Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

NOMBRE DE LA TESIS

RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO FRENTE A SITUACIONES CON DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Tesis que presenta

Karen Pérez Ávila

para obtener el Grado de

Maestra en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa

Director de la Tesis: Dr. Ernesto A. Sánchez Sánchez

Ciudad de México, Noviembre, 2016

Agradecimientos

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por la beca (número de becario 631746) y todos los apoyos que me fueron otorgados para realizar mis estudios de maestría

Agradecimientos

A mis padres, María Eugenia y Héctor, por ser el apoyo más importante que tengo en la vida, así como por toda su comprensión y amor que me han brindado.

A mis hermanos, Héctor y Alef, por la paciencia que me tienen y los ratos alegres que compartimos.

A mi demás familia, en especial a mi prima Claudia por su pequeña, pero importante ayuda en mi tesis.

A Alfredo por estar motivándome constantemente, por entenderme y por el amor que me ha brindado desde el momento en que nos conocimos

A mis compañeros de trabajo del CCH que me motivaron a estudiar la maestría en Matemática Educativa

A mis compañeros de maestría, en especial a mis amigos Ulises y Heira, que estuvieron siempre presentes en esta etapa de mi vida, por las tareas que realizamos juntos y por la confianza que depositaron en mí.

Al Dr Ernesto A. Sánchez Sánchez por las asesorías, apoyo y sugerencias para la presente investigación.

A mi tío, el Dr Roberto Ávila Antuna, por la revisión y sugerencias durante el desarrollo de esta investigación

Al Dr François Charles Bertrand Pluvinage por ser mi lector y sinodal de tesis.

Dedico este trabajo a:

Mis padres y mis hermanos

Contenido

Resumen

En este estudio se analiza y documenta el razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato a través de sus respuestas a preguntas relacionadas a dos situaciones que involucran el azar. El problema de la presente investigación es explorar la manera en que razonan los estudiantes frente a tareas que involucran la distribución binomial sin y con ayuda de la tecnología, en particular, cómo vinculan el enfoque clásico y el frecuencial en dichas tareas. 1) ¿Cómo expresan los estudiantes la aleatoriedad y la variabilidad en sus razonamientos cuando se enfrentan a situaciones simples de probabilidad binomial? 2) ¿Cómo relacionan los estudiantes los enfoques clásico y frecuencial de la probabilidad antes y después de actividades de simulación? 3) ¿Cómo influyen las actividades de simulación con Fathom propuestas en este trabajo en los razonamientos reflejados en las respuestas de los estudiantes a los problemas formulados?

Para responder estas preguntas se aplicaron dos tareas. En la primera situación debían predecir el comportamiento de sorteos de tipo binomial (n=2, p=1/2), asignar las probabilidades de los eventos, contar los elementos del espacio muestra y la variable aleatoria; la segunda situación se basó en una serie de preguntas, sobre una urna con 5 pelotas rojas, 2 amarillas y 3 verdes, referidas una distribución binomial (n=10, p=1/2) en la que debían crear listas de los posibles resultados. Ambas situaciones con el propósito de observar sí los estudiantes perciben, consideran y vinculan aspectos de la probabilidad como son: la aleatoriedad, la variabilidad y la distribución de los resultados.

La recolección de datos para este estudio se llevó a cabo con trece estudiantes de cuarto semestre de bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), plantel Vallejo. Las respuestas se organizaron y categorizaron. El análisis muestra que la mayoría de los estudiantes perciben características de la distribución binomial, como es el tener mayor ocurrencia en los valores centrales que en los extremos y una débil apreciación de la variabilidad de los datos, pero sin llegar a vincular las probabilidades de los resultados.

Abstract

This study is to analyze and document the probabilistic reasoning of high school students through their answers to questions related to two situations that involve chance. The purpose of this investigation is to explore the way in which the students reason in front of tasks that involve binomial distribution, with or without aid of the technology, particularly, how they link the classic and the frequency approach in these tasks. 1) How do students express the randomness and variability in their reasoning when faced to simple binomial probability situations?, 2) How do students relate the classical and frequency probability approaches, before and after simulation activities?, 3) How do the simulation activities influence with Fathom proposals in this work in the reasoning reflected in the students' answers to the formulated problems?

Two tasks were applied to answer these questions. In the first situation, they should predict the behavior of binominal draws (n=2, p= 1/2), to assign the probabilities of the events, count the elements of the sample space and the random variable; the second situation is based on a series of questions on a ballot box with 5 red, 2 yellow and 3 green balls, referring to binominal distribution (n=10, p=1/2) in which they should listed the possible results.

The gathering of data for this study was based in a total population of thirteen students from fourth semester of high school of Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), campus Vallejo. Responses were organized and categorized. The analysis shows that most students perceive characteristics of the binomial distribution, such as having grater occurrence in the central values than in the extremes and a weak appreciation of the variability of the data, but without linking the probabilities of the results.

Capítulo 1

Introducción y planteamiento del problema

1.1 La importancia de aprender probabilidad en la sociedad actual

El alcance de la probabilidad y su necesidad de ser estudiada se ha incrementado cada vez más. Existen varias razones de lo anterior, como es el requerimiento de procedimientos cuantitativos para analizar los datos de los experimentos en todas las ciencias experimentales, en los negocios, en la vida social y en la escuela. Por otro lado, los avances tecnológicos han ayudado a incrementar enormemente la capacidad de manejar y procesar información y con ello la necesidad de que la gente se prepare más para la comprensión global de los procesos y no tanto en el cálculo o en procesamientos específicos. Para alcanzar dicha comprensión los conceptos de azar, variabilidad e incertidumbre son fundamentales.

Por otro lado, el lenguaje de la vida cotidiana, con el que se expresan día a día los estudiantes, refleja razonamientos probabilísticos, por ejemplo: el adverbio “probablemente” o las frases “es probable que”, “puede ser”, “yo creo”, etc., las cuales involucran el sentimiento de incertidumbre y azar ante situaciones fortuitas. Estas frases son intentos de inferencias que se basan en los conocimientos o creencias de experiencias previas de los individuos para generar un juicio. Para volverse más eficaz, este lenguaje de los estudiantes debe inscribirse en un sistema de ideas que le den coherencia y que les permita distinguir entre juicios espurios y juicios razonablemente sustentados. La enseñanza de la probabilidad debe crear las condiciones para que el estudiante transite de un uso del sentido común de su lenguaje probabilístico a un uso racional mediante la solución de tareas probabilísticas, la discusión de las soluciones y la asimilación de la teoría.

1.2 Dificultades en el aprendizaje de la probabilidad

Es conocido que existen diversas dificultades para aprender probabilidad en los estudiantes de todos los niveles. Una de estas dificultades son los sesgos cognitivos, es decir, generalizaciones de reglas heurísticas útiles en ciertos contextos a situaciones donde no funcionan. En los estándares curriculares (NCTM, 2000) se menciona que para corregir las concepciones erróneas es útil que los estudiantes hagan predicciones y las comparen con resultados reales, pues el estudio de definiciones y propiedades teóricas no siempre son suficientes para superarlos. Por otra parte, Garfield y Alhgren, (1988) explicaron que las personas mantienen un conjunto de ideas que contradicen los resultados del cálculo y la teoría, por lo que es necesario que en la enseñanza se tengan en cuenta y se procure su superación.

Las experiencias y los conocimientos previos con los que llegan los estudiantes al aula influyen de manera importante en su aprendizaje. Varias referencias ayudan a entender los tipos de concepciones, sesgos y creencias sobre la probabilidad que los estudiantes suelen traer al aula (Shaugnessy, 1993; Borovcnik y Peard, 1996; Batanero y Sánchez, 2005; Fischbein, Nello y Marino, 1991). Nosotros creemos que a partir de las ideas proporcionadas por la investigación se deben crear instrumentos de diagnóstico y evaluación para comprender la manera en que razonan los estudiantes frente a problemas de probabilidad.

1.3 Los enfoques de probabilidad

En los temas de probabilidad de los diferentes programas de matemáticas a nivel secundaria y bachillerato proponen que los estudiantes aprendan el enfoque clásico y el frecuencial de probabilidad (NCTM, 2000). En este sentido Jones, Langrall y Mooney (2007) comentan que:

> Aunque hay una considerable investigación en todos los niveles sobre las concepciones de los estudiantes sobre la probabilidad teórica, existe poca investigación sobre el pensamiento de los estudiantes acerca de la probabilidad experimental y aún menos sobre la comprensión de las conexiones entre la

> probabilidad teórica y la probabilidad experimental [...]. Creemos que hay una necesidad de explorar el pensamiento de los estudiantes acerca de las perspectivas clásica y frecuencial de la probabilidad a lo largo de todos los niveles de edad, desde niños hasta el bachillerato" (Jones et. al. 2007, p. 946)

En los últimos años la tecnología se ha extendido de modo que los estudiantes pueden contar con este recurso, se puede utilizar para facilitar la comprensión del enfoque frecuencial de probabilidad y de su relación con la probabilidad clásica. Sthol y Tarr (2002) son de los primeros que estudiaron las relaciones entre ambos enfoques de probabilidad y es muy significativo que su trabajo se relacione con el uso de software para realizar simulaciones. Su investigación consistió en el análisis de las interacciones de dos estudiantes de 6º grado, quienes utilizaron el software *Probability Explorer* para hacer simulaciones. Este mismo grupo extendió sus investigaciones hacia estudiantes de secundaria (Stohl, Rider y Tarr, 2004). Sin embargo, las distribuciones que han utilizaron estos autores se relacionan con la distribución uniforme. Nosotros creemos que con estudiantes de bachillerato sería viable preguntarse por la relación entre probabilidad teórica y el enfoque frecuencial, pero ahora teniendo como distribución de referencia una distribución binomial.

1.4 La ubicación de la probabilidad y su enfoque en el currículo del CCH

Dentro del currículo del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) la materia de estadística y probabilidad en el Plan de Estudios se ofrece en los últimos dos semestres con carácter optativo, su propósito es que los alumnos adquieran conocimientos introductorios y propedéuticos acerca de los métodos estadísticos y probabilísticos, así como sus aplicaciones en diversos campos de conocimiento. Los temas principales de la materia de probabilidad en el CCH son: evento muestra; cálculo de probabilidades; probabilidades de eventos compuestos en el que se incluyen la propiedad aditiva y de negación, probabilidad condicional e independencia; variable aleatoria; las distribuciones de probabilidad; distribuciones muestrales e inferencias estadísticas.

Como se refleja en dicho contenido, el enfoque está sesgado hacia una construcción formal de la probabilidad en el que se priorizan las definiciones y procedimientos matemáticos de la probabilidad, sin un trabajo explícito en la enseñanza de las grandes ideas de la probabilidad (Gal, 2005) como son la *aleatoriedad*, la *variabilidad*, la *independencia* y la relación *predicción/incertidumbre*. Por ejemplo, no se prescribe trabajar la relación entre el enfoque clásico y frecuencias ni la Ley de los Grandes Números. Estos tópicos pueden ser tratados en clase con mayor eficiencia que antes gracias a los recursos que proporciona la tecnología digital.

1.5 El problema de investigación

El problema de la presente investigación es explorar la manera en que razonan los estudiantes frente a tareas que involucran la distribución binomial sin y con ayuda de la tecnología, en particular, cómo vinculan los enfoques clásico y frecuencial, en dichas tareas. En esta vinculación, son cruciales las grandes ideas (Gal, 2005) de probabilidad: aleatoriedad, variación, independencia y predicción/incertidumbre.

Batanero y Sánchez (2005) expresaron que el entendimiento de los procesos y conceptos de la probabilidad se pueden desarrollar con la ayuda de simulaciones, pues permite a los estudiantes explorar la variabilidad, produciendo muestras de una población conocida y generando la distribución muestral. Es imprescindible un modelo de enseñanza/aprendizaje que conjunte las nuevas herramientas tecnologías para realizar simulaciones en un ambiente de resolución de problemas que permita desarrollar conceptos como la aleatoriedad, la variabilidad, la dualidad predicción/incertidumbre, la distribución empleando Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA) diseñadas para construir un razonamiento y pensamiento probabilístico. En consecuencia, las preguntas planteadas en la presente investigación son:

1. ¿Cómo expresan los estudiantes la aleatoriedad y la variabilidad en sus razonamientos cuando se enfrentan a situaciones simples de probabilidad binomial?
2. ¿Cómo relacionan los estudiantes los enfoques clásico y frecuencial de la probabilidad antes y después de actividades de simulación?
3. ¿Cómo influyen las actividades de simulación con Fathom propuestas en este trabajo en los razonamientos reflejados en las respuestas de los estudiantes a los problemas formulados?

Capítulo 2

Antecedentes

2.1 Introducción

En este apartado, que corresponde a los antecedentes, se exponen algunas de las investigaciones relacionadas con el trabajo, como son la aleatoriedad, la variabilidad, la independencia, el espacio muestra, la variable aleatoria, la distribución y los distintos enfoques de probabilidad, en especial el enfoque clásico y el enfoque frecuencial.

Shaughnessy en 1997 menciona que la enseñanza de la probabilidad y la estadística no debe ir dirigida sólo a la compresión de algunas ideas matemáticas y probabilísticas o a sus aplicaciones, también es central hacer frente a los problemas psicológicos relacionados con la materia. Por ello, también se hace referencia sobre los trabajos de las heurísticas y sesgos que existen en la probabilidad y la estadística.

En cada uno de las recapitulaciones de las investigaciones se muestran algunos de los problemas y actividades planteados en ellos para tener un mayor panorama de lo que se ha estado trabajando en los últimos años en la investigación de probabilidad y estadística educativa.

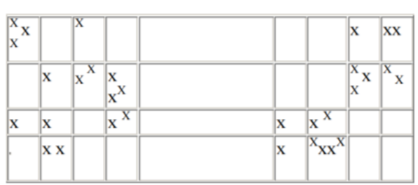
2.2 Estudios sobre aleatoriedad

El trabajo pionero en el razonamiento probabilístico se debió a Piaget e Inhelder (1951), que describe los niveles (o etapas) en la comprensión infantil de azar y probabilidad (Batanero, 2015). Piaget e Inhelder diseñaron un experimento en el que caían gotas de agua sobre unos mosaicos. El experimento ha sido retomado por algunos autores para investigar la idea de azar y aleatoriedad de las personas, por ejemplo: en Serrano, Batanero y Cañizares (1999) se analizaron las nociones de aleatoriedad de 147 alumnos de 14 años que no habían estudiado probabilidad y 130 alumnos de 17 años que habían tenido un curso de probabilidad con un enfoque clásico, mediante un cuestionario escrito. Las actividades estaban enfocadas al reconocimiento y generación de sucesiones aleatorias de puntos en el plano. Para que los alumnos comprendieran mejor las actividades propuestas se incluyó un ejemplo inicial (Figura 1), con el que se pretende simular el resultado de una sucesión de experimentos aleatorios. En cada cuadro se tiene 16 casillas equiprobables, al repetir *n* veces el experimento y estudiar el número de cruces en cada casilla se obtiene la distribución binomial con *p=1/16*.

Ejemplo: Pablo juega a un juego en el que se dispone de 16 fichas numeradas del 1 al 16. Pone las fichas en una bolsa vacía. Después de mover la bolsa con fuerza para mezclar las fichas, elige una ficha con los ojos cerrados. Es la ficha número 7. Pablo pone una cruz en la casilla 7 y devuelve la ficha a la bolsa, antes de continuar el juego.

1	2	3	4
5	6	7x	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Ítems 1 a 4. Se pidió a algunos niños que jugaran al juego de Pablo, eligiendo cada uno de ellos 16 veces una ficha de la bolsa con los ojos cerrados y devolviendo la ficha a la bolsa después de cada extracción. Los resultados obtenidos se indican a continuación. ¿Piensas que los niños jugaron correctamente o alguno de ellos hizo trampa en el juego?



Jaime María

Miguel Luis

1. ¿Hizo trampas Jaime? ¿Por qué? ___

2. Hizo trampas María? ¿Por qué? ___

3. ¿Hizo trampas Miguel? ¿Por qué? ___

4. ¿Hizo trampas Luis? ¿Por qué? ___

Figura 1

Basándose en el problema anterior, los investigadores agruparon los argumentos de los estudiantes para responder a cada pregunta en siete categorías diferentes.

1. Hay un patrón regular en la distribución de puntos
2. La distribución sigue un patrón irregular
3. Las frecuencias de los distintos resultados son parecidas
4. Las frecuencias de los distintos resultados son diferentes
5. Hay una celda con demasiados puntos
6. No hay celdas con varios puntos o las celdas tienen muy pocos puntos
7. Impredecibilidad de los resultados de los experimentos aleatorios

Se observó en Serrano et. al. (1999) que la proporción de los alumnos que considera no aleatoria la distribución crece cuando aumenta la diferencia entre las frecuencias esperadas y las observadas. Para sustentar que la distribución es aleatoria los argumentos más empleados son la imprevisibilidad y el uso de patrón irregular, lo que apunta a unas concepciones correctas por parte de los alumnos, excepto en la argumentación de que si hay muchos puntos en la misma celda la distribución no es aleatoria.

Como se dice más adelante, en el marco conceptual, el concepto de aleatoriedad es escurridizo y difícil de definir. Serrano et. al. (1999) afirmaron que existe una contradicción que rompe nuestras intuiciones con el concepto de aleatoriedad y que podría explicar las dificultades para definirlo y entenderlo. Por un lado, indica que cualquier resultado posible podría ocurrir y por el otro si aparece un patrón en su secuencia no se acepta que sea un resultado aleatorio.

La enseñanza debiera comenzar mostrando al alumno ejemplos sencillos de fenómenos aleatorios con sucesos equiprobables, tales como juegos con monedas, dados o bolas en urnas (Serrano et. al., 1999)

2.3 Estudios sobre variabilidad y variación.

Pfannkuch, en 1997, dijo que el entendimiento del concepto de variación debe ser creado a través de la unión de las herramientas estadísticas, como son los gráficos, y el contexto de la situación, formando una triangulación epistemológica de estos tres aspectos (Figura 2) en el que se deben de tratar varias herramientas y diversos contextos en un periodo prolongado.

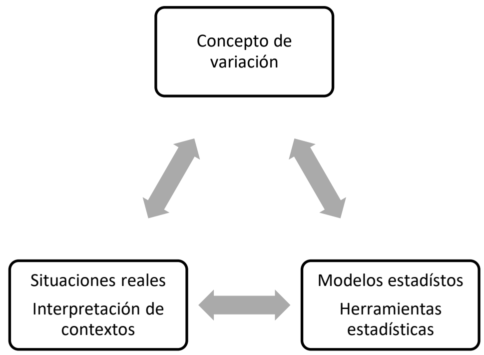


Figura 2. Triángulo de la epistemología (Pfannkuch, 1997)

Además, Pfannkuch indica que la variación a través de juegos de azar por sí sola no va a dar a los estudiantes una comprensión suficiente de la variabilidad (Pfannkuch, 1997), sin embargo, este estudio sirve para un primer acercamiento en estudiantes que nunca se habían enfrentado a tareas de este tipo, con problemas en contextos matemáticos donde no se toman en cuenta aspectos centrales de la estadística como la aleatoriedad, la variabilidad ni la conexión entre predicción e incertidumbre. Para que el alumno tenga un aprendizaje significativo se necesita de contextos reales y más diversificados.

El pensamiento estadístico se basa en la interacción entre la situación real y el modelo estadístico (Pfannkuch, 1997), es decir que la enseñanza no debe orientarse sólo en el aspecto teórico sin recurrir a otros enfoques, debe existir una conexión entre lo experimental y lo teórico utilizando las herramientas tecnológicas y los diferentes registros de representaciones.

Por su parte, Rob Torok y Jane Watson, en el 2000, afirmaron que la variabilidad es un tema central en la estadística y probabilidad opacado y desplazado muchas veces del currículo y en las investigaciones, pero que debe ser estudiado por ser un elemento esencial para el razonamiento probabilístico.

En su estudio Rob Torok y Jane Watson (2000) retoman algunas de las preguntas del trabajo de Shaughnessy et al. (1999) el cual investigan las concepciones de los estudiantes sobre la variación, en lugar de centrar la atención únicamente en los resultados que arroja un enfoque teórico de la probabilidad. Torok y Watson aplicaron tres cuestionarios distintos: el primero sobre una situación aislada de muestreo aleatorio, mientras que los otros dos cuestionarios eran situaciones sobre aspectos del mundo real (Figura 3). Además de la aplicación de los cuestionarios se apoyaron en entrevistas realizadas a los estudiantes para tener más datos sobre como razonaban ante los problemas propuestos.

Pregunta 1. Supongamos que tenemos una urna con 100 pelotas en su interior, de las cuales 50 son de color rojo, 20 de color amarillo y 30 de color verde. Se sacan 10 pelotas con reemplazo.

A) Supongamos que extraes 10 pelotas con reemplazo.
   a. ¿Cuántas pelotas rojas esperas conseguir? Si repites este proceso varias veces ¿Esperarías conseguir siempre la misma cantidad de pelotas rojas? Justifica tu respuesta.
   b. ¿Qué número de pelotas rojas no esperarías conseguir? Justifica tu respuesta.

B) Se repite seis veces este mismo experimento.
   a. ¿Cómo cree que sea la lista que se produzca al contar el número de pelotas rojas? Justifica tu respuesta

C) Observa las siguientes posibilidades que algunos estudiantes escribieron sobre el experimento

(a) 5,9,7,6,8,7 (b) 3,7,5,8,5,4 (c)5,5,5,5,5,5

(d) 2,3,4,3,4,4 (e) 7,7,7,7,7,7 (f)3,0,9,2,8,5

(g) 10, 10, 10, 10, 10, 10

   a. ¿Cuál de las siguientes listas crees que describe lo más probable que podría suceder? Justifica tu respuesta.
   b. ¿Cuál de las siguientes listas crees que describe lo menos probable que podría suceder? Justifica tu respuesta.

D) Suponiendo que 6 estudiantes realizaron el experimento.
   a. ¿Cuál crees que sean los números más probables que podrían salir desde el menor al mayor? Justifica tu respuesta

Pregunta 3. Algunos estudiantes observaron las noticias cada noche durante el año y registraron la temperatura máxima diaria en Hobart. Ellos encontraron que la temperatura máxima promedio en Hobart era de 17° C.

i. ¿Qué nos dice esto acerca de la temperatura en Hobart?
ii. ¿Crees que todos los días tenían un máximo de 17 ° C?

A) ¿Crees que la temperatura máxima en Hobart se pueda repetir en 6 días diferentes durante año? B) Para todo el año ¿cuál crees que sea la temperatura máxima y mínima diaria para Hobart? C) Para el mes de enero ¿cuál crees que sea la temperatura máxima y mínima diaria para Hobart? D) Para el mes de julio ¿cuál crees que sea la temperatura máxima y mínima diaria para Hobart?
Pregunta 4. Algunos estudiantes midieron las alturas de todo el mundo en la escuela primaria de grado 3 a 6. Ellos encontraron que la altura media de los estudiantes en su escuela de grado 3 a 6 era 130cm i. ¿Qué nos dice esto acerca de las alturas de los estudiantes? ii. ¿Cree que todos los estudiantes median 1?30 cm de altura?

Figura 3

En su estudio se observó cómo los estudiantes enfrentan tareas donde es necesario expresar la variabilidad y la incertidumbre a través de intervalos en lugar de un valor único y fijo. Además, se les brindó a los estudiantes la oportunidad de responder nuevamente las preguntas después de realizar el experimento para poder analizar los cambios que se presentaron en las respuestas de los estudiantes.

Torok y Watson (2000) encontraron que los estudiantes más grandes tendían a responder con predicciones individuales dando el resultado teórico, mientras que los estudiantes de edades intermedias proporcionaban rangos. En las preguntas posteriores, donde se les preguntaba por un conjunto de resultados, se observó que los estudiantes más grandes utilizaban sus predicciones individuales como un valor centran en torno al cual se agrupaban los otros valores mientras que los estudiantes más jóvenes daban un resultado individual en su lista.

Los resultados de la investigación de Torok y Watson remarcan el potencial que se tendría con los estudiantes al incorporar desde los primeros niveles escolares el concepto de variación en la enseñanza sin tener que usar tecnicismos como el de “desviación estándar”, es decir que se podría llevar al aula una exploración del concepto de variabilidad antes de la introducción de la desviación estándar.

El segundo cuestionario del presente estudio retoma algunas de las ideas y preguntas de la investigación de Torok y Watson.

En Sánchez y Trujillo (2008) reportaron los resultados de algunas de las preguntas aplicadas a estudiantes de Secundaria, Bachillerato y Universidad (Figura 4), donde se exploran las nociones de variabilidad estadística en situaciones de azar para contestar a las preguntas: ¿Se puede suponer razonablemente una trayectoria en el pensamiento de los estudiantes sobre la variabilidad que se caracteriza al comienzo por un predominio de la idea de aleatoriedad, después por el de la estructura, hasta lograr una integración de ambas en una noción de variación estadística? ¿Qué consecuencias se derivan de un modelo como el anterior? En el estudio se distinguen tres conceptos relacionados con la noción de variabilidad, los cuales son aleatoriedad, estructura y variación.

Imagina que ahora lanzas 60 veces el dado. Llena la siguiente tabla escribiendo cuántas veces crees que saldrá cada número.

Caras del dado	Num. de veces
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Total	60

¿Por qué consideras este resultado?

Se tiene una urna con 3 bolas, cada una tiene una letra (A, B y C). Juan saca una bola sin ver, anota en una tabla la letra que corresponde a la bola y la regresa a la urna. Juan repite el experimento 30 veces. ¿Cuál de las siguientes tablas crees que sea la que obtuvo Juan? Marca la tabla que consideres correcta.

Letra	# de bolas
A	12
B	7
C	11
TOTAL	30

[ ] Tabla 1

Letra	# de bolas
A	11
B	18
C	1
TOTAL	30

[ ] Tabla 2

Letra	# de bolas
A	10
B	10
C	10
TOTAL	30

[ ] Tabla 3

Tres grupos A, B y C, realizaron el experimento de girar la ruleta (50 veces por alumno), cada alumno anotó el número de veces que obtuvieron un 2, reunieron los resultados de todo el grupo y los graficaron. Sin embargo, al maestro le informaron de que uno o dos de los grupos inventaron los resultados sin hacer el experimento, mientras que los otros dos o el otro sí lo hicieron y graficaron.

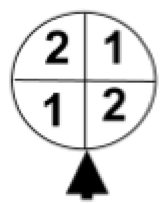


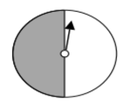
Figura 4

En el estudio se observa que los estudiantes más jóvenes son proclives a percibir principalmente la aleatoriedad en los fenómenos de azar, mientras que los mayores llevan su atención hacia la estructura (Sánchez y Trujillo, 2008). Concluyen exponiendo la importancia de que exista una mejor instrucción para la compresión de la variación dentro del aula, en lugar de la tradicional donde sólo se estudia la desviación estándar como una fórmula, para los programas de Bachillerato en México.

Una de las conclusiones que se obtuvieron en el estudio de Sánchez y Trujillo es el de la concepción de la variabilidad que implica conocer la estructura, media y distribución, y tener en cuenta la aleatoriedad, dispersión o irregularidad del fenómeno.

Por otra parte, Watson y Kelly (2003) basaron su estudio en 13 preguntas sobre la variación de resultados (Figura 5) con ayuda de una ruleta (spinner) de dos colores con la misma área: blanco y gris. El primer conjunto de preguntas introduce al estudiante al contexto del problema y la posibilidad de variación en los resultados al realizar el experimento en repetidas ocasiones; el segundo conjunto de preguntas introduce la distribución de los resultados en repetidas ocasiones, así como algunos de los elementos de la misma; el tercero, y último, da tres distribuciones diferentes, dos de ellas con variaciones poco probables.

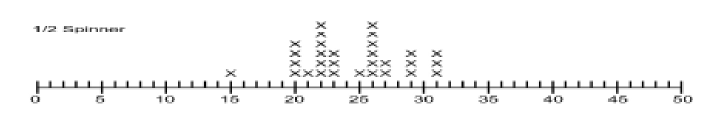
La elección de estos problemas pretende analizar las concepciones que tienen los estudiantes sobre algunos de los aspectos de la variación, concentrándose en los aspectos estadísticos de la variación y la estimación puntual ligados con la distribución teórica.



Pregunta 1. Una clase utilizó el siguiente spinner.

Si se gira una vez, ¿cuál es la probabilidad de que pare en la parte sombreada?
De cada 10 giros, ¿cuántas veces crees que el spinner pare en la parte sombreada? ¿Por qué piensas esto?
Si se va a girar 10 veces más, ¿esperas obtener el mismo número que el anterior? ¿Por qué piensas esto?
Si giras 10 veces el spinner y cuentas el número de veces que cae en la parte sombreada ¿qué número te sorprendería conseguir?
Suponga que se gira 6 series de 10. Escriba una lista que describa lo que podría pasar con el número de veces en las que cae la flecha en la parte sombreada.
______, ______, ______, ______, ______, ______

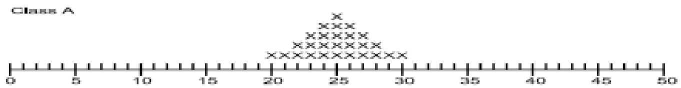
Pregunta 2. Una clase hizo girar 50 veces el spinner en varias ocasiones y registraron el número de veces que la flecha cayo en la parte sombreada en el siguiente gráfico.



Q6. ¿Cuál es el valor más bajo?
Q7. ¿Cuál es el valor más alto?
Q8. ¿Cuál es el rango?
Q9. ¿Cuál es la moda?
Q10. ¿Cómo describiría la forma de la gráfica?

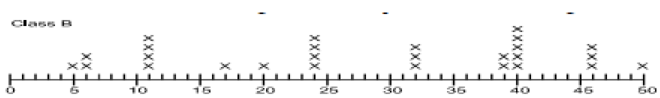
Pregunta 3. Imagínese que otras tres clases producen gráficos para el control de giro. En algunos casos los resultados se anotaron sin hacer el experimento.

Q11. ¿Cree que los resultados de la clase A son falsos o fueron anotados a partir del experimento?



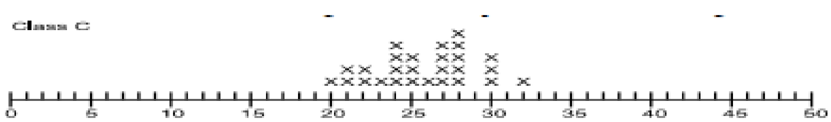
☐ sin experimento ☐ con experimento - Explicar por qué cree esto.

Q12. ¿Cree que los resultados de la clase B son falsos o fueron anotados a partir del experimento?



☐ sin experimento ☐ con experimento - Explicar por qué cree esto.

Q13. ¿Cree que los resultados de la clase C son falsos o fueron anotados a partir del experimento?



☐ sin experimento ☐ con experimento - Explicar por qué crees esto.

Figura 5

Encuestaron a un total de 707 estudiantes de nivel primaria, secundaria y bachillerato, de ellos 334 estudiantes tomaron clases sobre el azar y la variación en los datos a quienes se les aplicó un post-test con las mismas preguntas que las mostradas en la figura 5.

Watson y Kelly (2003) concluyeron que los profesores deben ser conscientes y preocuparse de la poca familiaridad que tienen los niños pequeños con el “azar”, así como la carencia que tienen al interpretar una gráfica donde no reconocen apropiadamente los valores más bajos y altos en ellas; para los estudiantes de mayor de edad también existe poco entendimiento en reconocer el azar y la variabilidad de los datos, no diferencian entre poca o demasiada variación. Asimismo, afirman que los estudiantes necesitan de muchas experiencias práctica para llegar a desarrollar una apreciación adecuada de variación, no sólo con una lección.

2.4 Estudios sobre variable aleatoria y distribución

En el artículo de García y Sánchez (2013) se estudia el razonamiento probabilístico de los estudiantes, mediante un cuestionario de 13 preguntas sobre el tema de variable aleatoria y distribución de probabilidades. El cuestionario se aplicó a 24 estudiantes (15 – 16 años) de bachillerato sin instrucción previa sobre la estadística y la probabilidad.

El problema de la investigación se enfocaba en la distribución binomial con *n* igual que 2 y probabilidad ½ con el fin de observar si los estudiantes perciben y consideran aspectos de dos elementos principales: la aleatoriedad y la distribución de los resultados (Figura 6).

¿Cómo piensas que serían los resultados para 40 días? Dibuja las barras de los posibles resultados en cada inciso, teniendo en cuenta la escala dada. Escribe el número de veces o el porcentaje, según sea el caso, sobre cada barra.

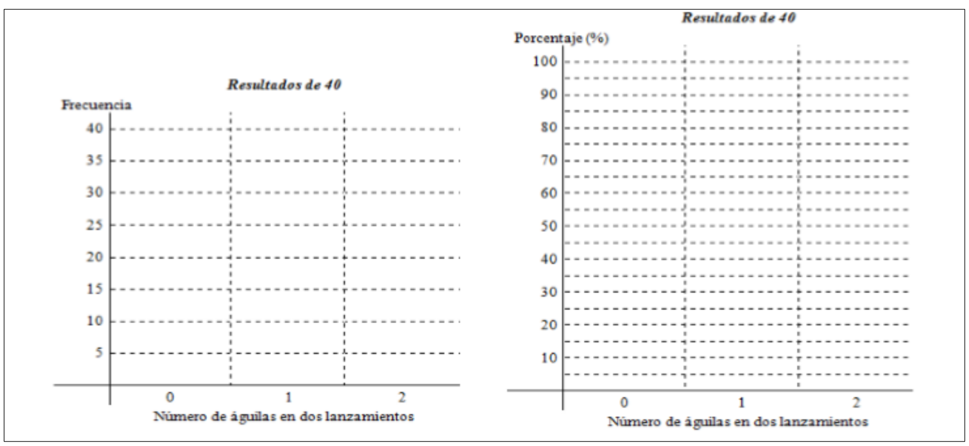


Figura 6

Las respuestas de los estudiantes se examinaron desde la taxonomía SOLO, donde se organizan en cinco categorías: Prestructural, Uniestructural, Multiestructural, Relacional y Abstracto Extendido. Para ello se consideraron cinco componentes diferentes, si no se obtenía ninguna de las componentes en las respuestas del estudiante se consideraba como un pensamiento Prestructural y, caso contrario, si se obtenían todas las componentes en las respuestas del estudiante se consideraba como un pensamiento Abstracto Extendido.

- Componente (a). Distribuye las frecuencias absolutas y relativas teniendo en cuenta el número de sorteos
- Componente (b). Asigna mayor frecuencia absoluta y relativa al evento con mayor probabilidad (1 águila)
- Componente (c). Asigna cuando menos dos distintas frecuencias a los valores esperados de los eventos, en ambos gráficos, considerando la variabilidad.
- Componente (d). Representa adecuadamente los valores de frecuencia entre ambos gráficos, conservando la proporción de los resultados en las dos escalas.

El análisis muestra que la mayoría de los estudiantes perciben una de las características de la distribución binomial: tener mayor probabilidad en valores centrales que en sus valores extremos. Sin embargo, menos de la mitad expresa en sus gráficas la aleatoriedad del fenómeno y la suma de las frecuencias absolutas acertadamente; además de que sólo un tercio de los estudiantes logró realizar el tránsito de registro entre ambos gráficos.

