociados a los datos, la imposibilidad de articular esos significados de una manera lógica y coherente; la imposibilidad de mirar los datos desde una perspectiva evolutiva y de jerarquizarlos de acuerdo a algún principio conceptualmente fundamentado, y las dificultades para encontrar nuevas propiedades y dimensiones planteó la necesidad de encontrar diferentes maneras de mirar los datos empíricos. Esto llevó a una búsqueda de bibliografía, que aportara nuevas ideas para generar categorías más generales y abstractas. Este uso de la literatura está sugerido en la Teoría Fundamentada de Corbin y Strauss (2015). Se analizaron las propuestas de diversos autores, sin obtener resultados que parecieran contribuir al desarrollo de las categorías y por tanto al propósito de este trabajo: *describir sistemáticamente el desempeño de los estudiantes frente a tareas relacionadas con la congruencia de polígonos*.

No obstante, se continuó la búsqueda y se encontraron las ideas que proponen Sfard y Linchevski (1994) en torno a la construcción de los conocimientos algebraicos, las que parecieron muy interesantes y sugerentes para el presente trabajo relacionado con la construcción de conceptos, pero a nivel de la geometría. Se echó mano entonces de una herramienta analítica de la TF denominada las ‘comparaciones teóricas’. Esta herramienta consiste en hallar un concepto de la literatura que esté relacionado con algún concepto generado en la investigación propia; después se identifican las propiedades y dimensiones que en la literatura le asocian a dicho concepto y posteriormente se verifica si esas propiedades y dimensiones se pueden asociar al concepto generado en la investigación propia.

Específicamente, para el presente trabajo se consideró la 'categoría núcleo' (Corbin y Strauss, 2015) que las autoras citadas proponen, la cual hace referencia al desarrollo de los conceptos algebraicos, y que descansa en concepciones sobre la reificación de los objetos matemáticos. Como ya se dijo, Sfard y Linchevski (1994) consideran que, en general, las expresiones matemáticas se pueden mirar como un proceso (mirada operacional) y/o como un objeto (mirada estructural). Las autoras aportan evidencias de que tanto en la historia como a nivel de los estudiantes, "el desarrollo de los conceptos matemáticos consiste en una transición de lo operacional a la concepción estructural" (p.221); esta circunstancia se repite de manera continua y reiterada, es decir, lo que es concebido como un proceso a un nivel llega a ser objeto en un nivel superior.

Aplicando las comparaciones teóricas de la TF, se consideraron las propiedades que Sfard y Linchevski (1994) asocian a su categoría núcleo sobre la construcción de conceptos algebraicos, para verificar si esas propiedades se podían identificar también en la categoría núcleo del presente trabajo, es decir, la construcción de los conceptos geométricos.

El observar las propiedades que proponen Sfard y Linchevski (1994) y el uso de las comparaciones teóricas permitió sensibilizar la mirada de los investigadores hacia los datos, estimular preguntas analíticas y considerar propiedades y dimensiones que antes no se habían identificado en los datos empíricos recabados en la investigación. Específicamente, la aplicación de esa herramienta nos llevó a re-etiquetar patrones previamente identificados en los datos y asociarles nuevas etiquetas conceptuales; estos nuevos nombres para las etiquetas, más elocuentes y sugestivos, nos permitieron, a nivel conceptual, establecer un orden y una jerarquía entre esas etiquetas conceptuales que ya sistematizadas se consideraron como categorías.

En suma, el uso de la literatura lo que nos permitió fue asignar a las categorías nombres mucho más elocuentes y adecuados, ganando con ello generalidad, sistematización y abstracción. Esto concuerda con lo que afirman Corbin y Strauss (2015) en relación al uso de las comparaciones teóricas en la TF: "fuerza a los investigadores a moverse de una descripción de los casos específicos a pensar de manera más abstracta" (p. 96).

Este trabajo, como ya se dijo, gira en torno al concepto de congruencia. Siguiendo a Sfard y Linchevski (1994), de lo que se trata es de identificar las producciones de los estudiantes que encajaban con una idea de la congruencia como proceso y las producciones que dejaban ver conceptualización de la congruencia como objeto. Y ver también las producciones que estaban en el tránsito.

Este proceso permitió establecer las categorías que se presentan en este documento.

En la Imagen 8 se representa este segundo momento de construcción de las categorías. La diferencia entre el primer y segundo momento (véanse Imágenes 5 y 8) es la intervención de las ideas de una fuente literaria y le uso de la herramienta analítica comparaciones teóricas.

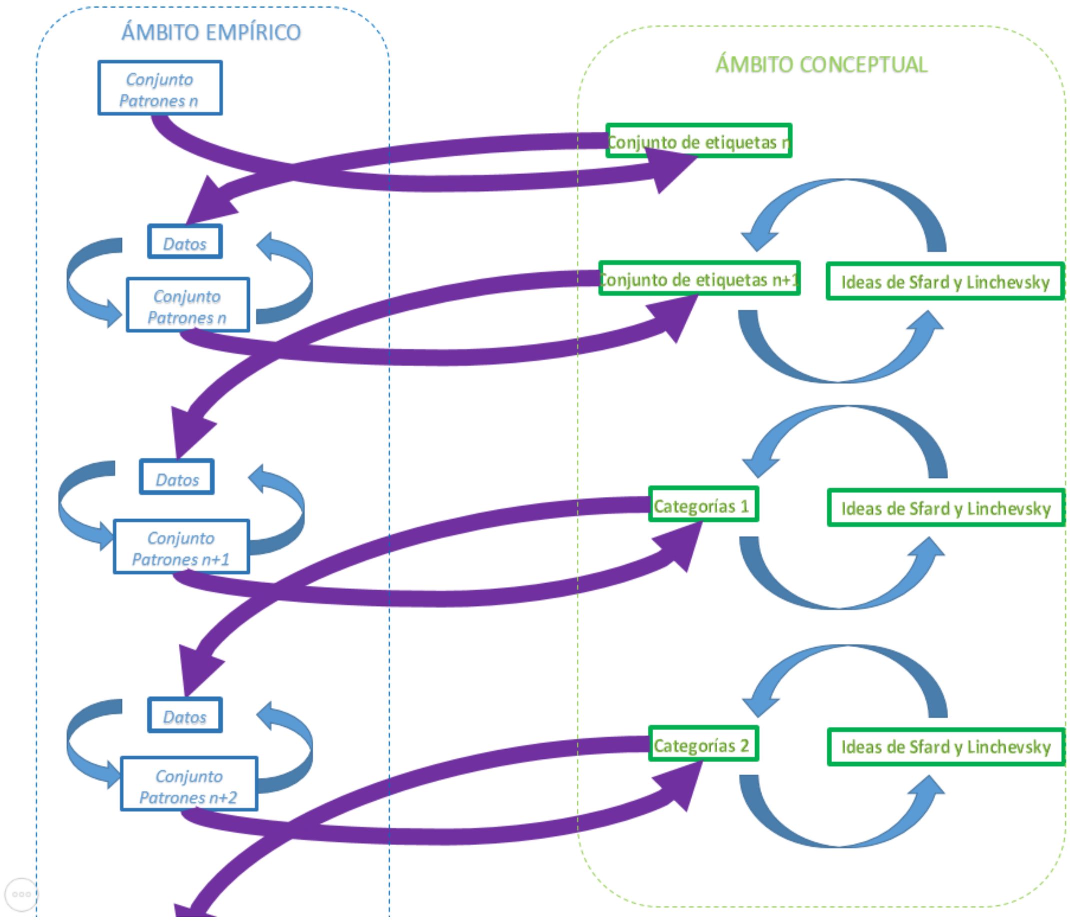


Imagen 8. uso de la teoría de Sfard y Linchevsky en el mundo de lo conceptual

Para ejemplificar lo hecho en este segundo momento de la construcción de categorías, en lo que sigue se relata el trabajo que se realizó en este punto de la construcción, partiendo del resultado final obtenido del primer momento En la Tabla 3 aparecen esos resultados, es decir, los encabezados conceptuales a los que se había llegado hacia el final de ese primer momento (véase Tabla 3). Posteriormente, se escribe a manera de comentarios cómo se dio el paso de las etiquetas conceptuales a las categorías iniciales intentando resaltar el papel protagónico que jugaron las herramientas analíticas ‘comparaciones teóricas’ y ‘preguntas’.

Tabla 3.

Ejemplo de encabezados conceptuales correspondientes al final del momento uno

Versión n de la construcción de categorías	
Patrones	**Perfiles (provisionales)**
Los estudiantes: · para hablar de congruencia entre dos triángulos establecen relaciones de congruencia al interior de los triángulos (de esto se derivan las construcciones de triángulos isósceles y equiláteros) · Se centran o no en uno de los triángulos a tal punto que construyen réplicas exactas de los triángulos. · Ven o no a los criterios de congruencia como una relación entre dos triángulos que tienen propiedades que se definen en términos de necesidad y suficiencia	· Perfil 1: Los estudiantes establecen relaciones de congruencia al interior de los triángulos, construyen réplicas de los triángulos y ven a los criterios de congruencia como la relación entre dos triángulos en términos de necesidad y suficiencia · Perfil 2: los estudiantes establecen relaciones de congruencia al interior de los triángulos, construyen réplicas de los triángulos y NO ven a los criterios de congruencia como la relación entre dos triángulos en términos de necesidad y suficiencia · Perfil 3: los estudiantes establecen relaciones de congruencia al interior de los triángulos, NO construyen réplicas de los triángulos y ven a los criterios de congruencia como la relación entre dos triángulos en términos de necesidad y suficiencia · Perfil 4: los estudiantes establecen relaciones de congruencia al interior de los triángulos, NO construyen réplicas de los triángulos y NO ven a los criterios de congruencia como la relación entre dos triángulos en términos de necesidad y suficiencia · Perfil 5: Los estudiantes NO establecen relaciones de congruencia al interior de los triángulos, construyen réplicas de los triángulos y ven a los criterios de congruencia como la relación entre dos triángulos en términos de necesidad y suficiencia · Perfil 6: los estudiantes NO establecen relaciones de congruencia al interior de los triángulos, construyen réplicas de los triángulos y NO ven a los criterios de congruencia como la relación entre dos triángulos en términos de necesidad y suficiencia · Perfil 7: los estudiantes NO establecen relaciones de congruencia al interior de los triángulos, NO construyen réplicas de los triángulos y ven a los criterios de congruencia como la relación entre dos triángulos en términos de necesidad y suficiencia · Perfil 8: los estudiantes NO establecen relaciones de congruencia al interior de los triángulos, No construyen réplicas de los triángulos y NO ven a los criterios de congruencia como la relación entre dos triángulos en términos de necesidad y suficiencia

Como se dijo, para el final del momento 1 se tenían unos encabezados conceptuales con los cuales se intentó definir perfiles para los estudiantes, como se ve en la Tabla 3. En este momento era posible, con estos perfiles, descubrir algunas características en la producción de los estudiantes. Sin embargo, este análisis estaba lejos de llegar al nivel de abstracción necesario para cumplir el objetivo de esta investigación: *describir de buena manera desempeño de los estudiantes frente a tareas relacionadas con la congruencia de polígonos*. Era necesario que las categorías que se construyeran permitieran establecer cierta jerarquía coherente en la producción de los estudiantes, para con esto poder hablar de desempeño.

La necesidad de brindar jerarquía –o una visión evolutiva- a lo que hasta ahora solo podíamos llamar perfiles provisionales llevó a los autores a intentar responder a una pregunta general: ¿cómo atribuir un orden o jerarquía coherente a dichos perfiles? Esta pregunta a su vez llevó a plantear preguntas más específicas cuyo único fin era el contribuir a responder la pregunta que previamente nos habíamos planteado. Surgieron preguntas como ¿Cuáles estudiantes parecen tener un desempeño bajo?, ¿en qué se parece la producción de los estudiantes con desempeños aparentemente bajos?, ¿Cuáles estudiantes parecen tener un desempeño alto?, ¿en qué se parece la producción de los estudiantes con desempeños aparentemente altos?

Aun cuando los autores de este documento buscaron insistentemente respuestas a estas preguntas no les fue posible darlas; se encontraban estancados sobre el significado de los datos, no les era posible atribuir propiedades y dimensiones que permitieran dotar de jerarquía a las categorías y, aunque querían pensar en los datos de diferentes maneras, no parecían lograrlo. Como se dijo, fue por ello que se optó por recurrir a la literatura y en particular a las comparaciones teóricas Corbin y Strauss, (2015). Como se dijo antes, se retomaron las ideas que Sfard y Linchevski, (1994) aplican al álgebra, especialmente las propiedades de 'consideración como un proceso' y 'consideración como un objeto'.

Se llevó a cabo una interpretación de dichas propiedades en la geometría para con ello evaluar si estas nuevas propiedades se encontraban en nuestros datos empíricos.

La aplicación de las ideas de Sfard y Linchevski (1994) partió del supuesto de que todo aquel proceso, de corte procedimental y empírico relacionado con la congruencia, se asociaría a la idea de proceso de la teoría de la reificación. Algunos ejemplos de la congruencia como proceso que se identificaron en el trabajo son: la congruencia como un proceso de superposición; la congruencia como un proceso de comparación de polígonos a través de construcciones; y la congruencia como resultado de un proceso de valoración visual.

Por otro lado, la conceptualización estructural de la congruencia, es decir, la concepción de la congruencia como objeto se asoció con la capacidad del alumno de considerarla a partir de las propiedades matemáticas que la definen; específicamente estas propiedades hacen referencia a los criterios de congruencia que coinciden con los criterios suficientes para la congruencia. La concepción de congruencia como objeto hace referencia a toda aquella producción de la congruencia que mostrara abstracción y generalización en la respuesta.

Teniendo estas nuevas propiedades se regresó a los datos y se examinó si dichas propiedades se podían observar en ese ámbito empírico. Se encontró entonces que muchos de los patrones previamente identificados en los datos podían re-agruparse bajo estas dos propiedades y se podían definir criterios para reagrupar los datos; criterios para identificar las producciones en las que había una idea de congruencia como proceso y en las que había una idea de congruencia como objeto. Ver Tabla 4.

Tabla 4.
Criterios

Versión n de la construcción de categorías	
Criterios para identificar la idea de congruencia de polígonos como un proceso	***Criterios para identificar la idea de congruencia de polígonos como un objeto***
Los estudiantes: · para hablar de congruencia entre dos triángulos establecen relaciones de congruencia al interior de los triángulos (de esto se derivan las construcciones de triángulos isósceles y equiláteros) · Se centran o no en uno de los triángulos a tal punto que construyen réplicas exactas de los triángulos.	Los estudiantes: · Ven o no a los criterios de congruencia como una relación entre dos triángulos que tienen propiedades que se definen en términos de necesidad y suficiencia

Haciendo uso de estos criterios y con el propósito de re-nombrar las etiquetas conceptuales se regresó al análisis de los datos buscando identificar las producciones de los alumnos que se asociaran a una consideración de la congruencia como proceso y las que se asociaran a una consideración de la congruencia como un objeto. Para lograr esto se plantearon distintas preguntas en torno a las producciones de los estudiantes. Estas preguntas se muestran en la Tabla 5. Dicho sea de paso, en esta Tabla se reproduce un fragmento de uno de los 'memo' realizados durante la investigación. Como ya se dijo, los memos son herramientas para el apoyo del análisis sugeridas por Corbin y Strauss (2015):

Tabla 5.
Fragmento de un memo del momento dos, en busca de re-etiquetar nuestras etiquetas

	Alumno 1
¿Cómo conciben a los criterios de congruencia?	como métodos empíricos de comprobación
¿Por qué (yo) considero que la conciben de esta manera?	En los puntos 1,3 y 1,4 se observa apego a la comprobación empírica "midiendo" componentes del triángulo; aunque en estos no especifica de cuáles componentes (se trata), es muy probable que su pensamiento sea muy empírico. Por otro lado, en el punto 1,5 se observa que, al pedirle comparar le método de congruencia que propone, escribe "a vista sí" haciendo pensar que es probable que considera que un criterio de congruencia es la comparación visual (método de comparación que se consideró dentro de los métodos empíricos de comprobación) Por otro lado dentro del punto 1,6 se observa que habla como "elemento dentro de los criterios de congruencia" a la superposición haciendo pensar que es posible que considere a la superposición como un criterio de congruencia
¿Cómo consideran a la congruencia?	Congruencia como similitud de triángulos, de esto desprenden ideas de congruencia de sus componentes (aunque esto no lo dice explícitamente) Para establecer esta concepción de la congruencia me apoyo en: Lo dicho en el punto 1,2 y 1,3 en donde al parecer explicita su apego a comparar visualmente los triángulos y como esto le permite asegurar la congruencia, además para ser más específico en el punto 1,3 utiliza la palabra "similitud" en un momento en donde al parecer asocia la idea de similitud con la congruencia, esto toma fuerza en la comprobación del punto 1,5 en donde al pedir que comprobara si sus triángulos son congruentes él dice que sí por lo que ve visualmente
	Alumno 2
¿Cómo conciben a los criterios de congruencia?	Como método deductivo de comprobación
¿Por qué considero que la conciben de esta manera?	Dentro del desarrollo de las preguntas se observa de manera general que no hace alusión al uso de métodos empíricos de comprobación de congruencias Por otro lado, en el punto 1,2; 1,4 y 1,6 se puede pensar en que hace deducciones (de un solo paso) apoyadas por las definiciones que considera para la congruencia

