CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

Comprensión del concepto de función inversa. Un estudio con estudiantes de ingeniería.

Tesis que presenta

Nalleli Rodríguez Ramírez

para obtener el grado de

Maestra en Ciencias

en la especialidad de

Matemática Educativa

Director de tesis

Dr. Antonio Rivera Figueroa

México D. F. Junio de 2016

Dedico este trabajo a mi familia

En especial a mi hermana Nancy

Agradezco al Concejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) el apoyo financiero brindado a través de la beca otorgada durante mis estudios.

Becario No. 486274

AGRADECIMIENTOS

A mis padres J. Carmen y Ma. Carmen, y a mis hermanas Roycela, Edith y Nancy por sus enseñanzas a lo largo de mi vida, así como su apoyo y comprensión.

A mis sobrinos Karla, Zuly, Brandon, Yuridia, Joseline y Jacqueline, espero que este trabajo les sirva como motivación para lograr las metas que se propongan.

A mi asesor el Dr. Antonio Rivera Figueroa gracias por la oportunidad brindada de llevar a cabo esta investigación bajo su tutela, su apoyo y paciencia me han permitido concluir este ciclo de mi carrera profesional.

A mis sinodales la Dra. Martha Leticia García Rodríguez y el Dr. Hugo Rogelio Mejía Velasco por sus comentarios y sugerencias que sirvieron para enriquecer este trabajo.

A mis compañeros, amigos, profesores y personal del departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

A los alumnos, profesores, amigos y todas las personas que fueron parte de este proceso.

ÍNDICE

RESUMEN

En este trabajo presentamos los resultados de una investigación que realizamos sobre las deficiencias de aprendizaje del concepto “función inversa” de estudiantes de ingeniería. En particular, en los conceptos previos al manejo de función inversa, y en el manejo de las funciones inversas en el ambiente algebraico y el ambiente gráfico.

La recolección de datos se hizo mediante un cuestionario de diez preguntas y entrevistas posteriores a estudiantes de ingeniería en comunicaciones y electrónica y estudiantes de ingeniería mecánica.

El análisis de los datos obtenidos, muestra que el manejo de los alumnos del tema función inversa es algorítmico, también muestran confusión e ideas erróneas acerca del tema.

En especial se observa que no le dan la suficiente importancia a los dominios y contradominios de las funciones y esto los lleva a procedimientos incompletos o incorrectos.

ABSTRACT

This paper presents the results of a research we did on learning deficiencies concept of "inverse function" of engineering students. In particular, the concepts prior to handling inverse function, in handling and inverse functions in algebraic environment and graphical environment.

Data collection was done through a questionnaire of ten questions and subsequent interviews with engineering students in communications and electronics, and mechanical.

The analysis of the data obtained shows that the management of students of the subject inverse function is algorithmic, also show confusion and wrong ideas about the subject.

In particular shows that do not give enough importance to domains and codomains of functions and this leads to incomplete or incorrect procedures.

INTRODUCCIÓN

Un concepto relevante en el estudio de las matemáticas es el concepto de función, las funciones son el recurso más utilizado para modelar fenómenos de diferentes sistemas, ya sean físicos, biológicos o económicos. Dentro del estudio de funciones encontramos el tema función inversa. El concepto de función inversa cobra importancia en sí mismo y en la comprensión de la relación entre las funciones logaritmo y exponencial, como se muestra en algunas investigaciones.

En este trabajo se reportan los resultados sobre una investigación realizada a estudiantes de ingeniería, sobre el tema función inversa. Este reporte está compuesto por cinco capítulos, a continuación se menciona de manera breve en qué consiste cada uno de ellos.

En el capítulo 1 se da una breve descripción de las dificultades que tienen los alumnos en relación con el concepto de función inversa, se plantea la pregunta de investigación y los objetivos de la misma.

En el capítulo 2 se exponen los temas de matemáticas involucrados en nuestra investigación, la manera en que son tratados en algunos textos y el significado de aprender matemáticas con comprensión.

En el capítulo 3 se expone la metodología seguida en esta investigación, se presenta el instrumento utilizado para la recolección de datos y se listan los objetivos de cada pregunta del instrumento.

En el capítulo 4 se presenta el análisis de los datos obtenidos. El análisis se llevó a cabo para cada pregunta y se analizó de acuerdo a los objetivos mencionados en el capítulo 3.

En el capítulo 5, se da a conocer la respuesta a la pregunta de investigación, así como las reflexiones hechas a partir de las respuestas del cuestionario obtenidas.

Capítulo 1.
Planteamiento del problema.

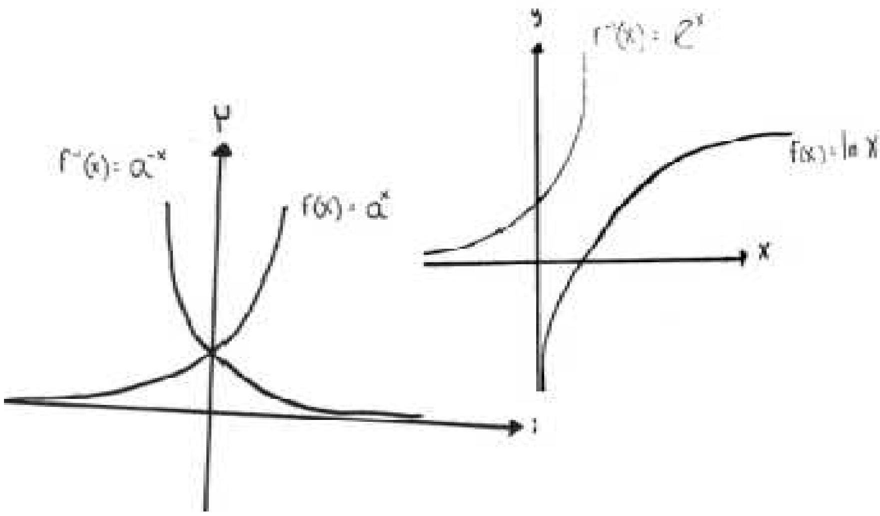
1.1 Antecedentes.

El aprendizaje del concepto de función y el estudio de funciones presentan diversas dificultades a los estudiantes de nivel superior. En particular, el aprendizaje del concepto de función inversa causa conflicto desde su propio nombre, ya que en ocasiones es llamada función recíproca, por ejemplo, en una de las enciclopedias libres de Internet encontramos la siguiente definición:

> "Sea *f* una función real biyectiva cuyo dominio sea el conjunto *I*, es decir, creciente o decreciente en el conjunto *I*, y cuya imagen sea el conjunto *J*. Entonces, la **función recíproca o inversa** de *f*, denotada f^{-1}, es la función de dominio *J* e imagen *I* definida por la siguiente regla: $f(x) = y \iff f(y) = x$." (Wikipedia, 2015)
>
> Por ende en la definición anterior, el autor considera equivalentes que "f sea biyectiva en *I*" y que "*f* sea creciente o decreciente en *I*" lo cual es falso.

El uso de la palabra "recíproca" como sinónimo de la palabra "inversa", en la concepción de función inversa induce a los alumnos a asociar el concepto de función inversa con el concepto del recíproco de un número, podemos notar esto en el ejemplo dado en Ferrari & Farfán (2008) donde los alumnos eligen a $f(x) = x$ como la función inversa de $f(x) = \frac{1}{x}$. Debemos considerar además que en matemáticas escribimos $A^{-1}(x)$ como abreviatura de la función inversa de $A(x)$, pero en álgebra el signo A^{-1} también significa $\frac{1}{A}$, es decir, el recíproco.

Notemos que también se presenta confusión en el aspecto gráfico, en el ejemplo dado en Ferrari & Farfán (2008) estudiantes de segundo semestre de Ingeniería Industrial asocian la función exponencial $f^{-1}(x) = e^x$ como la función inversa de la función logaritmo $f(x) = \ln x$ (Figura 1b); mientras que asocian la función $f^{-1}(x) = a^{-x}$ como la función inversa de la función $f(x) = a^x$ (Figura 1a).



(a) (b)

Figura 1. Exploración de funciones inversas.

Un estudio de Carlson, Oehrtman y Engelke (citado en Ferrari & Farfán, 2008, p. 320) con más de 2000 estudiantes de precálculo al final del semestre donde se daba una función *f* por medio de una tabla de valores:

x	x_1	x_2	x_3	x_4
$f(x)$	d	b	a	c

mostró que sólo el 17% de estos estudiantes determinó correctamente el valor de $f^{-1}(a)$.

1.2 Pregunta de investigación.

Dada la problemática antes descrita y partiendo que es fundamental el conocimiento del concepto de función inversa y conceptos asociados, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación:

- ¿Qué deficiencias de aprendizaje del concepto de función inversa y conceptos asociados muestran los estudiantes de ingeniería?

Con la intención de delimitar el proceso de investigación a desarrollar, se proponen dos objetivos de investigación, a través de los cuales pretendemos obtener respuestas para nuestra interrogante. Los objetivos específicos son:

1. Diseñar un instrumento que facilite la exploración sobre las deficiencias en el aprendizaje del concepto de función inversa y sus conceptos relacionados.

2. Identificar las deficiencias en el aprendizaje del concepto de función inversa y sus conceptos asociados, de estudiantes de ingeniería.

Capítulo 2.
Marco referencial
y
Marco teórico.

2.1 Marco referencial

En esta sección exponemos el concepto de función inversa, que es el concepto matemático objeto de nuestra investigación, hacemos una revisión de la forma en que son tratados los conceptos relacionados al tema función inversa en algunos libros de texto que tomaremos como referencias, uno de ellos el libro "Cálculo" del autor James Stewart, el cual es un libro que circula ampliamente entre los alumnos de ingeniería a los cuales hemos aplicado el instrumento de investigación. También tomaremos como referencia el libro "Cálculo diferencial" del autor Antonio Rivera y el libro "Calculo diferencial e integral" de los autores Arturo Aguilar, Fabián Bravo, Herman Gallegos, Miguel Cerón y Ricardo Reyes,

2.1.1 Una revisión al tema función inversa y conceptos involucrados dados por los libros de texto.

Comenzaremos haciendo una revisión de los conceptos función, función uno a uno y función inversa, dados en el libro "Cálculo" de James Stewart.

Definición 1 (Stewart, 2002)

> Una función f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto B.
>
> Por lo común, consideramos funciones para las cuales los conjuntos A y B son conjuntos de números reales. El conjunto A se llama dominio de la función. El número $f(x)$ es el valor de f en x y se lee "f de x". La imagen de f es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$, conforme x varia en todo el dominio A.

Definición 2 (Stewart, 2002)

Se dice que una función es uno a uno si nunca toma el mismo valor dos veces; es decir,

$f(x_1) \neq f(x_2)$ siempre que $x_1 \neq x_2$

Prueba de la recta horizontal. Una función es uno a uno si o solo si ninguna recta horizontal interseca su gráfica más de una vez.

Veamos la definición de función inversa:

Definición 3 (Stewart, 2002)

Sea *f* una función uno a uno, con dominio *A* e imagen *B*. entonces su función inversa f^{-1} tiene dominio *B* e imagen *A* y la define

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

Para cualquier *y* en *B*.

Note que:

$$\text{dominio de } f^{-1} = \text{imagen } f$$

$$\text{imagen de} f^{-1} = \text{dominio de } f$$

Precaución: no confunda el -1 de f^{-1} con un exponente. Por tanto,

$$f^{-1}(x) \text{ no significa } \frac{1}{f(x)}$$

En el libro "Cálculo" de Stewart, vemos que el autor no utiliza los términos inyectiva, suprayectiva, biyectiva, pero que la definición de función inversa la establece para funciones $f: A \to B$ uno a uno, con imagen *B*, por lo tanto suprayectiva, de hecho biyectiva.

Notamos además que el autor recalca cual es dominio e imagen de la función inversa; también pide tener precaución y no confundir el -1 de f^{-1} con un exponente, lo cual puede sugerir que los alumnos tienen confusión con esta notación.

Otro libro consultado por los estudiantes de ingeniería es “Calculo diferencial e integral” de los autores Aguilar, Bravo, Cerón, Gallegos y Reyes. Veamos algunas de las definiciones dadas en este libro.

Definición 4 (Aguilar et al., 2010)

Dada una función $f: A \rightarrow B$ se dice que el conjunto A es el dominio (D_f) y B el contradominio (C_f) o codominio de *f*.

Rango (R_f)

Valores del contradominio para los cuales $y = f(x)$, siendo $f(x)$ la imagen de *x*.

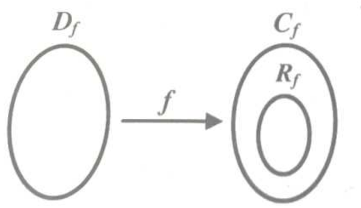


Figura 2. Dominio, contradominio y rango de una función.

Definición 5 (Aguilar et al., 2010)

Función inyectiva (uno a uno)

Si $x_1, x_2 \epsilon D_f$ y $x_1 \neq x_2, f$ es una función inyectiva si y solo si $f(x_1) \neq f(x_2)$, o dicho de otra forma, $f(x_1) \neq f(x_2)$ si y solo si $x_1 \neq x_2$.

Se determina si la función es inyectiva al trazar una recta paralela al eje X sobre la gráfica y si toca un sol punto es inyectiva. También se puede decir que una función inyectiva es aquella que siempre es creciente o siempre decreciente.

Definición 6 (Aguilar et al., 2010)

Función suprayectiva

Una función $f: A \to B$ es suprayectiva o sobreyectiva si para cada $b \epsilon B$ existe $a \epsilon A$ tal que $f(a) = b$; es decir, para todo elemento de B siempre hay uno de A al cual fue asignado.

Otra forma de reconocer una función suprayectiva es si su contradominio es igual a su rango. Al menos que se indique lo contrario el contradominio de las funciones dadas serán números reales.

Definición 7 (Aguilar et al., 2010)

Función biyectiva

Una función “f” es biyectiva si es inyectiva y suprayectiva.

En el libro de Aguilar et al.(2010) notamos que las definiciones incluyen el uso de los términos “función inyectiva”, “función suprayectiva” y “función biyectiva”; lo que pone en evidencia, aunque no es parte del estudio en este texto, la importancia de la utilización de varios textos para la comprensión de un tema, ya que al solo utilizar una referencia podríamos perder partes ya sea sutiles o muy importantes del tema.

Por ultimo veamos la definición dada por Rivera(2012) para “función inversa”.

Definición 8 (Rivera, 2012)

Sea f: $X \to Y$ una función biyectiva, su función inversa o simplemente la inversa de f, es la función f^{-1}: $Y \to X$ definida como sigue:

Para cada $y \epsilon Y$, tomamos la única $x \epsilon X$, tal que $f(x) = y$ (existe tal x por ser f suprayectiva y es unica por ser f inyectiva), entonces $f^{-1}(y) = x$.

Es importante aclarar que previo a la aplicación del cuestionario se les explico a los estudiantes que una función inyectiva era también llamada función uno a uno y que una función suprayectiva era también llamada función sobreyectiva.

2.1.2 Una revisión al procedimiento para obtener la función inversa de una función, dado por los libros de texto.

En "Cálculo" de Stewart encontramos el siguiente procedimiento

Cómo hallar la función inversa de una función f uno a uno:

1. Escribimos $y = f(x)$.

2. Resolvemos esta ecuación para x en términos de y .

3. Para expresar f^{-1} como función de x, intercambiamos x y y. La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$

Ejemplo dado en Stewart (2002):

Encuentre la función inversa de $f(x) = x^3 + 2$.
Solución. Primero escribimos:

$$y = x^3 + 2$$

Luego resolvemos esta ecuación para *x*:

$$x^3 = y - 2$$

$$x = \sqrt[3]{y - 2}$$

Por último, intercambiamos *x* y *y*:

$$y = \sqrt[3]{x - 2}$$

Por lo tanto, la función inversa es

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$$

Observamos que el procedimiento se concentra en encontrar la fórmula de la función inversa, omiten indicar el dominio y contradominio tanto de la función original como de la función inversa obtenida, podría pensarse que con las definiciones antes expuestas está implícito, sin embargo queda la pregunta: ¿El alumno realmente tiene claro cuál es el dominio y contradominio de la función inversa?