García y Sánchez (2012) expresaron que la enseñanza de la probabilidad debe tomar medidas para tratar este tipo de descuidos, ya que dificultan la compresión de que la suma de probabilidades de todos los valores debe ser igual que uno.

Independencia

En 1991, Green elabora un estudio sobre como los estudiantes perciben el concepto de aleatoriedad, se les pide fabricar una sucesión aleatoria a partir de lanzar 50 veces una moneda donde tienen que predecir cada uno de los resultados. El estudio mostró que las secuencias de los estudiantes reflejan la equiprobabilidad con precisión y rachas demasiado cortas esquivando el concepto de independencia.

En Truran y Truran (1999) se examinaron las concepciones acerca de la independencia al lanzar tres dados, en un conjunto de estudiantes de primaria (7-12 años) quienes escribieron sus respuestas en hojas y algunos de ellos fueron entrevistados para aclarar a lo que se referían. El problema que se les planeo pedía a los estudiantes decidir que era más probable: obtener tres cincos al lanzar un dado tres veces, obtener tres cinco al lanzar tres dados al mismo tiempo o si son igual de probables los eventos.

En la investigación las respuestas fueron clasificadas en seis categorías diferentes: “Sin respuesta”, que se refiere a cuando el estudiante dejaba en blanco la respuesta; “Sucesivo”, se refiere a rodar los tres dados por separado, uno por uno; “Simultaneo”, refiriéndose a rodar los dados al mismo tiempo, “Combinación”, se refiere a lanzar dos dados juntos y por separado el tercero; “Iguales” se refiere a que de cualquier forma es lo mismo y “Otra respuesta” para cualquier otro caso.

Truran y Truran encontraron que alrededor de 2/3 de los estudiantes consideraban que era más probable obtener los tres cincos de manera sucesiva, mientras que poco menos de ¼ dijeron que era más probable obtenerlos de manera simultánea. Muchos de los argumentos por parte de los estudiantes eran sobre la creencia de que podían ejercer mayor control al lanzar los dados de una u otra manera.

Los autores concluyeron que poder calcular proporciones adecuadamente no significa necesariamente tener una comprensión de la probabilidad y que los niños no se dan cuenta que la aleatoriedad surge de la interacción de un gran número de eventos independientes.

La investigación de Tarun y Tarun (1999) se basó en los resultados de Fischbein, Nello y Marino (1991) tomando como referencia las preguntas A2 y B2 de la primera investigación. Fischbein, Nello y Marino abordaron conceptos, como el de independencia y espacio muestra, considerados adecuados para un curso introductorio de probabilidad.

Encuestaron 618 alumnos, de los cuales fueron 211 de primaria (9-11 años), 278 de secundaria sin instrucción previa en probabilidad y 130 con instrucción previa en probabilidad (11-14 años). Utilizaron dos cuestionarios de 14 preguntas cada uno, pero en el artículo revisado sólo se analizan 6 de los reactivos de cada cuestionario (Figura 7).

Pregunta A2. Se pidió a los estudiantes comparar la probabilidad de obtener tres veces 5 de dos formas diferentes lanzando el dado tres veces por separado o lanzar tres dados al mismo tiempo

Pregunta B2. Se pidió a los estudiantes comparar la probabilidad de obtener tres soles al lanzar una moneda tres veces o lanzar tres monedas al mismo tiempo

Pregunta A3. ¿Qué es más probable a) obtener un 5 y un 6 con dos dados, b) obtener dos 6 con dos dados o c) son igual de probables?

Pregunta B3. ¿Al lanzar dos monedas al aire que es más fácil: a) obtener un sol y un águila, b) obtener un sol con cada una de las monedas o c) son igual de probables?

Pregunta A4. ¿Qué es más probable si tiras dos dados: a) obtener el mismo número con dos dados, b) obtener dos números diferentes o c) son igual de probables?

Pregunta B4. ¿Qué es más probable si se deja caer dos monedas: a) obtener la misma cara con las dos monedas, b) obtener diferentes caras o c) son igual de probables?

Pregunta A5. ¿Teniendo en cuenta la suma de los puntos obtenidos cuando lanzar un par de dados por cual evento apostarías: a) obtener 3 como suma o b) obtener 6 como suma? Justifica tu respuesta

Pregunta B5. ¿Teniendo en cuenta la suma de los puntos obtenidos cuando lanzar un par de dados por cual evento apostarías: a) obtener 7 como suma o b) obtener 10 como suma? Justifica tu respuesta

Pregunta A6. Luca y Paolo juegan con un par de dados. Si la suma de los puntos es 3, Luca es el ganador; si la suma de los puntos es 11, Paolo es el ganador. ¿Cuál de las siguientes respuestas parece que ser la correcta? y ¿por qué?

a) Luca tiene más probabilidad de ganar
b) Paolo tiene más probabilidad de ganar
c) Luca y Paolo tienen la misma probabilidad

Pregunta B6. Paolo y Piero juegan con un par de dados. Si la suma de los puntos es 2, Paolo es el ganador; si la suma de los puntos es 11, Piero es el ganador. ¿Cuál de las siguientes respuestas parece que ser la correcta? y ¿por qué?

a) Paolo tiene más probabilidad de ganar
b) Piero tiene más probabilidad de ganar
c) Paolo y Piero tienen la misma probabilidad

Figura 7. Algunos de los reactivos de la investigación de Fischbein, Nello y Marino (1991)

Truran y Truran (1999) obtuvieron resultados similares a los de Fischbein, Nello y Marino, aproximadamente la mitad de los estudiantes de primaria consideraron que los dos procedimientos para las preguntas A2 y B2 son igual de probables, cuestión que va mejorando con la edad. Los demás estudiantes tienen una concepción errónea donde creen que el individuo puede controlar los resultados dependiendo de cómo son lanzados las monedas o los dados.

Ninguno de los estudiantes, para las preguntas A3 y B3, consideraron el orden en los pares de dados y monedas, pues de ser así la respuesta correcta es que los eventos son igual de probables tanto para las parejas (5,6) y (6,6) como para las parejas (S,A) y (S,S). Más del 60% contestaron erróneamente y para este caso no se vio una mejoría con los estudiantes más edad, por el contrario, hay menos respuestas correctas en los estudiantes de secundaria que tuvieron una instrucción en probabilidad.

Algunas de las justificaciones que dan los autores es el hecho de que no hay una compresión de todos los posibles resultados que conforman el espacio muestra e independencia en los resultados.

Fischbein, Nello y Marino concluyeron que existen una variedad de ideas falsas, malos entendidos, prejuicios y tendencias emocionales que nublan al pensamiento probabilístico provocados por deficiencias lingüísticas, lógicas y por tener un pensamiento determinista muy arraigado.

2.5 Estudios sobre el enfoque clásico y el frecuencial de la probabilidad

Graham A. Jones, en el 2007, expone que es fundamental reconocer la interrelación que existe entre la estadística y la probabilidad, tanto en el aula como en las investigaciones. Por un lado, explica que la estadística utiliza las características de los procesos aleatorios y modelos de probabilidad para hacer inferencias acerca de los problemas que implican los datos; por otro lado, dice que la probabilidad se centra directamente en la descripción de cuantificar, modelar y entender los procesos aleatorios.

En Sthol, Rider y Tarr (2004) se analiza cómo 23 estudiantes de sexto grado de primaria (11-12 años) usan datos empíricos para realizar inferencias sobre probabilidades y tomar decisiones acerca de la imparcialidad de los dados de diferentes compañías, utilizando el software Probability Explorer para realizar una exploración empírica del comportamiento de los dados donde deberán recoger, organizar y analizar la información que el software arroje (Figura 8).

Schoolopoly

Su escuela tiene la intención de crear un juego de mesa inspirado en el clásico juego de Monopoly. El juego se llamará Schoolopoly y, como el Monopoly, se juega con dados. Debido a que varias copias del juego esperan ser vendidas las empresas están compitiendo por el contrato para crear los dados para Schoolopoly. Algunas empresas han sido acusadas de hacer dados de baja calidad con un comportamiento "injusto" lo que debe ser evitado. Cada empresa ha proporcionado una muestra para su análisis, a cada equipo se le asignará una compañía a investigar:

Luckytown Dice Company	Dice, Dice, Baby!
Dice R´ Us	Pips and Dots
High Rollers, Inc.	Slice ní Dice

Asignación

Trabajando con otra persona, investigar si la matriz enviada por la empresa es justo. Es decir, ¿son los seis resultados son igualmente probables? Tendrá que crear un cartel para presentar a la Junta Escolar y contestar las siguientes preguntas:

1. ¿Recomendaría la empresa que fabrica los dados que se le asigno parar

comprarlos?

2. ¿Qué evidencia tiene usted de que el dado es justo?
3. Use sus resultados experimentales para estimar la probabilidad teórica de cada resultado, 1-6, de la matriz usted probó.

Utilice el software Probability Explorer para recopilar datos de la simulación del lanzamiento del dado. Copia los gráficos y capturas de pantalla que desee utilizar para pegarlos en un documento de Word. Más tarde, usted será capaz de imprimir estos.

Figura 8. Tarea dada a los estudiantes (Sthol, Rider y Tarr, 2004)

Los 23 estudiantes tuvieron que tomar por 12 días un curso de probabilidad impartido por los diseñadores de la investigación, Sthol y Tarr, en el que se utilizaron objetos reales como monedas y dados y el software Probability Explorer. Las clases se diseñaron para acercar a los estudiantes a entender las conexiones entre la probabilidad teórica, la empírica y el tamaño de la muestra para realizar inferencias.

La idea matemática clave para el estudio es la *ley de los grandes números*, permite interpretar los resultados empíricos y estimar sus probabilidades sin olvidar que incluso después de un gran número de ensayos es posible obtener una probabilidad empírica sustancialmente diferente a la teórica. Ellos analizaron las respuestas de los estudiantes desde tres enfoques distintos: el enfoque frecuencial, el enfoque clásico y el enfoque subjetivo.

Su investigación tiene como objetivo examinar la forma en que los estudiantes de bachillerato hacen las conexiones entre la probabilidad teórica y la probabilidad experimental utilizando herramientas tecnologías y diversos registros de representación. Se buscaba responder a las preguntas ¿Cómo razonan los estudiantes sobre la relación entre la probabilidad empírica y la teórica, el efecto del tamaño de la muestra y la variabilidad dentro y a través de las muestras de datos obtenidas de las simulaciones? ¿Cómo el uso de los estudiantes de las representaciones en la herramienta tecnológica afecta su análisis de los datos muestreados e informa sus decisiones sobre equidad?

Sthol, Rider y Tarr observaron que los estudiantes que usaban un mayor número de muestras, representaciones y diálogos con su compañero tuvieron más éxito en estimar las probabilidades de que caiga cada cara del dado. Afirmaron que existe la necesidad de que los estudiantes realicen experimentos para estimar las probabilidades de distintos eventos ya que en el entorno de la vida real no es posible emplear en la mayoría de los casos un enfoque clásico para calcular las probabilidades, se emplea el enfoque frecuencial para ellos.

Concluyen que el uso de la tecnología para simular eventos ofrece oportunidades a los estudiantes para resolver numerosos problemas probabilísticos, con lo que se cree que aprenderán el valor de la formulación de argumentos basados en los datos y reconocer la importancia de las muestras más granes en inferencias, ayudándolos a conectar diferentes conceptos como la variabilidad e independencia, propiciando a desarrollar una compresión de una relación bidireccional entre la probabilidad empírica y teórica.

2.5 Tecnología y modelación

En Biehler, Ben-Zvi, Bakker y Makar (2012) presentan una visión general sobre las tecnologías digitales que han tomado auge para la investigación y la educación estadística y probabilística. Describen algunos de los softwares existentes para el análisis de datos, por ejemplo, los paquetes estadísticos SPSS, BMDP o R que es un lenguaje de programación con un enfoque en el análisis estadístico.

Biehler et. al. (2012) exponen que con las discusiones sobre cómo deberían ser los softwares especializados en la educación matemática surgieron dos corrientes diferentes: una de ellas se basa en la idea de que las tecnologías de aprendizaje para la estadística deben reflejar la teoría y la práctica de los paquetes profesionales para tener una brecha pequeña entre la enseñanza y la practica real, la otra corriente hace hincapié en utilizar la tecnología para mejorar el aprendizaje de la estadística usando estadísticas visuales y dinámicas para centrarse en los conceptos más que en los cálculos.

Los autores comentan que Biehler (1993, 1997) desarrolló requisitos para definir a una herramienta flexible que apoye a la enseñanza y aprendizaje de la estadística, los siguientes tipos de actividades para los estudiantes son algunos de los puntos importantes que una buena herramienta permite realizar.

1. Los estudiantes pueden practicar el análisis de gráficos y datos numéricos mediante el desarrollo de un estilo de trabajo exploratorio.
2. Los estudiantes pueden construir modelos para los experimentos aleatorios y el uso de la simulación por ordenador para su estudio.
3. Los estudiantes pueden participar en la "investigación estadística", es decir, en la construcción, análisis y comparación de métodos estadísticos.
4. Los estudiantes pueden utilizar, modificar y crear micromundos "incrustados" en el software para explorar conceptos estadísticos.

En el artículo mencionan además a dos softwares por su importancia en la enseñanza estadística Fathom Dynamic Data y TinkerPlots desarrollados especialmente para ello. En la presente investigación se realizaron algunas actividades desarrolladas por los estudiantes con el software Fathom, el cual es una herramienta flexible y dinámica para ayudar a los estudiantes a entender los conceptos abstractos y los procesos estadísticos (Biehler et. al., 2012).

Fathom cumplen con los requisitos antes mencionados, Biehler et. al. (2012) explican que gracias a ello un número importante de investigadores en la educación estadística y probabilística utilizan esta herramienta en sus trabajos.

Los resultados y procesos probabilísticos suelen ser contrarios a la intuición, sin embargo, con apoyo de la modelación se pueden realizar diversos experimentos aleatorios que permiten analizar desde otros enfoques fuera de lo algorítmico y teórico a los problemas de probabilidad. Como recurso didáctico, puede ayudar a comprender la diferencia entre modelo y realidad y a mejorar las intuiciones sobre la aleatoriedad (Batanero, 2001). Sin embargo, Batanero aclara que la simulación no proporciona justificaciones ni demostraciones.

En el artículo se menciona que Dantal (1997) señala los siguientes pasos para la enseñanza de la probabilidad:

1. Observación de la realidad
2. Descripción simplificada de la realidad
3. Construcción de un modelo
4. Trabajo matemático con un modelo
5. Interpretación de resultados en la realidad

Para Batanero (2001) el propósito de construir un modelo es obtener una mejor comprensión de una parte de nuestro universo para poder realizar inferencias.

2.6 Heurísticas y sesgos

Shaughnessy (1992) explora lo que para él son los temas principales en la investigación estadística y probabilística en la educación matemática, los cuales se refieren a:

- Describir la forma en que piensa la gente: investiga las ideas o intuiciones primitivas de la probabilidad y la estadística.
    - Representatividad
- Influir en la forma en que piensa la gente: se preocupa en mediar en las ideas o concepciones, incluso en modificarlas si es posible.

Shaughnessy (1997) explicó que en la enseñanza de la probabilidad y la estadística no sólo debe centrarse en aplicar y comprender algunas ideas matemáticas y estadísticas difíciles, sino que hay hacer frente a los problemas psicológicos relacionados con el azar y los datos. Encuestó a una muestra de futuros de profesores de matemáticas que no habían llevado probabilidad y estadística.

Una moneda se lanza cinco veces al aire. ¿Cuál de las siguientes secuencias crees que es más probable? Donde A es águila y S es sol.

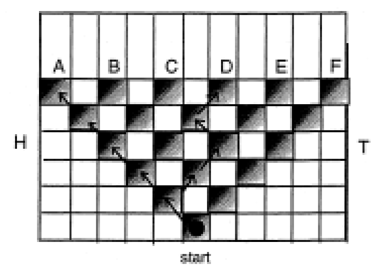
A) ASSAS
B) AAAAA
C) tienen la misma probabilidad de ocurrir.

Figura 9

Observó que los profesores tienen respuestas parecidas a las encontradas por estudiantes de la escuela primaria, secundaria y universidad. Por ejemplo, un profesor dio la siguiente respuesta: “Me gustaría ir con A) sólo porque se aproxima más a la proporción de 50-50, pero en una muestra tan pequeña que todo es posible". Caen en la heurística de representatividad, pues estima la probabilidad con base a lo bien que un resultado representa a la población.

Shaughnessy propone no estancarse clasificando las respuestas de los estudiantes sobre las falsas concepciones, sino tomarlo como un punto de partida para documentar cualquier crecimiento y cambio en los niveles de pensamiento de los estudiantes y cuestionarse sobre el tipo de tarea que se podrían utilizar para ayudar a los estudiantes en la transición y evolución de su pensamiento acerca de situaciones binomiales.

El siguiente ejemplo (Figura 10) lo utilizó Shaughnessy como un punto de partida para investigar el crecimiento del pensamiento de los estudiantes. En un tablero de ajedrez se coloca un marcador en la casilla de origen y se lanza una moneda, águila indica un movimiento diagonal a la izquierda para arriba en el tablero, mientras que sol indica un movimiento diagonal a la derecha para arriba en el tablero.



1) ¿Cuántos caminos se puedes hacer con la secuencia AAAAA?, ¿Cuántos corresponden a ASSAS?

2) ¿En total, cuántos caminos diferentes son posibles en el tablero de ajedrez durante cinco lanzamientos?

3) ¿Cuántos caminos diferentes conducen a cada una de las seis casillas posibles (de la A a la F)?

Figura 10. Es una actividad tomada de la serie del ojo de la mente (Shaughnessy y Arcidiacono, 1993)

Los profesores jugaron con el tablero lanzando cinco veces una moneda y moviendo el marcador para observar el camino que se traza. Las secuencias de los lanzamientos se pueden ver como estos “caminos”, En la Figura 10 se muestran dos diferentes (AAAAA y ASSAS).

A medida que los estudiantes jugaban con el tablero Shaughnessy encontró cambios en las ideas de éstos. Por ejemplo, al principio predecían que había igual cantidad de caminos para llegar a cada una de las casillas (de la A a la F), después de juego cambiaban de opinión al encontrar que existen más caminos que llevan a ciertas casillas que otras; también encontraban todos los caminos posibles (32 caminos en total) correspondiente a todas las posibles secuencias que se obtienen al lanzar 5 veces una moneda.

En el artículo, Shaughnessy afirma que juegos de este tipo ayudan a desarrollar un mayor entendimiento para problemas con distribución Binomial, el número de ensayos “n” y la probabilidad de éxito “p” se pueden representar por la longitud de la trayectoria y sus distintas ramificaciones.

Serrano, Batanero, Ortiz y Cañizares, en 1998, comentaron que la investigación sobre el razonamiento probabilístico ha tenido un papel importante en el campo de psicología y la educación matemática. El estudio se centra en tres principales sesgos: la heurística de represantividad, el sesgo de equiprobabilidad y el enfoque del resultado aislado.

Encuestaron a 277 estudiantes de secundaria, aproximadamente la mitad de los alumnos comenzaban su primer año de Bachillerato (14-15 años) y no habían tenido instrucción sobre probabilidad, el resto de los estudiantes se encontraban en su último año (17-18 años) y habían recibido instrucción sobre probabilidad. El cuestionario incluye 8 reactivos (Figura 11) inspirados de las investigaciones previas de Green (1982), Lecoutre y Durand (1988), Garfield y Del Mas, (1991), Fischbein et al. (1991), Lecoutre (1992), Konold et al. (1993).

Los investigadores evaluaron las respuestas de los estudiantes para observar la proporción de estudiantes que tuvieron errores o utilizaron heurísticas y sesgos incorrectos, los cuales suministraron justificaciones en algunos de los reactivos para profundizar en el análisis.

1. ¿Cuál de las siguientes sucesiones es más probable que resulte al lanzar una moneda equilibrada 5 veces?: a) CCCXX ; b) XCCXC; c) XCXXX; d) CXCXC; e) Las cuatro

sucesiones son igual de probables. ¿Por qué has dado esta respuesta?

2. ¿Cuál de las siguientes sucesiones es menos probable que resulte al lanzar una moneda equilibrada 5 veces?: a) CCCXX; b) XCCXC; c) XCXXX; d) CXCXC; e) Las cuatro sucesiones son igual de probables. ¿Por qué has dado esta respuesta?

3. En el hospital de cierta ciudad se registra el número de niños y niñas recién nacidos ¿Cuál de los siguientes casos te parece más probable?: a) Que en los próximos 10 nacimientos 8 o más recién nacidos sean varones; b) Que en los próximos 100 nacimientos 80 o más recién nacidos sean varones; c) Las dos cosas anteriores a) y b) son igual de probables. ¿Por qué has dado esta respuesta?

4. Si observamos los siguientes 10 nacimientos, ¿Qué te parece más probable?: a) La fracción de varones será mayor o igual a 7/10; b) La fracción de varones será menor o igual a 3/10; c) La fracción de varones estará comprendida entre 4/10 y 6/10; d) Las tres opciones anteriores a), b), c) son igual de probables. Indica por qué das esta respuesta.

5. Cuando lanzamos dos dados simultáneamente: a) Hay las mismas posibilidades de obtener un 5 y un 6 que de obtener dos veces el número 5; b) Hay más posibilidades de obtener un 5 y un 6 que de obtener dos veces el número 5; c) Hay menos posibilidades de obtener un 5 y un 6 que de obtener dos veces el número 5; d) Es imposible saberlo. Razona tu respuesta.

6. Cuando lanzamos simultáneamente tres dados, ¿cuál de éstos resultados es más fácil que ocurra?: a) Obtener un 5, un 3 y un 6; b) Obtener dos veces el 5 y una vez el 3; c) Obtener tres veces el número 5; d) Todos estos resultados son igualmente probables; e) Es imposible saberlo.

7. ¿Es alguna de las afirmaciones del ítem 6 menos probable que las otras?

8. Una ruleta está dividida en cinco áreas iguales, numeradas del 1 al 5. ¿Cuál de los siguientes resultados es más probable que ocurra al girar la ruleta tres veces?: a) 2, 1, 5, en este orden exactamente, b) 2, 1, 5, en cualquier orden; c) 1, 1, 5, en cualquier orden; d) Las opciones a) y b) son igual de probables; e) Las opciones a) b) y c) son igual de

probables

Figura 11

Los reactivos piden a los estudiantes comparar la probabilidad de diferentes sucesos asociados con experimentos aleatorios. Por ejemplo, el problema 1 es muy similar al presentado por Shaughnessy (1998), el cual evalúa sí los estudiantes usan la heurística de la representatividad; vinculado con él se encuentra el problema 4, con él que se evaluaron las intuiciones de los estudiantes sobre la probabilidad binomial, pues los estudiantes que recaen en esta heurística pueden elegir la respuesta correcta, posiblemente por razonamientos incorrectos.

Con el problema 3 intentaron comprobar sí los estudiantes aprecian la variabilidad de los datos con diferentes tamaños de muestras (problema adaptado de Kahneman et al., 1982). Algunos estudiantes caen en un caso especial de la heurística de la represantividad llamada la ley de los pequeños números.

Los demás reactivos, del 5 al 8, se utilizaron para comprobar si los estudiantes tienden a usar en sus respuestas el sesgo de equiprobabilidad (problema adaptado de Lecoutre, 1992). Se necesita tener un nivel básico en técnicas de conteo para elegir el resultado más probable.

En su estudio se observó que los estudiantes mayores, con instrucción en estadística y probabilidad, tuvieron un mayor porcentaje de respuestas correctas, aunque no significativas e inclusive en el reactivo 8 se encontró que los estudiantes más jóvenes, sin instrucción en estadística y probabilidad, tuvieron un porcentaje más alto de respuestas correctas.

Con los resultados obtenidos Serrano, Batanero, Ortiz y Cañizares dedujeron que a medida que los estudiantes crecen y se les instruye en los temas de estadística y probabilidad existe un ligero progreso en el razonamiento probabilístico, sin embargo, se encuentra que en problemas donde se puede presentar el sesgo de equiprobabilidad puede haber inclusive un empeoramiento.

Capítulo 3.

Marco conceptual

3.1 Introducción

En el siguiente apartado se ofrece al lector los elementos necesarios para una mejor compresión del presente trabajo, se analizan cuatro componentes diferentes para el marco conceptual: ideas fundamentales de probabilidad, los distintos enfoques de probabilidad, los juicios heurísticos y sesgos y la tecnología como instrumento para el aprendizaje en la probabilidad.

3.2 Ideas fundamentales de probabilidad

Algunas de las ideas fundamentales de probabilidad que se retomaron para el presente trabajo son las propuestas por Iddo Gal en el 2005 para caracterizar la competencia probabilística, las cuales son *aleatoriedad, variación, independencia* y la relación *predicción/incertidumbre*; además se incorporaron tres conceptos clave de probabilidad utilizados a lo largo del estudio para el diseño de las actividades y más tarde para analizar las concepciones de los estudiantes, estos conceptos son el espacio muestra, la variable aleatoria y la distribución de probabilidad. A continuación, se desglosa cada una de estas ideas.

Aleatoriedad. Algunos investigadores como Batanero y Serrano (1999) y Gal (2005) comentan que la aleatoriedad es un concepto que se resiste a caber en una definición simple. La aleatoriedad ha sido interpretada de diversas formas a lo largo de la historia y en la actualidad no hay aún una definición totalmente satisfactoria. Una caracterización es la siguiente: la aleatoriedad según Moore (1990) y Metz (1998) implica impredictibilidad en ensayos particulares y estabilidad, a la larga, de las frecuencias de ocurrencia de los eventos. Todos los fenómenos que estudia la probabilidad son aleatorios, sin embargo, en la enseñanza de la materia se soslaya el desarrollo de este concepto, centrándose principalmente en el cálculo de probabilidades y el desarrollo de procedimientos.

Independencia. Cuando el resultado de un evento no altera la probabilidad de otro evento (previo, futuro o simultáneo), esos eventos son independientes. Esta es una idea que se extiende a variables aleatorias: si ninguna de las probabilidades de cualquiera de los valores de una variable cambia cuando conocemos el resultado de otra variable entonces las variables son independientes. Generalmente, cuando se habla de los resultados de ensayos repetidos de una variable se debe especificar si cada ensayo es independiente o no de los demás ensayos. Por ejemplo, los resultados de extraer aleatoriamente y repetidamente bolas de una urna, pueden provenir de dos formas de hacerlo, una sin remplazar las bolas extraídas y otra remplazándolas cada vez. Los resultados de las extracciones sin remplazo son *dependientes*, mientras que los resultados de las extracciones con remplazo son *independientes.* En general, cuando hay independencia se simplifican los cálculos necesarios para obtener probabilidades compuestas.

Variabilidad. La variabilidad es un constructo complejo, pues con dicho término se trata de capturar rasgos relacionados tanto al fenómeno del cambio como a la existencia de diferencias. Aunque frecuentemente se utiliza el término *variabilidad* y *variación* como sinónimos, variabilidad se asocia más al fenómeno del cambio y la diferencia, y variación a su medida (Shaughnessy, 2007). La variabilidad se presenta en todas partes, por ejemplo, al medir un objeto en repetidas ocasiones se observa que las medidas realizadas tienen diferencias, varían una de otras, debido a circunstancias como errores al medir o un proceso inadecuado para hacerlo, entre muchas otras. También, al medir una característica a un conjunto de objetos, se obtienen medidas distintas debidas probablemente a las diferencias entre los propios objetos. Moore (1990) dijo que este concepto se presenta generalmente como la motivación básica para cualquier tipo de investigación estadística. En el terreno de la probabilidad, Sánchez y Valdez (2014), destacan la importancia de poner atención en las diferencias entre las frecuencias de los eventos y los valores esperados y en las diferencias entre las frecuencias relativas en un momento determinado (para alguna n) y la probabilidad de los eventos.

Predicción/Incertidumbre. Este es un binomio aparentemente contradictorio ya que predicción se entiende como “decir lo que va a ocurrir” e incertidumbre es “la ausencia de certeza”. No obstante, una predicción probabilística afirma que algo va a ocurrir con cierta probabilidad, sin la certeza de que en efecto ocurrirá. Un experimento aleatorio tiene la característica de combinar incertidumbre y predicción: por un lado, no es posible predecir un resultado individual ni una secuencia de resultados, por otro, a la larga se puede predecir cierta regularidad de las frecuencias relativas. Pero también es útil hacer predicciones de lo que va a ocurrir en un sólo resultado, sobre todo de fenómenos que siguen una ley normal o binomial, ya que se puede estimar un intervalo o rango de valores alrededor de la media con buena probabilidad de que ocurra la predicción. Aunque estos intervalos o rangos (según sea continua o discreta) mantienen incertidumbre, la reducen considerablemente. Hay una cierta tendencia a pensar que una predicción tiene que ser determinística (decir con certeza lo que va a ocurrir), sin valorar que a veces una predicción probabilística puede ser muy útil, aunque aún conserve incertidumbre.

Espacio muestra. El espacio muestra de un experimento es el conjunto de todos los posibles resultados. Este concepto es fundamental en el proceso de modelización de los fenómenos aleatorios. Jones et al. (2007) comentan que, aunque es aparentemente sencillo y directo, “es más sutil y elusivo de lo que aparenta” (p. 920).

Variable aleatoria. Una variable aleatoria es una función cuyo dominio es el espacio muestra y cuyo contra-dominio son los números enteros o reales. También es un concepto sutil y su utilidad ha sido poco apreciada, no obstante, en las actividades de simulación se muestra su potencia.

Distribución. Existen dos tipos de distribución: la distribución empírica y la distribución teórica. Una distribución empírica se construye a partir de un conjunto de datos, mientras que la segunda se forma a partir de un modelo de probabilidad. Con la ayuda de la tecnología es posible trabajar en clase con distribuciones teóricas (por ejemplo, la binomial) y con distribuciones empíricas, es decir, con los datos que generan dichas distribuciones. Con esto se logra crear un contexto adecuado para el estudio de la variabilidad, es decir, las diferencias entre las frecuencias relativas y los valores de la probabilidad teórica.

3.3 Enfoques de la probabilidad

Existen diferentes enfoques para calcular la probabilidad de un evento: el *enfoque clásico, enfoque frecuencial*, *enfoque subjetivo*, *enfoque axiomático* y el *enfoque intuitivo*. En este trabajo nos interesa concentrarnos sólo en los primeros dos enfoques. Estos son los que se recomienda estudiar en la mayoría de programas de estudio del bachillerato. Su asimilación se encuentra estrechamente relacionados a una versión de la *ley de los grandes números*.

Enfoque clásico. En este enfoque a una experiencia aleatoria se le asocia un espacio muestra **Ω**, en el que todos sus elementos tienen la misma 'propensión' de ocurrir, es decir, de acuerdo al mecanismo de generación de los resultados, se puede establecer que ningún resultado del espacio muestra es más propenso de ocurrir que otro. Un evento es cualquier subconjunto del espacio muestra. Supongamos que tenemos un evento A, su probabilidad se define como:

$$P(A) = \frac{Casos\ favorables\ a\ A}{Total\ de\ casos} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Donde #A es el número de elementos de A y #**Ω** es el número de elementos del espacio muestra.

Aunque el *enfoque clásico* es una herramienta para el cálculo de probabilidades simples y permite construir modelos de probabilidad, tiene el inconveniente de que se restringe a situaciones en las que el espacio muestra es equiprobable; como estas situaciones por lo regular están basadas en juegos de azar, la aplicabilidad del enfoque clásico es muy limitada. Pero, además, en su enseñanza se suele limitar a su aspecto puramente matemático, sin incluir problemas en las que se deba considerar a aleatoriedad y variabilidad. Trabajando sobre ambos enfoques los problemas, en probabilidad, toman un matiz totalmente diferente: los modelos construidos con el enfoque clásico se vuelven instrumentos de predicción (con incertidumbre) que revelan el potencial y sentido práctico de la probabilidad (Sánchez y Valdez, 2014).

Enfoque frecuencial de Probabilidad. Este enfoque se refiere a situaciones aleatorias que se pueden repetir indefinidamente en condiciones similares. Dada un evento A y una experiencia aleatoria que se repite n veces, se define la frecuencia relativa de A como el número de veces que ocurrió el evento A entre n. Este concepto permite formular lo siguiente.

La Ley de los Grandes Números nos dice que las frecuencias relativas se encuentran arbitrariamente cercanas a la probabilidad cuando n es grande; Von Mises (1946) enuncia la ley de los grandes números de la siguiente manera:

> Si se repite n veces un experimento cuyo resultado son alternativas simples con la probabilidad p para el resultado positivo y si ε es un número arbitrariamente pequeño, la probabilidad de que el número de resultados positivos no sea menor que $(pn- \varepsilon n)$ ni mayor que $(pn+ \varepsilon n)$ tiende a 1 en la medida en que n tiende a infinito.

En consecuencia, la interpretación de la probabilidad a través de la frecuencia nos dice que se puede estimar la probabilidad de un evento o suceso con las frecuencias relativas observadas en un gran número de repeticiones experimentales. Esta definición resalta que los resultados son imprevisibles de una repetición a otra y que a la larga se observa la regularidad.

3.4 Juicios heurísticos y sesgos

En esta sección se describirá brevemente las características de los tipos de razonamiento incorrectos identificados en el campo de la estadística y la probabilidad utilizadas para este estudio. Shaughnessy (1992) señaló que la investigación de los sicólogos, como Kahneman y Tversky, ha proporcionado a los educadores matemáticos un marco conceptual para la investigación del aprendizaje en la estadística y probabilidad. Los sesgos (aplicaciones erróneas de heurísticas) que suelen llevar a la gente a cometer errores en situaciones de incertidumbre tienen una base psicológica, y la comprensión de las leyes teóricas de la probabilidad no siempre es suficiente para superarlos, si el sujeto no llega a tomar conciencia de ellos; por lo que es importante que el profesor reconozca estos sesgos cuando sus alumnos los manifiesten (Batanero, 2001).

Representatividad. De acuerdo con la heurística de la representatividad, las personas estiman las probabilidades de los eventos con base en lo bien que un resultado representa cierto aspecto de su población original (Kahneman y Tversky, 1972; Shaughnessy, 1992). Esta heurística se convierte en sesgo cuando se prescinde del tamaño de la muestra y, con ello, del estudio de la variabilidad del muestreo, produciéndose una confianza indebida en las pequeñas muestras (Batanero y Serrano, 1998).

Insensibilidad al tamaño de la muestra. Cuando se realizan estimaciones, la varianza del estadístico es una variable aleatoria en función inversamente proporcional al tamaño de la muestra, influyendo en las probabilidades de obtener diferentes valores del estadístico muestral. Se cae en el sesgo llamado *Ley de los pequeños números* al tomar una pequeña muestra como representativa de todas sus características estadísticas de la población de donde procede. Desde el punto de vista de la educación secundaria, este sesgo se presenta cuando los alumnos no consideran la importancia del número de ensayos en sus estimaciones frecuenciales de la probabilidad (Batanero y Serrano, 1998).