¿Cómo consideran a la congruencia?	Como congruencia de sus partes Esta idea se refuerza en lo dicho en el 1,2 en donde asocia a la congruencia como una manera de asegurar la congruencia de sus partes (lados y ángulos) Además, en el punto 1,6 implícitamente se observa la idea de congruencia por partes
	Alumno 3
¿Cómo conciben a los criterios de congruencia?	Como método empírico –deductivo
¿Por qué considero que la conciben de esta manera?	Para los puntos 1,3; 1,4 y 1,5 muestra un pensamiento deductivo en el que hace deducciones de uno o dos pasos, sin embargo, para las preguntas 1,6 y 1,8 se observa un apego a las magnitudes de las medidas del triángulo como método de comprobación de las congruencias
¿Cómo consideran a la congruencia?	Congruencia por sus partes Esto debido a que aunque no lo dice implícito al parecer es consciente de que cuando se hace referencia a la congruencia de dos triángulos existe una relación entre sus lados y ángulos de congruencia, esta idea la sustento con lo observado ene l punto 1,4 (tanto en la pregunta como en la justificación del nivel de seguridad); punto 1,6 y 1,8
	Alumno 4
¿Cómo conciben a los criterios de congruencia?	Criterio de congruencia como un método empírico de comparación
¿Por qué considero que la conciben de esta manera?	Al parecer el estudiante concibe a los criterios de congruencia como métodos empíricos de construcción debido a que En el punto 1,4 al pedirle que datos son necesarios para asegurar la congruencia de dos triángulos el estudiante responde “sería igualarlos midiendo con regla sus lados y ángulos”, observando que al parecer concibe el criterio de congruencia como un método de construcción de un triángulos basándose en otro (aunque también es posible que al decir “igualarlos” piense en tomar una regla y medir en ambos lados, en cuyo caso no lo consideraría como un método de construcción si no como una manera empírica de comparación de medidas Siguiendo en el punto 1,6 se observa que al parecer el estudiante relaciona a los criterios de congruencia directamente con los “utensilios de construcción” Además como último punto su manera de convencer a su amigo en el punto 1,8 se relaciona directamente con la construcción de dos figuras congruentes

¿Cómo consideran a la congruencia?	Congruencia de por sus partes (no estoy muy seguro de este) Esto se puede observar en lo escrito en el punto 1,2 en donde hace referencia que para tener congruencia deben tener "la misma medida", al parecer esto hace referencia a los lados del triángulo Por otro lado en el punto 1,3 escribe "no es necesario hacer muchos triángulos de lados iguales y de los mismos ángulos para verificar si son congruentes", esto lleva a suponer que el estudiante concibe a la congruencia de triángulos como la congruencia de sus partes

Como resultado de este trabajo se identificaron patrones y tipos de respuesta que se asociaban a la congruencia como un proceso empírico y a la congruencia como un objeto; de igual manera se observó que existían algunos patrones que no se encontraban en ninguno de los dos extremos, los cuales se ubicaron en una tercer etiqueta, a la que se le llamó 'tránsito de un proceso empírico a una consideración como objeto'. De manera sintética en la Tabla 6 se muestran los resultados de este momento del análisis.

Tabla 6.
Re-etiquetación de las etiquetas conceptuales a la luz de los patrones previamente establecidos.

Etiquetas	***Patrones de los que surge***
Consideración de la congruencia como un proceso empírico	· Para hablar de congruencia entre dos triángulos establecen relaciones de congruencia al interior de los triángulos (de esto se derivan las construcciones de triángulos isósceles y equiláteros) · Se centran o no en uno de los triángulos a tal punto que construyen réplicas exactas de los triángulos. · Confunden los criterios genéricos de congruencia de polígonos con los métodos empíricos de verificación de congruencia de polígonos (superposición, comparación visual, construcciones con regla y compas, toma de

		medidas…)
Tránsito de un proceso empírico a una consideración como objeto	·	Parece comprender las condiciones necesarias para hablar de congruencia, pero no las suficientes.
	·	Ven o no a los criterios de congruencia como una relación entre dos triángulos que tienen propiedades que se definen en términos de necesidad y suficiencia
	·	Se asocia a la congruencia de triángulos le asocia una definición distinta a la que se da en matemáticas.
	·	Es capaz de establecer relaciones de congruencia genéricas, sin embargo, no necesariamente estas cumplen ser necesarias y suficientes
Consideración de la congruencia como un objeto	·	Establece condiciones necesarias y suficientes que garantizan la congruencia de triángulos.
	·	Es capaz de argumentar los criterios de congruencia.

Para este momento de la construcción de categorías fue posible, con ayuda de las comparaciones constantes, construir un conjunto de categorías derivadas de la anterior re-etiquetación. Gracias a esta re-etiquetación este conjunto de categorías ya tenía una coherencia interna, una interrelación entre sí y un orden; pero además representaban a todos los datos empíricos. Las categorías resultantes de este segundo momento se presentan en la Tabla 7.

Tabla 7
Categorías provisionales obtenidas al final del momento dos.

Categorías provisionales	
Nivel	Descripción
00	Hay tendencia a centrarse en una figura; ie, las condiciones que se dan en el problema se tienden a interpretar en una figura. La relación de congruencia surge posteriormente cuando

	la pregunta orilla (o presiona, fuerza) al alumno a considerarla.
0	Concepción empírica o concreta de la congruencia entre polígonos. Confunden los criterios genéricos de congruencia de polígonos con los métodos empíricos de verificación de congruencia de polígonos: por ejemplo, a través de la superposición, la medición con compás, etc. Hay una acción de relacionar polígonos y compararlos empíricamente, pero no hay una conceptualización de esa relación, y mucho menos, una identificación de las propiedades de esa relación (y menos condiciones necesarias y suficientes para la congruencia, por ej). La congruencia se mira como un proceso empírico y no como objeto conceptual susceptible de aplicarle propiedades.
0+	Identifican criterios necesarios para la congruencia, pero no distinguen criterios suficientes (tránsito de la congruencia como un proceso empírico hacia la congruencia como un objeto matemático)
1**	Problema de etiqueta: el alumno es capaz de considerar una relación de congruencia entre triángulos y distinguir en ella ciertas propiedades, pero desconoce que el nombre de esa relación es 'congruencia'. Y a la congruencia de triángulos le asocia una definición distinta a la que se da en matemáticas.
1*	se plantean propiedades genéricas de la relación de congruencia, y dentro de las condiciones necesarias se distinguen algunas que el alumno maneja como si fueran suficientes, pero no lo son desde el punto de vista matemático (ie, se proponen criterios de congruencia erróneos). Se distinguen varios casos: Los criterios son menos de los que resultan suficientes (incluye criterios basados en elementos del triángulo como la base, la altura o el área), o Los criterios son más de los suficientes (al5, pr1.3).
1+	El alumno puede enunciar o concebir propiedades de la relación de congruencia de manera genérica (aunque es posible que el alumno deje ver que estas propiedades las aprendió en la escuela, él también muestra que reflexiona sobre ellas); se distinguen claramente condiciones suficientes para la congruencia. No hay referencia a procesos empíricos de verificación asociados a la congruencia. No hay evidencia de un soporte matemático.
2	Criterios matemáticos generales (suficientes y necesarios) para garantizar la congruencia de dos triángulos (teóricos) El concepto de congruencia es concebido como un objeto (matemático) que posee propiedades y que se puede definir mediante características generales (como teoremas en acción no explícitos) que se sustentan con base en consideraciones matemáticas

Es importante resaltar que tanto en el momento uno como en el momento dos se hizo uso de las herramientas analíticas 'comparaciones constantes' y 'preguntas', aunque su propósito fue distinto. En el primer momento se hizo uso de las preguntas y las comparaciones constantes para explorar patrones que permitieran la creación de encabezados conceptuales; en el momento dos, el propósito de las comparaciones constantes y las preguntas fue el de organizar, desarrollar y re-etiquetar los encabezados conceptuales para así poder construir un conjunto de categorías evitando deliberadamente alejarse de los datos empíricos.

Es importante aclarar que las ideas de la teoría de reificación de Sfard y Linchevski (1994) actuaron de manera explícita y directa sobre el universo conceptual (i.e, orientó una reflexión teórica sobre el conjunto de etiquetas) y sólo de manera muy tangencial, incidió en la redefinición de patrones asociados a datos empíricos. Visto desde otro punto, este referente literario no fue el que inspiró de manera sustancial la búsqueda de patrones en los datos empíricos, por lo que se puede seguir asegurando que las categorías obtenidas representan a los datos. O dicho de otra manera, la teoría de la reificación permitió mirar, organizar y sistematizar de una manera diferente a las etiquetas conceptuales que agrupaban a los patrones previamente establecidos. El aporte del referente literario fue en el ámbito conceptual y fungió solo con un papel organizador y de jerarquización.

6.3 CATEGORÍAS FINALES

Al finalizar el segundo momento ya se habían construido categorías que representaban de buena manera a los datos y eran consistentes entre sí, sin embargo aún no se había comprobado si dichas categorías servían para analizar otro conjunto de datos, es decir no se había valorado su grado de saturación: que representaran no solo a los datos que se utilizaron en el primer y segundo momento de la construcción de las categorías, sino a otros conjuntos de datos relacionados con el concepto bajo estudio. Es por eso que en un tercer momento, apoyándose en la TF, se recurrió al muestreo teórico para así verificar en diferentes datos, pero que comparten contextos similares a los que se usaron en el primer y segundo momento, la aplicabilidad de categorías obtenidas previamente por los investigadores. Esta herramienta permitió refinar y enriquecer en sus propiedades y dimensiones a las categorías.

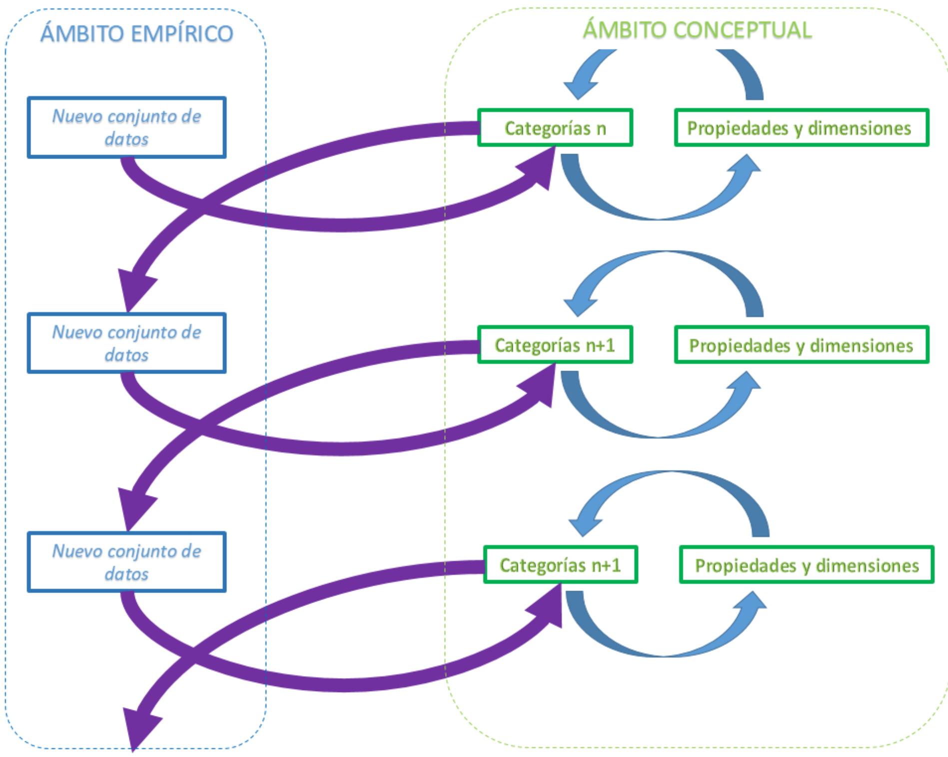


Imagen 8 muestreo teórico a la luz de lo realizado en la construcción de las categorías

En la Imagen 8 se representa el proceso que describe el muestreo teórico en al TF a la luz de lo realizado en este trabajo. Este proceso permite corroborar si unas categorías que se han construido previamente se adecuan a datos con contextos similares. De no adecuarse completamente las categorías, se entra en un proceso de modificación o redefinición de las propiedades y dimensiones de las mismas, para con esto después de un proceso de ir entre las categorías y los nuevos datos, obtener categorías más generales y que representen a este nuevo conjunto de datos. El haber utilizado el muestreo teórico permitió, refinar las categorías provisionales y así establecer un nuevo conjunto de categorías, el cual permitía valorar el desempeño de los estudiantes frente a tareas relacionadas con congruencia de polígonos.

7 RESULTADO PARTE 2: PROPUESTA DE CATEGORÍAS (ORDENAMIENTO CONCEPTUAL)

El proceso descrito previamente en los tres momentos permitió establecer el conjunto de categorías que se muestra a continuación

7.1 CONSIDERACIÓN DE LA CONGRUENCIA COMO UN PROCESO EMPÍRICO

7.1.1 Nivel 0.1 concepción de la congruencia intra

Hay tendencia a centrarse en una figura; i.e las condiciones que se dan en el problema se tienden a interpretar en una figura. La relación de congruencia 'inter' (entre triángulos) surge posteriormente cuando la pregunta orilla (presiona o fuerza) al alumno a considerarla.

7.1.2 Nivel 0.2 La congruencia como proceso, concepción empírica o concreta de la congruencia de polígonos

Se recurre a métodos empíricos de verificación de congruencia. Se presenta una acción de relacionar polígonos y de compararlos empíricamente, pero no hay una conceptualización de esa relación, y mucho menos, una identificación de las propiedades de esa relación (como condiciones necesarias y suficientes para la congruencia, por ejemplo). La congruencia se mira como un proceso empírico y no como objeto conceptual susceptible de aplicarle propiedades (inicio de la fase de interiorización (Sfard y Linchevski 1994).

7.2 TRÁNSITO DE UNA NOCIÓN EMPÍRICA DE LA CONGRUENCIA HACIA UNA NOCIÓN COMO OBJETO

7.2.1 Nivel 1.1 Tránsito proceso-objeto, se tiene como punto de partida una idea intuitiva o de superposición de la congruencia

A partir de una idea de superposición (o de otro proceso empírico de comparación de figuras geométricas) que se toma como una caracterización inicial de la congruencia entre polígonos, en este nivel de transición el estudiante busca elaborar una caracterización que no esté basada puramente en procesos empíricos apelando, aunque de manera incompleta, asistemática y errática, a lados, ángulos o a otros componentes de las figuras geométricas (aunque puedan resultar 'atípicos' en la caracterización de la congruencia de polígonos) como base, altura, área, o a sus medidas. Es decir, en este nivel se da de manera concomitante la referencia a procesos empíricos de congruencia y el intento de una caracterización, que parece pretender ser de un carácter más general, con base en componentes geométricos de las figuras.

7.2.2 Nivel 1.2 Identifican criterios necesarios para la congruencia, pero no distinguen criterios suficientes

Este nivel hace referencia a los estudiantes que pueden emitir una definición de congruencia basada en lados y ángulos, pero que no muestran indicios de entender que es posible eliminar algunos elementos del triángulo (como por ejemplo todos sus ángulos para el teorema de congruencia LLL en triángulos) para asegurar la congruencia.

7.3 CONSIDERACIÓN DE LA CONGRUENCIA COMO UN OBJETO MATEMÁTICO

7.3.1 Nivel 2.1 Identifica criterios que consideran suficientes pero son incorrectos

A partir de una idea de la congruencia caracterizada con base en componentes geométricos de los polígonos (lados y ángulos), se plantean propiedades genéricas de la relación de congruencia, y, dentro de las condiciones necesarias se distinguen algunas que el alumno maneja como si fueran suficientes, pero no lo son desde el punto de vista matemático (ie, se proponen criterios de congruencia erróneos), estos criterios suelen tener la característica de considerar más o menos de los elementos que son necesarios, esto excluye el caso en el que se consideran todos los componentes (definición por partes de la congruencia, este caso particular es el que se considera en el Nivel 1.2)

7.3.2 Nivel 2.2 Considera criterios necesarios y suficientes

El alumno puede enunciar o concebir propiedades de la relación de congruencia de manera genérica (aunque es posible que el alumno deje ver que estas propiedades las aprendió en la escuela, él también muestra que reflexiona sobre ellas); se distinguen claramente condiciones suficientes para la congruencia, no hay referencia a procesos empíricos de verificación asociados a la congruencia, pero tampoco hay evidencia de un soporte matemático.

7.3.3 Nivel 2.3 Criterios matemáticos generales (suficientes y necesarios) para garantizar la congruencia de dos polígonos (teóricos)

El concepto de congruencia es concebido como un objeto (matemático) que posee propiedades y que se puede definir mediante características generales que se sustentan con base en consideraciones matemáticas, en este caso se observa que el estudiante considera condiciones necesarias y suficientes para la congruencia.

