Centro de Investigación y de Estudios Avanzados

del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

Construcción Social de la Serie Trigonométrica de Fourier.

Pautas para un Diseño de Intervención en el Aula

Tesis que presenta

Fabián Wilfrido Romero Fonseca

Para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias

En la especialidad de Matemática Educativa

Directora de Tesis

Dra. Rosa María Farfán Márquez

Ciudad de México, Agosto 2016

Dedicatoria

Dedico esta tesis a cuatro personas sumamente importantes:

Mi madre, Rosalba Fonseca, por estar siempre presente en todos los momentos buenos y malos de mi vida, por su constante apoyo, sus consejos y su amor incondicional, de quien aprendí que a pesar de las circunstancias siempre se puede salir adelante.

Mi padre, Wilfredo Romero, de quien aprendí el valor del trabajo duro y que el estudio es una fuente de superación personal. Por su constante demanda para dar lo mejor de mí y por apoyarme en todos mis proyectos.

Mi esposa, Natalia Fonseca, quien ha sido fuente de inspiración desde que inicié este proyecto, por su apoyo constante y amor incondicional, quien ha sido amiga y compañera inseparable. Por su paciencia, dedicación y por los sacrificios hechos con tal de que cumpla mis metas, siempre te estaré profundamente agradecido.

Mi asesora de tesis, Rosa María Farfán, por su esfuerzo y dedicación. De quien sus consejos, orientaciones, paciencia y motivación han sido fundamentales para mi formación como investigador. Por no sólo preocuparse por ser un ejemplo en la academia, sino también por ser un ejemplo de vida, mi más profundo respeto y admiración hacia ella.

Agradecimientos

Al finalizar un trabajo arduo, que requiere de mucho esfuerzo y dedicación, como lo es una tesis, es inevitable que nos asalte un sentimiento que te lleva a concentrar la mayor parte del mérito en el aporte que has hecho. Sin embargo, una mirada objetiva te muestra que la magnitud de ese aporte no hubiese sido posible sin el apoyo de personas e instituciones que han facilitado las cosas para que este trabajo llegue a buen término. Por lo que dedico este espacio para extender estos agradecimientos, más que necesarios.

Debo agradecer a la Dra. Asuman Oktaç, al Dr. Ricardo Cantoral y al Dr. Francisco Cordero, por sus enseñanzas y consejos, los cuales fueron y serán un invaluable aporte a mi formación como investigador y como persona.

Agradezco especialmente a la Dra. Gisela Montiel, por su disponibilidad y paciencia, que hizo que nuestras pláticas y discusiones se tornaran benéficas tanto a nivel de la investigación como a nivel personal. No me cabe duda que sus aportes han enriquecido el trabajo realizado.

Reitero mi agradecimiento a la Dra. Rosa María Farfán, por su apoyo y confianza en mi trabajo y su capacidad para guiar mis ideas ha sido un aporte invaluable. Las ideas propias, siempre enmarcadas en su orientación y rigurosidad, han sido clave del buen trabajo que hemos realizado juntos, el cual no se puede concebir sin su siempre oportuna participación.

Gracias a las personas que, de alguna manera u otra, han sido claves en mi vida profesional, y por extensión, en la personal: mis compañeros de generación: Nayeli, Julio, Luis, Antonio, Vicente y Jaime; a mis colegas, amigos y amigas: Guadalupe, Moisés, Mayra, María, Daniela, Gabriela, Cristina, Cristian, Zuleyma, Gerardo, Laura, Cynthi, Francisco, Sergio, Karina, Uzziel, Susana … la lista es larga y no entrarán todos en este espacio. Un agradecimiento muy especial a mi amigo y compatriota Rodolfo Fallas, pues su apoyo y las pláticas que hemos sostenido han sido siempre enriquecedoras, sus buenos consejos los agradezco profundamente.

Agradezco mucho a *Los Ticos*: Jonathan (Morado), William, Mary, Rodolfo, pues cada reunión, cada café, cada comida, fue como traer un pedacito de nuestra hermosa tierra a México, gracias por su compañía en todo este tiempo.

Para finalizar extiendo mi agradecimiento a esta maravillosa institución como es el Cinvestav-IPN, y en particular al Departamento de Matemática Educativa, pues nos ofrece las condiciones óptimas para realizar investigación de calidad y competencia internacional.

A todos y todas gracias.

Agradecimientos a Instituciones

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt), pues aun siendo estudiante extranjero, me apoyó económicamente para la realización de mis estudios de maestría en esta prestigiosa institución, lo que muestra el gran compromiso que tiene México con el desarrollo de la región Latinoamericana.

Fabián Wilfrido Romero Fonseca

Número de becario: 570036

Agradezco también a la Universidad de Costa Rica, por todas las facilidades y apoyo para la realización de mis estudios en el extranjero.

Tabla de contenido

Resumen

Esta investigación versa sobre la construcción social del conocimiento matemático (CSCM), en particular de la Serie Trigonométrica de Fourier (STF). El abordaje responde a la aproximación sistémica de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) como fundamento teórico de la investigación, es decir, se problematiza el saber matemático mediante el estudio integrado de las dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica observadas en su relación con los elementos sociales y culturales en las que se desenvuelven.

El análisis de estas dimensiones permite asegurar que el actual discurso Matemático Escolar (dME) provoca la exclusión de la construcción social de la STF, por lo que se hace necesario proponer su rediseño que considere el carácter funcional de la serie, la diversidad de racionalidades contextuales y de argumentaciones alrededor de la misma y las pluralidad de prácticas de referencia en las que se significa.

Dicho análisis también permitió vislumbrar un esquema de prácticas anidadas como modelo preliminar para la construcción social de la STF basada en prácticas sociales. Donde se observa que la serie surge al modelar e interpretar un fenómeno estacionario con variaciones periódico-acotadas, para el cual la STF se convierte en una herramienta de predicción, en donde la estabilidad del sistema se evidencia en la convergencia de la serie. Además, sólo hasta que se haya visto esta relación se podrá entonces pasar a la generalización matemática, es decir, a determinar los coeficientes de la serie trigonométrica conociendo la función a la que esta converge.

Al considerarse la STF como el estadio más avanzado en el desarrollo del pensamiento trigonométrico, se hace importante rescatar su relación con la función trigonométrica como momento previo de construcción social de lo trigonométrico. Así se logró comprobar teóricamente la hipótesis de partida de esta investigación, la cual sostiene que es en esta transición (de la función a la serie) en donde se puede significar la STF y que esto se logra si las situaciones demandan su uso para la evolución de lo trigonométrico.

Abstract

This research deals with the social construction of mathematical knowledge (CSCM), in particular the Trigonometric Fourier Series (STF). This responds to the systemic approach of the Socioepistemological Theory of Mathematics Education (TSME) as a theoretical basis for research, namely, mathematical knowledge is problematized through the integrated study of epistemological, cognitive, and didactic dimensions observed in their relation with social and cultural conditions in which they operate.

The analysis of these dimensions ensures that the current Academic Mathematical discourse (dME) causes exclusion of the social construction of STF. Then it is necessary to propose its redesign to consider the functional nature of the series, the diversity of contextual rationalities and arguments, and the plurality of references practices in which takes meaning.

This analysis also allowed a glimpse of a scheme of nested practices as a preliminary model for the social construction of STF based on social practices. Where it is noted that the series emerge to model and interpret a stationary phenomenon with bounded and periodic variations. In this phenomenon the STF becomes a predictive tool, where system stability is evidenced by the convergence of the series. In addition, only until the student has seen this relationship may then move to the mathematical generalization, namely, to determine the coefficients of the trigonometric series knowing the function that this converges.

Considering the STF as the most advanced stage in the development of trigonometric thought, it becomes important to rescue their relationship with the trigonometric function as previous moment of social construction of trigonometry. Thus it was possible to theoretically test the hypothesis of this research. It argues that it is in this transition (function to the series) where the STF can takes meaning and this is achieved if situations require its use for the development of the trigonometric thought.

Introducción

Dentro del cálculo la Serie Trigonométrica de Fourier (STF) es uno de los temas primordiales, pues epistemológicamente fue un punto de quiebre en el desarrollo del Análisis Matemático, así como parte importante en la evolución del concepto de función como lo conocemos hoy en día; por esta razón ha sido motivo de múltiples investigaciones en Matemática Educativa.

En el área de educación superior del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN un grupo de investigación se ha preocupado por el estudio de las series y su convergencia, es así como las distintas investigaciones se han preocupado por aspectos como: el problema de la cuerda vibrante como antecedente de la STF (Farfán, 1986; Ulín, 1984), la determinación de la fenomenología intrínseca del objeto matemático «determinación del estado estacionario» (Farfán, 1994; 2012; Marmolejo, 2006); y algunas nociones físicas y matemáticas relacionados con la STF (Morales, 2003, 2010; Rodríguez, 2009; Vásquez, 2006; Moreno, 1999).

De acuerdo con Montiel (2005) la serie trigonométrica es el estadio más avanzado en el desarrollo del pensamiento trigonométrico, por lo que este estudio se preocupa por el lugar que ocupa la STF en dicho desarrollo y de su construcción a partir de prácticas sociales y no solo de su desarrollo conceptual matemático, para proponer un rediseño del discurso escolar imperante alrededor de la serie trigonométrica.

De esta manera, una mirada detallada al discurso Matemático Escolar alrededor de la STF mostró como este es un sistema de razón que produce la exclusión de la construcción social del conocimiento, pues impone las argumentaciones y los significados alrededor de la serie. Por tanto la investigación de preocupa por proponer un rediseño del dME en el que se promueva la construcción social de la STF.

A partir de una problematización del saber matemático se logran dilucidar las prácticas que acompañan la construcción de la STF en su contexto histórico-social y a partir de estas proponer pautas para la escritura de diseños de intervención en el aula.

Con esto en mente este escrito está organizado de la siguiente manera: El Capítulo 1 titulado *Consideraciones iniciales*, realiza una revisión de los antecedentes, la problemática y los objetivos de investigación. En el Capítulo 2 *Marco Teórico* se consideran los elementos de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa necesarios para la realización de la presente investigación.

El Capítulo 3 considera la Ingeniería Didáctica como metodología de la investigación y la descripción de sus fases (1) análisis preliminar, (2) diseño de situación de aprendizaje y análisis a priori, (3) puesta en escena y análisis a posteriori, esta investigación da cuenta de las primeras dos fases de esta metodología.

Los Capítulos 4 y 5 corresponden al análisis preliminar de la Ingeniería Didáctica, en estos capítulos se da cuenta de los resultados obtenidos por toda una línea de investigaciones acerca de las nociones alrededor de la STF, su contexto histórico-cultural de origen, los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza y los procesos cognitivos asociados a tareas en las que se pone en funcionamiento este conocimiento. Lo cual permite proponer un modelo preliminar de construcción social de conocimiento para la STF, lo que se conoce en la teoría como esquema de anidación de prácticas.

El Capítulo 6 corresponde al diseño de una situación de aprendizaje y su análisis a priori a partir del análisis preliminar, en esta se pone en evidencia como se consideran los principios de la teoría socioepistemológica para el diseño de la situación y se construyen una hipótesis de las interacciones y argumentaciones que provocará en una puesta en escena. Para por último cerrar en el Capítulo 7 con algunas reflexiones finales y en el Capítulo 8 se señalan las prospectivas de esta investigación.

1 Consideraciones Iniciales

1.1 Antecedentes

Diversos estudios en Matemática Educativa se han preocupado por el abordaje de la Series de Fourier con la finalidad de mejorar los procesos de aprendizaje vía la enseñanza y que así las matemáticas brinden una base sólida para la formación de los futuros profesionales (Rodríguez, 2009).

Desde este punto de vista esta investigación se interesa, principalmente, por aquellos acercamientos a las series de Fourier que den cuenta de su génesis y de las nociones que se encuentren alrededor del trabajo con las mismas, de esta manera se podrá contar con herramientas para hacer un diseño de intervención para el aula donde se consideren aquellas nociones que se han estudiado de manera aislada alrededor de la STF.

En lo que sigue se han clasificado los trabajos alrededor de la STF en tres apartados: el primero se refiere a las investigaciones acerca de la noción de estado estacionario[1], en el segundo las investigaciones sobre series (numéricas o de funciones) y su convergencia, y el último sobre otras nociones relacionadas con la STF como lo son la visualización, la periodicidad, las funciones trigonométricas, entre otras.

1.1.1 El estado estacionario

Este apartado está enfocado en las investigaciones que dieron cuenta de la génesis de la STF relacionado con la determinación del estado estacionario, así como el problema de la conducción de calor, visto como ambiente fenomenológico que dio paso al surgimiento de la STF.

Farfán (1986) nos muestra que D. Bernoulli, al resolver el problema de la cuerda vibrante, utiliza argumentos físicos para decir que la forma inicial de la cuerda se puede expresar como una serie trigonométrica. En contraparte:

[1] Se dice que un sistema físico está en estado estacionario cuando el mismo no varía con el tiempo o varía de manera periódica e idéntica en cada periodo. Se dice que la naturaleza está en estado estacionario, por ejemplo la Tierra se calienta por diferentes factores, pero ha llegado a su estado estacionario (no se calienta más), pero las temperaturas en sus diferentes puntos son variables, es decir, se tiene lo variable en lo estable.

> Fourier nos muestra que la solución matemática es acorde con la situación física, pero la demostración se inserta en la matemática misma sin alusión a argumentos que no pertenecen a ella. Así se da la separación entre la física y las matemáticas que desde la antigüedad caminaban estrechamente ligadas una de la otra. (Farfán, 1986, p. 67)

Es decir, se da una ruptura entre el modelo matemático y el problema físico, aunque el primero siempre responde al segundo, las argumentaciones utilizadas son propias del área de las matemáticas.