Concepciones erróneas sobre las secuencias aleatorias. La expectativa cuando se tiene una secuencia aleatoria es que tiene que ser representativa de la población original y deben tener una apariencia desordenada, por ejemplo: si se lanza seis veces una moneda al aire se puede cometer el error de creer que la secuencia SAASSA es más probable y representativa que la secuencia ASSSSS o que la secuencia SSSAAA, donde S = Sol y A = Águila, sin embargo, las tres secuencias tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

Falacia del jugador. Ligado a la concepción anterior se encuentra la *falacia del jugador*. Muchos sujetos tienden a creer que después de una serie de soles, al lanzar repetidas veces una moneda, es más probable que se obtenga un águila (Shaughnessy, 1992), olvidando la independencia de los eventos.

Sesgo de equiprobabilidad. Este sesgo se refiere a la creencia de que todos los sucesos asociados a cualquier experimento aleatorio son equiprobables. Por ejemplo, al lanzar dos veces una moneda al aire se puede caer en la creencia de que obtener 2 águilas es igual de probable que obtener exactamente 1 águila.

3.5 La tecnología como instrumento de aprendizaje en la probabilidad

La tecnología ha impactado fuertemente la enseñanza de la probabilidad de manera que en los últimos años han surgido nuevas propuestas de cómo enfocarla teniendo en cuenta los recursos que proporciona. Hofmann, et al. (2014, p. 284) señalan que "[un] curso contemporáneo sobre estocásticos que tome en cuenta adecuadamente el azar y los datos no es viable sin el uso de tecnología". Los softwares educacionales (Fathom, Tinker Plots, y otros) permiten generar y organizar datos, mismos que se representan de diferentes maneras (tablas y gráficas). Una de los rasgos más importantes de la tecnología digital para apoyar la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad es la posibilidad de llevar a cabo actividades de simulación.

Muchos de los desarrollos y resultados de la probabilidad que rompen con las intuiciones de los individuos, pueden ser superados o paliados con la ayuda de la simulación, pues ésta permite observar dichos resultados desde otras perspectivas diferentes a los puramente matemáticos. Como recurso didáctico, puede ayudar a comprender la diferencia entre modelo y realidad y a mejorar las intuiciones sobre la aleatoriedad (Batanero, 2002). Por ejemplo, en cuanto al tema de distribuciones de probabilidad la simulación permite describir el comportamiento de las distribuciones empíricas para realizar predicciones de su comportamiento y observar la variabilidad de los datos, a diferencia de trabajar solamente con el resultado inerte de las distribuciones teóricas, donde se pierden las grandes ideas de probabilidad al centrarse únicamente en el cálculo de los eventos.

En la presente investigación se utilizó *Fathom Dynamic Data* que es un software diseñado especialmente para la enseñanza de la probabilidad y estadística.

La hoja de trabajo de *Fathom Dynamic Data* incluye íconos móviles que se arrastran con ayuda del cursor, dependiendo de las condiciones del problema en él se pueden compilar los datos para manipular la simulación realizada; permite analizar los datos de forma dinámica e interactiva; liga las diferentes representaciones como el registro tabular, el registro gráfico y el simbólico de forma simultánea. Para la simulación de los problemas del estudio se necesita introducir el modelo de la población e indicar la cantidad del número de muestras que se desee.

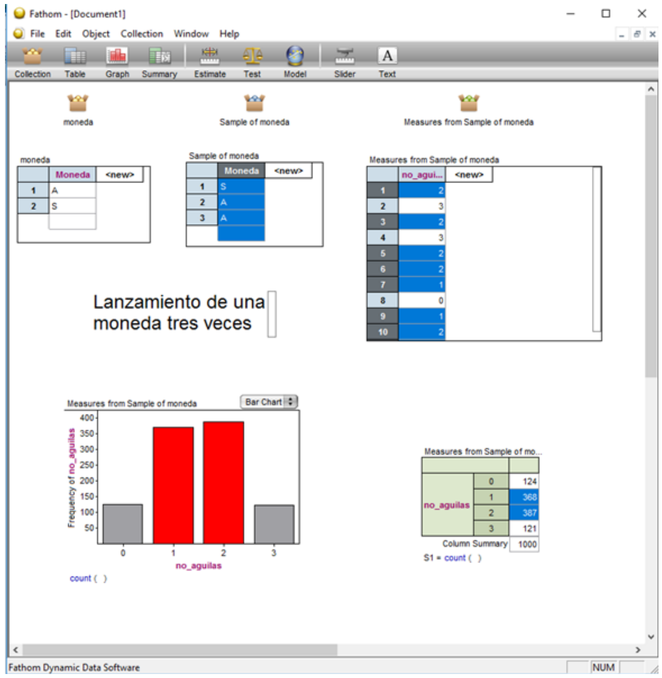

Fathom - [Document1]
File Edit Object Collection Window Help
Collection Table Graph Summary Estimate Test Model Slider Text
moneda
Sample of moneda
Measures from Sample of moneda
Lanzamiento de una
moneda tres veces
Measures from Sample of moneda
Bar Chart
Frequency of no_aguilas
no_aguilas
count ( )
Measures from Sample of mo...
no_aguilas
0 124
1 368
2 387
3 121
Column Summary 1000
S1 = count ( )
Fathom Dynamic Data Software
NUM

Figura 12

Capítulo 4

Método

4.1 Introducción

En esta sección se expone el método utilizado en el presente trabajo; el cual consiste en el análisis de las respuestas de los estudiantes a dos cuestionarios aplicados antes y después de las secuencias exploradas en Fathom. A partir de estos cuestionarios se observaron características en los razonamientos de los estudiantes como es la aleatoriedad, la variabilidad, la distribución, el espacio muestra y la variable aleatoria y la manera en que relacionan los enfoques de probabilidad: clásico y frecuencial.

A continuación, se describen los participantes del estudio, los instrumentos para la recolección de los datos, las fases de investigación y el procedimiento de análisis.

4.2 Participantes

El estudio se llevó a cabo en un grupo de estudiantes, de entre 16 y 17 años, que cursaban el cuarto semestre en el Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), Plantel Vallejo. La clase se conformó de 26 estudiantes, de los cuales sólo 13 realizaron las actividades de la investigación (6 mujeres y 7 hombres). Ninguno de los 13 estudiantes había tomado un curso de estadística y probabilidad en el nivel medio superior ni contaba con experiencia relacionada en estos temas, sólo con los conocimientos básicos aprendidos en la escuela secundaria o en la vida cotidiana. Once de ellos eran alumnos regulares sin materias reprobadas, hasta ese punto de la investigación. Tampoco contaban con una instrucción del software Fathom, que se utilizó para realizar el estudio.

4.3 Instrumentos para la recolección de datos

La recolección de datos de la investigación se realizó a partir de cuatro cuestionarios, dos pre-test y dos pos-test, aplicados antes y después de cuatro actividades: dos físicas y dos computacionales. El primer pre-test es una adaptación del cuestionario propuesto por Jaime (2011), estudio enfocado en los niveles de razonamiento de estudiantes de bachillerato a través de una distribución binomial; el segundo pre-test se orientó del trabajo de Rob Torok y Jane Watson (2000) donde investigan las concepciones de la variación de estudiantes de diferentes grados.

En este capítulo se indican los elementos que justifican la elección del contenido específico de los cuestionarios y las actividades, así como el objetivo de las mismas.

4.3.1 Cuestionario 1

El primer cuestionario consta de nueve reactivos, sin embargo, sólo se analizan ocho de ellos en la presente la investigación. En este cuestionario se les presenta una situación con distribución binomial (n=2, p=1/2), dentro de un contexto familiar: lanzamiento de monedas, con cálculos muy sencillos para encontrar las probabilidades del problema y su espacio muestra. El objetivo de este cuestionario es el de analizar los niveles de razonamiento de los estudiantes antes y después de interactuar con el software Fathom y su evolución o retroceso, además de observar cómo se desarrolla su razonamiento sobre su percepción de la forma de la distribución, el espacio muestra, las probabilidades, el azar y la variabilidad; así mismo se describen las concepciones erróneas y dificultades que los estudiantes encuentran en este tipo de tareas.

Pregunta 1

El propósito de la primera pregunta es explorar el razonamiento de los estudiantes frente a una situación de azar sobre una apuesta al lanzar dos monedas; se analiza cómo perciben este concepto y sus concepciones sobre cuál o cuáles son los eventos más probables para inclinar la apuesta a alguno de ellos.

1. Se realiza una apuesta lanzando dos monedas al aire ¿por cuál de los siguientes eventos apostarías y por qué?

a) Evento A: Que caigan cero águilas
b) Evento B: Que caiga un águila
c) Evento C: Que caigan dos águilas

Figura 13. Pregunta 1 del primer cuestionario

Aunque no se puede esperar con certeza ninguno de los tres resultados, el estudiante debe percibir que el evento B es el más probable, con un 50% de probabilidad; el evento A y el evento C son menos probables, cada uno con un 25% de probabilidad.

Se considera como una respuesta correcta la combinación de dos elementos: la identificación del evento más probable y la justificación realizada por el estudiante. Si el estudiante compara las probabilidades de los tres eventos adecuadamente para seleccionar uno de ellos, se aceptará como una comprobación correcta.

Una respuesta parcialmente correcta será la consideración de cualquiera de estos dos elementos. Por ejemplo, la respuesta “el evento B”, donde se selecciona el más probable, pero no se justifica el porqué de la elección.

Respuestas incorrectas son consideradas aquellas que se han dejado en blanco o que no perciben ninguno de los dos elementos, como considerar a cada evento igual de probable.

Pregunta 2

La segunda pregunta se planteó para observar si los alumnos contaban correctamente todos los posibles casos que se obtienen al lazar dos monedas, inmediatamente después se formuló la definición de espacio muestra y, más adelante, de variable aleatoria. Además, con esta pregunta se esperaba ver si los alumnos vinculan sus respuestas sobre el evento más probables, las probabilidades de cada evento y sus estimaciones con el espacio muestra del problema.

2. ¿Cuántos posibles resultados puedes obtener al lanzar dos monedas al aire y cuáles son?

____

____

> Al identificar todos los resultados experimentales posibles, está definiendo el espacio muestra de un experimento, él cual es el conjunto de todos los posibles resultados experimentales

Figura 14. Pregunta 2 del primer cuestionario

Respuesta correcta: son cuatro posibles resultados $\{(A, A), (A, S), (S, A), (S, S)\}$ donde A corresponde al evento cae un águila y S al evento cae un sol al lanzar una moneda.

Respuesta incorrecta: cualquier otra respuesta se consideró como incorrecta.

Preguntas 3, 4 y 5

En las preguntas 3, 4 y 5 se preguntó explícitamente por las probabilidades de los tres eventos, para analizar cómo los estudiantes calculaban las probabilidades de cada evento: por el espacio muestra, por algún diagrama, por concepciones o razonamientos erróneos. En el análisis de las respuestas también se observa si presentan sesgos de algún tipo; en particular, el sesgo equiprobabilidad.

3. ¿Cuál es la probabilidad de que caigan cero águilas si se lanzan dos monedas al aire?

____

____

4. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga un águila si se lanzan dos monedas al aire?

____

____

5. ¿Cuál es la probabilidad de que caigan dos águilas si se lanzan dos monedas al aire?

____

____

Figura 15. Pregunta 3, 4 y 5 del primer cuestionario

Respuesta correcta: sea X la variable aleatoria número de águilas en dos lanzamientos se tienen las siguientes probabilidades $P(X = 0) = 25\%$, $P(X = 1) = 50\%$ y $P(X = 2) = 25\%$

Respuesta incorrecta: dada la misma variable aleatoria dar probabilidades distintas a las anteriores.

Pregunta 7

La pregunta 7 se realizó para observar cómo los estudiantes plasman la secuencia de resultados que esperarían obtener al lanzar dos monedas al aire 60 veces. Se busca identificar en las secuencias que propone el estudiante los elementos que cree que caracterizan una secuencia aleatoria: aproximación de las frecuencias relativas a la probabilidad, ausencia de patrones en la secuencia, longitud de rachas.

7. Supongamos que se ha jugado 60 veces, llena la tabla con los resultados que esperarías obtener al lanzar las dos monedas

Número de lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Número de águilas																				
Número de lanzamiento	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Número de águilas																				
Número de lanzamiento	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Número de águilas																				

Tabla 1

Figura 16. Pregunta 7 del primer cuestionario

Pregunta 8

La pregunta 8 se formuló para que el estudiante represente las frecuencias absolutas de la secuencia que propuso y notara la forma de la distribución, asimismo, que tradujera sus frecuencias a porcentajes para aproximarse a las probabilidades.

Se esperaban distintos tipos de respuesta para este reactivo, por ejemplo: si relacionaban su secuencia "aleatoria" de la pregunta 7 o daban otra diferente para recalcar la variabilidad y la aleatoriedad que existe, vinculando las probabilidades y la variación para dar un número o intervalo adecuado para cada frecuencia o no.

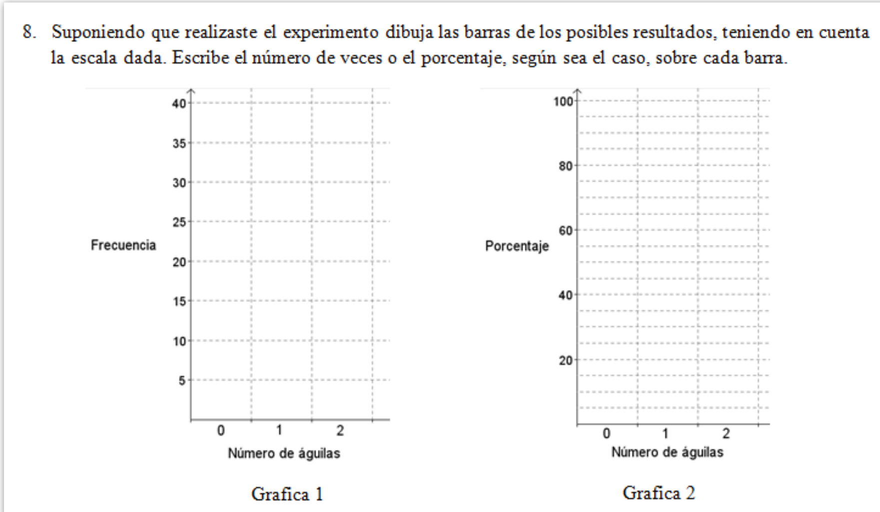


Figura 17. Pregunta 8 del primer cuestionario

4.3.2 Cuestionario 2

El segundo cuestionario se constituye por diez reactivos, para la presente investigación se analizaron sólo ocho de ellos, los otros sirvieron de guía para que los estudiantes pudieran responder el cuestionario. A través de los reactivos se les presenta, a los estudiantes, una situación con distribución binomial (n=10, p=1/2), dentro de un contexto familiar que es la extracción de pelotas de una urna con 5 pelotas rojas, 2 amarillas y 3 verdes en su interior. Aunque los cálculos para encontrar las probabilidades de todos los elementos de la variable son demasiado complicados para los estudiantes que no han llevado ninguna formación probabilística, se espera identificar la manera espontánea en la que responden acerca de la forma de la distribución y la media como el evento más probable. Un primer objetivo del segundo cuestionario es examinar y clasificar las respuestas de los estudiantes para indagar sobre el tipo de razonamiento que utilizan antes y después de interactuar con el software Fathom, si tuvieron un progreso o un retroceso; un segundo objetivo es observar y analizar cómo los estudiantes perciben el azar, la forma de la distribución, la forma en que vinculación el enfoque clásico de probabilidad y el enfoque frecuencial.

Pregunta 1

La primera pregunta tiene como propósito examinar cómo reconocen los estudiantes la variación y agrupación, así como los valores más probables en una distribución binomial en la que desconocen las probabilidades de ocurrencia para cada evento.

Supongamos que tenemos una urna con 10 pelotas en su interior, de las cuales 5 son de color rojo, 2 de color amarillo y 3 de color verde. Se sacan 10 pelotas con reemplazo.

1. ¿Cuántas pelotas rojas esperarías conseguir? Justifica tu respuesta.

Figura 19. Pregunta 1 del segundo cuestionario

Para la primera pregunta se consideran diferentes niveles de respuestas correctas, sin embargo, la más adecuada es aquella que considera dos aspectos: el valor más probable y la variabilidad. Esto se debe traducir en esperar un resultado "alrededor de 5 bolas rojas" que podría traducirse en una afirmación más precisa acerca de un rango de valores, por ejemplo: "Se esperan que salgan entre 4 y 6 bolas rojas" o "se espera que salgan entre 3 y 7 bolas rojas". Para cada rango de valores se puede calcular la probabilidad de que el resultado caiga en dicho rango.

Otro tipo de respuestas parcialmente correctas son aquellas que señalan al menos un rasgo importante de la distribución, por ejemplo: el valor esperado; también se clasifica como parcialmente correcta una respuesta que elige un elemento cercano a la media, considerando que la media es el evento más probable y la variabilidad.

Una respuesta incorrecta será aquella que no expresa que el valor más probable es la media y elige cualquier otro evento cercano a los extremos, ya sea un intervalo o un valor fijo.

Pregunta 2

El propósito de la pregunta dos es analizar cómo los estudiantes perciben y tratan los casos extremos de la distribución binomial, además del reconocimiento y expectativa que tienen sobre la variación en situaciones de azar para los resultados y cómo aprecian la forma de la distribución sin saber calcular sus probabilidades.

2. ¿Qué número de pelotas rojas no esperarías conseguir? Justifica tu respuesta.

Figura 20. Pregunta 2 del segundo cuestionario

Una respuesta correcta es aquella que considera dos aspectos: la variabilidad y los casos menos frecuentes. Dar rangos de valores que consideren ambos extremos es una respuesta correcta, por ejemplo: “del cero al dos y del ocho al diez”.

Las respuestas parcialmente correctas consideran sólo uno de los aspectos anteriores o únicamente uno de los casos extremos. Por ejemplo: elegir el evento extraer cero rojas como el resultado que no esperarían conseguir, elegir los eventos extraer cero y una pelota roja como los resultados que no esperarían conseguir.

Una respuesta incorrecta es aquella que da un número al azar sin dar un argumento válido o un número muy cercano de la media. Por ejemplo: extraer cuatro pelotas rojas de la urna.

Pregunta 3

El objetivo de la pregunta tres va orientado a analizar la percepción, que tienen los estudiantes, para el rango de los posibles resultados que se podrían conseguir al realizar varias muestras, sus expectativas sobre la variación y la forma en que reconocen la distribución.

3. Se realiza el experimento de sacar 10 pelotas de la urna con reemplazo seis veces.
   a) ¿Cómo crees que serán los resultados? Anota tus predicciones en la siguiente tabla.

Número por cada diez extracciones	Número de rojas
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Tabla 1

Figura 21. Pregunta 3 del segundo cuestionario

Una respuesta correcta es aquella que considera la variación y la distribución, por ejemplo: utilizar intervalos en cada una de las entradas alrededor de la media “de cuatro a seis”;

utilizar un resultado para cada entrada alrededor de la media, para las primeras diez extracciones 5, para las segundas diez extracciones 4, etcétera.

Una respuesta incorrecta es aquella que no toma en cuenta la variabilidad de los datos cayendo en un determinismo, es decir que todos los resultados que proponga el estudiante sean el valor esperado, en este caso la media, sacar cinco pelotas rojas de la urna.

Otro tipo de respuesta, que consideraremos incorrecta, se presenta cuando los valores propuestos se encuentran muy por debajo de la media o por arriba de ella, por ejemplo: la lista 0, 2, 1, 1, 2, 3 con resultados pegados a uno de las colas de la distribución.

Pregunta 4

La pregunta cuatro proporciona un contexto similar al anterior, pero en lugar de que el estudiante asigne los resultados al realizar el experimento seis veces se le pide que escoja de entre siete tablas, con resultados diferentes, en los que deberá tomar en cuenta la media y la dispersión de los datos para seleccionar alguna de ellas. El propósito de la pregunta es analizar cómo los estudiantes perciben la variación y agrupación para elegir un rango de posibles resultados.

Dentro del problema cuatro se encuentran dos incisos diferentes: en el primero debe de elegir la tabla que, para ellos, describe de la mejor manera lo que podría suceder si se realiza el experimento; en el segundo inciso, que es el caso contrario, deben seleccionar la tabla que, para ellos, describe lo que casi no podría haber sucedido si se realiza el experimento.

4. Siete estudiantes llenaron la tabla anterior de la siguiente manera:

Número por cada diez extracciones	Número de rojas de Juan	Número de rojas de Pedro	Número de rojas de Luis	Número de rojas de Iván	Número de rojas de Paco	Número de rojas de Alex	Número de rojas de Alan
1	5	3	5	2	7	3	10
2	9	7	5	3	7	0	10
3	7	5	5	4	7	9	10
4	6	8	5	3	7	2	10

5	8	5	5	4	7	8	10
6	7	4	5	4	7	5	10

Tabla 2

a) ¿Cuál de los estudiantes a través de su tabla crees que describe mejor lo que podría suceder? Justifica tu respuesta.
b) ¿Cuál de los estudiantes a través de su tabla crees que describe peor lo que podría suceder? Justifica tu respuesta.

Figura 22. Pregunta 4 del segundo cuestionario

Para el primer inciso (a) una respuesta correcta es la que seleccionan la tabla de Pedro como la que mejor describe lo que podría ocurrir si se realiza el experimento. La media de dicha tabla es de 5.33 con una desviación estándar del 1.81, además su rango va del número tres al ocho, toda esta información agrupa rasgos importantes de la distribución de la población en la muestra.

Una respuesta incorrecta para el inciso (a) es seleccionar cualquiera de las demás tablas, cayendo en diferentes categorías. Por ejemplo: una respuesta que indica que la tabla de Luis es la que mejor describe lo que ocurriría si se realiza el experimento cae en el determinismo, aunque identifique que el evento más probable es extraer cinco rojas de la urna deja de lado a la variabilidad de los datos.

Pregunta 5a

La pregunta 5a hace referencia a la variable aleatoria y pide a los estudiantes ordenar los valores de la variable de acuerdo a su probabilidad (de menor a mayor probabilidad). El objetivo principal de la pregunta es analizar la apreciación que tienen los estudiantes de la forma de la distribución, tanto de sus valores centrales como el de los casos extremos.

a) ¿Cómo ordenarías los valores que toma la variable aleatoria de menor a mayor probabilidad? Justifica tu respuesta

Figura 23. Pregunta 5a del segundo cuestionario

Se considera una respuesta correcta aquella que menciona todos los valores de la variable aleatoria y que los agrupa de manera correcta de menor a mayor probabilidad, es decir: los extremos cero y diez rojas como los eventos de menor probabilidad; enseguida los eventos extraer una y nueve pelotas rojas; después los eventos dos y ocho rojas; posteriormente los eventos tres y siete rojas; luego los valores más cercanos a la media, extraer seis y cuatro rojas; por último la media, cinco rojas, como el evento con mayor probabilidad.

Una respuesta parcialmente correcta menciona todos los valores de la variable aleatoria y ordena correctamente dichos valores, pero sin llegar a agruparlos. Por ejemplo: 10, 0, 9, 1, 8, 2, 7, 3, 6, 4 y 5, en esta respuesta no menciona que algunos de los eventos tienen la misma probabilidad como es el caso de los extremos, extraer diez o extraer cero pelotas rojas.

Una respuesta incorrecta es la que no menciona todos los valores de la variable aleatoria y/o no ordena correctamente de menor a mayor probabilidad.

Pregunta 5b

Para el segundo inciso (b) de la pregunta 5 se les pide seleccionar de entre cuatro tablas por la que creen que podría ocurrir si se realizara el experimento de extraer diez pelotas de la urna con reemplazo cien veces. Las tablas se encuentran ordenadas por el número de pelotas rojas conseguidas. El propósito de este inciso (b) es el de examinar y comparar la percepción que tienen los estudiantes por la forma de la distribución y la variabilidad de los datos. Con el inciso anterior ordenaron a la variable aleatoria de menor a mayor probabilidad, ahora deben elegir alguna de las tablas para observar si vinculan ambas preguntas.

b) ¿Cuál de las siguientes tablas crees que sea la que se obtuvo al realizar el experimento cien veces? Puedes realizar su grafica de barras de cada tabla para observar mejor la distribución de las bolas rojas. Justifica tu respuesta

Número de rojas	Frecuencia
0	0
1	2
2	1
3	14
4	12
5	30
6	24

Número de rojas	Frecuencia
0	6
1	11
2	5
3	11
4	7
5	5
6	14

Número de rojas	Frecuencia
0	0
1	1
2	4
3	10
4	15
5	20
6	15

Número de rojas	Frecuencia
0	0
1	0
2	0
3	1
4	6
5	11
6	15

7	9
8	6
9	2
10	0

Tabla 1

7	13
8	12
9	8
10	8

Tabla 2

7	10
8	4
9	1
10	0

Tabla 3

7	35
8	21
9	10
10	1

Tabla 4

Figura 24. Pregunta 5b del segundo cuestionario

La elección de la tabla 1 se considera como la respuesta correcta, creada a través del software Fathom con una distribución binomial (n=10, p=1/2) simulando lo que podría suceder si se extraen diez pelotas, cien veces, de la urna con 5 pelotas rojas, 2 amarillas y 3 verdes. En la tabla 1 se reflejan los rasgos importantes de una muestra para la distribución binomial con la que se ha trabajado, pues aproximadamente los resultados son parecidos a los teóricos, pero con una ligera variación.

La elección de las otras tablas es considerada como una respuesta incorrecta, con excepción de la tabla 3, no contienen los rasgos importantes de una muestra con una población con distribución binomial, con *n* igual a 10 y *p* igual a ½, por ejemplo: para la tabla 2 se muestra la muestra de una distribución uniforme, por lo que cada una de las entradas varía aleatoriamente; la tabla 4 se trata de una muestra con distribución binomial, pero con *n* igual a siete décimos. La tabla 3 es contiene los valores esperados teóricos y, por tanto, es representativa del experimento, sin embargo, su elección no consideraría la variabilidad que naturalmente se presenta en la práctica.

Pregunta 5d

La última pregunta del cuestionario (5d) muestra cinco gráficas diferentes, los estudiantes deberá elegir la que creen que ocurriría si se realiza el experimento. Los resultados de las tablas se encuentran agrupados por los intervalos (0,3), (4,8) y (7,10). El objeto de la última pregunta es el de analizar la apreciación que tienen los estudiantes de la distribución y la agrupación de los resultados y, por tanto, sus expectativas sobre la variabilidad en las muestras.

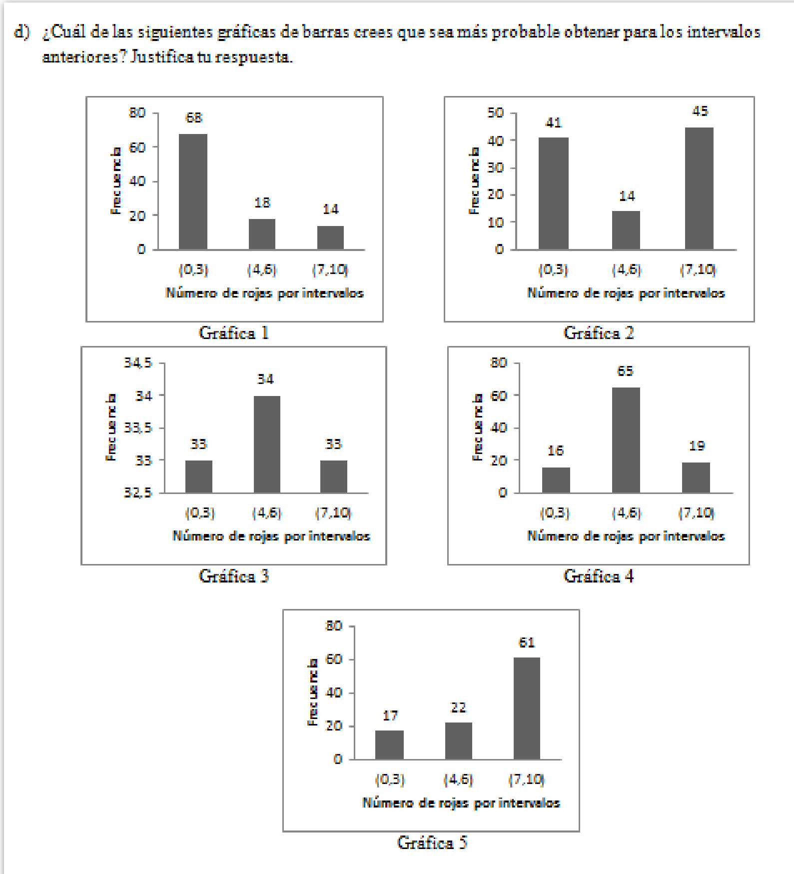


Figura 25. Pregunta 6 del segundo cuestionario

La elección de la gráfica cuatro se considera como la respuesta correcta, pues condensa una mayor probabilidad en el intervalo que rodea a la media con una frecuencia de 65 y frecuencias parecidas en los otros dos intervalos, de 16 y 19.

La elección de cualquiera de las otras gráficas se considera como una respuesta incorrecta cayendo en diferentes errores, por ejemplo: los estudiantes que seleccionan la gráfica 3 caen en el sesgo de equiprobabilidad, pues las tres frecuencias de los intervalos son casi las mismas, con diferencia de un solo resultado.

4.4 Fases de la investigación

4.4.1 Procedimiento de ejecución

El trabajo de investigación se aplicó dentro del horario de la clase de matemáticas de los estudiantes, los trabajos fueron evaluados por el profesor del grupo (quien además es el investigador y autor del presente trabajo) para incentivarlos a realizar las actividades de la mejor manera. La aplicación se realizó en 6 sesiones durante dos semanas: cuatro sesiones de dos horas y dos de una hora. A continuación, se presentan las 4 fases de investigación.

4.4.2 Fase 1. Actividad 1: Aplicación del pre-test

En la primera fase del estudio se presentó a los estudiantes los dos pre-test: el lanzamiento de dos monedas al aire y la extracción de pelotas de una urna. Podían responder con cualquier herramienta que tuvieran a la mano en su salón normal de matemáticas, por lo que algunos estudiantes optaron por realizar algunos experimentos físicos para lograr predicciones y conjeturas, mientras que otros se basaron en sus concepciones y experiencias pasadas. Se aclararon las dudas que surgían durante la sesión para que los estudiantes no tuvieran problemas en comprender lo que se pedía en cada cuestionario. Esta actividad tuvo una duración de una hora.

4.4.3 Fase 2. Actividad II: Experimentación Física

En la segunda fase de la investigación se les proporcionó dos juegos de hojas de trabajo: uno sobre el experimento de lanzar monedas y otro de extraer pelotas de una urna, para que los estudiantes se familiarizaran con cada situación y así poder proponer ideas de solución al problema o conjeturas nuevas a partir de los experimentos. Además, para poder contestar las hojas de trabajo se les suministró las urnas y las pelotas a los estudiantes, las monedas al ser objetos que normalmente las personas llevan consigo no se les proporcionó. La primera actividad constó de lanzar varias veces dos monedas, para ver cuál secuencia era más probable, como por ejemplo Águila-Águila o Sol-Sol; los resultados se hacían individualmente, pero se exponían ante el grupo para poder generar más datos. La segunda actividad de urnas es sobre una pregunta en específico: ¿Cuál de los siguientes eventos considera que es más probable (o son igual de probables) ?: evento A: Sacar 5 rojas en 10 extracciones o evento B: Sacar 50 rojas en 100 extracciones (Véase anexo A). Está fase duro dos sesiones de dos horas cada una.

4.4.4 Fase 3. Actividad III: Experimentación con el software Fathom Dynamic Data

La tercera fase hizo posible trabajar con numerosos casos en cuestión de segundos, a diferencia de la segunda fase donde se realizó el experimento. Fathom Dynamic Data facilitó la creación y recolección de datos. Con los experimentos físicos, las tareas a realizar se vuelven tediosas y en varias ocasiones imposibles de realizar, por ejemplo: el lazar dos monedas mil veces en menos de un minuto. Los dos cuestionaros, de esta sección, se enfocaron en la ley de los grandes números, la variabilidad, el azar y la incertidumbre que hay en las situaciones que se trabajaron. Para el primer cuestionario se les pidió hacer hasta mil lanzamientos con dos monedas. Con los datos generados a partir de Fathom construyeron un gráfico en las hojas de trabajo que se les proporcionó: marcando con un punto los resultados de las frecuencias que obtenían dependiendo del número de casos y uniéndolos más tarde con líneas rectas para que los estudiantes observaran que las frecuencias relativas se estabilizaban alrededor de un número, sin embargo, no todos los estudiantes relacionaban este número con las probabilidades de cada evento. Para el segundo cuestionario, de igual forma, se manejó el ejercicio con ayuda de la ley de los grandes números, dando muestras de tamaño cada vez más grandes y pidiendo a los estudiantes algunos rangos de solución en lugar de solo un resultado aislado (Véase apéndice B). Esta fase duró dos sesiones de dos horas cada una.

4.4.5 Fase 4. Actividad IV: Aplicación del post-test

Para esta última fase, se les aplicó a los estudiantes el post-test que contenía los mismos reactivos que el pre-test. La aplicación de ambos cuestionarios duro una hora.

4.5 Procedimiento del análisis

El análisis de las respuestas de los estudiantes se apoyó en rasgos importantes de la Teoría Fundamentada proporcionando un conjunto de estrategias útiles para el conjunto de procedimientos y técnicas de recolección, examinación y síntesis de datos. La Teoría Fundamentada se desarrolló en 1967 por Barney Glaser y Anselm Strauss, en la práctica se refieren a ella como un modo de análisis para las investigaciones. “Es un método cualitativo que ofrece una manera de representar la realidad que arroja luz o entendimiento sobre lo estudiando” (De la Cuesta Benjumea, 2006). Es utilizada dentro de las investigaciones para establecer categorías a partir de la observación, análisis y síntesis de los datos y las relaciones encontradas de éstas. Se trata de una investigación analítica del mundo de los participantes y de los procesos para construir esos mundos, como comentó Charmaz en el 2005.

En un sentido más amplio, “los estudios cualitativos tienen como objetivo describir y explicar un patrón de relaciones, que sólo se pueden hacer con un conjunto de categorías conceptualmente especificados” (Mishler, 1990, p. 431). Su objetivo es generar, identificar y rastrear los conceptos principales de un fenómeno, que en conjunto constituyen su marco teórico.

Para la presente investigación se utilizaron los siguientes procedimientos de la Teoría Fundamentada:

Recolección y análisis de datos. El procedimiento de recoger y analizar los datos debe ser de forma sistemática y secuencial permitiendo al proceso de investigación capturar los aspectos relevantes del tema.

Los conceptos son las unidades básicas de análisis. Se trabaja con la conceptualización de los datos, no con los “datos en bruto”. Debe existir una comparación de los incidentes y nombrarlos como fenómenos con el mismo término.

Las categorías deben ser desarrollados y relacionados. Los conceptos que se refieren al mismo fenómeno se pueden agrupar para formar categorías, aunque no todos los conceptos llegaran a ello. Se realizan comparaciones para resaltar similitudes y diferencias que se utilizan para producir dichas categorías, después deben ser desarrollados en términos de sus propiedades y dimensiones del fenómeno que representará, una vez que se definen las categorías se les da un poder explicativo. Con el tiempo las categorías pueden ser relacionadas entre sí para formar una teoría.