Un análisis de estas categorías permite verificar que la clase de categorías "Consideración de la congruencia como un proceso empírico" supone en las producciones que incluyen, un menor nivel de dificultad, un menor grado de abstracción y de desempeño operatorio en relación a las producciones que se consideran en la clase de categorías denominada "Consideración de la congruencia como un objeto matemático".

Es de resaltar que, en el proceso de análisis que tuvo como resultado las categorías, permitió establecer un 'orden conceptual'. En términos de Corbin y Strauss (2015, p.61) el orden conceptual es "una organización de los datos en categorías discretas (muchas veces índices o indicadores) de acuerdo a sus propiedades y dimensiones, y luego su empleo en la descripción para elucidar esas categorías". Dicho de otra forma, el orden conceptual se da cuando se hace una descripción fundamentada de los datos. La importancia de generar un orden conceptual es que este tipo de análisis es precursor de la teorización.

Cuando se desea establecer un orden conceptual, los investigadores buscan dar sentido a los datos organizándolos de acuerdo a esquemas clasificatorios tales como tipos o estadios (lo que para nosotros son momentos). En el proceso de establecer un orden conceptual, las categorías se identifican a partir de los datos y se definen de acuerdo con sus diversas propiedades generales y dimensiones; esto es justo lo que se hizo en este trabajo e investigación.

Por otra parte, cabe aclarar que en la construcción de estas categorías se tomó en cuenta lo que los alumnos explicaron, dieron cuenta o justificaron, pero también las acciones que ellos realizaron para dar respuesta a las tareas (desde acciones concretas con material manipulable, hasta acciones de construcción de figuras, mediciones, uso de regla y compás, superposición real o imaginada). Esto se hizo bajo el supuesto de que los conceptos o las ideas de los alumnos en torno a la congruencia subyacen a sus acciones o que toda acción está soportada en sus ideas o conceptos.

Es importante aclarar que las categorías brindan sólo una manera de aproximarse a los datos. Esto permite que, de estar interesado el lector, puede construir frente al mismo tema de estudio otras categorías muy diferentes que le ofrezcan la posibilidad de observar a los datos desde otra perspectiva y hacer, a partir de ese foco, consideraciones diferentes a las que en este documento se plantean.

También es importante mencionar que para el momento de redactar este documento ya se habían hecho modificaciones a las categorías que aquí se presentan; esto con el fin de construir categorías más densas y que dieran una mejor aproximación a la producción de los estudiantes, sin embargo por cuestiones de propósitos de este documento, se consideró pertinente no presentar esta parte del trabajo en este escrito y reservarlo para futuras investigaciones.

8 RESULTADOS PARTE 3: APLICACIONES

La aplicación de las categorías que integran el ordenamiento conceptual propuesto en este trabajo de investigación brindó una herramienta con la cual desvelar algunas de las dificultades de los estudiantes al abordar temas relacionados con la congruencia de polígonos y permitió también construir algunos perfiles prototípicos del desempeño de los estudiantes al resolver tareas de congruencia de polígonos. En este capítulo se presentan dichos resultados.

8.1 DIFICULTADES

La herramienta analítica de las comparaciones constantes propuesta por la Teoría Fundamentada no solo sirve para construir categorías; el uso y fin de las herramientas metodológicas puede variar en torno al objetivo de la investigación. Para mostrar este punto, a continuación, se presentan algunas dificultades encontradas en las producciones que los estudiantes realizaron en tareas con contenidos de congruencia. Las dificultades se identificaron con base en la aplicación de la herramienta de las comparaciones constantes, lo que permitió una exploración sistemática de patrones y la identificación de semejanzas y diferencias, proceso descrito en la construcción de las categorías.

Tabla 8.
Dificultades a la luz de los patrones (semejanzas y diferencias)

Dificultad	Patrones de los que se deriva la dificultad
· ***Introducción de condiciones extra:*** Los estudiantes consideran condiciones extra tanto al interior de los triángulos como entre ellos	· Se asumen condiciones de congruencia en los componentes de un triángulo; se asumen condiciones de congruencia entre triángulos no contenidas en las condiciones del

	problema
· ***Representaciones limitadas o restringidas del triángulo y los polígonos:*** El estudiante solo considera una o unas determinadas clases de triángulos (i.e isósceles, equiláteros, rectángulos). Los argumentos muestran que consideran solo casos particulares de triángulos (casos finitos) ·	· Se representan a los triángulos de manera tal que uno de sus lados es paralelo al lado inferior de la hoja; · Se realiza un solo tipo de construcciones auxiliares (e.g., para construir un triángulo isósceles) lo que da lugar sólo a un cierto tipo de triángulo; · En la mayoría de las tareas se suele excluir a los triángulos escalenos · No se concibe un conjunto infinito de triángulos; No se descompone al triángulo en términos de sus lados y ángulos;
· ***Prevalencia de una caracterización de la congruencia a partir de procesos empíricos de verificación de la congruencia:*** Los estudiantes consideran únicamente a la congruencia como un proceso empírico de verificación, separándose de la consideración en términos de necesidad y suficiencia.	· Los argumentos de congruencia se centran en la idea de superposición
Consideración de una definición de congruencia de polígonos diferente a la estándar: Los estudiantes utilizan una definición de congruencia distinta a las establecidas matemáticamente (por partes y por superposición).	Se ofrece una definición explícita de congruencia distinta a la estándar (considerando, e.g., sólo un lado del triángulo)
Consideración de criterios suficientes no usuales para la caracterización de los criterios de congruencia: Los estudiantes consideran elementos diferentes a los que se usan de manera estándar para caracterizar a la congruencia (eg., base, área).	· Utiliza elementos como el área, la base o la altura para caracterizar a los triángulos

Lo interesante de las dificultades presentadas en la Tabla 8 es que algunas de ellas responden a aspectos que se consideran en los criterios de congruencia. En pro de ejemplificar este punto, en la Tabla 9 se relacionan algunos de las dificultades antes expuestas con los niveles que se establecen en las categorías.

Tabla 9.
Dificultades a la luz de las concepciones de la congruencia.

Nivel(es) de la categoría asociado(s)	Dificultad
Nivel 0.1: Concepción de la congruencia intra	Introducción de condiciones extra
Nivel 0.2 La congruencia como proceso, concepción empírica o concreta de la congruencia entre polígonos	Prevalencia de una caracterización de la congruencia a partir de procesos empíricos de verificación de la congruencia
Nivel 1.1 Tránsito proceso-objeto, se tiene como punto de partida una idea intuitiva o de superposición de la congruencia	Consideración de criterios suficientes no usuales para la caracterización de los criterios de congruencia

No sobra aclarar que las dificultades que no se relacionan en la Tabla 9 pero sí en la Tabla 8, obedecen a patrones que aunque se consideraron en la construcción de las categorías se descartaron con el fin de centrar el trabajo solo en la concepción de la congruencia. Es probable que al haber tenido otro enfoque en la construcción de las categorías se puedan evidenciar otro tipo de dificultades. Dicho de otra forma; los resultados obtenidos pueden variar dependiendo del propósito, esto permite que un tema, como lo es la congruencia de polígonos, ofrezca a los investigadores un abanico inimaginable de opciones para abordarlo.

8.2 PERFILES DE LOS ESTUDIANTES A LA LUZ DE LAS CATEGORÍAS

Para la construcción de los perfiles se ha seguido el proceso de las comparaciones constantes, de la formulación de preguntas y del registro en memos y diagramas (herramientas todas de la TF), y se ha tomado como referencia las categorías presentadas previamente. En la investigación se identificaron cuatro tipos de patrones o perfiles. Esos perfiles se han dividido en dos; aquellos en donde se observa una noción estable de la congruencia a lo largo de los cuestionarios y aquellos en donde se observa una noción cambiante de congruencia:

- Perfiles asociados a ideas estables de la congruencia:

- Consideración de la congruencia como un proceso empírico
- Consideración de la congruencia como un objeto

o Perfiles asociados a ideas cambiantes de la congruencia:

- Consideración inicial de congruencia como proceso empírico y concepción posterior de la congruencia asociada a la transición (de la concepción empírica a una concepción como objeto)
- Consideración de congruencia asociada a la transición y concepción de congruencia como un objeto

En lo que sigue se definen con mayor precisión los cuatro perfiles caracterizados y se ejemplifican con producciones de estudiantes que se inscriben en cada perfil.

En primera instancia, se proporcionan datos cuantitativos que dan cuenta de las categorías que se atribuyeron a las respuestas dadas por los estudiantes que se consideraron para ejemplificar algún perfil. Se consideró importante tener un panorama general e integral del tipo de estrategia por la que los estudiantes optaron a lo largo de los cuestionarios y detectar sus tendencias o preferencias en este sentido; esto permitió conocer la gama y las tendencias de los posibles significados que ellos atribuyeron a la noción bajo estudio. Además de esos datos cuantitativos, se proporcionan también respuestas específicas e ilustrativas dadas por esos estudiantes, que permiten ejemplificar el perfil en cuestión.

Es necesario aclarar que la pregunta 1.7 del cuestionario 3 y las preguntas 3, 3.1, 6.2, 6.3, 6.6, 6.7, 7.2 y 7.3 del cuestionario 4 no se consideraron en este análisis y especialmente en los análisis cuantitativos que aparecen en lo que sigue, debido a que no aportaron información que se valorara como pertinente para el propósito antes mencionado.

Es también necesario precisar que para las preguntas 1, 1.1, 1.2 y 1.3 del cuestionario 4 se asoció a todos los estudiantes un nivel de concepción de la congruencia como objeto o muy próximo a la concepción de la congruencia como objeto. Esto llevó a suponer que al no haber mucha variación de los niveles en las respuestas a dichas preguntas, no necesariamente permitirían aportar información relevante para la caracterización de los perfiles. Es por eso que en el análisis que aquí se presenta se decidió omitirlas y en próximos estudios indagar por qué estas preguntas generaron respuestas que se podrían catalogar como cercanas a la idea de congruencia como objeto y analizar las diferencias entre esas preguntas y las del resto de los cuestionarios aplicados.

8.2.1 Perfiles asociados a ideas estables de la congruencia

8.2.1.1 Perfil: Consideración de la congruencia como un proceso empírico

En este perfil se encuentran los alumnos en los que predomina principalmente una idea de la congruencia como un proceso empírico alejándose casi por completo de la consideración de la congruencia como un objeto.

Los alumnos que se encuentran en este perfil destacan por asociar a nociones de congruencia procesos empíricos (relativos a la congruencia) tales como la superposición, construcciones con regla y compás o toma de medidas, entre otros. A la luz de las categorías, en este perfil se asocian las respuestas que se ubican principalmente en los niveles 0.1 y 0.2, sin embargo, es probable que de manera esporádica los alumnos que se encuentren en este perfil logren proponer respuestas que se encuentren en otros niveles.

Dentro de este perfil se encuentran los alumnos 4 y 5. En lo que sigue se presenta parte de la producción del alumno 5 para ejemplificar este perfil.

Cómo se puede observar en la Imagen 9 la mayoría de las respuestas dadas por el alumno 5 en el cuestionario 3 se encuentran en el nivel 0.2. Esto muestra que el estudiante suele recurrir a métodos empíricos de verificación para comprobar la congruencia. Es importante señalar en este punto que, al igual que como se ve en la Imagen 9, los estudiantes que se encuentran en este tipo de perfil suelen tener un porcentaje bajo en la concepción del tránsito y aún más bajo en la consideración de la congruencia como objeto.

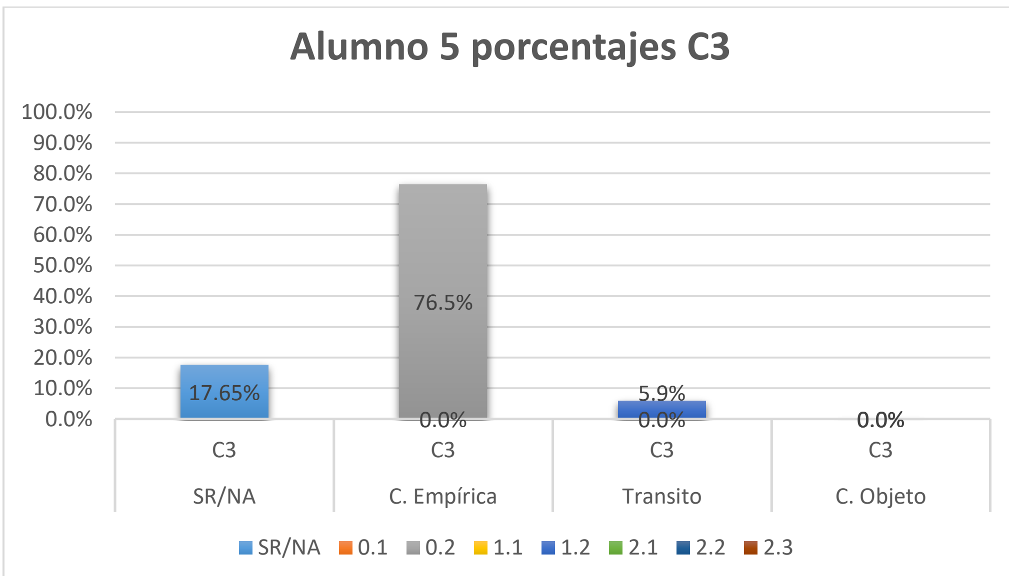


Imagen 9.
Porcentaje de respuestas por niveles y concepciones del cuestionario 3, alumno 5

De manera particular para este perfil es usual encontrar respuestas como las que se presentan en la Tabla 11, en donde los alumnos muestran tener un apego a la consideración de la congruencia únicamente mediante los métodos de comprobación empíricos que conocen (superposición, toma de medidas con regla y/o compas, comparación visual …)

Tabla 10.

Análisis de respuestas del nivel 0.2, alumno 1 cuestionario 3

Imagen	1.4 ¿Qué otro u otros datos (mínimos) debemos conocer en relación a los dos triángulos para asegurar que el triángulo ABC es congruente con el triángulo DEF si no se sabe nada de la relación entre $\overline{CA}$ y $\overline{DF}$?. Si te das cuenta, te estamos pidiendo que propongas otro criterio de congruencia para garantizar que dos triángulos son congruentes, es decir, que propongas las condiciones mínimas que deben cumplir los componentes de dos triángulos que garanticen que esos dos triángulos son congruentes. A este segundo criterio de congruencia le vamos a llamar Criterio de congruencia 2. pues podriamos realizar la circunferencio en todos los lados para asi poder estar más seguros de que todos sus lados son congruentes
Análisis	Nivel 0.2: Esta pregunta se ubica en el nivel 0.2 ya que el estudiante considera como criterio de congruencia la construcción de circunferencias que permitan determinar la congruencia de dos pares de lados correspondientes. En este caso el estudiante solo se limita a considerar la congruencia de esta manera y a describir el proceso, que considera, se debe llevar a cabo para hacer correctamente dicha comparación con las circunferencias
Imagen	3 Enuncia el Criterio de congruencia 2 y el Criterio de congruencia 3 que tú descubriste durante este ejercicio. pues que podemos apoyar el compas de tal manera que este toque un vertice del triangulo, y pase por los mismos puntos que las demas circunferencias para poder comparar el otro triangulo, y saber si son congruentes En mi criterio pude ver que se puede apoyar en todos los lados y si miden lo mismo son congruentes, porque tambien si los sobreponemos podemos compararlo
Análisis	Nivel 0.2: se consideró en el nivel 0.2 esta respuesta ya que, al solicitarle al estudiante que explicitara los criterios de congruencia que había establecido previamente, solo se limita a hablar de métodos de comprobación empírica de la congruencia, tales como la superposición y la comparación con compas de dos lados correspondientes.

Imagen	1.6 ¿Es posible quitar alguno ó algunos de los datos extra que propusiste y seguir asegurando que el triángulo ABC y DEF son congruentes?, si tu respuesta es SI ¿cuántos y cuáles puedes quitar?, si tu respuesta es NO justifica ¿por qué al quitar alguno(s) elemento(s) de los que has propuesto ya no se asegura una congruencia? (apóyate en dibujos para justificar tu respuesta) pues si, porque solo es necesario trazar dos circunferencias para poder. estar, seguro, bueno eso creo yo
Análisis	Nivel 0.2: Se consideró esta respuesta en el nivel 0.2 ya que solo puede hablar de la congruencia recurriendo a construcciones auxiliares.

Cómo se observó en los ejemplos en la Tabla 10, los estudiantes que se asocian con este perfil suelen tener una visión estática de la congruencia y recurrir reiteradamente a ella. Desde esta perspectiva, los alumnos consideran a la congruencia, casi en todos los casos, de comparar empíricamente a los polígonos o a los elementos que los componen (lados y ángulos). Estos estudiantes suelen aferrarse a un método de comprobación. El alumno 5, por ejemplo, muestra la tendencia a considerar a la congruencia mediante las comparaciones de los lados apoyándose de construcciones auxiliares de circunferencias.

Resalta en este perfil que los estudiantes no saben distinguir entre un método de comparación empírico y los criterios de congruencia, necesarios y suficientes, para comparar polígonos.

