CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

"Dificultades en la Comprensión y Aplicación de la Integral Definida Interpretada como Área. Un Estudio de Caso con Estudiantes Egresados de Bachillerato"

TESIS

Que presenta

Víctor Rivera Mancera

Para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMATICA EDUCATIVA

Director de la Tesis: Dr. Antonio Rivera Figueroa

México, D.F. Noviembre, 2013.

Agradezco al CONACYT, por el apoyo económico brindado para realizar mis estudios de Maestría.

Beca 255018

AGRADECIMIENTOS

Un agradecimiento especial y muy sincero a mi asesor el Dr. Antonio Rivera Figueroa por todos los conocimientos que aprendí de él, por su tiempo, apoyo, consejos y dedicación para realizar el presente trabajo, pero sobre todo por ser un excelente ser humano.

A mis sinodales Dr. Hugo Rogelio Mejía Velasco y Dr. Gonzalo Zubieta Badillo; por sus consejos y el tiempo que dedicaron a revisar la tesis. Todas sus observaciones ayudaron a que la tesis mejorara.

A mis profesores por compartir sus conocimientos y con ello ayudarme a ser una persona con mayor educación y formación.

A todo el personal administrativo, en especial a: Adriana Parra y Norma Cruz por su excelente trato y amabilidad que tuvieron conmigo.

A todos mis compañeros del CINVESTAV por apoyo y compañía.

Este trabajo de tesis está dedicado

a mi esposa Diana Castillo y mi hija Diana Fernanda

por su apoyo y comprensión.

Que día a día me permiten hacer ciencia

y me alientan a emprender camino...

¡Gracias!

¡Las amo!

Contenido

Resumen

En este trabajo presentamos los resultados de una investigación realizada acerca de las dificultades que tienen estudiantes del nivel medio superior en la comprensión de la integral definida y su aplicación al cálculo de áreas. La investigación se realizó con un grupo de estudiantes egresados de la preparatoria Belisario Domínguez del IEMS-DF[1] a quienes se les aplicó un cuestionario. La investigación también incluyó una revisión de diferentes textos de Cálculo Integral, que suelen consultar los estudiantes durante su curso, con el propósito de averiguar si en los mismos textos pudieran encontrarse algunas de las causas de las dificultades que tienen los estudiantes, quizá por el tipo de exposición de los autores o por el insuficiente tratamiento del tema.

Para nuestro estudio, que es un estudio de caso, tomamos como base un marco conceptual relativo al aprendizaje de la matemática con comprensión. La comprensión, que es un proceso, puede darse a diferentes niveles y es factible desarrollarla a través de diversos tipos de actividad mental, lo que a su vez debería implicar el desarrollo de diversos tipos de capacidades matemáticas por parte del alumno. El marco conceptual que hemos adoptado, considera algunos de los tipos de actividad mental y las capacidades que se espera sean adquiridas, como una manera de averiguar el grado de comprensión por parte de los estudiantes en el tema de la integral definida y su aplicación al cálculo de áreas.

Con base en este marco conceptual se planteó un marco de referencia consistente en la exposición de las ideas importantes acerca de la integral definida y su aplicación al cálculo de áreas. En este marco de referencia se destacan los conceptos, objetos y significados que están involucrados en la integral definida y su aplicación al cálculo de áreas de regiones determinadas

1 Preparatoria Belisario Domínguez del Instituto de Educación Media Superior del Distrito Federal A. Corona No. 436 esq. calle Morelos Col. Loma la Palma México D.F.

por gráficas de funciones y que es necesario comprender en su estudio. En esta parte tiene especial relevancia un acercamiento a la integral definida mediante sumas de Riemann. Las sumas de Riemann son el vehículo para interpretar la integral definida como el área bajo la gráfica de una función, cuando ésta es no negativa. El cálculo de áreas para funciones negativas y en situaciones más complejas, por ejemplo de regiones limitadas por gráficas de funciones, se desprende de la interpretación para el caso simple de funciones no negativas.

El marco de referencia nos proporcionó una base para la revisión de los libros de texto, así como para el desarrollo de las ideas y el contenido matemático que se utilizó en el diseño y elaboración de un cuestionario, mismo que se aplicó a ocho estudiantes que ya habían cursado la asignatura de Cálculo Integral. Se analizaron las respuestas de cada uno de los estudiantes con el propósito de identificar las situaciones conflictivas conforme a la metodología aquí presentada.

Al final de este trabajo, en la parte de las conclusiones, se presentan algunas de estas dificultades de manera específica y que consideramos deben ser atendidas para lograr una mejor comprensión del concepto de integral definida y su interpretación y aplicación al cálculo de áreas.

Palabras clave: Integral definida y área, comprensión de la integral definida, sumas de Riemann.

Abstract

We present the results of an investigation about the difficulties from high school students in understanding the definite integral and its application to calculation of areas. The research was conducted with a group of students graduating from high school Belisario Domínguez -DF IEMS who answered a questionnaire. The research also included a review of different integral calculus texts , which often refer students during their course, with the purpose of ascertaining whether these texts can be some of the causes of the difficulties that students , perhaps by the type exposure of the authors or by insufficient treatment of the subject .

For our study, a case study, we take a conceptual framework based on the learning of mathematics with understanding. The understanding, which is a process, can occur at different levels and develop feasible through various types of mental activity, which in turn should lead to the development of various types of mathematical skills by students . The conceptual framework that we have adopted, considered some of the types of mental activity and skills expected to be acquired , as a way to find out the degree of understanding by students on the subject of the definite integral and its application to the calculation areas.

Based on this conceptual framework was proposed a framework consisting of exposure of the important ideas about the definite integral and its application to calculation of areas. In this framework highlights the concepts, objects and meanings that are involved in the definite integral and its application to calculation of areas of regions represented by graphs of functions and you need to understand in their study. This part is particularly relevant approach to the definite integral using Riemann sums . Riemann Sums are the vehicle to interpret the definite integral as the area under the graph of a function, when it is non-negative. Calculating functions and negative areas in more complex situations, eg regions bounded by graphs of functions, is apparent from the interpretation for the simple case of nonnegative functions .

The framework provided a basis for the revision of textbooks, as well as for the development of ideas and the mathematical content that was used in the design and development of a questionnaire , it was applied to eight students who had taken the course of Integral Calculus . We analyzed the responses of individual students in order to identify conflict situations according to the methodology presented.

At the end of this paper, on the part of the conclusions, are some of these difficulties in a specific and which we believe should be addressed to achieve a better understanding of the concept of definite integral and its interpretation and application to calculation of areas.

Keywords: Definite Integral and area, understanding of the definite integral, Riemann sums.

Introducción

Los bajos niveles de aprovechamiento que se observan en las evaluaciones oficiales en la asignatura de Matemáticas V[2] de la preparatoria Belisario Domínguez del Instituto de Educación Media Superior del Distrito Federal (IEMS-DF), nos ha motivado para llevar a cabo una investigación acerca de los posibles factores que influyen en el aprendizaje de los estudiantes que cursaron la asignatura de Matemáticas V, dedicada al Cálculo Diferencial e Integral. Durante el desarrollo de la investigación, que es un estudio de caso, se revisarán los factores relacionados con la comprensión conceptual, y se tratará de documentar algunas dificultades que tienen los estudiantes en la comprensión de la integral definida, especialmente en su interpretación y aplicación al cálculo de áreas.

El Capítulo I está dedicado a una discusión del planteamiento del problema y a la formulación de las preguntas de investigación. En este capítulo se presentan los antecedentes del problema del bajo aprovechamiento de los estudiantes que cursaron la asignatura de Matemática V del colegio antes mencionado. También se da cuenta de algunos resultados de investigación relacionados con la problemática planteada en este trabajo. En el Capítulo II, presentamos el marco conceptual que consiste en una descripción de lo que significa comprensión en matemáticas. La adecuada comprensión se concibe con base en acciones que debe poder llevar a cabo el estudiante. Estas acciones determinan de alguna manera el nivel de comprensión que el estudiante tiene acerca del tema o contenido matemático, en nuestro caso particular de la integral definida y su aplicación al cálculo de áreas. En el Capítulo III, presentamos nuestro marco de referencia donde se hace una serie de precisiones acerca de los conceptos de integral definida y su interpretación como área de una región. También se reportan los resultados de una revisión de los libros de texto que consultan habitualmente los estudiantes durante su

---

2 En el programa del IEMS-DF la asignatura de Matemáticas V

curso de Matemáticas V, antes mencionado.

En el Capítulo IV presentamos la metodología, que consiste en la aplicación de un cuestionario el cual se aplicó a los estudiantes con quienes se llevó a cabo la investigación. El cuestionario se diseñó con base en los marcos conceptual y de referencia. En este capítulo se exponen los objetivos de cada problema del cuestionario y se explica el procedimiento que se llevó a cabo en la recolección de datos para este trabajo. En el Capítulo V, presentamos el análisis cualitativo de los resultados al cuestionario de los estudiantes, con el propósito de identificar las dificultades e indicadores en la comprensión de los estudiantes conforme a nuestra metodología. El Capítulo VI contiene las conclusiones que se obtuvieron a partir del análisis de los resultados de cada uno de los estudiantes que participaron.

Capítulo 1

Planteamiento del Problema

1.1 Introducción. El bajo aprovechamiento de los estudiantes de la asignatura Matemáticas V de la preparatoria Belisario Domínguez del Instituto de Educación Media Superior del Distrito Federal, cuyo tema es Cálculo diferencial e integral, que es revelado por los resultados en las evaluaciones oficiales, nos plantean una problemática sobre el aprendizaje del Cálculo en el colegio antes citado. Los esfuerzos que se hacen en la Academia de matemáticas del colegio, se han traducido, en la práctica, en acciones como son: recomendaciones a los profesores para que cumplan cabalmente con el programa, en campañas de asesorías personalizadas a estudiantes por parte de los profesores y ensayos sobre la reorganización de los temas del curso. El problema es en suma complejo, puede deberse a diferentes tipos de factores y puede haber causas diferentes para cada uno de los temas en específico. En particular, se observa que los estudiantes tienen bajo desempeño en el tema de la integral definida y en su aplicación al cálculo de áreas de regiones determinadas por gráficas de funciones en general.

Ante esta situación, nos hemos propuesto hacer una investigación sobre las posibles causas del bajo aprovechamiento en la comprensión del concepto de integral definida así como su interpretación y aplicación al cálculo de áreas. Por otra parte, al hacer una revisión somera de los libros de texto que los estudiantes suelen consultar durante su curso de Matemáticas V, nos percatamos que ahí podría haber una posible causa de la falta de comprensión y aplicación de la integral definida al cálculo de áreas por parte de los estudiantes.

A pesar de los esfuerzos que ha realizado la Academia de matemáticas del colegio antes citado, el problema subsiste en la actualidad en ese colegio. El bajo nivel de aprovechamiento se observa aún en gran parte de los estudiantes que acreditan el curso con relativamente buenas calificaciones, lo cual se constata en las asignaturas de matemáticas que cursan posteriormente. El bajo aprovechamiento en la asignatura de matemáticas se traduce en un alto índice de reprobación y llega a conducir en la práctica al relajamiento de las metas de aprendizaje de los cursos y también al relajamiento de las exigencias de la evaluación.

Existen diversas investigaciones relacionadas con las dificultades que tienen los estudiantes en el aprendizaje del cálculo en general y algunas de ellas relacionadas el aprendizaje de la integral definida y su aplicación al cálculo de áreas, como son por ejemplo Sierpinska (1992), Artigue (1991, 1995), Aspinwall (199), Bezuidenhout (1998), Hähkiöniemi (2006), Dreyfus (1990) y Orton (1983). Varias de estas investigaciones están enfocadas en las dificultades que tienen los estudiantes con el aprendizaje de los conceptos fundamentales del cálculo, como son las funciones, las sucesiones y sus límites. Varios de estos autores coinciden en que en el mejor de los casos los estudiantes adquieren destreza en algunos cálculos algorítmicos pero tienen dificultades en los procesos, de diferenciación, integración y aplicación de estos conceptos del cálculo.

Particularmente Orton (1983) reporta sobre las dificultades que estudiantes de la Gran Bretaña entre las edades 16 y 22 años tuvieron con el cálculo de áreas mediante el cálculo de integrales definidas. Sin embargo, en nuestra institución tenemos nuestra propia problemática, la cual seguramente es muy similar a la de otras instituciones mexicanas correspondientes al mismo grado escolar, por lo que decidimos llevar a cabo una investigación con un cuestionario propio y acorde con nuestro plan de estudios.

El objetivo de nuestra investigación es obtener información puntual sobre las dificultades que nuestros estudiantes tienen en la concepción de la integral definida, en su interpretación como área de una región y en su aplicación al cálculo de estas áreas en diversas situaciones, después de que han cursado por primera vez la asignatura de Cálculo Integral en el colegio antes citado. De esta manera, nos planteamos la gran pregunta

> ¿Qué tipo de dificultades tienen los estudiantes que han cursado la asignatura de Cálculo V, en la comprensión y aplicación de la integral definida en el cálculo de áreas?

Al hacer una revisión somera de los libros de texto de cálculo que el estudiante suele consultar, nos percatamos que algunos acercamientos a la integral definida dificultan la comprensión de la integral definida como un área. Por ejemplo algunos libros de texto establecen de inicio la integral definida mediante la fórmula del teorema fundamental del cálculo $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, en la que $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, un tal acercamiento a la integral definida, difícilmente favorecen la comprensión de la interpretación de la integral definida como un área. Por esta razón, en nuestra investigación incluimos la revisión de algunos libros de texto o de consulta acerca del acercamiento a la integral definida y determinar si ese acercamiento del texto favorece o no la interpretación y aplicación de la integral definida como área y si el autor le da la suficiente importancia al tema, ya sea por la cantidad o diversidad de aplicaciones al cálculo de áreas.

Para tratar de dar respuesta a la gran pregunta, nos planteamos otras más específicas, mismas que exponemos en la siguiente sección.

1.2 Preguntas de investigación

Indudablemente que las sumas de Riemann, creadas por Cauchy, son el acercamiento a la integral definida que da cuenta de su interpretación geométrica como área. De hecho, la integral definida nace con el problema del cálculo de áreas (problema de cuadraturas) y las sumas de Riemann son la creación de Cauchy para formalizar el concepto de área bajo una curva. Dada la importancia de las sumas de Riemann y su relación “natural” con la interpretación de la integral definida como área, iniciamos nuestras preguntas de investigación con la siguiente

1. ¿El estudiante tiene conocimientos básicos para comprender la construcción e interpretación geométrica de las sumas de Riemann?

En el ámbito de la interpretación y aplicación de la integral definida en el cálculo de áreas, planteamos

2. ¿El estudiante puede calcular áreas de regiones determinadas por gráficas de funciones en casos simples?

3. ¿Es la complejidad de las funciones lo que impide a los estudiantes, calcular áreas?

4. ¿Es la determinación de los límites superior o inferior de una integral definida lo que impide a los estudiantes, calcular áreas?

5. ¿Son las áreas signadas (áreas con signo) causas de dificultad de los estudiantes en el cálculo de áreas?

Con relación a los libros consultados por los estudiantes nos preguntamos:

6. ¿Qué acercamientos adoptan los autores de los libros de cálculo sobre el tema de la integral definida?

Con relación a los diversos acercamientos que muestran los libros de textos revisados, además de la exploración de la relación natural entre la integral definida y el cálculo de áreas, nos preguntamos.

7. ¿Qué argumentos a favor de la interpretación de la integral definida como área ayudan a su comprensión por parte de los estudiantes?

Capítulo 2

Marco conceptual

2.1 Aprender matemáticas con comprensión

Investigaciones consultadas muestran que los estudiantes, si bien pueden aprender a realizar de manera algorítmica algunos cálculos de la integral definida y resolver problemas rutinarios, se encuentran grandes dificultades para hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento, que son el centro de este campo de las matemáticas (Sierpinska, 1992; Artigue, 1993; Artigue1995; Even & Tirosh 2008).

Uno de los principios para la educación matemática que aparece en Principles and Standards for School Mathematics, publicado en el año 2000 por The National Council of Teachers of Mathematics, de los Estados Unidos de Norteamérica es el Principio de aprendizaje:

> *"Los estudiantes deben aprender matemáticas comprendiéndolas y construir activamente nuevos conocimientos a partir de la experiencia y de los conocimientos previos"*

En ese documento y en relación a este principio, se resalta la importancia que tiene aprender matemáticas con comprensión o aprender matemáticas con entendimiento (learning mathematics with understanding). Uno de los resultados de investigación más relevantes es que el entendimiento conceptual constituye una de las componentes fundamentales de la competencia, junto con el conocimiento y destreza en los procedimientos (NCTM, 2000). En este sentido, se destacan entonces tres componentes: conocimiento, destreza y comprensión de los conceptos.

Carpenter y Lehrer (1999) declaran que con el propósito de preparar matemáticamente a los ciudadanos del siglo XXI, es necesario reestructurar la enseñanza de las matemáticas en el salón de clases de manera que sea aprendida con entendimiento.

Cuando el estudiante aprende matemáticas comprendiendo, tiene mayores posibilidades de continuar aprendiendo y de aplicar lo aprendido. No es suficiente que el estudiante aprenda la técnica y el procedimiento. Un aprendizaje sin comprensión es más susceptible de olvido y el estudiante no cuenta con una base para proceder y construir conocimientos nuevos.

2.2 Comprensión conceptual

La comprensión conceptual es concebida por la National Research Council (NRC 2001) como "una comprensión integral y funcional de las ideas matemáticas”. Los estudiantes que tienen una comprensión conceptual, entienden por qué una idea matemática es importante y los tipos de contextos en los que es útil. Los estudiantes son capaces de organizar su conocimiento en un todo coherente, lo que les permite aprender nuevas ideas mediante la conexión de las ideas sobre lo que ya saben.

Un indicador importante de la comprensión conceptual, es que el estudiante sea capaz de representar situaciones matemáticas en diferentes maneras y saber cómo diferentes representaciones pueden ser útiles para diferentes propósitos. Para encontrar el propio camino por el terreno matemático, es importante ver cómo las diferentes representaciones se conectan unas con otras, cómo se parecen y en qué se diferencian. El grado de comprensión conceptual de los estudiantes tiene que ver con la riqueza y el alcance de las conexiones que han hecho.

La comprensión conceptual se debe diferenciar con la fluidez de procedimiento que los estudiantes posean, ya que es muy útil en la resolución de problemas, pero si olvidan una parte del procedimiento ya no pueden conectar las ideas y reconstruir lo olvidado; NRC (2001) define la fluidez procedimental como el conocimiento de cuándo y cómo utilizarlo adecuadamente y la destreza en la ejecución de manera flexible, precisa y eficiente, así como la fluidez procedimental es especialmente necesaria para apoyar la comprensión conceptual del valor posicional y las diferencias entre los métodos de cálculo.

Para averiguar si un estudiante comprende un concepto debemos diseñar problemas que nos permitan identificar conexiones entre las ideas y las diferentes representaciones de un concepto, y no solo la aplicación de fórmulas y reglas, como lo indica Spitzet et al. (2011). Si bien evidenciar el uso correcto de un estudiante de una fórmula es algo relevante para la meta de aprendizaje, no es un indicador de si el estudiante ha desarrollado una comprensión conceptual. Hiebert et al. (2007) sostienen que dos críticas características de una clase de desarrollo de la comprensión conceptual son que los estudiantes tienen que luchar con ideas importantes y que los profesores deben establecer relaciones conceptuales claras.

Carpenter y Lehrer (1999) proponen cinco formas de actividad mental para el desarrollo de la comprensión:

a) construcción de relaciones

b) extensión y aplicación de conocimiento matemático

c) reflexión sobre las experiencias

d) articulación de lo que el individuo conoce

e) apropiación del conocimiento matemático

A continuación damos algunas explicaciones de cada uno de los incisos y algunas de las consideraciones correspondientes que hicimos para el diseño de los cuestionarios en nuestra investigación.

La construcción de las relaciones tiene importancia ya que los objetos matemáticos recobran significado de las formas en que están relacionados con otras cosas. La gente construye significados para una nueva idea o proceso relacionándolos con ideas o procesos ya conocidos. En nuestra investigación hemos utilizado cuestionarios en donde se plantea el cálculo de áreas de regiones delimitadas por las gráficas de dos funciones. Para ello el estudiante deberá hallar las intersecciones de dos curvas, para lo cual deberá saber que esos puntos son las soluciones de ecuaciones, mismas que deberá resolver.

El desarrollo del entendimiento no significa solo agregar nuevos conceptos y procesos a conocimiento existente. También involucra la creación de estructuras que integre el conocimiento. Cuando el conocimiento es altamente estructurado, nuevo conocimiento puede ser relacionado e incorporado a redes de conocimiento existentes. El conocimiento estructurado es menos susceptible a olvidarse (Carpenter & Lehrer 1999). Aprender con entendimiento significa reconocer los principios matemáticos importantes e involucra desarrollo de relaciones que reflejen los hechos matemáticos importantes.

Una de las características del aprendizaje con entendimiento es que hay cierta claridad de cómo puede ser aplicado lo aprendido. La práctica y aplicación del conocimiento ayuda a su comprensión. La aplicación de un concepto a diferentes situaciones ayuda a comprender sus significados y por lo tanto a la comprensión del concepto mismo. En nuestro caso, cuando al estudiante se le plantean diferentes situaciones de regiones determinadas por gráficas de funciones. Se le plantea, por ejemplo, calcular el área de una región determinada por la intersección múltiple de dos gráficas. En algunos casos se le proporcionan explícitamente los límites de integración, en otros casos el estudiante debe determinarlos.