También se explora el aspecto gráfico de la función inversa, veamos cómo es presentado en Stewart, (2002):

> El principio de intercambiar x y y a fin de hallar la función inversa también nos proporciona el método para obtener la gráfica de f^{-1}, a partir de la de f. Dado que $f(a) = b$ si y sólo si $f^{-1}(b) = a$, el punto (a, b) esta en la gráfica de f si y sólo si el punto (b, a) esta en la gráfica de f^{-1}. Pero obtenemos el punto (b, a) a partir del punto (a, b) por reflexión respecto de la recta $y = x$. Se obtiene la gráfica de f^{-1} al reflejar la gráfica de f respecto a la recta $y = x$.

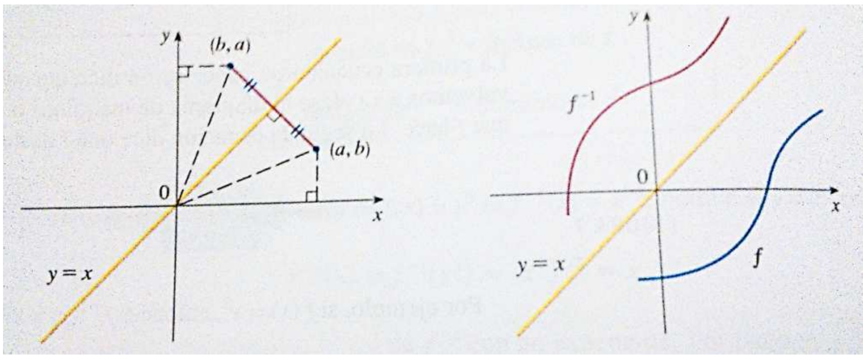


Figura 3. Trazado de función inversa.

En el libro “Calculo” de Stewart, notamos que los ejercicios respecto al tema funciones inversas involucran tanto el aspecto grafico como el algebraico, suponemos para crear conexiones entre estos dos aspectos, sin embargo nos hacemos la pregunta, ¿Los alumnos realmente establecen conexión entre el aspecto gráfico y algebraico del concepto funciones inversas o son manejados de forma aislada?

2.1.3 Una revisión al procedimiento para comprobar que dos funciones son inversas entre sí, dado por los libros de texto.

(Stewart, 2002)

Ecuaciones de cancelación:

$f^{-1}(f(x)) = x$ para todo *x* en *A*

$f(f^{-1}(x)) = x$ para todo *x* en *B*

La primera ecuación de cancelación dice que si partimos de *x*, aplicamos f y luego f^{-1}, volvemos a *x*. De este modo, f^{-1}deshace lo que f hace. La segunda ecuación dice que f deshace lo que f^{-1} hace.

En Stewart, no se muestran ejemplos, se podría pensar que los alumnos usarían estas ecuaciones de cancelación para comprobar sus resultados en los ejercicios para obtener la función inversa de una función dada, la pregunta sería: ¿Los alumnos utilizan estas ecuaciones de cancelación en los ejercicios para obtener la función inversa de una función dada?

Veamos el siguiente ejemplo dado en Rivera (2012)

Sea $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ dada por $f(x) = x^2$ y $g: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida como $g(x) = \sqrt{x}$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= (\sqrt{x})^2 \\ &= x\end{aligned}$$

Así que $f \circ g: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, es la función identidad $I_{[0,+\infty)}$, sin embargo, f no es la función inversa de g, pues

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= \sqrt{x^2}\end{aligned}$$

$$= |x|$$

Notemos que en este ejemplo se mencionan los dominios y contradominios de las funciones, y cuán importante es; por ejemplo, si tomáramos lo siguiente:

Sea $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ dada por $f(x) = x^2$ y $g: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, definida como $g(x) = \sqrt{x}$.

Entonces:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= (\sqrt{x})^2$$

$$= x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= \sqrt{x^2}$$

$$= x$$

Por lo tanto las funciones son inversas entre sí.

En los ejercicios en los que no se mencionan, se esperaría que el alumno eligiera el dominio y contradominio que volviera a la función biyectiva para obtener la función inversa y que recordara la relación que existe entre el dominio y contradominio de una función con el dominio y contradominio de su función inversa.

2.2 Aprender matemáticas con comprensión.

El aprender matemáticas con comprensión, es uno de los principios de aprendizaje para la educación matemática que aparece en el documento Principles and Standards for School Mathematics publicado en el año 2000 por el National Cuncil of Teachers of Mathematics, en él se menciona que “los estudiantes deben aprender matemáticas comprendiéndolas y construir activamente nuevos conocimientos a partir de la experiencia y de los conocimientos previos”

Tal como se menciona en Lima (2013) “La comprensión conceptual en matemáticas, es un proceso que consiste de una sucesión de actos o actividades mentales. De esta manera, la comprensión está en permanente desarrollo; es decir, está en permanente evolución donde crece y se transforma con el tiempo” (p. 27).

Hiebert y Carpenter (1992) consideran que “una idea o procedimiento matemático es comprendido si es parte de una red interna. Más específicamente, la matemática es comprendida si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de comprensión está determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una idea, procedimiento o hecho matemático es comprendido completamente si está conectado a redes existentes con más fuerza o numerosas conexiones” (p. 67).

Desde el punto de vista de Hiebert y Carpenter (1992) las consecuencias de la comprensión matemática son cinco, es generativa, promueve el recuerdo, reduce la cantidad que debe ser recordada, incrementa la transferencia e influye en las creencias.

Es *generativa* ya que los estudiantes crean sus propias representaciones internas y construyen sus propias redes de representación. *Promueve el recuerdo*, Hiebert y Carpenter sostienen que la memoria es un proceso de construcción en lugar de una actividad de almacenamiento, donde la información es estructurada dándole un sentido para ser recordada. En la comprensión la nueva información es incorporada por los estudiantes a su red de conocimientos, la ventaja de crear conexiones entre el nuevo conocimiento y el existente es que el conocimiento bien conectado es mejor recordado. Los autores consideran dos explicaciones para esto:

"Una red de conocimientos entera es menos probable de deteriorarse que una pieza de información aislada" (p.75).

"La recuperación de la información es aumentada si es conectada a redes más grandes. Hay simplemente más rutas de recuerdo" (p. 75).

Se *reduce la cantidad que debe ser recordada*, Hiebert y Carpenter consideran que si algo es comprendido es conectado a una red, por lo que "el recuerdo de cualquier parte simple de la red llega con el recuerdo de la red como un todo, reduciendo el número de detalles que deben ser recordados" (p. 75).

Incrementa la transferencia, los autores sostienen que transmitir es esencial en virtud de que nuevos problemas necesitan ser resueltos utilizando estrategias previamente aprendidas, señalan que al parecer "existe en los estudiantes un esfuerzo natural de buscar significado, aun cuando terminen haciendo conexiones erróneas" (p.76).

La última consecuencia que los autores le asignan a la comprensión es que *influye en las creencias*, señalan que la comprensión no solo tiene consecuencias cognitivas sino también afectivas, sostienen que los alumnos son constantemente invitados a memorizar procedimientos y reglas para manipular símbolos como piezas individuales de información, por lo que no es de extrañar que los alumnos vean a las matemáticas como una materia dedicada a reglas. Los autores señalan que:

"si los estudiantes fueran invitados a construir conexiones entre piezas de información -dentro de un sistema de representación o entre diferentes representaciones- uno podría suponer que los estudiantes creerían que las matemáticas son un cuerpo cohesivo de conocimientos, esa información adquirida en un escenario se conectará con información adquirida en otro, y que hay consistencia dentro de sistemas de representación y previsibles correspondencias entre sistemas de representación. Tales creencias, cada una a su vez, apoyarían el crecimiento posterior del conocimiento matemático" (p. 77).

En toda actividad matemática se involucra el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental, ambos importantes para la habilidad matemática; Hiebert y Carpenter (1992), identifican al conocimiento conceptual con conocimiento que se comprende, es decir, es conocimiento conceptual sólo si forma parte de una red, mientras que el conocimiento procedimental se considera como una secuencia de acciones.

Carpenter y Lehrer (1999), mencionan que "Cuando los estudiantes adquieren conocimiento con comprensión, ellos pueden aplicar ese conocimiento para aprender nuevos temas y para resolver problemas nuevos y no familiares. Cuando lo estudiantes no comprenden, ellos perciben cada tema de manera aislada. No pueden aplicar sus habilidades para resolver problemas que no hayan sido tratados de manera explícita por la enseñana y tampoco pueden extender su conocimiento a nuevos temas" (p. 21). Tomando en cuenta la importancia de la comprensión en matemáticas, es importante diseñar acciones que promuevan la creación de conexiones entre los diferentes conceptos y procedimientos.

Carpenter y Lehrer (1999), proponen cinco formas de actividad mental para el desarrollo de la comprensión.

Construcción de relaciones. Las ideas toman el significado de las formas en que se relacionan con otras cosas. Las personas construyen un significado para una nueva idea o proceso al relacionarlo con ideas o procesos que ya entienden

Extensión y aplicación de conocimiento matemático. Una de las características del aprendizaje es la de ser generativo. Esto significa agregar nuevos conceptos y procesos al conocimiento existente, además de estructuras que integren el conocimiento.

Reflexión sobre las experiencias. La reflexión implica un examen consiente de las acciones propios de uno. La resolución de problemas implica examinar conscientemente la relación entre el conocimiento existente y las condiciones de una situación problemática.

Articulación de lo que el individuo conoce. La articulación implica la comunicación de los conocimientos de uno, ya sea verbalmente, por escrito o por otros medios, como imágenes, diagramas o modelos.

Apropiación del conocimiento matemático. El desarrollo de la implicación personal de los estudiantes en el aprendizaje con comprensión está ligado a prácticas en el aula en el que la comunicación y la negoción de significados son facetas importantes.

Capítulo 3.
Metodología.

3.1 Aspectos metodológicos.

Este trabajo de investigación fue desarrollado en dos etapas: piloteo y aplicación del cuestionario. En el piloteo 27 estudiantes de segundo semestre de licenciatura en física y matemáticas respondieron al cuestionario prototipo, en tanto que la aplicación del cuestionario se hizo a 12 estudiantes de segundo semestre de ingeniería en comunicaciones y electrónica y a 10 estudiantes de segundo semestre de ingeniería mecánica de entre quienes seleccionamos a 7 estudiantes para entrevistarlos.

Los estudiantes tanto de ingeniería en comunicaciones y electrónica como los estudiantes de ingeniería mecánica, tenían un semestre de haber cursado la materia “calculo diferencial e integral” donde de acuerdo al plan de estudios los alumnos adquirieron conocimientos sobre el tema “función inversa”. Estos estudiantes comparten el mismo plan de estudio en “calculo diferencial e integral”.

3.2 Diseño del instrumento de recolección de datos.

Como se menciona en capítulos anteriores uno de nuestros objetivos es diseñar un instrumento que facilite la exploración sobre las deficiencias en el aprendizaje del concepto de función inversa y sus conceptos relacionados, para lo cual nos hemos apoyado en el plan de estudios de los alumnos de ingeniería y en algunos textos para el estudio de este tema.

Lo primero fue establecer qué habilidades se espera tengan los alumnos después de estudiar el tema “función inversa”, lo cual pretendemos averiguar si el alumno posee mediante el instrumento. Tomando en cuenta esto establecimos nuestros objetivos particulares, que se muestra en la siguiente tabla:

Reactivo	Objetivo
1	Averiguar si el alumno es capaz de aplicar los conceptos de inyectividad, suprayectividad y biyectividad a funciones algebraicas.
2	Averiguar si el alumno es capaz de aplicar los conceptos de inyectividad, suprayectividad y biyectividad a funciones dada su gráfica.
3	Averiguar si el alumno es capaz de redefinir el contradominio de una función que le permita obtener una función suprayectiva.
4	Averiguar si el alumno es capaz de hallar la inversa de una función dada
5	Averiguar si el alumno es capaz de verificar que dos funciones son inversas entre sí
6	Averiguar si el alumno indica el dominio y contradominio al hallar la inversa de una función dada
7	Averiguar si el alumno es capaz de identificar la gráfica de la funcion inversa de una funcion dada su gráfica.
8	Averiguar si el alumno es capaz de identificar pares de funciones mutuamente inversas graficamente.
9	Averiguar si el alumno es capaz de esbozar la función inversa de una función dada su gráfica.

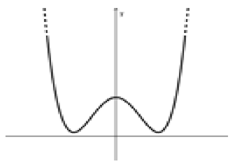
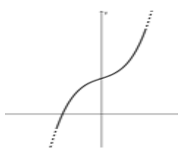
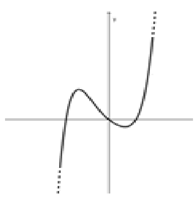
Así se diseñó el cuestionario prototipo donde se pretende que los reactivos cumplan los objetivos antes enlistados.

Cuestionario prototipo

1.-Marque con una **X** el tipo de función que corresponda con la función dada.

Función	Inyectiva	NO Inyectiva	Suprayectiva	NO Suprayectiva	Biyectiva	NO Biyectiva
$f: \mathbb{R} \to [0, \infty)$ $f(x) = \lvert x \rvert$						
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = 3 - 7x$						
$h: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ $h(x) = x^2$						

2.-Marque con una **X** el tipo de función que corresponda con la función dada.

Gráfica de la función	Inyectiva	NO Inyectiva	Suprayectiva	NO Suprayectiva	Biyectiva	NO Biyectiva
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 						
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 						
$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 						

3.-Sea $f\colon \mathbb{R} \to A$ dada por $f(x) = x^2 - 4x + 4$. Para que *f* sea suprayectiva *A* debería ser:

a) $[2, \infty)$.

b) $[0, \infty)$.

c) $\mathbb{R}$.

d) $[4, \infty)$.

En los problemas 4 a 6 seleccione la función que corresponda a la función inversa de la función dada.

4.- $g(x) = 2x - 3$

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = 2x - 3$

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{x+2}{3}$

c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{x+3}{2}$

d) Ninguna de las anteriores.

5.-$h(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$

a) $g\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ $g(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$

b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$

c) $g\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ $g(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$

d) Ninguna de las anteriores

6.- $h(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x-2}}$

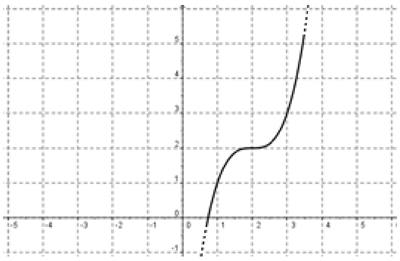
a) $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + 2$

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + 2$

c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x-2}}$

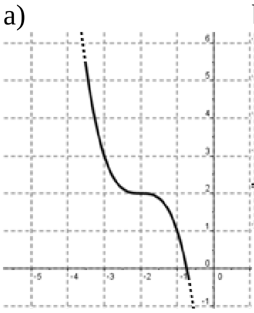
d) $f\colon (0,\infty) \to (2,\infty)$ $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + 2$

7.- La gráfica de una función es la de la siguiente figura

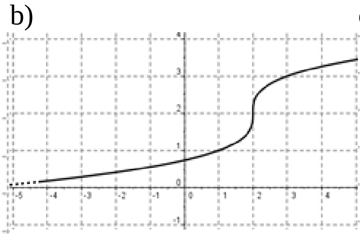


Indique cuál es la gráfica de la función inversa

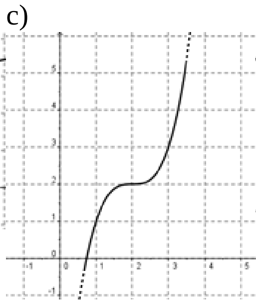
a)



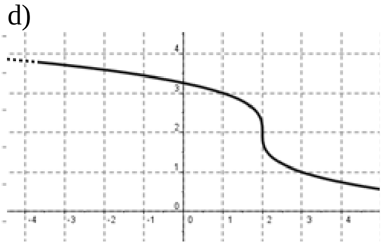
b)



c)

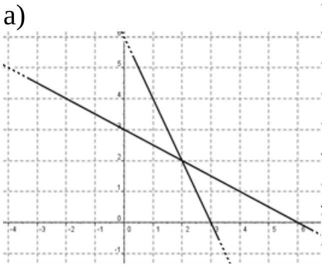


d)

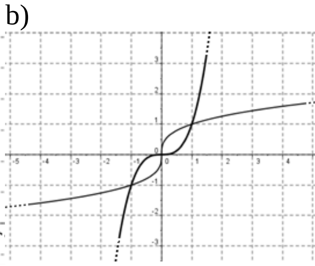


8.- Seleccione el par de funciones que **NO** sean inversas entre sí.