Por su parte, Morales (2010) analiza la ambigüedad en el concepto de calor y ofrece una caracterización del pensamiento físico-matemático, en lo que resalta “el pensamiento físico usa en repetidas ocasiones al pensamiento matemático, únicamente para darle formalidad o para comunicarlo, pero no lo usa para argumentar” (Morales, 2010, p. 177). Esto indica que no hay una retroalimentación de la matemática hacia el problema físico, pero esto se debe a que comprender el concepto de calor representa una tarea cognitiva de alto nivel, tal y como se ha reportado:

> …este concepto físico no es producto de la primera experiencia sensible; baste decir que la humanidad conoce, requiere y manipula el calor desde tiempos remotos, en tanto que su estudio científico inicia en el siglo XIX, poco después de la publicación de la *Mecánica Celeste* de Laplace. Es decir, se ha estudiado la naturaleza del espacio que circula el globo terrestre antes de dar cuenta de un fenómeno vital para la vida humana. Ello no es gratuito, la abstracción requerida para la adquisición del concepto físico involucrado representa una tarea cognoscitiva de las más complejas. (Farfán, 2012, p. 270)

Esta aseveración la hace Farfán (2012) después de poner en práctica un diseño experimental con docentes, los cuales tenían diversas especialidades, no necesariamente relacionadas con el ambiente físico utilizado para significar la STF, hecho por el cual se puede notar que el ambiente fenomenológico no parece ser el medio propicio para llevar la STF al aula, en un ambiente en que los estudiantes no están relacionados con la determinación del estado estacionario.

Por su parte, Muro (2000; 2004) busca significar la STF mediante la contextualización (Matemática en Contexto) cercana al ingeniero químico, la transferencia de masa, lo que muestra que partir del entorno del estudiante es un camino para significar la

STF, siempre y cuando el fenómeno puesto en juego sea cercano al profesionista, lo cual no necesariamente es posible es los diferentes sistemas de enseñanza, ya sea porque la comunidad de estudiantes es heterogénea (diferentes profesiones en un mismo salón de clase) o los fenómenos relacionados al estado estacionario no son parte de su formación profesional.

Aunado a esto Morales (2003; 2013) hace notar que las herramientas brindadas por la escuela no son suficientes para hacer una modelación matemática como la que requiere el fenómeno de propagación de calor.

> …la trasposición didáctica a la que inevitablemente los conceptos son sometidos antes de su inclusión en la escuela, ha dividido el trabajo de Fourier en algunos aspectos puramente físicos y otros puramente matemáticos hasta desproveerlo de todos los aspectos desde los cuales estos aspectos surgieron, convirtiéndolos en algunos casos en herramientas puramente matemáticas. (Morales, 2003, p. 58)

Este proceso de transposición también se evidenció en la investigación de Solís (1993), quien a través de un diseño experimental para estudiar la noción de variación en el ambiente físico de la propagación de calor, se da cuenta que hay predominio de la noción de calor como un fluido, y que sólo uno de los sujetos de experimentación logró describir aspectos matematizables del fenómeno, pues la concepción del calor en los estudiantes es dual "el calor se va moviendo (continuamente), pero los estados (las temperaturas para cada punto) son discretos" (Solís, 1993, p. 202).

Ante el problema del flujo de calor Marmolejo (2006) indica que primero se debe conocer la condiciones de contorno que permiten que un proceso de transferencia de calor tenga lugar, esto lo vislumbró a través de la simulación (por computadora) del problema del calentamiento de una barra metálica mediante la aplicación de un diseño experimental con estudiantes de ingeniería, pero para conocer estás condiciones de contorno se debe tener muy clara la relación del problema físico con el modelo matemático.

Se puede notar que para la significación de la STF existen dos alternativas, una utiliza el ambiente fenomenológico que le dio origen (determinación del estado estacionario), para lo cual es necesario que dicho ambiente sea cercano al profesionista y que este lo comprenda cabalmente pues es propio de su disciplina; en contraparte, la segunda alternativa busca ambientes alternativos a la determinación del estado estacionario, lo cual permitiría hacer más accesible la STF a aquellos estudiantes que no están familiarizados con situaciones relacionadas a este, pues como ya se dijo es una tarea cognitiva de las más complejas, pero también haría posible que aquellos que si están familiarizados logren significar la STF desde su propio campo de estudio.

1.1.2 Series y su convergencia

Farfán (2012) se interesa por la construcción de la noción de convergencia de series vinculada con su fenomenología, a través de su análisis epistemológico plantea que la consideración del estado estacionario marca una ruptura epistémica, ya que se traslada el problema de calcular la suma de una serie trigonométrica a determinar su convergencia, lo que ubica a las problemáticas relacionadas con la STF como un momento previo al problema que implica la noción de convergencia de series.

Ante esto Flores (1992) basado en un análisis epistemológico alrededor del trabajo de Cauchy sobre los criterios de convergencia, hace un montaje experimental con el objetivo de saber si *operar con los términos de una serie*[2] es un mecanismo natural para conocer su convergencia, a lo cual concluye que “No es natural operar con los términos de una serie para determinar si esta converge o diverge” (Flores, 1992, p. 208).

Lo anterior no puede generalizarse, necesariamente, a las series trigonométricas, pues como comentamos antes, epistemológicamente la convergencia de la serie trigonométrica antecede a los criterios de convergencia, en particular la STF es previa al problema de convergencia de series, ya que el trabajo sobre convergencia de series numéricas de Cauchy aparece por primera vez en su libro Curso de Análisis (1821), el cual es posterior a los dos trabajos que envió Fourier a la Academia de ciencias de París sobre propagación de calor (1807 y 1812).

---

[2] Al decir **operar con los términos de la serie** Flores se refiere a comprobar los criterios de convergencia de manera numérica, por ejemplo, dada una serie $\sum a_n$ para comprobar si el método del cociente “funciona” para determinar la convergencia se calculan los valores $\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \frac{a_4}{a_3}, \ldots$ si estos valores se acercan a un valor menor que la unidad entonces la serie es convergente.

Mediante una representación físico-geométrica, a través de la computadora, Moreno (1999) trabaja con las sumas parciales de la STF, y mediante una experimentación con estudiantes pudo notar que el modelo de superposición de movimientos circulares permitió a los estudiantes visualizar la convergencia de la STF, por lo que la visualización de las sumas de los términos de la serie trigonométrica juega un rol importante en el aprendizaje de la misma. Cabe destacar que este modelo no fue desarrollado por los estudiantes, solamente se les muestra una animación en la computadora para que los estudiantes visualicen la convergencia de la serie, es importante determinar un contexto de significación para hacer uso del mismo en una situación de aprendizaje.

Por su parte, Albert (1996) encuentra que la noción de serie finita es un obstáculo epistemológico para la construcción de serie infinita, lo cual se relaciona con el principio de permanencia de Leibniz (Artigue, 1998), la investigación de Moreno (1999) reporta que el modelo de superposición de movimientos circulares permitió superar este obstáculo epistemológico, otra razón por la cual se le considera de suma importancia para un futuro diseño de intervención para el aula.

1.1.3 Otros aspectos relacionados con las series de Fourier

En este apartado interesan aquellas investigaciones que tratan de nociones u objetos matemáticos relacionados con las series de Fourier, como lo son la periodicidad y la visualización de la series de Fourier.

Vásquez (2006) se interesa por el rol que desempeña la hipótesis de periodicidad para las serie de Fourier, por lo que da cuenta de cómo el carácter periódico, presente en el discurso matemático escolar, para el cálculo de una serie de Fourier no estuvo presente en su génesis histórica, ya que en la *Théorie Analytique de la Chaleur* las generalizaciones son para intervalos de longitud finita y no sobre todo $\mathbb{R}$, además al hacer un montaje experimental indica que:

> la periodicidad es una argumentación que no se ha construido en los alumnos . . . El procedimiento que siguen para la resolución de problemas no toma en cuenta la periodicidad; esto es, la periodicidad no es obstáculo para resolver un problema, ya que si la función es periódica o no, ellos calculan la serie de

> Fourier. Sin embargo, en los cuestionarios la hipótesis de periodicidad surge de manera casi natural. (Vásquez, 2006, p. 62)

Con esto se presenta la hipótesis de periodicidad como un obstáculo de tipo didáctico, que no afecta el cálculo de las series de Fourier, pero si a la argumentación de los estudiantes respecto a poder calcular la serie de cualquier función, dado el **discurso Matemático Escolar** predominante.

Por otra parte, en Rodríguez (2009) y Rodríguez & Popoca (2010) se enfocan principalmente, en la visualización matemática presente en el trabajo de Fourier.

> …independiente del contexto físico en el que se halla el trabajo de Fourier, él "visualiza matemáticamente", trata de dar un sentido y significado al análisis de sus resultados, en un principio justifica físicamente pero posteriormente la justificación se sitúa en el plano matemático. (Rodríguez, 2009, p. 34)

Con base en esta idea Rodríguez aplica un diseño experimental, enfocándose principalmente en la visualización matemática, observa que los estudiantes a quienes aplicó el diseño tienen carencias en la comprensión de la noción de función, con ausencia de interacción entre los diferentes registros (gráfico y algebraico), específicamente trabajan las series de Fourier de forma algorítmica, sin reflexión en el proceso, la memoria es su principal herramienta de aprendizaje, recomienda que un diseño de situación debe considerar el trabajo en los diferentes registros de representación, pues esto favorecería la comprensión de los objetos matemáticos y potenciar el pensamiento matemático en el estudiante (Rodríguez, 2009).

Mientras tanto en el trabajo de Moreno (1999) utiliza un ambiente físico-geométrico, en un diseño experimental con estudiantes, que les permite superar el obstáculo epistemológico llamado principio de permanencia de Leibniz, el cual permitió al estudiante "construir una función periódica discontinua, como límite de las sumas parciales de la serie trigonométrica dientes de sierra" (Moreno, 1999, p. 97), además de visualizar, apoyado en el uso de tecnología, la convergencia de la serie (como ya se mencionó antes). Por su parte Díaz-Barriga (1993) estudia la transformada rápida de Fourier y cómo este es resultado de la generalización natural de las series de Fourier y que es en esta donde se pueden hacer uso de la trasformada de Fourier en las aplicaciones a la vida real.

Finalmente, Montiel (2005) hace un minucioso estudio socioepistemológico de la función trigonométrica, indica que el tránsito entre la función trigonométrica y la serie trigonométrica requiere de "significar a la función trigonométrica como herramienta predictiva, despojarla del contexto geométrico – estático de las razones" (Montiel, 2005, p. 120). Además, se requiere que las funciones seno y coseno adquieran su carácter de objeto en el estudiante, pues gracias a sus propiedades (periódica y acotada) y a que sus variaciones sucesivas son de la misma naturaleza, las hacen una herramienta poderosa tanto en la matemática como en otras disciplinas científicas. La serie es, de hecho, operar con las funciones trigonométricas a propósito de estas características (Montiel, 2011).

1.1.4 Diferenciación

Se puede apreciar el gran número de investigaciones relacionadas con la STF y cómo estas han estudiado aspectos diferentes alrededor de la misma de manera aislada. Se ha estudiado su génesis histórica y su relación con el estudio de la propagación de calor, como ambiente fenomenológico, lo que nos conduce a dos alternativas para significar la STF: la primera sostiene que la determinación del estado estacionario es el ambiente propicio para significar la STF (Muro, 2004), mientras que la segunda expone que el ambiente fenomenológico (determinación del estado estacionario) es cognitivamente más complejo que la STF lo que provoca que no sea un medio adecuado para introducirla en el aula (Farfán, 2012).

Estas dos posturas, aunque parezcan contradictorias, tienen validez según la población de destino, ya que Muro hace su estudio con estudiantes de ingeniería química mediante el contexto de transferencia de masa (propio del ingeniero químico), mientras que Farfán realiza su estudio con docentes de distintas disciplinas, con la salvedad de que todos habían sido profesores del curso donde se estudia la STF.

Si se considera el escenario de determinación del estado estacionario las investigaciones muestran gran predominio en las ideas algebraicas, es decir, se busca lograr construir la ecuación diferencial parcial que modela el problema y resolverla, en caso contrario se debe buscar un ambiente que permite construir la STF, el cual puede estar fundamentado en la construcción social de las funciones trigonométricas (Montiel, 2011), donde lo se requiere es que las funciones seno y coseno sean objetos susceptibles de manipulación, además de dominar su características primordiales: periódicas y acotadas; y que sus variaciones tienen estas mismas características.

Farfán (2012), como se mencionó antes, se preocupa por el surgimiento de la noción de convergencia de series, en su estudio al referirse a una parte de la obra original de Fourier menciona "aquí se enuncia y demuestra lo que para los matemáticos más prominentes del siglo XVIII era inaceptable: la posibilidad de representar una función *arbitraria* en serie trigonométrica" (Farfán, 2012, p. 128), en esta sección Fourier determina cómo calcular los coeficientes de la serie (coeficientes de Fourier), dicho cálculo, desde un punto de vista matemático, es uno de sus más grandes aportes, pero el cálculo de los coeficientes no se ha abordado en la investigación en Matemática Educativa hasta la fecha.

En este sentido se plantea una investigación basada en el diseño, en particular los momentos de fundamentación y diseño, la fundamentación será el insumo que permita general hipótesis para construir el diseño; además de considerar algunas puestas en escena exploratorias con el fin de refinar las secuencias de tareas, para significar la STF.

1.2 Definición del problema y los objetivos de investigación

La investigación educativa en el nivel superior tiene sus primeras investigaciones alrededor de la enseñanza y aprendizaje del cálculo (Artigue, 1998), cuya importancia radica en que este es un puente entre la matemática elemental y la matemática avanzada en la educación superior.

La dificultad de las investigaciones en esta área de conocimiento matemático está caracterizada por la dualidad (herramienta-objeto) de las nociones matemáticas involucradas (Farfán, 1997), por ejemplo, el concepto de función juega primero un rol como herramienta, cuando se están calculando imágenes para ciertos valores del dominio, pero luego se debe considerar como objeto, susceptible de manipulación para poder derivarse e integrarse.