La reflexión involucra un examen minucioso de las acciones y pensamientos del individuo. La aplicación rutinaria de destrezas requiere poca reflexión, sin embargo la reflexión juega un papel importante en la resolución de problemas no rutinarios. La resolución de problemas a menudo involucra examinar concienzudamente la relación existente entre un conocimiento existente y las condiciones de una situación problema (Carpenter & Lehrer, 1999). La reflexión es un hábito y una habilidad que hay que desarrollar. Desarrollar el entendimiento requiere desarrollar el hábito de la reflexión, sobre los conocimientos y sobre sus experiencias. Para resolver los problemas del cuestionario sobre la intersección múltiple de las gráficas de dos funciones, el estudiante deberá reflexionar sobre el hecho que la diferencia entre dos integrales definidas puede significar el área de una región comprendida entre las gráficas de dos funciones también deberá reflexionar sobre el significado de la integral definida para el caso de funciones negativas.

En relación a la articulación de los conocimientos propuesta de Carpenter y Lehrer, ha de agregarse la comunicación de los conocimientos. La articulación y comunicación de los conocimientos ayuda al desarrollo de la comprensión, pues a su vez para articular y comunicar se requiere una comprensión. La comunicación requiere no solamente cierto nivel de comprensión de lo aprendido, sino también es necesario desarrollar y aprender el recurso del lenguaje, incluyendo el matemático. Otros recursos para la comunicación son el uso de figuras, en este caso la integral definida tiene un alto contenido contextual en el terreno gráfico. La articulación y comunicación requiere de la reflexión y el reconocimiento de las ideas matemáticas importantes y de los hechos relevantes.

Es importante que en la enseñanza de la matemática el profesor aliente y promueva la comunicación en sus diferentes formas, por ejemplo en forma oral y escrita. Pero él mismo debe continuar desarrollando esa habilidad. El esfuerzo que haga todo individuo por comunicar las ideas, le ayudará a la comprensión de lo que desea comunicar.

La apropiación del conocimiento matemático por parte de los estudiantes es una meta fundamental en la educación matemática. El individuo participa de manera importante en la construcción de su conocimiento. El individuo mira, escucha y adapta el conocimiento que se intenta comunicarle, a sus conocimientos previos y a sus propios referentes e imágenes mentales. Construye su conocimiento mediante sus propias actividades, el desarrollo es de manera personal. Aprender con entendimiento requiere de un involucramiento crítico.

El aprendizaje con entendimiento no puede darse simplemente aceptando lo que otro le dijo o le explicó, aun tratándose de una autoridad en el tema. Aprender con entendimiento requiere de adoptar una postura en donde el conocimiento se recibe provisionalmente en tanto no se haga la reflexión personal. Después de ese proceso se debe aspirar a la apropiación del conocimiento, hacerlo suyo y no aludir siempre a quien se lo enseñó o al autor del libro donde uno lo aprendió. Esta es una práctica común en los estudiantes, pero ello solamente refleja inseguridad causada por la falta de comprensión. Sin embargo, es posible que aún después de todo ese complicado proceso de apropiación de conocimiento, tengan que hacerse correcciones a lo ya aprendido y apropiado, ya sea mediante una nueva reflexión propia y personal o mediante la intervención del profesor.

Son frecuentes los conocimientos equivocados, nadie se salva de ello, pero es la comunicación de las ideas en un colectivo lo que ayudará a corregirlos o bien mediante el apoyo de alguien que ha avanzado más en la reflexión, como es el caso del profesor respecto al estudiante.

Una tarea importante de la enseñanza es lograr que el estudiante desarrolle una disposición a comprender, se debe captar su voluntad a engancharse en el continuo proceso de comprensión, para lo cual debe desarrollar el hábito de trabajo y reflexión. Debemos lograr que para el estudiante sea importante aprender con entendimiento, solamente así estará dispuesto a desarrollar su comprensión.

2.3 El enfoque del curso de Matemáticas V del IEMS-DF

Los planes y programas del IEMS-DF, indican que los estudiantes antes de cursar la asignatura de Matemáticas V en el quinto semestre deben antes cursar y aprobar las asignaturas de álgebra, geometría-trigonometría, geometría analítica y precálculo. Este último tiene como base el estudio de los tipos de funciones y límites de funciones, que es el preámbulo a la asignatura de Cálculo diferencial e Integral.

Uno de los objetivos del curso de Cálculo Diferencial e Integral del programa del IEMS-DF establece

> El estudiante analizará funciones utilizando herramientas y conceptos del Cálculo a través del tema y calculará áreas bajo la gráfica de una función. Se espera que un estudiante del IEMS-DF que ya haya cursado Matemáticas V sea capaz de resolver problemas básicos del cálculo de áreas por medio de la integral definida.

El programa del IEMS-DF nos indica que en las cuatro asignaturas anteriores a la asignatura de Matemáticas V se ha hecho hincapié en la importancia de una forma ordenada de razonar, en el desarrollo de las capacidades de análisis y de síntesis, en el uso de un lenguaje apropiado a las Matemáticas y en la destreza para generalizar o para proponer ejemplos particulares, con todo ello se destaca la importancia del razonamiento matemático. La asignatura de Matemáticas V tiene como una de sus metas desarrollar esas habilidades y consolidarlas a través de su uso.

En el plan de la asignatura Matemáticas V se indica que, no sólo es aplicar e interrelacionar los conocimientos adquiridos previamente, sino que se requiere hacer uso de la metodología construida. Por otro lado, en el enfoque de la asignatura se sugiere mostrar aplicaciones interesantes y no solo solución de problemas rutinarios de las matemáticas. Se indica que las matemáticas aprendidas hasta el momento se aplican en el Cálculo y éste a su vez tiene una gran cantidad de aplicaciones prácticas en otras ciencias.

Esta asignatura cierra un ciclo en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, por lo tanto es importante poner atención en que éstos hayan adquirido una madurez adecuada en su forma de razonamiento.

Capítulo 3

Marco de referencia

3.1 Cálculo de áreas.

Desde nuestros estudios de primaria aprendimos a calcular áreas de diversas figuras geométricas. Las más simples de estas figuras son los cuadrados y los rectángulos en general, para los cuales el área es igual al producto de las longitudes de dos lados adyacentes. De la fórmula para el área de un rectángulo se obtiene con facilidad la fórmula para el área del triángulo rectángulo, en cuyo caso le área está dada por el semiproducto de las longitudes de los catetos.

Para un triángulo no rectángulo, el área es la mitad de la base por la altura. Si b es la longitud de la base y h la de la altura correspondiente, entonces el área del triángulo está dada por $A = \frac{1}{2}bh$. Esta fórmula es deducible a partir de la fórmula para el triángulo rectángulo, para lo cual un triángulo arbitrario se parte en dos triángulos rectángulos.

Para una figura limitada por líneas rectas, es decir, para una figura poligonal, el área se calcula dividiendo la figura en triángulos cuyo único posible traslape sean sus lados. Con una tal partición se dice que se triangula la figura. En este caso el área del polígono se calcula con la suma de las áreas de los triángulos (Fig. 3.1).

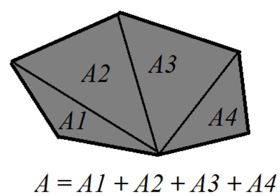
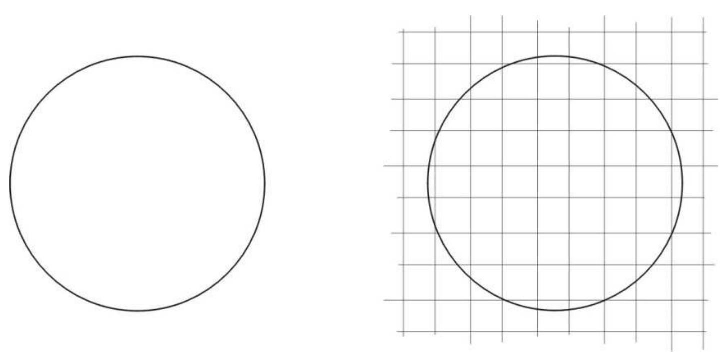
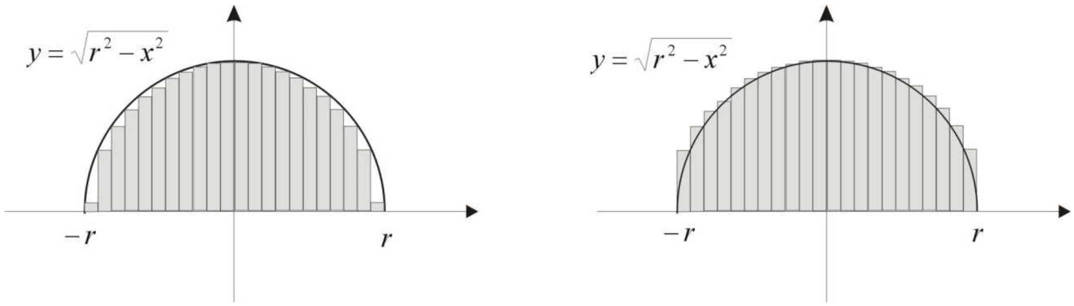


Figura 3.1.

El cálculo del área de una región limitada con lados curvilíneos es mucho más complicado, requiere de un proceso de aproximación a través del cálculo de áreas de figuras poligonales y también puede hacerse mediante cuadrículas.



Una manera particular de obtener aproximaciones para estas áreas es mediante áreas de rectángulos.



El valor exacto del cálculo del área de una región de este tipo requiere del concepto de límite y este límite es precisamente el valor del área.

3.2 La Integral definida y su interpretación como área.

La integral definida surge del problema de cálculo de áreas. El acercamiento a la integral definida que nos permite interpretarla como áreas de regiones limitadas por lados curvilíneos son las sumas de Riemann, que no son otra cosa que aproximaciones a un área por medio de rectángulos. Para definir una suma de Riemann para una función f continua en un intervalo $[a,b]$, consideremos

$$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

puntos del intervalo $[a,b]$. Estos puntos dividen el intervalo $[a,b]$ en subintervalos

$$[x_0,x_1],\ [x_1,x_2],\ldots,[x_{n-2},x_{n-1}],\ [x_{n-1},x_n].$$

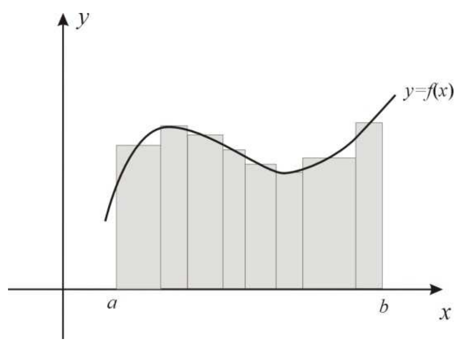
Una suma de Riemann tiene la forma

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

Los puntos t_i se eligen en los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, es decir

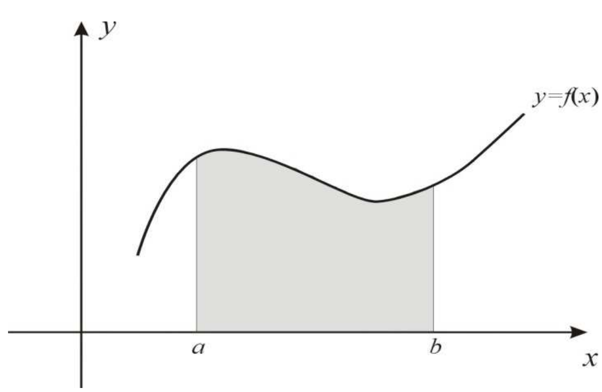
$$t_1 \in [x_0, x_1],\ t_2 \in [x_1, x_2], \ldots, t_{n-1} \in [x_{n-2}, x_{n-1}],\ t_n \in [x_{n-1}, x_n].$$

Entonces cada sumando $f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ corresponde al área del rectángulo que tiene base $x_i - x_{i-1}$ y altura $f(t_i)$, así que la suma S_n es una aproximación al área de la región.



Al tomar el límite de las sumas haciendo tender n a infinito y haciendo que las longitudes de los subintervalos $x_i - x_{i-1}$ tienda a cero, las sumas tenderán al área de la región y es este límite lo que se llama la integral definida

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$



Este acercamiento a la integral definida, permite de manera natural interpretarla como área de una región. En términos estrictos, es una manera de definir el área de la región.

Ya establecida la integral definida, el siguiente paso en la enseñanza debería ser la presentación del teorema fundamental del cálculo, el cual permite calcular una integral definida cuando se conoce una primitiva de la función a integrar. Más precisamente, Si tenemos una función f continua en un intervalo $[a,b]$ y conocemos una función primitiva de f, es decir, una función derivable F definida en el intervalo $[a,b]$ que satisface $F'(x) = f(x)$, entonces la integral definida de f puede calcularse con la fórmula

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Este teorema no necesariamente ha de probarse en el nivel medio superior, pero será importante presentarlo precisamente en calidad de teorema y no de otra forma (por ejemplo, como una definición de la integral definida). Enseguida se deberán hacerse varios ejercicios con el propósito de que se adquiera conciencia de la importancia de conocer primitivas de funciones, por lo tanto, se le dará la justa importancia a los métodos de integración que no son otra cosa que métodos para hallar primitivas de funciones dadas. Habiendo adquirido alguna destreza en el cálculo de integrales definidas, usando el teorema fundamental del cálculo, se puede pasar a las aplicaciones de la integral definida en varios contextos, pero sin duda de estas aplicaciones una de las más importantes es el del cálculo de áreas, problema que dio origen a este concepto.

Es importante observar que el significado que dimos a la integral definida como área fue posible debido a que la gráfica a la que recurrimos corresponde a la de una función que es positiva en todos los puntos de su dominio. En términos geométricos esto significa que la gráfica se encuentra por arriba del eje de las abscisas. Para una función positiva, cada sumando de la suma de Riemann es

un número positivo y ciertamente representa el área de un rectángulo, así que la suma de Riemann representa la suma de áreas y esta suma es una aproximación al área de la región limitada por la gráfica de la función, el eje de las abscisas y dos rectas verticales.

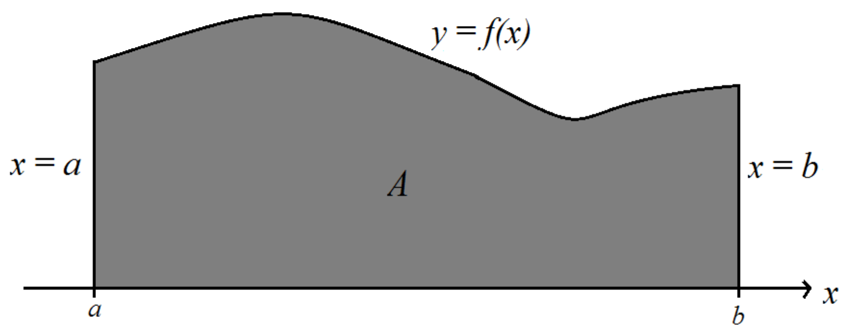


Figura 3.2.

Sin embargo, la integral definida que se establece mediante el límite de sumas de Riemann, es aplicable a funciones continuas en general, sin importar si es positiva o no. La funciones a las cuales es aplicable la integral definida pueden tomar valores positivos, negativos y cero. En todos los casos la integral definida es calculable mediante la fórmula del teorema fundamental del cálculo

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

En todos los casos la integral definida también puede utilizarse para calcular áreas, pero habrá que hacer las consideraciones pertinentes para su correcta aplicación. Por esta razón puede ser importante presentar diferentes situaciones especiales de funciones y regiones, que permitan al estudiante avanzar gradualmente hacia las aplicaciones complejas de la integral definida en el cálculo de áreas. Son éstas las situaciones que merecen un buen nivel de comprensión.

3.3 Integral definida y el cálculo de áreas.

A continuación presentamos diferentes situaciones del cálculo del área de una región limitada por las gráficas de dos funciones, mediante la integral definida. Estas situaciones pareciera que son las que causan mayor dificultad a los estudiantes, razón por la cual hemos considerado varios casos, algunos de los cuales son de mayor complejidad.

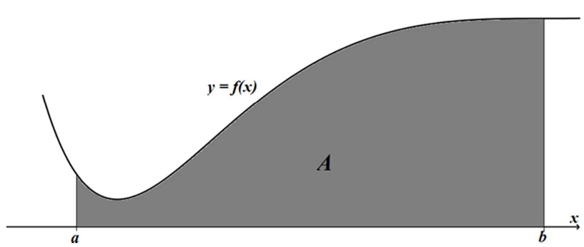
Los primeros tres casos se refieren al área de una región delimitada por la gráfica de una función y el eje de las abscisas, en un intervalo dado

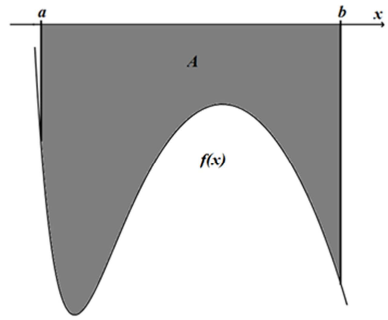
Caso i) cuando la función *f* es positiva

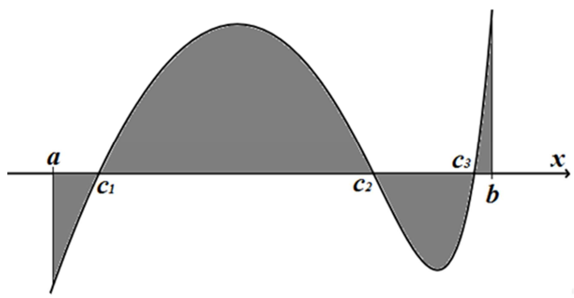
Caso ii) cuando la función *f* es negativa

Caso iii) cuando la función toma valores positivos, valores negativos y cero

En las siguientes figuras se ilustran gráficas de funciones correspondientes a estos tres primeros casos





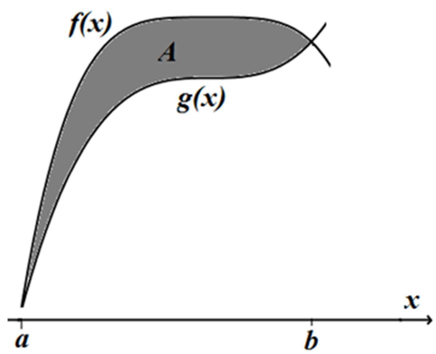


Los siguientes casos se refieren al área de una región delimitada por las gráficas de dos funciones

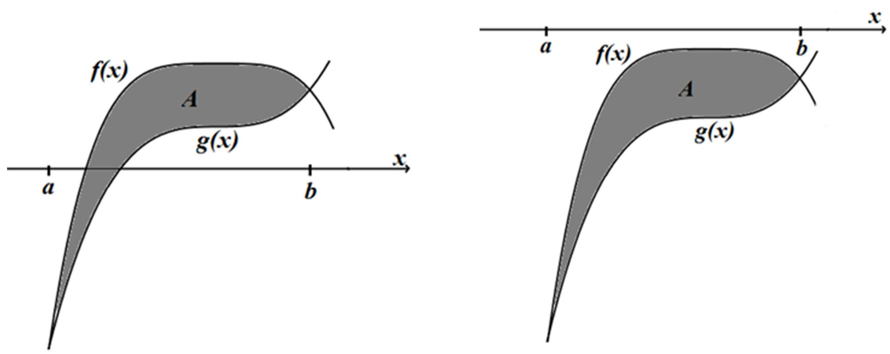
Caso iv) Áreas de regiones delimitadas por las gráficas de dos funciones con dos puntos de intersección.

Caso v) Áreas de regiones delimitadas por las gráficas de dos funciones con más de dos puntos de intersección.

La siguientes figura ilustra el caso iv)

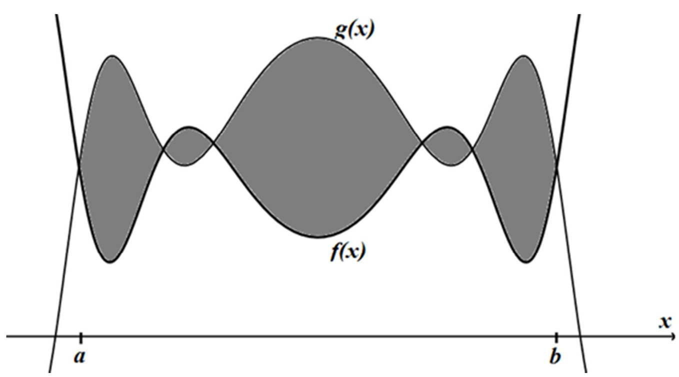


Este caso merece especial atención, ya que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ pudieran no tener un único signo, como se ilustra en las siguientes figuras



Esta pudiera ser una situación de alto grado de dificultad.

El caso v) se ilustra en la siguiente figura



Caso i). Cuando la función es positiva. En este caso tenemos $f(x) > 0$. En realidad vamos suponer $f(x) \geqslant 0$ para toda $x \in [a,b]$ por lo que cada suma de Riemann es no negativa. En esta caso, la gráfica luce como la de la figura 3.3 y la región está limitada por la gráfica en el intervalo $[a,b]$, el eje de las abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$, como se muestran en la misma figura.

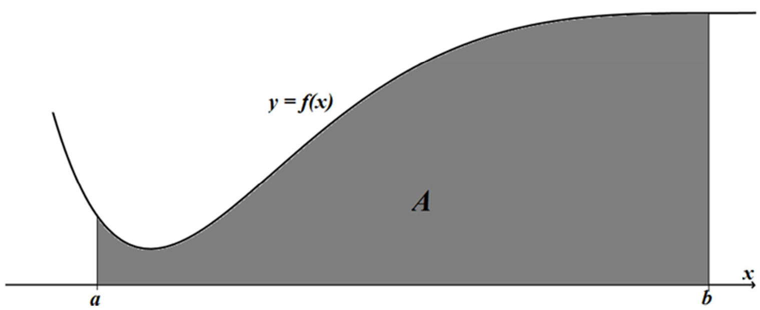


Figura 3.3.