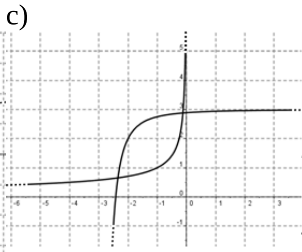
a)



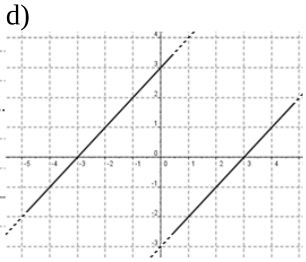
b)



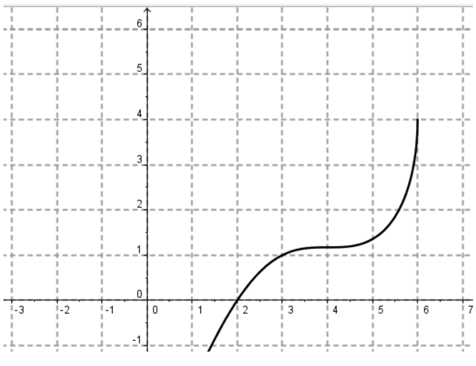
c)



d)

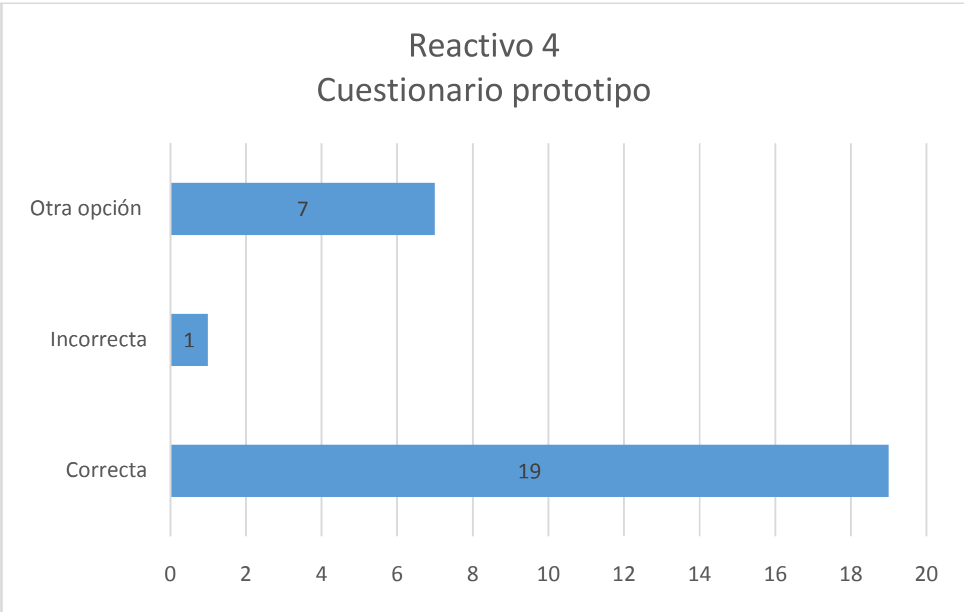


9.- Se da la gráfica de una función f, dibuje $f^{-1}(x)$ y diga cuánto vale $f^{-1}(1)$.

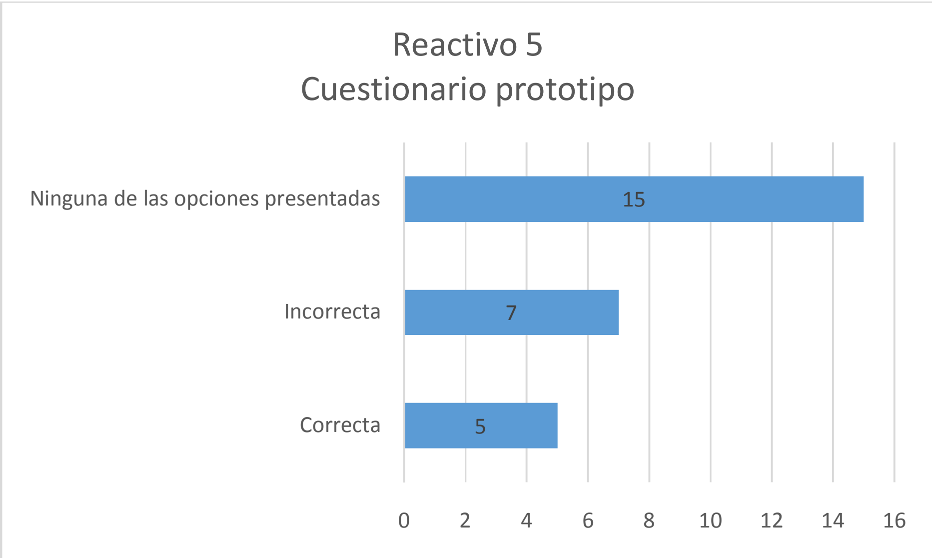


La siguiente tarea que nos propusimos después fue aplicar el cuestionario a 27 estudiantes del segundo semestre de la licenciatura en física y matemática, se analiza la información obtenida para averiguar si se lograban los objetivos propuestos en nuestro diseño. En este sentido nos dimos cuenta que los reactivos 4, 5 y 6 realmente no cumplían los objetivos.

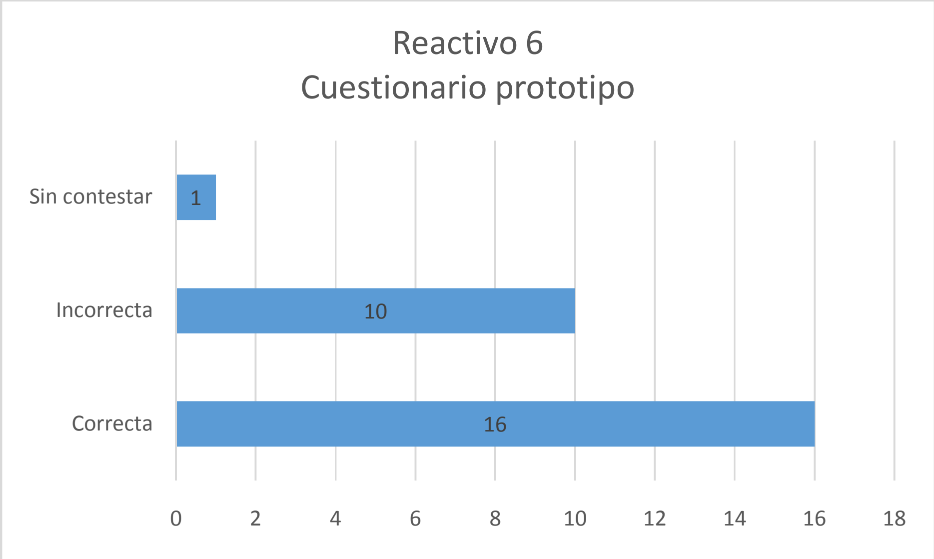
En el reactivo 4 nuestro objetivo era "averiguar si el alumno es capaz de hallar la inversa de una función dada", al ser un reactivo de opción múltiple los resultados pueden no arrojar una información real ya que los alumnos pueden seleccionar la opción correcta al azar, además que a simple vista no podemos determinar que dificultades tienen los estudiantes, por eso se rediseñó el reactivo como pregunta abierta para explorar el procedimiento que siguen los alumnos para hallar la función inversa. Se conserva la misma función ya que esta función y su función inversa tienen como dominio e imagen los números reales y queremos que en este reactivo el alumno se concentre en hallar la función inversa solamente. Los cambios se observan en el reactivo 5 del cuestionario final. En este reactivo se obtuvieron los siguientes resultados:



En el reactivo 5 nuestro objetivo era averiguar si el alumno es capaz de verificar que dos funciones son inversas entre sí, al ser de opción múltiple tenemos el mismo problema que en el reactivo 4, por lo cual cambiamos el reactivo a pregunta abierta y esta vez de forma directa indicamos al alumno que verifique que una función sea la función inversa de otra función. Se conservan las funciones involucradas en este reactivo por el grado de dificultad que presentan para hallar la función inversa. Los cambios pueden observarse en el reactivo 6 del cuestionario final. En los resultados obtenidos en el cuestionario prototipo podemos observar que la mayoría de los estudiantes contestan la opción “ninguna de las anteriores”.

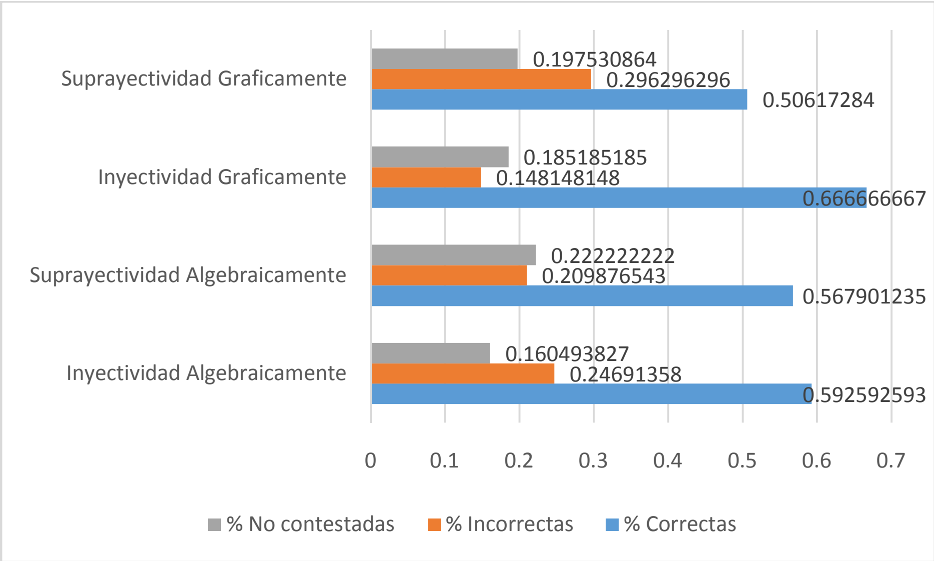


En el reactivo 6 se pretendía averiguar si el alumno indica el dominio y contradominio al hallar la inversa de una función dada, pero al igual que los reactivos 4 y 5, al ser de opción múltiple no podemos garantizar los motivos por los cuales el alumno escoja la opción correcta. Se rediseña en una pregunta abierta, solo se pregunta por la función inversa pues queremos observar si el alumno al obtenerla toma en cuenta el dominio y contradominio y lo indica en su resultados, o solo toma en cuenta la formula y trabaja a partir de ahí. Los cambios pueden observarse en el reactivo 7 del cuestionario final. Los resultados obtenidos en este reactivo en el cuestionario prototipo fueron los siguientes:

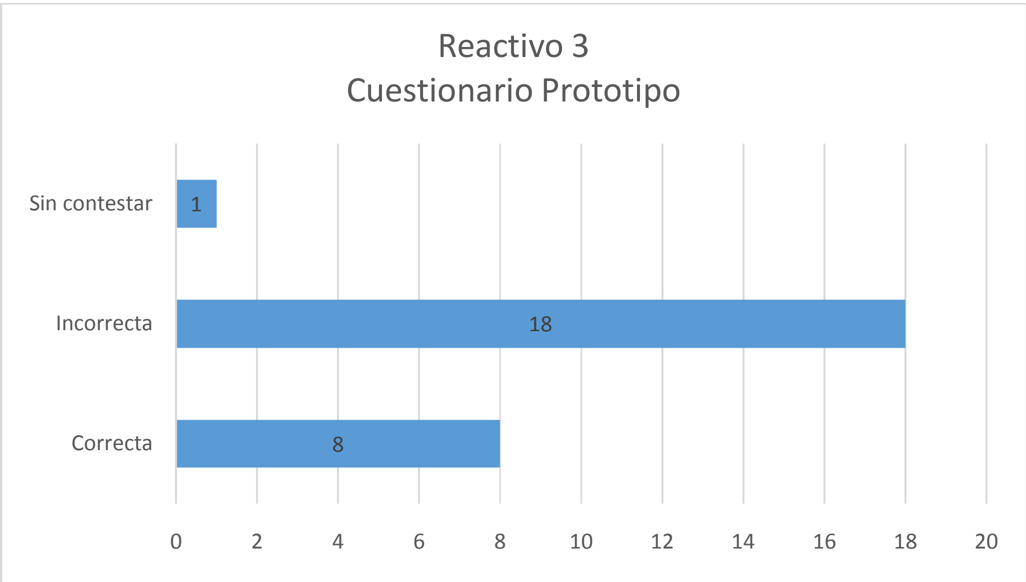


Al observar los reactivos 1 y 2, observamos que faltaba un reactivo que explorara si el alumno es capaz de identificar las definiciones correctas de inyectividad y suprayectividad, tanto verbal como matemáticamente para lo cual agregamos el reactivo 4 en el cuestionario final.

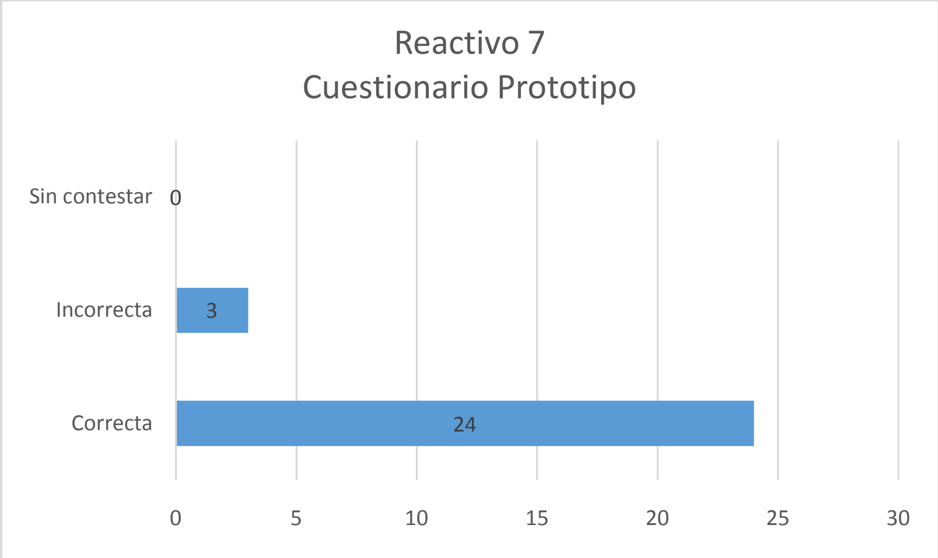
Los reactivos 1, 2 y 3 fueron intercambiados de orden ya que deseábamos reducir la influencia que pudiera tener el reactivo 1, en los reactivos 2 y 3. El reactivo 2 pasa a ser el reactivo 1 del cuestionario final y las funciones se eligen por los siguientes motivos: la primera función se elige principalmente para averiguar si el alumno es capaz de notar la importancia del contradominio de una función a la hora de determinar si es suprayectiva o no, las siguientes dos funciones se eligen principalmente para averiguar la habilidad de los alumnos de determinar si una función es inyectiva o no, la última función se elige para ver cómo trabajan los alumnos con las funciones no continuas. El reactivo 1 pasa a ser el reactivo 3 del cuestionario final y las funciones se eligen por los siguientes motivos: la primera función se elige principalmente para averiguar si el alumno es capaz de notar la importancia del contradominio de una función a la hora de determinar si es suprayectiva o no, las siguientes funciones se eligen para averiguar principalmente la habilidad de los alumnos de determinar si una función es inyectiva o no, si es suprayectiva o no, y si es biyectiva o no, a partir de su fórmula y observar que papel juega en esto las características particulares de las formulas. En el cuestionario prototipo se observó un mayor acierto en el manejo del concepto de inyectividad que en el concepto de suprayectividad y un mayor acierto en el manejo del concepto de inyectividad en el ambiente grafico contrario a un mayor acierto en el manejo del concepto de suprayectividad en el ambiente algebraico tal como se puede observar en la siguiente gráfica.