Muestreo en la teoría fundamentada producto de las bases teóricas. El muestreo de la Teoría Fundamentada no procede en términos de la toma de muestras de los grupos específicos de individuos, tiempo, etc., sino de los términos de conceptos, propiedades y variaciones. Cuando comienza un proyecto, el investigador se propone estudiar un fenómeno, con base en ello los individuos, organizaciones o representantes de la sociedad de ese fenómeno pueden ser seleccionados para el estudio. La representatividad de los conceptos, no de las personas, es crucial en la Teoría Fundamentada. El objetivo es construir una explicación teórica mediante la especificación de los fenómenos en términos de condiciones que dan lugar a ellas, la forma en que se expresan a través de la acción y la interacción, las consecuencias que se derivan de ellas y las variaciones de estos calificadores.

Análisis hace uso de comparaciones constantes. Los conceptos resultantes se etiquetan como tal, comparándolos y se agrupándolos. Las comparaciones ayudan a logran una mayor precisión y consistencia. La precisión se incrementa cuando la comparación conduce a la subdivisión de un concepto original, dando lugar a dos conceptos diferentes o variaciones sobre el primero.

Los patrones y variaciones deben tenerse en cuenta. Los datos deben ser examinados con las mismas condiciones. La búsqueda de patrones variaciones ayuda a dar fin a irregularidades y facilita la integración de conceptos.

Corbin y Strauss, en 1990, comentaron que los procedimientos de la Teoría Fundamentada están diseñados para desarrollar un conjunto bien integrado de conceptos que proporcionan una exhaustiva explicación teórica de los fenómenos sociales en estudio. Además, puede proceder de diversas fuentes, es decir, en los procedimientos de recolección de datos es posible involucrar entrevistas, observaciones u otros documentos, cualquier cosa que pueda ayudar a realizar la teorización.

Capítulo 5

Análisis y resultados

El propósito de este capítulo es describir y analizar los datos proporcionados por 13 estudiantes de cuarto semestre de bachillerato quienes participaron en la investigación. Se pone especial atención en determinar los niveles de razonamiento probabilístico que alcanzan las respuestas que dieron los de los estudiantes a los problemas antes y después de trabajar con el software Fathom. En especial, el análisis se enfoca en cómo expresan sus ideas acerca de la variación, distribución, espacio muestra y aleatoriedad presente en los problemas.

La exposición se realiza en dos apartados separados que corresponden a cada cuestionario, en cada uno se encuentran tres elementos importantes: las categorías de las respuestas de los estudiantes, que se establecieron con apoyó de rasgos importantes de la teoría fundamentada como la observación, el análisis y la síntesis de datos; el análisis del pre-test, que corresponde al cuestionario aplicado antes de que los estudiantes tuvieran contacto con el software Fathom y el análisis del pos-test que corresponde al cuestionario aplicado después de que los estudiantes interactuaran con el software Fathom.

5.1 Cuestionario 1 (Pre-test)

A continuación, se muestran los reactivos importantes con los cuales se analizaron los datos y, en cada uno de ellos, se presenta una categorización a partir de clasificar y examinar las respuestas de los estudiantes.

5.1.1 Análisis de las respuestas a la pregunta 1

La primera pregunta es sobre un juego de azar cuyos resultados se modelan mediante una distribución binomial (n=2, p=1/2). La situación se refiere a la variable aleatoria "el número de águilas en el resultado" aunque esta no se presenta de manera explícita.

1. Se realiza una apuesta lanzando dos monedas al aire ¿por cuál de los siguientes eventos apostarías y por qué?

a) Evento A: Que caigan cero águilas
b) Evento B: Que caiga un águila
c) Evento C: Que caigan dos águilas

Figura 26. Pregunta 1 del primer cuestionario

Las respuestas se clasificaron considerando los siguientes niveles:

Nivel 1.

Eligen a cualquiera de los tres eventos con sesgo de equiprobabilidad: En este nivel se clasifican las respuestas que caen en el sesgo de equiprobabilidad, el cual se refiere a la creencia de que todos los sucesos asociados a un experimento aleatorio tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

Nivel 2.

Eligen el evento B con una argumentación subjetiva (inadecuada): En este tipo de respuestas los estudiantes realizan una elección que depende del conocimiento y la experiencia que se tiene, es condicionada por los conocimientos. Por ejemplo, saben que existe un 50% de probabilidad de que en una moneda caiga águila, con base a este resultado expresan que el evento B es más probable y por ello lo eligen.

Nivel 3.

Eligen el evento B con argumentos correctos, asignan las probabilidades respectivas. Los estudiantes que eligen el evento B por ser el más probable y que justifican su respuesta a partir de una comparación de las probabilidades responden y argumentan correctamente a la primera pregunta. La probabilidad de que ocurra el evento B es de ½, mientras que A y C tienen cada uno ¼.

Para analizar con más detalle las respuestas fue necesario vincular los diferentes reactivos y así tener un panorama mayor de los cálculos y heurísticas que utilizaban los estudiantes. A continuación, se describen los porcentajes de respuestas de cada nivel y se ofrecen ejemplos ilustrativos. El orden de exposición será de las respuestas de nivel uno a las respuestas de nivel tres.

Nivel 1: Eligen a cualquiera de los tres eventos con sesgo de equiprobabilidad

Uno de los estudiantes, correspondiente al 8%, no elige ningún evento en especial para realizar la apuesta, ya que cae en el sesgo de equiprobabilidad al decir que todos los eventos son igual de probables, menciona que da igual cuál evento escoger. Sin embargo, aunque sólo un estudiante expresó en su respuesta el sesgo de equiprobabilidad en esta pregunta, para el reactivo 3 que pregunta explícitamente por las probabilidades de los tres eventos se encontró que el 46% de los estudiantes también creían en la equiprobabilidad en la situación, aunque anteriormente habían escrito que el evento más probable era el B

> Sergio: “Yo creo que es igual de probable, así que no apostaría por una en especial, ‘la que sea sería igual apostarle’"

Nivel 2: Eligen el evento B con una argumentación subjetiva (inadecuada)

El 85% de las respuestas de los estudiantes, 11 de los 13, eligieron el evento B dando razones subjetivas. Se encontraron cinco formas diferentes de argumentar: 1) porque hay 50% de probabilidad de que caiga águila en un volado, 2) por la *ley de los pequeños números*, 3) por ser una situación azarosa, 4) porque son más probables las secuencias alternadas y 5) porque si cae águila en una moneda, puede caer sol en la otra.

El 23% de las respuestas de los estudiantes, 3 de los 13, eligen al evento B por la primera forma de justifica, basan su respuesta en alguna percepción o dato que conozcan de la situación, en este caso consideran únicamente la probabilidad de sacar un águila al lanzar una moneda.

> Gamaliel: “El evento B, porque se tiene el 50% de que una puede caer águila en una moneda y como son 2 monedas aumentan las posibilidades”

Dos estudiantes (15%) expresaron la idea de que las secuencias alternadas eran más probables, eligen al evento B por contener elementos diferentes (un águila y un sol). Por un lado, la respuesta del estudiante Francisco hace referencia a que es más probable obtener secuencias alternadas, este estudiante identifica sólo tres de los cuatro elementos del espacio muestra (Pregunta 2) y asigna la misma probabilidad de ocurrencia a los tres eventos cayendo en el sesgo de equiprobabilidad (Preguntas 3, 4 y 5), no vincula la distribución que espera con el evento más probable; por otro lado, las respuesta de Lucia expresa que es complicado obtener dos soles o dos águilas, aunque su justificación es incorrecta cuenta correctamente los elementos del espacio muestra (Pregunta 2), es posible que sea consciente de que dentro del espacio muestra existen dos elementos que contienen un águila (AS y SA) y sólo uno para dos soles o uno para dos águilas (SS o AA).

> Lucia: “Podría ser la B porque al lanzarlos es complicado que ambos salgan sol o ambas águilas”

> Francisco: “Evento B: es que es probable que caigan una cara diferente a la otra”

Otro de los estudiantes sólo considera el resultado de la segunda moneda al condicionar que en la primera moneda salga sol, tras de este pensamiento hace su inferencia de que obtener un águila (evento B) es mejor opción.

> Michelle: “B, porque podría caer sol en la otra moneda”

Uno de los estudiantes (8%) realizó el experimento de lanzar dos monedas al mismo tiempo, con el argumento de que hacerlo le proporcionaría información necesaria para responder la pregunta. El estudiante obtuvo “Águila-Sol” por lo que decide escoger la respuesta B como la más probable. En este caso no reflexiona que al tomar una muestra tan pequeña la variabilidad es grande y no permite realizar la inferencia.

> Luis: “B, porque se hizo el experimento, en el cual sólo dio como resultado un águila y un sol”

Cuatro de los ocho estudiantes (31%) cuyas respuestas fueron clasificadas dentro del Nivel 2, expresaron la idea de azar en sus respuestas sin importar las probabilidades de los eventos. Por ejemplo: una de las estudiantes, Dulce, considera el azar y la incertidumbre de la situación por lo que, para ella, cualquier evento puede ocurrir, en este caso elige el evento B por cuestiones de azar. Un caso especial es el de la estudiante Lesley, ya que por sus respuestas posteriores se aprecia que comprende que B es el evento más probable con el 50% y los otros dos con 25% cada uno, sin embargo, elige el evento C porque es un suceso que puede acontecer sin importar la distribución, sólo el azar.

> Dulce: “B, porque es cuestión de azar, hay probabilidad de que sea una y una”

> Lesley: “El evento C, porque existe la probabilidad”

> Noel: “El evento B, porque es un juego a azar y tal vez hay ciertas probabilidades de que caiga ‘sol’ cómo ‘águila’”

Nivel 3: Eligen el evento B argumentando correctamente con las probabilidades respectivas

Uno de los 13 estudiantes (8%) respondió que elegiría el evento B por tener mayor probabilidad, en esta respuesta no se ofrece una justificación para apoyar la decisión, sin embargo, en sus respuestas a otros reactivos se observa que cuenta correctamente todos los elementos del espacio muestral y de la variable aleatoria, además da las probabilidades correctas para los tres eventos. Por lo tanto, conoce cuales son las probabilidades de cada evento, aunque no hace mención de ellas en la respuesta proporcionada.

> Luz: “B, porque hay más probabilidad”

En la tabla 27 se resume la información antes descrita, tomando en cuenta las variables analizadas.

Nivel	Descripción	Número de respuestas
1	Eligen a cualquiera de los tres eventos con sesgo de equiprobabilidad	1
2	Eligen el evento B con una argumentación subjetiva (inadecuada)	11

3	Eligen el evento B argumentando correctamente con las probabilidades respectivas	1
	Total	13

Tabla 1

5.1.2 Análisis de las respuestas a la pregunta 2

Ahora bien, con la segunda pregunta se analizó cuantos de los estudiantes lograron identificar todos los elementos del espacio muestra, sin caer en la creencia de que los eventos {Águila, Sol} y {Sol, Águila} son el mismo al contener ambos 1 águila y 1 sol.

2. ¿Cuántos posibles resultados puedes obtener al lanzar dos monedas al aire y cuáles son?

Figura 27. Pregunta 2 del primer cuestionario

Las categorías utilizadas para la presente pregunta son las siguientes:

Nivel 1

No entiende correctamente el concepto de espacio muestra: si el estudiante contesta algo diferente a lo preguntado, se considera que no entiende la pregunta o no entiende el significado de espacio muestra.

Nivel 2

No considera uno de los elementos del espacio muestra: En la mayoría de las respuestas de los estudiantes consideraron sólo 3 de los 4 elementos, al no contar todos se considera una respuesta incorrecta.

Nivel 3

Cuenta correctamente los elementos del espacio muestra: el espacio muestra de la situación binomial que se analiza consta de 4 elementos $\omega = \{(Águila, Águila), (Águila, Sol), (Sol, Águila), (Sol, Sol)\}$, el estudiante debe identificar cada uno de ellos.

Nivel 1. No entiende correctamente el concepto de espacio muestra

Uno de los estudiantes (8%) respondió que podía obtener dos resultados diferentes: “águila y sol”, cuenta únicamente los resultados que pueden salir al lanzar una moneda, no los elementos del espacio muestra del experimento compuesta, lanzar dos monedas al aire.

Gamaliel: “Se pueden obtener 2 resultados: águila – sol”

Nivel 2. No considera uno de los elementos del espacio muestra

El 46% de los estudiantes contestaron que hay tres elementos del espacio muestra, dando por hecho que los dos eventos donde resulta un águila se trataba del mismo. Además, ignorando la teoría clásica, que indica que la probabilidad de un evento es igual a los casos favorables entre los casos totales, pues eligen al evento B como el más probable para la primera pregunta.

$$Probabilidad\ de\ un\ evento = \frac{casos\ favorables}{casos\ totales}$$

De estos ochos estudiantes, Sergio fue el único que a partir de lo que él contó como todos los elementos del espacio muestra realizó el análisis para poder responder las demás preguntas.

Nivel 3. Cuenta correctamente los elementos del espacio muestra

En el 46% de las respuestas, 6 de los 13, se contaron todos los elementos del espacio muestra; es decir 4 elementos.

Lesley: “Cuatro: Águila-Sol, Sol-Águila, Águila-Águila, Sol-Sol”

La tabla 2 muestra la distribución de las respuestas de los estudiantes a la pregunta dos.

Gamaliel: “Se pueden obtener 2 resultados: águila – sol”

	Respuestas (Cardinalidad del EM)	Total
Nivel 3	4 elementos	6
Nivel 2	3 elementos	6
Nivel 1	otra respuesta	1
	Total	13

Tabla 2

5.1.3 Análisis de las respuestas de las preguntas 3, 4 y 5

Las siguientes preguntas (3, 4 y 5) se realizaron para observar si los estudiantes sabían cuál era la distribución de cada uno de los eventos. Las respuestas correctas en este inciso se podían conseguir por diferentes métodos, por ejemplo, reconociendo todos los elementos del espacio muestra.

> 3. ¿Cuál es la probabilidad de que caigan cero águilas si se lanzan dos monedas al aire?
> 4. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga un águila si se lanzan dos monedas al aire?
> 5. ¿Cuál es la probabilidad de que caigan dos águilas si se lanzan dos monedas al aire?

Figura 28. Preguntas 3, 4 y 5 del primer cuestionario

Las siguientes categorías fueron creadas tras analizar las respuestas de los estudiantes:

Nivel 1.

Probabilidades incorrectas: Para esta categoría se observó que las respuestas, dadas por los estudiantes, no tenían congruencia, por ejemplo: la suma de las probabilidades asignadas a los eventos es mayores a uno.

Nivel 2.

Equiprobabilidad: Sesgo presentado por varias respuestas, referente a la creencia de que los resultados asociados a un experimento aleatorio son equiprobables, es decir, tienen la misma probabilidad. Esta categoría se ha dividido en dos, ya que un aspecto observado en las respuestas de los estudiantes es que no todos identifican que la suma de las probabilidades debe ser igual que uno (o el 100%).

a) Equiprobabilidad con suma de probabilidad igual que uno
b) Equiprobabilidad con suma de probabilidades diferente a uno

Nivel 3.

Probabilidades correctas: La probabilidad del evento A es del 25%, la probabilidad del evento B es del 50% y la probabilidad del evento C es del 25%, si los estudiantes plasman las tres probabilidades correctamente se clasifican en esta categoría.

A continuación, se describen los porcentajes de respuestas de cada nivel y se ofrecen ejemplos ilustrativos.

Nivel 1. Probabilidades incorrectas

En el 31% de las respuestas de los estudiantes, 4 de los 13, se dieron probabilidades incorrectas que al no ser justificadas resulta difícil hablar de las heurísticas utilizadas para llegar a ellas. De estos cuatro estudiantes, tres de ellos arrojaron al evento B como el más probable y sólo dos de estas respuestas fueron cercanas a los resultados teóricos, pues, asignaron a los eventos A y C iguales probabilidades, aunque incorrectas; el otro estudiante asignó mayor probabilidad a los eventos A y C, por lo que el evento B fue colocado como el de menor probabilidad.

> Jesús: 3: “20%”; 4: “40%”; 5: “20%”
>
> Pamela: 3: “un 25% de probabilidad 1 de 4” 4: un 75% de probabilidad 3 de 4” y 5: un 50% de probabilidad 2 de 4”
>
> Gamaliel: 3: “Se reducen en un 50%”; 4: “un 25%” y 5: “el 50% de probabilidad”

Nivel 2. Equiprobabilidad

El 46% de los estudiantes, 6 de ellos, manifestaron el sesgo de equiprobabilidad, sin embargo, la mitad no tomó en cuenta que la suma de las probabilidades tiene que ser igual que uno, asignaron las mismas probabilidades a los tres eventos, pero mayores a un ½

> Sergio: 3: “33.3% que corresponde de que caigan 2 soles”; 4: “33.3% que corresponde de que caigan 2 soles” y 5: “33.3% que corresponde de que caigan 2 soles”

Francisco: 3: “una probabilidad 2/4”; 4: “una probabilidad 2/4” y 5: “una probabilidad 2/4”

Nivel 3. Probabilidades correctas

El 23% de los estudiantes, 3 de los 13, respondieron correctamente la probabilidad de los tres eventos, a pesar de que casi la mitad de los estudiantes contaron todos los elementos del espacio muestra y que, en la primera pregunta, afirmaban que el evento más probable era el B, sólo algunos estudiantes lograron llegar a las probabilidades correctas.

Noel: 3: “25%”; 4: “25%”; 5: “25%”

En general, el análisis de las respuestas de los estudiantes es difícil porque son muy escuetas; sólo el caso de Lucía, quien justifica su respuesta, se puede analizar un poco mejor. En la pregunta 2, Lucía cuenta todos los elementos del espacio muestra, pero al llegar a la pregunta 4 vuelve a contar dichos elementos para asignar la probabilidad del evento B, sin embargo repite el elemento (Águila, Sol) en lugar de contar el elemento (Sol, Sol), $\omega = \{(Sol, Águila), (Águila, Sol), (Águila, Águila), (Águila, Sol)\}$, por lo que al realizar una estimación de probabilidad con base a la teoría clásica se tendrán 3 de 4 elementos, dando como probabilidad ¾ o 75%

Lucía: 3: “1/4 al hacer combinaciones sólo en una cae sol-sol, las demás llevan combinación”; 4: “¾”, 5: “¼”

En la tabla 3 se muestra el resumen del análisis anterior para las preguntas 3, 4 y 5 por categorías.

	Categorías	Suma de probabilidades	Número de respuestas
Nivel 3	Probabilidades correctas	$= 1$	3
Nivel 2	Equiprobabilidad	$= 1$	3
Nivel 1		$\neq 1$	3
Nivel 1	Probabilidades incorrectas	$\neq 1$	4
	Total		13

Tabla 3

5.1.4 Análisis de las respuestas a las preguntas 7 y 8

Las preguntas siete y ocho se utilizaron para que el alumno plasmara sus ideas sobre qué esperaría que ocurriese si repitiera el juego de lanzar dos monedas al aire 60 veces. La pregunta siete se les aplicó para que dieran una secuencia de los posibles resultados que se esperarían obtener al lanzar dos monedas, colando 0 si obtuvieron la secuencia {Sol, Sol}, 1 si obtuvieron la secuencia {Águila, Sol} o {Sol, Águila} y 2 si obtuvieron la secuencia {Águila, Águila}. Por otro lado, en la pregunta ocho se les pide realizar una predicción de las frecuencias que esperarían obtener para los tres eventos de un histograma, con el fin de observar si los estudiantes perciben y consideran la aleatoriedad, variabilidad y la distribución de la situación.

7 Supongamos que se ha jugado 60 veces, llena la tabla con los resultados que esperarías obtener al lanzar dos monedas

Número de lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Número de águilas																				
Número de lanzamiento	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Número de águilas																				
Número de lanzamiento	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Número de águilas																				

8 Suponiendo que realizaste el experimento dibuja las barras de los posibles resultados, teniendo en cuenta la escala dada. Escribe el número de veces o el porcentaje, según sea el caso, sobre cada barra.

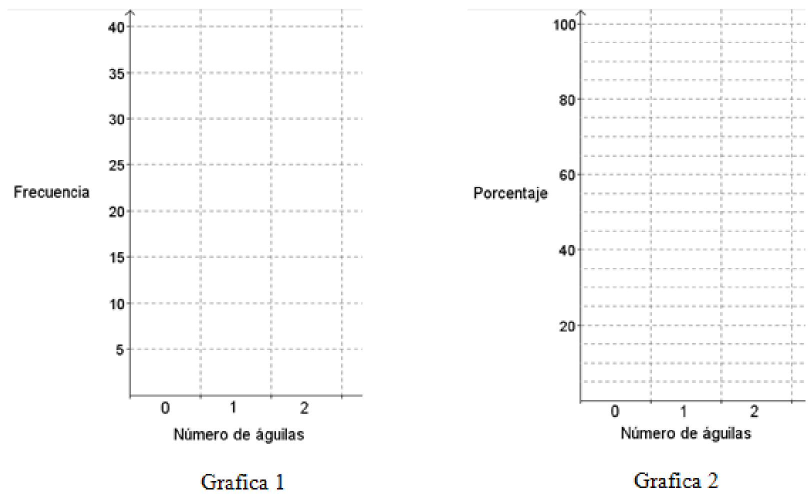


Figura 29. Preguntas 7 y 8 del primer cuestionario

Una conducta inesperada de algunos estudiantes en estas dos preguntas fue que realizaron el experimento, a pesar de que no era lo que se les pedía, argumentando que sería más apegado a la realidad. En estos casos no fue posible detectar los razonamientos que desarrollarían para llenar la tabla si no se les hubiera permitido realizar el experimento. Además, la mayoría de estos estudiantes dijeron que lo que esperaban obtener al realizar el experimento 60 veces, para las frecuencias de la pregunta 8, era el resultado conseguido por el experimento aleatorio de la pregunta 7. Estos dos problemas se dieron por no especificar en las preguntas que no se podía realizar el experimento binomial y que tenían que dar frecuencias diferentes a las encontradas.

5.1.5 Análisis de las respuestas a la pregunta 7

El 38% de los estudiantes, 5 de los 13, no realizaron el experimento. A continuación, se mostrarán algunos de los resultados de los estudiantes que no realizaron el experimento físico. Para realizar el análisis se hicieron 3 categorías diferentes a partir de lo observado en las respuestas de los estudiantes.

Nivel 1

Mantenimiento de la frecuencia y equiprobabilidad: Para esta categoría se encontró que el estudiante construye su secuencia aleatoria de manera que controla que la frecuencia relativa de cada valor no se aleje de 1/3; con el objetivo de que el resultado final de las frecuencias absolutas de cada valor de la variable sea 20 para el caso de cero águilas, 20 para un águila y 20 para 2 águilas.

Nivel 2

Sin patrón binomial: Algunos estudiantes trataron de realizar una secuencia mental “al azar”, no importando que hayan mostrado en otras preguntas que conocían la distribución de probabilidades correcta.

Nivel 3

La aleatoriedad con frecuencia mayor para el evento B: En esta categoría se observa que el estudiante trata de obtener un resultado aproximado al teórico, dándole mayor frecuencia al evento B y frecuencias similares a los eventos A y C.

Los estudiantes que no realizaron el experimento expresaron que su predicción para la secuencia de los 60 volados era producida aleatoriamente, como sí hubieran lanzado los volados, aunque contradijera su noción sobre cuál era el evento más probable.

A continuación, se muestran algunos de los resultados de los estudiantes por niveles.

Nivel 1. Mantenimiento de la frecuencia y equiprobabilidad

Uno de los cinco estudiantes que no realizaron el experimento tenía la creencia de que los tres eventos tienen la misma probabilidad. Al tratar de dar una secuencia aleatoria acomoda los números de tal forma que su resultado final de las frecuencias es 20 para el evento cero águilas, 20 para el evento un águila y 20 para el evento dos águilas. Este estudiante no muestra sensibilidad a la aleatoriedad y variabilidad en las muestras, sino que se preocupa por controlar las frecuencias esperadas suponiendo inadecuadamente equiprobabilidad. Hay que observar que en cada tercia de jugadas asegura que se presente cada uno de los valores de la variable (0, 1, 2).

Número de lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Número de águilas	2	1	0	2	1	0	0	1	2	2	1	0	2	1	0	1	2	0	2	0
Número de lanzamiento	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Número de águilas	1	0	1	2	2	0	1	0	1	2	1	0	2	2	0	1	1	0	2	2
Número de lanzamiento	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Número de águilas	0	1	1	2	0	2	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	2	1	2	0

Tabla 1

Figura 30. Respuesta de Sergio a la pregunta 7

Nivel 2. Secuencias sin patrón binomial

Tres de los cinco estudiantes realizaron sus secuencias sin importar lo que anteriormente habían contestado. Por ejemplo, uno de los estudiantes acertó en las probabilidades de cada evento en la pregunta 3, 4 y 5 $\left(P(X=0)=\frac{1}{4}, p(X=1)=\frac{1}{2}\ y\ P(X=2)=\frac{1}{4}\right)$, sin embargo, las frecuencias propuestas no se acercan a dicho patrón binomial, 29 para cero águilas, 24 para un águila y 7 para dos águilas, un suceso muy poco probable:

Número de lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Número de águilas	0	1	0	1	0	0	1	1	2	0	1	1	0	0	1	2	0	1	0	0
Número de lanzamiento	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Número de águilas	2	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	2	1	0
Número de lanzamiento	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Número de águilas	0	1	0	1	0	2	0	1	1	1	0	0	2	0	1	2	0	1	1	0

Tabla 1

Figura 31. Respuestas de Noel a la pregunta 7

Nivel 3. Secuencias con patrón binomial

Por último, uno de los estudiantes que no realizó el experimento acomodó su secuencia "aleatoria" de tal forma que se aproximara a lo contestado anteriormente (obtuvo las probabilidades correctas de los tres eventos en las preguntas 3, 4 y 5); en su secuencia propuso 19 ceros, 24 unos, 17 doses; dicha terna varía razonablemente de las frecuencias esperadas 15, 30, 15. Hay que observar que la secuencia tiene sólo una racha de tamaño 3 y 8 rachas de tamaño 2.

Número de lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Número de águilas	1	0	1	0	2	1	1	0	2	1	1	1	2	0	0	2	0	1	2	1
Número de lanzamiento	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Número de águilas	2	1	1	2	0	0	1	0	1	2	2	1	0	0	2	1	0	1	2	1
Número de lanzamiento	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Número de águilas	0	2	1	0	1	2	1	0	1	0	2	1	0	2	2	1	0	0	1	2

Tabla 1

Figura 32. Respuesta de Lesley en la pregunta 7

En general, las longitudes de las rachas más largas que colocaron los estudiantes en sus secuencias aleatorias son de 3, incluso la longitud de la racha más larga fue de 2 en una de las respuestas. Los demás estudiantes que realizaron el experimento físico consiguieron longitudes de racha hasta de 5.

Número de lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
Número de águilas	1	0	2	1	0	1	0	2	1	1	0	1	1	0	1	1	2	0	1	1	17
Número de lanzamiento	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	
Número de águilas	0	1	1	2	0	1	1	0	2	1	1	1	0	2	1	1	1	0	1	0	17
Número de lanzamiento	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	
Número de águilas	1	1	2	0	1	1	1	0	2	0	1	1	1	1	1	0	1	2	1	0	18

Tabla 1

52

Figura 33. Respuesta de Gamaliel a la pregunta 7, quien realizó el experimento

5.1.6 Análisis de las respuestas a la pregunta 8

Las siguientes categorías se estructuraron después de analizar las respuestas de los estudiantes.

Nivel 1

Equiprobabilidad. Grupo de respuestas que consideran las frecuencias de los tres eventos iguales, 20 para cero águilas, 20 para un águila y 20 para dos águilas o aproximadas, por lo que caen en el sesgo de equiprobabilidad. Dentro de esta categoría se encuentran dos casos: la suma de las frecuencias es igual a 60 y la suma de las frecuencias es diferente de 60.

Nivel 2

Frecuencias sin patrón binomial. Grupo de respuestas en el que no se observa ningún patrón binomial o sesgo de equiprobabilidad. Por ejemplo: 29 para cero águilas, 24 para un águila y 0 para dos águilas. Además, ninguna de las respuestas dentro de esta categoría conserva la proporción entre ambos gráficos, es decir que las barras del gráfico de porcentajes no son las correctas con los datos propuestos por los estudiantes.

Nivel 3

Frecuencias con patrón binomial. Grupo de respuestas que tratan de ajustar las frecuencias a un patrón binomial, con el evento un águila con mayor frecuencia. Todas las respuestas de la categoría, además, calculan incorrectamente los porcentajes para el segundo gráfico, por lo que no se conserva la proporción entre ellos.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de respuestas para cada nivel de la pregunta ocho. Sólo fueron consideradas las respuestas de los estudiantes que no realizaron el experimento binomial o que, si lo realizaron, no plasmaron las mismas frecuencias que en la pregunta siete. Por lo que, de los 13 estudiantes, se consideraron las respuestas de ocho de ellos.

Nivel 1. Equiprobabilidad

Dos de las ocho respuestas de los estudiantes, que fueron consideradas para el reactivo ocho, cayeron en el sesgo de equiprobabilidad. Un rasgo importante de los experimentos binomiales es que la suma de las frecuencias absolutas es el número total de sorteos, sin embargo, una de las dos respuestas que cayeron en esta categoría no lo tiene en cuenta, pero a la hora de sacar el porcentaje para el segundo gráfico sí divide entre el total de sorteos. En ninguna de las dos respuestas se ofrecen rasgos que indiquen variabilidad.

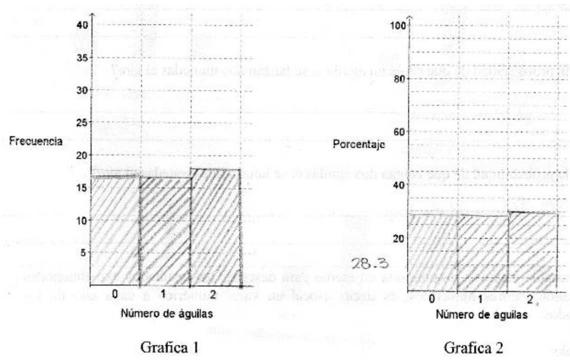


Figura 34. Respuesta de Gamaliel a la pregunta 8

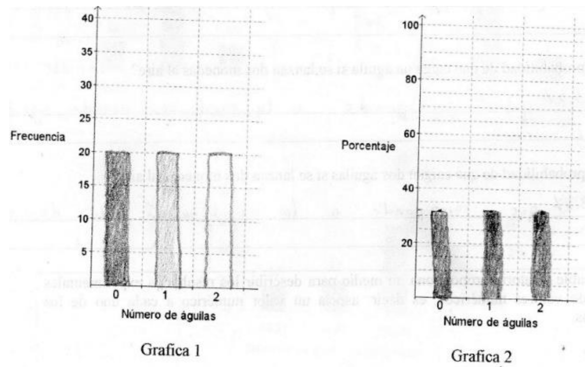


Figura 35. Respuesta de Sergio a la pregunta 8

Nivel 2. Frecuencias sin patrón binomial.

Tres de las ocho respuestas analizadas para esta categoría no siguieron ningún patrón binomial y además calculan incorrectamente los porcentajes del segundo gráfico. Por ejemplo: una de las respuestas tiene para la frecuencia cero águilas un total de 20 sorteos, para la frecuencia de un águila un total de 18 sorteos y para la frecuencia dos águilas un total de 22 sorteos; el evento más probable en este caso es el que menos número de sorteos consigue; además, los porcentajes se calculan de manera incorrecta, para el evento B con una frecuencia de 18 se asigna un 33% que no corresponde al porcentaje real (30%), pues divide casos totales entre casos que obtuvo.

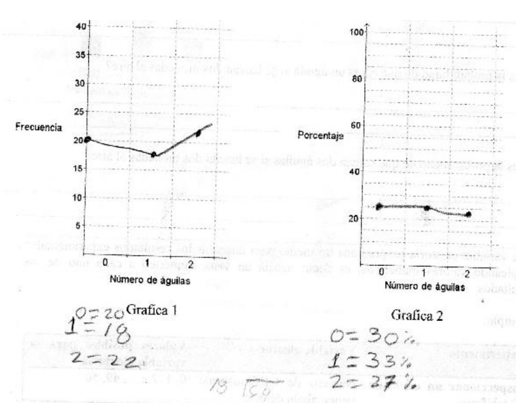


Figura 36. Respuestas de Jesús a la

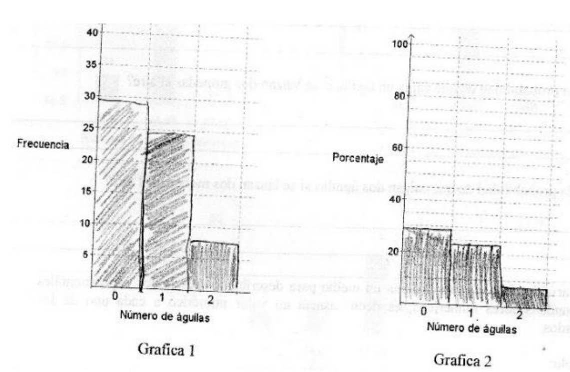


Figura 37. Respuestas de Noel a la pregunta 8

pregunta 8

Nivel 3. Frecuencias con patrón binomial

Por último, las restantes tres respuestas favorecen al evento B con mayor frecuencia que los otros dos eventos, además la suma de las frecuencias es la correcta y consideran la variabilidad al asignar diferentes frencuencias a los valores esperados, sin embargo, no conservan la proporción adecuada entre ambas gráficas al calcular mal los porcentajes.

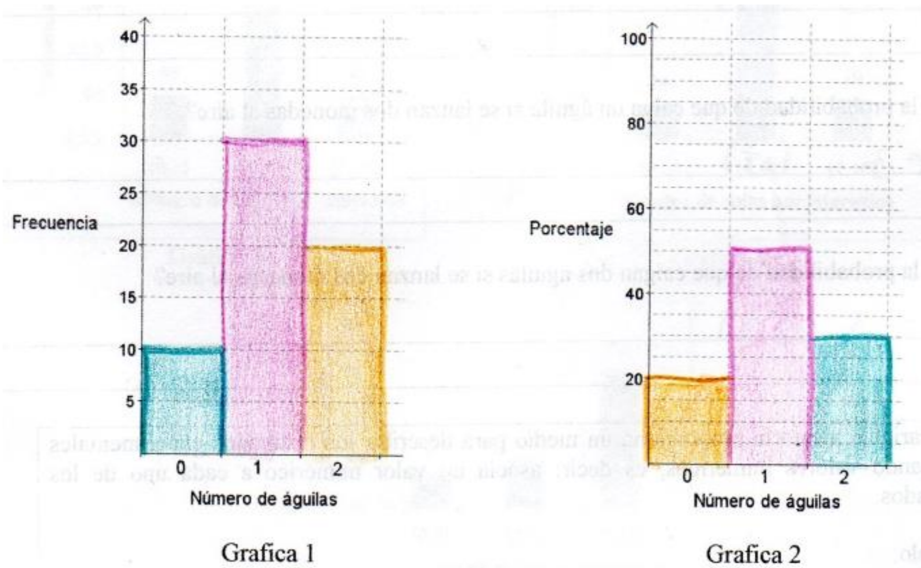


Figura 38. Respuesta de Michelle a la pregunta 8

En la tabla 4 se muestra la relación de las respuestas con las preguntas 3, 4 y 5 (las cuales preguntan explícitamente por las probabilidades de cada uno de los eventos) y las frecuencias dadas para la pregunta 8. El 78% de las respuestas no tenían una relación, es decir que las probabilidades que habían dado anteriormente no fueron utilizadas por los estudiantes para aproximar las frecuencias. Estos estudiantes no vinculan las probabilidades de los eventos con las frecuencias esperadas, hay un distanciamiento entre la teoría clásica y frecuencial.