De esta manera, las investigaciones en matemática educativa buscan el estudio de fenómenos didácticos, es decir, estudian las interacciones entre los partícipes del proceso de enseñanza y aprendizaje, como lo son el docente, el estudiante y un saber, en nuestro caso ese saber se corresponde con la STF. La importancia de la STF radica en que permite la modelación de fenómenos de naturaleza periódica, cosa que no logra la serie de Taylor, pues esta tiende a infinito para valores cada vez mayores de su dominio (Shoenthal, 2014), además de ser un objeto de gran importancia epistémica, pues por un lado jugó un rol importante para el desarrollo del Análisis Matemático tal y como se conoce hoy en día (Farfán, 2012), y por otro la serie trigonométrica es el estadio más avanzado en el desarrollo del pensamiento trigonométrico (Montiel, 2005).

Las investigaciones realizadas en matemática educativa alrededor de la STF han dado cuenta de diversos aspectos relacionados con la serie, sin embargo, matemáticamente el gran aporte de Fourier fue el cálculo de los coeficientes (denominados coeficientes de Fourier), de hecho la serie recibe hoy en día el nombre de Serie de Fourier por dicho cálculo. Sin embargo, el problema de la determinación de estos se ha considerado en las diversas investigaciones como un algoritmo ya establecido, aunque en realidad el problema de significar la STF recae en la significación del cálculo de sus coeficientes, por lo que se debe buscar su "significación compartida mediante el uso culturalmente situado" (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014, p. 93).

Las problemáticas abordadas alrededor de la STF hasta la fecha se sitúan estudiando sólo la serie, en diferentes contextos, sin embargo, no se tienen estudios sobre su construcción articulada con la función trigonométrica como momento previo de construcción a la serie trigonométrica. Entonces se plantea la hipótesis de que *lo trigonométrico evoluciona si las situaciones demandan su uso en la transición de la función a la serie y es en esta transición donde se puede significar la Serie Trigonométrica de Fourier*.

De esta manera se busca proponer una situación de aprendizaje para el abordaje de la STF en el aula a partir de la problematización del saber, desde una didáctica en escenarios socioculturales (Cantoral y Farfán, 2003).

Para lo cual se propone el siguiente objetivo general de la investigación:

Significar las nociones matemáticas alrededor de la Serie Trigonométrica de Fourier, poniendo especial atención en el cálculo de los coeficientes, mediante una problematización del saber matemático que dé cuenta de su construcción social.

Para lograr este objetivo general se proponen los siguientes objetivos específicos:

- Identificar las significaciones progresivas alrededor de la STF en la construcción social de este conocimiento, presente en su génesis histórica.
- Identificar las prácticas que se evidencian a partir de una construcción social del conocimiento respecto de la STF.
- Proponer un rediseño del discurso matemático escolar alrededor de la STF, desde una didáctica en escenarios socioculturales a partir de las hipótesis derivadas de los puntos anteriores.

2 Marco Teórico

A medida en que la matemática se desarrolla y esta empieza a formar parte del sistema escolar, surge la necesidad de mejorar la praxis y la teoría del proceso de enseñanza y aprendizaje de la misma, también existe la preocupación de distintos sectores sociales de incorporar a la matemática y la ciencia en la cultura de la sociedad (Cantoral y Farfán, 2003). La Matemática Educativa es una disciplina que surgió para responder a estas iniciativas (Contreras, 2000).

La evolución de la problemática de estudio de la Matemática Educativa es afectada por las consideraciones alrededor de los fenómenos didácticos que se suscitan de las interacciones de los distintos componentes del triángulo didáctico, docente-alumno-saber, entendiéndose que en esta evolución no siempre se consideraron estos tres componentes. Cantoral y Farfán (2003) indican que está evolución va desde una didáctica sin alumnos, aquella donde se buscaba hacer una presentación de los contenidos matemáticos (inalterables y preexistentes al conocimiento) que fuese simple de asimilar para los alumnos; hasta una didáctica en escenarios socioculturales.

En este sentido, una perspectiva teórica que trabaja bajo esta problemática es la **Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa** (TSME), la cual analiza los fenómenos relacionados con la construcción social del conocimiento matemático (CSCM), por lo que este estudio va más allá del proceso de enseñanza y aprendizaje en la escuela (o en el centro de estudio) sino que también considera todo aquel conocimiento que se construye en sociedad, no solo dentro del ámbito de aula.

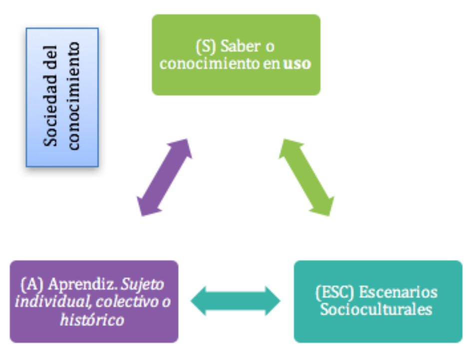


Ilustración 2-1. El triángulo didáctico en la Socioepistemología (Cantoral, 2013)

Bajo este enfoque se hace legítima "toda forma de saber, sea este popular, técnico o culto, pues en su conjunto constituyen la sabiduría humana" (Cantoral, 2013, p. 26), es decir, desde la TSME se toman en cuenta todas las formas de saber[1] y no solamente el saber sabio, lo que permite asegurar que en toda actividad humana se puede construir conocimiento matemático, o dicho de otra forma, las matemáticas son parte de la cultura de la sociedad (ver Ilustración 2-1).

2.1 El discurso matemático escolar

El saber matemático no fue hecho para ser enseñado, este sufre un proceso de transformación hasta llegar a la escuela, lo que provoca una marcada diferencia entre el conocimiento matemático (*saber sabio*) y lo que se enseña en la escuela (*matemática escolar*).

> "El saber matemático se ha constituido socialmente en ámbitos no escolares, su introducción al sistema educativo le obliga a una serie de modificaciones que afectan su estructura y su funcionamiento; de manera que afectan también, a las relaciones que se establecen entre estudiantes y profesores". (Cantoral, 2013, p. 26)

Cuando se introducen los saberes en la escuela existe un sistema de razón que norma la organización de la matemática escolar, además de generar las maneras de participación y consenso en el ámbito didáctico, la TSME ha nombrado este sistema de razón con el término **discurso Matemática Escolar** (dME), donde no sólo se consideran programas de estudio, libros de texto o el discurso escolar, sino que también la conformación de consensos y significados compartidos (Cantoral, Farfán, Lezama, & Martínez-Sierra, 2006).

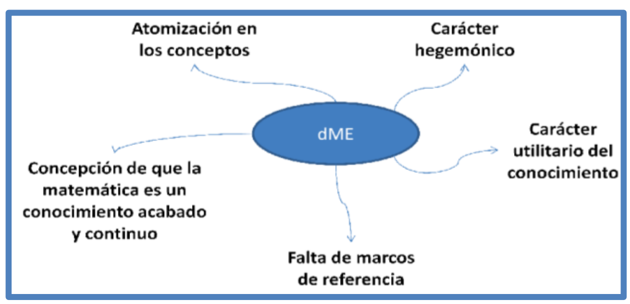


Ilustración 2-2. Mapa del dME (Soto, 2010, p. 79).

La investigación de Soto (2010) evidencia las principales características del dME: el carácter utilitario y no funcional del conocimiento, la atomización en los conceptos, el carácter hegemónico del dME, la concepción de

[1] Se hace diferencia entre conocimiento y saber, entendiéndose el conocimiento como la información sin uso, y el saber como la acción intencional de utilizar el conocimiento para resolver una situación problemática (conocimiento en uso).

que la matemática es un conocimiento acabado y continuo, falta de marcos de referencia para la resignificación de la matemática escolar (ver Ilustración 2-2).

> **Atomización de los conceptos:** no considera los aspectos sociales, contextuales y culturales que permiten la constitución del conocimiento.
> **Carácter hegemónico:** supremacía de argumentaciones y significados frente a otras.
> **Concepción de que la matemática es un conocimiento acabado y continuo:** lo que ha generado que la enseñanza de la matemática sea reducida a la mecanización de procesos o memorización de los conceptos.
> **Carácter utilitario del conocimiento:** la organización de la matemática escolar ha antepuesto la utilidad del conocimiento a cualquiera de sus restantes cualidades. Se busca que el conocimiento tenga un carácter funcional, en el sentido que logre integrar tal conocimiento a la vida para transformarla.
> **Falta de marcos de referencia para la resignificación del conocimiento matemático:** se ha soslayado el hecho de que la matemática responde a otras prácticas de referencia y por tanto es ahí donde encuentra una base de significados naturales. (Soto, 2010, p. xv)

Ante estas características del dME Soto genera un modelo de exclusión, mediante el cual manifiesta que “el dME es caracterizado como un sistema de razón SR, que excluye a los actores del sistema didáctico (estudiantes y docentes) de la construcción del conocimiento matemático a través de una violencia simbólica VS” (Soto, 2010, p. 91). De donde se nota como el actual dME no considera la CSCM, lo que requiere de un rediseño del mismo; el cual, desde la perspectiva de la TSME, debe estar apoyado en sus principios fundamentales.

2.2 Principios de la Socioepistemología

Las investigaciones en Socioepistemología descansan en cuatro principios fundamentales, los cuales son inherentes a la teoría, los cuales, sin formar una secuencia lineal, son: el principio de *racionalidad contextualizada*, el principio de *relativismo epistemológico*, el principio de *resignificación progresiva* y el principio *normativo de la práctica social*. A continuación se comenta brevemente cada uno de ellos a partir de lo expuesto en (Cantoral, 2013).

El *principio de racionalidad contextualizada* alude a que la relación del sujeto al saber es una función del contexto, es decir, la racionalidad del sujeto depende del contexto en el que este se encuentre en un momento y lugar determinado; por lo que la construcción del conocimiento es un producto sociocultural.

El principio de *relativismo epistemológico* concibe que el saber es una multitud de saberes (popular, técnico y culto), con valores de verdad relativos a quién y dónde lo experimente, lo que provoca que se acepte la diversidad de opiniones ante los mismos hechos, ya que al no haber una verdad única, se precisa comprender el porqué de las opiniones de cada sujeto, esto es, el salto del error al obstáculo.

El principio de *resignificación progresiva* admite que, una vez que el conocimiento es puesto en uso, su validez será relativa a un entorno (racionalidad contextualizada) y de este emergió su construcción y sus respectivas argumentaciones (relativismo epistemológico), en el momento en que ese saber evoluciona y de su interacción con diversos contextos, se resignificarán estos saberes enriqueciéndose con variantes significativas.

El principio *normativo de la práctica social* es el eslabón fundamental para el funcionamiento de la teoría, pues la Socioepistemología asume que las prácticas sociales son la base y orientación en los procesos de construcción de conocimiento. La práctica social tiene tres funciones: *normativa* (de la actividad humana), *identitaria* (dota de identidad cultural al individuo o al grupo), *reflexiva-discursiva* (construye argumentaciones de acción) y *pragmática* (regula los comportamientos de los individuos).

Estos principios actúan de manera articulada para develar la constitución del saber a partir de su construcción social, esto a través de una secuencia que permite explicar empírica y teóricamente el proceso de construcción social del sujeto (individual colectivo o histórico): se pasa de la *acción*, directa del sujeto ante el medio en tres acepciones (material o *entorno*, organizacional o *contexto*, social o *normativo*), esto se organiza como una *actividad* humana (situada socioculturalmente), para perfilar una *práctica socialmente compartida* (iteración deliberada del sujeto y regulada por el contexto); dicha práctica cae bajo la regulación de una *práctica de referencia* que es la expresión material e ideológica de un paradigma (ideológico, disciplinar y cultural), las que a su vez son normadas mediante sus cuatro funciones por la *práctica social* (normativa, identitaria, pragmática y discursiva-reflexiva).

Ilustración 2-3. Modelo de prácticas anidadas (Cantoral, 2013, p. 334).

En este sentido, la acción se concibe, desde la epistemología genética de Piaget, como la intervención activa del sujeto que recae sobre objetos del mundo o sobre otras acciones realizadas por el mismo sujeto a fin de adaptarse al entorno y organizarse internamente. Desde el punto de vista sociocultural, Vigotsky propone que a través de la *actividad humana* se da el proceso de formación de las funciones psicológicas superiores, pero no de manera individual, sino en la interacción o cooperación social, lo que amplifica las capacidades intelectuales de cada individuo.

> Si la *acción* como noción de partida, está en la base de los fenómenos adaptativos funcionales del desarrollo de la inteligencia […] a fin de adaptarse al entorno y organizarse internamente; entonces, la *actividad* como concepto teórico es el elemento vinculante del desarrollo humano al desarrollo cultural y consiste en la *actividad práctica e instrumental mediada* (no individual, sino en cooperación social) *para la formación de funciones psicológicas superiores*, a fin de modificar la naturaleza. (Cantoral, 2013, p. 335)

La *práctica social* viene a articular *acción* y *actividad*, pues rige de forma normada dicha articulación (principio normativo de la práctica social). La mediación entre esta normativa y la actividad práctica en sí, la brinda la *práctica de referencia*, pues es la que provee el contexto temporal y situacional necesario para la resignificación (principio de resignificación progresiva). La *práctica socialmente compartida* (o simplemente, la *práctica*) en tanto reiteración eficaz, intencional y controlada de la articulación acción-actividad, queda organizada por paradigmas o *prácticas de referencia*. Estas a su vez quedan normadas por la *práctica social*, el emergente regulatorio que posibilitará el tránsito del conocimiento al saber.