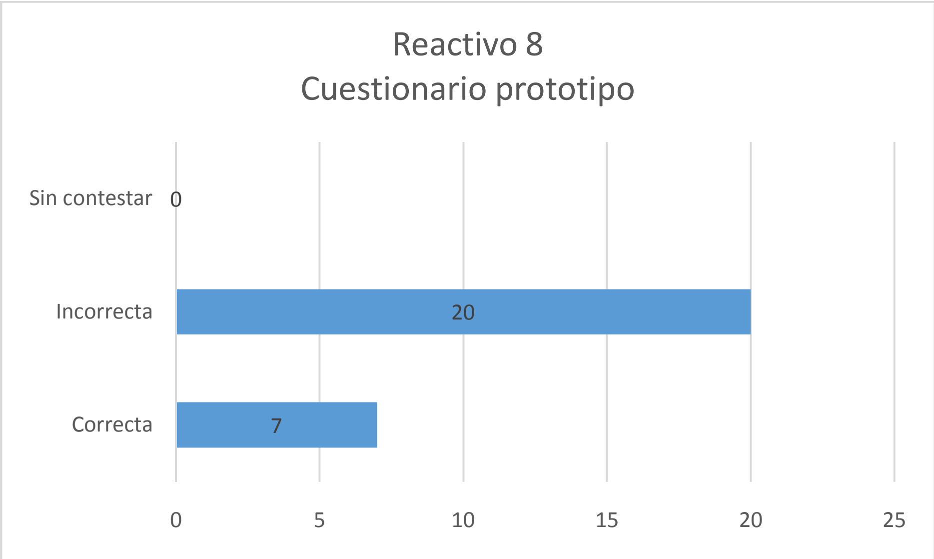


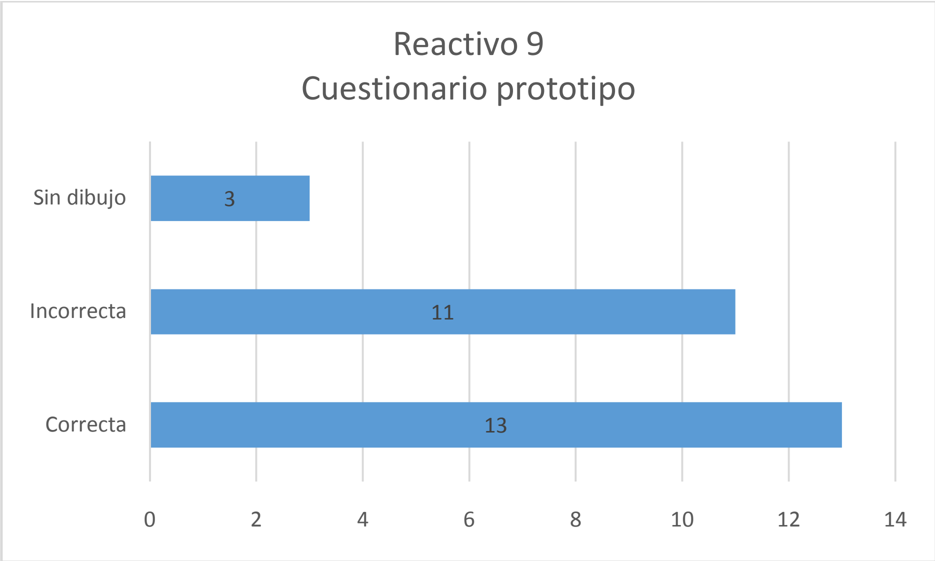
El reactivo 3, se conserva igual y pasa a ser el reactivo 2 del cuestionario final. En el cuestionario prototipo se obtuvieron los siguientes resultados.



Los reactivos 7, 8 y 9 también se conservan igual y pasan a ser los reactivos 8, 9 y 10 del cuestionario final. La grafica del reactivo 9 se elige de tal forma que no arroje una formula a simple vista, precisamente para evaluar la capacidad del alumno sin involucrar sus conocimientos algebraicos de funciones inversas. En el cuestionario prototipo para estos reactivos se obtuvieron los siguientes resultados:







Una vez analizado el cumplimiento de los objetivos de los reactivos del cuestionario prototipo se procedió a diseñar el cuestionario final, a continuación enlistamos los objetivos que debe cumplir el cuestionario final:

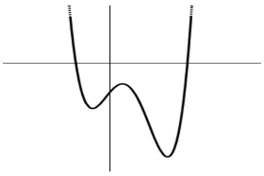
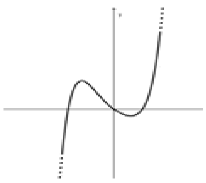
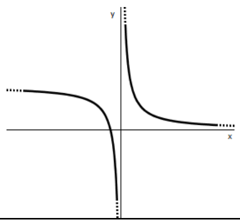
Reactivo	Objetivo
1	Averiguar si el alumno es capaz de aplicar los conceptos de inyectividad, suprayectividad y biyectividad a funciones dada su gráfica.
2	Averiguar si el alumno es capaz de redefinir el contradominio de una función que le permita obtener una función suprayectiva.
3	Averiguar si el alumno es capaz de aplicar los conceptos de inyectividad, suprayectividad y biyectividad a funciones algebraicas.
4	Averiguar si el alumno es capaz de identificar las definiciones correctas de inyectividad y suprayectividad, tanto verbal como matemáticamente.
5	Averiguar si el alumno es capaz de hallar la inversa de una función dada

6	Averiguar si el alumno es capaz de verificar que dos funciones son inversas entre sí
7	Averiguar si el alumno indica el dominio y contradominio al hallar la inversa de una función dada
8	Averiguar si el alumno es capaz de identificar la gráfica de la funcion inversa de una funcion, dada su gráfica.
9	Averiguar si el alumno es capaz de identificar pares de funciones mutuamente inversas graficamente.
10	Averiguar si el alumno es capaz de esbozar la función inversa de una función dada su gráfica.

Posteriormente aplicamos el cuestionario y analizamos la información obtenida, lo cual haremos en el capítulo siguiente.

Cuestionario final

1.-Marque con una **X** el tipo de función que corresponda con la función dada.

Gráfica de la función	Inyectiva	NO Inyectiva	Suprayectiva	NO Suprayectiva	Biyectiva	NO Biyectiva
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 						
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 						
$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 						
$g: (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \to \mathbb{R}$ 						

2.-Sea $f: \mathbb{R} \to A$ dada por $f(x) = x^2 - 4x + 4$. Para que f sea suprayectiva A debería ser:

a) $[2, \infty)$. b) $[0, \infty)$. c) $\mathbb{R}$. d) $[-4, \infty)$.

3.-Marque con una **X** el tipo de función que corresponda con la función dada.

Función	Inyectiva	NO Inyectiva	Suprayectiva	NO Suprayectiva	Biyectiva	NO Biyectiva
$f: \mathbb{R} \to [0, \infty)$ $f(x) = \lvert x \rvert$						
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = 3 - 7x$						
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x\lvert x \rvert$						
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = 5x^4 - 7x^3 - 2x^2 + 2x - 1$						

4.- Indique si el enunciado es verdadero(V) o si es falso(F).

Sea $f: X \to Y$ una función arbitraria:

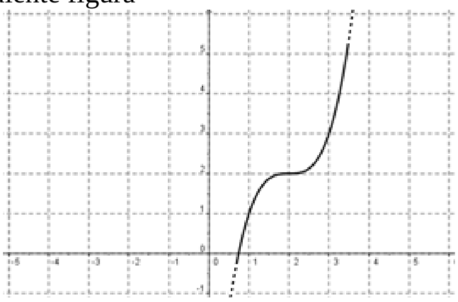
	V	F
f es inyectiva si elementos diferentes del dominio tienen imágenes diferentes.		
f es inyectiva si existen $x_1, x_2 \ \epsilon \ X$ tal que $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$		
f es inyectiva si $x_1, x_2 \ \epsilon \ X$ son tales que $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$		
f es suprayectiva si cada elemento de su contradominio es imagen de al menos un elemento de su dominio.		
f es suprayectiva si para cada $x \ \epsilon \ X$ existe al menos un $y \ \epsilon \ Y$, tal que $y = f(x)$		

5.- Halle la función inversa de la función: $f(x) = 2x - 3$

6.- Verifique que la función $g(x) = \frac{x}{1+|x|}$ es la función inversa de la función $h(x) = \frac{x}{1-|x|}$.

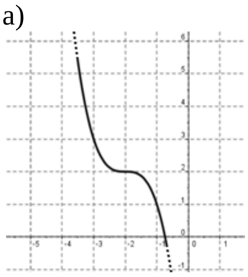
7.- Halle la función inversa de la función: $h(x) = \sqrt{\frac{1}{x-2}}$.

8.- La gráfica de una función es la de la siguiente figura

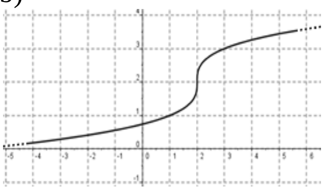


Indique cuál es la gráfica de la función inversa

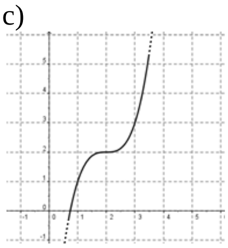
a)



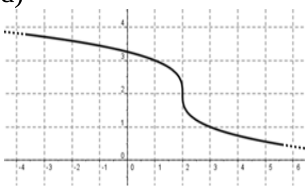
b)



c)

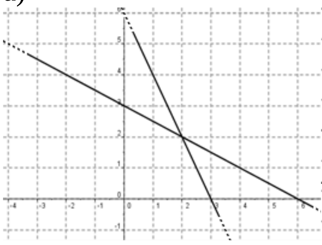


d)

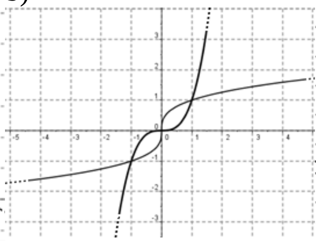


9.- Seleccione el par de funciones que **NO** sean inversas entre sí.

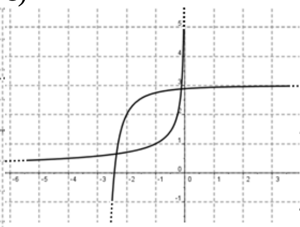
a)



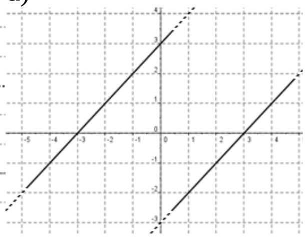
b)



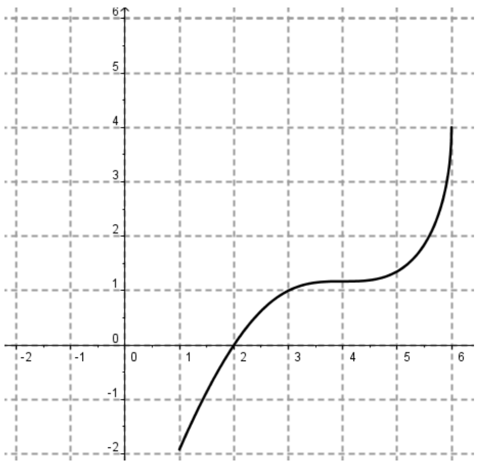
c)



d)



10.- Se da la gráfica de una función *f*, dibuje $f^{-1}(x)$ y diga cuánto vale $f^{-1}(1)$.



Capítulo 4.
Análisis de resultados.

4.1 Introducción

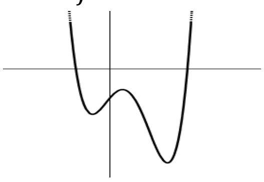
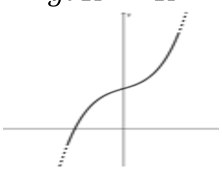
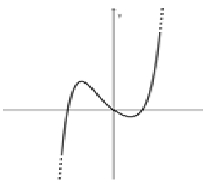
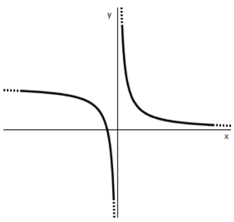
En este capítulo procedemos a analizar los resultados obtenidos en el cuestionario final, recordemos que dicho cuestionario fue aplicado a 22 estudiantes, 12 de los cuales estudian ingeniería en comunicaciones y electrónica y 10 estudian ingeniería mecánica, de aquí en adelante para hacer referencia a los estudiantes los numeraremos, siendo los primeros 12 alumnos pertenecientes a la carrera de ingeniería en comunicaciones y electrónica y a partir del 13 al 22 serán los alumnos que cursan la carrera de ingeniería en mecánica, todos los estudiantes cursaban el segundo semestre de su carrera al momento de la aplicación del cuestionario.

El cuestionario diseñado está formado por 10 reactivos. Estos reactivos fueron diseñados para averiguar acerca de ciertas habilidades de los estudiantes, involucradas en el estudio del tema “función inversa”. A continuación se hace un análisis pregunta a pregunta para averiguar cuáles son las dificultades que tienen los estudiantes en el estudio de las funciones inversas, así como un análisis general acerca de la comprensión de conceptos por parte de los alumnos.

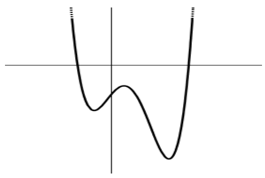
4.2 Análisis del problema 1

Con el propósito de averiguar si el alumno es capaz de aplicar los conceptos de inyectividad, suprayectividad y biyectividad a funciones dada su gráfica, se diseñó el siguiente reactivo.

1.-Marque con una **X** el tipo de función que corresponda con la función dada.

Gráfica de la función	Inyectiva	NO Inyectiva	Suprayectiva	NO Suprayectiva	Biyectiva	NO Biyectiva
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 						
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 						
$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 						
$g: (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \to \mathbb{R}$ 						

Veamos las respuestas obtenidas para cada función.

 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	Opción correcta	Opción incorrecta	No contesta
Inyectividad	13	4	5
Suprayectividad	8	9	5
Biyectividad	11	1	10

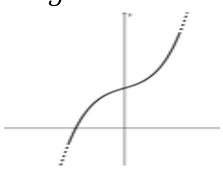
Esta grafica fue considerada debido a que se trata de una función cuártica, no inyectiva y no suprayectiva, se quería evaluar si el alumno era capaz de identificar por qué no era inyectiva y por qué no era suprayectiva.

Observamos que poco más de la mitad de los alumnos es capaz de identificar que la función no es inyectiva, pero menos de la mitad identifica que no es suprayectiva, también descubrimos que hay una mayor abstención en contestar si es o no biyectiva, algunos alumnos comentan que desconocen que es una función suprayectiva. Los alumnos comentan:

“Es no inyectiva porque si dibujas una horizontal toca a más de un punto, no sé qué sea suprayectiva ni biyectiva”. Alumno 2

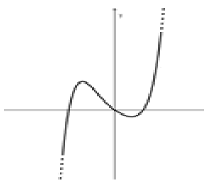
“No es uno a uno porque pasa por más de un punto la horizontal”. Alumno 12

“Es inyectiva porque cuando trazas líneas horizontales algunas cruzan más de una vez”. Alumno 19

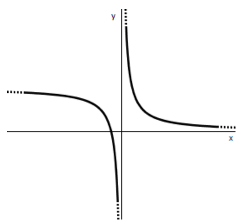
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 	Opción correcta	Opción incorrecta	No contesta
Inyectividad	20	2	0
Suprayectividad	9	3	10
Biyectividad	8	4	10

Esta función fue considerada ya que es una función creciente y tenemos la idea de que este tipo de funciones son las que los alumnos identifican con mayor facilidad como funciones biyectivas.