8.2.1.2 Perfil: Consideración de la congruencia como un objeto

En este perfil se consideran los alumnos que muestran principalmente una concepción de la congruencia como un objeto. Estos alumnos suelen ser capaces de argumentar sus razonamientos y razonar frente a los problemas que se les plantean, aunque no siempre lo hacen de manera explícita en sus respuestas. Además, comprenden la necesidad y suficiencia de los criterios de congruencia, aunque esto no asegure que puedan plantear siempre criterios de congruencia válidos.

Los alumnos que se encuentran en este perfil suelen ser capaces de moverse entre las comprobaciones empíricas y los razonamientos matemáticos para argumentar sus respuestas. A la luz de las categorías, las respuestas de los alumnos se encuentran principalmente en los niveles 2.1, 2.2 y 2.3.

Los alumnos que se encuentran en este perfil son 6, 7, 8 y 9. En lo que sigue se muestra ejemplifica este perfil con los resultados proporcionados por el alumno 7.

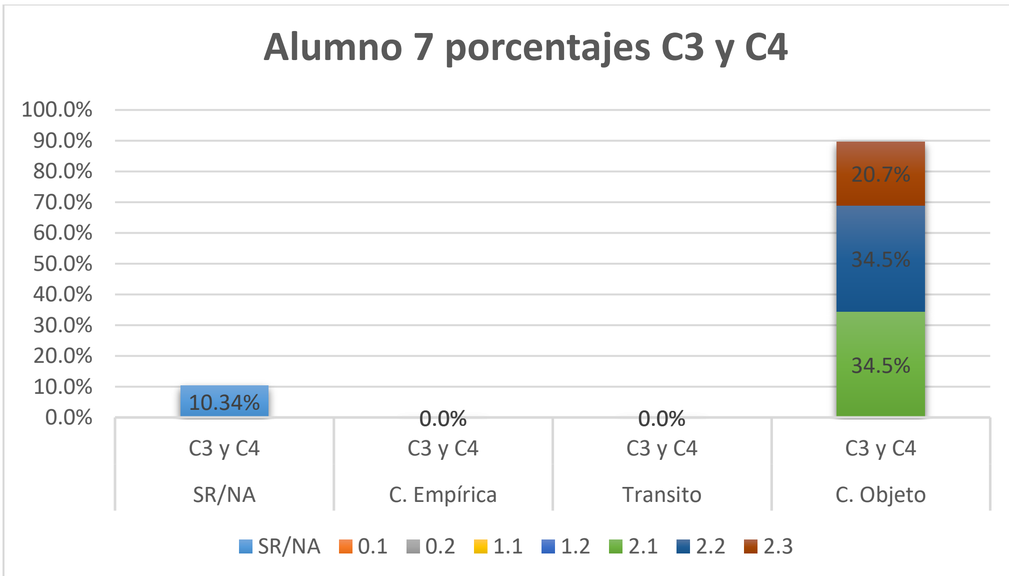


Imagen 10.

Porcentaje de respuestas por niveles y concepciones del cuestionario 3 y 4 , alumno 7

Para el caso de las respuestas dadas por el alumno 7 en el cuestionario 3 y 4 (resultados en porcentajes que se presentan en la Imagen 10) se observa que un 89.7% de las respuestas dadas por él se encuentran en la clase de categorías que considera a la congruencia como un objeto y el 10.3% restante corresponde a preguntas que no aplicaron o no respondió el alumno.

Este es un claro ejemplo de un alumno que se considera en este perfil debido a su marcada preferencia por dar respuestas que se inscriben en los niveles 2.1, 2.2 y 2.3. De manera particular se consideran respuestas como las que se presentan en la Tabla 11.

Tabla 11.

Análisis de respuestas que consideran a la congruencia como objeto, alumno 7, cuestionario 3 y 4

Imagen

1.1 ¿cuántos posibles triángulos puedo formar con las condiciones dadas en el punto 1?, justifica tu respuesta

Ninguno	
Uno	
Muchos	✓
Infinitos	

Ya que al ser congruentes solo 2 lados de los triangulos, el tecer lado puede tener una longitud diferente, esto a causa de la abertura de los lados, es decir, el ángulo de los 2 lados congruentes.

Análisis

Nivel 2.3 (Criterios matemáticos generales, suficientes y necesarios, para garantizar la congruencia de dos polígonos teóricos): Se considera a esta respuesta en el nivel 2.3 ya que el alumno es capaz, mediante argumentos lógicos, de justificar su respuesta haciendo mención, de manera implícita, a un teorema en acción (dados dos pares de lados correspondientes congruentes, para los ángulos entre los dos lados se cumple que, a ángulos opuestos diferentes, los lados opuestos son diferentes)

Imagen

1.4 ¿Qué otro u otros datos (mínimos) debemos conocer en relación a los dos triángulos para asegurar que el triángulo ABC es congruente con el triángulo DEF si no se sabe nada de la relación entre $\overline{CA}$ y $\overline{DF}$?. Si te das cuenta, te estamos pidiendo que propongas otro criterio de congruencia para garantizar que dos triángulos son congruentes, es decir, que propongas las condiciones mínimas que deben cumplir los componentes de dos triángulos que garanticen que esos dos triángulos son congruentes. A este segundo criterio de congruencia le vamos a llamar Criterio de congruencia 2. Lado, Angulo, Lado.

Análisis

Nivel 2.2 (Considera criterios necesarios y suficientes): Se ubicó en el nivel 2.2 esta respuesta ya que el estudiante menciona el criterio LAL sin dar argumentos, en esta respuesta, de su validez. Es importante aclarar que sólo fue posible ubicar esta respuesta en este nivel después de haber visto de manera general las respuestas del estudiante; esto permitió observar que el estudiante no solamente estaba repitiendo lo que se le había enseñado, sino que por el contrario, parecía comprender el por qué LAL era un criterio de congruencia.

Imagen

1.8 ¿Recuerdas al amigo muy inteligente al que le tuviste que argumentar en la sesión pasada? Pues vuelve a tratar de convencerlo con un argumento lo más convincente posible, de la respuesta que diste en 1.7. Es decir, ¿Cómo le argumentarías a una persona muy inteligente que este nuevo criterio asegura la congruencia entre ABC y DEF?.

2 triangulos son congruentes, si 2 lados correspondientes mantienen el mismo ángulo

Análisis	Nivel 2.2: Se ubicó en el nivel 2.2 a esta respuesta ya que el alumno implícitamente hace mención al criterio LAL de congruencia para triángulos pero no argumenta su afirmación.
Imagen	2.1 ¿Cuáles son las condiciones mínimas que deben tener dos cuadrados para ser congruentes (revisa tu respuesta 1.2)? 2 angulos iguales y un lado. igual.
Análisis	Nivel 2.1 (Identifica criterios que consideran suficientes pero son incorrectos): Se ubicó en el nivel 2.1 a esta respuesta porque el alumno es capaz de proponer un criterio de congruencia en términos de lados y ángulos, pero no es capaz de proponer un criterio de congruencia que sea correcto (en términos de suficiencia).
Imagen	7. Escribe el primer criterio de congruencia para pentágonos que descubriste con tu compañero. LALAL
Análisis	Nivel 2.1: En este caso se asoció a esta respuesta el nivel 2.1 ya que el alumno es capaz de proponer un criterio de congruencia general para pentágonos pero este no es correcto. Esto quiere decir que el criterio de congruencia no cumple con ser suficiente o necesario.

En este perfil se suelen encontrar respuestas en donde los estudiantes no asocian la congruencia a procesos de comprobación empírica; por el contrario, son capaces de establecer criterios de congruencia generales basados en los componentes de los polígonos, aunque en ocasiones no puedan establecer criterios de congruencia correctos en términos de necesidad y suficiencia.

8.2.2 Perfiles asociados a ideas cambiantes de la congruencia:

8.2.2.1 Perfil: Consideración inicial de congruencia como proceso empírico y concepción posterior de la congruencia asociada a la transición (de la concepción empírica a una concepción como objeto)

En este perfil se encuentran los alumnos que muestran un apego a las consideraciones de la congruencia como un proceso empírico (se comprueba a la congruencia con métodos de comparación empíricos tales como las comparaciones visuales, la superposición, la comprobación con regla y compas) pero muestran ser conscientes de que se puede caracterizar a la congruencia de polígonos en términos de los elementos que los componen.

Los estudiantes que se encuentran en este perfil no necesariamente consideran únicamente los lados y ángulos de los polígonos, es posible que recurran al intento de caracterizar la congruencia de polígonos mediante otros elementos tales como el área o la base.

Las respuestas dadas por los alumnos que se encuentran en este perfil suelen ser principalmente del nivel 0.2 y 1.1.

Dentro de este perfil se encuentra el alumno 1; es por esto que se tomarán los resultados obtenidos por este alumno para ejemplificar este perfil.

En la Imagen 11, se observa que el alumno responde prioritariamente en el nivel de transito de la congruencia como concepción empírica a objeto (con un 58.6% de las respuestas). Sin embargo, muestra un porcentaje considerable de respuestas en la concepción empírica de la congruencia (con un 27.5%), habiendo una ausencia total en la categoría de la consideración de la congruencia como objeto.

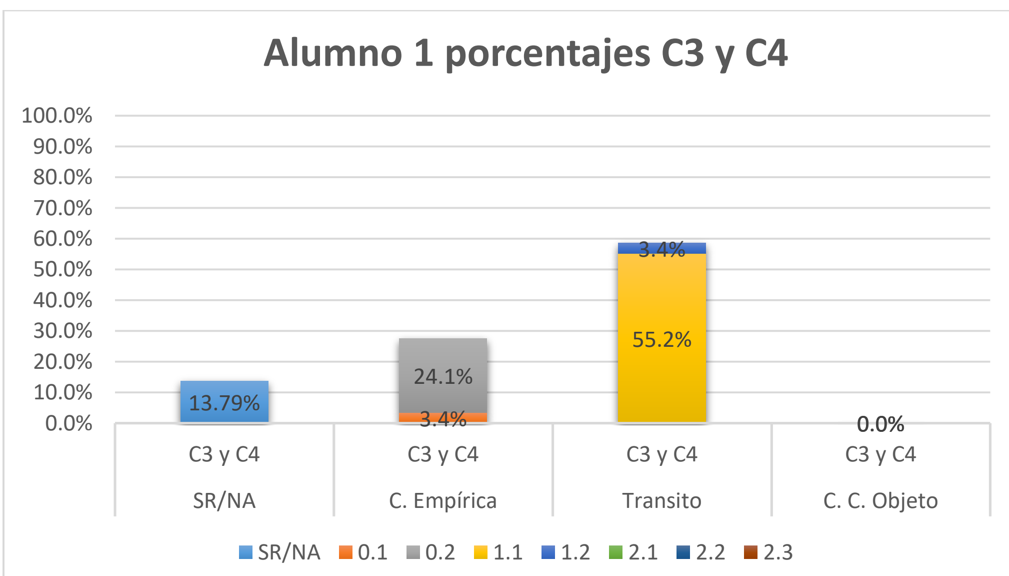


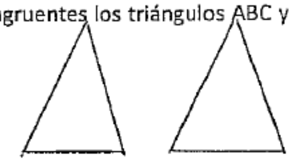
Imagen 11.
Porcentaje de respuestas por niveles y concepciones del cuestionario 3 y 4 , alumno 1

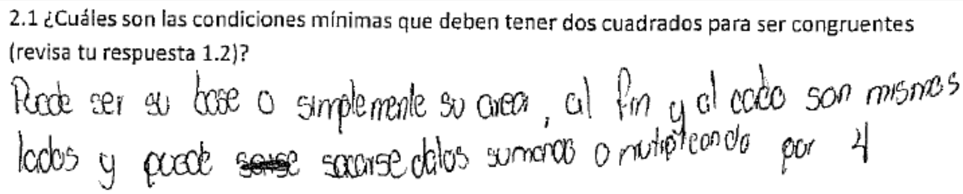
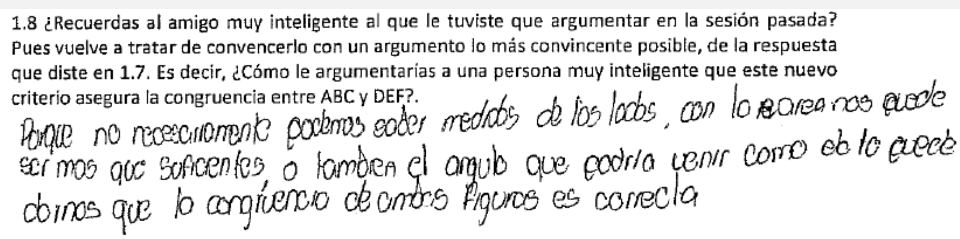
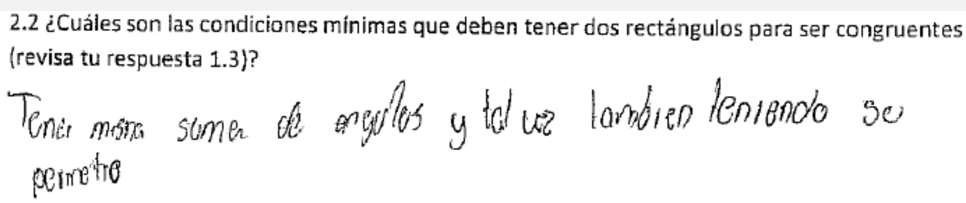
Las gráficas de respuestas de alumnos que se consideran en este perfil destacan porque su concepción predomina en el tránsito de lo empírico a la consideración como objeto (centrándose principalmente en el nivel 1.1 de las categorías); además suelen mostrar un porcentaje considerable de respuestas en la consideración de la congruencia como un proceso empírico mayor al de la consideración como objeto (particularmente en el nivel 0.2).

En el caso particular de las respuestas que dan los alumnos, en este perfil se encuentran respuestas como las que se muestran en la Tabla 12.

Tabla 12.

Análisis de respuestas que consideran a la congruencia como objeto, alumno 1, cuestionario 3 y 4

Imagen	1.2 ¿Los dos triángulos que dibujaste en el punto 1 son congruentes? Si tu respuesta es SI, ¿qué te permite asegurar la congruencia?, si tu respuesta es NO, ¿Es posible dibujar dos triángulos ABC y DEF congruentes sabiendo que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ (que dos de sus lados son congruentes) y sin saber nada entre la relación de $\overline{CA}$ y $\overline{DF}$? Puedes decir que si tal vez a simple vista, ya uno tomando medidas puede darse cuenta que los triangulos no tienen mismas medidas
Análisis	Nivel 0.2 (concepción empírica o concreta de la congruencia entre polígonos): Esta respuesta se ubica en el Nivel 0.2 (congruencia como proceso) ya que, como se observa, el estudiante utiliza como referente de comparación de triángulos un método de comprobación empírico, específicamente, la comparación de manera visual de los triángulos. Esto se hace evidente cuando afirma "se puede decir que sí, tal vez a simple vista".
Imagen	1.3. Esas dos condiciones (es decir, dos lados congruentes) ¿son suficientes para garantizar la congruencia de los dos triángulos? puede que si tal vez parecerían que tienen mucha similitud, ambos a simple vista, los angulos no serian los mismos además también varia mucho la forma en que se hayan colocado los triangulos
Análisis	Nivel 0.2: Se ubica en el nivel 0.2 a esta respuesta ya que, el estudiante explicita que compara los triángulos a "ambos a simple vista".
Imagen	1.5 Comprueba el nuevo criterio de congruencia planteado en el punto 1.3 dibujando dos triángulos ABC y DEF con los nuevos datos que propusiste, ¿son congruentes los triángulos ABC y DEF? a vista sí 

Análisis	Nivel 0.2: De igual manera que en el punto 1.2 y 1.3, esta respuesta se ubica en el nivel 0.2 por que el alumno hace explícito en su respuesta que compara los triángulos de manera visual, al escribir “a vista si”.
Imagen	 2.1 ¿Cuáles son las condiciones mínimas que deben tener dos cuadrados para ser congruentes (revisa tu respuesta 1.2)? Puede ser su base o simplemente su area, al fin y al cabo son mismos lados y puede ~~sese~~ sacarse datos sumando o multipleando por 4
Análisis	Nivel 1.1: Se ubica esta respuesta en el nivel 1.1 ya que en ella el alumno hace explicito su interés por caracterizar a la congruencia considerando elementos que asocia a los polígonos tales como su base o su área; sin embargo al parecer no tiene claridad de cómo caracterizar a la congruencia con los elementos que propone.
Imagen	 1.8 ¿Recuerdas al amigo muy inteligente al que le tuviste que argumentar en la sesión pasada? Pues vuelve a tratar de convencerlo con un argumento lo más convincente posible, de la respuesta que diste en 1.7. Es decir, ¿Cómo le argumentarías a una persona muy inteligente que este nuevo criterio asegura la congruencia entre ABC y DEF?. Porque no necesariamente podemos saber medidas de los lados, con la area nos puede ser mas que suficientes, o tambien el angulo que podria venir como eb lo puede darnos que la congruencia de ambas figuras es correcta
Análisis	Nivel 1.1: Se ubica esta respuesta en el nivel 1.1 ya que el alumno explicita que comparar los ángulos es una manera de asegurar que los triángulos son congruentes. Mostrando con esta que intenta razonar más allá de las comprobaciones a simple vista. Además, de esto intenta hacer una relación causal entre la congruencia de los ángulos con la congruencia de uno de los lados; esto se observa cuando escribe que “si comparten la misma similitud (los) mismos ángulos de posición (y) con ello también comparten una congruencia (de) solo 1 de sus lados”, esto lleva a suponer que el estudiante se encuentra intentando caracterizar a la congruencia en términos de los elementos que componen el triángulo.
Imagen	 2.2 ¿Cuáles son las condiciones mínimas que deben tener dos rectángulos para ser congruentes (revisa tu respuesta 1.3)? Tener misma suma de angulos y tal vez tambien teniendo su perimetro
Análisis	Nivel 1.1: Se ubica a la respuesta en el nivel 1.1 debido a que el alumno muestra intentar caracterizar a la congruencia de polígonos recurriendo a las medidas de los ángulos y al perímetro de las figuras.

