Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del

Instituto Politécnico Nacional

Unidad Distrito Federal

Departamento de Matemática Educativa

Sobre el uso de las gráficas de la elipse en el nivel medio superior. Un estudio socioepistemológico

Tesis que presenta

Amador Roldán Aguilar

para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias
especialidad Matemática Educativa

Director de la Tesis: Dr. Francisco Cordero Osorio

México, Distrito Federal Enero / 2012

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y
Tecnología por la beca que recibí durante
mis estudios de maestría.
Becario No. 131682

Dedicatoria

De todo corazón, dedico este trabajo de tesis:

A mis padres, María Asunción y Agustín Amador, por la oportunidad de ser.
A mi esposa, Rosa María, y a mis hijos: Itzel Alina y Ulises Amador, con cariño.

A mi profesor y Director de tesis, Dr. Francisco Cordero Osorio, por su extraordinario apoyo, paciencia y comprensión.

A mis sinodales, Dra. Gabriela Buendía y Dra. Rosa María Farfán, por sus observaciones y consideraciones.

A mis profesores: Dra. Claudia Acuña, Dr. Juan Antonio Alanís, Dr. Ricardo Cantoral, Dr. Jaime Mena, Dra. Asuman Oktaç y Dra. María Trigueros, por su contribución en mi desarrollo como Matemático Educativo.

A mis compañeros de generación: Mayra, Maribel, Gerardo, Jivi, Juan, Catalina, Yanet, Maricela, Jano, Daniela, Elia, Guillermo, Karla, Aniluk, Erick y Dinazar, y a los compañeros de otras generaciones, por los momentos que compartimos.

Al Cinvestav, IPN, a Adriana Parra y a todo el personal del Departamento de Matemática Educativa, por su siempre cálida y esmerada atención.

Al IEMS, particularmente a la Academia de Matemáticas del plantel Ignacio Manuel Altamirano, por su generoso apoyo.

Al compadrito Ale cuyo ejemplo me ha animado siempre.

Amador Roldán Aguilar

Índice

Resumen……………………………………………………………………………..…..……… i
Abstract……………………………………………………………………………..………… ii
Introducción…………………………………………………………………….…………….. iii

Capítulo 1. Antecedentes

1.1 La problemática

1.1.1 La confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar. El objeto de estudio de la Matemática Educativa………………….…………………..….. 2
1.1.2 Las gráficas en el discurso matemático escolar del nivel medio superior……... 4
1.1.3 El tratamiento de la elipse en el nivel medio superior…...…….…………….... 6

1.2 Estado del arte

1.2.1 Tres ejemplos del trastocamiento del discurso escolar de la elipse.……..…..... 10
1.2.2 Sobre la socioepistemología de la modelación y el uso de las gráficas……….. 16

1.3 La investigación

1.3.1 El escenario del uso de las gráficas de elipse en el nivel medio superior….... 21
1.3.2 Una epistemología de prácticas sociales para la elipse……………………....... 23
1.3.3 La tramoya de Arquímedes en libros de Geometría Analítica para el nivel medio superior………………………………………………………………….… 25

Capítulo 2. Marco Teórico

2.1 La Socioepistemología, una escuela de pensamiento en la Matemática Educativa…………………………………………………………………………… 29
2.2 La naturaleza dual del conocimiento matemático. Su justificación razonada y

su justificación funcional………………………………………………………….….…… 30
2.3 Sobre el rediseño socioepistemológico del discurso matemático…..………..… 31
2.4 El uso de las gráficas, el debate dialéctico entre funcionamientos y formas….. 33
2.5 El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar de la educación básica………………………………………………………………………………….. 34
2.6 El uso de las gráficas en el nivel medio superior………………………………... 41
2.7 Los elementos de construcción de conocimiento en la Situación de Transformación y en la Situación de Modelación - Graficación…….…………… 46

Capítulo 3. El diseño El Taller de Arquímedes

3.1 La socioepistemología del diseño El Taller de Arquímedes............................. 49
3.2 Sobre las actividades del diseño El Taller de Arquímedes............................... 50
3.3 Actividad 1. La tramoya de Arquímedes con cartulina y tijeras…..................... 52
3.4 Actividad 2. La tramoya de Arquímedes virtual en Geogebra………………..… 55
3.5 Actividad 3. La modelación del movimiento de la tramoya de Arquímedes con gráficas generadas por un dispositivo transductor……………………………… 57
3.6 Análisis a priori de las actividades...……………..... 60

Capítulo 4. La puesta en escena

4.1 Las presentaciones del diseño El Taller de Arquímedes…………………….…. 65
4.2 Los resultados obtenidos en la puesta en escena ……………….………....…. 66
4.3 Análisis a posteriori……………….…………………….…………………....…. 76

Capítulo 5. Conclusiones

5.1 Consideraciones finales…………………………………………….……………. 79
5.2 Futuros avances……………………………………..…………..……………….. 80

5.3 Una reflexión con respecto a la enseñanza de la matemática en el IEMS 80

Referencias bibliográficas... 82

Resumen

El objetivo de esta investigación fue observar el desarrollo del uso de las gráficas de la elipse, en la puesta en escena del diseño El Taller de Arquímedes, realizada en Cinvesniños 2010 y en la Tercera Semana de las ciencias en el plantel Ignacio Manuel Altamirano del Instituto de Educación Media Superior del Distrito Federal. Dicho taller consistió en actividades basadas en una epistemología de la elipse centrada en la práctica social de la modelación, dentro del marco de la aproximación socioepistemológica. Las gráficas del movimiento de un artefacto, conocido como tramoya de Arquímedes, *trammel of Archimedes* (Apostol y Mnatsakanian, 2009), se convirtieron en modelos para construir conocimiento sobre la elipse, teniendo como marco de referencia el uso de las gráficas en el bachillerato (Cen, 2006). La mayoría de los participantes descubrieron las relaciones entre las características del artefacto y los elementos de la curva, y lograron ajustar las dimensiones del artefacto para que trazara una gráfica con características deseables. También modificaron el movimiento frente a un sensor para obtener un cierto comportamiento de las gráficas generadas por un dispositivo transductor. El descubrimiento, los ajustes y las modificaciones fueron formuladas, por los participantes, en un contexto de justificación funcional según los usos de las gráficas en la situación específica.

Abstract

The objective of this investigation was to observe the development of the use of graphs of the ellipse in the staging design Archimedes Workshop, held in Cinvesniños 2010 and in Third Week of Sciences on the campus Ignacio Manuel Altamirano of the Institute Upper Secondary Education in Mexico City. The workshop consisted of activities based on an ellipse epistemology centered on the social practice of modeling within the framework of the Socioepistemology. In it, the graphs of the movement of a device known as the Trammel of Archimedes (Apostol & Mnatsakanian, 2009), became models to build understanding of the ellipse, with the framework based in the use of graphs in high school (Cen, 2006). Most participants found the relationship between device characteristics and the elements of the curve, and managed to adjust the dimensions of the device to draw a graph with desirable characteristics. They also modified the movement in front of a sensor to obtain a certain behavior of the graphs generated by a transducer device. The discovery, adjustments and modifications were made, by participants, in a context of functional justification according to the use of the graphics in the specific situation.

Introducción

Esta investigación trata del desarrollo del uso de las gráficas de la elipse. Las cuales surgen al accionarse la tramoya de Arquímedes, utilizada como elipsógrafo, en el diseño El Taller de Arquímedes. La modelación de la elipse, como producción de conocimiento, es instalada como eje didáctico en un diseño donde se retoma el uso comportamiento geométrico reportado por Cen (2006). La forma es la variación de parámetros, el funcionamiento es el comportamiento tendencial.

El primer capítulo de este trabajo inicia con el planteamiento de la problemática fundamental de la Matemática Educativa: la confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar. En seguida se discute la problemática del discurso escolar de las gráficas y, en particular, la de la elipse, en el nivel medio superior. Continúa con un estado del arte de algunas investigaciones al respecto, en el marco de diversas aproximaciones teóricas dentro de la Matemática Educativa, donde se estudia el papel que juegan las gráficas generadas con tecnología en la construcción del conocimiento. Finaliza con precisiones sobre la naturaleza de lo realizado en esta investigación. En el Capítulo 2 se justifica la elección de la aproximación socioepistemológica como marco teórico de esta investigación, pues se explica cómo responde a la problemática planteada en el primer capítulo, mediante diseños donde los ejes didácticos son las prácticas sociales como la modelación y la predicción, las cuales generan usos del conocimiento matemático, que sirven como marco de referencia para la construcción orgánica de conocimiento. El Capítulo 3 trata del diseño El Taller de Arquímedes, a la luz del marco teórico socioepistemológico, precisando lo que se espera que generen los participantes en cada una de las tres actividades del taller. El capítulo 4 presenta los resultados de la puesta en escena en dos contextos extracurriculares. Finalmente, el Capítulo 5 contiene las conclusiones de esta investigación sobre el uso de la gráfica de la elipse en el discurso matemático escolar del Nivel Medio Superior, un apartado de futuros avances y una reflexión sobre la orientación que debería tener la investigación en matemática educativa a realizarse por los docentes del IEMS.

Capítulo 1

Antecedentes

1.1 La problemática

1.1.1 La confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar. El objeto de estudio de la Matemática Educativa.

La obra matemática es un edificio construido por la humanidad a lo largo de miles de años. Es una estructura de elementos técnicos, tecnológicos y teóricos, desarrollada en ambientes no escolares, como respuesta a las necesidades e inquietudes humanas. Cabe subrayar su naturaleza dinámica. “Se puede concebir como una organización estática y determinada de antemano, sin embargo, se prefiere interpretarla en forma dinámica. Las técnicas generan nuevos problemas y apelan a nuevos resultados tecnológicos que, a su vez permiten desarrollar técnicas ya establecidas, así como abordar y plantear nuevas cuestiones.” (Cordero, 2001, p. 103). En su presentación formal, la obra matemática presenta conceptos definidos en forma explícita, en secuencias lógicas, con un lenguaje de objetos matemáticos, intencionalmente desligados de la actividad humana que los produjo, para hacerlos más abstractos y de mayor generalidad.

Todos los días, en los salones de clase, la matemática escolar se confronta con la obra matemática, al interpretar y reorganizar el conocimiento matemático con fines didácticos. La Matemática Educativa asume como objeto de estudio el fenómeno que surge de tal confrontación. Hasta hace algunos años, por matemática escolar se hacía referencia a la matemática enseñada en las escuelas. Pero en la actualidad la Matemática Educativa ha precisado su naturaleza, y el término matemática escolar hace referencia a un conocimiento desprendido de la obra matemática con necesidades propias.

La Matemática Educativa, como campo de conocimiento, es un conjunto de paradigmas teóricos que identifican y explican, cada uno de acuerdo a sus premisas y conceptos, lo que ocurre cuando la obra matemática es llevada a la escuela con intenciones didácticas. Cada marco teórico se distingue por su concepción acerca del conocimiento y por su naturaleza. Existen aproximaciones cognitivas, psicológicas, semióticas, antropológicas, socioculturales, entre otras. De acuerdo a su propia plataforma teórica, los matemáticos educativos diseñan actividades o secuencias didácticas para favorecer el aprendizaje, las cuales de manera sistemática son probadas en aula. En ese sentido, la investigación en Matemática Educativa está estrechamente vinculada a la escuela.

Dentro de la Matemática Educativa la mayoría de los modelos teóricos consideran “a las representaciones como un reflejo de la realidad o una verbalización de nociones cognitivas y significados preexistentes.” (Cordero, 2001, p. 105). Y presentan los conceptos matemáticos de manera abstracta, alejados del cotidiano, justificados en la matemática misma, dejando de lado su posible ajuste para afrontar situaciones ajenas al ambiente escolar, es decir, su resignificación, en el sentido socioepistemológico. Centradas en los objetos matemáticos, tales teorías buscan desarrollar en los estudiantes la habilidad para representar tales objetos.

La problemática se hace más compleja porque “en la matemática escolar no se reconocen los mecanismos de construcción ni la organización social que sucede en el aula que, en conjunto, posibilita tales construcciones.” (Cordero, 2001, p. 105). Y a menudo se olvida que en toda interpretación de la obra matemática subyace una concepción de conocimiento, que incide, de un modo o de otro, en las prácticas docentes (Cordero, 2007).

En contraposición con los marcos centrados en los conceptos, la aproximación socioepistemológica asume “que el conocimiento matemático se construye a través de prácticas sociales” (Cordero, 2006, p. 59). Lo anterior como resultado de estudiar los usos que las comunidades humanas hacen del conocimiento matemático. Los estudios de uso han identificado categorías implícitas que generan usos que obligan la construcción de los objetos matemáticos. Dichas categorías, como la predicción, la modelación o la graficación, son las prácticas sociales que conforman los ejes didácticos para el rediseño socioepistemológico del discurso matemático escolar.

La socioepistemología “establece una filiación entre la naturaleza del conocimiento que los humanos producen con las actividades mediante las cuales y en razón de las cuales dichos conocimientos son producidos.” (Cantoral, 2003, p. 1).

1.1.2 El discurso matemático escolar de las gráficas en el bachillerato.

El concepto Discurso Matemático Escolar (DME) se entiende como “la manifestación del conocimiento matemático normado por las creencias de los actores del sistema didáctico de lo que es la enseñanza y de lo que es la matemática.” (Cordero y Flores, 2007, p. 9). En el DME predominante, los primeros cursos de bachillerato están conformados por un repertorio de procedimientos y algoritmos provenientes de la aritmética, del álgebra y de la geometría analítica. Pues el modelo de conocimiento comúnmente utilizado en la educación, centra la atención en los conceptos matemáticos, limitándose a entender el conocimiento como algo preexistente a la experiencia de los grupos humanos. En ese contexto, el papel que juegan las gráficas en el DME del bachillerato, es el de ser representaciones que ilustran el concepto de función. Es decir, que en el mejor de los casos, el papel de la gráfica es el de ser un instrumento para ayudar a comprender el concepto de función. “De forma tal que se concibe a la matemática escolar como un producto acabado y que siempre ha existido.” (Cen y Cordero, 2010, p. 1).

Tal planteamiento obscurece los significados situacionales y reduce el aprendizaje a la representación de formas matemáticas preexistentes, por medio del desarrollo de habilidades cognitivas. Lo cual lleva a que las interpretaciones didácticas del conocimiento matemático estén centradas en los conceptos u objetos matemáticos en cuestión, y a que el único marco de referencia sea el propio dominio matemático. Lo anterior se refleja en los programas curriculares, estructurados a partir de secuenciaciones lógicas de conceptos matemáticos, en los libros de texto, en las bibliografías que los docentes retoman en las aulas, y en la existencia de secuencias didácticas universales, aparentemente inviolables, “que provocan efectos en las concepciones de la enseñanza-aprendizaje de la matemática, favoreciendo un estatus utilitario de ésta, pero no así funcional donde el conocimiento matemático transforme una realidad y al participante mismo.” (Cen y Cordero, 2010, p. 1*)*.

Como resultado de lo anterior se ha identificado el privilegio del contexto algebraico en detrimento del contexto gráfico y el olvido del significado situacional de dicho conocimiento. En la presentación de las gráficas de las funciones algebraicas de primer y segundo grado, la secuencia: recta, parábola, círculo, elipse e hipérbola, surge de manera lógica, de acuerdo a una justificación razonada.

Cabe destacar el papel que juega la centración en los objetos matemáticos como la razón de que se favorezca la construcción de conocimiento utilitario en el sistema educativo, en detrimento de la construcción de conocimiento funcional.

Los aspectos geométricos, en general, y gráficos, en particular, tienden a jugar un papel ilustrativo y no central en la generación de conocimiento, desde la perspectiva del análisis matemático. Al respecto, resulta interesante el siguiente comentario, proveniente de un libro de cálculo avanzado:

> "La importancia científica del desarrollo del sistema de números reales (consiste en que) pone una gran cantidad de conocimientos útiles en forma limpia, lógica. También deseamos enfatizar que ese sistema subraya la analogía entre los números reales y los puntos sobres una línea, mas sin embargo, al mismo tiempo, elimina la dependencia lógica del análisis sobre la geometría. Todos los teoremas básicos del cálculo, a partir de este momento, tendrán demostraciones aritméticas puras…Sin embargo, tal y como el estudiante sabe, los diagramas geométricos son valiosos auxiliares cuando se intenta resolver muchos tipos de problemas. No existe objeción respecto al uso de tales recursos; en verdad, debe animarse a usarlos. Pero su uso debe servir como guía y no, si es posible evitarlo, como partes esenciales de un argumento…confiaremos principalmente en la geometría para nuestra inspiración, pero, donde sea posible, evitaremos todo uso esencial de la geometría en nuestros argumentos." (Fulks, 1967, p. 28).

1.1.3 Sobre el tratamiento de la elipse en el bachillerato

La elipse aparece formalmente hacia el segundo tercio del Nivel Medio Superior. En el caso del programa del IPN, se encuentra específicamente en la "Unidad 4. Secciones cónicas" (IPN, 2004, p. 27). En dicha unidad se pretende "que a partir del análisis geométrico, identifique sus rasgos característicos, conozca la equivalencia entre las definiciones bifocal y como secciones de un cono y se familiarice con las relaciones entre sus elementos, como un antecedente al estudio analítico de estas curvas." (pp. 27 y 28).

La definición geométrica de la elipse como uno de las posibles intersecciones de un doble cono recto y un plano, aparece ilustrada por un dibujo en el espacio tridimensional, donde aparecen las cónicas al variarse la inclinación del plano. Pero no tiene desarrollos algebraicos asociados. Esta presentación de las secciones cónicas es atribuida a Apolonio, quien les asigna su nombre común: elipse, parábola e hipérbola.

En la Unidad 5, con base en la definición bifocal, se considera de manera analítica el caso de una elipse centrada en el origen y ejes sobre los ejes del plano cartesiano. La definición bifocal de la elipse, como el lugar geométrico de los puntos en el plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es una constante mayor a la distancia entre los focos, es desarrollada para un punto (x,y) del plano. Se establecen focos $(c, 0)$, $(-c, 0)$, y la expresión $2a$ como la constante de la definición. Y se deduce la forma ordinaria canónica $x^2/a^2+ y^2/b^2=1$. En la cual son visibles los parámetros a y b, que son identificados como la mitad de las longitudes del eje mayor y del eje menor de la elipse, respectivamente. El procedimiento para dicho desarrollo se basa en el empleo del Teorema de Pitágoras para calcular las distancias en el plano, y en la manipulación algebraica de expresiones donde los parámetros a y b son mayores que cero, y que junto con c forman una terna pitagórica, con a como la hipotenusa. En esos términos la excentricidad es definida como el cociente c/a. A menudo también se calcula y se obtiene una fórmula para obtener el ancho focal, conocidos los valores de a y b.

Junto al anterior desarrollo, siempre se presenta una elipse en un plano cartesiano. En ella se ilustran algunos de los elementos de la elipse: focos, vértices, centro, eje mayor, eje menor y lado recto, ilustrándose la propiedad focal mediante la presentación de los radiovectores para un punto específico sobre la elipse. La gráfica de la elipse aparece para ilustrar el discurso algebraico antes desarrollado.

Y para desarrollar el dominio de lo expuesto, se pide a los estudiantes resolver ejercicios donde se debe obtener la ecuación de una elipse con base en su ubicación en el plano cartesiano, o en el conocimiento de algunos de sus elementos, como sus focos, vértices, centro o ejes; y a la inversa, es decir, dada la ecuación obtener sus elementos y trazar la elipse en el plano.

La definición general de cónicas, como el lugar de los puntos cuya distancia a un foco es proporcional a su distancia a una recta conocida como directriz, que es perpendicular al eje mayor (atribuida a Pappus), aparece generalmente en un segundo momento, en el tratamiento algebraico. Asimismo, es común que se presenten ejercicios donde se exploran métodos de construcción de elipses, como el del jardinero y el de la escalera que se desliza (tramoya de Arquímedes), y donde se muestran aplicaciones de la elipse en situaciones relativas a la órbita elíptica de la tierra alrededor del sol, o a la consideración de cúpulas elípticas donde son conocidos algunos de sus elementos.

En la Unidad 6, se consideran las traslaciones y las rotaciones de las cónicas. Se trata el caso en que el centro de la elipse está en un punto (h, k), con ejes paralelos a los ejes del plano cartesiano. Y con un desarrollo algebraico similar al anteriormente comentado, se obtiene la ecuación canónica de la elipse con las características mencionadas (centro en el punto (h, k) y ejes paralelos a los ejes de referencia). A lo que siguen ejercicios similares a los anteriores, sólo que con la elipse centrada en un punto diferente al origen, lo que lleva a procedimientos algebraicos como completar cuadrados.

El caso en que los ejes de la elipse coinciden con una rotación de los ejes del plano cartesiano, es resuelto mediante el empleo de coordenadas polares y propiedades trigonométricas. Con lo que algebraicamente se incluye el término cruzado y un ángulo de rotación.

A partir de considerar por casos las soluciones de la ecuación general de segundo grado en dos variables, $Ax^2 + B\,x\,y + C\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$, se encuentran las relaciones entre los coeficientes que permiten diferenciar las cónicas entre sí, mediante el discriminante $B^2 - 4AC$. La elipse es identificada como el caso en que este discriminante es menor que cero.

El programa del bachillerato del IPN incluye también el desarrollo de la forma paramétrica y la forma polar de la elipse, en las unidades 7 y 8, respectivamente. En la sección de problemas plantea la obtención de la elipse a partir de cinco puntos dados, o como el lugar geométrico de los centros de circunferencias tangentes a otra y que pasa por un punto interior a esta última, y como un caso particular de hipotrocoide (con R=2r).

La elipse vuelve a aparecer al inicio del tercer año del bachillerato, al desarrollarse el cálculo diferencial, en el tema relacionado con la obtención de tangentes a curvas. Asimismo, al desarrollarse el cálculo integral, la elipse es usada para delimitar regiones a integrar. Como es el caso en la determinación de regiones relacionadas con un elipsoide de revolución.

Cabe mencionar la aportación moderna de las esferas de Dandeline, la cual es mencionada en libros de Geometría Analítica para el bachillerato. Por ejemplo, en Wooton, Beckenbach y Fleming (1985), y en el libro para el maestro (IPN, 2006).

El tratamiento de Menecmo, a quien se le atribuye el descubrimiento de las cónicas cuando estudiaba el problema clásico de la duplicación del cubo (Heath, 1981), no aparece en el bachillerato. Dicho tratamiento parte de un plano siempre perpendicular a una generatriz del cono, de manera que las cónicas surgen al variarse el ángulo de apertura de dicho cono. “Incluso Euclides trataba las cónicas como secciones de los tres diferentes tipos de conos (con ángulo recto, agudo y obtuso)… Como veremos, Apolonio cambió este enfoque de las secciones cónicas.” (Kline, 1972, p. 128).

La elipse puede visualizarse en el universo de gráficas de los textos del bachillerato, en la siguiente tabla elaborada por Cen (2006).

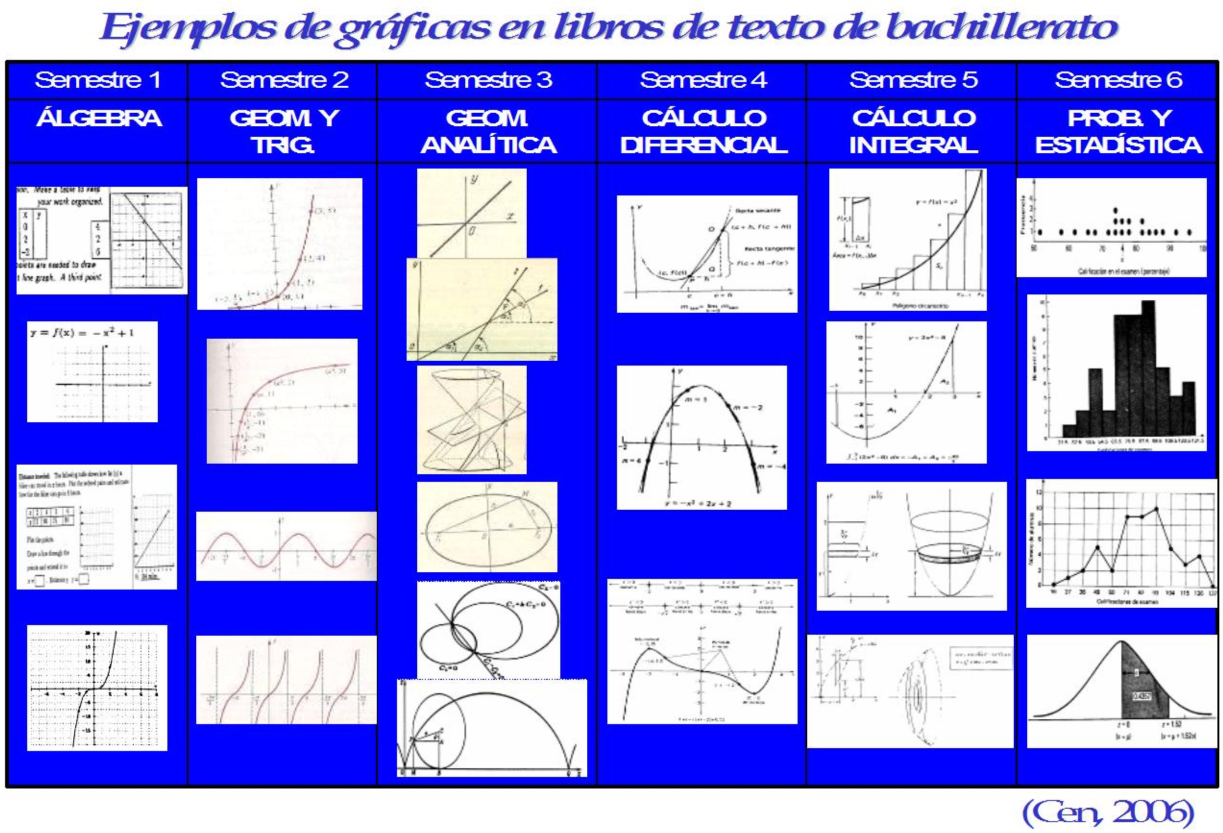


Tabla 1. La elipse en el universo de gráficas del bachillerato

La elipse aparece también en varios momentos en la asignatura de Física, a lo largo del bachillerato. En el primer año, al enunciarse las leyes de Kepler, la elipse surge como el tipo de trayectoria que siguen los planetas alrededor del sol. Y en general las cónicas modelan el movimiento de los cuerpos bajo la acción gravitatoria. En el tema de óptica, la propiedad de la elipse de tener iguales los ángulos de incidencia, explica porque las ondas sonoras o los rayos de luz que pasan por uno de los focos convergen en el otro. Dando pie a actividades experimentales en a) estanques elípticos en los que se deja caer un objeto en uno de los focos; b) en espejos elípticos donde se coloca una fuente de luz en uno de los focos; c) en habitaciones con techos elípticos donde en un foco se escucha lo que se dice en el otro.

En el tema movimiento ondulatorio, la elipse es el resultado de la superposición de dos movimientos armónicos simples con direcciones perpendiculares; y en ese sentido es identificada como la figura de Lissajous más simple.

1.2 Estado del arte

1.2.1 Tres ejemplos del trastocamiento del discurso escolar de la elipse

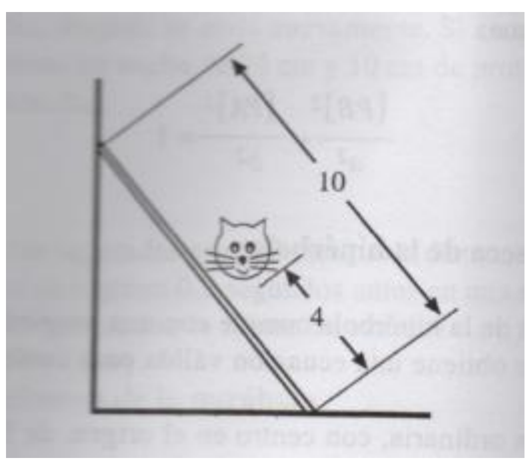
En el artículo *Sobre la geometría sintética y analítica. La elipse y sus construcciones* (Contreras A., Contreras M. y García, 2002), sus autores presentan un recorrido por las distintas construcciones de la elipse, como una estrategia para facilitar la transición entre los métodos sintéticos y analíticos. Entre los métodos sintéticos presenta el de la tramoya de Arquímedes (aunque no le pone nombre). Con base en su desarrollo por semejanza de triángulos, deduce las ecuaciones paramétrica y cartesiana de la elipse, a partir de la identidad trigonométrica $(\cos t)^2 + (\operatorname{sen} t)^2 = 1$. Finaliza con el caso de la elipse de polarización y el papel que juega en la elipsometría, campo de la óptica que se ocupa de la medida y del estudio de la polarización elíptica de la luz. Lo anterior como parte del estudio del uso de la elipse en un dominio no matemático.

En el texto *El caso de la elipse. Visualización en un contexto dinámico* (Zubieta, 2008), la actividad invierte la secuencia tradicional en los libros de texto. Inicia con la construcción de la elipse en un programa de geometría dinámica, a partir de la homotecia de un círculo. Y con base en argumentos geométricos y aprovechando las herramientas que ofrece el entorno de cualquier software de geometría dinámica, muestra la construcción de sus elementos característicos (centro, ejes de simetría, focos). Dichos conocimientos forman una base de conocimientos, que según el autor, pudiera servir, para que los estudiantes conjeturen propiedades intrínsecas a la elipse, como la que hace referencia a que todo punto sobre la elipse cumple que la suma de sus distancias a los focos es una constante.

La Academia Institucional de Matemáticas, conformada por Hermenegildo Barrera Hernández, Pedro Ortega Cuenca, José Luis Torres Guerrero, Josué J. Téllez Luna y Betsabé A. Contreras Domínguez, profesores de los Centros de Estudios Científicos y Tecnológicos del IPN, mejor conocidos como vocacionales, elaboraron el libro de Geometría Analítica, texto de matemáticas para el segundo año del Nivel Medio Superior, IPN (2004).

Dentro de dicho texto, en el tema Lugar Geométrico, desde el marco teórico de la Resolución de problemas, se plantea resolver el problema 28, titulado Un *gato intrépido*. En dicho problema el gato funciona como el punto trazador de una tramoya de Arquímedes convertida en elipsógrafo. Es el antecedente más cercano al diseño trabajado en esta investigación, por lo que se presenta en su totalidad, a continuación:

> “28. Un gato intrépido
>
> Una escalera de 10 peldaños se encuentra recargada sobre un muro liso y resbala por el peso de un gato. Encuentra el lugar geométrico que describe el gato, si éste no se mueve del cuarto peldaño desde el extremo que resbala sobre el piso.” (p. 78).



Y en el Libro para el profesor (IPN, 2006) aparece resuelto, con comentarios y sugerencias para su desarrollo en clase, y en un software de geometría dinámica.

“Solución y Comentario

Este tipo de problemas fortalece la idea de lugar geométrico entendiéndolo como la estela que deja un punto que se mueve en un plano bajo ciertas condiciones. Para ir aclarando el sentido que tiene esto, es importante dar inicio con un plan de solución, a partir de su aspecto geométrico. Y es posible iniciar, con la informalidad consecuente, adivinando cuál sería el resultado. La solución de un problema es una actividad y, en cierta medida, es de gran ayuda anticiparse al resultado, aunque esté errado, favorece mucho a la marcación de caminos que posibilitan a la solución correcta del problema. La verificación que le sigue permite aceptar o rechazar ese primer intento de solución.

Este tipo de problemas fortalece la idea de lugar geométrico entendiéndolo como la estela que deja un punto que se mueve en un plano bajo ciertas condiciones. Empezamos por suponer que el gato se encuentra no en el peldaño cuatro, sino justo a la mitad de la longitud de la escalera (supongamos que la escalera mide 10 m de longitud). Esto es, no buscamos la solución inmediata del problema original, sino una variante más sencilla.

Imaginamos y esbozamos la situación en términos puramente geométricos. Entre el muro y el piso se tiene un ángulo recto, y a continuación trazamos varias posiciones que tendría la escalera al girar deslizándose por el muro y el piso. Es notable ver que los puntos donde debe encontrarse el gatito, al comienzo y al término del movimiento, son los puntos medios, A y B, de los segmentos cuando la escalera está sobre la línea vertical y horizontal. Y están a igual distancia del punto O, que es el vértice del ángulo recto. Nos preguntamos ahora si conservará la misma distancia para cualquier punto. Entonces, esto nos obliga a trazar unos cuantos puntos con sus respectivas posiciones que tendría la escalera con su movimiento. Si se hace con la suficiente exactitud, veríamos que todos los puntos están a igual distancia de O. Esto es, que la línea que nosotros estamos buscando es un arco de circunferencia. Ahora solo falta probarlo.

Dando una mirada a la geometría estudiada en el segundo semestre (y se recomienda en lo posible resolverlo primero con argumentos puramente geométricos), traza un segmento intermedio, QR, y su punto medio, P, entonces la distancia de O a P es la mitad de Q a R, e igual a 5, porque trazando un rectángulo QORS, el cruce de las diagonales, QR y OS, se dividen exactamente por la mitad, y tienen la misma longitud, es decir P es el punto medio de OS. Por lo tanto, OP mide lo mismo que OA y OB. De esta forma es como demostramos que para cualquier sitio intermedio que tenga lugar la escalera, su punto medio, P, está sobre el arco de circunferencia AB, con centro en O y radio 5.

Por otra parte, es fácil convencerse de que cualquier punto P del arco AB pertenece al lugar geométrico solicitado. Basta con prolongar el segmento OP hasta PS, tal que OP = PS. Luego trazar las perpendiculares desde S, SQ y SR, desde esta manera se construye el segmento necesario QR, con P como el punto medio.

Otra manera de plantear los problemas que involucren movimiento, es la visión relativa que tiene el movimiento en relación con otros puntos de vista. Supón que la escalera está fija, como si el gato no se percatara de que está siendo movido a través del deslizamiento de la escalera, y no tomada en cuenta el aceleramiento de su movimiento. Entonces, con este punto de vista, la pared y el piso se mueven conjuntamente y en ángulo recto, así como se muestra en la figura de abajo.

Ahora recordarás que en la geometría elemental hay un teorema que afirma que todos los triángulos rectos con la misma hipotenusa, QR, tienen el vértice del ángulo recto, O, sobre una circunferencia, y que sus distancias al punto medio de su hipotenusa es siempre la misma.

Después de esta discusión podrás plantear una situación general, o si lo crees conveniente, ver el caso planteado en el enunciado del problema cuando el gato está sobre el cuarto peldaño.

Nuevamente podrás suponer algunos puntos fijos, por el que se encuentra el gato, con la exactitud conveniente y ver ahora de que curva se trata. Es entonces cuando conviene usar el método de coordenadas para descubrir el tipo de curva correspondiente.

Considera que en el sistema de coordenadas cartesianas, el eje x está sobre el piso y que eje y está sobre la pared. Ahora supón que el gatito, G, está a una distancia a del extremo superior y a una distancia b del extremo inferior. Y supón que a es mayor que b. Si $\phi = \angle ORQ$ y el gato está en el punto G(x, y). Entonces $x = a\cos\phi$ y $y = b\mathrm{sen}\phi$. Así tenemos las ecuaciones con parámetro ϕ.

Concluimos que el conjunto de puntos, G, que satisfacen esta ecuación es una elipse, con centro en el origen y semiejes mayor y menor, a y b, respectivamente. Nota que si el gato está en el centro de la escalera, a = b = r, se deduce una ecuación de circunferencia con radio r, por lo que se tiene otra solución, de manera analítica, de nuestra discusión previa.

Se puede usar algún paquete de geometría dinámica para hacer un modelo de la situación del gato intrépido y ver su trayectoria aprovechando el carácter dinámico del modelo.

Se escoge un sistema de coordenadas.

Se construye un punto A en uno de los ejes. Se construye un círculo con centro en A y radio 10 cm para representar la escalera que aparece en el diagrama que incluye el enunciado del problema.

Se construye la intersección del círculo con el otro eje para fijar la longitud de la escalera y poder deslizarla sobre los ejes, como lo exige el modelo.

Construye el punto G, donde se encuentra el gato intrépido, usa la función Trace para que deje un rastro del punto G cuando se mueve la escalera. Arrastra el pie de la escalera, A, para observar la trayectoria del punto G.

Una vez que se ha identificado el lugar geométrico, conviene representar algunas de sus propiedades más características. En el caso de la elipse se puede establecer la suma de las distancias de cada punto a los focos como una invariante. También se puede establecer la razón de las distancias al foco y a la directriz como la excentricidad." (IPN, 2006, pp. 83-86).

Asimismo, también se presenta una ficha didáctica y metodológica de la actividad:

“Título: Un gato intrépido

1. Experiencia de aprendizaje 1.1 Resolución de problemas

2. Modalidad de trabajo 2.1 Individual. 2.2 Equipo (parejas). Parejas con reporte individual

3. Lugar de realización 3.1 Salón de clases o 3.2 Aula de cómputo

4. Herramientas tecnológicas 4.1 Juego de geometría. 4.2 Ambientes computacionales (Paquete de geometría dinámica)

5. Tiempo 50 minutos

6. Producto 6.1 Reporte de RP

7. Referencias curriculares 7.1 Contenidos. 7.1.1 Conceptuales

1.2.1 Localizar el lugar geométrico de los puntos que satisfacen una ecuación o condición algebraica dada.

1.2.2 Encontrar la ecuación de una curva o lugar geométrico descrito por distintos medios, por ejemplo, como el corte de un sólido por un plano (secciones); por el movimiento de una partícula (trayectorias).

4.2 Definición bifocal de las cónicas

4.3 Elementos de una cónica

5.1 Deducción de las ecuaciones ordinarias de las cónicas. 5.2 Problemas y aplicaciones diversas.

7.1 Coordenadas de un punto que se mueve en una trayectoria curvilínea, ecuaciones paramétricas del movimiento.

7.1.2 Procedimentales. P2, P3, P4, P9.

7.1.3 Actitudinales. A3, A9, A13. CBEB C1, C2, C3, C7. Estándares NCTM, E1.3; E2.1; E3.1, E3,3, E3.4; E4.1; E6; E7; E8; E9; E10

8. Representaciones 8.1 Textual.8.5 Geométrica. .2 Algebraica. 8.5 Geométrica

9. Estrategias ‘Haz un dibujo o un diagrama’, ‘Analiza un caso particular, pon un ejemplo’, ‘Toma una instantánea’

10. Evaluación 10.1. Evaluación del reporte individual incluyendo las construcciones realizadas pulcramente con juego de geometría o con algún paquete de geometría dinámica.

> 10.2 Evaluación de la presentación. Observaciones. En la discusión es importante aplicar la estrategia de formulación de problemas ¿Qué pasaría si ...? para dar lugar a la identificación de los patrones y a la formulación de conjeturas.” (Libro del profesor, pp. 87-88).

1.2.2 Sobre la socioepistemología de la modelación y el uso de las gráficas

En la investigación titulada *La argumentación gráfica en la transformación de funciones cuadráticas. Una aproximación socioepistemológica*, Campos (2003) hace un recorte de las funciones cuadráticas, para dar cuenta, en particular, del caso de la parábola en el discurso matemático escolar. Presenta diez actividades basadas en el desarrollo de la situación de transformación, donde las formas son la variación de parámetros y las “operaciones” gráficas, y el funcionamiento es la asociación gráfica-ecuación, a través de la noción de comportamiento tendencial, que es el argumento de la Situación de Transformación que plantea, como puede verse en el párrafo a continuación:

> “Se puso en juego el argumento gráfico en la situación de transformación de la parábola cuando variamos parámetros y (los alumnos) predecían el comportamiento general de la curva, al tratar de dibujar el trazo de nuevas curvas (suma de rectas con parábolas, composición de una función con la parábola y producto de una función con la parábola) desde un contexto puramente gráfico, lo cual llevó a que los alumnos reconocieran patrones de comportamientos en la curvas y a encontrar propiedades intrínsecas a éstas.” (Campos, 2003, pp. 140 y 141).

Campos da cuenta del papel que juega la noción de comportamiento tendencial, para la construcción del conocimiento de lo que ocurre en procesos infinitos, como cuando uno o más de los parámetros de la ecuación de la parábola tienden a infinito o a cero. El que la identificación de patrones haya conducido a la obtención de propiedades intrínsecas a las parábolas, plantea hacer lo mismo para la elipse; es decir, lograr pasar de la identificación de patrones a la obtención de propiedades intrínsecas invariantes, como la que usualmente define a la elipse por medio de la suma de las distancias a los focos.

Cabe destacar que Campos identifica un uso histórico para las cónicas: “las secciones cónicas entraron en las matemáticas antiguas como método de resolución de problemas que no admitían resolución con los métodos del álgebra geométrica, esto es, a través de construcciones con ayuda de la regla y el compás.” (Campos, 2003, p.15).

En el trabajo intitulado *La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología*. (Torres, 2004), los estudiantes experimentaron con sensores de movimiento y la graficación automática con calculadoras simbólicas.

En la actividad, llamada *Epifanía,* se solicitó a los estudiantes modelar de manera gráfica la ida y el regreso de una persona que va a la biblioteca cruzando un patio, y en el camino de vuelta se detiene unos minutos antes de llegar al punto de partida. Asimismo se les pidió indicar cuándo su movimiento era más rápido o más lento, o su aceleración mayor o menor. Del análisis de estas actividades, Torres identifica tres usos en la construcción de gráficas: el primero mediante la relación de correspondencia entre dos variables; el segundo, a través de operaciones gráficas y, por último, el uso de la graficación por medio de la simulación de un fenómeno físico empleando tecnología.

Interesada en “favorecer el desarrollo de una matemática funcional en el sistema educativo”, Suárez (2008, p. 7) plantea el binomio modelación-graficación, como una socioepistemología conformada por elementos de pertinencia, de construcción y de integración, como resultado del estudio del Tratado de Oresme, en el cual “las figuras geométricas y las proporciones matemáticas ayudan a comprender fenómenos en los que se producen cambios de la realidad física que pueden estudiarse como cambios en las cantidades.” (p. 66). Para ella la situación de modelación del movimiento “será el conjunto de características de las tareas y clases de tareas que realizará el estudiante y que están condicionadas por los datos epistemológicos que aporta la categoría Modelación – Graficación.” (p. 100) Suárez presenta un taller extracurricular de Modelación del Movimiento, conformado por cuatro sesiones. Cada una de ellas presenta una situación de variación específica, las cuales se citan a continuación.

> “S1. Sesión 1.- Semana 1. Describir gráficamente el descenso de temperatura de un cuerpo que está previamente calentado a 30 grasos centígrados y se retira la fuente de calor.
>
> S2. Sesión 2.- Semana 2. Describir gráficamente el movimiento de un balón que 1) cae libremente, 2) se tira verticalmente hacia arriba, 3) se tira verticalmente hacia abajo con rebote.
>
> S3. Sesión 3.- Semana 3. Describir gráficamente el movimiento de una persona que se aleja 500 metros de un punto de partida para regresar a él después de 9 minutos de recorrido. Durante el trayecto se detiene cuatro minutos.
>
> S4. Sesión 4.- Semana 4. Describir gráficamente el movimiento de un elevador de un edificio habitacional a lo largo de un día.” (Suárez, 2008, pp. 107 y 108).

Cada una de las sesiones se basa en un diseño de situación de modelación del movimiento con tres momentos. En un primer momento, ante una situación de variación como Epifanía, los participantes generan en equipo un modelo gráfico a lápiz y papel. En un segundo momento se les pide realizar la simulación de la situación con ayuda de sensores y calculadoras, y discutir y explicar las diferencias entre su modelo gráfico y las gráficas obtenidas en la simulación. Finalmente, en un tercer momento, los participantes “usan los argumentos construidos para coordinar el comportamiento de las gráficas con las características del movimiento.” (p. 105). Con lo cual se logra que los participantes identifiquen relaciones entre las gráficas de la posición y la velocidad, y logren establecer tales relaciones como argumentos para explicar la variación en una situación de cambio.

La investigación *El uso de las gráficas desde una perspectiva instrumental* (Briseño, 2008), retoma la mencionada actividad *Epifanía* (Torres, 2004). Del estudio de los resultados de la puesta en escena de tal diseño, Briseño encuentra que el uso de las gráficas norma los procesos de instrumentación e instrumentalización (constructos de la teoría de la Génesis instrumental), mediante los cuales el artefacto se convierte gradualmente en instrumento, posibilitando su uso como herramienta para la construcción de conocimiento. Briseño concluye que el uso de la tecnología permitió a los estudiantes tener una visión global y local, gracias al empleo del comando zoom. En la siguiente tabla, Briseño muestra cómo en el caso de las calculadoras graficadoras, la graficación organiza los ambientes numérico, analítico y simbólico en los tópicos matemáticos, y favorece la aparición de más conceptos relacionados y guía los procedimientos empleados por los estudiantes:

El uso	Ambientes CAS	Tópico estudiado	Hace que emerjan conceptos matemáticos	Guía sus Procedimientos
GRAFICACIÓN	NUMÉRICO--ANALITICO--SIMBÓLICO	Comportamiento al infinito de funciones	• Limite al infinito de funciones • Propiedades de los polinomios • Derivada • Rango de la función	• Interpretación de los coeficientes de un polinomio • Aplicación de teoremas referente a polinomios • Interpretación de la tabla de valores de una función • Operaciones simbólicas • Manejo de distintos rangos, redimensionar la ventana
		Construcción de la ecuación cuadrática	• El papel que juegan los coeficientes *a*, *b* y *c en* $y = ax^2 + bx + c$ *y su relación con la gráfica* • Propiedades de la parábola • Gráfica de la parábola	• Identificación de los parámetros a , b y c por medio de manipular la gráfica
		Variación de funciones	• Máximos y Mínimos • Intervalos crecientes y decrecientes • Derivada • Gráfica de $f\,'(x)$ • El rango de una función • Factorización de funciones	• Observar patrones de las gráficas $f(x)$ y $f\,'(x)$ • Operaciones simbólicas. • Interpretación de la tabla de valores de una función
		Estudio de la derivada	• La recta tangente a una curva • La recta secante a una curva • El Limite de $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ • Pendiente de una recta	• Aproximar la gráfica de la recta secante a una recta tangente • Operación matemática

Tabla 2. Desarrollo de la matemática con el uso de calculadora. Briseño (2008).

Cen (2006) identifica escenarios de la recta, de la función trigonométrica y de la parábola, que pueden conformar un marco de referencia del desarrollo del uso de la gráfica en el bachillerato. En ellos, la gráfica de cada curva considerada se desarrolla como herramienta, al mismo tiempo que las formas hechas por los estudiantes también se desarrollan. Por ejemplo, en el caso de la recta, el uso distribución de puntos establece la forma básica que en el uso comportamiento geométrico da pie a la construcción de conocimiento sobre la relación entre los parámetros de la ecuación y su comportamiento gráfico.

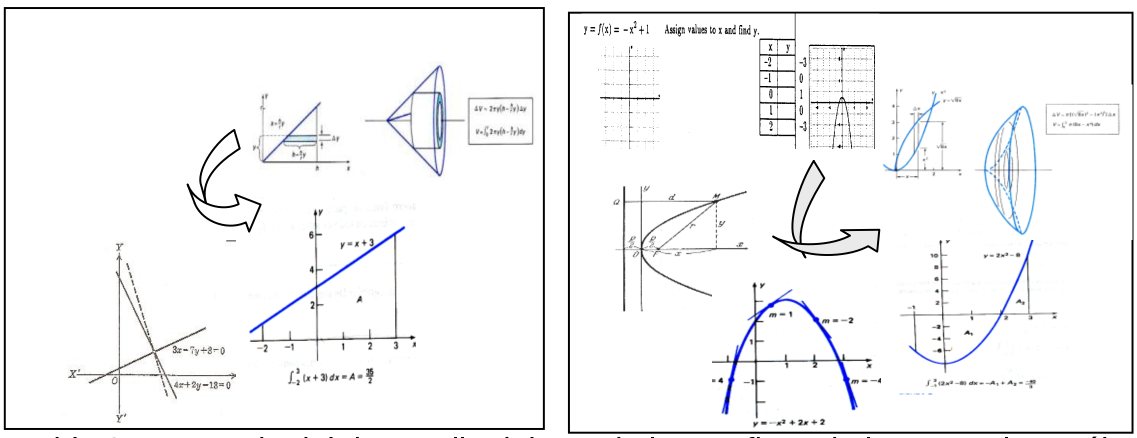


Tabla 3. Escenario del desarrollo del uso de las graficas de la recta y la parábola (Cen, 2006).

t	$y = \operatorname{sen} t$
0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$
π	0
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.7$
$\frac{3\pi}{2}$	-1
$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.7$
2π	0

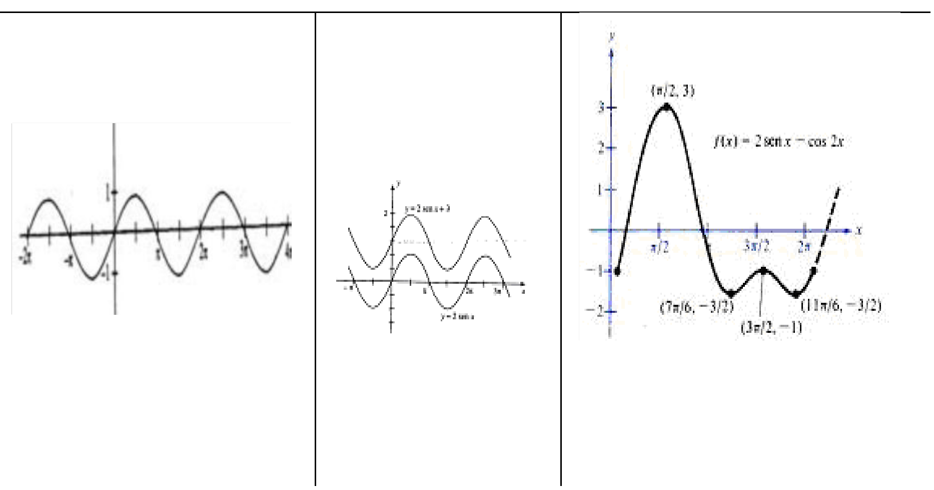


Tabla 4. El escenario de la función trigonométrica (Cen, 2006).

1.3 La investigación

1.3.1 El estudio del uso de la elipse en el bachillerato

> "Para acceder al pensamiento y lenguaje variacional se precisa entre otras cosas del manejo de un universo de formas gráficas extenso y rico en significados por parte del que aprende. El conocimiento superficial de la recta y la parábola no resultan suficientes para desarrollar las competencias esperadas en los cursos de análisis." (Cantoral y Farfán, 1998, p.356).

Dentro de la investigación socioepistemológica sobre el uso de las gráficas en el bachillerato, se han identificado de manera explícita escenarios del desarrollo de las formas y funcionamientos de las gráficas de las funciones de primero y segundo grado, así como de las funciones sinusoidales (Cen, 2006). Por lo que cabe hacer lo propio para las curvas que a diferencia de la recta, la parábola, no son funciones. Se decidió elaborar un diseño de situación donde apareciera el funcionamiento de transformación de funciones bajo la forma variación de parámetros, en la cual los estudiantes le atribuyeran significado a los parámetros *a*, b (la mitad del largo y la mitad del ancho, respectivamente) de las ecuaciones paramétrica y cartesiana. Y a los parámetros, y a las relaciones entre ellos, de la ecuación parámetrica, al considerar los parámetros de frecuencia y fase, como parte de la transformación lineal de los argumentos de las funciones sinusoidales de cada una de las componentes.

Esta investigación está centrada en el desarrollo del uso de la elipse, y plantea la elaboración de un diseño de situación con la tramoya de Arquímedes. De las gráficas presentadas por Cen (2006), puede glosarse el siguiente escenario del uso de la elipse, el cual ocurre durante el tercer, cuarto y quinto semestre del bachillerato del IPN.

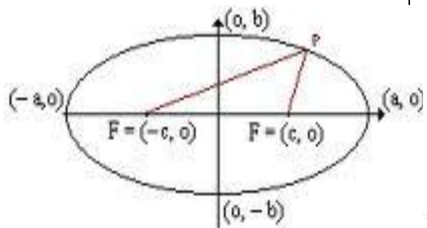
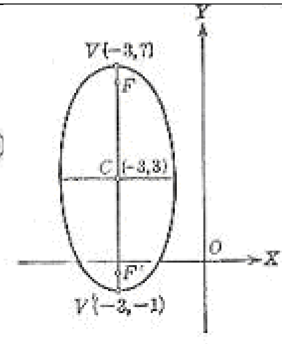
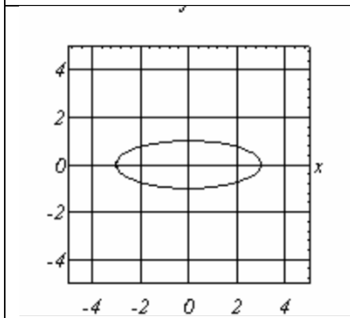
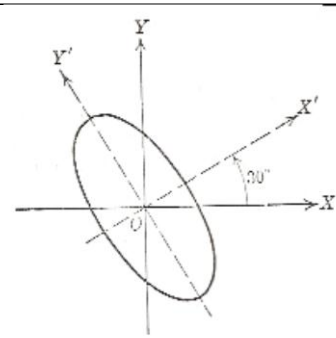
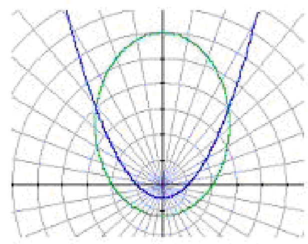
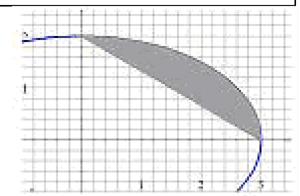
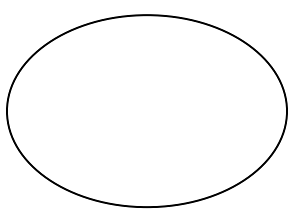
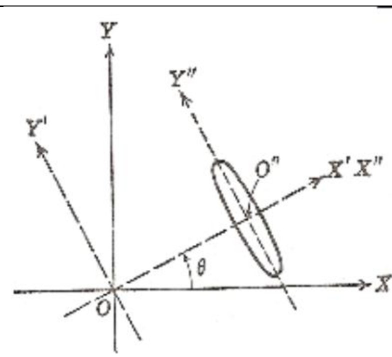
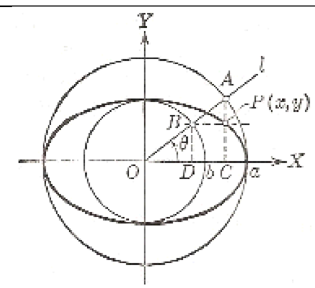
Distribución de puntos	Comportamiento geométrico	Análisis de la curva	Cálculo de áreas y volúmenes
		Determinación de tangentes a la elipse	Delimitación de regiones para cálculo de áreas y volúmenes
			
			Cálculo del volumen de elipsoides de revolución

Tabla 5. El escenario del uso de la elipse en el bachillerato

1.3.2 Una epistemología de prácticas sociales para la elipse

En el apartado 1.1 se identificó a la centración en los objetos matemáticos como la razón de que se favorezca la construcción de conocimiento utilitario en el sistema educativo, en detrimento de la construcción de conocimiento funcional. Como respuesta a tal estado de cosas, este trabajo retoma el enfoque socioepistemológico, el cual amplía la problemática al considerar al humana haciéndo matemáticas, que al ejercer prácticas sociales genera usos que obligan la construcción de los objetos matemáticos. En este marco, el rediseño del discurso escolar se basa en la instalación de prácticas sociales como ejes didácticos que generan usos; es decir, formas y funcionamientos del conocimiento matemático, que en un debate dialéctico, se desarrollan, dando pie a nuevas formas y funcionamientos. Lo anterior conforma un marco de referencia para la construcción de conocimiento en situaciones específicas.

Esta investigación trata en particular con el rediseño del discurso escolar relacionado con la elipse, dentro de la línea de investigación socioepistemológica sobre la modelación y el uso de las gráficas. La cual ha dado cuenta del uso de las graficas en el sistema educativo, en particular en los niveles preuniversitarios. A la graficación se le considera como un tipo de modelación, que soporta el desarrollo de la argumentación y del razonamiento.

En esos términos, en este trabajo la epistemología para el estudio de la modelación de la elipse se basa en la observación, análisis y experimentación con un artefacto conocido como tramoya de Arquímedes, implementado en tres ambientes tecnológicos.

La tramoya de Arquímedes traza el recorrido de un punto fijo en la recta sobre la hipotenusa de un triángulo, al variar éste la longitud de sus catetos. Si el punto fijo no está sobre la hipotenusa, se tiene la versión interna del dispositivo. Si el punto fijo está sobre la hipotenusa, se tiene la versión externa del dispositivo conocido como trammel of Archimedes (Apostol & Mnatsakanian, 2009).

La ventaja de emplear el artefacto es que permite retomar el uso del papel para establecer simetrías, como una tecnología intrínseca a la modelación empleada en la educación básica, y da lugar a la anticipación expresada en Cordero (2006):

> “tendremos que aprender a observar los procesos de aprendizaje de los participantes a través de los usos y argumentaciones de dicho conocimiento, posiblemente en una aula de cómputo haciendo simulación virtual, o en una mesa de trabajo discutiendo entre los miembros de un equipo los comportamientos gráficos que brinda una calculadora, o realizando acciones de movimiento en pequeños grupos para interpretar las simulaciones según los sensores.” (Cordero, 2006, p. 12).

Retomando lo dicho por Cordero, el taller de Arquímedes consiste en actividades donde los participantes accionan la tramoya de Arquímedes en tres ambientes tecnológicos, los cuales presentaron restricciones y potencialidades propias, de acuerdo a su naturaleza. En la primera de las actividades la elipse se trazó a lápiz en cartulina con un dispositivo fijo. Los participantes relacionaron los parámetros de las elipses dibujadas con las dimensiones de la tramoya de Arquímedes empleada para trazarlas. En la segunda actividad, la elipse se dibujó al accionar un dispositivo virtual en el programa de geometría dinámica Geogebra. En la tercera actividad, la elipse surge como la gráfica de los comportamientos de las componentes cartesianas del movimiento de una tramoya de Arquímedes, captados por sensores de movimiento. De manera que son las gráficas obtenidas, su comparación y su relación con el artefacto, lo que da pie a la construcción del conocimiento relativo a la elipse. La variación de los parámetros es la forma en que dentro de la situación de transformación los participantes determinan comportamientos de las gráficas. Lo anterior, dentro del uso comportamiento geométrico identificado por Cen (2006). Los procedimientos que se propician tienen que ver con cambiar la gráfica, al modificar el dispositivo o el movimiento ante el sensor para encontrar el patrón de comportamiento del dispositivo y de la expresión analítica asociada al punto trazador sobre su brazo. Y viceversa, al variar las características del dispositivo, y variar los parámetros característicos de la expresión analítica asociada al dispositivo, identificar los patrones de comportamiento de la gráfica generada al accionarse el dispositivo. Se espera que los participantes logren la realización de ajustes en una estructura para obtener un patrón deseado. En ese sentido la expresión analítica general de las funciones involucradas aparece como una instrucción que organiza comportamientos.

Preguntas de investigación

¿Qué papel juega el uso de las gráficas, en la construcción de conocimiento que realizan los participantes del taller?

¿En qué momento de las actividades se resignifica la elipse?

¿Qué funcionamientos y formas se desarrollan en las actividades?

¿Cómo se relacionan las potencialidades y restricciones de las distintas implementaciones del elipsógrafo de Arquímedes en cada una de las tareas propuestas?

1.3.3 La tramoya de Arquímedes en algunos libros de texto

Entre los diversos métodos de construcción de la elipse, el más empleado en los libros de texto es el del método del jardinero, el cual es una implementación física de la definición de elipse como el conjunto de puntos para los cuales la suma de sus distancias a los focos es constante y mayor que la distancia entre los focos.

Por otra parte, la tramoya de Arquímedes aparece de manera implícita en la mayoría de los libros de texto de geometría analítica, en ejercicios, notas o ilustraciones. A continuación una muestra de tales ejercicios o notas para la construcción de elipses:

> "Ilustración No. 4. Un segmento de línea AB de largo L se mueve de manera que A siempre está sobre el eje de las abscisas y B sobre el de las ordenadas. Encuentra el lugar del punto medio de AB. Solución: Sea P(x,y) las coordenadas de dicho punto medio. Entonces A y B tienen coordenadas

A(2x,0) y B(0,2y). Haciendo uso del teorema de Pitágoras tenemos $(2x)^2 + (2y)^2 = L^2$ o $x^2 + y^2 = (L/2)^2$ Esto muestra que el lugar es un círculo con centro en el (0,0) y radio L/2.” (Oakley, 1957, pp. 42 y 43).

“Problemas de aplicación 4-4

Supóngase que una escalera de longitud 1 m se apoya sobre una pared vertical y que tiene una marca sobre un peldaño que está a 4 m del extremo superior de la escalera. Demuestre que si el pie de la escalera se desliza, alejándose de la pared sobre una superficie horizontal, de modo que el extremo superior se deslice hacia abajo en contacto con la pared, entonces la marca sobre el peldaño describe una trayectoria elíptica.” (Wooton, Beckenbach y Fleming, 1985, p. 144).

“5. Se considera un segmento AB de 12 unidades de longitud y un punto P(x,y) situado sobre él a 8 unidades de A. Hallar el lugar geométrico de P cuando el segmento se desplace de forma que los puntos A y B se apoyen constantemente sobre los ejes de coordenadas *y* y *x* respectivamente. Solución: Por triángulos semejantes, MA/MP = y/PB, o sea, $[(8^2 - x^2)^{½}]/8 = y/4$. Luego $64 - x^2 = 4y^2$, o bien, $x^2 + 4y^2 = 64$. El lugar es una elipse con su centro en el origen y de eje mayor sobre el eje x.” (Kindle, 1994, p. 53).

“41. Un segmento de longitud 12 se mueve de tal manera que sus extremos siempre tocan los ejes coordenados. Hallar la ecuación de la gráfica del punto del segmento que está a 4 unidades del extremo que se halla en contacto con el eje *x*.

42. Una varilla de longitud $a + b$ se mueve con sus extremos en contacto con los ejes coordenados. Demostrar que el punto que está a una distancia a del extremo que se halla en contacto con el eje *x* describe una elipse si *a* es diferente de *b*.” (Fuller, 1997, p.127).

> “22. Una recta de longitud *a + b* se mueve en forma tal que sus extremos permanecen sobre los ejes coordenados. Demostrar que el lugar geométrico de los puntos P, que están a una distancia *a* de un extremo de la recta, es una elipse con centro en el origen y con ejes de longitudes *2a, 2b* y que coinciden con los ejes coordenados.” (Steen y Ballou, 1978, p.74).

> “Un segmento AB de longitud fija se mueve de tal manera que su extremo A permanece siempre sobre el eje X y su extremo B siempre sobre el eje Y. Si P es un punto cualquiera, distinto de A y B, y que esté sobre el segmento AB o en su prolongación, demuéstrese que el lugar geométrico de P es una elipse. Un instrumento basado en este principio se usa para construir elipses teniendo como datos los ejes mayor y menor.” (Lehmann, 1993, p.180).

De los textos consultados, sólo en el Lehmann se plantea explícitamente como un método para construir elipses (sin mencionarse su nombre), comentándose las versiones interna y externa.

Capítulo 2

Marco teórico

2.1 La Socioepistemología, una escuela latinoamericana de pensamiento en la Matemática Educativa

La aproximación socioepistemológica responde a la problemática planteada en el primer capítulo, asumiendo a la actividad humana como la fuente para interpretar y reorganizar la obra matemática. Para explicar lo que ocurre en el aula, la Socioepistemología caracteriza los usos del conocimiento matemático en comunidades, e identifica a las prácticas sociales como los elementos constituyentes del conocimiento matemático (Cordero y Flores, 2007). Este cambio de centración amplía la problemática planteada por los modelos teóricos basados en los objetos matemáticos, al no considerar sólo epistemologías de objetos sino epistemologías de prácticas que obligan la construcción de los objetos matemáticos. Las cuales proporcionan un marco de referencia donde los contenidos matemáticos son construidos de manera que tienen sentido en situaciones específicas, y en ese sentido son funcionales. Para el estudio del fenómeno didáctico, la Socioepistemología considera de forma sistémica las dimensiones epistemológica, cognitiva, didáctica y social.

La perspectiva socioepistemológica fue presentada por Ricardo Cantoral en dos reuniones académicas en septiembre de 1997. Primero, como plática inaugural del Seminario de Investigación en Matemática Educativa del Área de Educación Superior del Cinvestav en México. Unos días después como conferencia plenaria en la Conference on Research in Mathematics Education en Estados Unidos. A partir de tal acontecimiento, diversos artículos, como el de Cantoral y Farfán (1998), y como el de Cordero (2001) han contribuido a su planteamiento fundacional.

La escuela de pensamiento socioepistemológica ha generado un Programa de Investigación con objetivos como los que se enuncian a continuación:

- Analizar fenómenos didácticos en el campo de la matemática escolar del Nivel Superior
- Evaluar el desarrollo del pensamiento matemático avanzado

- Contribuir a la solución de problemas educativos que requieren del empleo de procesos matemáticos
- Conducir procesos de desarrollo académico propios de la Matemática Educativa
- Producir y reconocer conocimiento original en el campo disciplinar de la Matemática Educativa

Para la socioepistemología, el aprendizaje no es sólo un asunto de desarrollo de habilidades cognitivas, sino de construcciones de conocimiento basadas en categorías de uso, identificadas en estudios de usos del conocimiento matemático en las comunidades.

La aproximación socioepistemológica asume que los conocimientos matemáticos son el producto cultural de una serie de prácticas sociales ligadas a nociones matemáticas, las cuales asocian significados a través de su uso, bajo formas y fines específicos.

2.2 La naturaleza dual del conocimiento matemático. La justificación razonada y la justificación funcional

En el sistema educativo el conocimiento matemático tiene una naturaleza dual, al ser considerado al mismo tiempo como objeto de estudio y como instrumento. De ambos aspectos el discurso matemático escolar ha favorecido al primero de ellos.

La presentación del conocimiento matemático generalmente inicia con la definición explícita de los objetos matemáticos en cuestión. Los cuales son desarrollados con base en procedimientos algebraicos y analíticos. De manera que lo que guía la construcción de conocimiento son las justificaciones razonadas. El conocimiento matemático es entonces concebido como algo acabado, inamovible, que se justifica a si mismo en el plano de las matemáticas mismas, completamente divorciado de la vida cotidiana del estudiante y de las comunidades donde vive. De manera que se propicia que el estudiante "aprenda" sólo para aprobar exámenes en el ámbito escolar y tal conocimiento tome un estatus utilitario. Por eso es comprensible que los estudiantes conciban “que lo verdaderamente importante en el curso de matemáticas es el aprender un listado de fórmulas y métodos, favoreciendo un estatus utilitario de la matemática y no un conocimiento (matemático) que transforme al individuo mismo y su realidad.” (Cordero y Morales, 2006, p. 513). A este último tipo de conocimiento, en el marco socioepistemológico se le conoce como conocimiento funcional. “Matemática funcional quiere decir un conocimiento incorporado orgánicamente en el humano que lo transforma y que le transforma su realidad. Todo ello en oposición al conocimiento utilitario.” (Cordero y Flores, 2007, p. 9).

En el discurso matemático escolar se ha abandonado la naturaleza del conocimiento matemático como instrumento, dejando de lado la justificación funcional de tal conocimiento. Olvidando que, sobre todo en los niveles superiores del sistema educativo, “la matemática escolar está al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia, de donde a su vez adquiere sentido y significación.” (Cantoral y Farfán, 1998, p. 356).

La aproximación socioepistemológica desarrolla la justificación funcional, con base en categorías que propician el desarrollo del uso del conocimiento matemático y que funcionan como argumentos que sustentan la construcción de conocimiento entre los estudiantes. Se trata de pasar de una justificación exclusivamente racional, a una justificación funcional que haga posible la construcción de una matemática funcional en el sistema educativo.

2.3 El rediseño socioepistemológico del discurso matemático escolar.

No se podrían soslayar las aseveraciones que Cordero y Cen han formulado a la luz de sus investigaciones, las cuales fortalecen la tesis de por qué se debe rediseñar el discurso matemático escolar. A continuación las escribimos textualmente.

> “…no se trata únicamente de un problema de secuenciar y temporalizar los contenidos del currículo, como tradicionalmente se le había confiado a la psicología y a la pedagogía, sino de realizar un trabajo matemático de reorganización… [de la] obra matemática con base en las cuestiones que ésta representa...” (Cordero, 2001, p. 105).

> “Tras todo el conocimiento que poseemos existe una consistencia social que respalda la construcción de los saberes matemáticos. Razón por la cual cada sociedad tiene que reconocer sus condiciones, recursos y posibilidades, establecer sus estrategias, medios y escenarios, formular acciones y teorizar (hacer conocimiento) para trazar orientaciones y entender lo que se desarrolla” (Cen, 2006, p. 37).

Todo ello conlleva la siguiente reflexión: El conocimiento se “aprende” en la escuela, desligado de las prácticas de donde emergió y en donde vive, para después ser “aplicado”, quedando esta última parte generalmente a cargo del estudiante. Es decir, que en el sistema educativo, hay una ausencia de marcos de referencia en los cuales los estudiantes puedan apoyarse para realizar los ajustes que requiere el conocimiento matemático para modelar el cotidiano y ser una herramienta para transformar la realidad. Por eso la necesidad del rediseño del discurso matemático escolar. Para la perspectiva socioepistemológica, tal rediseño debe tomar como ejes las categorías de uso del conocimiento. Las cuales sirvan como marcos de referencia para el desarrollo del uso del conocimiento, es decir, para el debate entre el funcionamiento y la forma del conocimiento matemático específico, y así favorecer su resignificación y no sólo el desarrollo de habilidades.

La problemática consiste en que lo que sucede en la escuela no está ligado al cotidiano, y lo que sucede en el cotidiano no se relaciona con lo que ocurre en la escuela. El reto es que los estudiantes construyan un conocimiento matemático funcional, en el sentido de un conocimiento que trasforme al estudiante y a su realidad. De ahí la necesidad de dar un carácter situado al conocimiento. De tal manera que así como importa en qué época se creó tal conocimiento, también importa si los estudiantes son de la ciudad, de la sierra o de la costa. Para comprender lo anterior, es necesario investigar el papel que juega lo institucional en las prácticas docentes.

Para la aproximación socioepistemología, el rediseño del discurso matemático escolar consiste en pasar de los objetos a las prácticas sociales, del desarrollo de habilidades al desarrollo de los usos y las resignificaciones (ajuste del conocimiento para ser interpretado en la vida cotidiana), de un lenguaje de objetos a un lenguaje de herramientas, de secuencias lógicas universales a secuencias sustentadas en las necesidades humanas. Para lo cual conviene utilizar recursos como categorías implícitas en la actividad humana, como la predicción, la comparación, la modelación y la graficación, e incorporarlas en su proceso institucional en el modelo de conocimiento. En ese sentido lo institucional es aquello que hace que la graficación se desarrolle y se acepte como producto material social continuo, es decir, que se tenga que enseñar y aprender en el sistema educativo.

2.4 El uso de las gráficas, el debate dialéctico entre funcionamientos y formas

Cordero dice al respecto:

> "El sistema educativo debe ayudar a hacer tal saber útil (no utilitario). Para ello, toda relación didáctica debe ser entendida como una construcción del conocimiento en la organización del grupo humano, normado por lo institucional y lo cultural. Es así como se deberá enfocar la problemática en el uso del conocimiento matemático en las situaciones en cuestión, para entender cómo debate, tal conocimiento matemático, entre su función y su forma acorde con lo que organizan los participantes. A tal aspecto hemos convenido en llamarle resignificación. Entonces debemos ir creando marcos de referencia, en el sistema educativo, que ayuden a resignificar el conocimiento matemático" (Cordero, 2006, p. 5)

Así, el uso de las gráficas conlleva funciones y formas específicas de acuerdo a lo organizan los participantes en la situación, determinando momentos en el desarrollo del uso de las gráficas. Al darse otro funcionamiento cambia la forma, es decir, la clase de tareas, y ocurre un debate dialéctico entre funcionamientos y formas.

Dentro de la perspectiva socioepistemológica, el uso determina la construcción del objeto, por lo que es imprescindible estudiar el uso del conocimiento matemático en el discurso matemático escolar. Los libros de texto juegan un papel muy importante, pues tienen gran influencia en las acciones de enseñanza y aprendizaje. Los libros que el docente utiliza para basar su práctica de enseñanza son un marco de referencia imprescindible para el estudio de los usos del conocimiento en el sistema didáctico. Por lo que el programa socioepistemológico considera indispensable estudiar el uso del conocimiento en los libros de texto.

El "uso de la gráfica", en la visión socioepistemológica, es un concepto teórico que funciona como un marco de referencia que posibilita la construcción funcional del conocimiento matemático generado en la situación específica.

El uso de las gráficas puede jugar un papel central en la construcción de conocimiento matemático en el sistema educativo, al articular las categorías de resignificación y justificación funcional.

> "a) La resignificación. Esta categoría muestra la función de la práctica social y el desarrollo del uso del conocimiento en situaciones específicas, y ;
>
> b) La justificación funcional. Esta categoría se refiere a que los mecanismos de desarrollo del uso del conocimiento en la situación específica son funcionales en contra parte de una justificación razonada, es decir, lo que norma la justificación no es una proposición lógica sino aquello que le es de utilidad a lo humano." (Cordero y Flores, 2007, p. 10).

2.5 El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar de Educación Básica

Como parte del programa socioepistemológico de investigación, Cordero y Flores (2007) estudiaron el uso de las gráficas en los libros de texto del nivel básico (primaria y secundaria). Dichos investigadores encontraron que en la educación primaria las gráficas de las funciones no aparecen explícitamente en el curriculum, pero se hace uso de ellas en ciertos tratamientos temáticos. Por ejemplo, en los tres primeros grados se presentan pictogramas que sirven como ilustraciones para el planteamiento y resolución de problemas, para lo cual se requiere de la recolección, la organización y la interpretación de información contenida en registros. En cuarto grado se elaboran y analizan tablas de frecuencia y gráficas de barras. En los dos últimos años se introduce al estudiante al planteamiento y resolución de problemas que implican la elaboración de tablas y gráficas de variación proporcional y no proporcional, y se introducen los ejes de coordenadas para la ubicación de elementos.

Asimismo, los autores mencionados hallaron que en el primer año de la educación secundaria, dentro del eje Presentación y tratamiento de la información se plantea la elaboración de tablas y gráficas y la exploración de cantidades que varían de forma proporcional, con base en ciertas situaciones de la geometría, de la física o de datos recolectados por los alumnos. En el segundo grado, en el tema de álgebra, se trata la localización de puntos en el plano cartesiano y la ubicación de los puntos que cumplen determinadas condiciones. En el mismo grado se abordan las ecuaciones de primero y de segundo grado, así como las gráficas de frecuencias absolutas y relativas, de barras y de sectores. En este contexto se introduce la noción de función como una relación entre dos cantidades por medio de tablas, gráficas y fórmulas (funciones del tipo $y = mx$, $y = mx + b$). En el tercer año, en el tema de álgebra, las gráficas son consideradas como los puntos que satisfacen sistemas de ecuaciones y desigualdades lineales, y se hace el estudio del comportamiento local de funciones de la forma: $y = 1/x$, $y = x^2 + a$, $y = (x-a)^2$, y de familias de gráficas de la forma $y = mx + a$. En el eje de Presentación y tratamiento de la información se estudian fenómenos que varían a tasa constante.

Cordero y Flores identificaron y caracterizaron tres momentos en el desarrollo del uso de las gráficas en la Educación Básica, con base en el análisis del funcionamiento y las formas de las gráficas encontradas. El momento del síntoma del uso de la gráfica de la función, el momento del uso de la gráfica de la función y el momento del uso de la curva.

Dichas denominaciones siguen a Youschkevitech (1976), quien denomina como “síntoma del concepto de función” a todo momento anterior al nacimiento del concepto de función en el siglo XVI, cuando “los grupos humanos enfocaron su atención al movimiento, y por ende a las cantidades de variación continua”, (Cordero y Flores, 2007, p. 15).

1.- El momento del uso del síntoma de la gráfica de la función

Sucede durante toda la educación primaria.

Funcionamientos: Ubicación, comparación y “optimización” de trayectorias. Reproducción de figuras. Conteo y cardinalidad (el privilegio del primer cuadrante).

Formas: Mapas, ilustraciones, planos, cuadrículas, diversidad de retículas. Tablas de barras.

2.- El momento del uso de la gráfica de la función

Se ubica hacia el tercer grado de la educación primaria, cuando aparece la palabra “grafica” en el currículo, sin hacer alusión al concepto de función. En la educación secundaria es declarado curricularmente el concepto de función y su gráfica.

Funcionamientos: Establecimiento de coordenadas de puntos en el plano cartesiano. Análisis de distribución de puntos, análisis de información.

Formas: Tablas, pictogramas, gráficas de barras, gráficas poligonales y de sectores. Escalas en los ejes de referencia, puntos en el plano con ejes cartesianos, curvas contiguas.

Estos dos primeros momentos ofrecen usos de las gráficas, cuyas formas norman los funcionamientos de las gráficas según la clase de tareas que propone el libro de texto. “Estos funcionamientos debaten con formas preestablecidas como la presencia o ausencia de retículas, de los ejes cartesianos y las escalas.” (Cordero y Flores, 2007, p. 17).

3.- El momento del uso de la curva

Definido el concepto de función aparece este tercer momento de las gráficas en la educación básica. Ocurre al considerarse el comportamiento de cantidades discretas, el comportamiento geométrico (transformación de funciones) y el comportamiento de cantidades continuas. En cada caso Cordero y Flores indican la estrategia o categoría que juega el papel de hilo conductor del uso de las gráficas.

- Comportamiento de cantidades discretas

  Estrategias: comparación de estados y estimación

  Funcionamientos: búsqueda de un patrón para explicar la variación de la información proveniente de censos y registros vaciados en tablas y gráficas. Propuesta de nuevos estados a corto plazo. Distribución de puntos. Análisis de la información.

  Formas: decrecimiento y crecimiento, el valor máximo, mínimo y medio. Datos y registros.

- Comportamiento geométrico (transformación de funciones)

  Estrategia: graficación

  Funcionamientos: obtención de nuevas funciones a partir de una ya conocida, mediante traslación, estiramiento o reflexión de las gráficas correspondientes. Ubicación y desplazamiento de puntos y de móviles, a partir de coordenadas y la asociación curva-expresión algebraica.

  Formas: introducción de un parámetro a la expresión algebraica de la función dada. Tablas y fórmulas asociadas a las curvas obtenidas. Ejes de referencia, escalas.

- Comportamiento de cantidades continuas

  Estrategia: predicción

  Funcionamientos: búsqueda de patrones que cumplen la variación. Distribución de puntos de acuerdo a la variación de los datos.

  Formas: tablas y gráficas que resultan de la interpretación de funciones y fenómenos continuos.

A continuación una tabla que aporta los elementos gráficos en esta revisión.

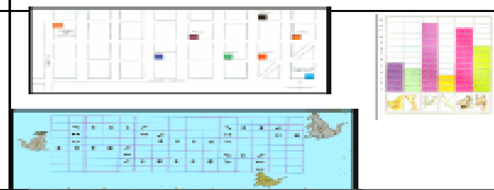
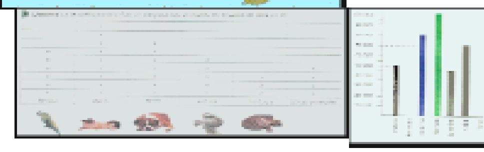
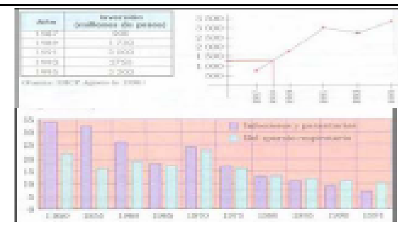
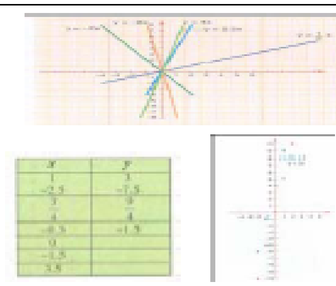
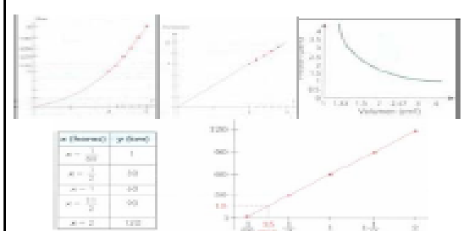
Usos	Funcionamiento	Forma	Gráficas
Momento del Síntoma de la gráfica de una función	Ubicar, comparar y trazar trayectorias, reproducción de figuras, conteo y cardinalidad	Mapas, ilustraciones, planos, cuadrículas, retículas, barras	
Momento del Uso de la gráfica de una función	Establecer coordenadas, análisis de distribución de puntos	Tablas , pictogramas, gráficas de barras, gráficas poligonales, sectores con escalas de los ejes coordenados, gráficas con curvas contigũas	
	Comportamientos de cantidades discretas: análisis de información con datos cuantitativos y cualitativos así como la distribución de puntos de acuerdo a la variación de los datos y registros	Gráficas con preferencia en el primer cuadrante con ejes de referencia y escalas con presencia o ausencia de cuadrículas, así como tablas, gráficas de barras, poligonales e histogramas	
	Comportamientos geométrico: ubicación y desplazamiento de puntos y móviles a partir de coordenadas y la asociación curva-expresión algebraica en la cual se plasman gráficas con curvas que se asocian con una expresión algebraica	Planos cartesianos con uno o los cuatro cuadrantes, con escalas en los ejes de referencia, con ausencia o presencia de cuadriculas, así como tablas y fórmulas asociadas a las curvas contigüas que se obtiene de esas tablas	
Momento del Uso de una curva (propio de la educación secundaria)	*Comportamientos de cantidades continuas*: distribución de puntos de acuerdo a la variación de los datos y la asociación curva-expresión algebraica en la cual se plasman gráficas con curvas que se asocian con una expresión algebraica	Gráficas con preferencia en el primer cuadrante con ejes de referencia y escalas con presencia o ausencia de cuadrículas, así como tablas y fórmulas asociadas a las curvas	

Tabla 6. Usos de las gráficas en el nivel básico (tomada de Lara, 2007).

La caracterización de las categorías se basa en los siguientes aspectos: patrón de tareas, gráficas de la tarea alusiva, ubicación de la tarea y descripción de la tarea, y que "la alternancia de las tareas resignifican los usos de las gráficas hasta desarrollar explícitamente el uso de las gráficas cartesianas." (Cordero y Flores, 2007, p. 34).

Cabe mencionar la ruptura identificada en Borrello (2010), entre los libros de texto de la primaria y de la secundaria. En la secundaria se abandonan las prácticas de comparar, relacionar, ordenar (actividades de naturaleza concreta), pasando a una enseñanza centrada en los procedimientos, lo que en el bachillerato se acentúa. A continuación algunos ejemplos:

Primer grado.- “Que los alumnos **comparen** diferentes colecciones y determinen cuál es mayor o menor que otra.” “**Medir** y **comparar** capacidades utilizando unidades de medida arbitrarias.”

Segundo grado.- “**Clasificar**, **ordenar** y **describir** colecciones.”

Tercer grado.- “**Comparar** tiempos. Leer el reloj.”

En este momento, los investigadores mencionados marcan un primer alejamiento, un primer nivel de abstracción, al entrar en juego los procedimientos.

Cuarto grado.- “**Comparar** fracciones en casos sencillos**. Identificar** fracciones equivalentes.”

Quinto grado.- **Ubicar** fracciones propias e impropias en la recta numérica a partir de distinta información.

Sexto grado.- **Comparar**, **ordenar** y encuadrar números decimales

Al pasar a la educación secundaria, el discurso se desplaza definitivamente hacia lo procedimental (p. 87). Desaparecen las prácticas de referencia, ya no se habla de comparar ni ordenar, sino de representar y resolver.

Primer grado.- “Representar números fraccionarios y decimales en la recta numérica a partir de distintas informaciones, analizando las convenciones de esta representación.”

Segundo grado.- “Resolver problemas de comparación de razones con base en la noción de equivalencia.”

Lo anterior indica la necesidad de mantener la relación del conocimiento con referentes concretos y la conveniencia del empleo de prácticas como comparar,

relacionar, ordenar, clasificar, identificar y ubicar, entre otras.

2.6 Los usos de las gráficas en el bachillerato

(Cen, 2006) identifica cinco usos de las gráficas en el nivel medio superior del IPN, a saber:

- Distribución de puntos.

  Forma: Tabulación. Tablas o registros con valores previamente establecidos en el plano cartesiano o polar. Ubicación de puntos.

  Funcionamiento: Identificación de patrones de distribución al unir los puntos ubicados en el plano, para establecer la curva correspondiente.

- Comportamiento geométrico

  Centra la atención en la interpretación geométrica del cambio en los parámetros de una función prototipo, con la finalidad de comprender las transformaciones de las funciones.

  Forma. Variación de los parámetros A, B, C, D en la expresión Af(Bx+C) +D

  Funcionamiento. Consiste en obtener nuevas funciones a partir de una f conocida, mediante la variación de parámetros, identificando comportamientos gráficos como la traslación, estiramientos o reflexiones de las curvas

- Análisis de la curva.

Centra la atención hacia la curva, en específico a su variación.

Funcionamiento. Análisis global de la curva. Determinación de intervalos donde la función es creciente o decreciente, ubicación de puntos máximos, mínimos o de inflexión, así como las concavidades de la curva.

Forma. Los criterios de la primera y segunda derivada.

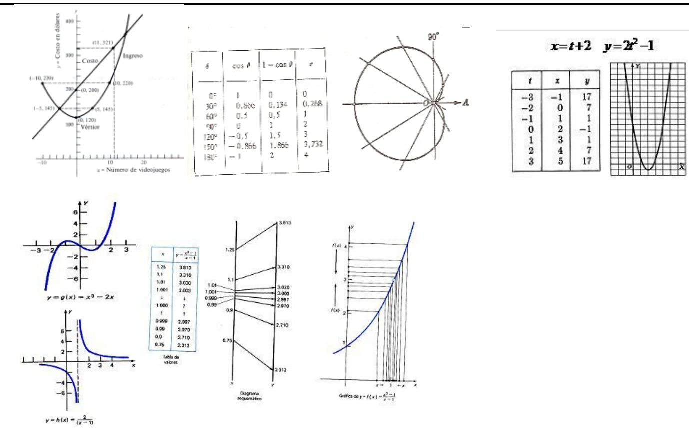
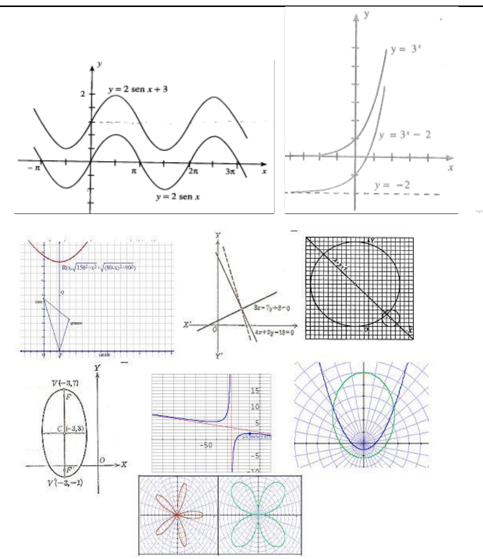
- Cálculo de áreas y volúmenes.

Funcionamiento. Obtención de áreas y volúmenes.
Forma. Ecuaciones y gráficas que determinan la región de interés.

- Análisis de la información.

Funcionamiento. Recopilación, organización, comparación e interpretación de datos e información.
Formas. Tablas, pictogramas, histogramas y gráficas de barras, poligonales y de sectores, áreas bajo la curva normal.

A continuación una tabla que ayuda a visualizar los usos identificados por Cen.

Uso de la gráfica	Funcionamiento	forma	Gráficas
Distribución de puntos	-Ubicación, desplazamiento, y Variación de puntos -Identificación de variaciones -Desplazamiento en el plano	Tabla de valores, Gráficas y Ecuaciones y Tabulación	
Comportamiento Geométrico	-Obtención de nuevas gráficas (dilatación y estiramiento) -Ubicación de puntos - Gráfica-expresión	Traslaciones verticales y horizontales, estiramiento y reflexión gráfica, identificación de ecuaciones, ubicación de puntos clave	

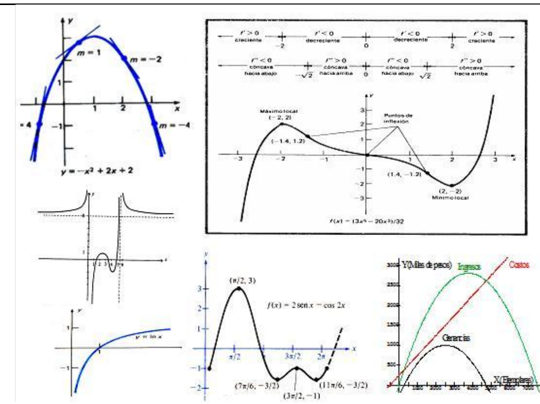
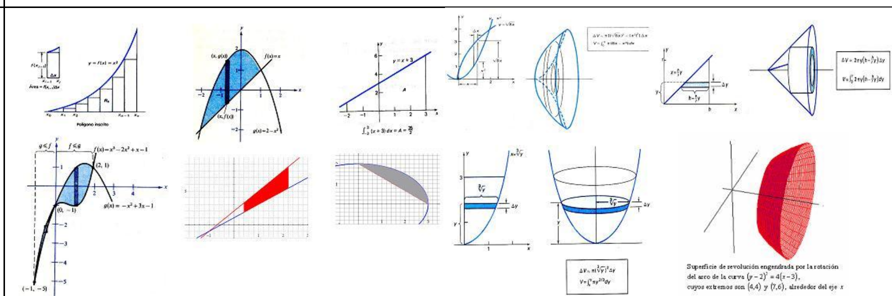
Análisis de la curva	Análisis de comportamientos	Tabla de variaciones y criterios de primeras y segundas derivadas	
Calculo de áreas y volúmenes	Definición de superficies para áreas y volúmenes	Integración	

Tabla 7. Funcionamientos y formas de los usos encontrados por (Cen, 2006). Tomada de (Briseño, 2008).

En el caso de los dos primeros escenarios sobre el uso de la recta y de la parábola, Briseño (2008) expone la tabla 8, donde describe como el uso se reorganiza al paso de distintas situaciones, al darse el debate dialéctico entre funcionamientos y formas de las gráficas, de acuerdo a la situación específica de que se trate.

	Distribución de puntos	Comportamiento geométrico	Análisis de la curva	Calculo de áreas y volúmenes
Recta	El *funcionamiento* es la ubicación de puntos para el trazado de la recta a través de la *forma* tabular, una vez que se reconoce cómo es la ecuación y la forma de la recta da paso al utilizar el siguiente uso.	El *funcionamiento* es la asociación gráfica-expresión algebraica, y las *formas* es a través de transformación de funciones (traslación horizontal y vertical, estiramiento y reflexión) en donde el estudiante de alguna manera puede inferir la posición de la recta	De la expresión con la variable dependiente despejada, se identifica el coeficiente del término en x, como la pendiente de la recta y su signo determina si es creciente o decreciente.	El *funcionamiento* de la gráfica esta en definir la superficie del área a calcular o bien definir la superficie del área a rotar para el cálculo del volumen, las *formas* de tales funcionamientos son la integración
Parábola	La *forma* es conocer la parábola a través de una tabla de valores previamente establecido y la ubicación de puntos en el plano cartesiano donde el *funcionamiento* es unir los puntos contiguos para el bosquejo de la curva en cuestión , esto da lugar al siguiente uso	El *funcionamiento* es la asociación gráfica-expresión algebraica, reconocer elementos que intervienen (vértice, foco y directriz) con *formas* tales como las transformaciones (traslados horizontales y verticales, la contracción o estiramiento), aquí el estudiante puede conocer las posiciones y elementos que tiene una parábola, así como su representación en el plano cartesiano, es decir conoce a la parábola, sin embargo puede conocer más de la curva parábola, entonces se presenta el uso de la siguiente columna.	El *funcionamiento* es identificar los intervalos en donde la función es creciente, decreciente, sus concavidades, si presenta máximos o mínimos a través de *formas* como los criterios de la primera y segunda derivada, concluyendo con el siguiente uso.	El *funcionamiento* de la gráfica es la definición de la superficie del área o bien la superficie a rotar para el cálculo del área y del volumen respectivamente, la *forma* de tal funcionamiento es a través de la integración

Tabla 8. Desarrollo de los diferentes usos de las gráficas al paso del nivel bachillerato. Tomada de (Briseño, 2008)

2.7 Los elementos de construcción de conocimiento en la Situación de Transformación y en el Diseño de situación Modelación - Graficación

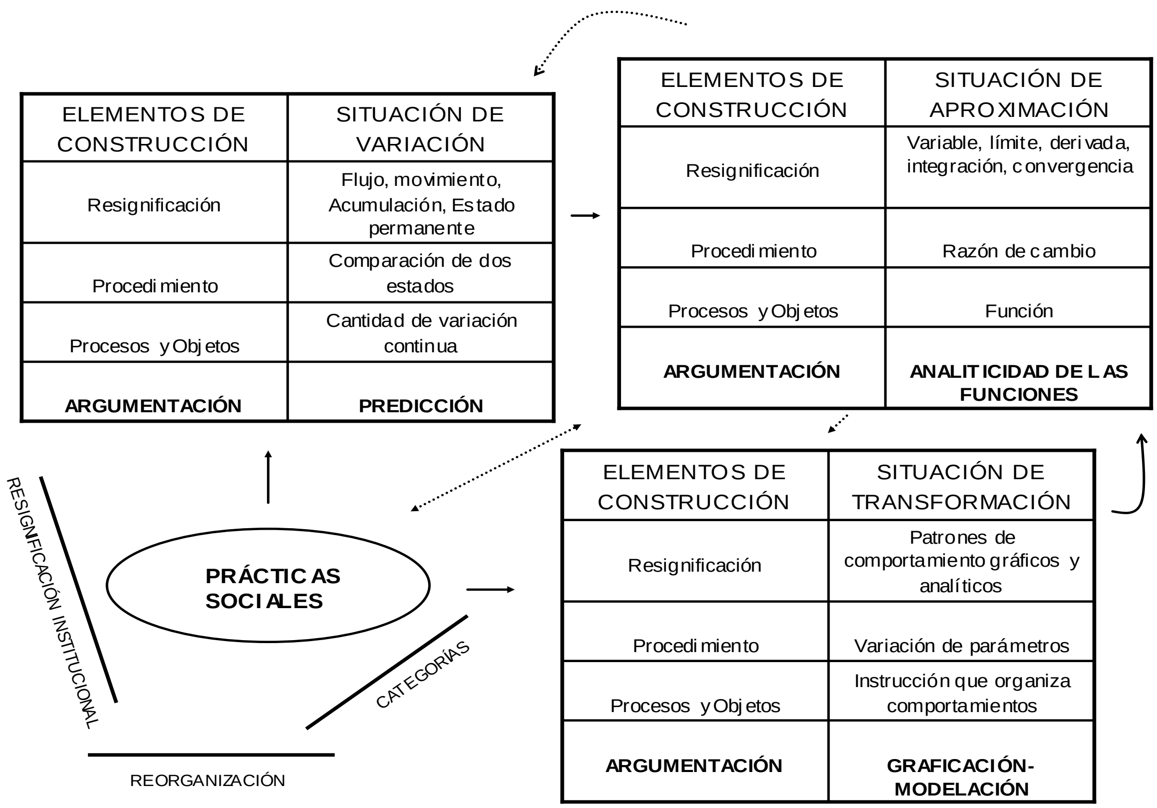


Tabla 9. Los elementos de construcción en la Situación de Transformación. (Cordero, 2001)

Los diseños de la Situación de Trasformación de funciones están compuestos de argumentos de graficación (comportamiento tendencial) que generan resignificados del comportamiento gráfico estableciendo procedimientos cada vez más complejos de los parámetros de las transformaciones (traslaciones, rotaciones, etc.).

Dentro del marco socioepistemológico, modelar es una práctica social que consiste en utilizar tablas, gráficas, ecuaciones, etc., para determinar comportamientos de lo modelado (Arrieta, 2003). En ese sentido es que las tablas, gráficas, ecuaciones, etc., se convierten en herramientas para reconstruir significados dentro de marcos de referencia.

Suárez (2008) hace un diseño de situación basado en la práctica social de Modelación – Graficación:

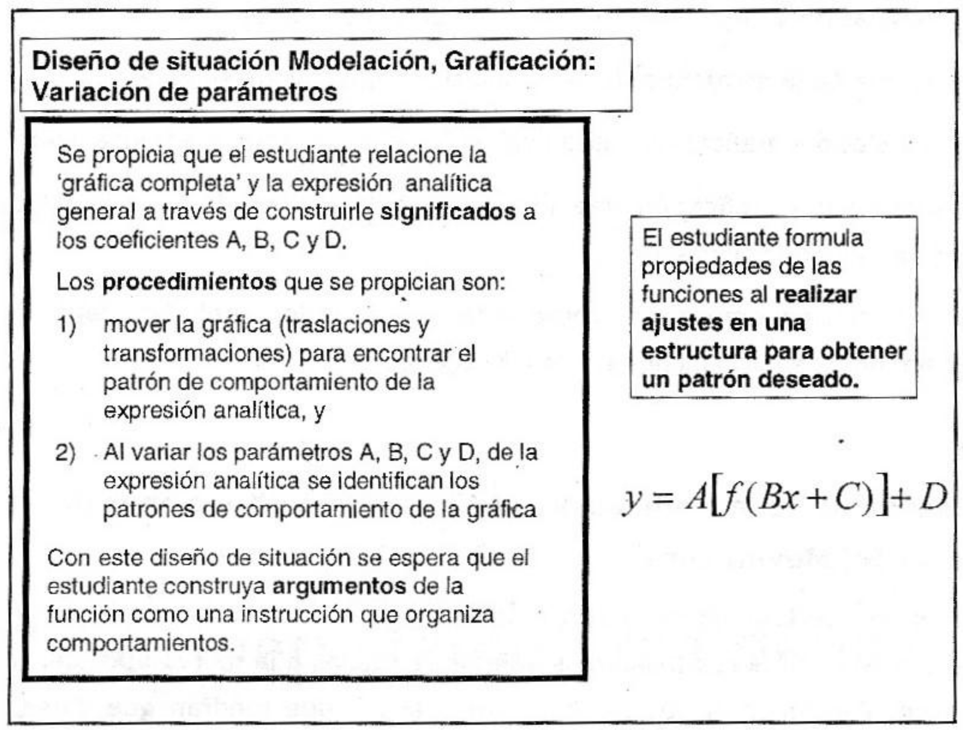


Ilustración 14. Elementos de un diseño de situación con realización de ajustes en una estructura para obtener un patrón deseado.

Tabla 10. Tomado de Suárez (2008, p. 61).

Capítulo 3

El diseño El taller de Arquímedes

3.1 La socioepistemología del diseño El Taller de Arquímedes

Este diseño toma como marco de referencia los usos de las gráficas identificados por Cen (2006). El objetivo de las actividades es que los participantes construyan conocimiento funcional al desarrollar tales usos en una situación de modelación-graficación.

La construcción del conocimiento en las actividades del taller de Arquímedes no inicia con la definición de la elipse como objeto matemático, a partir del concepto de foco (elemento menos concreto que el largo y el ancho). Sino más bien parte de la necesidad humana de modelar un tipo de movimiento que ocurre de manera cotidiana, al resbalarse un objeto recargado en una pared o al moverse una puerta con extremos fijos a dos rieles. Para trabajar su modelación fue necesario un dispositivo que permitiera a los participantes modificar sus dimensiones y hacer simulaciones, y en ese proceso construir conocimiento respecto a la relación entre los comportamientos de la elipse, las dimensiones del artefacto y los valores de los parámetros. Es decir, identificar comportamientos tendenciales relacionados con la variación de parámetros, pertenecientes al uso comportamiento geométrico. El dispositivo brindó una construcción concreta y medible, que fue punto de partida para actividades donde los argumentos son las prácticas sociales de medir, comparar, relacionar y predecir, en situaciones específicas.

Dicho artefacto traza el recorrido de un punto fijo en la recta sobre la hipotenusa de un triángulo, al variar éste la longitud de sus catetos. Si el punto fijo no está sobre la hipotenusa, se tiene la versión interna del dispositivo. Si el punto fijo está sobre la hipotenusa, se tiene la versión externa del dispositivo conocido como trammel of Archimedes (Apostol y Mnatsakanian, 2009). Tal dispositivo, en su versión interna, es conocido como *do nothing machine*, y es usado comúnmente como juguete.

El objetivo del diseño de situación es que los participantes logren realizar ajustes en el movimiento del artefacto para lograr obtener comportamientos gráficos, dentro de una epistemología donde los ejes didácticos son las prácticas sociales de la modelación-graficación y el uso de las gráficas.

3.2 Las actividades del diseño El Taller de Arquímedes

En cada una de las actividades, la situación de transformación conduce al ajuste de los parámetros en juego, de acuerdo a la tecnología empleada para modelar el movimiento propuesto. De manera que son las gráficas obtenidas, su comparación y su relación con el artefacto, lo que da pie a la construcción del conocimiento relativo a la elipse. La variación de los parámetros es la forma en que dentro de la situación de transformación, los participantes determinan comportamientos de las gráficas. La situación de transformación sirve como marco de referencia para la construcción de conocimiento. Las actividades ocurren en tres contextos tecnológicos: con un artefacto fijo que traza la elipse a lápiz; con un artefacto virtual donde la elipse es dibujada con el comando **traza** de un programa de geometría dinámica y, finalmente, con movimiento graficado de manera automática por un transductor conformado por un sensor de movimiento, una interfase llamada Lab pro y el programa Logger Pro 3.2.1.

Para la realización de la primera actividad se fabricaron una docena de tramoyas de Arquímedes en su versión externa, que producían diferentes curvas.

Para la implementación del dispositivo virtual se siguió una estrategia diferente a la sugerida por el libro del profesor en la actividad del gato intrépido, mencionada en el capítulo 1. Ésta se basó en la construcción de una circunferencia, al variarse el ángulo de un segmento con longitud *a + b,* plantado en el origen. Y la consideración de la otra diagonal del paralelogramo formado por las proyecciones de cada uno de los puntos en dicha circunferencia. La recta que contiene esta diagonal sirvió como el brazo del dispositivo.

Para la tercera actividad, inicialmente se pensó en colocar el sensor en el punto fijo en el brazo de una tramoya de Arquímedes, la cual tuviera las dimensiones adecuadas para que el sensor pudiera detectar su movimiento. Para lo cual se buscaron mecanismos que permitieran el giro del sensor, para que éste siguiera midiendo la distancia a un eje de referencia. Para salvar tal contratiempo técnico, se prefirió construir un artefacto con brazos simétricos, que sostiene a la misma altura una tira de material liviano. Al accionarse la tramoya, dicha tira cambia su distancia a un sensor fijo en el otro eje de referencia, obteniéndose así una columna de datos acerca del comportamiento de una de las componentes cartesianas del punto fijo sobre el brazo de la tramoya.

3.3 Actividad 1 La tramoya de Arquímedes con cartulina y tijeras

Materiales

- Versión fija de la tramoya de Arquímedes.
- Un cuarto de cartulina (25 x 31 cm. aprox.)
- Regla graduada
- Tijeras
- Una tira de cartón (60 x 10 cm. Aprox.)
- Masking tape
- 1 canica

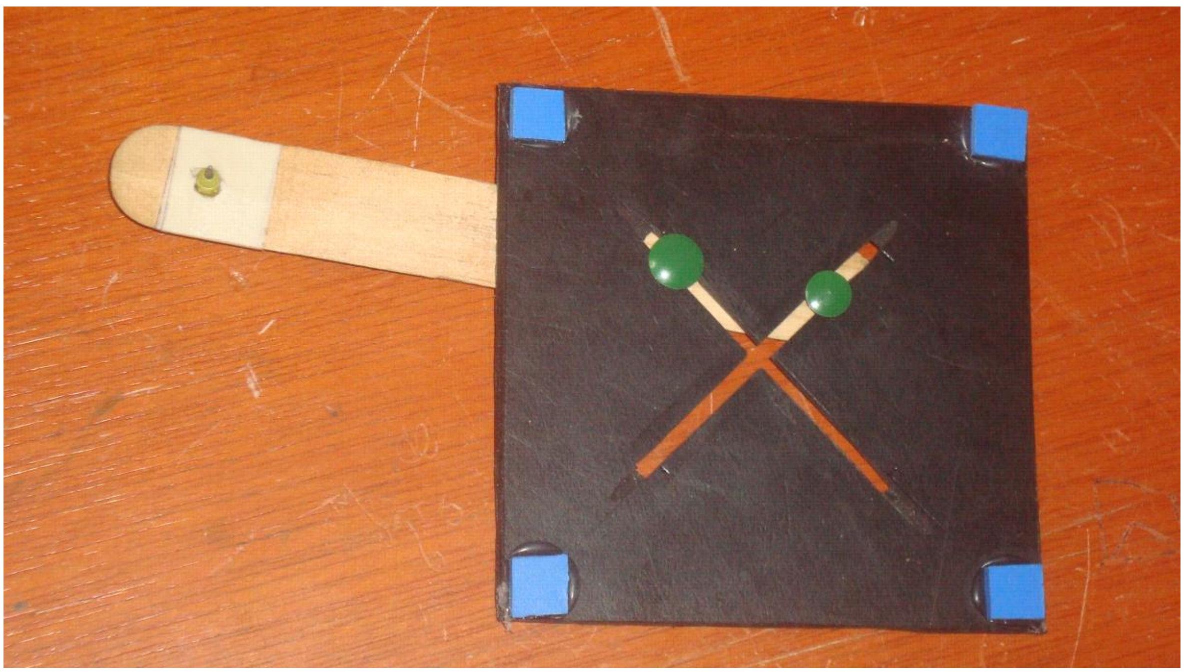


Tabla 11. La tramoya de Arquímedes empleada en la Actividad 1.

Procedimiento

Con la base del dispositivo fija sobre el centro de la cartulina, desliza su brazo, de manera que cada una de las tachuelas insertadas en los ejes de la base se deslice sobre uno de los rieles del dispositivo. Una vez trazada la figura recórtala por su contorno y dóblala sobre sí misma, empatando los contornos.

1.1 ¿Cómo caracterizarías numéricamente a la figura trazada?

Utiliza otro dispositivo y repite el inciso anterior.

1.2 ¿Qué diferencia en los dispositivos causa que las figuras sean distintas? ¿Cómo se relacionan las medidas de ambos trazos y las medidas de los dispositivos?

1.3 ¿Cómo cambiarías el dispositivo para que el largo de la figura fuera el doble de su ancho?

1.4 El largo y el ancho de una figura trazada con un dispositivo miden 30 y 20 cm respectivamente, ¿qué dimensiones tenía el dispositivo que la trazó?

1.5 ¿Cómo describirías la figura que el dispositivo trazaría si el brazo se alargara indefinidamente (y con él la punta trazadora)?

1.6 ¿Cómo se comportaría la figura trazada si la punta trazadora del dispositivo cambiara su posición a lo largo del brazo (escoge por lo menos 5 lugares distintos para colocarla).

1.7 ¿En qué parte del brazo debería colocarse la punta trazadora para que la figura trazada sea un círculo?

1.8 Con el masking tape pega de manera vertical la tira de cartón al contorno de la curva, de manera que forme una valla sobre la curva. Coloca la canica en una posición sobre el largo de la curva y lánzala contra la valla. Después de los rebotes, ¿regresó la canica al punto de partida? Prueba para varias ubicaciones. ¿Existe alguna posición para la cual sí regrese la canica después de los rebotes?

____

____

____

3.4 Actividad 2. La tramoya de Arquímedes virtual en Geogebra

Material

Tramoya de Arquímedes virtual implementada en Geogebra.

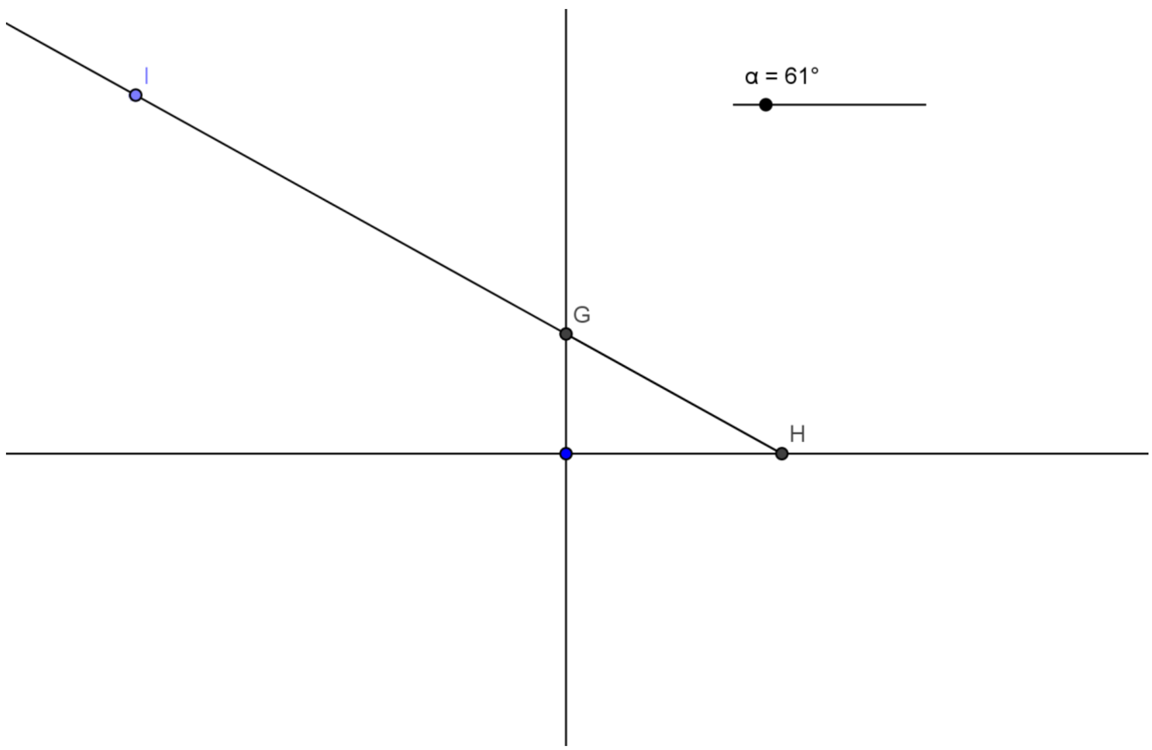


Tabla 12. Ventana gráfica de artefacto virtual.ggb

Procedimiento

Crea los puntos que consideraste en la actividad anterior sobre el brazo del dispositivo, mediante el botón crear punto, y activando para cada uno la opción *Traza*, mediante el botón derecho del Mouse sobre cada uno de ellos. Acciona el dispositivo variando la posición del deslizador en el segmento que determina el valor del ángulo alfa. Usa el zoom para alejarte o aproximarte y colocar la punta trazadora en los puntos que elegiste al final de la actividad anterior.

2.1 ¿Fueron ciertas tus predicciones acerca del comportamiento de las figuras trazadas con los puntos que consideraste?

____

____

____

____

2.2 ¿Cómo describirías las curvas que aparecen cuando la punta trazadora recorre el brazo del dispositivo y éste es accionado?

____

____

____

3.5 Actividad 3. La modelación del movimiento de la tramoya de Arquímedes con gráficas generadas por un dispositivo transductor

Materiales

- Tramoya de Arquímedes externa (Rieles en cruz, cuatro brazos conectados entre sí).
- Un sensor de movimiento.
- Controlador de dispositivos Lab Pro.
- Computadora con Logger Pro.
- Dos varillas.
- Tira de madera de 90 cm x 15 cm.

Tabla 13. La tramoya de Arquímedes externa utilizada en la actividad 3.

Tabla 14. La interfase Lab pro y el sensor de movimiento.

Procedimiento

Una vez conectado el sensor de movimiento a la interfase y ésta a la computadora, abre el programa Logger Pro para la captura de datos de movimiento.

Coloca el sensor en un punto elevado de manera que apunte hacia la tramoya de Arquímedes. Inserta sobre los rieles el mecanismo con los cuatro brazos conectados. Encaja varillas en los hoyos marcados con el número 2, a la mitad de los dos brazos más cercanos al sensor. Ubica la tira sobre las varillas. Presiona el botón *Adquirir* en la pantalla del programa Logger Pro, y acciona el dispositivo apuntando al sensor.

3.1 ¿Cómo es la gráfica que produce el movimiento medido por el sensor?

Utiliza la opción *ajuste de curvas* del encabezado *Análisis* del menú del Logger Pro 3, seleccionando *ajuste automático.*

3.2 ¿Cuál es la función que mejor se ajusta? Anota los parámetros empleados en el ajuste.

3.3 Encaja las varillas en los hoyos marcados con el número 4, ubicados a la cuarta parte de los brazos que sostienen las varillas, y repite la toma de datos. ¿Cómo se modifica la gráfica? ¿Cómo se modifican los parámetros del ajuste de curvas realizado por el programa?

3.4 Encaja las varillas en los hoyos marcados con el número 8, ubicado a la octava parte de los brazos que sostienen las varillas, y repite la toma de datos. ¿Cómo se modifica las gráfica? ¿Cómo se modifican los parámetros del ajuste de curvas realizado por el programa?

3.5 ¿Cómo se relacionan los cambios en las gráficas y las diferentes alturas de las varillas en el dispositivo?

3.6 En la gráfica, establece en el eje horizontal la misma función de ajuste pero con el argumento de la función seno aumentado en $\Pi/2$, ¿qué figura se grafica? ¿y si se aumenta sólo $\Pi/3$?

3.7 Divide entre 2 el parámetro de frecuencia de la función de ajuste, establecida en el eje horizontal, en el inciso anterior. ¿Qué figura se obtiene? ¿Y si se divide entre 3?

3.6 Análisis a priori de las actividades

En la Actividad 1, con la versión interna de la tramoya de Arquímedes, la tarea es trazar una elipse completa, al accionar el dispositivo sobre cartulina, recortarla y doblarla. Se espera que tales acciones induzcan a los participantes a caracterizar numéricamente la elipse mediante su largo y su ancho. Por otro lado, se espera que los participantes centren el análisis del dispositivo en las distancias entre la punta trazadora y las tachuelas. Relacionando ambas caracterizaciones se espera que logren ajustar el dispositivo para obtener una curva con largo y ancho predeterminados. Y que dada una curva concreta, determinen las dimensiones del dispositivo que la pudo haber trazado. Cabe esperar que determinen nombres para referirse a las partes del dispositivo.

Las preguntas de 1.5 hasta 1.7, están encaminadas a que los participantes se imaginen cambios en el dispositivo e identifiquen comportamientos de la curva. Lo que podrán hacer efectivamente con el elipsógrafo virtual de la Actividad 2. En el cierre de la Actividad 1, la última pregunta tiene la intención de que los participantes descubran la existencia de los focos.

Una versión más grande, con la posibilidad de cambiar las dimensiones de *a* y *b*, es comúnmente empleada por carpinteros para fabricar mesas elípticas.

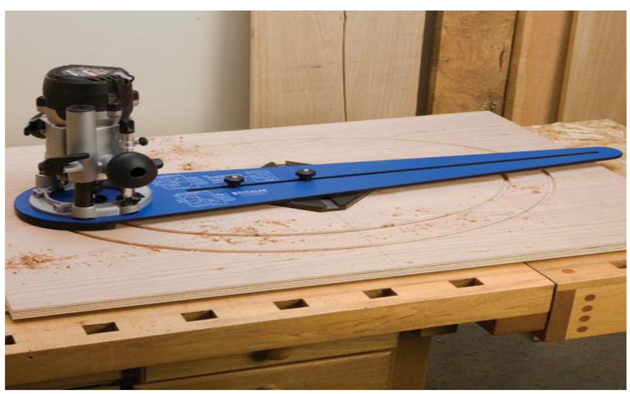


Tabla 15. La tramoya de Arquímedes para carpinteros. www.rockler.com.

Cabe hacer notar que el dispositivo trazador de la Actividad 1 está sujeto a la precisión que puede lograrse con los lápices y el cartón con que se efectúa el trazo. De tal manera que la variación de parámetros queda reducida a la diferencia en los parámetros *a* y *b*, producto de la construcción artesanal de los dispositivos que produjo pequeñas diferencias entre ellos que se reflejaron en las curvas trazadas.

En la Actividad 2, con la versión interna de la tramoya de Arquímedes, la tarea es accionar el dispositivo virtual para trazar las elipses que surgen al considerar los cinco puntos elegidos para ubicar la punta trazadora de la Actividad 1. Se espera que tales acciones induzcan a los participantes a identificar comportamientos tendenciales a medida que la punta trazadora recorre todo el brazo del dispositivo. Considerando el comportamiento de la gráfica cuando los puntos trazadores se acercan o se alejan de los puntos G y H, y cuando toman posiciones entre ellos.

En la Actividad 3, para poder hacer las tomas de datos, se utiliza una tramoya de cuatro brazos de manera que el sensor perciba el vaivén de una tira de cartón recargada en dos varillas incrustadas a la misma altura en brazos simétricos. con la versión externa de la tramoya de Arquímedes, implementada con rieles de aluminio y brazos de madera, en los que se insertan varillas que sostienen una tira de manera, la tarea es accionar el dispositivo apuntado hacia un sensor de movimiento, para observar el comportamiento de las gráficas generadas en la pantalla del programa Logger Pro, al variarse la altura en la que se ubican las varillas sobre los brazos del dispositivo. Se espera que al accionarse la tramoya surjan en la pantalla de la computadora graficas sinusoidales, quizá afectadas por la rapidez variable con que se accione el dispositivo.

En esta actividad se plantea emplear el comando *ajuste de curvas* del menú *Análisis* del programa Logger Pro, para que se consideren más parámetros, al tomarse la transformación lineal del argumento de la función seno.

En 3.3 y 3.4 se cambian de posición las varillas. En 3.2 se espera que los participantes observen como la amplitud aumenta en un 50%. En 3.3 se espera que se observe que la amplitud decrezca a la mitad.

En la penúltima pregunta (3.6) se pide cambiar la componente horizontal t, por la función de ajuste propuesta, pero desfasada 90 grados, es decir $\Pi/2$ radianes. Con esto se pide a los participantes, de manera implícita, graficar la elipse como una figura de Lissajous. Surgiendo la elipse como el resultado de la graficación de dos movimientos armónicos simples con dirección perpendicular, con la misma frecuencia, desfasados $\Pi/2$. Utilizándose implícitamente que $sen(t + \Pi/2) = cos(t)$.

En la misma pregunta se pide cambiar la componente horizontal t, por la función de ajuste propuesta, pero desfasada 60 grados, es decir $\Pi/3$ radianes. Con lo que se espera se observe una elipse inclinada, es decir que al variar la diferencia de fase se obtengan elipses rotadas, con respecto a los ejes de coordenadas.

La última pregunta lleva a que se analice el caso de la pregunta anterior, contemplando lo que ocurre cuando las frecuencias no son iguales pero sí proporcionales, considerando los casos particulares en que una sea el doble o el triple de la otra. Se espera que grafiquen la lemniscata al considerarse que la relación entre las frecuencias sea 1 a 2. Las figuras de Lissajous son las gráficas del sistema de ecuaciones paramétricas correspondiente a la superposición de dos movimientos armónicos simples en direcciones perpendiculares:

$$x = A\sin(\omega_x t + \alpha), \quad y = B\sin(\omega_y t + \beta), \quad \delta = \alpha - \beta$$

Esta familia de curvas fue investigada en 1815 por Nathaniel Bowditch, y en 1857 por Jules Antoine Lissajous, por lo que reciben usualmente el nombre de alguno de ellos.

Por otro lado, pudiera ser que los participantes centren el análisis del dispositivo en las distancias entre la punta trazadora y los extremos del brazo, y que con elementos de semejanza de triángulos y trigonometría deduzcan las coordenadas de un punto fijo sobre el brazo de la tramoya, $(x, y) = (a\cos\alpha, b\operatorname{sen}\alpha)$, con α el ángulo de inclinación del brazo con respecto a la horizontal (ecuación paramétrica de la elipse). Y despejando $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$, y usando que la suma de los cuadrados de ambas componentes es siempre 1, obtengan la ecuación cartesiana de la elipse. Como se menciona en Contreras A., Contreras M. y García M. (2002).

Capítulo 4

La puesta en escena

4.1 Presentaciones del diseño El taller de Arquímedes

El taller se presentó como una actividad extracurricular, fuera del salón de clases. Se realizaron dos presentaciones. La primera fue en la cuarta edición de la feria científica Cinvesniños, los días 4 y 5 de julio de 2010. A dicho evento asistieron grupos de niños y adolescentes provenientes de diversas instituciones educativas, ávidos de participar en los talleres. En el taller de Arquímedes participaron veinte niños de primaria, once de secundaria, tres jóvenes de media superior y una pareja de estudiantes de nivel superior. Todos menores de 25 años.

La segunda presentación del taller de Arquímedes fue en la tercera semana de las ciencias, realizada del 25 al 29 de octubre del 2010, en la explanada del plantel Ignacio Manuel Altamirano del Instituto de Educación Media Superior, perteneciente al sistema de bachillerato de la Secretaría de Educación del Distrito Federal. En esta ocasión hubo doce participantes del primer año y dos del segundo año, de entre 15 y 18 años. En ambas presentaciones la participación fue voluntaria y entusiasta.

Las actividades fueron moderadas por un tallerista, quien apoyó a los participantes en el manejo del dispositivo, en la aclaración de dudas sobre las actividades, en la presentación de los consensos alcanzados, así como en las convenciones sobre los conocimientos construidos. Por ejemplo, al cierre de la Actividad 1:

> La curva que hemos trazado se llama elipse, su largo recibe el nombre de eje mayor, y su ancho el de eje menor. Los puntos de intersección de la curva y el largo se llaman vértices, y los puntos de intersección de la curva y el ancho se llaman pseudovértices. La distancia entre el centro y un vértice se identifica con el parámetro a, de manera que el largo de la elipse es $2a$. La distancia entre el centro y cualquier pseudovértice es b, de forma que el ancho de la elipse es $2b$.

Para empezar la realización de las actividades y motivar a los participantes, se utilizó la siguiente introducción:

Arquímedes, matemático de la antigüedad griega, fabricó armas y mecanismos de defensa para su ciudad, basados en su conocimiento de las propiedades matemáticas de algunas curvas. A él también se atribuye la invención del artefacto que utilizaremos para realizar la siguiente actividad.

4.2 Los resultados obtenidos en la puesta en escena

En la primera presentación

Sólo se realizó la Actividad 1, debido a la inclusión aleatoria de participantes, en su mayoría niños que ansiaban conocer todos los talleres. Una participante de 8 años llamada Lucía tuvo problemas para mantener fija la base, por lo que no logró trazar la figura completa, pero sí muchos trazos elípticos, lo que llamó mucho la atención de la participante. Los demás participantes lograron trazar la figura, a la que describieron como “de forma oval”. Con la regla graduada midieron su largo y su ancho, después de doblar dos veces sobre sí misma la elipse recortada por su contorno. De manera espontánea, al comparar sus curvas, los participantes descubrieron que no eran iguales; es decir, algunas eran más largas o más anchas.

A la pregunta sobre qué es lo que causa la diferencia entre las curvas, algunos participantes respondieron que eran las dimensiones del dispositivo las causantes de tales diferencias. Por lo que pareció natural que caracterizaran numéricamente al dispositivo, con respecto a lo que tenía que ver con el trazo de la curva. Es decir, descubrieron la importancia de la tachuela más alejada, la cual consideraron funcionaba como “centro” del círculo con radio la distancia entre la punta trazadora y la mencionada tachuela. Y la importancia de la tachuela más cercana a la punta trazadora, que les pareció funcionar como el “centro” del círculo con radio su distancia a la punta trazadora.

La mayoría de los participantes hallaron la relación entre las medidas del dispositivo y de la figura. Descubrieron que las distancias en el dispositivo son la mitad de las de la figura. Con dicha información conjeturaron cambios en el dispositivo para obtener una curva con ancho y largo predeterminados. También lograron hallar las dimensiones de una tramoya hipotética que hubiera trazado una curva con ancho y largo dados.

Cabe mencionar que sólo los participantes que pertenecían al nivel superior identificaron la curva como una elipse y escribieron su ecuación cartesiana para los valores a=11 y b=8. La determinación del valor de c y la existencia y ubicación de los focos sólo fue lograda al recordar la relación pitagórica de a, b y c.

La última pregunta de la actividad, de la que se esperaba la construcción de la idea de foco no funcionó, al resultar problemática su realización, debido a las reducidas dimensiones de la elipse trazada.

La segunda presentación

Actividad 1

Después de la introducción ya mencionada, a cada participante se dio un dispositivo y un cuarto de cartulina, y se le entregó por escrito la primera actividad.

Todos los participantes lograron trazar la curva completa. Pamela lo logró al segundo intento, pues en el primero, el largo de la elipse casi coincidió con el ancho de su cuarto de cartulina, por lo que la curva no cabía en la cartulina. Asimismo, todos los participantes caracterizaron la curva mediante su largo y su ancho. Hilda preguntó si había que medir la distancia del centro a la curva, o entre puntos en la curva. Su pregunta se debió al parecer a que acababa de identificar las medidas del centro a los vértices como la distancia entre la punta trazadora y la tachuela más alejada. La mayoría de los participantes logró identificar que el largo es el doble de la distancia de la punta trazadora a la tachuela más alejada.

Algunos estudiantes trazaron diversas figuras dentro de la elipse, empezando por hacer marcas en la curva, equidistantes o no. Buscaron simetrías trazando las rectas que bisectan los ángulos rectos formados por los ejes. Trazaron un rectángulo con las intersecciones de dichas rectas y la curva. A Eduardo le pareció una manera de aproximarse al área y al perímetro de la elipse, pero por deficiencia.

Estefan relacionó al círculo con el cuadrado, que también queda determinado por el tamaño de su lado, y la elipse con el rectángulo con el mismo ancho y largo. Con lo que obtuvieron aproximaciones al perímetro y el área de la elipse, ahora por exceso. Dimas partió de que la curva es cerrada, como un círculo achatado. Trajo a colación las fórmulas de perímetro y área del círculo y las intentó utilizar para calcular tales magnitudes de la elipse. Su argumentación fue que como el círculo puede ser caracterizado a partir de su radio, la elipse también puede ser caracterizada por sus “radios”, la mitad del largo y la mitad del ancho. De manera que el área de la elipse se obtiene utilizando la misma forma que para el círculo, considerando el producto de tales magnitudes, que en el caso del círculo son las mismas, y de ahí el cuadrado de la fórmula.

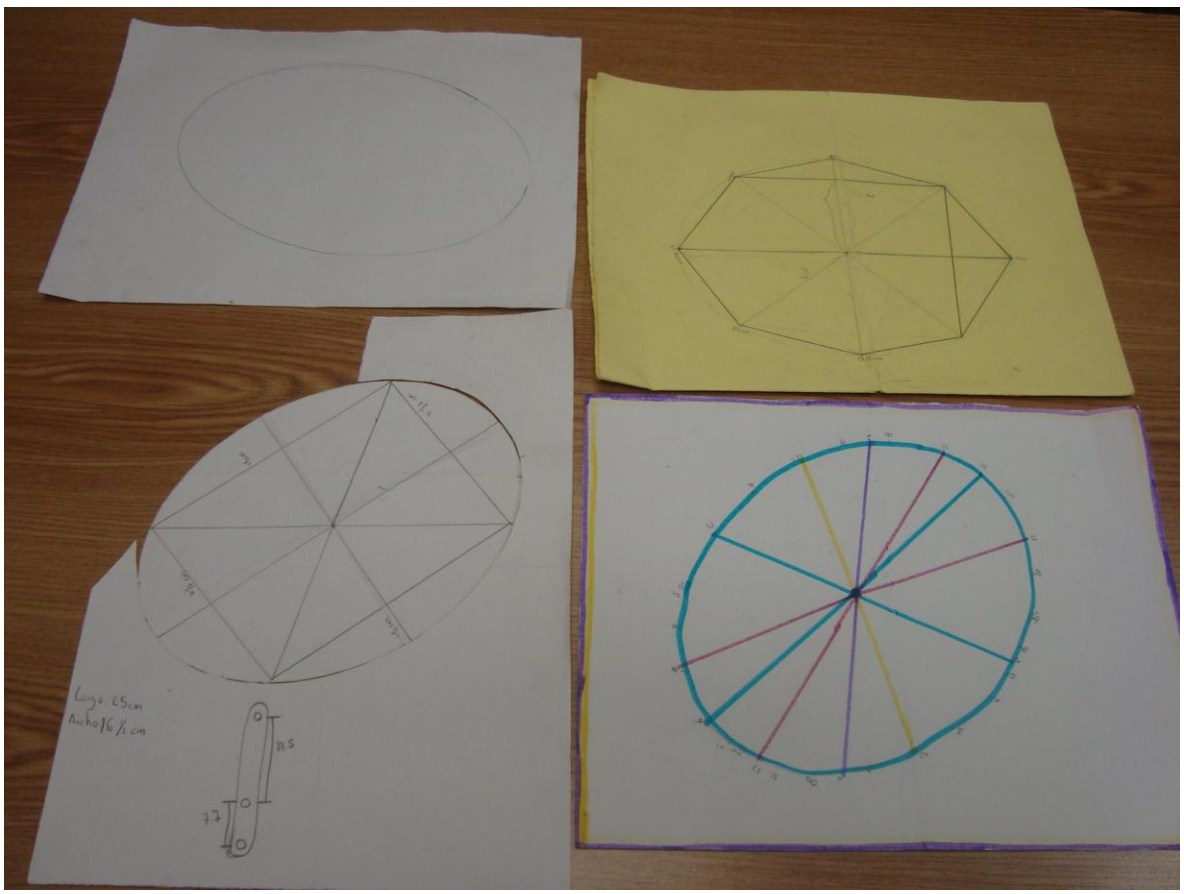


Tabla 16. Muestras de la Actividad 1, realizada en la segunda presentación.

Se pensó llevar a cabo la actividad 1.8, con un balón mojado, y tiros rasos a una valla en el contorno de una elipse, pero no se logró cerrar adecuadamente una tira de fibra de vidrio que iba a hacer las veces de la valla.

Actividad 2.

En esta actividad el escenario virtual modificó el carácter de las prácticas de modelación al cambiar el contexto de su ejercicio y con ello sus características particulares. El empleo de los menús y de las opciones que ofrece Geogebra abrió otro panorama para analizar el movimiento de la tramoya de Arquímedes. El artefacto virtual implementado en Geogebra permitió el análisis de la situación mediante la inserción de puntos sobre el brazo del artefacto, a los cuales se activó la opción traza en el recuadro referente a las propiedades de tales objetos.

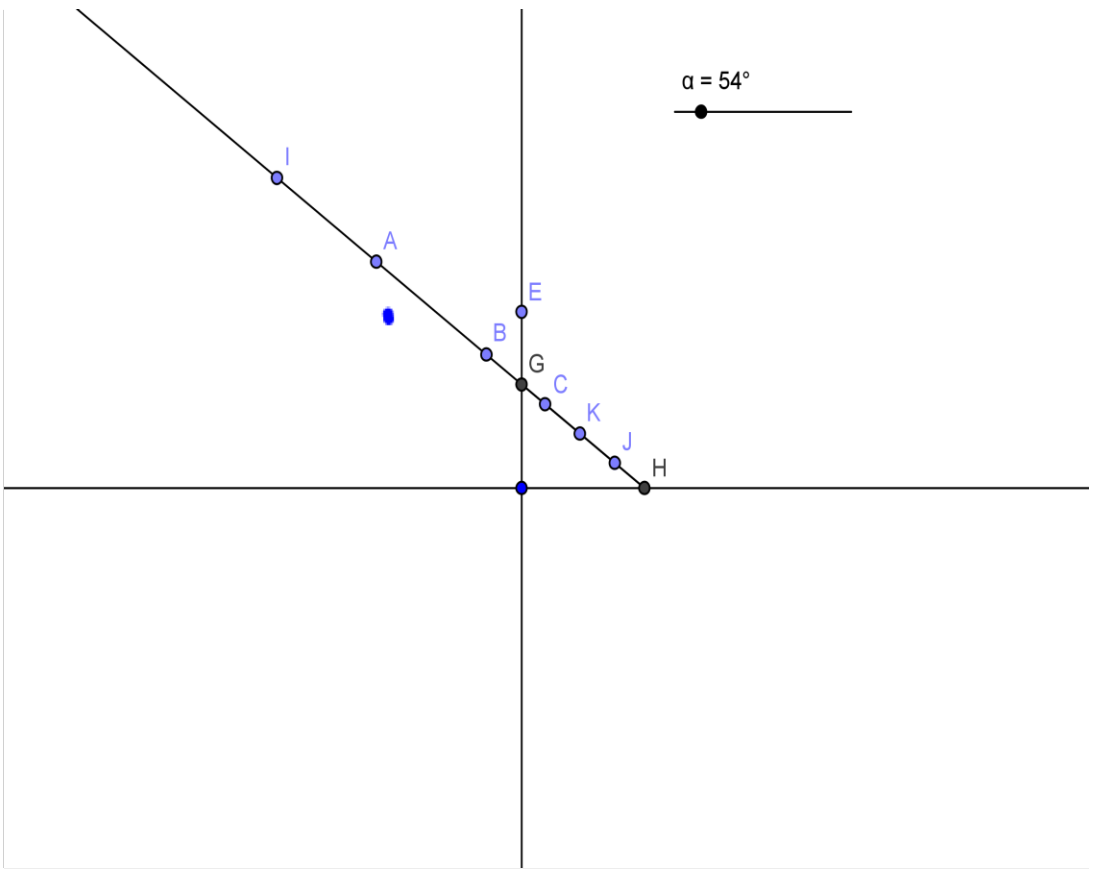


Tabla 17. El dispositivo virtual con los puntos trazadores tomados por Estefan.

Al accionarse la tramoya los puntos antes mencionados dejaron su traza, lo que facilitó a los participantes dar cuenta de los cambios en la relación de *a*, *b*, el ancho, el largo y la orientación de la elipse.

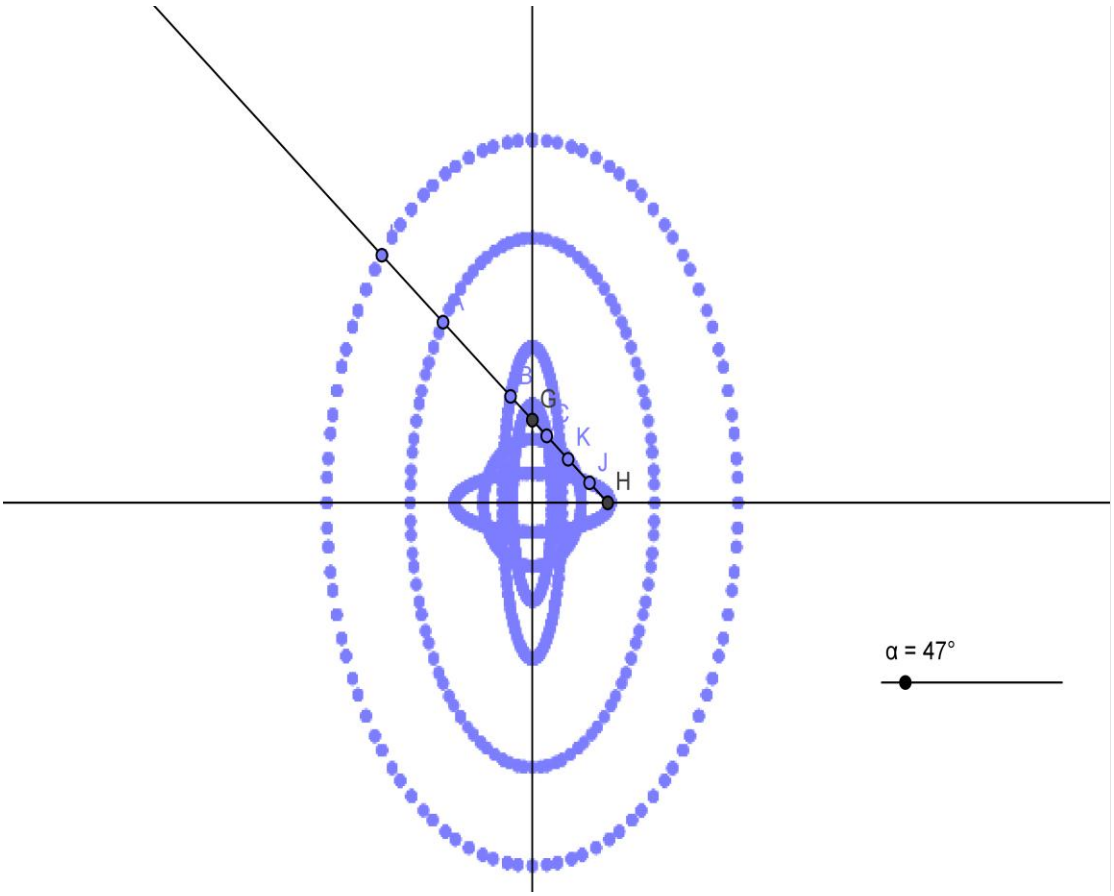


Tabla 18. Las trayectorias de los puntos escogidos por Esteban al accionarse el dispositivo virtual.

En esta actividad Estefan utilizó el comando zoom para alejarse y acercarse. En el caso de alejarse encontró que la curva era más circular a medida que se alejaba más. Es decir, que cuando a y b tienden a ser grandes, su diferencia tiende a cero.

Una participante había conjeturado que la curva trazada sería siempre ovalada, aunque al incrementarse la distancia entre la punta trazadora y la tachuela más alejada, el comportamiento de la curva tendió a ser cada vez más circular, al percibirse como “encimadas las dos tachuelas del dispositivo. Y que al considerarse la traza de puntos sobre los puntos fijos en los ejes ésta se comporta como una recta vertical, cuando está sobre el punto G, y como una recta horizontal, cuando está sobre el punto H.

José Manuel decidió seleccionar puntos sobre el brazo y además seleccionar un segmento y observar su traza (en segmentos). Lo que a su parecer proporciona una sensación de profundidad "como una valla levantada que se observara desde un punto alto". Se mencionó que en el caso de considerar la traza de todo el segmento entre los puntos G y H, ésta recibe el nombre de Astroide.

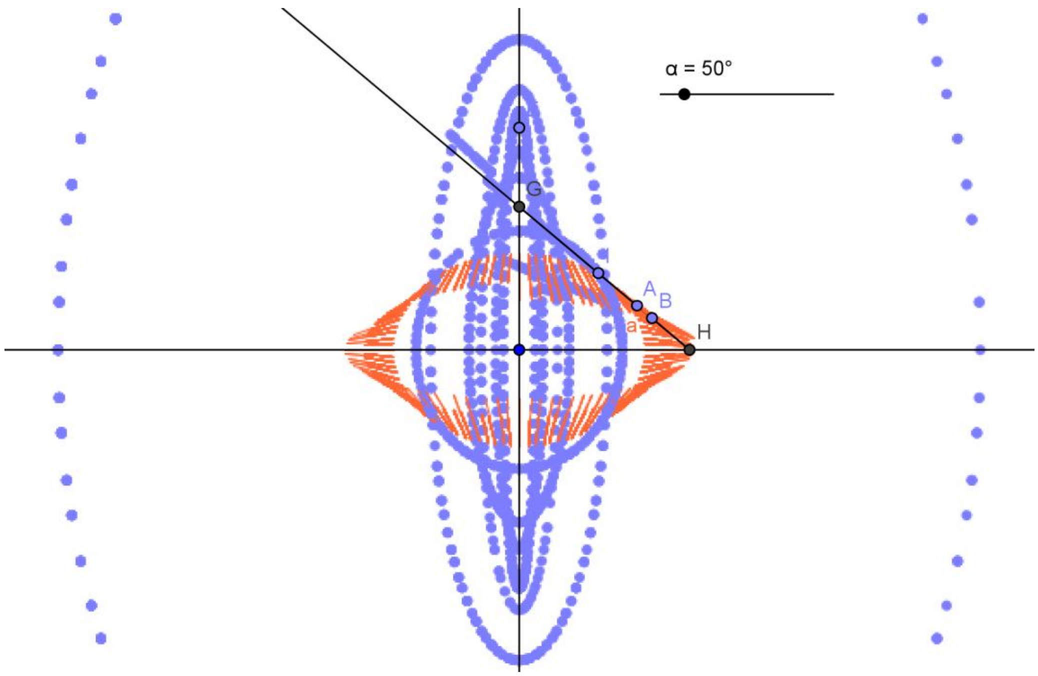


Tabla 19. La traza de los elementos considerados por José Manuel.

Actividad 3

En esta actividad con la versión externa de la tramoya de Arquímedes, la tarea fue considerar el comportamiento de la gráfica generada con el sensor de movimiento al tomar diferentes puntos entre los extremos del brazo de la tramoya implementada en varillas con hoyos graduados, sobre rieles de aluminio.
Para lo cual se colocó la tramoya de cuatro brazos de manera que el sensor percibiera el vaivén de una tira de madera recargada en dos varillas incrustadas a la misma altura en brazos simétricos. Al accionarse la tramoya surgieron en la

pantalla de la computadora graficas sinusoidales, afectadas por la rapidez variable con que se accionó el dispositivo.

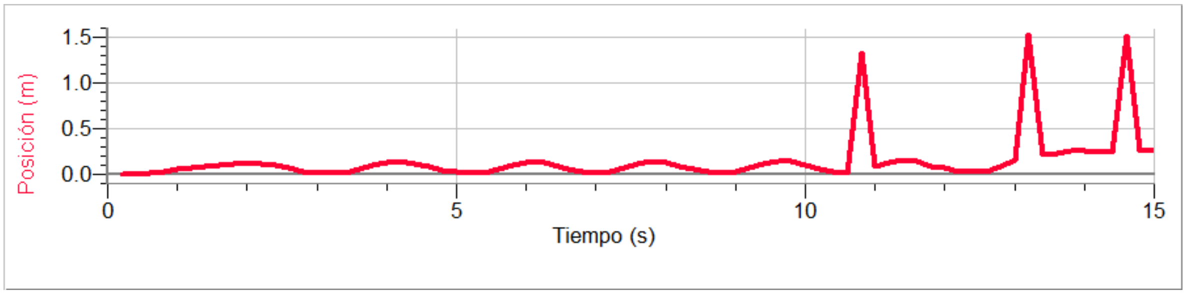


Tabla 20. Ejemplo del tipo de gráficas generadas por el dispositivo transductor en la tercera actividad.

En esta actividad, con el comando *Ajuste de curvas* del menú *Análisis* del programa *Logger Pro*, entró en juego una forma más general de la ecuación paramétrica de la elipse, en la que aparecen más parámetros, al tomarse la transformación lineal del argumento de la función seno.

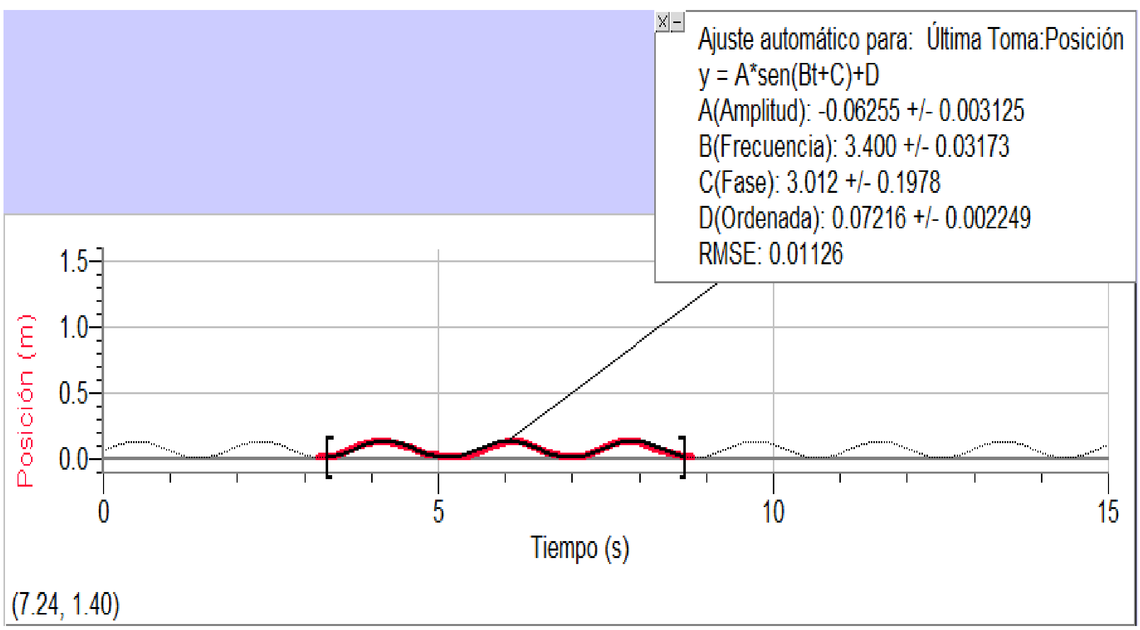


Tabla 21. Ejemplo del empleo del comando *Ajuste de curvas* para una de las gráficas producidas por el transductor.

Al colocar la tira más arriba la amplitud aumentó. Al colocar la tira más abajo la amplitud decreció. En ambos casos la variación no ocurrió como se esperaba pues el recorrido de la tramoya no fue completo.

En la penúltima pregunta, al cambiar la componente horizontal *t*, por la función de ajuste propuesta pero desfasada 90 grados, es decir Π/2 radianes, la elipse surgió como el resultado de la graficación de dos movimientos armónicos simples con dirección perpendicular, desfasados Π/2, pero con la misma frecuencia.

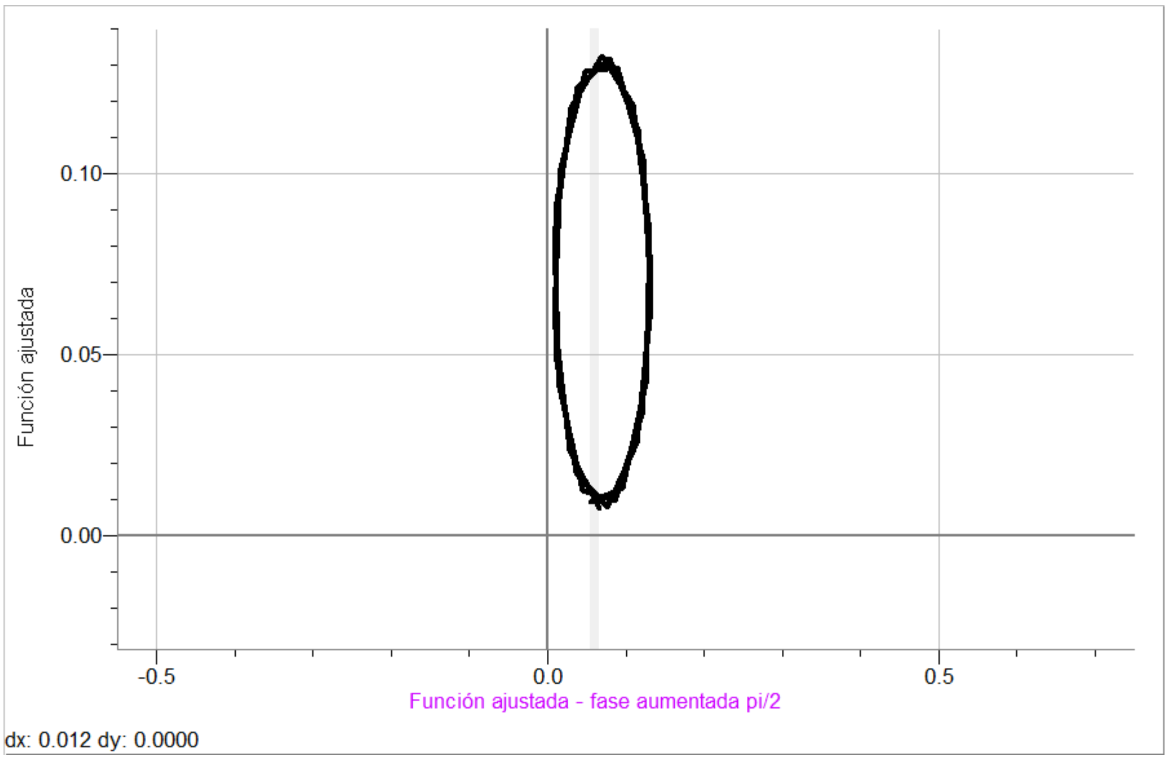


Tabla 22. La elipse como la gráfica de dos movimientos armónicos simples con la misma frecuencia, dirección perpendicular y desfasados Π/2.

En la misma pregunta, al aumentarse la fase de la función ajustada sólo Π/3, se obtuvo una elipse rotada, con respecto a los ejes de coordenadas.

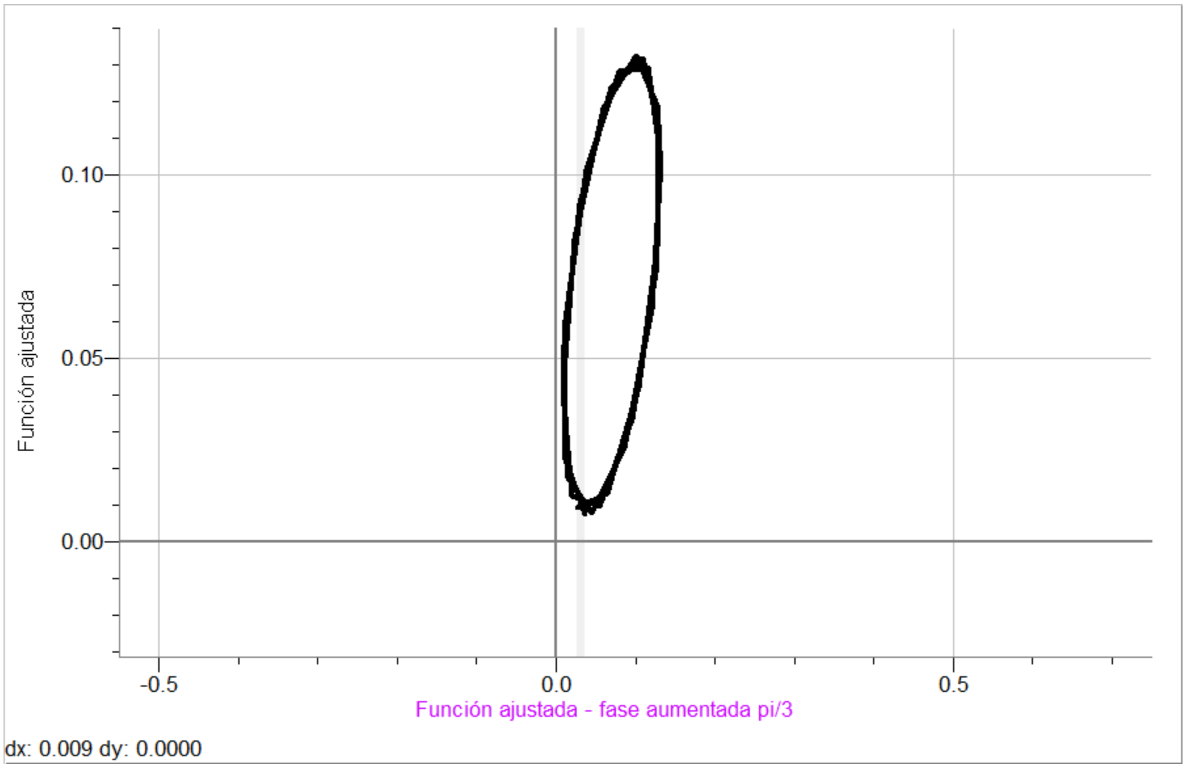


Tabla 23. La elipse como la gráfica de dos movimientos armónicos simples con la misma frecuencia, dirección perpendicular y desfasados Π/3.

Al final de la actividad se analizó el caso en que las frecuencias no son iguales pero sí proporcionales, considerando el caso en que la relación entre las frecuencias sea 1 a 2, ó 1 a 3.

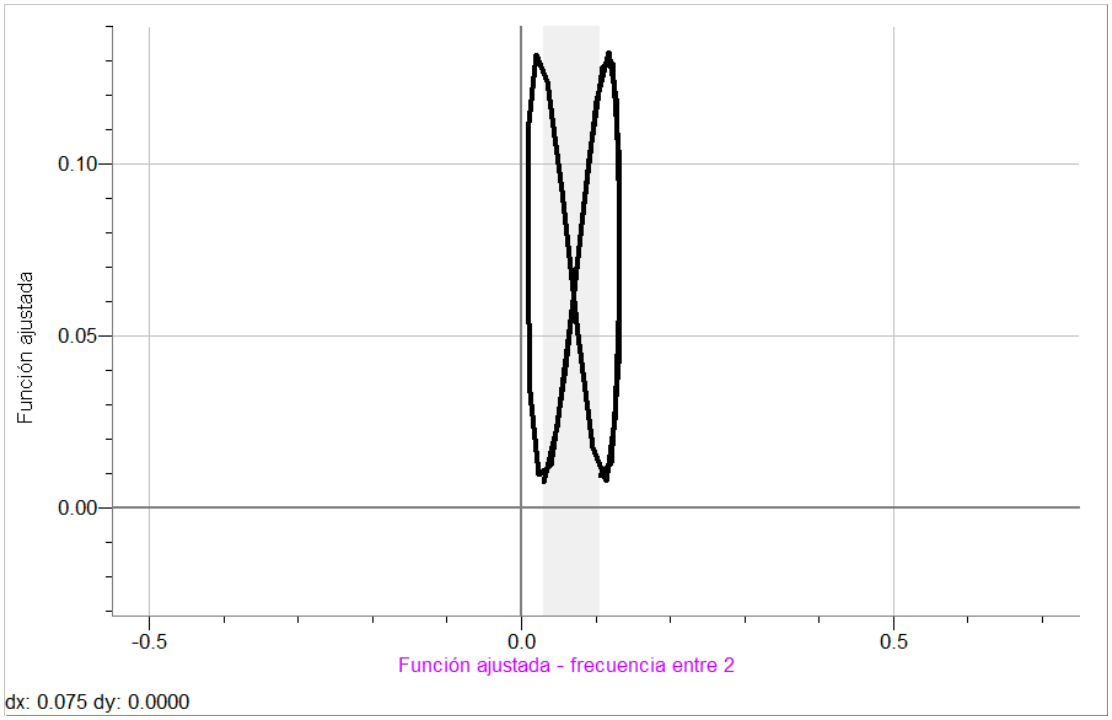


Tabla 24. La lemniscata como curva de Lissajous.

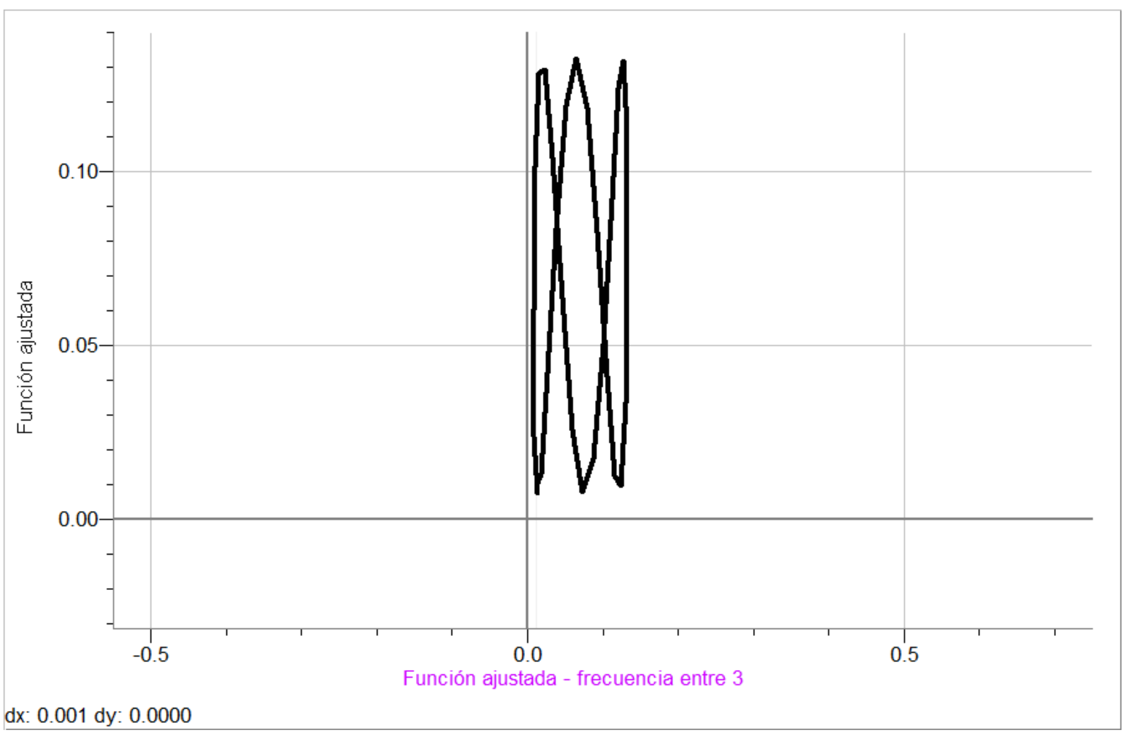


Tabla 25. La gráfica de dos movimientos armónicos simples con dirección perpendicular, desfasados $\Pi/2$, y las frecuencias relacionadas 1 a 3.

4.3 Análisis a posteriori

En la epistemología propuesta se abandona la centración en los focos, es decir en el valor de c. La centración se traslada a los ejes, llamados coloquialmente en la actividad como el largo y el ancho, lo cual dio pie a que los participantes relacionaran la elipse con el rectángulo, y el círculo con el cuadrado.

Sólo la pareja de estudiantes de nivel superior desarrollaron la ecuación paramétrica de la elipse en el plano. Después de seleccionar un punto trazador sobre el brazo del artefacto, identificaron los ejes con las ranuras y el brazo con la hipotenusa de los triángulos semejantes que se forman al considerar las paralelas a los ejes que pasan por el punto trazador. Al identificarse patrones en la relación entre las distancias entre la punta trazadora y cada uno de las tachuelas del dispositivo, los participantes construyeron conocimiento sobre la elipse.

Con respecto a la implementación de la última pregunta de la Actividad 1, los participantes tuvieron dificultades debido al tamaño de la elipse y la imposibilidad de tirar la canica de manera que rebotará. Uno de los participantes sugirió mojar la cánica para facilitar la observación de la trayectoria. Se sugiere implementar de manera virtual la valla, haciéndola cada vez más elíptica y considerar cómo la dilatación del círculo provoca la existencia simétrica de los focos. Se podría realizar también con haces de luz que reboten en la curva y muestren comportamientos dependiendo del lugar donde se inicia su recorrido.

La Actividad 2 pudo dar pie a la elaboración de tablas de comportamientos, pero no se contó con el suficiente tiempo.

En la Actividad 3, se modificó el movimiento frente a un sensor para obtener un cierto comportamiento de las gráficas generadas por un dispositivo transductor. Asimismo, en dicha actividad la graficación automática producida por el transductor, conformado por el sensor de movimiento, la interfase Lab pro y el programa Logger Pro, permitió analizar gráficamente la construcción de las figuras de Lissajous, al facilitar el estudio de la variación de los parámetros del argumento de la función trigonométrica relacionada. Es decir, la variación de los parámetros en la expresión paramétrica de la elipse que incluye la frecuencia y la fase, además de la amplitud de las ondas perpendiculares involucradas, determinada por los parámetros *a* y *b*.

Capítulo 5

Conclusiones

5.1 Consideraciones finales

Esta investigación aporta evidencias del desarrollo del uso de la gráfica de la elipse, proveniente de la puesta en escena del diseño El Taller de Arquímedes, en Cinvesniños 2010 y en la Tercera Semana de las ciencias en el plantel Ignacio Manuel Altamirano del Instituto de Educación Media Superior del Distrito Federal.

El uso de las gráficas en el bachillerato (Cen, 2006) sirvió como marco de referencia para la construcción funcional de conocimiento relacionado con la elipse. En la situación de transformación, la modelación-graficación fue el eje o núcleo para generar el conocimiento matemático que respondiera a sus necesidades, obteniéndose así una justificación funcional. La gráfica se convirtió en el argumento para dar significado a los patrones identificados. En el taller de Arquímedes las gráficas del movimiento de la tramoya de Arquímedes, se convirtieron en modelos para construir conocimiento sobre la elipse. De manera que el uso de las gráficas tuvo un papel central en la construcción de conocimiento que realizaron los participantes.

Se identificó el desarrollo del uso comportamiento geométrico de la gráfica de la elipse, cuando los participantes descubrieron las relaciones entre las características del artefacto y los elementos de la curva, y lograron ajustar las dimensiones del artefacto para que trazara una gráfica con características deseables. O cuando modificaron el movimiento frente a un sensor para obtener un cierto comportamiento de las gráficas generadas por un dispositivo transductor.

A partir de observaciones en diferentes ambientes, respecto al comportamiento de las gráficas y a la variación de los parámetros *a*, *b*, y de los que tienen que ver con la frecuencia y la fase, los participantes lograron construir conocimiento acerca de la variación de dichos parámetros y de la gráfica de la elipse. Las restricciones del artefacto de la primera actividad provocaron la implementación del artefacto virtual en la segunda actividad. La potencialidad del dispositivo transductor brindó la oportunidad de una mayor exploración, al tener acceso a la modificación de los parámetros de frecuencia y fase.

Se abandonó el privilegio algebraico y la centración en los focos en el estudio de elipse, y se favoreció entre los participantes la construcción de conocimiento matemático, con base en una epistemología basada en el empleo de la gráfica de la elipse como modelo en situaciones de movimiento.

5.2 Futuros avances

Ampliar la segunda actividad aprovechando el comando animación. Implementar la última actividad, con dos sensores, para lograr la generación automática de la elipse. Implementar un diseño de situación donde se trabaje el uso de la elipse como un indicador del ángulo de inclinación de la observación (ver el círculo quiere decir que está exactamente arriba del punto de referencia). La idea anterior surge de retomar la idea del reloj de sol, otro de los probables orígenes de la elipse. Otra línea de trabajo que me parece interesante consiste en documentar los usos de la elipse en la antigüedad y en algunos momentos de la historia de las Matemáticas y de la Física. Siguiendo a Campos (2003), quien identifica un uso histórico de las cónicas como un método para resolver problemas que no pueden resolverse con regla y compás. Por ejemplo, Menecmo descubrió a las cónicas al interpretar geométricamente la doble proporción de Hipócrates de Quíos para duplicar el cubo. Euclides y especialmente Apolonio, junto con Pappus, dieron diferentes usos a las cónicas, los cuales se tradujeron en diferentes formas de definirlas, y diferentes procedimientos y funcionamientos. Kepler empleó la elipse para describir las órbitas de los planetas alrededor del sol. Newton explicó tal fenómeno con sus leyes de gravitación. El cálculo de la longitud de arco de la elipse condujo a la integral elíptica y a una nueva clase de funciones. Matemáticos como Legendre aproximaron su solución por medio de series infinitas.

5.3 Una reflexión con respecto a la enseñanza de la matemática en el IEMS.

En el modelo educativo del bachillerato del Instituto de Educación Media Superior (IEMS) del gobierno del Distrito Federal, el docente goza del derecho de libertad de cátedra y de una plaza como Docente, Tutor e Investigador, y rinde cuentas a sus colegas, profesores de la misma asignatura, organizados en Academia al interior de cada plantel, y en Macroacademia, al considerarse todos los planteles.

En general, dicho modelo plantea que el conocimiento debe adquirirse como un proceso colectivo, que surja de la discusión. En particular, propone que la matemática sea expuesta como una actividad creativa, al alcance de los estudiantes, y que para su enseñanza siga un hilo conductor, de manera que los temas relacionados se vean juntos, pues su riqueza se pierde al separarlos. Tales intenciones son concretadas y refinadas generalmente desde la experiencia individual de cada profesor. Con tales premisas, el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en el IEMS está generalmente centrado en la exposición de contenidos y la adquisición de habilidades procedimentales.

A la luz de este trabajo de investigación, el cual expresa una forma distinta de pensar la matemática escolar, considero necesario orientar la discusión al interior de la academia de matemáticas. Primero, para reconocer los avances que como disciplina científica ha tenido la matemática educativa, y así fundamentar la investigación en matemática educativa a realizarse como parte de nuestro compromiso con el proyecto educativo IEMS. Segundo, para estudiar el uso del conocimiento matemático en nuestras comunidades y favorecer la construcción de conocimiento de acuerdo al concepto de justificación funcional dentro de un marco de referencia fuera de la matemática misma.

Referencias bibliográficas

Apostol, T. y Mnatsakanian, M. (2009). A New Look at the So-called Trammel of Archimedes. American Mathematical Monthly, 116(2), 115-133.

Arrieta, J. (2003). Las prácticas de modelación como procesos de matematización en el aula. Tesis Doctoral no publicada. Cinvestav-IPN, México, D. F., México.

Borrello, M. (2010). Un planteamiento de resignificación de las desigualdades a partir de las prácticas didácticas del profesor. Un enfoque socioepistemológico. Tesis de doctorado no publicada, Cicata-IPN, México, D. F., México.

Briseño, E. (2008). El uso de las gráficas desde una perspectiva instrumental. Un estudio socioepistemológico. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Campos, C. (2003). La argumentación en la transformación de funciones cuadráticas. Una aproximación socioepistemológica. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México, D. F., México.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. Épsilon [Edición especial]. España, 42, 353-369.

Cantoral, R. (2003). La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: una mirada emergente [CD–ROM]. XI Conferencia Interamericana de Educação Matemática (tema Educación Matemática & Desafíos y Perspectivas). Brazil, Blumenau: Universidad Regional de Blumenau.

Cen, C. (2006). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México, D.F., México.

Cen, C. y Cordero, F. (2010). El rol de la funcionalidad de las gráficas en un contexto social de estudiantes y docentes del bachillerato. Seminario de doctorado. Cinvestav-IPN, México, D.F., México.

Cen, C., Cordero, F. y Suárez L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: un práctica institucional en el bachillerato. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13(2), 187-214.

Contreras A., Contreras M. y García M. (2002). Sobre la geometría sintética y analítica. La elipse y sus construcciones. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 5(2), 111-132.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4 (2), 103-128.

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione gráfica nell'insegnamentoapprendimento della matemática. La Matematica e la sua Didattica, 20, 1, 59-79.

Cordero, F. (2007). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano (pp. 265-286). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.- Díaz de Santos.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10(1), 7-38.

Cordero, F. y Morales, F. (2007). El uso de las gráficas en la confrontación entre la continuidad euleriana y la estabilidad de las ecuaciones diferenciales de segundo orden. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 20, 513-518.

Fulks, W. (1967). Cálculo Avanzado. Una introducción al análisis. Limusa, México.

Fuller, G. (1997). Geometría Analítica. CECSA, México.

Heath, T. (1981). A history of greek mathematics. Volume 1 From Thales to Euclid. Dover, U.S A.

IPN. (2004). Geometría Analítica. Para nivel medio superior. Libro para el estudiante. México.

IPN. (2006). Geometría Analítica. Para nivel medio superior. Libro del Profesor. México.

Kindle, J. (1994). Geometría Analítica. Mac GrauHill Serie Shaum, México.

Kline, M. (1972). El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días, 1. Alianza Editorial, España.

Lehman, Ch. (1993). Geometría Analítica. Limusa, México.

Oakley, C. O. (1957). Analytic Geometry. Barnes & Noble, U.S.A.

Suárez, L. (2008). Modelación – Graficación, Una Categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un Estudio Socioepistemológico. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN, México.

Steen & Ballou. (1978). Geometría Analítica. Publicaciones Cultural, México.

Wooton, Beckenbach y Fleming. (1979) Geometría Analítica Moderna. Publicaciones Cultural, México.

Zubieta, G. (2008). El caso de la elipse. Visualización en un contexto dinámico. Cuarta conferencia magistral en el XVI encuentro de profesores de matemáticas. Departamento de Educación Matemática de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.