En esta grafica vemos, que casi todos los alumnos identifican que es inyectiva, pero casi la mitad prefiere no contestar si es o no suprayectiva, y si es o no biyectiva, al respecto algunos alumnos comentan que es fácil identificar que es inyectiva porque es una función creciente. Un alumno comenta: “La segunda yo sabía que era biyectiva porque es toda corrida, las demás no supe” (alumno 17)

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 	Opción correcta	Opción incorrecta	No contesta
Inyectividad	14	4	4
Suprayectividad	7	4	11
Biyectividad	9	5	8

Esta función de tercer grado fue elegida para averiguar si los alumnos lograban identificarla como no inyectiva. Aquí observamos que más de la mitad identifica que la función no es inyectiva, pero la mitad no contesta si es suprayectiva o no. El alumno 11 comenta: “Se parecía mucho a la segunda por eso pensé que también era inyectiva”.

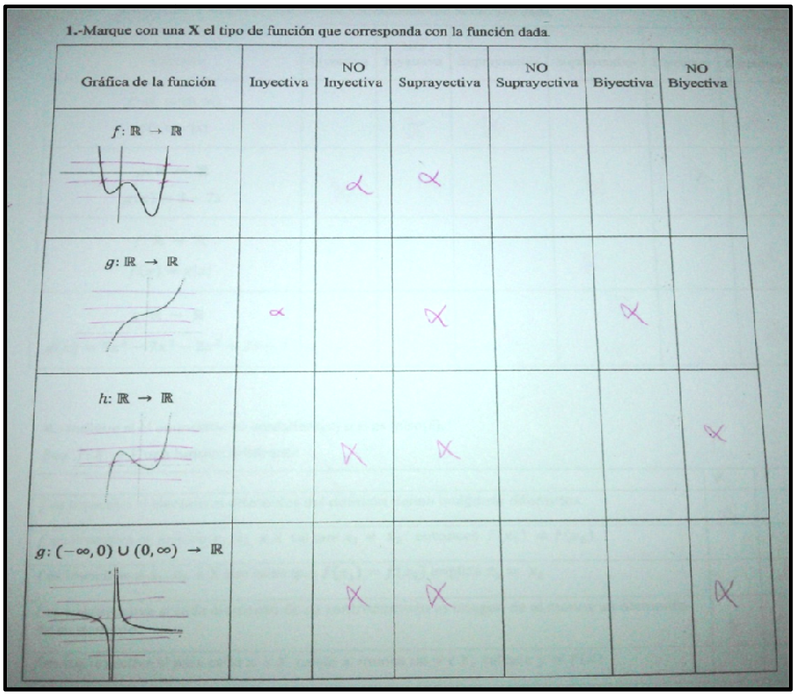
$g: (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \to \mathbb{R}$ 	Opción correcta	Opción incorrecta	No contesta
Inyectividad	11	2	9
Suprayectividad	11	3	8
Biyectividad	8	7	7

Esta función fue elegida para averiguar cómo trabajaban los alumnos con las funciones no continuas. En esta grafica observamos que la mitad de los alumnos identifica que no es inyectiva y que es suprayectiva, también pone en evidencia el desconocimiento del término ‘biyectiva’ por parte del alumno 6, que comenta lo siguiente: “yo la marque como biyectiva porque la verdad no sabía que era eso de inyectiva y suprayectiva, y como biyectiva es bi de dos y la gráfica esta en dos partes pensé que era biyectiva”.

Algunos comentarios generales hechos por los alumnos en las entrevistas:

“Conozco las funciones uno a uno que son creo las funciones inyectivas pero de lo demás no tengo idea” (alumno 2)

“En las gráficas es más fácil ver si es inyectiva porque trazas rayitas horizontales, si atraviesa más de una pues ya no es” (alumno 19). Acorde con su comentario observamos las marcas horizontales en el ejercicio.


1.-Marque con una X el tipo de función que corresponda con la función dada.

Gráfica de la función	Inyectiva	NO Inyectiva	Suprayectiva	NO Suprayectiva	Biyectiva	NO Biyectiva
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$		X	X			
$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	X		X		X	
$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$		X	X			X
$g: (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$		X	X			X

Ejercicio 1. Alumno 19

Observemos los totales:

Totales	Opción correcta	Opción incorrecta	No contesta
Inyectividad	58	12	18
Suprayectividad	35	19	34
Biyectividad	36	17	35

Podemos ver que concordando con sus comentarios el apartado que más contestan es el de inyectividad y tienen un mejor rendimiento en ello, ya que más de la mitad de las respuestas son correctas, comparándolo con los resultados de suprayectividad donde muchos se abstienen de contestar ya que el término no es manejado por algunos alumnos.

En conclusión los alumnos parecen tener conocimiento y cierto manejo del concepto función inyectiva y en los cuestionarios podemos notar que trazan líneas horizontales para averiguar si las funciones son inyectivas, también les cuesta identificar si una función es suprayectiva y dicen desconocer el término.

4. 3 Análisis del problema 2

Con el propósito de averiguar si el alumno es capaz de redefinir el contradominio de una función que le permita obtener una función suprayectiva, se diseñó el siguiente reactivo.

2.-Sea $f: \mathbb{R} \to A$ dada por $f(x) = x^2 - 4x + 4$. Para que f sea suprayectiva A debería ser:
a) $[2, \infty)$. b) $[0, \infty)$. c) $\mathbb{R}$. d) $[-4, \infty)$.

Se obtuvieron los siguientes resultados:

Opción correcta b)	Opción incorrecta c)	Opción incorrecta d)	No contesta
5	6	7	4

En las entrevistas se escucharon las siguientes respuestas:

Alumno 6: "No sé qué es suprayectiva pero es la d porque si no, no sería función, la d son las *y*" Entrevistador: "¿las *y*?" Alumno: "Si, ya sabe para todas las funciones tomamos las *x* donde la formula aplique y las *y* donde caen esas *x*"

Alumno 12: "No hice cálculos pero me pareció que d era el rango de la función y siempre tomamos así las funciones con su rango"

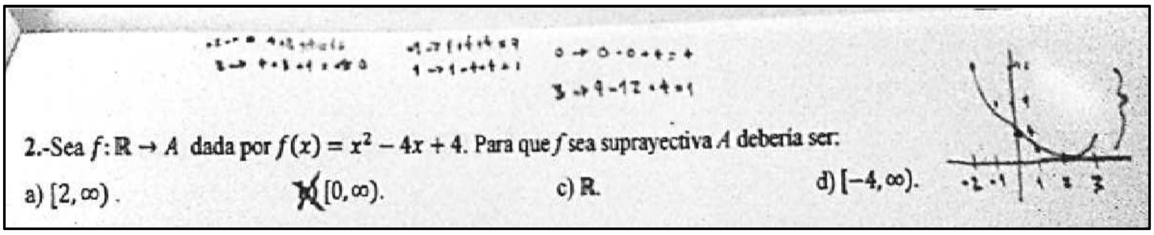
Alumno 17: "Es c porque las funciones van de los reales a los reales, no entendí la pregunta"

Alumno 19: "Pues para que sea función suprayectiva debe ser su imagen, así que es d; ósea así es la definición de función suprayectiva"

Podemos observar que algunos de estos alumnos al tratar con funciones toman como contradominio a la imagen de la función.

Leyendo los comentarios de los alumnos 6 y 12, nos damos cuenta que los alumnos no manejan el término de suprayectividad, sin embargo, si manejan de cierta forma el concepto de suprayectividad ya que al tratar con funciones usan como contradominio la imagen de la función.

También notamos que fallan al encontrar el conjunto que sea la imagen de la función, algunos de los alumnos que encuentran el conjunto correcto se apoyan construyendo la gráfica de la función.



2.-Sea $f: \mathbb{R} \to A$ dada por $f(x) = x^2 - 4x + 4$. Para que f sea suprayectiva A debería ser:

a) $[2, \infty)$. b) $[0, \infty)$. c) $\mathbb{R}$. d) $[-4, \infty)$.

Ejercicio 2. Alumno 14

Podemos concluir que los alumnos en este estudio no suelen utilizar el término "función suprayectiva" pero manejan el concepto al tratar con funciones, también que el ambiente grafico suele ser un apoyo para los estudiantes a la hora de identificar la imagen de una función.

4.4 Análisis del problema 3

Con el propósito de averiguar si el alumno es capaz de aplicar los conceptos de inyectividad, suprayectividad y biyectividad a funciones algebraicas, se diseñó el siguiente reactivo.

3.-Marque con una **X** el tipo de función que corresponda con la función dada.

Función	Inyectiva	NO Inyectiva	Suprayectiva	NO Suprayectiva	Biyectiva	NO Biyectiva
$f: \mathbb{R} \to [0, \infty)$ $f(x) = \lvert x \rvert$						
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = 3 - 7x$						
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x\lvert x \rvert$						
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = 5x^4 - 7x^3 - 2x^2 + 2x - 1$						

Se obtuvieron los siguientes resultados:

$f: \mathbb{R} \to [0, \infty)$ $f(x) = \lvert x \rvert$	Opción correcta	Opción incorrecta	No contesta
Inyectividad	12	6	4
Suprayectividad	10	4	8
Biyectividad	6	4	12

Elegimos esta función ya que con pocas operaciones se puede determinar que el valor absoluto no es una función inyectiva si su dominio son todos los números reales, como contradominio tomamos su imagen para averiguar si los alumnos son capaces de identificar a la función como una función suprayectiva. Observamos que casi la mitad identifica que la función es no inyectiva y suprayectiva y que casi la mitad prefiere no contestar si es biyectiva o no; al respecto los alumnos comentan: "El valor absoluto no es inyectivo, pero como esta modificado el contradominio si es suprayectivo, y pues no es biyectivo" (alumno 19), "No es inyectiva porque es valor absoluto, el valor absoluto no es una función inyectiva porque por ejemplo si tomamos -1 y 1 el valor absoluto de ambos es 1 y entonces la función ya no es uno a uno ósea inyectiva"(alumno 12)

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = 3 - 7x$	Opción correcta	Opción incorrecta	No contesta
Inyectividad	18	2	2
Suprayectividad	7	3	12
Biyectividad	8	3	11

Se coloca una función lineal ya que tenemos la idea de que puede ser una función fácil de identificar como biyectiva para los alumnos. Observamos que ciertamente la mayoría de los alumnos tiene claro que esta es una función inyectiva. "La segunda es inyectiva porque es lineal" (alumno 17), "es inyectiva porque es una recta, las rectas siempre son uno a uno" (alumno 2), "como es lineal es inyectiva" (alumno 19).

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x\lvert x\rvert$	Opción correcta	Opción incorrecta	No contesta
Inyectividad	11	7	4
Suprayectividad	6	5	11
Biyectividad	7	4	11

Esta función biyectiva se colocó para analizar que hacían los alumnos con ella, que procedimientos utilizaban para determinar si era inyectiva y si era suprayectiva. En las entrevistas los alumnos comentan: "la tercera pues como tiene valor absoluto no es inyectiva como su contradominio son los reales pues no es suprayectiva tampoco" (19), "no es inyectiva por el valor absoluto" (alumno 2), "realice el dibujo y es uno a uno ósea inyectiva" (alumno 12), notamos que el hecho de que en la función este el valor absoluto hace que los estudiantes relacionen el comportamiento de la función con el comportamiento de la función valor absoluto, aunque hay quien menciona que grafico la función, en los cuestionarios no hay graficas ni anotaciones que sugieran una forma de averiguar si sus respuestas eran correctas.

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x)$ $= 5x^4 - 7x^3 - 2x^2$ $+ 2x - 1$	Opción correcta	Opción incorrecta	No contesta
Inyectividad	10	5	7
Suprayectividad	7	6	9
Biyectividad	8	0	14

Al igual que la función anterior esta función no inyectiva y no suprayectiva se colocó para averiguar los procedimientos utilizados por los alumnos para determinar qué tipo de función es. Al respecto de esta función los alumnos comentan: "estaba difícil graficarla pero como es cuarta pues no debe ser inyectiva, la funciones cuadráticas, cuarticas o así que sean pares no son inyectivas, porque es como con el valor absoluto si das dos números diferentes van a uno solo" (alumno 12), "es no inyectiva porque en las funciones que son polinomios vemos como es su gráfica y pues esta es como una 'w'" (alumno 19).

Veamos los totales:

Totales	Opción correcta	Opción incorrecta	No contesta
Inyectividad	51	20	17
Suprayectividad	30	18	40
Biyectividad	29	11	48

En este ejercicio igual que en el primero varios alumnos comentan desconocer que es una función suprayectiva y hay quien toma por función biyectiva a una función inyectiva, algunos alumnos se apoyan dibujando las gráficas de las funciones y si comparamos los resultados con los resultados obtenidos en el ejercicio 1, notamos que hay una mayor cantidad de alumnos que prefiere no contestar cuando las funciones son dadas de forma algebraica, por lo que podemos suponer que para el alumno es más fácil identificar si una función es inyectiva, suprayectiva y/o biyectiva si ve la función de forma gráfica.

Notamos que en las funciones polinomiales los alumnos son capaces de identificar si es o no inyectiva debido al grado de la función o a la forma de su gráfica, sobre todo en las funciones polinomiales de primer grado donde tienen claro que es inyectiva; también observamos que la función valor absoluto es identificada como no inyectiva con cierta facilidad por parte de algunos alumnos, sin embargo, cuando una función involucra el valor absoluto se concentran en el valor absoluto y tienden a ignorar el resto de la función.

4.5 Análisis del problema 4

Queremos averiguar si el alumno es capaz de identificar las definiciones correctas de inyectividad y suprayectividad, tanto verbal como matemáticamente para lo cual se agregó el siguiente reactivo.

4.- Indique si el enunciado es verdadero(V) o si es falso(F).
Sea $f: X \to Y$ una función arbitraria:

	V	F
f es inyectiva si elementos diferentes del dominio tienen imágenes diferentes.		
f es inyectiva si existen $x_1, x_2 \in X$ tal que $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$		
f es inyectiva si $x_1, x_2 \in X$ son tales que $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$		
f es suprayectiva si cada elemento de su contradominio es imagen de al menos un elemento de su dominio.		
f es suprayectiva si para cada $x \in X$ existe al menos un $y \in Y$, tal que $y = f(x)$		

Se obtienen los siguientes resultados para el concepto de inyectividad:

Enunciado	Opción correcta	Opción incorrecta	No contesta
1 Verdadero	18	3	1
2 Falso	8	12	2
3Verdadero	8	12	2

Se obtienen los siguientes resultados para el concepto de suprayectividad:

Enunciado	Opción correcta	Opción incorrecta	No contesta
4 Verdadero	18	3	1
5 Falso	12	9	1

En las entrevistas se escucharon las siguientes respuestas:

Alumno 2: “La primera fue fácil es cierta, en las otras tuve confusión pero después de pensar bien, decidí que la segunda es falsa ya que dice ‘si existen’, no ‘siempre que existan’, la tercera es verdadera, la cuarta pues no sé qué sea suprayectiva pero debe ser verdadera para ser función y la última debe ser falsa para que sea función”

Alumno 6: “La primera sabía que era verdadera no tenía dudas, pero las demás si no sabía muy bien, me confundí”

Alumno 19: “Fue fácil ver que las escritas eran ciertas, y la ultima es falsa porque si no, no es función, pero en las otras es confuso porque suena a que son ciertas porque así nos las dan pero fijándome bien en la segunda parece falsa y pensé que la otra también”

Observamos que los alumnos parecen tener claro el concepto de inyectividad a un nivel verbal pero matemáticamente tienen problemas con él, también que el concepto de suprayectividad es claro verbalmente aun cuando algunos de los alumnos dicen desconocer este término.

4.6 Análisis del problema 5

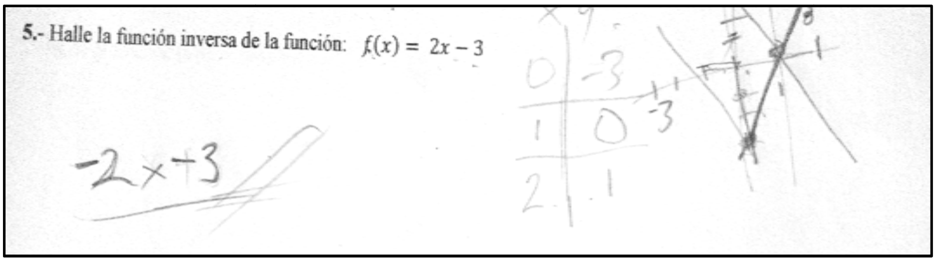
Para averiguar si el alumno es capaz de hallar la inversa de una función dada, proponemos el siguiente reactivo en el que la función dada es lineal y tanto su dominio como su imagen son los números reales.

