CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

De la suma aritmética a la suma algebraica en alumnos de 1º secundaria

T E S I S

Que presenta

ANDREA AURORA PÉREZ ESGUERRA

Para obtener el grado de

MAESTRA EN CIENCIAS

**EN LA ESPECIALIDAD DE
MATEMÁTICA EDUCATIVA**

Director de la Tesis: Dr. Eugenio Filloy Yagüe

México, Distrito Federal FEBRERO, 2014

Lo que sabemos es una gota de agua; lo que ignoramos es el océano.
Isaac Newton

Solo Dios sabe todo lo que ha pasado para que pudiera llegar este momento, por la vida y la oportunidad de compartirlo, solo puedo decir ¡Gracias Dios!

Al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, gracias por el Departamento de Matemática Educativa que me abrió las puertas y la mente para poder desarrollar esta maestría.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por administrar los recursos que a través de los impuestos, todos los trabajadores han otorgado para la beca de manutención, sin la cual hubiera sido poco posible la realización de este trabajo de tesis. No. becario: 261480

Al Dr. Eugenio Filloy Yagüe, por su presencia y gran sabiduría compartida para ayudarme a llegar a buen puerto.

Al M. en C. Ignacio Garnica y Dovala y a la Dra. Ana María Ojeda, por su tiempo, enorme paciencia, ofrecimiento y sugerencias sin las cuales difícilmente este escrito tendría cara de tesis.

A mis profesores de la maestría: por su tiempo, dedicación y esfuerzo por ayudarme a crecer.

Al Instituto Cultural Derechos Humanos, por las facilidades prestadas para la realización del escenario empírico.

Saps, ja torno a riure amb qualsevol cosa.
Saps, avui els teus records no em fan cap nosa.

Joan M. Serrat

Marycarmen, mi mamá, mi amiga, mi paño de lágrimas y mi crítica más severa, te agradezco profundamente por todo el apoyo que me has dado, a veces sin querer y otras en formas tan sutiles, tú siempre tienes la frase para motivarme a seguir, ¡Muchas gracias, mamá!

Eduardo, No tengo palabras para agradecer todo el apoyo que desde siempre he recibido de ti, mi amado esposo, tendré que copiar lo que dice nuestra canción… "Imposible explicar… Ni un milímetro… Ni un solo verso de los dos… Yo sólo sé desde ahora… Que te amaré mientras respire".

Tío Francisco: mi ejemplo, mi confidente y mi segundo padre como agradecerte todo lo que me has dado, solo tengo tres palabras ¡Dios te bendiga!

Familia Pérez Esguerra, mi padre y mis hermanos, gracias por todo.

Alma Reséndiz (mamá Alma), por el auxilio incondicional y tu donación como persona, muchas gracias por todo; a Adriana Parra y Susana Figueroa, por el apoyo administrativo que siempre me brindaron.

A mis compañeras en esta aventura en Matemática Educativa, Área de Cognición: Andrea, Mónica y Sandra por su entusiasmo y aportaciones para el crecimiento mutuo, las quiero.

«*La conciencia viva es de algún modo la influencia que convierte la posibilidad de algo en real. El ingrediente esencial a la hora de crear nuestro universo es la conciencia que lo observa*».

Lynne McTaggart

INDICE

PÁGINA.

Índice de Tablas.

Índice de Figuras.

Resumen

La investigación analiza la transición de la suma aritmética a la suma de números enteros en el primer grado de educación secundaria. Se orientó hacia las preguntas de si los alumnos identifican y operan correctamente los elementos necesarios para realizar una suma aritmética y una algebraica y cuáles son los procesos cognitivos que se desencadenan en la transición de una suma aritmética a la algebraica. Participaron en el estudio 22 alumnos de entre 11 y 13 años de primer año de una secundaria particular.

El marco teórico se basa en los Modelos Teóricos Locales (MTL), que considera cuatro componentes interrelacionadas: modelos de enseñanza, modelos para los procesos cognitivos, modelos de competencia formal y modelos de comunicación (Filloy, 1999), con énfasis particular en la componente cognitiva, y en las 11 tendencias cognitivas. Los sentidos intermedios de los números negativos definidos por Gallardo (2002) se corresponden con la tendencia cognitiva 2 (la dotación de sentidos intermedios) en la perspectiva semiótica que considera Filloy (2008). La enseñanza de los números enteros se prescribe en la propuesta institucional (SEP, 2011) en el bloque V dentro del eje *Sentido numérico y pensamiento algebraico,* mediante la resolución de problemas que implican el uso de sumas y restas de números enteros.

Organizada en tres fases, la primera, de identificación de la problemática, el examen de la propuesta institucional reveló un tratamiento insuficiente de la suma de enteros, los libros de texto incluyen pocas actividades y relegadas al quinto y último bloque, lo que anuncia la dificultad para profundizar en su estudio. La segunda fase, de desarrollo empírico, comenzó con la aplicación de un cuestionario diagnóstico CD, previo a sesiones de enseñanza del tema de la suma números enteros basada en los modelos de enseñanza: 1) el sintáctico, con el fin de sentar las bases y reglas necesarias para las operaciones que implicaran el uso de negativos; 2) el continuo, con el recurso a la recta numérica contextualizada; y 3) un medio lúdico para ejercitar las operaciones básicas con los números enteros. Al final de la administración de los modelos de enseñanza 1) y 2) se aplicó un cuestionario, CS y CC, respectivamente.

En la tercera fase, de entrevistas clínicas semi-estructuradas individuales, los alumnos presentaron ciertas tendencias cognitivas en la transición de la suma aritmética a la algebraica.

Concluimos que al aplicar diferentes modelos de enseñanza se promueve la experiencia de los alumnos con otros modos de llegar al mismo resultado, disminuyendo los errores cometidos en las operaciones con números negativos.

Abstract

The investigation analyzes the transition from the arithmetic additions to the integer’s numbers in the first grade of high school. It was oriented to the questions about if the students can identify and work correctly the necessary elements to do arithmetic and algebraic additions and which are the cognitive processes that triggered in the transition from arithmetic to an algebraic addition. In this investigation participated 22 students between 11 and 13 years old from a private school of first grade.

The theoretical setting is based on Local Theoretical Modals (MTL), which consider 4 interrelated components: teaching models, cognitive process models, formal competitive models and communication models (Filloy, 1999), with particular emphasis in the cognitive component and in the 11 cognitive tendency. The intermediate directions of negative numbers defined by Gallardo (2002) corresponded with the cognitive tendency 2 (provision of intermediate senses) in the semiotic perspective that considered Filloy (2008). The teaching of integers numbers prescribe in the institutional propose (SEP, 2011) the block V inside of the numeric sense axis and the algebraic thinking, through the solution of problems that needs the use of additions and subtractions.

Organized into three phases, the first, identification of the problem, examining the institutional proposal revealed insufficient treatment of the sum of integers; textbooks include few activities and relegated to the fifth and last block, that advertise the difficult to deepen in its study. The second phase period, the empiric developments, started with the application of a diagnostic test CD, prior of teaching sessions of the topic additions of integers numbers based in teaching models: 1) the syntax, in order to lay the foundation and the necessary rules for operation involving the use of negative; 2) the continued, with the use of a number line contextualized; and 3) a ludic way to exercise the basic operations with integers. At the end of the administration from the teaching models 1) and 2) was applied a test, CS and CC, respectively.

In the third phase, was a clinical interviews individual semi-structured, the students let some cognitive tendencies in the transition from the arithmetic additions to the algebraic.

We conclude that applying different teaching models we can further the experience of the students with other ways to arrive at the same result, decreasing the mistakes in operations with negative numbers.

Introducción

El desconocimiento, “poco conocimiento”, o “mal manejo” de la suma de enteros, es uno de los temas que ha afectado la comprensión de las matemáticas de generaciones enteras de estudiantes. Diversas son las investigaciones y metodologías que han empleado diferentes autores para tratar este tema que, sin embargo, sigue siendo insuficientemente tratado en los libros de texto de educación secundaria que utilizan los profesores ante grupo. En consecuencia, resulta realmente muy poco comprendido por los alumnos, a pesar de que es un tema básico para la subsiguiente educación en álgebra.

Cuando cursan la enseñanza primaria, los alumnos aprenden a operar los números naturales y realizan: sumas, restas multiplicaciones y divisiones; conforme van avanzando en ese nivel se introducen las fracciones y los decimales, pero al signo negativo lo identifican sólo con la operación de resta, así como el positivo con las sumas. No saben que además de indicar una operación, los signos de “más (+)” y “menos (–)” pueden indicar si un número es positivo o negativo

El problema no es tanto que no sepan sumar en sí, sino que al entrar en juego el signo negativo del número entero, comienzan las dificultades. “¿Qué se debe hacer con ese signo, lo sumamos o lo restamos?” “¿a qué número le aplicamos el signo?” son algunas de las preguntas que los alumnos expresaron cuando se les presentaron operaciones como: $+ (-7) + (-3) + (-6 + 4) + (-5) =$ o algo similar a $(-4) + (-1) + (-5) + (-6) + (-7) =$. En el caso del segundo ejemplo comentaron: “se suman y ya, ¿no?”. Y a pregunta “¿cómo es el resultado?” no saben con exactitud qué responder; algunos aventuraron una respuesta parecida a “menos” o “llevan el signo de menos”. Sin embargo, no tenían claro el uso de los signos positivo o negativo como parte de un número, diferente a las operaciones que solían realizar con ellos, como adición o sustracción, respectivamente.

Esperamos contribuir, con los profesores ante grupo al tratamiento del tema de suma de enteros para facilitar a sus alumnos el tránsito de sumar números naturales a sumar enteros.

Por la trascendencia de ese tema, nos dimos a la tarea de investigar cómo transita un alumno de primero de secundaria, de una suma aritmética a una suma algebraica, los elementos básicos de las sumas y los procesos cognitivos que los alumnos desarrollan antes y durante esa transición.

Nuestro método de investigación fue el de los Modelos Teóricos Locales (MTL) de Filloy, que descansa en cuatro componentes interrelacionadas: modelos de enseñanza, modelos para los procesos cognitivos, modelos de competencia formal y modelos de comunicación. Esta investigación puso especial énfasis en la componente de los procesos y específicamente en las tendencias cognitivas. Se integró por dos secciones básicas: una de tipo documental en la que se estudió bibliografía relacionada con el tema; y otra empírica en que se llevaron a cabo sesiones de enseñanza y observaciones a un grupo de alumnos de 1º de secundaria de entre 11 y 13 años. Se aplicaron tres instrumentos, un medio lúdico y dos entrevistas.

Esta tesis se dividió en cinco capítulos. En el primero bosquejamos los antecedentes de la investigación y las consideraciones generales. En el segundo precisamos el planteamiento del problema de investigación: su justificación, preguntas de investigación, objetivos, la teoría en la que se le enmarcó y una revisión del programa de matemáticas del 1er grado de secundaria (SEP, 2011). El tercer capítulo presenta la lógica de la investigación, y los resultados del análisis de los datos recopilados, mediante los tres instrumentos y el modelo lúdico, al cabo de la enseñanza impartida al grupo para, basados en esos resultados, profundizar en ellos mediante entrevistas a dos de los alumnos las cuales fueron motivo de análisis que se presenta en el cuarto capítulo. Por último, exponemos nuestras conclusiones en el capítulo quinto.

Antecede a la bibliografía empleada un apéndice con los instrumentos diseñados y las transcripciones de las entrevistas realizadas.

Capítulo 1

Antecedentes de la investigación

En este primer capítulo, exponemos las consideraciones básicas para esta tesis, los antecedentes del estudio de los números negativos y los modelos de enseñanza que se emplearon en el progreso de la investigación.

1.1 Consideraciones básicas

Antes de desarrollar el tema de investigación “Transición de la suma Aritmética a la suma Algebraica en alumnos de primero de secundaria”, se considera pertinente realizar algunas aclaraciones de conceptos que son importantes para nuestro estudio.

1.1.1 Definiciones

En las siguientes líneas se describen las definiciones que pensamos necesarias en el proceso de investigación, empezando por definir qué es una suma aritmética, qué una suma algebraica y sus características; y finalmente precisamos lo que se entiende por número natural y número entero.

1.1.1.1 ¿Qué es una suma aritmética?

En *Aritmética* se trabaja con las operaciones básicas de suma y resta entre otras realizadas con números específicos. (Barnett, 2000).

En *Álgebra* se continúa usando todo lo que se conoce en la aritmética, pero además, se razona y trabaja con símbolos que representan uno o más números.

1.1.1.2 ¿Qué es una suma algebraica?

Suma Algebraica, la suma o la adición es una operación que tiene por objeto reunir dos o más expresiones Algebraicas (sumandos) en una sola expresión Algebraica (suma) (Baldor, 2008)

Así, la suma de a y b es $a + b$, mientras que la suma de a y $-b$ es $a - b$, porque esa última expresión es la reunión de las dos expresiones dadas: a y $-b$.

1.1.1.3 Características generales de la suma Algebraica.

En Aritmética, la suma siempre significa aumento, pero en álgebra la suma es un concepto más general, pues puede significarse **aumento** a **disminución**, ya que hay sumas Algebraicas como la del último ejemplo, que equivale a una resta en Aritmética.

Resulta, pues, que **sumar** una cantidad negativa equivale a ***restar*** una cantidad positiva de igual valor absoluto.

1.1.1.4 Números naturales: Número para contar (también llamados enteros positivos).

1.1.1.5 Números enteros: Números naturales, sus negativos y 0. Los números negativos fueron considerados como absurdos durante mucho tiempo, y sólo se manejaron libremente a partir del siglo XVII (Barnett, 2000).

1.2 Antecedentes del estudio

Para llevar a cabo esta investigación, partimos de dos perspectivas complementarias: Se realizó una investigación documental de carácter histórico de la emergencia de los números negativos, su tratamiento y el análisis que de ellos han realizado diversos investigadores. Como contraparte, se tuvo la oportunidad de desarrollar un estudio directamente en el aula, como escenario empírico, con los alumnos de la escuela secundaria privada “Instituto Cultural Derechos Humanos”.

La mayoría de los teóricos en la investigación que concierne a matemática educativa, como Piaget (1973), Glaeser (1981), Freudenthal (1983), Fischbein (1987) y, específicamente en álgebra educativa, Filloy y Rojano (1984), Bell (1986), Schübring (1988), Bruno (1994), Gallardo (2002), Filloy, Rojano y Puig (2008), han encontrado que los números enteros revisten una dificultad de gran magnitud en la enseñanza del álgebra elemental. Citaremos de manera breve algunos aspectos de nuestra literatura de investigación que constituye parte de la fundamentación de este trabajo.

1.2.1 Origen de los números negativos e intuición

En su reflexión sobre los números negativos, Piaget (1973) señala que D'Alembert (1717 – 1783) los consideró tan "reales" como los positivos y diferentes de estos últimos, sólo por el signo colocado delante de ellos, pero "ese signo sirve únicamente para modificar y corregir una falsa posición" (p. 299). Ante las consideraciones de D'Alembert, Piaget afirma que

-*"[…] al comprar más de lo que se ha pagado se contrae una deuda y al retroceder más de lo que se ha adelantado se realiza una marcha hacia atrás que constituye propiamente un uso,* ***en la acción misma*** *del número negativo"* (p. 10).

Además afirma:

-"*[…] La propiedad esencial del número no es estática y perceptual, sino dinámica y vinculada a la acción misma, interiorizada en operaciones. Desde este punto de vista, el número negativo puede compararse con el positivo, siendo resultado de la misma acción, en el sentido más estricto del término, pero simplemente orientado en sentido inverso.*

(p. 12)

La propiedad estática - dinámica de los números, vinculada a la acción, constituye un importante fundamento de esta investigación, pues se precisa darle sentido de acción a los números negativos para que su comprensión sea significativa para los estudiantes.

Freudenthal (1973) expresa respecto a la introducción de los números negativos en la enseñanza, lo siguiente: "-[…] *Pienso que la necesidad de una racionalización que supere la intuición es percibida por vez primera, con los números negativos. Por lo general, los enteros negativos son abordados intuitivamente con la recta numérica y resulta muy útil este enfoque* (p.435).

Fischbein (1987) apoya este punto de vista de Freudenthal y profundiza en los significados intuitivos de los conceptos. En relación a los números negativos, apunta:

-“[…] *El principal obstáculo consiste en el hecho de que el concepto de número negativo refuta el concepto mismo de número, en cuanto al origen de su desarrollo en la historia del pensamiento matemático. El número negativo aparentemente contradice la existencia de sí mismo, si esta existencia se considera en su significado práctico. […]* (p. 101).

Schübring (1988) afirma que:

-“Los números negativos pusieron en tela de juicio los pilares esenciales de la filosofía de las matemáticas. Las matemáticas eran concebidas como ciencia de las cantidades. Los números negativos obligaban de manera implícita a comprenderlas de otra manera, no empírica ya que en el mundo exterior, ninguna realidad podía asignársele a estos números.” (p. 101).

Gallardo (2002) señala en “El paradigma cualitativo en matemática educativa. Elementos teórico - metodológicos de un estudio sobre números negativos” las características de la evolución de los números negativos (véase la Tabla 1.1).

Los enfoques de estos autores nos han llevado a considerar la importancia de los conocimientos previos que de los números negativos puedan tener nuestros estudiantes y, una vez más, el enfoque práctico que de ellos se debe hacer para que su aprendizaje sea significativo.

Tabla 1. 1 **Evolución de los números negativos en diferentes culturas**

Obra	*Lenguaje – Método*	*Operatividad – Interpretación de números con signo.*
Libro de los Nueve Capítulos del Arte de las Matemáticas. (Texto Chino, 250 a.n.e).	Lenguaje retórico. Resolución de sistemas de ecuaciones por el método de tabulación.	Reglas explicitas de adición y sustracción de números con signo. La traducción del lenguaje retórico al tablero de cálculo permite el paso del sustraendo al número con signo. Sólo aparecen soluciones positivas en ecuaciones.

Tabla 2. 1 **Evolución de los números negativos en diferentes culturas**

Obra	*Lenguaje – Método*	*Operatividad – Interpretación de números con signo.*
La Aritmética de Diofanto (Texto griego, siglo III).	Lenguaje retórico Abreviaciones para la incógnita y sus potencias. Restauración de términos (eliminación de sustraendos) en el planteamiento de ecuaciones.	Regla de los signos en el dominio multiplicativo. Sustracción entendida como restauración de términos: "lo que falta". Soluciones positivas en ecuaciones
La obra de Al – Karaji (texto árabe, siglo X).	Lenguaje retórico. Planteamiento de la ecuación en términos positivos (Regla de Al – Jabr).	Álgebra de polinomios basada en el sistema decimal posicional. Definición de números en exceso (positivos) y números deficientes (negativos). Soluciones positivas en ecuaciones.
La obra de Bhâskara (texto hindú, siglo XII).	Lenguaje sincopado (abreviaciones para símbolos Algebraicos). Resolución de ecuaciones en base a propiedades de la igualdad.	Reglas de las operaciones fundamentales para enteros y racionales. Definición de tres clases de negación, de acuerdo a lugar, tiempo y objeto. Noción de número relativo. Soluciones negativas en ecuaciones y problemas. Su aceptación o rechazo depende del contexto del problema.
La obra de Fibonacci (texto italiano, siglo XIII).	Lenguaje retórico. En los problemas comerciales correspondientes a sistemas de ecuaciones, transforma el sistema en uno equivalente, y si se obtiene una ecuación insoluble, esta ecuación es reformulada.	Operatividad con positivos únicamente. Solución a priori de una solución negativa que en el proceso de resolución se absorbe como sustraendo y se obtiene una solución positiva.
La obra de Cardano (texto italiano, siglo XIV).	Lenguaje retórico. Nomenclatura para la incógnita y sus potencias. Reglas de Postulación de Soluciones Negativas en problemas de aplicación.	Operatividad de negativos e imaginarios en expresiones Algebraicos. Transformación de raíces no verdaderas (negativas) en verdaderas (positivas) por medio de un cambio de variable.
La obra de Chuquet y la obra de Pacioli (textos francés e italiano, siglos XV y XVI)	Lenguaje sincopado En Chuquet, utilización de la "Regla de los Primeros" para la resolución de ecuaciones. En Pacioli, "Método de la Cosa". Este método lo utiliza ex – profeso cuando advierte que la solución será negativa.	Extensión de la operatividad numérica a enteros, racionales e irracionales. Aceptación y representación simbólica de soluciones negativas e irracionales. Las soluciones negativas requieren interpretación adicional propia del contexto del problema.
La obra de Girard (texto francés, siglo XVII).	Lenguaje y métodos Algebraicos en la resolución de ecuaciones. No trata problemas de aplicación.	Álgebra de polinomios. Acepta y representa simbólicamente soluciones negativas. Considera los números imaginarios como "indecibles".

Nota: Adaptado de "The extension of the natural negative number domain to the integers in the transition from Arithmetic to Álgebra. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 171 – 192 A. Gallardo, 2002

1.2.2 Obstáculos de comprensión del número

Glaeser (1981) asevera: *"-[…] Hemos llegado a desprender una decena de obstáculos que se han opuesto a la comprensión satisfactoria de los números* *relativos* (p. 339). De los obstáculos citados por este autor, hacemos referencia a los siguientes:

Obstáculo 1: "Ineptitud para manipular cantidades negativas aisladas".

Obstáculo 2: "dificultad para darle un sentido a cantidades negativas aisladas".

Obstáculo 3: "dificultad para unificar la recta numérica.

a) Se insiste sobre las diferencias cualitativas entre las cantidades negativas y los números positivos.
b) Se describe la recta como una yuxtaposición de dos semirrectas opuestas que llevan símbolos heterogéneos.
c) Se rechaza encarar simultáneamente los caracteres dinámicos y estáticos de los números.

Bruno (1994), sugiere el uso de la recta numérica como un modelo para las operaciones con números negativos, siempre que su uso se dote de significado concreto.

En el mismo artículo, se señala que

No deben minimizarse los errores de los alumnos, ya que son reflejo de ciertas dificultades que producen los cambios en la introducción de los números negativos. Siguiendo la terminología de Socas (1997), podemos distinguir entre:

Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos

- Hay una nueva notación para los números positivos: +2 = 2.
- El signo menos tiene dos significados distintos, como signo del número y como operación de resta.
- Aparece una mayor complejidad sintáctica: paréntesis y signos.
- Se dan nuevas reglas para las operaciones.

Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático

- Los números negativos tienen menos usos que los números positivos.
- Se identifican las operaciones de suma y resta.
- Hay un cambio en el efecto de las operaciones: sumar (multiplicar) no siempre es aumentar, restar (dividir) no siempre es disminuir.

Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza

- La enseñanza basada sólo en las reglas que rigen la operatoria puede causar problema a muchos estudiantes que necesitan situaciones concretas en las que apoyarse.
- No se conecta con el conocimiento previo de los estudiantes sobre los números positivos (pp. 20‒21).

Bruno señala que el aprendizaje de la suma y la resta comienzan en la etapa infantil de una manera informal, a través de situaciones cotidianas y se presenta con diferentes niveles de abstracción a medida que se introducen los sistemas numéricos. Dos son los sistemas numéricos en los que los problemas aditivos juegan uno fundamental en la enseñanza y en la investigación, los números enteros no negativos (educación primaria) y los números enteros (inicios de la educación secundaria).

En la enseñanza numérica es necesario:

1) Enfatizar por qué y cómo se producen las extensiones numéricas;

2) Construir un cuerpo coherente de conocimiento numérico, antes que hechos aislados y reglas para cada nueva clase de números;

3) Hacer traslaciones entre símbolos escritos y otras representaciones de los números;

4) Desarrollar un aprendizaje con una extensa fase conceptual y un amplio rango de situaciones;

5) Utilizar la resolución de problemas para dotar de significado a las operaciones y para ayudar a desarrollar los conceptos y habilidades matemáticas formales;

6) Desarrollar sentido numérico y

7) Fomentar el uso de la calculadora para realizar cálculos e investigaciones numéricas (pp. 2‒3).

La enseñanza de los números negativos con alumnos de 12 o 13 años, supone la modificación de creencias fuertemente arraigadas a lo largo de la enseñanza primaria. Hay muchos alumnos que cometen errores al efectuar operaciones simples con números negativos (p. 20).

Bruno y Martinón (1996), señalan: “-los estudiantes lograrían un uso más productivo de la recta numérica si ésta fuese considerada más como una representación contextualizada que como un modelo abstracto”. (p. 106).

Bell (1986) observó *cuatro errores conceptuales en situaciones de listas y escalas:*

1) *Dificultades en la conceptualización de cantidades enteras o de los propios números negativos, en su ordenación y en su uso para representar posiciones o movimientos;*

2) *Dificultades en problemas para cuya solución se requiere una inversión del pensamiento; estos problemas contienen una palabra clave “engañosa” como “más” o “sube”;*

3) *Dificultades asociadas con cruzar el cero y*

4) *dificultades al manipular combinaciones de cambios (por ejemplo, movimientos o transacciones de dinero), en particular cuando los cambios se refieren a un estado de partida desconocido* (p. 200).

Tomamos en cuenta los obstáculos que señala este autor para confrontarlos con los resultados obtenidos en nuestra investigación.

1.3 Modelos de enseñanza empleados en este estudio

En esta sección presentaremos de forma breve los modelos de enseñanza propuestos para realizar nuestro estudio, mismos que serán profundizados en el capítulo 3 de esta tesis.

1.3.1 Modelo de enseñanza sintáctico

En el desarrollo curricular del Modelo de enseñanza hay posiciones encontradas respecto al tipo de recursos didácticos a utilizar: una propone “modelar” en contextos más “concretos” o contextos familiares para el alumno y tomando éste como punto de partida, construir los primeros elementos de sintaxis. Una posición opuesta es la que propone partir del nivel sintáctico y enseñar las reglas sintácticas, modelo tradicional en la enseñanza de la resolución de ecuaciones (Filloy, 1999, p. 21)

La sintáctica corresponde al análisis de la relación existente entre los distintos símbolos o signos del lenguaje. En el caso concreto de la enseñanza del Álgebra se trata de una enseñanza que privilegia el aprendizaje mecánico de reglas.

1.3.2 Modelo de enseñanza continuo

En este modelo se hizo uso de la recta numérica, que Filloy (2001), señala -"como recordarás, sobre ella puedes representar a todos los números enteros, tanto positivos como negativos" (p. 3)

El modelo continuo que se utilizó en este estudio, consistió en plantear situaciones que se resolvieron utilizando la recta numérica contextualizada, (Bruno, 1994).

1.3.3 Modelo de enseñanza discreto

El modelo discreto empleado fue una actividad lúdica, el cual aparece en uno de los libros de texto para nivel secundaria. Ese juego consiste en avanzar o retroceder casillas (Waldegg, Villaseñor, García, & Montes, 2008, p. 15). En el capítulo 3 de esta tesis se desarrollan de forma puntual su aplicación y resultados (véase en p. 46 - 53)

Estos modelos de enseñanza se aplicaron a los estudiantes de nuestro escenario empírico, para intentar averiguar de qué manera llevaban a cabo la transición de la suma aritmética a la suma algebraica.

El siguiente capítulo desarrolla el marco teórico que dará estructura de la investigación realizada.

Capítulo 2

Planteamiento del problema de investigación

En el capítulo precedente, se plantearon los modelos de enseñanza que se aplicaron durante nuestra investigación. En este capítulo, presentamos la justificación, objetivos, las preguntas de investigación y el escenario donde desarrollamos nuestro trabajo.

2.1. Justificación

La experiencia anterior a la iniciación en la investigación en Matemática Educativa, de la autora de esta tesis, provino de la actividad contable en diversas empresas. Muchas de las personas con quienes se compartía esa labor, comentaban tener dificultades con las matemáticas, especialmente con lo referente a las operaciones de resta y división, por lo que debían recurrir a la calculadora o algún programa de cálculo. De esos comentarios surgieron interrogantes acerca de las causas de esas dificultades ¿acaso no habían recibido adecuadamente las instrucciones en su enseñanza? ¿Su enseñanza había sido poco satisfactoria? ¿Qué procesos cognitivos hacían que esas dificultades estuviesen presentes?