El 23%, 3 de ellos, vincularon las probabilidades con las frecuencias que esperaban obtener: Dos de los estudiantes habían dado las probabilidades correctas para los tres eventos y uno de ellos había caído en el sesgo de equiprobabilidad.

	Realizaron el experimento físico	No realizaron el experimento físico	Total
Contrario a lo probabilidades proporcionadas	7	3	10
Coherente con las probabilidades proporcionadas	1	2	3
Total	8	5	13

Tabla 4

5.2 Cuestionario 1 (Post-test)

Al termino de las distintas actividades manipuladas y contestadas por los estudiantes en el software Fathom (Ver Apéndice B) fue necesario obtener elementos que indicaran si la incorporación de esta herramienta computacional es un elemento que permite modificar positivamente las intuiciones y nociones probabilísticas de los estudiantes.

Por lo tanto, el siguiente análisis de resultados se realizó a partir de observar las respuestas, que dieron los estudiantes después de haber tenido contacto con diferentes actividades desarrolladas en el software Fathom. El cuestionario se contestó de nueva cuenta para comparar sí sus nociones cambiaron al interactuar con el software.

5.2.1 Análisis de las respuestas a la pregunta 1

En la primera pregunta del cuestionario 1, sobre el juego de lanzar dos monedas al aire y decidir por cuál evento se apostaría (que caiga cero águilas, un águila o dos águilas), se utilizaron las mismas categorías que en el pre-test para analizar si los estudiantes habían cambiado su pensamiento ante las situaciones presentadas. Sin embargo, fue necesario agregar la categoría "Sin justificación" porque uno de los estudiantes sólo elige el evento B sin expresar algo más. Cabe destacar que en el post-test todos los estudiantes eligieron el evento B.

Nivel 1. Eligen a cualquiera de los tres eventos con sesgo de equiprobabilidad

Ninguno de los estudiantes expresó el sesgo de equiprobabilidad en la pregunta 1, sin embargo, al preguntar sobre las probabilidades de los eventos el 31%, 4 de los 13, contesta con este sesgo. Pareciera que los estudiantes no vinculan el enfoque teórico con el enfoque frecuencial.

Nivel 2. Eligen el evento B con una argumentación subjetiva (inadecuada)

Tres de los 13 estudiantes (23%) eligieron el evento B por concepciones subjetivas, dos de ellos en las preguntas posteriores sobre las probabilidades de los eventos no dieron las probabilidades correctas. Pamela conoce la probabilidad de que caiga sol o águila en un lanzamiento, a partir de esa información elige el evento B como el más probable; Por otro lado, Jesús sólo afirma que es difícil conseguir dos águilas o dos soles y Noel hace referencia a los experimentos realizados, donde quizá observó que en la mayoría de las veces, después hacer el experimento con diferentes tamaño de muestra, observó que había una tendencia a que fuera el 50% la frecuencia de un águila, sin embargo pareciera que expresa que las probabilidades de los eventos cambian al realizar en repetidas ocasiones el experimento.

> Pamela: "Evento B, porque ambos tienen una probabilidad de 50% Sol 50% águila, así que lo más probable es que salga mínimo un águila"
>
> Jesús: "El evento B, es algo difícil que caigan 2 águilas seguidas o ninguna"
>
> Noel: "B, porque la mayoría de las veces la probabilidad es 50%"

Nivel 3. Eligen el evento B argumentando correctamente con las probabilidades respectivas

Nueve de los 13 estudiantes (69%) eligieron el evento B por ser el más probable. En cuanto a la forma de argumentar el porqué de su elección se tiene los siguientes casos: cinco de ellos dieron la probabilidad del evento, uno realiza la justificación basándose en el espacio muestra, los demás únicamente mencionan el hecho de que el evento es más probable que los otros dos o que la frecuencia con que sale un águila es mayor (Tabla 5).

Sergio: “Por el evento B: Que caigan un águila porque cuenta con el 50% de probabilidad”

Luz: “Que caiga un águila porque hay la posibilidad de A-S y S-A”

Luis: “Que caiga un águila porque es la que tiene mayor probabilidad”

Lesley: “Evento B porque es más frecuente, aunque hay la probabilidad de que todos los eventos se presenten”

Justificación	Número de estudiantes
Dando la probabilidad del evento B (50%)	5
Por el espacio muestra	1
Por las frecuencias de los eventos al realizar el experimento en repetidas ocasiones	1
Argumentan que B tiene mayor probabilidad, pero no dicen cual es	2
Total	9

Tabla 5

En la tabla 6, se muestra el cambio en las respuestas de los estudiantes después de haber trabajado diferentes actividades con el software Fathom. El nivel 3, que es la categoría más adecuada encontrada en las respuestas de los estudiantes, identifican correctamente al evento B cómo el más probable, pero en ninguna de las respuestas se desglosa una comparación de probabilidades para realizar la justificación. Esta categoría pasó de tener sólo un estudiante (8%) a que más de la mitad contestaran con este tipo de argumentos, 9 de ellos (69%). De los 11 estudiantes (85%) que habían contestado con argumentos subjetivos, se volvieron a presentar en 3 de ellos (23%). El único estudiante que había presentado el sesgo de equiprobabilidad en la primera pregunta, comprendió que las probabilidades de los eventos no eran la misma, por lo que contestó con un argumento basado en que el evento B era más probable, con un 50% de probabilidad. Uno de los estudiantes, quien había caído en concepciones subjetivas en el pre-test, no dio ninguna justificación sobre su elección.

	Pregunta 1.1 antes		Pregunta 1.1 después	
Categorías	Número de respuestas	Porcentaje de respuestas	Número de respuestas	Porcentaje de respuestas
Eligen el evento B argumentando correctamente con las probabilidades respectivas	1	8%	9	69%
Eligen el evento B con una argumentación subjetiva (inadecuada)	11	85%	3	23%
Eligen a cualquiera de los tres eventos con sesgo de equiprobabilidad	1	8%	0	0%
Sin justificación	0	0%	1	8%
Total	13	100%	13	1

Tabla 6

5.1.2 Análisis de las respuestas a la pregunta 2

Para el post-test no se realizaron cambios en la clasificación con respecto a la pregunta 1.2 sobre el espacio muestra de la situación.

Nivel 1. No entiende correctamente el concepto de espacio muestra

Para el post-test ninguno de los estudiantes cayó en esta categoría, todos respondieron entre 3 y 4 elementos del espacio muestra, el error encontrado en las respuestas de los estudiantes es tomar al evento 1 águila con un solo elemento.

Nivel 2. No considera uno de los elementos del espacio muestra

Cinco de los 13 estudiantes (38%) cometieron el error nuevamente de contar sólo 3 de los 4 elementos del espacio muestra, tomando el evento AS y SA cómo el mismo, donde A=Águila y S=Sol.

Dulce: “3 posibles resultados: 1. Sol, Sol; 2. Águila, Águila; 3. Sol, Águila”

Nivel 3. Cuenta correctamente los elementos del espacio muestra

Ocho de los trece estudiantes (62%) contestaron correctamente a la pregunta, contando todos los elementos del espacio muestra y mencionando cada uno de ellos.

Sergio: “son 4 posibles resultados [AA, SS, SA, AS]”

Con base a los resultados del pre-test y el post-test se observa que algunos estudiantes pasaron de no comprender el concepto del espacio muestra y de contar sólo tres elementos de los cuatro a contar correctamente todos los elementos. De los 6 estudiantes (46%) que habían contado correctamente los elementos del espacio muestra aumentaron a 8 (62%), los demás siguieron con el sesgo de la segunda categoría (Tabla 7).

	Pregunta 1.2 antes		Pregunta 1.2 después	
Respuestas	Número de respuestas	Porcentaje	Número de respuestas	Porcentaje
4 elementos	6	46%	8	62%
3 elementos	6	46%	5	38%
Otra respuesta	1	8%	0	0%
Total	13	100%	13	100%

Tabla 7

5.1.3 Análisis de las respuestas a las preguntas 3, 4 y 5

A continuación, se presentan los resultados propuestos por los estudiantes para asignar las probabilidades a los tres eventos (A, B y C) correspondientes a las preguntas 3, 4 y 5 después de realizar las diferentes actividades con el software Fathom, se utilizan las mismas categorías que en el pre-test para analizar los cambios en las respuestas.

Nivel 3. Probabilidades correctas

Siete de los estudiantes (54%) en sus respuestas dieron correctamente las probabilidades de los tres eventos. Cuatro de las justificaciones para estas preguntas se basaron en el espacio muestra y la teórica clásica de la probabilidad, mientras que tres se apagaron más a los experimentos realizados en clases, con un enfoque frecuentista, aunque primitivo.

Gamaliel: 3: “Un 25% de que caiga cero águilas, pues son 4 posibles resultados es ¼”; 4: “50% o bien 2/4 o 1/2, porque son 4 posibles casos y de esos solo le corresponden dos” y 5: “25% o bien 1/4, porque son 4 posibles casos y de esos solo le corresponde uno”

Lesley: 3: “un 25% por la menor frecuencia”; 4: “un 50% existe una mayor frecuencia” y 5: “25% por la frecuencia”

Nivel 2. Equiprobabilidad

Cuatro de las 13 respuestas de los estudiantes (31%) cayeron en el sesgo de equiprobabilidad. La suma de probabilidades expuestas en los resultados de los estudiantes que cayeron en este sesgo es igual que uno, en esta ocasión ninguno tuvo ese tipo de error de expresar probabilidades con sumas diferentes a uno. Todos a partir de la conjetura de que el espacio muestra se conforma de tres elementos, sacan la probabilidad con el cociente de los casos favorables entre los casos posibles lo que da como resultado 1/3 de probabilidad para cada uno.

Michelle: “1/3porque hay 3 posibles resultados”

Nivel 1. Probabilidades incorrectas

Dos de los estudiantes (15%) respondieron con probabilidades incorrectas. La suma de probabilidades de los tres eventos en las respuestas da la estudiante Pamela da 150%, aunque sí asigna mayor probabilidad al evento B (un 75%); al evento A (SS) le asigna un 50% de probabilidad, porque tiene un 50% de probabilidad de caiga sol en una moneda. Por otra parte, Jesús al no saber calcular las probabilidades utiliza un lenguaje de “muy poco probable” y “más probable”, por alguna concepción subjetiva se da cuenta de que el evento B es el más probable de los tres eventos.

Pamela: 3: “50% ya que pueden caer dos soles y este tiene otro 50% de probabilidad”; 4: “75% ya que son dos monedas, hay más probabilidad de que al menos salga un águila”; 5: “25% también pueden caer dos soles por lo que pueden ser menos probables que caigan 2 águilas”

Jesús: 3: “Muy poco probable ya que eventualmente podría salir un águila”; 4: “Un poco más probable ya que eventualmente puede ser un águila sol o un sol águila”; 5: “Poco probable”

Con respecto a las probabilidades de ocurrencia de los tres eventos se muestra una mejoría del entendimiento de cómo calcular las probabilidades usando el espacio muestra o estimándola mediante las frecuencias de los eventos (la regla de producto y los diagramas de árbol no se incluyeron dentro de las sesiones donde desarrollaron las distintas actividades). Antes de las actividades sólo tres estudiantes (27%) proporcionaron las probabilidades correctas, después de ellas el número de estudiantes que logró contestar correctamente las tres probabilidades aumento a 7 (54%). Además, la suma de probabilidades de las respuestas que recayeron en el sesgo de equiprobabilidad fueron igual que uno, caso contrario del pre-test.

		Pre-test		Post-test	
Categorías	Suma de probabilidades	Número de respuestas	Porcentaje	Número de respuestas	Porcentaje
Probabilidades correctas	$= 1$	3	23%	7	54%
Equiprobabilidad	$= 1$	3	23%	4	31%
	$\neq 1$	3	23%	0	0%
Probabilidades incorrectas	$\neq 1$	4	31%	2	15%
Total		13	100%	13	100%

Tabla 8

5.1.4 Análisis de las respuestas a la pregunta 7

Para la pregunta 7 se utilizaron las mismas categorías para realizar la comparación de resultados de nueva cuenta, en esta ocasión nadie cayó en el sesgo de equiprobabilidad y todos los estudiantes, menos uno de ellos, trataron de acoplar sus secuencias de tal forma que el evento B fuera el de mayor frecuencia

Sin patrón binomial

Uno de los estudiantes, a diferencia de los demás, obtuvo al evento C como el de mayor frecuencia. Aunque esta estudiante calculó correctamente la probabilidad de los tres eventos y contó todos los elementos del espacio muestral refleja en su respuesta que la variabilidad y el azar es más fuerte que la distribución.

Por otro lado, la racha más larga que colocó en su secuencia aleatoria fue de 3 para el evento C (AA, dos águilas) y las rachas de unos más largas que obtuvo fueron de 2.

Número de lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Número de águilas	1	2	0	1	2	1	2	1	0	1	2	2	1	1	2	2	0	1	2	1
Número de lanzamiento	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Número de águilas	2	1	0	1	2	2	2	1	2	1	0	1	2	1	2	2	1	0	1	2
Número de lanzamiento	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Número de águilas	2	1	0	2	2	1	2	1	1	2	2	0	1	2	2	1	1	2	2	0

Tabla 1

Figura 39. Respuesta de la estudiante Lucia a la pregunta 7

La aleatoriedad con frecuencia mayor para el evento B

Los demás estudiantes trataron de acoplar sus secuencias de tal forma que el evento B fuera el de mayor frecuencia. Las longitudes de las rachas más largas que obtuvieron estos alumnos fueron de cuatro (cinco de ellos, 38%), mientras que los demás obtuvieron como racha más largas una longitud de tres (7 de ellos, 54%).

Número de lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Número de águilas	0	1	1	2	2	0	2	1	1	1	2	0	1	1	0	0	1	1	1	0
Número de lanzamiento	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Número de águilas	1	1	0	1	1	2	2	0	1	1	2	0	0	0	1	2	1	2	0	1
Número de lanzamiento	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Número de águilas	1	0	0	1	1	1	2	1	2	0	2	11	1	2	2	0	2	2	1	0

Tabla 1

Figura 40. Respuesta del estudiante Francisco a la pregunta 7

5.1.5 Análisis de las respuestas a la pregunta 8

La última de las preguntas analizadas, número 8, para el primer cuestionario también mantuvo las mismas categorías para observar los cambios en las respuestas de los estudiantes. Sin embargo, un cambio importante es que todos los estudiantes lograron sacar bien los porcentajes de las frecuencias a diferencia del pre-test, excepto por un estudiante; otro cambio que es importante precisar es que, de igual forma, todos los estudiantes tuvieron correcta la suma de las frecuencias, sesenta.

Nivel 1

Equiprobabilidad. Grupo de respuestas que consideran las frecuencias de los tres eventos iguales, 20 para cero águilas, 20 para un águila y 20 para dos águilas o aproximadas, por lo que caen en el sesgo de equiprobabilidad.

Nivel 2

Frecuencias sin patrón binomial. Grupo de respuestas en el que no se observa ningún patrón binomial o sesgo de equiprobabilidad. Por ejemplo: 29 para cero águilas, 24 para un águila y 0 para dos águilas.

Nivel 3

Frecuencias con patrón binomial sin suma de ellas correctas. Grupo de respuestas que tratan de ajustar las frecuencias a un patrón binomial, con el evento un águila con mayor frecuencia. Dentro de este nivel se desglosan dos, los que consideran que la suma de la frencuencias tiene que ser igual al número de sorteos realizados y los que no lo consideran.

En seguida, se presentan ejemplos de respuestas para cada nivel.

Nivel 1. Equiprobabilidad

Para el post-test, ninguno de los estudiantes cayo en este nivel de respuesta.

Nivel 2. Frecuencias sin patrón binomial

Sólo uno de las 13 respuestas de los estudiantes no tuvo un patrón binomial, tiene al evento C con mayor frecuencia, además no representa correctamente las gráficas que se les pide realizar y no conservan la proporción entre ambas.

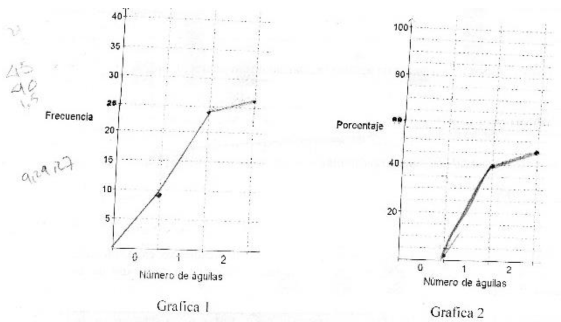


Figura 41. Respuesta de la estudiante Lucia a la pregunta 8

Nivel 3. Frecuencias con patrón binomial

Dos de las respuestas de los estudiantes (15%) aunque destacan al evento B con una mayor frencuencia, no consideran que la suma de las frencuencias debe ser igual al número de sorteos realizados (60 lanzamientos), ambas respuestas quedan a dos unidades del número correcto.

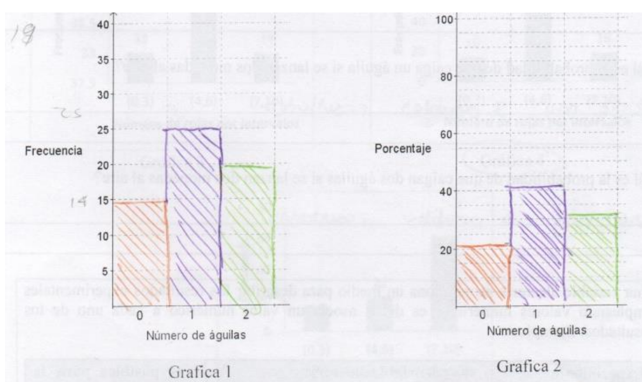


Figura 42. Respuesta del estudiante Iván a la pregunta 8

Por otra parte, en el nivel más alto, el 77% de las respuestas de los estudiantes, 10 de las 13, ofrece al evento B con mayor frecuencia, además la suma de las frencuencias es la educada, consideran la variabilidad al asignar distintas frencuencias a los valores esperados y la proporción entre los gráficos son las correctas.

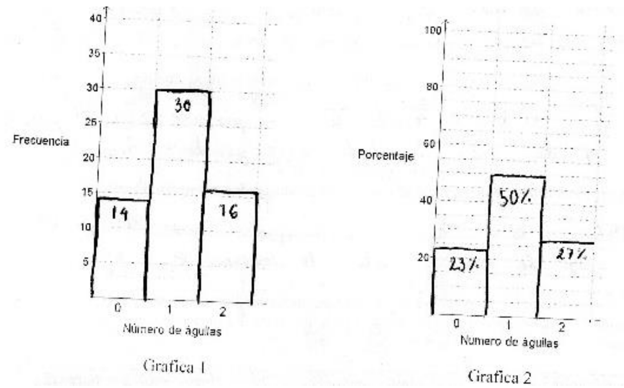


Figura 43. Respuesta del estudiante Sergio a la pregunta 8

Con respecto a la última pregunta se observa una mejoría entre el tránsito entre los registros de representación del gráfico de barras y el gráfico con porcentajes, de siete estudiantes (54%) que realizaron mal este cálculo, después de las actividades con Fathom, se redujo a un solo estudiante (8%) con este tipo de error (Tabla 9). Además, en el post-test ninguno de los estudiantes presentó el sesgo de equiprobabilidad, sino que en su mayoría (92%), a excepción por uno, dijeron que el evento con mayor frecuencia es el evento B. Las cinco respuestas que fueron categorizadas en el nivel más alto, para el pre-test, fueron las que realizaron el experimento binomial lanzando una moneda 60 veces.

		Pre-test		Post-test	
Niveles	Suma de frencuencias	Número de alumnos	Porcentaje	Número de alumnos	Porcentaje
Equiprobabilidad	Incorrecta	1	8%	0	0%
	Correcta	1	8%	0	0%
Sin patrón binomial	Incorrecta	0	0%	0	0%
	Correcta	3	23%	1	8%
Con patrón binomial	Incorrecta	3	23%	2	15%
	Correcta	5*	38%	10	77%
Total		13	100%	13	100%

Tabla 9

La tabla 10 muestra la conexión de las diferentes preguntas del primer cuestionario: evento que esperan obtener si lanzan un volado, el espacio muestra y las frecuencias esperadas con las probabilidades que proporcionadas en las respuestas de los estudiantes.

Para la primera pregunta en el pre-test, sobre lo que esperarían obtener si lanzan una moneda al aire, ocho de los estudiantes (62%) no apoyaron su respuesta con las probabilidades que calcularon: de las tres personas que calcularon correctamente las probabilidades una de ellas dijo que esperaba el evento C, y no el B, por cuestiones de azar, ignorando la distribución de los eventos; cinco de los seis estudiantes (38%) quienes cayeron en el sesgo de equiprobabilidad al dar las probabilidades aseguraban que era más fácil sacar un águila a pesar del sesgo que expresan; sólo uno de los cuatro estudiantes dijo que era más seguro obtener un águila sin embargo asigno menor probabilidad al evento B y mayor a los eventos A y C. Para el Post-test sólo los estudiantes con el sesgo de equiprobabilidad, cuatro de los 13 (31%) desvincularon sus resultados al decir que esperaban que saliera más el evento B por ser frecuente al realizar el experimento en repetidas ocasiones.

En la segunda pregunta, para el pre-test, con respecto al espacio muestra y las probabilidades siete de los 13 estudiantes (54%) no vincularon sus resultados por desconocer la teórica clásica de la probabilidad; en el post-test se redujo este porcentaje al 15%, seis de los 13 estudiantes, sólo los estudiantes en la categoría de respuestas incorrectas no vincularon los resultados.

Por último, para las frecuencias esperadas y las probabilidades asignadas en el pre-test diez de los 13 estudiantes (77%) no vinculaban sus resultados, la mayoría expresaba que era más recurrente el resultado un águila, pero creían en la equiprobabilidad de los eventos; en el post-test este resultado se preservó en la mayoría de los resultados, pues siete de los 13 estudiantes (54%) caían en el mismo error.

		Antes			Después		
Categorías		Evento que espera	Espacio muestra	Frecuencias	Evento que espera	Espacio muestra	Frecuencias
Correctas	Contrario a lo probabilidades proporcionadas	1	0	1	0	1	1
	Coherente con las probabilidades proporcionadas	2	3	2	7	6	6

Equiprobabilidad	Contrario a lo probabilidades proporcionadas	5	3	5	0	0	4
	Coherente con las probabilidades proporcionadas	1	3	1	4	4	0
Incorrectas	Contrario a lo probabilidades proporcionadas	1	4	4	0	2	2
	Coherente con las probabilidades proporcionadas	3	0	0	2	0	0
		13	13	13	13	13	13

Tabla 10

5.3 Cuestionario 2 (Pre-test)

5.3.1 Análisis de las respuestas de la pregunta 1

La apreciación de la variación es central en el pensamiento estadístico y probabilístico. La primera pregunta del segundo cuestionario se plantea para analizar cómo los estudiantes ven la variación en situaciones de azar. En este caso, se le pregunte al estudiante por lo que esperaría obtener al sacar una pelota de una urna.

> Supongamos que tenemos una urna con 10 pelotas en su interior, de las cuales 5 son de color rojo, 2 de color amarillo y 3 de color verde. Se sacan 10 pelotas con reemplazo.
>
> 1 ¿Cuántas pelotas rojas esperarías conseguir? Justifica tu respuesta.

Figura 44. Pregunta 1 del segundo cuestionario

Al examinar las respuestas planteadas por los estudiantes se estructuraron las siguientes categorías:

Nivel 1

Dogmatismo teórico. Las respuestas que se clasifican en esta categoría proporcionan el valor esperado, en este caso 5, como el número de pelotas rojas que creen que conseguirían. Si extraen diez pelotas de la urna, teóricamente se espera conseguir 5 pelotas rojas, 2 amarillas y 3 verdes, reflejo exacto de la distribución de dicha urna. En este tipo de respuestas el estudiante no toma en cuenta la variabilidad de los resultados. Aunque lo más probable sea obtener 5 pelotas rojas sigue siendo un evento incierto.

Nivel 2

Resultados alrededor de la media. Las respuestas con resultados alrededor de la media, por ejemplo: el 3, 4, 6 y 7, tiene una ligera apreciación de la variación. Sin embargo, una respuesta que aprecia la variación tiene que ser proporcionada a partir de intervalos alrededor del valor más probable.

Nivel 1. Dogmatismo teórico

La mayoría de los estudiantes, el 61.5% que corresponden a 8 de los 13, dieron como respuesta "5 rojas" lo que refleja la idea de que una muestra representa con exactitud a la población, en este caso a la distribución de la urna que contiene 5 rojas, 2 amarillas y 3 verdes; no muestran apreciación por la variación de la muestra, pero sí obtienen cual es resultado más probable.

Francisco: "Cinco pelotas porque son la mitad del total"

Nivel 2. Resultados alrededor de la media

Cinco estudiantes, el 38.5%, no dieron como respuesta el valor de la media, sino un valor aproximada a ella. Dos de estos estudiantes aseguraron que la probabilidad de sacar 5 pelotas rojas en una muestra de tamaño 10 es del 50%, cayendo en la "ilusión de linealidad" (de Bock, van Dooren, Janssens,, Verschaffel, 2007), sesgo de atribución de proporción donde no la hay. Se cree que como se tiene 50% de probabilidad de sacar una pelota de la urna hay un 50% de probabilidad sacar 5 rojas de 10. En realidad, la probabilidad de sacar 5 bolas rojas de la urna es del 25% aproximadamente. En este tipo de sesgo se argumenta que como las dos muestras tienen igual proporción, entonces sus probabilidades son iguales. Veamos un ejemplo:

Luz: "4, porque hay 50% de probabilidad, pero no es seguro sacar todas"

Los estudiantes restantes, 3 de ellos, expresaron que por haber más rojas que de otro color era probable que salieran más de ellas (6 y 3 fueron las respuestas del número de rojas que esperarían obtener). En sus respuestas no se ve claramente que ellos aprecien a la media de la población como lo más probable; consideran que al haber más rojas que verdes y más rojas que amarillas deberían salir más del primer color, es decir, no toman en cuenta que su variable aleatoria es número de rojas, por lo que el número de amarillas y verdes pierden su individualidad al ser pelotas no rojas.

Luis: “Seis rojas ya que son más pelotas de ese color”

Jesús: “Posiblemente 3 ya que son las que más abundan”

En la tabla 11 se encuentra organizada la información anterior de las respuestas de los estudiantes, ninguno de ellos da como resultado un intervalo alrededor de la media, el cual se considera como la respuesta correcta a la primera pregunta.

Categorías		Con intervalos	Sin intervalos
Con variación	Apreciación de la media como valor más probable	-	2
	No aprecia a la media como valor más probable	-	3
Dogmatismo teórico		-	8
Total		0	13

Tabla 11

5.3.2 Análisis de las respuestas de la pregunta 2

La segunda pregunta corresponde al caso contrario de la anterior ¿Qué es lo que no esperarían conseguir? Con ella se pretenden analizar la forma en que los estudiantes ven la distribución de la muestra y su apreciación por la variabilidad en ella.

2. ¿Qué número de pelotas rojas no esperarías conseguir? Justifica tu respuesta.

Figura 45. Pregunta 2 del segundo cuestionario

Para este reactivo se generaron las siguientes categorías a partir de las respuestas que los estudiantes dieron.

Nivel 1

Reconocimiento de alguno de los valores extremos. Esta categoría engloba todas las respuestas que proporcionan sólo uno de los valores extremos, ya sea cero rojas o diez rojas que son los eventos menos probables.

Nivel 2

Resultados aproximados a los valores extremos. En esta categoría se encuentran las respuestas que dan un valor aproximado a alguno de los valores extremos, por ejemplo: sacar una pelota roja. No arrojan los valores menos probables (cero y diez) pero sí cercanos a ellos.

Nivel 3

Media o resultado próximo a la media: En estas respuestas se afirma que lo menos esperado es sacar los eventos más probables, por ejemplo: cinco o cuatro pelotas rojas. Justifican su respuesta con la distribución de la urna, pues dicen que hay cinco pelotas de otros colores.

Nivel 3. Reconocimiento de alguno de los valores extremos.

El 23% de los estudiantes respondió que no esperaría conseguir 10 pelotas rojas, ya sea por ser poco probable sacar todas del mismo color, porque no existe una probabilidad del 100% o porque eventualmente debería salir una de un color distinto al rojo. Aunque sólo uno de ellos argumentó correctamente el porqué, aclarando que era poco probable, pudieron obtener cual era uno de los eventos menos probables como referencia. Los otros dos estudiantes argumentaron erróneamente sus respuestas al dar afirmaciones como: “eventualmente me saldrá 1 de otro color”, pues se trata de un experimento aleatorio y “porque no existe una probabilidad del 100%”.

Michelle: “10 porque no es tan probable de sacar todas del mismo color”

Nivel 2. Resultados aproximados a los valores extremos.

Tres alumnos más, el 23% de ellos, dieron respuestas similares a las anteriores: intentaron dar un valor poco probable de la cola izquierda de la distribución, pero no la menos probable que es sacar cero rojas (y 10 rojas para el otro lado). Entienden que lo menos probable son los extremos, pero no toman en cuenta el resultado cero rojas.

> Pamela: "2 pelotas ya que son muchas y es menos probable sacar"
>
> Lesley: "1 porque existe la probabilidad que salgan rojos por contener 5"

En estas dos categorías ven a alguno de los extremos como lo menos probable, pero no a ambos.

Nivel 1. Media o resultado aproximado a la media

El 54% de los estudiantes, siete de los 13, no reconocen a los valores extremos como los menos probables y tampoco demuestran una apreciación de la variabilidad en sus respuestas. Seis estudiantes opinan que lo menos probable es sacar alrededor de 5 rojas porque la mitad son de otro color dentro de la urna (3 verdes y 2 amarillas), un estudiante indica que no espera conseguir más de 5 rojas por las mismas razones. En estas respuestas se observa como el sesgo de la representatividad en una muestra hace que las respuestas de los estudiantes tengan argumentos incorrectos.

> Alejandra: "más de 5 rojos porque 3 son verdes y 2 amarillos"
>
> Sergio: "5 porque 2 son de color amarillo y 3 de color verde"
>
> Luis: "Cuatro, ya que es probable que salgan pelotas de otro color"

En la tabla 12 se muestran las respuestas, de los estudiantes, organizadas por las categorías establecidas para analizar la pregunta 2, ninguno de los estudiantes proporciono intervalos para responder la pregunta, sino que todos dieron un sólo valor fijo para dar su respuesta.

Categorías	Con intervalos	Sin intervalos
Alguno de los valores extremos	-	3

Aproximación a alguno de los valores extremos	-	3
Media o resultado aproximado a ella	-	7
Total	0	13

Tabla 12

5.3.3 Análisis de las respuestas a la pregunta 3

Con la pregunta tres, del cuestionario dos, se intenta analizar la percepción que tienen los estudiantes al generar varias muestras de tamaño 10 sobre la variación de éstas, sí pueden dar un rango de valores apropiados alrededor de la media o, caso contrario, fuera de ella.

3 Se realiza el experimento de sacar 10 pelotas de la urna con reemplazo seis veces.

a) ¿Cómo crees que serán los resultados? Anota tus predicciones en la siguiente tabla.

Número por cada diez extracciones	Número de rojas
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Figura 46. Pregunta 3 del segundo cuestionario

Para analizar con más detalle las respuestas se configuraron las siguientes categorías a partir de lo que los estudiantes contestaban.

Nivel 1

Dogmatismo teórico. El valor esperado para este grupo de respuestas representa lo que esperarían que ocurriese si realizan el experimento en repetidas ocasiones. No toman en cuenta la variabilidad, sino sólo la distribución de las pelotas en la urna.

Nivel 2

Variación con un rango inapropiado. En esta categoría entran aquellas respuestas que dan un intervalo por debajo o por arriba de la media. Aunque es probable que sucedan estos eventos por ser una muestra pequeña en realidad se espera que los valores fluctúen alrededor de la media.

Nivel 3

Variación alrededor de la media. Las respuestas que dan un intervalo alrededor del valor más probable, que es la media, caen en esta categoría. Muestran una apreciación correcta de la variabilidad.

Nivel 1. Dogmatismo teórico

El 31% de los estudiantes, cuatro de los 13, no muestran en sus respuestas apreciación de la variabilidad, pero sí reconocen cual es valor más probable. Estos estudiantes tienen un enfoque teórico de lo que esperarían que ocurriera al realizar el experimento, proporcionando siempre el valor esperado, en este caso la media que corresponde a cinco rojas.

Lucia: “5, 5, 5, 5, 5, 5”

Nivel 2. Variación con un rango inapropiado

El 46% de las respuestas de los estudiantes, seis de ellas, reconocieron que al realizar el experimento los resultados pueden variar, perciben la variabilidad en las muestras. Sin embargo, sus respuestas están sesgadas para el lado izquierdo de la distribución: tres de ellos hicieron sus predicciones entre los valores 0 y 5, no rebasaron el valor de le media; los restantes tres arrojaron valores entre el 0 y 7.

Noel: “5, 0, 3, 2, 4, 4”

Lesley: “2, 3, 1, 3, 1, 4”

Luz: “2, 1, 7, 4, 0, 4”

Nivel 3. Variación alrededor de la media

Por último, tres de las respuestas de los estudiantes (23%) respondieron en un rango de valores que se encontraban alrededor del valor esperado. Se observa en estas respuestas una apreciación de la variabilidad en las muestras y la referencia del valor más probable que es la media para dar los valores aproximados a ésta. En las respuestas se encontraron distintos intervalos de valores: uno de los estudiantes encerró sus predicciones entre los números 4 y 6, con tres cincos en el intervalo; los otros dos estudiantes respondieron con una ligera inclinación a los valores más altos, intervalos que van del 4 al 7 y del 4 al 8, tienen una apreciación menor de que los eventos más probables se encuentran alrededor de la media que el primer estudiante, Luis.

Luis: “5, 6, 4, 5, 5, 6”

Iván: “4, 6, 7, 5, 8, 7”

En la tabla 13 se encuentran los diferentes enfoques que se vieron reflejados en las respuestas de los estudiantes.

Respuestas		Número de alumnos
Enfoque frecuencial	Dogmatismo teórico	4
	Variabilidad alrededor de la media	3
	Variabilidad alrededor de los valores menores	6
	Variabilidad alrededor de los valores mayores	-
Total		13

Tabla 13

5.3.4 Análisis de las respuestas a la pregunta 4

La pregunta cuatro contiene dos incisos: en el primer inciso deben elegir entre las diferentes tablas que obtuvieron siete personas por la que creen que es más fácil que ocurra y en la segunda por lo que muy difícilmente esperarían que ocurriese. Con ella se preténdete analizar las concepciones de los estudiantes acerca de la variabilidad nuevamente en un contexto diferente, en el que deberán seleccionar alguna de las tablas en lugar de dar ellos una.