Como se observa en la Tabla 12, las respuestas dadas por los estudiantes que se encuentran en este perfil tienen cierto apego a ver la congruencia como un proceso de comparación empírico, sin embargo, intentan despegarse de esas consideraciones empíricas y caracterizan a la congruencia en términos de los elementos que la componen; es probable que, al ser caracterizaciones iniciales, los estudiantes recurran a elementos tales como el área, la base o el perímetro; para con estos elementos intentar caracterizar a la congruencia.

8.2.2.2 Perfil: Consideración de congruencia asociada a la transición y concepción de congruencia como un objeto

En este perfil se encuentran los alumnos que muestran tener una idea de las condiciones necesarias para que dos polígonos sean congruentes pero que muestran no entender las condiciones suficientes que se requieren para establecer los criterios de congruencia.

Es común que en muchas ocasiones los alumnos que se encuentran en este perfil reciten una propiedad (cómo por ejemplo algún criterio de congruencia) sin dar evidencias de comprenderla; sin embargo esto no necesariamente es cierto en todos los casos y pueden esporádicamente parafrasear razones que sustenten a una o algunas de las propiedades que manifiestan.

En este tipo de perfil suele predominar los niveles 1.2, 2.1, y en un menor nivel las respuestas en el nivel 2.2. Es importante mencionar que en este perfil es usual encontrar respuestas en donde se presente una concepción de la congruencia como un proceso empírico (principalmente respuestas del nivel 0.2), aunque estas se presenten en menor medida que las respuestas que se encuentran en el tránsito y la concepción como objeto.

Dentro de este perfil se encuentran los alumnos 2 y 3. Tomando como ejemplo el caso del alumno 2 observamos que, como se muestra en la Tabla 13 las respuestas dadas por el estudiante, se encuentran mayoritariamente en el tránsito de la concepción empírica a la consideración como objeto (predominando el nivel 1.2). Por otro lado se observa cierto apego de la consideración como objeto (con un 27.6% de respuestas que se dividen por igual entre las que se encuentran en el nivel 2.1 y 2.2), dejando a la concepción de la congruencia como un proceso empírico como la concepción con menos porcentaje de respuestas y en donde predomina principalmente el nivel 0.2. En la imagen 12 se sintetiza los resultados.

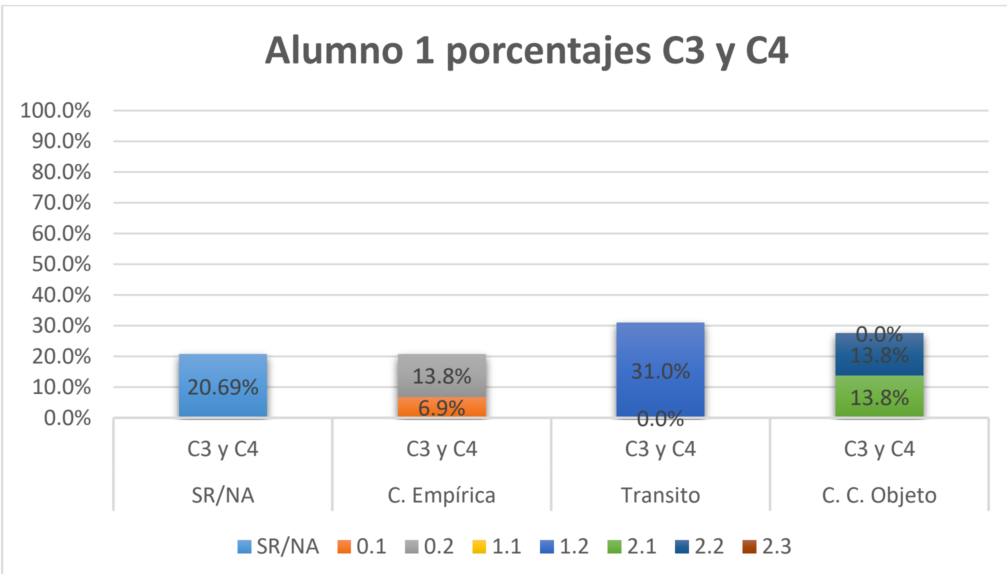
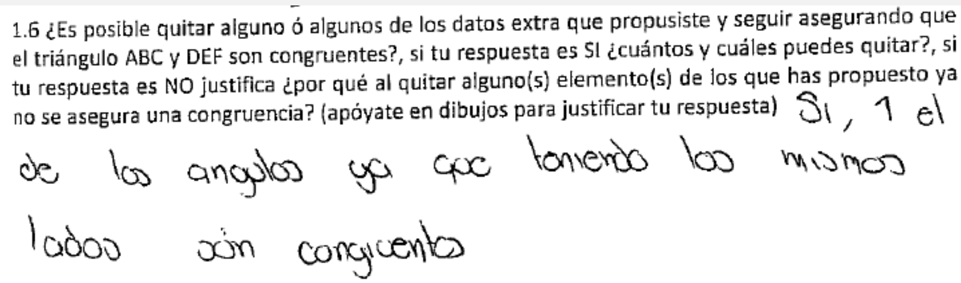
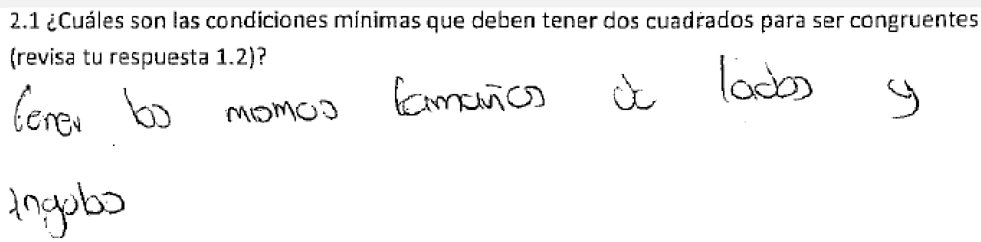
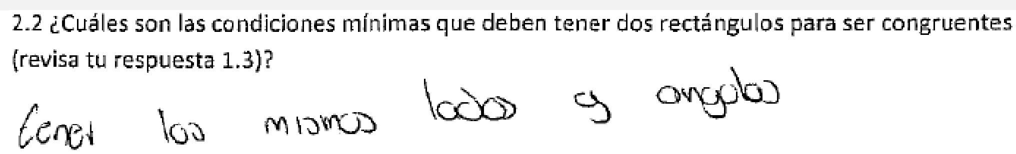
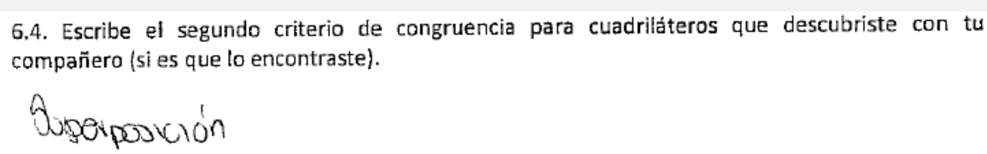


Imagen 12.
Porcentaje de respuestas por niveles y concepciones del cuestionario 3 y 4 , alumno 2

De manera particular, en la Tabla 13 se presentan las respuestas que suelen dar los estudiantes que se ubican en este perfil.

Tabla 14.
Análisis de respuestas que consideran a la congruencia como objeto, alumno 2, cuestionario 3 y 4

Imagen	**Imagen 1.4 C3 alumno 2**
Análisis	Nivel 1.2 (Identifican criterios necesarios para la congruencia, pero no distinguen criterios suficientes): Se asoció la respuesta al nivel 1.2 ya que el estudiante parece recitar la definición

	formal de congruencia, sin embargo no muestra indicios de comprender la definición; sumado a esto el estudiante parece no considerar la noción de suficiencia (o condiciones mínimas) que se pide tener en cuenta en el enunciado de la pregunta.
Imagen	 1.6 ¿Es posible quitar alguno ó algunos de los datos extra que propusiste y seguir asegurando que el triángulo ABC y DEF son congruentes?, si tu respuesta es SI ¿cuántos y cuáles puedes quitar?, si tu respuesta es NO justifica ¿por qué al quitar alguno(s) elemento(s) de los que has propuesto ya no se asegura una congruencia? (apóyate en dibujos para justificar tu respuesta) Si, 1 el de los angulos ya que teniendo los mismos lados son congruentes
Análisis	Nivel 2.1 (Identifica criterios que consideran suficientes pero son incorrectos): se asoció el nivel 2.1 a esta respuesta ya que el estudiante no logra hacer explícito un criterio de congruencia que sea suficiente; por el contrario propone de manera implícita el "criterio de congruencia LALAL" para triángulos.
Imagen	 2.1 ¿Cuáles son las condiciones mínimas que deben tener dos cuadrados para ser congruentes (revisa tu respuesta 1.2)? tener los mismos tamaños de lados y angulos
Análisis	Nivel 1.2: Se asoció esta respuesta al nivel 1.2 ya que el estudiante parece intentar parafrasear la definición de congruencia de polígonos, sin embargo, no parece comprender lo que la definición supone.
Imagen	 2.2 ¿Cuáles son las condiciones mínimas que deben tener dos rectángulos para ser congruentes (revisa tu respuesta 1.3)? tener los mismos lados y angulos
Análisis	Nivel 1.2: se asoció el nivel 1.2 en esta respuesta ya que el estudiante parece, o no entender o hacer caso omiso a la instrucción de condiciones mínimas establecidas. Esto lo lleva a limitarse a repetir la definición formal de congruencia para polígonos que parece recordar.
Imagen	 6.4. Escribe el segundo criterio de congruencia para cuadriláteros que descubriste con tu compañero (si es que lo encontraste). Superposición
Análisis	Nivel 0.2 (concepción empírica o concreta de la congruencia entre polígonos): se asoció esta respuesta al nivel 0.2 ya que el estudiante menciona que la superposición es un criterio de congruencia.

Es usual que en este perfil el alumno muestre que conoce algunas de las propiedades de la congruencia tales como la definición de la congruencia, pero no necesariamente las comprende. Por otro lado, cuando la pregunta orilla a establecer condiciones suficientes (o mínimas), el alumno suele titubear y dar respuestas que, o no necesariamente consideran las condiciones del problema, o no establecen condiciones mínimas o suficientes (véase cómo ejemplo la preguntas 1.6 del cuestionario 3 en la Tabla 14); esto lleva a suponer que el estudiante no comprende lo que es un criterio de congruencia, y que en las ocasiones que los menciona repite lo que ha aprendido previamente.

9 CONCLUSIONES

Se observó que el nivel de desempeño de estudiantes de tercero de secundaria en tareas relacionadas con la congruencia se puede dividir en tres momentos.

En el momento inicial se considera a la congruencia como un proceso empírico; esto quiere decir que los alumnos consideran principalmente a la congruencia como procesos de comprobación empírica (superposición, comparación con medición de medidas, comparación con regla y compas, etc). En este primer momento los estudiantes presentan dificultades para establecer propiedades de la congruencia entre polígonos; sin embargo, es probable que sí establezcan propiedades de congruencia al interior de un mismo polígono (e.g., decir que en un triángulo isósceles dos de sus lados son congruentes). Se destaca en este nivel que los estudiantes no son capaces de establecer condiciones necesarias y suficientes para asegurar la congruencia; esto lleva a que no hagan uso de las definiciones formales ni de los criterios de congruencia de polígonos.

En el segundo momento, los estudiantes se alejan de la concepción de la congruencia como un proceso empírico y se aproximan a una consideración de la congruencia como un objeto. Esto quiere decir que, a partir de una idea de superposición, los alumnos empiezan a caracterizan a la congruencia en términos de sus componentes (lados y ángulos). Es común que al inicio de este momento los estudiantes caractericen a la congruencia de una manera errada, aunque posteriormente sean capaces de dar definiciones formales de la congruencia. En este momento, los estudiantes conocimientos que les permiten eventualmente ser capaces de establecer condiciones necesarias, pero no condiciones suficientes para la congruencia de polígonos.

Por último, en el tercero y último momento los estudiantes empiezan a dar evidencias de entender a la congruencia como un objeto. En este momento, los estudiantes ya son capaces de considerar la necesidad en la congruencia de polígonos y empiezan a considerar la suficiencia en la congruencia. De esto se deriva que los estudiantes conocen las definiciones formales de congruencia para polígonos y empiezan a considerar condiciones suficientes de congruencia. En este momento, se encuentran alumnos que exponen criterios correctos de congruencia para polígonos (como el criterio de congruencia LAL para triángulos); también se consideran aquellos alumnos que intentan construir criterios de congruencia que no cumplen con ser suficientes, por ejemplo los alumnos pueden proponen como un criterio de congruencia LALA (lado, ángulo, lado, ángulo) para triángulos.

Por otro lado, el conjunto de categorías que se construyó en el trabajo de investigación resulta ser una primera propuesta de 'orden conceptual'. Éste consiste en "una organización de los datos en categorías discretas (muchas veces índices o indicadores) de acuerdo a sus propiedades y dimensiones" (Corbin y Strauss, 2015, p. 61). Al ser un orden conceptual, las categorías que lo componen poseen un orden y una jerarquización cuyo propósito es valorar el desempeño de los estudiantes de nivel medio superior al realizar tareas de congruencia de triángulos (y polígonos). Una limitación de este trabajo es que ese ordenamiento es una propuesta inicial y se requiere probar en un conjunto más amplio de datos.

Además, ese ordenamiento conceptual constituye una herramienta que permite ahondar en la producción de los estudiantes relacionada con la congruencia de polígonos.

Este tipo de construcción analítica es precursora de la teorización, según Corbin y Strauss (2015).

Es importante recordar que en la revisión bibliográfica que se realizó en el marco de esta investigación, la mayoría de los conjuntos de categorías que presentaban un orden conceptual eran trabajos con estudiantes que se enfocaban en el análisis de pruebas y justificaciones sobre geometría. Otros trabajos que presentaban un orden conceptual, se basaban en los niveles de Van Hiele, que como ya se mostró en la revisión bibliográfica, resultaban poco adecuados para ser tomados como referencia en este trabajo de investigación.

Lo anterior lleva a suponer que las categorías que se exponen en este documento, que como ya se dijo previamente resultan ser un primer acercamiento a un orden conceptual, representan un aporte a la investigación en educación matemática al brindar una manera analizar de manera fina y detallada la producción de los estudiantes de tercero de secundaria en tareas de congruencia de polígonos.

Es importante resaltar que al ofrecer un orden conceptual se brinda una herramienta, al investigador interesado, que permite no solo caracterizar la producción de los alumnos, sino detectar posibles dificultades de los alumnos, establecer caminos para la enseñanza de la congruencia de polígonos, explorar a fondo la producción de los alumnos sin salir de las márgenes de la coherencia, transformar los conceptos en datos, entre otras varias alternativas.

Por otro lado, la reflexión sobre el uso de la TF y sobre la construcción de las categorías no solo puede ser de gran ayuda a investigadores, también brinda al profesor y a los investigadores una manera de aproximarse y valorar la producción de los alumnos. Esto ocurre ya que, tanto la TF como las categorías, brindan una manera de trabajar con la producción de los alumnos que permite ahondar en análisis y aproximarse a los significados que el estudiante atribuye a sus respuestas.

Además de lo antes dicho, es importante resaltar que el uso de las categorías permite establecer posibles dificultades que los estudiantes evidencien en sus respuestas. Un ejemplo de esto se presentó en el capítulo 6 de este documento.

Este documento brinda un ejemplo del uso de algunas herramientas analíticas que propone la TF de Corbin y Strauss (2015) (principalmente las comparaciones constantes, preguntas y el muestreo teórico). Si bien es cierto que Corbin y Strauss son muy didácticos y proponen muchos casos ilustrativos, también es cierto que esos ejemplos nunca son suficientes para un investigador novel; además de que no brindan ejemplos muy específicos y detallados que orienten al investigador en torno a cómo aplicar y hacer uso de estas herramientas en una investigación de tipo cualitativo; es por eso que los autores de este documento consideran importante la explicación detallada que se brindó en el capítulo de construcción de categorías pues ejemplifican puntualmente una de las maneras mediante las cuales se puede dar uso a las herramientas analíticas de la TF en una investigación cualitativa, sirviendo de ejemplo e inspiración para investigadores poco experimentados que quieran realizar análisis cualitativo. Es importante resaltar que este documento presenta el uso de las herramientas analíticas en la educación matemática, pues en la TF (Corbin y Strauss, 2015) se hace uso de las mismas solo en contextos afines a la salud.