5.- Halle la función inversa de la función: $f(x) = 2x - 3$

En la aplicación del cuestionario se obtuvieron los siguientes resultados:

Despeja y obtiene: $f^{-1}(y) = \frac{y+3}{2}$	14
Da la ecuación: $y = -2x - 3$	4
No contesta	4

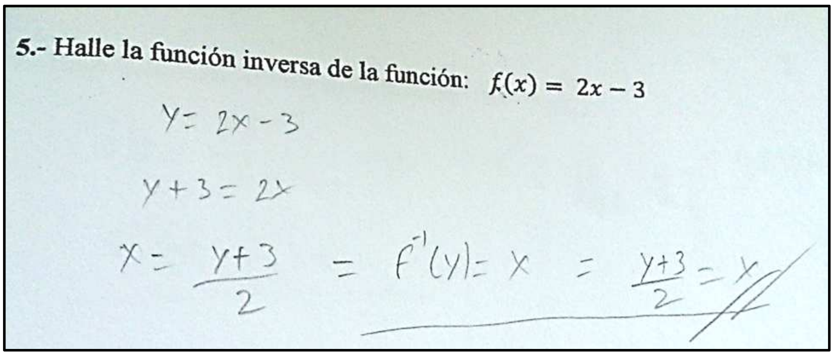
Observamos que más de la mitad de los alumnos son capaces de encontrar la función inversa en este caso, también que son pocos los casos en los que no contestan, aunque también podemos ver casos donde los alumnos obtienen otra función.



Ejercicio 5. Alumno 1

En esta imagen podemos observar que el alumno 1 no trabaja algebraicamente con la función sino que da una respuesta a través de la interpretación grafica que tiene de la función inversa, el alumno menciona: “yo no recordé como hacerlo pero podía ver que grafica tenia y así ya ver su inversa”, los demás alumnos que contestan de manera similar solo escriben la formula $y = -2x - 3$.

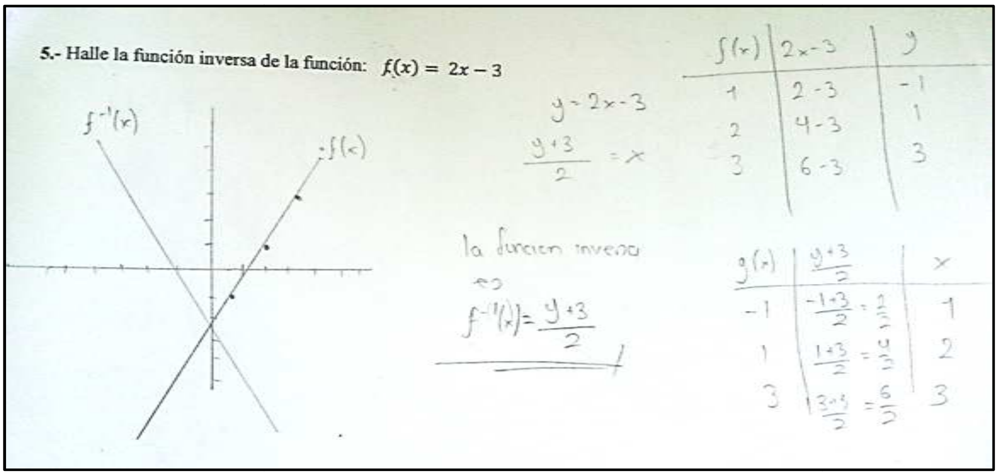
El alumno 6 quien fue entrevistado, no contesto este ejercicio, el menciona que no recuerda el tema, que solo recuerda que la función inversa es una función contraria a la original pero que no sabe cómo obtenerla dada su fórmula.



Ejercicio 5. Alumno 12

Los alumnos que obtienen la función inversa no parecen presentar mayor problema, y en la entrevista comentan: “hallar la inversa es solo despejar” (alumno 12), “para hallar la inversa seguí los pasos que vimos en clase (alumno 17), “para la inversa solo igualamos a *y* y despejamos para *x*” (alumno 11), el alumno 11 menciona además cual debe ser el dominio e imagen de la función inversa.

Notamos que aunque operacionalmente los alumnos no parecen tener grandes problemas, algunos alumnos muestran una falta de claridad en el concepto función inversa, por ejemplo, el alumno 2:



Ejercicio 5. Alumno 2

Observamos que él da la respuesta tanto algebraica como gráficamente, sin embargo no coinciden sus respuestas, al cuestionarlo sobre esto responde: "es que no es lo mismo, gráficamente se obtiene reflejando en eje y, porque la función inversa es la inversa, contraria, ósea como un espejo, y con fórmulas se despeja, así me enseñaron no entiendo porque debería ser igual".

4.7 Análisis del problema 6.

Para averiguar si el alumno es capaz de verificar que dos funciones son inversas entre sí, se incluye el siguiente reactivo.

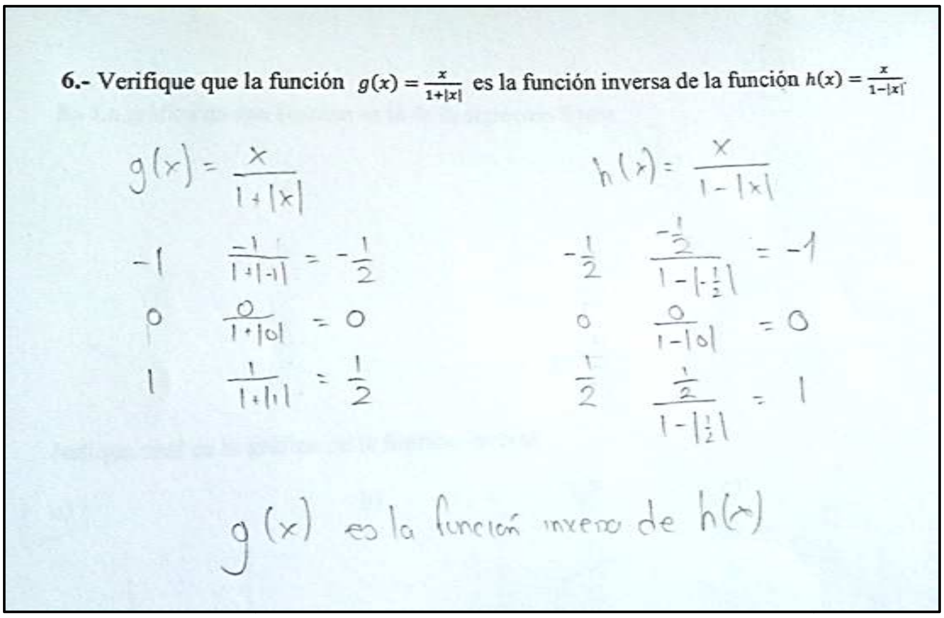
6.- Verifique que la función $g(x) = \frac{x}{1+|x|}$ es la función inversa de la función $h(x) = \frac{x}{1-|x|}$.

En la aplicación del cuestionario se observa lo siguiente:

Intenta resolver: *g(h(x))=x* *h(g(x))=x*	2
Indica *g(h(x))=x* *h(g(x))=x* pero no hace ningún calculo.	2
Obtiene valores de *g(x)* y evalúa los resultados en *h(x)*	2
Escribe cual debe ser el dominio y contradominio de las funciones.	1
No contesta	15

Observamos que más de la mitad de los alumnos no contestan este ejercicio, veamos sus respuestas a detalle:

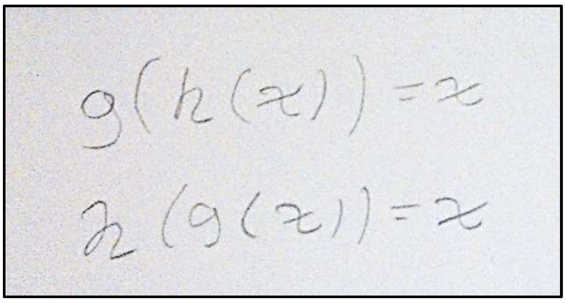
El alumno 11 solo indica cual debe ser el dominio y contradominio de las funciones, en la entrevista comenta: “no sé cómo verificar que sean inversas entre sí pero si son inversas deberían tener el dominio y contradominio invertidos, es decir, una debe tener como dominio el contradominio de la otra y viceversa”.



Ejercicio 6. Alumno 2

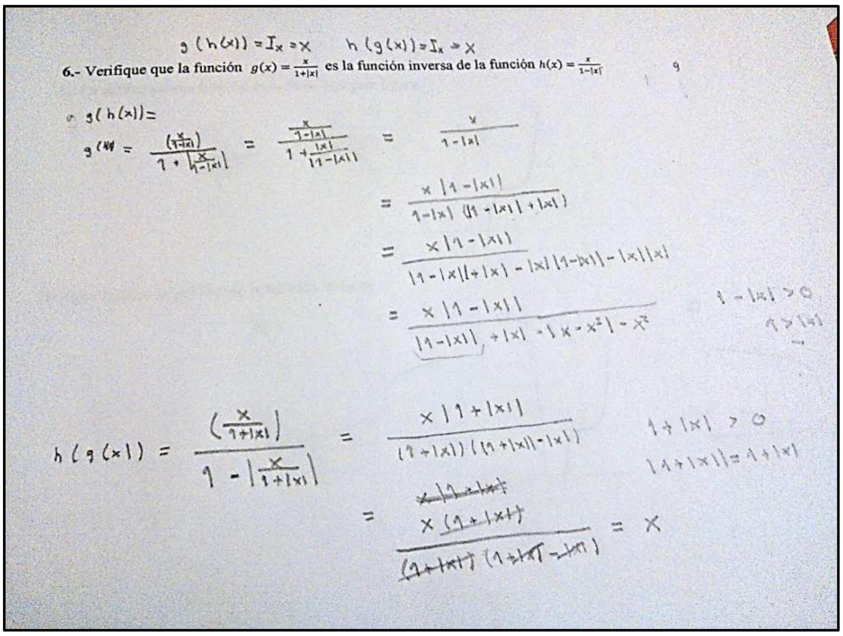
Son dos alumnos los que obtienen algunos valores de g(x) y evalúa los resultados en h(x), uno de ellos responde: “una función es inversa de otra si regresa sus valores como aquí que si evaluó $g(-1) = -\frac{1}{2}$ y luego $h\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$” (alumno 2), al preguntar porque lo hace solo para unos pocos números y no para todos los casos posibles dice “no sé cómo se haría eso”, dice desconocer el tema composición de funciones; el alumno 17 quien responde de igual forma, contesta similarmente al alumno 2, sin embargo cuando se le cuestiona porque solo evaluó unos cuantos y no para todos los casos posibles contesta: “ah claro se podrían evaluar todos los números posibles si usamos unas formulas, cuando evalúas una función dentro de otra, pero estaría difícil hacerlo porque no sé cómo manejaría el valor absoluto” (alumno 17).

Dos alumnos indican las operaciones:

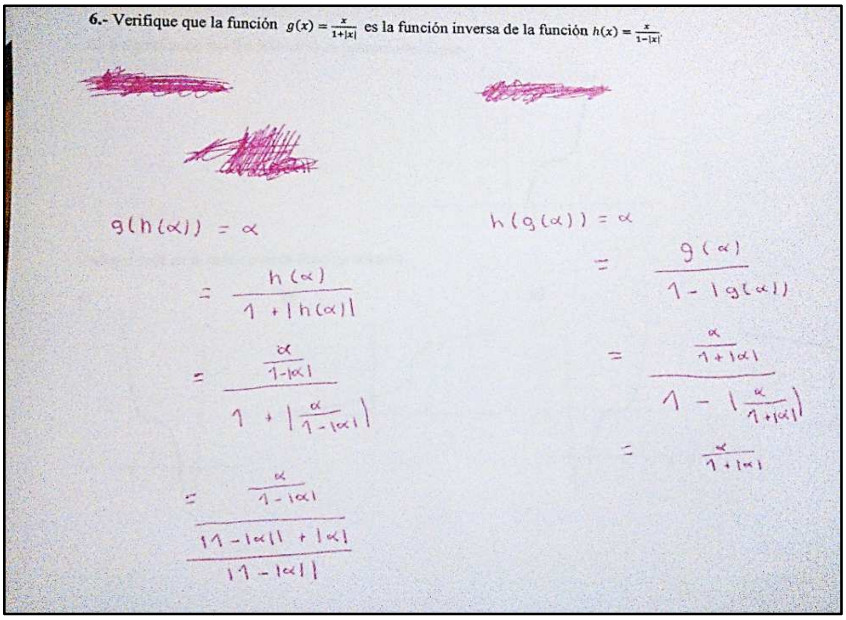


Ejercicio 6. Alumno 14

pero no resuelven nada, hay dos alumnos que lo intentan

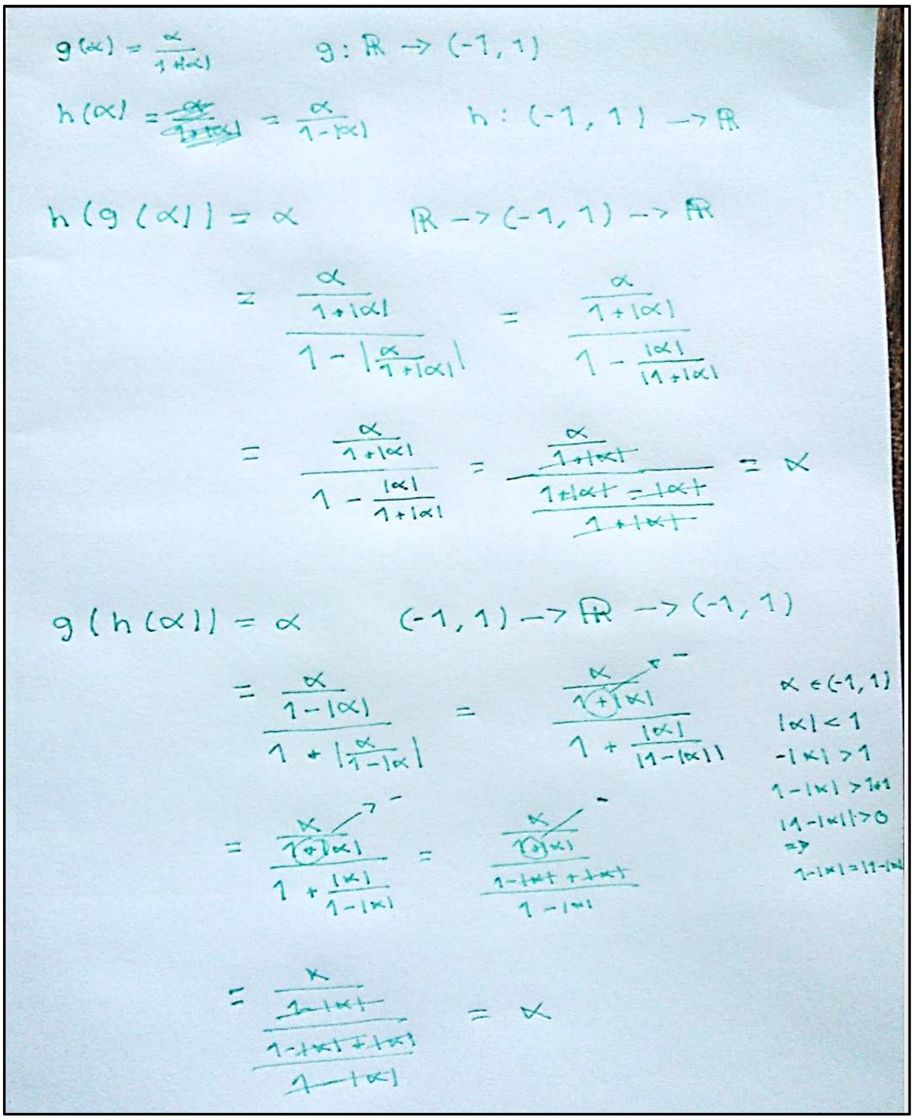


Ejercicio 6. Alumno 21



Ejercicio 6. Alumno 19

pero no concluyen, en la entrevista el alumno 19 comenta: “yo intente hacerlo como nos enseñaron y al principio empecé a trabajar con el valor absoluto como si nada y no tuve problemas pero luego me pregunte si lo que estaba haciendo estaba bien y ya no seguí haciéndolo”. Notemos que los alumnos no toman en cuenta ni el dominio ni contradominio de las funciones cuando intentan demostrar esto, cuando el alumno 19 se percata de ello, se da cuenta que tomándolo en cuenta es capaz de resolver el ejercicio.