Ahora bien, Reyes-Gasperini (2011) realiza una articulación entre las características del dME (comentadas en la sección anterior), los principios de la TSME y las propuestas de rediseño del dME (ver Tabla 2.1) lo cual es de vital importancia para todas aquellas investigaciones preocupadas por proponer diseños de intervención enmarcados en la CSCM.

dME actual (Soto, 2010)	Principios de la Socioepistemología (Cantoral, 2013)	Propuesta de dME
Carácter utilitario La organización de la matemática escolar ha antepuesto la utilidad del conocimiento a cualquiera de sus restantes cualidades.	**Normativa de la práctica social** La significación de las matemáticas mediante el uso: anidación de prácticas.	**Carácter funcional** La matemática escolar se organiza con base en el saber y el funcionamiento cognitivo, didáctico, epistemológico y social en la vida de los seres humanos, reconociendo a las prácticas sociales en la base de la creación del conocimiento: contexto de significación.
Atomización en los conceptos No considera los aspectos sociales, contextuales y culturales que permiten la constitución del conocimiento.	**Racionalidad contextualizada** La relación con el saber es una función contextual.	**Racionalidades contextuales diversas** Se reconocen privilegian y potencian diversos tipos de racionalidad relativos a la realidad en la que el individuo se encuentre en un momento y lugar; desde el cual se construirá conocimiento: aula extendida (contexto situado).
Carácter hegemónico Supremacía de argumentaciones y significados frente a otros. **Conocimiento acabado y continuo** La enseñanza de la matemática se reduce a la	**Relativismo epistemológico** La validez del saber es relativa al individuo y al grupo cultural.	**Validación de saberes (conocimientos construidos)** La matemática escolar tiene diversas maneras de verse, trabajarse, construirse y desarrollarse, concibiendo que la validez del saber es relativa al individuo y al grupo cultural en el cual este ha emergido y respecto a la racionalidad contextualizada que éste posea.

dME actual (Soto, 2010)	Principios de la Socioepistemología (Cantoral, 2013)	Propuesta de dME
mecanización de procesos o memorización de los conceptos.		
Falta de marcos de referencia para su significación Se ha soslayado el hecho de que la matemática responde a otras prácticas de referencia, donde se encuentran las bases de significados naturales.	**Resignificación progresiva** La significación no es estática, es funcional, relativa y contextual.	**Pluralidad de prácticas de referencia para la resignificación** La pluralidad de prácticas de referencia, su interacción con diversos contextos y la propia evolución de la vida del individuo o grupo resignificarán los saberes hasta el momento construidos, enriqueciéndolos con nuevos significados.

Tabla 2.1. Relación dME actual, Principios de la TSME y propuesta para el rediseño del dME (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015, p. 15).

2.3 Situaciones de Aprendizaje

Desde un punto de vista tradicional, el aprendizaje deviene del proceso de enseñanza, es decir, es un producto de la «buena» enseñanza por parte del docente, quien evalúa los aprendizajes a través de mecanismos de *aprobación* o *reprobación* de determinado curso; se confunde pues *acreditar* con *aprender*. En la actualidad surgen concepciones que garantizan que el aprender matemáticas requiere de su construcción por parte del estudiante y que el aprendizaje se da con éxito cuando se logra poner en funcionamiento para resolver ciertas tareas en determinadas situaciones (enfoques constructivistas).

La TSME posee una aproximación sociocultural del aprendizaje, para la cual los diferentes escenarios (culturales, históricos e institucionales) modifican los procesos mentales del individuo, lo que permite hablar de distintas formas de pensar matemáticas (principio de racionalidad contextualizada) (Cantoral, 2013). En función de estas formas de pensar y los escenarios los objetos matemáticos desempeñan un papel dual, proceso-objeto. Los diferentes entes matemáticos se pueden considerar objetos, los cuales poseen ciertas relaciones entre sí; cada objeto es parte de una estructura más amplia de objetos. Los procesos se componen de operaciones sobre esos objetos y transforman a los objetos mismos.

> Típicamente, el aprendizaje de un concepto incluye muchas etapas que pueden desarrollarse durante periodos muy prolongados y que eventualmente quedan por fuera de un semestre escolar. Por ejemplo, se debe iniciar con el desarrollo de un *proceso* en términos concretos, y en la medida en la que el alumno se familiariza con los procesos, éstos toman la forma de una serie de operaciones que pueden ser desarrolladas y coordinadas en su pensamiento. El alumno habrá adquirido entonces un pensamiento operacional con respecto a ese concepto. En una etapa posterior, la imagen mental de este proceso cristaliza en una nueva y única entidad, digamos que en un nuevo objeto. Una vez que este ha sido adquirido, el estudiante ha desarrollado cierta habilidad para pensar dicha noción, ya sea en el nivel dinámico, como un proceso, o en el nivel estático, como un objeto. Este manejo dual posibilita al estudiante el que piense en términos de posibilidades: ¿qué ocurriría si yo hago o no hago una cierta operación? (Alanís et al, 2000, p. 34)

En este sentido, la construcción de objetos matemáticos es parte importante del aprendizaje de las matemáticas, el cual se instaura en el estudiante al hacer de un proceso un objeto: reificarlo. De esta manera, no se habla en términos de logros de los aprendizaje, sino del desarrollo de pensamiento matemático, el cual no se reduce a la reificación, más bien a la coordinación activa de acciones, actividades y prácticas intencionales y normadas (Cantoral, 2013).

De esta perspectiva, se hace necesario que la instrucción responda a las exigencias del pensamiento, del aprendizaje y de los escenarios (culturales, históricos e institucionales) que requiere la actividad matemática, para lo cual se considera que la actividad matemática se debe apoyar en los propios procesos mentales del estudiante: sus conjeturas, sus procesos heurísticos, sus ensayos y exploraciones; permitiendo que la intuición sirva como punto de partida para el trabajo en la clase (Cantoral, 2013).

Por lo tanto es el que aprende quien debe construir su propio conocimiento haciendo funcionar al saber, es decir, el saber es un medio para la toma de decisiones en la resolución del problema planteado en la situación de aprendizaje. Pero ¿cómo asegurar que se genera el ambiente propicio para esto? Cantoral comenta[2]:

[2] Cantoral (2013) se refiere al problema que plantea marcar sobre una gráfica dada la porción en la que su tercer derivada es positiva, empero lo que se desea rescatar es la esencia de lo que se considera una situación de aprendizaje.

> …Esta pregunta suele plantear un reto especial, tanto a los estudiantes como a los profesores, pues aunque entiendan efectivamente el enunciado del problema, no pueden construir una respuesta que les parezca convincente […] dado que se carece de elementos cognitivos y didácticos que les permitan construir una respuesta adecuada. Consideramos que es hasta este momento en que ellos se encuentran en situación de aprendizaje […], pues la respuesta habrá de ser construida. (Cantoral, 2013, p. 201)

Desde esta mirada, se puede asegurar, que un sujeto (individual o colectivo) no siempre está en situación de aprender, las situaciones de aprendizaje se deben propiciar, proponiendo una situación problema que enfrente al sujeto a un escenario en el que deba poner en juego los saberes que se requieren; se dice entonces que el individuo está en situación de aprendizaje cuando entra en *conflicto*, es decir, el diseño provoca que su respuesta inicial a la tarea encomendada sea errónea y el mismo diseño lo hace percatarse de ello (Reyes-Gasperini, 2011).

Desde la TSME, como lo resalta Reyes-Gasperini (2011), una situación de aprendizaje que promueva la CSCM (normatividad de las prácticas) debe estar cimentada en los principios fundamentales de la teoría: racionalidad contextual, relativismo epistemológico y resignificación progresiva; lo que permitirá proponer un rediseño del dME imperante donde se fomente la CSCM.

2.4 Desarrollo del Pensamiento Trigonométrico

En las secciones precedentes se abordó la TSME, la cual se preocupa, entre otras cosas, por las CSCM. Para esto se pone especial atención a las prácticas por sobre los objetos, lo que provoca que en primera instancia el interés esté en el uso situado del conocimiento, que en el conocimiento mismo. Es decir, se pretende desarrollar el pensamiento matemático basado en un modelo de anidación de prácticas. Ahora bien ¿qué se entiende por pensamiento matemático?

> …usamos el término **pensamiento matemático** para referimos a la diversidad de formas en que piensan las personas que se interesan por identificar, caracterizar o modelar conceptos y procesos propiamente matemáticos en ámbitos diversos, no sólo escolares. Dado que la actividad humana involucra procesos de razonamiento y factores de experiencia, al hablar de pensamiento

> matemático ubicamos la actividad matemática como forma de actividad humana en escenarios diversos.
> En un sentido moderno, habremos de entender que el pensamiento matemático incluye pensamiento sobre temas matemáticos y procesos avanzados de pensamiento en situaciones diversas (abstracción, justificación, visualización, estimación o razonamiento bajo hipótesis). (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015, p. 13)

Por lo que, se puede asegurar que el pensamiento trigonométrico se corresponde con los temas de trigonometría (razones, funciones y series trigonométricas) y los procesos de pensamiento que se dan ante situaciones de naturaleza propiamente trigonométrica, esto hace de la STF un objeto matemático realmente complejo, ya que para significarla, más allá de la mecanización de su cálculo, se deben comprender conceptos como función trigonométrica, sucesión numérica y de funciones, suma parcial, suma infinita, convergencia, entre otros; articulados bajo distintos contextos de representación, con gran cantidad de vivencia práctica sobre la variación y el cambio en situaciones cotidianas que requieran de lo trigonométrico, pues como se ha dicho antes, son las prácticas las que acompañan la construcción del conocimiento matemático.

Desde la TSME, una investigación fundacional preocupada por el desarrollo del pensamiento trigonométrico es la de Montiel (2005; 2011), en la cual se problematiza el saber en juego para reconocer la naturaleza de las nociones trigonométricas e identificar su evolución en las circunstancias histórico-sociales en las que se sitúan. Dicho estudio le permite hablar de la construcción de lo trigonométrico y sus respectivos desarrollos de pensamiento, y no solo de la trigonometría (Montiel, 2013). La Ilustración 2-4, permite observar dicha evolución.

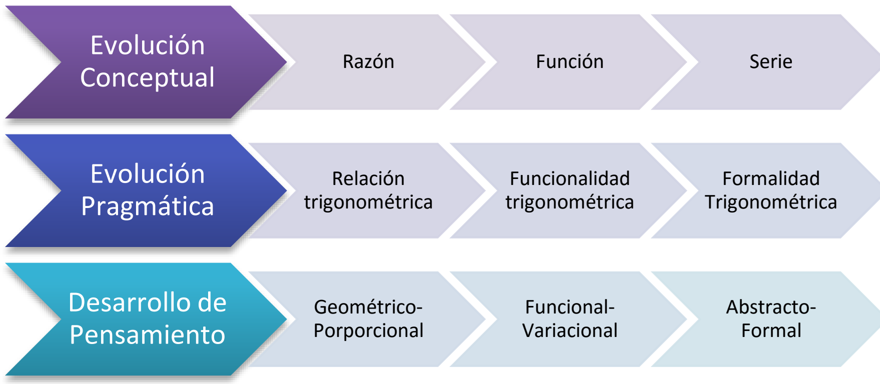


Ilustración 2-4. Evolución de lo trigonométrico a partir de su contexto histórico-social[3] (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015).

Es así como la anticipación norma el primer momento de construcción social de lo trigonométrico, la cantidad trigonométrica, mediante el estudio de fenómenos no manipulables (a nivel macro) donde la proporción genera las nociones y los modelos asociados a la razón trigonométrica; para lo cual un rediseño del dME requiere de la integración de la geometría y la proporcionalidad con la trigonometría para la construcción de modelos geométricos estáticos en los que surja la cantidad trascendente trigonométrica (Montiel, 2011).

Con respecto a la funcionalidad trigonométrica (segundo momento de construcción social de lo trigonométrico), la cual se encuentra normada por la predicción, se propone el estudio de fenómenos no estáticos y de variación con comportamiento periódico-acotado, en la cual la función trigonométrica (ley de variación) se convertirá en una herramienta de predicción. Es en este tipo de contextos donde emerge la noción de radián (unidad de medida) como necesaria para articular el problema físico con el lenguaje matemático que lo modela (Montiel, 2011).

Como último momento de construcción social de lo trigonométrico se encuentra la formalidad trigonométrica, para esta Montiel (2011) asegura que aún precisa distinguir una nueva etapa escolar para dar tratamiento a la serie trigonométrica, ya que en este punto la función trigonométrica se despoja de todo origen geométrico, trabajándose principalmente

[3] Construcción propia a partir de la fuente.

con sus propiedades analíticas. El contexto de origen de la serie trigonométrica fue ya estudiado ampliamente por Farfán (1994; 2012), aunque enfocado en el surgimiento de la noción de convergencia de la series. Farfán reportó que el ambiente fenomenológico de la propagación de calor es cognitivamente más complejo que la serie misma, por lo que se deben buscar ambientes de significación alternativos para la serie trigonométrica. Montiel recomienda que previo al estudio de la serie se debe "significar la función trigonométrica como herramienta predictiva, despojarla del contexto geométrico-estático de las razones (incluido el círculo trigonométrico) y muy en particular proveer de significado a la unidad de medida" (Montiel, 2011, p. 127).

Lo descrito anteriormente se puede resumir en la siguiente tabla, para más detalles se puede consultar (Montiel, 2011; 2013) y (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015):

	Práctica Social		
	Anticipación	**Predicción**	**Formalización**
Practica de referencia	Matematización de la astronomía	Matematización de la física	Matematización de la transferencia de calor
Contexto	Estático-proporcional	Dinámico-periódico	Estacionario-analítico
Lenguaje	Geométrico-numérico	Curvas-ecuaciones	Funciones-límites
Racionalidad	Helenística-euclidiana	Física-matemática	Física-matemática
Herramienta	Razón trigonométrica	Función trigonométrica	Serie trigonométrica
Variables	sen θ (longitud) θ ángulo (grados)	sen x (distancia) x tiempo (radián-real)	sen t (temperatura) t tiempo (real)
Escala de tiempo	Finita	Infinitesimal-infinito	Infinito

Tabla 2.2. Principios básicos para la construcción social del conocimiento trigonométrico en un escenario histórico (Montiel, 2011, p. 123)

Es importante resaltar que con esta epistemología de prácticas no se pretende reproducir en el aula lo que sucedió en la historia, se trata de determinar las condiciones inherentes a la construcción de conocimiento trigonométrico, reconociendo que los factores sociales y culturales afectan son los procesos de apropiación del conocimiento.