4 Siete estudiantes llenaron la tabla anterior de la siguiente manera:

Número por cada diez extracciones	Número de rojas de Juan	Número de rojas de Pedro	Número de rojas de Luis	Número de rojas de Iván	Número de rojas de Paco	Número de rojas de Alex	Número de rojas de Alan
1	5	3	5	2	7	3	10
2	9	7	5	3	7	0	10
3	7	5	5	4	7	9	10
4	6	8	5	3	7	2	10
5	8	5	5	4	7	8	10

6	7	4	5	4	7	5	10

Tabla 2

a) ¿Cuál de los estudiantes a través de su tabla crees que describe mejor lo que podría suceder? Justifica tu respuesta.
b) ¿Cuál de los estudiantes a través de su tabla crees que describe peor lo que podría suceder? Justifica tu respuesta.

Figura 47. Pregunta 4 del segundo cuestionario

Inciso a

Para el primer inciso se estructuraron las siguientes categorías al observar y analizar las respuestas de los estudiantes.

Nivel 1

Cualquier resultado. Las respuestas que consideraban que cualquier tabla podría ocurrir se agrupan en esta categoría.

Nivel 2

Dogmatismo teórico. Conjunto de respuestas que eligieron la tabla de Luis como la mejor. Todos los valores de la tabla son el valor esperado, cinco rojas, por lo que no toma en cuanto la variabilidad, teniendo así una desviación estar de cero.

Nivel 3

Para el nivel tres se tiene dos categorías diferentes, el conjunto de respuestas que elige la tabla con variación por arriba de la media y el conjunto de respuestas que elige la tabla con variación por debajo de la media

- Variación por arriba de la media. Conjunto de respuestas que eligieron la tabla de Juan como la mejor. Esta tabla tiene una media de 7 y una desviación estándar de 1.41, va del número cinco al ocho con un rango de 3. Sus valores se encuentran por arriba del valor esperado.
- Variación por debajo de le media. Conjunto de respuestas que eligieron la tabla de Iván como la mejor. Esta tabla tiene una media de 3.33 y una desviación estándar

del 0.81, va del número dos al cuatro con un rango de 2. Sus valores se encuentran por debajo del valor esperado.

Nivel 4

Variación alrededor de la media. Conjunto de respuestas que eligieron la tabla de Pedro como lo que esperarían que ocurriese más fácilmente. La media de esta tabla es de 5.33 con una desviación estándar del 1.81, va del número tres al número ocho, es decir que tiene un rango de cinco.

Nivel 1. Cualquier resultado

Uno de los estudiantes (8%) respondió que cualquiera de las listas era correcta y la mejor opción porque todo podía pasar. Es decir que nota la existencia de la variabilidad, pero desconecta por completo la distribución de la urna.

Sergio: "Todos porque es lo que a cada quien le puede pasar"

Nivel 2. Dogmatismo teórico

El 15% de los estudiantes, dos de los 13, respondieron que lo que describía mejor lo que podría ocurrir l realizar el experimento era la lista de Iván, en la cual todos los elementos de la lista son el mismo valor, el valor esperado.

Lucia: "Luis porque cada que quitan las pelotas llegan otras, pero solo 5 rojas"

Nivel 3. Variación por arriba de la media

Cuatro de los estudiantes (nuevamente el 31%) contestaron que lo que describía mejor lo que podría ocurrir al realizar el experimento son los resultados obtenidos por Juan. Los estudiantes argumentaban que la lista tenía más variabilidad, aunque no fuera cierto, y que por haber más rojas en la urna se esperaría sacar más de este color.

Lesley: "Juan, ya que son más pelotas rojas y hay más probabilidad de que salgan más"

Nivel 3. Variación por debajo de le media

Para la lista de Iván dos de los 13 estudiantes (15%) la seleccionaron, pues consideraban que era más probable obtenerla o sus resultados eran más lógicos a pesar de que ninguno de los valores de la lista se encontraba el valor esperado.

Lesley: "La de Iván porque considero que podría ser más probable"

Nivel 4. Variación alrededor de la media

Cuatro de los 13 estudiantes (31%) respondieron que lo que describía mejor lo que podría ocurrir al realizar el experimento son los resultados obtenidos por Pedro. Argumentan que los resultados de esta tabla tienen variación y además se tratan de los valores más probables, excluyendo a los lejanos del valor esperado.

Jesús: "La de Pedro porque ocupa resultados muy variados y los más probables"

Inciso b

Las categorías para el inciso b de la pregunta 4 son las siguientes.

Nivel 1

Obtener un cero. Los estudiantes que eligen la lista de Alex por tener ésta un cero caen en esta categoría.

Nivel 2

Sin variación. En esta categoría se encuentran las respuestas que eligen cualquiera de las listas que no contiene variación, ya sea la lista de Alan, Paco o Iván.

Nivel 3

Sin variación y obtener siete rojas. Los estudiantes que en sus respuestas eligieron la lista de Paco caen en esta categoría. Todos los resultados de esta lista son 7 rojas por lo que no se aprecia la variación en ella.

Nivel 4

Sin variación y obtener todas rojas. Los estudiantes que en sus respuestas eligieron la lista de Alan caen en esta categoría. Todos los resultados de esta lista son 10 rojas, uno de los valores menos probables de obtener, a parte del cero, además de no contener variación

Nivel 1. Obtener un cero

Uno de los estudiantes (8%) respondió que la lista de Alex era la que peor describía lo que podría ocurrir si se realizará el experimento, pues ésta contiene el elemento cero rojas que para este estudiante es lo menos probable. Se trata de la lista con mayor dispersión, pues tiene una variación estándar del 3.51 y un rango de 9, aunque su media se encuentra en un valor bastante apropiado con un 4.5, parecer ser que para este estudiante es más importante que no salgan uno de los valores menos probables que la variación dentro de la muestra.

Dulce: “Alex, porque la mayor probabilidad es roja, como para que salga 0”

Nivel 2. Sin variación

Otro de los estudiantes (8%) respondió que las listas que contenían los mismos valores, ya sea todos 5, 7 o 10 eran las que consideraba como lo que peor podrían describir si se realizara el experimento. Es decir que considera a la variación como un aspecto importante.

Sergio: “Pues a lo mejor los que se repiten nada más un número porque sería demasiada coincidencia”

Nivel 3. Sin variación y obtener siete rojas

Uno de los estudiantes (8%) expresó en su respuesta que lo que peor describía lo que podría ocurrir es la lista de Paco, aunque su justificación no tiene coherencia, pues argumenta que son muy pocas rojas, es decir que no toma en cuenta que se trata de una lista sin variación en sus muestras.

Lesley: “La de Paco porque siete son muy pocos”

Nivel 4. Sin variación y obtener todas rojas

La mayoría de los estudiantes, 10 de los 13 (77%), respondieron que la lista que describía de la peor manera lo que podría pasar si se realizaba el experimento es la de Alan, pues aparte de no tener variación en sus muestras consideraba a uno de los eventos menos probables, obtener 10 pelotas rojas. Aunque el lenguaje utilizado por la mayoría de los estudiantes es confuso y se expresan de manera errónea todos compartían una idea parecida.

Francisco: “Alan, porque es muy muy muy poco probable sacar 10 rojas”

Gamaliel: “Alán, pues no tiene variedad”

En la tabla 14 se encuentran las respuestas de los estudiantes de los dos incisos de la pregunta 4, organizados por cual lista eligieron, ya sea la que mejor o la que peor describía lo que sucedería si se realizará el experimento seis veces de extraer 10 pelotas de la urna.

	Número de alumnos	
Listas	Inciso a	Inciso b
Juan	4	-
Pedro	4	-
Luis	2	-
Iván	2	-
Paco	-	1
Alex	-	1
Alan	-	10
Todas	1	-
Sin variación	-	1

Tabla 14

5.3.5 Análisis de las respuestas a la pregunta 5a

La pregunta 5a hace referencia a la variable aleatoria, casi todos los estudiantes lograron identificar antes de esta pregunta todos los elementos de dicha variable, pero se les pide ordenar sus elementos de menor a mayor probabilidad para observar si los estudiantes logran identificar la distribución.

a) ¿Cómo ordenarías los valores que toma la variable aleatoria de menor a mayor probabilidad? Justifica tu respuesta.

Tabla 48. Pregunta 5a del segundo cuestionario

Al analizar y examinar las respuestas de los estudiantes se estructuraron las siguientes categorías.

Nivel 1

No entienden la pregunta. Respuestas que no dan elementos de la variable aleatoria, sino listas de problemas anteriores. En específico contestan con las tablas de la pregunta cuatro del segundo cuestionario.

Nivel 2

Distribución incorrecta con elementos faltantes de la variable aleatoria. Grupo de respuestas con elementos faltantes y que por lo tanto no ordenan de menor a mayor probabilidad correctamente.

Nivel 4

Distribución correcta. Grupo de respuestas que ordena correctamente los valores de la variable aleatoria de menor a mayor a probabilidad. Aunque no agrupan a los valores con mismas probabilidades como el 10 y el 0, pero los toman como los de menor probabilidad.

Nivel 3

Distribución incorrecta con todos los elementos de la variable aleatoria. Grupo de respuestas que colocan todos los elementos, pero son ordenados incorrectamente.

Nivel 1. No entienden la pregunta

Una de las respuestas (8%) no da ninguno de los elementos de la variable aleatoria, el estudiante contesta en referencia a la pregunta cuatro del cuestionario dos. Si se pregunta explícitamente por la probabilidad de las listas de la pregunta cuatro, la lista de Luis es la más probable entre todas ellas, sin embargo, si se pregunta por cuál lista esperarían conseguir sería la de Pedro.

> Jesús: “Alan, Paco, Luis, Iván, Alex, Juan y Pedro, lo ordene por la tabla con mayor número de variantes”

Nivel 2. Distribución incorrecta con elementos faltantes de la variable aleatoria

El 31% de las respuestas de los estudiantes, 4 de las 13, no contaron correctamente los elementos de la variable aleatoria. Al no contar correctamente todos los valores les es imposible detectar cuál es más probable o cuál menos probable. Es difícil tratar de comprender el significado de las respuestas, por ejemplo: Gamaliel dice que el cero y el 10 por ser el más grande y el más pequeño, pero nunca hace referencia a sí cree que son los eventos más probables, los menos probables o uno y uno, sin embargo no toma en cuenta que la media es el evento más probable ni a los otros elementos; por otro lado, Lesley, no toma en cuenta los valores de sacar 2 y 7 bolas rojas en una muestra de tamaño 10, producto de una distracción posiblemente, tampoco coloca al valor X=5 como el más probable (ya que las instrucciones son ordenar de menor a mayor probabilidad), ni da los valores extremos como los menos probables;

> Gamaliel: “El 10 y el cero porque son grandes y el más pequeño”

> Lesley: “5, 4, 6, 8, 9, 1, 10, 3, 0”

Los otros dos estudiantes sólo toman los primeros 5 elementos de la variable aleatoria, sin embargo, logran identificar que el evento más probable es extraer 5 pelotas rojas de una muestra de 10.

> Lucia: “1, 2, 3, 4, 5 puede ser porque puede haber más amarillas o verdes”

Nivel 3. Distribución incorrecta con todos los elementos de la variable aleatoria

El 31% de las respuestas de los estudiantes, correspondientes a cuatro de ellas identificó todos los elementos de la variable aleatoria, pero no lograron dicha lista correctamente.

Dos de las cuatro estudiantes plasmaron en sus respuestas todos los elementos de la variable aleatoria. Uno de ellos, Noel, da intervalos para decir cuales valores son los más y los menos probables, pero los coloca erróneamente e inclusive dice que extraer de 8 a 10 pelotas rojas es un evento improbable, por lo que su lenguaje también es incorrecto. Los otros tres estudiantes despliegan la lista de todos los valores, pero los ordenan incorrectamente, por ejemplo: Luis muestra que los valores extremos son los que menos probabilidad tiene de salir, sin embargo, no identifica al 5 como el evento más probable, sino que agrupa a los elementos 4, 5 y 6 cómo los probables.

> Noel: “5-7 probable, 0-2 menos probable, 3-4 menos probable y 8-10 improbable”
>
> Pamela: “6, 4, 7, 5, 8, 9, 10, 2, 3, 1, 0”
>
> Luis: “10, 0, 1, 9, 2, 8, 3, 7, 6, 5, 4; porque es más probable que sean extraídos entre 4 y 6 veces porque el número de pelotas del mismo color”

Nivel 4. Distribución correcta

Cinco de las 13 respuestas de los estudiantes, el 38%, cuentan todos los elementos de la variable aleatoria, reconocen a la media como el evento más probable y a los valores extremos como los menos probables, sin embargo, no expresan en sus respuestas que los eventos obtener 0 o 10, 1 o 9, 2 u 8, 3 o 7 y 4 o 6 tiene la misma probabilidad de ocurrencia; muestran una lista sin agrupar a los eventos con igual probabilidad.

> Michelle: “10, 0, 9, 1, 8, 2, 7, 3, 6, 4, 5”

5.3.6 Análisis de las respuestas a la pregunta 5b

La pregunta número 5 inciso b hace referencia nuevamente a la variable aleatoria número de pelotas rojas al realizar 10 extracciones de la urna. Se pide a los estudiantes que seleccionen cuál de las siguientes tablas esperarían obtener si se realizará el experimento cien veces y lo organizaran por número de pelotas rojas. Con esta pregunta se intenta analizar si los estudiantes vinculan la asignación de los valores más y menos probables que dieron en la pregunta anterior con lo que el resultado que esperan.

b) ¿Cuál de las siguientes tablas crees que sea la que se obtuvo al realizar el experimento cien veces? Puedes realizar su grafica de barras de cada tabla para observar mejor la distribución de las bolas rojas. Justifica tu respuesta

Número de rojas	Frecuencia
0	0
1	2
2	1
3	14
4	12
5	30
6	24
7	9
8	6
9	2
10	0

Tabla 1

Número de rojas	Frecuencia
0	6
1	11
2	5
3	11
4	7
5	5
6	14
7	13
8	12
9	8
10	8

Tabla 2

Número de rojas	Frecuencia
0	0
1	1
2	4
3	10
4	15
5	20
6	15
7	10
8	4
9	1
10	0

Tabla 3

Número de rojas	Frecuencia
0	0
1	0
2	0
3	1
4	6
5	11
6	15
7	35
8	21
9	10
10	1

Tabla 4

Figura 49. Pregunta 5b del segundo cuestionario

Nivel 1

El nivel uno se conforma por dos categorías, la tabla 1 y la tabla 2 que tratan de distribuciones diferentes a la binomial a diferencia del nivel 3 y 2

Nivel 2

Tabla 3. Los estudiantes que eligieron a la tabla 3 caen en esta categoría. Esta tabla trata de imitar a la distribución binomial, pero sin variabilidad en sus opciones, para cada uno de los valores con la misma probabilidad tienen la misma cantidad de experimentos.

Tabla 2. En esta categoría se encuentran el grupo de estudiantes que en sus respuestas eligen a la tabla 2. Esta tabla, nuevamente, fue creada a través del software Fathom con una distribución uniforme por lo que obtener cero o cinco rojas es igual de probable.

Tabla 4. El grupo de respuestas que eligen a la tabla 4 representan a esta categoría. Se trata de una distribución con la cola del lado derecho más pesada, por lo que no representa la distribución binomial que se esperaría conseguir.

Nivel 3

Tabla 1. El grupo de estudiantes que en sus respuestas eligen a la tabla 1. Esta tabla fue creada a través de Fathom con una distribución binomial (n=10, p=1/2) simulando lo que podría suceder si se extraen diez pelotas, cien veces, de la urna con 5 pelotas rojas, 2 amarillas y 3 verdes.

Nivel 1. Tabla 2

Tres de los 13 estudiantes (23%) expresa en sus respuestas que esperarían conseguir algo parecido a la tabla 2, aunque sus argumentos son bastante confusos por la falta de lenguaje probabilístico al parecer tratan de expresar que por ser distribuidos los resultados uniformemente se apegan más a lo que podría suceder.

Luz: “La tabla 2, ya digo que porque tiene probabilidad media”

Nivel 1. Tabla 4

Por último, la tabla 4 fue la que, en las respuestas de los estudiantes, se eligió en mayor porcentaje (64% correspondiente a seis de los estudiantes). Todos los estudiantes que escribieron algún argumento concordaron en que era la mejor elección por ser una tabla con mayor variabilidad y resultados más lógicos.

Luis: “Tabla 4, porque tiene mayor variabilidad en sus resultados”

Nivel 2. Tabla 3

Sólo un estudiante (8%) eligió la tabla 3 con su respuesta, tabla que muestra rasgos de ser una distribución binomial con p=1/2 y n=10, sin embargo, no se argumenta el por qué en la respuesta.

Francisco: “La tabla 3”

Nivel 3. Tabla 1

Dos de los 13 estudiantes (15%) eligieron a través de sus respuestas a la tabla 1, uno de estos estudiantes argumento su elección por las probabilidades que él pensaba eran mayores, en este caso el valor esperado: cinco.

> Sergio: “La tabla 1 porque como dije entre más alejados sean del 5 menor la probabilidad”

5.3.6 Análisis de las respuestas a la pregunta 5d

La última pregunta del segundo cuestionario, 5d, hace referencia a cinco gráficas organizadas por tres intervalos: del 0 al 3, del 4 al 6 y del 7 al 10 preguntándoles por cuál de ellas esperarían que sucediera sí realizaran el experimento.

Si se mide la longitud de los tres intervalos se observa que el intervalo del 4 al 6 es el de menor longitud, sin embargo, cuenta con una probabilidad mayor a los otros dos con el 66% aproximadamente, mientras que los intervalos 0 al 3 y 7 al 10 cuentan con una probabilidad del 17% aproximadamente. Se pretende analizar como los estudiantes ven a la variabilidad y a la distribución binomial, sí mezclan ambas componentes o las ven por separado.

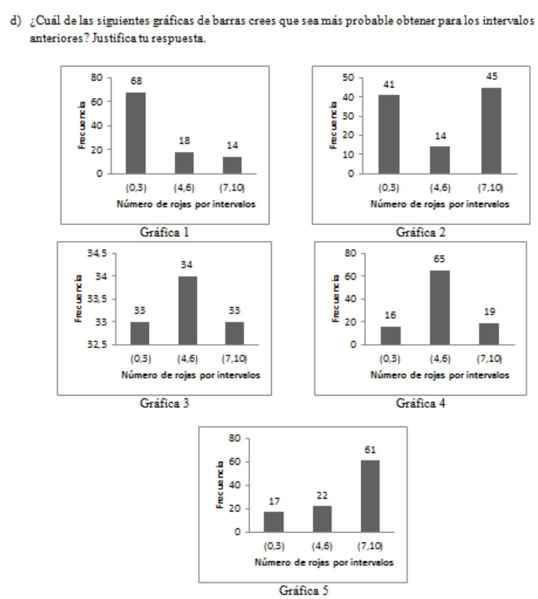


Figura 50. Pregunta 5d del segundo cuestionario

Las siguientes categorías se crearon a partir de las respuestas de los estudiantes en la pregunta 5d.

Nivel 1

El nivel uno se compone de tres categorías diferentes: la elección de la gráfica uno, la elección de la gráfica 5, las cuales tienen una distribución con alguna de las colas más pesada.

- Gráfica 1. Los alumnos que eligen con sus respuestas a la gráfica 1 caen en esta categoría. Esta gráfica se caracteriza por tener una mayor probabilidad en el intervalo 0 al 3 y probabilidades parecidas para los otros dos intervalos.
- Gráfica 5. Los alumnos que eligen con sus respuestas a la gráfica 5 caen en esta categoría. Esta gráfica se caracteriza por tener una mayor probabilidad en el intervalo (7,10) y probabilidades parecidas para los otros dos intervalos.

Nivel 2

Gráfica 2. Los alumnos que eligen con sus respuestas a la gráfica 2 caen en esta categoría. Esta gráfica se caracteriza por tener una mayor probabilidad en los intervalos de los extremos, de 0 al 3 y del 7 al 10, contrario a las probabilidades reales de la distribución binomial.

Nivel 3

Gráfica 3. Los alumnos que eligen con sus respuestas a la gráfica 3 caen en esta categoría. Esta gráfica se caracteriza por tener las mismas probabilidades de ocurrencia para los tres eventos, pero con una diferencia de uno más para el intervalo del 4 al 6, diferencia insignificante para tratarse de una distribución binomial.

Nivel 4

Gráfica 4. Los alumnos que eligen con sus respuestas a la gráfica 4 caen en esta categoría. Esta gráfica se caracteriza por tener una mayor probabilidad en el intervalo (4,6) y probabilidades parecidas para los otros dos intervalos.

Nivel 1. Gráfica 5

Dos estudiantes (15%) eligieron la gráfica 5 argumentando que los resultados de extraer 7 a 10 pelotas rojas eran más frecuentes que los anteriores, a pesar de que ambos estudiantes en un principio declararon que extraer cinco rojas era lo más probable.

Lucia: “Gráfica 5, los resultados de 7 a 10 son más elevados como en la tabla”

Nivel 2. Gráfica 2

Uno de los estudiantes (8%) respondió que la gráfica 2 era la más adecuada, su justificación es poco clara, pues habla sobre el porcentaje de un intervalo sin especificar a cuál se refiere. Una suposición es que haya observado las longitudes de los intervalos para conjeturar que mientras más grandes más probabilidad tienen, aunque no sea cierta dicha afirmación.

> Lesley: “La gráfica 2, porque es el intervalo en el % es mayor”

Nivel 3. Gráfica 3

Siete estudiantes (54%) respondieron que la gráfica 3 era la más allegada a la realidad, aunque la mayoría expresaba que alrededor de la media había más probabilidad para esta pregunta caían en un sesgo de equiprobabilidad al asignar casi la misma frecuencia a los tres intervalos.

> Jesús: “La gráfica 3, ya que las dos son iguales y la diferencia sólo es 1”

> Luis: “Gráfica 3, porque existe una mayor probabilidad de conseguir esos intervalos”

Nivel 4. Gráfica 4

Tres de los estudiantes (23%) respondieron que la gráfica 4 era parecida a lo que esperarían sacar si realizaran el experimento, argumentando que existe una mayor probabilidad en valores cercanos a la media.

> Luz: “La gráfica 4 porque hay más probabilidad de que salgan la mitad de veces”

5.4 Cuestionario 2 (Pre-test)

5.4.1 Análisis de las respuestas de la pregunta 1

Como se dijo anteriormente, a través de la primera pregunta se realizó un análisis de los tipos de razonamiento que los estudiantes tienen acerca de la variación en situaciones de azar. Se les pregunta por el número de pelotas rojas que esperarían sacar en una muestra de 10 extracciones con remplazo de una urna con 10 pelotas, de las cuales 5 son de color rojo, 2 amarrillas y 3 verdes. [Poner la pregunta exactamente como se les presentó a los alumnos]

Al analizar las respuestas planteadas por los estudiantes se estructuraron las siguientes categorías para el post-test:

Nivel 1

Valor por arriba de la media. Las respuestas que indican que es la probabilidad de obtener más pelotas de color roja es mayor caen en esta categoría. Aseguran que por haber más pelotas rojas que de otro color deben salir más de éstas.

Nivel 2

Dogmatismo teórico. Al igual que en el pre-test las respuestas que se clasifican en esta categoría proporcionan el valor esperado, en este caso 5, como el número de pelotas rojas que creen que conseguirían. Si extraen diez pelotas de la urna, teóricamente se espera conseguir 5 pelotas rojas, 2 amarillas y 3 verdes, reflejo exacto de la distribución de dicha urna. En este tipo de respuestas el estudiante no toma en cuenta la variabilidad de los resultados. Obtener 5 pelotas rojas en la muestra tiene una probabilidad aproximada de 0.25, es decir, aunque es el valor individual más probable sigue siendo un evento bastante incierto.

Nivel 3

Intervalo amplio con valores grandes. Los estudiantes que responden dando un intervalo que ocupan la mayoría de los eventos que pueden ocurrir con una tendencia a los de mayor cantidad para el número de pelotas rojas caen en esta categoría. A pesar de aprecian la variabilidad no lo hacen de manera correcta, pues no toman en cuenta la forma de la distribución.

Nivel 4

Intervalo por debajo de la media. Los estudiantes que responden asignando un intervalo con valores que se encuentran por debajo del esperado caen en esta categoría. Estos estudiantes comprenden la variabilidad que hay al realizar el evento, por lo que en lugar de dar un único valor dan los que más probables creen que son, aunque erróneos para este caso.

Nivel 5

Intervalo alrededor de la media. Se trata del grupo de respuestas en las cuales, los estudiantes, asignan un intervalo, en lugar de un solo número, alrededor del valor esperado para responder a la pregunta, por lo que se puede conjeturar que entienden la forma de la distribución binomial.

Nivel 1. Valor por arriba de la media

Dos de los estudiantes respondieron con un valor mayor a la media, seis y siente pelotas rojas, con la justificación de que al haber más pelotas rojas que de otro color se deberían de conseguir más de este calor. Estas respuestas no toman en cuenta el valor más probable, que es la media, y tiene una pequeña apreciación de la variabilidad, pero no la suficiente como para arrojar un intervalo como resultado.

Iván: “7 porque al haber más rojas se pueden obtener más “

Nivel 2. Dogmatismo teórico

Tres de los estudiantes (23%) respondieron nuevamente con un solo valor, el valor esperado cayendo en la categoría de dogmatismo teórico, ya que no toman en cuenta la variabilidad de los resultados y el azar en la situación.

Noel: “5 rojas, porque hay más de ese color”

Nivel 3. Intervalo amplio con valores grandes

Uno de los estudiantes (8%) respondió con un intervalo considerablemente grande de 4 a 10 pelotas rojas, dejando a fuera los valores pequeños. La justificación que realiza es meramente decir que se tiene mayor probabilidad en dicho rango, sin expresar porque tiene esa creencia.

Dulce: “Más de 4 pelotas rojas, porque hay mayor probabilidad”

Nivel 4. Intervalo por debajo de la media

Uno de los estudiantes (8%) también respondió asignado un intervalo a lo que esperaría que sucederá sí se realiza el experimento, sin embargo, se trata de un intervalo con valores bajos para el número de pelotas rojas, pues no encierra al valor esperado donde se encuentran los valores más probables a parte de dicho valor. La justificación que da es contradictoria con el intervalo: por un lado, expresa que la mayoría son de color rojo, pero por el otro da un intervalo con valores pequeños.

Francisco: “De 3-5 ya que las rojas son mayoría”

Nivel 5. Intervalo alrededor de la media

La mayoría de los estudiantes después de haber tenido contacto con el software Fathom fueron capaces de dar como respuesta un intervalo, apreciaron la variedad de resultados que el software arroja, pues con él manipulan un registro dinámico y con el cual se puede observar y conjeturar patrones de comportamiento de los datos. Cabe destacar que en el pre-test ninguno de los estudiantes logró una abstracción de este tipo, aunque el lenguaje utilizado y las justificaciones por parte de los estudiantes en sus respuestas son carentes de sentido. Seis de los 13 estudiantes (46%) respondieron con un intervalo alrededor de la media.

Luz: “4 -6 porque el intervalo se encuentra entre esos”

Jesús: “3-7 porque son muy numerosas”

Varios aspectos en el razonamiento de los estudiantes se vieron modificados, por ejemplo: durante el pre-test ningún estudiante fue capaz de arrojar como respuesta un intervalo para decir lo que esperaría que ocurriera, abstracción importante cuando se trata de realizar una estimación estadística, contrario a lo que respondieron en el post-test después de haber manipulado algunas actividades mediante el software Fathom, pues ocho de los 13 estudiantes (62%) asignó un intervalo, aunque dos de ellos no dieron una apreciación en su respuesta de que el valor más probable era la media y los valores alrededor de ella; otro aspecto importante es que se disminuyó la cantidad de estudiantes que habían caído en la categoría de dogmatismo teórico, de ocho estudiantes pasaron a ser tres para el post-test (tabla 15)

		Pre-test		Post-test	
Categorías		Con intervalos	Sin intervalos	Con intervalos	Sin intervalos
Con variación	Apreciación de la media como valor más probable	0	2	6	0
	No aprecia a la media como valor más probable	0	3	2	2
Dogmatismo teórico		-	8	-	3
Total		0	13	8	6

Tabla 15

5.4.2 Análisis de las respuestas de la pregunta 2

Recordemos que la segunda pregunta corresponde al caso contrario de la pregunta 1 ¿qué es lo que no esperarían conseguir? Las categorías para el post-test fueron modificadas, pues al contrario del pre-test nuevamente, la mayoría de los estudiantes, contestó asignando un intervalo a los resultados que menos esperarían conseguir.

Nivel 1

Valores fuera de lo probable. Las respuestas que dan valores que no entran dentro de la variable aleatoria número de rojas en diez extracciones, que va de cero hasta diez rojas, caen en esta categoría.

Nivel 2

Resultados aproximados a los valores poco probables. En esta categoría se encuentran las respuestas que dan un valor aproximado a alguno de los valores menos probables, por ejemplo: sacar una pelota roja. No arrojan los valores menos probables (cero y diez) pero sí alguno de ellos. Para esta categoría puede ser que den un intervalo o un valor fijo en las respuestas.

Nivel 3

Reconocimiento de algunos de los valores menos probables. Esta categoría engloba las respuestas que proporcionan alguno o algunos de los valores menos probables, pero sin lograr identificar a los dos valores que menos se esperarían conseguir (cero y diez rojas), sino sólo a uno de ellos. Para esta categoría puede ser que den un intervalo o un valor fijo en las respuestas.

Nivel 4

Reconocimiento de los intervalos menos probables. Respuestas que asignan intervalos con los valores menos probables de ambos lados de la distribución se colocan en esta categoría.

Nivel 1. Valores fuera de lo probable

Uno de los estudiantes respondió que no esperaría conseguir más de diez pelotas rojas por ser un evento imposible, puede deberse a un error al redactar la pregunta, pues nunca se especifica que de los eventos posibles digan cual no esperarían conseguir.

> Lucia: “más de 10 porque las pelotas se meten así que te puede salir hasta 10 veces, pero solo porque es el número de intentos”

Nivel 2. Resultados aproximados a los valores poco probables

Cuatro de los estudiantes (31%) identificaron valores entre los menos probables y los más probables. Uno de ellos asigna un intervalo para el número de pelotas rojas que no esperaría conseguir, de 3 a 5, sin embargo, dentro de éste se encuentra el evento más probable que es la media, la justificación dada en la respuesta es que hay la misma cantidad de pelotas de otro color que de rojas; los restantes tres estudiantes que se encuentran dentro de esta categoría nombraron algunos valores bajos, por ejemplo: extraer una, dos y tres pelotas rojas.

> Francisco: "De 3-5 ya que las otras son de igual cantidad"

> Pamela: "1, ya que son muchas por lo que deberían salir más"

Nivel 3. Reconocimiento de algunos de los valores menos probables.

Por otro lado, seis de los estudiantes (46%) respondieron con algunos de los valores menos probables, aunque no todos. Por ejemplo: uno de los estudiantes expresó a través de su respuesta que lo que menos esperaría conseguir son 1, 2, 9 y 10 pelotas rojas, sin embargo omite uno de los eventos menos probables, conseguir cero pelotas rojas; tres estudiantes asignaron intervalos de uno de los extremos, sin tomar en cuenta el otro, extraer 9 y 10 pelotas rojas o extraer 0 y 1 pelotas rojas; por último, dos estudiantes dijeron que no esperarían extraer cero pelotas rojas con la justificación de que son demasiadas pelotas rojas como para no conseguir ninguna, toman en cuenta solo una de las colas de la distribución.

> Lesley: "1, 2, 9, 10, porque es una posible probabilidad"

> Dulce: "9 y 10 porque también hay % de que"

> Gamaliel: "de 0-1; pues hay más probabilidad de sacar más de 1 roja (son más dentro de la urna)"

> Michelle: "0 porque son muchas rojas como para que no sacar ninguna"

Nivel 4. Reconocimiento de los intervalos menos probables.

De los trece estudiantes, dos de ellos (15%) asignaron un rango de valores con los elementos menos probables de la variable aleatoria, nuevamente su lenguaje probabilístico es escaso al no tener una instrucción formal en la materia, sin embargo, ya muestran una apreciación del comportamiento de la distribución binomial y de la variabilidad.

Sergio: “0, 1, 2 y 10, 9, 8 porque son menos probables”

Nuevamente se observa un progreso apreciable con el razonamiento de los estudiantes, poco más de la mitad de los estudiantes, siete de los 13 (54%), consideran ahora a los intervalos como una forma de responder a preguntas donde interviene el azar, un nivel de abstracción que para el pre-test nadie realizó; además, se ve una mejoría también para el entendimiento del comportamiento de la distribución, más estudiantes reconocieron a los valores extremos como los menos probables y por ello los que menos esperarían conseguir al realizar el experimento (Tabla 16).

	Pre-test		Post-test	
Categorías	Con intervalos	Sin intervalos	Con intervalos	Sin intervalos
Reconocimiento de los intervalos menos probables	0	0	2	0
Reconocimiento de algunos valores poco probables	0	3	4	2
Resultados aproximados a los valores poco probables	0	3	0	2
Media o resultado aproximado a ella	0	7	1	1
Valores fuera de lo probable	0	0	0	1
Total	0	13	7	6

Tabla 16

5.4.3 Análisis de las respuestas a la pregunta 3

En la pregunta tres se analizó la percepción que tienen los estudiantes al generar varias muestras de tamaño 10 sobre la variación para un experimento binomial, en este caso la extracción de pelotas de una urna. Para examinar con más detalle las respuestas se utilizaron las mismas categorías que en el pre-test, sin embargo, todas las respuestas de los estudiantes se categorizaron el en nivel tres, de los cuatro que creados.

Nivel 3

- *Variación alrededor de la media con inclinación a valores altos*. Las respuestas que dan un intervalo alrededor del valor más probable, que es la media, caen en esta categoría, sin embargo, existe una inclinación a los valores con mayor número de pelotas rojas.
- *Variación alrededor de la media con inclinación a valores bajos*. Grupo de respuestas que dan un intervalo alrededor del valor más probable, la media, caen en esta categoría, sin embargo, existe una inclinación a los valores con menor número de pelotas rojas.

Nivel 3. Variación alrededor de la media con inclinación a valores altos

Siete de los 13 estudiantes (54%) contestaron con diferentes valores para las muestras que van desde obtener tres pelotas rojas hasta nueve y medias que van desde 5.3 hasta 6.2, en estas respuestas se refleja un pensamiento probabilístico más allá del clásico, pues consideran un rango de valores y no sólo el valor esperado.

Luis: “7, 5, 5, 6, 4, 5”

Lucia: “5, 9, 7, 4, 3, 8”

Nivel 3. Variación alrededor de la media con inclinación a valores bajos

Por otro lado, los restantes seis estudiantes (46%) respondieron con valores que también encierran a la media, desde el uno hasta el siete y medias que van desde 3.5 hasta 4.6, ellos también reflejan un pensamiento que considera la variabilidad en las muestras y no sólo el enfoque teórico, aunque se inclinan más por los valores que se encuentran debajo de la media.

