CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
Unidad Zacatenco
Departamento de Matemática Educativa

El convencimiento de los escolares presente en problemas de generalización. Estudio con alumnos de secundaria

Tesis que presenta
Yolotlcalli Pino Márquez

para obtener el grado de
Maestra en Ciencias

en la especialidad de
Matemática Educativa

Directora de la Tesis:
Dra. Mirela Rigo Lemini

Ciudad de México Julio, 2018

Agradezco al
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt)
quien, a través de su apoyo,
me ha permitido realizar mis estudios de maestría.

Yolotlcalli Pino Márquez
Número de becaria 630413

AGRADECIMIENTOS

Da más fuerza saberse amado que saberse fuerte.

Goethe.

"Gracias" no es suficiente pero, a falta de una palabra que abarque de mejor forma mi sentir, recurriré a ella. Infinita y perpetuamente agradecida con todos aquellos que con su amor ilimitado e incondicional me hacen fuerte día a día. Gracias pues, a pesar de la adversidad y la tentación, jamás me permitieron caer. Especialmente en deuda con:

Mi amoroso marido por su infinita paciencia y apoyo.

Mis hijos por entender que su madre tiene sueños y dejarme luchar por alcanzarlos; gracias por ser tolerantes, amorosos y comprensivos sin reparar en los sacrificios que para ellos implica esa búsqueda.

La Dra. Mirela Rigo por la oportunidad de trabajar bajo su tutela; por su compromiso, responsabilidad, perpetuas enseñanzas y por todas y cada una de las veces que (sutil o enérgicamente) me hizo sentir que debía mejorar y, con ello, posibilitó en mí aprendizajes inimaginables antes de ingresar al posgrado. Gracias por guiarme en mi incorporación al mundo de la investigación en Matemática Educativa, por hacer que me enamorara de él y por enseñarme a investigar así, investigando.

Los Doctores de quienes tuve el honor de aprender a lo largo de este proceso: Dra Aurora Gallardo, Dra. Marta Valdemoros, Dr. Ricardo Quintero, Dra. Sonia Ursini y Dr. Ulises Xolocotzin, un verdadero privilegio coincidir con ustedes.

El Dr. José Guzmán porque siempre tuvo su puerta abierta para mí y, en todo momento, me proveyó de enseñanzas, consejos y confort. Su pérdida es irreparable para el DME.

Mis compañeros de la maestría con quienes tuve el gusto de convivir, evolucionar y estrechar lazos que espero duren mucho tiempo: Ariel, Carlos, David, Eduardo y Heidy, su compañía, consejos y sostén me ayudaron a mantenerme firme en un camino que, aunque por momentos pareció sinuoso, ha resultado una experiencia estupenda.

Adriana y Gaby por la asistencia que nos proveen a los estudiantes, gracias por ser una cara afable en todo momento y por siempre hacer mucho más de lo que les correspondería.

Carlos la excelente persona que me ha honrado con su invaluable amistad, quien no para de darme ánimos y apoyo y en quien siempre puedo descansar.

DEDICATORIA

Dedico esta tesis, con incomensurable amor, a mis personas esenciales:
Ángel, Fausto, Israel, Gloria, Esteban, Ofelia y Francisco.

A mis hombres favoritos: Israel, mi amado compañero de vida que no para de animarme, cuyo respaldo y confianza en mis capacidades son el más grande motivador y quien siempre se encuentra a mi lado, dándome la certeza de que, sin importar cuán fuerte sople el viento, en ningún momento estoy sola; Ángel, quien aún no descubre su potencial, pero en quien tengo más fe que en mí misma, y Fausto, quien comienza su camino pero algún día tendrá su "Doctorado en saber". El cielo, para considerarse así, debe parecerse a los momentos en que los abrazo.

Para mi madre, quien se llena de orgullo incluso ante el menor de mis triunfos, quien siempre está dispuesta a escucharme, aconsejarme y hacerme fuerte.

Para mi padre, que se fue demasiado pronto pero no sin antes sembrar en mí una semilla que ha dado buenos frutos.

A mis abuelos que me acogieron en su regazo e, intencional o fortuitamente, pusieron los cimientos que me han permitido salir avante en la vida.

A mis hermanos, a quienes amo profundamente.

Con especial cariño para la maestra Didya, quien creyó en mí antes que yo misma y, sin su apoyo, esto sería imposible.

RESUMEN

En la presente investigación, de tipo cualitativo, se analizan las estrategias empleadas por estudiantes de secundaria para resolver tareas de generalización poco convencionales en las que, explícitamente, no se solicita utilizar álgebra.

En complemento a dilucidar las estrategias mencionadas, el interés se centró en conocer los niveles de seguridad que los alumnos dijeron experimentar al resolver las citadas tareas.

Para que lo escrito en los párrafos anteriores fuese posible, veintiocho estudiantes de tercer grado de secundaria, de dos escuelas distintas, participaron en la solución de las tareas y contestaron un cuestionario en el que expresaron el nivel de seguridad que experimentaron al resolver las mencionadas tareas.

El diferenciar las estrategias utilizadas por los participantes y analizar los niveles de seguridad que dijeron vivenciar, abrió la puerta para descubrir un fenómeno particular en todos los participantes de una de las instituciones.

Los resultados obtenidos no sólo permitieron responder los cuestionamientos que rigen la investigación, además abren la puerta a estudios futuros.

ABSTRACT

In the present investigation, of qualitative type, the strategies used by middle school students are analyzed to solve unconventional generalization tasks in which, explicitly, no algebra is requested.

As a complement to elucidate the afore mentioned strategies, the interest was focused on knowing the levels of confidence that the students said to experience when solving the mentioned tasks.

In order to acomplish what was written in the previous paragraphs, twenty-eight third-grade students from two different schools participated in solving the tasks and answered a questionnaire in which they expressed the level of security they experienced when solving the mentioned tasks. .

Differentiating the strategies used by the participants and analyzing the levels of security they said they experienced, opened the door to discover a particular phenomenon to all the participants from one of the institutions.

The obtained results not only allowed to answer the questions that ruled the research, they also open the door to future studies.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1: ANTECEDENTES

En el siguiente capítulo se retoman los hallazgos reportados en algunas investigaciones relacionadas con los temas medulares de esta investigación: la generalización y el convencimiento.

En un primer momento se revisan contribuciones con respecto al convencimiento. En un segundo momento, se discuten aportaciones relacionadas con la generalización.

1.1. ACERCA DEL CONVENCIMIENTO

Las matemáticas escolares y otros tipos de actividad matemática se construyen con la autoimagen del humano y reflejan los desafíos humanos de quienes les crearon (Brown, 2015) es decir que, el trabajo matemático, inevitablemente se ve influenciado por la persona que le realiza y los retos que ella enfrenta. Sin embargo - continúa el investigador - quienes las crearon, a su vez, son resultado del mundo que les ha producido, así "Las entidades matemáticas que ellos han construido se refieren a sí mismos y al mundo que les ha creado". O sea que el trabajo matemático no sólo se ve influenciado por quien lo realiza sino, también, por las vivencias que esa persona ha experimentado en el "mundo" en el que se desenvuelve.

Al respecto Rigo y Martínez (2017) afirman que "el convencimiento es resultado de interacciones sociales que se dan en el marco de valores culturales socialmente construidos e instituidos", los autores reconocen el carácter social y cultural de los estados de convencimiento. Es decir, los investigadores reconocen que las personas aprenden a sentirse convencidos, en cierta medida, debido a las interacciones sociales de las cuales participan.

Con relación al papel que juegan las creencias de quien realiza el trabajo matemático con la forma en que elige ejecutarlo, Fischbein (1982) considera que:

> "naturalmente, tendemos a interpretar una pieza de información de tal manera que nos sea posible creer en ella […] Creer en ciertas representaciones o interpretaciones implica sentir que son significativas. Esto, por supuesto, depende de nuestra previa, general y específica experiencia con respecto a los hechos dados"

Además, sostiene que si queremos saber cómo y por qué alguien procede satisfactoriamente en la actividad pensante, siguiendo un camino en vez de otro, debemos tener en cuenta esas fuerzas internas creadas por las creencias cognitivas existentes en la persona involucrada.

Rigo (2017) muestra que existen vivencias de seguridad ligadas a las creencias de contenido matemático que se expresan en forma de convencimiento, convicción, certeza, necesidad o duda; a esos estados unidos a las creencias los denomina 'Estados epistémicos de convencimiento', y puntualiza que [son] "Estados internos que recaen sobre las creencias y/o sobre sus sustentos" (Rigo y Martínez, 2016); como ya se mencionó, dichos estados están asociados a las creencias, a las razones en las que éstas se sustentan y a los motivos que tiene la persona para creer. Además, hay distintos tipos de estados epistémicos, los que se expresan mediante determinados patrones de comportamiento y expresiones corporales (Rigo y Martínez, 2016).

Respecto de la influencia que ejerce el medio en los Estados epistémicos que experimentan las personas, Rigo (2016) sostiene que "el aprendizaje y la cultura pueden modular la respuesta emocional adecuándola a los requerimientos de un contexto socio-cultural determinado", por tanto, los Estados Epistémicos son re-entrenables. De tal forma que, haciéndolo correctamente, los participantes del trabajo matemático (nóveles o profesionales) aprendan a experimentar convencimiento con base en la labor nacida de la disciplina *per sé*.

Existen múltiples investigaciones en las cuáles se ahonda en la importancia que tiene el convencimiento en el trabajo matemático (e.g., Fischbein, 1982; Mejía-Ramos et al., 2007; Brown, 2015; Foster, 2015; Rigo, 2013, 2014, 2017; Rigo y Martínez, 2016), en unas el protagonismo está centrado en los profesores y, en otras, el papel principal pertenece a los alumnos.

Entre aquellos estudios en los que se investiga considerando la visión y perspectiva de los estudiantes, Foster (2015) afirma en que "muchos factores, dentro y fuera del salón de clases, pueden ser importantes al afectar la auto-confianza matemática de los pupilos", postura con la que esta investigación concuerda. El trabajo del investigador atiende a la noción de 'Calibración' (concepto en el que se ahonda en el Marco teórico interpretativo) como el paralelismo existente en la veracidad de las respuestas dadas por los estudiantes y la confianza que el alumno tiene en ellas.

En resumen, existen aportes que sostienen que las personas (alumnos y profesores) experimentan convencimiento, respecto al trabajo matemático que realizan, con base en muchos factores y, aunque debiera educárseles para que dichos factores fuesen inherentes a la disciplina, algunos de ellos son externos a la matemática.

1.2. ACERCA DE LA GENERALIZACIÓN.

Dado que la generalización es uno de los procedimientos principales de producción del conocimiento (Radford, 2013), existen múltiples investigaciones que giran en torno a ella.

Kruteskii, con base en la investigación que llevó a cabo entre los años 1955 y 1966 (cuyo propósito fue explorar la naturaleza y estructura de las habilidades matemáticas en estudiantes soviéticos de entre 6 y 17 años), distingue que el análisis que posibilita la generalización se orienta hacia la distinción entre las características esenciales de las no esenciales. Es decir, dicho análisis sugiere la necesidad de diferenciar los atributos primordiales y comunes a los fenómenos con que se trabaja, de los que no lo son.

En el estudio, el autor reconoció en los participantes cuatro niveles de habilidad para generalizar a partir de casos concretos:

1.) No generaliza objetos matemáticos considerando sus características esenciales, ni siquiera con la ayuda del experimentador;
2.) Generaliza el material matemático según las características esenciales, con la ayuda del experimentador con inexactitudes y errores individuales;
3.) Generaliza el material matemático de acuerdo con las características esenciales de forma independiente, pero después de algunos ejercicios de tipo único y con errores insignificantes. La generalización adecuada e irreprochable viene con preguntas del experimentador.
4.) Generaliza el material matemático correctamente e inmediatamente, sin experimentar dificultades, sin la ayuda del experimentador.

Para Kruteskii, existe una relación cercana entre generalizar y estudiar matemáticas pues:

> "Esta habilidad [de generalizar objetos matemáticos, relaciones y operaciones] es algo inherente a todos los alumnos; de lo contrario, no podrían estudiar matemáticas con algún éxito en absoluto. Aunque en los alumnos matemáticamente capaces, la generalización de material matemático es cualitativamente distinta y no precisan de una práctica especial para resolver ciertos problemas."

Por otro lado, para Mason (1999), aunque la generalización reside en el corazón de las matemáticas, no está limitada al ámbito áulico sino que "la capacidad para detectar patrones y expresar generalidad está presente en el niño desde su nacimiento […] es una capacidad con la que todo niño llega a la escuela [pero] que necesita refinarse y agudizarse, extenderse y desarrollarse".

El autor considera que el estudio de las matemáticas no sólo coadyuva a pulir las capacidades naturales para detectar patrones y generalizar sino que, a medida que los alumnos expresan correctamente la generalidad, aprenden a estar comprometidos con la semántica, con el significado matemático y, debido a que la naturaleza inductiva de los patrones es la base para una demostración de las relaciones permite que los alumnos desarrollen los fundamentos necesarios para la demostración (Mason, 1999).

El investigador distingue que las raíces del álgebra yacen en cuatro habilidades, todas ellas vinculadas estrechamente con la habilidad de generalizar, que son:

- Expresar generalidad: Mediante el uso de palabras y símbolos, con especial atención al uso de diagramas y a los números como contextos para fomentar la conciencia de generalidad;
- Expresiones múltiples: Encontrar expresiones múltiples para la misma generalidad;
- Libertad y restricción: Mediante el uso de símbolos, representar el valor aún desconocido o no especificado y traducir las restricciones de este en ecuaciones y desigualdades, lo que lleva a la necesidad de técnicas adecuadas para resolverlas;
- Experimentando la estructura, conduciendo a la aritmética generalizada: Expresar la generalidad hallada con reglas aritméticas, para finalizar con las reglas para manipular expresiones algebraicas (Mason, Graham & Johnston-Wilder 2005; Mason, 2006).

Para el investigador, estos cuatro hilos conductores proporcionan una estructura para que se aproveche el potencial matemático de los estudiantes y, mediante la identificación, explicitación y comunicación en lenguaje algebraico de generalidades, se desarrolle su pensamiento algebraico.

Desde el punto de vista de Davidov (1972) la generalización se considera como inseparablemente ligada a la abstracción. El autor considera que delinear una determinada cualidad como algo común, implica separarla de otras cualidades lo que permite que el niño convierta dicha cualidad general en un objeto independiente y particular de acciones subsecuentes. Además, afirma que desarrollar las generalizaciones de los niños es uno de los principales propósitos de la instrucción escolar.

Para Radford (2013) la generalización se constituye con base en: (a) la toma de conciencia de una propiedad común que se nota mediante la observación de ciertos términos particulares (por ejemplo, p1, p2, p3, …, pk), (b) la generalización de dicha propiedad a todos los términos subsecuentes de la secuencia (pk + 1, pk + 2, pk + 3, …) y (c) la capacidad de usar esa propiedad común a fin de deducir una expresión directa que permite calcular el valor de cualquier término de la secuencia.

Es decir, a partir de un número finito de términos, se requiere identificar una característica común a cada uno de ellos; después, extender dicha particularidad a más términos de la secuencia y (de lo que ocurra a continuación) dependerá que la generalización sea aritmética o algebraica. Radford (2006) considera que no todas las actividades con patrones culminarán en generalizar y, con base en dicha perspectiva, distingue dos tipos: una aritmética y otra algebraica. En la primera, la determinación de la propiedad común servirá para pasar de un término a otro; en la generalización algebraica se requiere que dicha característica sea utilizada analíticamente, ya no como una posibilidad sino como un principio para deducir, sin lugar a dudas, una fórmula que proporcione el valor de cualquier término.

Pese a la importancia que estriba el generalizar y a que ésta se considera una práctica inherente a la naturaleza humana, hay datos recabados por diversos investigadores (Stephens, 2007; Stephens & Wang, 2008 y Stephens &Armanto, 2010, citados en Stephens & Ribeiro, 2012) que dan indicios de que, en independencia del lenguaje en que se llevó a cabo la investigación, muchos estudiantes (en estudios realizados en diferentes países) muestran conflictos para expresarse en términos claramente relacionales y, por lo tanto, no pueden enmarcar una generalización para describir cómo varían los números involucrados en los planteamientos que se les proponen. Es decir, generalizar constituye una tarea sumamente compleja que, sin importar el idioma o el contexto, estriba considerables dificultades para los estudiantes.

En resumen, generalizar es una importante actividad que no está circunscrita al entorno escolar. Establecer generalizaciones requiere abstraer y deducir, prácticas indispensables para entender las matemáticas y trabajar en el ámbito algebraico. Sin embargo, aunque el acto de generalizar pudiera malinterpretarse como algo trivial, representa dificultades para cualquier estudiante.

Los referentes consultados no sólo sirvieron de inspiración sino que, además, permitieron tener una mejor comprensión del tema investigado en este documento.

CAPÍTULO 2: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La investigación reportada en esta tesis ahonda en el convencimiento que los estudiantes de secundaria experimentan al solucionar planteamientos que involucran procesos de generalización.

En el capítulo siguiente se justifica, desde distintos ámbitos, el trabajo; además se define la pregunta de investigación, los objetivos de la misma y se describe el contenido de los capítulos que conforman el documento.

Desde el punto de vista institucional, el trayecto formativo propuesto por la Secretaría de Educación Pública (SEP) contempla la enseñanza explícita del álgebra a partir del primer grado de secundaria. El Programa de estudio 2011, documento rector tanto de los contenidos como del enfoque de la asignatura de Matemáticas para el Nivel Secundaria, estipula que los temas a enseñar se organicen en tres ejes nombrados: 1) Sentido numérico y pensamiento algebraico, 2) Forma, espacio y medida y 3) Manejo de la información; el primero de ellos alude a los fines más relevantes del estudio de la aritmética y del álgebra que son:

- La modelación de situaciones mediante el uso del lenguaje aritmético o algebraico.
- La generalización de propiedades aritméticas mediante el uso del álgebra.
- La puesta en juego de diferentes formas de representar y efectuar cálculos.

El desarrollo del sentido numérico y pensamiento algebraico implica que los alumnos:

> “sepan utilizar los números y las operaciones en distintos contextos y tengan la posibilidad de modelizar situaciones y resolverlas; es decir, que puedan expresarlas en lenguaje matemático, efectuar los cálculos necesarios y obtener un resultado que cumpla con las condiciones establecidas” (SEP, 2011b)

El mismo referente curricular instituye que uno de los ocho propósitos de la formación secundaria en la disciplina es que, como resultado de esta fase de aprendizaje, los alumnos “modelen y resuelvan problemas que impliquen el uso de ecuaciones hasta de segundo grado, de funciones lineales o de expresiones generales que definen patrones” (SEP, 2011b). Lo anterior es imposible sin descubrir el invariante en cada elemento del problema a solucionar, es decir, sin generalizar; además, para que la modelación y resolución mencionadas sean correctas, será necesario traducir, adecuadamente, dicho hallazgo al lenguaje algebraico.