Los autores de este documento consideran importante resaltar a manera de reflexión el uso de los referentes literarios en este trabajo de investigación. Consideramos que este trabajo muestra un claro ejemplo de cómo, en trabajos orientados por la TF, se puede hacer uso de los referentes literarios sin que se traicione a los datos empíricos y que, por el contrario, los referentes literarios permiten acceder a un abanico más amplio de perspectivas que le ofrezcan al investigador la identificación de nuevos posibles significados que se encuentran detrás de los datos.

Consideramos importante rescatar que en ocasiones es necesario el uso de referentes literarios para poder enriquecer el conjunto de categorías que se esté construyendo, evitando quedar con un análisis empobrecido de los datos empíricos. En el caso de la construcción de categorías que se presenta en este documento es justamente lo que ocurrió, pues el no haber utilizado algunas de las ideas de Sfard y Linchevski (1994) no hubiera sido posible llegar al nivel de profundidad, orden y coherencia que tienen las categorías que en este documento se exponen.

Para ver la importancia de los referentes literarios en la construcción de las categorías que en este documento se presentan, basta con llevar las ideas de Sfard y Linchevski (1994) al caso de la congruencia. Se puede decir que, en el caso de la congruencia aquí estudiada, el nivel que llamamos 'empírico' los estudiantes parten de objetos matemáticos (triángulos, sus componentes y reglas para comparar y para verificar la congruencia) y su atención se centra sólo en aplicar esas reglas a los triángulos dados (al igual que los niños en la etapa pseudoestructural su atención se centra sólo en aplicar reglas para resolver ecuaciones sobre objetos dados, ie, números y variables y operaciones). En el caso del nivel la congruencia como objeto, el estudiante considera ya a la congruencia como un nuevo objeto matemático en el que él puede reflexionar y a la cual le ha asociado propiedades y definiciones genéricas.

En resumen, en toda actividad matemática se utilizan objetos matemáticos. La diferencia entre proceso y objeto consiste en qué se centra la atención durante la práctica, y cuál es el objeto de reflexión. En este caso, su resolución de ecuaciones lo ve sólo como un proceso, porque su atención está dirigida sólo hacia las operaciones que componen el proceso. Los referentes literarios nos permitieron hacer esta distinción en las categorías.

En futuras investigaciones se piensa hacer muestreos teóricos que permitan identificar nuevas propiedades y dimensiones de las categorías aquí expuestas para darle densidad y solidez a la propuesta de orden conceptual que aquí se expone.

10 REFERENCIAS

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics.* (7), 23-40.

Carbó, A. y Mántica, A. (Agosto de 2010). Una propuesta para trabajar congruencia de triángulos en la escuela secundaria priorizando la validación. En M. E. Ascheri, R. A. Pizarro y N. Ferreyra (Eds.), *III Reunión Pampeana de Educación Matemática: memorias* (pp. 376-386). Santa Rosa, La palma, Argentina: Universidad Nacional de la Palma

Corbin, J. y Strauss, A. (2015). *Basics of Qualitative Research.* Los Angeles, California: SAGE.

Crowley, M. L. (1987). The Van Hiele model of the development of geometric thought. N.C.T.M.: *Learning and teaching geometry, K-12 (1987 yearbook)*. USA, pp. 1-16.

Escobar, J. (2000). *Elementos de Geometría*. Antioquia, Colombia: universidad de Antioquia.

Fouz, F. y Donotsi, B. (2001). *Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría.* Recuperado de http://www.hemerodigital.unam.mx/ANUIES/upn/vol13/sec_84.html

Fuiz, D. Geddes, D. y Tischler, R. (1984). *English translation of selected writings of Dina Van Hiele-Geldof and Pierre M. Van Hiele*. Brooklyn, New York: Broooklyn College.

Gilman, A. (Ed.). (1984). *Elementos de Geometría, con notas*. Madrid, España: Imprenta de Repulles

Gualdron, E. y Gutiérrez, A. (2007). Una aproximación a los descriptores de los niveles de razonamiento de van hiele para la semejanza. Investigación en Educación Matemática. (11), 369-380.

Hilbert, D. (1996). *Fundamentos de la geometría*. Madrid, España: Bouncopy. S.A

Jaime, A. y Gutierrez, A. (1990). Capítulo VI Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Llinares, y V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384).Valencia. España: Universidad de Valencia.

Komatsu, K. (2016). A framework for proofs and refutations in school mathematics: Increasing content by deductive guessing. *Educational Studies in Mathematics.* (92), 147-162.

Piatek, K. (2008). Building Intuitive Arguments for the Triangle Congruence Conditions. *National Council of Teachers of Mathematics.* (101), 463-466.

Puertas, M. (Ed.). (1991). *Elementos Libros I-IV*. Madrid, España: Editorial Gredos S.A

Secretaría de Educación Pública. (2017). *Aprendizajes clave para la Educación Integral plan y programas de estudio para la educación básica*. Recuperado de https://www.tamaulipas.gob.mx/educacion/wp-content/uploads/sites/3/2017/07/aprendizajes_clave_para_la_educacion_integral.pdf.

Sfard, A. y Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification The case of Algebra. *Educational Studies in Mathematics.* (26), 191-228.

Wenger, E. (2001). Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad. Barcelona: Paidós. 75-90.

Yang, K. y Lin, F. (2008). A model of reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics.* (67), 59-76.

Zakiz, R y Leron, U. Capturing congruence with a turtle. (1991) *Educational Studies in Mathematics.* (22), 285-295.

11 ANEXOS

11.1 ANEXO 1, CUESTIONARIO 1

PARA CONOCER LA GEOMETRÍA:

TALLER DE REFLEXIÓN Y ACTIVIDADES EXPERIMENTALES

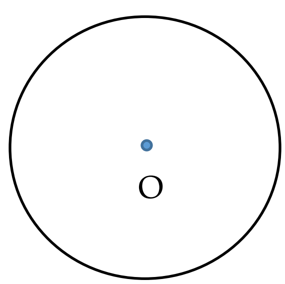
Definiciones

Segmento: Se llama segmento AB a todos los puntos de una recta que están entre A y B, su forma abreviada de escritura en matemáticas es $\overline{AB}$.

Rayo: Se llama rayo AB a todos los puntos de una recta que hay desde el punto A y del lado en donde se encuentra B. Su forma abreviada de escritura en matemáticas es $\overrightarrow{AB}$

Ángulo: Se llama ángulo ABC a la unión de dos rayos ($\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$) de tal manera que si se traza una recta, ésta jamás contendrá a A, B y C al mismo tiempo su forma abreviada de escritura en matemáticas es $\angle ABC$. Es importante observar que el punto intermedio (para este caso B) se le conoce como el vértice del ángulo.

Circunferencia: se le llama circunferencia a todos los puntos que se encuentran a una misma distancia (r) de un punto O. Este punto O se le conoce como el centro de la circunferencia y a r como el radio.



Triángulo: Se Conoce como triángulo a una figura geométrica cerrada por 3 segmentos que se intersecan únicamente en sus extremos. Estos segmentos también se les suele llamar lados del triángulo

Nombre _______________________________________ edad ______ género __________

Es importante que tengan en consideración que este taller NO influye en las calificaciones de las materias.

NOTA: Es necesario que realicen todas las actividades con pluma, no hagan tachones ni borrones dentro de las actividades. Nuestro interés es conocer su razonamiento ustedes como estudiantes, es por esto que les solicito que escriban cualquier idea que tengan, siéntanse libres de utilizar el papel para expresar lo más detallado posible el razonamiento que utilicen para la solución de los problemas que se plantean en el taller.

ACTIVIDAD INTRODUCTORIA

Nociones básicas:

a. Cuando trazas una recta con tu regla, ¿Cuántos puntos de referencia es necesario tener?

b. Con la misma idea ¿cuántos puntos es la cantidad mínima que se deben tener como referencia para crear una recta en geometría?

c. ¿Es posible trazar dos rectas diferentes por dos puntos dados?, si tu respuesta es sí dibuja dos rectas que pasen por dos puntos fijos y que sean distintas, si tu respuesta es no justifica por qué ocurre esto.

d. Si dos rectas distintas se cruzan, ¿en cuántos puntos como máximo se cortan?, ¿Por qué ocurre esto?, justifica ampliamente tu respuesta

¿Qué tan seguro te encuentras de que tu respuesta es correcta?

Seguro	
Poco seguro	
Muy poco seguro	
Nada seguro	

Igualdad y "congruencia" en elementos geométricos

1. Entre el palito azul y el verde, ¿hay uno más grande que otro o los dos tienen el mismo tamaño?

¿Qué tan seguro te encuentras de que tu respuesta es correcta?

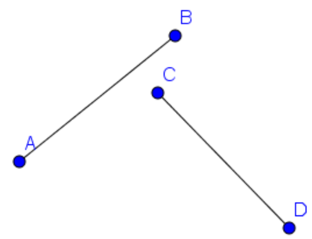
Seguro	
Poco seguro	
Muy poco seguro	
Nada seguro	

1.1 ¿Cómo hiciste para llegar a esta conclusión? Explica tu método para comparar los palitos de la manera más detallada posible

Los geómetras comparan cosas con el principio de superposición, el cual consiste en acomodar de una manera adecuada los objetos que desean comparar y, si estos empalman perfectamente entonces se concluye que los objetos son iguales.

1.2 Teniendo en cuenta el principio de superposición y la manera en cómo comparaste los palitos, escribe una secuencia de pasos para poder comparar dos palitos cualquiera.

1.3 Compara con el método de superposición los siguientes segmentos



1.4 ¿Qué inconvenientes has tenido para poder hacerlo?

Como los elementos dibujados en una hoja no pueden ser movidos fue necesario que los geómetras en su momento propusieran construcciones geométricas para poder compararlos. A continuación se muestra la construcción de un segmento sobre otro.

Si se tiene un segmento cualquiera $\overline{AB}$ y deseamos moverlo sobre otro segmento $\overline{CD}$, seguiremos los siguientes pasos

Paso 1: Dibujamos sobre el segmento $\overline{CD}$ la recta $\overleftrightarrow{CD}$.

Paso 2: Con el compás marcamos la distancia que hay entra A y B, esto dicho de otra manera es acomodar las dos puntas del compás de tal forma que una esté sobre A y la otra sobre B

Paso 3: Sin perder la amplitud marcada por el compás en el paso anterior, hacemos centro en C (esto quiere decir que sobre el punto C hundimos el lado filoso del compás) y trazamos las circunferencia, marcando las intersecciones de la circunferencia con la recta $\overleftrightarrow{CD}$, llamando a una de ellas (la que más nos convenga) como E.

Con estos pasos los geómetras decían que $\overline{CE}$ era el segmento que representaba la superposición de $\overline{AB}$

2 ¿Este método de superposición tiene similitudes con lo que hicimos para la comparación de segmentos con el material concreto?, si es así ¿Qué sería necesario que pasara con el punto E y el punto D para que los segmentos fueran iguales?, ¿por qué?

2.1 ¿Dónde debería quedar E para que el segmento $\overline{CD}$ fuera mayor que el segmento $\overline{AB}$?, ¿por qué?

2.2 ¿Dónde debería quedar E para que el segmento $\overline{CD}$ fuera menor que el segmento $\overline{AB}$?, ¿por qué?

En la vida real hablamos de igualdad entre dos representaciones. Como lo pudimos ver hay características que componen a las representaciones que nos permiten decir si son o no son la misma, una idea similar se presenta en la geometría en donde se habla de congruencia. Se dice que dos objetos en geometría son congruentes si tienen las mismas magnitudes. Un ejemplo de esto es el trabajo que has realizado con los segmentos, cuando se menciona que el palito azul y el amarillo son congruentes haces referencia a que los dos tienen la misma longitud.

El concepto de congruencia no solo se ve en segmentos. Es posible ver la congruencia en todo tipo de elementos de la geometría como lo verás a continuación

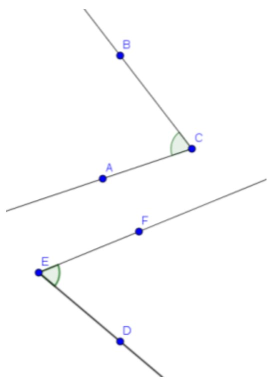
Congruencia de ángulos

3.1 Entre ángulo azul y el verde, ¿hay uno que sea más grande que el otro, o los dos son congruentes?

3.2 ¿Cómo hiciste para llegar a esta conclusión? Explica tu método para comparar los ángulos de la manera más detallada posible

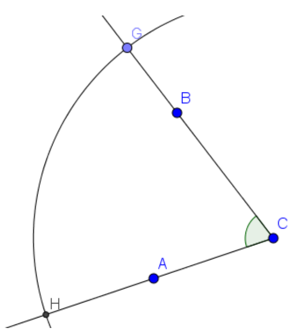
3.4 Teniendo en cuenta el principio de superposición y la manera en cómo comparaste los ángulos, escribe una secuencia de pasos para comparar dos ángulos cualesquiera con material concreto.

3.5 Compara con el método que se ha propuesto los siguientes ángulos



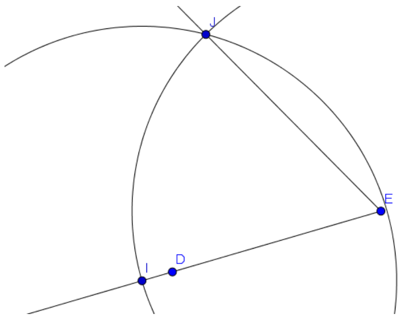
3.6 ¿Qué inconvenientes has tenido para poder hacerlo?

De igual manera que para los segmentos, el no poder mover los objetos geométricos que se dibujan en el papel obligó a los geómetras a escribir una serie de pasos para construir un ángulo sobrepuesto en otro para poder comparar con el principio de superposición, este proceso se resume en los siguientes pasos.



Paso 1: Con centro en C y un radio cualquiera (esto quiere decir que no importa en este primer momento qué tanto abramos el compás) trazamos la circunferencia, marcando los puntos en donde estos se intersecan con los rayos $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ y llamando a los puntos de intersección como G y H como se ve en la imagen

Paso 2: Con centro en E y radio CG trazamos la circunferencia marcando sobre $\overrightarrow{ED}$ el punto intersección y llamándolo I.



Paso 3: Con centro en I y radio GH trazamos una circunferencia, a una de las intersecciones (la que más nos convenga) de esta nueva circunferencia con la anterior que construimos le llamamos J.

Paso 4: Trazamos $\overrightarrow{EJ}$

Los geómetras decían que el ángulo $\measuredangle IEJ$ representa la superposición del ángulo $\measuredangle ACB$

4 ¿Qué sería necesario que pasara con el rayo $\overrightarrow{EJ}$ y el rayo $\overrightarrow{EF}$ para que los ángulos fueran congruentes?, ¿por qué?

4.1 ¿Dónde debería quedar el rayo $\overrightarrow{EJ}$ para que el ángulo $\measuredangle IEJ$ fuera mayor que el ángulo $\measuredangle ACB$?, ¿por qué?

4.2 ¿Dónde debería quedar el rayo $\overrightarrow{EJ}$ para que el ángulo $\measuredangle IEJ$ fuera menor que el ángulo $\measuredangle ACB$?, ¿por qué?

Como hemos podido observar en los ángulos, cuando al sobreponerlos encontramos que los rayos respectivos y los vértices empalman perfectamente se asegura la congruencia de los ángulos.