Un método para aproximarnos el área que buscamos es dividir el intervalo [a, b] en subintervalos de igual longitud (el método funciona aún cuando estos subintervalos tienen distinta longitud) y construir los rectángulos, cuyas bases son esos subintervalos y las alturas son los valores de la función en algún punto de cada subintervalo.

La división del intervalo [a,b] en *n* subintervalos menores, nos dan puntos de división $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$, de tal modo que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Estos puntos constituyen lo que llamamos una partición del intervalo $[a,b]$. Los *n* subintervalos son

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

y sus longitudes

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

Para este caso, estamos tomando los *n* subintervalos del mismo tamaño,

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$$

Ahora elegimos un número x_i^τ en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y formamos un rectángulo A_i, cuya base es Δx_i y su altura es $f(x_i^\tau)$, igual que en la figura 3.4.

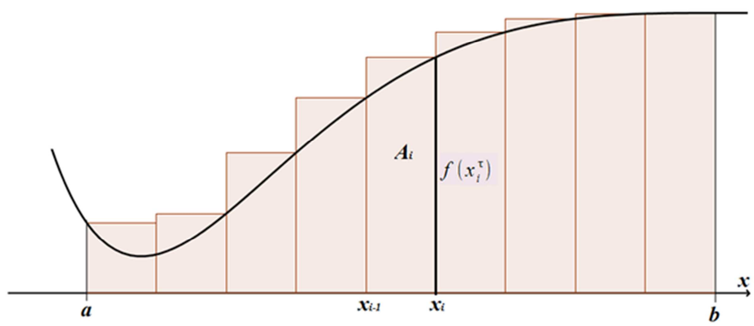


Figura 3.4.

Cada punto de x_i^τ puede estar en cualquier lugar de su subintervalo: en el extremo derecho, en el extremo izquierdo o en algún lugar intermedio. Para nuestro análisis lo consideraremos como $x_i^\tau = x_i$. Entonces el área A_i del i-ésimo rectángulo es

$$A_i = f(x_i)\Delta x_i$$

La suma de los *n* rectángulos, $A_1, \ldots, A_n$, es una aproximación al área *A*; la cual es

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} f\,(x_i)\Delta x_i = f(x_1)\Delta x_1 + \ldots + f(x_n)\Delta x_n$$

Las figuras 3.5 y 3.6 muestran los rectángulos para particiones con seis y nueve subintervalos

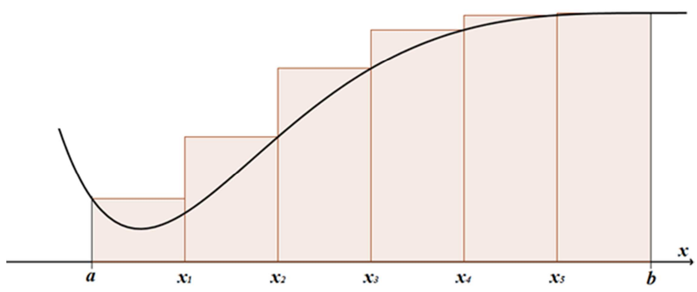


Figura 3.5. *n = 6.*

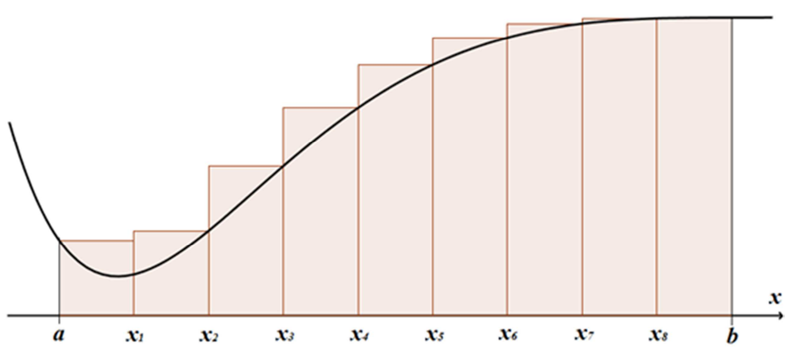


Figura 3.6. *n = 9.*

Con la figura 3.7 tratamos de ilustrar el caso general. La aproximación será mejor en la medida que los rectángulos se adelgazan.

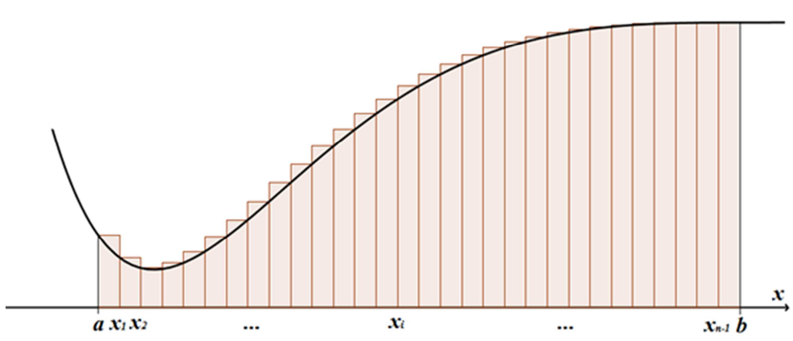


Figura 3.7. *n* rectángulos.

El área *A* de la región se define como el valor límite de las áreas de las regiones poligonales que hemos empleado para la aproximación. Es decir

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\,(x_i)\Delta x_i$$

Ejemplo. Determinar el área bajo la parábola $y = x^2$, en el intervalo [0,1] (ver Fig. 3.8).

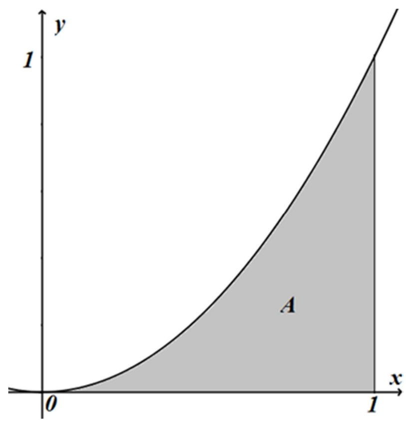


Figura 3.8.

El área está delimitada por la función $y = x^2$, las rectas *x = 0* y *x = 1* y el *eje x*. Dividimos el intervalo [0, 1] en cinco subintervalos $\left[0,\frac{1}{5}\right], \left[\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right], \left[\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right], \left[\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right], \left[\frac{4}{5},1\right]$, se obtiene una aproximación del área *A* por medio de rectángulo cuya base sea el tamaño de cada subintervalo y la altura el valor de la función *f* evaluada en el punto extremo derecho de cada subintervalo (Fig. 3.9).

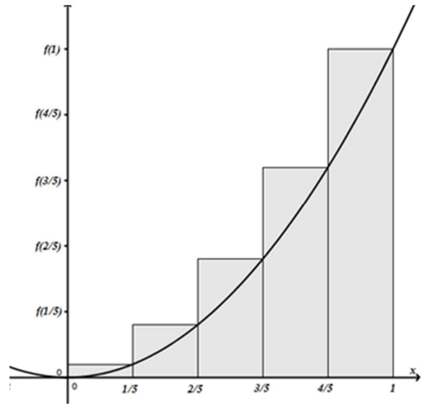


Figura 3.9.

Cada rectángulo tiene base de $\frac{1}{5}$ y las alturas son $\left(\frac{1}{5}\right)^2, \left(\frac{2}{5}\right)^2, \left(\frac{3}{5}\right)^2, \left(\frac{4}{5}\right)^2\ y\ 1^2$. Si denotamos $A_{n=5}$ la suma de las áreas de estos rectángulos de aproximación, obtenemos

$$A_{n=5} = \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}\cdot 1^2 = \frac{11}{25}.$$

Ahora dividimos el intervalo [0,1] en ocho subintervalos,

$$\left[0,\frac{1}{8}\right],\left[\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right],\left[\frac{1}{4},\frac{3}{8}\right],\left[\frac{3}{8},\frac{1}{2}\right],\left[\frac{1}{2},\frac{5}{8}\right],\left[\frac{5}{8},\frac{3}{4}\right],\left[\frac{3}{4},\frac{7}{8}\right] y \left[\frac{7}{8},1\right].$$

Obtenemos otra aproximación del área *A* (fig. 3.10).

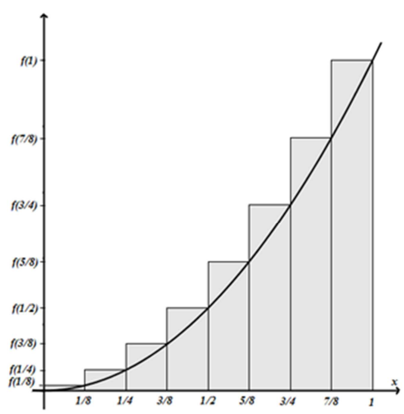


Figura 3.10.

Cada rectángulo tiene base de $\frac{1}{8}$ y las alturas son respectivamente

$$\left(\frac{1}{8}\right)^2, \left(\frac{1}{4}\right)^2, \left(\frac{3}{8}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{5}{8}\right)^2, \left(\frac{3}{4}\right)^2, \left(\frac{7}{8}\right)^2 \; y \; 1^2.$$

Si denotamos por $A_{n=8}$ la suma de las áreas de estos rectángulos de aproximación, obtenemos

$$A_{n=8} = \frac{51}{128}.$$

Con base en las aproximaciones obtenidas $A_{n=5} \; y \; A_{n=8}$ parece que conforme *n* crece, A_n se vuelve cada vez, una mejor aproximación del área de *A*. El área *A* como el límite de las sumas de las áreas de los rectángulos de aproximación; esto es,

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{i}{n}\right)^2\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{6n^2} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Así el área es $A = \frac{1}{3}$ de forma exacta.

Caso ii) En este caso suponemos que la función *f* es negativa. Ver la figura 3.11.

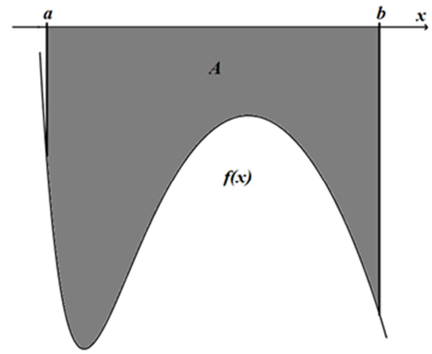


Figura 3.11.

Vamos a ilustrar el caso con un ejemplo.

Ejemplo. Calculemos el área de la región limitada por la gráfica de la función

$$f(x) = -x^2 + 2x - 2,$$

y el eje de las abscisas, entre los puntos *x = -1* y *x = 3*.

En la figura 3.12 mostramos la región cuya área deseamos calcular.

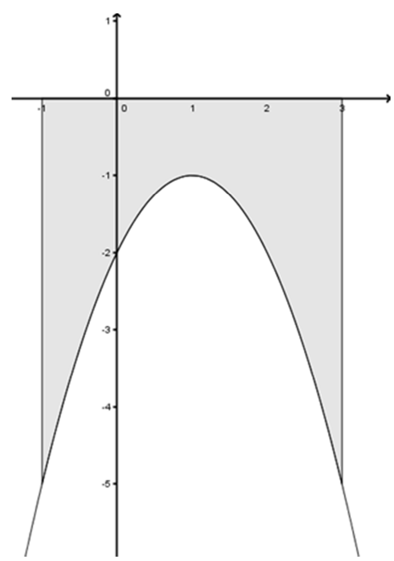


Figura 3.12.

Dividimos el intervalo [-1,3] en cuatro subintervalos [-1,0], [0,1], [1,2], [2,3], obtenemos una aproximación del área *A* por medio de rectángulo cuya base sea el tamaño de cada subintervalo y la altura el valor de la función *f* evaluada en el punto extremo-izquierda de cada subintervalo (Fig. 3.13).

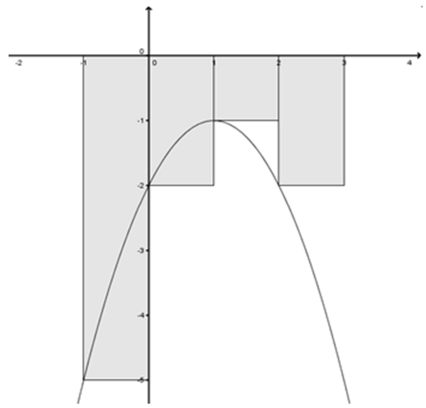


Figura 3.13.

Cada rectángulo tiene base 1 y las alturas respectivas son |-5|, |-2|, |-1| y |-2|.

Si denotamos por $A_{n=4}$ la suma de las áreas de estos rectángulos de aproximación, obtenemos

$$A_{n=4} = 1(5) + 1(2) + 1(1) + 1(2) = 10.$$

El área *A* de la región es el límite de las sumas de las áreas de los rectángulos de aproximación; esto es,

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \left(\left| f\left(-1 + \frac{4i}{n}\right) \right| \frac{4}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \left(\left(5 - \frac{16i}{n} + \frac{16i^2}{n^2} \right) \cdot \frac{4}{n} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(20 - \frac{64}{n^2} \sum_{i=0}^{n} i + \frac{64}{n^3} \sum_{i=0}^{n} i^2 \right)$$

$$=20 - 64 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 64 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)}{6}$$

$$= 20 - 32 \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{n} + \frac{32}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$$

$$= 20 - 32 \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{32}{3} \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= 20 - 32 + \frac{64}{3} = \frac{28}{3}$$

Si usamos el teorema fundamental del cálculo, obtenemos el valor de la integral definida. Esta integral tiene un valor negativo y su valor absoluto es precisamente el valor del área de la región $A = -\int f(x)dx > 0$:

$$A = -\int_a^b f(x)dx = -\int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x - 2)dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x\Big|_{-1}^{3} = \frac{28}{3}$$

Caso iii) Funciones que toman valores positivos, valores negativos y cero. Ahora calcularemos el área de una región como la que se ilustra en la figura 3.14.

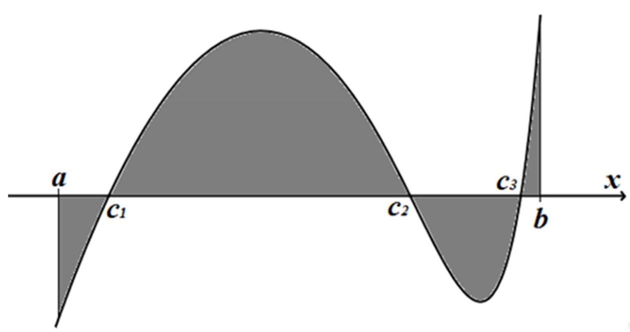


Figura 3.14.

Para calcular el área de la región sombreada determinamos los subintervalos de $[a,b]$ donde la función f tiene un único signo. Según la gráfica de arriba, tenemos cuatro subintervalos del intervalo $[a,b]$. La región total se compone de las cuatro subregiones correspondientes a los cuatro subintervalos. Las áreas de las subregiones se pueden calcular de acuerdo a los casos i) y ii) antes presentados. El área de la región total entonces es igual a la suma de las áreas de las subregiones.

En términos de integrales definidas, el procedimiento anterior se expresa con base en la propiedad aditiva de la integral definida. Es decir, la integral $\int_a^b f(x)dx$ se puede expresar como la siguiente suma de integrales

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)dx + \int_{c_3}^{b} f(x)dx$$

Algunas de las integrales en esta sumatoria, tienen un valor positivo y otras tienen un valor negativo. De acuerdo a la gráfica de la figura 3.14, tenemos

$$\int_a^{c_1} f(x)dx < 0, \quad \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx > 0, \quad \int_{c_2}^{c_3} f(x)dx < 0, \quad \int_{c_3}^{b} f(x)dx > 0$$

Para calcular el área de la región total tomamos los valores absolutos de las integrales negativas, lo que significa cambiarle el signo a esas integrales, y sumamos los resultados obtenidos. Así tenemos que el área de la región de la figura 3.14 está dada por

$$\mathrm{A} = \left|\int_a^{c_1} f(x)dx\right| + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \left|\int_{c_2}^{c_3} f(x)dx\right| + \int_{c_3}^{b} f(x)dx$$

Veamos un ejemplo para una función específica.

Ejemplo. Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$ y el eje de las abscisas, en el intervalo [-4,2]

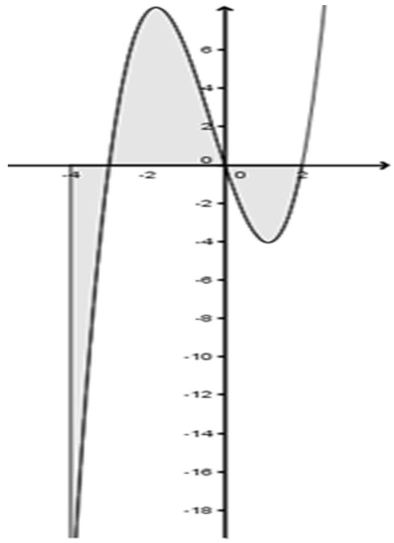


Figura 3.15.

Calculamos los puntos de intersección de la función *f* con el *eje x*.

$$x^3 + x^2 - 6x = 0$$

$$x(x+3)(x-2) = 0$$

Entonces la intersección de la gráfica de la función *f* y el *eje x* es en los puntos *x* = *-3*, *0* y *2*.

Entonces el área *A* está dada por

$$A = \left|\int_{-4}^{-3} (x^3 + x^2 - 6x)\, dx\right| + \int_{-3}^{0} (x^3 + x^2 - 6x)\, dx + \left|\int_{0}^{2} (x^3 + x^2 - 6x)\, dx\right|$$

Es decir

$$A = -\int_{-4}^{-3} (x^3 + x^2 - 6x)\, dx + \int_{-3}^{0} (x^3 + x^2 - 6x)\, dx - \int_{0}^{2} (x^3 + x^2 - 6x)\, dx$$

$$= -\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 3x^2\Big|_{-4}^{-3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 3x^2\Big|_{-3}^{0} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2\Big|_{0}^{2}$$

$$=\frac{125}{12} + \frac{63}{4} + \frac{16}{3} = \frac{63}{2}$$

Así que $A = \frac{63}{2}$.

Caso iv) Áreas de regiones limitadas por las gráficas de dos funciones con dos puntos de intersección. En el caso de regiones limitadas por las gráficas de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ en un intervalo $[a,b]$, podemos iniciar con la situación simple $0 \leq g(x) \leq f(x)$, como se ilustra en la figura 3.16

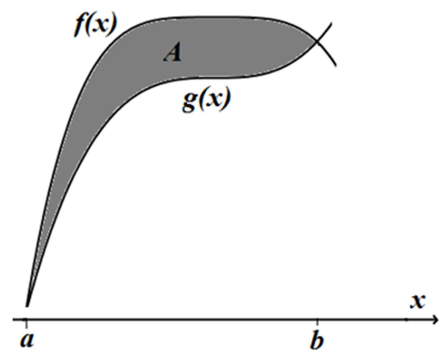


Figura 3.16.

Como $0 \leq g(x) \leq f(x)$ para toda x en el intervalo $[a,b]$, la gráfica de $f(x)$ está arriba de la gráfica de $g(x)$. Entonces en este caso, el área de la región comprendida entre las dos gráficas, es igual al área de la región bajo la función $f(x)$ menos el área de la región bajo la función $g(x)$. Como el área de la región bajo la función $f(x)$ es igual a $\int_a^b f(x)dx$ y el área de la región bajo la función $g(x)$ es igual a $\int_a^b g(x)dx$, tenemos que el área de la región entre las dos gráficas está dada por

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\, dx$$

Entonces el área entre las dos gráficas sobre el intervalo $[a,b]$, se calcula con la integral definida de la función diferencia $f(x) - g(x)$:

$$A = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\, dx$$

Es interesante mostrar que esta fórmula también aplica aun cuando las funciones $f(x)$ y $g(x)$ no sean positivas, basta que se cumpla la desigualdad $g(x) \leq f(x)$ para toda x en el intervalo $[a,b]$, por ejemplo, aplica al caso de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ cuyas gráficas se ilustran en las figuras 3.17 y 3.18.

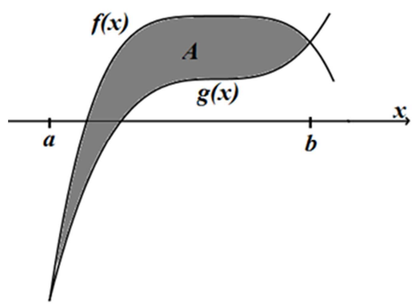


Figura 3.17

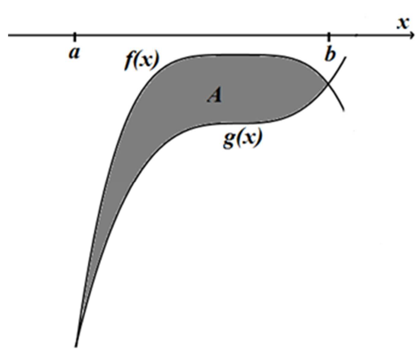


Figura 3.18

Para convencernos de que la fórmula del área

$$A = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx$$

también aplica para estos casos, basta observar que si trasladamos una misma distancia hacia arriba las gráficas de ambas funciones, la región entre ambas gráficas permanece inalterada.

Entonces traslademos hacia arriba las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ una distancia tal que ambas gráficas en el intervalo $[a,b]$ se encuentren por arriba del eje de las abscisas.

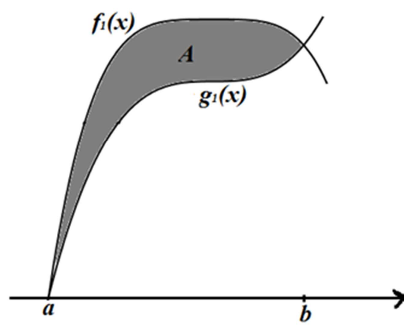


Figura 3.19.