Noel: “3, 4, 5, 3, 4, 2”

Michelle: “2, 5, 7, 1, 3, 4”

En las respuestas que dieron los estudiantes se ve un cambio en su pensamiento probabilístico nuevamente: para el post-test ninguno de los estudiantes cayó en la categoría de dogmatismo teórico, es decir que parece que vincularon la teoría clásica y frecuencial, pues la mayoría encerraba a la media dentro de los valores que arrojaban en sus respuestas (Tabla 17)

		Pre-test	Post-test
Respuestas		Número de alumnos	Número de alumnos
Dogmatismo teórico		4	0
Enfoque frecuencial	Variabilidad alrededor de la media	3	12
	Variabilidad alrededor de los valores menores	6	1
	Variabilidad alrededor de los valores mayores	0	0
Total		13	13

Tabla 17

5.4.4 Análisis de las respuestas a la pregunta 4

Como se vio en el pre-test, la pregunta cuatro consta de una tabla con diferentes resultados para el experimento de extraer una pelota diez veces y repetirlo en seis ocasiones; para el inciso (a) los estudiantes debían elegir cuál de las tablas presentadas era la que esperarían conseguir si hacían el experimento, para el inciso (b) tenían que elegir la tabla que describía de peor forma lo que podría suceder.

Inciso a

Para el primer inciso se respetaron las mismas categorías presentadas en el pre-test para al observar y analizar las respuestas de los estudiantes.

Nivel 1

Cualquier resultado. Las respuestas que consideraban que cualquier tabla podría ocurrir se agrupan en esta categoría.

Nivel 2

Dogmatismo teórico. Conjunto de respuestas que eligieron la tabla de Luis como la mejor. Todos los valores de la tabla son el valor esperado, cinco rojas, por lo que no toma en cuanto la variabilidad, teniendo así una desviación estar de cero.

Nivel 3

Para el nivel tres se tiene dos categorías diferentes, el conjunto de respuestas que elige la tabla con variación por arriba de la media y el conjunto de respuestas que elige la tabla con variación por debajo de la media

- Variación por arriba de la media. Conjunto de respuestas que eligieron la tabla de Juan como la mejor. Esta tabla tiene una media de 7 y una desviación estándar de 1.41, va del número cinco al ocho con un rango de 3. Sus valores se encuentran por arriba del valor esperado.
- Variación por debajo de le media. Conjunto de respuestas que eligieron la tabla de Iván como la mejor. Esta tabla tiene una media de 3.33 y una desviación estándar del 0.81, va del número dos al cuatro con un rango de 2. Sus valores se encuentran por debajo del valor esperado.

Nivel 4

Variación alrededor de la media. Conjunto de respuestas que eligieron la tabla de Pedro como lo que esperarían que ocurriese más fácilmente. La media de esta tabla es de 5.33 con una desviación estándar del 1.81, va del número tres al número ocho, es decir que tiene un rango de cinco.

Nivel 2. Dogmatismo teórico

Una de las respuestas de los estudiantes (8%) cayó en la categoría de dogmatismo teórico, argumentando que el evento conseguir cinco pelotas rojas de la urna es el evento más probable, por lo que será más factible sacar cinco rojas en cada una de las seis extracciones; sin embargo, aunque tenga razón de que el evento más probable es conseguir la mitad de pelotas rojas no toma en cuenta la variabilidad de las muestras.

Francisco: “Luis ya que es más probable sacar al menos las cinco pelotas rojas”

Nivel 3. Variación por arriba de la media

Las respuestas de tres de los estudiantes de los 13 (23%) eligieron la tabla de Juan porque, para ellos, describía mejor lo que podría ocurrir al realizar el experimento. Los argumentos encontrados en las respuestas fueron muy parecidos al pre-test, pues expresaban que la lista tenía más variabilidad y que por haber más rojas en la urna se esperaría sacar más de este color, argumentos erróneos.

> Gamaliel: "La de Juan, pues sus resultados son más variables y puede sacar más de 5 bolas rojas; lo que es más lógico"

Nivel 3. Variación por debajo de le media

Para la lista de Iván dos de las respuestas de los estudiantes (8%) consideraban que era más probable obtenerla, el argumento dado nuevamente tiene deficiencias con el lenguaje probabilístico y es carente de sentido común, pues asegura que las probabilidades no son altas, por lo que deberían salir resultados bajos.

> Pamela: "La tabla de Iván, ya que son más aproximados los resultados, no son tan grandes las probabilidades por eso son menores los resultados"

Nivel 4. Variación alrededor de la media

Siete de los 13 estudiantes (54%) en sus respuestas eligieron la tabla de Pedro pues consideraban que era que la que mejor describía lo que podría ocurrir al realizar el experimento. En las respuestas diferentes tipos de argumentar la elección, por ejemplo: algunos dicen que tiene los valores más probables o por la frecuencia en que se repetían dichos valores en los experimentos.

> Sergio: "La de Pedro porque los números que yo esperaría a que se repitieran más son el 4, 5, 6 y los que menos o de plano no se repitieran son el 0, 1, 2, 3, 7, 8, 9 y sus resultados yo los considero lo más cercano a eso"
>
> Lesley: "La tabla 2 por la frecuencia"

Inciso b

De igual forma, las categorías descritas para el inciso (b) son las mismas en el pre-test que para el post-test.

Nivel 1

Sin respuesta. Respuestas en blanco

Nivel 2

Obtener un cero. Los estudiantes que eligen la lista de Alex por tener ésta un cero caen en esta categoría.

Nivel 3

Sin variación. En esta categoría se encuentran las respuestas que eligen cualquiera de las listas que no contiene variación, ya sea la lista de Alan, Paco o Iván.

Nivel 4

Sin variación y obtener siete rojas. Los estudiantes que en sus respuestas eligieron la lista de Paco caen en esta categoría. Todos los resultados de esta lista son 7 rojas por lo que no se aprecia la variación en ella.

Nivel 5

Sin variación y obtener todas rojas. Los estudiantes que en sus respuestas eligieron la lista de Alan caen en esta categoría. Todos los resultados de esta lista son 10 rojas, uno de los valores menos probables de obtener, a parte del cero, además de no contener variación

Nivel 1. Sin respuesta

Uno de los estudiantes (8%) dejo en blanco el inciso (b) de la cuarta pregunta.

Nivel 3. Sin variación

En una de las respuestas de los estudiantes (8%) se expresó que las listas que contenían los mismos valores, ya sea todos 5, 7 o 10 eran las que consideraba como lo que peor podrían describir si se realizara el experimento por ser las más probables, aunque su argumento es falso, pues en realidad la lista de los valores de Alan es la más probable de todas.

Lucia: “Ninguno, pero los de Paco, Luis y Alan son menos probables”

Nivel 5. Sin variación y obtener todas rojas

Para está pregunta, nuevamente la mayoría de los estudiantes, 10 de los 13 (77%), respondieron que la lista que describía de la peor manera lo que podría pasar si se realizaba el experimento era la de Alan, pues aparte de no tener variación en sus muestras consideraba a uno de los eventos menos probables, obtener 10 pelotas rojas. Los argumentos utilizados cambiaron respecto al pre-test, ahora hacen un análisis comparando probabilidades, por ejemplo: algunos expresan que el número de rojas con mayor frecuencia se encuentra entre los valores 4 a 6, mientras que conseguir 10 pelotas rojas es un evento menos probable; otros sólo expresan la dificultad que hay en conseguir un resultado de ese tipo sin comparar los resultados de los demás eventos o expresan lo que se observa en la tabla al decir que todas las pelotas son de color rojo.

Sergio: “Los de Alan, porque el número de rojas que podrían salir tiende entre 4, 5, 6 y 10 está en los menos probables”

Francisco: “Alan ya que sacar 10 veces las pelotas rojas es pura chiripa”

Otro de los estudiantes (8%) respondió que la tabla de Alan y la de Alex eran las que peor describían lo que podría ocurrir si se realizará el experimento, la justificación expuesta se basó en que ambas listas contenían a los eventos menos probables, extraer cero y diez rojas de la urna. Aunque elige la tabla menos probable, también reconoce que extraer cero águilas es un evento poco probable.

Gamaliel: “Podría ser Alex y Alan; pues Alex, pues casi imposible sacar 0 águilas o menos y Alan es casi imposible sacar 10 rojas en cada ronda”

En la tabla 18 se muestra un cuadro comparativo de las respuestas de los estudiantes antes y después de realizar las actividades elaboradas con ayuda del software Fathom. El incremento de los estudiantes que consideraban a la tabla de Pedro como la que mejor describía lo que sucedería al realizar el experimento es uno de los cambios notables entre el pre-test y post-test, aunque los cambios más significativos encontrados fue la forma de argumentar las respuestas, pues algunos de los estudiantes lograron comparar tablas en lugar de basarse en argumentos erróneos de probabilidades.

	Pre-test		Post-test	
	Número de alumnos		Número de alumnos	
Listas	Inciso a	Inciso b	Inciso a	Inciso b
Juan	4	-	3	-
Pedro	4	-	7	-
Luis	2	-	1	-
Iván	2	-	2	-
Paco	-	1	-	-
Alex	-	1	-	-
Alan	-	10	-	11
Todas	1	-	-	-
Sin variación	-	1	-	1
Sin respuesta	-	-	-	1
Total	13	13	13	13

Tabla 18

5.4.5 Análisis de las respuestas a la pregunta 5a

La pregunta 5a del cuestionario dos retoma el concepto de variable aleatoria y pide a los estudiantes ordenar sus valores de menor a mayor probabilidad; esta pregunta, como se vio anteriormente con el pre-test, analiza como los estudiantes ven la forma de la distribución binomial, en este caso con *n* igual a diez y *p* igual a un medio.

Las categorías utilizadas en el pre-test no sufrieron modificaciones, por lo que el post-test las retoma para clasificar las respuestas de los estudiantes.

Nivel 1

No entienden la pregunta. Respuestas que no dan elementos de la variable aleatoria, sino listas de problemas anteriores. En específico contestan con las tablas de la pregunta cuatro del segundo cuestionario.

Nivel 2

Distribución incorrecta con elementos faltantes de la variable aleatoria. Grupo de respuestas con elementos faltantes y que por lo tanto no ordenan de menor a mayor probabilidad correctamente.

Nivel 3

Distribución incorrecta con todos los elementos de la variable aleatoria. Grupo de respuestas que colocan todos los elementos, pero los ordenan incorrectamente.

Nivel 4

Distribución correcta. Grupo de respuestas que ordena correctamente los valores de la variable aleatoria de menor a mayor a probabilidad. Aunque no agrupan a los valores con mismas probabilidades como el 10 y el 0, pero los toman como los de menor probabilidad.

Nivel 2. Distribución incorrecta con elementos faltantes de la variable aleatoria

Cuatro de las respuestas de los estudiantes (31%) no contaron todos los valores de la variable aleatoria, por lo que no se puede ordenar correctamente de menor a mayor probabilidad todos los eventos. Dos de estos estudiantes en sus respuestas argumentaron que el orden iba de menor o mayor, contrario a la forma de la distribución; otra de las respuestas las ordena de mayor a menor probabilidad, pero errando en algunos valores; por último, una de las respuestas indicaba que los valores más altos eran posibles de conseguirse por ser el número de rojas más alto.

Jesús: "menor a mayor porque es más ordenado"

Luz: "4, 5, 6, 7, 4, 8, 9, 2, 10, 1, 0"

Dulce: "0, 10 - 1 puede que salgan las variables más altas por el número de pelotas rojas que es mayor"

Nivel 3. Distribución incorrecta con todos los elementos de la variable aleatoria

Siete de los estudiantes (54%) contaron en sus respuestas todos los valores de la variable aleatoria, sin embargo, fallaron al ordenar la lista: algunos por posibles descuidos en cambiar la posición de algunos valores y otros por agruparlos, aunque los eventos no tuvieran la misma probabilidad.

> Iván: “0, 10, 1, 9, 2, 8, 3, 7, 4, 6, 5, 4 porque hay más probabilidad entre un intervalo de 4-7”
>
> Noel: “0-3, 3-5, 5-7, 7-10 porque en base a los experimentos de esa manera salen los intervalos”
>
> Gamaliel: “0, 1, 2, 3, 10, 9, 8, 4, 7, 6, 5”

Nivel 4. Distribución correcta

En dos de las respuestas de los estudiantes (15%) se colocaron todos los valores de la variable aleatoria en el orden correcto, reconociendo a la media como el evento más probable y a los valores extremos como los menos. Nuevamente, estas respuestas no expresan la agrupación correcta para los eventos con mismas probabilidades como es extraer cero rojas y diez rojas o extraer tres rojas y siete rojas.

> Sergio: “0, 10, 1, 9, 2, 8, 3, 7, 4, 6, 5 entre más cercanos sean los números a 5 son los más probables y entre más lejanos son menos probables porque el número total de rojas en la urna es de 5”

5.4.6 Análisis de las respuestas a la pregunta 5b

Durante el pre-test se introdujo la pregunta cinco inciso (b) que hace referencia a la variable aleatoria número de pelotas rojas al realizar 10 extracciones de la urna, el estudiante debe seleccionar entre cuatro tablas la que cree que podría conseguir si se realizará el experimento cien veces. Los elementos importantes que se intentan observar es cómo el estudiante concibe la forma de la distribución y la variabilidad.

Las categorías se volvieron a respetar para la pregunta 5b, sólo fue agregada una más: *sin respuesta*, por lo que el post-test se categorizará de la misma manera que el pre-test.

Nivel 1

Sin respuesta. Respuesta en blanco

Nivel 2

El nivel uno se conforma por dos categorías, la tabla 1 y la tabla 2 que tratan de distribuciones diferentes a la binomial a diferencia del nivel 4 y 3

Tabla 2. En esta categoría se encuentran el grupo de estudiantes que en sus respuestas eligen a la tabla 2. Esta tabla, nuevamente, fue creada a través del software Fathom con una distribución uniforme por lo que obtener cero o cinco rojas es igual de probable.

Tabla 4. El grupo de respuestas que eligen a la tabla 4 representan a esta categoría. Se trata de una distribución con la cola del lado derecho más pesada, por lo que no representa la distribución binomial que se esperaría conseguir.

Nivel 3

Tabla 3. Los estudiantes que eligieron a la tabla 3 caen en esta categoría. Esta tabla trata de imitar a la distribución binomial, pero sin variabilidad en sus opciones, para cada uno de los valores con la misma probabilidad tienen la misma cantidad de experimentos.

Nivel 4

Tabla 1. El grupo de estudiantes que en sus respuestas eligen a la tabla 1. Esta tabla fue creada a través de Fathom con una distribución binomial (n=10, p=1/2) simulando lo que podría suceder si se extraen diez pelotas, cien veces, de la urna con 5 pelotas rojas, 2 amarillas y 3 verdes.

Nivel 1. Sin respuesta

Tres de los estudiantes (23%) dejó en blanco el inciso b de la quinta pregunta.

Nivel 2. Tabla 2

En dos de las 13 respuestas de los estudiantes (15%) se expresó que la tabla 2 es la que esperarían conseguir, distribución que corresponde a una uniforme, aunque las respuestas no justifican el porqué de su elección adecuadamente se entiende que eligen esta tabla por los resultados parecidos entre cada elemento de la variable aleatoria.

Jesús: “La 2 porque nos dice que hay un evento más probable que otro”

Nivel 3. Tabla 3

En dos de las respuestas de los estudiantes (15%) eligieron la tabla 3 como la más indicada, tabla que muestra rasgos de ser una distribución binomial con p=1/2 y n=10, pero que no contiene variabilidad entre los resultados con misma probabilidad. Uno de los argumentos utilizados por los estudiantes fue que alrededor de la media se encontraban los de mayor frecuencia, el otro expuso en su respuesta de obtener esa tabla era mayor. Ninguno toma en cuenta la variabilidad de la muestra, se centran más en la forma de la distribución.

Francisco: “Tabla 3, porque el intervalo 4-6 sumado es un alto porcentaje”

Michelle: “Tabla 3 porque la probabilidad de obtener ese resultado es mayor”

Nivel 2. Tabla 4

A diferencia del pre-test en el que la mayoría de las respuestas de los estudiantes habían caído en esta categoría, para el post-test sólo en una de ellas (8%) se elige a la tabla 4 como la que esperaría conseguir. Su elección se basa en un argumento erróneo, pues en la respuesta se expresa que los valores obtenidos no son grandes ni pequeños, aunque no realiza una comparación para saber a lo que se refiere con un valor grande o un valor pequeño.

Gamaliel: “Gráfica 4, pues son valores no muy grandes ni pequeños”

Nivel 4. Tabla 1

En cinco de las 13 respuestas de los estudiantes (38%) se seleccionó la tabla 1 cómo la tabla que esperarían conseguir si realizaran el experimento cien veces, aunque los argumentos carecen de un lenguaje apropiado, nuevamente, y más que unas justificaciones escriben lo que observan de la tabla, por ejemplo: la frecuencia es mayor alrededor de la media o los resultados son más lógicos y variados.

Sergio: “La tabla 1 porque marca al 5 como el número más cercano a una frecuencia de 30 que es a lo que más tiende”

Lucia:” La tabla 1, es más variable y lógica”

En la tabla 19 se muestran el comparativo de las respuestas de los estudiantes del pre-test con el post-test, hubo una pequeña mejoría, pues de sólo dos estudiantes que eligieron la tabla correcta que representaba una distribución binomial pasaron a ser cinco; de igual forma los estudiantes con la creencia que por haber más bolas rojas tenían que salir más de este color disminuye, pasando de seis estudiantes a sólo uno.

Categorías	Pre-test	Post-test
Tabla 1	2	5
Tabla 2	3	2
Tabla 3	1	2
Tabla 4	6	1
Sin respuesta	1	3
Total	13	13

Tabla 19

5.4.7 Análisis de las respuestas a la pregunta 5d

En el segundo cuestionario la última pregunta (5d) muestra cinco gráficas diferentes que se organizan en tres intervalos. Los estudiantes deben responder cuál de las gráficas creen que obtendrían si realizaran el experimento.

Dos de las siguientes categorías se presentaron en el pre-test y una más fue agregada al observar las respuestas de los estudiantes, pues de las cinco gráficas presentadas, sólo dos de ellas fueron seleccionadas por los estudiantes atreves de sus respuestas.

Nivel 1

Sin respuesta. Grupo de respuestas en blanco.

Nivel 2

Gráfica 3. Los alumnos que eligen con sus respuestas a la gráfica 3 caen en esta categoría. Esta gráfica se caracteriza por tener las mismas probabilidades de ocurrencia para los tres eventos, pero con una diferencia de uno más para el intervalo del 4 al 6, diferencia insignificante para tratarse de una distribución binomial.

Nivel 3

Gráfica 4. Los alumnos que eligen con sus respuestas a la gráfica 4 caen en esta categoría. Esta gráfica se caracteriza por tener una mayor probabilidad en el intervalo 0 al 3 y probabilidades parecidas para los otros dos intervalos.

Nivel 1. Sin resultado

Dos estudiantes (15%) dejaron en blanco su respuesta por lo que caen en esta categoría.

Nivel 2. Gráfica 3

La mayoría de los estudiantes en el pre-test seleccionaron a la gráfica 3 como la que esperarían conseguir si realizaran el experimento, caso contrario para el post-test en él que sólo dos de los 13 estudiantes (15%) seleccionaron a esta gráfica en sus respuestas. Sólo en una de las respuestas se argumenta el porqué de la elección, dando a entender que por haber una mayor frecuencia en el intervalo (4,6) se ajusta a la realidad por ser los valores más probables, sin embargo, no toma en cuenta que la diferencia es sólo de un elemento lo que en realidad daría equiprobabilidad en los tres eventos con muy poca variación.

> Francisco: "Gráfica 3, ya que presenta un mayor porcentaje del intervalo (4,6) el cual es más probable obtener"

Nivel 3. Gráfica 4

Por otra parte, en nueve de las 13 respuestas dadas por los estudiantes (69%) se seleccionó a la gráfica 4 como la más adecuada, sus argumentos fueron los mismos que los que seleccionaron la gráfica 3, pues expresaban que en el intervalo (4,6) existía mayor probabilidad de ocurrencia que en los otros dos.

Pamela: “Gráfica 4, hay más posibilidades de que salgan más veces entre los intervalos 4 – 6”

Un porcentaje muy grande de alumnos para el post-test mostró apreciación con la forma de la distribución mediante los intervalos, pasando de 3 alumnos en el pre-test a nueve para el post-test, los demás estudiantes no contestaron a la pregunta o cayeron en el sesgo de equiprobabilidad al seleccionar la gráfica 3 donde todos los elementos tienen prácticamente las mismas frecuencias (Tabla 20)

Categorías	Pre-test	Post-test
Gráfica 1	-	-
Gráfica 2	1	-
Gráfica 3	7	2
Gráfica 4	3	9
Gráfica 5	2	-
Sin respuesta	-	2
Total	13	13

Tabla 20

Capítulo 6

Conclusiones

6.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es mostrar algunas reflexiones que permitan revisar los planteamientos iniciales de la presente investigación acerca de las dificultades y avances de los estudiantes sobre los conceptos de aleatoriedad, variabilidad, distribución, espacio muestra, variable aleatoria, inferencias estadísticas informales y cómo vinculan la teoría frecuencial de la probabilidad con la probabilidad clásica, además de exponer cómo se modifican sus concepciones al interactuar en un ambiente computacional.

Aunque los estudiantes consideran a la variabilidad y la aleatoriedad al enfrentar tareas probabilísticas no logran hacerlo correctamente. Por otro lado, la mayoría de los estudiantes perciben el comportamiento de la distribución binomial de tener mayor ocurrencia en los centros que en los extremos, pero sin relacionar dicha característica con las probabilidades asignadas a los eventos.

Después de interactuar con el software Fathom y trabajar con simulaciones de problemas similares a los del cuestionario (ver apéndice B) se observó, en las respuestas de los estudiantes, una mejoría al vincular la distribución de probabilidad con los demás elementos que se estuvieron analizando: espacio muestra, variable aleatoria y sus predicciones.

La exposición se desglosa en cuatro apartados: las conclusiones generales en el que se desarrolla una reflexión sobre la compresión y el razonamiento de los estudiantes ante una situación probabilística en conjunto con el uso de la tecnología, además de responder las preguntas de investigación con base en los resultados analizados; las limitaciones del estudio; las investigaciones a futuro y las implicaciones para la enseñanza.

6.2 Conclusiones generales

En la presente investigación se aplicaron dos cuestionarios a los estudiantes sobre situaciones de azar con distribuciones binomiales, lanzamiento de monedas y extracciones de pelotas de una urna, con los que se analizaron y categorizaron sus respuestas, con base al análisis de las respuestas en las cuales se avanzó en responder a las preguntas de investigación.

1. ¿Cómo expresan los estudiantes la aleatoriedad y la variabilidad en sus razonamientos cuando se enfrentan a situaciones simples de probabilidad binomial?

En las respuestas de los estudiantes se refleja un razonamiento que involucra ambos conceptos: aleatoriedad y variabilidad, tanto en sus predicciones y resultados como en sus argumentos, aunque carecen de un lenguaje probabilístico apropiado para expresarlos correctamente.

Con relación a las respuestas del pre-test hubo pocas oportunidades de explorar cómo expresan los estudiantes la aleatoriedad. Ocho de las 13 respuestas examinadas se produjeron con secuencias elaboradas mediante el experimento físico, por lo tanto, de los cinco que no realizaron el experimento se puede observar los siguientes aspectos.

Se encontraron tres rasgos importantes en las respuestas de los estudiantes: la distribución de frecuencias, el desorden de los datos y la longitud de las rachas. En tres de las cinco respuestas, de los estudiantes, se hallaron secuencias desordenadas que no se aproximan a la distribución binomial; uno de estos tres estudiantes calculó las probabilidades correctamente con anterioridad (¼, ½, ¼), pero ninguno conectó las probabilidades con las frecuencias. Uno de los estudiantes que cayó en el sesgo de equiprobabilidad hizo una secuencia que se acoplaba a este sesgo, obteniendo para los tres eventos frecuencias de 20 (20 para cero águilas, 20 para un águila y 20 para dos águilas), sin considerar la variabilidad. Por último, en una de las respuestas se encontró con una frecuencia mayor para el evento más probable, además, las respuestas anteriores sobre la probabilidad de los tres eventos y el espacio muestra eran correctas.

Sólo dos de los estudiantes vincularon las probabilidades propuestas con las frecuencias que se proponían. Además, las secuencias propuestas son desordenadas, con longitudes de rachas cortas con relación a lo que puede ocurrir al hacer el experimento físico, llegando a rachas de dos o tres elementos a lo más.

Después de realizar simulaciones con Fathom sólo en una de las respuestas de los estudiantes se halló una secuencia sin patrón binomial, en todas las demás respuestas se encontró mayor frecuencia para el evento B con secuencias desordenas e inclusive rachas hasta de cuatro elementos.

En cuanto al cuestionario dos, la primera pregunta hace referencia a lo que esperan que ocurra sí extraen diez pelotas con remplazo de una urna con 5 rojas, 2 amarrillas y 3 verdes de contenido, la mayoría de las respuestas de los estudiantes (8/13) cayeron en la categoría de dogmatismo teórico al no considerar la variabilidad en sus resultados, los demás estudiantes dieron valores cercanos a la media con justificaciones incorrectas.

En las demás preguntas del segundo cuestionario caen, en su mayoría, en la misma categoría de dogmatismo teórico o dan listas de lo que esperarían que ocurriese por debajo o por arriba de la media.

2. ¿Cómo relacionan los estudiantes los enfoques clásico y frecuencial de la probabilidad antes y después de actividades de simulación?

Los reactivos del primer cuestionario se encuentran vinculados unos con otros, en la primera pregunta los estudiantes deben de elegir cuál es el evento más probable, después contar y nombrar los elementos del espacio muestra, calcular las probabilidades y dar una inferencia de lo que esperan que ocurra a largo plazo.

Para el primer reactivo: elegir el evento que esperan que ocurra al lanzar dos monedas: 0 águilas, 1 águila o 2 águilas, 11 de los 13 estudiantes (85%) eligen el evento B, sin embargo, en sus respuestas aparecen falsas concepciones o falta de argumentos sobre el porqué de la elección. Intuitivamente reconocen que el evento más probable es sacar 1 águila al lanzar una moneda dos veces, pero sin cálculos de probabilidades y comparación de éstas.

Para el reactivo dos se les pidió contabilizar los elementos del espacio muestra, en seis de las 13 respuestas de los estudiantes (46%) se encontraron todos los elementos. En cuanto a la asignación de las probabilidades de los eventos disminuye a sólo tres respuestas correctas (23%). Para las frecuencias esperadas, al realizar el experimento 60 veces, el porcentaje de respuestas en el que se ve favorecido el evento más probable crece al 77%, que corresponde a 10 de las 13 respuestas de los estudiantes.

Se infiere que, para el pre-test, sólo dos de las 13 respuestas de los estudiantes (15%) conectan cada uno de los aspectos antes mencionados, es decir que vincula aspectos de la probabilidad clásica con el enfoque frecuencial. Para el enfoque clásico asocian el espacio muestra Ω a la experiencia aleatoria para definir la probabilidad de ocurrencia de los tres eventos, después, con lo calculado, realizar una estimación de lo que podría ocurrir a largo plazo. Sin embargo, uno de las dos respuestas, que vincula ambos enfoques de probabilidad, cae en la categoría de dogmatismo teórico al contar sólo tres de los cuatro elementos del espacio muestra.

En el resto de las respuestas de los estudiantes, 10 de las 13 (77%), no se observa este vínculo entre la probabilidad clásica y el enfoque frecuencial. Por ejemplo: puede caer en el sesgo de equiprobabilidad al asignar a todos los eventos 1/3 de probabilidad de ocurrencia, pero con la concepción de que el evento sacar un águila es más factible.

Después de realizar las actividades correspondientes con el software Fathom el porcentaje de estudiantes que logra vincular todos los reactivos se eleva a seis estudiantes (46%). Sin embargo, aunque en las respuestas del post-test se aprecia un entendimiento más profundo sobre el vínculo de la probabilidad clásica y frecuencial, no logran hacer una conexión con la *ley de los grandes números* adecuada. Dentro de las actividades realizadas con Fathom identifican que la frecuencia de los resultados es una aproximación a las probabilidades, pero ninguno de las respuestas, de los estudiantes, se menciona que entre más grande es el número de lanzamientos el porcentaje de cada uno de los resultados se aproxima más a las probabilidades.

En la mayoría de las respuestas del pre-test no existe un vínculo entre los cuatro aspectos analizados, por lo que podemos concluir que tampoco se vincula el enfoque clásico y frecuencial de la probabilidad. Para el post-test, aunque el porcentaje de estudiantes que cayeron en esta desconexión de conceptos y enfoques de la probabilidad disminuyo, se observa que es necesario un énfasis en la *ley de los grandes números* y en el análisis de la regularidad con número grande de repeticiones experimentales, para estimar la probabilidad de ocurrencia de los eventos o sucesos a partir de las frecuencias relativas. Sánchez y Valdez (2014) comentan que trabajar con ambos enfoques los problemas, de probabilidad, toman un matiz totalmente diferente, pues los modelos construidos con el enfoque clásico se vuelven instrumentos de predicción, revelando así el potencial y sentido práctico de la probabilidad.

En la tabla 21 se muestra un resumen de sí en las respuestas de los estudiantes se vincula la probabilidad de ocurrencia de los eventos con los demás conceptos contemplados, para el pre-test y post-test. Cabe destacar que los estudiantes que lograron dar correctamente las probabilidades son los que, en su mayoría, vinculan los demás aspectos.

		Pre-test			Post-test		
Probabilidades		Evento que espera	Espacio muestra	Frecuencias	Evento que espera	Espacio muestra	Frecuencias
Correctas	No relaciona	1	0	1	0	1	1
	Relaciona	2	3	2	7	6	6
Equiprobabilidad	No relaciona	5	3	5	4	0	4
	Relaciona	1	3	1	0	4	0
Incorrectas	No relaciona	1	4	4	1	2	1
	Relaciona	3	0	0	1	0	1
		13	13	13	13	13	13

Tabla 21

En las respuestas de los estudiantes se aprecia una desvinculación entre la probabilidad clásica y la probabilidad frecuencial, aunque existe una mejoría al realizar las actividades de modelación y simulación en Fathom se necesita más tiempo y más actividades para romper con las falsas concepciones. Es evidente la mejoría en las respuestas, pero la mitad de los estudiantes siguieron presentando esta ruptura del vínculo entre la teoría clásica y la frecuencial, además el lenguaje con el que se expresan es un obstáculo para lograr conjeturas más profundas y relevantes.

3. ¿Cómo influyen las actividades de simulación con Fathom propuestas en este trabajo en los razonamientos reflejados en las respuestas de los estudiantes a los problemas formulados?

En la primera parte de las conclusiones se habló de la aleatoriedad y la variabilidad. Después de realizar las actividades con Fathom se mostraron, en las respuestas de los estudiantes, secuencias sin patrones y con pocas rachas de tamaño 1, llegando a obtener rachas de hasta cuatro elementos, cuestión que para el pre-test no se presentó. Se observa una mejora en las respuestas al conseguir secuencias más aproximadas al resultado de un experimento binomial, al igual que con las frecuencias.

En cuanto al concepto de variabilidad exhibieron, en las respuestas, una compresión mayor. En el segundo cuestionario se transitó de resultados aislados a establecer intervalos para responder a las preguntas de lo que esperarían que ocurriese al extraer diez pelotas. Por ejemplo: cuando se les pregunta por el número de rojas que esperarían conseguir sí extraen diez pelotas de la urna responden con intervalos alrededor de la media, como el intervalo (4, 5), mientras que en el pre-test ningún estudiante logró una respuesta de este tipo. Aunque no en todos los casos consideran la variabilidad correctamente, existe un incremento en las respuestas para tomarlo en cuenta.

En la reflexión dada a la segunda pregunta de investigación se habló un poco sobre el avance de cómo los estudiantes vinculan los enfoques de probabilidad (clásico y frecuencial). De sólo un estudiante que, en sus respuestas, en un principio estimó correctamente las frecuencias relativas con su modelo construido a partir del enfoque clásico se incrementó a siete de los 13 estudiantes. Los demás estudiantes cayeron en el sesgo de equiprobabilidad (4/13) o errores al calcular las probabilidades (2/13), sin embargo, estos estudiantes siguieron sin conectar la probabilidad, que ellos calculaban, con lo que esperaban que ocurriese al realizar el experimento en repetidas ocasiones.

Es evidente que se necesitan más actividades que las propuestas para la presente investigación, sin embargo, como primera aproximación guía a los estudiantes a razonar sobre la aleatoriedad y la variabilidad en situaciones de azar y sobre la vinculación de los enfoques de probabilidad.

6.3 Limitaciones del estudio

Dentro del estudio se destacan tres limitaciones que complicaron la toma de datos: el poco tiempo asignado para planificar y llevar a cabo el estudio, el escaso conocimiento de los estudiantes para modelar con Fathom y la falta de lenguaje probabilístico por parte de los estudiantes.

El poco tiempo asignado para planificar y llevar a cabo el estudio. Al no contar con un periodo amplio para realizar el estudio algunas de las etapas tuvieron que apresurarse, tal fue el caso de aplicación de las actividades con Fathom, en la que el tiempo hizo que se realizaran apresuradamente, lo que pudo provocar que los estudiantes no comprendieran del todo como llegar a utilizar el software. De igual manera, durante el proceso de análisis y síntesis de los resultados surgieron dudas en cuanto a lo que los estudiantes expresaban en sus respuestas y que una entrevista con ellos hubiera podida aclarar, pero la limitante del tiempo lo imposibilitó. El currículo no favorece la posibilidad de hacer experiencias con tecnología ya que prescribe actividades tradicionales con lápiz y papel

El escaso conocimiento de los estudiantes para modelar con Fathom. Al no contar con ninguna instrucción previa de cómo manejar el software, aunado a limitante del tiempo, se tuvieron que planear las sesiones de simulación lo más rápido posible, con lo que en algunas sesiones era imposible que los estudiantes terminaran todas las actividades que se requerían.

Además, la integración de la tecnología en la clase de matemáticas y de estadística a nivel bachillerato es insuficiente, pues se le ha dado prioridad a trabajar con lápiz y papel sin involucrar softwares dinámicos en el aprendizaje de los estudiantes en la mayoría de los casos. Esto hace que los estudiantes no tengan el hábito de relacionar los problemas y conocimientos matemáticos con actividades computacionales.

La falta de lenguaje probabilístico de los estudiantes. La falta de lenguaje probabilístico y estadístico de los estudiantes, propició la falta de estructura en sus respuestas y, por ende, la complicación para analizar sus respuestas en algunos casos.

6.4 Investigaciones a futuro

Con base a los resultados de la presente investigación es posible mejorar las actividades y refinar la forma de evaluar las respuestas de los estudiantes para elaborar Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje que den paso a investigaciones futuras donde la modelación con softwares dinámicos sean un aspecto relevante no sólo para introducir conceptos probabilísticos, sino para que los estudiantes resuelvan problemas creando configuraciones dinámicas que les ayuden a comprender la situación.