11.2 ANEXO 2, CUESTIONARIO 2

Nombre ____ *edad* ______ *género* __________

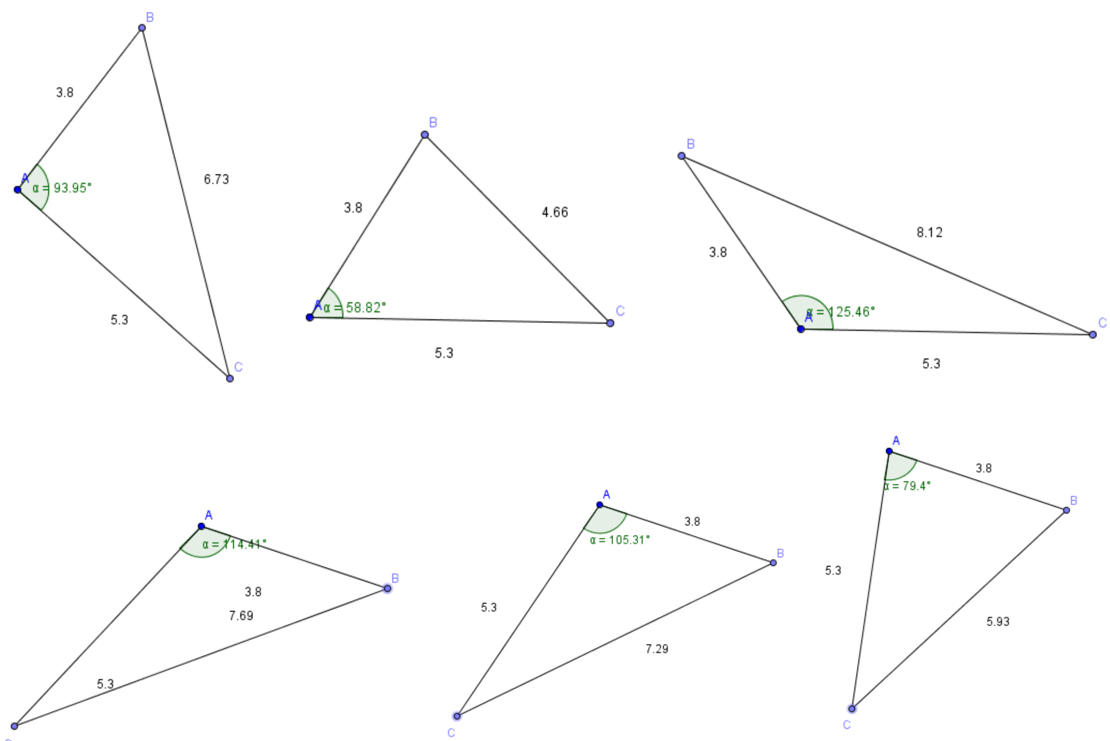
Es importante que tengan en consideración que este taller NO influye en las calificaciones de las materias.

NOTA: Es necesario que realicen todas las actividades con pluma, no hagan tachones ni borrones dentro de las actividades. Nuestro interés es conocer sus razonamientos, es por esto que se les solicita que escriban cualquier idea que tengan. Siéntanse libres de utilizar el papel para expresar lo más detallado posible el razonamiento que utilicen para la solución de los problemas que se plantean en el taller.

Triángulos

Nociones básicas para los triángulos

a. ¿Qué es común en los siguientes triángulos?



b. Enumera los triángulos de tal manera que el primero sea aquel que el ángulo verde (A) es el más pequeño entre todos y el número 6 el más grande entre todos. Luego asígnales una letra de tal manera que la letra a corresponda al triángulo en el que el lado opuesto al ángulo verde sea el más pequeño y la letra f sea el lado opuesto al ángulo verde más grande.

¿Qué relación o relaciones observas entre las dos organizaciones?

¿Qué tan seguro te encuentras de que tu respuesta es correcta?

Seguro	
Poco seguro	
Muy poco seguro	
Nada seguro	

c. Dibuja dos triángulos ABC y DEF de tal manera que $AB \cong DE \; y \; AC \cong DF$ y además que el ángulo BAC es mayor al ángulo EDF ¿Qué se puede decir de BC y EF?

d. Dibuja dos triángulos ABC y DEF en los que $AB \cong DE,\; AC \cong DF$ y además que al lado BC mayor al lado EF ¿Qué se puede decir del ángulo BAC y EDF?

1. ¿A qué otros objetos dentro de la geometría crees que podemos extender el concepto de congruencia?

1.1 ¿Qué componentes compararías en los objetos geométricos que se proponen en el punto 1 para decir que son congruentes?

Como se ha mencionado una de las figuras geométricas a las que se puede extender la idea de congruencia son los triángulos. A continuación veremos la congruencia en los triángulos.

2. Con los triángulos que se te han entregado, menciona qué triángulos son congruentes

2.1 ¿Qué hiciste para saber si dos triángulos son congruentes?

2.2 ¿Qué debemos comparar en el triángulo para hablar de congruencia?

2.3 ¿Qué es necesario decir para asegurar que dos triángulos son congruentes?

2.4 ¿Hay alguna otra manera de hablar de congruencia de triángulos diferente a la que propusiste?

Algunas de las ideas que en el Taller han surgido para dar respuesta a las características que deben poseer dos triángulos para ser congruentes son las mismas que los geómetras se plantearon. En particular, ellos propusieron las siguientes definiciones de congruencia de triángulos

- Definición por superposición: Dos triángulos son congruentes si al sobreponer de una manera conveniente uno sobre otro empalman perfectamente
- Definición por sus componentes: Dos triángulos son congruentes si para todos los ángulos y lados de un triángulo su correspondiente en el otro triángulo es congruente a ellos.

2.5. Si pensamos en cuadriláteros y no triángulos, ¿cómo dirías que dos cuadriláteros son congruentes?, apóyate en las definiciones de congruencia de triángulos

Algunas de las definiciones para la congruencia de los cuadriláteros son las siguientes:

- Definición por superposición: Dos cuadriláteros son congruentes si al sobreponer de uno manera conveniente uno sobre otro empalman perfectamente
- Definición por sus componentes: Dos cuadriláteros son congruentes si para todos los ángulos y lados de un cuadrilátero su correspondiente en el otro cuadrilátero es congruente a ellos.

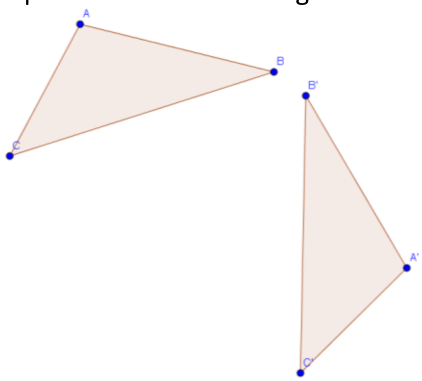
2.6 Si se desea hablar de congruencia para cualquier polígono, ¿cómo dirías que dos polígonos son congruentes?, apóyate en las definiciones de congruencia de triángulos

Algunas de las definiciones para la congruencia de los polígonos son las siguientes:

- Definición por superposición: Dos polígonos son congruentes si al sobreponer de uno manera conveniente uno sobre otro empalman perfectamente
- Definición por sus componentes: Dos polígonos son congruentes si para todos los ángulos y lados de un polígono su correspondiente en el otro polígono es congruente a ellos.

En esta última definición es importante resaltar que no puede haber correspondencias entre todos los lados o todos los ángulos de dos polígonos que no tengan la misma cantidad de lados

2.7 A continuación se muestran un par de triángulos, ¿son o no son congruentes?, justifica tu respuesta utilizando alguna de las definiciones de congruencia dadas anteriormente



2.8 Apoyándote en lo visto anteriormente selecciona los triángulos que son congruentes al triángulo de la figura 1 y justifica por qué lo son (esto es asegurar que todos los componentes de los triángulos son congruentes con su correspondiente)

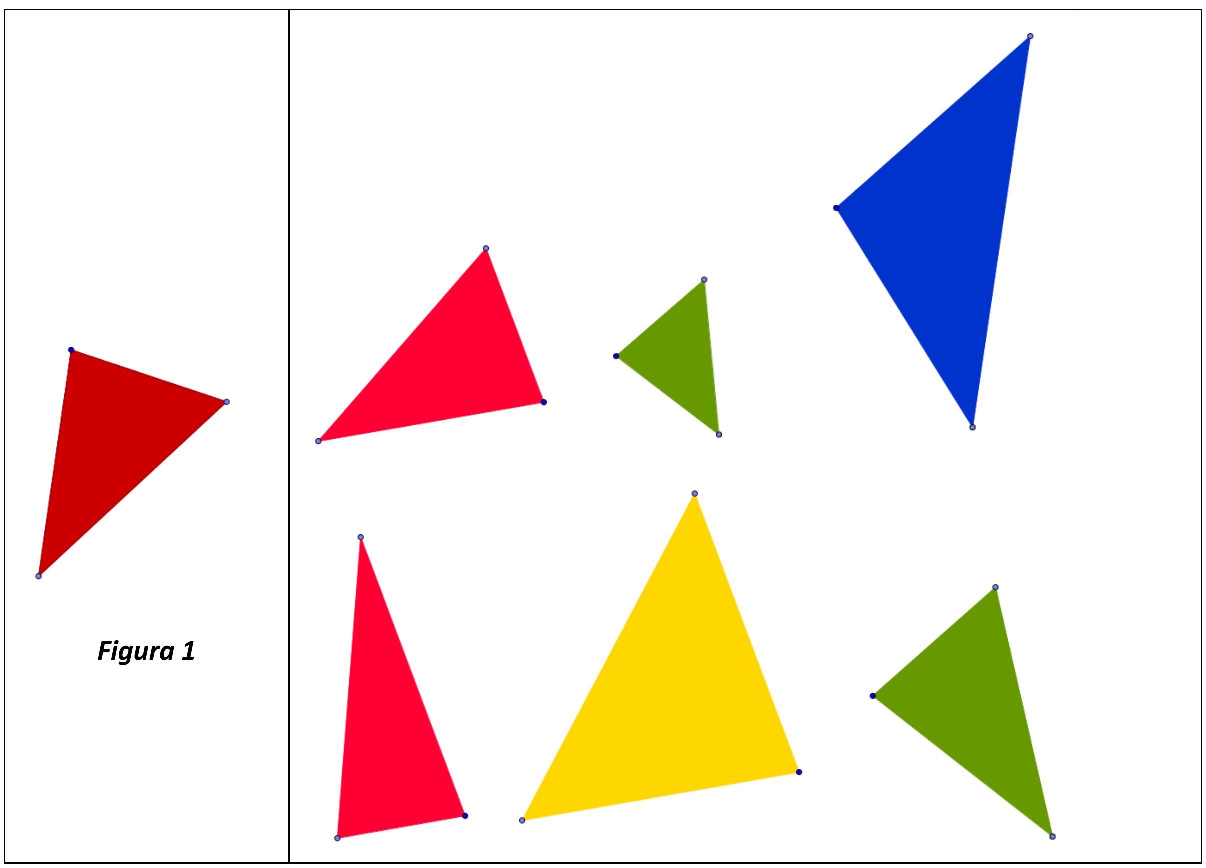
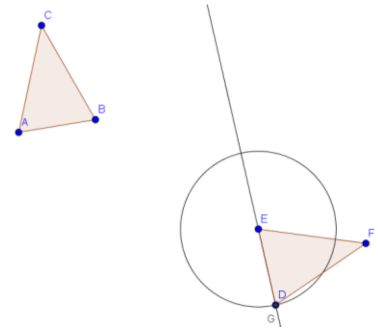
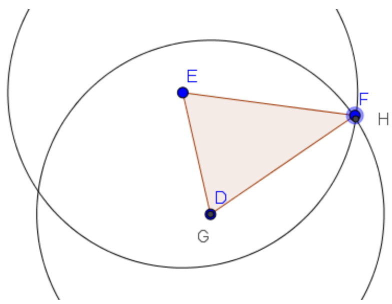


Figura 1

Como hemos visto anteriormente para comparar los segmentos y los ángulos dibujados en papel los geómetras propusieron una manera de construirlos con regla y compás. De igual forma hicieron algunas construcciones con regla y compás para los triángulos. A continuación se presenta la secuencia de pasos para la construcción de un triángulo congruente al triángulo ABC sobre el triángulo DEF.



Paso 1: Se construye un segmento congruente a AB sobre la recta DE tomando como uno de sus extremos a E el punto de partida del segmento congruente a AB, al nuevo punto que construimos lo llamaremos G



Paso2: Con centro en G y radio BC trazo una circunferencia

Paso 3: Con centro en E y radio AC trazo una circunferencia

Paso 4: seleccionamos el punto de corte que más nos convenga entre las dos circunferencias creadas en el paso 2 y 3 lo llamamos H

Paso 5: dibujamos el triángulo EGH

Cómo se observó, los geómetras propusieron un método de construcción de triángulos en donde solo se utiliza la medida de los lados; con este método de construcción de triángulos se puede asegurar que dos triángulos son congruentes. Lo interesante de este método es que solo se necesita que la persona conozca los 3 lados de los triángulos para garantizar que son congruentes; esto quiere decir que si de dos triángulos ABC y DEF se conoce que los lados que se corresponden son congruentes, entonces los triángulos ABC y DEF serán congruentes, aun cuando la definición de congruencia que se dio anteriormente involucra la congruencia de TODOS los componentes de los triángulos (todos los LADOS y todos los ÁNGULOS).

Esta construcción revela que no es necesario conocer todos los componentes de dos triángulos para poder hablar de congruencia entre estas dos figuras (como lo sugiere su definición) y que es suficiente saber que si los lados correspondientes de dos triángulos son congruentes entonces los triángulos son congruentes. A este criterio que permite decidir si dos triángulos son congruentes se le conoce como el criterio LLL (haciendo alusión a que se conocen los 3 lados de los dos triángulos).

3 ¿Por qué al saber que los lados correspondientes de dos triángulos son congruentes se puede asegurar que sus ángulos también lo son? (Utiliza todo lo visto en el transcurso de la actividad). Argumenta como lo harías ante una persona muy inteligente para tratar de convencerla. Piensa que a esta persona solo la podrás convencer con argumentos y razonamientos claros y correctos

¿Qué tan seguro estas de que tu argumento puede convencer a la otra persona?

Muy seguro	
Seguro	
Muy poco seguro	
Totalmente inseguro	

¿a qué atribuyes ese nivel de seguridad?

Al criterio de congruencia LLL (en el que se conoce que los lados de los dos triángulos son congruentes) lo llamaremos criterio de congruencia 1.

11.3 ANEXO 3, CUESTIONARIO 3

Nombre ______________________________________ *edad* ______ *género* __________

Es importante que tengan en consideración que este taller NO influye en las calificaciones de las materias.

NOTA: Es necesario que realicen todas las actividades con pluma, no hagan tachones ni borrones dentro de las actividades. Nuestro interés es conocer su razonamiento ustedes como estudiantes, es por esto que les solicito que escriban cualquier idea que tengan, siéntanse libres de utilizar el papel para expresar lo más detallado posible el razonamiento que utilicen para la solución de los problemas que se plantean en el taller.

TRIÁNGULOS

En el taller anterior encontramos un **criterio** que permite hablar de congruencia entre dos triángulos, considerando sólo sus lados. En ese caso vimos que era suficiente conocer los tres lados de dos triángulos para poder determinar su congruencia. Eso significa que la congruencia de los tres lados de dos triángulos son **condiciones mínimas** que garantizan la congruencia de los dos triángulos. En lo que sigue se busca indagar otros posibles criterios de congruencia que garanticen que dos triángulos son congruentes, es decir, las condiciones mínimas que deben cumplir los componentes de dos triángulos para poder decir con seguridad que los dos triángulos son congruentes.

1. Dibuja dos triángulos ABC y DEF de tal manera que $\overline{AB} \cong \overline{DE}\ y\ \overline{BC} \cong \overline{EF}$ (es decir, que dos de sus lados sean congruentes).

1.1 ¿cuántos posibles triángulos puedo formar con las condiciones dadas en el punto 1?, justifica tu respuesta

Ninguno	
Uno	
Muchos	
Infinitos	

1.2 ¿Los dos triángulos que dibujaste en el punto 1 son congruentes? Si tu respuesta es SI, ¿qué te permite asegurar la congruencia?, si tu respuesta es NO, ¿Es posible dibujar dos triángulos ABC y DEF congruentes sabiendo que $\overline{AB} \cong \overline{DE}\ y\ \overline{BC} \cong \overline{EF}$ (que dos de sus lados son congruentes) y sin saber nada entre la relación de $\overline{CA}\ y\ \overline{DF}$?.

1.3. Esas dos condiciones (es decir, dos lados congruentes) ¿son suficientes para garantizar la congruencia de los dos triángulos?

1.4 ¿Qué otro u otros datos (mínimos) debemos conocer en relación a los dos triángulos para asegurar que el triángulo ABC es congruente con el triángulo DEF si no se sabe nada de la relación entre $\overline{CA}\ y\ \overline{DF}$?. Si te das cuenta, te estamos pidiendo que propongas otro criterio de congruencia para garantizar que dos triángulos son congruentes, es decir, que propongas las condiciones mínimas que deben cumplir los componentes de dos triángulos que garanticen que esos dos triángulos son congruentes. A este segundo criterio de congruencia le vamos a llamar Criterio de congruencia 2.

¿Qué tan seguro te encuentras de que tu respuesta es correcta?

Seguro	
Poco seguro	
Muy poco seguro	
Nada seguro	

¿Por qué consideras que tienes ese nivel de seguridad?

1.5 Comprueba el nuevo criterio de congruencia planteado en el punto 1.3 dibujando dos triángulos ABC y DEF con los nuevos datos que propusiste, ¿son congruentes los triángulos ABC y DEF?

1.6 ¿Es posible quitar alguno ó algunos de los datos extra que propusiste y seguir asegurando que el triángulo ABC y DEF son congruentes?, si tu respuesta es SI ¿cuántos y cuáles puedes quitar?, si tu respuesta es NO justifica ¿por qué al quitar alguno(s) elemento(s) de los que has propuesto ya no se asegura una congruencia? (apóyate en dibujos para justificar tu respuesta)

1.7. Después de lo hecho en las preguntas 1.4, 1.5 y 1.6, ¿estás seguro de que el criterio de congruencia que diste en 1.4 es correcto?