3 La Ingeniería Didáctica como metodología de investigación

Una vez descrita la TSME como el fundamento teórico que sustenta esta investigación, a continuación se describe la Ingeniería Didáctica (ID) como metodología de investigación, que ha evolucionado dentro de la TSME con ciertas diferencias respecto de sus inicios en la escuela francesa de didáctica de las matemáticas, esto con el fin de acercarse al fenómeno de la apropiación del conocimiento matemático a través de su construcción social.

Según Artigue (1995, 2014) la ID surgió como un intento de captar sistemáticamente el proceso de enseñanza-aprendizaje en el aula, señala que:

> Se denominó con ese término a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los objetos depurados de la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo. (Artigue, 1995, p. 33)

De esta manera, la ID puede funcionar como guía para el diseño de situaciones para la aplicación en el aula, así como una metodología de investigación que guía las experimentaciones en clase, cuyo sustento teórico proviene de la teoría de transposición didáctica y la teoría de situaciones didácticas (Farfán, 1997; Artigue, 2014, 2015).

La ID surge con la ambición de mejorar la comprensión y el funcionamiento de los sistemas didácticos, poniendo especial atención en las limitaciones y variables que actúan sobre el sistema, para esto se pone especial atención a realizaciones didácticas controladas, las cuales cuentan con un rol destacado en la metodología de la ID para validar los diseños de situación creados (Artigue, 2014).

En Albert (1996) se presentan las características generales de la ID como metodología de investigación:

- *Se aplica en situación escolar*: es decir, posee un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, donde la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de aprendizaje juega un rol fundamental.

- *Análisis cualitativo y validación interna*: A diferencia de otras metodologías cuya validación es externa, dependen de la comparación mediante análisis estadísticos utilizando un grupo experimental y otro de control, en la ID se caracteriza por tener una análisis fundamentalmente cualitativo, utilizando estudios de caso y haciendo una confrontación entre el análisis a priori y análisis a posteriori.
- *Funcionamiento metodológico*: los objetivos de investigación de una ID no se limitan a los contenidos matemáticos, permite abordar diversidad de aspectos cuya complejidad sobrepasa el salón de clase, lo que la hace singular, no por los objetivos de las investigaciones que entran en sus límites, sino por su funcionamiento metodológico.

La ID cuenta con cuatro fases, las cuales corresponden a su esquema experimental de trabajo: análisis preliminar; diseño de secuencia y análisis a priori; puesta en escena, observación y toma de datos; análisis a posteriori y validación interna, esta investigación se encuentra en los dos primeros momentos.

3.1 El análisis preliminar

Las investigaciones enmarcadas en la TSME analizan el papel de la práctica social en la constitución del saber de manera sistémica, se consideran cuatro componentes fundamentales acerca del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural (pues el conocimiento es una construcción social y cultural), los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza (Cantoral y Farfán, 2003). Desde esta mirada es importante el ¿qué enseñar? y no solamente el ¿cómo hacerlo? la cual ha sido la preocupación predominante en la mayoría de las etapas en la evolución de la problemática de la Matemática Educativa:

La *dimensión epistemológica* estudia “las circunstancias que hicieron posible la construcción del conocimiento matemático” (Cantoral, 2013, p. 147). Para este análisis se estudian diferentes momentos históricos: la discusión alrededor del problema de la cuerda vibrante, el problema de la propagación de calor; además del surgimiento de la ingeniería como ciencia, que regula el trabajo matemático del tiempo de Fourier; un análisis epistemológico a profundidad se encuentra en (Farfán, 2012).

La *dimensión didáctica* se preocupa por el cómo vive el saber en el sistema didáctico, es decir su intencionalidad a la hora de enseñarlo, con el fin de ver cómo ha evolucionado ese saber en los entornos escolares y no escolares. Para este propósito se estudian libros de texto, planes y programas de estudio.

La *dimensión cognitiva* analiza las formas de apropiación y significación progresiva del conocimiento que vivencian los partícipes en una situación de aprendizaje con fines de construir conocimiento matemático.

La *dimensión social y cultural* es agregada al análisis preliminar de la ID por la TSME, pero esta no se observa separada de las demás, está inmersa en cada análisis, con el fin de identificar aquellas prácticas humanas que propician la apropiación del conocimiento matemático, el uso del saber.

La integración entre estas cuatro componentes es lo que en TSME se denomina una **problematización del saber matemático**, el cual "radica en buscar las causas que conducen a los individuos a «a hacer lo que hacen» con el conocimiento en juego, es decir, hacer del saber matemático un problema «localizando y analizando su uso y su razón de ser»" (Reyes-Gasperini, 2011, p. 39).

3.2 Diseño de secuencias y análisis a priori

A partir del análisis preliminar se diseñan situaciones de aprendizaje, para esto la Ingeniería Didáctica supone la selección de diversos aspectos, que son:

- Nivel global: que supone un análisis de los vínculos epistemológicos, didácticos y cognitivos que permitan explicar la enseñanza actual y sus efectos.
- Nivel local: por un lado el grupo de condiciones para ser cumplidas por cada una de las tareas de la secuencia didáctica con sus respectivas justificaciones;

además de identificar los momentos críticos de esta y conjeturar para cada uno de estos las posibles decisiones que podrían tomar los estudiantes, junto con un análisis de las posibles consecuencias de cada una de estas decisiones.

Para lo anterior se toma la decisión de actuar sobre distintas variables del sistema, que son pertinentes al problema planteado. Los tipos de variables son:

- Macro-didácticas o globales: conciernen a la organización global de la ingeniería. Tiene que ver con decisiones como recurrir a herramientas informáticas, conocimientos previos, predominio de algún(s) marco de referencia por sobre otro(s) (numérico, gráfico, algebraico, analítico), sistema educativo, políticas institucionales, currículum, entre otras.
- Micro-didácticas o locales: concernientes a la organización de la secuencia de aprendizaje, es decir, supone la descripción del proceso que se ha de seguir (problemas específicos, tamaño de los grupos de trabajo, tiempos de discusión, entre otros). Además dentro de la secuencia se deben realizar los tránsitos en los diferentes contextos: numérico, algebraico y geométrico, para así detectar las condiciones que permitan un funcionamiento más óptimo.

Es importante resaltar que aunque la selección de las variables globales se suelen presentar separadas de las locales, no son independientes entre sí, ya que las concepciones generales deben permitir el devenir de las locales, las cuales están directamente ligadas al diseño de la secuencia de aprendizaje.

El análisis a priori debe concebirse como un análisis de control de significado, es decir, busca explicar previo al trabajo del estudiante las relaciones entre el significado de los conocimientos matemáticos y las secuencias de tareas que debe trabajar durante la situación de aprendizaje. Además el análisis a priori debe mostrar como la elección de las diferentes variables (macro y micro) provocan un control de la organización interna de los significados del estudiante, se basa en un conjunto se hipótesis que se van a confrontar con el análisis a posteriori.

Por tanto el análisis a priori comprende una descripción de las selecciones locales relacionándolas con las globales y las características de la situación de aprendizaje, posteriormente se analiza lo que podría estar en juego durante el desarrollo de las secuencias de tareas: posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que dispone el estudiante; por lo que se busca predecir que en los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado para el aprendizaje y que la tarea intentaba desarrollar.

Luego se hace la experimentación, observación y toma de datos, y con base en esto el análisis a posteriori, con el objetivo de validar el diseño de intervención, pero esto no es parte de esta investigación, ya que está basada, como ya se dijo en los momentos de fundamentación (análisis preliminar) y diseño (análisis a priori).

Según Artigue (2014), actualmente existen dos retos importantes para el desarrollo de la ID. El primero apunta que, aunque la ID se desarrolló como metodología de investigación, desde sus inicios ha tenido la ambición de proveer un modelo para producir interacción entre la investigación fundamental y la acción en los sistemas didácticos. Sin embargo, el actual interés en las representaciones y prácticas de los profesores ha provocado que hoy en día se haga diferencia entre investigación en ID y desarrollo en ID, reconociendo que no pueden obedecer a los mismo niveles de control, los cuales aún no son claros.

Otro reto importante es que hoy día se está desarrollando lo que se ha nombrado investigación basada en el diseño (IBD), la cual emergió independiente de la ID, lo que refleja la gran importancia que el diseño ha tomado en matemática educativa. Sin embargo, hoy en día no se han establecido conexiones apropiadas entre la IBD y la ID, sin que ambas aproximaciones pierdan su coherencia (Artigue, 2014).

4 Un acercamiento a la STF desde la TSME

Este capítulo constituye la primera fase de la metodología de la ID aplicada al problema de investigación que se está atendiendo. Por esta razón, se consideran las componentes epistemológica, didáctica y cognitiva con respecto al saber matemático que nos interesa, el análisis de estas componentes permitirán delinear una construcción social de la STF (Capítulo 5) y en su conjunto darán elementos sugerentes para el diseño de situaciones de aprendizaje y las posibles realizaciones de los estudiantes al abordarlas.

Primeramente se aborda la dimensión epistemológica, bajo la sección “La STF en su contexto de origen”, seguidamente la didáctica en “La STF en el aula” y por último la componente cognitiva en la sección “Resignificaciones alrededor de la STF”.

4.1 La STF en su contexto de origen

El surgimiento de la STF es un proceso que tardó alrededor de un siglo, desde que Brook Taylor (1685-1731) enunció el famoso problema de la cuerda vibrante en 1715, hasta el trabajo de Dirichlet sobre la convergencia puntual de la STF (1829), durante esa época, siglo XVIII principalmente, se estaban sentando las bases del Análisis Matemático como se conoce hoy en día.

Durante el siglo XVIII se reestructura el cálculo de Leibniz, el cual era estudiado por Jakob y Johann Bernoulli, L’Hôpital y otros; esa reestructuración fue encabezada por Leonhard Euler (1707-1783) con su libro *Introduction a l’analyse infinitesimale* (1748), en el primer volumen define el concepto de función, el cual es su objeto de estudio:

> Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta, como quiera que lo sea, de dicha cantidad y de números o cantidades constantes. (Euler, 1748, p. 2)

A partir de esta definición hace su clasificación de las funciones en algebraicas o trascendentes, explícitas o implícitas y uniformes o multiformes; por otra parte en el segundo volumen hace una distinción entre funciones continuas y discontinuas:

> Una línea curva continua es aquella cuya naturaleza se expresa por una sola función determinada de x. Pero, si una línea curva está compuesta de diferentes porciones BM, MD, DM, etc., determinadas por varias funciones

> de x, de modo que siendo una parte BM el resultado de una función, otra parte MD sea el de una segunda función, etc., llamamos a esta clase de líneas curvas discontinuas, o mixtas e irregulares, porque no están formadas según una sola ley constante y están compuestas de porciones de diferentes curvas continuas. (Euler, 1748, p. 4)

Por otra parte la noción de integral en la época tenía diferentes acepciones, que se preservan aún después de la definición de función dada por Euler.

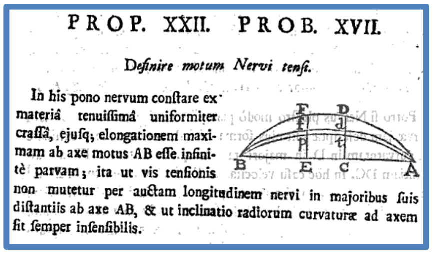
> Así, para Newton la noción de integral consistía en "hallar las cantidades fluentes de una fluxión dada". Para Leibniz la noción de integración consistía en una suma de diferenciales y la relación recíproca entre las "operaciones de suma y tomas de diferenciales". Por otra parte, los Bernoulli reinterpretaron la integral de Leibniz como la inversa de la diferenciación. (Cordero, 2003, p. 26)

Es a partir del problema de la cuerda vibrante y del trabajo de Fourier que se cuestionan las bases del Análisis Matemático, por esta razón este capítulo inicia con el estudio del problema de la cuerda vibrante, seguidamente se habla del contexto en el que se desarrolla el trabajo de Fourier con el surgimiento de la ingeniería como ciencia, para luego comentar la obra Teoría Analítica del calor en cuatro partes, primero el establecimiento de la ecuación general de calor, luego la utilización de esta en una situación específica, seguidamente el desarrollo de una función en serie trigonométrica y la convergencia de dicha serie, para cerrar con el cálculo de los coeficientes te Fourier.

4.1.1 El problema de la cuerda vibrante

El problema de la cuerda vibrante fue propuesto por Taylor con dos problemas planteados en su obra *Methodus Incrementorum Directa & Inversa* (1715):

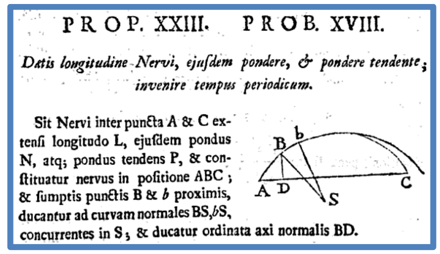
- ❖ Problema 17. Determinar el movimiento de una cuerda tensa.
- ❖ Problema 18. Dada la longitud y el peso de la cuerda, así como la fuerza que la tensa, encontrar el tiempo de vibración.



PROP. XXII. PROB. XVII.

Definire motum Nervi tensi.

In his pono nervum constare ex materiâ tenuissimâ uniformiter crassâ, ejusq; elongationem maximam ab axe motus AB esse infinitè parvam; ita ut vis tensionis non mutetur per auctam longitudinem nervi in majoribus suis distantiis ab axe AB, & ut inclinatio radiorum curvaturæ ad axem sit semper insensibilis.



PROP. XXIII. PROB. XVIII.

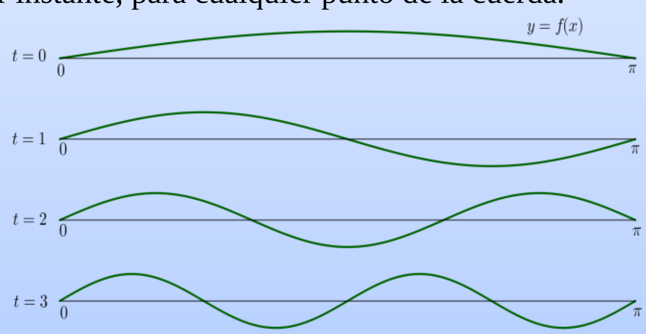
Datis longitudine Nervi, ejusdem pondere, & pondere tendente; invenire tempus periodicum.