Al resolver un problema probabilístico utilizando el enfoque frecuencial uno de los aspectos más importantes es el diseño correcto de la configuración dinámica, una vez creado lo siguiente es repetir el experimento un número de veces apropiado y analizar los resultados, retomando las grandes ideas de probabilidad y otros conceptos como el espacio muestra, la variable aleatoria y la distribución.

Además, con esta perspectiva es posible introducir investigaciones sobre inferencias estadística y la Ley de los Grandes Números de forma intuitiva, partiendo desde cuestiones básicas de probabilidad como las presentadas en el actual documento.

6.5 Implicaciones para la enseñanza

Los resultados de la presente investigación brindan oportunidad a crear diferentes caminos para la enseñanza probabilística desde un enfoque práctico con ayuda de la manipulación y modelación de herramientas computacionales, en este caso Fathom, para desarrollar el entendimiento de conceptos, como la variable aleatoria y el espacio muestra. además, rescata la idea de que es posible entablar un primer acercamiento informal a las grandes ideas de probabilidad propuestas por Iddo Gal en el 2005 (aleatoriedad, variabilidad, independencia y la dualidad predicción/incertidumbre) con simulaciones de los fenómenos aleatorios.

Es importante establecer un vínculo entre la teoría clásica y la teoría frecuencial de probabilidad con actividades que involucren no sólo cálculos probabilísticos, sino condiciones para que los estudiantes conecten los diferentes conceptos asociados a los procedimientos y cálculos, como la distribución de frencuencias, la variabilidad, la estabilidad a largo plazo, la incertidumbre, el espacio muestra.

La utilización de las nuevas tecnologías digitales, como Fathom, en el currículo de probabilidad y estadística en la educación media superior debe ser prioridad, dándole más peso al desarrollo de las grandes ideas de probabilidad y no los procedimientos memorísticos. Actividades como la propuesta en la presente actividad genera una vía alterna para la enseñanza desde esta perspectiva que involucra el desarrollo de las grandes ideas de probabilidad con ayuda de la simulación de situaciones azarosas como el lanzamiento de monedas y la extracción de pelotas.

Referencias

Batanero, C. (2001). Didáctica de la Estadística. *Granada: Universidad de Granada*.

Batanero, C. (2002). Estadística y didáctica de la matemática: Relaciones, problemas y aportaciones mutuas. *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales*, 95-120.

Batanero, C. (2009). La simulación como instrumento de modelización en probabilidad. *Revista Educación y Pedagogía*, *15*(35).

Batanero, C. (2015, February). Understanding randomness: Challenges for research and teaching. In *CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 34-49).

Batanero, C., Henry, M., & Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En *Exploring probability in school* (pp. 15-37). Springer US.

Batanero, C., & Sanchez, E. (2005). What is the Nature of High School Students' Conceptions and Misconceptions About Probability?. In *Exploring probability in school* (pp. 241-266). Springer US.

Borovcnik, M. & Peard, R. (1996). Probability. In A J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), International handbook in mathematics education (Part 1, pp. 239-288). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Biehler, R., Ben-Zvi, D., Bakker, A., & Makar, K. (2012). Technology for enhancing statistical reasoning at the school level. In *Third international handbook of mathematics education* (pp. 643-689). Springer New York.

Burrill, G., & Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. In *Teaching statistics in school mathematics-Challenges for teaching and teacher education* (pp. 57-69). Springer Netherlands.

Dantal, B. (1997). Les enjeux de la modélisation en probabilité. In Enseigner les probabilités au lycée (pp. 57-59). Reims; France: Commission Inter-IREM.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement* (Vol. 41). Springer Science & Business Media.

Fischbein, E., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1991). Factors affecting probabilistic judgements in children and adolescents. *Educational studies in mathematics*, *22*(6), 523-549.

Gal, I. (2005). Towards" probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. In *Exploring probability in school* (pp. 39-63). Springer US.

García, J., & Sánchez, E. S. (2013). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a una situación básica de variable aleatoria y distribución. *Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística*, (2), 417-424.

Garfield, J. y A. Alhgren (1988), "Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implications for research", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 19, núm. 1, pp. 44-63.

Garfield, J., OOMS, A., & CHANCE, B. (1991). Robert delMas. In *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (Vol. 1, pp. 340-349).

Green, D. R. (1982). Probability concepts in 11-16 year old pupils. *Report of research sponsored by the Social Science Research Council. Loughborough: CAMET, University of Technology*.

Green, D. R. (1991). A longitudinal study of pupil’s probability concepts. In *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (Vol. 1, pp. 320-328).

Jones, G. A., Langrall, C. W., & Mooney, E. S. (2007). Research in probability. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 909-955.

Kahneman, D., & Tversky, A. (1972). Subjective probability: A judgment of representativeness. *Cognitive psychology*, *3*(3), 430-454.

Konold, C., Madden, S., Pollatsek, A., Pfannkuch, M., Wild, C., Ziedins, I., ... & Kazak, S. (2011). Conceptual challenges in coordinating theoretical and data-centered estimates of probability. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*(1-2), 68-86.

Konold, C., Pollatsek, A., Well, A., Lohmeier, J., & Lipson, A. (1993). Inconsistencies in students' reasoning about probability. *Journal for Research in Mathematics education*, 392-414.

Landín, P. R., & Sánchez, E. (2010). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial. *Educação Matemática Pesquisa*, *12*(3).

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in “purely random” situations. *Educational studies in mathematics*, *23*(6), 557-568.

Lecoutre, M. P., & Durand, J. L. (1988). Jugements probabilistes et modèles cognitifs: étude d'une situation aléatoire. *Educational Studies in Mathematics*, *19*(3), 357-368.

Moore, D. S. (1990). Uncertainty. *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy*, 95-137.

NCTM (2000), *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA, The National Council of Teacher of Mathematics.

Pfannkuch, M. (1997). Statistical thinking: One statistician’s perspective. *Research papers on stochastics education*, 171-178.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children. (Trans L. Leake, P. Burrell & HD Fishbein)*. WW Norton.

Sánchez, E. S. (2013). Elementos de estadística y su didáctica a nivel Bachillerato.

Sánchez, E. S., García, J. I., & Medina, M. (2014). Niveles de razonamiento y abstracción de estudiantes de secundaria y bachillerato en una situación-problema de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*(6).

Sánchez, E. S., & Monroy, J. C. V. (2015). El razonamiento probabilístico informal de estudiantes de bachillerato. In *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 89-103). Universidad de Alicante.

Sánchez, E., & Trujillo, K. (2008). Exploración de la noción de variación en situaciones de azar.

Sánchez, E. S., & Valdes, J. (2013). La cuantificación del azar: una articulación de las definiciones subjetiva, frecuencial y clásica de probabilidad. *Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística*, (1), 39-46.

Serrano, L., Batanero, C., & Cañizares, M. J. (1999). Concepciones sobre distribuciones aleatorias planas en alumnos de secundaria. *Epsilon*, *43*(44), 149-162.

Serrano, L., Batanero, C., Ortíz, J. J., & Cañizares, M. J. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria. *Educación Matemática*, *10*(1), 7-25.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions.

Shaughnessy, J. M. (1993). Probability and statistics. *Mathematics Teacher*, *86*(3), 244-248.

Shaughnessy, J. M. (1997). Missed opportunities in research on the teaching and learning of data and chance. *People in mathematics education*, *1*, 6-22.

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics learning. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 957-1009.

Shaughnessy, J. M., Watson, J. M., Moritz, J. B., & Reading, C. (1999). School mathematics students' acknowledgement of statistical variation. In *NCTM Conference* (Vol. 1, p. na).

Simon, M. A., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical thinking and learning*, *6*(2), 91-104.

Stohl, H., Rider, R., & Tarr, J. (2004). Making connections between empirical and theoretical probability: Students' generation and analysis of data in a technological environment. *Retrieved April*, *7*, 2008.

Stohl, H., & Tarr, J. E. (2002). Developing notions of inference using probability simulation tools. *The Journal of Mathematical Behavior*, *21*(3), 319-337.

Torok, R., & Watson, J. (2000). Development of the concept of statistical variation: An exploratory study. *Mathematics Education Research Journal*,*12*(2), 147-169.

Truran, K. M., & Truran, J. M. (1999). Are dice independent? Someresponses from children and adults. In *Proceedings of the Conference of the International Group for* (Vol. 100, p. 1454).

Watson, J. M., & Kelly, B. A. (2003). Statistical Variation in a Chance Setting.*International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 387-394.

Von Mises, R. (1957). *Probability, statistics, and truth*. Courier Corporation.

Apéndice A

Cuestionario 1

Nombre:_______________________________________ Edad:_________

Actividad 1

3. Se realiza una apuesta lanzando dos monedas al aire ¿por cuál de los siguientes eventos apostarías y por qué?

d) Evento A: Que caigan cero águilas
e) Evento B: Que caiga un águila
f) Evento C: Que caigan dos águilas

____

____

____

4. ¿Cuántos posibles resultados puedes obtener al lanzar dos monedas al aire y cuáles son?

____

____

____

Al identificar todos los resultados experimentales posibles, está definiendo el espacio muestra de un experimento, él cual es el conjunto de todos los posibles resultados experimentales

5. ¿Cuál es la probabilidad de que caigan cero águilas si se lanzan dos monedas al aire?

____

____

6. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga un águila si se lanzan dos monedas al aire?

____

____

____

7. ¿Cuál es la probabilidad de que caigan dos águilas si se lanzan dos monedas al aire?

____

____

____

Una variable aleatoria proporciona un medio para describir los resultados experimentales empleando valores numéricos, es decir: asocia un valor numérico a cada uno de los resultados. Ejemplo:

Experimento	Variable aleatoria	Valores posibles para la variable aleatoria
Inspeccionar un envío de 50 teléfonos	Número de teléfonos que tienen algún defecto	0, 1, 2, … , 49, 50

8. Definamos la variable aleatoria X = número de águilas en dos lanzamientos. Indica todos los valores que puede tomar la variable aleatoria X

____

____

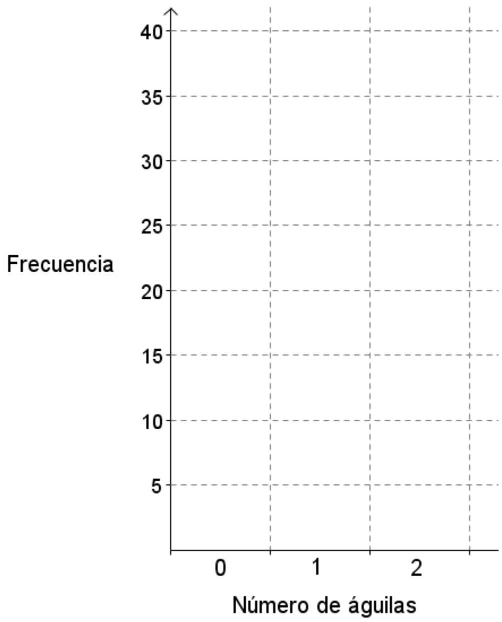
____

9. Supongamos que se ha jugado 60 veces, llena la tabla con los resultados que esperarías obtener al lanzar las dos monedas

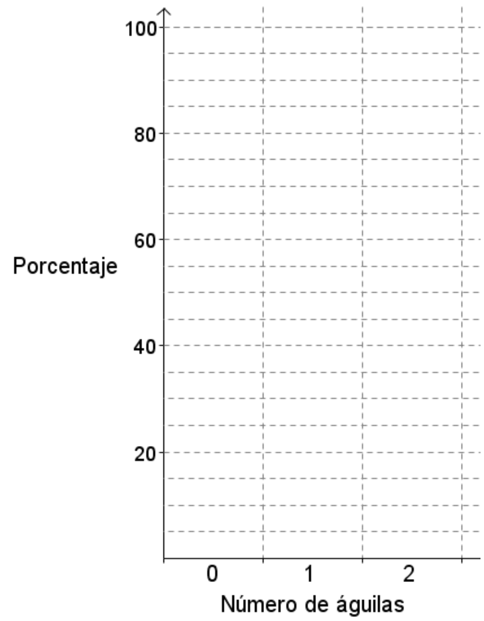
Número de lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Número de águilas																				
Número de lanzamiento	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Número de águilas																				
Número de lanzamiento	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Número de águilas																				

Tabla 1

10. Suponiendo que realizaste el experimento dibuja las barras de los posibles resultados, teniendo en cuenta la escala dada. Escribe el número de veces o el porcentaje, según sea el caso, sobre cada barra.



Grafica 1



Grafica 2

11. Si se realizará el experimento con las monedas y revisaras los resultados de 10 de tus compañeros ¿cuál de las siguientes tablas crees que sea más probable obtener? Justifica tu respuesta

____

____

Persona	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Número de águilas										
0	12	18	23	20	12	17	14	15	16	16
1	38	30	24	26	33	32	34	33	29	28
2	10	12	13	14	15	11	12	12	15	16

Tabla 1

Persona	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de águilas										
0	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
1	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
2	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15

Tabla 2

Persona	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de águilas										
0	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
1	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
2	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20

Tabla 3

Persona	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de águilas										
0	21	23	19	20	23	14	17	23	14	23
1	23	16	21	15	18	17	15	15	26	26
2	16	21	20	25	19	19	28	22	20	11

Tabla 4

Persona	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de águilas										
0	5	9	6	9	8	9	8	5	5	7
1	51	43	48	45	44	47	47	49	46	44
2	4	8	6	6	8	4	5	6	9	9

Tabla 5

Cuestionario 2

Nombre:____ Edad:_________

Actividad 2

Supongamos que tenemos una urna con 10 pelotas en su interior, de las cuales 5 son de color rojo, 2 de color amarillo y 3 de color verde. Se sacan 10 pelotas con reemplazo.

E) ¿Cuántas pelotas rojas esperarías conseguir? Justifica tu respuesta.

____

____

F) ¿Qué número de pelotas rojas no esperarías conseguir? Justifica tu respuesta.

____

____

G) Se realiza el experimento de sacar 10 pelotas de la urna con reemplazo seis veces.

b) ¿Cómo crees que serán los resultados? Anota tus predicciones en la siguiente tabla.

Número por cada diez extracciones	Número de rojas
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Tabla 1

H) Siete estudiantes llenaron la tabla anterior de la siguiente manera:

Número por cada diez extracciones	Número de rojas de Juan	Número de rojas de Pedro	Número de rojas de Luis	Número de rojas de Iván	Número de rojas de Paco	Número de rojas de Alex	Número de rojas de Alan
1	5	3	5	2	7	3	10
2	9	7	5	3	7	0	10
3	7	5	5	4	7	9	10
4	6	8	5	3	7	2	10
5	8	5	5	4	7	8	10
6	7	4	5	4	7	5	10

Tabla 2

c) ¿Cuál de los estudiantes a través de su tabla crees que describe mejor lo que podría suceder? Justifica tu respuesta.

____

____

____

d) ¿Cuál de los estudiantes a través de su tabla crees que describe peor lo que podría suceder? Justifica tu respuesta.

____

____

____

I) Definamos la variable aleatoria X = número de pelotas rojas en 10 extracciones con reemplazo. Indica todos los valores que puede obtener la variable aleatoria X

c) ¿Cómo ordenarías los valores que toma la variable aleatoria de menor a mayor probabilidad? Justifica tu respuesta

d) ¿Cuál de las siguientes tablas crees que sea la que se obtuvo al realizar el experimento cien veces? Puedes realizar su grafica de barras de cada tabla para observar mejor la distribución de las bolas rojas. Justifica tu respuesta

Número de rojas	**Frecuencia**
0	0
1	2
2	1
3	14
4	12
5	30
6	24
7	9
8	6
9	2
10	0

Tabla 1

Número de rojas	**Frecuencia**
0	6
1	11
2	5
3	11
4	7
5	5
6	14
7	13
8	12
9	8
10	8

Tabla 2

Número de rojas	**Frecuencia**
0	0
1	1
2	4
3	10
4	15
5	20
6	15
7	10
8	4
9	1
10	0

Tabla 3

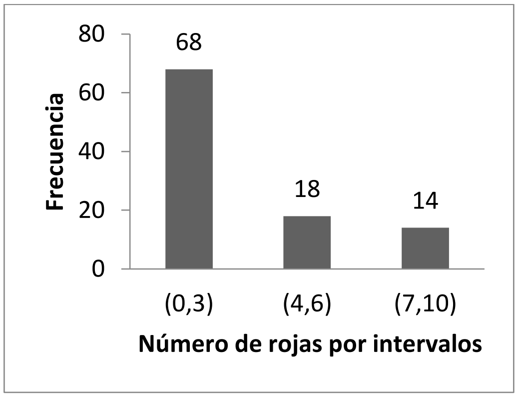
Número de rojas	**Frecuencia**
0	0
1	0
2	0
3	1
4	6
5	11
6	15
7	35
8	21
9	10
10	1

Tabla 4

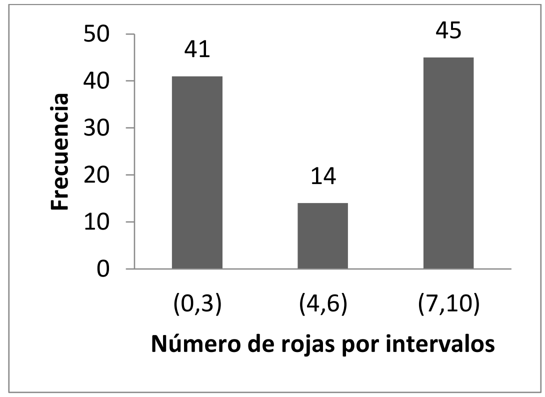
e) Supongamos que se ordenan los resultados en los siguientes intervalos: del 0 al 3, del 4 al 6 y del 7 al 10

¿Cuál intervalo es más grande?

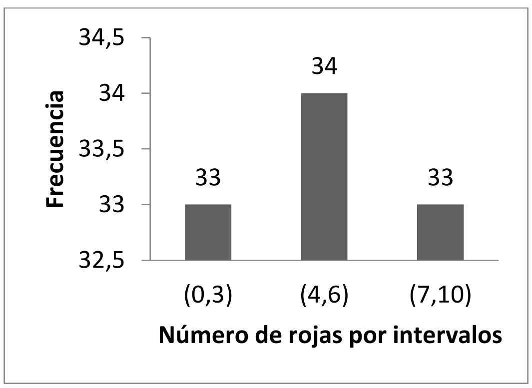
d) ¿Cuál de las siguientes gráficas de barras esperarías obtener para los intervalos anteriores? Justifica tu respuesta.



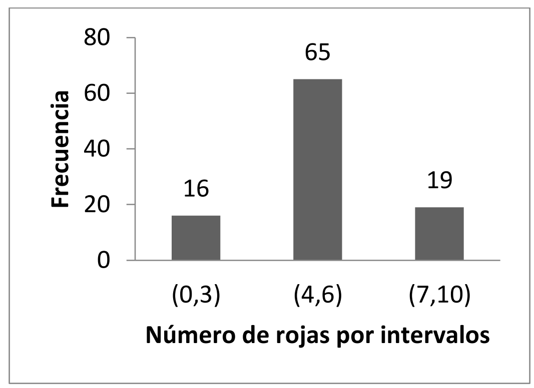
Gráfica 1



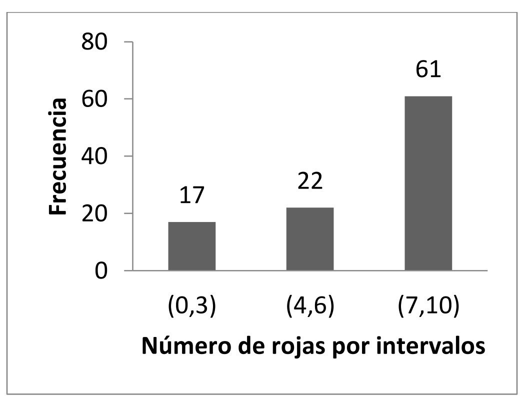
Gráfica 2



Gráfica 3



Gráfica 4



Gráfica 5

Apéndice B

Actividad física 1

Nombre:____
Edad:_________

Actividad Física 1

1. Definamos la variable aleatoria X = número de águilas en dos lanzamientos. ¿Cuál de las siguientes tablas esperarías conseguir en 120 experimentos?

Número de Águilas	Frecuencia
0	41
1	40
2	39

Tabla 1

Número de Águilas	Frecuencia
0	40
1	40
2	40

Tabla 2

Número de Águilas	Frecuencia
0	30
1	60
2	30

Tabla 3

Número de Águilas	Frecuencia
0	23
1	62
2	35

Tabla 4

Número de Águilas	Frecuencia
0	13
1	90
2	17

Tabla 5

Número de Águilas	Frecuencia
0	32
1	22
2	62

Tabla 6

2. Antes de realizar la simulación física, llena la siguiente tabla con lo que piensas que sucederá si lanzas 60 veces dos monedas al aire

Número de Águilas	Frecuencia
0	
1	
2	

Tabla 7

3. Realiza el experimento de lanzar dos monedas 60 veces, cuenta el número de águilas que obtuviste en cada lanzamiento y registra tus resultados en la siguiente tabla.

Número de lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Número de águilas																				
Número de lanzamiento	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Número de águilas																				
Número de lanzamiento	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Número de águilas																				

Tabla 8

a) ¿Cuántas veces obtuviste 0 águilas?

____

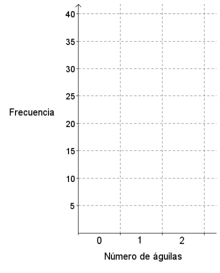
b) ¿Cuántas veces obtuviste 1 águila?

____

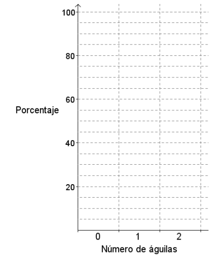
c) ¿Cuántas veces obtuviste 2 águilas?

____

4. Dibuja las barras con los resultados que obtuviste en el experimento físico. Escribe el número de veces o el porcentaje, según sea el caso, sobre cada barra.



Gráfica 1



Gráfica 2

5. ¿Los resultados que predijiste en las preguntas 7 y 8 de la actividad 1 son iguales a los del experimento físico? ¿Qué diferencias encuentras?

6. Revisa los resultados de 10 de tus compañeros y vacíalos en la siguiente tabla

Persona	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Número de águilas										
0										
1										
2										

Tabla 9

7. ¿Contestarías lo mismo en la pregunta 9 de la actividad 1? Justifica tu respuesta

8. Una moneda justa se lanza al aire dos veces y sale Sol en el primer lanzamiento, ¿qué resultado crees que sea más probable para el siguiente lanzamiento Águila o Sol? Justifica tu respuesta.

   a) De la tabla 8, ¿cuántas veces salió Sol en el primer lanzamiento?

   b) De las veces que salió Sol en primer lanzamiento, ¿Cuántas veces salió Águila y cuántas Sol en el segundo lanzamiento?

c) Compara los resultados con tus compañeros del salón y anótalos en la siguiente Tabla

Número de veces que salió Sol en el primer lanzamiento	
Número de veces que salió Águila en el segundo lanzamiento dado que salió Sol en el primero	
Número de veces que salió Sol en el segundo lanzamiento dado que salió Sol en el primero	

Tabla 10

d) Contesta nuevamente la pregunta 8

9. ¿Cuál de las siguientes secuencias crees que sea más probable (o son igual de probables)? Justifica tu respuesta.
   i. Secuencia 1: Águila, Águila
   ii. Secuencia 2: Sol, Águila

a) ¿Qué probabilidad le asignarías a la secuencia Águila, Águila?

b) ¿Qué probabilidad le asignarías a la secuencia Sol, Águila?

c) De la tabla 8, ¿cuántas veces te salió la secuencia 1 y cuántas la secuencia 2?

____

____

____

d) Compara los resultados con tus compañeros del salón y anótalos en la siguiente Tabla

Número de veces que salió la secuencia 1	
Número de veces que salió la secuencia 2	
Número de veces que se realizó el experimento	

Tabla 11

e) Contesta nuevamente la pregunta 9

____

____

____

10. Contesta nuevamente la pregunta 1 y la pregunta 2 de la “Actividad Física 1”

____

____

____

Número de Águilas	Frecuencia
0	
1	
2	

Tabla 12

11. ¿Cuál es la probabilidad de que caigan cero águilas si se lanzan dos monedas al aire? Explica cómo la encuentras

12. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga un águila si se lanzan dos monedas al aire? Explica cómo la encuentras

13. ¿Cuál es la probabilidad de que caigan dos águilas si se lanzan dos monedas al aire? Explica cómo la obtienes

Actividad física 2

Nombre: ______________________________ **Edad: __________**

Actividad Física 2

Se tiene una urna con 10 pelotas en su interior: 5 son de color rojo, 2 de color amarillo y 3 de color verde.

14. ¿Cuál de los siguientes eventos considera que es más probable (o son igual de probables):
    Evento A: Sacar 5 rojas en 10 extracciones
    Evento B: Sacar 50 rojas en 100 extracciones

____
____
____
____

Experimento del evento A

15. Saca 10 pelotas, con reemplazo, y anota tus resultados en la siguiente tabla

Número de Extracción	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Color										

a) ¿Cuántas rojas conseguiste?

____
____

b) ¿Cuántos de tus compañeros consiguieron 5 rojas?

____
____

c) ¿Cuáles fueron los resultados que más se repitieron y los que menos? ¿Qué resultados nunca salieron?

d) Anota los resultados del salón en la siguiente tabla

Número de rojas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia											

e) ¿Cuantas rojas esperarías conseguir si extraes 10 pelotas de la urna, con reemplazo?

f) Si tuvieras que dar un intervalo de los resultados más probables para el evento A ¿Cuál sería y por qué?

g) ¿Cuántas veces esperas conseguir 50 pelotas rojas en 100 extracciones? Justifica tu respuesta

h) Si tuvieras que dar un intervalo de los resultados más probables para el evento B ¿Cuál sería y por qué?

____

____

____

Experimento del evento B

16. Saca 100 pelotas, con reemplazo, y anota tus resultados en la siguiente tabla

Número de Extracción	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Color										
Número de Extracción	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Color										
Número de Extracción	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Color										
Número de Extracción	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Color										
Número de Extracción	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Color										
Número de Extracción	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Color										
Número de Extracción	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Color										
Número de Extracción	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Color										
Número de Extracción	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
Color										
Número de Extracción	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
Color										

a) ¿Cuántas rojas conseguiste?

b) ¿Cuántos de tus compañeros consiguieron 50 rojas?

c) ¿Cuáles fueron los resultados que más se repitieron y los que menos? ¿Qué resultados nunca salieron?

d) ¿Cuántas rojas esperarías conseguir si extraes 100 pelotas de la urna, con reemplazo?

e) Si tuvieras que dar un intervalo de los resultados más probables para el evento B ¿Cuál sería y por qué?

17. Contesta nuevamente la primera pregunta del cuestionario “Actividad Física 2”

18. ¿Volverías a contestar lo mismo en el cuestionario 2? Anota los cambios que harías justificándolos

Actividad Fathom 1

Nombre: ____ Edad: ____________

Actividad Fathom 1

1. Llena la siguiente tabla con los resultados del experimento “lanzar una moneda dos veces” que arrojó el programa Fathom con una muestra de 60

Número de Águilas	Frecuencia	Porcentaje
0		
1		
2		

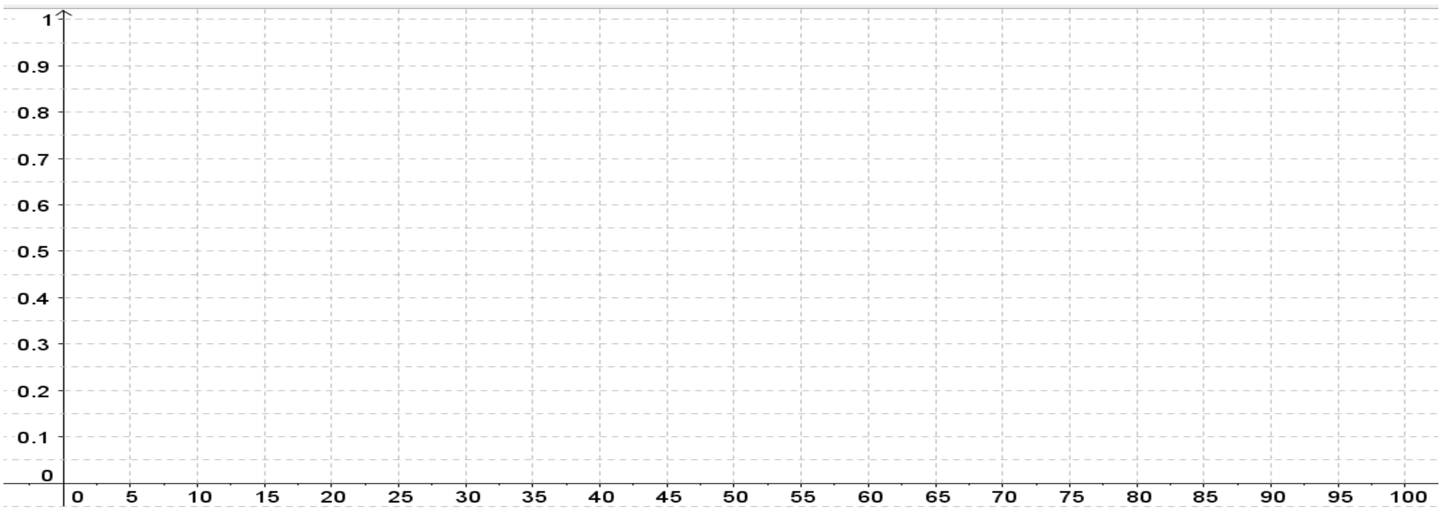
Tabla 1

2. Llena la siguiente tabla con los resultados del experimento “lanzar una moneda dos veces” que arrojó el programa Fathom, usando diferentes tipos de muestra

Tamaño de la muestra	1		5		10		20		30	
Número de águilas	Fr	%	Fr	%	Fr	%	Fr	%	Fr	%
0										
1										
2										
Tamaño de la muestra	40		50		60		70		80	
Número de águilas	Fr	%	Fr	%	Fr	%	Fr	%	Fr	%
0										
1										
2										
Tamaño de la muestra	90		100		250		500		1,000	
Número de águilas	Fr	%	Fr	%	Fr	%	Fr	%	Fr	%
0										
1										
2										

Tabla 2

3. Marca con un punto los resultados, que se alcanzan a colocar en los ejes, de la tabla anterior y únelos mediante líneas rectas. Donde el eje X corresponde al tamaño de la muestra y el eje Y corresponde al porcentaje. Usa colores diferentes para diferenciar los resultados de 0, 1 y 2 águilas



a) ¿A qué porcentaje tiende el resultado cero águilas en dos lanzamientos? ____________________

b) ¿A qué porcentaje tiende el resultado un águila en dos lanzamientos? ____________________

c) ¿A qué porcentaje tiende el resultado dos águilas en dos lanzamientos? ____________________

4. ¿Cuál de los tres eventos crees que sea más probable y qué probabilidad le asignarías a cada evento? Justifica tu respuesta.

____

____

____

____

5. Realiza 10 veces más el experimento de lanzar dos monedas al aire 60 veces oprimiendo las teclas *ctrl + y* mientras llenas la siguiente tabla con los resultados.

Número de muestra	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Número de águilas										
0										
1										
2										

Tabla 1

a) Para cero águilas ¿De qué número a qué número salió?

____

b) Para un águila ¿De qué número a qué número salió?

____

c) Para dos águilas ¿De qué número a qué número salió?

____

Actividad Fathom 2

Nombre:____

Edad:__________

Actividad Fathom 2

J) Realiza el experimento de sacar 10 pelotas de la urna, con reemplazo, seis veces con ayuda del programa Fathom y llena la siguiente tabla con los resultados.

Número por cada diez extracciones	Número de rojas
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Tabla 1

a) ¿Cuál fue el resultado menor número de rojas y el de mayor número de rojas? ¿Por qué crees que haya sucedido eso?

____

b) ¿Qué números nunca salieron? ¿Por qué crees que haya sucedido eso?

____

K) Realiza nuevamente el experimento y llena la tabla

Número por cada diez extracciones	Número de rojas	Número de rojas	Número de rojas	Número de rojas	Número de rojas	Número de rojas	Número de rojas
1							
2							
3							
4							
5							
6							

Tabla 2

a) ¿Cuál fue el número qué más se repitió?

____

b) ¿Cuáles fueron los números que casi no salieron?

____

c) ¿De qué número a qué número de rojas se esperaría conseguir al extraer 10 pelotas de la urna con reemplazo? Justifica tu respuesta

____

L) Realiza el experimento 100 veces y llena la siguiente tabla con los resultados arrojados por el programa Fathom

Número de rojas	**Frecuencia**	**Porcentaje**
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
Suma		

Tabla 3

a) ¿Cuál fue el número qué más se repitió?

____

____

b) ¿Cuáles fueron los números que casi no salieron?

____

____

c) ¿De qué número a qué número de rojas se esperaría conseguir al extraer 10 pelotas de la urna con reemplazo? Justifica tu respuesta

____

____

M) Agrupa los datos en tres intervalos distintos de 0 a 3, de 4 a 6 y de 7 a 10 en la siguiente tabla

Número de rojas	**Frecuencia**	**Porcentaje**
0 a 3		
4 a 6		
7 a 10		

Tabla 4

a) Dibuja la gráfica de barras la tabla anterior

N) Realiza el experimento de sacar 10 bolas rojas de la urna con Fathom, usando diferentes tamaños de muestra. Cuenta cuántas veces sacaste 5 rojas en cada caso y da su porcentaje

Tamaño de la muestra	20		50		100		500		1,000	
Número de rojas	Fr	%	Fr	%	Fr	%	Fr	%	Fr	%
5										

Tabla 5

a) ¿A qué porcentaje tiende el evento sacar 5 pelotas rojas en 10 extracciones? ____________________________

b) ¿Qué probabilidad le asignarías al evento sacar 5 rojas en 10 extracciones? Justifica tu respuesta

____

____

____

O) Realiza el experimento de sacar 100 bolas rojas de la urna con Fathom, usando diferentes tamaños de muestra. Cuenta cuántas veces sacaste 5 rojas en cada caso y da su porcentaje

Tamaño de la muestra	20		50		100		500		1,000	
Número de rojas	Fr	%	Fr	%	Fr	%	Fr	%	Fr	%
50										

Tabla 6

a) ¿A qué porcentaje tiende el evento sacar 50 rojas si se extraen 100 pelotas de la urna? ____

b) ¿Qué probabilidad le asignarías al evento sacar 50 rojas en 100 extracciones? Justifica tu respuesta

____

____

____

P) ¿Cuál de los siguientes eventos considera que es más probable (o son igual de probables):

Evento A: Sacar 5 rojas en 10 extracciones

Evento B: Sacar 50 rojas en 100 extracciones

____

____

____

Q) De acuerdo con las tablas de la actividad 1 y 2 con Fathom se observa que a medida que el número de lanzamientos o extracciones es más grande el porcentaje de cada uno de los resultados se aproxima a un número ¿Por qué crees que sucede eso? ¿Qué representa ese número al que se está aproximando?

____

____

____