Para conocer un poco más sobre ese tipo de dificultades, la incursión de esta autora en la enseñanza en diversos niveles (bachillerato, licenciatura en Contabilidad, licenciaturas relacionadas con la educación) resultó en la estimación de que el 90% de los estudiantes atendidos elegían cualquier carrera ajena a las matemáticas, pues no las entendían, por muy sencillas que fueran (según la opinión de los enseñantes).

Finalmente, al impartir clase en el nivel de secundaria se identificó la dificultad principal en las operaciones con números con signo, seguida de muchas otras, pero cuyo fondo es la comprensión insuficiente que tienen de ese tema.

La finalidad de esta investigación es dar respuesta a nuestras inquietudes relacionadas con la transición de una suma aritmética que operan con relativa facilidad los estudiantes de educación primaria, a una suma algebraica que tantas dificultades causa cuando pasan al nivel de secundaria.

2.2 Preguntas de investigación

Las preguntas que dieron línea a esta investigación fueron:

- ¿Los alumnos de primer grado de secundaria identifican y operan correctamente los elementos necesarios para realizar una suma aritmética y una algebraica?
- ¿Qué procesos cognitivos se desencadenan para que transiten de una suma aritmética a la algebraica?

2.3 Objetivo

Identificar cómo transita un alumno al obtener las bases de la suma algebraica, resultante de su enseñanza de la suma de enteros.

2.4 Marco teórico

La presente investigación se basa en los Modelos Teóricos Locales, (MLT), (Filloy, 1999) con énfasis en la componente cognitiva, específicamente en las tendencias cognitivas. A continuación, realizaremos una breve presentación.

2.4.1 Modelos Teóricos Locales

Nos basamos en las investigaciones de Filloy, Rojano y Puig, realizadas desde la década de los 80 a la fecha, que apuntan:

“En la investigación en Didáctica de las Matemáticas desarrollada recientemente, se encuentra una falta de modelos teóricos paradigmáticos, entendidos como: “conjunto de supuestos de base que uno hace sobre la naturaleza y los límites del objeto de estudio propio, el método para estudiarlo y la decisión sobre qué se toma como evidencia”. Tampoco hay consenso sobre cuál de estos supuestos de base debería determinar la forma que toman los marcos teóricos locales para interpretar fenómenos específicos y para proponer nuevos diseños experimentales que hagan avanzar la teoría más lejos con el fin de englobar otras evidencias o nuevas evidencias no relacionadas. Esto se debe a las fronteras de los proyectos de investigación” (Filloy, 1999, p. 1).

El concepto metodológico de modelo teórico local (MTL), tiene como objeto de estudio cuatro componentes interrelacionadas:

a) Modelos de enseñanza
b) Modelos para los procesos cognitivos
c) Modelos de competencia formal y
d) Modelos de comunicación.

Como consecuencia de las interpretaciones que se obtienen de los estudios empíricos ha resultado, que los errores usuales provienen de los mecanismos anticipadores de quienes descodifican una situación y requieren ser modelados en ese Sistema Matemático de Signos (SMS) y en el que la experiencia del sujeto juega un papel decisivo al momento del aprendizaje.

La actuación de los usuarios de los SMS es lo que interesa para lograr el objetivo de guiar a los estudiantes para que lleguen a ser usuarios competentes de un SMS en particular. La gramática (sistema formal abstracto) y la pragmática (los principios del uso del lenguaje) son dominios complementarios en la observación de los procesos de enseñanza con los diferentes modelos de enseñanza. Las componentes teóricas de los MTL serán apropiados sólo para fenómenos específicos, capaces de tomar en cuenta las cuatro componentes y proponer diseños experimentales *ad hoc.*

2.4.1.1. Modelos de enseñanza.

Los modelos de enseñanza son una secuencia de textos escritos en **Sistemas Matemáticos de Signos (SMS)** en el que se expresan y comunican las nociones matemáticas correspondientes a las redes conceptuales, que dan cuenta de acciones, operaciones y transformaciones cada vez más generales y provenientes de estratos de lenguaje cada vez más abstractos. La noción de SMS usada para interpretar observaciones en Matemática Educativa debe abarcar las tareas enumeradas y la noción de significado del signo que cubra el significado formal de la matemática y el pragmático.

2.4.1.2. Modelos de procesos cognitivos.

Al ponerse en acción para llevar a cabo las formas del pensamiento matemático y su comunicación, los procesos cognitivos van afinando los elementos complejos, como los utilizados en:

a) La percepción.
b) El direccionamiento de la atención y la comprensión.
c) Uso intensivo de la memoria.
d) Procesos de análisis y síntesis entrelazados con el uso de la lógica.
e) Concepciones heurísticas usadas en la resolución de situaciones problemáticas.
f) El aprendizaje ligado a procesos de generalización y abstracción y que requiere usos novedosos de los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS).

Los sujetos “competentes”, en general, usan el Método Cartesiano (MC) para resolver algunos tipos de problemas que se les presentan, pero en la resolución de ciertos problemas, los sujetos pasan por un momento de reflexión, en que evalúan si son capaces de anticipar los pasos de la resolución, realizan un esbozo lógico/semiótico de la situación, la explicación o identificación de lo desconocido, utilizando algún estrato de SMS (Filloy, 1999, p. 40).

Para realizar el esbozo se puede partir de los datos y arribar al valor de la incógnita, o bien realizar un análisis lógico que implique el establecimiento de relaciones en el que se opere con lo desconocido, en forma particular por el Método Analítico de Exploraciones Sucesivas (MAES) o bien que sea representado directamente mediante el SMS del MC (Filloy y Rubio, 1993).

2.4.1.3. Modelos de competencia formal.

Simulan la actuación competente de un usuario ideal del SMS. En el caso del modelo formal, su necesidad parte de contar con una descripción de las situaciones observadas por medio de un SMS más abstracto, que permita descodificar todos los textos que se producen en un intercambio de mensajes en el que los actores tienen diversos grados de competencia de uso de los SMS utilizados. Es conveniente que el observador cuente con competencias de uso de un SMS más abstracto que englobe todos los utilizados en el proceso observado.

2.4.1.4. Modelos de comunicación.

Estos modelos describen las reglas de competencia comunicativa, formación y descodificación de textos, desambiguación contextual y circunstancial.

Al realizar la observación en la clase se observan fenómenos de permanencia en un nivel de lectura y se encuentra que la mayoría de los alumnos de primer año de secundaria prefieren el método de dividir *B entre A* al resolver $Ax = B$; sin embargo, regresan al método de tanteo en cuanto la expresión proviene de una situación de análisis en la resolución de un problema (Filloy, 1999, pp. 79 - 80).

El contexto en que aparece la ecuación causa el olvido de la operatividad regresando al método del tanteo o, en ocasiones extremas, el alumno no sabe cuál método de resolución emplear.

Al realizar la descodificación de la expresión $Ax = B$, donde x señala una incógnita, el sujeto muchas veces no sabe qué hacer, pues se trata de algo desconocido. Igual ocurre al intentar que utilicen lo aprendido en la resolución de ecuaciones de primer grado para resolver problemas de aplicación que aparecen en otras clases de matemáticas, física, química, etc. (Filloy, 1999, p. 80)

Muestras de las dificultades intrínsecas que el aprendizaje del álgebra presenta son:

- Errores usuales de sintaxis cuando se trabaja operatoriamente con expresiones algebraicas.
- Errores de traducción de problemas escritos en lenguaje común al pasarlos a lenguaje algebraico para su resolución.
- Interpretaciones erróneas del significado de expresiones algebraicas.
- Dificultades para encontrarles significado a las expresiones algebraicas.
- Imposibilidad de utilizar el álgebra para resolver problemas cotidianos.

El estudio de la evolución de la simbolización en la población escolar del nivel medio y de su adquisición del lenguaje algebraico, se ha centrado en las interrelaciones entre dos estrategias globales:

a) Modelajes de situaciones "*más abstracta*s" en lenguajes "*más concretos"* para desarrollar habilidades sintácticas.
b) Producción de códigos para desarrollar habilidades de resolución de problemas. Uso de las habilidades sintácticas para el desarrollo de estrategias de resolución.

Se trata de dar significados y sentidos a expresiones y operaciones nuevas, modelándolas en situaciones concretas, de manera que se generen códigos de resolución de problemas, que parten del supuesto de contar con ciertas habilidades de uso sintáctico de los nuevos símbolos y su utilización como lenguaje "*más abstracto"* (Filloy, 1999, pp. 80 - 82).

La mayoría de los estudiantes de matemáticas aprende por el método de repetición mecánica durante los primeros ciclos, al estudiar Aritmética y no acostumbran analizar el porqué de los resultados. Este hecho provoca que continúen con esas prácticas cuando inician el estudio del Álgebra, esperan tener una fórmula mágica que les facilite encontrar el resultado solicitado sin advertir la necesidad de recurrir al análisis de la situación.

2.4.2. Tendencias Cognitivas

Como ya se señaló, la presente investigación se basa en los MTL, con énfasis en la componente cognitiva. Al poner en acción estos modelos para llevar a cabo las formas del pensamiento matemático y su comunicación en el aula, se van afirmando los procesos cognitivos complejos como los utilizados en análisis y síntesis, entrelazados con el uso de la lógica, así como el aprendizaje ligado a procesos de generalización y abstracción.

Respecto a esto, es importante señalar que existen tendencias debido a que las estructuras cognitivas del sujeto, dan preferencia a distintos mecanismos de proceder, diferentes maneras de codificar y descodificar mensajes matemáticos. Estas tendencias cognitivas (TC) son "hechos" que siempre se presentan cuando en una situación de enseñanza se está tratando de pasar de un estrato de lenguaje de Sistema Matemático de Signos (SMS) más concreto a uno más abstracto.

Las tendencias cognitivas identificadas por Filloy (2008) son 11, las cuales enlistamos e interpretamos a continuación:

TC1 *la presencia de un proceso de abreviación de los textos concretos para poder producir reglas sintácticas nuevas.*

Perfeccionamiento de códigos intermedios para contar con significados liberados del sentido del contexto concreto.

TC2 *la dotación de sentidos intermedios.*

Se pueden interpretar de forma similar diferentes situaciones independientes una de la otra, para poder reconocerse como textos del mismo tipo de situación problémica, y que consecuentemente tengan un proceso similar de solución.

Se introduce un estrato intermedio de lenguaje, en que los significados provienen de reglas sintácticas personales usadas con anterioridad, pero que ya no dependen del contexto concreto.

TC3 *el retorno a situaciones más concretas, cuando se presenta una situación de análisis.*

Este evento se presenta en la mayoría de las acciones del pensamiento matemático, e involucra una utilización de situaciones más concretas para dotar de sentido a nuevas situaciones problemáticas.

TC4 *la imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse momentos antes.*

Esta situación ocurre cuando, por acción de un mecanismo inhibidor, se pierde momentáneamente la habilidad de dar solución a un tipo de problema, al cual con anterioridad se había enfrentado en forma satisfactoria.

TC5 *lecturas hechas en estratos de lenguaje que no permitían resolver la situación problemática.*

Caso de situaciones donde se depende del sentido del contexto concreto. Se da la creación de un artefacto didáctico para resolver un cierto tipo de problemática estricta, pero que puede provocar un trabajo erróneo al enfrentarse a situaciones en un lenguaje intermedio más abstracto.

TC6 *la articulación de generalizaciones erróneas.*

En la búsqueda por evadir lo descrito en TC5, el sujeto busca ampliar la misma regla a otros contextos en los que no tiene sentido su aplicación, es decir, se utilizan de modo incorrecto aquellas operaciones y conceptos.

TC7 *la presencia de mecanismos apelativos que centran el desencadenamiento de procesos erróneos de resolución.*

El individuo intenta resolver una situación problemática a través de métodos menos abstractos, como el ensayo y error, en vez de realizar la operación específica que lo resuelve. Esto puede desencadenar errores en la resolución.

TC8 *la presencia de mecanismos inhibitorios.*

Se presenta de diferentes formas: la negación a resolver operaciones simples, la insistencia en decir “no puedo” o “no sé” en lugar de intentar analizar un problema, etc.

TC9 *la presencia de obstrucciones provenientes de la semántica sobre la sintaxis y viceversa.*

La dotación de significados a los signos algebraicos, predispone al sujeto a la utilización de la sintaxis, lo que podría originar el caso de que el sujeto escriba correctamente una ecuación y la resuelva con destreza, pero que no la reconozca como tal. En el caso de la sintaxis la tendencia a centrarse en estratos más concretos de uso inhibe lecturas adecuadas de los textos más abstractos.

TC10 *la generación de errores sintácticos debido a la producción de códigos personales intermedios, para dotar de sentido a las acciones concretas intermedias.*

Esta situación corresponde a los errores que son consecuencia de dotar de significados libres del contexto concreto, pero en un contexto equivocado, a un nivel de lenguaje intermedio más abstracto.

TC11 *la necesidad de dotar de sentido a las redes de acciones cada vez más abstractas hasta convertirse en operaciones.*

La condición de ampliar el trabajo en el contexto concreto, a modo de poder resolver problemáticas más complejas (Filloy, 2008)

En los siguientes capítulos se toman en cuenta estas tendencias cognitivas al analizar los resultados obtenidos en los cuestionarios y ejercicios aplicados en cada uno de los modelos de enseñanza propuestos y en las entrevistas realizadas.

2.4.3 Sentidos Intermedios de los números negativos

En la página 4 de este documento, nos referimos a la investigación de Gallardo (2002), que define los sentidos intermedios de los números negativos. En la perspectiva semiótica propuesta por Filloy (2008), estos sentidos intermedios se corresponden con la TC2.

Uno de los hallazgos más relevantes del recorrido por la historia de las ideas y también en el ámbito didáctico, fue la identificación de distintos sentidos intermedios de los números negativos, atribuidos por estudiantes de secundaria inmersos en los procesos de solución de problemas encontrados en textos matemáticos. (Gallardo, 1996). Estos sentidos se designan e interpretan a continuación.

- ***Número sustractivo.*** Donde la noción de número está subordinada a la magnitud. En la resta de dos cantidades $a-b$, siempre b será menor que a, donde a y b son números naturales, es decir, el signo menos sólo tiene un carácter binario en el nivel de la operación de sustracción. Por ejemplo: 5 – 3 = 2
- ***Número signado.*** Es el número natural al que se le asigna un signo más o un signo menos. Surge la dualidad del signo: binario (signo de la operación de adición o sustracción) y unario (signo asociado al número natural). Por ejemplo: 5 + (– 7)
- ***Número relativo.*** Se hace presente cuando se puede concebir la idea de opuestos en situaciones discretas, así como la idea de simetría en situaciones continuas. Por ejemplo: +2, – 2.
- ***Número aislado.*** Surge cuando se acepta un número negativo como la solución de una operación, un problema o una ecuación. Por ejemplo: *x = – 4.*

En el capítulo 3 utilizamos estos sentidos intermedios para realizar el análisis de las respuestas a los cuestionarios y ejercicios aplicados a nuestro grupo de estudiantes.

2.5 Programa matemáticas de primer grado de secundaria

En este apartado se hizo un esbozo del tema de investigación, ubicándolo en el plan de estudios que estaba vigente en el momento de la observación con el grupo. [...] "la Secretaría de Educación Pública valora la participación de las y los docentes, las madres y los padres de familia, y toda la sociedad, en el desarrollo del proceso educativo, por lo que les invita a ponderar y respaldar los aportes del Plan de estudios 2011. Educación Básica, en el desarrollo de las niñas, los niños y los adolescentes de nuestro país. (SEP, 2011, p. 10)

Según la SEP, "se busca impulsar el desarrollo armónico e integral del individuo y de la comunidad contando con un sistema educativo nacional de calidad, que permita a los niños, las niñas y los jóvenes mexicanos alcanzar los más altos estándares de aprendizaje; reconocer que los enfoques centrados en el aprendizaje y en la enseñanza inciden en que el alumno aprenda a aprender, aprenda para la vida y a lo largo de toda la vida, así como formar ciudadanos que aprecien y practiquen los derechos humanos, la paz, la responsabilidad, el respeto, la justicia, la honestidad y la legalidad." (SEP, 2011, p. 16)

Los Estándares Curriculares de Matemáticas presentan la visión de una población que sabe utilizar los conocimientos matemáticos. Comprenden el conjunto de aprendizajes que se espera de los alumnos en los cuatro periodos escolares para conducirlos a altos niveles de alfabetización matemática.

Estos estándares se organizan en:

1. Sentido numérico y pensamiento algebraico.
2. Forma, espacio y medida.
3. Manejo de la información.
4. Actitud hacia el estudio de las matemáticas.

Su progresión debe entenderse como:

- Transitar del lenguaje cotidiano a un lenguaje matemático para explicar procedimientos y resultados.
- Ampliar y profundizar los conocimientos, de manera que se favorezca la comprensión y el uso eficiente de las herramientas matemáticas.
- Avanzar desde el requerimiento de ayuda al resolver problemas hacia el trabajo autónomo (SEP, 2011b, p.15).

2.5.1. Sentido numérico y pensamiento algebraico

Este eje temático se subdivide en cuatro temas, de los cuales, el que nos interesa es:

1.1. Números y sistemas de numeración. […]

Los Estándares Curriculares para este eje temático son los siguientes.

El alumno:

> […]1.2.1. Resuelve problemas aditivos que impliquen efectuar cálculos con expresiones algebraicas. […] (SEP, 2011b, p.16)

4. Actitudes hacia el estudio de las matemáticas

Al término de la Educación Básica, el alumno:

> 4.1. Desarrolla un concepto positivo de sí mismo como usuario de las matemáticas, el gusto y la inclinación por comprender y utilizar la notación, el vocabulario y los procesos matemáticos. […] (SEP, 2011b, p.18)

En el *bloque V* se favorecen las Competencias*: Resolver problemas de manera autónoma […]*, para lograr unos aprendizajes esperados: *Resuelve problemas aditivos que implican el uso de números enteros, fraccionarios o decimales positivos y negativos.* Dentro del Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico • Resolución de problemas que implican el uso de sumas y restas de números enteros. (SEP, 2011b, p.35)

Esta distribución del programa puede originar que algunos profesores, en su afán por cumplir con él, traten el tema de manera superficial, o bien, al poner mayor énfasis en otros temas, no lleguen al último bloque, lo que ocasionaría, que los alumnos llegasen con deficiencias al siguiente nivel, en el que el primer bloque es precisamente operaciones con números enteros y los estudiantes que no tuvieron un contacto con ese tema, pueden tener mayores dificultades para la solución de problemas relacionados con el tema.

Capítulo 3

Proceso de investigación

El esquema del desarrollo de la experimentación basada en los MTL propuesto por Filloy en las figuras 2 y 3 de su obra, (1999, pp. 9 y 10), las cuales resume aquí la Figura 3.1, se parafraseó en la Figura 3.2 en los términos de nuestra investigación según la cual se implementaría el sistema de enseñanza controlada. Participaron 22 estudiantes de 1º de secundaria, a quienes se les aplicó un cuestionario diagnóstico (CD) sobre sumas aritméticas y algebraicas antes d proceder a la enseñanza. Luego se les aplicaron los modelos sintáctico, continuo y discreto (véase la sección 1.3), a fin de que los alumnos adquirieran los conocimientos requeridos para solucionar diferentes tipos de operaciones con números enteros.

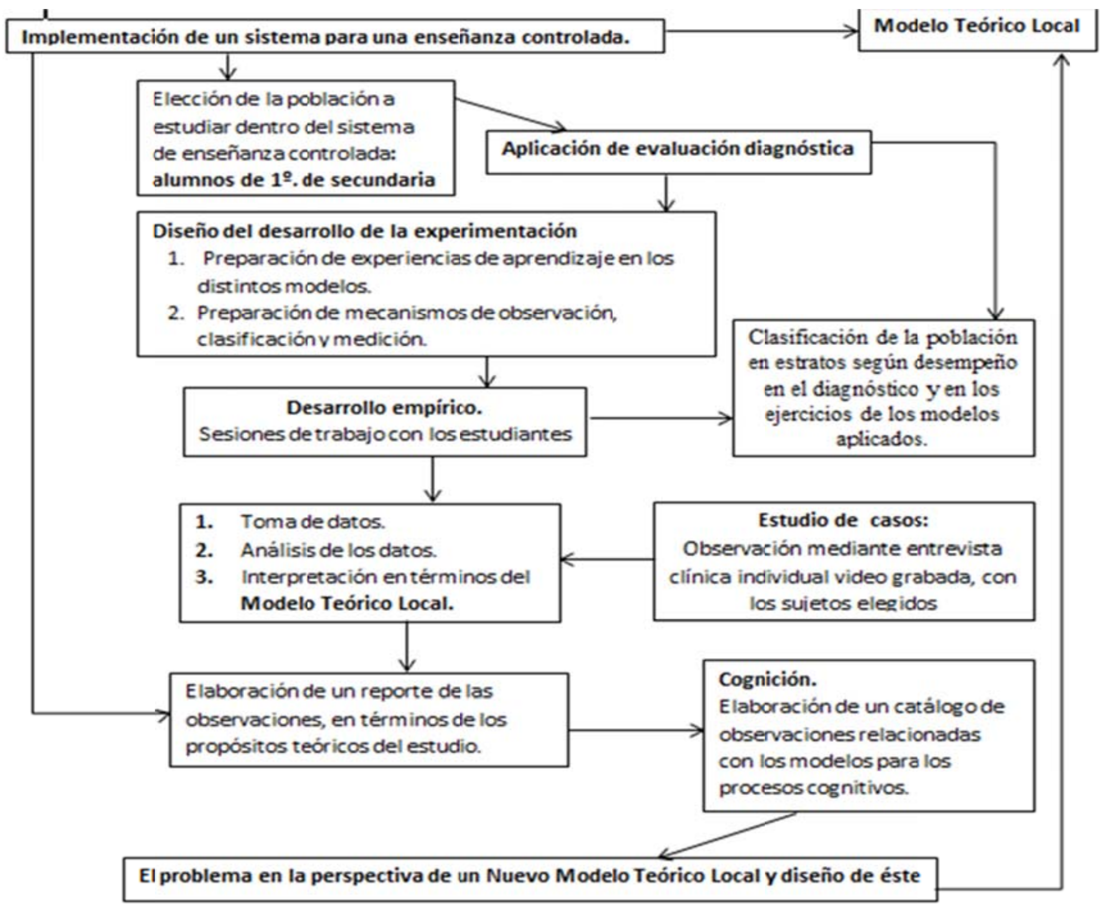


Figura 3.1 **Esquema del desarrollo de la investigación *(tomado de Filloy, 1999, pp. 9 y 10)***

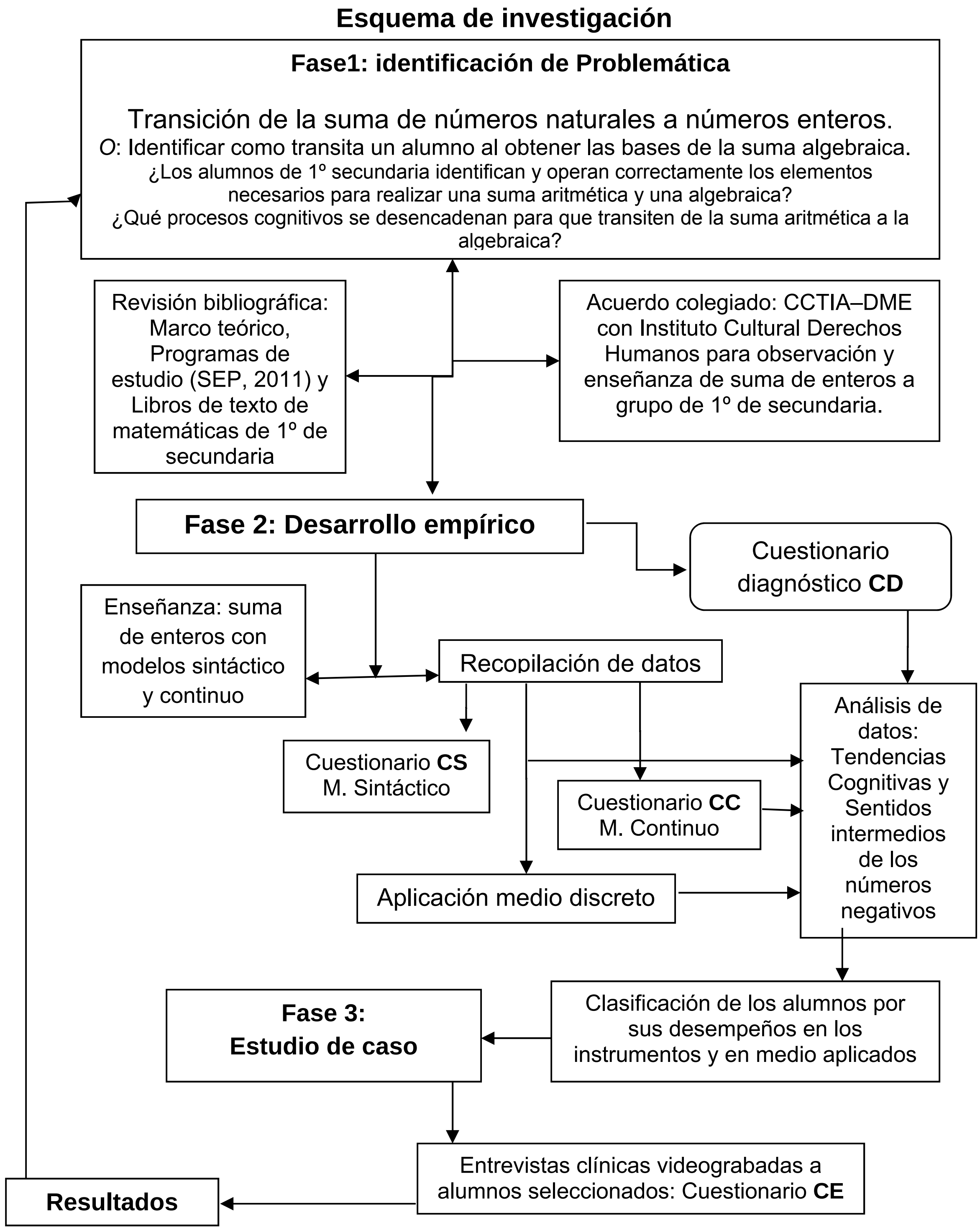


Figura 3.2 **Esquema de investigación**

En la investigación, se aplicaron tres cuestionarios (CD, CS y CC) y un medio lúdico discreto. Los cuestionarios se contestaron individualmente con lápiz o pluma en sus hojas impresas, durante la clase de matemáticas y su contestación tuvo una duración de 20 minutos en promedio.

3.1 Cuestionario diagnóstico CD

Al empezar la observación del grupo, se aplicó un cuestionario de diagnóstico, CD para, de acuerdo con Coello (1995), “ilustrar acerca de condiciones y posibilidades de iniciales aprendizajes o ejecución de una o varias tareas” (p.15). Después se aplicaron otros dos cuestionarios: CS y CC con preguntas de tipo abierto (Sampieri, 2010, p. 221), basados en los modelos de enseñanza sintáctico y continuo, respectivamente.

El cuestionario diagnóstico CD se aplicó a los estudiantes en la segunda semana de actividades del primer año de enseñanza secundaria. Constó de 15 reactivos agrupados en cinco ítems, los cuales se indican en la siguiente tabla:

Tabla 3.3 **Ítems de cuestionario diagnóstico.**

Ítem	Objetivo particular	Ejemplo de reactivo
Inversos	Distinguir el sentido relativo de los números negativos.	4 ***inverso*** – 4
Localizar en recta numérica	Resaltar el uso de la recta numérica con números enteros y el sentido signado.	localizar los números: +(+8), +(– 7); – (– 16)
Operaciones con signo	Identificar los sentidos: sustractivo, signado y aislado de los números negativos.	+ (+27 – (+11) – (– 15) =
Operaciones con signo usando recta numérica	Destacar el uso de los sentidos intermedios de los números negativos, utilizando la recta numérica.	+ (– 9 + 7) + (+ 11 – 13) =
Preguntas relacionadas con sumas	Determinar el conocimiento previo que poseen de conceptos básicos para la suma algebraica.	¿Cómo realizas una suma combinando números positivos y negativos?

3.1.1 Objetivos del cuestionario diagnóstico CD

El objetivo general del cuestionario diagnóstico CD fue determinar el nivel de conocimiento previo de los estudiantes, al tema de la suma de enteros. Cada uno de los ítems que conformó el cuestionario CD se relacionó con uno o más de los sentidos de los números negativos identificados por Gallardo (2002): sustractivo, signado, relativo y aislado (véase el apartado 2.4.3).

Que esos sentidos intermedios fueran o no identificados y/o aplicados por los integrantes del grupo en observación, contribuiría a que respondiéramos nuestra pregunta de investigación de si identificaban o no los elementos necesarios para realizar una suma aritmética y una algebraica.

3.1.2 Resultados del cuestionario diagnóstico CD

Este cuestionario se aplicó a 22 estudiantes. Sus respuestas se clasificaron en: correctas, incorrectas y otras. En esta última clase se consideró: la omisión (sin respuesta), no entiendo o no sé (véase la Tabla 3.2).

Tabla 3.4 **Resultados de la aplicación del cuestionario diagnóstico CD.**

Tipos de respuesta	**Correctas**	**Incorrectas**	**Otra**		
Ítem			Sin respuesta	No entendió	No sabía
Inversos	10	1	1	6	4
	10	1	1	6	4
Localizar	3	3	5	6	5
	1	5	5	6	5
	2	4	5	6	5
Operaciones con signo	19		1	1	1
	21	1			
		5	2	8	7
Operaciones c/signo y recta	2	5		8	7
		8		7	7
		3		6	13
Preguntas	3	1	1	1	16
	2	2	2		16
	1	1	1		19
		1	1		20

3.1.3 Análisis de las respuestas

Los criterios para el análisis de resultados fueron las 11 tendencias cognitivas y el uso de los sentidos intermedios de los números negativos.

En el ítem *inversos,* 10 de los 22 estudiantes a los que se aplicó el instrumento identificaron el sentido relativo de los negativos TC2, (dotación de sentidos intermedios), en al menos uno de los dos incisos de que constaba este apartado.

También se identificó la TC3, la cual indica: *el retorno a situaciones más concretas, cuando se presenta una situación de análisis*. Esta tendencia se reveló en situaciones como la que se ilustra en la Figura 3.3

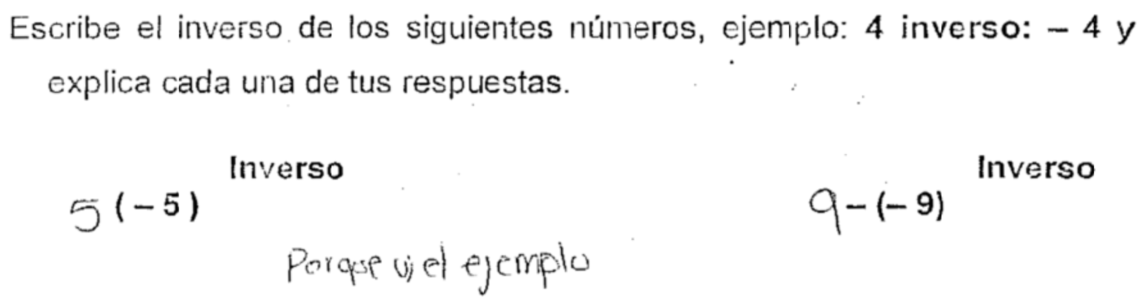


Figura 3.3 **Resultados con TC3 en inversos.**

La explicación que este estudiante escribió, “porque vi el ejemplo”, al resolver su ejercicio, es la que nos sugirió la presencia de la TC3 (véase el apartado 2.4.2).

Por otra parte, 11 de los alumnos, no lo respondieron este mismo ejercicio o anotaron “no sé” o “no entiendo” lo cual sugiere la presencia de la TC8, que señala: *la presencia de mecanismos inhibitorios* (véase Figura 3.4).

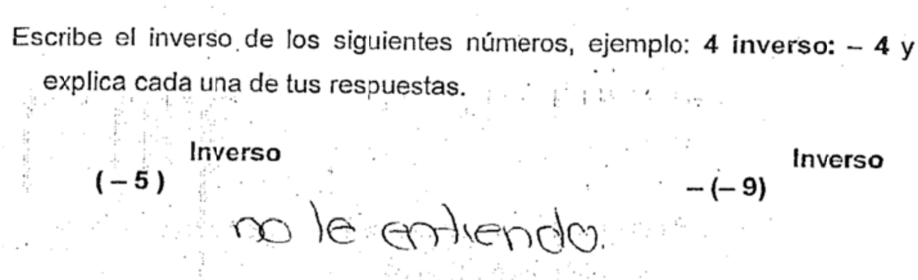


Figura** ¡Error! Utilice la ficha Inicio para aplicar 0 al texto que desea que aparezca aquí.**4
Resultados con TC8 en inversos.

Para el segundo ítem, *Localizar en recta numérica*, se plantearon tres reactivos: en el primero se trató de un número positivo precedido de un signo positivo, el cual obtuvo tres respuestas correctas; el segundo fue un número negativo precedido por un signo positivo, que obtuvo una respuesta correcta; y el último fue un número negativo precedido de un signo negativo, que sólo obtuvo dos respuestas correctas.

El sentido de los números negativos que se pretendió observar era el signado, que sólo exhibió uno de los estudiantes (véase la Figura 3.5).

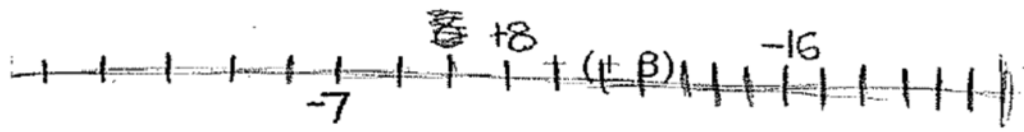


Figura 3.5 **Sentido signado en localizar números en recta.**

En este ítem se presentó la TC3 (retorno a situaciones más concretas) para reactivos como el que se ilustra en la Figura 3.6

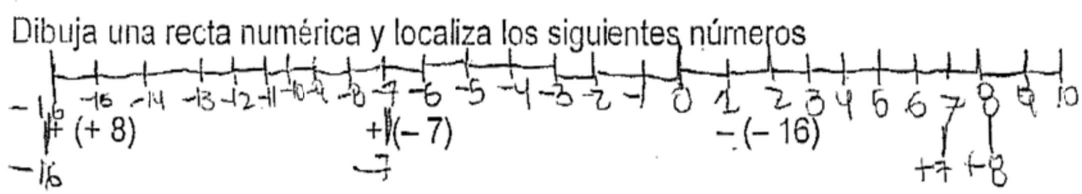


Figura 3.6 **Presencia de TC3 en localizar números en recta.**

El número positivo fue ubicado correctamente, mientras que los números negativos no lo fueron; al negativo precedido del signo positivo, [+ (– 7)], se le ubicó dos veces, lo que pudo indicar la confusión del estudiante y, para el último número, sólo consideró el signo dentro del paréntesis, ignorando al de fuera.

La TC8 (mecanismos inhibitorios, véase el apartado 2.4.2) se manifestó en este reactivo en respuestas como la de la Figura 3.7

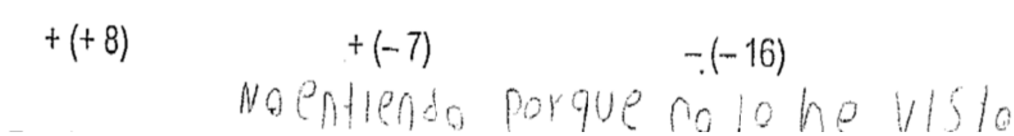


Figura 3.7 **Presencia de TC8 al localizar números en recta.**

En el ítem de *Operaciones con signo* se propusieron tres preguntas. Para la primera de ellas, + *6* + *12* =…; se obtuvieron 19 respuestas correctas. Para el siguiente reactivo, *5* – *1* + *7* =*…;* se dieron 21 respuestas correctas. La operación

+ (+ 27) – (+ 11) – (– 15) =…; última de este ítem, no obtuvo respuestas correctas.

Los sentidos intermedios de los números negativos que se pretendió que los alumnos identificaran fueron: el sustractivo y el signado. El primero fue efectivamente identificado, mientras que el segundo no. Esto lo muestra la Figura 3.8, en la respuesta de la estudiante que restó *5 – 1 = 4* aplicando el sentido sustractivo; sin embargo, en la resta + *(+ 27) – (+11) – (– 15)* = escribió “no entiendo”, sin dotar del sentido signado a las cantidades implicadas y sin efectuar la operación solicitada.

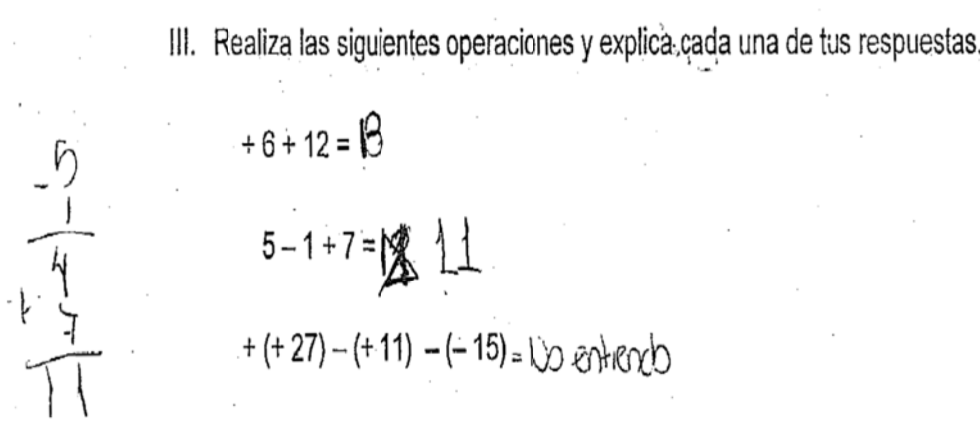


Figura 3.8 **Sentido signado en operaciones.**

La TC8 se relevó una vez más en este ítem, (véase la Figura 3.9).

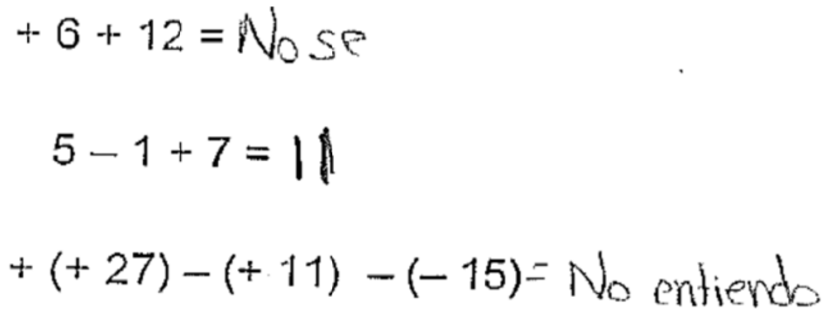
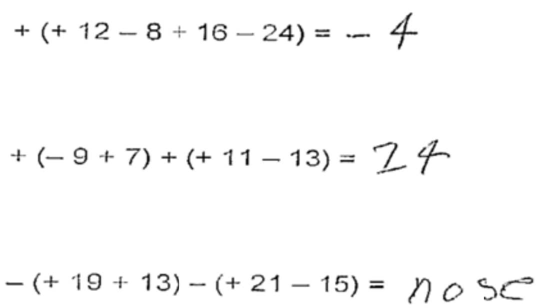


Figura 3.9 **Presencia de TC8 en operaciones.**

El ítem referido a *Operaciones con signo usando recta numérica* (véase la Tabla 3.2) planteó tres preguntas; de ellas, sólo a la primera se dieron dos respuestas correctas, pero sin hacer recurrir a la recta numérica, como se indicaba en las instrucciones. En esta sección se pretendía que los sentidos intermedios sustractivo, signado y aislado (véase el apartado 2.4.3) fueran utilizados.

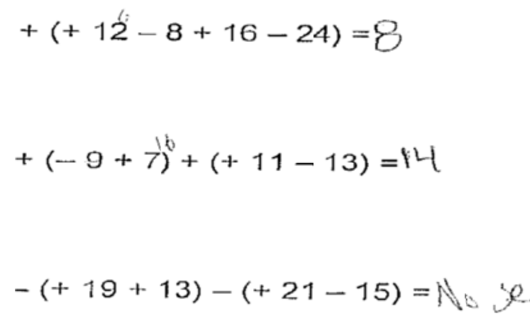


+ (+ 12 – 8 + 16 – 24) = – 4

+ (– 9 + 7) + (+ 11 – 13) = 24

– (+ 19 + 13) – (+ 21 – 15) = no se

Figura 3.10 **Respuestas de operaciones con recta.**



+ (+ 12 – 8 + 16 – 24) = 8

+ (– 9 + 7) + (+ 11 – 13) = 14

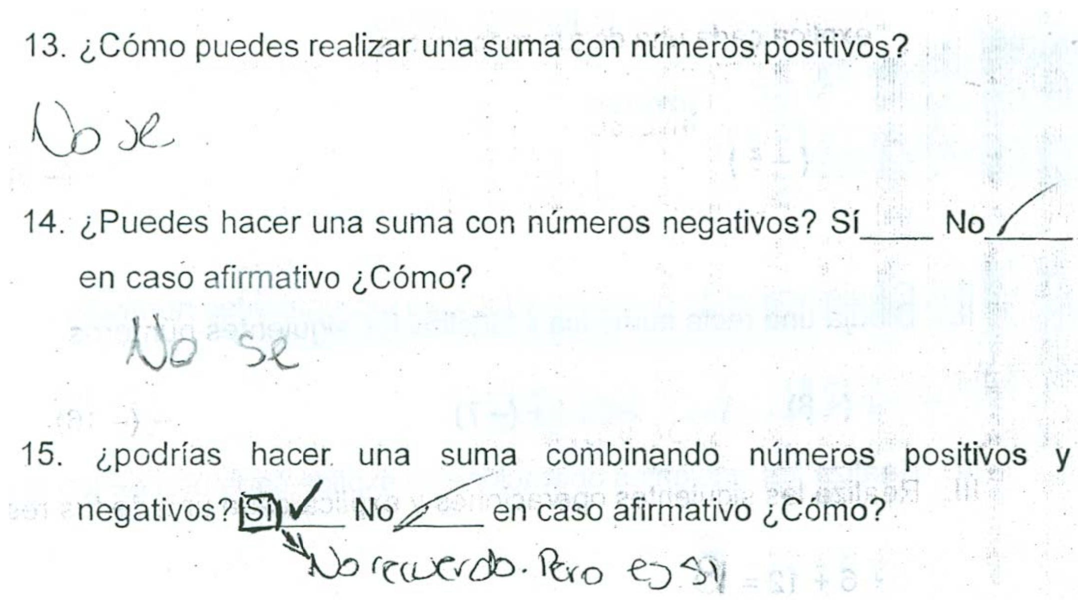
– (+ 19 + 13) – (+ 21 – 15) = No se

Figura 3.11 **Presencia de TC8 en operaciones con recta.**

La presencia de la TC8 es clara en las respuestas "no sé" en las Figuras 3.10 y 3.11 para la operación – *(+ 19 + 13) – (+ 21 – 15)* = ____

La Figura 3.11, también muestra que el estudiante intentó efectuar la suma *+ (– 9 + 7) + (+ 11 – 13) = ;* su procedimiento fue primero sumar *9 + 7 = 16*, lo cual fue erróneo y a ese resultado parcial le sumó el *– 2* para obtener 14.

En el último ítem del cuestionario CD, *Preguntas relacionadas con sumas,* la respuesta más frecuente de los estudiantes fue nuevamente "no sé", lo que volvió a indicar la presencia de la TC8 (véase la Figura 3.12).



13. ¿Cómo puedes realizar una suma con números positivos?

No se

14. ¿Puedes hacer una suma con números negativos? Sí____ No____ en caso afirmativo ¿Cómo?

No se

15. ¿podrías hacer una suma combinando números positivos y negativos? Sí____ No____ en caso afirmativo ¿Cómo?

No recuerdo. Pero es Si

Figura 3.12. **Respuestas que revelan la presencia de TC8 al ítem de preguntas.**

3.1.4 Resultados del análisis

En la aplicación del cuestionario diagnóstico CD, la mayoría de las respuestas del grupo, en general, fueron correctas para los ítems: *inversos* (10 de 22) y *operaciones con signo* (21 de 22); mientras que para los ítems restantes del cuestionario prevaleció otro tipo de respuesta, destacando “no sé” en el ítem *preguntas relacionadas con sumas.*

Los sentidos intermedios de los números negativos que se identificaron en la mayoría de las respuestas fueron el signado en el ítem de *operaciones con signo,* en menor grado en el ítem *localizar números en recta* y el relativo en el ítem de *inversos*, mientras que el sustractivo fue poco utilizado en el ítem de *operaciones con signo con recta*, mientras que el aislado sólo lo usaron los alumnos en dos ocasiones en la sección de *operaciones con signo.*

Las tendencias cognitivas (véanse en el apartado 2.4.2) que se identificaron en las respuestas a este cuestionario fueron la TC2 para los sentidos intermedios de los negativos; la TC3, *el retorno a situaciones más concretas, cuando se presenta una situación de análisis*, en las secciones de *inversos y localizar números en recta* y la TC8 en casi todo el instrumento, presentándose mayormente en el ítem *preguntas relacionadas con sumas y en operaciones con signo y recta.*

3.1.5. Características de los alumnos del grupo

Los 22 estudiantes con los que se tuvo oportunidad de realizar las observaciones, pertenecían al grupo 1º B del “Instituto Cultural Derechos Humanos”; sus edades fluctuaban entre los 11 y 13 años. Se tuvo la oportunidad de realizar clases controladas, es decir, sesiones de enseñanza con los modelos propuestos (véase el parágrafo 2.4.1.1) los días jueves del ciclo escolar 2012 – 2013 por dos horas.

Como se desprende del análisis del cuestionario CD, los alumnos manifestaron poco conocimiento del tema: “suma de números enteros”, por lo que se procedió a su enseñanza mediante tres diferentes modelos de ella (véanse en la sección 1.3).

3.2 Objetivos de la enseñanza

Los modelos de enseñanza que se utilizaron para la realización de esta investigación fueron: el sintáctico, el continuo basado en la recta numérica contextualizada y el discreto en forma de un modelo lúdico (véanse los apartados 1.3.1, 1.3.2 y 1.3.3, respectivamente). La combinación de actividades con estos tres modelos nos permitiría identificar qué modelo o modelos de enseñanza contribuirían a que los alumnos realizaran correctamente la suma algebraica.

3.3 Enseñanza de suma de números enteros con el modelo sintáctico

En relación con los modelos de enseñanza, Filloy expone en el capítulo tres de su obra (1999) que:

> -… hay posiciones encontradas respecto al tipo de recursos didácticos a utilizar en el desarrollo curricular: una propone "modelar" en contextos más "concretos" o contextos familiares para el alumno, las nuevas operaciones, con el propósito de dotarlos de significados y tomando éste como punto de partida, construir los primeros elementos de sintaxis. Una posición opuesta es la que propone partir del nivel sintáctico y enseñar las reglas sintácticas, modelo tradicional en la enseñanza de la resolución de ecuaciones basado en el modelo sintáctico - viético (transposición de términos de un miembro a otro) y el euleriano (adición y multiplicación de los inversos aditivos y multiplicativos) para aplicarlas en la resolución de ecuaciones y problemas (Filloy, 1999, p.23).

Los contrastes entre los dos modelos saltan a la vista: mientras que en el modelo concreto se enfrenta una gran carga semántica en todos los signos y operaciones involucrados, en el modelo sintáctico el énfasis se pone en la regla general utilizada para construir los hábitos que desencadenarán las operaciones. Por esa razón, en el recurso a este último modelo, las actividades de enseñanza propuestas tenía su acento en generalizar operaciones con signo.

3.3.1 Resultados de la aplicación del cuestionario CS

Al ser el tema de los números negativos relativamente nuevo para los estudiantes, se puso énfasis en explicar las reglas para sumar números enteros en las sesiones de enseñanza con el modelo sintáctico, al final de las cuales se aplicó el cuestionario CS. Los reactivos propuestos en este cuestionario CS fueron de la forma: $a + b$ donde a y $b \in Z$. Las respuestas que los estudiantes dieron se clasificaron como: correctas, incorrectas; y “no sé”; el tipo de errores cometidos fueron: omisión de signo, error en procedimiento, error en la respuesta. La Tabla 3.3 indica los tipos de respuestas obtenidas con la aplicación de CS y sus frecuencias.

3.3.2 Análisis de las respuestas

El cuestionario CS se dividió en 13 reactivos agrupados en cinco ítems. Los criterios de análisis de análisis de las respuestas al cuestionario fueron los sentidos intermedios de los números negativos y las tendencias cognitivas.

Tabla 5.3 **Frecuencias de tipos de respuestas al cuestionario CS aplicado después de administrar la enseñanza de suma de enteros con el modelo sintáctico.**

Respuestas	Correctas	Incorrectas			
Ítem		Error en respuesta	Error en signo	Error en procedimiento	No sé
I. Mayor menor que	20		2		
	20		2		
	16		6		
	20		2		
	20		2		
II. ¿Cuál es mayor?	17		5		
III. Ordenar de mayor a menor	15		7		
IV. Problema de aplicación	15	3		4	
V. Solución a ejercicios	9	11		2	
	12	8	2		
	8	10	2	2	
	12	9		1	
	7	10	2	2	1

El ítem I se refería a indicar si un número era *mayor o menor* que otro. Cuatro de los cinco reactivos de que constaba este ítem tuvieron 20 respuestas correctas. Al tercer reactivo, que propuso: *– 3* ______ *– 1,* se dieron 16 respuestas correctas, una disminución con respecto a los otros reactivos que constituían este ítem. El error que se exhibió insinuó la presencia de la TC3, *el retorno a situaciones más concretas cuando se presenta una situación de análisis,* debido al uso de números con signo. Así lo indica el ejemplo respuesta en la Figura 3.13, en donde el estudiante escribió: – 3 mayor que – 1.

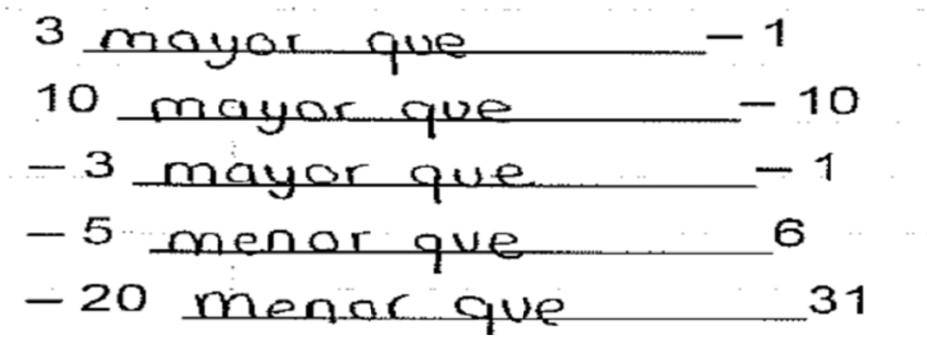


Figura 3.13 **Presencia de TC3 en "mayor que" o "menor que".**

El sentido intermedio en este inciso fue el signado, el cual fue identificado por 20 de los 22 estudiantes observados.

Para el ítem II *¿cuál es mayor?*, se tuvieron 17 respuestas correctas. El sentido intermedio a usar era el signado y la TC5, *lecturas hechas en estratos de lenguaje que no permitían resolver la situación problemática,* fue la que se entrevió en las respuestas, como la que exhibe la Figura 3.14, dada por el alumno que omitió los signos de los números del reactivo: – 9, – 4 y – 7, al escribir sólo *4*, donde se solicitaba el mayor de los números y *9* donde se pedía el menor, por lo que, además, la respuesta fue incompleta.

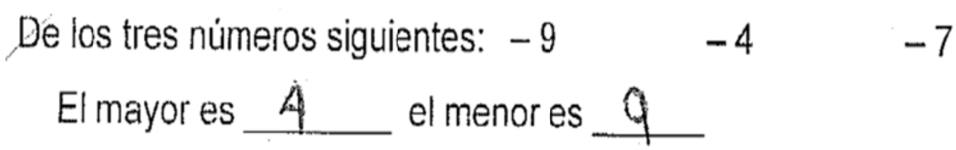


Figura 3.14 **Presencia de TC5 en el mayor es… y el menor es… de números signados.**

Al ítem III, de *orden* de los números signados *4, – 20, – 25, – 1, – 31*, se dieron 15 respuestas correctas y se cometieron siete errores de signo, lo que nuevamente nos indicó la TC5, (véase la Figura 3.15).

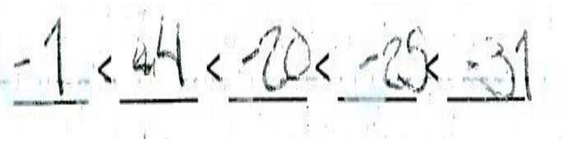


Figura 3.15 **Presencia de TC5 en ordenar números signados.**

Los errores en signo fueron los que en mayor medida cometieron los alumnos en este ítem, pero también ordenaron los números de manera inversa a la solicitada en las instrucciones (véase la Figura 3.15).

El ítem IV del cuestionario CS propuso un *problema de aplicación*, el cual obtuvo 15 respuestas correctas, aunque no en todas se usó la recta numérica, pero sí escribió la cantidad solicitada, (véase la Figura 3.16).

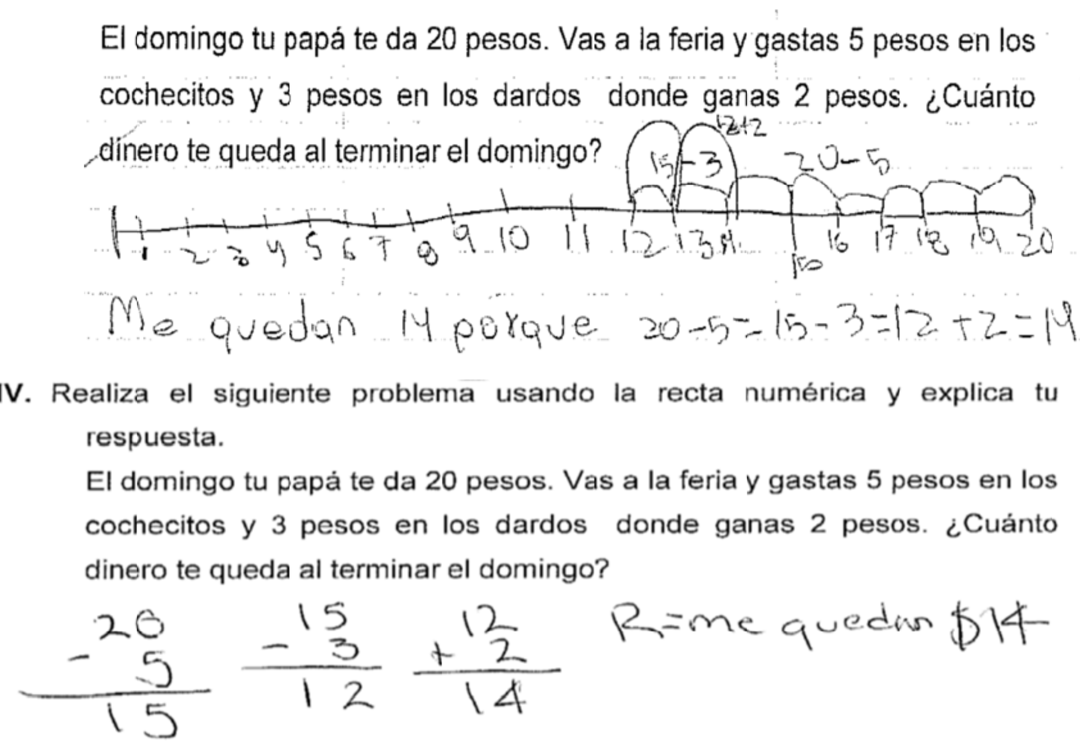


Figura 3.16 **Solución del problema de aplicación, sin hacer uso de recta numérica.**

Hubo diversas maneras en que los alumnos presentaron la explicación solicitada en este reactivo, en las Figuras 3.16, 3.17 y 3.18 se ilustran algunas de ellas.

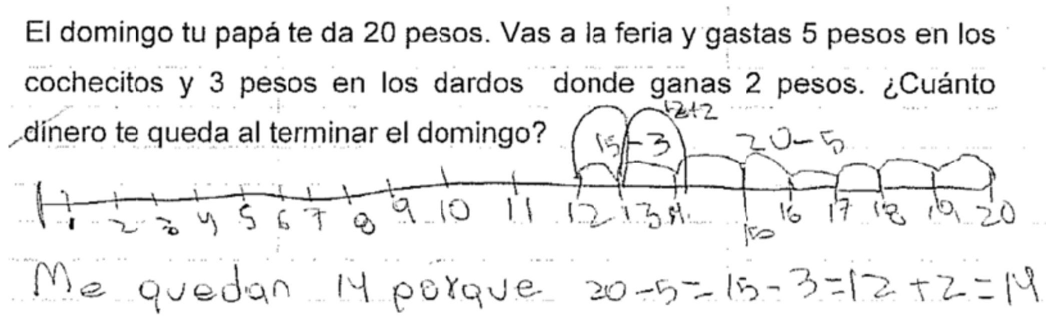


Figura 3.17 **Solución completa a problema de aplicación.**

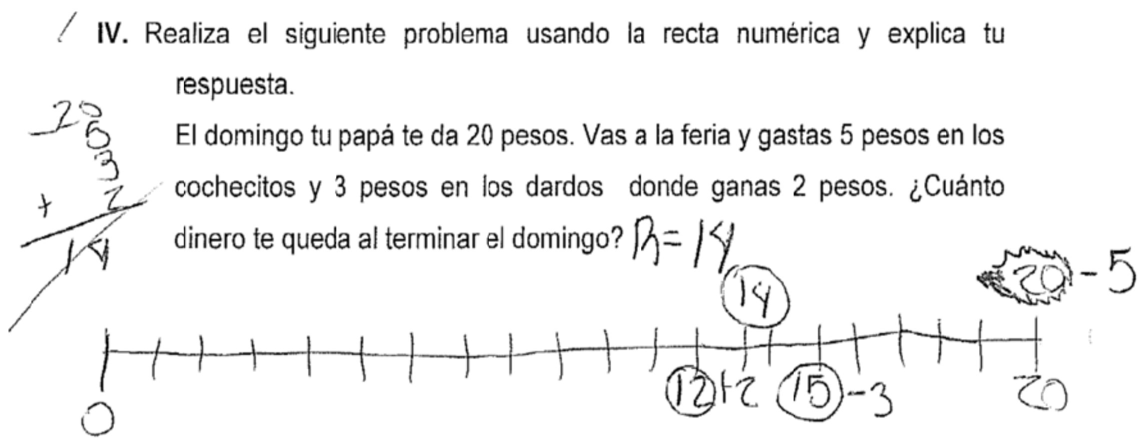


Figura 3.18 **Solución y explicación gráfica al problema de aplicación.**

Uno de los tipos de errores cometidos fue el de procedimiento, lo que indica la presencia de la TC5 como el que cometió el estudiante que bosquejó la recta numérica y colocó algunos de los datos del problema, sin concretar su respuesta (véase la Figura 3.19).

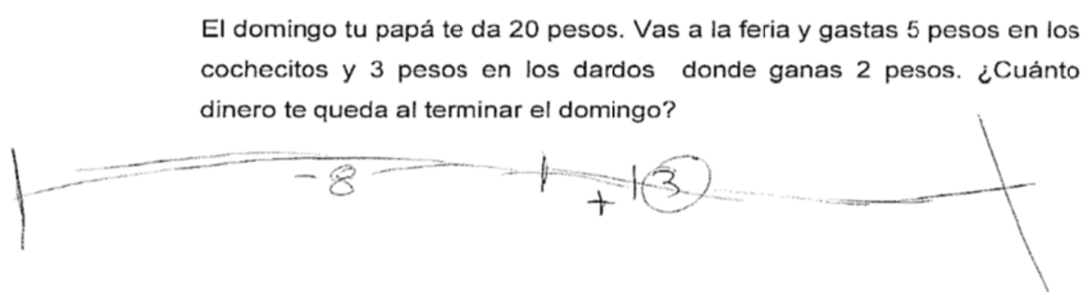


Figura 3.19 **Presencia de la TC5 en problema de aplicación.**

El ítem V solicitó escribir el resultado de cinco sumas de enteros. Dos de estas operaciones tenían como respuesta una cantidad positiva, mientras que en las otras era negativa. Las dos con suma positiva obtuvieron 12 respuestas correctas, mientras que a las otras con suma negativa sólo se dieron ocho correctas en promedio.

Los sentidos intermedios de los que se esperaba que los alumnos hicieran uso en este ítem fueron: signado, sustractivo y aislado, el último de los cuales se vio poco reflejado en las respuestas obtenidas.

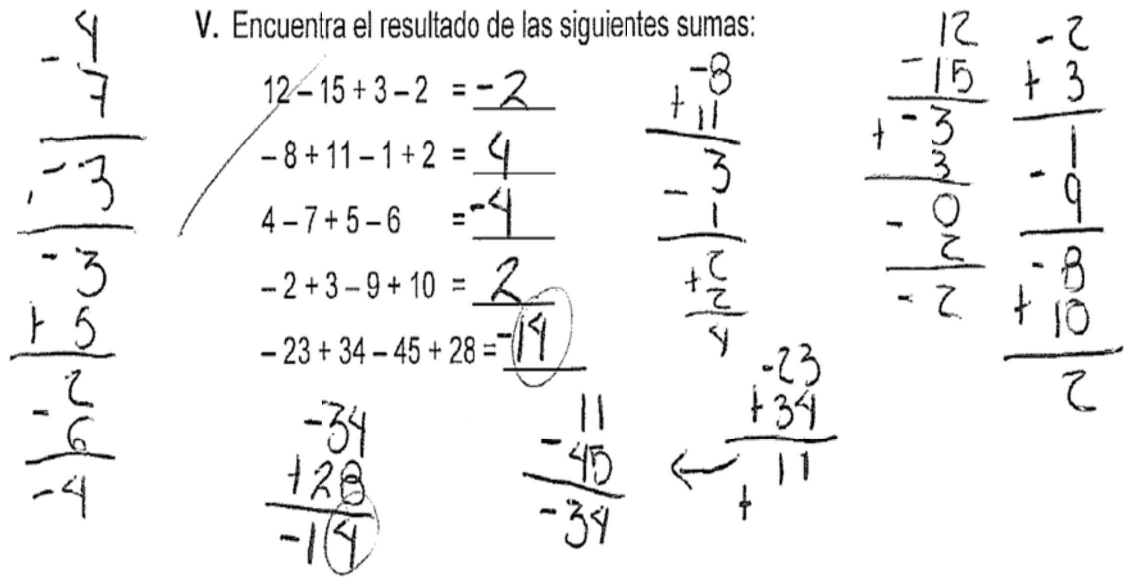
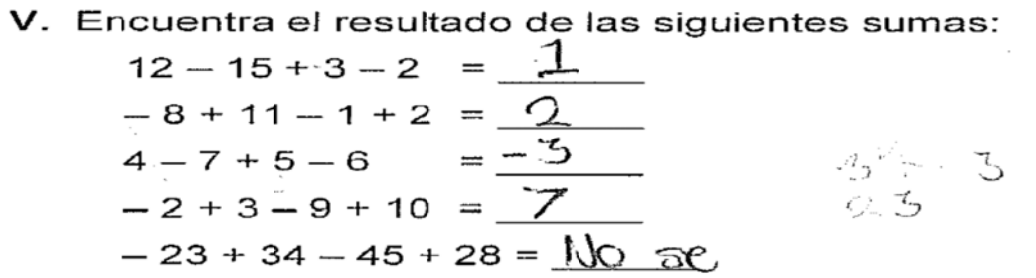


Figura 3.20 **Presencia de TC4 en la solución de sumas.**

La Figura 3.20 ejemplifica la presencia de la TC4, *la imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse momentos antes,* en la suma de los números $-34 + 28 = -14$ por la estudiante que restó 8 menos 4 en lugar de usar el algoritmo 14 menos 8, lo cual provocó un resultado erróneo de la suma en cuestión; sin embargo, operó correctamente la resta precedente *(11 – 45)*, lo que sugiere que la dificultad principal es cuando la cifra en sustraendo es mayor que la correspondiente en el minuendo.

De la TC8 (mecanismos inhibitorios) se obtuvo evidencia en un solo caso, el cual se muestra en la Figura 3.21: al anotar “No sé” en lugar de dar solución al ejercicio solicitado.


V. Encuentra el resultado de las siguientes sumas:

12 – 15 + 3 – 2 = 1

– 8 + 11 – 1 + 2 = 2

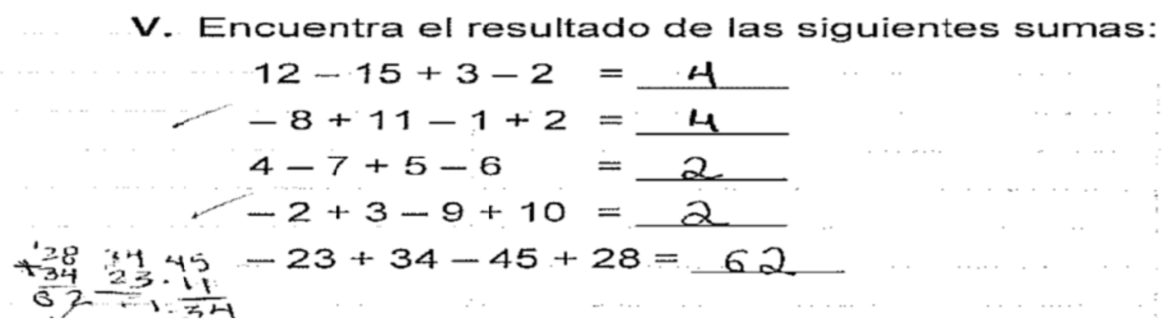
4 – 7 + 5 – 6 = –3

– 2 + 3 – 9 + 10 = 7

– 23 + 34 – 45 + 28 = No se

Figura 3.21 **Presencia de la TC8 en la solución de sumas.**

Por último, se manifestó la TC7, *la presencia de mecanismos apelativos que centran el desencadenamiento de procesos erróneos de resolución,* en este reactivo, pues el alumno sumo + *34 – 23= 11*, después sumo *–45 + 11 = 34*, con lo cual equivocó el signo de uno de los resultados parciales, pues al final sumo + 28 + 34 = 62, debiendo sumar + 28 – 34 =…., lo que provocó un error en el resultado total.


V. Encuentra el resultado de las siguientes sumas:

12 – 15 + 3 – 2 = 4

– 8 + 11 – 1 + 2 = 4

4 – 7 + 5 – 6 = 2

– 2 + 3 – 9 + 10 = 2

– 23 + 34 – 45 + 28 = 62

Figura 3.22 **Presencia de TC7 en la solución de sumas.**

3.3.3 Resultados del análisis

En la aplicación del cuestionario CS, luego de administrar el modelo sintáctico, el grupo se desempeñó de la siguiente manera: en el ítem I *mayor - menor que*, se tuvo un promedio de 20 respuestas correctas, y el reactivo de comparar dos negativos fue el que menos aciertos tuvo (16 de 22); el ítem II *¿cuál es mayor?* obtuvo 17 respuestas correctas, mientras que los ítems III y IV, *ordenar de mayor a menor* y el *problema de aplicación,* respectivamente, tuvieron 15 respuestas correctas cada uno; y el ítem V, *solución a ejercicios*, tuvo 12 respuestas correctas en los reactivos en los que la suma era positiva y un promedio de ocho respuestas correctas a las sumas cuyo resultado era negativo.

Los sentidos intermedios de los números negativos que se identificaron más frecuentemente fueron el signado en los ítems I, II y III, de *mayor - menor que, ¿cuál es el mayor? y ordenar de mayor a menor;* respectivamente; el sustractivo fue utilizado en el ítem IV, *problema de aplicación*; el aislado sólo se usó por parte de los alumnos en ocho ocasiones en el ítem *solución a sumas.*

Las tendencias cognitivas que se identificaron en las respuestas al cuestionario CS fueron la TC2, en los *sentidos intermedios de los negativos*; la TC3, *el retorno a situaciones más concretas, cuando se presenta una situación de análisis*, en el ítem de *mayor - menor que;* la TC4, *la imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse momentos antes,* en el ítem V, solución a sumas, al realizar una resta con un algoritmo erróneo; la TC5, *lecturas hechas en estratos de lenguaje que no permitían resolver la situación problemática,* por la omisión de signos en la respuesta; la TC7, *la presencia de mecanismos apelativos que centran el desencadenamiento de procesos erróneos de resolución,* al equivocar el signo de una operación parcial, lo que provocó el resultado final erróneo; y la TC8 *mecanismos inhibitorios,* en una respuesta al ítem V.

3.4 Enseñanza con el modelo continuo

Como señalamos en el apartado 1.2.2 el modelo continuo que se aplicó en esta investigación se basa en el recurso a la recta numérica contextualizada que sugieren Bruno y Martiñón (1996).

En este sentido, se impartieron sesiones de enseñanza en las que se explicó el tema con el uso de este modelo y, al final de ellas, se aplicó el cuestionario CC para recopilar datos de cómo operan los alumnos los elementos de una suma de enteros con el recurso a la recta numérica contextualizada y los procesos cognitivos presentes en ese proceso.

3.4.1 Resultados de la aplicación del cuestionario CC

El cuestionario CC se refirió a la aplicación de la recta numérica en la solución de diversos ejercicios de la forma: $a + b$, con a y $b \in Z$, además de problemas de aplicación referidos a elevadores, temperaturas, estaturas y otros. De las respuestas que los estudiantes dieron al cuestionario CC después de que se administró este modelo se identificó su corrección o incorrección y el tipo de error cometido: de signo o error de procedimiento. La Tabla 3.4 indica las frecuencias de los tipos de respuestas a los ítems del cuestionario CC.

Tabla 3.6 **Frecuencias de tipos de respuestas al cuestionario CC luego de aplicar el modelo continuo.**

Respuestas / Ítem	Correctas	Incorrectas: Error en resultado	Error en signo	Error en procedimiento	No contestada
1. Estaturas	18	3			
	16	3		2	
	20	1			
	17	2		2	
	18	2		1	
2. Pérdidas y Ganancias	13	2	4	1	1
	12	2	4	2	1
	10	5	2	3	1
	8	5	3	4	1
3. Simétricos	13	1	6		1
	11	1	8		1
	12	2	6		1
4. Valor absoluto	16	2			3
	10	1	6	1	3
	15	2	1		3
5. Ordena	15		1	3	2
	14	1		4	2
	16	1		2	2
	15	1		3	2
	15	1		3	2

3.4.2. Análisis de las respuestas

El cuestionario CC se dividió en 20 reactivos agrupados en cinco ítems relativos a una aplicación de la recta numérica contextualizada.

El ítem 1 se refería a *estaturas*; se obtuvo para él un promedio de 18 respuestas correctas, la aplicación del sentido signado de los números negativos y la presencia de la TC4, *la imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse momentos antes.* La Figura 3.23 se muestra un ejemplo del tipo de respuesta obtenido en este ítem.

La estatura media de un grupo de alumnos de 1º es 1.54, anota la estatura de los siguientes alumnos:

Erika	+0.02	1.56
Carlos	+0.05	1.59
Martha	-0.03	1.51
Enrique	+0.03	1.57
Alberto	-0.04	1.49
Lupita	+0.01	1.53

Figura 3.23**. Presencia de TC4 en el primer ítem relativo a estaturas**

La TC4 se manifiesta en los reactivos *1.54 – 0.04 = 1.49* y en el *1.54 + 0.01 = 1.53,* al dar un resultado erróneo, aunque en los reactivos anteriores no se habían cometido este tipo de errores.

En el ítem 2 se solicitó encontrar la *Ganancia o Pérdida* con los datos proporcionados. Este ítem constaba de 4 reactivos; los dos primeros tuvieron 13 y 12 respuestas correctas mientras que el tercero y el cuarto sólo obtuvieron10 y 8 respuestas correctas, respectivamente. El sentido intermedio de los números negativos que se pretendía indicar fue el aislado. Las tendencias cognitivas que se manifestaron fueron la TC4 y la TC5; la primera, *la imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse momentos antes* se relevó en la operación *188 – 206* = + *12* por un error de procedimiento, al utilizar el algoritmo *200 – 188* = + *12*, en lugar de los números indicados; y al reactivo *140 – 156* = + *5* se dio un resultado erróneo, pues se confundió el 6 con el 5 y se desatendió la resta de las decenas.

La segunda, *lecturas hechas en estratos de lenguaje que no permitían resolver la situación problemática,* se develó mediante un error de signo para la operación *496 – 403* = – *93*. La Figura 3.24 muestra respuestas con los errores descritos.

Las siguientes empresas manifestaron sus ingresos y gastos durante el pasado mes de diciembre. Las cifras están dadas en miles de pesos.

Nombre	Ingresos	Gastos	Pérdida o Ganancia
El Águila	78	59	+11
Fertimex	52	57	-5
La Única	140	156	+5
Turistar	496	403	-93
Transmex	188	206	+17
Grupo Casa	457	472	+15

496
403
93

206
188
18

Figura 3.24. **Presencia de la TC4 y la TC5 en el ítem 2 de ganancias/pérdidas.**

El ítem 3 solicitaba el simétrico de cada uno de tres números, uno positivo que obtuvo 13 respuestas correctas y dos que incluían una referencia negativa con 11 respuestas correctas; el sentido intermedio a identificar era el relativo y se identificó a la TC5 por un error de signo (véase la Figura 3.25).

Aplicando el simétrico completa las siguientes proposiciones

Si −w = 2 entonces: w = −2

Si a = 9 entonces: −a = −9

Si −b = 7 entonces: b = −7

Si −h = 4 entonces: h = −4

Figura 3.25 **Presencia de la TC5 en el ítem de simétricos.**

El ítem 4 solicitó el valor absoluto de cada uno de tres números, dos negativos para los que se obtuvieron 16 respuestas correctas y uno positivo que obtuvo 10 respuestas correctas; el sentido intermedio era el signado y la tendencia cognitiva expresada fue la TC3 al intentar dotar de sentido a una operación realizada (véase la Figura 3.26).

4. Anota el valor absoluto

175
+175
350

|-11| = 11 |-18| = 18 |+175| = 350 |-47| = 47

Figura 3.26 **Presencia de TC3 en respuestas al ítem de valor absoluto.**

El ítem 5 del cuestionario CC, solicitó ordenar de menor a mayor cuatro series de números enteros. Se obtuvieron 15 respuestas correctas en promedio; el sentido intermedio implicado era el signado y la tendencia cognitiva que se logró entrever fue la TC3 (véase el apartado 2.4.2) para ordenar los números de cada secuencia dada en una sola serie, lo que provocó algunas omisiones y algunos números extra. En la Figura 3.27 se muestra esta tendencia.

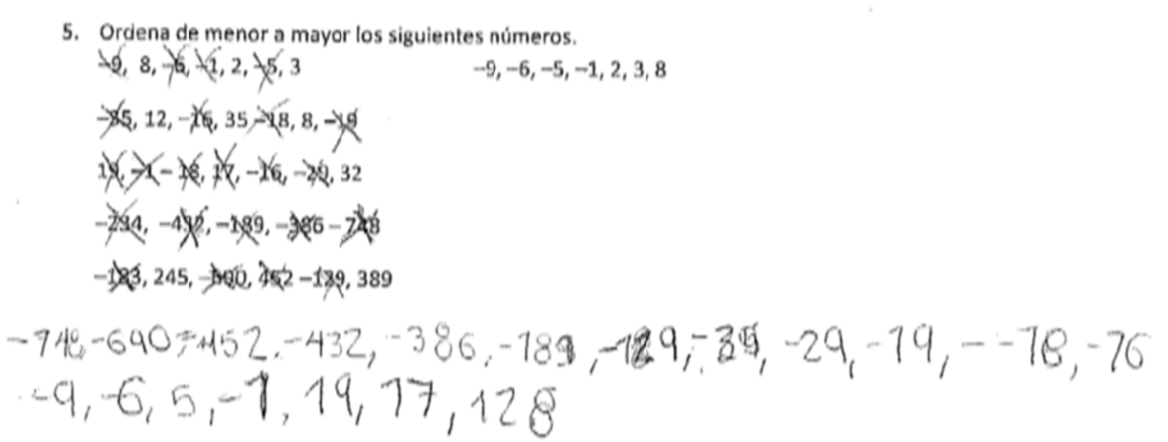


Figura 3.27 **Presencia de TC3 en el ítem de ordenamiento de series de números enteros.**

Un ejemplo de la TC6 *articulación de generalizaciones erróneas*, en el ítem 5 fue la omisión del signo negativo y el ordenamiento por el valor absoluto (véase la Figura 3.28).

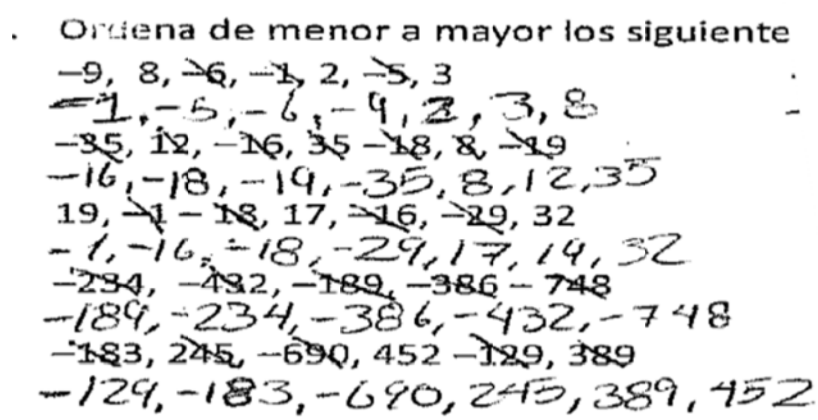


Figura 3.28 **Presencia de TC6 en orden de series de números enteros del ítem 5.**

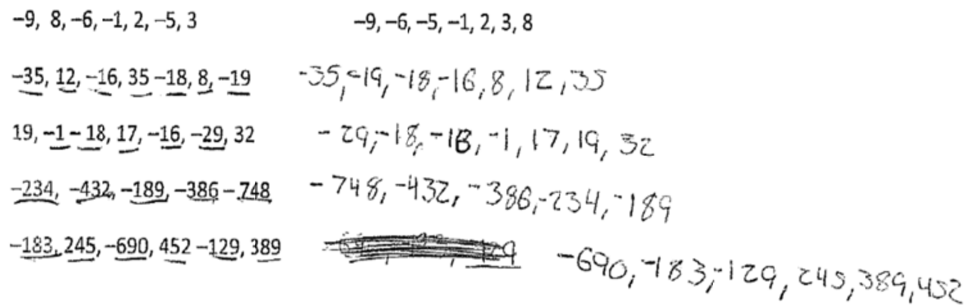


Figura 3.29 **Orden correcto de series de números enteros en el ítem 5.**

3.4.3 Resultados del análisis

En la aplicación del cuestionario CC luego de administrar la enseñanza con el modelo continuo, el desempeño del grupo (21 alumnos) fue el siguiente: el ítem 1 de estaturas fue el que más respuestas correctas obtuvo, con un promedio de 18; el siguiente ítem con buenos resultados fue el 5, de ordenar números enteros, con un promedio de 15 respuestas correctas; el tercer lugar lo ocupó el ítem 4, relativo al valor absoluto, con un promedio de 13 correctas; después estuvo el ítem 3, referido al simétrico, con 12 respuestas correctas en promedio; y por último el ítem 2, de pérdidas y/o ganancias, con un promedio de 10.7 respuestas correctas.

Los sentidos intermedios que se pusieron en juego en este cuestionario fueron el sustractivo en los ítems 2 y 4, *Pérdidas y Ganancias* y *valor absoluto*, respectivamente; el signado en los ítems 1 y 5, *estaturas* y *ordenar números enteros*, respectivamente; el relativo en el ítem 3, *simétricos*; y el aislado también en el ítem 1, *Pérdidas y Ganancias*.

Las tendencias cognitivas identificadas en las respuestas al cuestionario CC fueron TC2, en los *sentidos intermedios de los negativos*; la TC3, *el retorno a situaciones más concretas, cuando se presenta una situación de análisis:* en los ítems 4 de *valor absoluto* y 5 *ordenar números enteros*; la TC4, *la imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse momentos antes,* en los ítem 1 de *estaturas* y 2 de *ganancia o pérdida*; la TC5, *lecturas hechas en estratos de lenguaje que no permitían resolver la situación problemática,* en los ítems 2 y 3 de *simétricos* y la TC6, *articulación de generalizaciones erróneas*, en el ítem 5.

3.5 Enseñanza con el modelo discreto

El modelo discreto que se aplicó en la enseñanza al grupo fue elegido por su dinamismo y por el tema de las operaciones básicas con números enteros. Se trata de una actividad lúdica, como indicamos en el apartado 1.3.3, que se presenta en el texto de Waldegg, Villaseñor, García y Montes, (2008).

Esta actividad es un juego de mesa en el que participan cuatro o cinco jugadores o equipos. Se necesita un dado, el tablero que se muestra en la Figura 3.30 y una ficha por cada jugador.

SALIDA

1 x (+6)	2 x (+7)	3 x (+5)	4 x (+5)	5 x (+4)	6 ÷ (+1)	7 x (−2)	8 ÷ (−1)	9 x (+3)	10 x (−1)
11 ÷ (−1)	12 x (−2)	13 ÷ (+1)	14 x (−2)	15 x (−1)	16 ÷ (−1)	17 x (+3)	18 x (−2)	19 ÷ (−1)	20 x (−1)
21 ÷ (−1)	22 x (−3)	23 ÷ (−1)	24 x (−3)	25 x (−2)	26 ÷ (−1)	27 ÷ (−1)	28 x (−4)	29 x (+3)	30 x (−2)
31 ÷ (−1)	32 x (−4)	33 x (+6)	34 x (+7)	35 ÷ (−1)	36 x (−2)	37 x (−3)	38 x (−1)	39 x (−4)	40 x (+5)
41 x (−6)	42 x (−4)	43 ÷ (−1)	44 x (+5)	45 x (−4)	46 x (−3)	47 x (−1)	48 ÷ (−1)	49 x (+3)	50 x (−2)
51 x (+6)	52 x (+9)	53 x (−5)	54 x (−3)	55 x (+5)	56 x (−2)	57 x (+8)	58 x (−1)	59 x (−4)	60 x (+7)
61 x (−2)	62 ÷ (−1)	63 x (−4)	64 x (−6)	65 x (−3)	66 x (+7)	67 x (−1)	68 x (+7)	69 x (−5)	70 ÷ (−1)
71 x (−5)	72 x (+8)	73 x (−3)	74 x (−1)	75 x (+4)	76 ÷ (−1)	77 x (−6)	78 x (−4)	79 x (−3)	80 x (−1)
81 x (−4)	82 ÷ (−1)	83 ÷ (−1)	84 x (−5)	85 ÷ (−1)	86 x (+4)	87 x (−4)	88 ÷ (−1)	89 x (−5)	90 x (−2)
91 x (−3)	92 x (−2)	93 x (−3)	94 x (−4)	95 x (+4)	96 ÷ (−1)	97 x (−2)	98 x (−5)	99 x (−3)	100 x (−4)

META

Figura 3.30 **Tablero de la actividad lúdica.**

3.5.1. Descripción del modelo lúdico

Como muestra la Figura 3.30, el tablero de la actividad lúdica es una cuadrícula de 10 x 10 casillas, con una inscripción de "salida" en la parte superior de la tabla y otra de "meta" en la parte inferior.

Cada una de las casillas que compone el tablero tiene dos etiquetas, una con un numeral consecutivo, ubicado en el extremo superior izquierdo y que indica el número de casilla correspondiente y otra etiqueta que señala la operación a realizar que puede ser una multiplicación o una división y el factor por el que se debe realizar dicha operación, que puede ser un número positivo del 1 al 9 o uno negativo del – 1 al – 6.

Las instrucciones del juego son las siguientes:

1. En la primera jugada, cada jugador, lanza una vez el dado y avanza el número de casillas que indique la cantidad de puntos que aparecen en la cara superior.
2. En los siguientes turnos, cada jugador lanza el dado, al número que obtenga le aplica la operación indicada en la etiqueta de la casilla en que se encuentre, y se mueve los lugares que indique el resultado obtenido. Ahí espera nuevamente su turno.
3. Cuando la etiqueta contiene un signo *positivo*, el jugador se mueve en el sentido en el que aumenta la numeración (positivo); si es *negativo*, cambiará el sentido del movimiento y se moverá en el sentido en el que disminuye la numeración (negativo).
4. Gana el jugador que primero llegue a la meta; el jugador que obtenga un resultado menor a 1, regresará a la salida, donde se ubican "imaginariamente" todos los negativos y volverá a empezar

3.5.2 Resultados de la actividad

Para la realización de esta actividad, el grupo (20 alumnos), se dividió en cuatro equipos (cinco alumnos por cada uno). Por efectos del tiempo, se decidió que sólo se efectuaran ocho lanzamientos del dado por equipo.

Dado que la mecánica del juego exigía que los alumnos dieran la respuesta correcta para avanzar, se solicitó que registraran en papel, en forma individual, las operaciones realizadas para cambiar de una casilla a otra. En la Tabla 3.5 se registraron los resultados obtenidos en la aplicación de la actividad lúdica.

Tabla 3.7 **Tipos de desempeños y sus frecuencias durante el desarrollo de la actividad lúdica con el medio discreto. Grupo 1º Secundaria**

Lanzamiento / **Operación**	2o	3o	4o	5o	6o	7o	8o
Correctas	11	10	12	10	9	10	8
Incorrectas	1	2		1			
Omisión	8	8	8	9	11	10	12

3.5.3. Análisis de los desempeños

Durante el desarrollo de la actividad, las respuestas consideradas *correctas* correspondieron a las soluciones que los alumnos dieron tanto en forma oral como por escrito y que efectivamente respondieran a los lanzamientos realizados, mientras que las *respuestas incorrectas* fueron las que, en primera instancia, eran erróneas y se debían modificar para avanzar, o que en forma oral fueron correctas pero su registro escrito fue incompleto.

La *omisión* se anotó si se dio una respuesta correcta, sólo en forma oral pero se, omitió su registro en papel, lo cual se indicó en las instrucciones iniciales para desarrollar la actividad (véase el apartado 3.5.1).

De los sentidos intermedios de los números negativos que se pretendió que usaran los alumnos, el sustractivo y el signado los utilizaron siempre que la casilla en que estuvieran contuviera una etiqueta con una operación que implicara un número negativo, mientras que el sentido aislado lo usaron sólo cuando el resultado era menor a 1, lo cual requería regresar a la salida.

Para iniciar el juego, cada equipo efectuó su primer lanzamiento y colocó su ficha en la casilla que le correspondía según los puntos marcados en el dado: el equipo 1 comenzó en la casilla 5, los equipos 2 y 4 compartieron la casilla 3, mientras que el equipo 3 se colocó en la casilla 4.

El segundo lanzamiento del dado lo comenzó el equipo 1 sacando tres puntos, los cuales multiplicó por el factor **(+ 4)** de la etiqueta en la casilla número cinco, obtuvo 12 y los sumó al número cinco de la casilla, lo que dio 17, que indicó el número de la casilla en la que tenía que colocar su ficha y esperar el siguiente turno. El equipo 2 sacó cinco puntos en su lanzamiento del dado, los cuales tuvo que multiplicar por el factor **(+5)** de la etiqueta, logrando 25, que al sumar el número de la casilla en la que se encontraba dio 28, número de la casilla a la que trasladaron su ficha para esperar la siguiente vuelta. Similarmente los equipos tres y cuatro realizaron sus lanzamientos y, después de efectuar las multiplicaciones y adiciones correspondientes llegaron a las casillas 29 y 8, respectivamente.

Los equipos fueron avanzando sin mayor complicación que realizar las operaciones que se indicaban en el tablero; sin embargo, en el tercer lanzamiento del equipo 2 cayó el número uno, que tenían que multiplicar por el factor **(– 4)** de la etiqueta, dando por resultado parcial *cuatro negativo* que sumado al 28 del número de su casilla, los retrasó al 24, lo que les causó disgusto y más cuando vieron que los equipos 1 y 3 avanzaron a las casillas 23 y 44, respectivamente. Sin embargo, se sintieron un poco mejor cuando el equipo 4 también tuvo que retroceder, en su caso a la casilla 7.

A partir del siguiente lanzamiento todos los equipos comenzaron a fijarse en el signo que tenía la casilla en que se encontraban, si se trataba de un número positivo deseaban que el dado arrojara un número grande (del 3 al 6) pero si era negativo preferían números pequeños. Al preguntarles la razón de ese deseo uno de los integrantes de un equipo respondió:

> "Si el signo es positivo voy a avanzar hacia la meta, y me conviene un número grande; pero si es negativo retrocedo, entre más grande sea el número más me alejo de la meta y si es pequeño retrocedo poco".

Esto pudo deberse a una manifestación parcial de la TC1, que indica: *la presencia de un proceso de abreviación de los textos concretos para poder producir reglas sintácticas nuevas*. Se dice que es parcial, puesto que no llegaron a realizar una abreviación, sólo identificaron ciertas reglas.

Una situación especial se presentó en el cuarto lanzamiento del equipo cuatro, que se encontraba ubicado en la casilla 7 con la etiqueta ***x (– 6)***. Al lanzar el dado obtuvieron dos, que al multiplicarlo como indicaba la etiqueta obtuvieron 12 negativo que sumado al número 7 de su casilla resultó cinco negativo, número concentrado en la "salida" a donde tuvo que regresar la ficha de este equipo.

Durante la aplicación de este modelo lúdico, la primera operación que tenían que realizar los alumnos después de lanzar el dado, que podía ser la multiplicación o la división que indicara la etiqueta de la casilla, la hacían mentalmente y sin dificultad, salvo si no recordaban las tablas de multiplicar; sin embargo, cuando se trataba de la sumar o restar el número de la casilla que ocupaban casi siempre recurrían a utilizar los dedos o la efectuaban con lápiz y papel, llegando a cometer errores al realizar la resta (véase la Figura 3.31).

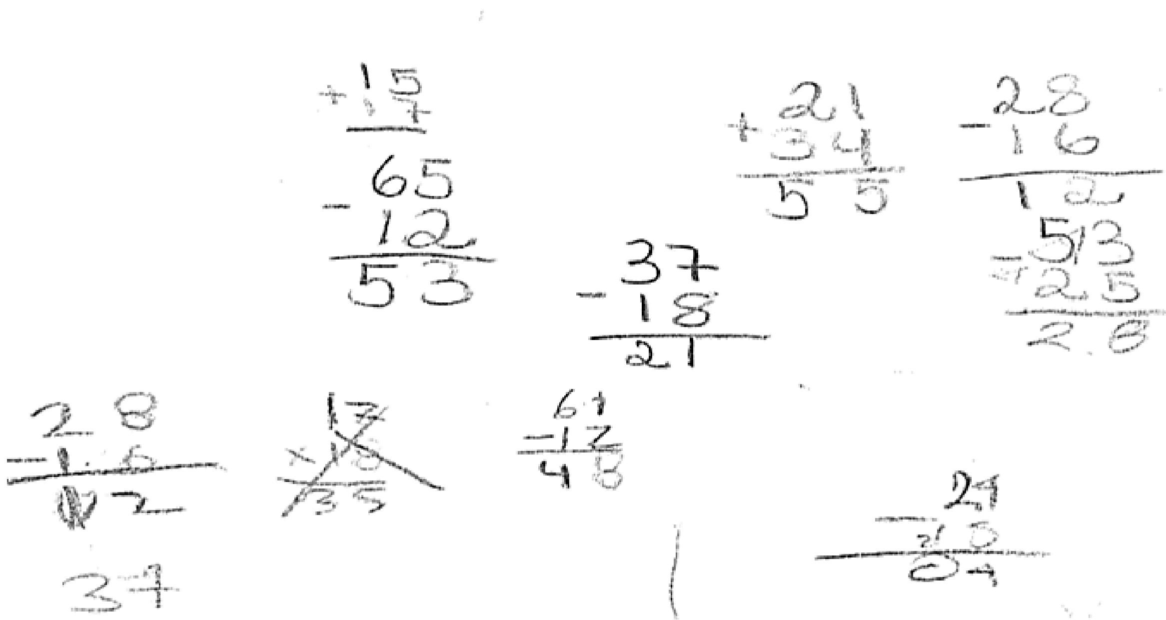


Figura 3.31 **Operaciones realizadas en modelo lúdico.**

También nos percatamos de la presencia de la TC4, que señala *la imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse momentos antes*, como lo muestran las operaciones que anotó un estudiante (véase la Figura 3.32)

Figura 3.32 **Presencia de TC4 en el desarrollo de la actividad lúdica.**

Primero equivocó las cantidades escribió *29 – 15 = 14* en lugar de *24 – 15 = ;* después las corrigió pero cometió errores de procedimiento, pues si bien al *4* de las unidades del minuendo agregó una de sus dos decenas para restar a *14* y obtener 9, siguió considerando las dos decenas del minuendo en lugar de una, olvidando que le "prestó" a las unidades, lo cual provocó un resultado erróneo, el cual fue evidente al tratar de comprobar la diferencia sumándole el sustraendo para obtener el minuendo correspondiente. Al final efectuó la resta solicitada de manera correcta, pues de otra forma no podía avanzar a la nueva casilla.

Una falta de atención fue la omisión del registro de las operaciones en las hojas que para ese fin se dieron al inicio de la aplicación del modelo lúdico. Los integrantes de uno de los equipos se limitaron a responder en forma oral y cuando se les solicitó el registro lo dejaron incompleto. Eso pudo deberse, en parte, a la presencia de la TC3, *el retorno a situaciones más concretas, cuando se presenta una situación de análisis* (véase la Figura 3.33).

# de tirada	Puntos en el dado	Operación realizada	Casilla a la que llega
1	3	Ninguna	
2	6	5x5=25	
3	7		
4	6		
5	1		
6			
7			41
8			

Figura 3.33 **Ejemplo de TC3 en modelo lúdico.**

# de tirada	Puntos en el dado	Operación realizada	Casilla a la que llega
1	5	Ninguna	5
2	3	3x4+5=17	17
3	2	2x3+17	23
4	2	2÷-1=-2, 23-2=	21
5	6	6÷-1=-6, 21-6=	15
6	6	6x-1=-6, 15-6=	9
7	5	5x3+9=	24
8	1	1x-3=-3, 24 -3=	21
9	2	2÷-1=-2, 21-2=	19

Figura 3.34 **Ejemplo de registro completo en modelo lúdico.**

3.5.4 Resultados del análisis

Durante la aplicación del modelo lúdico el grupo tuvo una disposición distinta a la observada durante la aplicación de los cuestionarios CS y CC luego de la administración de los modelos sintáctico y continuo, lo cual también se reflejó en los resultados obtenidos.

Los sentidos intermedios de los números negativos que se utilizaron en la aplicación de esta actividad fueron el sustractivo al realizar las restas correspondientes, el signado al realizar las multiplicaciones indicadas en la etiqueta de las casillas que tenían signo negativo y, en menor medida, el aislado cuando tenían que volver a la "salida" por efectos de una suma entre números enteros.

Las tendencias cognitivas que se manifestaron en la aplicación de este modelo fueron la TC1, *la presencia de un proceso de abreviación de los textos concretos para poder producir reglas sintácticas nuevas;* la TC3, *el retorno a situaciones más concretas, cuando se presenta una situación de análisis;* y la TC4, *la imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse momentos antes.*

3.6 Resultados generales

Al comenzar el ciclo escolar y con ello la observación del grupo, se aplicó a los alumnos el cuestionario diagnóstico CD, en que prevaleció la presencia de la TC8; con respecto a la TC2 identificaron correctamente el sentido intermedio signado, mientras que los otros sentidos de los números negativos eran poco utilizados, como en el caso del sustractivo y el relativo. Los alumnos mostraron un conocimiento casi nulo del tema de la suma de enteros.

Conforme fue transcurriendo el ciclo escolar y se procedió a impartir la enseñanza de números enteros con los modelos sintáctico y continuo y se aplicaron los cuestionarios CS y CC, respectivamente, y se desarrolló la actividad lúdica, se notó un desarrollo en la transición de la suma de los números naturales hacia la suma de enteros.

La evolución que manifestó el grupo en observación fue desde un “no sé” o “no entiendo” en la mayoría de las respuestas al cuestionario CD, hasta la anticipación de las respuestas “¡uno!, ¡uno!” cuando se ocupaba una casilla con signo negativo en la actividad lúdica.

Conjugamos tres modelos de enseñanza a los estudiantes de 1er grado de secundaria, del tema de operaciones con cambio de signo, de manera que fuera significativa para ellos, par que aplicaran su propio análisis y razonamiento matemático.

El siguiente capítulo se refiere al análisis de las entrevistas clínicas a dos de las estudiantes de este grupo, con la finalidad de confirmar o desechar la presencia de las tendencias cognitivas que se reportaron en los resultados de los instrumentos aplicados.

Capítulo 4

Entrevistas clínicas

En el Capítulo 3 se introdujeron la organización del proceso de investigación y los instrumentos de recopilación de datos para guiar la observación. Específicamente ahí dimos cuenta de los instrumentos utilizados para informar acerca de los resultados del recurso a los modelos de enseñanza que se aplicaron y se presentaron los resultados del análisis de los datos obtenidos con ellos, lo que nos permitió identificar algunas tendencias cognitivas manifestadas en las respuestas dadas por los alumnos.

En este capítulo se presentan los resultados del análisis de las entrevistas efectuadas a dos de las estudiantes del grupo, las cuales se aplicaron y videograbaron en las instalaciones del mismo instituto en el que se realizó la investigación.

4.1 Selección de alumnos

Las alumnas elegidas, A_1 y A_2 asistieron regularmente al curso y tuvimos la ocasión de observar su desempeño en la aplicación de los diferentes instrumentos y modelos de enseñanza utilizados. En el cuestionario diagnóstico CD, A_1 obtuvo cinco de 15 respuestas correctas y A_2 sólo dos de 15; en el cuestionario CS, A_1 obtuvo 15 y A_2 obtuvo las 20 respuestas correctas; en el cuestionario CC obtuvieron 16 y 15 de 20 respuestas correctas, respectivamente, por último, durante la aplicación del modelo lúdico las dos estudiantes registraron adecuadamente los movimientos realizados, y cuando se les preguntaba en clase cómo explicarían su respuesta a operaciones que implicaban el uso de números negativos, recurrían a diferentes técnicas, razón por la que se eligió entrevistarlas.

En el cuestionario diagnóstico CD (véase la sección 3.1), tanto A_1 como A_2 presentaron la tendencia **TC8** en la mayoría de sus respuestas. En el cuestionario CS, del modelo sintáctico, A_1 tuvo dificultades al realizar las sumas con enteros, mientras que A_2 sólo mostró la **TC4** al efectuar una de las sumas: para – *34 + 28 = -14,* restó *8 – 4 = 4* en lugar de utilizar el algoritmo *-14 + 8 = -6.* En el cuestionario CC, del modelo continuo, las dos alumnas tuvieron buen desempeño, aunque A_2 cometió errores en signos. En la actividad con el medio lúdico obtuvieron excelentes resultados.

4.2 Protocolo de la entrevista

El guión de entrevista consistió en un cuestionario CE (véase la Figura 3.2) que fue contestado al momento de la aplicación de esta técnica en forma semiestructurada. El objetivo general de las entrevistas fue confrontar los resultados obtenidos de los cuestionarios CD, CS y CC, presentados en el Capítulo 3, y profundizar en la posible presencia de las tendencias cognitivas sospechadas por los desempeños exhibidos con esos instrumentos.

El cuestionario guía CE constó de 44 reactivos, distribuidos en siete ítems, que tenían los objetivos particulares que se reportan en la Tabla 4.1.

***Tabla 4.8*. Objetivos particulares del protocolo de entrevista e ítems del cuestionario CE.**

Ítem / número de reactivos	Objetivo particular	Ejemplo
1. Anotar signo (10)	Hacer uso del sentido intermedio signado de los números negativos.	La temperatura es de 3 grados bajo cero. **– 3**
2. Calcular sumas con números enteros (5)	Usar los sentidos: sustractivo, signado y aislado al sumar enteros.	(+12) + (– 17) =
3. Calcular sumas con enteros con recurso a la recta numérica (10)	Emplear sentidos signado, sustractivo y aislado, con ayuda de recta numérica, para dar respuesta a sumas con enteros.	(+20) + (– 10) =
4. Representar y ordenar en la recta numérica (5)	Utilizar la recta numérica y el sentido relativo de los números negativos al ubicar números enteros.	–(– 5)
5. Anotar número faltante (5)	Usar los sentidos: sustractivo, signado y aislado al solucionar restas con enteros.	(+7) – (–) = 8
6. Solucionar problemas (3)	Emplear la recta numérica contextualizada al	Una ranita salió de un pozo de 20m de profundidad, si en cada intento subía 5m y bajaba

		solucionar problemas relacionados con suma de números enteros.	4m, ¿cuántos intentos necesitó para salir del pozo?
7. Responder preguntas	(6)	Ocupar los conceptos y elementos básicos para resolver sumas algebraicas.	¿Cómo realizas una suma de un número negativo y un número positivo?

4.3 Análisis de las entrevistas

El cuestionario CE de la entrevista se fue resolviendo durante el desarrollo de ésta, la cual se video grabó para tener acceso a la mayor cantidad de datos posible. El criterio de análisis fue el de las 11 Tendencias Cognitivas descritas por Filloy (1999) en los aspectos teóricos del álgebra educativa (véanse en el apartado 2.4.2); de ellas se infiere o no un uso competente de SMS más abstractos.

Las entrevistas tuvieron la codificación siguiente:

Ejercicio resuelto correctamente ©

Ejercicio no resuelto (N)

Ejercicio resuelto incorrectamente:

a) error en signo (Es)   b) error numérico (En)

c) error signo y número (Et)   d) error en recta (Er)

Usos de los números negativos:

Sustractivo ***Ss***;   Signado: ***Sg***;

Relativo: ***Rl***;   Aislado: ***As***

En las transcripciones de los pasajes de la entrevista seleccionados, que presentamos como evidencia y parte de nuestra argumentación, “I” denota a la investigadora y A_1 o A_2 a la alumna entrevistada.

4.3.1 Entrevista clínica a A_1

En general, de los 44 reactivos del cuestionario CE, A_1 respondió correctamente a 42 de ellos, con algunos errores de dicción, es decir, cambió los números al enunciar las cantidades a utilizar; sin embargo, realizó las operaciones correctamente esto en los primeros reactivos y cometió un error en la solución de los problemas de aplicación del ítem 6.

En el ítem 1 se solicitó anotar el signo a los números indicados; la estudiante contestó correctamente sus reactivos, mientras que se manifestó la **TC3**, *el retorno a situaciones más concretas, cuando se presenta una situación de análisis,* pues hizo énfasis en comparar “bajo” con los negativos. También se manifestó la **TC2**, *la dotación de sentidos intermedios,* al signado, y mostró confusión al comparar los positivos y negativos con ahorros y deudas, cuando se le solicitó que explicara sus respuestas.

13:08:14	6	**I**	¿Por qué es negativo el de la temperatura baja?
		A_1	Porque bueno, dice que “son tres grados **bajo cero**” o sea es negativo porque… el cero, cómo es este… dice “bajo” va bajando del cero y se convierte en negativo, porque del lado izquierdo son los negativos y del lado derecho son los positivos.

Pasaje 4.1 **A_1 Presencia de TC3 al anotar signos.**

En el Pasaje 4.1 al solicitarle a la entrevistada que explicara su respuesta, asoció el término “bajo” con los números negativos.

13:10:34	21	**I**	Básicamente ¿cómo me podrías explicar cuál es la diferencia entre números positivos y negativos?
		A_1	Pues que uno es mayor que el otro, porque… bueno, también la diferencia es que uno es… porque del lado izquierdo del cero son negativos, son menores y del lado derecho son positivos, son mayores, porque… bueno, la cantidad es mayor. Los positivos es como si tuvieras una deuda.
13:11:02	22	**I**	¿Los positivos como si tuvieras una deuda?
		A_1	Más o menos, porque por ejemplo tú debes 500 pesos, no se puede hacer positivo, porque ese dinero no te lo quedas tú.
13:11:13	23	**I**	¿Entonces es negativo, más que positivo? ¿La deuda sería negativa o la deuda sería positiva?
		A_1	La deuda sería negativa.
13:11:21	24	**I**	¿Y si tú ahorraste, sería positivo o negativo?
		A_1	Sería positivo.

Pasaje 4.2 **A_1 Confusión en explicación diferencia entre positivo y negativo.**

El ítem 2 solicitó calcular sumas del tipo $a + b$, donde a y $b \in Z$ A_1 contestó correctamente los reactivos del ítem y usó los sentidos sustractivo, signado y aislado de los números negativos; cometió errores de dicción, en los signos y en números, durante el procedimiento de solución de los reactivos y las siguientes tendencias cognitivas: la **TC3**, equivocando los signos de los números; la **TC4**, *la imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse momentos antes,* pues solucionó erróneamente algunos reactivos, como por ejemplo en: *"Sería… restar 67 menos 98, porque así va la operación. Aquí (señalando en su hoja) serían…ocho"* aplicó sin más el algoritmo de la reta conservando el orden proferido (minuendo y sustraendo, respectivamente) y a 17 unidades de la primera cantidad restó… de la segunda, cuando la resta correcta era 8 – 7, en un tipo de operación en la que anteriormente no había fallado y que durante el transcurso de la entrevista corrigió; la **TC7**, *la presencia de mecanismos apelativos que centran el desencadenamiento de procesos erróneos de resolución,* pues cometió errores de dicción, como al decir *"17 menos 98"* cuando las cantidades y la operación eran *67 – 98* =___; y al realizar los cálculos mentalmente y fallar en su respuesta: *"56 más 87… Son ciento cuarentaaa y… ¿dos?"*. Cuando se le pidió una explicación, recurrió a la recta numérica, aunque el reactivo no lo solicitó. Aquí un extracto de esa explicación:

13:12:02 29 **A_1** Son 12 positivo más 17 negativos. El 12 está en el cero, va del lado derecho, bueno, el 17 es negativo y el 12 es positivo. Primero se tiene que poner el mayor, que es más 12, y después tenemos que ir metiendo menos 17, 17 es menor, porque entonces, le va quitando al 12, pero lo va recorriendo hacia la izquierda, porque lo que hace es como si fuese la deuda, y por ejemplo, nada más traía 12 pesos, pero los 17 ya es la deuda, y apenas se cobra. Se resta 12 menos 17, pero como el 17 es mayor que el 12, se vuelve negativo, porque al restarle 12 menos 17, aunque es positivo, pero como es mayor, se le va quitando, entonces, sería menos 5.

Pasaje 4.3 **A_1 Uso de recta numérica en explicación.**

En el caso del Pasaje 4.3 la estudiante se refirió a la recta numérica para realizar la explicación de la operación *(+ 12) + (– 17) =;* en esta explicación combinó la recta numérica y los conceptos de "deuda" –"negativo".

13:17:10	55	**A_1**	Luego es menos 78 más 45, son…(realiza la operación en su hoja), bueno, aquí esta operación se vuelve, bueno se vuelve una resta el total, entonces serían 8 menos 5, son 3, después sería 7 menos 4, serían 3, 33 pero esto se vuelve negativo, porque si el 78 es menos y 45 es más, es lo mismo, porque si 45 se lo… el menos 78 es negativo y tú le quieres sumar 45, pero como éste (señala el 78 negativo) tiene mayor cantidad no le puede alcanzar a, bueno está el cero, no le puede alcanzar a convertirse en positivo, así que, bueno, sería menos 33; es como si tú tuvieras éste (señalando el 45), se lo estuvieras quitando, porque es positivo, entonces serían menos 33.

Pasaje 4.4 **A_1 Presencia de la TC11 al realizar sumas de números enteros.**

En la expresión: "aquí esta operación se vuelve…una resta el total", se advirtió la presencia de la **TC11**, *la necesidad de dotar de sentido a las redes de acciones cada vez más abstractas hasta convertirse en operaciones,* pues el ejercicio solicitó realizar una suma y la estudiante "la convirtió" en una resta.

En el ítem 3 se solicitó calcular sumas haciendo uso de la recta numérica. La estudiante omitió el uso binario (signo de la operación de adición o sustracción) utilizó sólo el unario (signo asociado al número natural) y mostró una dotación apropiada de los sentidos signado y aislado. Se insinuó también la **TC11**.

13:27:54	77	**A_1**	Bueno, también en el de éste, no hacemos tanto caso al signo de en medio, porque como éstos ya tienen su signo *(– 18) + (+12) =* ; según es lo que tienes que hacer, casi no es necesario tener éste, (señalando el signo de adición), pero bueno…
13:28:13	78	**I**	¿Por qué?
		A_1	Porque este signo, por ejemplo, si, sí funcionará, pero en cuanto no tuviera los signos y no tuviera los paréntesis, con esto (señalando el signo unario del número (– 18) , si lo tuviera, todo sería positivo o negativo, porque si éste es menos 18, ahí ya estás marcando que es menor y éste es positivo (+12), así que gracias a este signo es como haces la operación, a éste no le haces caso (señalando el signo binario de la operación), casi, bueno ya ahí.

Serían, mmmh, positivo 12, bueno, le quitamos menos 18, pero como menos 18 es mayor, pero es negativo, así que al 12 le restamos 18, entonces, sería, menos 6.

Pasaje 4.5 **A_1 Presencia de TC11 en solución de sumas con uso de recta numérica**

Cada vez que tenía que explicar sus respuestas, recurría a la recta numérica y en esta ocasión no fue la excepción, además de que el reactivo así lo requirió; por otra parte, su conversión de operaciones fue correcta.

El ítem 4 pedía representar y ordenar sobre la recta numérica algunos números. Se usó el sentido relativo de los negativos. La estudiante respondió correctamente los reactivos que componían el ítem, mientras que mostró dificultades con los signos al intentar colocar – (– 5). Se presentó la **TC10**, *la generación de errores sintácticos debido a la producción de códigos personales intermedios, para dotar de sentido a las acciones concretas intermedias, y* también la **TC11**.

13:30:39	85	**A_1**	[…]Y aquí es menos, menos 5, sería lo mismo, menos 5.
13:31:12	86	**I**	¿Y el signo de afuera?
		A_1	Es que es ahí donde no le entiendo… o sea, sería menos 5, le restas menos 5, sería menos 10 … sí ¿no?

Pasaje 4.6 **A_1 Presencia de TC10 al ubicar números enteros en recta numérica.**

En el pasaje 4.6, la estudiante cometió el error de restarle al *– 5 menos 5*, debido a la duda que manifestó durante la contestación al reactivo, con lo que se presume la presencia de la **TC10** en esta parte del ítem, debido a los códigos personales que ella tenía.

13:31:26	87	**I**	No… el signo de fuera del paréntesis, lo que hace es afectar, todo lo que está adentro, y lo cambia…
		A_1	¿Las reglas de los signos?
13:31:38	88	**I**	Algo parecido
		A_1	Entonces, menos y menos, se convierte en positivo. Entonces, como aquí tenemos el menos 5, este signo, (señalando el signo fuera del paréntesis) lo que hace es que cambia de signo, es la regla de los signos, porque menos y menos más y más y más, se vuelve positivo.

Pasaje 4.7 **A_1 Presencia de TC11 al ubicar números enteros en recta numérica.**

La alumna aplicó las "leyes de los signos" de la multiplicación al tratar de dar sentido a la expresión – *(– 5)*, para ubicarla en la recta numérica que fue la indicación del reactivo en cuestión.

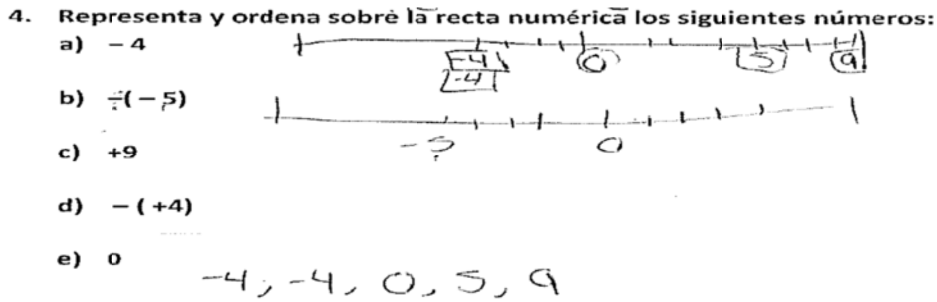


Figura 4.35 **Representación de números enteros durante entrevista.**

El ítem 5 solicitó anotar el número faltante en cinco operaciones. La alumna presentó dudas con el primer reactivo, pero después mostró la **TC10**. Se usaron los sentidos intermedios: sustractivo, signado y aislado de los números negativos.

13:35:23 96 **I** El siguiente apartado, ¿cuáles son las instrucciones?

A_1 **Anota el número que falta:** Sería para la a, la que ahorita está vacía, sería menos, menos 2 es igual a 5. O sea, sería, según, es que… este… no sé cómo explicarlo… sería 7… porque bueno, el 7 como es mayor, es como, por ejemplo, aquí, te salió 5, pero como es positivo, y éste es negativo, lo sumas.

13:36:10 98 **I** ¿7 menos 2 negativo son 5?

A_1 Pero no según el… entonces, como menos y menos, se vuelve positivo, entonces, serían… 3.

13:36:39 99 **I** ¿Por qué?

A_1 Porque como el 3 es positivo, pero éstos, (señala los signos dentro y fuera del paréntesis), bueno, lo interviene, igual es lo mismo de la regla de los signos, menos y menos se vuelve positivo, así que éste se vuelve positivo (señalando el signo binario de la operación), entonces sería 3 más menos 2… no sería 3 más 2, porque este signo, ya desaparece (refiriéndose al signo unario del 2), porque es como si este signo (de la operación) fuera de éste (del número).

Pasaje 4.8 **A_1 Presencia de TC10 y TC11 al colocar número faltante.**

La estudiante cometió un error al realizar la resta de *(   ) – (– 2) = 5*; ya que sólo consideró el signo unario del número, omitiendo el signo binario de la operación solicitada, por lo que se notó la representación de la **TC10** en la ejecución de esta operación. Al final aplicó la ley de los signos de la multiplicación para justificar el cambio de signos realizado, lo cual nos sugirió la presencia de la **TC11**.

El ítem 6 (véase la Tabla 4.1) requería la solución de tres problemas de aplicación, para la que se usaran todos los sentidos intermedios de los números negativos. La estudiante contestó correctamente el primer reactivo referente a un elevador, mientras que presentó errores en los signos en el proceso de solución del segundo, de temperaturas; y del tercer reactivo se identificó la **TC7**, *la presencia de mecanismos apelativos que centran el desencadenamiento de procesos erróneos de resolución.*

13:45:41	124	**A_1**	[Lee en voz alta el enunciado] **Una ranita salió de un pozo de 20m de profundidad, si en cada intento subía 5m y bajaba 4m, ¿cuántos intentos necesitó para salir del pozo?** Entonces, primero aquí, tiene los 20 del pozo, ¿no? Que era lo que tenía de profundidad, pero en cada intento, subía 5 y bajaba 4, se quedaba en uno, ¿cuántos intentos necesitó para salir? Pero como sólo tienes uno… y sólo son 20 metros, intentó 20 veces, porque se multiplica 1 por 20 entonces, sería 20, hizo 20 intentos para poder salir del pozo.
13:46:48	125	**I**	¿Cómo se lo explicarías a un niño pequeño?
		A_1	Este, bueno, que primero esto del pozo, lo dejaría a parte, primero tendría que sacar los intentos que hizo. Primero, si tiene 5 y luego, como es positivo, al bajar que ahí son menos 4, entonces, le restas 5m menos 4m y ahí ya te sale, la cantidad que él estuvo haciendo cuando estaba como en los intentos.
13:47:34	126	**I**	Ok, eso ¿cuánto te da? Uno, ok, eso fue el primer día.
		A_1	Bueno, según los intentos, intentó 20 intentos para poder salir del pozo…
13:47:59	127	**I**	¿Segura?
		A_1	Sí.
			Ok, gracias Diana,

Pasaje 4.9 **A_1 Presencia de TC7 en problemas de aplicación**

En el Pasaje 4.9 reconocimos la **TC7**. Si bien A1 consideró los datos que le dio el problema, no se percató de que el último día no tenía que retroceder, por lo que se limitó a realizar una multiplicación del resultado obtenido al inicio del problema, sin llegar a un análisis más profundo de la situación que se planteó.

El ítem 7, último, planteó seis preguntas (cada una fue un reactivo), a las que, la estudiante contestó correctamente, mientras que cometió errores en el uso binario de los signos con la **TC3**.

13:50:56	141	**A_1**	**¿Cómo realizas una suma de números negativos?** Sería menos 5 menos menos 5, sería menos diez, porque en éste, es lo mismo, pero lo que cambia es el signo, a ése, pero le sumas.

Pasaje 4.10 **A_1 Presencia de TC3 a preguntas de conceptos básicos**

Cuando dio un ejemplo de la pregunta *"¿Cómo realizas una suma de números negativos?"* dijo menos 5 menos menos 5 sería menos 10, lo que en signos sería: $(-5)-(-5)=-10$, lo cual evidentemente es incorrecto, aunque la idea que tenía era clara. Cometió el error de restar, en lugar de sumar, error en el uso del signo binario de la operación, lo cual fue ejemplo de la **TC3**.

13:51:20	142	**A_1**	**¿Cómo realizas una suma de un número negativo y un número positivo?** Bueno, yo diría, que también depende de cuál es la cantidad de positivos y de negativos.
13:51:30	143	**I**	Ok, explícalo con ejemplos.
		A_1	Este en positivos sería 7 y en negativo sería 8, primero tengo que tener el… puedes hacer la operación o una gráfica. Ahorita, voy a hacer una gráfica, aquí tienes 7, como es positivo va del lado derecho del cero, y éste es negativo, así que le restamos 7 menos 8, sería menos uno, porque le estás restando esta cantidad. Cómo esta cantidad es mayor y por ejemplo ésta es la deuda que tienes, ocho y sólo traes siete pesos, entonces le quedas debiendo un peso, así que queda del lado izquierdo, como es negativo, sería menos uno, o sea es la cantidad del peso**.**

Pasaje 4.11 **A_1 Presencia de TC11 a preguntas de conceptos básicos**

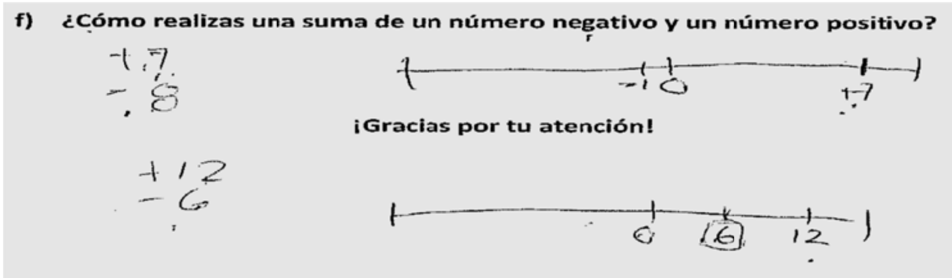


Figura 4.36 **Uso de recta numérica al realizar explicación de suma de enteros.**

Utiliza la recta numérica y el binomio deuda - negativo para dar la explicación solicitada.

En conclusión, A_1 usó de manera correcta los sentidos intermedios: sustractivo, signado, relativo y aislado, que describe Gallardo (2002; véase Capítulo 2, p. 20–21).

La entrevistada presentó las tendencias cognitivas siguientes:

- **TC3**, *el retorno a situaciones más concretas, cuando se presenta una situación de análisis,* en los reactivos del ítem uno, anotar los signos, al comparar el concepto "bajo" con negativo y en el dos, realizar sumas de enteros, al cometer errores en signo;
- **TC4**, *la imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse momentos antes,* en el ítem 2 (véase la Tabla 4.1) al realizar una resta en forma errónea;
- **TC7**, *la presencia de mecanismos apelativos que centran el desencadenamiento de procesos erróneos de resolución,* en el ítem 2, al cometer errores de dicción al solucionar las sumas solicitadas; y en el ítem 6, problemas de aplicación, al tener errores en el análisis de los datos;
- **TC10**, *la generación de errores sintácticos debido a la producción de códigos personales intermedios, para dotar de sentido a las acciones concretas intermedias,* en los reactivos del ítem 4, ubicar y ordenar números, al tomar el signo binario de – *(– 5)* como la indicación de la operación – *5 – 5 = – 10,* y en el ítem 5, anotar número faltante, al omitir el signo unario del número; y

- **TC11**, *la necesidad de dotar de sentido a las redes de acciones cada vez más abstractas hasta convertirse en operaciones*, en los ítems 2 y 3, al convertir sumas en restas y en los ítems 4 y 5 al aplicar la ley de los signos de multiplicación en las sumas efectuadas.

Esas tendencias, descritas por Filloy (1999), (véase el apartado 2.4.2), se identificaron en la transición de la suma aritmética a la algebraica en la entrevista a A_1.

Además, se notó una confusión en la explicación de los conceptos de positivos y negativos, al compararlos con deudas y ahorros.

4.3.2 Entrevista clínica de A_2

En general, a los 44 reactivos de los que constó el cuestionario CE aplicado a esta estudiante, ella respondió correctamente, aunque cometió algunos errores en los problemas de aplicación.

Al ítem 1, que solicitó anotar el signo a los números indicados, contestó correctamente sin embargo, se encontró que intercambiaba los términos "bajar" y "perder" y, a su vez, los interpretaba como negativos, lo que nos condujo a reconocer la **TC3**, *el retorno a situaciones más concretas, cuando se presenta una situación de análisis,* y la **TC2**, *la dotación de sentidos intermedios,* estuvo presente en su uso del sentido relativo. Indicó "menos" para los negativos y "más" para los positivos, cuando debía emplear directamente los términos "positivo" y "negativo".

7:36:53	6	**A_2**	María Esther bajó 7 kilos de peso
7:36:58	7	**I**	¿Qué signo tiene que llevar?
		A_2	Menos 7
7:37:02	8	**I**	¿Por qué?
		A_2	Porque nos está diciendo que "bajó", que sería como perder.

Pasaje 4.12 **A_2 Presencia de TC3 al anotar signos.**

El ítem 2 solicitó solucionar sumas del tipo $a + b$, donde a y $b \in Z$, A_2 los contestó correctamente, mientras manifestaba dificultades para explicar sus respuestas. Al tiempo, utilizó los términos "retroceso" y "revés" para referirse a los negativos. La TC2 se identificó para los sentidos signado y aislado. Se presentó también la **TC3**.

7:38:35	22	**A_2**	El a) es 12 más menos 17, es igual a menos 5
7:38:38	23	**I**	¿Por qué?
		A_2	Porque, si restamos 17 menos 12, nos da 5, pero como es al revés, sería menos 5
7:38:48	24	**I**	¿Cómo que al revés?
		A_2	¡Ah! bueno, es que, ¡ay! ¿Cómo le explicó? A 12 le quitamos 17, ¡no se puede! Nos quedarían 5 y eso lo usamos en retroceso, en números negativos, sería menos 5
7:39:05	25	**A_2**	Es que no lo sé explicar.

Pasaje 4.13 A_2 Presencia de TC3 al solucionar sumas con enteros.

A_2 manifestó dificultades para explicar los reactivos respondidos; sin embargo, lo hizo de manera correcta, y usó los términos: “revés” y “retroceso” para referirse a los números negativos.

En el ítem 3, que solicitó calcular sumas usando la recta numérica, A_2 cometió algunos errores de signo y se refirió al 0 para ubicar los números negativos. En este ítem se usaron los sentidos sustractivo, signado y aislado de los números negativos. Se presentó la **TC11**, *la necesidad de dotar de sentido a las redes de acciones cada vez más abstractas hasta convertirse en operaciones,* al realizar las operaciones solicitadas.

7:41:07	40	**A_2**	El c) es más ocho más menos uno, es igual a siete.
7:41:13	41	**I**	¿Por qué?
		A_2	Porque… es ubicando el ocho, luego le quitamos… nos piden menos uno, le quitamos uno, es siete…

Pasaje 4.14 **A_2 Presencia de la TC11 al solucionar sumas de enteros con recta numérica.**

Convirtió la suma original *(+ 8) + (– 1) =____* en la resta *8 – 1* = ____ lo cual fue una manifestación de la **TC11**.

El ítem 4 pedía ubicar y ordenar sobre la recta numérica algunos números. A_2 aplicó la “regla de los signos” de la multiplicación si se encontraban dos signos juntos. Se usó el sentido relativo y se presentó la **TC3**.

7:44:57 59 **A₂** […] Sería, cinco positivo. Éste es más nueve, sería acá … y el d) es menos más 4, pero negativo más positivo, da negativo, sería menos 4, igual acá … y … el cero, aquí …(señalando la recta dibujada en su hoja) (véase Figura 4.3)

7:45:33 60 **I** Ok, si los tuviéramos que ordenar de menor a mayor, ¿cómo quedarían?

A₂ Pues, quedaría primero: a) o d), porque es la misma cantidad, luego el cero, bueno, a), d), e), luego b) y luego c) … [...] menos cuatro, luego es menos más cuatro, después es cero, después es menos menos cinco y luego más nueve …

Pasaje 4.15 **A_2 Presencia de la TC3 al ordenar y ubicar números enteros en la recta numérica.**

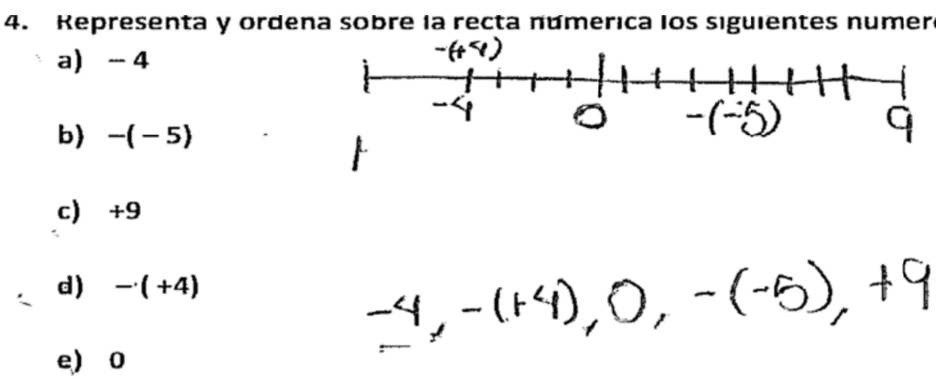


Figura 4.37 **Ubicación y orden de números enteros en recta numérica.**

La **TC3** se presentó en el ítem 4 de ubicar en la recta numérica a cinco números enteros, ya que la estudiante empleó el término “menos” en lugar de negativo y “más” en vez de positivo.

El ítem 5, solicitó anotar el número faltante en cinco operaciones. La alumna contestó correctamente estos reactivos, utilizó la regla de los signos de la multiplicación y se presentó la **TC11**, al tiempo que se usaban todos los sentidos intermedios de los signos negativos.

7:46:45 64 **A₂** Aquí el resultado menos dos nos da igual a cinco, entonces serían tres…

7:46:51 65 **I** ¿Por qué?

A₂ Porque igual acá, (señala el inciso 4, donde utilizó la ley de los signos), decía que menos y menos es más, entonces el número dos lo convertirían en más, sería 3 menos, menos 2 es igual a 5.

Pasaje 4.16 **A_2 Presencia de TC3 al anotar número faltante.**

A_2 convirtió el número – *(– 2)* en positivo al aplicar la ley de los signos y logró la respuesta correcta con la estrategia empleada.

El ítem 6 planteó tres problemas de aplicación, donde se usaron nuevamente todos los sentidos intermedios de los números negativos. A_2 contestó apropiadamente los dos primeros reactivos, pero presentó la **TC7** en el último.

7:53:55	95	**A_2**	Bueno, dice [Lee en voz alta el enunciado]: **Una ranita salió de un pozo de 20m de profundidad, si en cada intento subía 5m y bajaba 4m. ¿Cuántos intentos necesitó para salir del pozo?** Necesitaría… 20,
7:55:22	101	**A_2**	Si fuera así, entonces, estaría subiendo, primero 5 y bajaría 4, el primero, luego subiría a 6, pero bajaría a 2, y así sucesivamente, hasta que llegue al 20, que serían 20 veces…

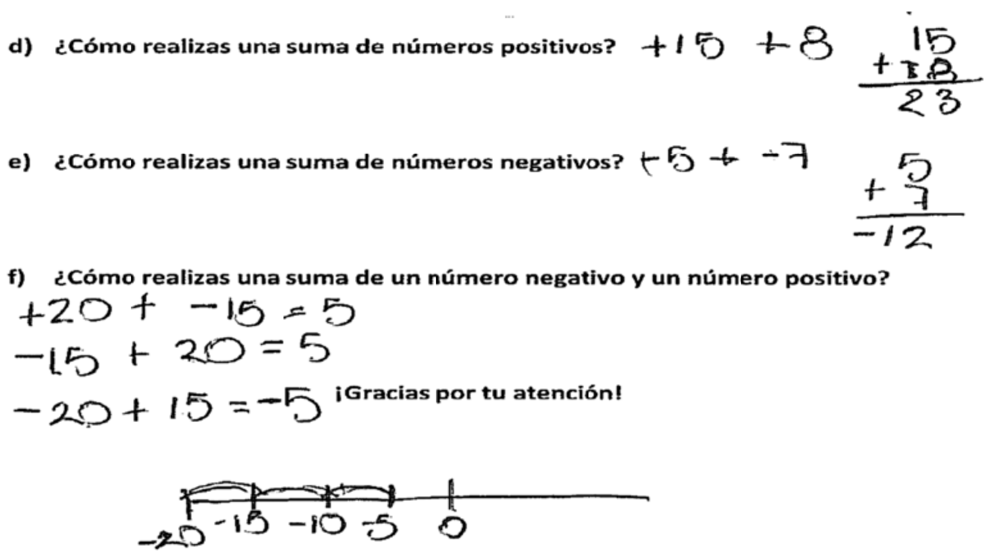
Pasaje 4.17 **A_2 Presencia de TC7 en problemas de aplicación.**

Al intentar solucionar el problema, en el Pasaje 4.17 A_2 utilizó erróneamente los datos dados, por lo que obtuvo un resultado incorrecto.

El ítem 7 planteó seis preguntas, a las que A_2 contestó correctamente, mientras que presentó la **TC11** (véanse el Pasaje 4.18 y la Figura 4.4).

7:58:56	115	**A_2**	[Reactivo] f) **¿Cómo realizas una suma de un número negativo y uno positivo?** Pues, esto depende.
7:59:05	116	**I**	Depende de ¿qué?
		A_2	De que… de si… del tamaño de los números, por ejemplo, si hay un número positivo, que es 20 y un número negativo, que es 15, lo sumaría, ah, sería como resta.

Pasaje 4.18 **A_2 Presencia de TC11 al utilizar conceptos básicos.**


d) ¿Cómo realizas una suma de números positivos? +15 +8

15
+8
23

e) ¿Cómo realizas una suma de números negativos? +5 + −7

5
+7
−12

f) ¿Cómo realizas una suma de un número negativo y un número positivo?

+20 + −15 = 5
−15 + 20 = 5
−20 + 15 = −5

¡Gracias por tu atención!

−20 −15 −10 −5 0

Figura 4.38 **Explicación de suma de enteros.**

En conclusión, A_2, realizó una transición de la suma aritmética a la algebraica, haciendo uso de los sentidos intermedios de los números negativos: sustractivo, signado, relativo y aislado, descritos por Gallardo (2002) (véase el apartado 2.4.3), y presentó en esa evolución, las tendencias cognitivas (véase el apartado 2.4.2):

- **TC3**, *el retorno a situaciones más concretas, cuando se presenta una situación de análisis,* en los ítems 1, anotar signos; 2, suma de enteros y 4, ubicar y ordenar números en recta numérica, al utilizar los términos: “bajó – perder” y “revés – retroceso” para referirse a los números negativos;
- **TC7**, *mecanismos apelativos que centran el desencadenamiento de procesos erróneos de resolución*, en el ítem 6, de problemas de aplicación, al cometer errores al analizar los datos proporcionados y por ello llegó a un resultado incorrecto; y
- **TC11**, *dotación de sentido a las redes de acciones cada vez más abstractas hasta convertirse en operaciones*, en los ítems 3 (suma de números enteros con el recurso a la recta numérica), 5 (anotar número faltante) y el 7 (preguntas de conceptos básicos), en los que convirtió las

sumas en restas por la aplicación de la regla de los signos de la multiplicación.

4.4 Resultados del análisis de las entrevistas clínicas

Con los resultados obtenidos, tanto en los cuestionarios, como en las entrevistas clínicas realizadas a dos de las estudiantes con desempeño de alto nivel, pudimos observar que aun, cuando ellas contestaron correctamente a las operaciones y problemas planteados, exhibieron diferentes formas de explicar el procedimiento que utilizan para llegar a las soluciones de los diferentes incisos.

Mientras A_1 se refirió a positivos y negativos utilizando los términos ahorros y deudas, respectivamente, o “bajó” para referirse a los negativos, A_2 únicamente mencionó “más” o “menos”, refiriéndose a esos números como positivos o negativos en contadas ocasiones, haciendo uso de términos que consideró como sinónimos, como: “bajó”, “perder”, “revés” y “retroceso”. Además, A_1 recurrió constantemente al uso de la recta numérica cuando se le solicitó explicar sus respuestas, mientras que A2, aunque la utilizó, prefirió realizar las operaciones en forma aritmética.

Durante la entrevista, A_1 manifestó las tendencias **TC3**, **TC4**, **TC7**, **TC10** y **TC11**, mientras que A_2 exhibió las tendencias **TC3**, **TC7** y **TC11**.

Finalmente, en las entrevistas mostraron mejores respuestas que en las respuestas que dieron a los cuestionarios CD, CS y CC, y A_2 presentó sólo tres tendencias cognitivas.

Capítulo 5

Conclusiones

Después de realizar el análisis de los instrumentos aplicados y de las entrevistas realizadas (Capítulos 3 y 4, respectivamente), debemos reportar las:

5.1 Conclusiones generales y particulares

El grupo comenzó con un deficiente conocimiento antecedente de los números enteros. En sus respuestas al cuestionario diagnóstico CD, prácticamente todos los alumnos escribieron en algún momento “no sé” o “no entiendo”. Lo que nos indicó la presencia de la TC8.

Las 20 sesiones de enseñanza del tema de la suma de números enteros se basaron en el modelo de enseñanza: sintáctico, con el propósito de poner las bases y reglas necesarias para la solución de operaciones que implicarán el uso de negativos; el continuo, con el recurso a la recta numérica contextualizada para proporcionar un soporte gráfico significativo para los alumnos y un medio lúdico para ejercitar las operaciones básicas con los números enteros. Al finalizar la administración de cada modelo de enseñanza se aplicó un cuestionario (CS y CC, respectivamente) para recopilar datos de la comprensión resultante de los alumnos de la enseñanza efectuada y el desarrollo de la actividad con el medio lúdico incluyó el registro manuscrito en papel de las operaciones realizadas.

Durante la enseñanza algunos de los ejercicios planteados fueron semejantes a los empleados por Casarrubias y Gómez (2009, pp.144-156), por lo que dedujimos que, en general, los alumnos ya tenían las bases y conocían las reglas para realizar sumas con números enteros; sin embargo, cometían errores aritméticos o de omisión de signos y, en ocasiones, si bien las menos, se trataba de errores de procedimiento, lo cual se pudo corregir con la práctica.

Cuando se hizo uso de la recta numérica contextualizada, como lo sugieren Bruno y Martinón (1996), los alumnos cometieron menor número de errores al calcular las sumas que se les proponían. No obstante, también resultó que la mayoría de esos errores se debía a la presencia de la TC3 *(el retorno a situaciones más concretas, cuando se presenta una situación de análisis).*

Después de la enseñanza los alumnos volvieron a cometer errores en las operaciones con números negativos planteadas en los cuestionarios aplicados.

En particular, la incorporación de los sentidos intermedios identificados por Gallardo (2002, véase el apartado 2.4.3)—el sustractivo, el signado, el relativo y el aislado—al diseño de los diversos cuestionarios aplicados, nos proporcionó una referencia específica para las consideraciones de la pregunta de investigación (véase la sección 2.2): *¿Los alumnos de 1er grado de secundaria identifican y operan correctamente los elementos necesarios para realizar una suma aritmética y una algebraica*? De las entrevistas realizadas a las alumnas A_1 y A_2 (véase el capítulo 4) derivaron datos para responder a la interrogante *¿Qué procesos cognitivos se desencadenan para transitar de una suma aritmética a la algebraica*?, pues se presentaron en común las tendencias cognitivas **TC3, TC7 y TC11** al realizarse esa transición (véase la sección 4.4). Por lo tanto, concluimos que al aplicar diferentes modelos de enseñanza en las sesiones que traten el tema de los negativos, se promoverá la experiencia de los alumnos con otros modos de llegar al mismo resultado.

5.2 Observaciones y propuestas finales

Por los resultados obtenidos se recomendaría influir para que el tema de los números negativos se tratara en los primeros bloques del primer curso de educación media básica (1º de secundaria) ya sea en el segundo o en el tercer bloque, junto con los temas de acercamiento algebraico, en lugar de relegarlo al último bloque, como ocurre actualmente en el plan de estudios vigente (SEP, 2011b, p.35) con la consecuencia de que, por falta de tiempo, no se le alcance a tratar de forma apropiada ni con la profundidad necesaria, dado que es un importante antecedente para las operaciones algebraicas de los siguientes grados y niveles educativos.

Todos los modelos de enseñanza fueron útiles para la explicación del tema de la suma de enteros. Se sugiere, en particular, hacer uso de la recta numérica contextualizada y de actividades lúdicas como la utilizada en esta investigación. Conviene considerar que, al momento de realizar los planes de clase, los alumnos aprenden de muy diversas maneras y por eso debemos preparar diversas herramientas.

Como Bruno y Martinón (1996), reconocemos que se han realizado muchos estudios de diversa índole respecto al tema de los números enteros; y que, “[…] bajo ciertas condiciones de tales alumnos se obtienen tales resultados. Se construye entonces un modelo o una teoría a partir de estos modelos particulares” (Adda, 1975/1986). Lo cual también es aplicable a la “localidad” de los MTL de Filloy (1999).

Apéndice 1. Cuestionario diagnóstico CD

Instituto Cultural Derechos Humanos
Cinvestav – IPN
Nombre: ____ 30/08/12
Instrucciones: lee atentamente y responde con pluma lo que se te solicita.

I. Escribe el inverso de los siguientes números, ejemplo: **4 inverso: – 4** y explica cada una de tus respuestas.

	Inverso		**Inverso**
(– 5)		**– (– 9)**	

II. Dibuja una recta numérica y localiza los siguientes números.

+ (+ 8) + (– 7) – (– 16)

III. Realiza las siguientes operaciones y explica cada una de tus respuestas.

+ 6 + 12 =

5 – 1 + 7 =

+ (+ 27) – (+ 11) – (– 15) =

IV. Realiza las siguientes operaciones usando la recta numérica y explica cada una de tus respuestas.

+ (+ 12 – 8 + 16 – 24) =

+ (– 9 + 7) + (+ 11 – 13) =

– (+ 19 + 13) – (+ 21 – 15) =

V. Responde las siguientes preguntas:

12. ¿Qué significa que un número sea negativo? Escribe un ejemplo:
13. ¿Cómo puedes realizar una suma con números positivos?
14. ¿Puedes hacer una suma con números negativos? Sí____ No_____ en caso afirmativo ¿Cómo?
15. ¿Podrías hacer una suma combinando números positivos y negativos? Sí_____ No_____ en caso afirmativo ¿Cómo?

Apéndice 2. Cuestionario aplicado después de enseñanza con el modelo sintáctico CS

Instituto Cultural Derechos Humanos
Cinvestav – IPN
Nombre: ____ 4/10/12

Instrucciones: lee atentamente y responde con pluma lo que se te solicita.

I. Completa usando las frases **"mayor que"** o **"menor que"**, según corresponda en las siguientes parejas de números

a. 3 _________________– 1

b. 10 _________________– 10

c. – 3 _________________– 1

d. – 5 _________________6

e. – 20 _________________31

II. De los tres números siguientes: – 9 – 4 – 7

El mayor es ________ el menor es ______

III. Ordena de menor a mayor los siguientes números: 4, –20, –25, –1, –31

_____ < _____ < _____ < _____ < _____

IV. Realiza el siguiente problema usando la recta numérica y explica tu respuesta.

El domingo tu papá te da 20 pesos. Vas a la feria y gastas 5 pesos en los cochecitos y 3 pesos en los dardos donde ganas 2 pesos. ¿Cuánto dinero te queda al terminar el domingo?

V. Encuentra el resultado de las siguientes sumas:

12 – 15 + 3 – 2 = ______

– 8 + 11 – 1 + 2 = ______

4 – 7 + 5 – 6 = ______

– 2 + 3 – 9 + 10 = ______

– 23 + 34 – 45 + 28 = ______

Apéndice 3. Cuestionario aplicado después de enseñanza con modelo continuo CC

Cinvestav-IPN Instituto Cultural Derechos Humanos

Nombre del estudiante: **10/01/13**

Instrucciones: lee atentamente cada ejercicio y responde lo que se solicita en cada uno.

1. La estatura media de un grupo de alumnos de 1º es 1.54, anota la estatura de los siguientes alumnos:

Erika	+0.02	1.56
Carlos	+0.05	
Martha	-0.03	
Enrique	+0.03	
Alberto	-0.04	
Lupita	+0.01	

2. Las siguientes empresas manifestaron sus ingresos y gastos durante el pasado mes de diciembre. Las cifras están dadas en miles de pesos.

Nombre	Ingresos	Gastos	Pérdida o Ganancia
El Águila	78	59	+11
Fertimex	52	57	-5
La Única	140	156	
Turistar	496	403	
Transmex	188	206	
Grupo Casa	457	472	

3. Aplicando el simétrico completa las siguientes proposiciones
   Si –w = 2 entonces: w = – 2
   Si a = 9 entonces: –a =
   Si –b = 7 entonces: b =
   Si –h = 4 entonces: h =
4. Anota el valor absoluto
   |-11| = 11 |-18| = |+175| = |-47| =
5. Ordena de menor a mayor los siguientes números.
   –9, 8, –6, –1, 2, –5, 3 –9, –6, –5, –1, 2, 3, 8
   –35, 12, –16, 35, –18, 8, –19
   19, –1, – 18, 17, –16, –29, 32
   –234, –432, –189, –386, – 748
   –183, 245, –690, 452, –129, 389

Apéndice 4. Registro de modelo lúdico

Cinvestav-IPN Instituto Cultural Derechos Humanos

# de tirada	Puntos en el dado	Operación realizada	Casilla a la que llega
1		Ninguna	
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			
22			
23			
24			
25			
26			
27			
28			
29			
30			

Apéndice 5. Cuestionario entrevista CE

Protocolo de entrevista

Nombre del estudiante: ____

Instrucciones: lee atentamente cada inciso y responde con pluma lo que se solicita.

1. **Anota el signo que corresponda a cada número, toma en cuenta los ejemplos:**

La temperatura es de 3 grados bajo cero.	**– 3**	El volcán Popocatépetl tiene una altura de 5,452 m sobre el nivel del mar.	**+5,452**
María Esther bajó 7 kilos de peso.		La temperatura superficial en Plutón es de 238° C bajo cero.	
Antonia ahorró 500 pesos.		El submarino se encuentra a 450 metros de profundidad.	
Fabiola subió 19 kilogramos de peso.		2006 antes de nuestra era.	
La mayor altura terrestre, la del Everest es de 8,870 m sobre el nivel del mar.		La fosa de las Marinas (Océano Pacífico) está a 11,034 m bajo el nivel del mar.	
La temperatura superficial en Júpiter es de 150° C bajo cero.		El avión se encuentra a 1,200 pies de altura.	

2. **Soluciona los siguientes ejercicios:**
   a) (+12) + (– 17) =

   b) 56 + 87 =

   c) 67 – 98 =

   d) – 78 + 45 =

   e) (5 – 12) – 9 =

3. **Con ayuda de la recta numérica soluciona las siguientes sumas:**
   a) (+4) + (+2) =
   ---
   b) (– 6) + (– 4) =
   ---
   c) (+8) + (– 1) =
   ---
   d) (– 9) + (+7) =

----

e) **(– 8) + (+10) =**

----

f) **(+ 6) + (– 12) =**

----

g) **(– 5) + (– 13) =**

----

h) **(– 10) + (+ 15) =**

----

i) **(– 18) + (+12) =**

----

j) **(+20) + (– 10) =**

----

4. Representa y ordena sobre la recta numérica los siguientes números:

a) – 4

b) –(– 5)

c) +9

d) – (+4)

e) 0

5. Anota el número que falta:

a) (   ) – (– 2) = 5

b) (+7) – (–   ) = 8

c) (   ) – (+4) = 3

d) (+6) – (   ) = 2

e) (+8) – (–   ) = 10

6. Resuelve los siguientes problemas:

a) Un elevador estaba en el segundo piso, sube cinco pisos, después baja seis pisos y por último asciende 3 pisos. ¿En qué piso se encuentra el elevador?

b) En Monterrey una mañana la temperatura era de 8°C bajo cero, a medio día la temperatura ascendió 15°C y por la noche descendió 9°C. ¿Cuál fue la temperatura por la noche?

c) Una ranita salió de un pozo de 20m de profundidad, si en cada intento subía 5m y bajaba 4m. ¿Cuántos intentos necesitó para salir del pozo?

7. Responde las siguientes preguntas:

a) Escribe un número entero mayor de – 7.

b) Escribe un número entero menor de – 5.

c) Escribe un número entero entre – 2 y – 6.

d) ¿Cómo realizas una suma de números positivos?

e) ¿Cómo realizas una suma de números negativos?

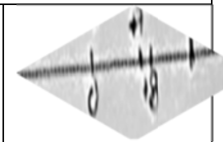
f) ¿Cómo realizas una suma de un número negativo y un número positivo?

¡Gracias por tu atención!

Apéndice 6. Entrevista aplicada a A_1 (Diana)

Hora	Número inter vención	Inter vento r	Intervención	Ejercicio	Código	Observaciones
Ítem 1) Anotar signos						
13:09 :57	17	**D**	La fosa de las Marinas (Océano Pacífico) está a 11,034 m bajo el nivel del mar. **Menos, es NEGATIVO**	La fosa Marinas… bajo el nivel del mar.	© ***Rl***	*Nombra* ***"Negativo"****, en lugar de* ***"menos"****.*
13:10 :34	21	**I** **D**	Básicamente ¿cómo me podrías explicar cuál es la diferencia entre números positivos y negativos? Pues que uno es mayor que el otro, porque bueno, también la diferencia es que uno es… porque del lado izquierdo del cero son negativos, son menores y del lado derecho son positivos, son mayores, porque bueno, la cantidad es mayor. Los positivos es como si tuvieras una deuda.		TC2 Rl, C	*Confunde los conceptos:* ***positivo – negativo*** *con su correspondiente* ***ahorro – deuda****.*
13:11 :02	22	**I** **D**	¿Los positivos como si tuvieras una deuda? Más o menos, porque por ejemplo tú debes 500 pesos no se puede hacer positivo, porque ese dinero no te lo quedas tú.			
13:11 :13	23	**I** **D**	¿Entonces es negativo, más que positivo? ¿La deuda sería negativa o la deuda sería positiva? La deuda seria negativa.			
13:11 :21	24	**I** **D**	¿Y si tú ahorraste, sería positivo o negativo? Sería positivo.			
Ítem 2) solución a sumas del tipo $a + b$, donde a y $b \in \mathbb{Z}$						
13:13 :16	31	**I** **D**	El siguiente 56 + 57… son ciento treinta y… ciento cuarenta y tres. (Realiza el cálculo mentalmente).	56 + 87 =	TC2 Sg, As, C TC7	*La entrevistada comete errores de dicción al verbalizar las cantidades, aunque al realizar los ejercicios opera los números en forma correcta.*
13:13 :31	32	**I** **D**	¿56 más 57? (Se hace énfasis en las cantidades que mencionó más que en las que están escritas, para que tomé conciencia de lo que está diciendo). No, 56 más 87.			
13:13 :44	33	**I** **D**	Es que se oyó como que dijiste 56 más 57 Ah, sí, jajá			
13:13 :48	34	**I** **D**	Ok, entonces ¿cuáles son los números? 56 más 87			
13:13 :53	35	**I** **D**	Entonces, ¿cuál es el resultado? Son ciento cuarentaaa y… ¿dos?			
13:14 :02	36	**I** **D**	¿142? Porque ¿qué tienes que hacer? Sumarlos, nada más, porque no hay ningún negativo.			
13:14 :07	37	**I** **D**	Ok. ¿Qué dije? 142…		TC2 Sg,	*Comete errores en cálculos*

13:14 :15	38	**I** **D**	142, ¿segura? 6 y 7 ¿suman 12? ¡Ah, sí! No, son este…13		As, C TC4	*elementales con los que antes no tenía problemas.*
13:14 :22	39	**I** **D**	Entonces, ¿cuál sería el resultado? Corrige y escribe 143.			
13:14 :28	40	**I** **D**	El siguiente. **17 menos 98**	67 – 98 =	TC2 Sg, As, C TC7	*Comete errores de dicción, lo que la lleva a cometer errores en los cálculos.*
13:14 :33	41	**I** **D**	¿17? 67 menos 48			
13:14 :58	44	**I** **D**	¿Qué tienes que hacer? Escríbelos en la hoja, no hay problema. Pero es que… Sería… restar 67 menos 98, porque así va la operación. Aquí serían…ocho…		TC2 Sg, As, C TC4	*Errores al colorar los números, al realizar las operaciones con las que antes no tenía dificultad.*
13:15 :28	45	**I** **D**	¿Por qué? Ah, no, jajaja…son 9			
13:15 :53	49	**I** **D**	¿Pero cuál es el signo que tienes que ponerle? Positivo		TC2 Sg, As, C TC3	
13:15 :56	50	**I** **D**	¿Por qué? Pues, por ejemplo, ahorita como el 98 es mayor y va arriba			
13:16 :02	51	**I** **D**	Pero el 98 sigue siendo negativo. Ajá, sigue siendo negativo, pero… es que…			*Presenta problemas para identificar el signo de cada número, por lo que al realizar la operación, el signo del resultado es erróneo.*
13:16 :11	52	**I** **D**	Tranquila ¿Es qué que…? Sí, es positivo, porque aquí el 98 es mayor y el 67 es menor, así que no se puede convertir en negativo, porque 98 es mayor y sí: 67 menos 98, ahí sí se vuelve negativo; porque 67 este, es, bueno, sí es positivo, pero el 98 no cabe ahí.			
13:16 :43	53	**I** **D**	Pero 98, sigue siendo negativo. No sepo, jajaja…			
13:16 :51	54	**I** **D**	El 98 es negativo, lo que tu decías de las deudas, tú tienes una deuda de 98 pesos, pero nada más traes para pagar 67 pesos. Ah, entonces sí, si es menos 31			
13:17 :10	55	**D**	Luego es menos 78 más 45, son…(realiza la operación en su hoja), bueno, aquí esta operación se vuelve, bueno se vuelve una resta el total, entonces serían 8 menos 5, son 3, después sería 7 menos 4, serían 3, 33 pero esto se vuelve negativo, porque si el 78 es menos y 45 es más, es lo mismo, porque si 45 se lo… el menos 78 es negativo y tú le quieres sumar 45, pero como esté (señala el 78 negativo) tiene mayor cantidad no le puede alcanzar a, bueno está el cero, no le puede alcanzar a convertirse en positivo, así que, bueno, sería menos 33, es como si tú tuvieras éste (señalando el 45) se lo estuvieras quitando, porque es positivo, entonces serían menos 33.	–78+45=	TC2 Sg, As, C	

Ítem 3) solución a sumas usando recta numérica						
13:23 :27	69	**I D**	¿El siguiente? Bueno, este es más ocho, como es mayor, aquí más ocho (señalando un punto en la recta), después, como es menos 1, esto se lo vamos a restar, bueno, como aquí, como es menos, es un negativo, pues tienes que recorrerlo hacia la izquierda, pero se queda en positivo porque es mayor, sería menos 7. No, es positivo, perdón. Es siete, porque es menos uno se lo estás restando a ocho.	**(+8) + (–1) =**	TC2 Ss, Sg, As, C	
Ítem 4) Ubicar en recta numérica y ordenar de menor a mayor						
13:30 :39	85	**I D**	¿El siguiente? Dice: **Representa y ordena sobre la recta numérica los siguientes números:** Bueno, éste es menos 4, así que como los negativos van del lado izquierdo, pues lo ponemos del lado izquierdo. Y aquí es menos - menos 5, sería lo mismo, menos 5.	**– 4, –(–5), +9, –(+4), 0**	TC2 Rl, C TC10	
13:31 :12	86	**I D**	¿Y el signo de afuera? Es que es ahí donde no le entiendo… o sea, sería menos 5, le restas menos 5, sería menos 10… sí ¿no?			
13:31 :26	87	**I D**	No… el signo de fuera del paréntesis, lo que hace es afectar, todo lo que está adentro, y lo cambia… ¿Las reglas de los signos?			
13:31 :38	88	**I D**	Ajá. Entonces, menos y menos, se convierte en positivo. Entonces, como aquí tenemos el menos 5, este signo, (señalando el signo fuera del paréntesis) lo que hace es que cambia de signo, es la regla de los signos, porque menos y menos más y más y más, se vuelve positivo.			
Ítem 5) Anotar número faltante						
13:35 :23	96	**I D**	Ok, para el siguiente apartado, ¿cuáles son las instrucciones? **Anota el número que falta:** Sería para la a, la que ahorita está vacío, sería menos, menos 2 es igual a 5. O sea, sería, según, es que este no sé cómo explicarlo… sería 7… porque bueno, el 7 como es mayor, es como por ejemplo, aquí, te salió 5, pero como es positivo, y este es negativo, lo sumas.	**( ) –(– 2) = 5**	TC2 Ss, Sg, Rl y As, C TC10	*Confunde los signos de los números, lo que la lleva a cometer errores en la ubicación de los números.*
13:36 :00	97	**I D**	Bueno, así como tú lo dices, sería: 7 menos 2 negativo… Sería, 7 menos 2 son 5.			
13:36 :10	98	**I D**	¿7 menos menos 2 son 5? Pero no según el… entonces, como menos y menos, se vuelve positivo, entonces, serían … 3			

13:36 :39	99	I D	¿Por qué? Porque como el 3 es positivo, pero estos, (señala los signos dentro y fuera del paréntesis),bueno, lo interviene, igual es lo mismo de la regla de los signos, menos y menos se vuelve positivo, así que este se vuelve positivo (señalando el signo binario de la operación), entonces sería 3 más menos 2… no sería 3 más 2, porque este signo, ya desaparece (refiriéndose al signo unario del 2), porque es como si este signo (de la operación) fuera de éste (del número).			*Aplica la regla de los signos propia de la multiplicación, aunque se trata de una suma.*
Ítem 6) Problemas de aplicación						
13:45 :41	124	I D	Siguiente **Una ranita salió de un pozo de 20m de profundidad, si en cada intento subía 5m y bajaba 4m. ¿Cuántos intentos necesitó para salir del pozo?** Entonces, primero aquí, tiene los 20 del pozo, ¿no? Que era lo que tenía de profundidad, pero en cada intento, subía 5 y bajaba 4, se quedaba en uno, ¿cuántos intentos necesitó para salir? Pero como sólo tienes uno… y sólo son 20 metros, intentó 20 veces, porque se multiplica 1 por 20 entonces, sería 20, hizo 20 intentos para poder salir del pozo.	**Saltos**	TC2 Ss, Sg, Rl y As, En TC7	*Sólo considera la primera parte del problema, sin llegar a intuir o realizar los verdaderos "saltos" que nos necesarios para salir, aplica una multiplicación sin tomar en cuenta que el último día no tendría que retroceder…*
13:46 :48	125	I D	¿Cómo se lo explicarías a un niño pequeño? Este, bueno, que primero esto del pozo, lo dejaría a parte, primero tendría que sacar los intentos que hizo, primero, si tiene 5 y luego, como es positivo, al bajar que ahí son menos 4, entonces, le restas 5m menos 4m y ahí ya te sale, la cantidad que él estuvo haciendo cuando estaba como en los intentos.			
13:47 :34	126	I D	Ok, eso ¿cuánto te da? Uno, ok, eso fue el primer día. Bueno, según los intentos, intentó 20 intentos para poder salir del pozo…			*Persiste en la idea, sin darse cuenta del no retroceso del último día*
13:47 :59	127	I D	¿Segura? Sí.			
Ítem 7) Preguntas						

13:48 :17	129	**D**	**Escribe un número entero mayor de – 7,** sería 7, porque es como si hicieras el cambio de signo, porque, está diciendo, mayor de 7	**x > – 7**	TC2 Sg y As, C TC3 y TC 11	
13:48 :30	130	**I** **D**	¿De 7 o de 7 negativo? De menos 7			
13:48 :36	131	**I** **D**	¿Qué número sería mayor que menos 7? El inmediatamente anterior, ¿cuál sería mayor que 7 negativo? Pues sería el 0			*Considera al 0 (cero) mayor que cualquier número negativo.*
13:48 :48	132	**I** **D**	El cero está muy lejos, ¿un número que estuviera más cerca del menos 7? Menos 6			
13:50 :56	141	**D**	**¿Cómo realizas una suma de números negativos?** Sería menos 5 menos menos 5, sería menos diez, porque en este, es lo mismo, pero lo que cambia es el signo, a ese, pero le sumas.		TC2 Ss, Sg y As, C TC3	*Confunde el signo de la operación –de adición- con el signo del número en cuestión.*
13:51 :20	142	**D**	**¿Cómo realizas una suma de un número negativo y un número positivo?** Bueno, yo diría, que también depende de cuál es la cantidad de positivos y de negativos.			
13:51 :30	143	**I** **D**	Ok, explícalo con ejemplos. Este en positivos sería 7 y en negativo sería 8, primero tengo que tener el… puedes hacer la operación o una gráfica. Ahorita, voy a hacer una gráfica, aquí tienes 7, como es positivo va del lado derecho del cero, y este es negativo, así que le restamos 7 menos 8, sería menos uno, porque le estás restando esta cantidad, cómo esta cantidad es mayor y por ejemplo esta es la deuda que tienes ocho y sólo traes siete pesos, entonces, le quedas debiendo un peso, así que queda del lado izquierdo, como es negativo, sería menos uno, o sea es la cantidad del peso.		TC2 Ss, Sg, Rl y As, C TC1 1	*Utiliza la recta numérica para realizar su explicación, además del concepto de deuda*
13:52 :28	144	**I** **D**	Ok, ¿Puedes poner otro ejemplo? **D:** serían 12 menos 6, aquí, en la gráfica, ubicamos el 12, es lo mismo, ahora al 12 le restas 6 y te queda 6, pero como ahora no se pasó, por ejemplo, tú tienes la deuda, quedaste debiendo 6 pesos y tú lo pagaste con 12 pesos, los que te quedan debiendo son ellos, así que se vuelve positivo.			

Apéndice 7. Entrevista aplicada a A_2 (Paulina)

Hora	Número de intervención	Interventor	Intervención	Ejercicio	Código	Observaciones
Ítem 1) Anotar signos						
7:36:53	6	**I** **P**	Ok, el siguiente ejercicio ¿qué dice? María Esther bajó 7 kilos de peso	María Esther bajó 7 kilos de peso.	TC2 Rl C, TC1	*Relaciona bajar con perder y con los negativos*
7:36:58	7	**I** **P**	Ok, ¿qué signo tiene que llevar? Menos 7			
7:37:02	8	**I** **P**	¿Por qué? Porque nos está diciendo que "bajó", que sería como perder.			
Ítem 2) solución a sumas del tipo $a+b$, donde a y $b \in Z$						
7:38:35	22	**P**	El a) es 12 más menos 17, es igual a menos 5	(+12) + (– 17) =	TC2 Sg y As, C TC3	*Identifica "al revés" con "retroceso" y lo asocia a los negativos*
7:38:38	23	**I** **P**	¿Por qué? Porque, si restamos 17 menos 12, nos da 5, pero como es al revés, sería menos 5			
7:38:48	24	**I** **P**	¿Cómo que al revés? Ah, bueno, es que, ¡ay! ¿Cómo le explicó? A 12 le quitamos 17, ¡no se puede! Nos quedarían 5 y eso lo usamos en retroceso, en números negativos, sería menos 5			
Ítem 3) solución a sumas usando recta numérica						
7:41:23	42	**P**	El d) es menos nueve más siete, es igual a menos dos.	**(–9)+(+7)=**	TC2 Ss, Sg, As, C TC1	*Ubica el 0 antes de los negativos.*
7:41:28	43	**I** **P**	¿Por qué? Porque igual, ubicando primero el cero y luego el menos nueve le sumamos siete y nos da menos dos.			
Ítem 4) Ubicar en recta numérica y ordenar de menor a mayor						
7:44:23	56	**P**	A ver, el a) es menos 4, hacemos una recta, ubicamos el cero, y luego el menos 4, que está aquí (señalando un punto en la recta que ha trazado).	**– 4, – (– 5), +9, – (+4), 0**	TC2 Rl, C TC3	*Asume la regla de los signos para ubicar los números.*
7:44:40	57	**P**	Acá b), menos menos 5, mmmmh…sería más cinco, porque…			

7:44:57	59	**I** **P**	Ajá… Ah, ok. Sería, cinco positivo. Este es más nueve, sería acá… y el d) es menos más 4, pero negativo más positivo, da negativo, sería menos 4, igual acá… y… el cero, aquí…			
7:45:33	60	**I** **P**	Ok, si los tuviéramos que ordenar de menor a mayor ¿cómo quedarían? Pues, quedaría primero: a) o d), porque es la misma cantidad, luego el cero, bueno, a), d), e), luego b) y luego c).			
Ítem 5) Anotar número faltante						
7:46:45	64	**P**	Aquí el resultado menos dos nos da igual a cinco, entonces serían tres…	**( ) – (–2) = 5**	TC2 Ss, Sg y As, C TC1	
7:46:51	65	**I** **P**	¿Por qué? Porque igual acá, decía que menos y menos es más, entonces el número dos lo convertirían en más, sería 3 menos, menos 2 es igual a 5.			
7:47:06	66	**I** **P**	Ok, ese menos, menos 2 ¿cómo se traduciría? Más dos			
7:48:14	73	**I** **P**	¿Cómo se lo explicarías a un niño pequeño? Pues… pues igual, que cada vez que vea dos signos, así, en una operación (escribe en la hoja dos signos negativos) es más, cada vez que vea signos diferentes, es menos…			
Ítem 6) Problemas de aplicación						
7:51:02	84	**P**	**En Monterrey una mañana la temperatura era de 8°C bajo cero, a medio día la temperatura ascendió 15°C y por la noche descendió 9°C. ¿Cuál fue la temperatura por la noche?** Aquí, ¿lo puedo hacer con operaciones?	**Temperatura**	TC2 Ss, Sg y As, C TC3	
7:51:20	85	**I** **P**	Sí. Ah, bueno, primero sería una suma, sería ocho más quince.			
7:51:28	86	**I** **P**	¿Pero por qué ocho? **P:** Porque al inicio eran 8 grados y luego aumentó 15…			
7:52:07	90	**I** **P**	Ocho grados ¿qué? Bajo cero.			

7:52:09	91	**I** **P**	Ok. Bueno, sí es menos 8 más 15, sería,… (Comienza a sumar con los dedos). No, así no es, (raya la operación que había escrito)… es al revés, bueno, yo me acomodo así, (reescribe la operación) 15 menos 8 es igual a 7		TC2 Ss, Sg y As, C TC7	
7:52:47	92	**I** **P**	¿Por qué? Bueno, si lo hiciéramos al revés, nos daría 7 igual, porque si era de 8 grados bajo cero, y le aumentamos 15, nos daría positivo, el número… sería 7.			
7:53:05	93	**I** **P**	Entonces ¿Por qué dijiste que no se podía? Ah, porque, no me acomodo hacerlo al revés, jumh… es lo mismo sacar la diferencia que hay entre el negativo y el positivo, y así dependiendo de si es mayor o menor, lo convierto al signo. Y luego sería, bueno, ahora sí, siete menos nueve y es igual a menos 2.			
7:53:37	94	**I** **P**	¿Por qué? Bueno, si al 7 le quitáramos menos 9 nos sobrarían 2 y esos 2 se pasan a negativo. Entonces la temperatura por la noche es de menos 2 grados.			
7:53:55	95	**P**	Bueno, dice: **Una ranita salió de un pozo de 20m de profundidad, si en cada intento subía 5m y bajaba 4m. ¿Cuántos intentos necesitó para salir del pozo?** Necesitaría… 20,	**Saltos**		
7:54:15	96	**I** **P**	¿Por qué? Bueno, sí en cada intento, subió 5, pero bajó 4, sería una resta y nos da igual a uno, por cada salto, subió un metro, y como son 20 metro, necesita 20 metros, 20 saltos para salir…		TC2 Ss, Sg y As, C TC7	
7:54:37	98	**I** **P**	¿Cómo se lo explicarías a un niño pequeño? Pues, si hay 20 metros, con una recta igual…			
7:54:54	99	**I** **P**	¿A ver? Explícalo… Que si el pozo mide 20 metros, y la rana está, hasta abajo, cada vez que salta, sube cinco, pero baja 4, queda en uno.			

7:55:16	100	**I** **P**	Ok, ¿Cuántas veces tendría que hacerlo para subir?			
7:55:22	101	**P**	Si fuera así, entonces, estaría subiendo, primero 5 y bajaría 4, el primero, luego subiría a 6, pero bajaría a 2, y así sucesivamente, hasta que llegue al 20, que serían 20 veces…			
Ítem 7) Preguntas						
7:55:51	104	**P**	a) **Escribe un número entero mayor de – 7** mmm, ¿cualquier número?	**x > – 7**	TC2 Ss, Sg, Rl y As, C TC3	
7:55:59	105	**I** **P**	El inmediatamente anterior o el que inmediatamente, el que este inmediato a ese, si es menos 7, ¿cuál sería el inmediato mayor? Menos 6			
7:56:11	107	**I** **P**	¿Por qué? **P:** Porque… menos 7, eh, entre más grande sea el número teniendo como signo menos, es menos, es menor que el que está antes, bueno, el seis.			
7:58:02	113	**P**	e) **¿Cómo realizas una suma de números negativos?** Pues, si son negativos, voy a poner cinco y siete. Tendrían, primero le omito los signos, bueno, se me hace más fácil quitarle los signos y sumarle normal, 5 más 7 es igual a 12 y luego como es negativo, le agrego el signo.		TC2 Ss, Sg, Rl y As, C TC1	
7:58:42	114	**I** **P**	¿Por qué? Porque son negativos y los negativos, cuando se suman aumentan el… es como una suma normal, sólo que en números negativos.			
7:58:56	115	**P**	f) **¿Cómo realizas una suma de un número negativo y uno positivo?** Pues, esto depende.		TC2 Ss, Sg, Rl y As, C TC1 1	
7:59:05	116	**I** **P**	Depende de ¿qué? De que… de si… del tamaño de los números, por ejemplo, si hay un número positivo, que es 20 y un número negativo, que es 15, lo sumaria, ah, sería como resta.			
7:59:30	117	**I** **P**	¿Por qué? Porque, si lo hacemos 20 más menos 15, nos estarían quitando y en tal caso la respuesta sería 5.			

7:59:40	118	**P**	Pero si es al revés, que sería, menos 15 más 20, primero sacaría la diferencia que hay entre estos números, restando, por ejemplo, 20 menos 15, que nos da igual a 5, y sumándolo es igual, la respuesta es igual a 5.			
8:00:09	119	**I** **P**	Entonces, ¿cuándo cambia? Pues, cambia, cuando el número negativo, por ejemplo, vamos a invertirlo menos 20, que es menor que el positivo 15, ahí nos daría una respuesta con un número negativo, porque el positivo es mayor y si lo hiciéramos en una recta el 15 no alcanzaría a cubrir todos los negativos, que sería menos 5.			
8:00:42	120	**I** **P**	¿Cómo se lo explicas a un niño pequeño? Esa última, nada más. Ah, ¿está de menos 20 más 15?			
8:00:48	121	**I P**	Sí. Pues, sí, igual, para los niños es más fácil entenderlo con recta, sería lo mismo como si enseñáramos con figuras, pero esta es una recta, si la ponemos de 5 en 5, tendríamos que, primero, hacer la recta, ubicar el cero, y ubicar el 20, que sería, el 5, el 10, el 15 y aquí está el 20			

Bibliografía

Adda, J. (1975). L'incompréhension en mathématiques et les malentendus. *Educational Studies in Mathematics 6,* págs. 311-326. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland.

Baldor, A. (2008). *Álgebra de Baldor.* México: Grupo Editorial Patria.

Barnet, R. Ziegler, M. & Byleen, K. (2000). *Álgebra.* México: McGraw – Hill.

Bell, A. (1986). Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros. *Enseñanza de las ciencias,* 4 (3), 199 – 208

Bruno, A. y Martinón, A. (1994). La recta en el aprendizaje de los números negativos. *Suma,* 18 pp 39 – 48

Bruno, A. y Martinón, A. (1996). Números negativos: una revisión de investigaciones. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 9 pp. 98 – 108.

Bruno, A (2005), Estructuras aditivas, Universidad de La Laguna. Recuperada de: http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig2/confere1.pdf

Casarrubias, A. y Gómez, S. (2009). *Complemento Matemático. Cuaderno de trabajo.* México: Ediciones Punto Fijo.

Coello S. José Elías (1995). *Revista del Club Militar", brasileña, No 320.* Recuperada de http://meltingpot.fortunecity.com/alberni/698/revista_docente/ii_iv/b9.html

Filloy, E. y Rojano, T. (1984). *From an Arithmetical to an Algebraic Thought (A clinical study with 12-13 year olds). In J. Moser* (Ed.) Proceedings of the Sixth Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter (pp. 51-56). Madison, WI.

Filloy, E. y Rubio, G. (1993). *Didactic models, cognition and competence in the solution of arithmetic & algebra Word problems, en Ichiei, H*.; Proceedings of the Seventeenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Tsukuba, Ibaraki, Japan Keiichi, S y Fou – Lai, L. (eds.), Vol. 1, pp 154 – 161.

Filloy, E. (1999). *Aspectos Teóricos del Álgebra Educativa.* México. Grupo Editorial Iberoamérica.

Filloy, E; Rojano, T. (2001). *Álgebra.* México. Grupo Editorial Iberoamérica.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach Dordrecht, The Netherlands*: Reidel.

Freudenthal, H (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel

Gallardo, A. (1994). *El estatus de los números negativos en la resolución de ecuaciones algebraicas.* Tesis doctoral.

Gallardo, A. (1996). El paradigma cualitativo en matemática educativa. Elementos teórico – metodológicos de un estudio sobre números negativos. *Investigaciones en Matemática Educativa.* pp. 197 – 222

Gallardo, A. (2002). *The extension of the natural negative number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra.* Educational Studies in Mathematics, 49, 171 - 192

Glaeser, G. (1981). *Epistemologie des nombres relatifs. Recherches en Didàctique des Mathèmatiques*, Vol. 2, No. 3, pp. 303 – 346.

Sampieri Hernández, R.; Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación.* (5ª.edición). Chile. McGraw – Hill.

SEP, (2011). *Plan de Estudios. Educación básica*. México.

SEP, (2011b). *Programas de Estudio, Guía para el maestro*. *Educación básica. Secundaria.* México.

Socas, M.M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en Educación Secundaria. En Rico, L.; Castro, E, Castro, E; Coriat, M.; Marín, A.; Puig, L.; Sierra, M.; Socas, M., *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*, pp. 125-154. ICE/HORSORI. Universidad de Barcelona.

Waldegg, G., Villaseñor, R., García, V., Montes, D., (2008). *Matemáticas 2. En contexto.* México: Esfinge.

Anexo 1. Acuerdo académico colegiado con el Instituto Cultural Derecho Humanos

INSTITUTO CULTURAL
DERECHOS HUMANOS

Cinvestav
Departamento de Matemática Educativa
Área *Ciencias de la Cognición y Tecnología de la Información Aplicadas*

Acuerdo Académico Colegiado

para el Desarrollo del Seminario

Procesos cognitivos asociados al Pensamiento Algebraico de estudiantes que cursan el primer grado de educación secundaria

ACUERDO ACADÉMICO COLEGIADO PARA

EL DESARROLLO DEL SEMINARIO

Procesos cognitivos asociados al Pensamiento Algebraico de estudiantes que cursan el primer grado de educación secundaria.

La coordinación del área de concentración para la investigación en Matemática Educativa "*Ciencias de la cognición y Tecnología de la Información Aplicadas*" del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav del IPN y la Escuela Secundaria "Instituto Cultural Derechos Humanos", acuerdan abrir espacios conjuntos para la reflexión, el análisis *y la construcción de alternativas en torno a problemas relacionados con el pensamiento algebraico de estudiantes* que cursan el primer grado de la educación secundaria.

Nombre del Seminario de Vinculación:

De la suma aritmética a la suma algebraica

Objetivo General del Seminario:

Indagar y analizar problemas relativos a los procesos de la **asimilación** del **lenguaje algebraico** de estudiantes que cursan el primer grado en el ciclo de Educación Secundaria, mediante el desarrollo de proyectos de investigación y de Indagación de las Matemáticas.

Compromisos de las instancias académicas:

1. Apoyar la creación y el desarrollo del Seminario de indagación e investigación para orientar investigaciones *en curso* relacionadas con procesos de adquisición de conocimiento matemático de estudiantes que cursan el primer grado de "Educación Secundaria".
2. Acordar sobre los procedimientos logísticos para la operación de las actividades pertinentes al desarrollo de los procesos de indagación y de investigación propuestos.
3. Reconocer que los integrantes del Seminario serán Docentes e Investigadores de ambas instancias académicas bajo el compromiso expreso de participación en las actividades propias de él.
4. Elaborar de manera conjunta un Reporte Técnico *anual* del desarrollo del Seminario.
5. Apoyar la realización de las actividades del Seminario:
   - Reconociendo el quehacer de sus miembros como parte integrante de sus labores institucionales;
   - Proporcionando los requerimientos académicos para dar seguimiento al desarrollo de *indagaciones y de investigaciones en curso;*
   - Permitiendo administrativamente el desarrollo de las tareas del Seminario de cada instancia, sin que ello implique necesariamente generar partidas especiales;
   - Proporcionando vías expeditas para el intercambio de fuentes de información pertinentes a la realización de las actividades del Seminario;
   - Admitiendo el compromiso declarado de sus miembros a reportar los resultados de indagaciones y/o de investigaciones realizadas por ellos de manera conjunta

en artículos, que se presentarán en foros nacionales o internacionales relativos a las temáticas estudiadas en el seminario;

- Utilizando los logos institucionales para la presentación y el desarrollo de las actividades del seminario;

En la Ciudad de México, Distrito Federal, el día 25 de julio 2012.
Firman el acuerdo las partes responsables de cada Institución:

Lic. Diana Ivonne Pineda Luiz
Directora del nivel secundaria "Instituto Cultural Derechos Humanos", Emilio N. Acosta No. 62, Col. Santa Martha Acatitla, Del. Iztapalapa, C.P. 09510.

M. en C. Ignacio Garnica Dovala
Coordinador de Área Ciencias de la Cognición y Tecnología de la Información Aplicadas

Vo. Bo.

Dr. Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza
Jefe del Departamento de Matemática Educativa

Participantes:

Profesora de Grupo: Karen Abdel Gisela Castillo Hernández
Nivel secundaria "Instituto Cultural Derechos Humanos"
Cinvestav
Andrea Aurora Pérez Esguerra
Estudiante de Posgrado en Matemática Educativa

Anexo 2. Entrevista de preparación a la observación del grupo. (Ariane).

Hora	Número de intervención	Interventor	Intervención	Ejercicio	Código	Observaciones
Ítem a) Inverso						
8:00:17	4	**I** **A**	**I:** Ok, ¿el inverso de 5 negativo? **A:** Más 5	**Inverso** **(– 5)**	© ***Rl***	
8:00:22	5	**I** **A**	**I:** ¿Por qué? **A:** Porque es lo contrario			Indica “contrario”
8:00:25	6	**I** **A**	**I:** ¿El inverso de 28 positivo? **A:** Menos 28	**Inverso** **(+ 28)**	© ***Rl***	
8:00:29	7	**I** **A**	**I:** ¿Por qué? **A:** Porque es el inverso			Dice: “inverso”
8:00:32	8	**I** **A**	**I:** ¿El inverso de menos 9 negativo? **A:** Menos más 9	**Inverso** **– (– 9)**	Es ***Rl***	
8:00:36	9	**I** **A**	**I:** ¿Por qué? **A:** Porque es el inverso de menos 9	**Inverso** **– (– 9)**		***Después de una explicación, logra***
Ítem b) Localizar en la recta numérica						
8:01:36	17	**I** **A**	**I:** Ok, ¿y qué dice? ¿Cuál es el primero que tienes que localizar? **A:** Más – más ocho	+ (+ 8)		
8:01:42	18	**I** **A**	**I:** ¿Y dónde lo localizaste? **A:** Aquí. Señalando la recta numérica la línea donde localizó el numero solicitado. **A:** En los positivos.	+ (+ 8)	© ***Sg***	
8:01:47	20	**I** **A**	**I:** El segundo **A:** ¡eeeh! Más menos 7	+ (– 7)		
8:01:51	21	**I** **A** **I**	**I:** Más menos 7, entonces, ¿Dónde lo localizamos? **A:** En el negativo	+ (– 7)	© ***Sg***	
8:02:55	34	**I** **A** **I**	**I:** ¿Cuál sigue? **A:** Menos 5 se localiza en el lado de los negativos.	(– 5)	© ***Sg***	
8:01:57	22	**I** **A**	**I:** El siguiente **A:** Menos – menos 16	– (– 16)	Es ***Sg***	***Presentó error en ejercicio, pero después de reflexionar logra realizar cambio.***
8:02:00’	23	**I** **A**	**I:** Menos – menos 16, y acabamos de ver que menos por menos ¿da? **A:** Más			

8:02:18	27	**I** **A** **I**	**I:** ¿Dónde quedaría más o menos localizado? **A:** Aquí. Señalando en su hoja la parte positiva de la recta numérica. Ya no me alcanza, pero por acá… **I:** Ok			
8:02:26	28	**I** **A**	**I:** El siguiente **A:** Menos más tres	– (+ 3)	Es ***Sg***	***Olvida la dualidad del signo por el uso signado y comete error en regla de signos***
8:02:32	30	**I** **A**	**I:** ¿En el tres? ¿Por qué? **A:** Por que más y menos da más	– (+ 3)	Es ***Sg***	
8:02:38	31	**I** **A**	**I:** ¿Más y menos da más? **A:** Ajá			
8:02:41	32	**I** **A**	**I:** Si dijimos que menos por menos da más… **A:** Menos y más da… seria acá ¿no? Señalando en la recta los negativos	– (+ 3)	© ***Sg***	***Finalmente corrige el error que había cometido.***
Ítem c) Realizar operaciones con números con signo						
8:03:14	36	**I** **A**	**I:** Éste… ¿cómo lo hiciste? **A:** 76 más 54, pues sume y lo hice: esto y esto (señalando los números en la hoja), se resta porque es negativo más positivo	–76+54=	© ***Sg***	***Dice: “sume”, sin embargo, realiza una resta. Error de entrada***
8:03:29	38	**I** **A**	**I:** Aquí que hiciste, **A:** Ahí los sumé	+6+12=	© ***Sg***	
8:03:32	39	**I** **A**	**I:** ¿Por qué? **A:** Porque es positivo y positivo y se suman y meda 18 positivo.			
8:03:45	43	**I** **A**	**I:** ¿Por qué? **A:**Los sumé, porque son del mismo signo, negativo y negativo, se suman	–23–18=	© ***Sg***	
8:03:50	44	**I** **A**	**I:** Son negativo y negativo, se suman **A:** Menos 23 menos 18 igual a menos 41			
Aunque los siguientes ejercicios estuvieron correctos, la estudiante hizo anotaciones al margen: “cuando es positivo y positivo se suman, negativo y negativo se suman y cuando es positivo y negativo se restan y si el número mayor tiene signo de negativo, el resultado es negativo y si el mayor es positivo, el resultado es positivo” o “Sólo las hice así… no supe cómo poner, si era positivo o negativo”.						
8:04:40	55	**I** **A**	**I:** Entonces aquí… (señalando el ejercicio) ¿Qué tenemos que hacer en todo esto? **A:** Lo sumamos	+(+3)+(+4) +(+7) =	© ***Sg***	***Al realizar entrevista comete errores.***
8:04:46	56	**I** **A** **I**	**I:** Los sumamos todos **A:** 7 y 3… 10 y… 14. **I:** 14			
8:04:51	57	**I** **A**	**I:** ¿Y aquí? **A:** Aquí es más por más, se suma; menos por más se resta y menos por menos, se suma… (Marcando cada número de la operación a realizar)… Entonces ¿sumo esto, le resto esto y sumo esto?	+ (+27) – (+11) – (–15) =	© ***Sg***	

8:05:02	58	I A	**I:** Ajá **A:** 27 más 11, mmmm, 38 menos 15…			***Al describir el procedimiento comete errores.***
8:05:09	59	I A	**I:** A ver ¿cómo, cómo, cómo? **A:** 38,	+ (+27) – (+11) – (–15)=	© ***Sg***	
8:05:21	62	I A	**I:** ¿Entonces, se suma o se resta? **A:** Se resta y me da 16			
8:05:27	64	I A	**I:** ¿Y luego? **A:** Le sumo 15. Realiza las operaciones en la hoja y establece que el resultado es 31 positivo	+ (+27) – (+11) – (–15)=		
8:05:38	66	I A	**I:** ¿Y el último? **A:** El último todos se suman… (Marcando cada número de la operación a realizar)	– (–19) – (–23) – (–30)=	© ***Sg***	
8:05:46	69	I A	**I:** Ok, ¿Entonces cuánto me daría? **A:** mmmm, 19 más 23, (realiza la suma en la hoja) 72 (Señalando las operaciones que ha realizado)	– (–19) – (–23) – (–30)=	© ***Sg***	
8:06:04	71	I A	**I:** Ok, ¿Por qué? **A:** Porque todos estos se sumaron, menos, menos, se suma			
Ítem d) Solucionar ejercicios con ayuda de recta.						
8:07:02	78	I A	**I:** ¿Cómo dice? **A:**+ (+ 12 – 8 + 16 – 24) =	+(+12–8 +16–24)=	N	***Este ítem completo había quedado sin resolver.***
8:07:06	79	I A	**I:** Ok, ¿qué tienes que hacer? **A:** Aquí, es ubicar el resultado aquí ¿no? (Señala la recta numérica dibujada)			
8:07:32	82	I A	**I:** Ok, ese 12 ¿Dónde localizas el 12? **A:** Aquí, en el 0, ¿no? En el 12 (señala en la recta en el lugar donde estaría el 12 positivo)	+(+12–8 +16–24) =		
8:07:41	84	I A	**I:** 12 menos 8 **A:** (empieza a contar en la recta los 8 lugares desde el 12 positivo y hacia el 0, hasta ubicarse en el 4) cuatro.	+(+12–8 +16–24) =	***Ss*** y ***Sg***	
8:07:45	85	I A	**I:** 4 ¿y luego? **A:** Más 16,			Va contando desde el 4 positivo, hacia la derecha, 16 lugares y llega a un número, que se encuentra
8:07:54	87	I A	**I:** ¿A qué llegas? **A:** Al 19		Er	
8:07:57	88	I A	**I:** ¿19? **A:** Sí			

8:07:59	89	**I** **A**	**I:** A ver, estas en el 4 **A:**Mmm, aja, uno, dos, (comienza nuevamente a contar en la recta, hacia la derecho, comenzando del 4 positivo ¿Cuánto es? Mmmm 16, uno, dos, tres,… al 20 positivo	+(+12–8 +16–24) =		fuera de la recta dibujada, lo cual provoca que tenga error de procedimiento.
8:08:16	91	**I** **A**	**I:** 20 positivo ¿y luego? **A:** Menos 24			
8:08:19	92	**I** **A**	**I:**mmmm, aja menos 24 **A:** Aquí eran 4 ¿verdad? (Indicando los lugares que no están marcados en la recta.). Mmmm menos 3	+(+12–8 +16–24) =	Er	Y comienza a contar 24 lugares hasta ubicarse en un número
8:08:35	94	**I** **A** **I**	**I:** A ver, estabas en el 20 **A:** 4, 5, 6, …, 24, menos 4 **I:** aja, menos 4	+(+12–8 +16–24) =	© ***Ss, Sg As***	***Resultado correcto, procedimiento aun con error.***
8:09:03	95	**I** **A**	**I:** ¿Y en este caso? **A:** Menos, más, se resta… se resta y luego ¿se suma?	–(+19+13) –(+21–15)=	N	
8:09:20	97	**I** **A**	**I:** Este signo negativo, que está afuera, (señalando el signo que se encuentra fuera del primer paréntesis) afecta todos los signos que están adentro y los cambia **A:** ¿En negativo?	–(+19+13) –(+21–15)=		
8:09:43	99	**I** **A**	**I:** Y si uno es negativo con la afectación del negativo, cambia, ¿sale? **A:** Ajá, entonces seria, ¿aquí se suma?, sería 19 positivo			
8:09:51	100	**I** **A**	**I:** 19 positivo más 13 positivo **A:** Más 13 positivo ¿lo hago, ahorita?	–(+19+13) –(+21–15)=		***Se auxilia de recta numérica.***
8:09:56	101	**I** **A**	**I:** Sí, por favor **A:** 19 más 13, mmm 1, 2, 3, …, 13, más 32	–(+19+13) –(+21–15)=	Er	
8:11:16	102	**I** **A**	**I:** Más 32, pero como el signo negativo está afuera, ¿qué tienes que hacer? **A:** ¿Restarlo?			
8:11:25	104	**I** **A**	**I:** ¿Y entonces me queda? **A:** Menos 32			
8:11:31	106	**I** **A**	**I:** Esa es la primera parte y luego te dice: menos **A:**– (+ 21 – 15)	–(+19+13) –(+21–15)=		
8:11:48	109	**I** **A**	**I:** Primero vamos por partes. Primero haces esto. **A:** Menos 21 más 15.	–(+19+13) –(+21–15)=	Er	Comienza del 21 positivo a restar 15

8:11:59	111	**I** **A**	**I:** Pero es menos 21 **A:** Por eso voy para acá. (Señalando en la recta que partiendo del 21 positivo va contando hacia la izquierda 15 lugares). Menos 6	–(+19+13) –(+21–15)=	Er	
8:12:17	113	**I** **A**	**I:** Menos 32 menos 6 ¿cuánto me da? **A:**Mmmmh 32 menos 6 ¿cuarenta y trei… y 26?		Et	***Al realizar la operación mental, su resultado indica una resta, cuando debía ser suma.***
8:12:31	114	**I** **A**	**I:** ¿40 y 26? **A:** 26			
8:12:34	115	**I** **A**	**I:** Uno es negativo y el otro también es negativo. **A:**Mmmh, ¿entonces se suma?			
8:12:41	117	**I** **A**	**I:** Sí, se suman y sí se suman ¿qué me da? **A:** 32 y 6… 38 ¿más 38? O ¿menos 38? Menos 38. Porque los dos son negativos.	–(+19+13) –(+21–15)=	© ***Ss, Sg, As***	***Logra analizar correctamente la operación sugerida.***
ítem e) Escribir el número faltante						
8:13:10	122	**I** **A**	**I:** ¿Y luego? **A:** 15 más menos…. Igual a menos 3… Menos 18	15+__ = –3	© ***Sg, As***	
8:13:17	124	**I** **A**	**I:** ¿Por qué? **A:** Porque es más 15 menos 18 igual a menos 3	15+__ = –3		
8:13:23	125	**I** **A**	**I:** ¿El segundo? **A**: Más… más 20 menos 18 igual a menos 2	+ ____ – 18 = + 2	© ***Ss***	
8:13:33	127	**I** **A**	**I:** ¿Por qué pusiste más 20? **A:** Porque más 20 y 18 igual a más 2			
8:13:37	128	**I** **A**	**I:** ¿Por qué? **A:** Porque se restan	+ ____ – 18 = + 2	© ***Ss***	
8:13:40	129	**I** **A**	**I:** El siguiente **A:** – 24 más – 26 = – 2	–24+___= – 2	Et	
8:13:45	130	**I** **A**	**I:** ¿Por qué menos 26? **A:** Porque menos y menos… (Señala cada uno de los números indicados mientras sigue sumando). ¡Ay! Era más. Porque más menos se suman.	–24+___= – 2	En	
8:13:53	131	**I** **A** **I**	**I:** ¿Entonces? ¿Cómo quedaría el resultado realmente? **A:** Aquí es más 26 **I:** Más 26		En	
8:13:58	132	**I** **A**	**I:** ¿Y el siguiente? **A:** Menos 8 menos 2 igual a más 10	– _____ – 2 = + 10	Et	
8:14:07	134	**I** **A**	**I:** ¿Por qué? **A:** Porque menos y menos se suma.			

8:14:10	135	**I** **A**	**I:** Menos y menos se suma, pero tengo un 8 negativo y un dos negativo y me da ¿cuánto? **A:** Más 10, ¿no?	– _____ – 2 = + 10	Es	***Olvida el signo del resultado TC4***
8:14:19	136	**I** **A**	**I:** Tú me acabas de decir que se suman si los dos son negativos, sí. Pero, ¿se cambia el signo? O ¿se deja el signo? **A:** Se deja			
8:14:27	137	**I** **A**	**I:** Se deja el signo, tengo un 8 negativo y un 2 negativo, entonces ¿cuánto me da? **A:** Menos 10	– _____ – 2 = + 10		
8:14:37	138	**I** **A**	**I:** Y aquí tengo que llegar a un… **A:** Más 10, entonces ¿más 18? Menos ¿menos 18 menos 2?			
8:14:44	139	**I** **A**	**I:** ¿Por qué 18? **A:** Porque tengo que llegar a 10			***TC3***
8:14:48	140	**I** **A**	**I:** Ajá, tengo que llegar a un 10, pero tengo que quitar un 2, nada más. **A:** ¿Más menos 12?	– _____ – 2 = + 10	©	
8:15:14	145	**I** **A** **I**	**I:** Ok. Entonces la respuesta correcta ¿cuál sería? **A:** Menos doce negativo **I:** ¿Por qué? Porque tiene este signo negativo afuera ¿no?		© ***Ss, Sg, As***	
8:15:23	146	**I** **A**	**I:** ¿El siguiente? **A:** Menos 100 menos… igual a cero Menos 100 más 100 positivo	–100 – ____ = 0		
8:15:32	148	**I** **A**	**I:** ¿Más 100 positivo? Ya tengo 100 negativos y luego menos y menos… **A:** Menos más 100		Es	
8:15:41	149	**I** **A**	**I:** ¿Menos por más? Menos. A 100 negativos le resto otros 100 **A:** Queda 0	–100 – ____ = 0	Es	
8:15:54	150	**I** **A** **I**	**I:** ¿Segura? **A:**Ajá **I:** ¿Sí?			
8:15:56	151	**I** **A**	**I:** A ver, préstame tu pluma, si yo hago: menos 15 más 15; menos 15 menos 15 y más 15 más 15, ¿cuáles son las respuestas de estas 3? **A:**Mmmh… (comienza a resolver los ejercicios y pone los resultados correspondientes: – 15 + 15 = 0 – 15 – 15 = – 30 + 15 + 15 = + 30	– 15 + 15 = – 15 – 15 = + 15 + 15 =		

8:16:28	152	**I** **A** **I**	**I:** ¿Por qué? **A:** Porque menos y más se resta, menos y menos se suma y más y más se suma. **I:** Ok.			
8:16:38	153	**I** **A**	**I:** Pero aquí, tú me estás diciendo: menos 100 ¿menos por más? **A:** Menos por más, se resta	– 100 – 100 =		
8:16:51	154	**I** **A**	**I:** Se resta, menos 100 ¿a qué es igual esto? **A:** A cero			
8:16:55	155	**I** **A**	**I:** Menos 100 menos 100 ¿no se parece a menos 15 menos 15? **A:** A más 0			
8:17:03	156	**I** **A**	**I:** Menos 15 y menos 15 igual a **A:** Menos 30			
8:17:05	157	**I** **A**	**I:** ¿Y menos 100 menos 100? **A:** Igual a más doscientos.	– 100 – 100 =		
8:17:10	158	**I** **A**	**I:** ¿Más? **A:** Menos 200	– 100 – 100 =		
8:17:13	159	**I** **A**	**I:** Menos 200. Yo quiero obtener un 0. **A:**Mmmj, entonces… ¿cómo le hago?			
8:17:19	160	**I** **A**	**I:** ¿Cómo crees que le harías? **A:** ¿Lo cambiamos a positivo?			
8:17:24	161	**I** **A**	**I:** Aquí ya tienes un positivo (señalo en su ejercicio la respuesta que indica + 100). **A:**Mmmj	–100 – ____ = 0		
8:17:27	162	**I** **A**	**I:** Aquí tienes… este signo no lo puede cambiar, pero, ¿cómo puedo hacer que se cambie, para que éste, en lugar de que me dé negativo, se cambie a positivo? **A:**Mmmh	–100 – ____ = 0		
8:17:49	164	**I** **A**	**I:**Mmmj… entonces ¿qué signo tendrías que poner aquí? **A:** ¿Menos?			
8:17:55	165	**I** **A**	**I:** ¿Para qué? **A:** Para que quede… para que se sume			
8:17:58	166	**I** **A**	**I:** Para que se vuelva positivo. **A:** Ajá			
8:18:00	167	**I** **A**	**I:** Entonces ¿Cómo quedaría la respuesta? Si yo tengo menos 100 menos algo y yo quiero tener 0 **A:** ¿Menos 100 menos más 100?	–100 – ____ = 0		
8:18:11	168	**I** **A**	**I:** Si le pongo más 100, me vuelve a dar negativo. **A:** Menos 100 menos – 100, (escribe – 100) ¿así?	–100 – ____ = 0		

8:18:20	169	**I** **A**	**I:** ¿Y me da? **A:** Tiene que dar 0			
ítem f) Sumas con literales						
8:18:26	170	**I** **A**	**I:**¿Cuánto me da esto? **A:**Mmmh, …, son 7x + 9y + 4 = 20	7x + 9y + 4 =	Et	***Tema no visto en clase.***
8:19:01	171	**I** **A**	**I:** ¿Por qué? **A:** Porque lo sumé			
8:19:05	172	**I** **A**	**I:** Mmmm lo sumaste ¿Lo puedes sumar? **A:** Sí			
8:19:13	174	**I** **A**	**I:** Y ¿Cuánto me da eso? ¿Qué dice? **A:**4a – 3a igual a uno a,	4a – 3a =	©	