1.8 ¿Recuerdas al amigo muy inteligente al que le tuviste que argumentar en la sesión pasada? Pues vuelve a tratar de convencerlo con un argumento lo más convincente posible, de la respuesta que diste en 1.7. Es decir, ¿Cómo le argumentarías a una persona muy inteligente que este nuevo criterio asegura la congruencia entre ABC y DEF?.

¿Qué tan seguro te encuentras de que lo que explicaste en el punto 1,7 es correcto?

Seguro	
Poco seguro	
Muy poco seguro	
Nada seguro	

¿A qué atribuyes ese nivel de seguridad?

2. Dibuja dos triángulos ABC y DEF de tal manera que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ (es decir, que ambos comparten un lado congruente)

2.1 ¿cuántos posibles triángulos puedo formar con las condiciones dadas en el punto 2 (es decir, que comparten un lado congruente)?, justifica tu respuesta

Ninguno	
Uno	
Muchos	
Infinitos	

2.2 ¿Los triángulos que dibujaste en el punto 2 son congruentes? Si tu respuesta es SI, ¿qué te permite asegurar la congruencia?, si tu respuesta es NO, ¿Es posible dibujar dos triángulos ABC y DEF congruentes sabiendo que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y sin saber nada entre la relación de $\overline{CA}\ con\ \overline{DF}$ y $y\ \overline{BC}\ con\ \overline{EF}$?

2.3 ¿Qué otro u otros datos debemos conocer en relación a los triángulos para asegurar que el triángulo ABC es congruente con el triángulo DEF si se sabe que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ pero no se sabe inicialmente nada sobre la relación entre $\overline{CA}\ y\ \overline{DF}$ ni la de $\overline{BC}\ y\ \overline{EF}$? Si te das cuenta, te estamos pidiendo que propongas otro criterio de congruencia (distinto a los dos anteriores) para garantizar que dos triángulos son congruentes, es decir, que propongas las condiciones mínimas que deben cumplir los componentes de dos triángulos que garanticen que esos dos triángulos son congruentes. A este tercer criterio de congruencia le vamos a llamar Criterio de congruencia 3.

2.4 Comprueba el Criterio de congruencia 3 dibujando dos triángulos ABC y DEF con lo ó los nuevos datos que propusiste, ¿son congruentes los triángulos ABC y DEF?

2.5 ¿Es posible quitar alguno ó algunos de los datos extra que propusiste y poder seguir asegurando que los triángulos ABC y DEF son congruentes?, si tu respuesta es SI, ¿cuántos y cuáles puedes quitar?, si tu respuesta es NO justifica ¿por qué al quitar alguno elementos de los que has propuesto ya no se asegura una congruencia? (apóyate en dibujos para justificar tu respuesta)

2.6 Después de lo hecho en las preguntas 2.3, 2.4 y 2.5, ¿estás seguro de que el criterio de congruencia que diste en 1.4 es correcto?

2.7 Tú amigo muy inteligente al que le has argumentado anteriormente quiere que le expliques por qué este criterio se cumple. Convéncelo con un argumentos lo más convincentes posible, de la respuesta que diste en 2.6. Es decir, ¿Cómo le argumentarías a una persona muy inteligente que este nuevo criterio asegura la congruencia entre ABC y DEF?.

¿Qué tan seguro te encuentras de que lo que explicaste en el punto 1,7 es correcto?

Seguro	
Poco seguro	
Muy poco seguro	
Nada seguro	

¿A qué atribuyes ese nivel de seguridad?

.

3 Enuncia el Criterio de congruencia 2 y el Criterio de congruencia 3 que tú descubriste durante este ejercicio.

11.4 ANEXO 4, CUESTIONARIO 4

Polígonos

Nombre _______________________________________ edad ______ género __________

Es importante que tengan en consideración que este taller NO influye en las calificaciones de las materias.

NOTA: Es necesario que realicen todas las actividades con pluma, no hagan tachones ni borrones dentro de las actividades. Nuestro interés es conocer como razonan ustedes como estudiantes, es por esto que les solicito que escriban cualquier idea que tengan, siéntanse libres de utilizar el papel para expresar lo más detallado posible el razonamiento que utilicen para la solución de los problemas que se plantean en el taller.

Ya hemos observado algunos criterios de congruencia para los triángulos, en lo que sigue se busca extender algunos criterios a los cuadriláteros y otros polígonos, además de esto observar características de diferentes clasificaciones de polígonos

Trabajo individual

Responde en relación a lo que has observado en el transcurso de estos talleres

1. Supongamos que el triángulo ABC es equilátero y que el triángulo DEF también es equilátero. ¿Con esta información puedes concluir definitivamente que los dos son congruentes? Si tu respuesta es Si, argumenta justifica tu respuesta. Si tu respuesta es no muestra ejemplos en los que no se cumpla.

   1.1. ¿Toda pareja de triángulos equiláteros son congruentes? Si tu respuesta es Si, argumenta justifica tu respuesta. Si tu respuesta es no muestra ejemplos en los que no se cumpla

1.1 ¿todos los cuadrados son congruentes?, Si tu respuesta es SI argumenta el por qué, dados dos cuadrados cualquiera, todos sus lados y todos sus ángulos son congruentes. Si tu respuesta es no muestra ejemplos en los que no se cumpla

1.2 ¿todos los rectángulos son congruentes?, Si tu respuesta es SI argumenta el por qué, dados dos rectángulos cualquiera, todos sus lados y todos sus ángulos son congruentes. Si tu respuesta es no muestra ejemplos en los que no se cumpla

1.3 Sea un polígono (figura de cinco lados) ABCDE y otro polígono FGHIJ, tal que sus ángulos correspondientes son congruentes. ¿Se puede decir que los dos polígonos son congruentes? Si tu respuesta es SI argumenta por qué. Si tu respuesta es no muestra ejemplos en los que no se cumpla

2 ¿Cuáles son las condiciones mínimas que deben tener dos triángulos equiláteros para poder garantizar que son congruentes (revisa tu respuesta 1.1.)?

Justifica tu respuesta

¿Qué tan seguro te encuentras de que tu respuesta es correcta?

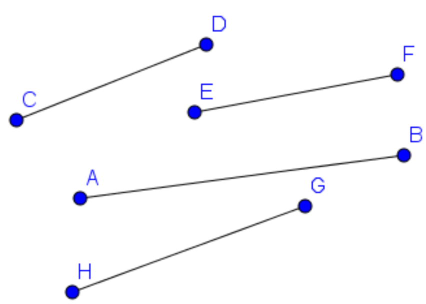
Seguro	
Poco seguro	
Muy poco seguro	
Nada seguro	

¿Por qué crees que tienes este nivel de seguridad?

2.1 ¿Cuáles son las condiciones mínimas que deben tener dos cuadrados para ser congruentes (revisa tu respuesta 1.2)?

2.2 ¿Cuáles son las condiciones mínimas que deben tener dos rectángulos para ser congruentes (revisa tu respuesta 1.3)?

3. Dibuja un cuadrilátero cuyos lados sean las medidas de los siguientes segmentos



3.1 ¿cuántos cuadriláteros diferentes puedes construir a partir de esos segmentos?, justifica ampliamente tu respuesta, como si lo hicieras ante tu amigo muy inteligente, con argumentos sólidos y bien fundamentados.

Ninguno	
Uno	
Muchos	
Infinitos	

3.2 En el caso de las figuras triangulares el criterio LLL nos permitía asegurar la congruencia de dos triángulos. Considera ahora el cuadrilátero ABCD y el cuadrilátero EFGH, y supón que sus lados correspondientes son congruentes, es decir $AB \cong EF$,$BC \cong FG$, $CD \cong GH$ y $DA \cong HE$. Será que esta condición es suficiente para garantizar que los dos cuadriláteros son congruentes? Es decir ¿en este caso vale el criterio LLLL, como criterio para garantizar la congruencia de dos cuadriláteros? Si tu respuesta es sí justifica ampliamente utilizando dibujos y las definiciones dadas para la congruencia de cuadriláteros y de superposición. Si tu respuesta es no dibuja dos cuadriláteros que cumplan las condiciones dadas y no sean congruentes.

¿Qué tan seguro te encuentras de que tu respuesta es correcta?

Seguro	
Poco seguro	
Muy poco seguro	
Nada seguro	

¿A qué atribuyes ese nivel de seguridad?

Trabajo en parejas

4. Explora con tu compañero un posible criterio de congruencia para cuadriláteros.

4.2. Supongan que se une a su equipo un amigo imaginario que es muy listo, que sabe muchas matemáticas y que es muy difícil de convencer. Traten de encontrar entre los dos los argumentos, lo más claros y fundamentos que puedan, para convencer a ese amigo imaginario que el criterio de congruencia para cuadriláteros que han propuesto, realmente funciona y es válido.

4.3. ¿pueden encontrar algún otro criterio de congruencia de cuadriláteros, distinto al anterior?

4.1. Construyan entre los dos un argumento que deje ver que ese criterio de congruencia para cuadriláteros, realmente funciona y es válido.

5. Explora ahora con tu compañero un posible criterio de congruencia para dos pentágonos. Anoten ese criterio y verifíquenlo.

5.1. Supongan que se une a su equipo un amigo que es muy listo, que sabe muchas matemáticas y que es muy difícil de convencer. Considerando todo lo dicho hasta ahora, traten de encontrar entre los dos los argumentos, lo más claros y fundamentos que puedan, para tratar de convencer a ese amigo que el criterio de congruencia para cuadriláteros que han propuesto, realmente funciona y es válido.

5.2. ¿Pueden encontrar algún otro criterio de congruencia de cuadriláteros, distinto al anterior? Argumenten, como en 5.1, su respuesta.

Trabajo individual

6. Escribe el primer criterio de congruencia para cuadriláteros que descubriste con tu compañero.

6.1. Justifica por qué es válido.

6.2. ¿Qué tan convencido te encuentras de que tu respuesta es correcta?

Totalmente seguro	
seguro	
Muy poco seguro	
Nada seguro	

6.3. ¿A qué atribuyes tu nivel de seguridad? Explica lo más detalladamente posible.

6.4. Escribe el segundo criterio de congruencia para cuadriláteros que descubriste con tu compañero (si es que lo encontraste).

6.5. Justifica por qué es válido.

6.6. ¿Qué tan convencido te encuentras de que tu respuesta es correcta?

Totalmente seguro	
seguro	
Muy poco seguro	
Nada seguro	

6.7. ¿A qué atribuyes tu nivel de seguridad? Explica lo más detalladamente posible.

7. Escribe el primer criterio de congruencia para pentágonos que descubriste con tu compañero.

7.1. Justifica por qué es válido.

7.2. ¿Qué tan convencido te encuentras de que tu respuesta es correcta?

Totalmente seguro	
seguro	
Muy poco seguro	
Nada seguro	

7.3. ¿A qué atribuyes tu nivel de seguridad? Explica lo más detalladamente posible.

7.4. Escribe el segundo criterio de congruencia para pentágonos que descubriste con tu compañero (si es que lo encontraste).

7.5. Justifica por qué es válido.

7.6. ¿Qué tan convencido te encuentras de que tu respuesta es correcta?

Totalmente seguro	
seguro	
Muy poco seguro	
Nada seguro	

7.7. ¿A qué atribuyes tu nivel de seguridad? Explica lo más detalladamente posible.

11.5 ANEXO 5, SÍNTESIS DE LA CLASIFICACIÓN DE LAS RESPUESTAS DEL CUESTIONARIO 3 A LA LUZ DE LAS CATEGORÍAS

En la tabla 15 se presenta la relación entre las respuestas dadas por los 11 estudiantes en el cuestionario 3 y las categorías construidas en este trabajo de investigación. A cada ítem se le asignó uno de los niveles que se proponen en las categorías (0.1, 0.2, 1.1, 1.2, 2.1, 2.2 o 2.3); en el caos en que la respuesta no se considerara clara o el alumno hubiera dejado en blanco la respuesta se escribió NA/NR.

Es importante aclarar que en la tabla 15 no se relacionan las preguntas que no aportaban para la construcción de las categorías.

Tabla 15.

Clasificación de respuestas dadas por los estudiantes en el cuestionario 3 a la luz de las categorías

Ítem	*Al 1*	*Al 2*	*Al 3*	*Al 4*	*Al 5*	*Al 6*	*Al 7*	*Al 8*	*Al 9*	*Al 10*	*Al 11*
1	0.2	0.1	0.1	1.2	0.2	2.1	2.2	1.2	0.2	0.1	2.2
1.1	NR/NA	0.1	NR/NA	NR/NA	NR/NA	2.1	2.3	0.1	0.2	0.1	2.2
1.2	0.2	1.2	NR/NA	1.2	0.2	2.1	2.3	2.2	0.2	2.1	2.1
1.3	0.2	NR/NA	1.1	1.2	1.2	2.1	2.3	2.2	NR/NA	2.1	2.2
1.4	1.1	1.2	2.1	0.2	0.2	2.1	2.2	2.2	1.1	2.1	2.1
1.5	0.2	NR/NA	0.2	NR/NA	0.2	2.1	2.2	2.2	NR/NA	2.1	NR/NA
1.6	0.2	2.1	0.2	0.2	0.2	2.1	2.2	2.3	1.1	2.1	2.2
1.8	1.1	1.2	2.1	0.2	0.2	NR/NA	2.2	2.1	NR/NA	NR/NA	2.1
2	0.1	NR/NA	NR/NA	NR/NA	0.2	2.2	2.2	2.2	NR/NA	NR/NA	NR/NA
2.1	1.1	2.2	2.2	NR/NA	NR/NA	2.3	2.3	2.3	2.3	2.2	2.3
2.2	1.1	NR/NA	2.2	2.2	0.2	2.1	2.3	2.3	NR/NA	2.2	2.2
2.3	1.1	1.2	0.1	0.1	0.2	2.1	2.2	2.1	NR/NA	NR/NA	2.1
2.4	1.1	NR/NA	NR/NA	NR/NA	0.2	NR/NA	2.2	2.1	NR/NA	2.2	NR/NA
2.5	0.2	2.2	1.2	0.2	0.2	NR/NA	2.3	2.1	1.1	NR/NA	2.2
2.6	NR/NA	NR/NA	2.1	NR/NA	NR/NA	NR/NA	NR/NA	2.1	NR/NA	0.2	NR/NA
2.7	0.2	2.2	1.1	0.1	0.2	2.1	2.2	2.1	NR/NA	0.2	2.1

3	1.1	2.2	2.1	NR/NA	0.2	2.1	2.2	2.1	NR/NA	2.1	2.1

11.6 ANEXO 6, SÍNTESIS DE LA CLASIFICACIÓN DE LAS RESPUESTAS DEL CUESTIONARIO 4 A LA LUZ DE LAS CATEGORÍAS

De manera análoga a la tabla 15, en la tabla 16 se presenta la relación de las respuestas de los alumnos para el cuestionario 4 y las categorías que en este documento se exponen. De igual manera en la tabla 16 no se consideran aquellas preguntas que no se utilizaron para la construcción de las categorías.

Tabla 16.
Clasificación de las respuestas dadas por los estudiantes en el cuestionario 4 a la luz de las categorías

Ítem	*Al 1*	*Al 2*	*Al 3*	*Al 4*	*Al 5*	*Al 6*	*Al 7*	*Al 8*	*Al 9*	*Al 10*	*Al 11*
1	1.1	2.3	2.1	2.3	2.1	2.2	2.2	2.3	2.2	2.1	2.3
1	2.1	2.3	2.1	2.3	2.1	2.3	2.3	2.3	2.3	2.1	2.3
1.1	2.1	2.3	2.1	2.1	2.1	2.3	2.3	2.3	2.3	2.3	2.3
1.2	2.2	2.3	2.1	2.3	1.1	2.3	2.3	2.3	2.2	2.1	2.3
1.3	2.2	2.1	2.3	2.3	2.1	2.3	2.3	2.3	2.3	2.2	2.3
2	1.1	2.1	1.2	1.2	1.2	1.1	2.1	2.1	2.3	2.3	2.3
2.1	1.1	1.2	2.1	1.2	1.2	1.1	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1
2.2	1.1	1.2	2.2	1.2	1.2	1.1	2.1	2.3	2.3	2.1	2.1
3.2	1.1	2.1	2.1	1.2	2.1	2.1	2.1	2.3	2.3	2.1	2.1
6	1.2	1.2	2.1	0.2	2.1	2.1	2.1	2.3	1.2	2.1	2.3
6.1	1.1	1.2	2.1	0.2	2.1	2.1	2.1	2.3	1.2	2.1	2.3
6.4	1.1	0.2	2.1	0.2	2.1	2.1	2.1	2.3	0.2	2.1	2.1
6.5	1.1	0.2	2.1	0.2	1.1	2.1	2.1	2.3	0.2	1.1	2.1
7	1.1	1.2	2.1	0.2	2.1	2.1	2.1	2.3	0.2	2.1	2.3
7.1	1.1	2.1	2.1	0.2	2.1	2.1	2.1	2.3	0.2	2.1	2.3
7.4	NR/NA	0.2	NR/NA	NR/NA	2.1	NR/NA	NR/NA	2.3	1.2	2.1	2.3
7.5	NR/NA	0.2	NR/NA	NR/NA	1.1	NR/NA	NR/NA	2.3	1.2	2.1	2.3