La enseñanza y el aprendizaje del álgebra, con base en lo que determinan los documentos oficiales, tiene prospectado que cualquier persona que concluya su educación secundaria debe ser capaz de identificar patrones en las situaciones, reflexionar en cuáles de los saberes que poseen son los más adecuados y recurrir a conocimientos (aritméticos y/o algebraicos) que les permitan modelar expresiones que den solución a los planteamientos que se les proponen.

El Plan de estudios sostiene que lo deseable de los estudiantes, al concluir la educación básica, es que sean competentes, entendiendo *competencia* como “la capacidad de responder a diferentes situaciones; implica un saber hacer (habilidades), con saber (conocimiento), así como la valoración de las consecuencias de ese hacer (valores y actitudes)” (SEP, 2011b).

En conformidad con la definición de competencia que se delimita en el Plan de estudios, desde el punto de vista matemático, el referente curricular asociado a la asignatura plantea cuatro competencias a alcanzar, las cuales son:

1. Resolver problemas de manera autónoma. Implica que los alumnos sepan identificar, plantear y resolver diferentes tipos de problemas

o situaciones; […] utilizando más de un procedimiento, reconociendo cuál o cuáles son más eficaces; o bien […] generalizar procedimientos de resolución.

2. Comunicar información matemática. Comprende la posibilidad de que los alumnos expresen, representen e interpreten información matemática contenida en una situación o en un fenómeno. […] expongan con claridad las ideas matemáticas encontradas; deduzcan la información derivada de las representaciones e infieran propiedades, características o tendencias de la situación o del fenómeno representado.
3. Validar procedimientos y resultados. Consiste en que los alumnos adquieran la confianza suficiente para explicar y justificar los procedimientos y soluciones encontradas, mediante argumentos a su alcance que se orienten hacia el razonamiento deductivo y la demostración formal.
4. Manejar técnicas eficientemente. Se refiere al uso eficiente de procedimientos y formas de representación que hacen los alumnos al efectuar cálculos, […] Esta competencia […] apunta principalmente al desarrollo del significado y uso de los números y de las operaciones […]. (SEP, 2011b)

De manera que los pupilos sean capaces no sólo de resolver problemas de forma eficiente (identificando si el planteamiento tiene solución y empleando, dentro de las posibles, la más efectiva); además es deseable que representen, interpreten y comuniquen información matemática; deduzcan, demuestren y justifiquen matemáticamente sus interpretaciones y/o soluciones y utilicen procedimientos, inherentes a la disciplina, de forma eficaz.

Es decir, que los alumnos posean una sólida formación matemática que les permita afrontar con éxito los retos de su vida diaria. Dicha formación dependerá, primordialmente, de los saberes adquiridos y de las actitudes y habilidades que se hayan desarrollado gracias a la Escuela; las vivencias que experimenten los escolares al estudiar matemáticas pueden determinar su gusto o rechazo por ellas, la creatividad para buscar soluciones o la pasividad para escucharlas y tratar de emularlas, la búsqueda de argumentos para validar sus resultados o la dependencia de la aprobación del docente.

En palabras de Holt &Dienes (1984) "las experiencias en el salón de clase pueden promover una actitud abierta en los jóvenes, y ayudarles a desarrollar su potencial para tener un pensamiento claro" y, aunque la actividad matemática es, esencialmente, una actividad simbólica, es bien sabido que uno de los tópicos curriculares más difíciles de la matemática enseñada durante la educación secundaria es álgebra. En particular, resulta muy difícil para el alumno alcanzar una competencia y maestría adecuada del complejo lenguaje simbólico (Radford, 1999).

Por otro lado, es innegable que (en gran medida) la responsabilidad de las vivencias depende de los docentes pues son quienes están a cargo de generar los ambientes propicios para el aprendizaje, planean las actividades mediante las cuales los estudiantes experimentan el acercamiento con los contenidos disciplinares incluidos en el programa de estudio y, de forma explícita o tácita, enseñan a los pupilos a validar o rechazar no sólo las respuestas sino, más importante aún, a construir y sopesar las estrategias mediante las que elucubran dichas soluciones.

Pero el docente, como lo declara Rigo (2014), "no es un autómata diseñado para comunicar informaciones; es una persona que, además de un conocimiento, tiene motivos, necesidades (diversas), creencias y convicciones [que] son un factor coadyuvante en la determinación de las prácticas de racionalidad que el maestro impulsa en su clase". Es decir que las creencias y convicciones del profesor no sólo inciden en la manera en que éste presenta los contenidos disciplinares sino que, influido por ellas y otros elementos (consciente o inconscientemente), promueve los mecanismos con que los estudiantes argumentan, se convencen, justifican, validan o rechazan (información, procedimientos, respuestas, etc.) y encuentran seguridad en clase; pudiendo sustentar esas acciones en hechos de las matemáticas o en razones ajenas a este ámbito.

Pese a que los profesores son parte fundamental del proceso escolar (y sería deseable que tomaran conciencia de que sus convicciones sí cuentan en clase; Rigo, 2014), la finalidad de la educación son los alumnos.

El centro y el referente fundamental del aprendizaje son los estudiantes quienes, al igual que los docentes, innegablemente poseen conocimientos, creencias y suposiciones sobre sí mismos, el mundo que les rodea y las interacciones entre ambos (lo que se espera que aprendan, el modo de hacerlo, las relaciones personales etc.) y, aunque no se reconozca en los documentos que rigen el currículum oficial de la disciplina, implícita o explícitamente y consciente o inconscientemente en las clases de matemáticas se promueven formas específicas de justificar y convencer en la disciplina *misma*: "Uno de los pilares del aprendizaje de las matemáticas es (o debiera ser) el convencimiento (Fischbein, 1982; Krummehuer, 1995) y, pese a la importancia que estriba, es un elemento que no se considera en los documentos rectores del trabajo en el aula de matemáticas del nivel secundaria.

Con respecto a las implicaciones del convencimiento, dentro del aula de matemáticas, Foster (2015) afirma que las matemáticas, entre todas las materias escolares, presentan una perspectiva de certeza única y tentadora [,] los maestros de matemáticas quieren que sus pupilos experimenten la confianza de saber y entender [y] el profesor puede elegir intervenir en formas bastante distintas con dos pupilos con competencia similar pero confianza muy distinta.

Es decir, que el convencimiento que experimentan los estudiantes requiere formas de actuar (por parte del profesor) distintas pero, para poder elegir proceder de cierta forma y promover el aprendizaje y la comprensión en los escolares, los docentes debieran saber el nivel de confianza que tienen sus pupilos ¿Lo saben? De no ser así, podría cuestionarse al escolar pero ¿Los alumnos pueden identificar y comunicar qué tan convencidos se sienten con respecto al trabajo matemático que realizan? ¿Les es posible explicar qué les hace sentir más convencidos? Las respuestas a esas preguntas aportarían elementos para que los profesores coadyuven a la confianza que los pupilos experimentan durante la clase de matemáticas y, entre otras cosas, por ello este estudio es de importancia.

2.1. PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Debido a la influencia que en el trabajo matemático ejerce el convencimiento, a los beneficios que aporta la generalización y a la trascendencia que en el currículum se le otorga, se consideró importante reconocer si los estudiantes de secundaria identifican el nivel de convencimiento que experimentan al solucionar tareas que involucren identificar patrones y generalizar. Por ello, surgen las preguntas:

Al resolver problemas de generalización:

i. ¿Cuáles son las estrategias recurrentes de los estudiantes de secundaria?

ii. a.) ¿Cuáles son los niveles de seguridad que, al resolver tareas de generalización, los alumnos dijeron experimentar?
b.) ¿Las producciones generadas por los estudiantes de alguna de las dos escuelas muestran mayores porcentajes de respuestas calibradas? (es decir, asociaron estados de seguridad a respuestas correctas e inseguridad a respuestas incorrectas).

Para responder a dichas preguntas, la investigación se divide en dos fases, la primera encaminada por la pregunta i) y la segunda orientada por las preguntas planteadas en ii).

2.2. ESTRUCTURA DE LOS CAPÍTULOS

En el tercer capítulo se mencionan los conceptos teóricos que permitieron parte del análisis de los datos empíricos recabados para este documento. Con respecto a la argumentación se retoma el análisis funcional de argumentos con base en el modelo de Toulmin; para la generalización el Modelo 3V de Ursini et al. y, en correspondencia con el convencimiento, se reportan las ideas de 'Calibración' de Foster y los Estados Epistémicos de convencimiento de Rigo.

En el capítulo 4 se describe la metodología empleada en la investigación. Debido a la importancia que tiene en el estudio, se recopilan nociones importantes de la Teoría fundamentada; además, se describe a la población participante y el instrumento con que se recogieron los datos.

En el quinto capítulo se describe la construcción de las categorías ligadas a las estrategias de solución con que los estudiantes dan por concluidas las tareas que se les propusieron; además se definen y ejemplifican dichas categorías. También se presenta un análisis derivado de la incidencia de tales categorías e inferencias al respecto. Así se exponen los resultados relacionados con la Fase uno.

El capítulo 6 versa sobre los resultados concernientes a la Fase dos de la investigación, es decir, la que refiere al convencimiento de los estudiantes.

Como una breve síntesis de los hallazgos reportados en esta investigación y, en respuesta a las preguntas de investigación, en el capítulo 7 se retoman las consideraciones finales. En esta sección también se destaca la trascendencia de este estudio en el aula.

CAPÍTULO 3: MARCO TEÓRICO INTERPRETATIVO

En esta parte del documento de tesis se presentan los constructos teóricos que sirvieron de base para interpretar los datos empíricos. Cada una de las teorías retomadas constituyó una poderosa herramienta que coadyuvó a la realización de la investigación.

3.1. ANÁLISIS FUNCIONAL DE LOS ARGUMENTOS CON BASE EN EL MODELO DE TOULMIN

El análisis de Toulmin ha sido utilizado cada vez con más frecuencia en la investigación en educación matemática (e.g., Martínez y Pedemonte, 2014) como un mecanismo interpretativo que permite identificar los argumentos en el discurso de profesores y alumnos. En esta investigación constituye una herramienta que da la posibilidad de reconstruir el camino recorrido por los participantes (expresado en lenguaje matemático o coloquial) al plantearles tareas de generalización.

En el análisis funcional de Toulmin (2007), los argumentos cuentan con una conclusión o afirmación (C) que se está tratando de establecer; en este estudio las conclusiones son las afirmaciones que van construyendo los alumnos.

Los argumentos también poseen datos o evidencias (D), que constituyen los elementos justificatorios que se alegan como base de la conclusión; en este estudio se trata de las estrategias con base en las cuales los estudiantes obtuvieron sus conclusiones.

Otro componente de los argumentos, de acuerdo a Toulmin, son las Garantías (G), que consisten en reglas, principios o enunciados que permiten realizar las inferencias para pasar de los datos a la conclusión.

Los Respaldos (B) por otra parte, constituyen otro componente del argumento y consisten en las certezas en las cuales se respalda la veracidad de las garantías (Toulmin, 2007, pp. 133-140); en este trabajo, los respaldos se tomarán como el área de las matemáticas en la cual están soportando su argumento (Cf. Martínez y Pedemonte, 2014).

En el marco de este trabajo, se retoma la idea de Calificador (Q) que plantean Martínez y Rigo (2015) como el grado de seguridad que los escolares vivencian en relación al argumento, la cual difiere del sentido que le da Toulmin (como la fuerza estructural del argumento).

Dado que no todas las afirmaciones expresadas por los participantes son correctas, se incluyó un espacio para considerar el valor de verdad de la afirmación, específicamente el valor de verdad falso (F) conforme al cual se considera no sólo si la afirmación es equívoca, sino también las causas de la errata.

Cabe aclarar que mientras las conclusiones y las evidencias son explícitas, las garantías y los respaldos son implícitos y dependen de la interpretación de las investigadoras. El calificador sí fue explicitado por los participantes de la investigación.

Para las garantías (G) se consideraron inicialmente las conjeturas de Martínez y Pedemonte (2014) respecto a las estrategias de construcción de argumentos en los que se hacen generalizaciones. Estas autoras distinguieron dos tipos de patrones de generalización inductiva (p. 147); están los que ellas llaman "patrón de generalización a partir de la regularidad en el proceso", donde la generalización resultante está dada por la inferencia conectando un caso con el siguiente (p. 133) (realizando un proceso recursivo, aunque pareciera que su aplicación es distinta, es decir, identifican este patrón en casos en que los niños distinguen las regularidades en el calendario); a partir de esto desprenden la construcción de la expresión algebraica. Por otro lado, está el patrón de generalización a partir de la regularidad en los resultados; en este caso, la generalización resultante parte de la regularidad del resultado del cálculo. Las autoras retomaron esas ideas de Harel (2001). Estos conceptos sirvieron como referente inicial para dilucidar y definir las garantías que los participantes del presente estudio emplearon implícitamente al resolver las tareas de generalización, especialmente para definir garantías y respaldos.

Gracias al análisis de Toulmin fue viable identificar patrones en las respuestas que los estudiantes dieron en la primera fase y que fueron la base para la caracterización de las categorías de resolución que se introducen en el apartado de Resultados de la investigación. Las categorías reflejan la naturaleza de los datos o evidencias explicitados por los alumnos y que les permitieron llegar a un argumento.

3.2. MODELO 3V

En complemento al análisis funcional de Toulmin, se ha empleado el modelo 3v por considerarle un medio útil para el diseño de instrumentos de diagnóstico y que muestra, de manera explícita, los aspectos que caracterizan a cada uno de los usos de la variable con los que se trabaja en el álgebra elemental. (Ursini, Escareño, Montes & Trigueros 2008, pp. 35-37). Los usos aludidos, que se emplearon específicamente para el análisis de las garantías que aparecieron en el presente estudio, son:

G1. Reconocer patrones y percibir reglas y métodos, en secuencias y en familias de problemas.

G2. Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.

G3. Deducir reglas y métodos generales, en secuencias y en familias de problemas.

G4. Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.

G5. Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.

I3. Sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.

I5. Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.

3.3. CALIBRACIÓN

Dentro del ámbito de la investigación en Matemática Educativa, Foster (2015) define a los estudiantes 'Bien calibrados' como aquellos en quienes confianza (seguridad de que la respuesta dada es correcta) y competencia (fluidez procedimental, que involucra saber cuándo y cómo aplicar un procedimiento, así como la capacidad de realizarlo precisa, eficiente y flexiblemente) están fuertemente correlacionadas, de tal manera que un pupilo cuya competencia varía a través de un contenido, tendrá equiparables niveles de confianza en el mismo ámbito.

El autor afirma que si el desempeño de un estudiante, al realizar un procedimiento matemático, no resulta en una respuesta que él considere muy probable de ser correcta, entonces dicho procedimiento no es una herramienta para él y, bajo esas circunstancias, sería mejor realizar un acercamiento a la situación por otro método que permitiese al educando dar una respuesta que considere plausible.

La consciencia de lo que una persona sabe o desconoce es un elemento importante que puede determinar el apoyo adicional (de personas o fuentes) que el individuo puede requerir.

En este trabajo se retoma la idea de 'calibración' como la relación que se da entre grados de seguridad y veracidad de respuestas.

3.4. EL CONVENCIMIENTO Y OTROS ESTADOS INTERNOS

En las clases de matemáticas alumnos y profesores fundamentan, mediante mecanismos racionales, su confianza en enunciados matemáticos; pero también respaldan su seguridad o certeza, en muchos casos inconscientemente, en mecanismos que responden a consideraciones extra-racionales (Rigo, 2014). Al hacerlo, vivencian estados en los que sienten seguridad, confianza, convencimiento, duda, incertidumbre, certeza, etc., en torno a determinadas a ideas completas, afirmaciones o creencias y, a todos estos distintos estados internos que las personas experimentan, Rigo (2009) los denomina 'estados epistémicos de convencimiento'.

Los estados epistémicos de convencimiento se asocian a las creencias, que son el bagaje de verdades de las personas que forman parte de su realidad (Villoro cit. en Rigo, 2016) y funcionan como un estímulo que activa dicho estado.

Tomando en cuenta las ideas de emoción y sentimiento que propone Damasio (cit. en Rigo, 2016; Rigo & Martínez 2017) se puede decir que los estados epistémicos son un cierto tipo de emociones secundarias y sentimientos y, por tanto, son aprendidos. Específicamente, los autores continúan, los estados epistémicos se adquieren en ambientes culturales en donde se educa a la persona para vivenciar determinados estados epistémicos ante ciertas creencias y ciertas razones y se generan, impulsan y se consolidan como resultado de las interacciones sociales; por tanto, son moldeables y se pueden re-definir bajo ciertas condiciones.

Los estados epistémicos se vivencian en distintos grados de intensidad, se pueden expresar y comunicar a otras personas y, además, se manifiestan de manera más o menos firme mediante determinados patrones de comportamientos y expresiones corporales, patrones que suelen hacer referencia sólo a esos estados.

Para fines de esta investigación se acepta que el convencimiento, la confianza y la seguridad son sinónimos y que hay distintos grados de Estados Epistémicos, los que dependen del nivel de seguridad que la persona experimenta en torno a la veracidad de su creencia.

CAPÍTULO 4: DISEÑO METODOLÓGICO

En este capítulo se describe el método empleado en la investigación. Debido a la importancia que para este trabajo tiene la Teoría Fundamentada durante la recogida y análisis de datos empíricos, en este apartado se incluye una revisión de la misma.

Además, se describe la población que participó en el estudio y las pautas para elegirla. También se el instrumento con el cual se recabaron los datos ocupados en la investigación.

La investigación es de tipo cualitativo e interpretativo (Taylor & Bogdan, 1987; Corbin & Strauss, 2015) y se basa en un estudio exploratorio de caso. La investigación se encuentra dividida en dos fases: la primera se centra en identificar las estrategias matemáticas que emplearon los participantes al llevar a cabo tareas de generalización y, en la segunda fase, se dilucidarán los objetivos del proyecto que se relacionan con el convencimiento.

4.1. TEORÍA FUNDAMENTADA

La Teoría Fundamentada es una forma de investigación cualitativa desarrollada, entre otros, por Glaser y Strauss, orientada por los datos empíricos y cuyo enfoque consiste en el proceso de conectar grupos de conceptos como categorías para explicar fenómenos y así desarrollar teoría (Corbin & Strauss, 2015).

En la Teoría Fundamentada el análisis es un proceso que permite al investigador, mediante una constante interacción con los datos, visualizar las semejanzas y diferencias entre los comportamientos de los participantes, identificar patrones y, después de consideraciones cuidadosas, construir (gracias a lo observado) conceptos que se redefinirán constantemente hasta volverse densos en sus propiedades, es decir en las características o cualidades que dan especificidad y diferencian a un concepto de otro, y dimensiones (el rango en el que una misma propiedad varía).

Gracias a la comparación constante (proceso mediante el cual se analizan los datos cotejándolos unos contra otros en la búsqueda de similitudes o diferencias) los conceptos se robustecen y se enriquecen gracias al reconocimiento de sus propiedades y dimensiones. Los conceptos identificados, se organizan a partir de las relaciones que se establecen entre ellos y en torno a una categoría central.