Esto equivale a sumarle una misma constante a ambas funciones de manera que se obtengan nuevas funciones, ambas positivas.

Más precisamente, elijamos cualquier número c positivo de manera que las funciones $f_c(x)$ y $g_c(x)$ definidas por

$$f_c(x) = f(x) + c, \qquad g_c(x) = g(x) + c$$

sean positivas para toda x en el intervalo $[a,b]$. Esto es posible si elegimos c suficientemente grande.

Que c sea positiva, significa que las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ se trasladan hacia arriba y si c es suficientemente grande lograremos que las gráficas de ambas funciones $f_c(x)$ y $g_c(x)$ estén por arriba del eje de las abscisas.

Entonces estamos ante una situación de dos funciones positivas $f_c(x)$ y $g_c(x)$ que satisfacen $g_c(x) \leq f_c(x)$ para toda x en $[a,b]$. Las gráficas de estas funciones se ilustran en la figura 3.19.

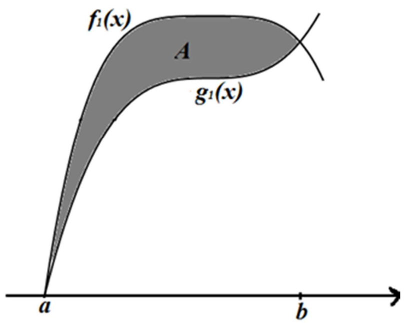


Figura 3.19.

Si *A* es el área de esa región sombreada tenemos

$$A = \int_a^b \left(f_c(x) - g_c(x)\right) dx$$

Pero

$$f_c(x) = f(x) + c, \qquad g_c(x) = g(x) + c$$

entonces

$$A = \int_a^b [f(x) + c] - [g(x) + c]dx = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx$$

Así que el área entre las dos curvas originales, correspondientes a las funciones $g(x) \leqslant f(x)$, está dada por la misma fórmula

$$A = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\, dx.$$

Ejemplo. Calculemos el área de la región limitada por las funciones

$$f(x) = -x + 2 \quad \text{y} \quad g(x) = x^2.$$

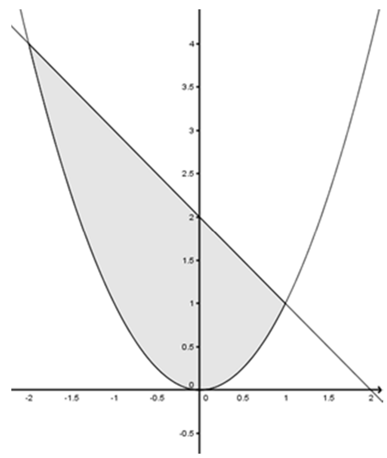


Figura 3.20.

Calculamos los puntos de intersección de las funciones *f* y *g*. Estos puntos de intersección son las soluciones de la ecuación

$$x^2 = -x + 2$$

La cual se escribe

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x-1)(x+2) = 0$$

De esta relación se sigue que las raíces son 1 y -2, así que los puntos de intersección de las gráficas de las funciones son (1,1) y (-2,4).

Entonces el área *A* está dada por

$$A = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\, dx = \int_{-2}^{1} (-x + 2 - x^2) dx$$

$$-\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\bigg|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}$$

Así tenemos $A = \frac{9}{2}$.

Caso v) Áreas de regiones limitadas por las gráficas de dos funciones con más de dos puntos de intersección. Para el caso en que dos funciones se corten dos o más veces como el ejemplo mostrado en la figura 3.21 y considerando el intervalo [a, b], es necesario trabajar por separado cada uno de los subintervalo mostrado en la figura 3.22.

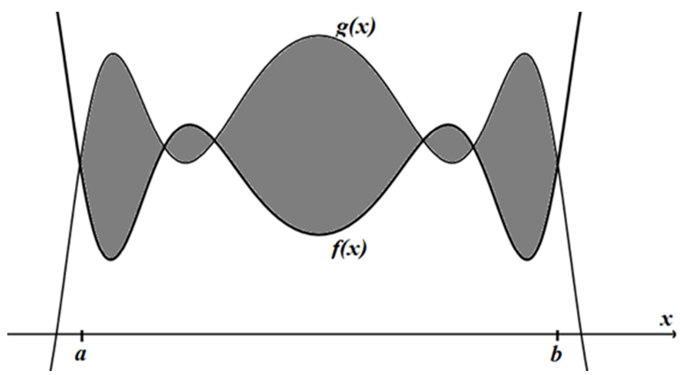


Figura 3.21.

El área *A* entre las funciones *f* y *g* en el intervalo [a, b], es calculada por partes considerando los subintervalos donde la función *f* es mayor que la función *g* y los subintervalos donde la función *g* es mayor que la función *f*. Así

$$A = \int_a^{c_1} \big(g(x) - f(x)\big)\, dx + \int_{c_1}^{c_2} \big(f(x) - g(x)\big)\, dx + \int_{c_2}^{c_3} (g(x) - f(x)d)\, x$$

$$+ \int_{c_3}^{c_4} \big(f(x) - g(x)\big)\, dx + \int_{c_4}^{b} \big(g(x) - f(x)\big)\, dx$$

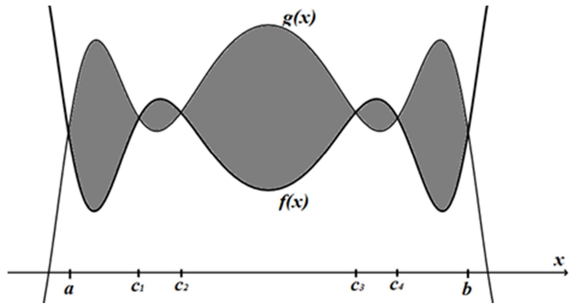


Figura 3.22.

Ejemplo. Calculemos el área de la región limitada por las funciones

$$f(x) = -x^2 + 4 \text{ y } g(x) = x^3 + 2$$

en el intervalo [0,2].

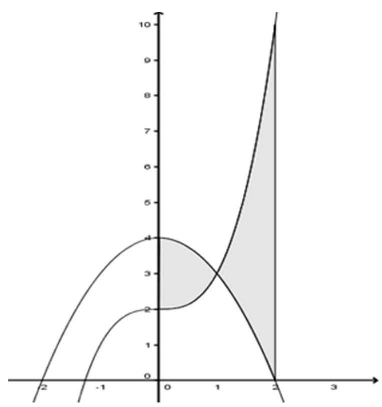


Figura 3.23.

Los puntos de intersección de las funciones dentro del intervalo [0,2], son las raíces de la ecuación

$$-x^2 + 4 = x^3 + 2$$

$$x^3 + x^2 - 2 = 0$$

en el intervalo [0,2]. Es fácil verificar que $x = 1$ es una raíz, pues

$$(1)^3 + (1)^2 - 2 = 0$$

Así, la intersección de las dos gráficas en el intervalo [0,2] es en el punto (1,3).

Entonces el área está dada por

$$A = \int_0^1 \left(-x^2 + 4 - (x^3 + 2)\right) dx + \int_1^2 \left(x^3 + 2 - (-x^2 + 4)\right) dx$$

$$-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 2x \Big|_0^1 + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2x \Big|_1^2 = \frac{17}{12} + \frac{49}{12}$$

O sea $A = \frac{11}{2}$.

Un caso particular de intersección múltiple de las gráficas es el que se muestra en la figura 3.24. En este caso tenemos dos funciones que se cortan en tres puntos en el intervalo [a, b], así tenemos $g(x) \leqslant f(x)$ en el subintervalo $[a, c_1]$ y $f(x) \leqslant g(x)$ en el subintervalo $[c_1, b]$.

El área *A* en el intervalo $[a, b]$ está dada por

$$A = \int_a^{c_1} \left(f(x) - g(x)\right) dx + \int_{c_1}^b \left(g(x) - f(x)\right) dx$$

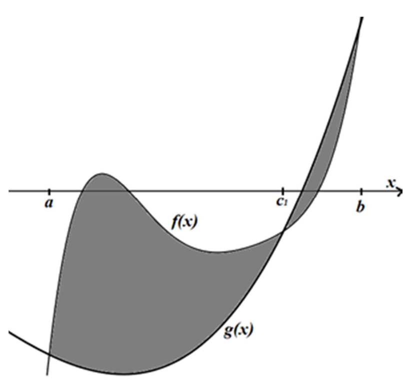


Figura 3.24.

Ejemplo. Calcula el área de la región limitada por las funciones

$$f(x) = -x^2 + x \text{ y } g(x) = x^2 - 1$$

en el intervalo [-1,1], como se ilustra en la figura 3.25.

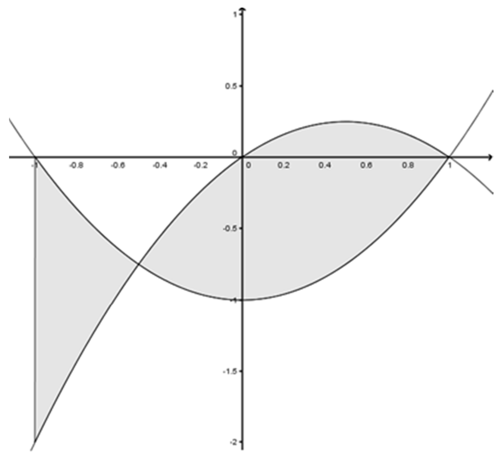


Figura 3.25.

Calculamos los puntos de intersección de las funciones f y g en el intervalo [-1,1], para ello resolvemos la ecuación

$$-x^2 + x = x^2 - 1$$

Esta ecuación es cuadrática y también se escribe

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$(x-1)(2x+1) = 0$$

De estas expresiones se obtienen las raíces

$$x = 1 \text{ y } x = -\frac{1}{2}$$

Así, los puntos de intersección son $(1,0)$ y $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ y el rea está dada por

$$A = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \big(g(x) - f(x)\big)\, dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \big(f(x) - g(x)\big)\, dx$$

O sea

$$A = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left(x^2 - 1 - (-x^2 + x)\right) dx$$
$$+ \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left(-x^2 + x - (x^2 - 1)\right) dx = \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x\right)\Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}}$$
$$+ \left(-\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right)_{-\frac{1}{2}}^{1} = \frac{11}{24} + \frac{9}{8}.$$

Así tenemos $A = \frac{19}{12}$.

3.4 Acerca de libros de texto de Cálculo Integral

Con el propósito de averiguar si los libros de texto son causa de las dificultades que los estudiantes tienen con la comprensión y aplicación de la integral definida en el cálculo de áreas, ya fuese por un tratamiento insuficiente o el tipo de acercamiento a la integral definida que impide comprender su interpretación como área y aplicación en la solución de problemas, llevamos a cabo una revisión de los libros de texto de Cálculo Integral que se emplean usualmente en el colegio antes citado, los cuales se encuentran en la biblioteca del plantel y que son consultados por los estudiantes. Como resultado de la revisión obtuvimos que se distinguen dos tipos de acercamiento a la integral definida y su aplicación al cálculo de áreas, los que no utilizan las sumas de Riemann para establecer la integral definida y los que recurren a estas sumas en su acercamiento.

1.- Los que no usan ni hacen referencia a las sumas de Riemann para la interpretación de la integral definida y la aplicación de ésta al cálculo de áreas, están los textos de De Oteyza (2006), Granville (1997) y Arana (2008).

Por ejemplo, Arana en su acercamiento al cálculo de áreas, sin reflexión alguna o argumento, declara:

El cálculo del área de la superficie que determinan dos curvas al cortarse. Si en intervalo (a,b) dos funciones *f(x)* y *g(x)* cumple que $f(x) \geq g(x)$, entonces,

$$\int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx$$

representa el área de la superficie que encierran las dos curvas.

El texto De Oteyza (2006), se diseñó como lo indica el mismo texto, para su uso en el nivel medio superior, donde los estudiantes se enfrentan por primera vez al Cálculo. En la aplicación de la integral definida al problema del cálculo de áreas, el texto no relaciona los conceptos a través de las sumas de Riemann sino partiendo del Teorema Fundamental del Cálculo. El autor muestra los ejemplos de caso de estudio: 1, 3 y 4 conforme a nuestra clasificación mostrada en el marco de referencia de este trabajo.

El texto de Granville (1997), no indica el nivel al cual debe ser usado. Por supuesto, por tradición el libro se utiliza en la enseñanza del cálculo del nivel medio superior. En un primer acercamiento, el autor no relaciona la integral definida con las sumas de Riemann, esto lo hace posteriormente cuando aplica la integral definida al cálculo de áreas. Es en ese momento, es cuando el autor refuerza el concepto de integral definida con la ayuda de las sumas de Riemann. En el texto se ilustra el cálculo de áreas con ejemplos simples, según nuestra clasificación presentada en el marco de referencia de este trabajo.

El texto de Arana (2008), no indica el nivel al cual está dirigido, el acercamiento a la integral definida y al cálculo del área es por medio del Teorema Fundamental del Cálculo.

2.- De los autores cuyo acercamiento a la integral definida es través de las sumas de Riemann y su aplicación al cálculo de áreas distinguimos dos tipos:

a) Tenemos aquellos que introducen al alumno en el concepto de integral partiendo de la antiderivada, posteriormente establecen el concepto de integral definida por medio de las sumas de Riemann. De los ocho textos restantes cinco tienen este acercamiento: Fuenlabrada (2001), Smith & Minton (2003), Ayres & Mendelson (2001), Morales (2004) y Ibáñez & García (2008).

El texto de Fuenlabrada (2001), el cual no indica a que nivel está dirigido. Introduce el concepto de integral definida por medio de la suma de Riemann, al momento de relacionar la integral definida con el área ya no es a través de la suma de Riemann sino por medio del Teorema Fundamental del Cálculo. El autor muestra los ejemplos de caso de estudio: 1, 2, 4 y 5 conforme a nuestra clasificación mostrada en el marco de referencia de esté trabajo.

En el caso del texto de Smith & Minton (2003), el cual está dirigido a un primer curso de cálculo, como el texto lo indica. Relaciona la integral definida con el área a través de las sumas de Riemann. El autor muestra los ejemplos de caso de estudio: 1, 4 y 5 conforme a nuestra clasificación mostrada en el marco de referencia de esté trabajo.

El texto de Ayres & Mendelson (2001), está dirigido a estudiantes de cálculo básico y universitario como lo indica el autor. El autor muestra cinco de los siete ejemplos de caso de estudio: 1, 2, 3, 4 y 5 conforme a nuestra clasificación mostrada en el marco de referencia de esté trabajo.

El texto de Morales (2004), está dirigido a estudiantes de nivel medio superior como lo indica el autor. El autor muestra los seis ejemplos de caso de estudio: 1, 2, 3, 4, 5 y 6 conforme a nuestra clasificación mostrada en el marco de referencia de esté trabajo.

El texto de Ibañes & García (2008), está dirigido a estudiantes del nivel medio superior como lo indica el autor. El autor muestra los ejemplos de caso de estudio: 1, 3 y 4 conforme a nuestra clasificación mostrada en el marco de referencia de esté trabajo.

b) Tenemos los textos que desde la introducción de la integral es abordado el concepto de integral por medio de las sumas de Riemann. Los siguientes tres textos tiene esté acercamiento: Salazar, Bahena & Vega (2011), Hughes-Hallett, Gleason, et al. (2003) y Purcell, Varberg & Rigdon (2007).

El texto de Salazar, Bahena & Vega (2011), está dirigido a estudiantes del nivel medio superior como lo indica el autor. El autor muestra los ejemplos de caso de estudio: 1, 2, 3, y 4 conforme a nuestra clasificación mostrada en el marco de referencia de esté trabajo.

El texto de Hughes-Hallett, Gleason, et al. (2003), no indica a qué nivel está dirigido. El autor muestra los ejemplos de caso de estudio: 1, 2, 3 y 4 conforme a nuestra clasificación mostrada en el marco de referencia de esté trabajo.

El texto de Purcell, Varberg & Rigdon (2007), no indica a qué nivel está dirigido. El autor muestra los ejemplos de caso de estudio: 1, 3 y 4 conforme a nuestra clasificación mostrada en el marco de referencia de esté trabajo.

Desde nuestro punto de vista, autores como De Oteyza (2006) y Arana (2008) olvidan por completo relacionar los conceptos de la integral definida y el cálculo de áreas por medio de las sumas de Riemann, y otros autores como Purcell et. al. (2007), Salazar et al (2011), Hughes-Hallett, et al. (2003), Granville (1997) y Morales (2004) tratan de equilibrar la técnica, la comprensión conceptual y el acercamiento de la integral definida aplicada al problema del cálculo de áreas por medio de las sumas de Riemann.

Capítulo 4

Metodología

4.1 Acerca de la metodología. La metodología que se utilizó en esta investigación consistió en la aplicación de un cuestionario a un grupo de ocho estudiantes del plantel Belisario Domínguez del IEMS-DF constituido por 11 problemas en el contexto de la integral definida y su aplicación al cálculo de áreas. Para asegurarnos de que los estudiantes habían acreditado el curso de Matemáticas V, dedicado al cálculo diferencial e integral, se eligieron recién egresados del plantel mencionado, por lo que los ocho estudiantes en ese momento habían concluido sus estudios y tenían frescos sus conocimientos de cálculo integral, en particular sus conocimientos sobre la integral definida y su aplicación al cálculo de áreas de regiones.

Para el diseño de las preguntas del cuestionario se tomaron como base los conocimientos elementales de pre cálculo así como los conocimientos que se establecen en el plan curricular de la asignatura de Matemáticas V y que incluyen el estudio de la integral definida, su interpretación geométrica como área de una región y su aplicación al cálculo de las mismas.

El cuestionario incluyó problemas simples de cálculo de áreas mediante integrales definidas y también problemas con cierto grado de sofisticación para cuya solución el estudiante debe poner en juego sus conocimientos sobre funciones elementales, así como el teorema fundamental del cálculo.

Se revisaron cuidadosamente las respuestas de los estudiantes a cada una de las preguntas determinando en sus procedimientos las dificultades que impidieron que obtuvieran el resultado correcto, en su caso.

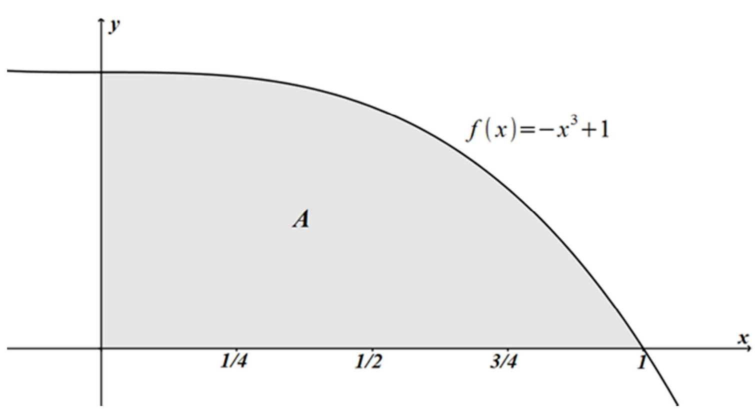
4.2 Preguntas del cuestionario y propósitos de las preguntas.

A continuación mostramos cada uno de los problemas que constituyeron el cuestionario, así como el propósito de cada uno de ellos.

Problema 1.- Considere la función $f(x) = -x^3 + 1$, definida en el intervalo [0,1]. Use los puntos $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{4},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{3}{4}\ y\ x_4 = 1$ para obtener una aproximación del área sombreada por medio de la siguiente suma de Riemann

$$R(f,4) = \sum_{i=1}^{4} f\,(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_2)(x_3 - x_2) + f(x_3)(x_4 - x_3)$$

Dibuje los rectángulos correspondientes



El propósito de este problema es averiguar si el estudiante conoce la terminología y el significado de las sumas de Riemann que se utilizan para establecer la integral definida, así como averiguar si el estudiante es capaz de relacionar toda la información que se le proporciona en el problema.

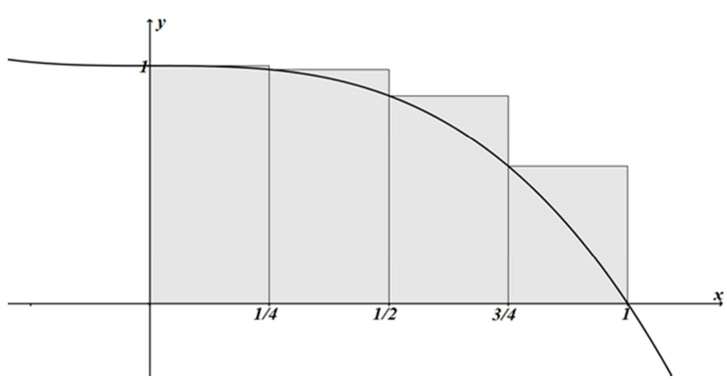
Más precisamente, para resolver el problema se requiere que comprenda el significado de cada término $f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$ en la suma de Riemann, el cual representa el área de un rectángulo. También es necesario que el estudiante sepa que se tiene que realizar el cálculo aritmético en la fórmula para *R(f,4)* y debe ser capaz de llevar a cabo las operaciones aritméticas para conocer el resultado.