Sit Nervi inter puncta A & C extensi longitudo L, ejusdem pondus N, atq; pondus tendens P, & constituatur nervus in positione ABC; & sumptis punctis B & b proximis, ducantur ad curvam normales BS, bS, concurrentes in S; & ducatur ordinata axi normalis BD.

Ilustración 4-1. Problemas XVII y XVIII del Methodus (Taylor, 1715).

Hoy día, el problema específico podría redactarse de la manera siguiente:

Supóngase que una cuerda flexible se ha tensado sobre el eje X y sujetado de dos puntos, por conveniencia $x = 0$ y $x = \pi$, entonces se tira de la cuerda hasta tomar la forma de cierta función $y = f(x)$ en el plano XY, si se deja en libertad producirá vibraciones en ese plano. Se debe determinar el movimiento de la cuerda, es decir, su posición, velocidad y aceleración en cualquier instante, para cualquier punto de la cuerda.



Si la subsecuente vibración es completamente transversal, entonces alguna función $y = y(x, t)$ representará el desplazamiento vertical de la cuerda en la abscisa x, donde $0 \leq x \leq \pi$ y $t \geq 0$ es el tiempo transcurrido desde que se suelta.

Para 1715, Taylor ya había probado la existencia de soluciones periódicas del problema anterior, pero no disponía de una ecuación que modelara el fenómeno, por lo que no pudo calcular las soluciones; Taylor argumentaba que en cada punto la fuerza restauradora es proporcional a la distancia de este al eje X, lo que provoca centrarse en el primer modo fundamental de vibración de la cuerda, por lo que no le permite llegar a la solución general del problema. En 1727 Johann Bernoulli (1667-1748) abordó el problema en su forma discreta, considerando un número finito de cuentas de igual masa y colocadas equidistantes sobre una cuerda sin masa (con masa despreciable en comparación con la de las cuentas), al igual que Taylor pensaba que la fuerza restauradora es proporcional a la distancia al eje X, por lo que no pudo concluir resultados generales. Fue el hijo de J. Bernoulli, Daniel Bernoulli (1700-1782), quien se percató de la existencia de un número infinito de modos fundamentales de vibración, y también de soluciones complejas a las que no se les podía asignar una frecuencia de vibración, esto utilizando el mismo modelo del collar de cuentas de su padre.

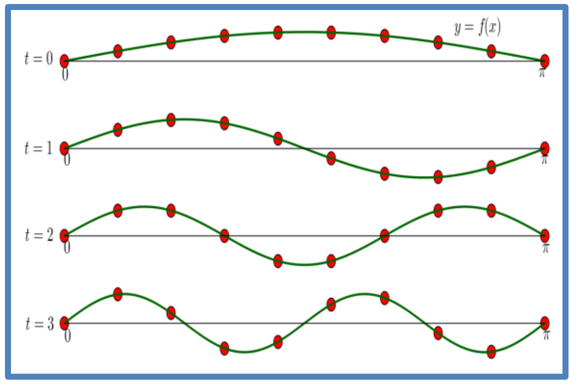


Ilustración 4-2. Modelo discreto del problema de la cuerda vibrante.

El primer modelo matemático decisivo del problema fue propuesto en 1747 por Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) quien demostró que la función $y = y(x,t)$ debe satisfacer las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} a^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ y(x,0) = f(x) \\ \dfrac{\partial y(x,0)}{\partial x} = 0 \\ y(0,t) = y(\pi,t) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Donde la primera condición es conocida como la **ecuación de onda unidimensional**, la segunda se refiere a la forma inicial de la cuerda, en tanto que la tercera indica que la velocidad inicial de la cuerda es cero y la última se refiere a que los extremos de la cuerda se mantienen fijos sin importar el tiempo que transcurra. D'Alembert probó que la solución general de (4.1) puede presentarse por:

$$y(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] \tag{4.2}$$

La interpretación física que hace D'Alembert de (4.2) es que esta es la superposición de dos ondas, una que se desplaza hacia la izquierda, $\frac{1}{2}\,f(x+at)$, y otra que se desplaza hacia la derecha, $\frac{1}{2}\,f(x-at)$, pero indica que la forma inicial de la cuerda debe representarse en toda su extensión por una y la misma ecuación, es decir, debe ser *continua en el sentido de Euler*[1]; además de que la función inicial debe ser impar y periódica (Farfán, 2012).

Euler llega, en 1748, a la misma solución que D'Alembert, sin embargo difería de él respecto de las funciones iniciales que se podían admitir en el problema, para Euler no existía alguna razón física para no admitir como forma inicial de la cuerda aquellas que estuviesen definidas en $[0, \pi]$ por distintas expresiones analíticas.

> … estas diferencias pueden considerarse como una de las primeras manifestaciones escritas sobre los problemas que ha llevado consigo la definición de la noción de "función", un concepto que hoy en día presumimos tener muy claro. (Cañada, 2000, p. 296)

Se puede decir que la discusión radica en el hecho de que para aquel tiempo una función daba lugar a una gráfica, pero no a la inversa, es decir, dada una gráfica no necesariamente una única función podía representarla, pues podía dar lugar a distintas expresiones en distintos intervalos. Por lo tanto, Euler defendía que cualquier gráfica podía considerarse como curva inicial, no así D'Alembert.

D. Bernoulli, en 1755, propone otra forma de obtener la solución, como superposición de ondas de la forma:

$$y_n(x,t) = \operatorname{sen}(nx)\cos(nt), \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{4.3}$$

Para cada tiempo t fijo, (4.3) es un múltiplo de $sen(nx)$, que se anula exactamente en $n-1$ puntos del intervalo $(0, \pi)$, es decir, hay $n-1$ puntos para los cuales la cuerda se mantiene fija, entre dichos puntos la cuerda se comporta como en (4.3).

Se cree que D. Bernoulli se basó en sus conocimientos musicales para concebir la idea anterior, principalmente en la superposición de armónicos, es decir funciones de la forma (4.3), esto significa que la solución de (4.1) debe tener la forma:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx)\cos(nt) \tag{4.4}$$

[1] Continuidad, en el sentido de Euler, se entiende como invariabilidad, inmutabilidad de la ley de la ecuación que determina una función, sobre todo el dominio de valores de la variable independiente (Farfán, 2012).

Donde los coeficientes a_n se deben elegir adecuadamente para que se satisfaga (4.1). Hay otra manera de llegar a (4.4), y esta es de suma importancia en el estudio de Fourier (1768-1830) sobre la propagación de calor, el cual se estudiará más adelante. Note ahora que al utilizar la segunda condición inicial dada en (4.1) se tiene que:

$$y(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx) \tag{4.5}$$

Es decir, una función arbitraria $f(x)$ se puede representar como superposición de soluciones simples de las dadas en (4.3), lo cual fue punto de controversia entre los matemáticos de la época, pues no se admitía que cualquier función pudiera representarse como en (4.5), por ejemplo, Euler sostenía que al cumplirse (4.5) la función $f(x)$ debía ser periódica e impar, lo cual era una restricción innecesaria, sin embargo D. Bernoulli se mantuvo firme en su postura pues argumentaba que hay suficientes coeficientes en (4.5) para seleccionarnos de manera que la igualdad se cumpla, por lo que para él esta era la solución general del problema de la cuerda vibrante.

Así pues “el meollo de la discusión no radica en la solución en sí misma, sino en cuál de ellas es la *solución general*, así como en la metodología empleada para encontrarla” (Farfán, 2012, p. 51). Un análisis más profundo acerca del estado del Análisis Matemático imperante durante el siglo XVIII se puede encontrar en Farfán (2012), pues el problema de la cuerda vibrante provoca la revisión de los fundamentos del Análisis Matemático.

4.1.2 El surgimiento de la ingeniería como ciencia

Al lado del trabajo de Fourier y en su contexto local, la Francia del siglo XVIII, se produce el surgimiento de la ingeniería matemática; según Farfán (1994) quien usó por primera vez la frase “la ciencia de la ingeniería” fue Bernard Forest de Bélidor (1698-1761). A partir de 1720 Bélidor fue designado como profesor de matemáticas en la escuela de artillería de La Fère, en donde su trabajo docente atrajo la atención internacional.

Bélidor fue autor de numerosos textos de matemáticas e ingeniería, entre los que destacan *La Ciencia de los Ingenieros* (1729) y *La Arquitectura Hidráulica* (entre 1737 y 1753), de estos dos, en el primero Bélidor hace explicito su programa para la ingeniería: que la ingeniería sea cada vez más matemática, es decir, que se utilice más el lenguaje algebraico, a diferencia de las tablas numéricas que era lo usual para el trabajo del ingeniero de la época, esto con el fin de que el lenguaje utilizado en ingeniería sea más científico, pues según Bélidor "las reglas de la ciencia sólo pueden entenderlas quienes entienden este lenguaje" (Farfán, 1994, p. 55).

> Depuis qu'on a cherché dans les Mathématiques les moyens de perfectionner les Arts, on y a fait des progrès qu'on n'eût osé espérer auparavant […] l'opinion qu'il n'y a que la seule pratique qui peut les mener au but, est encore un obstacle qui n'est pas le moins difficile à vaincre. Il est bien vrai que l'expérience contribue beaucoup à donner des connaissances nouvelles, et qu'elle fournit tous les jours aux plus habiles gens des sujets de réflexion. (Bélidor, 1729, p. 11)

Se puede notar como Bélidor no niega la importancia a la experiencia, pero piensa que los saberes se transmiten con los mismos "defectos" de generación en generación, por lo que se requiere sustituir la experiencia por el lenguaje del álgebra y la mecánica, en contraposición al uso de sumarios, tablas y guías práctica que era la preferencia en la época. Ante el intento de popularizar el conocimiento generado por la comunidad matemática en la práctica del ingeniero, Bélidor fue fuertemente criticado por los mismos artilleros e ingenieros, una oposición que se puede notar ante el conocimiento matemático en la escuela hoy en día.

La ingeniería como ciencia, como la conocemos en la actualidad, se estableció a mediados del siglo XIX y la École Polytechnique tuvo un papel protagónico en el proceso, pues poseía las condiciones para la creación de un ambiente de la ingeniería como ciencia.

Previo al nacimiento de la Politécnica se fundó la Escuela Central de Ingeniería Militar en Mézières, al noreste de Francia en 1749, cuya característica principal fue "el alto nivel de instrucción matemática, quizá es más alto de las instituciones de su tiempo" (Farfán, 1994, p. 57), se piensa por el proceso riguroso de selección de los alumnos, con lo cual podían ofrecer una educación de alto nivel a sujetos seleccionados cuidadosamente, donde las matemáticas jugaban un papel central.

> …el cuerpo teórico de la educación en ingeniería se basaba, esencialmente, en aplicaciones geométricas. Las instituciones militares no dieron cabida a la

> creación de una base matemática para la ingeniería; a pesar del fuerte peso que la materia tuvo en su currículum. (Farfán, 1994, p. 58)

Se puede notar como un alto nivel de matemáticas no propicia la creación científica necesariamente, empero, Mézières se constituyó en las raíces de la École Centrale de Travaux Publics, que luego se llamó École Polytechnique, con el propósito, según sus fundadores, de imponer la uniformización y un nivel avanzado de conocimientos en matemáticas en toda Francia. Con esto se crearon las Escuelas Centrales, las cuales incorporaron cursos de matemáticas superiores con el fin de preparar a los alumnos para su ingreso a la Politécnica.

Los profesores de la Politécnica tenían la obligación de escribir materiales para sus cursos, lo que provocó un incremento notable en la producción de textos de matemáticas, contribuyendo a la matematización del mundo científico, en un periodo en el que las matemáticas no lograron tantos avances como lo hicieron otras ciencias, posibles razones de esto las da Farfán (1994):

- Las matemáticas se vieron favorecidas en el ámbito educativo en este periodo, apreciadas tanto por alumnos como por profesores.
- Las matemáticas se convirtieron en un mecanismo para la destilación de élites, a través de la minuciosa selección basada en las matemáticas hecha en Mézières, cuya tradición continuó en la Politécnica donde sólo un examen de matemáticas decidía el ingreso.
- Las matemáticas se concibieron como un lenguaje necesario para el desarrollo de las demás ciencias.

De aquí se puede notar la necesidad de los libros de texto de matemáticas para distintos sectores, donde su preocupación inicial no era la investigación, más bien reforzar la creación de ingenieros, militares e industriales; este fue el paradigma con el que trabajó el sistema educativo en la época, tomando la Politécnica como punto de referencia. Es así como la Politécnica fue un punto crucial en el surgimiento de la ingeniería como una ciencia, pues ésta presenta el ambiente científico idóneo para su desarrollo.

4.1.3 La Teoría Analítica del Calor

Las ideas de D. Bernoulli esperaron por más de cincuenta años para ser tomadas en cuenta, esta vez por Jean Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830), quien en 1807 envió una artículo al *Institute de France* que trataba sobre la transmisión de calor; el artículo fue estudiado por Lagrange (1736-1813) y Laplace (1749-1827), entre otros matemáticos prominentes de la época, pero este fue rechazado por el *Institute*, pues no poseía el rigor matemático necesario, según sus revisores.

Los miembros del *Institute de France* estaban convencidos de la importancia de los estudios de Fourier y convocaron un concurso sobre el tema de la propagación de calor, el concurso fue ganado por Fourier en 1812 con una versión ampliada de su obra inicial, pero criticado por su falta de rigor no logró publicar su trabajo en las *Mémoires* de *Institute*. No fue sino hasta 1822 que publicó su prestigioso libro *Théorie Analytique de la Chaleur* (Fourier, 1822), en la cual incorporó su artículo de 1812 sin cambios, dos años más tarde fue nombrado secretario del *Institute de France* y pudo publicar su artículo en las *Mémoires*.