$g(\alpha) = \frac{\alpha}{1+|\alpha|}$ $g: \mathbb{R} \to (-1, 1)$

$h(\alpha) = \cancel{\frac{\alpha}{1+|\alpha|}} = \frac{\alpha}{1-|\alpha|}$ $h: (-1, 1) \to \mathbb{R}$

$h(g(\alpha)) = \alpha$ $\mathbb{R} \to (-1, 1) \to \mathbb{R}$

$$= \frac{\frac{\alpha}{1+|\alpha|}}{1-\left|\frac{\alpha}{1+|\alpha|}\right|} = \frac{\frac{\alpha}{1+|\alpha|}}{1-\frac{|\alpha|}{|1+|\alpha||}}$$

$$= \frac{\frac{\alpha}{1+|\alpha|}}{1-\frac{|\alpha|}{1+|\alpha|}} = \frac{\frac{\alpha}{\cancel{1+|\alpha|}}}{\frac{1+\cancel{|\alpha|}-\cancel{|\alpha|}}{\cancel{1+|\alpha|}}} = \alpha$$

$g(h(\alpha)) = \alpha$ $(-1, 1) \to \mathbb{R} \to (-1, 1)$

$$= \frac{\frac{\alpha}{1-|\alpha|}}{1+\left|\frac{\alpha}{1-|\alpha|}\right|} = \frac{\frac{\alpha}{1+|\alpha|}}{1+\frac{|\alpha|}{|1-|\alpha||}}$$

$\alpha \in (-1, 1)$
$|\alpha| < 1$
$-|\alpha| > 1$
$1-|\alpha| > 1-1$
$|1-|\alpha|| > 0$
$\Rightarrow$
$1-|\alpha| = |1-|\alpha||$

$$= \frac{\frac{\alpha}{1+|\alpha|}}{1+\frac{|\alpha|}{1-|\alpha|}} = \frac{\frac{\alpha}{1-|\alpha|}}{\frac{1-\cancel{|\alpha|}+\cancel{|\alpha|}}{1-|\alpha|}}$$

$$= \frac{\frac{\alpha}{\cancel{1-|\alpha|}}}{\frac{1-\cancel{|\alpha|}+\cancel{|\alpha|}}{\cancel{1-|\alpha|}}} = \alpha$$

Ejercicio 6 entrevista. Alumno 19

Los alumnos 6 y 12 que no contestaron este ejercicio, en las entrevistas comentan lo siguiente respectivamente: “no sabía cómo hacerlo, no nos enseñaron a hacer eso” y “deje la pregunta para el final porque es difícil por el valor absoluto, pero deben serlo porque tienen signos contrarios y eso son las inversas, pero no sé cómo se haría” y señala el signo positivo del valor absoluto de la función *g* y el signo negativo del valor absoluto de la función *h*

Notamos que la mayoría de los alumnos prefiere no contestar ya sea por desconocer cómo hacerlo o por temor a la función dada y que los alumnos que tratan de hacerlo tienen problemas para trabajar con la función dada, no suelen involucran el dominio y contradominio de las funciones en el ejercicio.

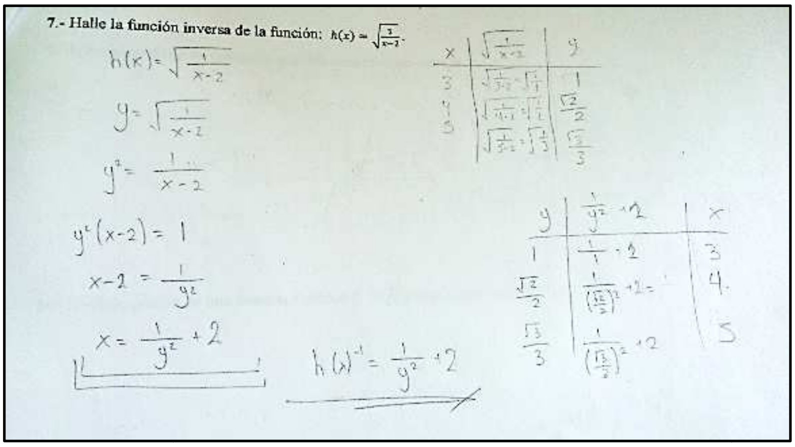
4.8 Análisis del problema 7.

Siguiendo con nuestro propósito de averiguar si el alumno es capaz de hallar la inversa de una función dada, y principalmente averiguar si el alumno indica el dominio y contradominio al hallar la inversa de una función dada, se incluyó el siguiente ejercicio.

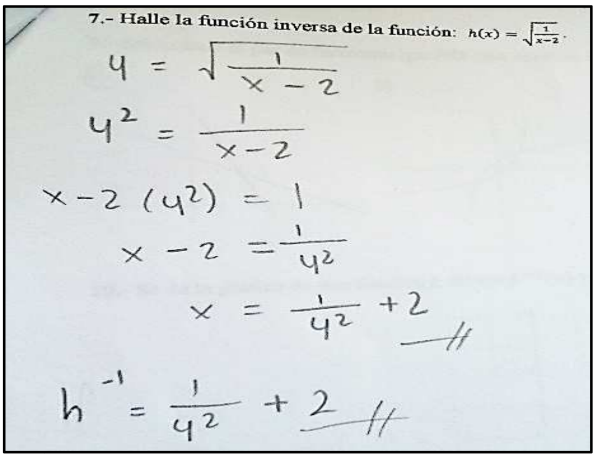
7.- Halle la función inversa de la función: $h(x) = \sqrt{\frac{1}{x-2}}$.

En la aplicación del cuestionario se observa lo siguiente:

Despeja y obtiene $$h^{-1}(y) = \frac{1}{y^2} + 2$$	12
No contesta	10



Ejercicio 7. Alumno 2



Ejercicio 7. Alumno 4

Observamos que ningún alumno indica el dominio ni contradominio de ninguna de las funciones, sin embargo, cuando preguntamos por el dominio y contradominio de las funciones obtuvimos las siguientes respuestas:

"El dominio de h es $(2, \infty)$ y el contradominio es $(0, \infty)$, para la inversa pues es a lo inverso" Alumno 2

"Para h es $(2, \infty)$ el dominio y $(0, \infty)$ el rango, para la inversa todos los reales menos el 0 es el dominio y el rango no se necesitaría graficarla" Alumno 11

"h su dominio es $(2, \infty)$ y su rango $(0, \infty)$, la inversa pues igual no" Alumno 12

"De la función h su dominio es $(2, \infty)$, su contradominio los reales, de la inversa su dominio son los reales menos el 0 y su contradominio los reales" Alumno 17

"El dominio de la función h es $(2, \infty)$, su imagen es $(0, \infty)$; el dominio de la función h^{-1} es $(0, \infty)$ normalmente también seria $(-\infty, 0)$ pero como queremos que sea uno a uno y corresponda con h eso ya no lo tomamos, su imagen es $(2, \infty)$" Alumno 19

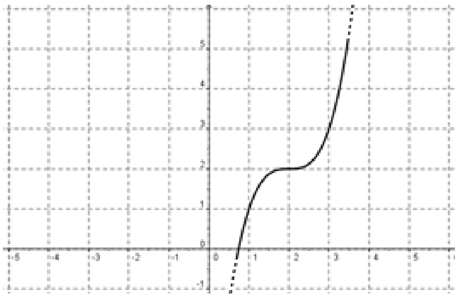
Notamos que los alumnos en cierta medida poseen la capacidad para determinar el dominio e imagen de una función, sin embargo, para determinar el dominio y contradominio de la función inversa de una función dada algunos alumnos no establecen la relación que hay entre estos y los de la función original, además tratan a la función inversa como una función aislada por lo que llegan a tomar un dominio que hace que la función ya no sea biyectiva.

Esta pregunta pone en evidencia que aunque a un nivel operacional los alumnos son capaces de encontrar la función inversa de una función dada, el concepto que tienen de la función inversa no es claro y por lo tanto no son capaces de establecer relaciones entre ellas, en este caso, la relación que hay entre sus dominios y contradominios.

4.9 Análisis del problema 8.

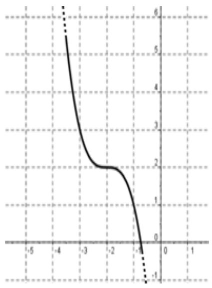
En el problema 8 se pretende averiguar si el alumno es capaz de identificar la gráfica de la funcion inversa de una funcion dada su gráfica.

8.- La gráfica de una función es la de la siguiente figura

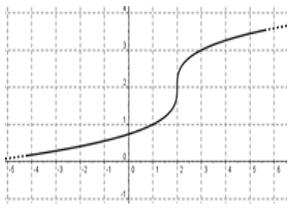


Indique cuál es la gráfica de la función inversa

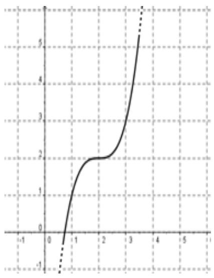
a)



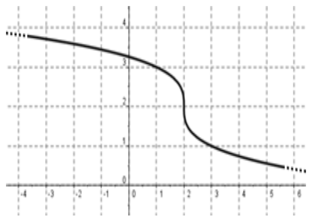
b)



c)



d)



Después de aplicar el cuestionario se obtuvieron los siguientes resultados:

Opción correcta	Opción incorrecta (a)	No contesta
10	11	1

Observamos que la opción que más eligen los alumnos es la 'a', de los alumnos entrevistados que escogieron esta respuesta, sus comentarios son los siguientes:

Alumno 2: "Es la 'a', porque la inversa es la contraria, ósea que si la gráfica esta en lado positivo su inversa debería de estar en el lado negativo"

Alumno 11: "Mmm pues es la 'a' porque es su reflejo, su negativa, su inversa"

Alumno 12: "La inversa se obtiene volteándola en el eje *y*, por eso es la 'a' "

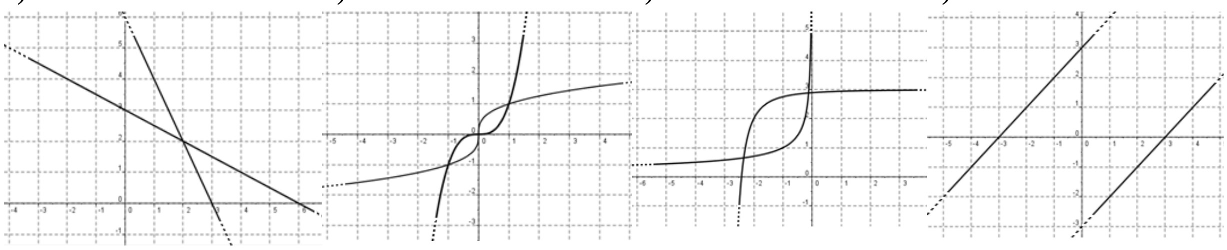
Podemos notar que algunos alumnos parecen tener la idea de que gráficamente la inversa es un reflejo de la gráfica a través del eje y, esto concuerda con algunas de las respuestas observadas en el ejercicio 5, donde obtienen la inversa solo cambiando signos, sin embargo esta idea parece cobrar más fuerza en el aspecto grafico puesto que 11 de 22 alumnos concuerdan con esto, cuando en el ejercicio 5 solo 3 alumnos dan muestra de esta idea, esto refleja que aun cuando son capaces de encontrar la función inversa algebraicamente, el concepto no es por completo manejado por los alumnos.

4.10 Análisis del problema 9.

Se agrega un reactivo con el que se pretende averiguar si el alumno es capaz de identificar pares de funciones mutuamente inversas graficamente, esto para ver si establece una relación entre ambas gráficas.

9.- Seleccione el par de funciones que **NO** sean inversas entre sí.

a) b) c) d)



Después de aplicar el cuestionario se obtuvieron los siguientes resultados:

Inciso	Opción correcta	Opción incorrecta	No contesta
a) Inversas entre si	14	7	1
b) Inversas entre si	21	0	1
c) No inversas entre si	11	10	1
d) Inversas entre si	9	12	1

Observamos que todos los alumnos que contestan identifican el par de graficas dadas en el inciso b) como inversas entre sí, mientras que el par de grafica dadas en el inciso d) son en su mayoría identificadas como funciones no inversas entre sí.

“Las que están en ‘c’ no son inversas entre sí porque las gráficas están en el mismo lado creo, y las de ‘d’ tampoco son porque no se tocan entre sí” (alumno 6)

“‘a’ y ‘c’ no son inversas entre sí porque están del mismo lado y las funciones inversas son las negativas de las originales” (alumno 11) “‘a’ y ‘d’ no son inversas porque las líneas cuando son inversas son contrarias, su pendiente es contraria, las curvas ‘b’ y ‘d’ son inversas porque cuando sus curvas son inversas se cruzan y forman como 0´s u 8’s con extensiones” (alumno 12)

“Solo la ‘d’ no es inversa porque no se intersectan y las inversas siempre se cruzan entre sí” (alumno 17)

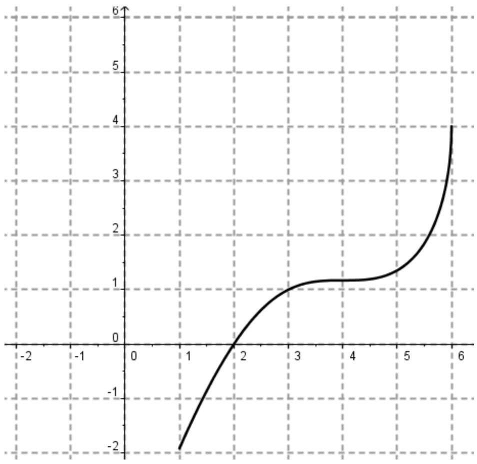
“El par de funciones que no son inversas entre sí, es la ‘c’ porque las inversas son reflejos por la recta y=x” (alumno 19)

Notamos por los comentarios de los alumnos en este ejercicio que igual que en el problema 8 muestran que su concepto de función inversa no es claro y debido a esto no son capaces de identificar el par de funciones que no son inversas entre sí, además de que el desconocimiento del tema los lleva a crear relaciones erróneas.

4.11 Análisis del problema 10.

Para averiguar si el alumno es capaz de esbozar la función inversa de una función dada su gráfica seleccionamos la siguiente gráfica, la cual no nos arroja su fórmula, precisamente para evaluar la capacidad del alumno sin involucrar sus conocimientos algebraicos de funciones inversas, así mismo se pide que diga un valor de la función inversa para evaluar su interpretación de la función inversa.

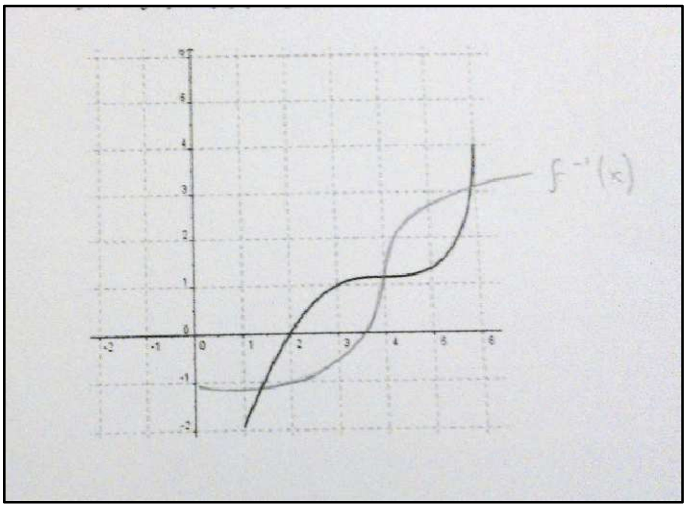
10.- Se da la gráfica de una función *f*, dibuje $f^{-1}(x)$ y diga cuánto vale $f^{-1}(1)$.