La solución es de la siguiente manera. Sustituimos en la fórmula de la suma de Riemann *R(f,4)* los puntos de la partición y los valores de la función en los puntos correspondientes

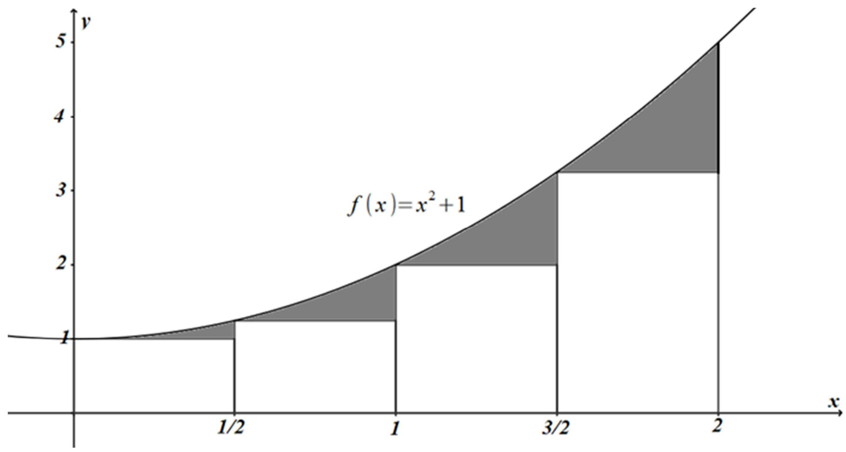
$$R(f,4) = (-0^3 + 1)\left(\frac{1}{4} - 0\right) + \left(-\left(\frac{1}{4}\right)^3 + 1\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1\right)\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

$$+ \left(-\left(\frac{3}{4}\right)^3 + 1\right)\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{63}{64} + \frac{7}{8} + \frac{32}{64}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{215}{64}\right) = \frac{215}{256}.$$

Los rectángulos a dibujar se muestran a continuación



Problema 2.- Calcule el área de la región sombreada de la siguiente figura.



El propósito del problema es averiguar si el estudiante es capaz de identificar y reconocer el significado de la diferencia numérica entre el área bajo la función y la de la región constituida por los rectángulos correspondientes a la suma de Riemann.

Para resolver el problema se requiere que el estudiante sea capaz de traducir el área mostrada en la figura al lenguaje de la integral definida y las sumas de Riemann y que opere aritméticamente para conocer el resultado. Por supuesto, se requiere el teorema fundamental del cálculo para el cálculo de la integral definida en un caso simple.

La solución es de la siguiente manera. Calculamos por un lado el área bajo la función $f(x) = x^2 + 1$ en el intervalo [0,2].

$$\int_0^2 (x^2+1)\,dx = \frac{x^3}{3} + x\Big|_0^2 = \frac{14}{3}.$$

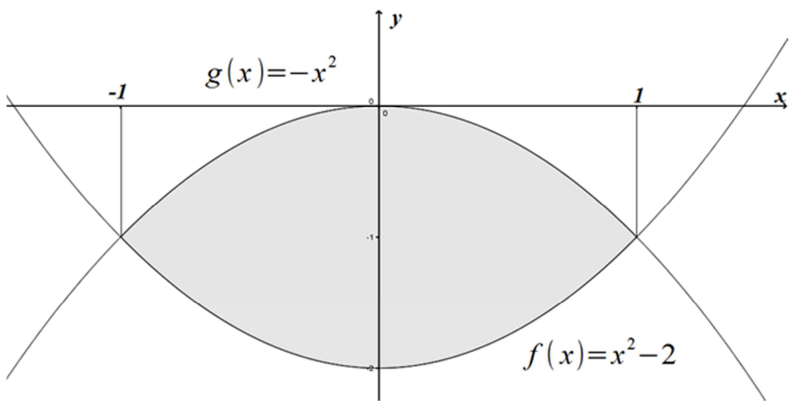
Después la suma de Riemann con la partición dada

$$R(f,4) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 + 1^2 + 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1\right) = \frac{15}{4}.$$

Finalmente, restamos las áreas encontradas

$$A_{sombreada} = \frac{14}{3} - \frac{15}{4} = \frac{11}{12}.$$

Problema 3.- Calcule el área de la región sombreada de la siguiente figura, la cual está delimitada por las funciones $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = -x^2$ entre los puntos [-1,1].



El propósito es averiguar si el estudiante identifica el problema del cálculo del área como un problema de integral definida. De igual modo debe relacionar la información mostrada, como son los límites de integración y la diferencia de las funciones, además debe llevar a cabo el cálculo de una integral definida simple, mediante el teorema fundamental del cálculo.

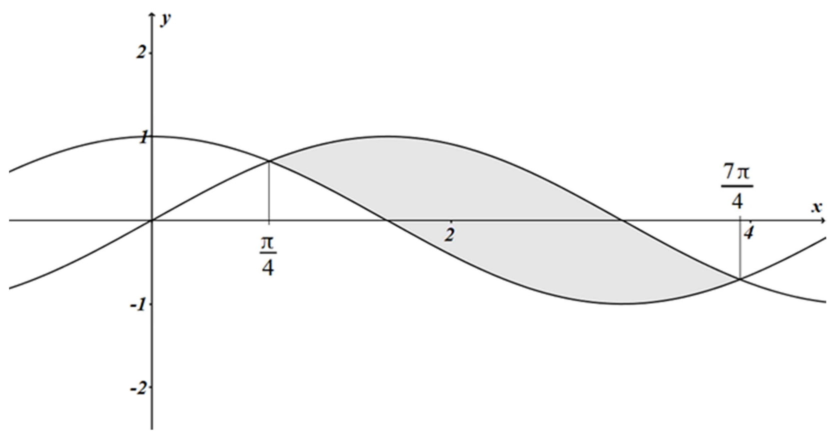
Para resolver el problema se requiere que el estudiante aplique sus conocimientos de la integral definida a un problema donde se le muestran los límites de integración y dos funciones simples. Debe ser capaz de operar aritméticamente para conocer el resultado.

La solución se describe a continuación. Se trata de una diferencia de dos funciones con los límites de integración -1 y 1.

$$\int_{-1}^{1} \big(g(x) - f(x)\big)\, dx = \int_{-1}^{1} \big(-x^2 - (x^2 - 2)\big)\, dx = 2\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx$$

$$= 2\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{8}{3}.$$

Problema 4.- Calcule el área de la región sombreada de la figura que se muestra a continuación, la cual está delimitada por las funciones $f(x) = senx$ y $g(x) = cosx$, entre los puntos $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{7\pi}{4}$.



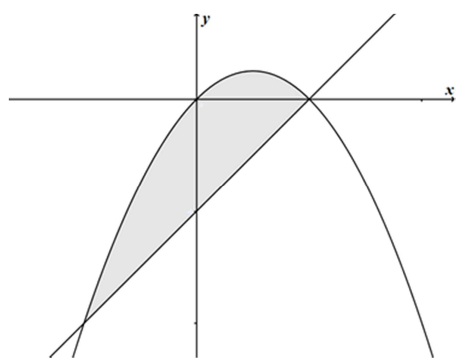
El problema es similar al anterior, se pretende averiguar si el estudiante identifica el problema como el cálculo de un área mediante una integral definida. De igual modo el estudiante debe relacionar la información proporcionada, como son los límites de integración y las funciones involucradas, que en este caso son funciones trigonométricas. Estas funciones, con frecuencia causan mayor dificultad en la evaluación de los límites de integración que las funciones polinomiales.

Para resolver el problema se requiere que el estudiante aplique sus conocimientos de la integral definida de funciones trigonométricas al problema donde se le muestran los límites de integración, las funciones involucradas y por último debe ser capaz de operar aritméticamente para conocer el resultado.

La solución la establecemos a continuación. Se le da información suficiente para determinar el área entre la diferencia de dos funciones con los límites de integración como $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{7\pi}{4}$.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} (senx - cosx)\,dx = -cosx - senx|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} = \sqrt{2}$$

Problema 5.- Calcule el área de la región sombreada de la siguiente figura, la cual está delimitada por las funciones $f(x) = x - x^2$ y $g(x) = x - 1$.



El propósito del problema es averiguar si el estudiante identifica el problema de área como un problema de integral definida. En este caso se le proporciona al estudiante menos información que la que se le proporcionó en los dos problemas anteriores. Para resolver el problema se requiere que el estudiante aplique sus conocimientos para determinar los límites de integración y del cálculo de la integral definida de la diferencia de dos funciones simples y ser capaz de operar aritméticamente para conocer el resultado.

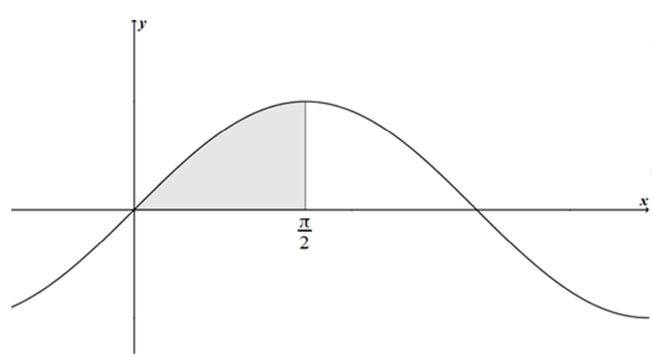
Para resolver el problema primero se calculan los límites de integración, hallando la intersección de las curvas $y = x - x^2$ y $y = x - 1$, lo cual se obtiene resolviendo la ecuación

$$x - x^2 = x - 1$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm 1$$

Así que los límites de integración son -1 y 1, y el área de la región estará dada por la integral definida de la diferencia entre las dos funciones

$$\int_{-1}^{1} \left(x - x^2 - (x - 1)\right) dx = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = x - \frac{x^3}{3}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}.$$

Problema 6.- Calcule la integral definida $\int_0^{\pi/2} sen\, x dx$. A continuación se muestra la región cuya área es el valor de la integral que se pide calcular.



El propósito del problema es determinar si el estudiante es capaz de calcular la integral definida de las funciones trigonométricas en los límites de integración establecidos. El cual será empleado en el siguiente problema.

Para resolver el problema, el estudiante debe conocer la primitiva de la función

$y = senx$ y ser capaz de evaluar en los límites de integración.

La solución es evaluar una primitiva de la función $senx$ en los límites de integración.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\, xdx = -cos\, x|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Problema 7.- Calcule la siguiente integral definida $\int_0^{2\pi} |sen\, x|\, dx$.

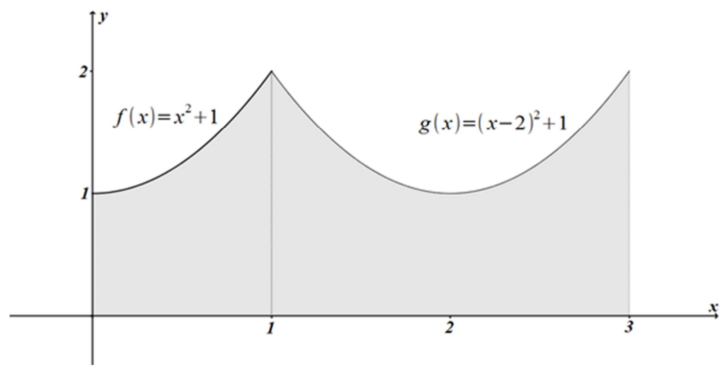
El propósito del problema es averiguar si el estudiante es capaz de calcular una integral definida no rutinaria. Para el cálculo de la integral definida resultará útil su interpretación geométrica, para lo cual deberá conocer el significado de valor absoluto de un número real, comprender lo que es el valor absoluto de una función e interpretar su gráfica relacionándola con la gráfica de la función original. Para calcular la integral definida, basado en su interpretación geométrica el estudiante podrá descomponer la integral en dos integrales definidas simples y aplicar la propiedad aditiva de la integral definida, para lo cual deberá determinar los límites de las integrales correspondientes.

La solución es de la siguiente forma:

$$\int_0^{2\pi} |senx|\, dx = \int_0^{\pi} sen\, xdx + \int_{\pi}^{2\pi} (-sen\, x)dx = \int_0^{\pi} sen\, xdx - \int_{\pi}^{2\pi} sen\, xdx$$

$$= -cosx|_0^{\pi} + cosx|_{\pi}^{2\pi} = 4.$$

Problema 8.- Calcule el área de la región sombreada de la siguiente figura, la cual está limitada por el eje *x*, el eje y*,* la recta $x = 3$ y las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = (x-2)^2 + 1$ en los intervalos indicados.



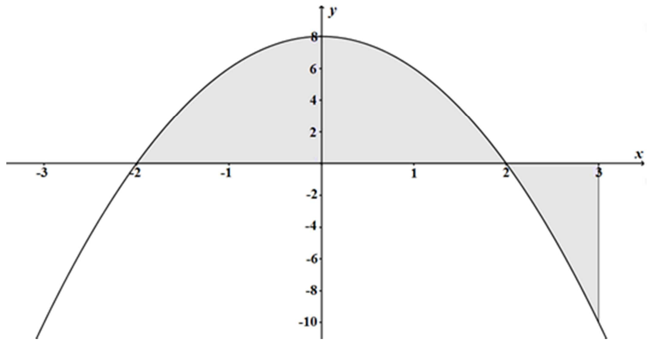
El propósito del problema es averiguar si el estudiante es capaz de identificar este problema de cálculo de área como un problema de dos integrales definidas, tomando los límites de integración de la figura. Como en el caso anterior, se trata de averiguar si el estudiante usa la propiedad aditiva de la integral definida.

Para resolver el problema, el estudiante debe conocer la propiedad aditiva de la integral definida conforme a los límites de integración mostrados en la figura, las funciones involucradas y por último debe ser capaz de operar aritméticamente para conocer el resultado.

La solución parte de la identificación de dos integrales definidas con sus correspondientes límites de integración.

$$\int_0^1 (x^2+1)\,dx + \int_1^3 (x-2)^2 + 1dx = \frac{x^3}{3} + x\bigg|_0^1 + \frac{(x-2)^3}{3} + x\bigg|_1^3 = 4.$$

Problema 9.- Calcule el área limitada por $f(x) = -2x^2 + 8$ y el eje x en el intervalo$[-2,3]$.

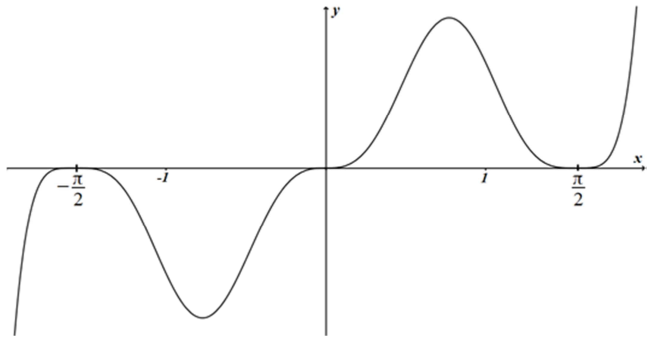


Para resolver el problema, el estudiante debe conocer la relación entre la integral definida y el área de una región en un caso más sofisticado. El propósito del problema es averiguar si el estudiante se percata primero de la conveniencia de utilizar la propiedad aditiva de la integral definida y así descomponer la integral en una suma de dos integrales. También indagaremos si el estudiante sabe que debe tomar el valor absoluto de una de las dos integrales definidas (la que tiene un valor negativo) para calcular el área de la región dada.

$$A = \int_{-2}^{2} (-2x^2 + 8)\, dx - \int_{2}^{3} (-2x^2 + 8)\, dx = \left(\frac{-2x^3}{3} + 8x\right)\Bigg|_{-2}^{2} - \left(\frac{-2x^3}{3} + 8x\right)\Bigg|_{2}^{3}$$

$$= \frac{64}{3} - \left(-\frac{14}{3}\right) = \frac{78}{3} = 26.$$

Problema 10.- Calcule la integral definida $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3 cos^4 x\, dx$. A continuación se muestra la gráfica de $f(x) = x^3 cos^4 x$.

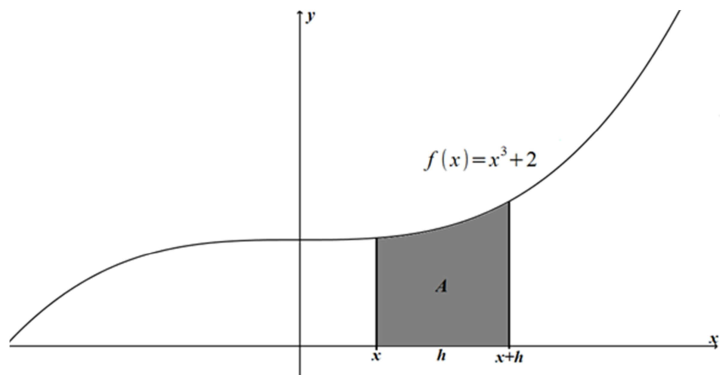


El propósito de este problema es averiguar si el estudiante se percata de que la integral indefinida correspondiente es tan compleja para un cálculo algebraico, que tendrá que recurrir a las propiedades de la integral definida o a la interpretación geométrica y el signo de la integral para funciones negativas.

Para resolver el problema el estudiante debe utilizar el hecho de que la integral definida en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ es el negativo de la integral en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, por lo que el resultado de la integral en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ es cero, o sea

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3 \cos^4 x dx = 0$$

Problema 11.- Calcule el cociente $\frac{A}{h}$, donde A es el área de la región sombreada de la siguiente figura.



El propósito del problema es averiguar si el estudiante es capaz de traducir el cociente $\frac{A}{h}$ como el cociente de la integral definida de la función $f(x)$ en el intervalo $[x, x+h]$ entre la longitud h del intervalo.

Para resolver el problema, el estudiante debe establecer el área A como la integral definida $f(x)$ en el intervalo $[x, x+h]$, es decir

$$\begin{aligned}
A &= \int_x^{x+h} f(u)du \\
&= \int_x^{x+h} (u^3+2)du \\
&= (\frac{1}{4}u^4+2u)\Big|_x^{x+h} \\
&= \left(\frac{1}{4}(x+h)^4+2(x+h)\right)-(\frac{1}{4}x^4+2x) \\
&= \frac{(x+h)^4-x^4}{4}+2h
\end{aligned}$$

y entonces escribir

$$\frac{A}{h} = \frac{\int_x^{x+h}(u^3+2)\,du}{h} = \frac{\frac{u^4}{4}+2u\Big|_x^{x+h}}{h} = \frac{(x+h)^4-x^4}{4h}+2$$

El estudiante podrá escribir cualquier expresión equivalente, en particular la expresión simplificada

$$\begin{aligned} \frac{A}{h} &= \frac{4hx^3 + 6h^2x^2 + 4h^3x + h^4}{4h} + 2 \\ &= x^3 + \frac{3}{2}hx^2 + h^2x + \frac{1}{4}h^3 + 2 \end{aligned}$$

Es importante involucrar al estudiante en cocientes de este tipo ya que son cocientes que aparecen al establecer el teorema fundamental del cálculo, aun cuando no se haga una prueba rigurosa del teorema y solamente se explique de manera geométrica.

4.3 Más acerca del cuestionario. El cuestionario que se aplicó a los estudiantes, tiene elementos teóricos que consideran los diversos aspectos que involucra la integral definida en su aplicación en el cálculo de áreas por medio de las sumas de Riemann. Las preguntas involucran el cálculo de áreas de la diferencia de dos funciones, el uso de funciones complejas, así como de las gráficas de las funciones y el uso de algunas de las propiedades de la integral definida. Los problemas se diseñaron con el fin de buscar los elementos conceptuales que maneja el estudiante, para poder dar evidencia de la problemática y con ello dar respuesta a las interrogantes que hemos planteado. Nos situaremos desde el aprendizaje de los estudiantes que ya cursaron un primer curso de cálculo. Consideramos muy importante el acercamiento a la integral definida y su aplicación al cálculo de áreas por medio de las sumas de Riemann, como se presenta en el marco de referencia del presente trabajo de investigación. Las sumas de Riemann relacionan de manera natural la integral definida con su interpretación como área de regiones delimitadas por gráficas de funciones, por esta razón es un elemento importante en el instrumento de nuestra investigación.

Capítulo 5

Análisis de los resultados

Una vez aplicado el cuestionario, procedimos a realizar un análisis cualitativo de las respuestas de los ocho estudiantes que participaron en nuestra investigación y que, como ya se mencionó en el capítulo 4 dedicado a la metodología, recién habían acreditado el curso de Matemáticas V en el IEMS-DF. A los estudiantes participantes los identificaremos respectivamente con los nombres ficticios Viridiana, Miguel, Hilda, Fernando, Luis, Marisol, Omar y Adriana.

A continuación presentamos lo más destacado del resultado de nuestro análisis, para cada una de las preguntas.

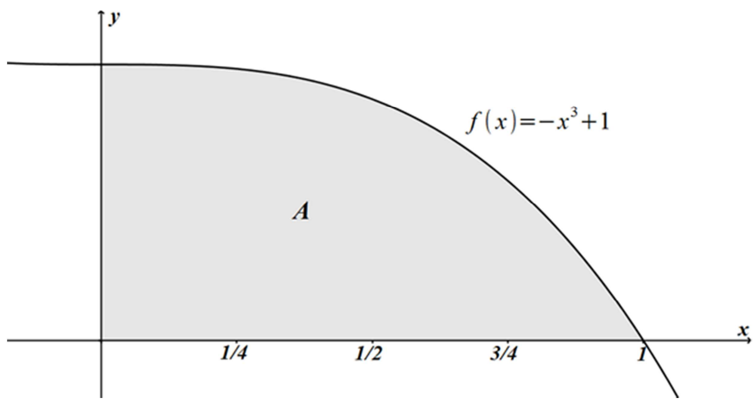
Sobre el problema 1:

1.- Considere la función $f(x) = -x^3 + 1$, definida en el intervalo $[0,1]$. Use los puntos $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{4},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{3}{4}\ y\ x_4 = 1$ para obtener una aproximación del área sombreada por medio de las sumas de Riemann.

$$R(f,4) =$$

$$\sum_{i=1}^{4} f\,(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_2)(x_3 - x_2) + f(x_3)(x_4 - x_3)$$

Dibuje los rectángulos correspondientes



Para este problema, en las respuestas de Luis, Viridiana y Miguel, observamos que los estudiantes no fueron capaces de resolver el problema en su totalidad y de forma satisfactoria, sin embargo hay evidencia de conocen la construcción y la interpretación geométrica de las sumas de Riemann. Identifican la partición y realizan una primera sustitución en la suma de Riemann, como se muestra en el caso de Luis en las figuras 5.1 y 5.2.