Antes de iniciar su obra Fourier tenía conocimientos del trabajo de *Mecánica Celeste* de Lagrange y de los planteamientos de D. Bernoulli sobre el problema de la cuerda vibrante. A ciencia cierta no se sabe si Fourier conocía el trabajo de Jean Baptiste Biot (1774-1862) sobre propagación de calor, quien utilizó la conocida ley de enfriamiento de Newton para tratar de modelar la distribución de calor en una barra metálica muy larga calentada desde uno de sus extremos, sin embargo, Biot asumía el mismo intercambio de calor entre la superficie de la barra metálica y el aire, que en el interior de la barra; en cambio, Fourier hace la diferencia entre el comportamiento del flujo del calor dentro de un sólido y en su superficie, lo que le permite obtener la ecuación diferencial parcial que modela el fenómeno.

Fourier estaba interesado por estudiar las leyes matemáticas que gobiernan la propagación de calor en la naturaleza y reconoce que las teoría mecánicas, propias del siglo XVIII, no se aplican a la naturaleza del calor, por lo que éste no se puede explicar con base en los principios del movimiento y el equilibrio (Farfán, 2012), sino que las explicaciones físico-matemáticas responden a los resultados de la experimentación.

> Les principes de cette théorie sont déduits, comme ceux de la mécanique rationnelle, d'un très-petit nombre de faits primordiaux, dont les géomètres ne considèrent point la cause, mais qu'ils admettent comme résultant des observations communes et confirmés par toutes les expériences.
> Les équations différentielles de la propagation de la chaleur expriment les conditions les plus générales, et, ramènent les questions physiques à des problèmes d'analyse pure, ce qui est proprement l'objet de la théorie. (Fourier, 1822, p. xi)

Se puede notar como Fourier busca modelar los fenómenos naturales, en particular la propagación de calor, de la manera más general posible, logrando explicaciones matemáticas congruentes con las ideas físicas, pero separadas, lo cual no era usual en la época, esto marca una cambio en el análisis de los fenómenos estudiados hasta ese momento, es decir, Fourier busca "reducir, con la ayuda del Análisis Matemático, la investigación física del fenómeno de propagación de calor en cuerpos sólidos a los problemas del cálculo integral" (Farfán, 2012, p. 96), Fourier al respecto expresa: "La Théorie que nous allons exposer a pour objet de démontrer ces lois; chaleur, à des questions de calcul intégral dont les éléments sont donné par l'expérience" (Fourier, 1822, p. 1).

A través de un diseño experimental Fourier describe lo que significa resolver el problema de transferencia de calor en cuerpos sólidos, aunque de manera general se puede decir que el problema consiste en determinar una expresión analítica $F(x,t)$, que describa todas las curvas de temperatura asociadas al sólido, para cada tiempo (Farfán, 2012).

Luego de obtener ciertas ecuaciones al estudiar casos particulares (un anillo metálico, un sólido esférico y un prisma rectangular), utiliza estas mismas ecuaciones para estudiar las isotermas, las cuales obedecen a la geometría del cuerpo y la naturaleza del material.

Seguidamente Fourier estudia la trasferencia de calor durante un tiempo dt en un prisma rectangular del sólido, cuyo volumen es $dxdydz$ y llega a la ecuación de propagación de calor[2].

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{C \cdot D}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \tag{4.6}$$

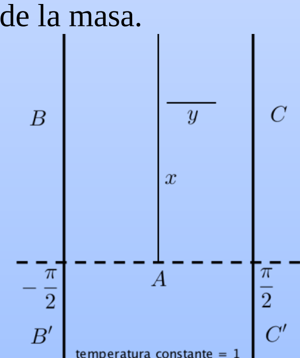
[2] Una explicación detallada de la deducción realizada por Fourier se puede consultar en (Farfán, 2012).

En (4.6), $v(x, y, z, t)$ representa la temperatura del sólido en el punto (x, y, z) en el tiempo t y K es la constante de transmisión de calor que depende del material del solido.

4.1.4 Propagación del calor en una lámina infinita

Después de deducir la ecuación (4.6) Fourier dedica el resto de su obra a resolver problemas en los que aplica dicha ecuación, en el capítulo III de la *Théorie Analytique de la Chaleur* consideró el problema de la propagación del calor en una lámina infinita, en el cual resuelve el problema de la determinación del estado estacionario, lo que lo lleva al estudio de la convergencia de series trigonométricas infinitas (Farfán, 2012). El planteamiento de Fourier es el siguiente:

> Suponemos que una masa sólida homogénea está contenida entre dos planos verticales B y C paralelos e infinitos, y que se ha dividido entre dos partes por un plano A perpendicular a los otros dos (ver figura); consideremos las temperaturas de la masa BAC comprendida entre los tres planos infinitos A, B, C. Se supone que la otra parte $B'AC'$ del sólido infinito es una fuente constante de calor, es decir, que todos esos puntos permanecen con temperatura 1, la cual no puede llegar a ser jamás menor ni mayor. En cuanto a los dos sólidos laterales, uno comprendido entre el plano C y el plano A prolongado y el otro entre el plano B y el A prolongado, todos los puntos de ambos tienen una temperatura contante 0, y una causa exterior los conserva siempre a la misma temperatura; en fin, las moléculas del sólido comprendido entre A, B y C tienen la temperatura inicial 0. El calor pasará sucesivamente de la fuente A al sólido BAC; él se propagará en el sentido de la longitud infinita y, al mismo tiempo, se desviará hacia las masas frías B y C, quienes absorberán una gran cantidad. Las temperaturas del sólido BAC se elevarán más y más; pero ellas no podrán pasar ni aun alcanzar un máximo de temperatura, que es diferente para los distintos puntos de la masa.



Así el problema consiste en determinar las temperaturas permanentes de un sólido rectangular infinito comprendido entre dos masas de hielo B y C y una masa de agua hirviendo A; la consideración de los problemas simples y primordiales es uno de los medios más seguros para el descubrimiento de leyes de fenómenos naturales, y nosotros vemos, por la historia de las ciencias, que todas las teorías se han formado siguiendo este método.

Para este caso particular se omite la coordenada z en la ecuación (4.6), pues el grosor se considera infinitesimal, además como se está tratando de determinar el estado estacionario se cumple que $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, de donde la ecuación por resolver se reduce a:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \tag{4.7}$$

Si una función $\varphi(x, y)$ satisface, debe cumplir las siguientes condiciones, dadas por Fourier:

> 1. Anularse cuando se sustituye $-\frac{\pi}{2}$ o $\frac{\pi}{2}$ en lugar de y, cualquiera que sea, por otra lado, el valor de x.
> 2. Ser igual a la unidad si se supone $x = 0$ y si se le atribuye a y un valor cualquiera comprendido entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$.
>
> Es necesario añadir que esta función $\varphi(x, y)$ debe llegar a ser extremadamente pequeña cuando se da a x un valor muy grande, ya que todo el calor surge de una sola fuente A. (Fourier, 1822, p. 161)

Estas son las condiciones de frontera del problema, es decir, si trasladamos a nuestra notación actual el problema a resolver es, con $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \\ v\left(x, -\dfrac{\pi}{2}\right) = v\left(x, \dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \\ v(0, y) = 1 \end{cases} \tag{4.8}$$

La primera condición representa la ecuación de propagación de calor de la lámina infinita que se pretende resolver, la segunda condición se refiere a la temperatura en los planos B y C, y la tercera a la temperatura constante que surge de A.

Considerando las ideas de D. Bernoulli para la ecuación de ondas, Fourier busca las soluciones más simples para la ecuación de calor: aquellas que se pueden escribir de la forma $v(x,y) = F(x)f(y)$ (**método de variables separadas**), lo que provoca que la primera condición se transforme en las dos ecuaciones diferenciales ordinarias siguientes, donde $m \in \mathbb{R}$:

$$F''(x) - m^2 F(x) = 0 \tag{4.9}$$

$$f''(y) + m^2 f(y) = 0 \tag{4.10}$$

Una solución es de la forma $F_m(x) = e^{-mx}$, donde m debe ser positivo, pues en caso contrario e^{-mx} tendería a infinito cuando x es infinitamente grande, lo cual contradice el contexto físico. Por otra parte una solución corresponde a $f_m(y) = \cos(my)$, por lo que las soluciones de (4.8) tienen la forma:

$$v_m = e^{-mx}\cos(my)\,, \qquad con\; m > 0 \tag{4.11}$$

Para determinar el exponente m se aplica la segunda condición inicial, con lo cual Fourier proporcionó un procedimiento para calcular "infinitas soluciones", donde $a_n \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, de la forma $v_n(x,y) = a_n e^{-(2n+1)x}\cos\big((2n+1)y\big)$, lo que significa que la solución general de (4.8) es de la forma:

$$v(x,y) = ae^{-x}\cos y + be^{-3x}\cos 3y + ce^{-5x}\cos 5y + \cdots \tag{4.12}$$

Al utilizar la tercera condición inicial se tiene que, para $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$:

$$1 = a\cos y + b\cos 3y + c\cos 5y + \cdots \tag{4.13}$$

En este punto Fourier hace la salvedad de que no se sabe los valores que puede tomar la solución si se utilizan valores de y que no estén comprendidos entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$, lo cual carece de significado para la concepción de función que se posee en la época. Además, análogamente a lo sucedido con la solución del problema de la cuerda vibrante dada en (4.5), se cuestiona si es posible elegir adecuadamente las constantes $a, b, c, \ldots$ de manera que la igualdad se cumpla, para lo que Fourier, a diferencia de D. Bernoulli, si proporcionó un método para calcularlas, haciendo uso de un gran dominio aritmético concluye que[3]:

[3] Se pueden ver los detalles de la deducción de Fourier en (Farfán, 2012).

$$a = \frac{4}{\pi}, b = -\frac{4}{3\pi}, c = \frac{4}{5\pi}, d = -\frac{4}{7\pi}, \dots \tag{4.14}$$

Lo que sustituyendo en (4.13) da lugar a:

$$\frac{\pi}{4} = \cos y - \frac{1}{3}\cos 3y + \frac{1}{5}\cos 5y - \frac{1}{7}\cos 7y + \cdots, \qquad con\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \tag{4.15}$$

Al respecto de esta última igualdad Farfán hace notar lo siguiente:

> …Fourier no sólo calcula los coeficientes de la serie trigonométrica que Euler había señalado como difícil en su crítica a Bernoulli, sino que muestra, además, que la constante $\frac{\pi}{4}$ admite un desarrollo en serie de cosenos, cosa que para Euler era sencillamente imposible, y que […] fue el argumento con más peso en contra de la solución dada por Bernoulli. (Farfán, 2012, p. 118)

4.1.5 La convergencia de la serie

Para el ejemplo de la lámina infinita, cuya solución se comentó en la sección anterior, Fourier resaltó la necesidad de hacer un estudio de la convergencia, cosa que no sucedió cuando D. Bernoulli presentó su solución del problema de la cuerda vibrante, D. Bernoulli no reparó en la convergencia de la serie, ni Euler a la hora de rebatir la solución planteada por D. Bernoulli (Farfán, 2012).

Para la igualdad dada en (4.15) Fourier expresa:

> … será fácil de probar que esta serie es siempre convergente; es decir, que poniendo en lugar de y un número cualquiera […], nos aproximamos cada vez más a un valor fijo; de suerte que la diferencia de este valor a la suma de los términos calculados llega a ser menor que toda cantidad asignable… En general, el límite de la serie es alternativamente positivo y negativo; por otro lado, la convergencia no es tan rápida para procurar una aproximación fácil. (Fourier, 1822, p. 175)

Al considerar la convergencia de la serie:

$$y = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + \cdots \tag{4.16}$$

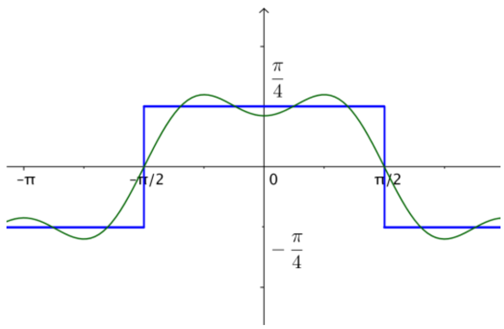
Fourier determina que converge alternativamente a $\frac{\pi}{4}$ y $-\frac{\pi}{4}$, y además hace una explicación del comportamiento de la gráfica de la ecuación (4.16) diciendo:

> … en este último caso, la ecuación […] pertenece a una línea curva que pasa alternativamente por arriba y por abajo del eje, cortándolo todas las veces que la abscisa x llega a ser igual a una de las cantidades

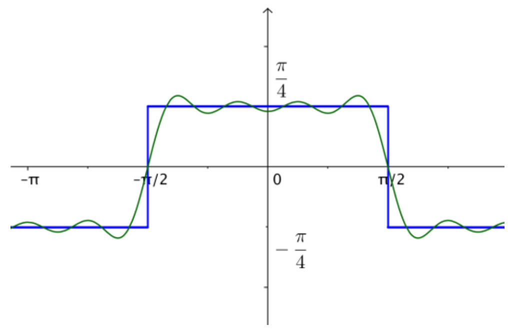
$$\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \dots;$$

a medida que los términos de la ecuación aumenta la curva tratada tiende más y más a confundirse con la línea precedente, compuesta de rectas paralelas y de rectas perpendiculares, de suerte que esta línea es el límite de diferentes curvas que se obtendrían al aumentar sucesivamente el número de términos. (Fourier, 1822, p. 176)

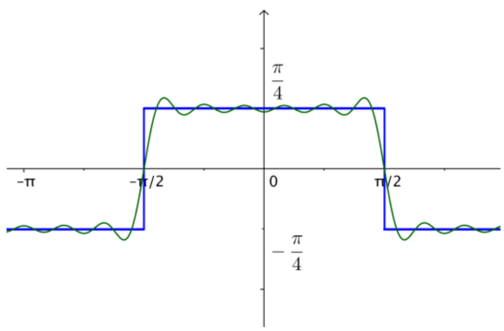
Gráficamente podemos observar cómo se da la convergencia para la serie (4.16).