Las interpretaciones del investigador se basan en los datos y se validan contra otros datos, de manera que permanecen en constante escrutinio.

El aspecto central de la teoría es explicar el fenómeno investigado a partir de los conceptos que el investigador (mediante su interpretación) extrajo de los datos, los que define considerando lo que los participantes vivencian e interpretan. Para ello se busca que los conceptos integren las condiciones (las razones del participante) en que se lleva a cabo la acción–interacción (el proceder del participante) y las consecuencias generadas (resultados de la acción-interacción), y que permitan así, explicar el fenómeno en que se afana el investigador.

De modo que, en el marco de la Teoría Fundamentada, para construir teoría es necesario ligar la acción-interacción a las condiciones en que ésta ocurre, es decir, relacionarla con las condiciones a las cuales las personas responden cuando actúan, así como a los resultados que surgen cuando ciertas acciones e interacciones son tomadas. Al conectar la acción-interacción y las consecuencias con las condiciones hacemos posible que una teoría explique. (Corbin & Strauss, 2015).

En la Teoría Fundamentada, el muestreo teórico es un método flexible de recolección de datos cuyo propósito es poner a prueba los conceptos desarrollados en las etapas iniciales de la investigación con la intensión de robustecerlos en términos de sus propiedades y dimensiones, develar variaciones e identificar relaciones entre ellos. Los autores sostienen que el muestreo teórico es esencial para construir una teoría profunda y amplia y, como se mencionó, su utilidad es poner a prueba las categorías que el investigador ha definido, ya sea con el propósito de readaptarlas y que permitan explicar más claramente el fenómeno, o para que dichas categorías adquieran mayor profundidad.

En esta forma de investigación cualitativa, los diagramas son herramientas analíticas, representaciones visuales de las relaciones entre conceptos cuya finalidad es facilitar el proceso de análisis y, ya que son conceptuales, ayudan al investigador a pensar más allá del nivel de la descripción. (Corbin & Strauss, 2015).

En la presente investigación, la Teoría Fundamentada constituyó una poderosa herramienta que coadyuvó al análisis de los datos e identificación de patrones.

Si bien la finalidad de la Teoría Fundamentada es explicar, y las categorías definidas en el presente trabajo permiten dar cuenta del fenómeno investigado, es importante precisar que no por ello se considera que esta investigación constituye teoría *per se*, aunque sí se juzga como un avance en la conformación del marco teórico que busca explorar el fenómeno del convencimiento y se reconoce que la metodología propuesta por Corbin & Strauss proporcionó pautas claras para investigar el fenómeno propuesto

4.2. SOBRE LOS SUJETOS QUE PARTICIPARON EN LA INVESTIGACIÓN

La toma de datos se llevó a cabo en la Ciudad de México en dos escuelas dependientes de recursos públicos que, si bien tienen importantes diferencias entre sí, la distinción más significativa estriba en la disciplina y exigencia académica bajo la que se encuentran los estudiantes de la Escuela 2 –e. g., permanecen en la escuela 12 horas al día-, hecho que se refleja en el éxito que los alumnos solían obtener en la Prueba ENLACE (acostumbraban colocarse en el primer lugar de la Ciudad de México) y en los logros que consiguen sus egresados en el examen de la Comipems. En contraste y con la mitad de horario escolar, los resultados de la Escuela 1 en la Prueba ENLACE la solían ubicar entre los primeros 150 lugares de las escuelas de la Ciudad de México.

En ambos planteles los participantes son alumnos del 3er. grado de Secundaria (14 – 15 años de edad); en la Escuela 1 los integrantes del estudio fueron siete mujeres y cinco hombres mientras que en la Escuela 2, cinco y once respectivamente. La elección de los sujetos quedó en manos de los profesores titulares de la asignatura de matemáticas y, mientras que en la Escuela 1 no se plantearon especificaciones, en la 2 explícitamente se solicitó que fuesen los de mejor desempeño en la materia.

Es de suma importancia señalar que en la Escuela 1 la toma de datos se realizó a principios de diciembre del 2014 y en la Escuela 2 a finales de mayo y principios de junio del 2015. En el tiempo transcurrido entre las visitas a una y otra institución, se desarrollaron categorías que dieron cuenta de las estrategias realizadas por los estudiantes en sus producciones; las mencionadas categorías se pusieron a prueba con el trabajo realizado por los participantes de la Escuela 2, por lo tanto, la segunda recogida de datos se considera un muestreo teórico.

La decisión de considerar dos contextos escolares y participantes con características tan disímiles se tomó con la idea de que la investigación incluyera sujetos heterogéneos, que permitiesen recabar los datos más pertinentes y diversos para el estudio y, así, poder dar respuesta a la pregunta de investigación.

Los datos que se reportan en esta tesis se recabaron mediante un cuestionario. Del análisis de dichos cuestionarios se eligió a catorce participantes a quienes se realizaron, a la postre, entrevistas; es menester informar que, aunque la información obtenida en ellas ha sido sometida a escrutinio, los hallazgos surgidos de las mismas serán reportados en trabajos futuros.

4.3. SOBRE EL CUESTIONARIO ESCRITO

En el cuestionario se proporcionó, a cada estudiante, tres calendarios de años distintos, un instrumento con cuatro tareas retomadas de la investigación realizada por Martínez y Pedemonte (2014) y una serie de preguntas. Las cuatro tareas se describen a continuación.

Problema 1

Realiza con pluma (en el papel que se te proporciona) todas las anotaciones y operaciones que consideres necesarias (no borres ni taches nada).
Recuerda que en matemáticas la *diferencia* es el resultado de una resta y el *producto* el resultado de una multiplicación.
Problema 1
I.)Considera un cuadrado de dos días por dos días (como el que se muestra en la imagen a continuación) en cualquier mes de los tres diferentes calendarios que se te proporcionaron.

Abril						
Do	Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sa
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

Por ejemplo, en este caso el cuadrado estará formado por los números:

1 2
8 9

Llamaremos a estos cuadrados 2x2.
Calcula el producto de los números que están en los extremos de las diagonales (*1•9* y *2•8*), después calcula la diferencia de esos productos (producto de *1•9* – producto de *2•8)*

II.) Elige tantos cuadrados 2x2 que quieras (en cualquier mes de los diferentes calendarios que se te proporcionaron) y encuentra qué pasa con las diferencias de los productos de sus extremos.

Problema 2

Realiza con pluma (en el papel que se te proporciona) todas las anotaciones y operaciones que consideres necesarias (no borres ni taches nada).
Problema 2
I.) Considera un cuadrado de tres días por tres días (como el que se muestra en la imagen a continuación) en cualquier mes de los tres diferentes calendarios que se te proporcionaron

Mayo						
Do	Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sa
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

Calcula:
a) La suma de los números ubicados en el extremo superior izquierdo y el extremo inferior derecho.
b) La suma de los números correspondientes al extremo superior derecho y el extremo inferior izquierdo.
c) Al número obtenido en el inciso ***a*** réstale el encontrado en el inciso ***b***. Este es tu resultado.
II.) Elige cuadrados 3x3 en cualquier mes de los diferentes calendarios que se te proporcionaron y sigue los pasos de los incisos ***a***, ***b*** y ***c*** para encontrar qué pasa con los resultados. Usa los meses y los calendarios que quieras.

En los problemas 3.1 y 3.2 se consideraron cuadrados 4x4; las indicaciones proporcionadas para ellos fueron las mismas que en las tareas 1 y 2 respectivamente. De forma verbal se pidió a los alumnos que dejaran rastro escrito de sus producciones y que ejecutaran cada ejercicio tantas veces como lo considerasen necesario antes de solicitar a la investigadora que les entregase una segunda hoja con preguntas. Las interrogantes, mediante las cuales justificaron su resultado y expresaron el convencimiento que sintieron en relación a la estrategia empleada y a su resolución, son las siguientes:

2.) Responde las preguntas:

a) Calcula para distintos cuadrados 2x2 ¿Qué observas?

b) ¿En algunos casos la diferencia es menor, mayor o en todos los casos es igual?

c) ¿Por qué crees que sucede lo que tú afirmas?

d) ¿Cómo podrías demostrar que siempre pasa lo que afirmas? Es decir ¿Cómo podrías convencer matemáticamente a otra persona eso sucede para **cualquier** cuadrado 2x2 de **cualquier** calendario?

e) ¿Cómo se lo explicarías a alguien que sabe matemáticas?

f) ¿Qué tan convencido te sientes de que la forma en que resolviste el problema es la correcta? Marca la opción correspondiente

Nada seguro	Poco seguro	Medio seguro	Seguro	Completamente seguro

La toma de datos se realizó dentro de las instalaciones de cada institución y durante el horario escolar, aunque no específicamente en el tiempo programado para la clase de matemáticas. Para la aplicación de las pruebas se reunió, diariamente durante una hora, a todos los sujetos en un área distinta al salón de clases, en ella cada uno trabajó individualmente y a su propio ritmo. A la primera institución se acudieron siete días consecutivos mientras que a la segunda sólo seis.

En los siete días que duró la toma de datos en la Escuela 1, sólo seis de los doce participantes resolvieron (desde su perspectiva) los cuatro planteamientos propuestos; en comparación, los seis días de toma de datos en la Escuela 2 bastaron para que todos los participantes concluyeran (desde su visión) los mismos ejercicios.

4.4. SOBRE LA ENTREVISTA

Como se mencionó anteriormente, aunque no forman parte de los hallazgos reportados, se realizaron entrevistas a participantes cuyas trayectorias de resolución en el cuestionario fuesen demostrativas de las distintas categorías y niveles de convencimiento; es decir, el análisis de los cuestionarios fue de suma importancia para elegir a los participantes con los que se conversó.

Las entrevistas, de tipo semi-estructurado (Corbin & Strauss, 2015), se orientaron por la pregunta de investigación. Los encuentros se llevaron a cabo en distintos días y horarios, en instalaciones del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados- CINVESTAV (excepto dos que fueron en casa de los participantes en cuestión); con autorización de los padres de los estudiantes se video y audio grabaron las reuniones.

De nueva cuenta, es pertinente señalar que los datos obtenidos de las entrevistas formarán parte de trabajos futuros.

CAPÍTULO 5: RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN, FASE UNO

En este capítulo, se definen las categorías que permiten dar cuenta de las estrategias con que los participantes solucionaron las tareas propuestas, se describe el proceso mediante el cual se contruyeron las mismas y se presentan ejemplos representativos de dichas categorías. Además se analiza la regularidad de las mismas y se infieren ciertas explicaciones para las incidencias descritas.

Con ello, se exponen los resultados relacionados a la Primera Fase de la investigación, vinculada a la pregunta:

i. ¿Cuáles son las estrategias recurrentes de los estudiantes de secundaria?

Es importante enfatizar que la caracterización de las categorías fue resultado de un análisis reiterado de los datos empíricos que llevó a redefiniciones sucesivas dando, como resultado final, las categorías que en esta investigación se presentan.

5.1. ANÁLISIS DE LAS PRODUCCIONES MEDIANTE EL MODELO DE TOULMIN Y DEFINICIÓN DE CATEGORÍAS.

El proceso de construcción de categorías que da cuenta del fenómeno investigado consiste en un escrutinio permanente y minucioso mediante el que se revisan los datos empíricos con que se trabaja. Como paso inicial, y siguiendo las orientaciones de la Teoría Fundamentada, se revisaron una y otra vez los datos empíricos para obtener familiaridad con ellos. Para el análisis de los datos se empleó básicamente una herramienta de la Teoría Fundamentada, las comparaciones constantes, en las que a partir de la identificación de semejanzas y diferencias en los datos, se distinguen patrones en ellos. A tales patrones se les nombra con ciertas etiquetas cuyo punto de cohesión es, justamente, el fenómeno que se investiga.

Con la mira en las etiquetas, que representan los patrones identificados, el investigador regresa a sus datos y los coteja con las etiquetas definidas; de ahí surgirá un nuevo conjunto de etiquetas; en una segunda vuelta, y ahora con la vista en el conjunto de etiquetas y tomado éste como objeto de reflexión, las etiquetas se ordenan (de acuerdo al nivel de generalidad de las estrategias, a su complejidad, al dominio aritmético o algebraico), se busca que no hay traslapes entre ellas, con la finalidad deque permitan dar cuenta, de mejor manera, del fenómeno sometido a escrutinio.

El investigador se mueve, permanentemente entre sus datos y las etiquetas (categorías) definidas hasta que éstas: 1) Tengan coherencia interna; 2) Sean claras en similitudes y diferencias; 3) Den cuenta de la totalidad de los datos.

A continuación se detalla la forma en que se realizaron los análisis de Toulmin de las producciones de los alumnos participantes del estudio y la forma en que se construyeron las categorías que en esta investigación se presentan.

Antes de analizar las producciones de los estudiantes mediante el modelo de Toulmin, se hizo una revisión general de todas ellas. En dicha exploración se inspeccionó, por completo, el camino que recorrió cada estudiante desde la tarea 1 hasta la tarea 3.2; al hacerlo, se buscó visualizar su actuar, las afirmaciones que emanaron del mismo y en general, el trayecto por el que avanzaron desde su primera interacción con las tareas, hasta la forma como dieron por culminada la última de ellas. Al concluir con un alumno, se siguió con otro y así, sucesivamente, hasta finalizar con los doce.

Una vez adquirida cierta familiaridad con los datos, gracias a la exploración de las producciones, fue posible comenzar con el análisis de los argumentos con base en el modelo de Toulmin. En él, las sentencias emitidas por cada participante se registraron como las conclusiones o afirmaciones (C), el origen de las mismas se consideraron los datos (D) y la seguridad explicitada se plasmó en el Calificador (Q).En un comienzo, las garantías se retomaron del trabajo de Martínez y Pedemonte, además se esbozaron ideas que se consideraron implícitas en la afirmación de los estudiantes; por otro lado, se juzgó que, al ser los respaldos (B) certezas en las cuales se soporta la veracidad de las garantías, estos debieran ser el área matemática en la que los alumnos soportaron su argumento. Con base en lo anterior, a continuación se presenta un ejemplo del primer análisis de los argumentos de las producciones de los estudiantes.

Tabla 1. Extracto del trabajo del participante 2 de la Escuela 1. Argumento 1 de la tarea 2.

<table>
<tr>
<td rowspan="2">D1
a) Resultados de casos particulares
<table><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>8</td><td>9</td></tr></table>
9-16=-7
<table><tr><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>10</td><td>11</td></tr></table>
33-40=-7
<table><tr><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>12</td><td>13</td></tr></table>
65-72=-7
<table><tr><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>9</td><td>10</td></tr></table>
20-27=-7
<table><tr><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>11</td><td>12</td></tr></table>
48-55=-7
<table><tr><td>9</td><td>10</td></tr><tr><td>16</td><td>17</td></tr></table>
153-160=-7</td>
<td>G:
Si la diferencia es la misma en algunos casos, entonces siempre será ese el resultado
Si funciona para casos particulares, entonces funciona en todos los casos
Generalización a partir de resultados particulares. Patrón de regularidad en el resultado</td>
<td rowspan="2">Q:
Aún no escribe su grado de confianza</td>
<td rowspan="2">C1
El resultado siempre es 7, en todos casos es igual</td>
</tr>
<tr>
<td>B: Aritmético</td>
</tr>
</table>

Al culminar el análisis de todas las producciones de los doce participantes, resultó notorio que muchas de las afirmaciones eran erradas y, por ello, se evaluó pertinente incorporar un espacio en el cual se registraran las fallas en las que el alumno incurrió.

Tabla 2. Extracto del trabajo del participante 2 de la Escuela 1. Argumento 1 de la tarea 2

<table>
<tr>
<td rowspan="2">D1
a) Resultados de casos particulares
<table><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>8</td><td>9</td></tr></table>9-16=-7
<table><tr><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>10</td><td>11</td></tr></table>33-40=-7
<table><tr><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>12</td><td>13</td></tr></table>65-72=-7
<table><tr><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>9</td><td>10</td></tr></table>20-27=-7
<table><tr><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>11</td><td>12</td></tr></table>48-55=-7
<table><tr><td>9</td><td>10</td></tr><tr><td>16</td><td>17</td></tr></table>153-160=-7</td>
<td>G:
Si la diferencia es la misma en algunos casos, entonces siempre será ese el resultado
Si funciona para casos particulares, entonces funciona en todos los casos
Generalización a partir de resultados particulares. Patrón de regularidad en el resultado</td>
<td rowspan="2">Q:
Aún no escribe su grado de confianza

D o F:
Pese a que en los casos particulares escribe bien el resultado, en la afirmación cambia el signo.
El resultado es -7</td>
<td rowspan="2">C1
El resultado siempre es 7, en todos casos es igual</td>
</tr>
<tr>
<td>B: Aritmético</td>
</tr>
</table>

Con una mejor comprensión de las fallas cometidas por los estudiantes a lo largo de todas sus producciones y, con la intención de clarificar la interpretación hecha de los datos, se incorporó una columna (E) en la cual se hizo explícita dicha interpretación.

Tabla 3. Extracto del trabajo del participante 2 de la Escuela 1. Argumento 1 de la tarea 2

<table>
<tr>
<td rowspan="2">D1:

a)

1 | 2
8 | 9
9-16=-7
3 | 4
10 | 11
33-40=-7
5 | 6
12 | 13
65-72=-7
2 | 3
9 | 10
20-27=-7
4 | 5
11 | 12
48-55=-7
9 | 10
16 | 17
153-160=-7</td>
<td rowspan="2">E1

a) Análisis de resultados de casos particulares</td>
<td>G:

Generalización a partir de resultados particulares.

Patrón de regularidad en el resultado</td>
<td rowspan="2">Q:

Aún no escribe su grado de confianza

D o F:

Pese a que en los casos particulares escribe bien el resultado, en la afirmación cambia el signo.

El resultado es -7</td>
<td rowspan="2">C1

El resultado siempre es 7, en todos casos es igual</td>
</tr>
<tr>
<td>B: Aritmético</td>
</tr>
</table>

Debido a las ventajas que representa en el modelo 3v para comprender la interpretación que hace un individuo de la variable, en las afirmaciones en las que los participantes trabajaron algebraicamente, se incorporaron (en las garantías) los usos de la variable que, implícitamente, dieron los alumnos a sus literales. Así mismo, se habían afinado las ideas respecto a las garantías y ya sólo se usaban las ideas de Martínez y Pedemonte.

Tabla 4. Extracto del trabajo del participante 4 de la Escuela 1. Argumento 3 de la tarea 3.1

D3: $\{(x)(x+24)-[(x+3)(x+18)]\}=-63$ $\{(x^2+24x)-[(x^2+18x+3x+54\}=-63$	E3: a) D1 →C1 b)Operar algebraicamente C3	G: Patrón de procesos a partir de la identificación de una regularidad. I1. Reconocer e identificar, en una situación problemática, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema. I5. Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones. G1. Reconocer patrones y percibir reglas y métodos, en secuencias y en familias de problemas. G2. Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor. G4. Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica. Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales. B: Algebraico	Q: Medio Seguro D o F: La expresión (x+18) no representa al extremo inferior izquierdo. Al operar con las literales se percata del error.	C3 $\{(x)(x+24)-[(x+3)(x+18)]\}=-63$

Con mayor claridad de lo realizado por cada estudiante (individual y grupalmente), se juzgó pertinente dejar de incluir los usos de la variable (considerados en el modelo 3v) de los análisis de las producciones, esto con la intención de mejorar las garantías.

Tabla 5. Extracto del trabajo del participante 4 de la Escuela 1. Argumento 3 de la tarea 3.1

D3: $\{(x)(x+24)-[(x+3)(x+18)]\}=-63$	E3: a) D1 →C1 b)Operar algebraicamente C3	G: Patrón de procesos a partir de la identificación de una regularidad.	Q: Medio Seguro	C3
		B: Algebraico	D o F: La expresión (x+18) no representa al extremo inferior izquierdo. Al operar con las literales se percata del error.	

Ante cada adecuación descrita, se hizo una nueva y completa revisión de todas las producciones de los doce participantes de la Escuela 1;esto permitió identificar diversas regularidades en el proceder de los alumnos.

En todas estas adecuaciones se usó sistemáticamente la herramienta de las comparaciones constantes entre los datos, tomada de la Teoría

Fundamentada de Corbin y Strauss (2015). Específicamente los datos se 'rompieron' para identificar semejanzas y diferencias, a partir de lo cual se identificaron regularidades o patrones, a los que se les asoció con etiquetas conceptuales o categorías.

De esta forma, en una primera instancia, surgieron las categorías iniciales:

ArR: Conclusión aritmética basada en generalización de casos particulares.

ArP: Conclusión aritmética basada en generalización de procesos.

AlP: Generalización algebraica basada en procesos.

AlrP: Generalización algebraica basada en resultados y procesos.

Con la cual, se inició la clasificación de los argumentos de los alumnos y un conteo de los mismos.

Tabla 6. Primera categorización de las afirmaciones realizadas por los participantes de la Escuela 1 al resolver la tarea 3.2

Afirmación	1		2		3	
Participante	Categoría	Q	Categoría	Q	Categoría	Q
1	ARR	MS	ARP	MS	ALP	MS
2	Hizo 2 casos particulares y no respondió cuestionario					
3	No lo realizó					
4	ARR	S	ALP	S		
5	No lo realizó					
6	ARR	CS	ARP	CS	ALP	CS
7	ARR		ARP		ALP	CS
8	Hizo 3 casos particulares y no respondió cuestionario					
9	ALRP	S	ALRP	S	ALRP	S
10	ARR	S	ALRP	S		
11	ARR	S	ARP	S	ALP	S
12	No lo realizó					

Con la idea de incrementar la comprensión del trabajo realizado por los alumnos, al análisis de los argumentos (mediante las categorías esbozadas) se incluyó el número de literales utilizadas en las conclusiones algebraicas.

Tabla 7. Categorización (incluyendo literales) de las afirmaciones realizadas por los participantes de la Escuela 1 al resolver la tarea 3.2

Afirmación	1			2			3		
Participante	Cat.	Q	Lit.	Cat.	Q	Lit.	Cat.	Q	Lit.
1	ARR	MS		ARP	MS		ALP	MS	4
2	Hizo 2 casos particulares y no respondió cuestionario								
3	No lo realizó								
4	ARR	S		ALP	S	1			
5	No lo realizó								
6	ARR	CS		ARP	CS		ALP	CS	1
7	ARR			ARP			ALP	CS	2
8	Hizo 3 casos particulares y no respondió cuestionario								
9	ALRP	S	1	ALRP	S		ALRP	S	
10	ARR	S		ALRP	S	1			
11	ARR	S		ARP	S		ALP	S	4
12	No lo realizó								

Posterior a la consideración del número de literales utilizadas, se revisó el trabajo de los participantes para identificar si la deducción de las afirmación involucró manipulación de las variables o, simplemente, una simbolización. Con dicha información, a las tablas ya elaboradas, se anexaron otras en las que se concentraron tales datos.

Tabla 8. Tabla que sintetiza la introducción, número y manipulación de literales en los argumentos construídos por los participantes de la Escuela 1 en la tarea 3.2

ALUMNO			
	ARG.	# LIT.	MAN.
1	3	4	NO
2			
3			
4	2	1	SI •
5			
6	3	1	SI •
7	3	2	NO
8			
9	2	1	NO
10	2	1	NO
11	3	4	NO
12			

- CORRECTAMENTE

Con las categorías mencionadas, se realizaron (primero manual, en hoja milimétrica, y despuès electrónicamente) las trayectorias de cada uno de los participantes a lo largo de las 4 tareas.

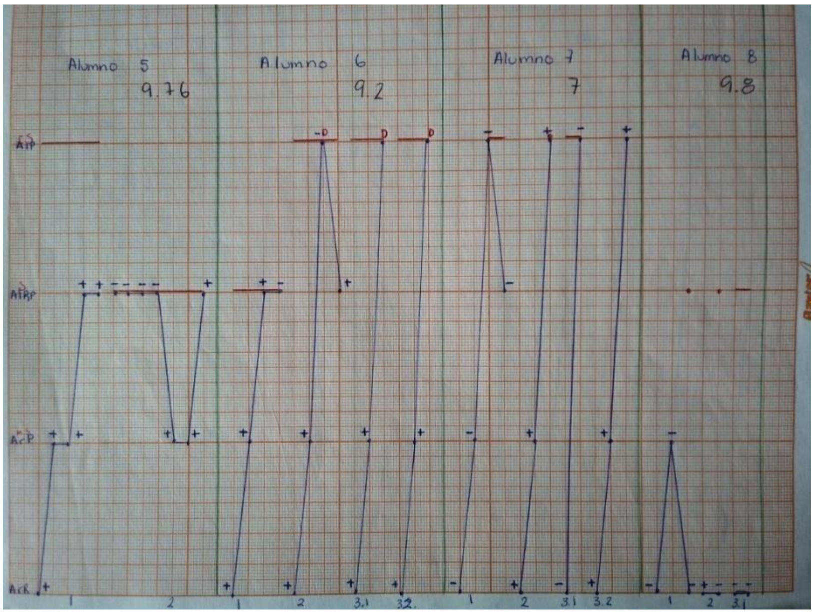

Figura 1. Trayectoria (manual) de los participantes 5, 6, 7 y 8 de la E 1.

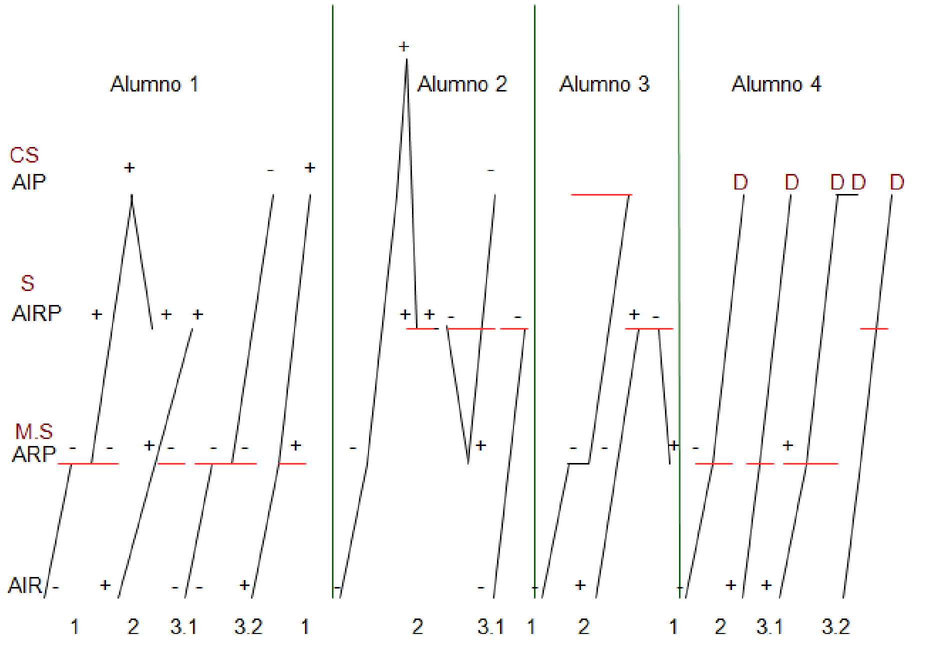

Figura 2. Trayectoria (electrònica) de los participantes 5, 6, 7 y 8 de la E 1.

Con la intensión de ahondar en las producciones de los estudiantes, se incluyó la veracidad del argumento mediante el signo (–) para señalar afirmaciones erradas y se hizo un primer trabajo de conteo de los distintos tipos de afirmaciones y el porcentaje (dentro de la tarea) que representaban.

Tabla 9. Nùmero de argumentos de cada categoría y porcentaje que representan (dentro de la tarea).

ArR		**ArP**		**AIRP**		**AIP**		**TOTAL**	
-		**-**		**-**		**-**		**-**	
0	**6**	**0**	**4**	**4**	**0**	**0**	**5**	**2**	**17**
	32%		**21%**	**22%**			**21%**	**11%**	**89%**

Con mayor claridad de las similitudes y diferencias entre las estrategias elaboradas por los alumnos, se realizó la siguiente caracterización de las categorías:

Expresiones aritméticas basadas en los resultados

No se reconocen los datos como desconocidos y no hay nada de álgebra. Toman un conjunto de datos específicos y sobre ellos hacen las operaciones. No hay una distinción de un caso genérico a partir del cual generalizar y obtener resultados. Se quedan en el terreno totalmente aritmético.

Expresiones aritméticas basadas en el proceso

Reconocen en lenguaje natural la relación de los números involucrados en el ejercicio y la relacionan con el resultado obtenido.

Expresiones algebraicas basadas en resultados y procesos

*** ALRP (e)(v)**

Lo invariante:

Reconocer los datos desconocidos

Simbolizar los datos desconocidos (con una, dos o cuatro variables)

Reconocer relaciones y patrones entre datos desconocidos

Simbolizar relaciones y patrones entre datos desconocidos

<u>**Lo que varía en la categoría:**</u>

<u>**Una, dos o cuatro variables**</u>

<u>**Establecer ecuaciones con base en esas relaciones y patrones**</u>

Lo que no hacen:

Manipular algebraicamente

Deducir el valor de la variable

Expresiones algebraicas basadas en el proceso

*** ALP(e)(v)(pal)(cp)**

*** ALP (d)**

Lo que varía dentro de la categoría

<u>**Establecer ecuaciones con base en esas relaciones y patrones**</u>

<u>**Una, dos o cuatro variables**</u>

<u>**Simbolizar algebraicamente patrones**</u>

<u>**Cálculo de la variable: casos particulares, o deducción**</u>

Lo que hacen todos: lo invariante en la categoría

(*Reconocer los datos desconocidos*)

(*Simbolizar los datos desconocidos*) (con una, dos o cuatro variables)

(*Reconocer relaciones y patrones entre datos desconocidos en lenguaje natural*)

Al regresar al trabajo de los participantes y cotejar las categorías definidas con ellos, surgieron piezas que se debían considerar al redefinir las categorías; así, se delimitaron de la siguiente forma:

CATEGORÍAS

Expresiones aritméticas basadas en los resultados

No se reconocen los datos desconocidos y no hay presencia de álgebra. Los sujetos consideran un caso compuesto de datos específicos y sobre ellos hacen las operaciones. No hay una distinción de un caso genérico a partir del cual generalizar y obtener resultados. Permanecen en el terreno totalmente aritmético.

Expresiones aritméticas basadas en el proceso

Explicitan en lenguaje natural las relaciones genéricas de los números involucrados en el ejercicio y las correlacionan con el resultado obtenido.

Expresiones algebraicas basadas en resultados y procesos

*** ALRP (e)(v)**

Lo invariante:

Reconocen los datos desconocidos

Simbolizan los datos desconocidos (con una, dos o cuatro variables)

Reconocen relaciones y patrones entre datos desconocidos

Simbolizan relaciones y patrones entre datos desconocidos

Validan su afirmación aritméticamente.

Inducen el resultado con base en los casos particulares.

Lo que varía en la categoría:

Una, dos o cuatro variables

Establecer ecuaciones con base en esas relaciones y patrones

Manipular algebraicamente

Lo que no hacen:

Deducir el valor del resultado

Expresiones algebraicas basadas en el proceso

*** ALP(e)(v)(cp)**

*** ALP (d)**

Lo que varía dentro de la categoría:

Establecer ecuaciones con base en esas relaciones y patrones

Una, dos o cuatro variables

Cálculo de la variable: casos particulares, o deducción

Lo que hacen todos: lo invariante en la categoría

Reconocen los datos desconocidos

Simbolizan los datos desconocidos (con una, dos o cuatro variables)

Reconocen relaciones y patrones entre datos desconocidos

Simbolizan relaciones y patrones entre datos desconocidos

No validan su afirmación aritméticamente.

Con dicha caracterización nuevamente se realizaron comparaciones constantes entre categorías y datos, de forma que se revisaron, reclasificaron, recontaron las afirmaciones y se comenzaron a explorar porcentajes tanto de respuestas veraces, como de incidencia de afirmaciones en cada categoría.

Tabla 10. Categorización de las afirmaciones realizadas por los participantes de la Escuela 1 al resolver la tarea 3.2

A \ E	1			2			3		
1	ArR	MS		ArP	MS		AlP**(e)(4)(cp)**	MS	4
2	Hizo 2 casos particulares y no respondió cuestionario								
3	No lo realizó								
4	ArR	S		AlP**(d)**	S	1			
5	No lo realizó								
6	ArR	CS		ArP	CS		AlP**(d)**	CS	1
7	ArR			ArP			AlP**(e)(2)(cp)**		2
8	Hizo 3 casos particulares y no respondió cuestionario								
9	AlRP- **(e)(1)**	S	1	AlRP	S		AlRP	S	
10	ArR	S		AlRP**- (1)**	S	1			
11	ArR	S		ArP	S		AlP**(e)(4)**	S	4
12	No lo realizó								

Con la intención de que los nombres de las categorías denotasen la complejidad de las estrategias desarrolladas de una forma rápida y fácilmente perceptible, se cambiaron los nombres de la siguiente manera:

Tabla 11. Forma en que se renombraron las categorías definidas.

Categoría inicial	Categoría actual
ArR	1.1
ArP	1.2
AlRP	2
ALP (e) (v) (cp)	3
ALP (d)	4

Con dichas categorías, se revisó la trayectoria de resolución de cada uno de los doce participantes ynuevamente se elaboraron diagramas que las representasen.

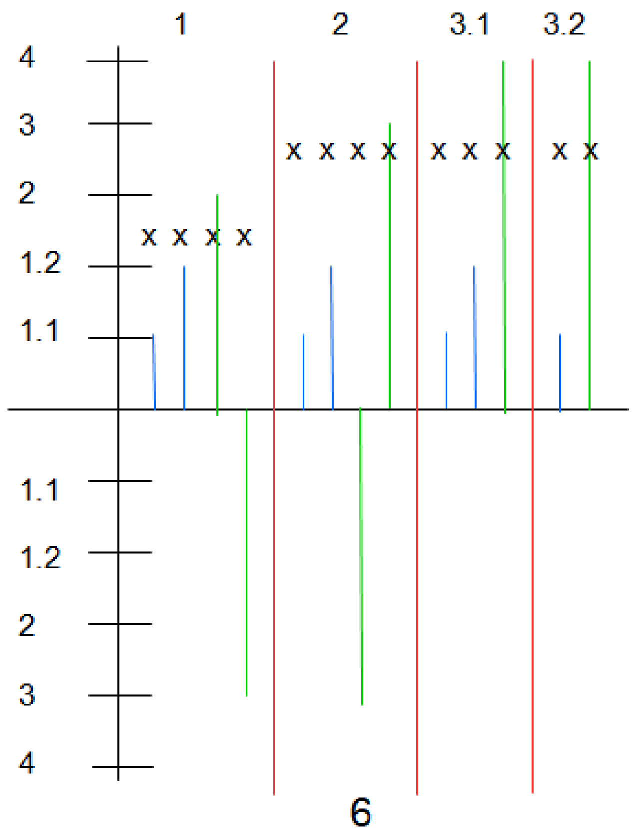

Figura 3. Trayectoria del participante 6 de la Escuela 1 con base en las categorías renombradas.

Tras comparar, de nueva cuenta, las categorías con los datos, la versión que se tuvo de ellas, al acudir a la Escuela 2 a realizar el muestreo teórico, fue la siguiente:

1. *Aritmética como herramienta de resolución. Inducción.* Resolución con base en casos particulares (puramente aritmético) (en las respuestas hay términos como 'siempre', 'en todos los casos').
   1.1. Sin reconocimiento de patrones
   1.2. Con reconocimiento explícito de patrones B: aritmético en transición al álgebra.
2. *Aritmética como herramienta de resolución/Álgebra como recurso complementario.Inducción*. En este caso, aunque el alumno recurre al álgebra (quizás por familiaridad) para intentar modelar ciertas regularidades (mediante una expresión general o ecuación con cuatro, dos o una literal) no hay manipulación algebraica para deducir el resultado; éste se obtiene mediante procesos aritméticos de sustitución de valores numéricos específicos
3. *Algebra como herramienta de resolución (Aritmética como recurso de validación). Deducción*. En este caso, el alumno recurre al álgebra para modelar el patrón (mediante una ecuación con una incógnita) y manipula algebraicamente para deducir el resultado, el cual valida a través de la sustitución numérica.
4. *Algebra como herramienta de resolución y de validación. Deducción.* En este caso, el alumno recurre al álgebra para modelar el patrón (mediante una ecuación con una incógnita) y manipula algebraicamente para deducir el resultado. No recurre a la aritmética para validar.

Como ya se mencionó anteriormente, el muestreo teórico se realizó al acudir a la Escuela 2 y recabar datos con la finalidad de que estos robustecieran las categorías.

De la misma forma en que se comenzaron a revisar las producciones de los participantes de la Escuela 1, el trabajo realizado por los alumnos de la Escuela 2 se exploró de principio a fin y, con la experiencia adquirida al realizar los análisis de Toulmin, se elaboraron los correspondientes a los datos del muestreo teórico.

Al analizar los datos obtenidos en la Escuela 2 y revisar las estrategias desarrolladas por los estudiantes con las categorías que se tenían, se hizo evidente que, si bien dichas categorías daban cuenta del total de las producciones de los participantes de la Escuela 1, no abarcaban completamente el trabajo de los alumnos de la Escuela 2.

Debido a lo anterior, de nueva cuente se llevaron a cabo exhaustivas revisiones en las que constantemente se compararon las producciones de los estudiantes con las categorías definidas y, al ubicar similitudes y diferencias en el proceder de los participantes, fue posible terminar de delimitar las categorías que en este documento se presentan.

5.2. CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

Con base en el descrito proceso de triangulación (Berteley, 2013) derivado del análisis funcional de los argumentos de los estudiantes, los conceptos de generalización provenientes de la bibliografía y las categorías que paulatinamente, como resultado de procesos iterativos se fueron construyendo durante el estudio, en el marco de esta investigación se definieron seis categorías que permiten dar cuenta de los resultados referentes a las estrategias que emplearon los estudiantes para solucionar las tareas de propuestas.

De las sucesivas redefiniciones, surgieron las categorías que a continuación se presentan.

5.2.1. DEFINICIÓN DE LAS CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

Las categorías definidas en este estudio fueron las siguientes:

1. *Aritmética como herramienta de resolución. Inducción.* Resolución con base en casos particulares (puramente aritmético) (en las respuestas hay términos como 'siempre', 'en todos los casos').
   1.1. Sin reconocimiento de patrones

   1.2. Con reconocimiento explícito de patrones.

2*. *Aritmética como herramienta de resolución/Álgebra como recurso de explicación. Inducción*. En este caso los alumnos explican, mediante una mezcla de lenguaje coloquial en el que involucran literales, el patrón que identificaron; sin embargo, pese a que (en algunos casos) los alumnos manifiestan el trabajo que habría de realizarse con las literales para solucionar la tarea y el resultado que obtendrían, no hay manipulación algebraica explícita. (G1) (G2) (G5).

2. *Aritmética como herramienta de resolución/Álgebra como recurso complementario. Inducción*. En este caso, aunque el alumno recurre al álgebra (quizás por familiaridad) para intentar modelar ciertas regularidades (mediante una expresión general o ecuación con cuatro, dos o una literal) no hay manipulación algebraica para deducir el resultado; éste se obtiene mediante procesos aritméticos que pueden ser de sustitución de valores numéricos específicos o con el reconocimiento del resultado en los casos particulares. (G1) (G2) (G5); (I5) (I3).
3. *Álgebra como herramienta de resolución (Aritmética como recurso de validación). Deducción*. En este caso, el alumno recurre al álgebra para modelar el patrón (mediante una ecuación con una incógnita) y manipula algebraicamente para deducir el resultado, el cual valida a través de la sustitución numérica (G1), (G2), (I5), (G4), (G3) y (I3).
4. *Álgebra como herramienta de resolución y validación. Deducción.* En este caso, el alumno recurre al álgebra para modelar el patrón (mediante una ecuación con una incógnita) y manipula algebraicamente para

deducir el resultado. No recurre a la aritmética para validar (G1), (G2), (I5), (G4), (G3).

5. *Extensión de la tarea. Deducción.* En esta categoría los alumnos trascienden lo solicitado en la tarea y amplían sus hallazgos a cuadrados de distintos tamaños y/ o suponen otros arreglos del calendario.

Cabe aclarar que a partir de la categoría 3, en la que se involucra la manipulación algebraica, en todos los casos los alumnos reconocen el patrón que se da en los números presentes en el calendario; por 'reconocimiento del patrón' se entiende que el alumno puede identificar las regularidades que se dan entre los números que aparecen en cualquier calendario, realiza las operaciones y, con base en esas regularidades, justifica sus resultados.

5.2.2. ILUSTRACIÓN DE LAS CATEGORÍAS EJEMPLIFICADAS CON PRODUCCIONES DE LOS ALUMNOS

A continuación se ilustra cada categoría con dos ejemplos representativos. Es pertinente señalar que los extractos utilizados no corresponden a un único participante, a una sola escuela y tampoco a una misma tarea.

Así mismo, conviene recordar que ***D*** alude a los datos de los cuales se deriva ***C***, que es la conclusión o afirmación explicitada por los participantes; el número que acompaña a dichas letras hace referencia al número ordinal que corresponde al argumento dentro de la tarea en que el estudiante se afanaba en ese momento. ***G*** constituye la garantía, es decir las reglas o principios (implícitos) que posibilitan las inferencias para pasar de D a C; ***B*** es el respaldo que, en este trabajo, es el área matemática en que la afirmación del participante se construyó, ***Q*** el nivel de seguridad explicitado por los participantes y ***F*** las erratas en que incurre la conclusión.

5.2.2.1. EJEMPLOS DE CATEGORÍA 1.1.ARITMÉTICA COMO HERRAMIENTA DE RESOLUCIÓN. INDUCCIÓN. SIN RECONOCIMIENTO DE PATRONES

Tabla 12. Extracto del trabajo del participante 8 de la Escuela 1. Argumento 1 de la tarea 2.

<table>
<tr>
<td rowspan="3">D1:
ENERO
<table><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td></tr><tr><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr></table>6 + 18 = 24
20 + 4 = 24
24-24=0

FEBRERO
<table><tr><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr><tr><td>15</td><td>16</td><td>17</td></tr><tr><td>22</td><td>23</td><td>24</td></tr></table>8 + 24 = 32
22 + 10 = 32
32-32=0

DICIEMBRE
<table><tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr><tr><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr><tr><td>20</td><td>21</td><td>22</td></tr></table>6 + 22 = 28
20 + 8 = 28
28-28=0

MARZO
<table><tr><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr><tr><td>15</td><td>16</td><td>17</td></tr><tr><td>22</td><td>23</td><td>24</td></tr></table>8 + 24 = 32
22 + 10 = 32
32-32=0</td>
<td rowspan="3">Categoría:
Aritmética como herramienta de resolución.

Interpretación:
a) Análisis de resultados de casos particulares.
b) Regularidades y resultados observados en el ejercicio previo.</td>
<td>G:
Inducción ligera a partir de casos particulares (sin patrones)</td>
<td rowspan="2">Q:
Aun no expresado</td>
<td rowspan="3">C1:
En todos los cuadrados 3x3 da 0 en cualquier mes.
En todos los casos es igual</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">B: Aritmético.</td>
</tr>
<tr>
<td>F:</td>
</tr>
</table>

Tabla 13. Extracto del trabajo del participante I de la Escuela 2. Afirmación 1 de la tarea 3.1

<table>
<tr>
<td rowspan="2">D1:
a)
1 * 25 = 25
4 * 22 = 88
2 5 – 88 = -63

2 5
23 26

2 * 26 = 52
23 * 5 = 115
52 – 115 =-63</td>
<td rowspan="2">Categoría:
Aritmética como herramienta de resolución.

Interpretación:
a) Análisis de resultados de casos particulares.
b) Regularidades y resultados observados en el ejercicio previo.</td>
<td>G:
Inducción ligera a partir de casos particulares (sin patrones)</td>
<td>Q:
Seguro</td>
<td rowspan="2">C1:
La diferencia de los extremos siempre es -63.</td>
</tr>
<tr>
<td>B: Aritmético.</td>
<td>F:</td>
</tr>
</table>

5.2.2.2. EJEMPLOS DE CATEGORÍA 1.2. ARITMÉTICA COMO HERRAMIENTA DE RESOLUCIÓN. INDUCCIÓN. CON RECONOCIMIENTO EXPLÍCITO DE PATRONES.

Tabla 14.Extracto del trabajo del participante IX de la Escuela 2. Argumento 2 de la tarea 3.1

<table>
<tr>
<td rowspan="2">D2:
b) La diferencia entre los números es 3. La resta entre el último y el primero de la fila es igual a 21 en todos. En todos los números al restarlos va a dar 24 y 16.</td>
<td rowspan="2">Categoría:
Aritmético como herramienta de resolución.

Interpretación:
a) D1 →C1
b) Regularidad en el calendario.</td>
<td>G:
Inducción a partir del reconocimiento de patrones en lenguaje coloquial</td>
<td>Q:
Completamente Seguro</td>
<td rowspan="2">C2 :
La diferencia de dichos productos será igual a -63.
En todos es igual</td>
</tr>
<tr>
<td>B: Aritmético.</td>
<td>F:</td>
</tr>
</table>

Tabla 15. Extracto del trabajo del participante 5 de la Escuela 1. Argumento 6 de la tarea 2

<table>
<tr>
<td rowspan="2">D6:
b)
Cada uno de los números son proporcionales con los de los extremos ya que si sumamos ambos se llevan una diferencia de 14 y 16.
Al aumentar 2 números en una cantidad el extremo inferior izquierdo disminuye 2 números, en cambio al disminuir la cantidad en 2 el extremo inferior derecho aumenta en 2 y es como da un mismo número que al restarlo da cero.</td>
<td rowspan="2">Categoría:
Aritmético como herramienta de resolución.

Interpretación:
a) D1 →C1
b) Regularidad en el calendario.</td>
<td>G:
Inducción a partir del reconocimiento de patrones en lenguaje coloquial</td>
<td>Q:
Seguro</td>
<td rowspan="2">C6:
Ambos resultados dan un mismo número y al restarlo da cero. En todos los casos es igual</td>
</tr>
<tr>
<td>B: Aritmético.</td>
<td>F:</td>
</tr>
</table>

5.2.2.3. EJEMPLOS DE CATEGORÍA 2*. ARITMÉTICA COMO HERRAMIENTA DE RESOLUCIÓN/ÁLGEBRA COMO RECURSO DE EXPLICACIÓN. INDUCCIÓN.

Tabla 16. Extracto del trabajo del participante XIV de la Escuela 2. Argumento 2 de la tarea 2.

<table>
<tr>
<td rowspan="2">D2:
b) Se da una compensación en la suma.
<table><tr><td>x</td><td>a</td><td>y</td></tr><tr><td>b</td><td>c</td><td>d</td></tr><tr><td>z</td><td>e</td><td>v</td></tr></table>La suma de x + v y y + z siempre concluye con números iguales, se da por esto:
x + 2 = y
y – 2 = x
z + 2 = v
v – 2 = z
x siempre es v–16
y siempre es z–12
x es dos dígitos menor a y, pero v es dos dígitos mayor a z, esto quiere decir que hay una compensación</td>
<td rowspan="2">CATEGORÍA:
Aritmética como herramienta de resolución/ Álgebra como recurso de explicación

Interpretación:
a) D1 →C1
b) Regularidad en el calendario.</td>
<td>G:
Inducción a partir de la identificación de patrones en lenguaje coloquial y algebraico</td>
<td>Q:
Completamente Seguro</td>
<td rowspan="2">C2:
La diferencia siempre es 0. En todos casos es igual.</td>
</tr>
<tr>
<td>B:
Aritmético en transición al álgebra</td>
<td>F:</td>
</tr>
</table>

Tabla 17. Extracto del trabajo del participante II de la Escuela 2. Argumento 2 de la tarea 3.1.

<table>
<tr>
<td rowspan="2">D2:

A n   B n+3

n+21 C   n+24 D

Si A=n, B=n+3, C=n+21 y D=n+24, los productos AD nos darán 3 términos con n como factor común mientras que BC tendrá un factor más que AD que es el término independiente y al restar ese término quedará como diferencia y siempre será el mismo.</td>
<td rowspan="2">CATEGORÍA: Aritmética como herramienta de resolución/ Álgebra como recurso de explicación

Interpretación:
a) D1 →C1
b) Regularidad en el calendario.</td>
<td>G: Inducción a partir dela identificación de patrones en lenguaje coloquial y algebraico</td>
<td>Q: Completamente Seguro</td>
<td rowspan="2">C2: La diferencia es de 63 en todos los casos.</td>
</tr>
<tr>
<td>B: Aritmético en transición al álgebra</td>
<td>F: En los casos particulares invierte minuendo y sustraendo, por ello obtiene un resultado positivo. De acuerdo a las instrucciones dadas, el resultado es -63</td>
</tr>
</table>

5.2.2.4. EJEMPLOS DE CATEGORÍA 2. ARITMÉTICA COMO HERRAMIENTA DE RESOLUCIÓN/ÁLGEBRA COMO RECURSO COMPLEMENTARIO. INDUCCIÓN.

Tabla 18. Extracto del trabajo del participante 10 de la Escuela 1. Argumento 2 de la tarea 2.

<table>
<tr>
<td rowspan="2">D2:
b)
<table><tr><td>x</td><td>x+1</td><td>x+2</td></tr><tr><td>x+7</td><td>x+8</td><td>x+9</td></tr><tr><td>x+14</td><td>x+15</td><td>x+16</td></tr></table>
c)
x=2
<table><tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>9</td><td>10</td><td>11</td></tr><tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td></tr></table>
((x+16)+(x))–
((x+2)+(x+14))
18 2 4 16
20 - 20
= 0</td>
<td rowspan="2">CATEGORÍA:
Aritmética como herramienta de resolución/Álgebra como recurso complementario

INTERPRETACIÓN

a) D1→C1
b) Regularidades en el calendario.
c) Sustitución de valores particulares en C2</td>
<td>G:
Inducción a partir de la identificación de patrones en lenguaje algebraico y uso de aritmética.</td>
<td rowspan="2">Q:
Seguro</td>
<td rowspan="2">C2:
((x+16)+(x)) – ((x+2)+(x+14)) = 0</td>
</tr>
<tr>
<td>B: Aritmético en transición al Álgebra</td>
</tr>
</table>

Tabla 19. Extracto del trabajo del participante VII de la Escuela 2. Argumento 2 de la tarea 3.1.

<table>
<tr>
<td rowspan="3">D3:
b)
<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td></tr><tr><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td></tr><tr><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr></table>
<table><tr><td>1=w</td></tr><tr><td>4 =x</td></tr><tr><td>22 =y</td></tr><tr><td>25 =z</td></tr></table></td>
<td rowspan="3">CATEGORÍA:
Aritmética como herramienta de resolución/ Álgebra como recurso complementario

Interpretación:

a) D1→C1
b) Regularidades en el calendario.</td>
<td rowspan="2">G:
Inducción a partir de la identificación de patrones en lenguaje algebraico y uso de aritmética.</td>
<td>Q:
Completamente Seguro</td>
<td rowspan="3">C3
wz – xy = -63</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">F:</td>
</tr>
<tr>
<td>B: Aritmético en transición al Álgebra</td>
</tr>
</table>

5.2.2.5. EJEMPLOS DE CATEGORÍA 3. ALGEBRA COMO HERRAMIENTA DE RESOLUCIÓN (ARITMÉTICA COMO RECURSO DE VALIDACIÓN). DEDUCCIÓN.

Tabla 20. Extracto del trabajo del participante 6 de la Escuela 1. Argumento 4 de la tarea 2.

<table>
<tr>
<td rowspan="2">D4:
a)
x $\leftrightarrow$ (x+2)
(x+14) $\leftrightarrow$ (x+16)

b)
(x+2)+(x+14)=2x+16
x+(x+16)=2x+16

c)
x = 1
1 $\leftrightarrow$ (1+2)= 3
15=(1+14) $\leftrightarrow$ (1+16)=17

3 + 15 = 18
1 + 17 = 18

(1+2)+(1+14)=2(1)+16
=2+16
=18

1+(1+16)=2(1)+16
=2+16
=18
18 – 18 = 0</td>
<td rowspan="2">CATEGORÍA:
Álgebra como herramienta de resolución / Aritmética como recurso de validación.

Interpretación:
a) Regularidades en el calendario.
b) Operar algebraicamente C4
c) Sustitución de valores particulares en C4.</td>
<td>G:
Deducción a partir de reglas algebraicas</td>
<td rowspan="2">Q:
Completamente Seguro</td>
<td rowspan="2">C4:
(2x+16)-(2x+16)=0</td>
</tr>
<tr>
<td>B:
Algebraico</td>
</tr>
</table>

Tabla 21. Extracto del trabajo del participante XII de la Escuela 2. Argumento 3 de la tarea 3.2.

D3:	CATEGORÍA:	G:	Q:	C3:
b) n . . n+3 . . . . n+2 . . n+2 1 4 c) (n)+(n+24) = (n+3)+(n+21) n^2 + 24 = n^2 + 24 0 = 0 d) Por ejemplo 1 . . 4 . . . . 22 . . 25 1 + 25 = 4 + 22 (1)+((1)+24)=(1)((1)+21) 26 = 26 0 = 0	Álgebra como herramienta de resolución / Aritmética como recurso de validación. Interpretación: a) D2 →C2 b) Simbolización algebraica de los extremos c) Manipulación algebraica de C3 d) Sustitución de valores específicos en C3	Deducción a partir de reglas algebraicas B: Algebraico	Completamente Seguro	(n) + (n+24) = (n+3) + (n+21)

5.2.2.6. EJEMPLOS DE CATEGORÍA 4. ALGEBRA COMO HERRAMIENTA DE RESOLUCIÓN Y VALIDACIÓN. DEDUCCIÓN

Tabla 22. Extracto del trabajo del participante XII de la Escuela 2. Argumento 3 de la tarea 2.

<table>
<tr>
<td rowspan="2">D3:
b)
<table><tr><td>n</td><td>n+1</td><td>n+2</td></tr><tr><td>n+7</td><td>n+8</td><td>n+9</td></tr><tr><td>n+14</td><td>n+15</td><td>n+16</td></tr></table>A = (n)+(n+16)
B = (n+2)+(n+14)
C = A – B =0

c)
n+(n+16)=(n+2)+(n+14)
2n+16=2n+16
2n–2n+16–16=0
0 = 0</td>
<td rowspan="2">Categoría:
Álgebra como herramienta de resolución y validación.

Interpretación:
a) D2 →C2
b) Simbolización algebraica de los extremos del cuadrado
c) Manipulación algebraica de C3</td>
<td>G:
Deducción a partir de las reglas del álgebra.</td>
<td rowspan="2">Q:
Seguro</td>
<td rowspan="2">C3:
n + (n+16) = (n+2)+(n+14)</td>
</tr>
<tr>
<td>B:
Algebraico</td>
</tr>
</table>

Tabla 23. Extracto del trabajo del participante 4 de la Escuela 1. Argumento 4 de la tarea 3.1.

D4: b) {(x)(x+24)-[(x+3)(x+21)]}=-63 {(x2+24x)-[(x2+18x+3x+63)]}=-63 {x2+24x-x2-21x-3x-63}=-63 -63=-63	Categoría: Álgebra como herramienta de resolución y validación. Interpretación: a) D3 →C3 b) Operar algebraicamente C4	G: Deducción a partir de las reglas del álgebra. B: Algebraico	Q: Medio Seguro	C4: {(x)(x+24)-[(x+3)(x+21)]}=-63

5.2.2.7. EJEMPLOS DE CATEGORÍA 5. EXTENSIÓN DE LA TAREA. DEDUCCIÓN.

Tabla 24. Extracto del trabajo del participante VII de la Escuela 2. Argumento 4 de la tarea 3.1

D4: a) Debido a los ejemplos anteriores, cuando los extremos se llevan una semana y un día y los medios igual, la diferencia es -7, cuando se llevan 2 semanas y dos días es -28, cuando es 3 s y 3 días es -63, siendo la sucesión y el patrón.	Categoría: Extensión de la tarea. Interpretación: a) Regularidades observadas en todos los ejercicios	G: Patrón de generalización a partir de la regularidad en el proceso B: Algebraico	Q: Completamente Seguro	C4: n^2 (-7)

Tabla 25. Extracto del trabajo del participante XIII de la Escuela 2. Argumento 5 de la tarea 3.1

D5 b) Encontré que si el calendario tuviera otro acomodo, por ejemplo, si la semana fuera de 9 días la diferencia en un cuadrado de 2x2 sería 9 y la regla de la sucesión sería $9n^2$. Entonces la regla para obtener la diferencias sería: ***a(n-1)²*** siendo ***a*** el número de días de la semana y n=lado del cuadrado.	Categoría: Extensión de la tarea. Interpretación: a) D4→C4.	G: Patrón de generalización a partir de la regularidad en el proceso B: Algebraico	Q: Seguro	C5: $a(n-1)^2$

5.3. ANÁLISIS DE RESULTADOS

En principio es importante destacar que el total de las afirmaciones hechas por los participantes de ambas escuelas es de 297, de las cuales 202 (68%) fueron correctas y 95 (32%) erróneas.

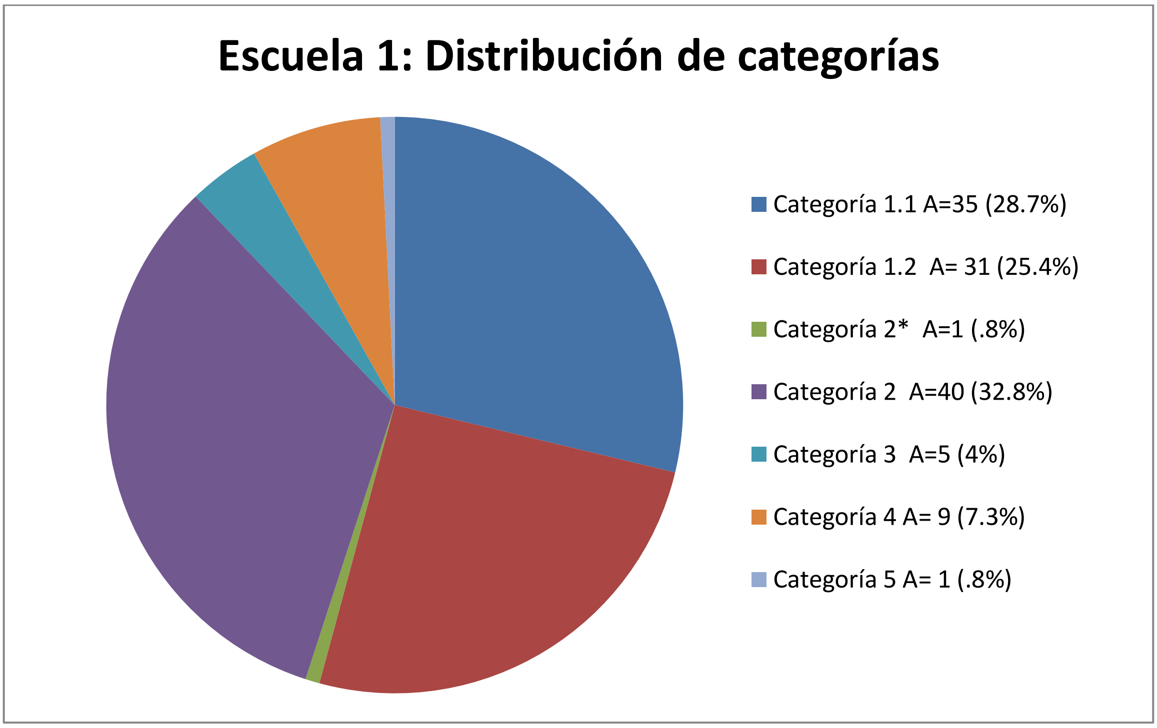

Gráfico 1. A: Número de argumentos

Específicamente, en la Escuela 1 se hicieron 122 afirmaciones (de todos los ejercicios resueltos) de las cuales 62 (51.6%) fueron correctas. La distribución del total de los argumentos en las categorías de análisis es la que muestra el gráfico 1.

Los argumentos en los que se involucra la deducción (correspondientes a las categorías 3, 4 y 5) representan apenas el 13% del total de las afirmaciones realizadas por los participantes de la Escuela 1. Claramente el grueso de las conclusiones explicitadas a lo largo de las tareas se encuentra en la categoría 2 (32.8%); aunque más de la mitad de los argumentos (54.1%) se ubican en las categorías 1'Aritmética como herramienta de resolución. Inducción' en la que los participantes generalizan basando sus afirmaciones en casos particulares y en procedimientos aritméticos únicamente.

Los alumnos de la Escuela 2 realizaron 175 afirmaciones, de las que 140 (80%) fueron acertadas y 35 (20%) erradas, es notorio el mayor porcentaje de conclusiones veraces en esta institución. El gráfico 2 evidencia el número de argumentos y el porcentaje asociado a cada categoría.

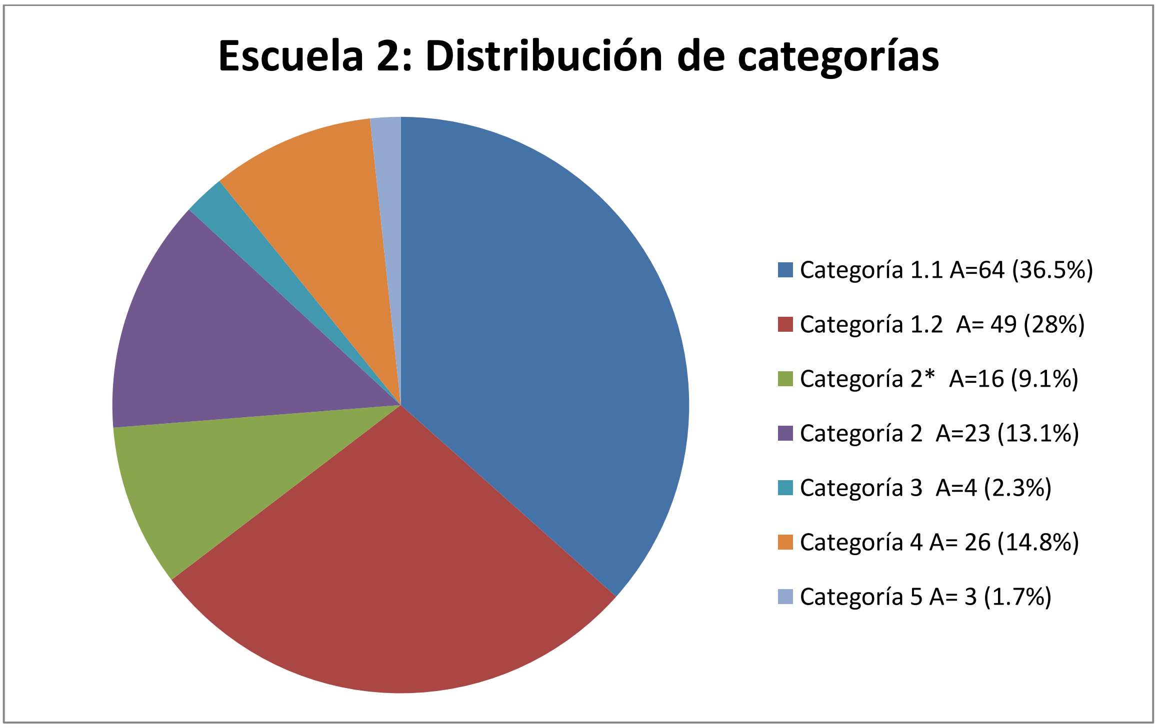

Gráfico 2. A: Número de argumentos

El porcentaje de afirmaciones ligadas a procesos deductivos (categorías 3, 4 y 5) del total de argumentos explicitados en la Escuela 2 es de 18.9% (50% mayor al encontrado en la Escuela 1); es importante destacar que las afirmaciones que involucran generalizaciones fundamentadas en el campo de la aritmética (categorías 1.1 y 1.2) constituyen un impresionante 64.5% y, por tanto, las conclusiones asociadas a la categoría 2 no representan el porcentaje mayor.

La tabla 26, que a continuación se presenta, recupera las frecuencias de los gráficos 1 y 2.

Tabla 26. Frecuencia de Argumentos por categoría en cada Escuela.

Categorías	Escuela 1	Escuela 2	Total
1.1	35	64	99
1.2	31	49	80
2*	1	16	17
2	40	23	63
3	5	4	9
4	9	16	25
5	1	3	4
TOTAL	122	175	297

Quizá sorprenda que 3 de cada 5 afirmaciones hechas por los participantes hayan sido construidas únicamente con fundamentos aritméticos (categorías 1.1 y 1.2) y que el 26.9% de las conclusiones involucren literales que no conllevan procesos deductivos (2* y 2). Sin embargo, el elevado porcentaje de afirmaciones en categorías 1.1 y 1.2 puede entenderse al considerar que los participantes comienzan su trabajo al operar con los números encontrados en los calendarios (naturales), de los que obtienen el mismo resultado en cada ocasión, lo que les lleva a identificar un patrón.

Con la finalidad de distinguir el punto con el que los participantes dieron por terminadas las distintas tareas, se llevó a cabo un análisis que sólo considera el último argumento construido en cada uno de los cuatro ejercicios.

La tabla 27 recupera la información correspondiente al último argumento (de cada una de las tareas) de los participantes de la Escuela 1. Es importante recalcar que sólo seis, de los doce participantes de dicha escuela, solucionaron las cuatro tareas del instrumento escrito.

Tabla 27. Último argumento de los participantes de la Escuela 1. Conteo de frecuencias por categoría.

Categoría	1.2		2*		2		3		4		5		Total		Total
Veracidad	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	
Tarea 1	-	-	-	-	5	4	1	1	1	-	-	-	7	5	12
Tarea 2	-	1	-	-	3	4	2	-	1	-	-	-	6	5	11
Tarea 3.1	-	-	-	-	1	4	-	-	2	1	-	-	3	5	8
Tarea 3.2	-	-	-	-	3	2	-	-	2	-	-	-	5	2	7
Total	-	1	-	-	12	14	3	1	6	1	-	-	21	17	38
Total de argumentos	1		-		26		4		7		-		38		

El total de argumentos acertados es de 55.2%. Sólo una de las 38 afirmaciones finales planteada por los participantes de la Escuela 1 finiquita la tarea con base en una estrategia cimentada puramente en el terreno aritmético (categoría 1.2). Es importante visualizar que en 26 de 38 argumentos (68.4%) los estudiantes recurren al álgebra sin que ésta les permita deducir el resultado (categoría 2) y destaca que más de la mitad de esas afirmaciones (14 de 26) sean equivocadas. Por otro lado, las conclusiones acertadas se incrementan considerablemente (9 de 11) cuando los estudiantes utilizan procedimientos algebraicos para dilucidar la solución de las tareas (categorías 3 y 4).

Los números correspondientes al último argumento (de cada tarea) de los alumnos de la Escuela 2 se concentran en la tabla 28, en ella se visualiza que 49 de los 64 argumentos (equivalentes a un 76.6%) con que los adolescentes finalizaron las distintas tareas, son acertados.

Tabla 28. Último argumento de los participantes de la Escuela 2. Conteo de frecuencias por categoría.

Categoría	1.2		2*		2		3		4		5		Total		Total
Veracidad	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	
Tarea 1	5	2	1	1	3	1	-	-	3	-	-	-	12	3	16
Tarea 2	4	-	-	-	4	2	2	-	3	1	-	-	13	3	16
Tarea 3.1	3	2	-	1	2	2	-	-	3	1	2	-	10	6	16
Tarea 3.2	4	-	-	-	5	1	2	-	3	1	-	-	14	2	16
Total	16	4	1	2	14	6	4	-	12	3	2	-	49	15	64
Total de argumentos	20		3		20		4		15		2		64		

En la Escuela 2 el 31.2% de los argumentos (20 de 64) con que los alumnos dieron por terminada una tarea corresponden a estrategias construidas exclusivamente en la aritmética (categoría 1); el 36% (23 afirmaciones) representan las respuestas en que los estudiantes generalizaron recurriendo al uso de literales sin que ello implique un trabajo algebraico que permita dar solución al ejercicio (categorías 2* y 2). Conviene destacar que el 32.8% de los planteamientos con que concluyen las tareas involucran ecuaciones que posibilitan deducir el resultado (categorías 3, 4 y 5).

En resumen, aunque las estrategias que más emplearon los participantes (en general) son las que involucran el uso de literales sin que éstas les permitan deducir los resultados de las tareas (categorías 2 y 2* con 49 de los 102 argumentos finales de ambas escuelas), es importante destacar que existen claras diferencias en las estrategias a las que tienden los participantes de las instituciones que participaron en la investigación.

Por un lado, en la Escuela 1 primordialmente recurren a estrategias de la categoría 2 (26 de 38 argumentos, es decir el 68.4%), lo que denota un uso de las literales sin que estas les permitan deducir el resultado.

En distinto tenor, en la Escuela 2 no parece haber una preeminente tendencia en las estrategias de resolución puesto que, pese a que el mayor número de argumentos corresponde (igual que en la Escuela 1) a la categoría 2 y 2* (23 de 64 argumentos, es decir 35.9%), los números no son tan distantes de los argumentos que involucran deducción, es decir, de las categorías 3, 4 y 5 (21 de 64 argumentos, es decir 32.8%) y de las estrategias puramente aritméticas (20 de 64 argumentos, es decir 31.2%), o sea de la categoría 1.2.

CAPÍTULO 6: RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN, FASE DOS

En este apartado se presentan los resultados obtenidos, específicamente, con respecto a la Segunda Fase de la investigación que considera los cuestionamientos:

ii. a. ¿Cuáles son los niveles de seguridad que, al resolver tareas de generalización, los alumnos dijeron experimentar?

b. ¿Las producciones generadas por los estudiantes de alguna de las dos escuelas muestran mayores porcentajes de respuestas calibradas? (es decir, asociaron estados de seguridad a respuestas correctas e inseguridad a respuestas incorrectas).

En este capítulo se reportan resultados del cuestionario relacionados con los niveles de seguridad que los estudiantes manifestaron en el instrumento. En la primera parte del Capítulo se busca dar respuesta a la pregunta del inciso a) y en la segunda parte se plantea responder el cuestionamiento del inciso b).

6.1. PRIMERA PARTE: REPORTE DE LOS NIVELES DE SEGURIDAD

En esta primera parte se pretende responder a la siguiente pregunta de investigación (primera parte, segunda pregunta):

ii. a. ¿Cuáles son los niveles de seguridad que, al resolver tareas de generalización, los alumnos dijeron experimentar?

La pregunta incluida en el cuestionario fue la siguiente:

f) ¿Qué tan convencido te sientes de que la forma en que resolviste el problema es la correcta?

y como respuesta se les ofrecieron las siguientes opciones:

Nada seguro	Poco seguro	Medio seguro	Seguro	Completamente seguro

La intención de la pregunta fue identificar los niveles de convencimiento experimentados por los participantes en relación a sus estrategias de resolución.

Cabe mencionar que ninguno de los participantes refirió estar Nada o Poco seguro con respecto a la forma en que solucionaron las tareas y, si bien no forma parte de las alternativas dadas, el que no asocien un nivel de convencimiento a algunas afirmaciones, se considera en el análisis posterior.

Tabla 29. Número de argumentos en cada Escuela por categoría y nivel de seguridad

	Escuela 1					Escuela 2					Total ambas
Categorías	NR	MS	S	CS	Total	NR	MS	S	CS	Total	
1.1.	13	5	11	6	35	9	2	16	37	64	99
1.2.	11	6	6	7	30	3	1	18	27	49	79
2*	-	-	-	1	1	-	1	4	11	16	17
2	3	7	26	6	42	-	-	6	17	23	65
3	0	0	3	1	4	-	-	1	3	4	8
4	0	4	2	3	9	-	2	6	8	16	25
5	-	-	1	-	1	-	-	2	1	3	4
Total	27	22	49	24	122	12	6	53	104	175	297

En la tabla 29 se observa que en la Escuela 1 el nivel de seguridad que los estudiantes dijeron tener con mayor frecuencia es Seguro (con 49 de 122 argumentos, es decir 40.2%), seguido de afirmaciones a las que no asociaron un nivel de seguridad (27 de 122 argumentos, 22.1%); destaca que hayan más afirmaciones en las que no responden qué tan convencidos se sienten de su proceder, que argumentos en los que dijeron encontrarse Completamente seguros (24 afirmaciones, correspondientes al 19.6%).

En la Escuela 2, hay un considerable incremento (con respecto a la Escuela 1) de las respuestas asociadas a Completamente seguro (59.4%) y, con 104 de 175 argumentos, es el nivel más referido por los estudiantes de dicha institución; Seguro, con 53 afirmaciones (30.3%), es el segundo nivel más elegido. Entre ambos, se agrupa casi el 90% de las 175 conclusiones explicitadas por los participantes de la mencionada institución.

Pese a las diferencias entre los porcentajes asociados en cada Escuela a Medio seguro (E1 con 18% y E2 con 3.4%), éste es el nivel de certeza que menos aseveraron experimentar los adolescentes al solucionar las tareas, ubicado incluso por debajo de los argumentos a los que no asociaron grado de seguridad.

Llama la atención que haya seis respuestas de la categoría 4 afiliadas al nivel Medio seguro y quince argumentos de las categorías 3, 4 y 5 ligados a Seguro y no a Completamente seguro. Destaca también el hecho de que haya 43 afirmaciones de la categoría 1.1 en las que los alumnos dijeron sentirse Completamente seguros; esto resulta natural, como se comentará párrafos abajo, debido a que el terreno aritmético es el que da mayor pauta a experiencias de seguridad, ya que es el que resulta más familiar y más experimentado por los niños.

Una de las primeras cosas que se pudieron constatar en estos resultados es que, en ambas escuelas, los alumnos que recurren a procesos deductivos (algebraicos) sí se comprometen con su grado de convencimiento, mientras que son los alumnos que recurren a la inducción basada en procesos aritméticos (Categorías 1 y 2) los que no expresan su nivel de seguridad. Es notorio que la mayor cantidad de argumentos a los que los estudiantes no asociaron un grado de seguridad pertenecen a la categoría 1.1.

Interesante también resulta que en la medida en que aumenta el nivel de complejidad de las conclusiones disminuye el número de argumentos en los que no hay compromiso con la seguridad. En la Tabla 30 se sintetiza el número de afirmaciones en cada categoría de respuesta en las que los alumnos no explicitan qué tan seguros se sienten respecto a su proceder.

Destaca en la Tabla otra vez la diferencia entre la Escuela 1 y la Escuela 2. Mientras en la primera hay un 22% de argumentos a los que no se asocia un nivel de seguridad, en la Escuela 2 sólo en el 6.8% de los argumentos, los alumnos no se comprometen con su nivel de seguridad.

Es importante recalcar que en los datos no se encontraron afirmaciones correspondientes a las categorías 3, 4 y 5 (cuyas estrategias de resolución involucran procesos de manipulación algebraica) a las que los participantes no asociaran un nivel de seguridad.

Tabla 30. Datos correspondientes al número y porcentaje de argumentos a los que no se les asocia un nivel de seguridad

No responde sobre su nivel de seguridad				
	Escuela 1		Escuela 2	
Categoría	Afirmaciones	% total de Argumentos (122)	Afirmaciones	% total de Argumentos (175)
1.1	13	10.6	9	5.1
1.2	11	9	3	1.7
2	3	2.4	-	-
2*	-	-	-	-
3	-	-	-	-
4	-	-	-	-
5	-	-	-	-
Total	27	22	12	6.8

En la búsqueda por identificar qué tan convencidos se sintieron los estudiantes al concluir las tareas, se consideró importante visualizar por separado el nivel de seguridad que manifestaron experimentar al dar por resueltas las tareas; la tabla 31 agrupa dicha información.

Tabla 31. Niveles de seguridad asociados al último argumento dado

		CS						S						MS						T
		1.2	2*	2	3	4	5	1.2	2*	2	3	4	5	1.2	2*	2	3	4	5	
E1	A	-	-	6	1	2	-	1	-	14	3	2	-	-	-	6	-	3	-	38
	%	-	-	16	3	5	-	1	-	37	8	5	-	-	-	16	-	8	-	
E2	A	11	1	14	3	8	1	9	1	6	1	5	1	-	1	-	-	2	-	64
	%	17	1	22	5	12	1	14	1	9	1	8	1	-	1	-	-	3	-	

En la Escuela 1 la mayoría de los alumnos da por concluidas las tareas haciendo afirmaciones de categoría 2 y sintiéndose seguros (14 afirmaciones que representan el 37%); los porcentajes que asocian esa misma categoría con Completamente seguros y Medio seguros son iguales (16%).

Al considerar sólo el último argumento de cada ejercicio, la tendencia a declarar sentirse Completamente seguros en el mayor número de afirmaciones permanece en la Escuela 2. Este nivel de seguridad se asoció con mayor frecuencia a las categorías 2 (22%) y 1.2 (17%).

En ambas escuelas el nivel de seguridad menos elegido es Medio Seguro, sin embargo, en la Escuela 1 el porcentaje de aseveraciones en él es de 24% (9 de 38) mientras que en la Escuela 2 sólo es de 4% (3 de 64). Es imposible ignorar que, en ambas instituciones, se pueden encontrar en las producciones de los estudiantes argumentos de categoría 4 en que los participantes profesaron estar Medio seguros y también es importante destacar que ningún participante (de ambas escuelas) concluya con argumentos de categoría 1.2 y afirme sentirse Medio Seguro.

Las aseveraciones ubicadas en las categorías 3, 4 y 5 tienen un comportamiento contrastante en ambas instituciones; mientras que en la Escuela 1 se asocian con el mismo número de afirmaciones (3) a Completamente seguro que a Medio seguro, en la Escuela 2 es perceptible un mayor número de argumentos de ese tipo vinculados a Completamente seguro (12), decreciendo en Seguro (7) y disminuyendo aún más en Medio seguro (2).

En este apartado se expuso un análisis cuantitativo de distintos aspectos encontrados en los cuestionarios. A modo de resumen, en este análisis destacan las diferencias entre ambas escuelas: en relación al desempeño académico, destacan los porcentajes de respuestas veraces y la cantidad de tareas finalizadas; en relación a los niveles de seguridad, resalta lo que en cada una de ellas se reportaron y la cantidad de argumentos en los que se comprometen con expresar un grado de seguridad. Esto responde al inciso a de la segunda pregunta de investigación, además de que servirá de base para hacer el análisis para responder el inciso b, relacionado con la calibración.

6.2. SEGUNDA PARTE: VERIFICACIÓN RELATIVA A LA CALIBRACIÓN

6.2.1. LA CALIBRACIÓN EN LOS ESTUDIANTES QUE PARTICIPARON EN EL ESTUDIO

En esta parte se pretende responder a la siguiente pregunta de investigación (ii, inciso b):

> b) ¿Las producciones generadas por los estudiantes de alguna de las dos escuelas muestran mayores porcentajes de respuestas calibradas? (es decir, asociaron estados de seguridad a respuestas correctas e inseguridad a respuestas incorrectas).

El inciso b) de la segunda pregunta de investigación está relacionado con la calibración. Este concepto, como ya se explicó en el Capítulo correspondiente a la revisión de bibliografía, hace referencia a la relación que se da entre grados de seguridad y veracidad de respuestas. Se dice que hay un alto grado de calibración en una respuesta dada por un estudiante cuando a una respuesta veraz se asocia un alto grado de seguridad, y que hay un bajo grado de calibración en una respuesta dada por un estudiante cuando a una respuesta incorrecta (desde el punto de vista de la matemática escolar) se asocian bajos grados de seguridad del estudiante.

Para dar respuesta a esta pregunta se inspeccionó el número de afirmaciones con que los estudiantes concluyen su trabajo separando no sólo por categorías de estrategias sino también, por el calificador que asociaron a la estrategia con que dan por finalizado su trabajo. Adicionalmente, se consideró la veracidad de los argumentos construidos por los estudiantes denotando con el signo más (+) las conclusiones verdaderas y con el signo menos (-) las falsas; la citada información se encuentra en la tabla 32.

Tabla 32. Número de afirmaciones por veracidad, tarea, categoría, calificador y escuela.

Escuelas		1							2						
Tareas	Q	CS		S		MS		Total	CS		S		MS		Total
	Categorías	+	-	+	-	+	-		+	-	+	-	+	-	
Tarea 1	1.2								2		3	2			7
	2*									1	1				2
	2	2	1	3	1		2	9	1	1	2				4
	3			1	1			2							
	4					1		1	1		2				3
	5														
Tarea 2	1.2				1			1	3		1				4
	2*														
	2	1		1	4	1		7	4	1		1			6
	3	1		1				2	1		1				2
	4					1		1	3					1	4
	5														
Tarea 3.1	1.2								1	2	2				5
	2*													1	1
	2		1	1	2		1	5	1	1	1	1			4
	3														
	4	1			1	1		3		1	2		1		4
	5								1		1				2
Tarea 3.2	1.2								3		1				4
	2*														
	2	1		1	1	1	1	5	5			1			6
	3								2						2
	4	1		1				2	2	1	1				4
	5														
		7	2	9	11	5	4		30	8	18	5	1	2	
TOTAL		9		20		9		38	38		23		3		64

El contraste entre las instituciones respecto al nivel de seguridad se percibe, además de los mencionados con anterioridad, en el hecho de que (en general) en la Escuela 1, a la par que decrecía la cantidad de participantes que respondiesen, disminuyó el nivel general de seguridad; contrario a lo ocurrido en la Escuela 2 en donde, con el avance de las tareas, la seguridad de los estudiantes se incrementó.

El porcentaje de afirmaciones erróneas correspondientes a cada una de las escuelas también es contrastante y pudiese ser un elemento que abone a la disminución de la seguridad de los alumnos puesto que, mientras en la Escuela 1 el 44.7% (17 de 38) son conclusiones equivocadas, en la Escuela 2 sólo el 23.4% (15 de 64).

En la Tabla también es posible advertir el porcentaje de respuestas calibradas correspondientes a cada una de las escuelas. Si se considera el total de respuestas correctas a las que se asoció niveles seguros y completamente seguros, se tiene que mientras que en la escuela 2 el 75% de las respuestas dadas al final son calibradas, en el caso de la escuela 1 sólo el 42% de las respuestas ultimas dadas, son calibradas. Esto responde al inciso b de la pregunta ii.

La evidencia que se desprende de los resultados encontrados hizo que surgieran cuestionamientos como: ¿Los sujetos respondieron aleatoriamente a Q?, ¿En verdad son conscientes de los niveles de seguridad que vivenciaron al momento de resolver la prueba? , ¿Los niños pueden distinguir y comunicar sus estados epistémicos?, ¿En qué soportan su seguridad?, ¿Lo hacen en las estrategias que emplearon para solucionar las tareas?, ¿La relacionan con el resultado y la veracidad de éste?, ¿O la apuntalan en otros ámbitos?¿Son sensibles a la complejidad de las tareas y esta dificultad influye en la seguridad que experimentaron al momento de participar en la toma de datos?, ¿Basan su convencimiento en los procesos algebraicos, aritméticos o en ambos?, ¿A los alumnos les resultan suficientes las herramientas del álgebra para sentirse completamente seguros de su proceder al solucionar tareas que involucran generalizaciones?, ¿Por qué algunos estudiantes recurren a razonamientos y estrategias complejas, con resultados correctos y, no obstante, se sienten inseguros de su desempeño? ¿Por qué hay otros que acuden al álgebra cuando ésta pareciera no beneficiar sus estrategias de solución y/o seguridad? El ambiente escolar ¿Coadyuva a que sientan que poseen las herramientas que les permiten concluir las tareas? ¿Les induce a recurrir a áreas de las matemáticas que aún no dominan? ¿A qué obedecen las diferencias en las frecuencias de los calificadores encontrados en las dos escuelas?

En esta tesis no se está en condiciones de responder a esa tan amplia batería de interrogantes, por lo demás todas muy interesantes. Sin embargo, los datos recabados en la presente investigación permiten sugerir respuestas iniciales a algunas de las preguntas antes planteadas.

Los contrastes entre las producciones de los alumnos de la Escuela 1 y las producciones de los de la Escuela 2 permitirán responder parcialmente a algunos de esos cuestionamientos.

En los resultados antes expuestos se pueden distinguir respuestas muy distintas en ambas escuelas.

En relación al rendimiento matemático, se puede decir que en la Escuela 1 el porcentaje de conclusiones correctas es del 52% (17 de 38), mientras que en la Escuela 2 es del 76%, además de que todos ellos terminaron todas las tareas, en tanto que los de la Escuela 1 sólo la mitad del grupo concluyó (ver Anexo 1); lo anterior a pesar de que los alumnos de la Escuela 1 tuvieron siete sesiones (de una hora para responder el cuestionario) mientras que a los de la Escuela 2 les tomó sólo seis sesiones.

Con respecto a los niveles de seguridad se tienen los siguientes datos: los de la Escuela 2 reportan, notablemente, mayores niveles de seguridad que la Escuela 1: mientras casi el 20% de la Escuela 1 dijo estar completamente seguro, casi el 60% de la Escuela 2 optó por ese calificador. De hecho, casi al 90% de las afirmaciones que hicieron los estudiantes de esa Escuela 2 les asignan un calificador seguro o completamente seguro. Por otra parte, mientras en la Escuela 1 hay un 22% de argumentos a los que no se asocia un nivel de seguridad, en la Escuela 2 sólo en el 6.8% de los argumentos los alumnos no se comprometen con su nivel de seguridad.

Un suceso por demás llamativo que, por cierto, resultó imposible de estudiar en la Escuela 1 debido al decremento en la cantidad de participantes conforme avanzaban las tareas, es que en la Escuela 2, en tareas con instrucciones y resultados similares (1 y 3.1; 2 y 3.2), en general, el nivel de seguridad explicitado por los participantes es análogo. Y finalmente otro aspecto que resalta es el mayor índice de respuestas calibradas que ofrecen los niños de la Escuela 2, como se acaba de mostrar.

Por otra parte y como se puede observar en el Anexo 1, la mayoría de los alumnos de la Escuela 1 eligieron (en sus últimas resoluciones) estrategias de corte algebraico (en 37 de 38 argumentos finales, es decir en el 97.4%). Pero con esas estrategias, en las que los estudiantes reportaron sólo niveles medios de seguridad, los alumnos incurrieron en una cantidad considerable de errores (más del 50% de las respuestas fue equivocada) y sólo el 50% de los alumnos logró terminar todas las tareas contenidas en el cuestionario (como ya se ha dicho).

Un panorama distinto arrojan los resultados de la Escuela 2. Los alumnos escogieron (en sus últimas resoluciones) estrategias de muy diversa índole: la tercera parte del grupo eligió estrategias aritméticas, otra tercera parte acudió a estrategias deductivas que generaban soluciones con un mayor nivel de generalidad del solicitado, y la otra tercera parte respondió empleando lenguaje y operaciones algebraicas (sin deducción) (ver Tabla 28). Además y a diferencia de la Escuela 1, en la Escuela 2 el índice de respuestas correctas es mucho más alto (del 76%) y el de tareas concluidas es del 100%. Estos niños, ciertamente, supieron seleccionar de forma conveniente las estrategias que les llevarían a resolver con éxito todas las tareas propuestas; pero aunado a ello, a esas estrategias les asociaron muy altos niveles de seguridad.

De lo anterior resulta natural preguntarse: ¿Cómo es que los alumnos de la Escuela 2 habrán seleccionado esas estrategias de resolución que resultaron tan exitosas?

Una posibilidad es que hayan llevado a cabo una evaluación racional, deliberada, extensiva y puntual de las condiciones de resolución de la tarea y de sus contenidos así como de los conocimientos y habilidades personales que les eran necesarios para solventar el reto planteado en el cuestionario.

No obstante, es poco probable que así haya sucedido.

Para esbozar una respuesta muy preliminar a esta interrogante, y a algunas otras que anteriormente se plantearon, se retoman ideas de los heurísticos y los sesgos cognitivos expuestas por Kahneman y Tversky, así como la del mecanismo del marcador somático introducido por Damasio, ideas que se exponen a continuación.

6.2.2. UNA DIGRESIÓN PARA FUNDAMENTAR LAS RESPUESTAS PRELIMINARES

6.2.2.1. UNA PRIMERA EXPLICACIÓN: LA PERSPECTIVA DE LA RACIONALIDAD LIMITADA Y DE LOS HEURÍSTICOS DE KAHNEMAN Y TVERSKY (TOMADO DE RIGO, 2018)

Kahneman y Tversky[1], desde una perspectiva de la racionalidad limitada, sugieren que en circunstancias de incertidumbre y en las que no se pueden prever todas las consecuencias de una acción (por falta de información o por limitaciones de nuestra memoria, por ejemplo) las personas requieren filtrar selectivamente la información de la cual

[1] Kanheman y Tversky se enfocaron en describir mecanismos asociados a la toma de decisiones en cuestiones que implicaban la noción de probabilidad. No obstante, consideramos que sus nociones básicas, de sistema 1 y sistema 2, pensamiento intuitivo vs. pensamiento racional, los atajos o heurísticos asociados al pensamiento inutitivo y los sesgos que eventualmente se pueden desprender de esos atajos –que tienen que ver con aspectos epistemológicos y no con contenidos disciplinares como la estadística o la probabilidad- son perfectamente aplicables a otros ámbitos de toma de decisiones, como es la resolución de tareas de contenido matemático. Es decir, retomamos la postura epistemológica que proponen de Kanheman y Tversky y no la aplicación de dicha postura.

disponen. Para esto recurren a atajos mentales o 'heurísticos' que les permitan llegar a la solución de los problemas de manera eficiente y rápida.

Los heurísticos son para Kanheman y Tversky procedimientos intuitivos de toma de decisiones.

Ellos diferencian dos modos de pensar y decidir que, a grandes rasgos, corresponden a los conceptos habituales de razonamiento e intuición. Al respecto los autores afirman:

> "El razonamiento se hace deliberadamente y con mucho esfuerzo, mientras que el pensamiento intuitivo parece que se presenta de forma espontánea en la mente, sin cálculo o búsqueda consciente, y sin esfuerzo […] Existe un acuerdo sustancial respecto a las características que diferencian a los dos tipos de procesos cognitivos, para los que Stanovich y West (2000) propusieron los rótulos neutrales de Sistema 1 y Sistema 2. Las operaciones del Sistema 1 son rápidas, automáticas, sin esfuerzo, asociativas, y a menudo están cargadas emocionalmente; además, vienen determinadas por la costumbre y consecuentemente son difíciles de controlar o modificar. Las operaciones del Sistema 2 son más lentas, consecutivas, requieren un gran esfuerzo, y están controladas de forma deliberada; son también relativamente flexibles y, potencialmente, vienen determinadas por reglas" (Kanheman & Tversky, 2003, p. 184)

Los autores, por otra parte sostienen la prevalencia o la tendencia hacia el uso de la intuición en los casos de toma de decisiones cotidianas: "La observación superficial y la investigación sistemática indican que la mayor parte de los pensamientos y las acciones son normalmente intuitivos en este sentido"; algo semejante lo afirman en otro lugar y con otras palabras: "a menudo la gente se contenta con confiar en un juicio <u>convincente</u> que le viene rápidamente a la cabeza" (el subrayado es nuestro).

6.2.2.2. UNA SEGUNDA EXPLICACIÓN: EL MECANISMO DE LOS MARCADORES SOMÁTICOS DE DAMASIO (2010) (TOMADO DE RIGO, 2018)

Damasio, por otra parte y desde la perspectiva de la neurofisiología, explica el funcionamiento del mecanismo del marcador somático, que cumple la misma función de los heurísticos al operar como un atajo cognitivo para eficientar procesos de toma de decisiones. Entre otras cosas, Damasio da cuenta del por qué "la gente se contenta con confiar en un juicio convincente que le viene rápidamente a la cabeza".

Damasio propone la existencia de un mecanismo de toma de decisiones implícito, automático, expedito y orientado por emociones, al cual le llama 'marcador somático' (ms), y que se diferencia de los mecanismos de evaluación en los que las personas toman decisiones con base en la valoración explícita, racional y lógica de opciones diversas.

El funcionamiento del ms se da de la siguiente manera:

Supóngase que en una primera instancia una persona elige una opción X, entre varias, la cual le arroja un resultado negativo Y (quizás ella reciba un castigo, en el marco de las normas éticas y de racionalidad que prevalecen en su medio social); este resultado lo asocia a una emoción negativa que de alguna manera experimenta en su cuerpo en forma de sensaciones negativas. Si posteriormente la persona se enfrenta a situaciones semejantes, ella les asociará en automático esas sensaciones 'negativas' en el cuerpo. Estas marcas somáticas funcionan como una alarma corporal que previene a la persona de las opciones (que en su experiencia personal le resultaron) dañinas. Lo mismo sucede para las opciones que le dejaron a la persona experiencias corporales 'positivas', en las que el semáforo da la señal de siga.

De manera que, mediante señales en el cuerpo, el ms impulsa o frena una opción a través de la valoración implícita, automática y fuera del razonamiento, de sus posibles consecuencias (positivas y benéficas; o negativas y adversas).

Los marcadores somáticos de las personas se acomodan a sistemas de preferencia externos. Es decir, los ms responden a las normas éticas y de racionalidad de la cultura en la que se ha educado la persona, a cuyo cumplimiento (o desacato) se ha asociado una red de castigos y recompensas. "El ms –dice Damasio- se ha ajustado a recetas culturales diseñadas para asegurar la supervivencia en una determinada sociedad.

… el ms se ha hecho racional en relación a las convenciones sociales y a la ética" (Damasio, 2010, p. 235). Así que ante ciertas opciones, el ms de la persona educada en una cierta cultura tenderá hacia la opción que honre mejor los valores y códigos de esa cultura, entre otras cosas, para evitar ser penalizada de alguna manera. A diferencia de los ms innatos, los ms adquiridos en (o impuestos por) una cultura son resultado del entrenamiento y se pueden adquirir mediante procesos educativos.

El ms requiere de una gran cantidad de conocimiento factual, acerca de situaciones a las que la persona se puede enfrentar, y de los resultados variados que eventualmente se pueden desprender de esas situaciones. Claro está que entre más conocimiento ella acumule, el ms funciona de manera más adaptativa. Bajo la perspectiva y relevancia personal, su cerebro categoriza esas situaciones o posibles opciones que se pueden presentar, organizándolas en clases, en función de determinados criterios que dependen de las experiencias que ella ha vivido, y clasifica también los resultados posibles para cada opción. Con base en esa categorización, ordena también las opciones asociadas a sus resultados, de acuerdo a un valor o valencia particular (en general, positiva o negativa).

Este caudal de conocimiento, y el razonamiento que toma en cuenta objetivos en una determinada situación y escala de tiempo para la puesta en práctica de dichos objetivos, son los que sirven de base para el funcionamiento del ms en la toma de decisiones: cuando la persona se enfrenta a una situación, esta categorización le permite identificar rápida, mecánicamente y fuera del razonamiento, una opción (o un resultado derivado) como beneficiosa o perjudicial.

El funcionamiento del ms se da fuera del razonamiento; pero las decisiones que se desprenden del ms pueden complementarse, y generalmente así lo hacen las personas, con procedimientos conscientes de deliberación lógica y racional.

Como se puede desprender de lo antes expuesto, los marcadores somáticos poseen las mismas propiedades que las intuiciones heurísticas: funcionan de manera automática y rápida, no requieren de esfuerzo y son asociativos; además, vienen determinados por la costumbre, la repetición y la cultura. En los dos casos se trata de trayectorias alternativas a los procesos racionales de toma de decisiones; en los dos casos se sigue el camino de las emociones; en los dos casos se reivindican los efectos de la emoción sobre el peso de las decisiones.

Con mucha frecuencia los heurísticos (y los ms) no llevan a las consecuencias más adaptativas o a los resultados más exitosos. Kahneman y Tversky dan cuenta, en una serie de experiencias que realizan con personas a las que les plantean distintos tipos de tareas, de la sorprendente elevada tasa de errores en las que ellas incurren cuando las resuelven utilizando procedimientos intuitivos y heurísticos. Ellos afirman al respecto: "En general, estas heurísticas son muy útiles, pero a veces llevan a errores severos y sistemáticos" (Tversky y Kahneman, 1974, p. 1124). Con base en este reconocimiento, los autores se dan a la tarea de caracterizar distintos 'sesgos cognitivos', o errores interpretativos que se derivan de la aplicación de dichos heurísticos; y es que esos juicios intuitivos, admiten los autores, están basados en un conocimiento parcial, en la experiencia y en suposiciones que no siempre son correctas.

Pero en otras ocasiones, los ms y el pensamiento intuitivo desembocan en resultados exitosos (aunque es importante resaltar que en las distintas interpretaciones que otros investigadores hacen de estos autores estas consideraciones de tono positivo se dejan de lado). Así lo ponen Kanheman y Tversky:

> "En los ejemplos considerados hasta ahora, la intuición estaba vinculada a malos resultados, pero el pensamiento intuitivo puede ser también potente y preciso. Mediante la práctica prolongada, se adquieren destrezas notables y sus resultados se producen rápido y sin esfuerzo. El proverbial maestro de ajedrez que pasa por una partida y anuncia "mate de las blancas en tres" sin detenerse está actuando intuitivamente (Simon y Chase, 1973), al igual que la enfermera con experiencia que detecta indicios prácticamente imperceptibles de una insuficiencia cardiaca inminente (Klein, 1998; Gawande, 2002)". (Kanheman & Tversky, 2003, p. 184)

En otra parte, los autores sostienen:

> "Por supuesto, este modo de análisis abre también la posibilidad de que haya diferencias entre individuos y entre grupos. Lo que es normal e intuitivo en una determinada situación no es lo mismo para todo el mundo: experiencias culturales diferentes propician intuiciones diferentes acerca del significado de las situaciones, y conductas nuevas se convierten en intuitivas a medida que se van adquiriendo las destrezas. (Kanheman & Tversky, 2003, p. 215)

De lo anterior se desprende que tanto los marcadores somáticos como las intuiciones son entrenables, educables en el marco de una cierta cultura y que pueden traer grandes beneficios en la toma rápida y mecánica de decisiones en cualquier ámbito de la vida.

6.2.3. DE REGRESO A LOS ESTUDIANTES…

Con base en lo antes expuesto, se puede decir que los niños de la Escuela 2 no sólo están bien calibrados. Parecen poseer una habilidad que va más allá de eso. Parecen poseer heurísticos y marcadores somáticos bien afinados, bien entonados, que han asociado a emociones de seguridad y confianza afianzadas en un autoconocimiento de lo que saben y de sus limitaciones y en una cantidad importante de experiencias exitosas de resolución de tareas; esos niños parecen poseer heurísticos y marcadores somáticos que pueden compaginar, además, con procesos cognitivos de orden racional, en los que consideran, por ejemplo, las condiciones externas de la resolución de la tarea. Estas intuiciones y estos marcadores somáticos que parecen poseer los niños de la Escuela 2 son resultado de un entrenamiento; es del todo probable que ese entrenamiento lo hayan recibido justo de la Escuela 2.

La pregunta que queda abierta es ¿Qué tipo de cultura escolar prevalece en la Escuela 2 que les proporciona a los estudiantes marcadores somáticos e intuiciones que resultan muy propicios para la resolución exitosa de tareas matemáticas?

Esta es una pregunta que se intentará responder en futuras investigaciones.

CAPÍTULO 7: CONSIDERACIONES FINALES

En respuesta a la primera pregunta:

i. ¿Cuáles son las estrategias recurrentes de los estudiantes de secundaria?

Como se explicitó en el capítulo 5, aunque las estrategias que más emplearon los participantes (en ambas escuelas) son las que involucran el uso de literales sin que éstas les permitan deducir los resultados de las tareas (categorías 2 y 2* con 49 de los 102 argumentos finales de ambas escuelas), el comportamiento de ambas escuelas exhibe diferencias de importancia.

Mientras en la Escuela 1 recurren a estrategias de la categoría 2 (26 de 38 argumentos finales, es decir el 68.4%); en la Escuela 2 no parece haber una tendencia en las estrategias de resolución puesto que 23 de 64 argumentos (35.9%) corresponden a la categoría 2 y 2*, 21 de 64 argumentos (32.8%), involucran deducción (es decir corresponden a categorías 3, 4 y 5) y 20 de 64 argumentos (31.2%) involucran estrategias puramente aritméticas, es decir, categoría 1.2.

Respecto a la pregunta

ii. a.) ¿Cuáles son los niveles de seguridad que, al resolver tareas de generalización, los alumnos dijeron experimentar?

Como se detalló profundamente en el capítulo 6, el comportamiento de los participantes de ambas instituciones denota diferencias claras.

Por un lado, mientras que en la Escuela 1 la mayoría de los alumnos da por concluidas las tareas sintiéndose seguros (20 de 38 argumentos, 52.6%); los estudiantes de la Escuela 2 afirman hacerlo Completamente seguros (38 de 64 argumentos 59.4%).

En relación al cuestionamiento:

> b.) ¿Las producciones generadas por los estudiantes de alguna de las dos escuelas muestran mayores porcentajes de respuestas calibradas? (es decir, asociaron estados de seguridad a respuestas correctas e inseguridad a respuestas incorrectas).

También son notorias las diferencias entre ambas instituciones. Mientras en la Escuela 1 (pese a tener una sesión más de una hora que los de la otra institución) únicamente la mitad de los participantes concluye todas las tareas, en la Escuela 2 todos los estudiantes lo hacen.

Con relación a la veracidad de las respuestas, en la Escuela 1 el porcentaje de conclusiones correctas es del 52% (17 de 38), mientras que en la Escuela 2 es del 76%.

Con respecto a los niveles de seguridad, como ya se indicó los alumnos de la Escuela 2 reportan, notablemente, mayores niveles de seguridad que la Escuela 1: mientras casi el 20% de la Escuela 1 dijo estar completamente seguro, casi el 60% de la Escuela 2 optó por ese calificador. De hecho, casi al 90% de las afirmaciones que hicieron los estudiantes de esa Escuela 2 les asignan un calificador seguro o completamente seguro. Por otra parte, mientras en la Escuela 1 hay un 22% de argumentos a los que no se asocia un nivel de seguridad, en la Escuela 2 sólo en el 6.8% de los argumentos los alumnos no se comprometen con su nivel de seguridad.

En caso de que la escuela sea la que propicie en los participantes esa completa seguridad ¿De qué manera lo hace? ¿Qué acciones se pueden tomar para que los alumnos recurran a áreas matemáticas que contribuyan verdaderamente a su desempeño académico? ¿Cómo favorecer que los alumnos valoren si recurrir al álgebra, a la aritmética o a ambas y, sin prejuicios, puedan tomar su decisión? Aunque la presente investigación está limitada para responder a esos cuestionamientos, con base en lo antes expuesto, se puede decir que los niños de la Escuela 2 no sólo están bien calibrados sino que parecen poseer heurísticos y marcadores somáticos bien afinados, bien entonados, que han asociado a emociones de seguridad y confianza afianzadas en un autoconocimiento de lo que saben y de sus limitaciones, así como en una cantidad importante de experiencias exitosas de resolución de tareas.

Es posible inferir que estas intuiciones y marcadores somáticos que parecen poseer los niños de la Escuela 2 son resultado de un entrenamiento y es del todo probable que ese entrenamiento lo hayan recibido justo de la Escuela 2.

Esta investigación resulta relevante pues, además de explorar el tipo de estrategias que construyen los estudiantes de secundaria al resolver tareas de generalización en las que no se les solicita (explícitamente) que utilicen álgebra y aportar una categorización de dichas estrategias, abre la puerta a futuras investigaciones en las que se busque dilucidar ¿Qué tipo de cultura escolar prevalece en la Escuela 2 que les proporciona a los estudiantes marcadores somáticos e intuiciones que resultan muy propicios para la resolución exitosa de tareas matemáticas?

Esfuerzos futuros se encaminarán en la resolución de dicho cuestionamiento.

- Bertely, M. (2013). *Conociendo nuestras escuelas. Un acercamiento etnográfico a la cultura escolar*. México: Paidós.
- Brown T. (2015). Rationality and belief in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics.* pp 75 – 90.
- Corbalán, F. y Deulofeu, J. (1996). Polya, un clásico en la resolución de problemas. SUMA. pp 103 – 107.
- Corbin, J. & Strauss, A. (2015). *Basics of quialitative research. Techniques and procedures for developing grounded theory*. Londres: SAGE.
- Damasio, A. (2010). *El error de Descartes. La emoción, la razón y el cerebro*. Barcelona: Crítica.
- Davydov, V. (1972). *Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula* (Soviet Studies in Mathematics Education, Vol. 2). Reston, VA: National Council for Teachers of Mathematics. de Morgan, A. (1865). A speech of Professor De Morgan, president, at the first meeting of the London Mathematical Society. In *Proceedings of the London Mathematical Society* (pp. 1–9). London: London Mathematical Society.
- De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, Nov núm. 24. Pp 17-24.
- D'Amore, B. (2006). Conclusiones y perspectivas de investigación futura. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, núm. Esp. pp 301-306.
- Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics. 3*(2). pp 9-24.
- Foster, C. (2015). Confidence and competence with mathematical procedures. *Educational Studies in Mathematics*. pp 271-288.
- Hanna, G. (1995) Challenges to the importance of proof. *For the learning of Mathematics*. pp 42 – 49.

- Hanna, G. & Mason, J. (2014) Key ideas and memorability in proof. *Forthelearning of Mathematics*. pp 12 – 16.
- Harel, G (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme. A model DNR-Based instruction. *Journal of mathematical behavior*. pp 185-212.
- Harel, G., &Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspective on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805–842). Charlotte: National Council of Teachers of Mathematics.
- Holt, M. & Dienes, Z. (1984). *Let's play math*. New York: Walker and Company.
- Inglis, J., Mejia-Ramos, J. & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: the importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*. pp 3-21.
- Kahnemann, D. & Tversky, A. (2003). Mapas de racionalidad limitada.: Psicología para una economía conductual. *Revista Asturiana de Economía.* pp 181 - 224
- Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematics abilities in school children* (J. Teller, Trans.). Chicago: University of Chicago Press.
- Martínez, M. & Pedemonte, B. (2014). Relationship between inductive arithmetic argumentation and deductive algebraic proof. *EducationalStudies in Mathematics*. pp 125-149.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of Algebra. En N. Berdnarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching*, pp 65- 86. Dordrecht/Boston/London: Kluwer.
- Mason, J. (1999) La incitación del estudiante hacia el uso de su capacidad natural para expresar generalidad: Las secuencias de Tunja. *EMA*, vol. 4, núm. 3, pp 232 – 247.

- Mason, J., Graham, A. & Johnson-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in Algebra*. The Open University in association with Chapman Publishing London.
- Mason, J. (2008). *Making use of children's powers to produce algebraic thinking.*The Open University in associationwith Chapman Publishing London.
- Martínez, B. & Rigo, M. (2016) Relaciones dinámicas entre convencimiento y comprensión en la construcción de sustentos (Dynamicrelationsbetweenconvincement and comprehension in theconstruction of grounds). In Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.), *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Pyschology of Mathematics Education*, pp. 628-643. Tucson, AZ: The University of Arizona.
- Radford, L. (1999). El aprendizaje del uso de signos en álgebra. Una perspectiva post-vigotskiana. *Educación Matemática*. vol. 11, núm. 3, pp. 25 – 53
- Radford, L. (2006). Introducción, Semiótica y Educación Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, núm. Esp. pp 7 - 21.
- Radford, L. (2010). *Layers of generality and types of generalization in pattern activities.*PNA, 4 (2), pp 37 – 82.
- Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización [Concerningthreeproblems of generalization] Rico, L., Cañadas, M.C., Gutiérrez, J., Molina. & Segovia, I. (Eds.), *Investigación en Didáctica de las matemáticas. Homenaje a Encarnación Castro.* Granada, España: Editorial Comares.
- Rigo, M. (2013). Epistemic schemes and epistemic states. A study of mathematics convincement in elementary school classes. *EducationalStudies in Mathematics*. pp 71–91
- Rigo, M. (2014). La convicción, la comprensión y las prácticas de racionalidad en la primaria. Estudio del profesor. *PNA*, 8(3). pp 87-98

- Rigo-Lemini, M., & Martínez-Navarro, B. (2017). Epistemic states of convincement. A conceptualization from the practice of mathematicians and neurobiology. In U. E. Xolocotzin (Ed.), *Understanding emotions in mathematical thinking and learning* (pp. 97–131). London: Academic Press.
- Rigo, M. (2018). Marco Teórico del proyecto de investigación *"La cultura de racionalidad y los estados epistémicos en el ambiente escolar"*. Manuscrito no publicado
- Stephens, M. & Ribeiro, A. (2012). Working towards Algebra: The importance of relational thinking. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 15, núm. 3. pp 317 – 402.
- Taylor, S.J y Bogdan, R. (1987). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación.* Barcelona, España: Paidós
- Toulmin, S. (2007). *Los usos de la argumentación*. Barcelona: Ediciones Península.
- Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros, M. (2008). *Enseñanza del Álgebra elemental. Una propuesta alternativa*. México: Trillas.
- Villoro, L. (2013). *Creer, saber, conocer* (16ª ed.). México, DF: Siglo Veintiuno Editores.
- Secretaría de Educación Pública (2011a). *Plan de estudios 2011. Educación Básica Primaria.* México: SEP, Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos.
- Secretaría de Educación Pública (2011b). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Secundaria. Matemáticas*. México: SEP, Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos.

ANEXOS

ANEXO 1

Las tablas siguientes presentan la última afirmación de todos los ejercicios de cada estudiante. Los signos (+) y (–) hacen referencia a afirmaciones o conclusiones verdaderas o falsas respectivamente, los espacios sombreados aluden a ejercicios no resueltos por los participantes.

Tabla 33. Escuela 1. Afirmación con la que concluyen las tareas. Espacios sombreados son tareas no resueltas, (+) argumentos correctos y (-) argumentos erróneos.

ESCUELA 1	Tarea1			Tarea 2			Tarea 3.1			Tarea 3.2		
Alumno	Cat.	Q	+ ó -	Cat.	Q	+ ó -	Cat.	Q	+ ó -	Cat.	Q	+ ó -
1	2	MS	-	2	MS	+	2	MS	-	2	MS	+
2	2	S	+	2	S	-	2	S	-			
3	2	CS	-	1.2	S	-						
4	4	MS	+	4	MS	+	4	MS	+	4	S	+
5	2	CS	+	3	S	+						
6	3	S	-	3	CS	+	4	CS	+	4	CS	+
7	2	CS	+	2	CS	+	2	CS	-	2	CS	+
8	2	S	-	2	S	-	2	S	-			
9	3	S	+	2	S	-	4	S	-	2	MS	-
10	2	S	+	2	S	-	2	S	+	2	S	-
11	2	S	+	2	S	+				2	S	+
12	2	MS	-									

Tabla 34. Escuela 2. Afirmación con la que concluyen las tareas. Espacios sombreados son tareas no resueltas, (+) argumentos correctos y (-) argumentos erróneos.

ESCUELA 2	Tarea1			Tarea 2			Tarea 3.1			Tarea 3.2		
Alumno	Cat.	Q	+ ó -	Cat.	Q	+ ó -	Cat.	Q	+ ó -	Cat.	Q	+ ó -
I	2	S	+	3	CS	+	2	S	+	3	CS	+
II	2*	CS	-	4	CS	+	4	CS	-	4	CS	+
III	4	S	+	3	S	+	4	MS	+	4	S	+
IV	2	S	+	2	CS	+	2	S	-	2	CS	+
V	1.2	S	-	1.2	CS	+	1.2	CS	-	1.2	CS	+
VI	1.2	CS	+	1.2	CS	+	1.2	CS	-	1.2	CS	+
VII	2	CS	+	2	CS	+	5	CS	+	2	CS	+
VIII	1.2	S	+	1.2	S	+	1.2	S	+	1.2	S	+
IX	1.2	CS	+	2	CS	-	2	CS	+	2	CS	+
X	1.2	S	+	1.2	CS	+	1.2	CS	+	1.2	CS	+
XI	1.2	S	-	2	S	-	2*	MS	-	2	S	-
XII	4	S	+	4	CS	+	4	S	+	3	CS	+
XIII	4	CS	+	4	CS	+	5	S	+	4	CS	+
XIV	2	CS	-	2	CS	+	2	CS	-	2	CS	+
XV	2*	S	+	4	MS	-	4	S	+	4	CS	-
XVI	1.2	S	+	2	CS	+	1.2	S	+	2	CS	+