Luis muestra evidencia de conocer parte de la simbología involucrada de las sumas de Riemann, pero no comprende su significado, de hecho las llama $f(x)$ y las interpreta geométricamente de manera incorrecta. Realiza la primera sustitución de forma correcta de cada punto de la partición, pero no es capaz de calcular los valores de la función f en esos puntos. Tampoco es capaz de operar aritméticamente como se puede ver en la figura 5.1. Aun teniendo un conocimiento de lo que significa una suma de Riemann, muestra deficiencias en sus conocimientos sobre lo que significa el valor de una función en un punto, al momento de evaluar la función en un punto a, simplemente escribe a misma, es decir, le da lo mismo escribir $f(a)$ que a.

$$f(x) = f(0)\left(\tfrac{1}{4} - 0\right) + f\left(\tfrac{1}{4}\right)\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\right) + f\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{2}\right) - f\left(\tfrac{3}{4}\right)\left(1 - \tfrac{3}{4}\right)$$
$$f(x) = \left(\tfrac{1}{4}\right)\left(\tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{7}{4}\right) + \left(\tfrac{3}{4}\right)\left(\tfrac{1}{4}\right)$$
$$f(x) = \left(\tfrac{1}{16}\right) + \left(\tfrac{7}{8}\right) + \left(\tfrac{3}{16}\right) = \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{16}$$
$$f(x) = \tfrac{8}{16}$$

Figura 5.1: respuesta al problema 1 por Luis.

En la figura 5.2 vemos la interpretación geométrica que muestra Luis, en lugar de dibujar rectángulos, simplemente dibuja líneas verticales. No comprende el significado geométrico de las sumas de Riemann. Podemos decir que la comprensión de las sumas de Riemann por parte de Luis es deficiente con respecto a la conexión de los conceptos algebraicos y geométricos, ver fig. 5.2.

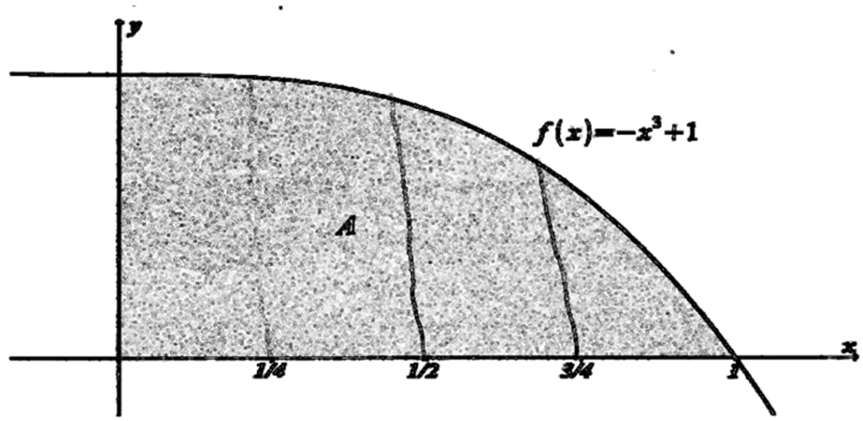
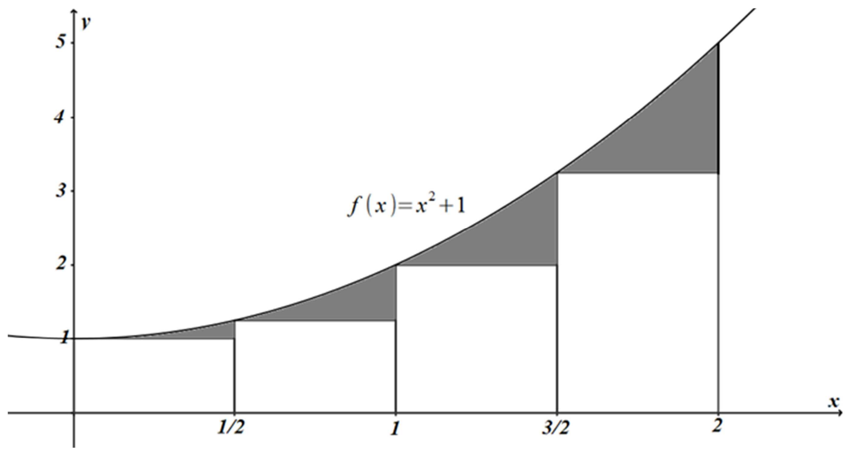


Figura 5.2: Dibujo de los rectángulos por Luis.

Sobre el problema 2:

2.- Calcule el área de la región sombreada de la siguiente figura.



Los ocho estudiantes dan una respuesta al problema 2, de los cuales los casos de Viridiana, Hilda y Miguel son representativos de los cinco estudiantes restantes. En general los ocho estudiantes no fueron capaces de resolver el problema en su totalidad y en forma satisfactoria, realizan operaciones únicamente con las sumas de Riemann o con la integral definida por separado, pero no logran conectar los resultados.

Viridiana relaciona el problema 2 con el problema anterior y se enfoca en realizar el mismo procedimiento sin detectar las diferencias entre los dos problemas, ver fig. 5.3. Dejando evidencia de la carencia de una comprensión de la simbología en las sumas de Riemann, de falta de conocimiento sobre el significado del valor de una función en un punto y de no comprender el problema planteado.

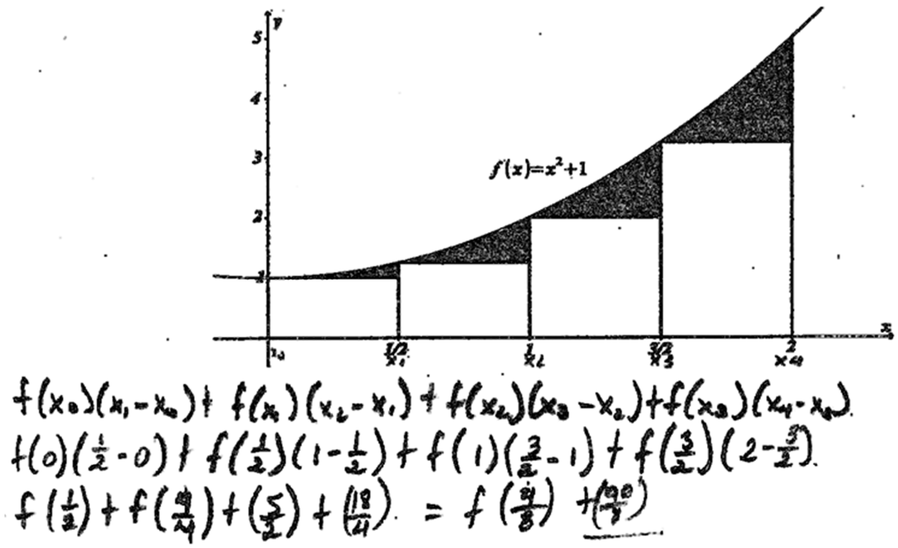


Figura 5.3: Relaciona el problema 2 con el problema 1 identificando correctamente la partición por Viridiana.

Hilda muestra evidencia de no comprender el problema 2 y de la relación de este problema con el problema 1. Logra identificar la partición, pero no logra relacionarla con las sumas de Riemann, en sus cálculos no pone en juego las áreas de los rectángulos aunque acude a la integral definida, calculándola en cada subintervalo de la partición. Pero no sabe qué hacer con los resultados obtenidos. No se le ocurre cómo calcular el área pedida, se revela una pobre familiaridad con las sumas de Riemann, sobre todo con su significado geométrico, Ver fig. 5.4 y 5.5.

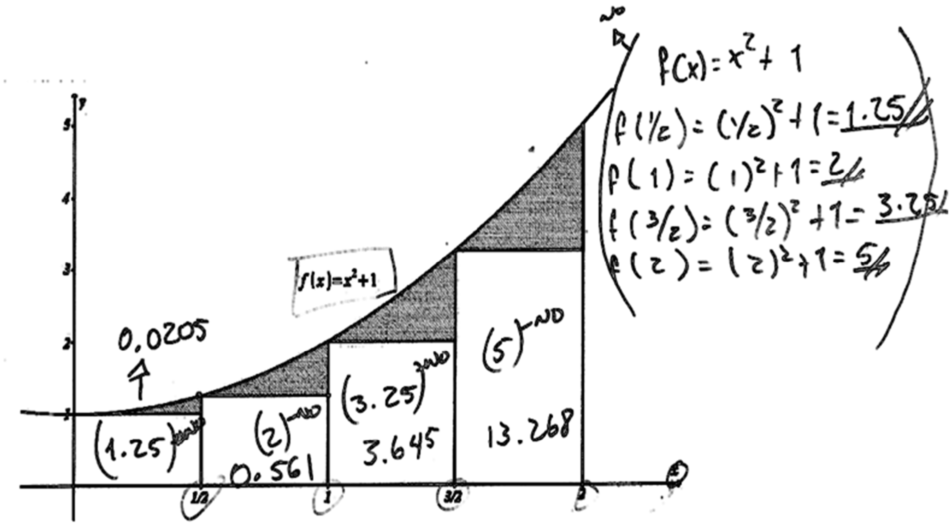


Figura 5.4: Hilda identifica la partición.

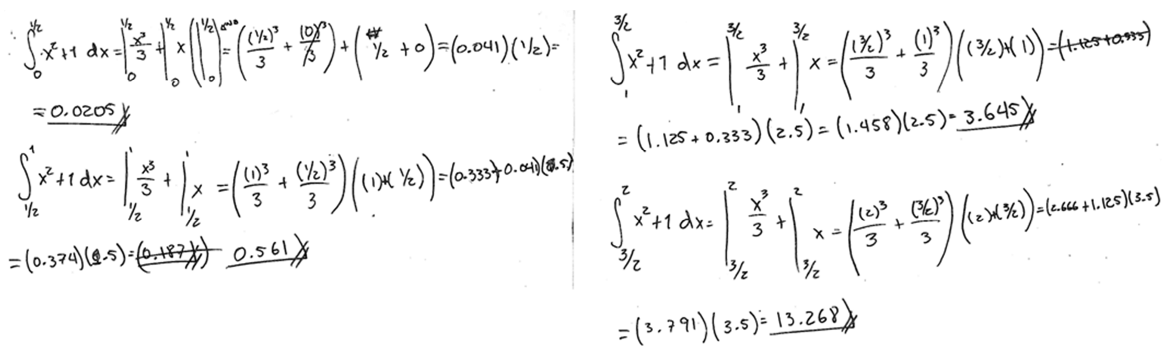


Figura 5.5: Hilda calcula las integrales definidas en los subintervalos de la partición.

Miguel, como lo sucedido con los restantes estudiantes, con excepción de los casos que hemos visto de Viridiana e Hilda, no comprende el problema en su totalidad, ni la relación que existe con la integral definida, tratan de determinar las áreas de los cuatro rectángulos sin éxito, relacionan la altura de cada rectángulo con el valor de la función en algún punto, pero no consideran la base de los rectángulos, no interpretan los términos de la suma de Riemann como las áreas de los rectángulos correspondientes.

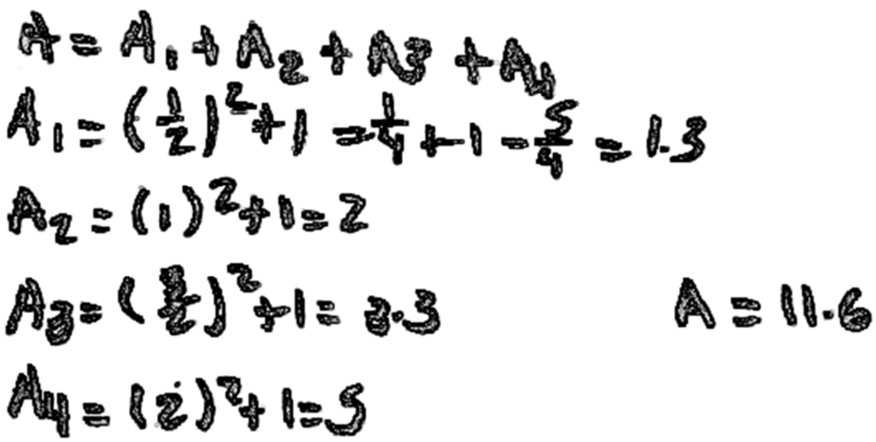
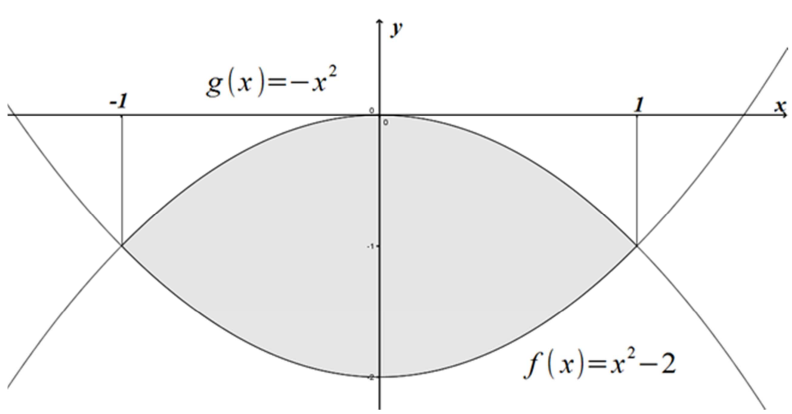


Figura 2.4: Miguel trata de determinar las áreas de los cuatro rectángulos.

Sobre el problema 3:

3.- Calcule el área de la región sombreada de la siguiente figura, la cual está delimitada por las funciones $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = -x^2$ entre los puntos $[-1,1]$.



Sólo tres estudiantes intentan resolver el problema 3, sin embargo ninguno de ellos tiene éxito en obtener la solución. Presentamos el análisis de las respuestas con el caso de Viridiana y Miguel.

Viridiana identifica el problema del cálculo del área como un problema de integral definida con sus respectivos límites de integración, pero no es capaz de establecer correctamente la integral definida ni maneja correctamente las dos funciones cuyas gráficas determinan la región. Aunque Viridiana comprende el problema, su conocimiento del cálculo de integrales en casos simples es muy deficiente. No puede calcular una integral definida para la función simple $f(x) = x^2$. No entiende cómo se aplica teorema fundamental del cálculo, ver figuras 5.7 y 5.8.

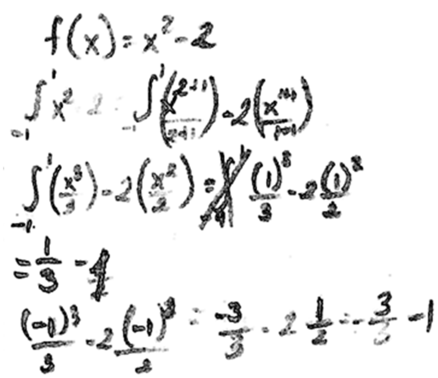


Figura 5.7: Viridiana realiza la integral definida de la función *f.*

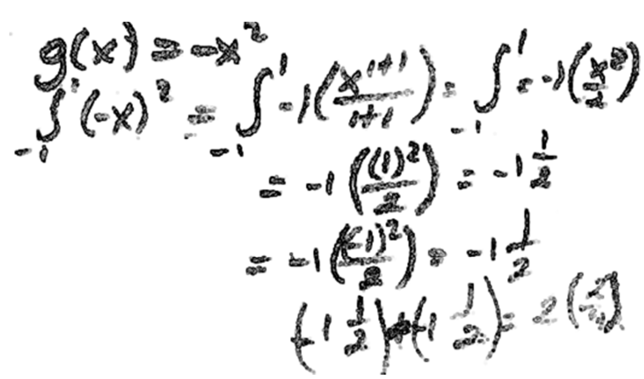


Figura 5.8: Viridiana realiza la integral definida de la función *g.*

Miguel no comprende el problema, no se percata que se resuelve mediante la integral definida. Miguel simplemente se limita a determinar los valores de una de las dos funciones en el punto -1 y la otra función en 1, podemos decir que el estudiante reconoce los puntos -1y 1 como significativos en el problema pero no ubica el problema en el contexto de la integral definida, ver fig. 5.9.

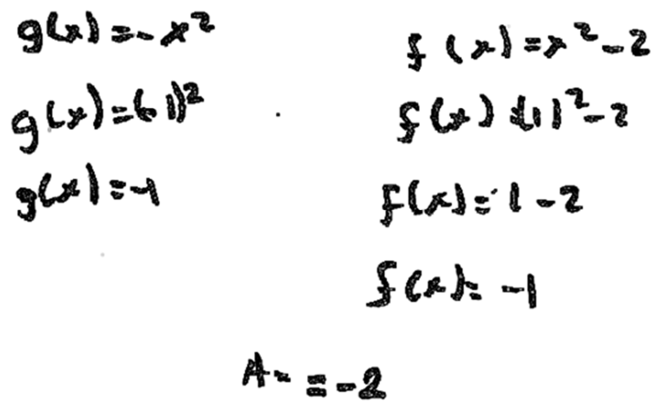
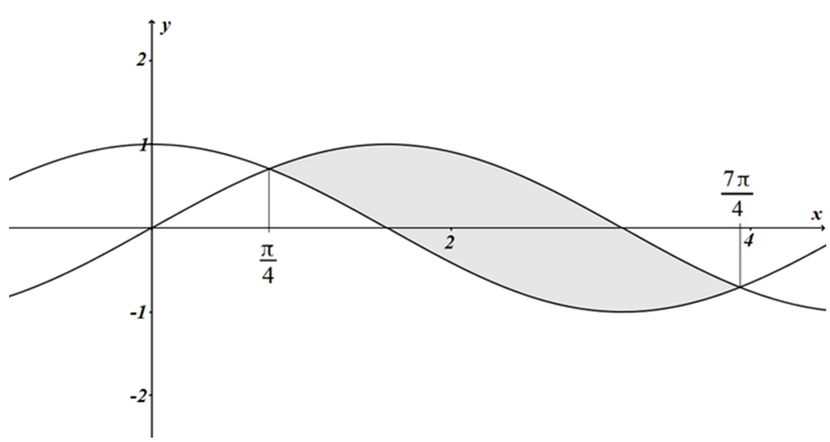


Figura 5.9: Miguel realiza una sustitución de los límites de integración en las funciones.

Sobre el problema 4:

4.- Calcule el área de la región sombreada de la siguiente figura, la cual está delimitada por las gráficas de las funciones $f(x) = senx$ y $g(x) = cosx$, entre los puntos $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{7\pi}{4}$, como se ilustra en la figura



Todos los estudiantes tratan de resolver el problema 4, pero sólo Viridiana e Hilda tratan de aplicar la integral definida en su intento por resolver el problema, pero no tienen éxito. El resto de los estudiantes se limitan a realizar una evaluación de la función en puntos que ellos consideran significativos, de las funciones seno y coseno, como se muestra en el caso de Miguel.

Viridiana no muestra evidencia de comprender en su totalidad el problema, ni relaciona el problema con el tema de la integral definida, como lo hizo en el problema anterior. Sin embargo, Viridiana se percata que le serán útiles las integrales indefinidas y las escribe, aunque con notación incorrecta, sin hacer mención que se trata de las integrales de las funciones seno y coseno. Solamente las asienta en su escrito pero no logra utilizarlas (ver fig. 5.10). La estudiante no es capaz, como en el problema 3, de usar los límites de integración y situar el problema en el tema de la integral definida (ver fig. 5.11).

$$\underset{-\cos x}{f(x)=\text{sen}\,x} \quad \text{y} \quad \underset{\text{sen}\,x}{g(x)=\cos x},$$

Figura 5.10: Viridiana muestra la integral de las funciones sen *x* y cos *x*

$$f(x)=\text{sen}\,x\,dx=-\cos x+c \qquad g(x)=\cos x\,dx=\text{sen}\,x+c$$
$$f(x)=-\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)+c=-\cos \qquad g(x)=\text{sen}\left(\tfrac{\pi}{4}\right)+c=$$

Figura 5.11: Viridiana escribe las integrales indefinidas usando una notación incorrecta

Hilda es capaz de identificar el problema como un problema de integral definida. De los datos de la figura obtiene correctamente los límites de integración pero plantea el cálculo de las integrales de manera incorrecta. En lugar de plantear la integral de la diferencia de las funciones seno y coseno, plantea la integral del producto de esas funciones. Esto refleja una total incomprensión de la aplicación de la integral definida al cálculo de áreas, véase figura 5.12.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} (\operatorname{sen} x)(\cos x)\,dx = \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} (-\cos x)(\operatorname{sen} x) = \Big|_{\pi/4}^{7\pi/4} \left(-\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)\left(\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \Big|_{\pi/4}^{7\pi/4} \left(-0.995 + (-0.999)\right)\left(0.095 + 0.013\right) = \Big|_{\pi/4}^{7\pi/4} (-1.994)(0.108) = \underline{-0.215}$$

Figura 5.12: Hilda realiza la integral definida del producto de las funciones y no de la diferencia.

Miguel como el resto de los estudiantes, no es capaz de comprender el problema ni mucho menos relacionarlo con un problema de integral definida. Se empeña en realizar sustituciones de los límites de integración en cada una de las funciones dadas. Miguel, como el resto de sus compañeros, no es capaz de realizar las operaciones aritméticas. Sus dificultades van más allá de los conceptos del cálculo, tienen sus raíces en su matemática básica, aritmética, algebra y lo más elemental sobre funciones, véase fig. 5.13.

$x = \frac{3.1416}{4} = 0.8$ $\qquad$ $x = \frac{7\pi}{4} = \frac{7(3.1416)}{4} = \frac{22}{4} = 5.5$

$F(x) = \operatorname{sen} x$ $\qquad$ $g(x) = \cos x$

$F(x) = \operatorname{sen} 0.8$ $\qquad$ $g(x) = \cos 5.5$

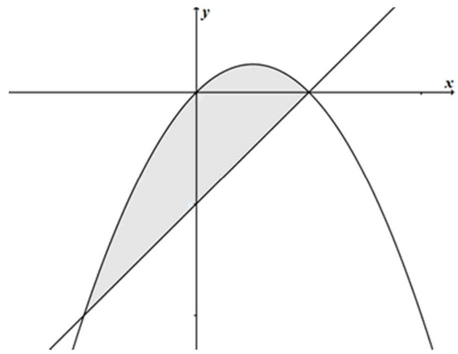
$F(x) = 0$ $\qquad$ $g(x) \cos = 1$

$A = 1.8$

Figura 5.13: Miguel realiza operaciones de forma incorrecta con las funciones trigonométricas.

Sobre el problema 5:

5.- Calcule el área de la región sombreada de la siguiente figura, la cual está delimitada por las funciones $f(x) = x - x^2$ y $g(x) = x - 1$.



A diferencia con los problemas anteriores, en este problema los estudiantes deben determinar los límites de integración,

A pesar de que todos los estudiantes tratan de resolver el problema 5, sólo Viridiana y Hilda aplican la integral definida, el resto de los estudiantes se limitan a realizar la evaluación de las funciones en puntos que consideran significativos, como se muestra en el caso de Miguel.

Viridiana identificar el problema como un problema de integrales indefinidas, pero no las aplica al cálculo de la integral definida, véase fig. 5.14.

$$f(x) = \left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right) - \left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right) = \left(\frac{x^2}{2}\right) - \left(\frac{x^5}{5}\right)$$

$$g(x) = \left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right) - 1x = \left(\frac{x^2}{2}\right) - 1$$

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + c - \frac{x^3}{3} + c.$$

$$g(x) = \frac{x^2}{2} + c - 1 + c.$$

Figura 5.14: Viridiana halla la integrales indefinidas de las funciones.

Como Viridiana, Hilda identifica el problema como un problema del cálculo de integrales indefinidas. Al contar con menos información, como son los límites de integración, no relaciona el problema con un problema de integral definida. Se enfoca en realizar las integrales indefinidas de las funciones sin plantear la relación entre ellas. La primera integral indefinida la calcula correctamente, pero la segunda a pesar de ser similar y muy simple no puede calcularla de forma correcta, ver fig. 5.15. Muestran un deficiente conocimiento de las más simples integrales indefinidas

$$\int x - x^2 \, dx = \Big| \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

$$\int x - 1 \, dx = \Big| 1 - x$$

Figura 5.15: Hilda realiza integrales de las funciones dadas.

Miguel como el resto de los estudiantes, no es capaz de identificar el problema como un problema de cálculo integral, además muestra un manejo muy deficiente de funciones simples, ver fig. 5.16.

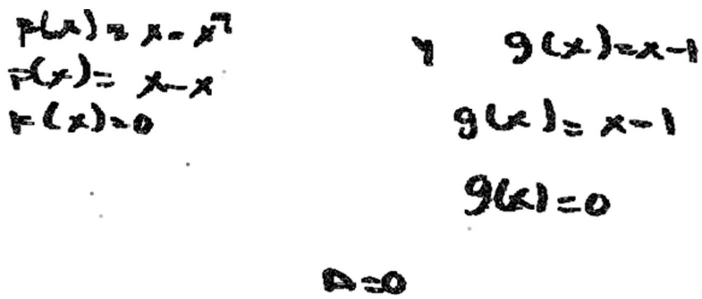
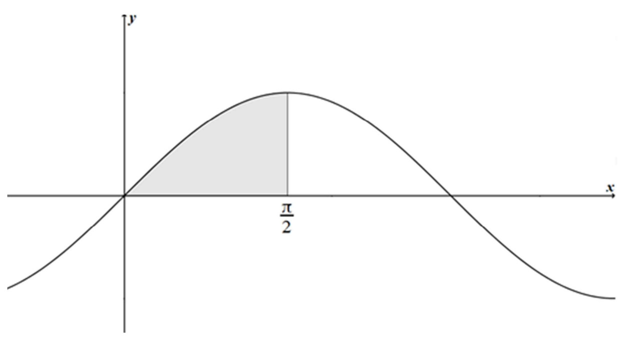


Figura 5.3: Miguel

Sobre el problema 6:

6.- Calcule la integral definida $\int_0^{\pi/2} sen\, x dx$. A continuación se muestra la región cuya área es el valor de la integral que se pide calcular.



Todos los estudiantes tratan de resolver el problema, aquí se muestran sólo tres de sus respuestas.

Como en el caso de Miguel cuatro estudiantes más procedieron de forma similar. Miguel no distingue entre una integral definida y una indefinida. Con esta confusión, para calcular la integral de la función seno primero calcula la integral de la función x^n, prosigue a calcular ambas integrales. Esto refleja una incomprensión por parte de Miguel de lo que es una integral, definida y una integral indefinida. Después de escribir algunas incoherentes igualdades escribe el resultado 1, ver fig. 5.17.

$$_0\int^{\pi/2} x^n \, dy = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$_0\int^{3.1416/2} \text{sen}\, x \, dx = \frac{x^2}{2}$$

$$_0\int^{3.1416/2} \text{sen}\, x \, dx = \frac{1.6^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{2.5}{2} = 1.3$$

$$_0\int^{\pi/2} = 1 - 0 = 1$$

Figura 5.17: Miguel calcula la integral definida.

Hilda es capaz de calcular la integral definida de la función seno, pero no de realizar la evaluación de la funciones coseno en los límites de integración, donde da como resultado -1.999, ver fig. 5.18.

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}\, x \, dx = \Big|_0^{\pi/2} -\cos x = \Big|_0^{\pi/2} -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + (-\cos(0)) = \Big|_0^{\pi/2} \text{NO} \; 0.999 + (-1) = \underline{-1.999}$$

Figura 5.18: Integral definida de Hilda

Fernando no es capaz de calcular la integral definida, pero escribe el resultado 1. Podemos decir que el estudiante recuerda el resultado por ser parte de una enseñanza procedimental y memorística, ver fig. 5.19.

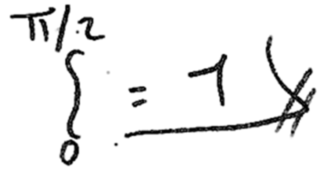


Figura 5.19: Fernando dice que la integral definida debe ser 1.

Sobre el problema 7:

7.- Calcule la siguiente integral definida $\int_0^{2\pi} |senx|\, dx$.

Todos los estudiantes con excepción de Viridiana y Fernando tratan de resolver el problema 7. A continuación mostramos los casos de Miguel e Hilda que son casos representativos de todas las respuestas. Miguel presenta esencialmente la misma errónea solución que la del problema anterior. Para Miguel le parece que lo que escribe resuelve tanto el problema de la integral definida de la función seno que la integral definida del valor absoluto de esa misma función, incluso sin importar los límites de integración, como se muestra la figura 5.20.

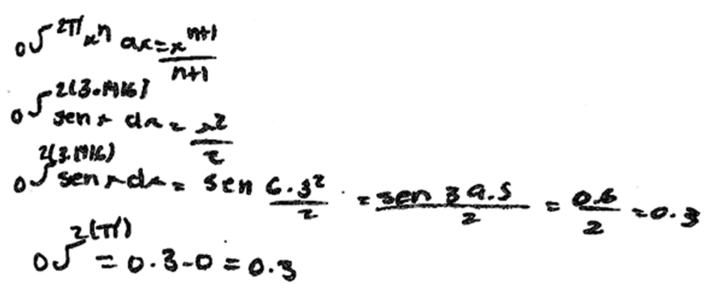


Figura 5.20: Miguel calcula la integral definida de la función $|\operatorname{sen} x|$ en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Hilda omite el valor absoluto para la función seno, cuya integral definida se desea calcular, pero introduce el valor absoluto en el resultado. No comprende lo que significa integrar la función valor absoluto, al menos geométricamente. También carece de conocimientos básicos sobre las funciones seno y coseno, no puede evaluarlas en puntos como son 0 y 2π.

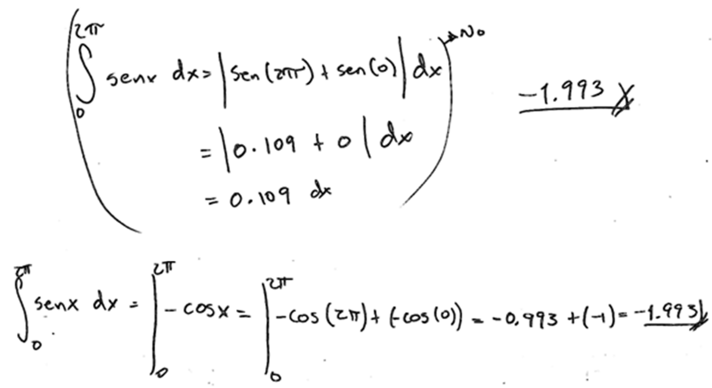
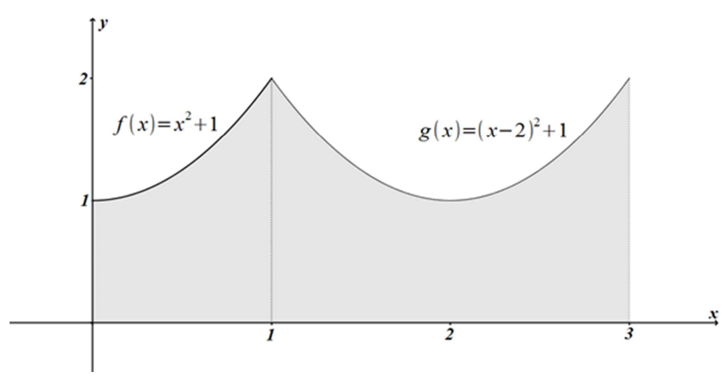


Figura 5.21: Integral definida por Hilda.

Sobre el problema 8:

8.- Calcule el área de la región sombreada de la siguiente figura, la cual está limitada por el eje x, el eje y, la recta $x = 3$, y las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = (x-2)^2 + 1$ en los intervalos indicados.



Todos los estudiantes con excepción de Fernando tratan de resolver el problema 8, en el cual Viridiana e Hilda se percatan de que se trata de un problema de integrales definidas.

Viridiana identificó el problema como un problema de dos integrales definidas, pero realiza cálculos incoherentes. Al realizar los cálculos no distingue entre lo que es una integral definida y una indefinida. Además, al calcular una integral indefinida, el resultado lo escribe bajo el signo de la integral. No es solamente una confusión de notación sino que no entiende entre el resultado de la integral y el papel que juega el integrando, véanse las figuras 5.22 y 5.23.

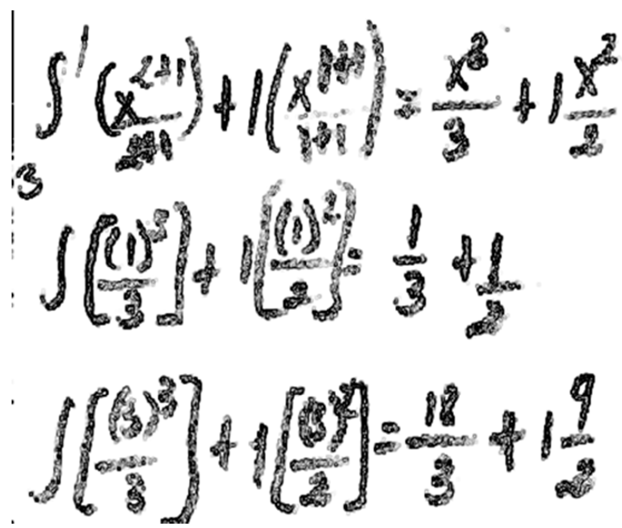


Figura 5.22: Integral definida de la función *f* por Viridiana.

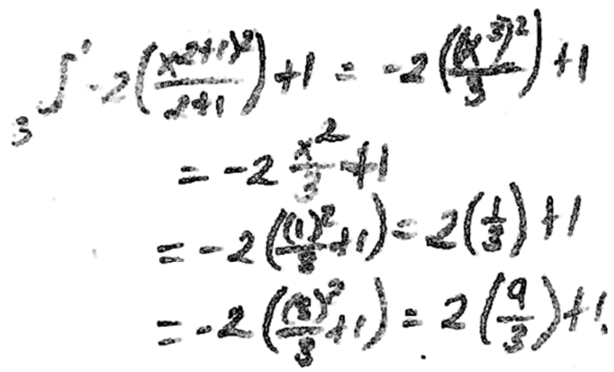


Figura 5.23: Integral definida de la función *g* por Viridiana.

Hilda hace un mejor trabajo que Viridiana, es capaz de identificar que el problema se trata de un problema de dos integrales definidas, tomando correctamente los límites de integración. Halla correctamente la integral indefinida de las dos funciones pero no es capaz de llevar acabo correctamente la evaluación en los límites de integración. Deja inconclusa, la solución, no se percata que debe sumar los resultados parciales obtenidos, véase la fig. 5.24.

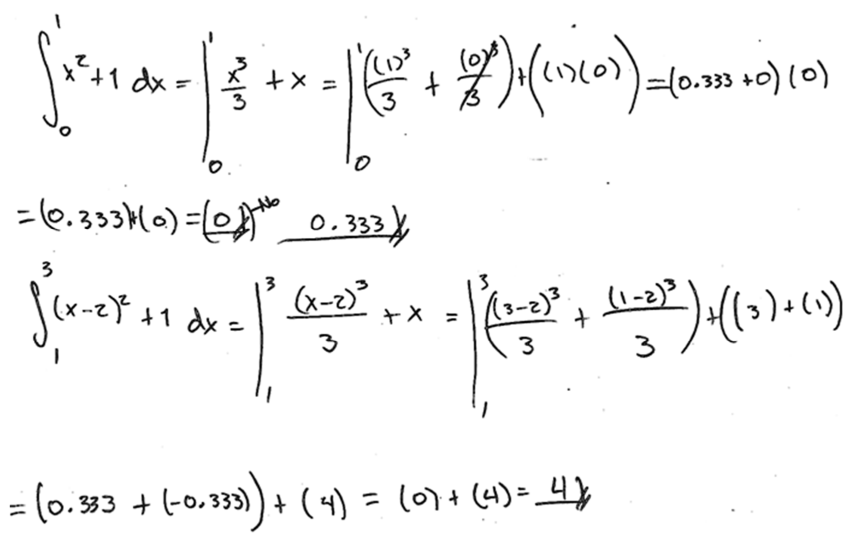


Figura 5.24: Integrales definidas por Hilda.

El resto de los estudiantes que trataron de resolver el problema realizaron una sustitución directa en las funciones como lo sucedido con el caso de Miguel, no lo miran como un problema de cálculo de una integral indefinida, ver fig. 5.25.

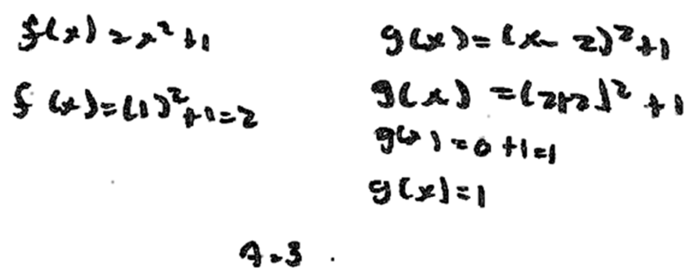
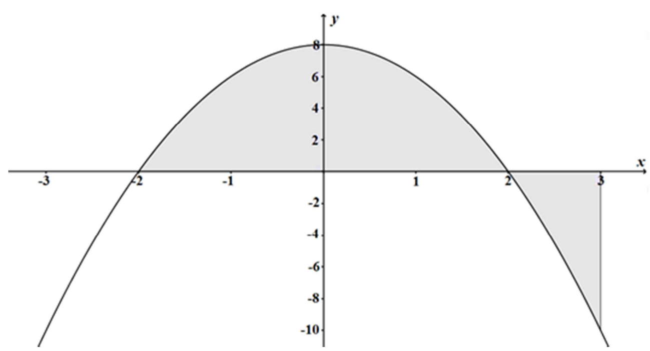


Figura 5.25: Evaluación de las funciones en puntos del intervalo por Miguel.

Sobre el problema 9:

9.- Calcule el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = -2x^2 + 8$ y el eje x en el intervalo $[-2,3]$.



Todos los estudiantes tratan de resolver el problema 9, en el cual Viridiana e Hilda identifican el problema como uno de integral definida. Viridiana no fue capaz de identificar que el problema se trata de un problema de dos integrales definidas. Muestra dificultades para realizar la integral de la función y no puede realizar satisfactoriamente las operaciones aritméticas, además de mezclar la integral indefinida con la integral definida, ver fig. 5.26.

$$\int_{-2}^{3} -2\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right)+8 \;=\; -2\left(\frac{x^3}{3}\right)+8$$

$$= -2\left[\frac{(3)^3}{3}\right]+8 = -2\,\frac{18}{3}+8+c$$

$$-2\left[\frac{(-2)^3}{3}\right]+8 = -2\,\frac{8}{3}+8+c$$

Figura 5.26: Integral definida por Viridiana.

Hilda no es capaz de identificar el problema como el cálculo de dos integrales definidas. Plantea una integral definida que no corresponde al área de la región. No se percata que debe calcular una integral definida para el intervalo donde la función es positiva y calcular la integral definida en el intervalo donde la función es negativa para después tomar el valor absoluto de esta última. Por otra parte Hilda es incapaz de evaluar correctamente la integral definida que propone. Hace cálculos incoherentes, ver fig. 5.27.

$$\int_{-2}^{3} 2x^2+8\,dx = 2\,\frac{x^3}{3} + \Big|_{-2}^{3} 8 \;=\; 2\,\frac{(3)^3}{3} + 2\,\frac{(-2)^3}{3}\Big| - 8$$

$$= 2\,\frac{(27}{3} + 2\,\frac{-8}{3}\Big| - 8 \;=\; \frac{54}{3} + \frac{-16}{3}\Big| - 8$$

$$= 18 - 5.3 - 8 = \underline{47}$$

Figura 5.27: Hilda calcula una Integral definida.

Miguel como el resto de los estudiantes no es capaz de identificar que el problema se trata de un problema de integral definida, se dedica a evaluar la función en valores del intervalo como se muestra en la fig. 5.28.

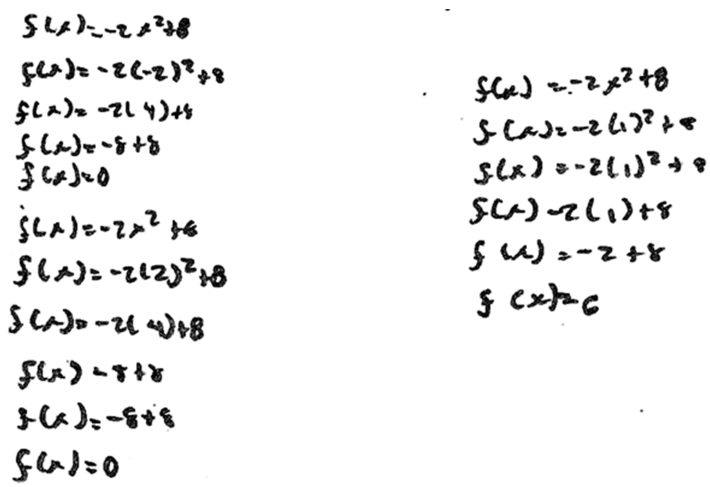
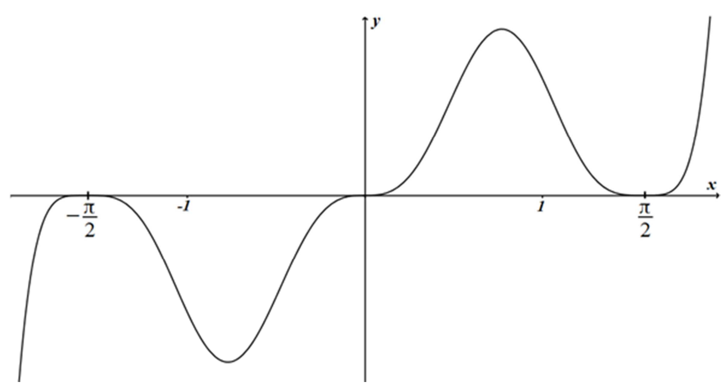


Figura 5.28: Evaluación de la función en puntos del intervalo por Miguel.

Sobre el problema 10:

10.- Calcule la integral definida $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3 cos^4 x\, dx$, a continuación se muestra la gráfica de $f(x) = x^3 cos^4 x$.



Aun cuando este problema tiene un aspecto en suma complejo, todos los estudiantes con excepción de Viridiana y Fernando trataron de resolver el problema, pero todos ellos sin éxito.

Hilda intenta calcular la integral definida pero no se percata de su complejidad, su desconocimiento del tema le impide percatarse de que se trata de una integral indefinida en sumo compleja. Hilda muestra serias confusiones con el cálculo de integrales indefinidas. ver fig. 5.30.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3 \cos^4 x \, dx = \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x^4}{4}\right) \cdot \left(\frac{\operatorname{sen}^5}{5} x\right) = \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{4} + \frac{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^4}{4}\right)$$

$$\left(\left(\frac{\operatorname{sen}^5}{5}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{85.76}{4} + \frac{-85.76}{4}\right)\left(\frac{0.52}{5}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= (21.44 - 21.44)\left(0.104)\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = (0)(-0.25) = \underline{0}$$

Figura 5.30: Integral definida por Hilda.

El resto de los estudiantes se dedican a hacer operaciones con el integrando sin relacionar sus desarrollos con el cálculo de la integral, ver fig. 5.29.

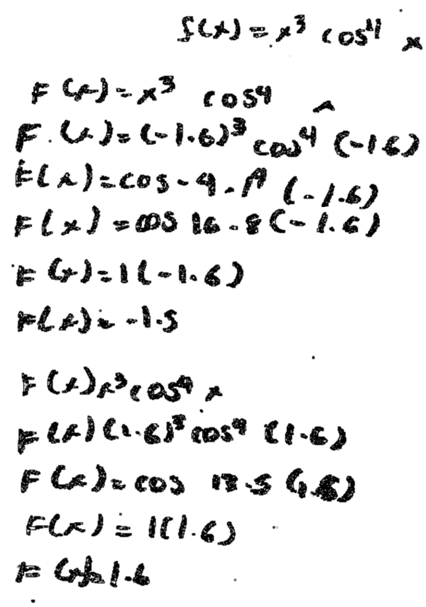
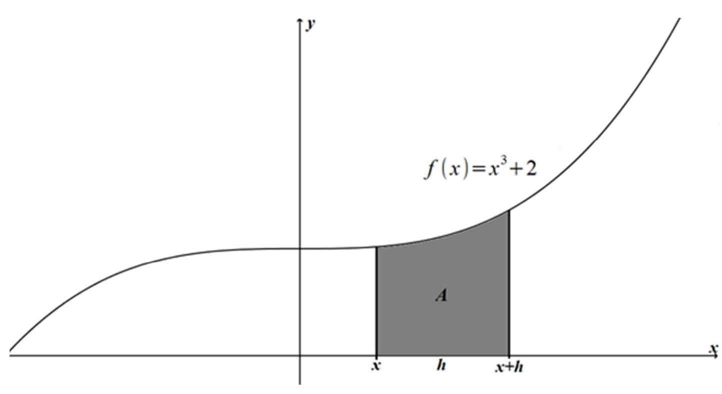


Figura 5.29: Miguel trata de evaluar la función a integrar en los límites de integración.

Sobre el problema 11:

11.- Calcule el cociente *A/h*, donde *A* es el área de la región sombreada de la siguiente figura.



Fernando es el único que trata de dar una respuesta al problema 11. Fernando muestra que es capaz de comprender e identificar el problema. Sin embargo muestra dificultades en sus operaciones algebraicas.

$$f(x) = x^3 + 2$$
$$f(x+h) = (x+h)^3 + 2$$
$$f(x+h) - f(x) = \cancel{x^3} + 3xh + h^3 \cancel{+2} - (\cancel{x^3} \cancel{+2})$$
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \cancel{x^3} + 3xh + h^3 \cancel{+2} - \cancel{x^3} \cancel{-2}$$
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{3xh + h^3}{h}$$
$$f(x) = \frac{\cancel{h}\,3x + \cancel{h^2}^{\,0}}{\cancel{h}}$$
$$f(x) = \frac{3x(}{\cancel{h}}$$
$$f(x) = \frac{3x\,\cancel{h}}{\cancel{h}}$$

Figura 5.31: Cálculo del cociente A/h por Fernando.

Capítulo 6

Conclusiones

6.1 Respuestas a las preguntas de investigación

De los resultados del análisis de las respuestas de los estudiantes participantes podemos ahora responder las preguntas que nos planteamos en nuestra investigación.

¿Hay dificultades en la comprensión del concepto de la integral definida cuando se aplica al cálculo de áreas?

Los estudiantes muestran evidencia de tener dificultades en la comprensión y aplicación de la integral definida en el cálculo de áreas, así como en los conocimientos previos, como es, en el caso de las operaciones aritméticas y algebraicas.

¿El estudiante tiene conocimientos básicos acerca de la construcción y de la interpretación geométrica de las sumas de Riemann?

En general, es muy pobre su comprensión sobre las sumas de Riemann, no manejan correctamente los elementos que constituyen a las sumatorias y tampoco comprenden su interpretación geométrica. Sin embargo esto no es la causa por la que no interpretan correctamente la integral definida como área y tampoco la aplican adecuadamente al cálculo de áreas.

¿El estudiante puede calcular áreas de regiones determinadas por gráficas de funciones en casos simples?

Los estudiantes tienen dificultades en la aplicación de la integral definida en el cálculo de áreas aún en casos simples, sin embargo estas dificultades tienen su causa en sus deficientes conocimientos previos al Cálculo, como es aritmética, algebra y funciones.

¿Es la complejidad de las funciones o la determinación de los límites superior o inferior de una integral definida lo que impide al estudiante?

Definitivamente no. No es la complejidad de las funciones la causa de sus dificultades, las causas son más de fondo, se deben a deficiente preparación en los cursos anteriores al curso de Matemáticas V.

¿Son las áreas signadas causas de dificultad de los estudiantes en el cálculo de áreas?

La respuesta es la misma que la de la pregunta anterior

¿Qué acercamientos adoptan los autores de los libros de cálculo sobre el tema de la integral definida que son consultados por los estudiantes?

Los libros de texto revisados desde nuestro punto de vista y a grandes rasgos muestran dos diferentes acercamientos para abordar los conceptos de la integral definida aplicada al cálculo de áreas. Tres de los libros de Cálculo hacen un acercamiento por medio de una definición descontextualizada de las sumas de Riemann, los ocho restantes libros hacen el acercamiento por medio de estas sumas.

¿Cuáles textos favorecen a la comprensión por parte de los estudiantes sobre la integral definida en el cálculo de áreas?

Ocho de los autores de los libros de Cálculo que adoptan un acercamiento a la integral definida mediante las sumas de Riemann, solamente tres de ellos destacan la importancia al cálculo de áreas.

6.2 Conclusiones.

En términos generales, los ocho estudiantes a quienes se les aplicó el cuestionario mostraron fuertes deficiencias de diferente naturaleza en el cálculo de integrales definidas y su aplicación al cálculo de áreas determinadas por gráficas de funciones.

En general se observaron fuertes deficiencias en su aritmética y su álgebra básica. En varios casos estas fueron las causas principales que le impidió resolver los problemas de integración.

También mostraron fuertes confusiones entre los significados de integral definida e integral indefinida, para varios el cálculo de la integral definida era simplemente el cálculo de la integral indefinida.

Pero el problema es aún más preocupante, pues la mayoría fue incapaz de calcular integrales indefinidas en extremo simples como son las integrales de polinomios de primer y segundo grado.

También mostraron un pobre conocimiento de las funciones trigonométricas. No fueron capaces de obtener los valores de las funciones seno y coseno en puntos como 0, $\frac{\pi}{2}$ y π. Algunos saben que la integral indefinida de $\operatorname{sen} x$ es $-\cos x$, pero no pueden calcular una integral definida de $\operatorname{sen} x$ con límites de integración en esos puntos.

En relación a las sumas de Riemann, no lograron interpretar geométricamente los sumandos con los que se construyen, es decir, en general no pudieron interpretar los términos $f(x_i)(x_i - x_{i-1})$ como áreas de rectángulos, cuando la función es positiva.

Recordemos que los estudiantes eran recién egresados del bachillerato, por lo que al momento de la aplicación del cuestionario hacía un semestre que habían acreditado el curso de cálculo diferencial e integral. Podríamos pensar que su fracaso se debió al olvido por haber transcurrido un semestre, sin embargo se detectaron deficiencias que no son propiamente de cálculo, sino de un conocimiento básico de aritmética, álgebra y funciones.

Es recomendable que antes de que el estudiante inicie sus estudios de cálculo, la institución se preocupe por asegurarse de que el estudiante salve sus deficiencias que tiene con su matemática básica. Esto también debe hacernos reflexionar sobre cómo estamos evaluando el aprovechamiento del estudiante.

Referencias

Arana, A. (2008). Esenciales de... Cálculo. México: Santillana.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In R. Gómez, P. (Ed.), Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Bogotá: grupo Editorial Iberoamericana S.A. de C.V.

Artigue, M. (2003). Enseignement de l'analyse et founctions de référence. Repères IREM, 11, 115-139.

Aspinwall, L., *et.al.* (1997). Uncontrollable mental imagery: graphical connection between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics,* **33**(3), 301-317

Ayres, F. & Mendelson, E. (2001). Cálculo. México: Mc Graw Hill.

Bezuidenhout, J. (1998). First-year university students’ understanding of rates of change. *International Journal of Mathematical Education in Sciences & Technology*. **29**(3), 389-399.

Brownell, W. A. (1947). The place of meaning in the teaching of Arithmetic. *Elementary School Journal*. **47**. 256-265.

Carpenter, T., and Lehrer, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. En E. Fennema, and T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 19-32). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

De Oteyza, E. (2006). Conocimientos fundamentales de matemáticas cálculo diferencial e integral. México: Pearson.

Even, R., & Tirosh, D. (2008). Teacher knowledge and understanding of students' mathematical learning. In L. English (Ed.), Handbook of international research in mathematics education (219-240). New York, USA: Routledge.

Fennema, E., and Romberg, T. (Eds.). (1999). *Mathematics classrooms that promote understanding*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Fuenlabrada, S. (2001). Cálculo Integral. México: Mc Graw Hill.

Granville, W. (1997). Cálculo diferencial e integral. México: Limusa.

Hähkiöniemi, Markus. (2006). Associative and reflective connections between the limit of the difference quotient and limiting process. *Journal of Mathematical Behavior*. **25**(2), 91-184.

Hiebert, J., Morris, A. K., Berk, D., & Jansen, A. (2007). Preparing teachers to learn from teaching. Journal of Teacher Education, 58, 47–61.

Hiebert, J. and Carpenter, T. (1992). Learning and Teaching with Understanding. En Grows, A.D. (Ed). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* (p.p. 65-97). New York. Macmillan Publishing Co.

Hirst, K. E. (1972). Derivatives and tangents. *Educational Studies in Mathematics* **4**, 299–305

Hughes-Hallett, D., Gleason, A., et al. (2003). Cálculo. México: CECSA.

Ibáñez, P. y García, G. (2008). Matemáticas VI. Cálculo integral. México: CENGAGE.

Lloyd, M. G. & Melvin, W. (1998). Supporting innovation; The impact of a teacher's conceptions of functions on his implementation of a reform curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*. **29**(3), 248-274

Mason, J. & Spence, M. (1999). Beyond mere knlowledge of mathematics: The importance of knowing-to act in the moment. Educational studies in mathematics, 38, 135-161.

Morales, F. (2004). Matemáticas V. Cálculo Integral. México: Fondo de cultura económica.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. 77, 20-26.

National Research Council. (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. Washington, DC: National Academy Press.

Prenowitz, Walter. (1951). Insight an understanding in the calculus. En Apostol, Tom, M. *Et.al.* (Eds.) *A Century of Calculus* (pp 32-37). The Mathematical Association of America. 1992.

Purcell, E., Varberg, D. y Rigdon, S. (2007). Cálculo diferencial e integral. México: Pearson.

Salazar, L., Bahena, H. & Vega, F. (2007). Cálculo Integral. México: Patria.

Shunk, D. H. (1997). *Teorías del aprendizaje*. México. Pearson Prentice Hall.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. The concept of function: Aspects of epistenology and pedagogy, 25, 23-58.

Sierpinska, A. (1992). *Understanding in mathematics*. London. Falmer Press.

Smith, R. & Minton, R. (2001). Cálculo diferencial e integral. México: Mc Graw-Hill.

Spitzer, S. M., Phelps, C. M., Beyers, J. E. R., Johnson, D. Y., & Sieminski, E. M. (2011). Developing prospective elementary teachers' abilities to identify evidence of student mathematical achievement. Journal of Mathematics Teacher Education, 14(1), 67–87.

Apéndice

Cuestionario

Nombre ____

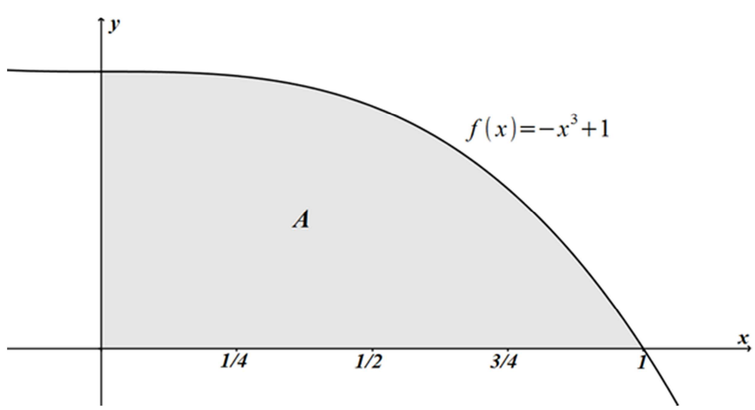
Instrucciones: Escriba sus operaciones y si están mal solo tache.

1.- Considere la función $f(x) = -x^3 + 1$, definida en el intervalo $[0,1]$. Use los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{4}$ y $x_4 = 1$ para obtener una aproximación del área sombreada por medio de la suma de Riemann.

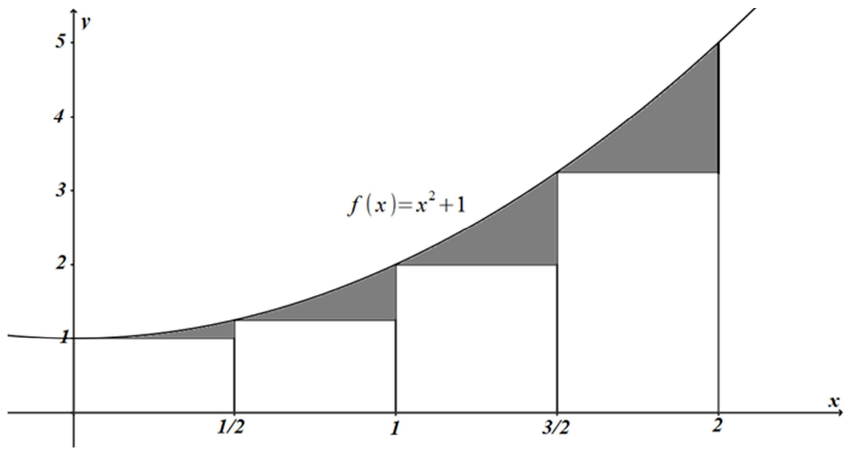
$$R(f,4) = \sum_{i=1}^{4} f\,(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

$$= f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_2)(x_3 - x_2) + f(x_3)(x_4 - x_3)$$

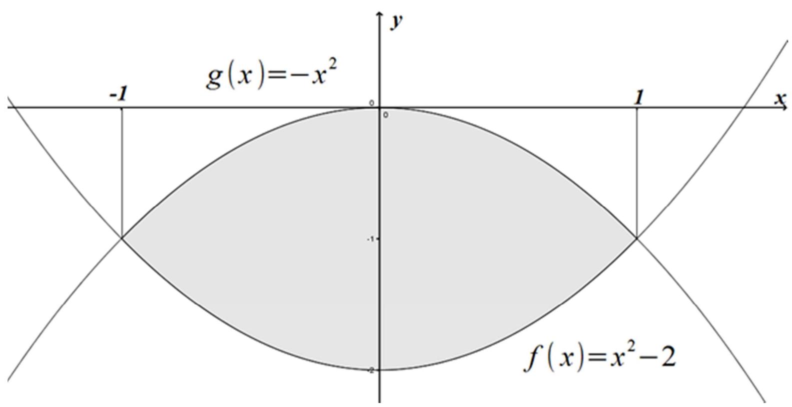
Dibuje los rectángulos correspondientes



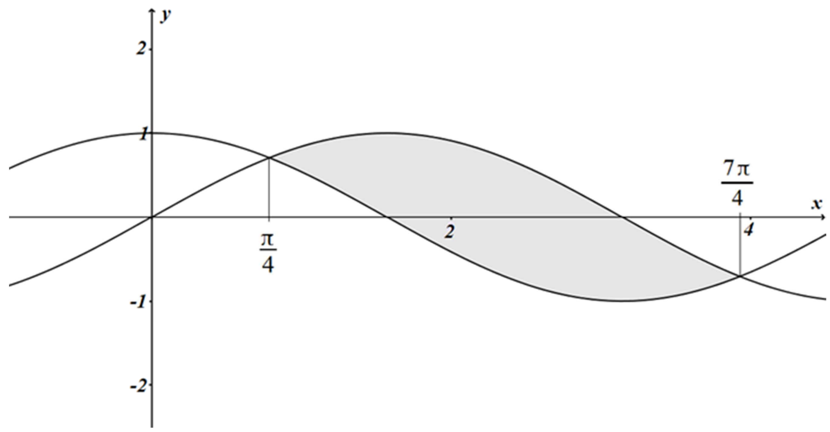
2.- Calcule el área de la región sombreada de la siguiente figura.



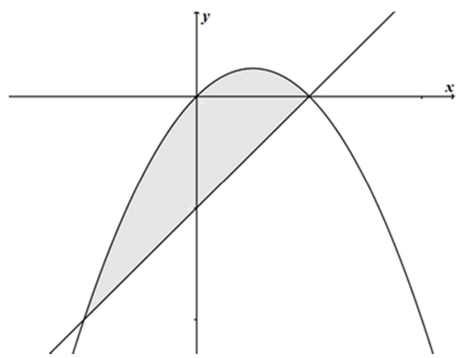
3.- Calcule el área de la región sombreada de la siguiente figura, la cual está delimitada por las funciones $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = -x^2$ entre los puntos $[-1,1]$.



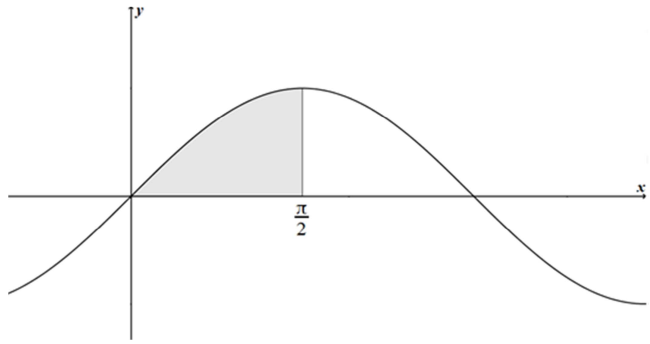
4.- Calcule el área de la región sombreada de la siguiente figura, la cual está delimitada por las funciones $f(x) = senx$ y $g(x) = cosx$, entre los puntos $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{7\pi}{4}$.



5.- Calcule el área de la región sombreada de la siguiente figura, la cual está delimitada por las funciones $f(x) = x - x^2$ y $g(x) = x - 1$.

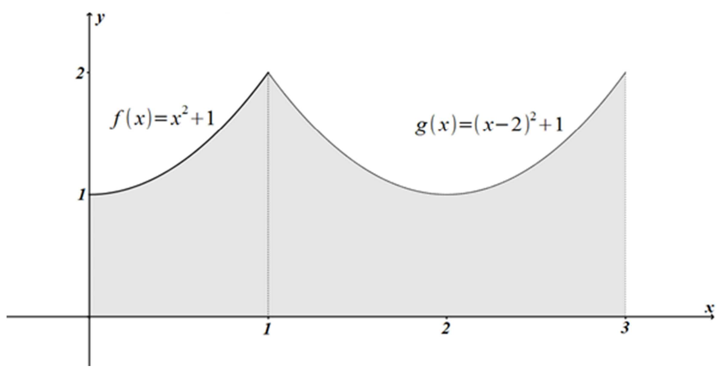


6.- Calcule la integral definida $\int_0^{\pi/2} sen\, xdx,$ a continuación se muestra la región cuya área se pide calcular.

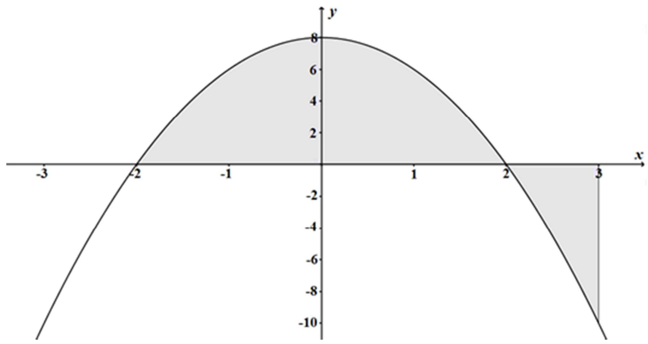


7.- Calcule la siguiente integral definida $\int_0^{2\pi} |senx|\, dx$.

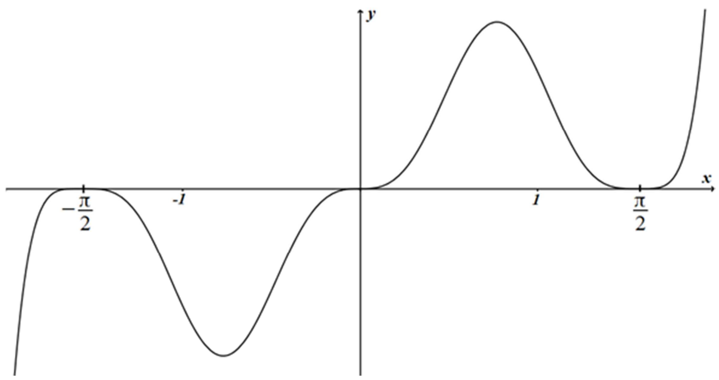
8.- Calcule el área sombreada de la siguiente figura, la cual está limitada por el eje x, el eje y, la recta $x = 3,$ y las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = (x - 2)^2 + 1$ en los intervalos indicados.



9.- Calcule el área limitada por $f(x) = -2x^2 + 8$ y el eje X en el intervalo $[-2,3]$.



10.- Calcule la integral definida $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3 cos^4 x\, dx$, a continuación se muestra la gráfica de $f(x) = x^3 cos^4 x$.



11.- Calcule el cociente *A/h*, donde *A* es el área de la región sombreada de la siguiente figura.