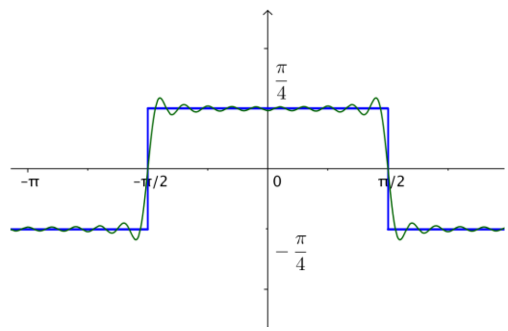
Con 2 términos.



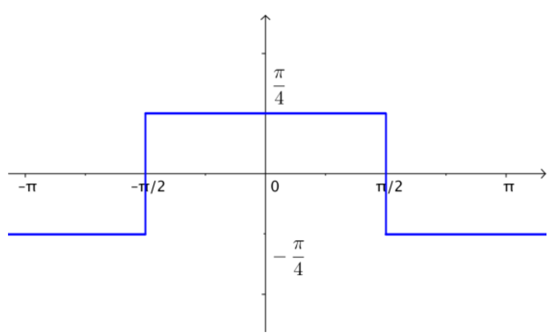
Con 4 términos.



Con 6 términos.



Con 10 términos.



Cuando el número de términos tiende a infinito.

Según Farfán (2012) Fourier ve necesario hacer un estudio de la convergencia porque implícitamente está evaluando la serie como una función, es decir, revisa la convergencia en los números en los que "la función" está definida, independientemente de la fórmula que la define. Esto porque el concepto de función de Fourier es numérico, mucho tiempo después de Fourier se llega al concepto de función que tenemos hoy en día.

Para probar la convergencia de la serie (4.16), Fourier primero considera el caso en que $x = 0$, lo que genera la serie de Leibniz:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots = \frac{\pi}{4} \tag{4.17}$$

Luego considera la suma parcial con m términos de la serie (4.16) y demuestra que:

$$\cos x - \cdots + \frac{(-1)^{m+1}}{2m-1}\cos(2m-1)x = \frac{1}{2}\int \frac{\operatorname{sen} 2mx}{\cos x}\,dx \tag{4.18}$$

Fourier argumenta que si el lado derecho de la igualdad (4.18) se integra por partes de manera sucesiva se obtendrá una serie infinita dependiente de m, y utiliza este hecho para al final deducir que la serie (4.16) es convergente y que su valor de convergencia es $\frac{\pi}{4}$.

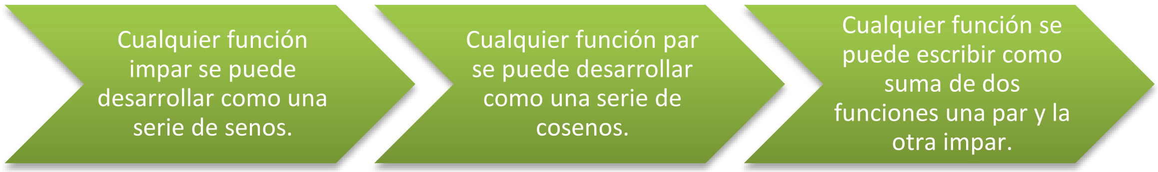
Al finalizar el estudio de la convergencia Fourier da la solución general del problema de la lámina infinita, haciendo la salvedad de que esta ecuación cumple con todas las condiciones físicas del problema. La solución general es:

$$\frac{\pi}{4}v = e^{-x}\cos y - \frac{1}{3}e^{-3x}\cos 3y + \frac{1}{5}e^{-5x}\cos 5y + \cdots \tag{4.19}$$

Fourier en todo su trabajo tiene la necesidad de comprobar que las soluciones obtenidas se adecúan a la situación física, pero a diferencia de la tradición los argumentos físicos no afectan lo matemático, se van dando de manera paralela, pero inicia una separación entre las ideas físicas y las ideas matemáticas.

4.1.6 Los coeficientes de Fourier

Fourier en *La Théorie* dedica una sección a la expansión de una función dada en serie trigonométrica, dicha sección se titula *Développement d'une fonction arbitraire en séries trigonométriques*, en esa sección "se enuncia y demuestra lo que para los matemáticos más prominentes del siglo XVIII era inaceptable: la posibilidad de representar una función *arbitraria* en serie trigonométrica infinita" (Farfán, 2012, p. 128). Para esto Fourier sigue el siguiente esquema, de demostraciones:



A partir de esto concluye que cualquier función se puede escribir como una serie infinita de senos y cosenos. Reinterpretando los resultados de Fourier, podemos considerar una función $f(x)$, donde $x \in (0,2\pi)$, se puede representar de la manera:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)] \tag{4.20}$$

Fourier logra deducir cómo se deben calcular los coeficientes a_n y b_n, hoy en día llamados coeficientes de Fourier, estos son:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \tag{4.21}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx \tag{4.22}$$

Surge a partir de estas fórmulas otra pregunta en la época, ¿cómo calcular la integral de funciones arbitrarias? Dado que $f(x)$ no es conocida y en la época la definición de integral es la de antiderivada, pero cómo saber si una función cualquiera tiene o no antiderivada. Fourier, estando consiente de este detalle, interpreta las integrales como el área bajo la curva, y lo necesario es que esta área sea finita, lo que no requiere que la función posea una expresión analítica asociada o ser continua en el sentido de Euler.

Después de hacer esta deducción Fourier reflexiona sobre el problema de la cuerda vibrante, diciendo que aplicando los principios que utilizó para determinar los coeficientes se resuelven las dificultades que tuvo D. Bernoulli.

Para 1829, Dirichlet (1805-1859) determina una fórmula para la suma parcial de orden N de la STF, logrando con esto probar la convergencia puntual de la serie para una amplia gama de funciones, incluso aquellas con discontinuidades de salto finito, Dirichlet determina que la suma parcial es:

$$S_N = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\left(N + \frac{t}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)} dt \tag{4.23}$$

Una vez que Dirichlet logra este resultado la comunidad acepta que las series de Fourier son un buen instrumento para la representación de funciones muy generales, y además influencia el desarrolla de la matemática, pues se debe responder a preguntas como, por citar algunas: ¿en cuántos puntos puede no converger la serie de Fourier de una función continua dada?, lo que llevó a Riemann a estudiar funciones continuas no derivables; ¿será única la representación de una función en serie trigonométrica?, lo que llevó a Cantor a desarrollar su famosa teoría de conjuntos; también la interpretaciones de la integral que da Fourier provoca el desarrollo de las teorías de integración de Cauchy, Riemann y Lebesgue (Cañada, 2000).

4.2 La STF en el aula

Esta sección corresponde al análisis de la componente didáctica de la ingeniería didáctica, por lo que se toman en consideración aquellos análisis alrededor de la STF realizados a libros de texto, profesores y programas de estudio.

4.2.1 Los libros de texto

Se pretende analizar cómo los autores presentan el conocimiento matemático a los estudiantes, en torno a las nociones relacionadas con la STF, tomando en consideración aquellos resultados relativos al estado estacionario, propagación de calor, series y su convergencia.

Albert (1996) al analizar el tema de series y su convergencia en diferentes libros de texto, asegura que los autores no prevén la interacción de los estudiantes con los conocimientos, es decir, su presentación se reduce a la operatividad y mecánica de la teoría y no a su construcción por parte del estudiante; además “los autores creen que, por haber dado a entender la definición formal de límite […] y resuelto ejercicios algorítmicos, los estudiantes hayan, también, esquivado las dificultades que se presentan con el infinito actual y potencial, suma de una serie y su convergencia" (Albert, 1996, p. 88).

Por su parte, Moreno (1999) hace una descripción de tres de los textos más consultados por estudiantes de ingeniería acerca de series trigonométricas: 1. Hsu, H (1973). *Análisis de Fourier*. USA: Fondo Educativo Interamericano, 2. Kreyszig, E (1989). *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. Vol. 1. México: Limusa, 3. Zill, D (1997). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. International Thomson Editores; de lo cual concluye que:

> Se percibe en los autores de texto una fuerte influencia formalista y algorítmica de las matemáticas, dado que sobrevalorizan los procedimientos analíticos y las prácticas algorítmicas, concediéndole poca o nula importancia tanto a los argumentos visuales, como a la solución de problemas y a las aplicaciones. Generalmente presentan los resultados matemáticos sin relacionarlos con algún contexto. Asimismo, es importante notar que en algunos de ellos, a pesar de tratar algún teorema sobre la convergencia de series, en los puntos de discontinuidad de las gráficas los unen por segmentos verticales, reforzando de esta manera el principio de permanencia de Leibniz (Moreno, 1999, p. 30).

Se puede notar como el método deductivo es el esencialmente utilizado por los autores, donde la presentación de definiciones, problemas y ejemplos se concibe como la manera de enseñar matemáticas y que de esta forma es suficiente para que se den los aprendizajes, cuestión que se sabe no es cierta.

Por otra parte, con respecto a la noción de estado estacionario Marmolejo (2006) analiza cuatro libros de texto de ingeniería que tratan sobre la transferencia de calor, cuya selección se hace a partir de entrevistas de tipo informal a estudiantes de ingeniería de distintas universidades y profesores del área de ingeniería eléctrica del Cinvestav-IPN; se nota como ningún libro de texto hace referencia a la noción de estado estacionario, sino que los autores utilizan argumentos de naturaleza intuitiva como los cambios de temperatura que en la sociedad comúnmente se les llama erróneamente como cambios de calor al decir que hace frío o hace calor según los cambios de temperatura, cuando en realidad estos se refieren al cambio en el gradiente de calor.

Por otra parte, con respecto a la hipótesis de periodicidad que el discurso escolar suele atribuir a la definición de la STF, Vásquez (2006) analiza diferentes libros de texto, con el fin de estudiar cómo se presenta la definición de la STF y el papel que juega la hipótesis de periodicidad; a pesar de que esta hipótesis no es necesaria para definir la STF se encuentra que los libros de texto la privilegian, pero el análisis que realizan siempre es sobre un intervalo acotado.

4.2.2 Los profesores

Un trabajo importante sobre convergencia de series es el realizado por Farfán (1994), donde experimentó con profesores del nivel superior acerca de sus concepciones sobre el concepto de convergencia de series y la relación con la noción de estado estacionario; parte de esta exploración incluía solicitar a los docentes un diseño para explicar el concepto de convergencia a alumnos del nivel superior, y se encontró que los docentes dan una lista de temas que se asemejan mucho a las listas de contenidos de los libros de texto usuales en ese nivel, es decir, mediante los conceptos de sucesiones, de progresión y de series.

Con respecto a la noción de convergencia de series de funciones Albert (1996) realiza una entrevista a profesores del área de económico-administrativa de la UCC y encuentra que, en general, si tienen las nociones de infinito, sucesión infinita, serie infinita y convergencia, pero hay confusión a la hora de distinguir una serie de una sucesión de términos de la misma, pues no hacen sus inferencias a partir de la serie, sino de la sucesión de los términos de la misma; recurrían principalmente a la intuición para dar respuesta a los problemas. Este grupo de profesores piensan que para la enseñanza es mejor utilizar el método deductivo, y que a pesar de que la demostración es necesaria para un mejor aprendizaje de las matemáticas, estas se dificultan por la complejidad de los contenidos necesarios, principalmente en cursos avanzados.

Moreno (1999) también entrevista a cinco profesores del nivel superior que han impartido algún curso que incluya el tema de series de Fourier, pues considera que sus creencias en relación a la enseñanza y aprendizaje con respecto a las series trigonométricas determinan en gran medida el progreso del estudiante en la adquisición de los conocimientos matemáticos. Su entrevista contiene cuatro preguntas generadoras:

1. ¿Qué dificultades presentan los estudiantes para entender series de Fourier?
2. ¿Cómo imparte en los cursos el tema de series de Fourier?
3. ¿Cuál es la importancia de la visualización para la comprensión de las series de Fourier?
4. ¿Qué ayuda utiliza para visualizar las series de Fourier?

A partir de estas preguntas Moreno (1999) concluye que los profesores consideran que las nociones de sucesiones, series y convergencia previos son un obstáculo para el aprendizaje de la STF, esto porque su discurso es básicamente deductivo, tomando estas nociones como punto de partida para posteriormente pasar a los conceptos relativos a series trigonométricas. También se puede notar como gran parte de estas concepciones son inducidas por los libros de texto, con un predominio del formalismo y la algoritmia en la forma de hacer matemáticas.

Con respecto a la noción de estado estacionario Marmolejo (2006) entrevista a dos profesores de la asignatura de transferencia de calor en la universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco, dicha entrevista está guiada por preguntas para conocer sus creencias acerca de la noción de estado estacionario, la importancia de que un estudiante comprenda dicha noción y si esta ayudaría a comprender la matemática involucrada en el problema de la transferencia de calor, entre otras preguntas.

A partir de las respuestas dadas por los profesores Marmolejo (2006) encuentra que estos piensan que la mayoría de los modelos matemáticos empleados varían en complejidad dependiendo de las condiciones iniciales del problema y al igual que en los libros de textos consideran las ideas intuitivas sumamente importantes, lo que nos permite ver la influencia que existe de los libros de texto en las creencias del profesor, idea reforzada por Rodríguez (2009) al analizar la forma en que los profesores de ingeniería en comunicaciones y electrónica del IPN suelen presentar el tema a sus estudiantes. Marmolejo resalta, a partir de las entrevistas, que los estudiantes de ingeniería no dan significado a la noción de estado estacionario.

Por su parte, Rodríguez (2009) realiza una entrevista a tres profesores especialistas en ingeniería en comunicaciones y electrónica, todos egresaros del ESIME del IPN, con una evaluación académica alta entre los estudiantes y reconocidos en su comunidad académica, quienes utilizan la STF en sus clases, cabe rescatar que se supone que los estudiantes ya han estudiado este tema en algún curso previo al que ellos imparten, las preguntas que guiaron la entrevista fueron las siguientes:

1. Entre las asignaturas que imparte, ¿utiliza la serie de Fourier?, ¿cómo?
2. