Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

UNA PROBLEMATIZACIÓN DE LA PARÁBOLA EN SU CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA

TESIS

Que presenta

ZULEYMA SARAHÍ PÉREZ MOGUEL

para obtener el Grado de

MAESTRA EN CIENCIAS EN LA

ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Directora de la Tesis: **Dra. Gisela Montiel Espinosa**

Ciudad de México Febrero, 2018

AGRADECIMIENTOS

Agradezco enormemente al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado durante mis estudios de posgrado de los cuales resulta este trabajo.

Número de becario: 599127

CONACYT

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

AGRADECIMIENTOS

Primero que nada le agradezco a Dios por estas oportunidades que presenta en mi vida, por la sabiduría, fortaleza y protección que me brindo todo este tiempo. Te agradezco y te dedico este logro en mi vida profesional. Gracias por ser mi guía en este camino, por todo lo que aprendí y por la familia hermosa que me regalaste aquí.

Le agradezco enormemente también a mis padres, Lidia y Fernando, por ser mi motor principal, por apoyarme en cada meta que me propongo, por hacerme sentirlos cerca a pesar de la distancia, por su amor, confianza, apoyo y motivación de todos los días.

Mamá se lo difícil que fue el principio, pero te agradezco tu fortaleza y tu apoyo incondicional, por mantenerte fuerte y mantenerme fuerte en los momentos que era difícil, gracias por tanto, gracias por todo lo que me has enseñado, soy la persona que soy gracias a ti, gracias por ser mi ejemplo de mujer. Te amo.

Papá, me parezco tanto a ti y aprovecho eso para luchar y conseguir lo que quiero, gracias por enseñarme a trabajar duro por lo que sueño, gracias por todo lo que te esfuerzas para siempre apoyarme en todo lo que pude necesitar y por darnos tanto a mis hermanos y a mi. Te amo.

Gracias a mis hermanitos, Gabriela, Fernando, Roberto y Jesús, por ser mis complices en esto y los motores que me mueven para ser mejor persona y simpre darles un buen ejemplo, la mejor versión de mi, estoy muy orgullosa de los cuatro y de lo que están logrando, estoy segura que llegarán muy lejos. Los amo.

Agradezco enormemente también a mi directora de tesis, la Dra. Gisela, por todo lo que aprendí de usted, por su apoyo tanto en lo personal cuando hubieron tiempos difíciles como en mi proyecto de investigación, por todas las ideas discutidas, por todo el tiempo dedicado, un gran ejemplo a seguir en todos los aspectos, la quiero mucho.

Muchas gracias a mis sinodales, la Dra. Farfán y el Dr. Lezama, por el tiempo dedicado y las reflexiones hechas a mi investigación.

Gracias al Dr. Cantoral, por todo el apoyo brindado y el interés mostrado durante el desarrollo de mi investigación, gracias por su cariño, confianza y calidad humana, todos mis respetos y admiración para usted.

A mi familia por elección, esos hermanos que me acompañaron estos poquito más de dos años: Gaby, Rodolfo, Cristian, Cristina, Fabián, Francisco y Susana, sin ustedes no hubiera sido posible esto. Gracias por su cariño, por todo lo que aprendí de ustedes, por tantas risas y hermosos momentos compartidos. Gracias por ser en realidad esa familia que me apoyó en todo, que me aconsejó, me divirtió y también que me escucho las mil veces que necesité

hablar de mi trabajo. De verdad lo digo, los voy a extrañar demasiado, los quiero montones y espero conservar su amistad por siempre.

Gaby, mi choquita, eres una hermana para mí, lo sabes. Eres la persona en la que confie plenamente y todo lo que pasaba en mí vida. Eres la que más escuchó sobre mi trabajo también, la que se tomó el tiempo de pensar un poquito más en geometría a pesar de que no era de tus favoritas, gracias por eso, por escucharme en cada ponencia en congresos y en los seminarios, por hacerme pensar en detalles que no quedaban claros, por todo lo que aportaste a mi investigación. Pero sobretodo gracias por todo lo que compartimos estos años, las risas, llantos, regaños, locuras, necedades, por tanta alegría que me regalaste, tienes un corazón enorme aunque aveces no lo demuestres, pero yo si lo descubrí y por eso y más te quiero tanto. Gracias por tanto. Te voy a extrañar.

A todas las personas que constribuyeron de alguna manera en mi proyecto y que forman parte de mi vida ahora, gracias, de cada uno me llevo lo mejor: María Antonieta, Diana, Gerardo, Sergio, Karina, Mayra, Angie, Naty, Kristel, Uzziel, Selvín, Rebeca, Viridiana, Daniela, gracias por todo, se les aprecia mucho.

Gracias infinitas también a Adriana y Jadde por todo el apoyo brindado en cada duda que tuve durante mi estancia como investigadora, gracias por el profesionalismo que siempre tienen, por su entrega y siempre regalarme una sonrisa.

Gracias a dos personas especiales que conocí aquí y con las que consté siempre que solicité su ayuda, sin duda grandes personas, grandes amigos, los quiero Paco y Claudia.

Le agredezco y le dedico también este logro a mi primo Beny, por todo lo que me enseñaste en tu lucha: a siempre seguir los sueños, nunca rendirse, siempre fuertes y sonriendo a pesar de todo. Gracias, te quiero y te extraño.

Gracias a mis amigos de Mérida, por todo el apoyo y la motivación brindada siempre y a pesar de la distancia, especialmente gracias a Lissy, Desy, Miriam, Pili, Mariely, Marisol, Minerva, Carlos, Abraham, Andrés, Roberto y Rafael. Gracias por ser parte de mi vida y de este logro, los quiero.

Gracias también Aguilera, por el apoyo brindado este tiempo, por tus palabras de ánimo cuando las necesité, por acompañarme en los tiempos difíciles que tuve aquí, gracias por el cariño que demostraste y por la preocupación que siempre tuviste por mí. Gracias por todo lo que he aprendido gracias a ti.

Gracias a todos por todo, estoy muy feliz y orgullosa de este trabajo y por lograr una meta más en mi vida, con mucho cariño se los dedico.

Zuleyma Sarahí Pérez Moguel.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS Y TABLAS

Resumen

Este trabajo de investigación plantea la problematización de la cónica parábola, a través del estudio de algunos procesos de construcción geométrica provenientes del corte de un cono, como envolvente de rectas tangentes y finalmente como lugar geométrico, en particular uno histórico, en la obra “Las Cónicas” de Apolonio, y algunos reportados en propuestas de innovación didáctica. En un intento por responder a la problemática sobre la falta de equilibrio entre el trabajo geométrico y el algebraico que se da al estudiar las cónicas y que quizás provoque una falta de significados sobre éstas. La investigación se fundamenta en la teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa utilizando sus dimensiones, principios básicos y su modelo de anidación de prácticas en sus primeros dos niveles. Hace uso de metodologías de análisis sociohistórico y documental, realizando un estudio general del desarrollo de la parábola y de su proceso constructivo en las construcciones geométricas hechas por Apolonio y las que se presentan en algunas propuestas de innovación didáctica, esto con el propósito de confrontar ambos procesos. Nuestro objetivo es caracterizar lo propio de la parábola como cónica que permita representarla y definirla como lugar geométrico, para ello identificamos los elementos y propiedades geométricas que permitan significar esta cónica, para lo cual utilizamos un método de análisis de contenido que nos permitió hacer un análisis cuidadoso del trabajo geométrico realizado por Apolonio. Entre los resultados del análisis determinamos elementos geométricos de la parábola como sección proveniente de un cono tal como se construyó en sus inicios, que permanecen en los métodos de construcción de una parábola como lugar geométrico, más actuales. Determinamos también que las relaciones que cumple la sección cónica para tratarse de una parábola, son las condiciones o características que la constituyen como un lugar geométrico en el plano aunque no en el sentido de lugar geométrico parábola. De igual forma este trabajo nos llevó a reflexionar sobre la manera en que se está haciendo geometría y sobre todo lo que se está entendiendo por hacer geometría.

Abstract

This research work proposes a problematization of the conic curve parable, by the study of some geometric construction processes from the cuts made on a cone, as a wrap of the tangent straight lines and finally as a locus, in particular we use one from the Conics of Apollonius, and some of the ones reported on didactic innovation approaches. In an attempt to answer the problem about the lack of balance between the geometric and algebraic work that occurs when studying the conics and that may cause a lack of meanings on them. The research is based on the Socioepistemology Theory of Mathematics Education using its dimensions, basic principles and its practice nesting model in its first two levels. We did a sociohistorical study and a documentary analysis, using the content analysis in its qualitative phasein orden to make a general study of the development of the parabola and its constructive process, on the Conics made by Apolonio and on those that are presented in some didactic innovation proposals. This with the purpose of confronting both processes. Our objective is to characterize the parabola itself as conical that allows it to be represented and defined as a locus, for which we identify the geometric elements and properties that allow this conic to be used, for which we used a method of content analysis that allowed us to analyze careful of the geometric work done by Apollonius. Among the results of the analysis we determine geometric elements of the parabola as a section coming from a cone as it was built in its beginnings, which remain in the most current construction methods of a parabola as a locus. We also determine that the relations that the conic section fulfills in order to be a parabola, are the conditions or characteristics that constitute it as a locus in the plane, although not in the sense of a parabola geometric place. In the same way this work made us to reflect on the way in which geometry is being done and above all what is being understood to do geometry.

CAPÍTULO I

PROBLEMÁTICA

INTRODUCCIÓN

La geometría analítica es la rama de las Matemáticas que se encarga del estudio de las figuras geométricas en el plano cartesiano, apoyados del análisis matemático y del álgebra, coloquialmente se dice que es *la algebrización de la geometría*.

En el sistema educativo mexicano esta asignatura se aborda en el tercer semestre del Nivel Medio Superior (NMS) después de haber llevado los cursos de Álgebra y de Geometría Plana y antes del de Precálculo. La enseñanza de las cónicas es parte importante de los contenidos de la Geometría Analítica en el Nivel Medio Superior (NMS) y se retoman en la Educación Superior para carreras profesionales relacionadas con las ciencias exactas e ingenierías. Sin embargo, para su estudio se continúa dando mayor énfasis a los dominios algebraicos sobre los geométricos, enfocando el aprendizaje de los estudiantes a la algoritmia y la memorización, donde los procesos algebraicos se sobreponen a las construcciones geométricas de dichos objetos matemáticos.

Es común que para aprobar los cursos de Geometría Analítica baste que el estudiante maneje con dominio las expresiones algebraicas de las cónicas: que sea capaz de determinar la ecuación de una cónica dados sus elementos o que dada la ecuación, a través de manipulaciones a ésta, identifique los elementos de la cónica. Ambas estrategias de trabajo se acompañan con un bosquejo de la gráfica, sin embargo, su estatus en la actividad matemática es más ilustrativa; es decir, no constituye un contexto de interacción con la naturaleza geométrica de la cónica. En consecuencia, las evaluaciones de los cursos se centran justamente en valorar que tal dominio algebraico se ha logrado; lo que se reconoce como una limitación en los significados construidos y que juegan un papel relevante en el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante.

Nos encontramos ante esto con una falta de significado de las cónicas, lo que puede provocar que los estudiantes, por ejemplo, no evoquen el uso de sus ecuaciones en la resolución de aplicaciones de la vida diaria. En ese sentido, planteamos, que resulta necesario equilibrar el trabajo algebraico con el geométrico en la interacción del estudiante con las cónicas, para permitirle no sólo relacionar ambos contextos, sino significar desde cada uno de ellos las características, propiedades y elementos que las conforman.

A pesar de que el tema de las cónicas, en la mayoría de los Planes y Programas de Estudio del Nivel Medio Superior del Sistema Educativo Mexicano, tiene asignado una parte considerable del curso de Geometría Analítica y de que hay una buena intención por parte de las instituciones al plantear como uno de sus propósitos hacer este equilibrio entre el trabajo algebraico con el geométrico con las cónicas, en el aula aún no se logra, ya que incluso en los libros de texto se favorece el enfoque algebraico.

Por el ejemplo, en el Plan de estudios de la Dirección General de Educación Tecnológica Industrial (DGETI) (Figura 1), el curso de Geometría Analítica tiene como propósito que el estudiante resuelva diversas situaciones problemáticas de su contexto por medios gráficos y analíticos que incluyan la representación de figuras en el plano cartesiano, para lo que deberá interpretar, argumentar y comunicar sus métodos de resolución (DGETI, 2016).

La siguiente imagen muestra el plan de estudios de esta asignatura. En ella podemos observar que el curso de Geometría Analítica se divide en cuatro secciones, la última de éstas, es la correspondiente a las cónicas.

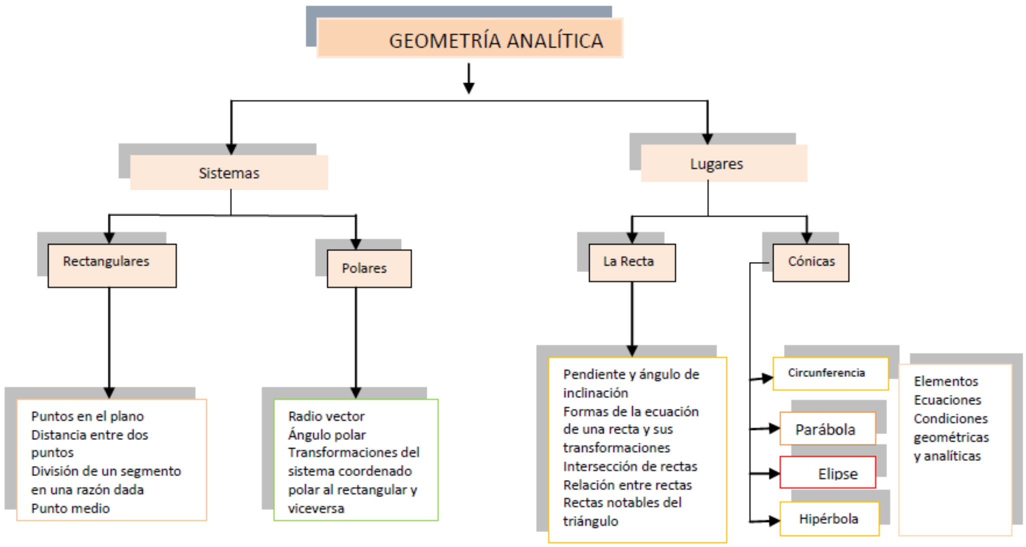


Figura 1. Programa de estudios de la Dirección General de Educación Tecnológica Industrial (DGETI, 2016, p. 26).

En el plan de estudios de la Subsecretaria de Educación Media Superior, Dirección General de Bachillerato (DGB), después de ver los temas “los elementos de una recta como lugar geométrico” y “utilización de distintas formas de la ecuación de una recta”, se aborda “la aplicación de los elementos y las ecuaciones de las cónicas” (circunferencia, parábola y elipse), en este plan de estudios, no se incluye la hipérbola, pero tampoco se justifica el por qué (DGB, 2013).

En la siguiente imagen (Figura 2) se presenta el bloque correspondiente al tema de la parábola, en ella se puede observar que entre los objetivos de aprendizaje no se encuentra realizar la representación geométrica de la parábola y no en un sentido de bosquejo gráfico, sino a través de un proceso de construcción geométrico. Únicamente se estudian las representaciones algebraicas, pues dada una ecuación se pretende que el estudiante identifique los elementos de esta cónica, que determine sus ecuaciones en sus distintas formas (ordinaria y general), así como que sean capaces de resolver situaciones en contextos extramatemáticos donde se ponga en uso la parábola, descuidando así la representación geométrica de ésta.

MATEMÁTICAS III

Bloque	Nombre del Bloque	Tiempo asignado
VI	APLICAS LOS ELEMENTOS Y LAS ECUACIONES DE LA PARÁBOLA	12 horas

Desempeños del estudiante al concluir el bloque
Identifica los elementos asociados a la parábola Reconoce la ecuación ordinaria y general de la parábola Aplica los elementos y ecuaciones de la parábola en la solución problemas y/o ejercicios relacionados con su entorno.

Objetos de aprendizaje	Competencias a desarrollar
La parábola Elementos asociados a la parábola Ecuación ordinaria de parábolas verticales y horizontales con vértice en el origen Ecuación ordinaria de parábolas verticales y horizontales con vértice fuera del origen Ecuación general de la parábola	Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. Diseña y aplica modelos para probar su validez. Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información. Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiablidad. Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.

Figura 2. Programa de estudios de la Dirección General de Bachillerato (DGB, 2013, p. 42).

Otro caso, es el de las preparatorias de la Universidad Autónoma de Yucatán (UADY), pues con el nuevo Modelo de Educación los profesores se apoyan de un material que diseñaron para el curso de geometría analítica cuyos problemas planteados son los mismos que los del libro de texto que han utilizado por años en el *Modelo Educativo y Académico*, modelo de educación anterior. La siguiente imagen (Figura 3) presenta los objetivos de aprendizaje respecto de las cónicas, que de manera similar a las otras dos instituciones mencionadas anteriormente, se parte de la representación algebraica para identificar los elementos y propiedades de cada cónica o de manera inversa, se pretende deducir dicha ecuación dados los elementos de la cónica.

Escuela Preparatoria (N)
Período: Agosto/Diciembre 2016
Tercer Semestre

Secuencia de Actividades de la Asignatura La representación matemática y sus aplicaciones
Unidad 2: Lugares geométricos
Actividad 7. Las secciones cónicas

Valor: 16 puntos

Resultado de aprendizaje: Resuelve problemas reales o hipotéticos relacionados con las secciones cónicas, de manera clara y ordenada.

Tiempo presencial: 1440 Minutos **Tiempo Independiente**: 360 Minutos

Descripción de la Secuencia de Actividad:
INICIO
1. En plenaria, revisar la presentación **Las secciones cónicas**, donde se analiza la definición de cada una de las secciones cónicas como un lugar geométrico (circunferencia, parábola, elipse e hipérbola), sus propiedades, sus elementos, y además se deduce su ecuación.

DESARROLLO
2. En equipos colaborativos resolver 4 ejercicios geométricos relacionados con cada uno de las secciones cónicas. Total 16 ejercicios.

Figura 3. Material de apoyo (Preparatoria 2, UADY, 2016).

Aunque como parte del desarrollo de la actividad se menciona que se resolverán cuatro ejercicios geométricos, si se observan los ejercicios propuestos, en ellos se invita al estudiante a realizar un bosquejo de lo que representaría a la parábola, sin embargo, no se explota esta práctica de manera que al realizar la construcción geométrica sea capaz de identificar las propiedades de la cónica, sus elementos y el porqué de su definición como lugar geométrico.

Los ejemplos anteriores nos muestran que las actividades propuestas y realizadas en las aulas siguen recayendo en la memorización y la algoritmia, impidiendo que el estudiante analice, reflexione o argumente procedimientos realizados, y quizá por ello, con el paso del tiempo dichos conocimientos serán olvidados.

Para acotar y situar un proyecto de investigación que atendiera esta problemática se llevó a cabo una búsqueda y revisión bibliográfica de los estudios que hasta el día de hoy se han realizado en relación a la enseñanza y el aprendizaje de las cónicas. De inicio, y como suele suceder en el desarrollo de nuestra disciplina, encontramos que algunos autores reportan esta misma problemática en la que no se prioriza la construcción geométrica de las cónicas, sino que el énfasis está en las representaciones algebraicas de las mismas. Encontramos estudios de corte histórico, donde se estudiaban los primeros acercamientos a una de las cónicas por parte de los matemáticos Apolonio y Descartes; de corte cognitivo, donde la atención estaba en los significados asociados a las cónicas, y de innovación didáctica, en los que se proponían alternativas o secuencias de enseñanza.

Haremos un reporte detallado de la literatura encontrada en la siguiente sección y hacia el final de este capítulo, delimitaremos nuestro problema de investigación.

1.1. ANTECEDENTES

Para este trabajo se realizó una búsqueda exhaustiva sobre estudios realizados hasta el momento sobre las cónicas, puesto que estudios únicamente sobre la parábola eran muy pocos. Decidimos hacer la búsqueda con este orden de importancia de documentos: artículos de revistas especializadas, tesis, libros especializados y artículos en memorias o actas de congreso. Durante la búsqueda y para una mejor organización hicimos una clasificación del tipo de trabajos encontrados, esta clasificación fue: estudios de corte histórico, de corte cognitivo y de innovación didáctica; retomando de esta manera, los trabajos que consideramos más significativos y que apoyan la dirección dada a este proyecto de investigación.

Investigación de corte histórico

El trabajo de corte histórico nos permite reconocer la importancia de las construcciones geométricas en el trabajo de Apolonio para tener claridad sobre los elementos constitutivos de las secciones cónicas. Al respecto, Contreras, Contreras y García (2002) identifican la problemática reportada en la sección anterior, en los programas educativos españoles. Los autores reportan que es notable que el estudio de las curvas cónicas se aleja un tanto de la parte geométrica para dar exclusividad a la parte algebraica de las mismas, donde se empobrece la *intuición geométrica* y, consecuentemente, las propiedades geométricas de las mismas. Su trabajo es relativo al estudio de la cónica elipse, y en él, se hace un análisis de las construcciones y procesos tanto geométricos como analíticos hechos por los matemáticos Apolonio y Descartes, respectivamente.

Comienzan con el análisis del trabajo de Apolonio teniendo como referencia a Douady (1992) quien toma a la elipse como la sección de un cono por un plano no perpendicular a su eje. Por ejemplo, en la siguiente imagen (figura 4) los autores presentan los trazos hechos por Apolonio y resaltan las dos secciones circulares, perpendiculares al eje del cono, de donde Apolonio toma los triángulos rectángulos KCL Y K'C'L' para establecer relaciones, así como los triángulos semejantes GMK con GM'K' y AML con AM'L', estableciendo también relaciones que posteriormente intercambiará y sustituirá unas con otras hasta llegar a la relación $\frac{MC^2}{MA \cdot MG}$.

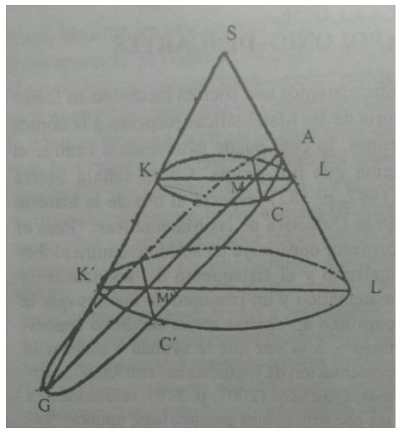


Figura 4. Construcción de Apolonio de la elipse a partir del corte de un cono. Fuente: Contreras, Contreras y García (2002, p. 118).

$$\frac{MC^2}{MA \cdot MG}$$

Esta relación será igual a la constante para todo punto que pertenezca a la elipse. Este primer análisis los autores lo hicieron con el fin de probar el *método sintético de construcción*, que en términos de *interacción con el cono* podríamos considerar como la *construcción geométrica de la elipse*, dados los procedimientos realizados y los elementos geométricos puestos en juego para obtenerla.

Análogamente se utilizó el libro Geometrie de Descartes, para entender como utiliza Descartes las construcciones realizadas por Apolonio unos siglos antes, para establecer su ecuación cartesiana. Los autores destacan que Descartes calcula la normal a una curva en un punto y, haciendo uso del triángulo rectángulo que resulta de hacer algunos trazos, utiliza el teorema de Pitágoras para llevar a cabo sustituciones y cambios de variable que resulten en la constante $\frac{r}{q} = \frac{MC^2}{MA \cdot MG}$, que Apolonio ya había definido. Después de otros procedimientos algebraicos, Descartes finalmente obtiene la ecuación de la elipse. Con la siguiente imagen (Figura 5) los autores destacan uno de los trazos geométricos de los que se apoya Descartes en este proceso de establecer relaciones y manipularlas algebraicamente hasta llegar a la ecuación de la elipse.

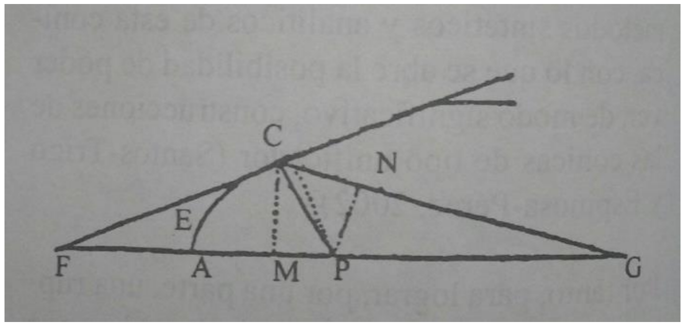


Figura 5. Construcción utilizada por Descartes para llegar a la ecuación de la elipse. Fuente: Contreras, Contreras y García (2002, p. 118).

Los autores denominan *analítico* al método utilizado por Descartes, pues está presente un "rebuscado" cálculo algorítmico y señalan que:

> "Descartes necesitó de la relación sintética de Apolonio para obtener la ecuación de la elipse. Es decir, se trata de métodos no enfrentados, sino complementarios y como tales consideramos que se han de presentar en situaciones de enseñanza" (Contreras, Contreras y García, 2002, p. 119).

Tras haber analizado el trabajo de Apolonio y Descartes, con la elipse, los autores presentan ahora algunas construcciones de esta cónica, utilizando distintos métodos. Primero se presentan cuatro ejemplos de construcciones por trazado continuo y después cuatro ejemplos de construcciones por puntos aislados, algunos de los cuales se presentan con el método sintético y el analítico. Posterior a presentarlas, reconocen que:

> Por tanto, es obvio que para dar sentido a este tipo de construcciones se requiere de un repertorio previo de otras construcciones más sencillas que preparen al estudiante para abordar empresas más complejas, de aquí que

> nuestra propuesta pueda ser un buen complemento a este tipo de aproximaciones (Contreras, Contreras y García, 2002, p. 125).

Finalmente, mencionan algunas de las aplicaciones de la elipse, como la polarización y la elipsometría, que podrían utilizarse como elemento motivador y contextualizador de la actividad matemática.

Entre sus conclusiones se menciona que al combinar las situaciones de construcción con técnicas sintéticas y analíticas, en las actividades con los estudiantes de bachillerato pueden conseguirse efectos positivos como preparar mejor a los estudiantes para sus estudios universitarios con amplios conocimientos geométricos sobre las cónicas y no quedarse focalizados en aspectos puramente analíticos.

Investigación de corte cognitivo

La investigación reportada por Bartolini (2010) señala que el significado actual de las cónicas es el resultado de las relaciones complejas entre los diferentes procesos de su estudio durante las diferentes épocas históricas. Dentro de cada período, diferentes significados han sido construidos por los geómetras en la medida en que las cónicas son representativas del desarrollo de *diferentes conceptualizaciones* de *espacio* y *geometría* a través del tiempo.

Con base en este punto de partida, Bartolini hace un estudio con estudiantes, investigando el significado de las cónicas. Afirma que **no es posible construir el significado** de las cónicas mediante un enfoque unilateral, por ejemplo, enfocándose **únicamente a la definición algebraica** de la cónica. Esto apoya al planteamiento de *equilibrar* el trabajo geométrico con el trabajo algebraico, en el estudio de las cónicas, para construir significados y no sólo el dominio de sus estructuras algebraicas.

En su estudio, Bartolini analiza un *experimento de enseñanza* para evidenciar cómo el problema de **la complejidad epistemológica** (en el sentido de Hanna y Jahnke, 1994) y el problema de **la contextualización histórica** se enfrentan, realizando una selección de tareas.

El experimento de enseñanza incorpora una actividad donde los estudiantes interactúan con un *ortotomo* (Figura 6), dispositivo heredado de la tradición griega con el que es posible dibujar cónicas, y de esta manera determinar las propiedades geométricas de los puntos de la curva. Durante esta experiencia, se les presenta a los estudiantes un *anacronismo*, es decir, el objetivo del experimento de enseñanza era estudiar cómo constituyen el significado de la parábola, considerando que éstos son construidos de acuerdo a la época en la que vive el estudiante. Los estudiantes conforman grupos pequeños de distintas edades y se busca identificar las herramientas que desarrollan en cada edad y entender cómo relacionan las diferentes formas de representación que logran.

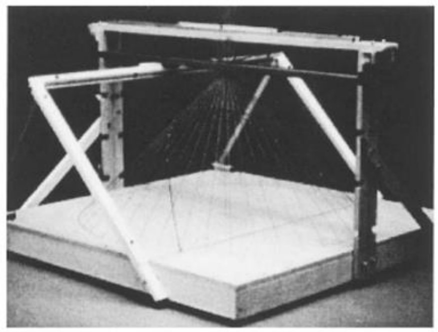


Figura 6. Ortotomo (Bartolini, 2010, p.154).

Una variable clave del diseño es la interacción con modelos físicos (ya sea estáticos o dinámicos), que no se muestran simplemente a los estudiantes sino que son objetos para la investigación de los estudiantes. Así, por ejemplo, a los estudiantes se les da un modelo tridimensional de una sección cónica o un trasmallo plano que dibuja una cónica, y la tarea es determinar las propiedades geométricas de los puntos de la curva. Estos modelos se contextualizan históricamente mediante lecturas guiadas de fuentes históricas.

Con las actividades se logra la equivalencia de la descripción sintética y analítica y su contribución al significado de parábola.

Bartolini (2010) menciona que el significado de los conceptos matemáticos no puede ser construido sólo dentro de la matemática, por lo que el problema de la construcción del significado de las cónicas en el aula debe ser tomado como paradigmático y como representativo de diferentes enfoques de los problemas del espacio y la geometría en los diferentes espacios culturales, es por ello que entre el tipo de introducciones históricas que propone el profesor en sus actividades, no se limitan a la historia interna de las matemáticas, sino que aluden al amplio entorno social y cultural en el que vivían los matemáticos del pasado.

En este proceso, la reconstrucción histórica del significado no es una forma de motivar a los estudiantes o embellecer el problema, sino que es un objeto fundamental de la actividad docente de aprendizaje.

Tal como lo menciona Bartolini (2010), debido a que mucho del significado de las cónicas se pierde, por ejemplo: ¿de dónde vienen sus nombres?, ¿por qué se estudian juntas?, ¿por qué tienen alguna importancia especial en la geometría?, y retomando su idea, en la que afirma que el significado actual de las cónicas es el resultado de una acumulación de términos, problemas, formas de representación así como de las reglas de acción sistemas de control heredados de los diferentes períodos de tiempo, intentaremos retomar estos significados partiendo de la construcción geométrica realizada por Apolonio en su obra "Las Cónicas", así como aquellos significados que se derivan de construcciones geométricas más actuales.

De acuerdo a todo lo anterior mencionado, consideramos que es igual de importante estudiar cada una de las cónicas, sin embargo, debemos tomar una de ellas para iniciar con esta línea de investigación. En este trabajo por tanto, nos interesa el estudio de los significados derivados de la construcción geométrica de una de las secciones cónicas, la parábola. Apoyados del análisis de las construcciones geométricas realizadas en la historia, en su contexto original y retomando también propuestas de construcción más actuales, creemos que es posible recuperar formas de darle significado a la parábola como cónica, favoreciendo la parte geométrica para equilibrarla con la algebraica.

Propuestas de innovación didáctica

La tradición de atender más al trabajo algebraico se ha mantenido aun cuando algunos reportes didácticos proponen alternativas de construcción de las cónicas utilizando distintos métodos y herramientas. En esta sección reportamos algunas de estas alternativas didácticas, que hemos agrupado como *innovaciones* y distinguimos de instrumentos didácticos de investigaciones de diseño.

Real (2004), por ejemplo, propone el estudio de las cónicas como formas geométricas que se pueden generar de múltiples formas y que verifican propiedades que son utilizadas en la vida cotidiana. El autor menciona que es común, en la enseñanza, introducir las cónicas como provenientes de los cortes hechos a un cono:

> Las cónicas se generan al cortar un cono con un plano en distintas posiciones y, para explicárselo, se usa el típico dibujo de un cono cortado por varios planos, encontrándose los alumnos con un dibujo de difícil interpretación espacial, siendo imposible esta interpretación para los alumnos que carecen de visión espacial (Real, 2004, p.71).

Aunque reporta haber realizado un estudio con estudiantes de 4° de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) (del sistema educativo español), el cual correspondería al primer grado de bachillerato del Sistema Educativo Mexicano, en el documento no se reporta la investigación como tal, pero sí la descripción de las actividades propuestas. El autor reconoce que los estudiantes llegan limitados en su conocimiento sobre las cónicas, refiriéndose a la simple representación en el plano de éstas y a su caracterización como provenientes del corte de un cono con un determinado plano, y añade que en ocasiones no se logran abordar las cuatro cónicas en el curso. Es por esto que el autor propone una secuencia de actividades en las que les presenta a los estudiantes diversas formas de generar las cónicas y de esta manera el estudiante logre construir aprendizajes.

La primera actividad consiste en generar las cónicas con la sombra proyectada en dos embudos negros, con una bombilla alumbrándolos, y una madera rectangular con la que se irá cortando la sombra del cono con determinados ángulos hasta lograr proyectar las cuatro cónicas (Figura 7 y Figura 8).

Figura 7. Generador de Cónicas construido con dos embudos. Fuente: Real (2004, p. 72).

Figura 8. Proyección de la parábola generada con los embudos y la bombilla. Fuente: Real (2004, p. 72).

Posteriormente, se aborda cada cónica (circunferencia, elipse, parábola e hipérbola) recordando primeramente que se genera del corte de un cono por un determinado plano, seguido de eso se presenta la definición como lugar geométrico de cada una, después su generación como envolvente de rectas tangentes y finalmente como la construcción con papiroflexia, cabe mencionar que en el sentido de Apolonio, la circunferencia no es una cónica, pero en el tratamiento que le dan en esta propuesta sí.

Después de presentar la generación de las cónicas y de haberlas definido como lugar geométrico se propone un juego en el que se pretende que el estudiante reconozca y/o distinga las cónicas por las propiedades y componentes de cada una. Se proponen 10 "propiedades" o más bien características de cada cónica y se escriben en cartas que se revolverán, de manera que el ganador deberá juntar las 10 cartas relativas a la misma cónica. El juego está pensado para 6 estudiantes como máximo.

Para el caso de la cónica parábola, el método de generación de la parábola que se propone es el llamado "método del jastre", el cual consiste en generar la *cónica como envolvente de rectas tangentes*. Para eso se toman dos rectas perpendiculares, que aunque en la propuesta no se especifica que deben ser perpendiculares para que se construya la forma parabólica debe cumplir con esta condición, en dichas rectas se marcan puntos con una distancia constante a partir del punto de intersección de las rectas perpendiculares, como se muestra en la siguiente Figura 9:

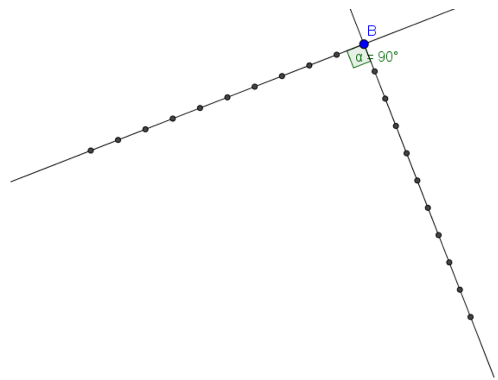


Figura 9. Gráfico de las rectas perpendiculares y de los puntos sobre ellas a una distancia constante.

En cada recta se deben marcar la misma cantidad de puntos con igual distancia cada uno. Después de marcar los puntos, se unirán el último de una recta con el primero de la otra recta, el penúltimo punto con el segundo y así sucesivamente, de esta manera (Figura 10):

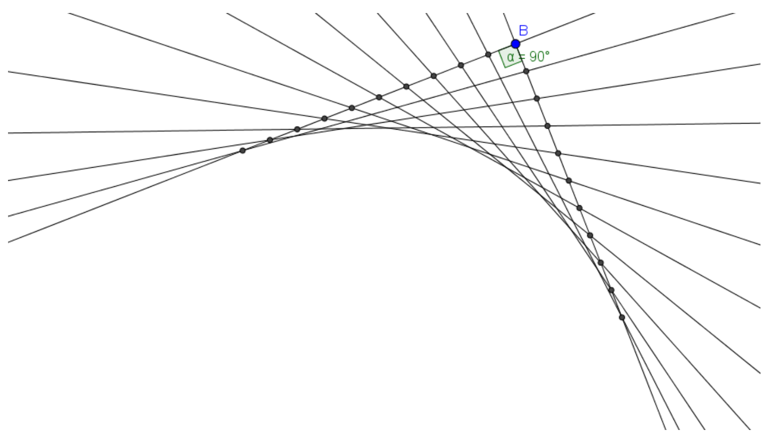


Figura 10. Gráfico de la unión de los puntos con una línea recta.

Este conjunto de rectas serán las tangentes a la parábola. La siguiente Figura 11 muestra el procedimiento realizado:

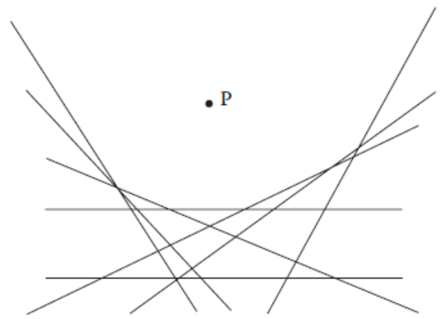


Figura 11. Gráfico de las rectas tangentes a la parábola. Fuente: Real (2004, p. 75).

También se menciona que este método del jastre se puede realizar con una madera, puntillas e hilo, quedando la parábola generada como se muestra a continuación en la imagen:

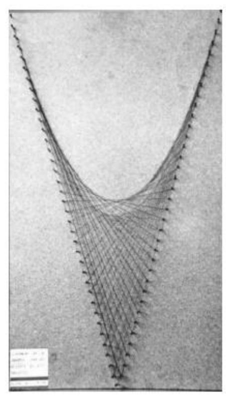


Figura 12. Fotografía de la parábola generada por rectas tangentes simuladas con puntillas e hilos. Fuente: Real (2004, p. 75).

Real (2004) menciona que para la resolución de problemas relacionados con las cónicas en cursos superiores, el estudiante depende de la interpretación y del dibujo que realice con los datos y características que el problema le presente, por lo que será importante que el estudiante comprenda, represente y distinga cada una de las cónicas y sus distintas propiedades.

Entre las conclusiones de este estudio están que los estudiantes sí lograron distinguir cada cónica utilizando sus propiedades, que conocían la definición como lugar geométrico de cada una, que eran capaces de reconocer cada cónica que era generada por el corte de un cono con un determinado plano y que mostraron más interés por las actividades propuestas, y que los aprendizajes construidos serían más duraderos.

Otro ejemplo, de propuestas didácticas, es el realizado por García y Arriero (2000). Éste se propone para estudiantes de 4° de ESO o de Bachillerato y la propuesta consiste en utilizar el software Cabri. Los autores afirman que con ayuda del programa se construyen fácilmente las cónicas, lo que permite hacer un estudio global de estas curvas, tanto desde el punto de vista de la geometría clásica como de la geometría analítica.

La secuencia que proponen inicia con la presentación del software y la explicación de cómo funcionan los comandos que se utilizarán con frecuencia para después seguir con las construcciones de las cónicas con ayuda del software. Todas las indicaciones de las construcciones a realizar se les facilitan en unas hojas-guion a los estudiantes.

Se presenta entonces el primer problema llamado "la escalera", que consiste en una situación de la vida cotidiana y que resolverán apoyados del software Cabri. Posteriormente se empieza a trabajar con las cónicas empezando por la elipse, seguida de la hipérbola y finalizando con la parábola. Para cada construcción geométrica de las cónicas se inicia con la definición de éstas como lugar geométrico, definición que utilizarán para dicha construcción.

Para la construcción de la parábola [nota: para conocer los detalles de la construcción de la elipse y la hipérbola, se recomienda ir a la fuente original: (García y Arriero, 2000)] se toma en cuenta dos de sus elementos, la directriz y el foco. El procedimiento consiste en trazar una recta cualquiera que será la directriz y un punto fuera de ella que será el foco y el cual denotarían con F (Figura 13):

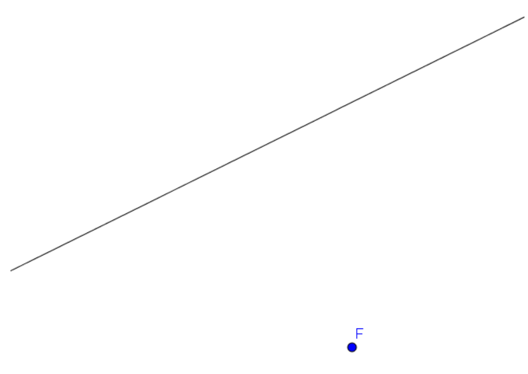


Figura 13. Gráfico de la directriz y el foco.

Seguido de eso y tomando un punto X sobre la directriz se trazará la mediatriz del segmento XF, como lo muestra la siguiente imagen:

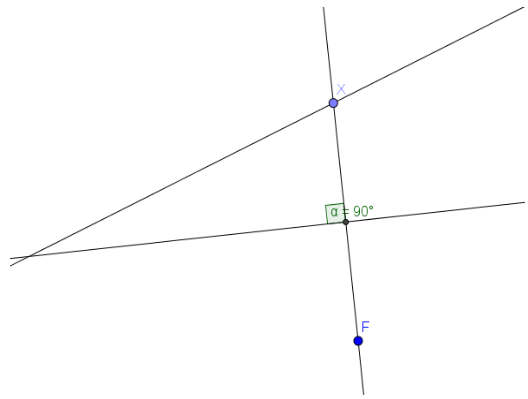


Figura 14. Gráfico de la mediatriz del segmento XF.

Después se traza la recta perpendicular a la directriz que pase por X y el punto de intersección de esta recta perpendicular con la mediatriz del segmento XF será un punto que pertenece a la parábola, en la siguiente imagen (Figura 15), el punto rosa es el perteneciente a la parábola:

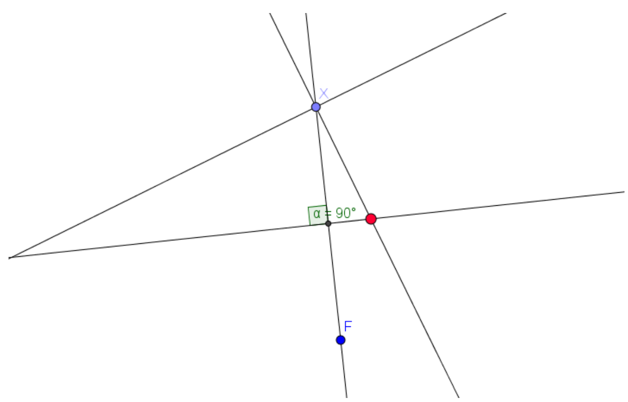


Figura 15. Gráfico de la recta perpendicular a la directriz que pasa por X y del punto que pertenece a la parábola.

Habrá entonces que arrastrar este punto de intersección y observar la curva que se describe. Teniendo esta construcción geométrica de la parábola, se focalizan los elementos importantes de esta cónica. A continuación se presenta la construcción realizada en Cabri:

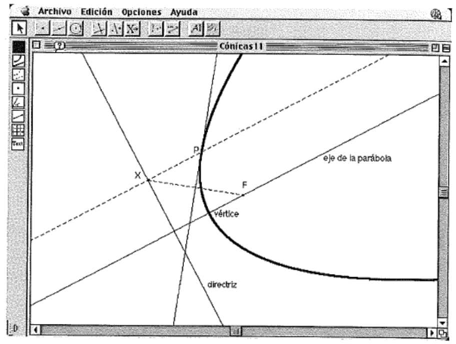


Figura 16. Construcción de la parábola en Cabri Fuente: García y Arriero (2000, p.78).

Finalmente, en esta propuesta, se construyen las cónicas elipse e hipérbola como las curvas envolventes de rectas tangentes con apoyo del software Cabri, siguiendo los métodos utilizados por Real (2004) con papiroflexia. Las siguientes figuras presentan las construcciones realizadas de la elipse y la hipérbola:

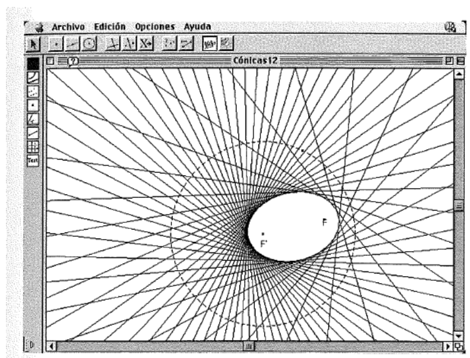


Figura 17. Construcción de la elipse como envolvente de rectas tangentes en Cabri. Fuente: García y Arriero (2000, p. 79).

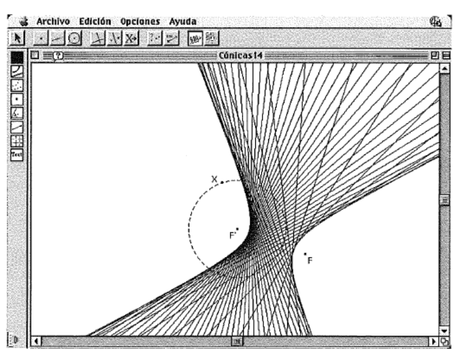


Figura 18. Construcción de la hipérbola como envolvente de rectas tangentes en Cabri. Fuente: García y Arriero (2000, p. 79).

Entre las conclusiones, se menciona que para la elaboración de curvas cónicas, que en muchos casos se pueden realizar manualmente (cuerdas, plegado de papel, regla, elipsógrafo, etc.) y de forma sencilla, el ordenador obliga al alumno a profundizar en el razonamiento geométrico y favorece la visualización de las relaciones geométricas (García y Arriero, 2000).

Se considera que el uso de algún software facilita aprender y trabajar en geometría, que ayuda a optimizar el tiempo y está al alcance de todos los estudiantes pues de no utilizarse estas construcciones geométricas serían muy complicadas para los que no tienen la habilidad para el dibujo técnico.

Las dos propuestas previas, si bien reportan haber sido exitosas con los estudiantes, no desarrollan un proceso de investigación como tal, y en ese sentido no nos aportan antecedentes sobre, por ejemplo, el desarrollo del pensamiento geométrico (relativo a las cónicas) en los estudiantes.

1.2. SÍNTESIS DE LA REVISIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Aunque existen propuestas de intervención para la construcción geométrica de la parábola, de manera que se observen sus propiedades y elementos geométricos incluso antes de presentarles su expresión algebraica, considerando que el manejo algebraico se les dificulta a los estudiantes, la realidad es que no se toman en cuenta al momento de su enseñanza en el aula. Una posible explicación de por qué no se integran estas alternativas a la enseñanza, es porque al potenciar los procesos algebraicos asociados a las cónicas, éstos se podrán vincular con mayor facilidad a los temas del Cálculo Diferencial e Integral, que se presentan después de Geometría Analítica.

Sin embargo, centrándonos en el aprendizaje del estudiante, se identifica que iniciar con las construcciones geométricas de las cónicas podría contribuir a que adquiera significados sobre éstas. Las propuestas didácticas identificadas hasta ahora, en particular para la enseñanza del concepto parábola, aún no apuntan hacia caracterizar el desarrollo del pensamiento matemático en relación a una u otra forma de construir la cónica y expresarla analíticamente.

En esta dirección es que situamos y acotamos nuestro problema de investigación, planteándonos la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo se constituyen los elementos y propiedades de la parábola en su proceso de construcción geométrica?

Para responder a dicha pregunta nos hemos planteado como objetivo:

Caracterizar lo propio de la parábola como sección cónica, en términos de sus usos y significados, identificando los elementos y propiedades en el proceso de construcción geométrica, que permiten representarla y definirla como un lugar geométrico en el plano.

Para lograr este objetivo, nos planteamos los siguientes objetivos particulares:

- Identificar los elementos y propiedades geométricas de la parábola como sección cónica, en los procesos de reconstrucción de las proposiciones de *Las Cónicas* de Apolonio.
- Identificar los usos y significados de los elementos geométricos utilizados para la construcción de la parábola como sección cónica, en las propuestas de innovación didáctica que actualmente la presentan como lugar geométrico.

CAPÍTULO II

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Inicialmente nos planteamos un estudio de la construcción social de las cónicas desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Este posicionamiento teórico nos permite problematizar la matemática en juego y hablar de su aprendizaje en términos de *conocimiento puesto en uso* y *desarrollo del pensamiento matemático*. Dicha problematización inicia por asumir que cada cónica tiene uso y sentido propio, por lo que elegimos iniciar con la problematización de la parábola, cuestionándonos sobre: ¿qué es la parábola?, ¿qué usos y significados de la parábola se identifican en las diversas construcciones geométricas reportadas?, ¿cómo los usos y significados en la construcción geométrica se expresan en su forma analítica?, ¿qué caracteriza al discurso matemático escolar relativo a la parábola?, entre otras.

Para ayudarnos a responder esas preguntas, tomamos como base de esta investigación la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, ya que:

> El saber lo construye, reconstruye, significa y resignifica, se lo ubica en el tiempo y el espacio, se lo explora desde la óptica de quien aprende, de quien inventa, de quien lo usa: se posiciona a la opción constructiva en la perspectiva histórica, cultural e institucional para que, en definitiva, se lo rediseñe con fines didácticos. Esto es, el saber se problematiza: historiza y dialectiza, con intencionalidad (Cantoral, 2013, p. 97 y 98).

Dado que el objetivo de nuestra investigación es caracterizar lo propio de la parábola como cónica, que permita representarla y definirla como lugar geométrico, problematizaremos desde un escenario geométrico, de manera que identifiquemos los elementos y propiedades geométricas que permitan significar a la parábola.

Para la problematizar (historizar y dialectizar) el saber, la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) plantea el análisis de éste:

> Específicamente, trata de la polifonía entre los procesos avanzados del pensamiento, la epistemología de las matemáticas y las prácticas humanas altamente especializadas. En ese sentido, el saber matemático [el saber sobre algo], no puede reducirse a una mera definición formal, declarativa o relacional, a un conocimiento matemático [el conocimiento de algo], sino que habrá de ocuparse de su historización y dialectización como sus dos mecanismos fundamentales de constitución. Es por esto que el saber habrá de ser concebido como una construcción social (Cantoral, 2013, p. 53-54).

Como *historización*, Cantoral asume:

“Dar carácter histórico [a algo]” y “tomar [algo] carácter histórico”, y utiliza una idea de la historia que va más allá de lo cronológico factual, pues le interesa una historia crítica del desarrollo conceptual, es decir, una epistemología situada” (Cantoral, 2013, p. 53).

Por lo que en este trabajo se retoma una traducción de la obra original “Las Cónicas” para el análisis de las primeras construcciones geométricas realizadas por el matemático griego Apolonio sobre la parábola. Historizar en el contexto en el que se encontraba Apolonio, nos permitirá observar los avances que hasta ese momento de la historia existía sobre la cónica parábola, puesto que matemáticos anteriores a Apolonio, como Menecmo y Aristeo, trabajaron con cónicas, pero es Apolonio el primero en formalizar estas ideas en su obra “Las Cónicas”. Al hacer esta historización, observaremos la evolución en los elementos construidos por estos matemáticos, retomando los que sean de utilidad para que en la construcción geométrica de la parábola, permitan observar las propiedades y/o elementos geométricos de esta cónica.

Para complementar la problematización es necesaria la dialectización que, a decir del autor:

> Proviene de la Dialéctica como parte de la Filosofía y sirve ante todo, para mostrar que [el algo] que se dialectiza reconoce la contradicción, no como mera errata o falla, sino que en su “sistema” la contradicción tiene un rol interno fundamental de confrontación (Cantoral, 2013, p. 53).

Para ello, confrontaremos lo realizado y propuesto por Apolonio con las construcciones geométricas más actuales que se presentan en algunas propuestas de innovación didáctica, donde podremos observar el desarrollo y uso de nuevos conceptos o elementos geométricos que en las primeras construcciones no estaban presentes o si sí, de qué manera permanecen; y que en la actualidad se identifican como métodos que permiten la construcción de la parábola.

En síntesis, para problematizar, estudiaremos las construcciones realizadas por Apolonio sobre la parábola como cónica, es decir, como resultado del corte de un cono por cierto plano, así como las construcciones realizadas en las propuestas de innovación didáctica para determinar qué de estas construcciones permiten significar a la parábola en su paso de sección cónica a lugar geométrico.

La TSME nos permite hacer esta problematización estudiando dónde surge este objeto matemático y sus incidencias en el contexto sociocultural de los seres humanos. Por lo tanto, es importante estudiar los procesos de pensamiento matemático que se desarrollan al hacer las construcciones de la parábola, cómo se utilizan los elementos de ésta para dichas construcciones y qué significado adquieren, tanto los elementos de la parábola como la parábola misma, de manera que apoyados de las construcciones geométricas, de sus distintos métodos de construcción, el estudiante construya significados de esta cónica.

Otros constructos de la TSME importantes para esta investigación son sus Principios Básicos (Figura 19), pues serán nuestros puntos de partida para problematizar en cualquier escenario y los medios para explicar la forma en la que la teoría contesta la cuestión de la construcción social y sobre todo de la difusión institucional:

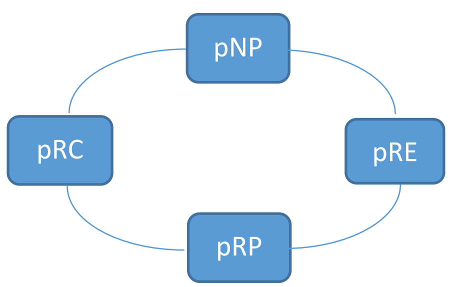


Figura 19. Principios de la Socioepistemología (Cantoral, 2013, p. 154).

Estos principios básicos de la Socioepistemología son:

El principio de la racionalidad contextualizada (pRC).

El principio del relativismo epistemológico (pRE).

El principio de la resignificación progresiva (pRP).

El principio normativo de la práctica social (pNP).

Para entender cómo utilizaremos estos principios en el trabajo, comenzaremos por explicar la racionalidad, que citado en Cantoral (2013), para los filósofos y psicólogos consiste en entender los principios normativos del razonamiento dentro de los contextos específicos bajo los que se realiza una inferencia.

El principio de la *racionalidad contextualizada* enuncia que “la racionalidad con que se actúa depende del contexto en el que el individuo se encuentre en un momento y lugar determinado” (Espinoza, 2009; citado en Cantoral, 2013, p. 159). El estudiante podrá pensar, entender, actuar sobre los distintos métodos de construcción, entre otros, de acuerdo al contexto que se le presente. Es decir, la relación del sujeto al saber está en función del contexto. En este caso, se trabajará en un escenario geométrico, donde se discriminará entre los distintos métodos de construcción cuáles son los elementos geométricos que permiten significar a la parábola.

El *relativismo epistemológico,* el segundo de los principios básicos, consiste en que la validez de un punto de vista, es decir, la verdad o el valor de verdad va de acuerdo con quién y dónde lo experimente. Este principio es importante en los asuntos educativos y culturales, pues es determinante saber cuándo y porqué algo está bien, cuando se emplearon distintos caminos para llegar al resultado. El principio del relativismo epistemológico, es decir, la validez del saber es relativa a la epistemología de partida, tanto del individuo como del grupo cultural y su contexto (Cantoral, 2013). Así, partiendo de lo que propone Apolonio como un camino para la construcción de la parábola, identificaremos qué de ese método se retoma en los métodos presentados en las propuestas de innovación didáctica que permitan verificar que se sigue el desarrollo de un pensamiento geométrico y no únicamente resaltar lo algebraico de la parábola, sino justamente las propiedades geométricas que la hicieron ser una parábola, mismas que serán la razón para que ésta sea utilizada en algunas situaciones de la vida real. La validez de estos métodos de construcción será relativo al escenario donde se construye.

Al respecto, “el significado dependerá en gran medida del escenario contextual donde se produce la acción, del empleo de símbolos, se personaliza y despersonaliza la apropiación, se significa al objeto” (Cantoral, 2013, p. 161). En un contexto geométrico, consideramos que la significación del objeto estará con base en la construcción de la parábola a través de diversos métodos, en los que utilice ciertos elementos geométricos, propiedades geométricas, definiciones, entre otras; cuyos métodos de construcción serán validados dentro del mismo contexto geométrico.

Cuando el primer significado es construido se pone en juego en ciertas situaciones produciendo conocimientos que a su vez construyen nuevos significados, lo cual en la teoría Socioepistemológica se conoce como *resignificación progresiva* y que en este trabajo estará presente al utilizar los distintos métodos de construcción, observando la relación entre ellos, al construirla primeramente como proveniente del corte de un cono y posteriormente como lugar geométrico, en el sentido de la definición de éste, pues cada uno de estos métodos de construcción propiciará la generación de un nuevo significado. Este principio está en la base del desarrollo del pensamiento matemático que permitirá la emergencia del saber. Y con el cual se construirán más argumentaciones, espacios de uso, procedimientos y todo aquello que rodea a un saber, ya que los saberes se enriquecen cuando se ponen en funcionamiento en nuevas situaciones, construyendo nuevos significados.

En la base y organización de los procesos de construcción del conocimiento se identifican prácticas sociales, que a través de **un modelo de anidación de prácticas** (Figura 20) explica empírica y teóricamente este proceso, desde el sujeto individual, el sujeto colectivo y el sujeto histórico. Con este llegamos al último de los principios, la normatividad de la práctica social:

> En síntesis, la teoría Socioepistemológica sostiene que las prácticas sociales son los cimientos de la construcción del conocimiento (normatividad de las prácticas sociales), y que el contexto influye sensiblemente en el tipo de racionalidad con la cual un individuo o grupo construye conocimiento en tanto lo signifique y ponga en uso (racionalidad contextualizada). Una vez que ese conocimiento es puesto en uso, es decir, se consolida como un saber, su validez será relativa a un entorno, ya que de ellos emergió su construcción y sus respectivas argumentaciones, lo cual dota a ese saber de un relativismo epistemológico. Así, a causa de la propia evolución y de su interacción con los diversos contextos, se resignificarán

> estos saberes enriqueciéndoles con variantes significativas (resignificación progresiva) (Cantoral, 2013, p. 162).

Del modelo de anidación de prácticas, en particular, haremos uso de las acciones y las actividades, para enmarcar los **usos de la parábola** en sus construcciones geométricas.

Este modelo sirve a la teoría para explicar la construcción social de conocimiento matemático a partir de la interacción directa del sujeto con el objeto en términos constructivistas y después con interacción al entorno. Esto se puede ver representado en la siguiente imagen:

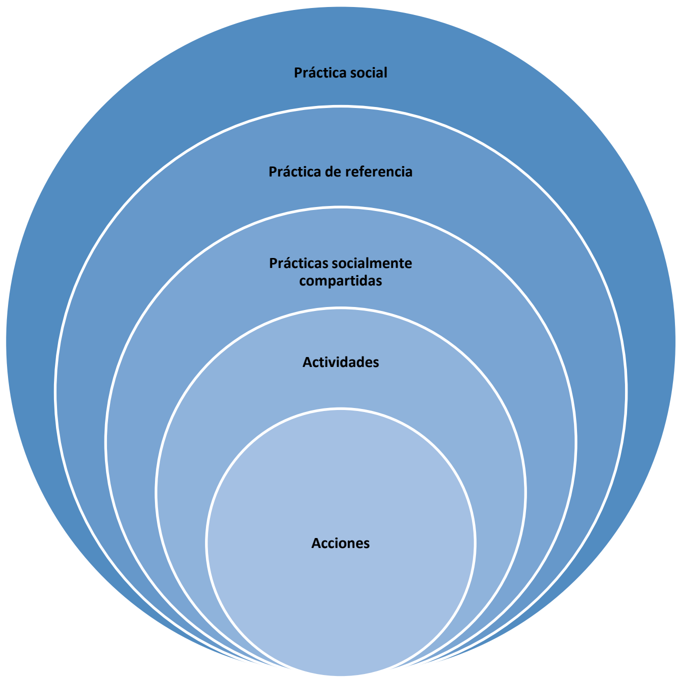


Figura 20. Modelo de prácticas anidadas (Cantoral, 2013, p. 156).

Cantoral nos presenta una explicación articulada de los cuatro principios en términos de:

> En síntesis, la teoría Socioepistemológica sostiene que las prácticas sociales son los cimientos de la construcción del conocimiento (normatividad de las prácticas sociales), y que el contexto influye sensiblemente en el tipo de racionalidad con la cual un individuo o grupo construye conocimiento en tanto lo signifique y ponga en uso (racionalidad contextualizada). Una vez que ese conocimiento es puesto en uso, es decir, se consolida como un saber, su validez será relativa a un entorno, ya que de ellos emergió su construcción y sus respectivas argumentaciones, lo cual

> dota a ese saber de un relativismo epistemológico. Así, a causa de la propia evolución y de su interacción con los diversos contextos, se resignificarán estos saberes enriqueciéndoles con variantes significativas (resignificación progresiva) (Cantoral, 2013, p. 162).

Dichos constructos de la Teoría Socioepistemológica, son los que serán nuestros fundamentos para desarrollar la investigación. Para eso nos apoyaremos de las dimensiones del saber según la teoría, las cuales son la didáctica, epistemológica, cognitiva y social.

> La dimensión didáctica está directamente relacionada con la costumbre didáctica, trata con la matemática escolar como objeto de estudio y sirve fundamentalmente para localizar y explicitar al discurso Matemático Escolar. La dimensión epistemológica se ocupa fundamentalmente de los análisis sobre problematización del saber, localización de las fenomenologías y los constructos característicos. La dimensión cognitiva se ubica al nivel de los procesos mentales que se presentan al nivel de los actores educativos en su acción por conocer, tanto en los procesos de razonamiento relativos a un saber, o en el pensamiento en un sentido amplio. La dimensión social está mucho más centrada en los roles que juegan los actores y en el papel que tiene el saber en tanto construcción social del conocimiento en sus tareas principales: la construcción de consensos, los usos y las prácticas y la elaboración y adaptación de instrumentos mediadores (Cantoral, 2013, p. 146).

Desde nuestro trabajo y dado que la dimensión didáctica está dirigida a los procesos de enseñanza, tanto en el ámbito escolar como en el no escolar y que entre los espacios naturales en los que se puede localizar están los libros de texto, el currículo, los artículos con propuestas educativas, entre otros, es que tomaremos las propuestas de innovación didáctica que nos permitirán tratar con su difusión institucional.

“La textura didáctica del saber también se historiza y dialectiza, se problematiza. Se configura una dinámica de confrontación del antes, el ahora con el después” (Cantoral, 2013, p. 147). Dicho esto, en este trabajo analizaremos primero las construcciones realizadas por Apolonio en los surgimientos de las cónicas, para después analizar los métodos planteados en las propuestas de innovación didáctica para finalmente construir significados del objeto matemático apoyados de las propiedades o elementos que se encuentran en las construcciones realizadas primero como cónica (corte de un cono por cierto plano) y posteriormente como lugar geométrico.

La dimensión epistemológica se ocupa del análisis en profundidad de las circunstancias que hicieran posible la construcción del conocimiento matemático, su razón de ser. Pero sobre todo que lo hicieran público. Esta dimensión concierne más bien a las formas en que el saber matemático puede ser conocido, el tipo de relaciones que el sujeto establece frente al objeto. La centración está en la práctica, es decir, en la actividad humana, por lo que consideramos importante analizar de qué se apoyó Apolonio para realizar esas construcciones que permitieron la emergencia de esa cónica.

> La dimensión cognitiva analiza las formas de apropiación y significación progresivas que experimenten quienes se encuentran en situación de construcción de conocimiento. Es así que en sus investigaciones, los socioepistemólogos reportan características del ejercicio de prácticas que anteceden y acompañan a la producción o construcción de conocimiento: nociones, procedimientos, propiedades, etc., que a su vez evolucionan hacia formas de saber socialmente establecidos (Cantoral, 2013, p. 150).

La dimensión social y cultural del saber, se ocupa de los usos del saber en situaciones específicas, por lo que partimos de un escenario escolar geométrico que nos facilite la realización de las construcciones geométricas de la parábola mediante al menos dos métodos diferentes, que signifiquen y resignifiquen dicho objeto.

De acuerdo a esta caracterización de las dimensiones del saber según la teoría, podemos decir que son de vital importancia para tener una sola mirada para llevar a cabo nuestra investigación, recordado que nuestro objeto de estudio es la parábola como cónica y que pretendemos proponer una manera para construir significados sobre ésta, siguiendo procesos de construcción geométrica.

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA

Para realizar este estudio de la construcción social de la cónica parábola, y dada su complejidad y extensión, la TSME nos permite tomar diversos caminos; por lo que resulta necesario establecer y especificar las fases de investigación y el método para el análisis de datos.

La presente investigación se realizó en seis fases:

1. Planteamiento del problema de investigación. Descripción de la problemática, planteamiento de la pregunta de investigación, así como de los objetivos a alcanzar.
2. Revisión bibliográfica de estudios relacionados con las cónicas. Realizando también una clasificación de los estudios encontrados para retomar de cada uno lo que estuviera relacionado y fuera importante para nuestra investigación. La clasificación tuvo la siguiente organización: trabajos de corte histórico, de corte cognitivo y de innovación didáctica.
3. Configuración del marco teórico. Nuestras bases teóricas están en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, por nuestro objeto de estudio y los objetivos planteados, retomaremos solamente algunos de los constructos de la teoría, los cuales son las cuatro dimensiones, los cuatro principios básicos y el modelo de anidación de prácticas en sus primeros dos niveles.
4. Configuración del método que nos servirá para recolectar, organizar y analizar los datos. El método consistió en hacer un análisis documental de contenido, en dos momentos: un análisis contextual y un análisis textual.
5. Recolección, organización y análisis de datos.
6. Resultados, conclusiones y reflexiones.

El estudio corresponde a una investigación cualitativa-interpretativa en el campo de la matemática educativa, para lograr nuestro objetivo, iniciamos con la revisión bibliográfica de estudios relacionados con las cónicas, entre los que encontramos algunos que localizaron la misma problemática de la que partíamos y de esta manera intentaban proponer una solución a la misma. Del trabajo de corte histórico retomamos la importancia de equilibrar lo geométrico de una cónica con lo analítico, de manera que al realizar primero la construcción geométrica se retome ésta para establecer la representación algebraica. Del estudio de corte cognitivo, retomamos la importancia de construir significados a partir de utilizar más de una representación del objeto. Y, finalmente, de las propuestas de innovación didáctica estudiaremos los procesos de construcción de la parábola para identificar los elementos geométricos y/o propiedades que nos permiten construirla como lugar geométrico y así (re)significarla.

Fueron diversos los trabajos encontrados relativos a las cónicas, sin embargo, la mayoría de éstos, a los que nosotros le llamamos “propuestas de innovación didáctica”, trataban de alternativas de enseñanza de las cónicas, en las que construían cada una con métodos distintos a los tradicionales, ya sea con materiales tangibles o con algún software educativo. De estas propuestas retomamos algunas para analizar los procesos de construcción geométrica, desde una perspectiva basada en prácticas, que hagan explícitos los elementos y propiedades geométricas que son necesarios para significar a la parábola.

De igual forma, de estos trabajos, seleccionamos uno de corte histórico, puesto que separan la geometría sintética de la analítica, partiendo del proceso que realiza Apolonio para construir la cónica elipse y que posteriormente toma Descartes para llegar a su ecuación. Consideramos que este tipo de investigaciones muestran la importancia de construir primero geométricamente la cónica para después representarla algebraicamente, de manera que la ecuación que resulte tenga un significado de lo que está representando, y de esa manera equilibra también las dos formas de representación de la elipse.

Entre los trabajos de corte cognitivo, tomamos el de Bartolini (2010) como buen referente, pues realiza un estudio de tipo exploratorio utilizando como herramientas ciertos utensilios mecánicos para construir y representar a la parábola de manera que se construyeran significados sobre esta cónica. Bartolini afirma que es importante la construcción de significados que permitan al estudiante conservar y utilizar dichos conocimientos para resolver problemas de la vida real; para la construcción de estos significados, la autora de este estudio afirma que solamente es posible al trabajar con más de una representación del objeto matemático.

La configuración del marco teórico fue fundamental para tener una sola mirada con la cual analizar los datos de esta investigación. Debido a nuestro objeto de estudio y los objetivos que nos planteamos en esta investigación, retomamos solamente algunos de los constructos de la TSME que nos permitirán alcanzarlos. Los constructos que necesitaremos de la TSME son sus cuatro dimensiones: epistemológica, cognitiva, didáctica y sociocultural, así como sus principios básicos: 1. Relativismo epistemológico, 2. Racionalidad contextualizada, 3. Resignificación progresiva y 4. Normatividad de la práctica social; que nos permitirán problematizar la noción de parábola desde cualquier escenario, así como también necesitaremos del Modelo de Anidación de Prácticas, a nivel de acciones y actividades para analizar los datos y después clasificar los resultados que fuimos encontrando.

Para el análisis de los documentos, configuramos una estrategia metodológica orientada por el Análisis Cualitativo de Contenido, ya que es una técnica en la que mediante el análisis y estudio sistemático, objetivo y cualitativo de ciertas obras o registros de los objetos matemáticos, se pueden abstraer significados que permitan entender algunas estructuras escolares actuales (Picado y Rico, 2011), enmarcada por el trabajo del grupo de investigación que actualmente se encuentra estudiando procesos de construcción social de conocimiento geométrico y trigonométrico, desde la Socioepistemología (Montiel, 2005).

Elegimos al Análisis Cualitativo de Contenido (ACC) ya que se enfoca en el estudio de los contenidos de la comunicación, es una técnica de interpretación de textos, donde a partir de una lectura e interpretación (que junto con la teoría le dan sentido al análisis), permite rescatar aspectos relevantes, significados y elementos del objeto analizado. Para hacer esta lectura e interpretación se utiliza como guía el método de análisis previamente establecido, por lo que éste debe realizarse de forma objetiva, sistemática y válida de manera que atienda a las necesidades que tenemos en la investigación. Es por esto que el sentido del método tiene que estar articulado con los constructos de la Teoría Socioepistemológica para lograr un análisis cualitativo-interpretativo que permita reconocer los elementos geométricos construidos en los inicios de la parábola como cónica para comparar y complementar los procesos de construcción que se siguen en la actualidad en las propuestas de innovación didáctica que son más basados en prácticas donde la construcción geométrica es como lugar geométrico, de manera que encontremos una manera posible de significar esta cónica. Para dar una explicación de la construcción social, retomaremos del modelo de anidación de prácticas los dos primeros niveles: las acciones y las actividades durante el proceso de análisis (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015), con lo que se pretende identificar los significados de la parábola en sus procesos de construcción geométrica.

Dicho análisis de contenido consta de dos fases: 1. Análisis Contextual y 2. Análisis Textual. El análisis contextual consistió de una caracterización de la obra que nos presenta las construcciones realizadas por Apolonio sobre la cónica parábola, utilizando la propuesta metodológica que propone Espinoza (2009). La fuente de donde tomaremos las construcciones para analizar se titula “Científicos Griegos” y contiene la traducción de los siete libros “Las Cónicas” de Apolonio, ya que aunque son ocho, el último se encuentra perdido. El autor de esta traducción es Francisco Vera y fue impresa en el año 1970.

El análisis textual, fue un análisis más profundo, en el que primero nos familiarizamos con la obra, es decir, analizamos aspectos como el lenguaje y las definiciones o proposiciones que el matemático Apolonio tuvo que enunciar para posteriormente construir la parábola. Además de la familiarización con los datos (pre-análisis), este momento consta de tres sub-niveles de análisis: micro, meso y macro.

Para el análisis refinado de las acciones, se plantean las preguntas qué hace, para explicar la acción directa del sujeto con el objeto y el cómo hace para identificar herramientas que permiten esa acción (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015) y de manera transversal, para qué hace, intentando reconocer la intención de la acción.

3.1. MÉTODO

El análisis de contenido consta de dos fases: un análisis contextual y un análisis textual y a continuación describiremos en qué consiste cada una de estas fases de análisis:

Análisis Contextual

Este estudio consiste en una caracterización cualitativa-descriptiva, que nos proporcionará un panorama general de lo que la obra “Las Cónicas” de Apolonio significó en su época y como ha impactado en nuestros días el que haya compartido estos conocimientos los cuales tuvieron una transposición didáctica, es decir, sufrieron algunas transformaciones o adaptaciones para llevarlas al aula de clases.

De Espinoza (2009), retomamos la metodología que propone para estudiar la dimensión sociocultural del conocimiento en investigaciones de corte sociohistórico, para realizar una descripción de la obra donde analizaremos las construcciones geométricas, es decir la obra: *Cónicas*, de Apolonio. Para Espinoza, el conocimiento es un emergente de las dinámicas sociales. Por esto una obra antigua, más que un libro con contenido matemático, lo entendemos como:

- Una producción con historia. Se propone tener una mirada de la época, las ideas germinales y los medios de significación utilizados por el autor en la construcción del conocimiento matemático en cuestión. Se contempla incorporar datos sobre la vida personal y académica de Apolonio, así como el contexto sociopolítico de la época.
- Un objeto de difusión. Se propone identificar la intencionalidad de la obra, haciendo diferencia entre una intención de difusión didáctica y una científica. Se requiere de estudiar tanto al autor, como al tipo de producción y a los destinatarios de la obra.
- Parte de una expresión intelectual global. Pretende tener un panorama amplio de diversos significados en los trabajos del autor (Espinoza, 2009).

Por lo que este estudio nos proveerá de las bases para explicitar la *racionalidad contextualizada* y el *relativismo epistemológico* de la construcción de la cónica.

Análisis Textual

Para este momento de análisis, el primer paso será el pre-análisis que consiste en la familiarización con los datos, en este caso, con la obra. La familiarización consiste en conocer el objetivo, contenido y organización de la obra, los elementos previos que se necesitan para que sea posible la construcción de la parábola, entre otros; que nos permitirá estudiar las construcciones geométricas realizadas en torno a la parábola. Es decir, describir de manera general la obra a partir de la cual seleccionar las unidades a analizar.

Los puntos a abordar del pre-análisis por tanto, son:

- **Pre-Análisis**
- Describir la obra.
- Clarificar elementos del lenguaje (verbal y matemático).
- Selección justificada de las unidades a analizar.

Este análisis textual está conformado a su vez de tres subniveles, cada uno de los cuales contestando a ciertas preguntas me permitirán puntualizar cada una de las acciones realizadas durante el proceso de construcción geométrica de la parábola para posteriormente retomar de esas reconstrucciones, los elementos y las propiedades geométricas que propician a la construcción de significados de la parábola.

Estos subniveles del análisis textual los presentamos y detallamos a continuación:

- **Nivel Micro**
- Identificar una estructura discursiva.
- Analizar desde los cuestionamientos: ¿qué hace?, ¿cómo hace?, para vislumbrar el **nivel de acción** del modelo de anidación de prácticas de nuestro fundamento teórico (figura 20). En esta etapa se deben identificar y recuperar los conocimientos puestos en uso y los significados que van constituyendo lo propio de la parábola.
- Identificar el objetivo de cada unidad analizada.

Los cuestionamientos de análisis, son herramientas que permiten identificar el nivel de acción del modelo de anidación de prácticas. Para ello será importante realizar las reconstrucciones geométricas de las construcciones realizadas por Apolonio, para identificar y recuperar significados que se pierden en el proceso de transposición didáctica del saber, ese paso que se dio de mirar a la parábola como cónica (en su surgimiento) y como lugar geométrico (en la escuela).

- **Nivel Meso**
- Analizar cada unidad desde el cuestionamiento ¿para qué hace?, para identificar su objetivo y vislumbrar el nivel de actividad, al agrupar unidades que compartan dicho objetivo.

- Identificar el objetivo del bloque, en la obra.

El cuestionamiento de análisis *para qué hace*, permite reconocer relaciones entre las unidades analizadas para estructurar bloques, identificando el objetivo de cada uno. Respondernos esta pregunta nos posiciona en el nivel de actividad del modelo de anidación de prácticas.

- ○ **Nivel Macro/ Análisis socioepistémico**

- Síntesis de los dos niveles anteriores, articulada con el análisis contextual.

Este análisis nos permitirá configurar una epistemología situada de las construcciones geométricas que realizó Apolonio de la parábola como corte de un cono oblicuo por cierto plano y reconocer de qué manera se conservan ciertos elementos o propiedades geométricas de estas construcciones en las construcciones más actuales en donde se aborda a la parábola como lugar geométrico, pues consideramos que este podría ser un camino que permita significar a la parábola como sección cónica.

Estos niveles del análisis textual (micro, meso y macro) serán también los que se utilizarán para analizar las construcciones geométricas presentadas en las propuestas de innovación didáctica, con el objetivo de tener referentes de confrontación de usos y significados, en cada uno de los procesos de construcción geométrica.

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS DE DATOS

4.1. ANÁLISIS CONTEXTUAL

A partir de la metodología propuesta por Espinoza (2009), partimos de estudiar la vida personal y académica de Apolonio, recurriendo a algunas traducciones de la obra *Las Cónicas*. Por ejemplo, la fuente (Vera, 1970) la cual es una traducción de la obra "*Las Cónicas*" de Apolonio, que aunque es una traducción de otra traducción, la comparamos por ejemplo con la fuente (Taliaferro, y Fried, 2013), que es una traducción al inglés de los primeros cuatro libros originales en griego que aún existen y encontramos que el contenido es prácticamente el mismo. La obra "*Las Cónicas*" por tanto, será entendida como **una producción con historia** ya que nuestro interés está en comprender los medios de significación utilizados por Apolonio en dicha obra, que permiten construir la parábola como una sección cónica, y que en la enseñanza actual se pierden o como éstos se resignifican al construir la parábola como lugar geométrico.

Para entender los significados asociados a la parábola, estudiamos la historia de las secciones cónicas y encontramos que las primeras menciones de las cónicas se remontan a Menecmo y a Aristeo el Viejo, es decir, al siglo IV a.C., de manera elemental, pues la geometría del espacio no había llegado todavía al estatismo intelectual alcanzado ya por la geometría plana (Vera, 1970); y si se empleaba el compás en ciertas construcciones, su movimiento no intervenía en ninguna demostración evidentemente cierta, sino solo en la curva descrita, considerada estáticamente, es decir, se apoyaban de las construcciones realizadas por el compás para trazar y visualizar la curva y a partir de esto, demostrar sus proposiciones. Estas demostraciones, no eran en un sentido estricto de demostración, sino que se basaban en que "algo" se pudiera construir, para poder decir que existía y se demostraba con el proceso de construcción.

La evidencia hasta el momento muestra que Menecmo (un alumno de Eudoxo y un contemporáneo de Platón) fue el descubridor de las secciones cónicas, y que las usó como un medio para resolver el problema de la duplicación del cubo, mismo problema que intentaron resolver algunos de los geómetras que estaban en la Academia con Platón, como Arquitas y Eudoxo, pero fueron incapaces de realizar la construcción propiamente dicha o alcanzar el punto de aplicación práctica, excepto Menecmo quien realizó las construcciones y de manera compleja.

Aprendemos de Eutocio que Menecmo dio dos soluciones al problema de las dos proporciones medias, a lo que Hipócrates redujo el problema original, obteniendo los dos medios primero por la intersección de una cierta parábola y una cierta hipérbola rectangular, y en segundo lugar por la intersección de dos parábolas (Heath, 1896).

Quizás no hay duda de que el descubrimiento de las secciones cónicas ocupa, comparativamente, un espacio más grande en la historia de la geometría griega que el problema de la duplicación del cubo. La evidencia que se menciona anteriormente, que da respuesta referente a su origen, se da en una carta de Eratóstenes de Cirene al rey Ptolomeo Euergetes, citado por Eutocio en su comentario sobre el segundo Libro del tratado de Arquímedes *Sobre la Esfera y el Cilindro*, donde se menciona que Menecmo inicia con los trabajos en el cono.

Por otra parte, Aristeo, escribió los libros aún existentes de *Solid Loci* conectados con los conos, llamó a una de las secciones cónicas la sección de un cono de ángulo agudo, otra sección de un cono de ángulo recto y la tercera sección de un obtuso, cono angulado (Heath, 1896).

Heath (1896) afirma que los cuatro libros de las cónicas de Euclides fueron completados por Apolonio, quien agregó cuatro más y produjo ocho libros de cónicas, que conforma su majestuosa obra *Las Cónicas.* De la misma manera, menciona que Apolonio dice en su tercer libro que el '*locus* con respecto a tres o cuatro líneas' no había sido completamente investigado por Euclides, y de hecho, ni Apolonio ni ningún otro podrían haber agregado en lo más mínimo lo que fue escrito por Euclides con la ayuda de aquellas propiedades de las cónicas que solo se habían demostrado hasta la época de Euclides; Apolonio mismo es evidencia de este hecho cuando dice que la teoría de *locus* no podría completarse sin las proposiciones que se había visto obligado a poner en práctica por sí mismo. Ahora Euclides, considerando a Aristeo como merecedor del mérito de los descubrimientos que ya había hecho en las cónicas, y sin anticiparlo o desear construir de nuevo el mismo sistema, escribió tanto sobre el *locus* cómo fue posible por medio de las cónicas de Aristeo, sin pretender que sus demostraciones fueran completas. A Apolonio también se le ha permitido agregar la parte que falta de la teoría de *locus* al familiarizarse con lo que Euclides ya ha escrito sobre él y haber pasado mucho tiempo con los alumnos de Euclides en Alejandría.

Siguiendo esta línea de trabajo relacionada con las cónicas que tuvieron los geómetras de esa época, llegamos con Arquímedes, quien fue el siguiente en hacer sus aportaciones al tema, que aunque no existe evidencia de esto, en (Heath, 1896) se mencionan algunas referencias donde citan a este matemático.

Ningún estudio de la historia de las secciones cónicas podría estar completo sin una explicación tolerablemente exhaustiva de todo lo relacionado con el tema que se puede encontrar en las obras existentes de Arquímedes. No hay evidencia confiable de que Arquímedes escribiera un trabajo exclusivo sobre las cónicas. La idea de que lo hizo, se basa en que las referencias (sin mencionar el nombre del autor) en algunos de los pasajes citados anteriormente, se ha supuesto que se refieren a un tratado del mismo Arquímedes. Pero se puede ver fácilmente que se trata de una suposición cuando las referencias se comparan con una referencia similar en otro pasaje, donde las relacionan con los Elementos de Euclides. En algunas ocasiones incluso se menciona: "esto se prueba en los elementos de los cónicas" simplemente afirman que se encuentra en los libros de texto sobre los principios elementales de las cónicas.

Una prueba de que esto es así, puede extraerse de un pasaje en el comentario de Eutocio sobre Apolonio, Heracleides, el biógrafo de Arquímedes, y se cita que Arquímedes fue el primero en inventar teoremas sobre conos, y que Apolonio, tras haber encontrado eso y dado que no había sido publicado por Arquímedes, se los apropió. Eutocio subraya la observación de que la afirmación en su opinión no es cierta, porque por una parte, Arquímedes aparece en muchos pasajes al referirse a los elementos de las cónicas como un tratado más antiguo, y por otra parte, Apolonio profesa dar sus propios descubrimientos. Eutocio consideraba que la referencia era a exposiciones anteriores de la teoría elemental de las cónicas por parte de otros geómetras y no a un trabajo de Arquímedes (Heath, 1986).

Se encuentra también que Arquímedes trabaja con cortes al cono por planos que no sean perpendiculares a la generatriz del cono; y los nombres que emplea son los dados por Aristeo al hablar de las secciones cónicas obtenidas de dichos cortes.

Heracleides, por tanto, no tenía la intención de adscribir la invención real de las cónicas a Arquímedes, sino que solo quería decir que la teoría de las secciones cónicas, formulada por Apolonio, se debía a Arquímedes; de lo contrario, la contradicción de Eutocio habría tomado una forma diferente y no habría omitido señalar el hecho bien conocido de que Menecmo era el más advenedizo de la sección cónica (Heath, 1986).

Vera (1970), resume la historia del origen de las secciones cónicas en el siguiente párrafo:

> Euclides y Arquímedes, continuando la labor encentada por Menecmo y Aristeo, definieron las tres cónicas como secciones hechas por un plano perpendicular a la generatriz de sendos conos rectos de ángulo en el vértice recto, obtuso y agudo, respectivamente; pero fue Apolonio quien tuvo la genial idea de cortar un solo cono oblicuo de base circular, para obtener la parábola, la hipérbola y la elipse, según que el plano secante fuese o no fuese paralelo a una generatriz o las encontrara a todas, llegando a una tesis admirable que le permitió ver las relaciones que ligan unas a otras (Vera, 1970, p. 302).

Encontramos por tanto, que según los historiadores, Menecmo fue el primero en realizar cortes a un cono y determinar las secciones cónicas de estos cortes al intentar resolver el problema de la duplicación del cubo; que Aristeo de igual forma trabajó con las secciones cónicas intentando resolver el mismo problema; que Euclides trabaja con las secciones cónicas como parte de su tratado de los *Elementos*, pero finalmente no las enuncia formalmente en alguna obra; se dice también que Arquímedes, fue el primero en escribir tratados sobre las cónicas, sin embargo, no hay evidencias de los trabajos más que algunas referencias de este científico griego en cartas y otros trabajos relacionados; por lo que podemos decir que lo que realiza Apolonio en realidad, es una recopilación de los estudios que se habían realizado hasta ese momento, en su época, sobre las cónicas y partiendo de ellos, generalizar los casos con un cono oblicuo, enuncia ciertas definiciones y proposiciones que le permiten realizar posteriormente las construcciones que resultan en las secciones cónicas; y finalmente comparte estos nuevos conocimientos, publicando su obra *Las Cónicas*.

La información que se tiene sobre la vida de Apolonio, es que nació en Perga, una pequeña ciudad griega en el sur de Asia Menor (Taliaferro, y Fried, 2013), en el reinado de Ptolomeo Euergetes (247-222 a. C.), que floreció bajo Ptolomeo Philopator, y que cuando era muy joven fue a Alejandría, donde estudió con los sucesores de Euclides. También escuchamos de una visita a Pérgamo, donde conoció a Eudemo, a quien le dedicó los primeros tres de los ocho libros de las Cónicas.

De acuerdo con el testimonio de Gémino (Geminus), citado por Eutocio, fue honrado grandemente por sus contemporáneos, quienes, en admiración de su armenio tratado sobre cónicas, lo llamaron el "Gran Geómetra". Siete libros han sobrevivido solamente, de los ocho originales, cuatro en el original griego y tres en una traducción al árabe (Taliaferro, y Fried, 2013).

Según Heath (1986), Halley en 1710, tradujo los primeros cuatro libros, del griego a una traducción latina, y los tres restantes del árabe a una traducción latina. Este matemático, físico y astrónomo, añadió a la historia una restauración conjetural del octavo libro de *Las Cónicas* de Apolonio, que se encontraba perdido.

Los primeros cuatro libros han aparecido recientemente en una nueva edición de Heiberg (Teubner, Leipzig, 1891 y 1893), que contiene, además del texto griego y una traducción latina, los fragmentos de las otras obras de Apolonio que aún existen en griego, los comentarios y lemas de Pappus, y los comentarios de Eutocio.

Además de la obra geométrica que lo hizo famoso, sus escritos incluyeron trabajos sobre óptica y astronomía, en los que, según Ptolomeo, hizo una contribución esencial a lo que se convirtió en las escrituras geométricas que sobreviven en las escrituras de otros autores antiguos (Taliaferro, y Fried, 2013).

Sobre la obra *Las Cónicas* encontramos que Apolonio le escribe a Eudemo una carta donde le dice que se dio cuenta del interés en su trabajo relacionado con las secciones cónicas, por lo que le enviaba un ejemplar que podría tener algunos errores pues no lo revisó a detalle por falta de tiempo. Apolonio también mencionaba que la investigación relacionada con las secciones cónicas había sido emprendida a petición de Naucrates el geómetra que se encontraba en Alejandría al mismo tiempo que él; y que, después de publicarlo en ocho libros, se lo compartió de una vez, algunos también demasiado apresuradamente, sin una revisión exhaustiva, pero con la intención de volver a ellos más tarde.

Al abordar el estudio de Apolonio, es útil saber cómo sus predecesores habían estudiado las curvas llamadas secciones cónicas. Obtuvieron las curvas sobre un plano que corta un cono recto, y luego caracterizaron las curvas mediante el uso del diámetro único que forma ángulos rectos con los acordes que divide. Pero ese diámetro, que Apolonio llama "el eje", es solo uno de los diámetros que utiliza. Apolonio obtiene las curvas sobre un plano que corta cualquier cono (ya sea un cono recto o uno oblicuo); y los caracteriza al usar cualquier diámetro.

Esa generalización no fue, sin embargo, la totalidad de su contribución al estudio de las cónicas. Aunque muchos de los detalles que Apolonio presentó en los primeros cuatro libros de *Las Cónicas* (y otros que omitieron) eran conocidos por sus predecesores, seleccionó y los organizó de tal manera que proporcionaran una visión más profunda, generalizada y sistematizada que su terminología se convirtió en la "parábola", la "hipérbola" y la "elipse". Otros tratados antiguos sobre esas curvas no sobrevivieron, y durante unos dos mil años ningún nuevo tratado sobre las cónicas tomó el lugar del que había sido escrito por Apolonio. Para Taliaferro y Fried (2013), Apolonio ha sido y debe ser estudiado para entender a científicos como Kepler, Descartes y Newton.

En 2001, Michael N. Fried y Sabetai Unguru publican el libro *Apollonius of Perga's Conica: Text, Contex, Subtext* en el que hacen un estudio sobre las proposiciones, demostraciones y construcciones que realiza Apolonio en su obra *Las Cónicas*, criticando fuertemente la perspectiva del "algebra geométrica" que matemáticos e historiadores matemáticos utilizan para el estudio de la matemática griega. Si bien no tuvimos acceso a esta obra, las revisiones realizadas por Acerbi (2009), Cuomo (2002) y Saito (2005), dejan ver algunas aportaciones importantes del análisis **puramente geométrico** que logran Fried y Unguru de la obra de Apolonio.

Estas revisiones reportan que la obra original ha sido estudiada muy poco, en parte debido a la gran dificultad y complejidad de su contenido. Saito (2005), resalta que *Las*

Cónicas de Apolonio es el clásico de los clásicos en las matemáticas griegas, y que han habido pocas personas que han pasado por este largo y difícil texto durante el siglo XX; solamente un tercio de los que han pasado por Arquímedes podría ser una estimación demasiado optimista.

Cuomo (2002), reporta que la literatura, relativamente escasa, existente sobre Apolonio lo ha visto como un precursor del álgebra geométrica, y ha traducido *Las Cónicas* y sus conceptos al lenguaje de las matemáticas modernas. Los autores Fried y Unguru, en su libro, comienzan con una larga crítica a este enfoque a la obra de Apolonio, y gran parte del espacio (el primer capítulo y partes de capítulos posteriores) se dedica a mostrar que las preocupaciones de Apolonio **eran geométricas, no algebraicas**. Cuomo (2002) se pregunta que si Apolonio no estaba haciendo álgebra geométrica, ¿qué estaba haciendo en realidad?, Fried y Unguru entran en detalles minuciosos para poder responder esa pregunta con relación a cada libro de *Las Cónicas*.

En (Saito, 2005) se afirma que el único objetivo de *Las Cónicas* es investigar las propiedades de las secciones cónicas, prácticamente una tarea interminable. Que aunque existen propuestas ciertamente admirables, pero su significado a menudo es muy poco claro, y uno puede obtener una satisfacción mucho menor leyendo a Apolonio que leyendo a Arquímedes, quien al menos recompensa la paciencia del lector al llegar a algún resultado significativo al final de cada uno de sus trabajos. Así, un lector de *Las Cónicas* siempre tiene la sensación de estar perdido en un laberinto, cuya intención es oscura.

La tesis básica de Hieronymous Zeuthen en su Die Lehre (Zeuthen, 1886, citado en Saito 2005), dice que *Las Cónicas* se construyen sobre técnicas (la llamada "álgebra geométrica" y teoría de proporción) equivalentes en esencia a nuestra propia álgebra. ¿Por qué entonces uno debe asumir la carga de leer este texto tortuoso, que al final expresa lo que ya sabemos, de una manera más oscura? En el libro de Fried y Unguro se pretende derrocar la interpretación algebraica de Zeuthen y proponer un principio diferente en la historiografía de las matemáticas griegas. Saito (2005) menciona que el serio esfuerzo de estos autores para leer y comprender *Las Cónicas* sin guiarse por las distracciones algebraicas ha producido varios descubrimientos importantes y nuevas interpretaciones, que le dan un gran valor a esta obra, independientemente del debate historiográfico. Los autores intentan dar nuevas interpretaciones de estos libros por medios no algebraicos, dando un nuevo significado a aquellas proposiciones hasta ahora descartadas como menos importantes o redundantes porque no encajan en un marco algebraico.

Muchas de las nuevas interpretaciones de los autores, persuasivos, si no siempre definitivas, reaniman proposiciones que hasta ahora han parecido bastante aburridas, mostrando el mérito del enfoque geométrico. Por ejemplo, en el Libro VII, por el concepto misterioso de "línea homóloga", los autores proponen interpretarlo como una analogía del *Latus rectum*, mostrando que esta analogía puede haber guiado la investigación de Apolonio en este libro. La prevalencia de la interpretación algebraica se apoya en el sentimiento general de que Apolonio solo pudo haber desarrollado una teoría tan complicada con un método que le permitiera tener una idea clara de lo que estaba haciendo. Por lo tanto, es indispensable, para una interpretación geométrica, proporcionar algún dispositivo que funcione como método de descubrimiento e investigación en la teoría geométrica de *Las Cónicas* (Saito, 2005).

Saito (2005), afirma fuertemente que la tesis del álgebra geométrica se basa en la sensación de que un tratamiento tan complicado de las magnitudes geométricas como el que encontramos en Apolonio no puede haber sido posible sin las herramientas algebraicas. Sin embargo, si se ha dedicado suficiente tiempo a comprender y asimilar las herramientas de las matemáticas griegas, de ninguna manera podemos adherirnos a la interpretación algebraica, ya que está claro que no se necesita álgebra para desarrollar los argumentos contenidos en ella.

Cuomo (2002), menciona que Fried y Unguru, identifican algunas de las cosas que hicieron que Apolonio funcione, y sus afirmaciones son persuasivas porque lo hacen parecerse más a un matemático de su época; por ejemplo, subrayan la **significación de las analogías entre las propiedades y los elementos de las cónicas, y las propiedades y elementos del círculo**. Enfatizan la parte que desempeñan las **intuiciones visuales** de la manera en que Apolonio elige definir las cónicas, o en su preferencia por un tema o procedimiento en particular. “Una de las razones por las que en varios puntos del Libro I, Apolonio usa un cono en lugar de una superficie cónica es que el cono es un <objeto

visualmente atractivo> que apunta a un modo de pensar en el que, al menos en cierta medida, la visibilidad es una medida de comprensibilidad" (Cuomo, 2002, p. 74).

Fried y Unguru también sugieren que *Las Cónicas* debe ser vista como un todo, y que la relación entre los primeros cuatro libros (que Apollonius definió stoicheiode, que significa "elemental", pero también "fundamental") y los últimos cuatro libros podrían verse “en términos de cercanía y lejanía de los orígenes geométricos de las secciones cónicas” (Cuomo, 2002, p. 387)). Los libros I a IV son un "curso en elementos" que toma sus movimientos del origen geométrico de las secciones cónicas, mientras que los libros V a VIII "presentan las proposiciones en términos del eje más conveniente [de una sección]" (Cuomo, 2002, p. 384).

Acerbi (2009), después de estudiar la obra *Apollonius of Perga’s Conica: Text, Contex, Subtext*, dice que está organizada en nueve capítulos, cinco de los cuales (capítulos 2-6) están dedicados a un análisis en profundidad de cada uno de los libros de *Las Cónicas*. El primer capítulo presenta las principales líneas del enfoque canónico interpretativo del tema, y los capítulos 7-9 contienen, sucesivamente, una discusión sobre el uso de la analogía en Apolonio, una evaluación general que enfatiza la unidad del tratado de Apolonio y algunas reflexiones historiográficas adicionales. Un apéndice que ofrece una traducción al inglés del libro 4 de las cónicas. Una bibliografía y un índice (no muy detallado) completan el volumen. En segundo lugar, los autores presentan una gran cantidad de ideas interpretativas originales que encajan perfectamente con su postura exegética general. Acerbi sugiere que el lector preste especial atención en el énfasis del carácter profundamente geométrico de las definiciones de las secciones cónicas y, en consecuencia, la amplia discusión del papel desempeñado por un síntoma (propiedad característica) en la identificación de una curva; el carácter "erudito" del enfoque de Apolonio, con su afición a las variaciones extensas en temas de los Elementos; la rehabilitación del libro 6, que contiene la teoría de la congruencia y la similitud de las cónicas; entre otros.

Aunque los nombres de esas curvas persistieron y siguieron llamándose colectivamente "las secciones cónicas", finalmente dejaron de estudiarse como tales después de Descartes para estudiarse algebraicamente, en ocasiones descuidando sus elementos geométricos. Sin embargo, aunque las secciones cónicas se estudian actualmente en la escuela en los cursos geometría analítica, apoyados en gran parte del trabajo que realizó

Descartes, este matemático no hubiera llegado a esas aportaciones a las Matemáticas sin estudiar previamente a Apolonio.

En ese sentido, la obra también es **un objeto de difusión**, porque además de ser una recopilación de trabajos empezados por otros matemáticos relacionados con las secciones cónicas, es Apolonio quien generaliza las construcciones para partir un cono oblicuo y no utiliza únicamente conos rectos, por lo que obtiene las secciones cónicas para cualquiera que sea el cono; además organiza y estructura los contenidos de todos los libros de *Las Cónicas*, de manera que tenga una lógica de construcción desde lo más elemental hasta lo más complejo, con definiciones, proposiciones y problemas. Cabe mencionar que al inicio de cada libro enuncia ciertas definiciones que serán necesarias en alguna proposición de dicho libro.

Por lo que, aunque fueron Menecmo, Aristeo, Euclides y Arquímedes los primeros en estudiar las cónicas, fue Apolonio quien formaliza y difunde estos estudios en su obra *Las Cónicas*.

Según Fried (2011), el contenido de *Las Cónicas* que expone el propio Apolonio en su carta introductoria del libro 1, los primeros cuatro de un total de ocho, deben considerarse un "curso de *Los Elementos*", de Euclides. Mientras que los otros cuatro son adiciones y temas especiales sobre las secciones cónicas y sus propiedades. El Libro I contiene la generación de las tres secciones cónicas así como de sus secciones opuestas y las propiedades características de cada una. El Libro II examina las propiedades de los diámetros, ejes y asíntotas. El Libro III incluye teoremas útiles para determinar los límites de las secciones. El Libro IV se refiere a la cantidad de secciones que pueden encontrarse entre sí y a una circunferencia.

Aunque Apolonio nos dice que el Libro II examina las propiedades de los diámetros, ejes y asíntotas, es en el Libro I donde se prueban muchos de los teoremas cruciales sobre los diámetros, que cada sección cónica tiene un número infinito de diámetros, que todos los diámetros de una parábola son paralelos, que todos los diámetros de una elipse y de una hipérbola son concurrentes, que por cada diámetro de una elipse o una hipérbola hay un diámetro conjugado, que el diámetro conjugado de una elipse es la media proporcional entre el diámetro original y su parámetro, entre otros (Fried, 2011).

> Del contenido de "*Las cónicas*" hace un resumen su autor en la carta con que remite a Eudemo el libro I, que consta de sesenta proposiciones sobre las propiedades más importantes de estas curvas y termina construyéndolas y estableciendo que, dada una cualquiera de ellas, existe siempre un cono de base circular de la que es sección; el libro II contiene cincuenta y tres proposiciones dedicadas casi exclusivamente a las asíntotas de la hipérbola; las cincuenta y seis del III se refieren a las propiedades de los triángulos y cuadriláteros inscritos y circunscritos, y en este libro aparecen por primera vez los polos y polares de las tres cónicas y los focos de la hipérbola y la elipse; el libro IV contiene cincuenta y siete proposiciones sobre las intersecciones y contactos de las cónicas entre sí y con la circunferencia; la mayor parte de las setenta y siete del V son un anticipo de la moderna teoría de normales, subnormales y radios de curvatura; forman el libro VI, menos original que los anteriores, treinta y tres proposiciones destinadas especialmente a la igualdad y semejanza de las cónicas; el VII tiene cincuenta y una proposiciones que constituyen una admirable exposición de la teoría de diámetros conjugados, y el VIII, perdido, resolvía algunos problemas propuestos en el anterior, y ha sido restituido por Halley sobre la base de las referencias de Pappo y del propio Apolonio (Vera, 1970, p. 306).

En la carta que le escribe Apolonio a Eudemo, Apolonio le explica el contenido de sus ocho libros de *Las Cónicas* de la siguiente manera:

Según Heath (1986), de los ocho libros, los primeros cuatro forman una introducción elemental; el primero contiene los modos de producción de las tres secciones y las ramas opuestas [de la hipérbola] y sus propiedades fundamentales resueltas de manera más completa y general que en las escrituras de otros autores; el segundo trata de las propiedades de los diámetros y ejes de las secciones, así como de las asíntotas y otras cosas de importancia general. El tercer libro contiene muchos teoremas notables útiles para la síntesis de loci sólidos y determinaciones de límites. El cuarto libro muestra en cuántas formas las secciones de los conos se encuentran entre sí y la circunferencia de un círculo: contiene otros asuntos además, ninguno de los cuales ha sido discutido por escritores anteriores, con respecto al número de puntos en los que una sección de un el cono o la circunferencia de un círculo se encuentra con [las ramas opuestas de una hipérbola]. El resto [de los libros] son más por medio de la exageración, uno de ellos trata sobre secciones iguales y similares de conos, uno con teoremas que implican la determinación de límites y el último con problemas determinados sobre las secciones cónicas.

La forma en que se generan las secciones cónicas, es absolutamente esencial para el tratamiento y concepción de las mismas secciones cónicas así como de sus propiedades; dichas concepciones son demostradas geométricamente y se toma como referencia lo realizado de manera previa para darle continuidad y sentido de organización a lo que se presenta en cada libro de esta majestuosa obra.

La influencia de Apolonio sobre los libros de texto modernos que incluyen a las secciones cónicas, es en cuanto a forma y método se refieren, prácticamente nulo, afirma Fried (2011). Pero las razones probables de que esto suceda en la forma de abordar este conocimiento en la actualidad, podría ser la falta de conocimiento predominante sobre el tema, pues Fried considera que el matemático promedio tendría dificultades en entender los procesos de construcción y de explicación de Apolonio, por la complejidad que éste le da a sus trabajos.

La forma de las proposiciones es una dificultad adicional, porque el lector no encuentra en ellas ninguna de las ayudas ordinarias para la comprensión de un trabajo geométrico algo complicado, como la apropiación convencional, en libros de texto modernos, de letras definidas para denotar puntos particulares en las diversas secciones cónicas. Por el contrario, las enunciaciones de las proposiciones que, con la ayuda de una notación acordada, pueden enunciarse ahora en pocas líneas, fueron pronunciadas por Apolonio invariablemente en palabras como las enunciaciones de Euclides.

Por lo tanto, a menudo es una cuestión de trabajo considerable incluso para entender la enunciación de una proposición. Además las proposiciones son pronunciadas continuamente, no hay descansos con el propósito de permitir que el ojo tome fácilmente los pasos sucesivos en la demostración y así facilitar la comprensión del argumentos como un todo. También encontramos que no hay uniformidad en la notación, en casi todas las proposiciones nuevas se emplea una letra diferente para denotar el mismo punto (Heath, 1896).

Por todo esto que menciona Heath y Fried, es decir, por el contenido, la estructura y el lenguaje empleado, podemos pensar que la obra *Las Cónicas*, fue escrita para cierta y limitada comunidad de matemáticos, mismos con los que compartían experiencias y trabajos en su Academia, con quienes tenían intereses relacionados con la geometría, o aquellos con ciertas habilidades relacionadas con la visualización y construcción de figuras geométricas.

Esta obra por tanto, es una expresión de los trabajos del autor y de otros matemáticos que trabajaron con las cónicas, que sintetiza los pensamientos estos matemáticos y presenta una versión estructurada de los resultados obtenidos además de manera generalizada, realizando las construcciones partiendo de un cono oblicuo.

Es por ello que es **parte de una expresión intelectual más global,** ya que Apolonio no codificó la Geometría, como Euclides, ni abarcó diversos asuntos, como Arquímedes; pero orientó sus esfuerzos en una dirección casi única con tal maestría que sus investigaciones sobre cónicas permiten decir que fue el primer especialista que registra la historia de la Geometría, hasta el punto de que solo en tiempos recientes se ha agregado algo a lo que él escribió: ejes, centros, diámetros, asíntotas, cuerdas conjugadas y focos, son otros tantos temas tratados por el geómetra de Pérgamo con acierto no superado (Vera, 1970).

El contexto de la época tiene un recargo considerable en la geometría para resolver problemas meramente matemáticos o relacionados con otras disciplinas. Encontramos que en la Academia de Alejandría, pensaban científicamente y el rol de la matemática, la manera en como se hacía matemáticas en la época, era geometrizar, y esto se mira en la forma de escribir y describir los procesos de pensamiento utilizados, pues la redacción de las obras son muy parecidas, según lo que dicen los historiadores y lo que encontramos en las traducciones de los originales.

Es una expresión muy de la época, el cómo se escribe, se organiza, se presenta, se retoma todo lo que se había estudiado anteriormente y se formalizaba en un solo tratado, recopilando todos los estudios relacionados con el tema y realizando aportaciones propias del autor.

Por lo que la obra *La Cónicas* no es exclusiva en cuanto al formato, pues comparte la estructura que seguían todas las obras de la época, sin embargo, en cuanto a su contenido, hace un gran aporte a las Matemáticas recopilando los trabajos de la época relacionados con las secciones cónicas y aunque por su complejidad va dirigido a cierta comunidad, todas estas características en su conjunto, hacen a esta majestuosa obra parte de una expresión intelectual más global.

DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA FUENTE

La fuente secundaria "*Científicos Griegos*" del autor Francisco Vera impresa en 1970, es la que hemos elegido para analizar por contener una buena traducción de los primeros siete libros de la majestuosa obra "*Las Cónicas*" de Apolonio de Perga, esto de acuerdo a una comparación previa hecha con otras fuentes. Esta obra como su título menciona contiene trabajos de otros matemáticos griegos, tales como Arquímedes, Ptolomeo, Pappo, Diofanto de Alejandría, entre otros. Para fines de nuestro objeto de estudio nos enfocaremos en el capítulo 2, dedicado a Apolonio de Perga, quien formaliza los estudios realizados hasta sus tiempos sobre cónicas. Este capítulo relativo a Apolonio, va de la página 301 a la 454. En el desarrollo de estas páginas podemos encontrar una pequeña bibliografía de este matemático, algunas cartas que le escribió a Eudemo, las menciones de otras traducciones hechas a su obra *Las Cónicas*, así como el contenido de los primeros siete libros de ésta, con definiciones, teoremas y problemas (estos últimos los enuncia como proposiciones). A continuación se describe la manera en que está organizado el contenido de cada libro, desde el primero hasta el siete.

El libro I contiene 60 proposiciones y un total de 11 definiciones. Al principio del libro I, presenta 8 definiciones, seguido de 16 proposiciones, posteriormente da otras 3 definiciones y finaliza con 44 proposiciones. En esta traducción, no enuncian la proposición 45.

El libro II consta de 53 proposiciones, y en esta traducción encontramos que las proposiciones 15, 16 y 17 están juntas, así como las 41 y 42, las 46 y 47 y las 50 y 51.

En el libro III, Apolonio propone 56 proposiciones y en esta traducción encontramos que las proposiciones 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 y 15 no están, las proposiciones 30, 31, 32 y 33 las presentan en una sola proposición.

El libro IV presenta un total de 57 proposiciones. En esta traducción, las primeras 8 proposiciones no las enuncian. De la proposición 10 a la 23 tampoco las presentan y las proposiciones 27, 28 y 29 están unidas y las enuncian en una sola proposición.

El libro V consta de 77 proposiciones, entre las que nos comparten en esta traducción, solamente las primeras 43. También encontramos que las proposiciones 9 y 10 las presentan juntas, que las proposiciones 18, 19, 20, 21, 22 y 23 no las presentan, y finalmente, que las proposiciones 28 y 29 así como la 42 con la 43, las enuncian en una sola proposición.

En el libro VI el autor presenta 33 proposiciones y 10 definiciones. Las proposiciones 4 y 5 están unidas en una sola proposición, las 7 y 8 también, así como las 12 y 13. Las proposiciones 17, 18, 19, 20, 21 y 22 no las encontramos en esta traducción.

El libro VII tiene un total de 51 proposiciones. Las proposiciones que en esta traducción unieron en una sola fueron: la 6 con la 7, la 8 con la 9, la 12 con la 13, las 14, 15, 16, 17, 18, 19 con la 20, la 21 con la 22, la 29 con la 30, la 33 con la 34, la 36 con la 37, la 38 con la 39, la 42 con la 43, la 44 con la 45 y la 49 con la 50.

En esta fuente se observa una organización y redacción con tintes euclidianos, ya que sus tiempos no distan mucho, entendiendo que Euclides vivió aproximadamente del año 330 a.C. al 275 a.C. y Apolonio del 262 a.C. al 180 a.C.; al decir que con tintes de euclidianos, nos referimos a la organización y enunciación de las proposiciones y la manera en que demuestra sus teoremas y problemas, partiendo de supuestos, realizando construcciones auxiliares e incluso el lenguaje verbal y matemático empleado resultan ser muy similares. Es importante mencionar que las demostraciones en esa época no eran tan rigurosas como lo que actualmente se acepta como una demostración, sino que bastaba con que lo que se enuncia en la proposición pudiera construirse con los elementos dados y de la manera como se indicaba para aceptar que dicha proposición era correcta. Las proposiciones se presentan organizadas de manera ordenada y ascendente, enunciando primeramente algunas definiciones de elementos básicos que utiliza en sus proposiciones, tales como el cono, eje, vértice, entre otros; y en las primeras 14 proposiciones también, Apolonio construye y enuncia cada manipulación que le hace al cono y finaliza con las construcciones de las secciones cónicas, mismas que obtiene de cortar un cono por planos con ciertas características. Una vez construidas las secciones cónicas, donde Apolonio trabaja en el espacio (con tres dimensiones), pues **hace manipulaciones con el cono**, es a partir de la proposición 15 que ocurre una transición de trabajar con tres dimensiones a trabajar sólo con dos. Trabajando desde dicha proposición en un plano euclidiano, sin referencias en el sentido de ejes cartesianos. Es en la proposición 15 del libro I hasta la 51 del libro VII, que trabaja con las secciones cónicas, elementos, propiedades geométricas de éstas, en un plano que al no tener ejes cartesianos permite que el énfasis se encuentre en los elementos geométricos que se requieren para la construcción de dichas secciones cónicas. Esto de alguna manera reafirma la importancia de lo geométrico al estudiar las cónicas, pues en la actualidad y por la manera en que este tema es llevado al aula, nos resulta muy fácil que partiendo de un sistema de referencia como lo son los ejes coordenados, realicemos un simple bosquejo de cualquier cónica, es decir, trazos sin exactitud y de esta manera se resta importancia a las propiedades geométricas que tienen los puntos que pertenecen a cierta cónica; o que basados también de los sistemas de coordenadas cartesianas establezcamos la representación algebraica que nos permita determinar si ciertos puntos pertenecen a una cónica realizando simples procedimientos algorítmico-algebraicos y descuidando nuevamente la parte geométrica de la que Apolonio parte para construir estas secciones cónicas.

Las proposiciones que se omiten, se unen o que no se demuestran en esta traducción, menciona el autor que fueron por varios motivos, algunos de ellos: la inaccesibilidad a la prosa, porque lo que se dice es demasiado largo y fastidioso (en palabras del autor de la fuente), porque algunas de las proposiciones eran recíprocas y/o casos particulares de proposiciones de libros anteriores, o incluso se omitían las demostraciones por haber sido realizadas por reducción al absurdo y en palabras del autor no valía la pena reproducirlas sino que bastaba con compartir los enunciados para que el lector mirara cómo Apolonio consiguió un análisis exhaustivo de los problemas de intersecciones y contactos de cónicas.

En palabras del autor se dice que las proposiciones de esta obra son en realidad una re-re-re-re traducción que intenta conservar el lenguaje de Apolonio, a pesar de que algunos de los libros se han perdido, por ejemplo, el caso de la demostración de la proposición 1, del libro V:

> Hemos traducido literalmente esta demostración de la traducción francesa de Paul ver Eecke, quien, como dijimos en la bibliografía, la tradujo a su vez de la traducción latina que Halley había hecho de la traducción árabe de Abulfath Abenquasim, gracias al cual conocemos el contenido del libro V de las Cónicas, cuyo original griego está irremisiblemente perdido. A pesar de la re-re-re-retraducción, el lenguaje parece apoloniano; pero como se puede poner en duda su absoluta fidelidad, emplearemos en lo sucesivo al simbolismo moderno, que solo hemos utilizado hasta ahora en nuestras notas aclaratorias y que en los libros V, VI y VII lo creemos preferible a la reconstrucción de la prosa griega por la razón apuntada, y suprimiremos la fórmula clásica de terminar la demostración «que era lo que queríamos demostrar», porque Apolonio no la escribió al final de ninguna de las proposiciones de los cuatro primeros libros de su obra, lo que permite sospechar que tal fórmula que Euclides empleó siempre y Arquímedes alguna que otra vez, fue añadida por el traductor árabe (Vera, 1970, p. 410 y 411).

Entre el lenguaje verbal y matemático que se presenta en esta obra que a pesar de ser una traducción de otras traducciones, encontramos que se intenta conservar el lenguaje de Apolonio. En general se observa que en la demostración de sus proposiciones inicia o finaliza con la afirmación de lo que se quiere demostrar, utilizando las palabras «Digo que…» seguido de la afirmación. Encontramos también que considera, de alguna manera, como iguales a la recta y al segmento de recta, o más bien, no hace distinción entre ellas. Para denotar una recta tangente, Apolonio utiliza tres letras donde el punto de tangencia está representado por una de ellas, sin embargo, no presenta un orden por igual al nombrarlas, es decir, en ocasiones el punto de tangencia lo coloca primero que las otras dos letras, otras ocasiones en medio y otras más, al final. También se observa que la parábola la denota con tres letras, tomando las dos últimas como pertenecientes a la circunferencia que es base del cono. Otro término utilizado en las demostraciones es "ordenadas", las cuales no son utilizadas en el sentido actual que las concebimos como la coordenada vertical en un eje cartesiano, sino como las paralelas a una recta trazadas en orden. Y otro aspecto que notamos y que es de importancia relevante, es que se apoya mucho en la proporcionalidad entre segmentos de figuras semejantes, y la mayoría de las veces al referirse que son proporcionales los segmentos, en realidad dice que son iguales, lo cual en una primera lectura podría confundir al lector.

Por todo lo anterior mencionado podemos decir que esta fuente está dirigida a un grupo específico de la sociedad, en su época, la misma Academia donde se formó con alumnos de Euclides, y en la actualidad todos los que tengan interés y curiosidad con el contexto geométrico. No podría ser para el público en general, debido a que mucho de lo que se dice se hace de manera indirecta y se omiten pasos, tomando en cuenta que ciertos elementos han sido demostrados anteriormente, por lo que Apolonio, en ocasiones, no se preocupa por ser tan específico y detallar cada paso de la construcción, necesario para llegar a lo que se quiere demostrar.

De acuerdo al objetivo de esta investigación el cuál va dirigido a problematizar las cónicas, en particular, comenzando con la parábola, consideramos que el énfasis estará en entender las construcciones geométricas de la parábola como resultado de realizar varios cortes a un cono oblicuo; así como las propiedades que resultan de la construcción de rectas tangentes a una parábola dada. Por lo que realizaremos un análisis de las unidades seleccionadas, en los dos momentos planteados en el método.

Las unidades fueron seleccionadas, la primera porque es la primera vez que se enuncia a la parábola como resultado del corte de un cono oblicuo por ciertos planos y la otra unidad porque permite estudiar una propiedad de la parábola; cada unidad está conformada por otras proposiciones que son necesarias para demostrar la proposición principal, así como de algunas definiciones. La unidad 1 tiene al teorema o proposición 11 del Libro I de *Las Cónicas* como la proposición principal, pues en ésta se menciona por primera vez a la parábola. Para entender la demostración de esta proposición, tuvimos que entender la proposición 3, 4, 7 y 8 del mismo libro (Figura 21).

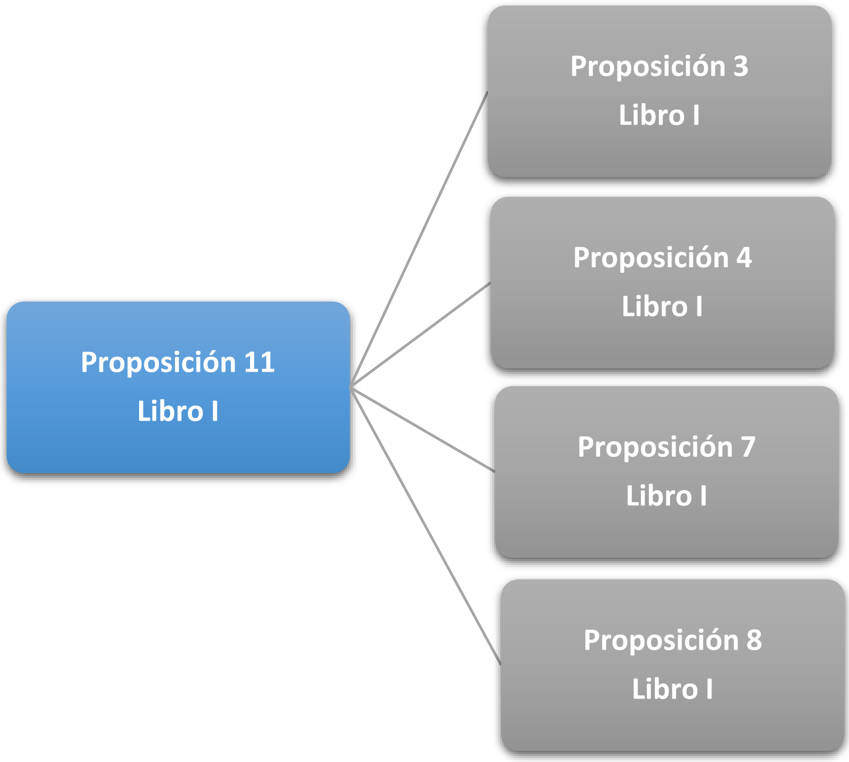


Figura 21. Esquema de la unidad de análisis 1.

La unidad 2 consta de 4 proposiciones, siendo la proposición 41 del Libro III de *Las Cónicas* la principal. Para poder realizar la demostración de esta proposición fueron necesarias la proposición 5 y 29 del Libro II y la proposición 32 del Libro I (Figura 22).

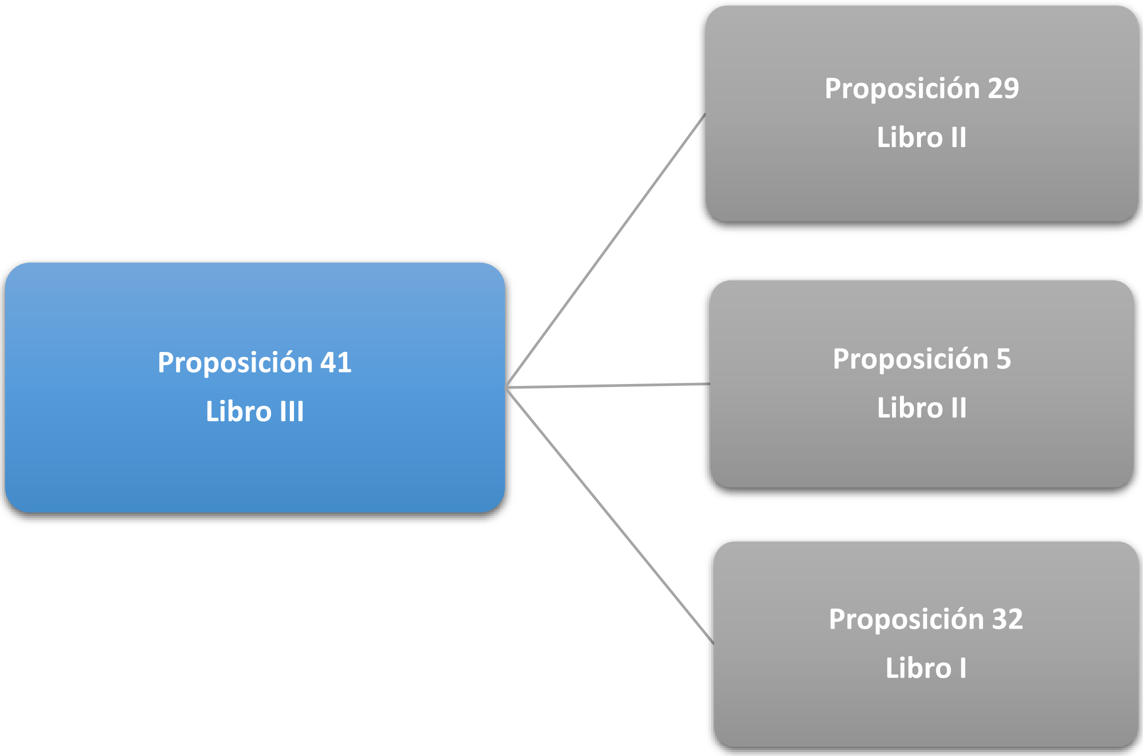


Figura 22. Esquema de la unidad de análisis 2.

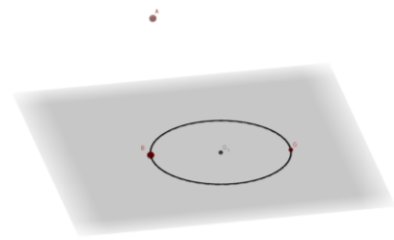
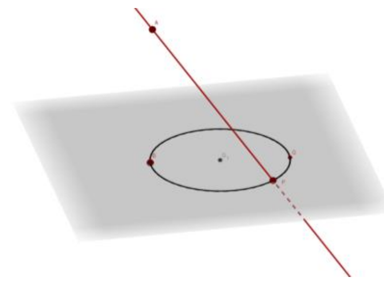
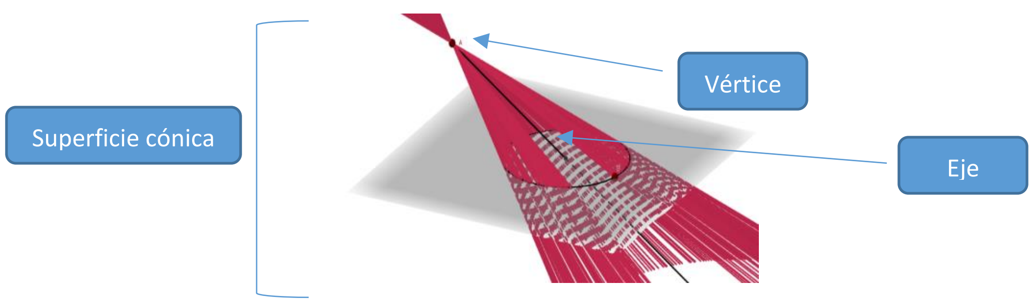
Otra fuente que tomamos como apoyo para complementar nuestra fuente principal Vera (1970), fue la de Taliaferro y Fried (2013), cuyos autores mencionan que es una traducción al inglés de los originales en griego. En esta fuente no se omiten o unen proposiciones pero se reduce a los contenidos de los primeros cuatro libros de *Las Cónicas*, que debido a que nuestras unidades a analizar pertenecen a los contenidos de los primeros tres libros, fue importante tomarla en cuenta para verificar que lo que se dice en nuestra fuente principal es de la autoría de Apolonio y no de los historiadores que realizaron la traducción. La decisión de que nuestra fuente principal para el análisis fuera la traducción de Vera (1970), se tomó ya que ésta se encuentra en castellano y eso nos evitaba hacer nuevamente interpretaciones tanto de las proposiciones como de los procesos realizados en las demostraciones de éstas.

Después de realizar una descripción general de la obra analizada, damos inicio al análisis **textual**.

4.2. ANÁLISIS TEXTUAL

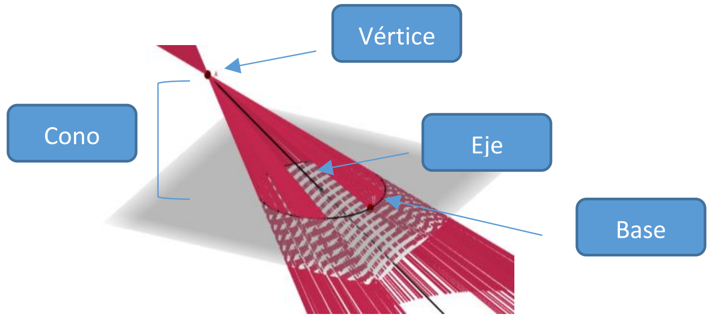
Antes de iniciar con el análisis de las unidades, presentamos las definiciones que dio Apolonio, de los conceptos básicos que son importantes saber:

1. Si desde un punto no situado en el plano del círculo se traza a la circunferencia de éste una recta, se prolonga en sus dos direcciones y, permaneciendo fijo el punto, se hace recorrer a la recta la circunferencia hasta que vuelva a su posición inicial, llamo ***superficie cónica*** a la que, descrita por la recta, se compone de dos superficies opuestas por el vértice que se extienden al infinito, lo mismo que la recta generatriz; y llamo ***vértice*** de la superficie al punto fijo, y ***eje*** la recta trazada por este y el centro del círculo.

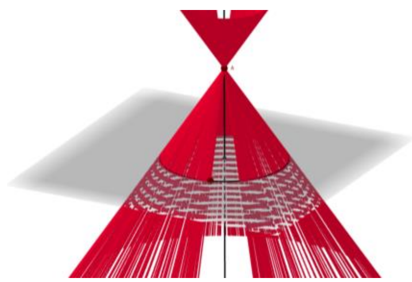
<table>
<tr>
<td>
Se traza una circunferencia y un punto fuera de ella.</td>
<td>
Si desde un punto no situado en el plano del círculo se traza a la circunferencia de este una recta, se prolonga en sus dos direcciones.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Permaneciendo fijo el punto, se hace recorrer a la recta la circunferencia hasta que vuelva a su posición inicial, llamo superficie cónica a la que, descrita por la recta, se compone de dos superficies opuestas por el vértice que se extienden al infinito, lo mismo que la recta generatriz, y llamo vértice de la superficie al punto fijo, y eje la recta trazada por este y el centro del círculo.</td>
</tr>
</table>

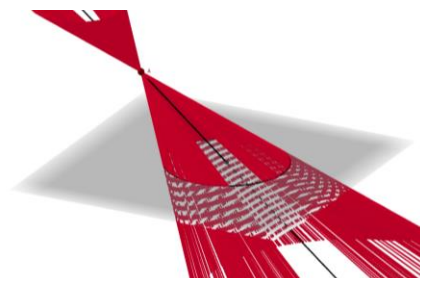
2. Llamo ***cono*** a la figura limitada por el círculo y por la superficie cónica comprendida entre el vértice y la circunferencia del círculo; ***vértice*** del cono al que lo es de su superficie; ***eje*** a la recta trazada desde el vértice al centro del círculo, y ***base*** a este.



3. Llamo cono recto al que tiene el eje perpendicular a la base y ***oblicuo*** al que no tiene el eje perpendicular a la base.

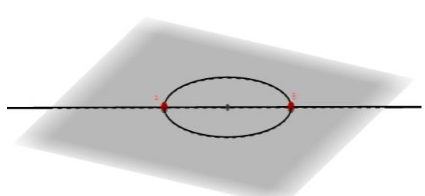


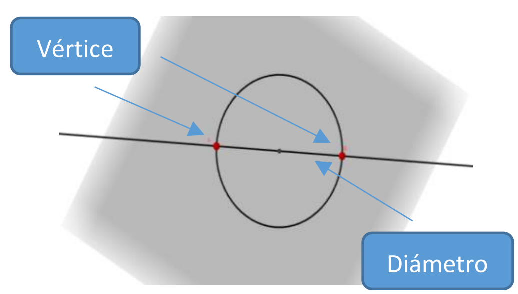
Cono recto



Cono oblicuo

4. Llamo ***diámetro*** de toda línea curva situada en un solo plano a la recta que, trazada en la curva, divide en dos partes iguales a todas las paralelas a una recta cualquiera en la curva; ***vértice*** de ésta al extremo de esa recta situada en la curva, y, por último, llamo ***rectas trazadas ordenadamente*** al diámetro, a las paralelas.





4.2.1. ANÁLISIS DE LAS UNIDADES SELECCIONADAS-PROPOSICIONES DE *LAS CÓNICAS* DE APOLONIO

Proposición 3, Libro I

La sección de un cono por un plano es un triángulo.

Vera (1970, p.321)

If a cone is cut by a plane through the vertex, the section is a triangle.

Taliaferro y Fried (2013, p.6)

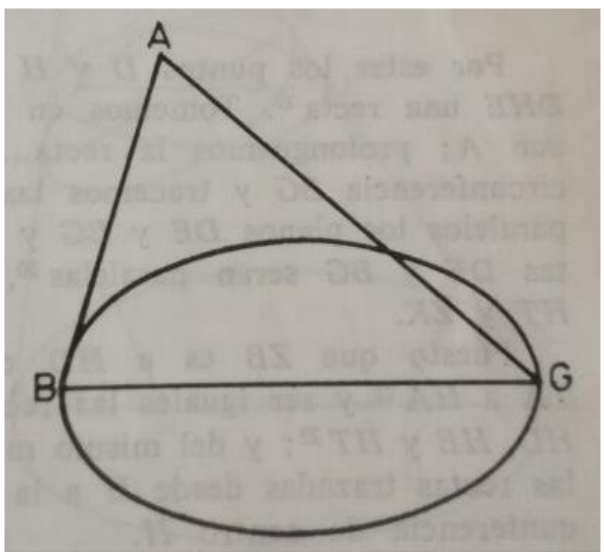


Figura 23. Representación del triángulo obtenido al cortar el cono por un plano (Vera, 1970).

Se agrega la proposición de Taliaferro y Fried, (2013), porque encontramos una diferencia en el enunciado de ésta con la de Vera (1970). Esta diferencia resulta importante, porque en una se especifica que el plano que corta al cono pasa por el vértice de éste y en el otro no.

La demostración en contenido es la misma, por lo que solo tomamos la de la Vera (1970).

Estructura discursiva de la proposición:

La sección de un cono por un plano es un triángulo.

1 Lo que ya se conoce.

2 Nuevos elementos en la construcción.

3 Las características, relaciones y propiedades que se obtienen.

Estas mismas partes se pueden ver en la demostración, sólo que cada una desarrollada de manera argumentada con conocimientos ya validados en la época o demostrados previamente.

DEMOSTRACIÓN

Sea un cono de vértice el punto A y base el círculo BG; cortémosle por un plano que pase por A, el cual determinará en la superficie cónica las rectas AB y AG y en la base la BG. Digo que ABG es un triángulo. Puesto que la recta que une los puntos A y B es la sección común del plano secante y la superficie cónica, AB es una recta, y lo mismo AG; luego BG es también una recta, y, por consiguiente, ABG es un triángulo.
Tabla 1. Demostración y apoyos visuales, de la Proposición 3. Fuente:Vera (1970, p.321).

Notas:

La proposición 3, es en donde Apolonio realiza un corte al cono por primera vez, con lo cual obtiene un lugar geométrico particular, el triángulo.

Si bien no seleccionamos la proposición 1 y 2 como unidad de análisis, e iniciamos desde la proposición 3, es importante destacar que en la proposición 1 se trabaja con rectas trazadas sobre la superficie cónica. Y en la proposición 2, con las rectas trazadas en una o en otra de las dos superficies cónicas opuestas por el vértice que caen dentro de la superficie cónica y su prolongación fuera. Por lo que ambas proposiciones no serán necesarias estudiarlas a profundidad aunque Apolonio si utiliza de alguna manera estas proposiciones, en proposiciones posteriores.

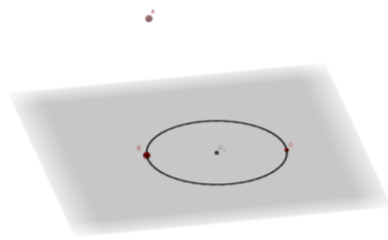
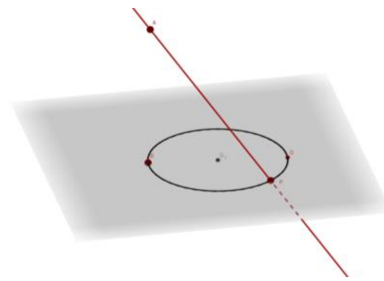
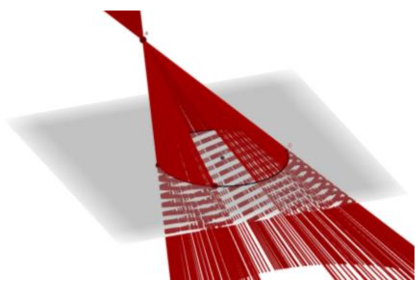
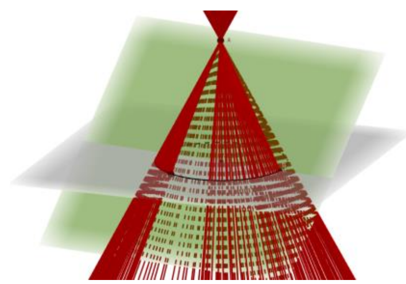
Con respecto al lenguaje matemático utilizado encontramos que para referirse a un segmento de recta, Apolonio lo llama recta. Denotaba a un círculo con dos letras, las cuales pudieran entenderse como los extremos de su diámetro, pero dadas las condiciones del plano que corta al cono, sabemos que no necesariamente es así. Utiliza la definición de triángulo dada en esa época, como la figura de tres lados, comprendida debajo de tres líneas rectas.

Observamos en este ejemplo, que más que demostración, Apolonio propone un proceso de construcción en el que obtiene un triángulo al cortar un cono por un plano que pase por su vértice y que llegue a su base (el círculo). Dado que son muchos los triángulos que se generan con este primer corte al cono, será necesario indicar las condiciones del plano que corta, para determinar uno de los triángulos generados que será de suma importancia para desarrollar otras construcciones, tanto de las secciones cónicas como de algunas propiedades de éstas, tomando dicho triángulo como referencia.

Proceso de reconstrucción geométrica:

Esta proposición aunque fue sencilla, fue reconstruida porque es un momento importante en los inicios de las manipulaciones y trabajo con el cono, además que la reconstrucción nos permite mirar directamente lo que sucede al realizar este primer corte al cono. Para la reconstrucción de ésta y de todas las demás proposiciones que son parte de nuestras unidades de análisis, nos apoyamos de un software de geometría dinámica.

Dado que la herramienta de geometría dinámica utilizada no incluye conos oblicuos, éste se construyó paso a paso de la siguiente manera:

 Se traza una circunferencia y un punto fuera de ella.	 Posteriormente, considerando un punto sobre la circunferencia, se traza la recta que va de este punto al vértice.
 Arrastramos este punto situado sobre la circunferencia por toda ésta. Marcando el rastro observamos que entre el vértice y el punto sobre la circunferencia se dibuja un cono oblicuo, ya que el cono está limitado por el vértice y su base.	 Al cortar un cono por un plano, se observa en la imagen que la intersección del plano con el cono determinará en la superficie cónica dos rectas y una más en la base del cono.

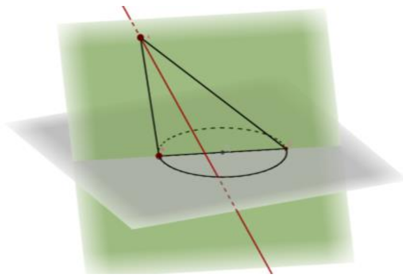
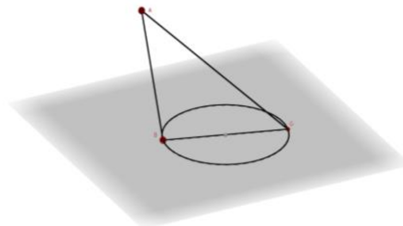
 Resulta un triángulo ABG.	 Los triángulos generados por el corte a un cono por un plano que pase por el vértice pueden ser muchos. Aquí presentamos uno cuyos vértices son A, B y G.

Figura 24. Proceso de reconstrucción de la proposición 3.

Identificación de acciones:

Proposición	¿Qué hace?	¿Cómo lo hace?
3, Libro I.	Construye el **lugar geométrico** triángulo, dentro del cono.	Transitando entre dimensiones al realizar un corte al cono por un plano y generando el lugar geométrico triángulo, es decir, está pensando en el espacio pero trabaja en el plano al encontrar lugares geométricos dentro de éste. En el espacio reconoce planos, trabaja con planos y genera sólidos, a estos sólidos los corta por otros planos que al final generan

		lugares geométricos que son estudiados. En este caso uno de los triángulos generados se utilizará como referencia para otras construcciones geométricas.

Proposición 4, Libro I

> *Si una u otra de las superficies cónicas opuestas por el vértice se corta por un plano paralelo al de la circunferencia que recorre la recta que describe la superficie, el plano interceptado por ésta será un círculo con el centro en el eje y la figura limitada por el círculo y la superficie cónica, separada por el plano secante, del lado del vértice, será un cono.*
>
> Vera (1970, p.321)

Estructura discursiva de la proposición:

Si una u otra de las superficies cónicas opuestas por el vértice se corta por un plano paralelo al de la circunferencia que recorre la recta que describe la superficie, el plano interceptado por ésta será un círculo con el centro en el eje y la figura limitada por el círculo y la superficie cónica, separada por el plano secante, del lado del vértice, será un cono.

Se identifican 3 partes en esta proposición:

1 Lo que ya se conoce.

2 Nuevos elementos en la construcción.

3 Las características, relaciones y propiedades que se obtienen.

Estas mismas partes se pueden ver en la demostración, sólo que cada una desarrollada de manera argumentada con conocimientos ya validados en la época o demostrados previamente.

DEMOSTRACIÓN

Sea una superficie cónica de vértice *A*, y *BG* la circunferencia que recorre la recta para describirla. Cortándola por un plano cualquiera paralelo al del círculo *BG* se tiene como intersección la línea *DE*, que digo que es una circunferencia de centro en el eje de la superficie.

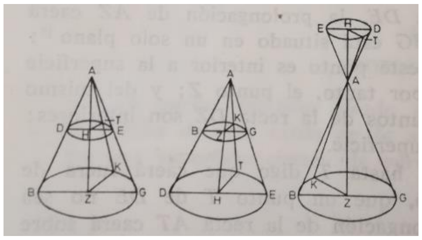


Figura 25. Proceso de construcción de proposición 4 (Vera, 1970, p. 322).

Tomemos, en efecto, el centro Z del círculo BG y, uniéndolo con el vértice A, tendremos el eje que corta al plano secante en un punto H, y, trazando un plano por AZ, la sección será un triángulo ABG.

Por estar los dos puntos D y H en el plano secante y en el ABG, es DHE una recta. Tomemos en la línea DE un punto T y unámoslo con A; prolonguemos la recta AT hasta su encuentro en K con la circunferencia BG y tracemos las rectas HT y ZK; y entonces siendo paralelos los planos DE y BG serán paralelas, y por la misma razón lo serán las HT y ZK.

Puesto que ZB es a HD como ZG a HE y ZK a HT como ZA a HA y al ser iguales las rectas ZB, ZG y ZK, también lo serán las HD, HE y HT; y del mismo modo se demostraría la igualdad de todas las rectas trazadas desde H a la línea DE; luego esta línea es una circunferencia con centro H.

Es claro, además, que la figura limitada por el círculo DE y la superficie cónica separada por este, del lado del punto A, es un cono; y también ha quedado demostrado que la

intersección del plano secante y el triángulo que pasa por el eje es un diámetro de ese círculo.
Tabla 2. Demostración y apoyos visuales, de la Proposición 4. Fuente: Vera (1970, p.322).

Notas:

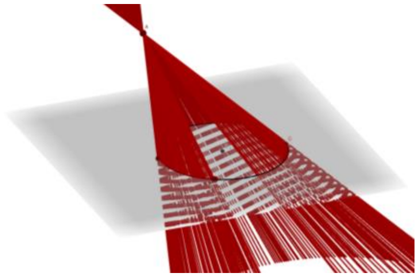
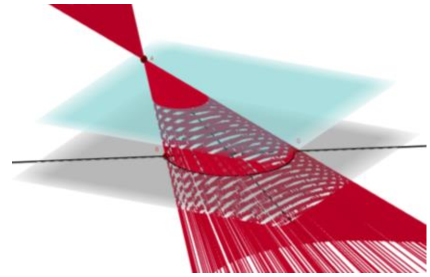
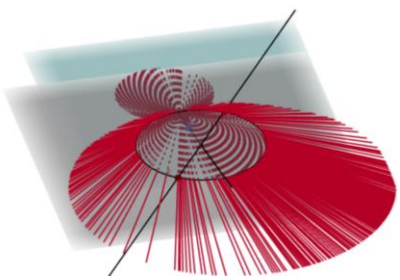
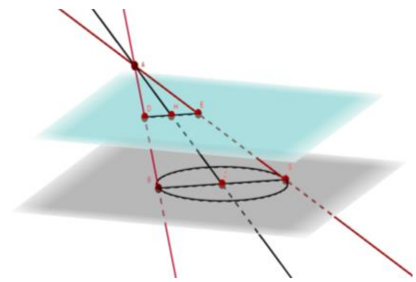
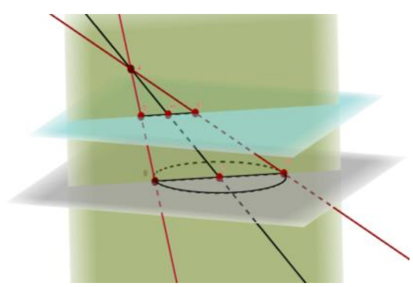
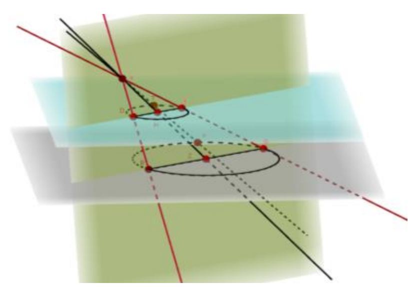
En la proposición 4, es donde Apolonio realiza un segundo corte al cono, de manera que el plano que corte por segunda vez sea paralelo al de la base del cono y así obtener otro círculo paralelo al que es base del cono, con lo que se observa nuevamente esta transición entre las dimensiones. La construcción de este otro círculo paralelo a la base del cono, permitirá establecer relaciones entre segmentos proporcionales, puesto que se obtienen segmentos contenidos entre planos paralelos. Sabemos que el cono tiene como vértice a *A* y como base la circunferencia de centro Z, por lo que al trazar un plano paralelo al de donde se encuentra esta circunferencia, podrán compararse los segmentos comprendidos entre las figuras semejantes.

Con respecto al lenguaje matemático utilizado encontramos que utiliza ***línea DE*** para referirse a la circunferencia que se obtuvo del segundo corte al cono. Denota de la misma manera al diámetro de este círculo, por lo que en ocasiones al mencionar *DE* se refiere al diámetro y en otras a la circunferencia.

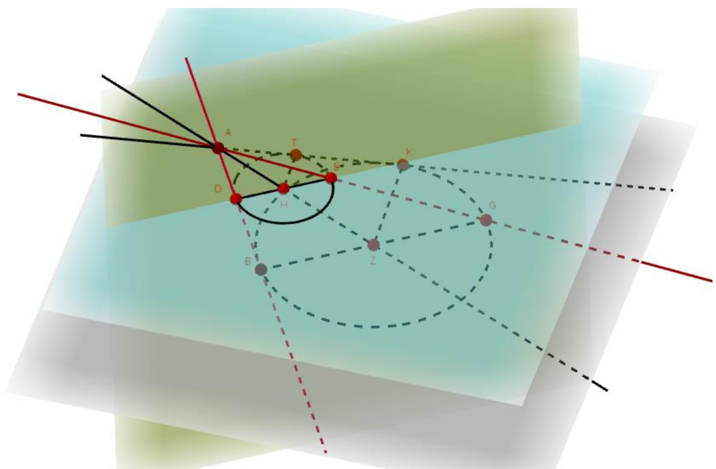
El proceso de construcción que propone Apolonio para obtener este otro círculo, es con el fin de utilizar las relaciones proporcionales comprendidas entre planos paralelos, y más adelante establecer otras relaciones que involucren más elementos de los lugares geométricos, para demostrar otras propiedades.

Proceso de reconstrucción geométrica:

Esta proposición aunque en parte estaba definida entre las primeras definiciones dadas por Apolonio, fue reconstruida nuevamente por los elementos geométricos agregados y para poder observar los segmentos proporcionales. Este proceso de reconstrucción se ilustra y describe a continuación:

 Superficie cónica de vértice *A* y base la circunferencia *BG*.	 El plano azul es paralelo al del círculo *BG* y corta a la superficie cónica.
 Al intersecarse el plano paralelo con la superficie cónica se obtiene la línea *DE*, que es una circunferencia de centro en el eje de la superficie.	 Si tomamos el centro *Z* del círculo *BG* y lo unimos al vértice *A*, tendremos el eje que corta al plano en el punto *H*.
 Trazando un plano por *AZ*, resulta un triángulo *ABG*.	 Tomando un punto *T* de la línea *DE* y úniendolo con *A*, al prolongar esta recta

encuentra a la círcunferencia *BG* en el punto *K*.



Trazamos las rectas *H*T y *ZK*. Y como los planos *DE* y *BG* son paralelos y estando cortados por el plano *ABG*, las rectas *DE* y *BG* serán paralelas, y por la misma razón lo serán las rectas *HT* y *ZK*.

Puesto que:

$$\frac{ZB}{HD} = \frac{ZG}{HE} = \frac{ZK}{HT} = \frac{ZA}{HA}$$

Y al ser iguales las rectas *ZB*, *ZG* y *ZK* por ser radios de la misma círcunferencia, también lo serían las rectas *HD*, *HE* y *HT*. Y como son iguales, entonces H sería el centro de ese lugar geométrico generado. Y de esta manera se demostraría la igualdad de todas las rectas trazadas desde *H* a la línea *DE*; por lo que este lugar geométrico generadota línea es una circunferencia de centro *H*.

Se describe como claro que la figura limitada por el cículo *DE* y la superficie cónica, comprendida entre el vértice y la circunferencia del círculo, sería un cono (por las primeras definiciones dadas por Apoolonio al principio del *Libro I*), así como que la intersección del plano secante y el triángulo que pasa por el eje es un diámetro de ese círculo.

Figura 26. Proceso de reconstrucción de la proposición 4.

Identificación de acciones:

Proposición	¿Qué hace?	¿Cómo lo hace?
4, Libro I.	Construye un cono contenido en otro cono.	Sigue transitando entre dimensiones, trazando otro corte al cono, pero ahora por un plano paralelo a su base que genera otro lugar geométrico. Demuestra que este lugar geométrico se trata de una circunferencia utilizando relaciones proporcionales entre los segmentos que se obtienen al trazar el plano de corte. Los segmentos proporcionales de igual forma son diámetros de las dos circunferencias, porque van del centro de la circunferencia hasta ésta, y por las relaciones establecidas se llega a que son iguales.

Proposición 7, Libro I

> *Cortando un cono por un plano que pase por el eje y por otro que corte al de la base según una recta perpendicular a la del triángulo según el eje, o a su prolongación, las paralelas a esa perpendicular trazadas desde la sección producida en la superficie cónica por el plano secante, cortarán a la intersección de éste y el triángulo según el eje, y, prolongadas hasta la otra parte de la sección, quedarán divididas en dos partes iguales por dicha intersección. Si el cono es recto, la recta situada en la base será perpendicular a la misma intersección y si es oblicuo solo será perpendicular cuando el plano que pasa por el eje lo sea a la base del cono.*
>
> Vera (1970, p.324)

Estructura discursiva de la proposición:

Cortando un cono por un plano que pase por el eje y por otro que corte al de la base según una recta perpendicular a la del triángulo según el eje, o a su prolongación, las paralelas a esa perpendicular trazadas desde la sección producida en la superficie cónica por el plano secante, cortarán a la intersección de éste y el triángulo según el eje, y, prolongadas hasta la otra parte de la sección, quedarán divididas en dos partes iguales por dicha intersección. Si el cono es recto, la recta situada en la base será perpendicular a la misma intersección y si es oblicuo solo será perpendicular cuando el plano que pasa por el eje lo sea a la base del cono.

Se identifican 3 partes en esta proposición:

1 Lo que ya se conoce.

2 Nuevos elementos en la construcción.

3 Las características, relaciones y propiedades que se obtienen.

Estas mismas partes se pueden ver en la demostración, sólo que cada una desarrollada de manera argumentada con conocimientos ya validados en la época o demostrados previamente.

DEMOSTRACIÓN

Let there be a cone whose vertex is the point A and whose base is the circle BC, and let it be cut by a plane through the axis and let it make as a saction the triangle ABC (I.3). And let it also be cut by another plane cutting the plane the circle BC is in, in the straight line DE perpendicular either to the straight line BC or to it produced, and let it make as a section on the surface of the cone the line DFE. Then the straight line FG is the common section of the cutting plane and of the triangle ABC. And let any point H be taken on the section DFE, and let the straight line HK be drawn through H parallel to the straight line DE.

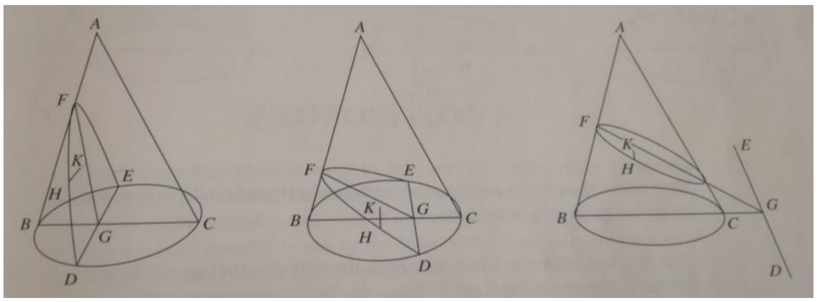


Figura 27. Proceso de construcción de proposición 7 (Taliaferro y Fried, 2013, p. 13)

I say that the straight line HK meets the straight line FG, and, on being produced to the other side of the section DFE, will be bisected by FG.

For since a cone whose vertex is the point A and whose base is the circle BC has been cut by a plane through its axis, and makes as a section the triangle ABC, and since some point H on the surface, not on a side of the triangle ABC, has been taken, and since the straight line DG is perpendicular to the straight line BC, therefore the straight line drawn through H parallel to DG, that is HK, meets the triangle ABC, and if further produced to the other side of the surface, will be bisected by the triangle (I. 6).

Then since the straight line drawn through H parallel to the straight line DE meets the triangle ABC and is in the plane of the section DFE, therefore it will fall on the common section of the cutting plane and of the triangle ABC. But the straight line FG is the common section of the planes. Therefore the straight line drawn through H parallel to DE will fallo in FG, and, if further produced to the other side of the section DFE, will be bisected by the straight line FG.

Then either the cone is a right cone, or the axial triangle ABC is perpendicular to the circle BC, or neither.

First let the cone be a right cone. Then the triangle ABC would be perpendicular to the circle BC (Def. 3; Eucl. XI. 18). Since then the plane ABC is perpendicular to the plane BC, and the straight line DE has been drawn in one of the planes, BC, perpendicular to their common section the straight line BC, therefore the straight line DE is perpendicular to the triangle ABC (Eucl. XI. Def. 4), and, therefore, to all the straight lines touching it and in the triangle ABC (Eucl. XI. Def.3). And so DE is also perpendicular to the straight line FG.

Then let the cone not be a right cone. If, now, the axial triangle is perpendicular to the circle BC, we could likewise show that DE is perpendicular to FG.

Then let the axial triangle ABC not be perpendicular to the circle BC. – I say that DE is not perpendicular to FG. For if possible, let it be. And it is also perpendicular to the straight line BC. Therefore DE is perpendicular to both BC and FG, and therefore it will be perpendicular to the plane through BC and FG. But the plane through BC and GF is the triangle ABC, and therefore DE is perpendicular to the triangle ABC. And therefore all the planes through it are perpendicular to the triangle ABC. But one of the planes through DE is the circle BC; therefore the circle BC is perpendicular to the triangle ABC. And so the triangle ABC will also be perpendicular to the circle BC. And this is not supposed. Therefore the straigh line DE is not perpendicular to the straight line FG.

Porism

Then from this is evident that the straight line FG is the diameter of the section DFE, since it bisects the straight lines drawn parallel to some straight line DE, and it is evident that it is possible for some parallel to some straight line DE, and it is evident that it is possible for some parallels to be bisected by the diameter FE and not be perpendicular to FG.

Tabla 3. Demostración y apoyos visuales, de la Proposición 7. Fuente: Taliaferro y Fried , p.13-15).

Notas:

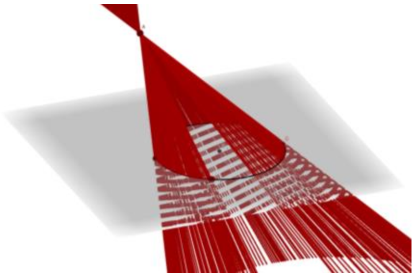
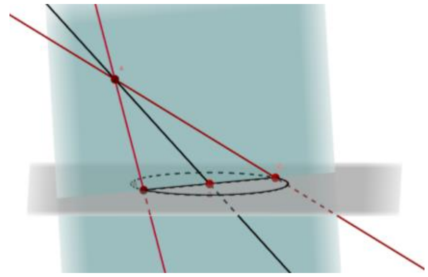
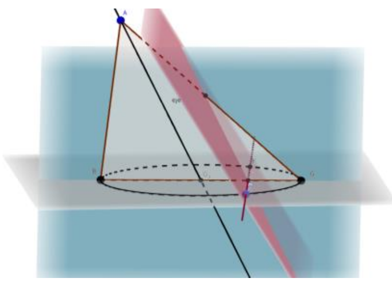
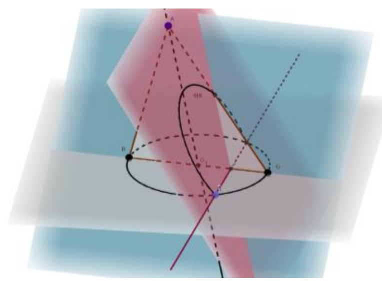
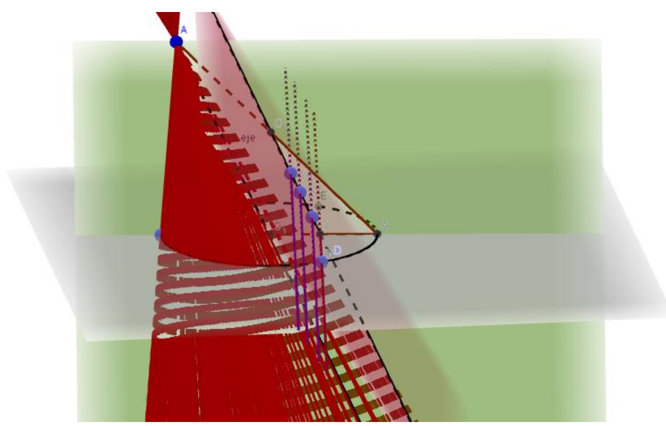
En esta proposición 7, empieza a hacerse notorio la importancia del diámetro de una sección del cono, pues se construye sin mencionar la definición, pero llegando a lo que ésta indica. Puesto que se construyen las rectas paralelas a la recta perpendicular a la base del triángulo, las cuales con la intersección de los dos planos del cual resulta una recta (el diámetro de la sección) quedarán divididas en dos partes iguales. Se trabaja con los dos casos, cuando el cono es recto y cuando es oblicuo. Se menciona el caso para el cono recto, que la intersección de los dos planos que cortaron al cono (diámetro de la sección) será perpendicular a la recta trazada perpendicular a la base del triángulo. Y cuando el cono es oblicuo, solamente será perpendicular esa intersección cuando el plano que pasa por el eje (proposición 3), sea perpendicular a la base del cono. Con esto podemos identificar la importancia de que el diámetro de la sección cónica, sea perpendicular a la perpendicular de la base del triángulo, pues eso se busca para cualquiera que sea el cono.

Si bien no seleccionamos la proposición 5 y 6 como unidad de análisis, es importante mencionar que en la proposición 5 es similar a la proposición anterior, puesto que se genera un círculo pero en sentido contrario, agregando un corte más al cono por un plano que sea perpendicular al triangulo según el eje. Y en la proposición 6, se trabaja con el cono que es cortado por un plano que pasa por el eje y que desde un punto que no se encuentra en el triángulo se traza una recta paralela a la perpendicular de la base del triángulo, dicha recta paralela se trazará desde un punto sobre la circunferencia hasta la base del triángulo, se dice que esta recta cortará al triángulo y si se prolonga quedará dividida en dos partes iguales por el plano del triángulo. Se observan otras manipulaciones al cono que aunque no las estudiaremos a profundidad porque no las utilizamos directamente en nuestras unidades analizadas, fue un proceso que llevo a Apolonio a construir las secciones cónicas.

Con respecto al lenguaje matemático identificamos que Apolonio le llama sección cónica a la curva que se dibuja al realizar el segundo corte al cono (que debe pasar por la recta perpendicular a la base del triángulo). Se hacen transiciones de las tres dimensiones a las dos dimensiones, primero al realizar los cortes al cono y después al trabajar con las rectas paralelas que se encuentran en la sección cónica generada, es decir, en el último plano que cortó al cono.

Proceso de reconstrucción geométrica:

Esta proposición fue reconstruida nuevamente por los elementos geométricos agregados y para tener un acercamiento con éstos. Para la reconstrucción, las manipulaciones son hechas a un cono oblicuo, aunque en el caso de la proposición se explica lo que sucede para el caso cuando es un cono recto, aquí solamente presentamos el caso general y que más nos interesa. Este proceso de reconstrucción se ilustra y describe a continuación:

<table>
<tr>
<td>
Sea un cono de vértice A y base el círculo BG.</td>
<td>
Se corta el cono por un plano que pase por el vértice y llegue a la base BG, generando un triángulo ABG.</td>
</tr>
<tr>
<td>
Se corta el cono por otro plano que pase por la recta perpendicular a la base del cono.</td>
<td>
Se genera una sección DFE.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"></td>
</tr>
</table>

Las rectas paralelas a la recta perpendicular DE trazadas en la sección cónica DFE quedarán divididas en dos partes iguales por la intersección de los planos verde y rosa (el resultado de dicha intersección es el diámetro de la sección).

Figura 28. Proceso de reconstrucción de la proposición 7.

Identificación de acciones:

Proposición	¿Qué hace?	¿Cómo lo hace?
7, Libro I.	Genera una sección cónica por primera vez y aunque no la nombra, empieza a trabajar con ella y con uno de sus elementos geométricos, su diámetro.	Corta el cono por dos planos con condiciones específicas, siendo el segundo plano el que genera la sección cónica. Se identifica que al trazar las rectas paralelas a la recta perpendicular a la base del triángulo, éstas quedarán divididas en dos partes iguales por la intersección de los dos planos, es decir, una recta la cual terminará siendo el diámetro de la sección cónica. Con esto se retoma la definición dada por Apolonio al principio del *Libro I*, aunque no se mencione en la demostración como tal.

Proposición 8, Libro I

> *Cortando un cono por un plano que pase por el eje y por otro que corte al de la base según una recta perpendicular a la base del triángulo según el eje, el diámetro de la sección producida en la superficie cónica es paralelo a uno de los lados del triángulo o encuentra al cono más allá del vértice; y si se prolongan indefinidamente la superficie cónica y el plano secante, la sección crecerá indefinidamente y toda paralela trazada desde la sección a la recta situada en la base del cono determinará en el diámetro de la sección, a partir del vértice, una recta igual a toda recta dada.*
>
> Vera (1970, p.324-325)

Estructura discursiva de la proposición:

Cortando un cono por un plano que pase por el eje y por otro que corte al de la base según una recta perpendicular a la base del triángulo según el eje, el diámetro de la sección producida en la superficie cónica es paralelo a uno de los lados del triángulo o encuentra al cono más allá del vértice; y si se prolongan indefinidamente la superficie cónica y el plano secante, la sección crecerá indefinidamente y toda paralela trazada desde la sección a la recta situada en la base del cono determinará en el diámetro de la sección, a partir del vértice, una recta igual a toda recta dada.

Se identifican 3 partes en esta proposición:

1 Lo que ya se conoce.

2 Nuevos elementos en la construcción.

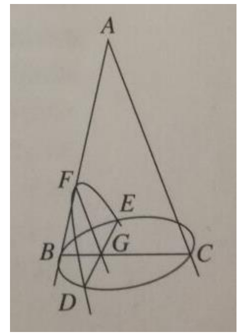
3 Las características, relaciones y propiedades que se obtienen.

Estas mismas partes se pueden ver en la demostración, sólo que cada una desarrollada de manera argumentada con conocimientos ya validados en la época o demostrados previamente.

Vera (1970) no incluye la demostración de esta proposición, sin embargo, en Taliaferro y Fried (2013), nos comparten la siguiente demostración:

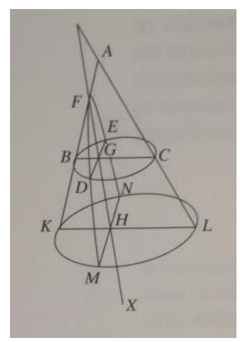
DEMOSTRACIÓN

Let there a cone whose vertex is the point A and whose base is the circle BC, and let it be cut by a plane through its axis, and let it make as a section the triangle ABC (I.3). And let it be cut also by another plane cutting the circle BC in a straight line DE perpendicular to the straight line BC, and let it make as a section on the surface the line DFE. And let the diameter FG of the section DFE be either parallel to the straight line AC or on being produced meet it beyond the point A (I.7 and porism).



I say that, if both the Surface of the cone and the cutting plane are produced indefinitely, the section DFE also will increase indefinitely.

For let both the Surface of the cone and the cutting plane be produced. Then it is evident that also the straight lines AB, AC, FG will be therewith produced. Since the straight line FG is either parallel to AC or produced meets it beyond the point A, therefore the straight lines FG and AC on being produced in the direction of C and G will never meet. Then let them be produces and let some point H be taken at random on the straight line FG, and let the straight line BC, and MHN parallel to DE. Therefore the plane through KL and MN is parallel to the plane through BC and DE (Eucl. XI. 15). Therefore the plane KLMN is a circle (I.4).



And since the points D, E, M, N are in the cutting plane and also on the Surface of the cone, therefore they are on the common section. Therefore the section DFE has increased to the points M and N. Therefore, with the surface of the cone and the cutting plane increased to the circle KLMN, the section DFE has also increased to the points M and N. Then likewise we could show also, that if the Surface of the cone and the cutting plane are

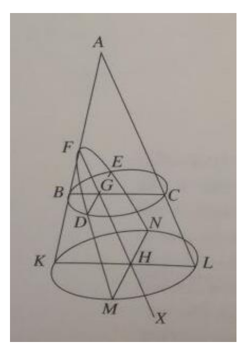


Figura 29. Proceso de construcción de

extended indefinitely, the section MDFEN will also increase indefinitely.	*proposición 8 (Taliaferro y Fried, 2013, 15-16).*
And it is evident that some straight line will cut off on straight line FH on the side of point F a straight line equal to any given straight line. For if we lay down the straight line FX equal to the given straight line, and draw a parallel to DE through X, it will meet the section, just as the straight line through H was also proved to meet the section in the points M and N. And so some straight line is drawn meeting the section, parallel to DE, and cutting off on FG on the side of point F a straight line equal to the given straight line.	
Tabla 4. Demostración y apoyos visuales, de la Proposición 8. Fuente: Taliaferro y Fried (2013, p. 15-16).	

Notas:

En esta proposición Apolonio trabaja con las rectas paralelas a la perpendicular a la base del triángulo, las cuales cortarán al diámetro e indicarán en éste una recta dada.

Se menciona que alguna de estas paralelas, al cortar al diámetro, determinará una porción de y en éste (recta dada), con la que podrán establecer algunas relaciones en proposiciones posteriores, por lo que podríamos decir que no funcionaría para todas las rectas paralelas a la recta que se encuentra en la base del cono, sino para alguna en particular, faltaría mirar de qué manera sé cuál es esa recta que me interesa utilizar para establecer las relaciones.

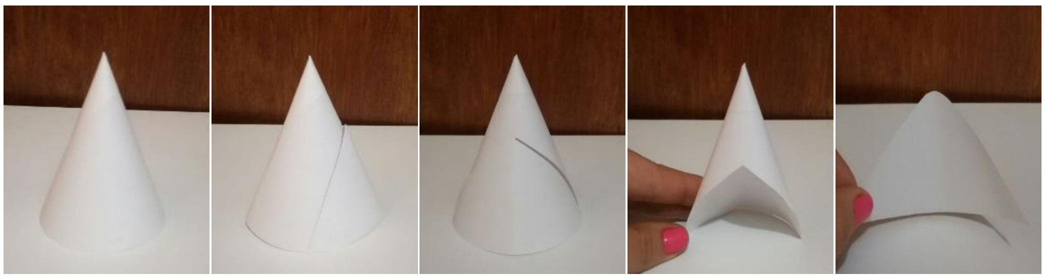
Apolonio también trabaja en esta proposición con la prolongación de la superficie cónica y del plano que la corta, probando que si se prolongan éstas infinitamente, la sección también crecerá indefinidamente.

Como parte del lenguaje matemático y verbal, identificamos poca claridad en la explicación sobre la recta paralela que será determinante para hallar la recta dada. Sabemos que esta recta dada será de alguna manera un parámetro para trabajar con la sección cónica, por lo que nos interesa conocer que toma como referencia Apolonio, para determinarla.

En esta proposición es donde se menciona por primera vez que al cortarse por segunda vez el cono, por un plano que pase por la recta perpendicular a la base del triángulo, generará una sección que tendrá su diámetro paralelo a uno de los lados del triángulo. Lo mencionado anteriormente no se demuestra, es parte de la construcción que en otras proposiciones ya se trabajó.

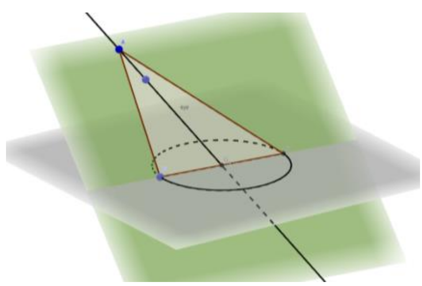
Reconstrucción geométrica:

Para llevar a cabo las reconstrucciones se recurrió a bosquejos a lápiz y papel, algunos materiales recortables y, finalmente, a construcciones en geometría dinámica.

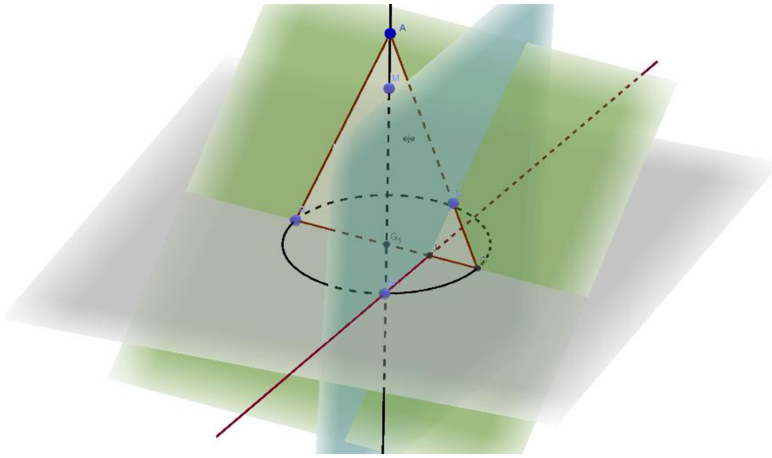
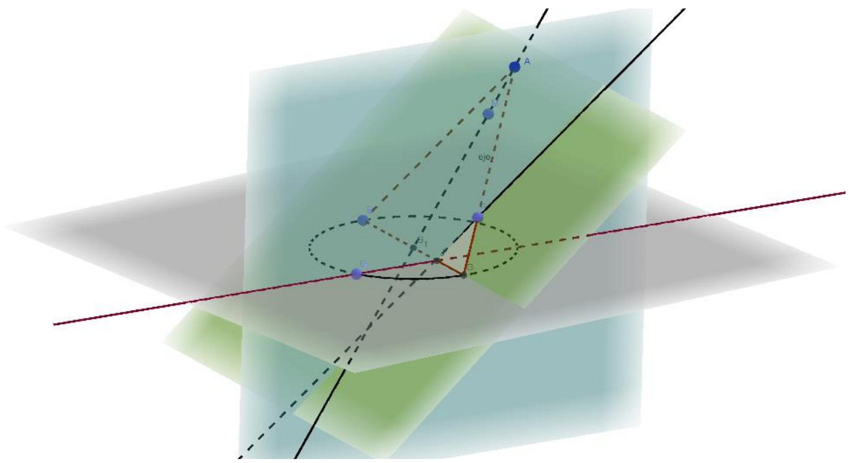


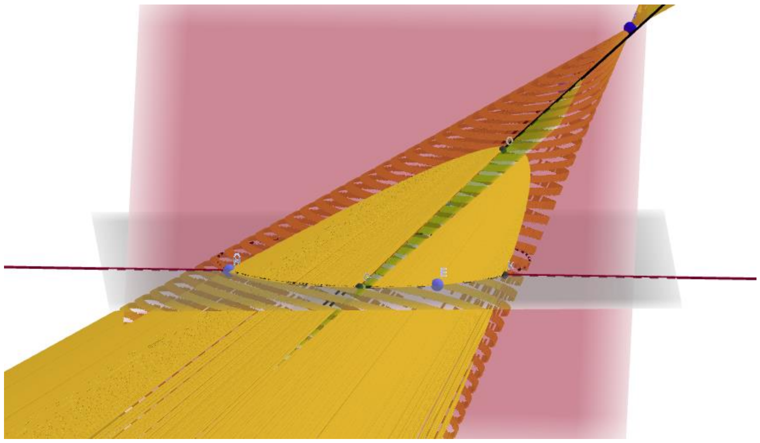
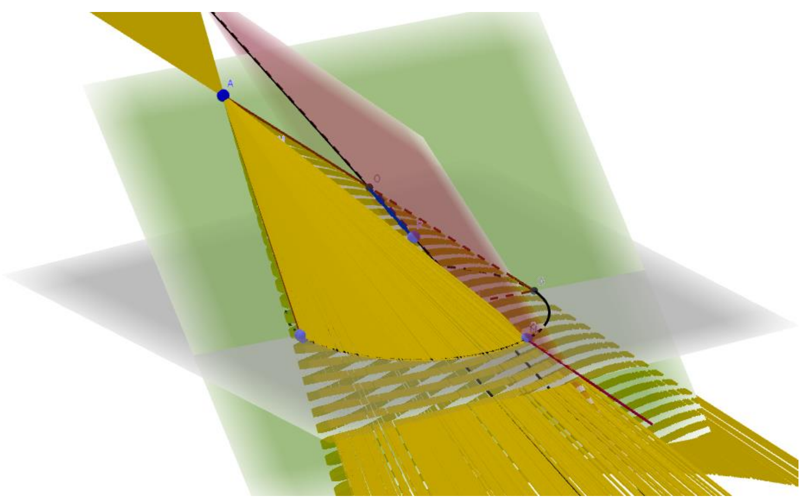
A continuación presentamos el proceso de reconstrucción en el software de geometría dinámica, ilustrando y describiendo cada uno de los pasos:

Por la reconstrucción geométrica de la proposición 3, ya se cuenta con la construcción donde un plano corta al cono, pasando por su vértice y su eje, para formar el triángulo de base mayor posible.



Plano (1)

 Plano (2)	Se traza un segundo plano, que pase por la recta perpendicular a la base del triángulo (recta roja).
	Se traza la sección construida con la intersección del segundo plano y la superficie cónica. Se identifica la intersección de los dos planos como el diámetro de dicha sección cónica.

	Se observa la sección cónica generada con el segundo plano (curva amarilla). El plano verde determina en esta sección el diámetro, que en la imagen alcanza a verse. Si observamos la prolongación de la superficie cónica y del plano secante, la sección generada también se prolongará indefinidamente.
	Dadas las limitaciones del software, se realiza esta construcción que permite tener un acercamiento más a los resultados de realizar estos cortes. La recta dada que se encuentra en el diámetro de la

	sección generada, la ilustramos de color azul.

Figura 30. Reconstrucción de la proposición 8.

Los cortes previos le proporcionan a Apolonio una sección cónica particular, que aunque no se menciona la sección cónica que construye, empieza a dar algunas características propias de la parábola, cuando dice que su diámetro es paralelo a uno de los lados del triángulo de referencia.

Esa sección pudo construirse de esa manera, por el primer corte al cono donde se genera un triángulo, ya que este triángulo fue la referencia para trazar el segundo plano.

Identificación de acciones:

Proposición	¿Qué hace?	¿Cómo hace?
8, Libro I	Prolonga indefinidamente la superficie cónica y el plano que la corta, con lo que se prolonga también la sección cónica generada. Obtiene una recta dada en el diámetro que se obtiene por medio de una de las rectas paralelas a la recta sobre la base del cono, que es perpendicular a la base del triángulo, que corta a dicho diámetro.	Apolonio prolonga indefinidamente la superficie cónica y el plano que lo corta, de manera que observemos que esta condición se seguirá cumpliendo con aquellos puntos que pertenecen a la sección generada, con lo que también crecerá indefinidamente. También construye lo descrito en la proposición 7. Con el segundo corte se obtiene una sección en el

		cono, cuyo diámetro resulta ser paralelo a uno de los lados del triángulo. Posteriormente traza las rectas paralelas a la recta perpendicular a la base del triángulo, para indicar que una de estas paralelas, al cortar al diámetro, generará en éste, una recta dada. Afirmando que el segmento de recta paralelo que va de la sección al diámetro será igual a la recta dada que se obtuvo al cortar el diámetro y que va del vértice de la sección al punto donde la recta paralela corta al diámetro. Estas rectas dadas, empezarán a utilizarse para establecer las relaciones entre segmentos, en proposiciones posteriores.

Proposición 11, Libro I

Cortando un cono por un plano que pase por el eje y por otro que corte a la base según una perpendicular a la del triángulo según el eje, si el diámetro de la sección es paralelo a uno de los lados del triángulo, el cuadrado de toda recta trazada desde la sección del cono paralelamente a la intersección del plano secante y el de la base del cono hasta el

diámetro de la sección, equivale al rectángulo formado por la recta que separa en el diámetro del lado del vértice de la sección y por una cierta recta cuya razón a la situada entre el ángulo cónico y el vértice de la sección es la misma que la del cuadrado de la base del triángulo según el eje al rectángulo formado por los otros dos lados del triángulo. Llamaremos parábola a tal sección.

Vera (1970, p. 326-327)

If a cone is cut by a plane through its axis, and also cut by another plane cutting the base of the cone in a straight line perpendicular to the base of the axial triangle, and if, further, the diameter of the section is parallel to one side of the axial triangle, and if any straight line is drawn from the section of the cone to its diameter such that this straight line is parallel to the common section of the cutting plane and of the cone's base, then this straight line to the diameter will equal in square the rectangle contained by (a) the straight line from the section's vertex to where the straight line to the diameter cursi t off and (b) another straight line which has the same ratio to the straight line between the angle of the cone and the vertex of the section as the square on the base of the axial triangle has to the rectangle contained by the remaining two sides of the triangle. And let such a section be called a parabola.

Taliaferro y Fried (2013, p.19)

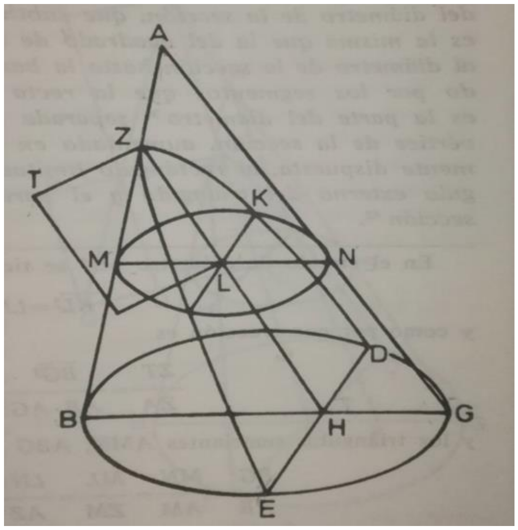


Figura 31. Construcción realizada por Apolonio (Vera, 1970, p. 326).

$$(KL)^2 = (ZL)(ZT)$$

$$\frac{ZT}{AZ} = \frac{(BG)^2}{(AB)(AG)}$$

Estructura discursiva de la proposición:

Cortando un cono por un plano que pase por el eje y por otro que corte a la base según una perpendicular a la del triángulo según el eje, si el diámetro de la sección es paralelo a uno de los lados del triángulo, el cuadrado de toda recta trazada desde la sección del cono paralelamente a la intersección del plano secante y el de la base del cono hasta el diámetro de la sección, equivale al rectángulo formado por la recta que separa en el diámetro del lado del vértice de la sección y por una cierta recta cuya razón a la situada entre el ángulo cónico y el vértice de la sección es la misma que la del cuadrado de la base del triángulo según el eje al rectángulo formado por los otros dos lados del triángulo. Llamaremos parábola a tal sección.

Se identifican 3 partes en esta proposición:

1 Lo que ya se conoce.

2 Nuevos elementos en la construcción.

3 Las características, relaciones y propiedades que se obtienen.

Estas mismas partes se pueden ver en la demostración, sólo que cada una desarrollada de manera argumentada con conocimientos ya validados en la época o demostrados previamente.

DEMOSTRACIÓN

Sea un cono de vértice A y base el círculo BG, y cortémosle por un plano que pase por el eje, el cual producirá como sección el triángulo ABG, y por otro plano que corte a la base BG del triángulo ABG y a la superficie cónica según la línea DZE cuyo diámetro ZH es paralelo al lado AG del triángulo que pasa por el eje; levantemos en el punto Z la perpendicular ZT a ZH y hagamos de manera que la recta ZT sea a una recta ZA como el cuadrado de BG al rectángulo formado por AB y AG y, por último, tracemos por un punto cualquiera K de la sección la paralela KL a DE. Digo que el cuadrado de KL equivale al rectángulo de ZT y ZL .
Tabla 5. Demostración y apoyos visuales, de la Proposición 11. Fuente: Vera (1970, p. 327).

Notas del autor de la fuente (Vera, 1970):

La demostración apoloniana, de lectura difícil, se reduce a la siguiente:

$$(KL)^2 = LM \cdot LN \qquad (1)$$

En el círculo de diámetro MN se tiene:

Y como por construcción es:

$$\frac{ZT}{AZ} = \frac{(BG)^2}{(AB)(AG)} = \frac{BG}{AG} \cdot \frac{BG}{AG} \qquad (2)$$

Y los triángulos semejantes AMN, ABG y ZML dan

$$\frac{BG}{AB} = \frac{MN}{AM} = \frac{ML}{ZM} = \frac{LN}{AZ}$$

$$\frac{BG}{AG} = \frac{MN}{NA} = \frac{ML}{LZ}$$

La igualdad (2), teniendo en cuenta la (1), se convierte en:

$$\frac{ZT}{ZA} = \frac{LN}{AZ} \cdot \frac{ML}{LZ} = \frac{(KL)^2}{AZ \cdot LZ}$$

De donde:

$$(KL)^2 = (ZT)(ZL).$$

Existen pequeñas diferencias entre las versiones de las dos fuentes de consulta, más bien aspectos de notación o maneras más detalladas y explícitas de realizar las construcciones y explicar en su totalidad, la demostración. Por lo que añadimos también la versión de (Taliaferro y Fried, 2013) para este análisis:

> Let there be a cone whose vertex is the point A, and whose base is the circle BC, and let it be cut by a plane through its axis, and let it make as a section the triangle ABC (I.3).And let it also be cut by another plane cutting the base of the cone in the straight line DE perpendicular to the straight line BC, and let it make as a section on the Surface of the cone the line DFE, and let the diameter of the section FG (I.7, and Def. 4) be parallel to one side AC of the axial triangle. And let the straight line FH be drawn from the point F perpendicular to the straight line FG, and let it be contrived that
>
> Sq. BC: rect. BA, AC :: FH : FA

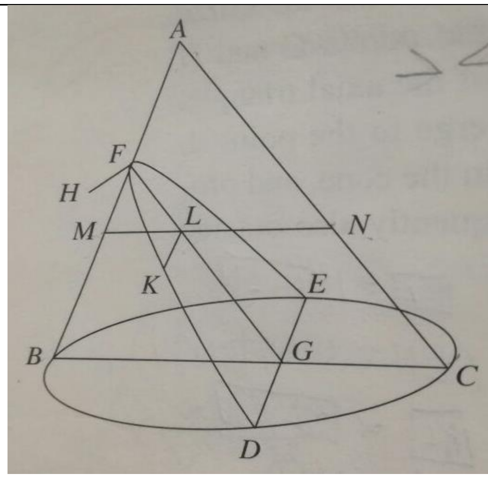


Figura 32. Trazos de la proposición 11 (Taliaferro y Fried, 2013, p. 20).

And let some point K be taken at random on the section, and through K let the straight line KL be drawn parallel to the straight line DE.

I say that sq. KL= rect. HF, FL.

For let the straight line MN be drawn through L parallel to the straight line BC. And the straight line DE is also parallel to the straight line KL.

Therefore the plane through BC and DE (Eucl. XI. 15), that is, to the base of the cone. Therefore the plane through KL and MN is a circle whose diameter is MN (I.4). And KL is perpendicular to MN since DE is also perpendicular to BC (Eucl. XI. 10). Therefore

Rect. ML, LN= sq. KL (Eucl. III. 31, VI, 8 porism, VI. 17).

And since

sq. BC : rect. BA, AC :: HF : FA,

and

sq. BC : rect. BA, AC :: BC: CA comp. BC : BA (Eucl. VI.23),

therefore

HF : FA :: BC : CA comp. BC : BA.

But

BC : CA :: MN : NA :: ML : LF (Eucl. VI. 4), and

BC : BA :: MN : MA :: LM : MF :: NL : FA (Eucl. VI. 4, VI. 2),

20Therefore

HF : FA :: ML : LF comp. NL : FA.

But

rect. ML, LN : rect. LF, FA :: ML : LF comp. LN : FA (Eucl. VI. 23).

Therefore

HF FA :: rect. ML, LN : rect. LF, FA.

But, with the straight line FL taken as common height,

HF : FA :: rect. HF, FL : rect. LF, FA (Eucl. VI. 1),

therefore

rect. ML, LN : rect. LF, FA :: rect. HF, FL : rect. LF, FA (Eucl. V. 11).

Therefore

rect. ML, LN = rect. HF, FL (Eucl. V. 9)

But

rect. ML, LN = sq. KL,

therefore also

sq. KL = rect. HF, FL.

And let such a section be called a parabola, and let HF be called the straight line to which the straight lines drawn ordinatewise to the diameter FG are applied in square ZH, and let it also be called the upright side.

Tabla 6. Demostración y apoyos visuales, de la Proposición 11. Fuente: Taliaferro y Fried (2013, p. 19-21).

Notas:

En esta proposición Apolonio hace una comparación entre áreas, afirmando que es igual un cuadrado a un rectángulo formado por distintos segmentos.

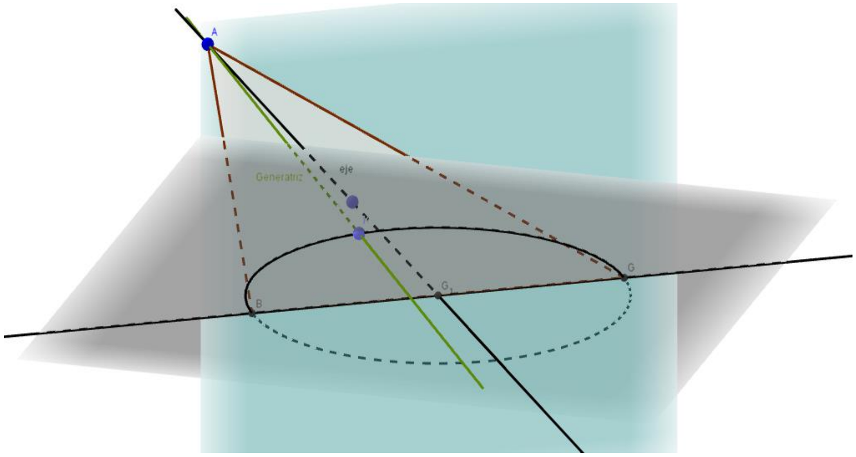
Se trabaja con planos paralelos unos con otros, lo cual forma figuras semejantes, para ser más específicos con triángulos semejantes, retomando el triángulo construido con el primer corte y después trazando un triángulo semejante a éste. Dichas figuras semejantes contienen segmentos proporcionales, con los cuales se establecen relaciones. En la demostración de Taliaferro y Fried (2013), se justifican varios de los pasos con algunas proposiciones de los Elementos de Euclides indicando el libro donde se encuentra.

Las relaciones entre segmentos proporcionales juega un papel importante en esta demostración, ya que es el camino que toma Apolonio para construir una parábola y justificar que se trata de esta sección cónica, ya que lo que busca es llegar a una relación en la que afirma que el cuadrado formado por un segmento será igual al rectángulo formado por otros dos segmentos. Utiliza segmentos proporcionales, en el que se resalta una propiedad importante de la cuadratura. Cabe destacar que para el establecimiento de esas relaciones entre segmentos, fue necesario realizar otras manipulaciones al cono, las cuales se presentaron en las proposiciones anteriores a ésta.

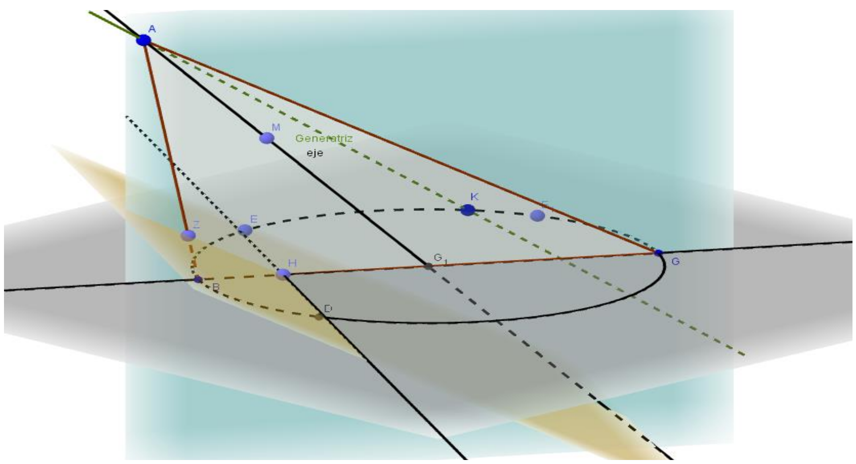
Identificamos también que se presenta una generalidad de casos, al manipular un cono oblicuo y que como resultado de estas manipulaciones se obtengan secciones del cono particulares que cumplen con ciertas relaciones de proporcionalidad entre segmentos de magnitud desconocida.

Proceso de reconstrucción geométrica:

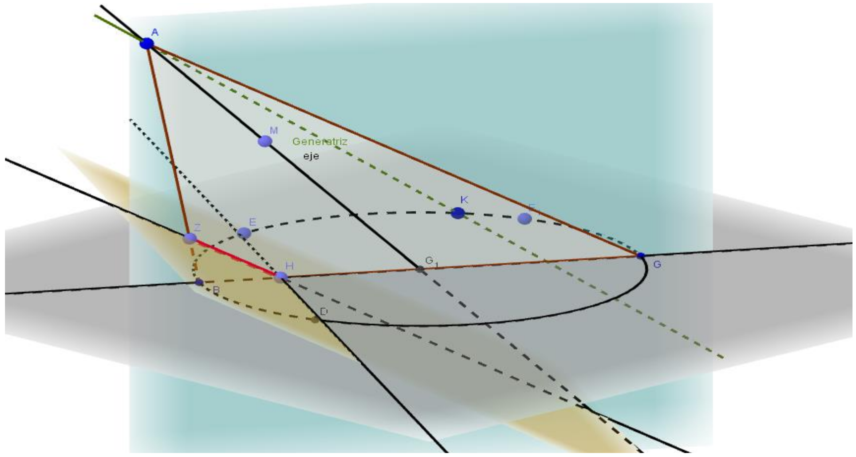
El proceso de reconstrucción de las construcciones de Apolonio con el software de geometría dinámica, nos permite hacer trazos exactos y con eso analizar a profundidad los elementos y propiedades geométricas que se pueden obtener de dichos trazos. A continuación presentamos la reconstrucción de la proposición 11:



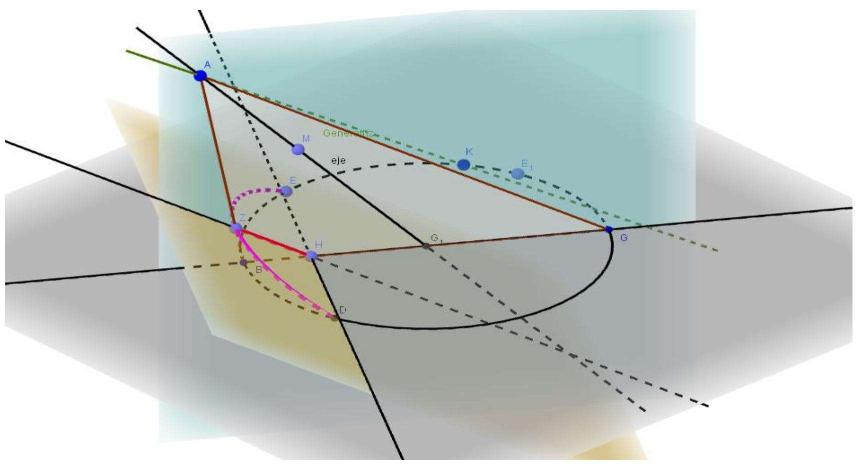
Se traza el primer plano que corta al cono por el vértice de ésta, pasa por su eje y llega hasta su base, generando el triángulo ABG.



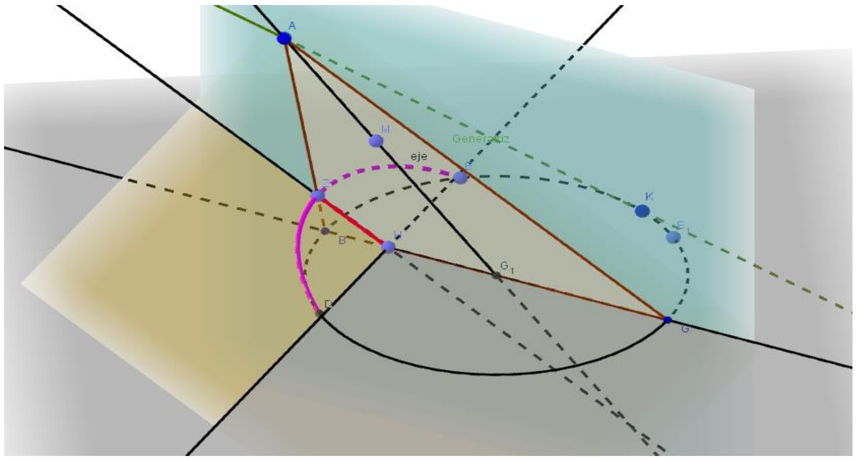
Se traza el segundo plano que pase por la recta perpendicular a la base del triángulo. El resultado será una sección cónica.



La sección cónica generada tendrá su diámetro paralelo a uno de los lados del triángulo ABG.



La sección cónica en esta ilustración se dibuja en color rosa, de igual forma se resalta su diámetro, del mismo color.



En esta ilustración se muestra otro ángulo del resultado de los dos cortes al cono por dos planos, que generó la sección cónica dibujada en color rosa. Teniendo la ilustración en las tres dimensiones, fue importante pasarnos al plano.

Figura 33. Reconstrucción de la proposición 11, generación de la parábola.

Identificación de acciones:

Proposición	¿Qué hace?	¿Cómo hace?
11, Libro I	Construye la sección cónica llamada **parábola**.	Corta el cono en dos ocasiones, por planos que generen ciertas condiciones. Apolonio utiliza las relaciones de proporcionalidad entre figuras semejantes, específicamente de los triángulos semejantes AMN, ABG y ZML. Dado que estos triángulos son semejantes, establece proporciones entre sus segmentos para llegar a la expresión analítica

		$$(KL)^2 = (ZT)(ZL)$$ que indica que la sección cónica que se generó al realizar esos cortes, se trata de una parábola. Este cumplimiento de las relaciones de proporcionalidad entre segmentos y la comparación de áreas, permite reconocer a la parábola, como la sección cónica que relaciona segmentos contenidos por ésta. Aparece por primera vez el uso de un parámetro, un segmento que se mantiene dentro de las relaciones proporcionales que se cumplen y del que no se describe completamente sus características.

Proposición 29, Libro II

La recta que une el punto de intersección de dos tangentes a una sección cónica o a una circunferencia con el que divide en dos partes iguales a la recta de los contactos, es un diámetro.

Vera (1970, p. 378)

Estructura discursiva:

La recta que une el punto de intersección de dos tangentes a una sección cónica o a una circunferencia con el que divide en dos partes iguales a la recta de los contactos, es un diámetro.

Se identifican 3 partes en esta proposición:

1 Lo que ya se conoce.

2 Nuevos elementos en la construcción.

3 Las características, relaciones y propiedades que se obtienen.

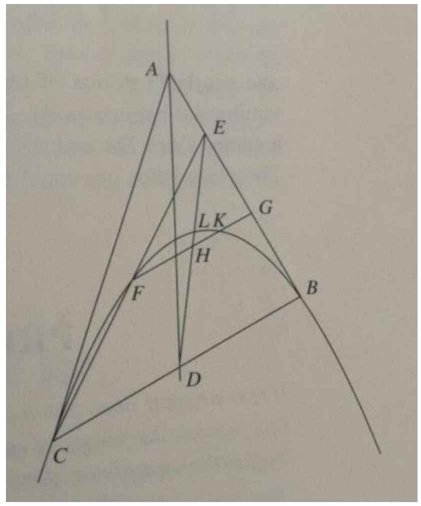
Estas mismas partes se pueden ver en la demostración, sólo que cada una desarrollada de manera argumentada con conocimientos ya validados en la época o demostrados previamente.

No tiene demostración en la fuente Vera (1970). Pero si una nota en la que se dice que se demuestra por reducción al absurdo recordando las proposiciones 35 y 36 del libro I. Sin embargo, en (Taliaferro y Fried, 2013), si nos presentan la siguiente demostración, la cual retomamos para el análisis:

DEMOSTRACIÓN

Let there be a section of a cone or circumference of a circle to which let the straight lines AB and AC, meeting at A, be drawn tangent, and let BC be joined and bisected at D, and let AD be joined.

I say that it is a diameter of the section.

For if possible, let DE be a diameter, and let EC be joined; then it will cut the section (I.35, 36). Let it cut it at F, and through F let FKG be drawn parallel to CDB. Since then CD=DB also FH=HG.  *Figura 34. Trazos presentados en la proposición 29 (Taliaferro y Fried, 2013, p. 143).* And since the tangent at L is parallel to BC (II. 5, 6), and FG is also parallel to BC, therefore also FG is parallel to the tangent at L. Therefore FH=HK (I.46, 47); and this is imposible. Therefore DE is not a diameter. Then likewise we could show that there is no other except AD.
Tabla 7. Demostración y apoyos visuales, de la Proposición 29. Fuente: Taliaferro y Fried (2013, p. 143).

Notas:

Esta proposición Apolonio la demuestra utilizando el método de reducción al absurdo, suponiendo que existen dos diámetros, y la forma de demostrar que solamente existe uno fue mostrando que la recta que se suponía diámetro no divide en dos partes iguales a las paralelas a la tangente.

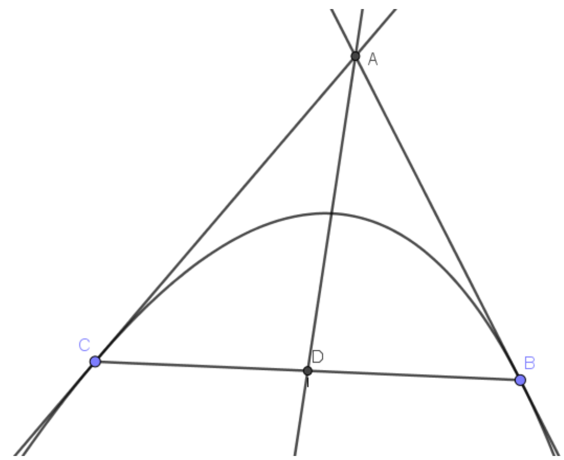
Se retoma para esta proposición la definición de diámetro como aquella recta que divide en dos partes iguales a aquellas rectas que se encuentran en la curva. Se apoya también de algunas proposiciones del libro I y II.

El lenguaje tanto verbal como matemático orienta de manera clara a la construcción del diámetro de la parábola, el cual será de gran importancia para la construcción de la parábola como sección cónica y para el estudio de algunas de sus propiedades.

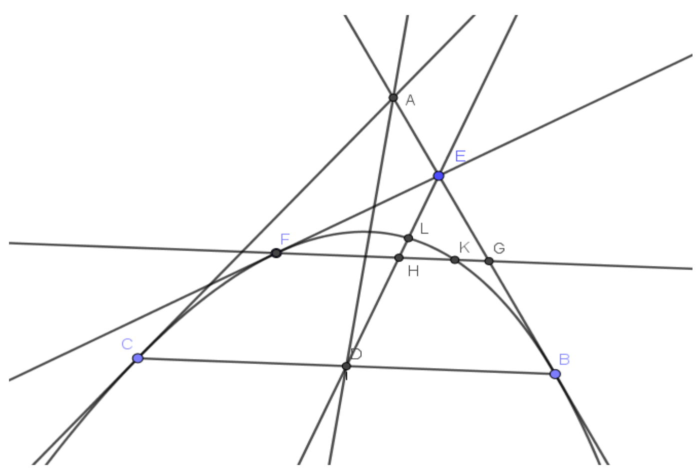
A partir de estas proposiciones, se trabaja en el plano.

Proceso de reconstrucción geométrica:

Para realizar la reconstrucción de esta proposición nos apoyamos al igual que en las demás de un software de geometría dinámica y a continuación compartimos las imágenes que representan dicha reconstrucción:



Dadas dos rectas tangentes a la sección cónica, se traza una recta que una el punto de intersección de las dos rectas tangentes y el punto medio de la recta que une los dos puntos de tangencia. Esta recta trazada será el diámetro de una sección cónica.



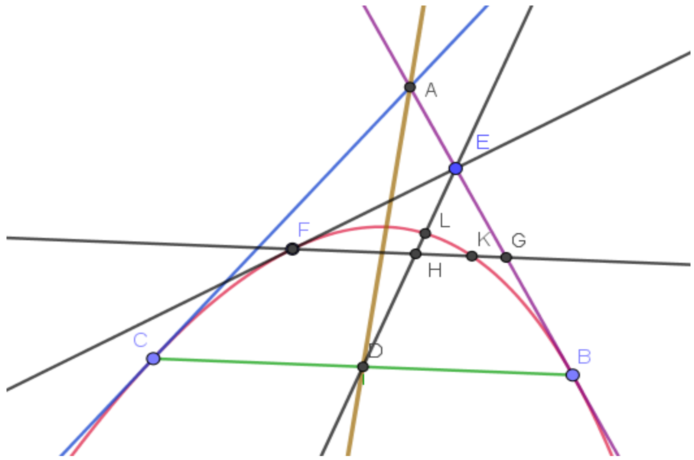
Se traza otro "diámetro" DE, que une el punto de intersección de una de las rectas indicadas al principio y de una recta nueva. Se observa en la ilustración que no se mantiene la igualdad de partes entre los segmentos, al cortar dicho diámetro a las rectas paralelas.
 Dado que no se cumple la definición de diámetro que en esta proposición se quiere mostrar, como aquella recta que divide en dos partes iguales a aquellas rectas que se encuentran dentro de la curva y que son paralelas, entonces con la reconstrucción verificamos que solamente existiría un solo diámetro en la sección.

Figura 35. Reconstrucción de la proposición 29.

Identificación de acciones:

Proposición	¿Qué hace?	¿Cómo hace?
29, Libro II	Construye el diámetro de una sección cónica que también pasa por el punto de intersección de dos rectas tangentes. Muestra también que existe un solo diámetro en la sección cónica.	Supone otro caso, en el que no es posible construir partes iguales en las rectas paralelas, es decir, construye otro diámetro que evidentemente no dividirá en dos partes iguales a las paralelas contenidas en la curva.

		Se observa por tanto que el diámetro de una sección cónica es único, pero por la forma en que se realiza, nos hace reflexionar que también serían limitadas las rectas tangentes que al intersecarse, el diámetro pasa por este punto de intersección.

Proposición 5, Libro II

Si un diámetro de una parábola o de una hipérbola divide a una recta en dos partes iguales, la tangente en el extremo de ese diámetro es paralela a la recta dividida en dos partes iguales.   Vera (1970, p.373)

Estructura discursiva:

Si un diámetro de una parábola o de una hipérbola divide a una recta en dos partes iguales, la tangente en el extremo de ese diámetro es paralela a la recta dividida en dos partes iguales.

Se identifican 3 partes en esta proposición:

1 Lo que ya se conoce.

2 Nuevos elementos en la construcción.

3 Las características, relaciones y propiedades que se obtienen.

Estas mismas partes se pueden ver en la demostración, sólo que cada una desarrollada de manera argumentada con conocimientos ya validados en la época o demostrados previamente.

No tiene demostración en la fuente de Vera (1970). En Taliaferro y Fried (2013), nos presentan la siguiente demostración que retomamos para realizar el análisis.

DEMOSTRACIÓN

Let there be parabola or hyperbola ABC whose diameter is the straight line DBE, and let the straight line FBG touch the section, and let some straight line AEC be drawn in the section making AE equal to EC.
I say that AC s parallel to FG.

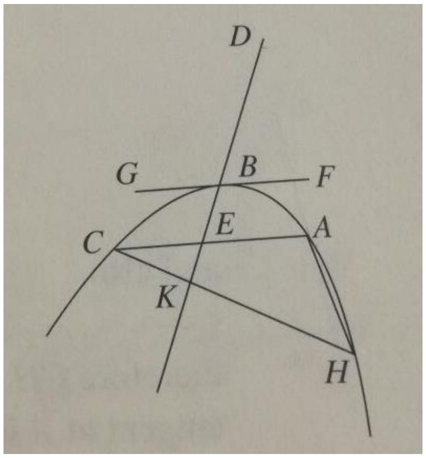


Figura 36. Proceso de construcción de proposición 5 (Taliaferro y Fried, 2013, p. 121).

For if not, let the straight line CH be drawn through C parallel to FG and let HA be joined. Since then ABC is a parábola or hyperbola whose diameter is DE, and tangent FG, and CH is parallel to it, therefore

CK=KH (I. 46, 47).

But also

CE=EA.

Therefore AH is parallel to KE; and this is absurd; for produced it meets BD (I.22).

Tabla 8. Demostración y apoyos visuales, de la Proposición 5. Fuente: Taliaferro y Fried (2013, p. 121-122).

Notas:

En esta proposición Apolonio utiliza la reducción al absurdo para demostrar que el diámetro dividirá en dos partes iguales a las rectas que se encuentren contenidas en la curva así como todas las paralelas a éstas.

Apolonio en esta demostración parte construyendo lo que debe cumplirse, es decir, dada la sección cónica, su diámetro y la recta tangente a la sección que toque al diámetro. Y a partir de estos elementos construye rectas paralelas a la tangente que se encuentren contenidas en la sección, de manera que se cumpla la definición de diámetro.

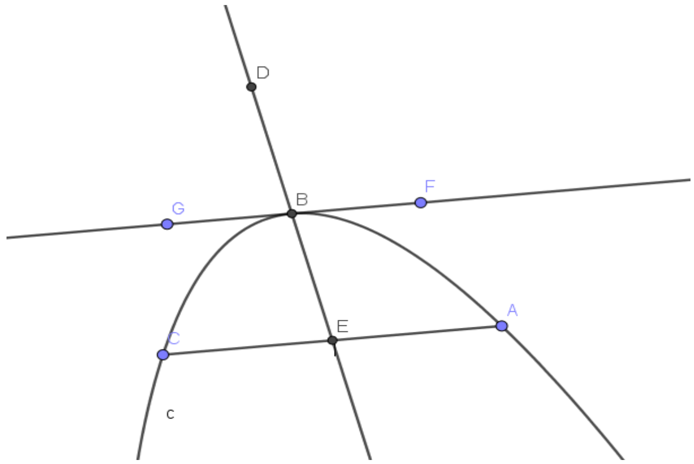
Llega a un absurdo cuando se trazan dos rectas paralelas a la tangente desde un mismo punto sobre la sección cónica, pues solamente una de ellas será paralela a esta tangente.

También se identifica en esta proposición que solamente existe una recta tangente a la sección cónica que toque también a su diámetro.

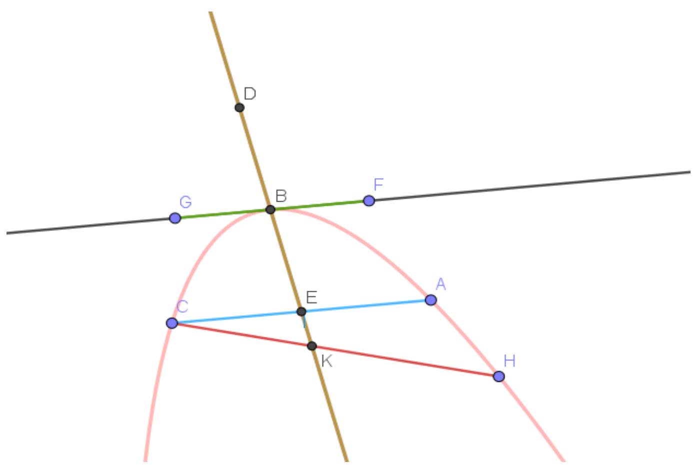
Sigue trabajando con la definición de diámetro de una sección cónica, tomando el caso para cuando se tienen las rectas contenidas en la sección y se quiere determinar las tangentes a la sección que pasen por el diámetro, para posteriormente utilizar estos casos en la demostración de otras proposiciones.

Proceso de reconstrucción geométrica:

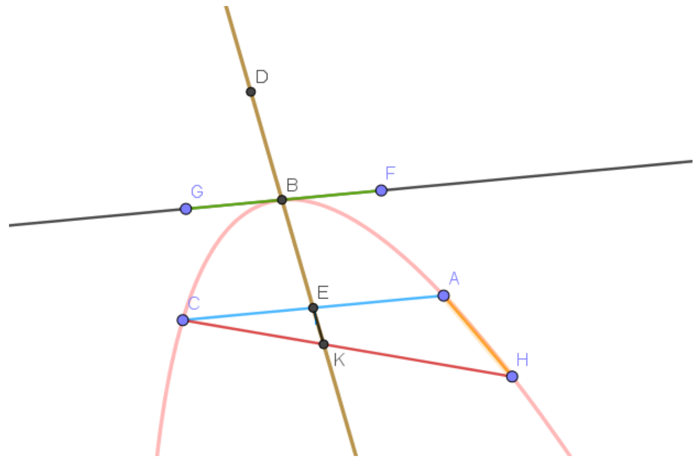
Para realizar la reconstrucción de esta proposición nos apoyamos de igual manera que en las demás proposiciones, de un software de geometría dinámica y a continuación compartimos las imágenes que representan dicha reconstrucción:



Dada una sección cónica y una recta dentro de ella que queda dividida en dos partes iguales por su diámetro, la recta tangente en el punto sobre la sección debe ser paralela a la recta dividida en dos partes iguales.



Se parte teniendo la sección cónica, su diámetro y la recta tangente que pasa por dicho diámetro, y se supone otra recta paralela a la recta tangente. Esta segunda recta paralela es CH en la ilustración.



Dado que las rectas CA y CH son paralelas a GF, entonces lo serían entre sí, pero dado que parten del mismo punto C, esto resultaría absurdo, por lo que solamente una de ellas sería paralela a la recta tangente.

Figura 37. Reconstrucción de la proposición 5.

Identificación de acciones:

Proposición	¿Qué hace?	¿Cómo hace?
5, Libro II	Determina una recta tangente a la parábola que es paralela a una recta cualquiera dentro de la sección cónica.	A partir del diámetro de la sección cónica, construye una tercera recta paralela a la tangente. Dado que son dos rectas paralelas a la tangente, entonces son paralelas entre sí, pero al construirlas, se parte del mismo punto, con lo cual es imposible construir dos rectas distintas, paralelas a una tercera.

Proposición 32, Libro I

La paralela desde el vértice de una sección cónica a una recta trazada ordenadamente es tangente a la sección y ninguna otra recta caerá entre la tangente y la sección.   Vera (1970, p.342)

Estructura discursiva

La paralela desde el vértice de una sección cónica a una recta trazada ordenadamente es tangente a la sección y ninguna otra recta caerá entre la tangente y la sección.

Se identifican 3 partes en esta proposición:

1 Lo que ya se conoce.

2 Nuevos elementos en la construcción.

3 Las características, relaciones y propiedades que se obtienen.

Estas mismas partes se pueden ver en la demostración, sólo que cada una desarrollada de manera argumentada con conocimientos ya validados en la época o demostrados previamente.

En la fuente de (Vera, 1970), se comparte una demostración incompleta de esta proposición, en la que más bien se repite lo que se enuncia en la proposición, sin presentar información que contribuya a la comprensión y construcción de ésta. Por esta razón no la presentamos para este análisis, pero sí la demostración que se comparte en (Taliaferro y Fried, 2013):

DEMOSTRACIÓN

Let there be a section of a cone, first the so-called parabola whose diameter is the straight line AB, and from A let the straight line AC be drawn parallel to an ordinate. Now it has been shown that it falls outside the section (I. 17). Then I say that also another straight line will not fall into the space between the straight line AC and the section.

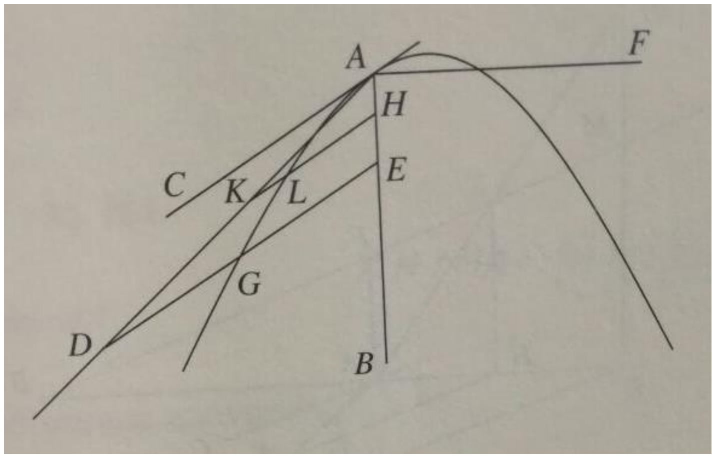


Figura 38. Construcción de la proposición 32 (Taliaferro y Fried, 2013, p. 55).

For if possible, let it fall in, as the straight line AD, and let some point D be taken on it at random, and let the straight line DE be dropped ordinate wise, and let the straight line AF be the parameter of the ordinates. And since

sq. DE : sq. EA > sq. GE : sq. EA (Eucl. V. 8, VI. 22),

and

sq. GE = rect. FA, AE (I. 11),

therefore also

sq. DE : sq. EA > rect. FA, AE : sq. EA,

or

>FA : EA.

Let it be contrived then that

sq. DE : sq. EA :: FA : HA.*

and through the point H let the straight line HLK be drawn parallel to ED. Since then

sq. DE : sq. EA :: FA : AH :: rect. FA, AH : sq. AH,

and

sq. DE : sq. EA :: sq. KH : sq. HA (Eucli. VI. 4, VI. 22),

and

sq. HL = rect. FA, AH (I.11),

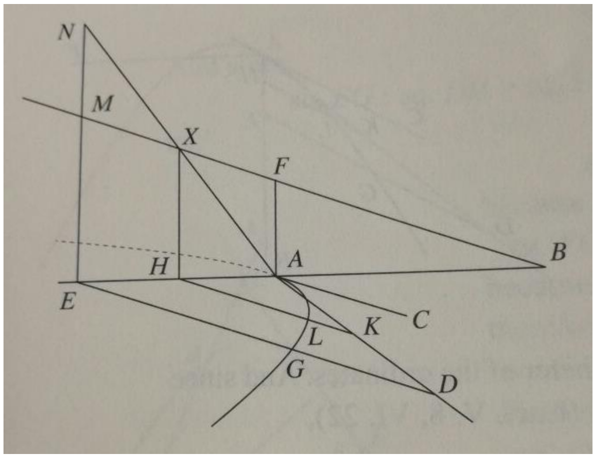
therefore also

sq. KH : sq. HA :: sq. LH : sq. HA.

Therefore

KH = HL;

And this is absurd. Therefore another straight line will not fall into the space between the straight line AC and the section.



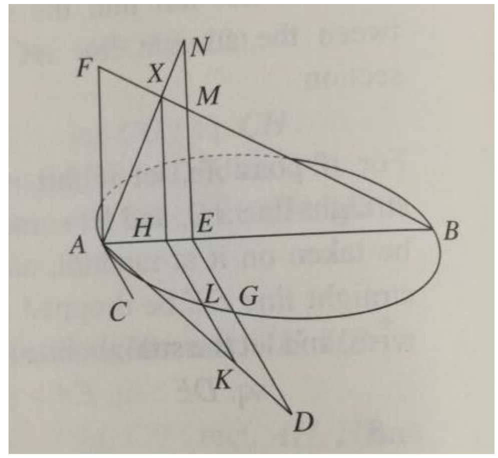


Figura 39. Construcciones de la proposición 32 para el caso de la elipse y la hipérbola (Taliaferro y Fried, 2013, p. 56).

Next let the section be an hyperbola or ellipse or circumference of a circle whose diameter is the straight line AB, and whose upright side is the straight line AF; and let the straight line BF be joined and produced, and from the point A let the straight line AC be drawn parallel to an ordinate.

Now it has been shown that it falls outside the section (I. 17).

Then I say that also another straight line will not fall into the space between the straight line AC and the section.

For if possible, let it fall, as the straight line AD, and let some point D be taken at random on it, and from it let the straight line DE be dropped ordinate wise, and through E let the straight line EM be drawn parallel to the straight line AF.

And since

sq. GE = rect. AE, EM (I. 12, 13)

let it be contrived that

rect. AE, EN = sq. DE,

and let the straight line joining AN cut the straight line FM at X, and through X let the straight line XH be drawn parallel to FA, and through H, HLK parallel to AC. Since then

sq. DE = rect. AE, EN,
hence
NE : ED :: DE : EA;
and therefore
NE : EA :: sq. DE : sq. EA (Eucli. VI. 19 porism, VI. 22, v.11).
But
NE : EA :: XH : HA,
and
sq. DE: sq. EA :: sq. KH : sq. HA.
Therefore
XH : HA :: sq. KH : sq. HA;
therefore
XH : HK :: KH : HA (Eucl. VI. 19 porism converse).
Therefore
sq. KH = rect. AH, HX;
but also
sq. LH = rect. AH, HX
because of the section (I. 12, 13);
therefore
sq. KH = sq. HL;
and this is absurd. Therefore another straight line will not fall into the space between the straight line AC and the section.

Tabla 9. Demostración y apoyos visuales, de la Proposición 32. Fuente: Taliaferro y Fried (2013, p. 54-57).

Notas:

En la demostración de esta proposición, se trabaja con una recta AF parámetro de las ordenadas. Este segmento lo utiliza para establecer relaciones utilizando otras proposiciones y de igual manera se establecen relaciones proporcionales entre segmentos de figuras semejantes.

Parte de estas relaciones y algunas manipulaciones a ellas que se realizan, las explico a continuación:

Recordando que lo primordial en esta proposición es demostrar que desde el vértice de la sección cónica parábola, se traza una recta tangente que es paralela a otra recta paralela que se encuentra contenida en la sección y que ninguna otra recta caerá entre esta tangente y la sección cónica.

Para ello se supone una recta que se trace entre la recta tangente y la sección cónica, esta recta en la demostración será la AD y a partir de ésta se establecen las siguientes relaciones:

$$\frac{DE^2}{EA^2} > \frac{GE^2}{EA^2} \text{ (Ya que el segmento DE>GE, Eucli. V. 8, VI. 22)} \qquad [1]$$

Y

$$GE^2 = rect.(FA)(AE) \text{ (Utilizando la proposición 11 del libro 1),} \qquad [2]$$

Sustituyendo [2] en [1], tenemos:

$$\frac{DE^2}{EA^2} > \frac{rect.(FA)(AE)}{EA^2} \qquad [*]$$

Y simplificando:

$$\frac{DE^2}{EA^2} > \frac{FA}{EA}$$

Y quiere que se cumpla:

$$\frac{DE^2}{EA^2} = \frac{FA}{HA}$$

Lo cual a su vez resulta:

$$\frac{DE^2}{EA^2} = \frac{FA}{EA} = \frac{rect.(FA)(AH)}{AH^2} \text{ (Análogamente a [*])} \qquad [3]$$

Y

$\frac{DE^2}{EA^2} = \frac{KH^2}{AH^2}$ (Ya que son segmentos proporcionales de figuras semejantes, Eucl. VII. 4, VI.22), [4]

Y

$HL^2 = rect.(FA)(AH)$ (Utilizando la proposición 11 del libro 1), [5]

Por lo que sustituyendo [5] en [3], nos queda:

$$\frac{DE^2}{EA^2} = \frac{HL^2}{AH^2} \qquad [6]$$

Y considerando [4] y [6], por tanto también:

$$\frac{KH^2}{AH^2} = \frac{HL^2}{AH^2}$$

Por lo tanto nos quedaría que:

$$KH = HL$$

Y si observamos la construcción de la proposición:

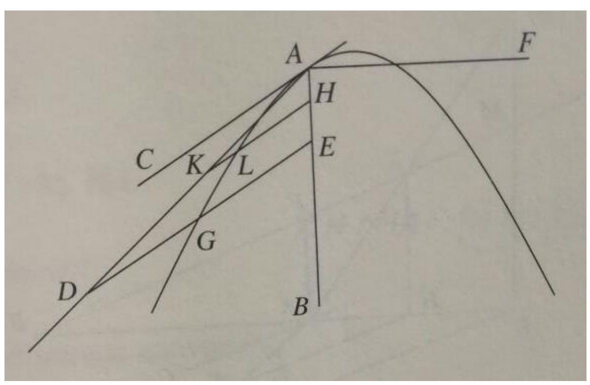


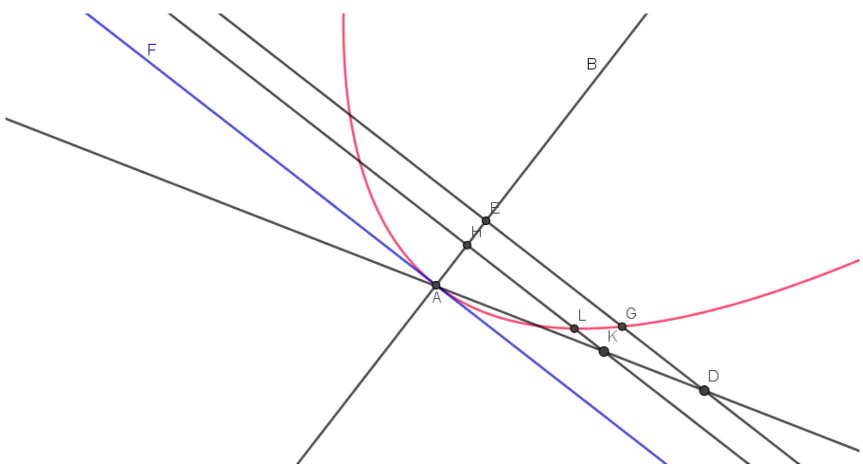
Figura 40. Construcción de la proposición 32 (Taliaferro y Fried, 2013, p. 55).

Esto resulta imposible, ya que KH es mayor que HL, puesto que L se encuentra en la sección cónica y K en la recta que cae fuera de la sección. De esta manera, Apolonio llega a que no hay otra recta que se pueda trazar entre una recta tangente a la sección y esta última. De manera análoga demuestra que tampoco esto es posible si la sección cónica es una hipérbola, una elipse o una circunferencia.

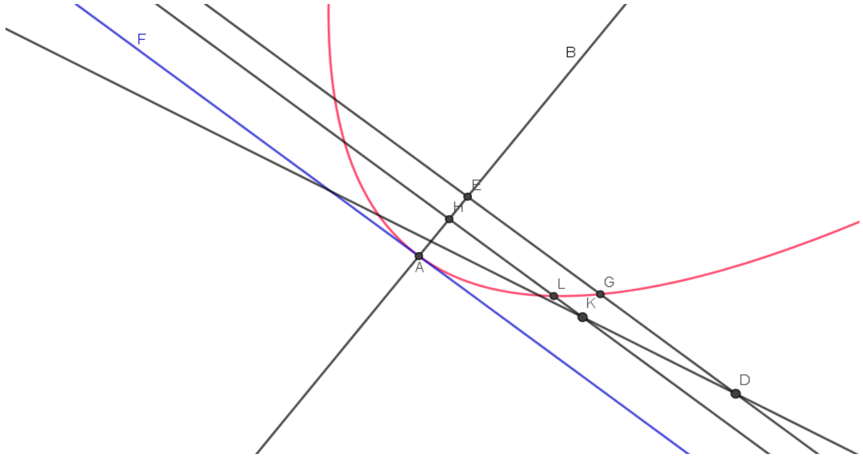
Por todo esto, observamos que Apolonio, está haciendo uso de algunas construcciones previas así como de ciertas proposiciones de su obra *Las Cónicas* como de *Los Elementos* de Euclides, para demostrar propiedades o características que cumplirán las secciones cónicas al realizarse ciertos trazos específicos. Por las imágenes que se comparten en las dos fuentes que consultamos para este análisis, se sigue observando que se trabaja en un plano euclidiano, en el que a simple vista no es posible observar de manera inmediata que se cumplen las relaciones de proporcionalidad, pero que estudiadas a profundidad se llegan a verificar.

Proceso de reconstrucción geométrica:

El proceso de reconstrucción geométrica utilizando un software de geometría dinámica, nos permitió observar que lo que se enuncia en la proposición se cumple, es decir, que al trazar una recta paralela a una recta ordenada de la parábola desde el vértice de esta sección cónica, la recta será tangente y entre la parábola y la tangente, no caerá ninguna otra recta que sea trazada por el vértice de la parábola. A continuación presentamos las imágenes de la reconstrucción de esta proposición:



Se traza la parábola y la recta tangente desde su vértice (recta azul), al intentar trazar otras rectas que pasen por el vértice de la parábola y que se encuentre entre la tangente y la parábola, no es posible.



El software no nos permite realizar la suposición de la que habla Apolonio en la que sí existe esa recta entre la recta tangente y la parábola, por lo que no se podrán trazar los segmentos que se mencionan en la demostración. Esta ilustración solo presenta la misma recta que la ilustración anterior movida un poco intentando cumplir con lo que la proposición menciona.

Figura 41. Reconstrucción de la proposición 32.

Identificación de acciones:

Proposición	**¿Qué hace?**	**¿Cómo hace?**
32, Libro I	Se traza una recta tangente a las secciones cónicas, de manera que ninguna otra recta puede caer entre esta recta tangente y la sección cónica.	Se supone que es posible construir otra recta entre la tangente y la parábola, pero al establecer las relaciones proporcionales y al realizar algunas manipulaciones con estas relaciones se llega a que dos segmentos en los que uno es parte del otro, son iguales, lo cual es absurdo.

		Aunque no se especifica directamente, es claro que para que la recta esté entre la tangente y la parábola, debe pasar por el vértice, sin embargo, ni teniendo esta condición se cumple. Es de importancia fundamental una recta trazada desde el diámetro de la parábola y dentro de ella, la cual será mirada como el **parámetro de las ordenadas**. Otro aspecto importante de resaltar, es el establecimiento de relaciones de proporcionalidad, la comparación entre segmentos proporcionales de figuras semejantes y la comparación de áreas, al establecer las relaciones en términos de áreas entre cuadrados y rectángulos conformados por determinados segmentos.

Proposición 41, Libro III

Si tres tangentes a una parábola se cortan mutuamente, quedan divididas en la misma razón.
Vera (1970, p. 394)

Estructura discursiva:

Si tres tangentes a una parábola se cortan mutuamente, quedan divididas en la misma razón.

Se identifican 3 partes en esta proposición:

1 Lo que ya se conoce.

2 Nuevos elementos en la construcción.

3 Las características, relaciones y propiedades que se obtienen.

Estas mismas partes se pueden ver en la demostración, sólo que cada una desarrollada de manera argumentada con conocimientos ya validados en la época o demostrados previamente.

DEMOSTRACIÓN

Sea la parábola ABG y las tangentes ADE, EZG y DBZ. Digo que DE es a DA y ZB a BD como ZG a ZE. Trazando la recta de contactos AG y dividiéndola en dos partes iguales por el punto H, es claro que si la recta EH fuese un diámetro de la sección y pasara por B, la DZ sería paralela a la AG y quedaría dividida en dos partes iguales en el punto B por la recta EH, y por la misma razón DA será igual a DE y ZG a ZE y lo que queremos demostrar resultaría evidente. Si EH no pasa por B, sino por otro punto, T, y trazamos por él la KTL paralela a AG, esta recta será tangente a la sección en el punto T, y por lo que acabamos de decir, KA será igual a KE y LG a LE.

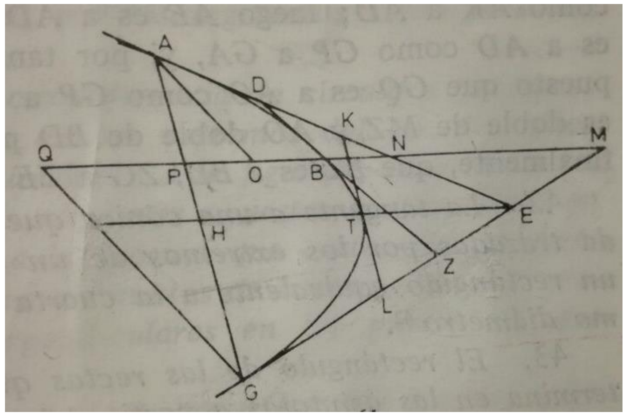


Figura 42. Construcción de la proposición 41 (Vera, 1970, p. 394).

Tracemos por B la MNBPQ paralela a EH y por A y G las AO y GQ paralelas a DZ, y entonces, por ser MB paralela a ET, es un diámetro, y como la DZ es tangente, las AO y GQ son ordenadas, BM igual a BQ y ZM a ZG, y, finalmente, por la igualdad de las rectas ZM, ZG y LE, es Lea LG como ZM a ZG; y permutando, GZ es a GL como GM a GE; pero GP es a GH como GM a GE, y, por tanto, como GZ a GL, y por ser GL a GE como GH a GA, es GE a GZ como GA a GP, y por conversión, AG a AP como EG a EZ, y dividiendo GP es a PA como GZ a ZE.

Puesto que MB es un diámetro, AN una tangente y AO una ordenada, las rectas BN, BO y DN, DA serán iguales, y por serlo también KA y KE, es AN a AD como AE a AK, y permutando, AK a AD como AE a AN, y siendo esta última razón la misma que la de AH a AP, y dividiendo, ED es a AD como GP a AP, y, por tanto, ED es a AD como GZ a ZE, y puesto que GQ es a AO como GP a PA y GQ doble de BZ porque GM es doble de MZ y AO doble de BD porque AN es doble de DN, resulta, finalmente, que BZ es a BD, ZG a ZE y DE a DA como PG a PA.

Tabla 10. Demostración y apoyos visuales, de la Proposición 41. Fuente: Vera (1970, p. 394-396).

De igual manera, Taliaferro y Fried, (2013), nos comparten la siguiente demostración de la proposición 41 del libro III:

Let there be the parabola ABC, and tangents ADE, EFC and DBF.

I say that

$$CF : FE :: ED : DA :: FB : BD.$$

For let AC be joined and bisected at G.

Then it is evident that the straight line from E to G is a diameter of the section. (II. 29).

If then it goes through B, DF is parallel to AC, (II.5) and will be bisected by EG, and therefore

$$AD = DE \text{ (I. 35)}.$$

and

$$CF = FE \text{ (I.35)},$$

and what was sought is apparent.

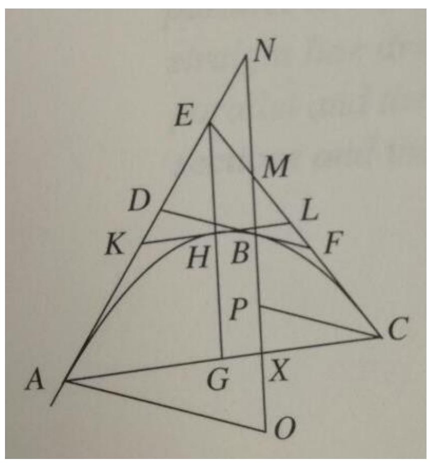


Figura 43. Construcción de la proposición 41 (Taliaferro y Fried, 2013, p. 244).

Let it not go through B, but trough H, and let KHL be drawn through H parallel to AC; therefore it will touch the section at H (I.32), and because of things already said (I.35),

$$AK = KE$$

and

$$LC = LE.$$

Let MNBX be drawn through B parallel to EG, and AO and CP through A and C parallel to DF. Since then MB is parallel to EH, MB is a diameter (I. 40; I. 51 porism); and DF touches at B; therefore AO and CP have been dropped ordinatewise (II. 5; Def. 4). And since MB is a diameter, and CM a tangent, and CP an ordinate,

MB = BP (I.35),

and so also

MF = FC.

And since

MF = FC

and

EL = LC,

MC : CF :: EC : CL;

and alternately

MC : EC :: CF : CL.

But

MC : EC :: XC : CG;

therefore also

CF : CL :: XC : CG.

And

CL : EC :: CG : CA;

therefore ex eaquali

CA : XC :: EC : CF,

and coverteando

EC : FE :: CA : AX;

separando

CF : FE :: XC : AX.

Again since MB is a diameter and AN a tangent and AO an ordinate,

NB = BO (I. 35),

and

ND = DA.

And also

EK = KA;

therefore

AE : KA :: NA: DA;

alternately

AE : NA :: KA: DA.

But

AE : NA :: GA : AX;

therefore also

KA : DA :: GA : AX.

And also

AE : KA :: CA : GA;

therefore, ex eaquali,

AE : DA :: CA : AX;

separando,

ED : DA :: XC : XA.

And it was also shown

XC : AX :: CF : FE;

therefore

CF : EF :: ED :DA.

Again since

XC : AX :: CP : AO,

and

CP = 2 BF,

and

CM = 2 MF,

and

AO = 2 BD,

and

AN = 2 ND,

therefore

XC : AX :: FB : BD :: CF : FE :: ED : DA.

Tabla 11. Demostración y apoyos visuales, de la Proposición 41. Fuente: Taliaferro y Fried (2013, p. 244-246).

Notas:

Para la reconstrucción de esta proposición en la que se quiere mostrar la relación que se guarda entre los segmentos de tres rectas tangentes a una parábola, se tomaron en cuenta dos casos, los cuales se desglosan a continuación:

Teniendo la sección cónica ABG y las rectas tangentes ADE, EZG y DBZ, cuyos puntos de tangencia son A, G y B respectivamente.

El primer caso que se aborda en la demostración es cuando EH diámetro de la sección pasa por B, lo cual indicaría que DZ sería paralela a la recta AG la cual une los puntos de tangencia A y G. Y DZ quedaría dividida en dos partes iguales por el punto B por dicho diámetro. De acuerdo a esto se cumpliría que:

$$\frac{DA}{DE} = \frac{ZG}{ZE}$$

Ya que los triángulos AEG y DEZ son semejantes por el criterio AA.

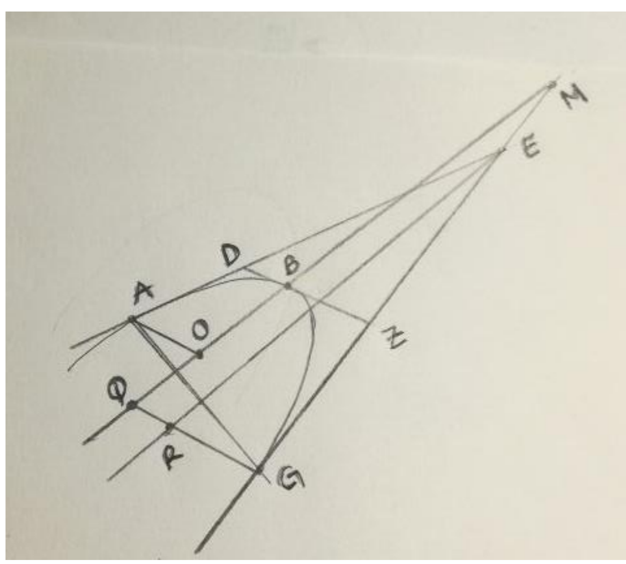


Figura 44. Representación de la reconstrucción, caso 1.

El segundo caso es cuando el diámetro no pasa por B, sino por un punto T, se traza por este punto la paralela a AG, KTL, la cual sería la recta tangente a la parábola con punto de tangencia T. Por las mismas razones que en el caso anterior:

$$\frac{KA}{KE} = \frac{LG}{LE}$$

Ya que los triángulos AEG y KEL son semejantes.

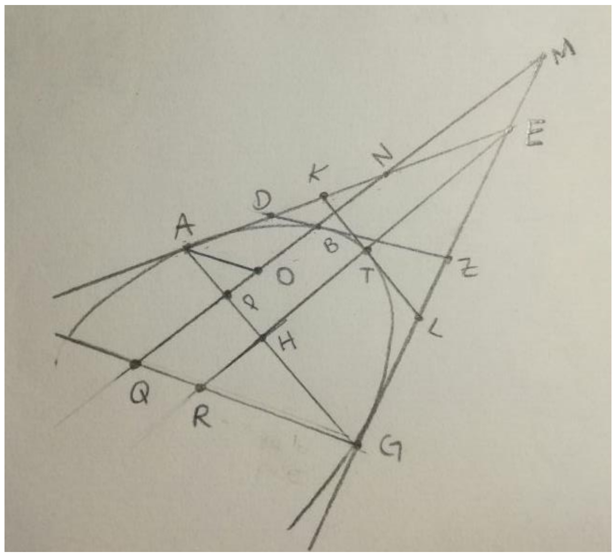


Figura 45. Representación de la reconstrucción, caso 2.

Se traza por B la recta MNBPQ paralela al diámetro EH y por A y G las AO y GQ paralelas a DZ y como MB es paralela a ET, entonces también es un diámetro; y como DZ es tangente y AO y GQ paralelas a ella, entonces son ordenadas. Por lo tanto, dado que AO es paralela a DZ y GQ a DZ y que DZ=DB+BZ, entonces GQ es paralela a BZ, por lo que los triángulos QMG y BMZ son semejantes y podemos establecer la siguiente proporción:

$$\frac{BM}{BQ} = \frac{ZM}{ZG}$$

Y dado también que los triángulos QMG y REG son semejantes, entonces tenemos:

$$\frac{LE}{LG} = \frac{ZM}{ZG}$$

Y permutando:

$$\frac{GZ}{GL} = \frac{GM}{GE}$$

Por la semejanza de los triángulos REG y QMG, entonces se cumple que:

$$\frac{LE}{LG} = \frac{ZM}{ZG} \text{ y } \frac{GE}{GL} = \frac{GM}{GZ}$$

Como $GE = LE + LG$ y $GM = ZM + ZG$, simplificando tendremos:

$$\frac{GZ}{GL} = \frac{GM}{GE}$$

Pero dado que los triángulos PMG y HEG son semejantes:

$$\frac{GP}{GH} = \frac{GM}{GE}$$

Por lo tanto, como el triángulo AEG y KEL son semejantes:

$$\frac{GL}{GE} = \frac{GH}{GA} \text{ y } \frac{GE}{GZ} = \frac{GA}{GP}$$

Y por conversión:

$$\frac{AG}{AP} = \frac{EG}{EZ}$$

Dado que MB es un diámetro, AN una tangente y AO una ordenada, tenemos que:

$$\frac{BN}{BO} \text{ y } \frac{DN}{DA}$$

Y por serlo también

$$\frac{KA}{KE}$$

Tenemos que

$$\frac{AN}{AD} = \frac{AE}{AK} \ (\Delta ANP \sim \Delta AEH)$$

Y permutando:

$$\frac{AK}{AD} = \frac{AE}{AN} = \frac{AH}{AP}$$

Y dividiendo

$$\frac{ED}{AD} = \frac{GP}{AP}$$

Y por tanto:

$$\frac{ED}{AD} = \frac{GZ}{ZE}$$

Y puesto que:

$$\frac{GQ}{AO} = \frac{GP}{PA}$$

Y $GQ = 2BZ, GM = 2MZ,\ AO = 2BD\ y\ AN = 2DN.$

Por lo tanto resulta:

$$\frac{BZ}{BD} = \frac{ZG}{ZE} = \frac{DE}{DA}$$

Entre el lenguaje matemático se observa que se utilizan notaciones diferentes para nombrar a los objetos sobre la parábola, tanto de las tangentes, los puntos de tangencia, las ordenadas, los diámetros, etc.

Como menciona Vera (1970), se observa latente un método para construir la curva por medio de rectas tangentes, lo que autoriza la sospecha de que intuyó el concepto de cónica como envolvente que había de introducir el geómetra Florimond de Beaume en su Geometrie de 1649. Un sistema de tangentes a una parábola determina en dos tangentes fijas segmentos proporcionales (Vera, 1970, p. 396).

Es importante mencionar que estudiar esta propiedad proporcional entre segmentos constituidos por rectas tangentes a una parábola, es a partir de la parábola ya construida, al menos en esta proposición número 41 del libro III.

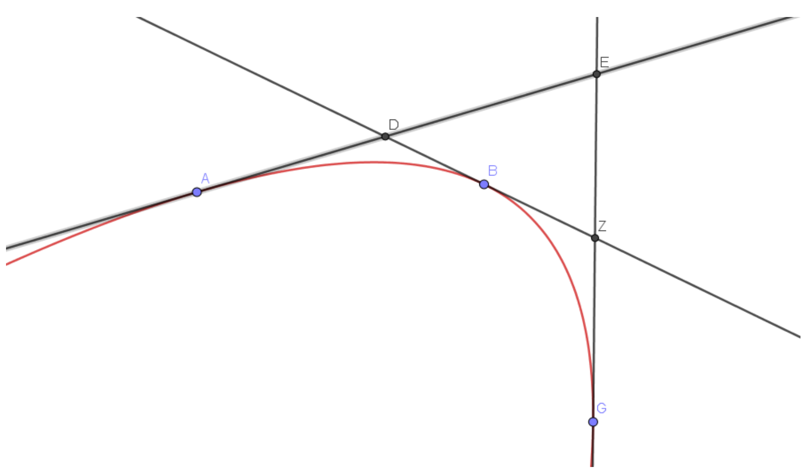
En Vera (1970) la demostración no presenta una descripción detallada de los procesos matemáticos que se siguieron para llegar a la relación entre segmentos proporcionales, sin embargo, en la fuente de Taliaferro y Fried (2013), se describe de manera clara y paso a paso los procesos matemáticos, relacionando segmentos proporcionales, que son parte de triángulos semejantes y que sumados a algunas definiciones y proposiciones dadas anteriormente por Apolonio, permiten al autor ahorrarse pasos en la explicación de la demostración, sino que da por cierto que se cumplen ciertas características o propiedades al realizar construcciones auxiliares, porque anteriormente ya se había demostrado.

En la primera parte de la demostración, encontramos diferencias entre las versiones de Vera y la de Taliaferro y Fried. En Vera se realiza una comparación entre razones y en Taliaferro y Fried, se da una igualdad entre dos segmentos, utilizando proposiciones anteriores contenidas en Las Cónicas y sin tanta justificación, afirmando que no es necesario, que resulta evidente lo que quieren demostrar.

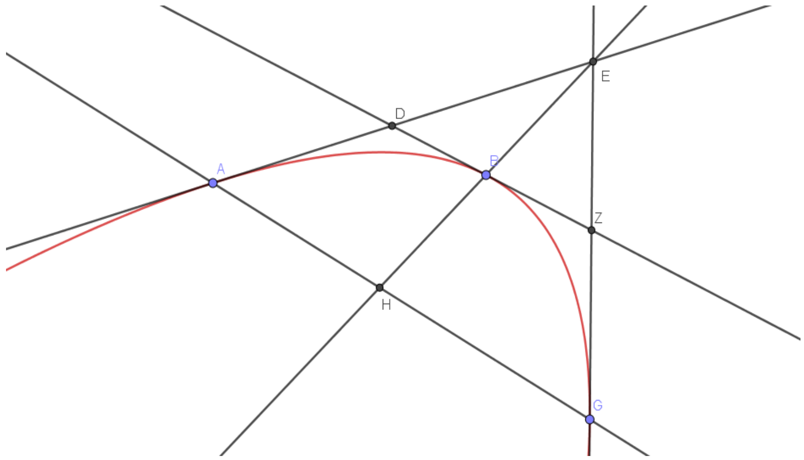
Presentamos las proposiciones y demostraciones de nuestras dos fuentes de consulta, porque difieren en aspectos como notación de los elementos geométricos que aquí aparecen, así como la descripción detallada y explícita sobre las construcciones y manipulaciones de los elementos geométricos, de manera que utilizando también definiciones y proposiciones anteriores, se llegue a la relación de proporcionalidad entre segmentos. Fue importante por tanto, utilizar ambas fuentes para el análisis.

Proceso de reconstrucción geométrica:

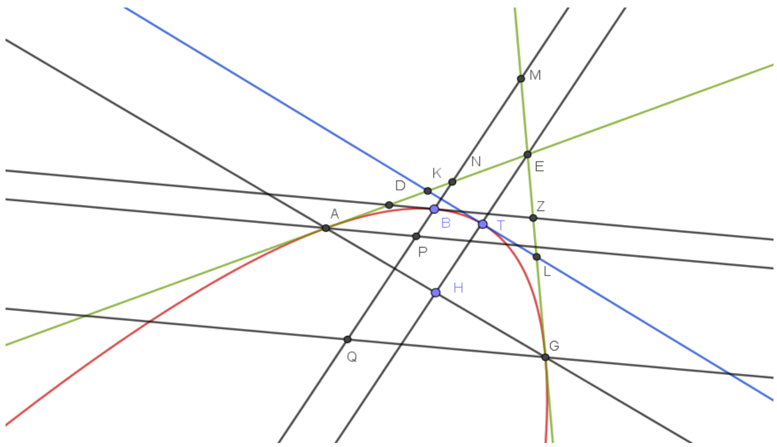
Para entender de manera más clara esta proposición, realizamos una reconstrucción de la misma, apoyados de un software de geometría dinámica. A continuación presentamos algunas imágenes de esta reconstrucción, los segmentos se encuentran marcados con diversos colores, para que se puedan observar las relaciones de proporcionalidad que se cumplen:



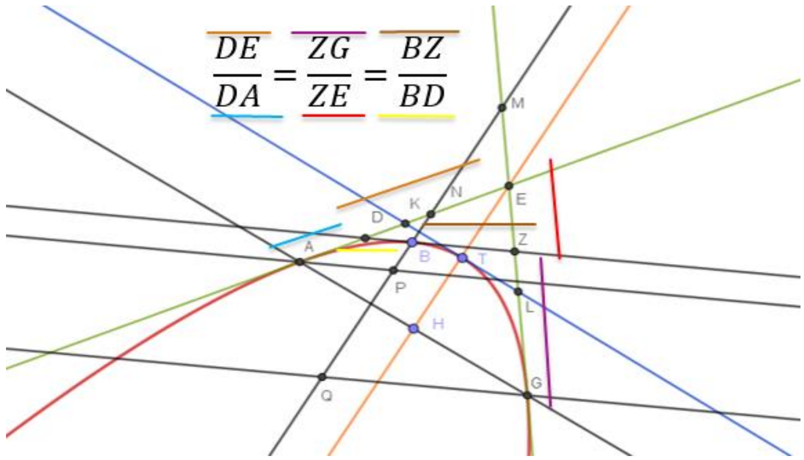
La parábola ABG y las rectas tangentes a ésta, ADE, GZE y DBZ, cuyos puntos de tangencia son A, G y B respectivamente.



Se traza el diámetro HE que divide en dos partes iguales a la recta AG.



Se traza una recta paralela a HE que sería otro diámetro de la sección y el cual se utiliza para establecer relaciones entre segmentos proporcionales.



$$\frac{DE}{DA} = \frac{ZG}{ZE} = \frac{BZ}{BD}$$

Las relaciones proporcionales que se cumplen al cortarse las tres rectas tangentes son:

$$\frac{DE}{DA} = \frac{ZG}{ZE} = \frac{BZ}{BD}$$

Figura 46. Reconstrucción de la proposición 41, con la notación de Vera (1970).

Identificación de acciones:

Proposición	¿Qué hace?	¿Cómo hace?
41, Libro III	Determina segmentos proporcionales a partir de la construcción de tres rectas tangentes a una parábola.	Se estudian dos casos y se trazan rectas paralelas al diámetro y a las tangentes a la parábola que conforman figuras semejantes. Se establecen relaciones de proporcionalidad entre los segmentos de dichas figuras. Esta propiedad de proporcionalidad entre los segmentos de las rectas tangentes, permiten construir a la parábola como

		envolvente de rectas tangentes.

4.2.2. ANÁLISIS DE LAS PROPUESTAS DE INNOVACIÓN DIDÁCTICA

Propuesta de innovación didáctica I

Las cónicas: método de aprendizaje constructivo (Real, 2004, p. 71-77)

Proceso de construcción:

Método del jastre (envolvente de rectas tangentes)

Consideremos una parábola cualquiera. Trazamos las rectas r y s tangentes a la parábola desde el punto *O* de corte de la directriz con el eje. Estas rectas tocan a la parábola en los puntos P_r y P_s respectivamente. Si tomamos un punto Q de la parábola, entre P_r y P_s, y trazamos a la tangente a la parábola por el punto Q, esta recta corta a las rectas *r* y *s* en dos puntos Q_r y Q_s. Verificándose que: $$d(P_r, Q_r) = d(Q_s O) \text{ y } d(Q_r, O) = d(Q_s P_s)$$ Utilizando esta propiedad vamos a construir una parábola como envolvente de sus tangentes. Dibujamos dos rectas *r* y *s* secantes en un punto *O*. A partir de *O* y en la misma dirección trazamos puntos a una distancia constante sobre la recta *r* e igual sobre la recta *s*, por ejemplo 20 puntos. Unimos el último punto de *r* con el primero de *s*, el penúltimo de *r* con el segundo de *s*, y así sucesivamente hasta pasar por todos los puntos. Todas las

rectas trazadas al unir estos puntos son tangentes de una misma parábola (Santos, 1995, citado en Real, 2004).

Si el método descrito lo realizamos sobre una madera, clavando en cada punto una puntilla y unimos las puntillas con un hilo según se ha descrito, se observa claramente la figura de la parábola.

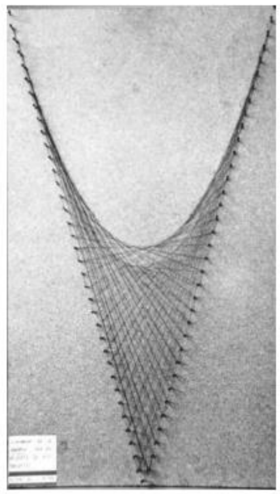


Figura 47. Construcción de la propuesta de innovación didáctica I (Real, 2004, p. 74).

Tabla 12. Proceso de construcción, método del jastre. Fuente: Real (2004, p. 74-75).

Notas:

En esta propuesta de innovación didáctica se realza la importancia de la construcción geométrica de las secciones cónicas, para que apoyados de esta imagen puedan comprender y resolver ciertos problemas. Sin embargo, aunque resulta importante, en la escuela no se logra y se da como entendido al introducir a este tema, mencionando que las secciones cónicas se obtienen del corte de un cono por ciertos planos y para explicárselo, se utiliza un típico cono cortado por los planos con distintos ángulos de inclinación, presentándole a los estudiantes dibujos de difícil interpretación espacial.

Por lo que el autor propone iniciar este tema, apoyados de objetos tangibles que permitan proyectar la sombra de las secciones cónicas. Para ello utiliza unos embudos para generar el cono, un tubo que funcionará como el eje del cono, una bombilla para generar la sombra del cono y una tabla de madera que al colocarla con distintas posiciones sobre el cono, deformará la sombra del cono, en las secciones cónicas que se quieren estudiar.

Cabe mencionar que en esta propuesta se considera a la circunferencia como una de ellas, lo cual para Apolonio no era así. Posteriormente a la generación de todas las secciones cónicas, se definen como lugar geométrico cada una de las secciones cónicas, es decir, como un conjunto de puntos que cumplen ciertas condiciones geométricas. En un siguiente momento se presenta la propuesta de construcción de cada sección cónica con un método geométrico, en particular, como envolvente de rectas tangentes. Por el objetivo de este trabajo, nos enfocamos únicamente a la construcción de la sección cónica parábola, por este método geométrico.

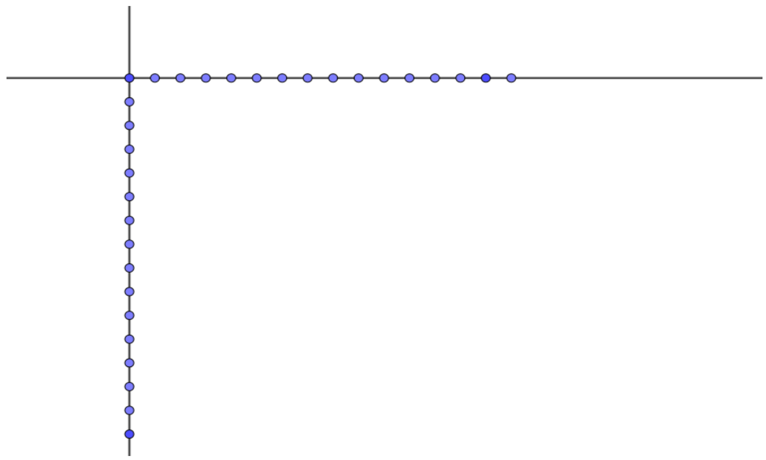
Después se indica cómo obtener una sección cónica, por papiroflexia, es decir, a través de los dobleces de una hoja de papel (este método de construcción, se explicará en el siguiente apartado). Finalmente se realiza una dinámica en la que los estudiantes juegan con una baraja de cartas que ellos mismos hicieron con las propiedades y características de cada una de las secciones cónicas, en este juego gana el estudiante que reúna todas las cartas de la misma cónica y de esta manera se prueba si el estudiante significó las cónicas.

Esta propuesta se realizó en estudiantes de cuarto grado que es el equivalente al primero de bachillerato en México y entre los resultados que obtuvieron están:

Los estudiantes son capaces de generar cada una de las secciones cónicas con métodos distintos a los tradicionales, distinguen entre las propiedades y características de cada cónica, conocen su definición como lugar geométrico, mostraron interés por el tema y podrían utilizar todo lo anterior para resolver problemas de la vida real.

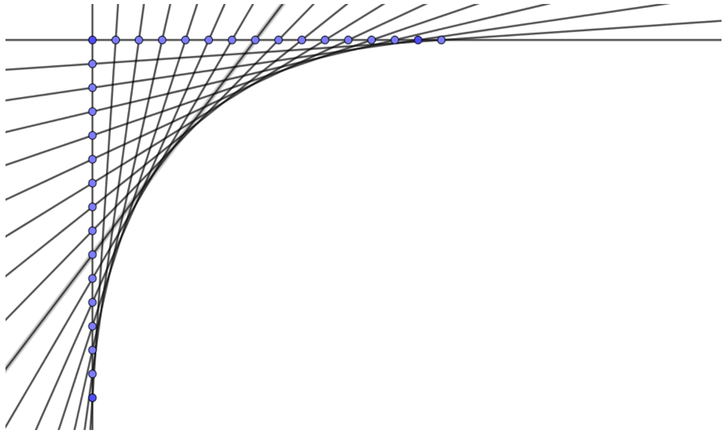
El lenguaje utilizado en este método de construcción es accesible a cualquier comunidad, pues los trazos indicados para realizar son simples. Lo que se puede observar es que no hay tantas especificaciones por ejemplo, sobre la medida del ángulo que debe haber entre las dos rectas trazadas al principio. Es importante mencionar, que aunque se dice que se construye una parábola como envolvente de todas las rectas que son tangentes, no se obtiene una parábola en el sentido estricto, sin embargo, la curva que se obtiene aparentemente tiene una forma parabólica.

Proceso de reconstrucción geométrica:



Se trazan dos rectas que se corten de manera perpendicular y se trazan sobre ellas puntos a una distancia constante.

Trazados el mismo número de puntos en cada recta, se une el último punto de una de ellas con el primero de la otra recta, el penúltimo con el segundo y así sucesivamente.



De esta manera se construye la forma parabólica de la sección cónica como envolvente de rectas tangentes.

Figura 48. Reconstrucción de la propuesta de innovación didáctica I.

Identificación de acciones:

Proposición	¿Qué hace?	¿Cómo hace?
Método del jastre (envolvente de rectas tangentes)	Se construye una curva de forma parabólica, como envolvente de rectas tangentes.	Se construyen rectas tangentes a una sección cónica partiendo de dos rectas perpendiculares y de unir puntos que se encuentran sobre ellas a distancias constantes. Determinamos que no se trata de una parábola en el sentido estricto, pero la figura que se dibuja tiene una forma parabólica.

Propuesta de innovación didáctica I

Las cónicas: método de aprendizaje constructivo (Real, 2004)

Proceso de construcción:

Generación de una parábola por papiroflexia

Vamos a generar una parábola mediante dobleces en el papel. Dibujamos una recta en un folio y marcamos un punto P que no esté en la recta. Doblamos el folio de forma que el punto P caiga sobre la recta y marcamos el doblez. Repetimos este proceso llevando cada vez el punto P sobre un punto distinto de la recta. Si observamos las dobleces marcadas, son tangentes de una misma parábola, generándose ésta como envolvente de las dobleces, siendo el foco de esta parábola el punto P.

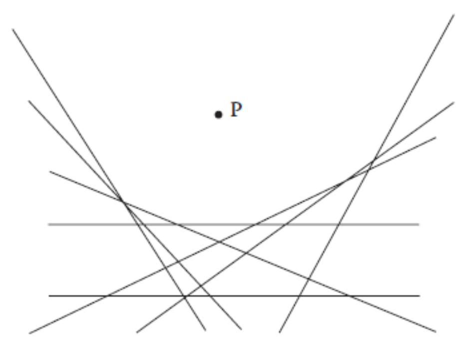


Figura 49. Construcción de la propuesta de innovación didáctica I, método 2 (Real, 2004, p. 75).

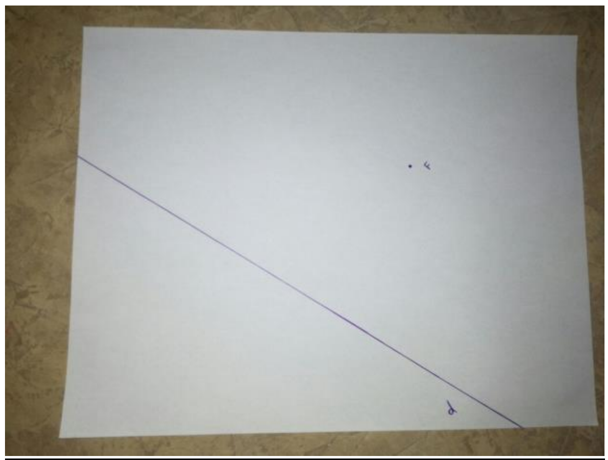
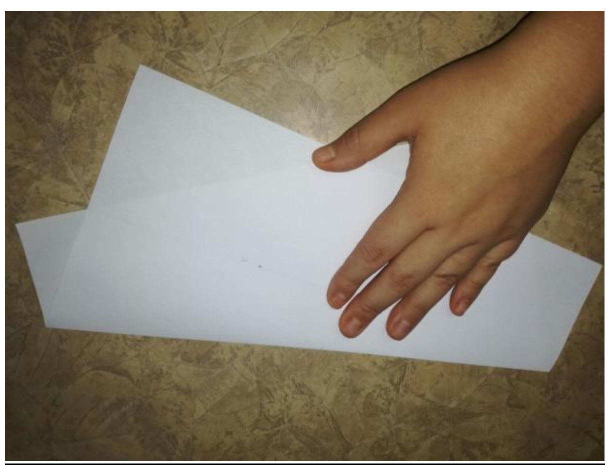
Tabla 13. Proceso de construcción de la parábola por medio de la papiroflexia. Fuente: Real (2004, p. 75).

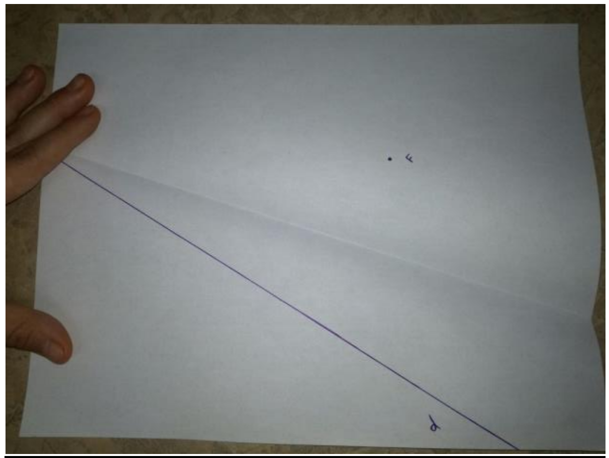
Notas:

Este método de construcción como tal, podría no parecer geométrico, sin embargo, los dobleces que se realizan a la hoja están marcando rectas tangentes que en su conjunto dibujarán la forma parabólica de la sección cónica.

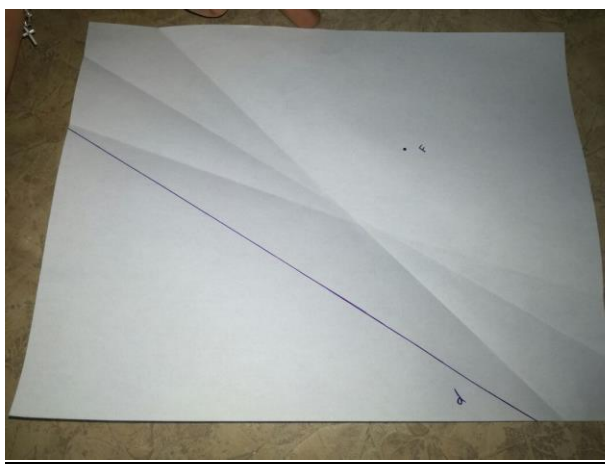
El lenguaje utilizado en este método de construcción es accesible a cualquier comunidad, pues únicamente se realizan dobleces a la hoja de papel, lo cual de alguna manera no tiene que ser tan preciso, sino lo importante ahí será mirar que ese método de construcción permite obtener una curva con forma parabólica. También encontramos que no hay tantas especificaciones sobre alguna cantidad mínima de dobleces para poder observar la curva o la magnitud de los espacios entre los puntos sobre la recta que permitan obtenerla. Aunque se menciona que se construye una parábola como envolvente de todas las rectas que son tangentes, mismas que son representadas por los dobleces realizados, no se obtiene una parábola en el sentido estricto, sino una que tiene una forma parabólica.

Proceso de reconstrucción geométrica:

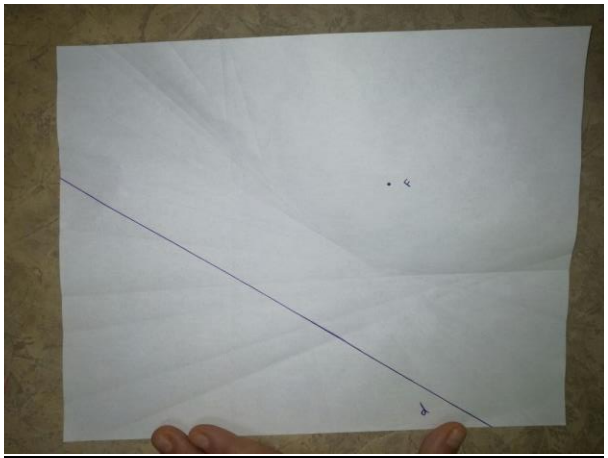
 Se traza una recta y un punto fuera de ella.
 Se dobla la hoja de manera que el punto caiga sobre la recta.



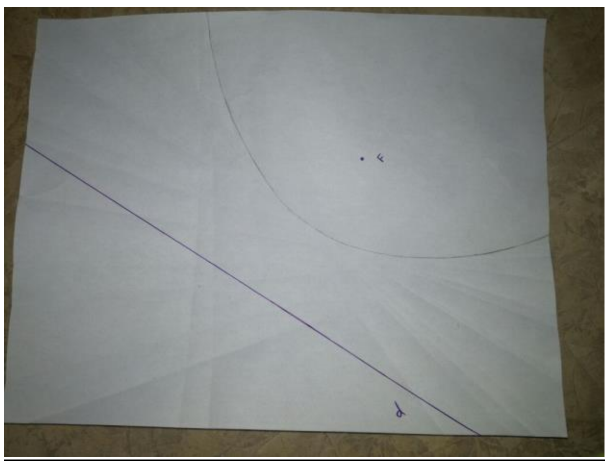
Se marca bien el doblez.



Se repite el mismo proceso por varias veces.



Después de realizar muchos dobleces se observa la forma parabólica que se dibuja.



Se puede marcar la forma parabólica.

Figura 50. Reconstrucción de la propuesta de innovación didáctica I, método 2.

Identificación de acciones:

Proposición	**¿Qué hace?**	**¿Cómo hace?**

Generación de una parábola por papiroflexia	Se construye una parábola como envolvente de rectas tangentes a través de realizar dobleces a una hoja de papel.	Se construye una curva realizando dobleces a una hoja de papel en la que solo se marcan una línea recta y un punto fuera de ésta. Nos referimos a curva con forma parabólica porque no estamos encontrando puntos específicos que pertenezcan a esta sección cónica para poder decir que la construimos, pero identificamos que la forma de la curva que se dibuja con todos los dobleces aparenta ser una parábola.

Propuesta de innovación didáctica II

Una experiencia con Cabri: las curvas cónicas (García y Arriero, 2000, p. 73-80)

Proceso de construcción:

La parábola como envolvente con Cabri

Dibuja una recta y llámala directriz, y un punto, exterior a esta recta, al que nombras F, foco de la parábola. Construye un punto, X, sobre la directriz. El punto, P, que se obtiene como la intersección entre la mediatriz del segmento XF y la recta que pasa por X y es perpendicular a la directriz es un punto de la parábola. Arrastra con el ratón el punto X, y observa que curva describe P. Para dibujar la parábola activa Lugar geométrico, señala el punto P y posteriormente X.

Los elementos más importantes de la parábola son:

Foco es el punto F. Directriz es la recta fija d. Parámetro es la distancia del foco a la directriz; se designa por 2p. Eje es la recta perpendicular a la directriz y que pasa por el foco. Vértice es el punto de intersección de la parábola con su eje. Radio vector es un segmento que une un punto cualquiera de la parábola con su eje (García y Arriero, 2000, p. 78).

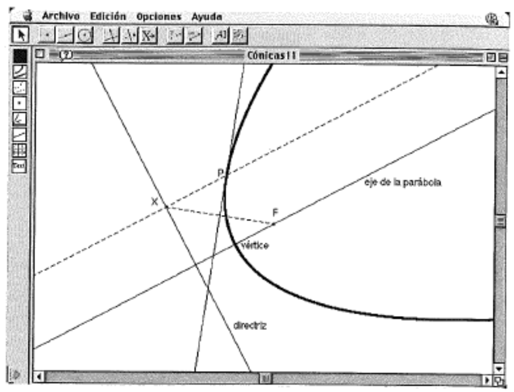


Figura 51. Construcción de la propuesta de innovación didáctica II (García y Arriero, 2000, p.78).

Tabla 14. Proceso de construcción de la parábola por un método geométrico. Fuente: García y Arriero (2000, p. 73-80).

Notas:

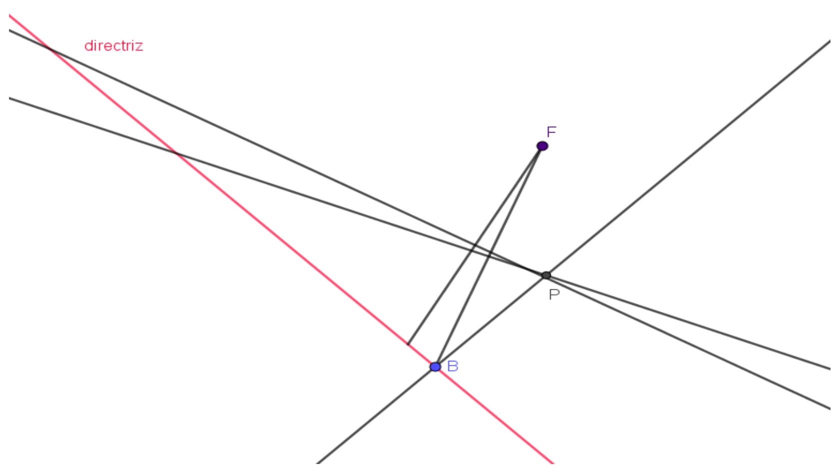
En esta propuesta de innovación didáctica se trabaja con las secciones cónicas, introduciendo primero a este tema con un problema de lugar geométrico. Para posteriormente iniciar con cada sección cónica, definiéndola como lugar geométrico y después construyéndola apoyados del software de geometría dinámica Cabri. Se comienza construyendo la elipse, después la hipérbola y por último la parábola.

Para fines de nuestro trabajo nos enfocaremos en el método de construcción de la parábola.

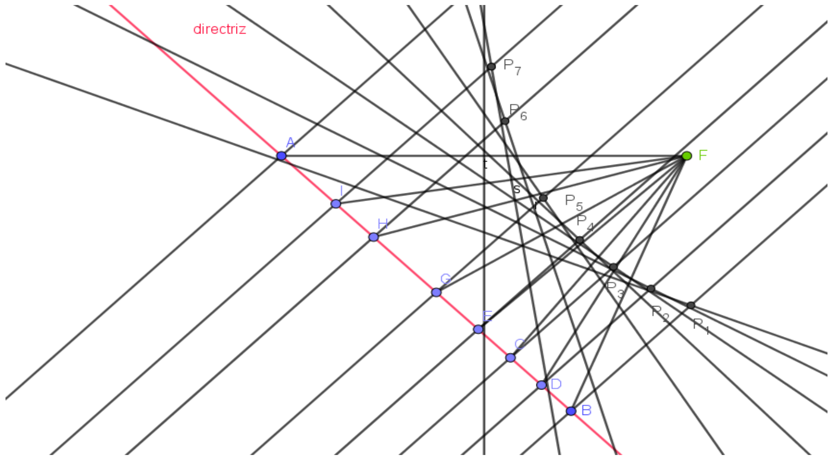
Después de construir la parábola con el software Cabri, se construye la elipse, hipérbola y parábola como envolvente de rectas tangentes. No se menciona si esta propuesta se aplicó en estudiantes, pero si algunas consideraciones sobre ésta. Entre los conocimientos previos necesarios, se dice que son mínimos y que el uso del software de geometría dinámica para la construcción de las secciones cónicas, invita a los estudiantes a profundizar en el razonamiento geométrico y favorece la visualización de relaciones geométricas. Trabajar con un software permite tener una nueva manera de aprender y trabajar en geometría, que facilitan el trabajo, ahorran tiempo y está al alcance de todos.

El lenguaje utilizado en este método de construcción es accesible a cualquier comunidad, pues los trazos indicados para realizar son simples, bastaría con que el estudiante domine conceptos básicos de la geometría tales como recta perpendicular y mediatriz, y que de realizarlo directamente en el software conozca los botones con los que puede realizar esos trazos. Tampoco se especifica una cantidad en particular o mínima de puntos que pertenezcan a la parábola que deban hallarse para trazar la cónica, lo cual invita al estudiante a experimentar las veces que quiera el procedimiento hasta construir una parábola. En este caso y por los elementos geométricos que están en juego para la construcción de la curva, se trata de una parábola en el sentido estricto de lugar geométrico, por lo que resultará importante realizar este proceso de manera manual y posteriormente con el uso del software de geometría dinámica.

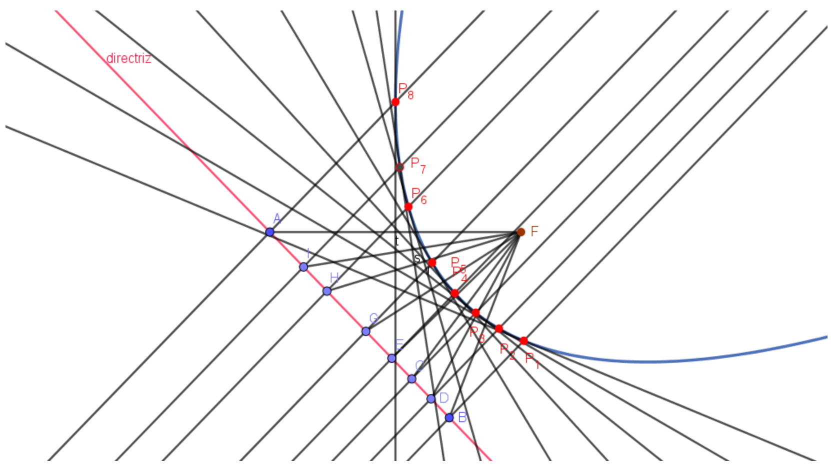
Proceso de reconstrucción geométrica:



Se traza una recta y un punto fuera de ella. Se toma un punto sobre la reta y se traza la mediatriz del segmento que va del punto marcado sobre la recta y del que esté fuera de ella. Después se traza la recta perpendicular a la recta trazadas al principio de manera que pase por el punto marcado. El punto donde se intersecan la recta perpendicular y la mediatriz, es un punto de la parábola.



Este proceso se repite con otros puntos sobre la recta y se identifican puntos que pertenezcan a la parábola.



Se unen todos los puntos pertenecientes a la parábola y se observa que se dibuja dicha sección cónica.

Figura 52. Reconstrucción de la propuesta de innovación didáctica II.

Identificación de acciones:

Proposición	¿Qué hace?	¿Cómo hace?

La parábola como envolvente con Cabri	Se construye una parábola a través de un método geométrico.	Se utilizan elementos geométricos tales como punto, recta, mediatriz y perpendicular, para construir la parábola. En esta ocasión se observa que efectivamente se trata de una parábola pues los elementos geométricos están presentes y se cumplen las condiciones de ésta como lugar geométrico, además de que podría demostrarse que efectivamente es una parábola, en el sentido de su definición como lugar geométrico, mediante la congruencia de triángulos, por el criterio L.A.L. Aunque se utiliza un software de geometría dinámica, se trabaja con elementos geométricos para la construcción de la parábola, se explica incluso en las conclusiones que la construcción puede realizarse con materiales tangibles, sin embargo, apoyarse del software

		permite trabajar de manera más rápida y eficiente.

ANÁLISIS TRANSVERSAL

Para llevar a cabo este análisis transversal, fue necesario revisar nuevamente los análisis de cada proposición, así como de las propuestas de innovación didáctica para respondernos a la pregunta ¿Para qué hace?, en un nivel de actividad del modelo de anidación de prácticas de la TSME.

Cabe mencionar que para el análisis de las proposiciones se utilizaron dos fuentes de consulta, nuestra fuente principal fue la de Vera (1970) y como fuente secundaria la de Taliaferro y Fried (2013), ya que la segunda permitía complementar algunas proposiciones que nuestra fuente principal no tenía y brindaba en ocasiones elementos importantes o explicaciones más detalladas sobre el proceso cnstructivo realizado por Apolonio. Nuestra fuente principal aunque no contaba con las demostraciones de todas las proposiciones de nuestras unidades de análisis nos proporcionaba una versión más dierecta sobre el contenido de la obra *Las Cónicas* de manera que no agreguemos interpretaciones subjetivas.

Al regresar al análisis realizado nos encontramos, que tal como se explica en la escuela, todo parte del corte de un cono oblicuo por una serie de planos con distintas condiciones. El primer corte realizado al cono, resulta un triángulo que será referencia para todas las demás construcciones puesto que este lugar geométrico ya era conocido y estudiado en su época y permitía establecer razones entre segmentos. Dicho triángulo, resultado del primer corte al cono contribuyó para la obtención de la parábola, y dado que son muchos los triángulos que se generan con este primer corte, le resultó importante a Apolonio indicar las condiciones de dichos planos para generar tanto la parábola como algunas propiedades de esta sección cónica. Se observa que es un plano el que corta al cono con cierto ángulo de inclinación y que genera la parábola, pero se utilizan al menos otros dos cortes al mismo cono para demostrar que la sección que se generó con dicho corte al cono configuró una parábola.

Otro elemento geométrico importante es el diámetro de la parábola, se utiliza tanto para obtenerla al cortar el cono por un plano que pase por la recta perpendicular a la base del cono y que resulte de una sección cuyo diámetro sea *paralelo* a uno de los lados del triángulo de referencia y en nuestra segunda unidad de análisis, donde se estudian más las propiedades de la parábola con respecto a sus tangentes, donde también el diámetro, permite establecer relaciones entre segmentos al dividir en dos partes iguales a todas las paralelas contenidas en la sección cónica.

Otro elemento fundamental y que encontramos que se utilizan en la mayoría de las proposiciones de nuestras unidades a analizar, fue la proporcionalidad. En la demostración de las proposiciones de Apolonio, se utilizaba la proporcionalidad para establecer relaciones entre segmentos proporcionales de figuras semejantes. Esto nos señala la necesidad de Apolonio por obtener siempre figuras conocidas, tales como los triángulos y cuadrados que me permitieran establecer relaciones entre sus segmentos y comparar áreas, esto debido a que había encontrado formas extrañas como resultado de andar experimentando con diversos cortes al cono y estas formas extrañas estaban cumpliendo con ciertas relaciones que le generaban la necesidad de explicarlas, de caracterizarlas como ciertas curvas, como secciones del cono que estaban cumpliendo con ciertas particularidades.

Recapitulando en el análisis de las unidades se identificaron dos momentos importantes, la generación de la parábola y el estudio de una de sus propiedades. Por lo que para respondernos a la pregunta ¿para qué hace?, consideramos que fue la necesidad de Apolonio de caracterizar la curva que había encontrado, por lo que se apoyó de lo que hasta ese momento se conocía y de su experimentación siguiendo ciertas rutas que lo llevaron a construir ciertas cosas.

Para eso se apoya de ciertos elementos geométricos de la parábola, los cuales primeramente los define para poder utilizarlos en el proceso de construcción, el cuál lo lleva a establecer relaciones de proporcionalidad que a su vez se simplifican en relaciones que comparan áreas comprendidas por ciertos segmentos de la parábola. Es importante mencionar que Apolonio no propone un método o algoritmo de construcción de la parábola, sino que como fruto de su experimentación determinó una curva que le cumplía con ciertas relaciones las cuales fue preciso en especificar para posteriormente seguir experimentando con dicha curva o sección cónica con lo cual determinaría otras propiedades o condiciones de ésta que serían de relevancia para utilizarla de manera estratégica en otros contextos tiempo después.

Al observar de igual manera lo que se presenta en las propuestas de innovación didáctica, y que éstas propongan algoritmos o procedimientos sobre la manera de realizar simples boquejos de la parábola, limita al estudiante impidiendole experimentar y descubrir lo que sucede con los elementos geométricos de esta sección lo cual quizás esté provocando que el estudiante se quede corto y únicamente ilustre un lugar geométrico y no lo construya geométricamente. Es importante mencionar que la parábola generada como corte de un cono es un lugar geométrico, que aunque no sigue la definición actual de *lugar geométrico de parábola* dada en el curso de geometría analítica, los puntos sobre la curva cumplen las relaciones de proporcionalidad a las que llegó Apolonio, lo cual estaría cumpliendo también con la definición de lugar geométrico, en el sentido de, como el conjunto de puntos en el plano que comparten una determinada propiedad.

Por lo que podemos decir que entre las acciones identificamos que se transita entre dimensiones, pasando de las tres dimensiones a las dos para poder trabajar con los elementos geométricos; que se realizan construcciones auxiliares de manera que se obtengan cuadrados, triángulos, etc., es decir, figuras básicas y conocidas que puedan utilizarse como referencia posteriormente; comparación entre áreas y que se generalizan los procesos, trabajando con magnitudes desconocidas, con lo cual observamos una racionalidad contextualizada, en la que estas acciones sobre los elementos geométricos están produciendo geometría y llevadas al aula de esta manera podría evocar en la construcción de significados sobre lo que es un lugar geométrico. Se identifican como actividades el establecimiento de relaciones de proporcionalidad entre segmentos de figuras semejantes y la construcción geométrica de un objeto o propiedad para que éste exista.

4.3. ANÁLISIS SOCIOEPISTÉMICO

Articulando el análisis contextual con el análisis textual, identificamos que gracias a los trabajos realizados previos a Apolonio, permitieron a este matemático despertar un interés por las secciones cónicas que lo llevó a realizar una recopilación y estudio sobre las mismas, el cual formalizó en su majestuosa obra *Las Cónicas*. El contenido de esta obra además de extenso, resulta complejo de entender para cualquier comunidad, por lo que los interesados en ella, sabrán que el énfasis de este matemático está en su trabajo geométrico. Quizás la complejidad de sus proposiciones y de las demostraciones de las mismas, desaniman a muchos a estudiarlas a profundidad de manera que no se pierda el origen de las secciones cónicas en el momento de su enseñanza.

La manera de demostrar en geometría en esa época, estaba totalmente ligada y semejante a matemáticos como Euclides, Arquímedes, Ptolomeo, etc., y sin entender una demostración en el sentido formal y estricto que lo tomamos actualmente, para ellos bastaba con que lo que se enuncia en la proposición pudiera construirse como se indicaba en ella para decir que el objeto o la propiedad de la que se habla, existe.

Se utilizaron muchos elementos geométricos durante las demostraciones de cada proposición analizada, elementos que claramente en la actualidad están definidos pero también se hizo uso de pensamiento geométrico para realizar construcciones auxiliares que involucraran figuras semejantes y el establecimiento de relaciones de proporcionalidad.

Por todo esto, podemos decir que la forma de pensamiento geométrico era muy propio de la época, abstracto al trabajar tres dimensiones y pasarse a trabajar con dos dimensiones, y hacerlo en al menos dos ocasiones al regresar al cono y volver a intersecarlo por otro plano, explícito y construible siempre, empezando las demostraciones afirmando a lo que se quiere llegar, realizando suposiciones que le permitan llegar a absurdos que indican que el elemento o la propiedad geométrica que se está obteniendo de esa construcción es única, realizando comparaciones entre áreas de figuras conocidas, generalizando los casos al no trabajar con magnitudes específicas sino por el contrario, con magnitudes desconocidas, estableciendo relaciones entre segmentos que mostrarían condiciones a cumplir, empezando a mantener rectas dadas (que serían constantes) que empezaban a meter las ideas de parámetro y sobre todo empezar a desarrollar un pensamiento matemático relativo a la parábola, desde una construcción en el plano como una curva que resultó de cortar un cono oblicuo cualquiera por ciertos planos con características específicas, pero que se formaba por puntos que delineaban esa curva, los cuales cumplían con ciertas condiciones que posteriormente se estudiarían únicamente en el plano y no como proveniente del cono, pero sin perder sus propiedades y los elementos geométricos que la configuraron. Mirar la manera en cómo se estudiaron las secciones cónicas en el pasado y como se estudian en la actualidad, nos permite encontrar elementos puntuales de lo que en la antigüedad fue una construcción auxiliar (conveniente) que le permitió a Apolonio construir la parábola (en gran medida producto de su experimentación con el cono y los muchos cortes hechos a éste) y que ahora toma un papel de parámetro que si sufriera cambios (numéricos), sin necesidad de salirse de lo geométrico, se puede observar las alteraciones que le haría a la parábola.

CAPÍTULO V

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

A partir del estudio realizado durante esta investigación y después de un análisis cuidadoso identificamos los siguientes aspectos que decidimos integrar como parte de nuestros resultados y que responden a nuestra pregunta de investigación:

¿Cómo se constituyen los elementos y propiedades de la parábola en su proceso de construcción geométrica?

- Pudimos observar que el rol que juega la manipulación concreta al realizar los cortes a un cono oblicuo por distintos planos con condiciones particulares, permite pasar de las tres a las dos dimensiones, regresarnos y repetir el proceso de manera que comencemos a tener un acercamiento con los objetos geométricos trabajados. Este acercamiento para Apolonio fue una experimentación con el cono tanto recto y posteriormente oblicuo, para generalizar los casos, al realizar cortes a estos conos por planos específicos que generaban ciertas condiciones o formas, que por sus particularidades necesitaban caracterizarse. Parte de esta experimentación, le permitió a Apolonio determinar elementos geométricos fundamentales para la construcción y el estudio de la parábola, tales como su diámetro que en la actulidad se conoce como el eje de la parábola. Este elementos geométrico, permitió a Apolonio tanto construir la parábola como estudiar algunas de sus propiedades. Es tan fundamental este elemento para esta sección cónica que por su definición dada, podríamos pensar que de alguna manera quizás Apolonio estaba buscando simetría para estudiar una parte de todos los puntos que conformaban la parábola, para después decir que se cumple para la otra mitad, lo cual se veía reflejado al momento de trazar rectas dentro de la sección que partían de un punto sobre la curva y se indicaba que llegaran al otro extremo.

- Otro elemento geométrico identificado como importante fue el lugar geométrico triángulo, puesto que es la primera figura que se genera al cortar por primera vez el cono y apartir de ese corte y para los que vienen, se toma como referencia dicho triángulo. Con esto podríamos pensar también que Apolonio buscaba familiarizarse con figuras geométricas conocidas, al observar que después de sus experimentaciones estaba obteniendo objetos nuevos y que necesitaba justificar, se apoya de figuras que además de conocidas permitieran establecer relaciones entre sus áreas o entre sus segmentos teniendo sus semejantes. De alguna manera fue una estrategia de Apolonio para trabajar razones.

- Identificamos la complejidad del pensamiento de la época, donde el tránsito entre dimensiones se realizaban a través de trazos que bosquejan sus ideas, quizás sin tanta precisión, pero que permiten al investigador tener un acercamiento a sus ideas, a lo que estaban intentando comunicar en su lenguaje que resulta un tanto complejo. De igual manera cabe resaltar que la demostración para aquellos matemáticos tenía cierta rigurosidad, tomando en cuenta que entre ellos mismos y por el contexto de la época en el que se encontraban, validaban el proceso deductivo de la construcción geométrica como el método de demostración, pues tomaban como cierto de que si es posible construirlo como se indica, entonces el objeto geométrico construido, existe. Con esto podemos mirar los principios básicos del relativismo epistemológico y de la racionalidad contextualizada de la TSME.

La importancia de este proceso constructivo geométrico se ha perdido en la actualidad restándole importancia y enfocando su enseñanza al simple bosquejo gráfico de los lugares geométricos.

- En la primera unidad de análisis, donde el fin principal era construir la parábola como sección cónica, después de realizar algunos cortes al cono oblicuo por ciertos planos, se establecen relaciones entre segmentos proporcionales de figuras semejantes. Apolonio encuentra relaciones proporcionales en las que compara áreas de cuadrados formados por los segmentos comprendidos en la parábola al trazar una recta perpendicular al diámetro que vaya de la sección al diámetro, donde el área del cuadrado con segmentos (el de la sección al diámetro y el que se obtuvo en el diámetro que va desde el vértice de la sección hasta el puto donde esta recta perendicular cortó al diámetro) es equivalente al área conformada por el cuadrado de lado igual a una perpendicular al diámetro que parte desde el vértice de la sección y que en realidad sería el parámetro que determina qué tanto se abre la parábola, por eso quizás no se especifican las condiciones especificas que debe cumplir esta recta perpendicular al diámetro que va desde el vértice de la sección, porque puede variar enormemente, con respecto al los segmentos del cuadrado.

Ese parámetro es parte de los elementos geométricos identificados al construir la parábola como sección cónica, tanto en la proposición 11 del Libro I como en la proposición 32 del Libro I, pues se trabaja con éste al ser un segmento que se utiliza para que las relaciones de proporcionalidad se cumplan. Estos parámetros se encuentran construidos de manera perpendicular al diámetro de la sección pero no se indican las condiciones específicas de éste para poder determinarlo, lo cual nos indicaría que siempre, para construir una parábola o representarla, existirá una cantidad necesaria para esa representación.

Este descubriento de Apolonio es muy importante, pues permite la construcción de la parábola con ciertas características, ubicados en el plano en un sentido euclideano y hasta el día de hoy se sigue observando su uso cuando el estudiante realiza el bosquejo de una parábola. Esta relación con respecto a las áreas conformadas por los segmentos de la parábola y su parámetro es lo que posteriormente Descartes utiliza para establecer sus relaciones algebraicas en su plano cartesiano.

En la actualidad se nos enseña que es uno el plano que corta al cono y genera la parábola, y es cierto que finalmente lo genera, pero después de haber cortado el cono por otro plano; ya que este corte será de gran importancia para demostrar que la sección cónica que se generó al cortar el cono una segunda vez por un plano inclinado, se trata de una parábola, cuidando que se cumplan las relaciones de proporcionalidad.

Es a partir de ciertas condiciones a cumplir de los planos que cortan el cono, que las construcciones realizadas resultan en una sección cónica llamada parábola. Se propicia el análisis geométrico de las relaciones (proporcionales) entre segmentos y entre "superficies“.

Aunque con respecto al contenido de las cónicas y en particular de la parábola, ya no hay nada más que decir, pues el trabajo hecho por Apolonio es muy completo, si se pueden proponer formas de estudiarlas, por lo que consideramos que utilizando estas relaciones entre sus áreas que condicionan la forma de la parábola, es decir que tanto se abre o cierra la curva, podría ser un camino de significarla como la sección cónica, al observar lo que sucede con los puntos sobre ella en el plano.

➨ Como propiedades geométricas hayamos la cuadratura, refiriéndonos a la importancia de apoyarse de figuras cuadradas para realizar comparaciones entre áreas que se describa en una expresión analítica, misma que se cumple al tratarse de una parábola. La comparación entre áreas, sin considerar magnitudes específicas, pues no se manejan cantidades particulares sobre las magnitudes de los segmentos, sino se generaliza, pues dichos segmentos que conforman las superficies de los cuadrados comparados, los determinan los cortes al cono y construcciones auxiliares, entre las construcciones auxiliares están rectas o planos paralelos con otros que forman segmentos proporcionales. De esta manera, el trabajo geométrico realizado por Apolonio generaliza todos los casos, al partir de un cono oblicuo cortado por ciertos planos que formarán una parábola y demostrar que se cumple, utilizando propiedades y elementos geométricos y no magnitudes particulares, destacando que existirán ciertos elementos, como segmentos, rectas tangentes, vértices, ejes, parámetros, entre otros que se pondrán en juego para la construcción de una parábola.

- De la segunda unidad de análisis se trabajan propiedades con el diámetro de una sección cónica, recordando que el trabajo se realiza ahora únicamente en el plano.

Sin tener ejes de referencia y construida la parábola como resultante del corte de un cono, se traza su diámetro y las tangentes a esta sección. Se estudian todos los casos de las rectas paralelas al diámetro que en algún momento Apolonio llama diámetros también, se estudia lo que sucede cuando se traza el diámetro, o lo que debe suceder para que se trace el diámetro de la sección, por ejemplo que divide en dos partes iguales a todas las retas paralelas que se encuentran contenidas en la parábola. Por lo que nuestro enfoque está en la parábola, y en la relación proporcional que mantiene entre los segmentos que resultan al cortarse rectas dentro o fuera de ésta.

La propiedad geométrica con respecto a las relaciones de proporcionalidad entre los segmentos conformados por tres rectas tangentes a la parábola que se cortan mutuamente, resulta importante pues puede utilizarse para construir la parábola como envolvente de rectas tangentes, lo cual en algunas propuestas de innovación didáctica ha sido tomado en cuenta.

- Después del análisis realizado, podríamos determinar en qué cosas poner atención al momento de pasar estas manipulaciones hechas al cono, al plano, es decir, como llevar las relaciones de proporcionalidad, ya que en dicho plano no veremos explícitos los mismos segmentos pero si las relaciones proporcionales entre ellos. En este momento es importante mencionar que los segmentos del cuadrado y del rectángulo que juegan un papel importante para la construcción de la parábola, en la actualidad podemos mirarlo como los parámetros de la curva que la condicionan en cuanto a sus dimensiones. Las rectas dadas o lados del cuadrado que parecieran construirse convenientemente, nos mostrarán la realidad de lo que permanece constante en todos los puntos que pertenecen a la parábola, pero que sin duda, una modificación en ellos, tendrá modificaciones en la parábola.

- Algunas de sus proposiciones las demuestra por reducción al absurdo, haciendo un supuesto que conlleva a que lo que se quiere construir o probar es imposible, esto para mostrar que lo que se enuncia en la proposición es una propiedad única, con lo cual seguimos observando el sentido de experimentación de Apolonio al probar todos los casos posibles, incluso los imposibles para lo que si se cumple y lo que no.
- Algunas de las propuestas de innovación didáctica no construyen como tal una parábola, sino más bien una curva con forma parabólica porque no se encontraron puntos específicos que pertenezcan a esta sección cónica para poder decir que la construimos, pero identificamos que la forma de la curva que se dibuja con todos los dobleces aparenta ser una parábola. Con métodos de construcción como éste podemos significar la forma parabólica de una curva de manera que el estudiante tenga un acercamiento con este lugar geomérico el cual estudiará más a fondo posteriormente

- De acuerdo a nuestra teoría, las acciones identificadas son: la transición de las tres dimensiones a las dos dimensiones, que resulta necesario para facilitarnos el trabajo geométrico y la capacidad de visualización, la construcción de figuras semejantes apoyándose de figuras que eran conocidas, el establecimiento de relaciones entre segmentos y entre superficies dadas las figuras semejantes, la comparación de áreas y la generalización de los casos al trabajar con magnitudes desconocidas. Se identifican como actividades: la construcción geométrica de la sección cónica así como de sus propiedades y de toda la demostración para afirmar que un elemento o propiedad geométrica existe y el establecimiento de relaciones de proporcionalidad.

Por tanto, podemos decir que esta investigación fue una guía que orientó un estudio específico sobre el trabajo geométrico realizado por el matemático griego Apolonio de Perga de la sección cónica Parábola. Se sabe que son tres las secciones cónicas estudiadas por este matemático pero elegimos comenzar el estudio con la Parábola, dado que es la primera que enuncia en su obra *Las Cónicas*, y que a partir de lo que sucede con ésta es que enuncia las otras dos. Como tal, en la primera exploración a esta obra se estudiaron las definiciones de los elementos geométricos básicos para trabajar con el cono, las cuales da Apolonio en su Libro I, así como las primeras proposiciones y en particular la elección de las que resultarían necesarias estudiar para comprender y construir la parábola. Así mismo en la revisión de la obra, identificamos una proposición que trabajaba con una propiedad geométrica de la parábola que ya conocíamos por las propuestas de innovación seleccionadas, por lo cual consideramos importante estudiarla a fondo. Para ambas proposiciones, en la que se construye la parábola (proposición 11, Libro I) y en la que dada la parábola se estudia una propiedad geométrica de las rectas tangentes a ésta (proposición 41, Libro III), fueron necesarias estudiar otras proposiciones que proponían construcciones auxiliares que permitían observar algunos elementos geométricos o condiciones geométricas que permitirían llegar al objeto esperado.

Entre los elementos geométricos importantes identificados se encuentran el triángulo de referencia generado con el primer corte al cono, el diámetro de la sección, las rectas ordenadas al diámetro, las rectas tangentes y el parámetro. Cada uno de estos elementos jugó un papel importante para la construcción y el estudio de la parábola como sección cónica.

De lo que no se menciona en el estudio de estas proposiciones, podemos decir que el parámetro que se utiliza en la proposición 11 y en la 32 del Libro I, es un segmento trazado desde el diámetro que permite establecer las relaciones de proporcionalidad, que aunque no se especifican en las condiciones que debe cumplir para que ese segmento de recta se trate del parámetro, es un elemento geométrico que se sigue conservando en el estudio y construcción de la parábola como lugar geométrico.

Esta identificación de los elementos y propiedades geométricas de la parábola, pudo realizarse gracias al uso de las acciones y actividades de nuestro fundamento teórico. Entre dichas acciones identificamos la transición de las tres dimensiones a las dos dimensiones como una estrategia necesaria para la comprensión de los trabajos constructivos, la construcción de figuras semejantes como necesarias para el establecimiento de relaciones entre sus segmentos, la comparación de áreas de figuras conocidas como los cuadrados y la generalización de los casos al trabajar con magnitudes desconocidas.

Se identifican como actividades: la construcción geométrica de toda la demostración para afirmar que un elemento o propiedad geométrica existe, es decir, “si puedo construir el objeto geométrico, entonces existe” y el establecimiento de relaciones de proporcionalidad, entre segmentos de figuras semejantes que permitía configurar una relación analítica necesaria de cumplirse para conformar una parábola. Por lo que la proporcionalidad, jugará un papel fundamental en la construcción de ésta y de todas las secciones cónicas, así como de algunas de sus propiedades geométricas.

La aportación de este trabajo está en al estudiar las primeras construcciones realizadas por el matemático Apolonio y los métodos de construcción de las propuestas de innovación didáctica, identificamos elementos geométricos así como algunas propiedades geométricas que surgen desde los inicios con los trabajos con las secciones cónicas y que permanecen de alguna manera en los procesos constructivos actuales y que sin embargo no se enfatiza la importancia de éstos para la obtención de la parábola por ejemplo. Dado que estos elementos o propiedades geométricas no son vistos a simple vista pues el énfasis en la enseñanza de las cónicas es puesto en los procesos algebraicos lo que ha hecho que se pierda, reste o minimice importancia a lo geométrico que podría contribuir a construir mejores significados de las cónicas. Es claro que el trabajo geométrico realizado por Apolonio es muy complejo, no solo de entender sino de realizar al estar transitando entre dimensiones, pero también debmos ser conscientes que es un trabajo hecho y que estudiándolo podríamos pensar en alternativas que nos permitan significar la parábola sin perder el sentido geométrico que en realidad es el más importante y cuyas condiciones permiten a esta cónica en la actualidad que sea utilizada en otros contextos.

Esto nos lleva a reflexionar, que poniéndonos en el lugar del profesor y por las exigencias de un curriculum que se debe cumplir, los tiempos para la enseñanza de las cónicas no alcanzarían, pero quizás enseñando una sola cónica de manera distinta a la tradicional, en la que el estudiante no siga algoritmos que lo lleven a un simple bosquejo de la cónica que después representará de forma algebraica se potencie el desarrollo de trabajo geométrico, un método en el que el estudiante observe lo que sucede cuando se utilizan y se trazan ciertos elementos de la parábola, o utilizando procedimientos distintos se llegue a construir ésta, sin que se le mencione desde el principio lo que se obtendrá, impactaría de forma significativa la idea de lugar geométrico en los estudiantes, de manera que significando lo que es un lugar geométrico pueda construirlos cuando se traten de las cónicas y que además a pesar de que les proporcionen la representación gráfica, el estudiante preste atención a sus elementos geométricos y cómo éstos transforman o modifican dicho lugar geométrico si se modifican también. Por lo que uno en el lugar del profesor, tendría que planear inteligentemente cual de las secciones cónicas podría explotar con los estudiantes, para construir un significado distinto de estos objetos matemáticos y pensar en qué hacerle hacer al estudiantes para que aprenda dicha cónica.

Es así como estaríamos recuperando parte del sentido de la geometría que se abandona en el aula al estudiarlas como lugar geométrico en el sentido actual, propiciando la experimentación con los objetos geométricos, donde ciertas rutas de construcción llevarían al estudiante a construir ciertas cosas. Cabe mencionar que no es sobreponer lo geométrico sobre lo algebraico, sino hacer un equilibrio entre estos dos, con lo que se construirían significados más completos de los lugares geométricos.

El análisis realizado por tanto, me permitió esclarecer la razón de lugar geométrico, para que la parábola no se quede en un simple bosquejo para indicar de donde sale, sino que se fundamenta no solo el dónde sino el porqué resulta eso, quitándole así arbitrariedad y agregándole énfasis al proceso constructivo hecho por Apolonio, y cómo estas relaciones que encuentra y sobre todo el parámetro siguen permaneciendo en la forma en que se estudia actualmente la parábola y que podemos ver reflejado principalmente en la ecuación de esta cónica.

Por lo que finalmente y como aportaciones a la disciplina, este trabajo nos permite reflexionar y cuestionarnos sobre ¿qué estamos entendiendo por hacer geometría? Y al cuesionarnos esto, se liga con la pregunta ¿alguna vez estuvieron juntas la geometría plana y del espacio con la geometría analítica?, este trabajo dio ideas de cómo hacer investigación en historia de la educación, lo cual podría ser el camino que nos lleve a responder estas preguntas.

PROSPECTIVAS

Lo que sigue será realizar una propuesta de diseño que apunte a la significación de los elementos geométricos de una parábola. Proponer métodos de construcción acercados a las construcciones que realizó Apolonio, tratando de realzar los elementos y propiedades geométricas que él utilizó para generar la parábola, trabajando únicamente en un contexto geométrico de manera que si se logran significar estos elementos geométricos necesarios para la construcción, entonces se podría integran el contexto algebraico para representar de esa forma también la parábola y que las relaciones que se den en esa forma de representación también tengan sentido al haberlas estudiado primeramente de forma geométrica.

Un diseño donde se proporcionen estos elementos geométricos para la construcción de la parábola o dada la representación gráfica de la parábola, identificar los elementos geométricos de ésta, para así equilibrar las dos formas de representación de la sección cónica, tanto la geométrica como la algebraica, pues quizás teniendo un acercamiento a estos elementos geométricos utilizados desde la antigüedad para la construcción de la parábola, pueda significarse cualquier método de representación de dicha sección cónica, ya que recordando los principios básicos de la TSME, como la racionalidad contextualizada y la resignificación progresiva de un conocimiento, es decir el significado construido por un estudiante dependerá en gran medida al escenario contextual donde produce la acción (en este caso del escenario geométrico), del empleo de símbolos y de personalizar la apropiación de ese objeto (Cantoral, 2013).

Teniendo una propuesta de diseño bien fundamentada, será preciso aplicarla a un grupo de estudiantes y analizar los datos obtenidos, para comprobar si el estudiante significó tanto los elementos de la parábola como las propiedades que ésta cumple como sección cónica.

De la misma manera que se realizó el análisis textual relativo de la parábola, será importante realizar un análisis de las otras dos secciones cónicas, la elipse y la hipérbola, para identificar de igual forma, qué elementos geométricos son necesarios para la construcción de cada sección cónica y que esto posteriormente pueda llevarse al aula también, proponiendo un diseño.

BIBLIOGRAFÍA

Acerbi, F. (2009). Apollonius of Perga's Conica: Text, Constext, Subtext. Isis: *A Journal of the History of Science 100*, 646-647.

Bartolini, M. (2010). The meaning of conics: historical and didactical dimensions. En J. Kilpatric, C. Hoyles, O. Skovsmose y P. Valero (Eds.) *Meaning in Mathematics Education (*pp. 39-60). Estados Unidos: Springer.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática 8*, 9-28.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. México: Editorial Gedisa, S.A.

Contreras, A., Contreras, M., y García, M. (2002). Sobre Geometría sintética y analítica. La elipse y sus construcciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 5*(2), 111-132.

Cuomo, S. (2002). Apollonius of Perga's Conica: Text, Constext, Subtext. *British Journal for the History of Science 35*(3), 347-379.

Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Ciudad de México, México.

Fried, M. (2011). Apollonius's Conics. En J. Buchwald, J. Berggren y J. Lutzen (Eds.) *Edmond Halley's Reconstruction of the Lost Book of Apollonius's Conics* (pp. 7-12). Estados Unidos: Springer.

García, I. y Arriero, C. (2000). Una experiencia con Cabri: las curvas cónicas. *SUMA* 34, 73-80.

Heath, T. (1986). *Apollonius of Perga.* Cambridge: at the University Press.

Montiel, G. (2005*). Estudio Socioepistemológico de la función Trigonométrica*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. Ciudad de México, México.

Picado, M. y Rico, L. (2011*).* Análisis de contenido en textos históricos de matemáticas. *PNA 6*(1), 11-27.

Real, M. (2004). Las cónicas: método de aprendizaje constructivo. *SUMA* 46, 71-77.

Saito, K. (2005). Apollonius of Perga's Conica: Text, Context, Subtext. En A. Rice y S. Walter (Eds.), *Historia Mathematica 32*, 481–494.

Subsecretaría de Educación Media Superior. Dirección General de Educación Tecnológica Industrial. Programa de estudios. Acuerdo Secretarial 345. (2016). Recuperado el 17 de febrero del 2016 de http://cosdac.sems.gob.mx/portal/index.php/en-el-aula/normatividad-de-servicios-escolares-2-a-1

Subsecretaría de Educación Media Superior. Dirección General de Bachillerato. Programas de estudio. (2013). Recuperado el 20 de marzo del 2016 de http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio/3er_SEMESTRE/Matematicas_III_biblio2014.pdf

Universidad Autónoma de Yucatán. Programas de Estudio (2015). Recuperado el 27 de marzo del 2016 de: http://prepa2uady.blogspot.mx/2015/08/bachillerato-general-universitario.html

Taliaferro R. y Fried, M. (2013). *Apollonius of Perga conics: Books I-IV*. Green Lion Press: Santa Fé, Nuevo México.

Vera, F. (1970). Apolonio de Pergamo. En F. Vera (Ed.). *Científicos griegos.* (pp. 301-454). España: Aguilar.