Después de aplicar el cuestionario se obtuvieron los siguientes resultados:

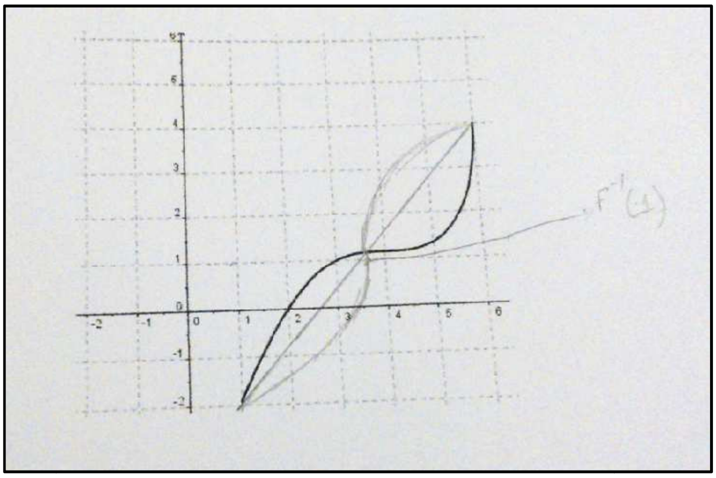
Tipo de dibujo que realiza	No. alumnos
Existe simetría respecto a y=x pero no se indica	5
Traza reflejo respecto a y=x	1
Traza reflejo respecto a una recta que pasa por el punto (6,4) con pendiente 1.	3
Traza reflejo respecto a una recta que pasa por los puntos (6,4) y (1,-2)	1
Traza reflejo respecto a x=2	2
Traza una curva cuya relación con la original no es fácil de identificar	3
Sin dibujo	6
Sin dibujo pero contesta $f^{-1}(1)$	1

En la entrevista el alumno 2 responde: “como es una curva hay que formar un ocho con patitas”, cuando se le cuestiona el porqué de este razonamiento no da una respuesta clara.



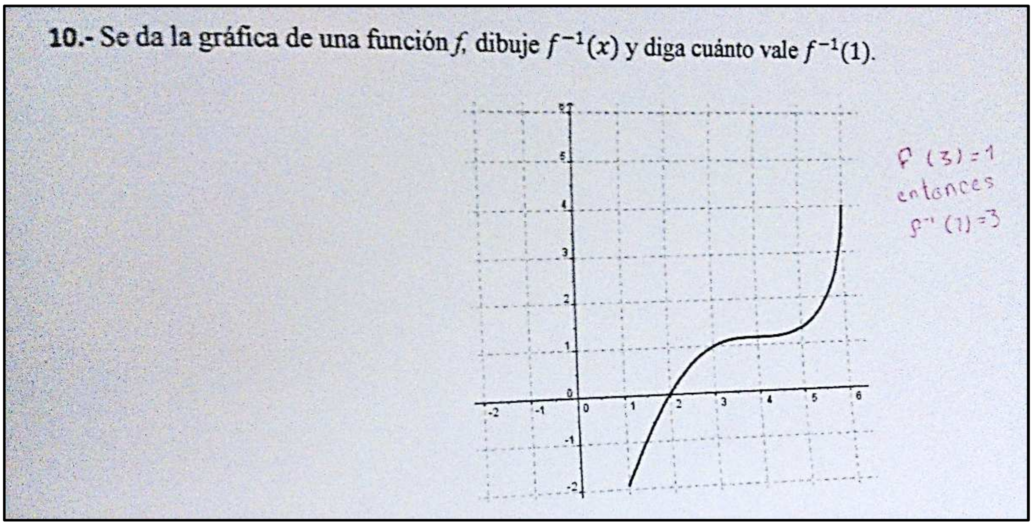
Ejercicio 10. Alumno 2

El alumno 12 contesta: “mmm pues yo solo trace una recta que pasaba por los puntos donde terminaba la curva y de ahí refleje porque para la inversa siempre hay un eje de simetría pero no recordaba cual era”, este alumno demuestra que aunque tiene conocimientos del tema no tiene los suficientes para resolver el ejercicio, resaltemos además que este alumno es capaz de encontrar la función inversa de una función cuando está dada algebraicamente, pero tiene problemas al identificar la función inversa de una función cuando está dada gráficamente.



Ejercicio 10. Alumno 12

El alumno 6 no hace dibujo, dice: “yo no hice dibujo porque no supe cómo hacerlo, la inversa debe ser la contraria ósea que debe ser como un reflejo por *y*, pero después de ver el problema 9 ya no estuve muy seguro de como tenía que ser por eso ya no lo hice”. El alumno 19 tampoco hace dibujo, pero aun así es capaz de encontrar el valor de $f^{-1}(1)$ al respecto menciona: “no tuve tiempo para dibujar, pero a partir de la gráfica puedo obtener valores de la función inversa, en clase recuerdo que el profesor dijo que la gráfica de una función y su inversa es la misma solo que una se lee de *x* a *y* y la otra de *y* a *x*, por ejemplo aquí que pide el valor $f^{-1}(1)$, como es la inversa el 1 es *y* entonces busco el valor *x* en la gráfica”. El alumno 19 también comenta: “cualquier grafica de la función inversa no es exacta, una manera de que sea exacta seria calcar por detrás la gráfica y acomodar los ejes”.



Ejercicio 10. Alumno 19

En este ejercicio notamos que la mayoría de los alumnos no son capaces de esbozar la gráfica de la función inversa a partir de la gráfica de una función, observamos que los alumnos parecen tener ideas erróneas o confusas acerca del concepto de función inversa lo cual les impide manejar este concepto a un nivel gráfico.

4.12 Análisis general

Al revisar los problemas uno a uno notamos que hay una falta de comprensión del tema función inversa por parte de los alumnos, recordemos que Hierbert y Carpenter (1992) consideran que “una idea o procedimiento matemático es comprendido si su representación mental es parte de una red de representaciones. Una idea, procedimiento o hecho matemático es comprendido completamente si está conectado a redes existentes con más fuerza o numerosas conexiones” (p.67).

Carpenter y Lehrer (1999) mencionan que “cuando los estudiantes no comprenden, ellos perciben cada tema de forma aislada” (p.21). Notamos por ejemplo, que los alumnos toman el concepto de función inversa de forma aislada según el ambiente ya sea algebraico y grafico, esto se puede corroborar en el análisis del problema 5 donde algunos alumnos dieron su respuesta de forma algebraica y grafica, y estas respuestas no coincidían, incluso un alumno comenta que no es lo mismo, que algebraicamente se trabaja de una forma y gráficamente de otra y no entiende porque debería haber una relación entre los resultados.

También notamos que el concepto que utilizan para resolver el problema 8, encontrar la función inversa de una función dada gráficamente, no lo utilizan en el problema 9, donde se pregunta si pares de funciones dadas gráficamente son inversas, es decir, ellos no toman una grafica piensan cual sería su función inversa y la comparan con la ya dibujada, sino que a partir de las dos graficas juzgan según las ideas acerca de lo que deben cumplir dos funciones inversas entre sí.

En el problema 9 observamos que llegan a conclusiones erróneas al establecer conductas o patrones que deben seguir los pares de funciones para ser inversas según la forma y posición de sus graficas, recordemos que Hierber y Carpenter (1992) señalan que “existe en los estudiantes un esfuerzo natural de buscar significado, aun cuando terminen haciendo conexiones erróneas”(p.76).

En el problema 10 notamos que cuando no dibujan la grafica de la función inversa no es para ellos posible dar un valor de la función inversa teniendo la función original, para ellos no hay conexión entre estos valores, por lo menos en el ambiente grafico, en contraste, en el problema 7 donde se les pide comprobar que una función es inversa de otra, algunos muestran como evidencia para considerarlas inversas, la relación que debe existir entre sus valores, aunque no lo hacen de forma general.

Para el concepto de inyectividad observamos que hay cierta comprensión, ya que verbalmente la mayoría identifica el concepto, aunque matemáticamente a algunos les cuesta trabajo y el concepto que manejan de inyectividad lo aplican tanto graficamente como algebraicamente, de hecho utilizan sus conocimientos del ambiente grafico para comprobar sus respuestas del ambiente algebraico, esto se observa en el problema 3, aunque esto no impide que caigan en errores o se formen ideas equivocadas.

Aunque hay alumnos que mencionan desconocer el término de suprayectividad, en los ejercicios 2 y 4, podemos notar que hay cierta comprensión ya que identifican el concepto de forma verbal y tienen la convención de trabajar las funciones utilizando su imagen como contradominio, sin embargo notamos dificultad en establecer cuál es la imagen de una función.

En resumen en los conceptos de inyectividad y suprayectividad observamos una mediana comprensión por parte de los estudiantes y en el tema función inversa observamos una baja sino escasa comprensión al manejar cada problema de forma aislada.

Capítulo 5.
Conclusiones.

El capítulo 4 contiene el análisis de las respuestas pregunta por pregunta, este análisis nos permite establecer algunas conclusiones o respuestas para nuestra pregunta de investigación, planteada al inicio.

- ¿Qué deficiencias de aprendizaje del concepto de función inversa y conceptos asociados muestran los estudiantes de ingeniería?

Recordemos nuestros objetivos:

3. Diseñar un instrumento que facilite la exploración sobre las deficiencias del aprendizaje del concepto de función inversa y sus conceptos relacionados.

4. Identificar las deficiencias en el aprendizaje del concepto de función inversa y sus conceptos asociados, de estudiantes de ingeniería.

De los cuales el primero se ha cumplido con la creación del cuestionario aplicado a los estudiantes. A continuación describiremos las dificultades encontradas en los estudiantes guiándonos en los objetivos particulares de las preguntas del cuestionario aplicado.

Recordemos nuestros objetivos para las primeras 4 preguntas:

1. Averiguar si el alumno es capaz de aplicar los conceptos de inyectividad, suprayectividad y biyectividad a funciones dada su gráfica.

2. Averiguar si el alumno es capaz de redefinir el contradominio de una función que le permita obtener una función suprayectiva.

3. Averiguar si el alumno es capaz de aplicar los conceptos de inyectividad, suprayectividad y biyectividad a funciones algebraicas.

4. Averiguar si el alumno es capaz de identificar las definiciones correctas de inyectividad y suprayectividad, tanto verbal como matemáticamente.

Estas preguntas están diseñadas para evaluar en términos generales el conocimiento de los conceptos de inyectividad, suprayectividad y biyectividad, lo primero que notamos fue que algunos alumnos dicen desconocer el término “función suprayectiva” así como del término “función biyectiva”, sin embargo, en el ejercicio 4 la mayoría de los alumnos maneja el concepto de suprayectividad verbalmente; también notamos que experimentan problemas para establecer cuál es la imagen de una función, en el ejercicio 2, donde algunos estudiantes respondieron que aunque ignoraban el término “función suprayectiva” el contradominio de una función era su imagen, sin embargo fallan al identificarla.

En cuanto al concepto “función inyectiva”, en la pregunta 4 notamos que verbalmente la mayoría de los alumnos es capaz de identificar el concepto, sin embargo, matemáticamente no lo tienen claro, esto se refleja en los ejercicios 1 y 3, donde los alumnos muestran un mejor desempeño en el ambiente grafico que en el algebraico.

Ahora veamos nuestros objetivos para las preguntas 5, 6 y 7:

5. Averiguar si el alumno es capaz de hallar la inversa de una función dada.

6. Averiguar si el alumno es capaz de verificar que dos funciones son inversas entre sí.

7. Averiguar si el alumno indica el dominio y contradominio al hallar la inversa de una función dada.

Notemos que todos estos objetivos involucran el ambiente algebraico para el concepto de “función inversa”; en el ejercicio 5 notamos que aunque la mayoría es capaz de encontrar la función inversa suelen hacerlo de manera algorítmica, esto se corrobora en el ejercicio 7 donde los alumnos aunque encuentran la fórmula de la función inversa de manera correcta, no tienen claro cuál debe ser el dominio y contradominio de esta función; en el ejercicio 6 notamos que la mayoría ignora o considera demasiado difícil comprobar que dos funciones son inversas entre sí.

También vemos que la convención de no mencionar directamente cual es el dominio y contradominio de las funciones, puede llegar a crear confusión en los estudiantes ya al determinar la función inversa de una función dada, algunos alumnos a la función inversa le asignan el dominio y contradominio según la regla que estén siguiendo, en lugar de establecer la relación que hay entre el dominio y contradominio de la función original con el dominio y contradominio de la función inversa.

Finalmente veamos nuestros objetivos para las preguntas 8, 9 y 10:

8. Averiguar si el alumno es capaz de identificar la gráfica de la funcion inversa de una funcion dada su gráfica.

9. Averiguar si el alumno es capaz de identificar la gráfica de la funcion inversa de una funcion, cuando son proporcionadas ambas gráficas.

10. Averiguar si el alumno es capaz de esbozar la función inversa de una función dada su gráfica.

Todos estos ejercicios involucran el ambiente grafico para el concepto de “función inversa”; en el ejercicio 8 notamos que la mitad de los alumnos no son capaces de identificar la gráfica de la función inversa, además eligen una opción errónea guiados por el concepto de función inversa que tienen; en el ejercicio 9 podemos notar como el mal manejo del concepto “función inversa” lleva a la construcción de ideas erróneas acerca de este concepto tales como “las funciones inversas son las negativas de las originales”, “cuando son inversas su pendiente es contraria”, “las inversas siempre se cruzan entre sí” mencionadas en las entrevistas; en el ejercicio 10 al igual que el ejercicio 6 observamos que los alumnos resuelven el ejercicio de manera algorítmica aunque no del todo correcta, notamos que la mayoría de los alumnos recuerda que la función inversa es simétrica a la original respecto a una recta, pero no recuerdan cual recta ni porque.

En resumen observamos que los alumnos involucrados en este trabajo muestran un aprendizaje sin comprensión del tema funciones inversas, ya que las habilidades que poseen respecto al tema son utilizadas de manera algorítmica y aislada.

Para concluir este trabajo diremos que se debe reflexionar acerca del manejo del tema, se sugiere que las tareas a implementarse para mejorar la comprensión del concepto función inversa, involucren tanto el ambiente algebraico como el ambiente gráfico, además de reflexionar acerca de las convenciones que llegamos a tomar en el manejo y enseñanza de ciertos temas.

BIBLIOGRAFÍA

Aguilar, A., Bravo, F., Gallegos, H., Cerón, M. & Reyes, R. (2010). Cálculo diferencial e integral. México: Pearson

Boyce, W. & DiPrima, R. (1999). *Cálculo*. México: CECSA.

Castillo, M. (2010). *Cálculo diferencial e integral*. D. F., México: McGraw-Hill Interamericana.

Carpenter, T. & Lehrer, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. En E. Fennema, and T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding*, (pp. 19-32). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Ferrari, M. & Farfán R. M. (2008). Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: la construcción de una red de modelos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 11(3)*: 309-354. Consultado en julio de 2015. Disponible en http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33511302

Hiebert, J. & Carpenter, T. (1992). Laerning and Teaching with Understanding. In Grows, A. D. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* (pp 65-97). New York: Macmillian Publishing co.

Lima, I. (2013). *Comprensión del concepto de integral indefinida. Un estudio con profesores de bachillerato.* Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Nacional Council of Teachers of Matematics. (2000). *Principles and Standars for School Mathematics*. Virginia: Reston.

Purcell, E. J., Varberg, D. & Rigdon, S. (2003). *Cálculo diferencial e integral* (8ª ed.). México: Pearson Educación.

Rivera, A. (2012). *Cálculo diferencial.* D.F., México: Grupo Editorial Patria.

Stewart, J. (2002). *Cálculo: transcendentes tempranas* (4ª ed.). D.F., México: International Thomson Editores.

Wikipedia. (2015). *Función recíproca.* Disponible en: https://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_rec%C3%ADproca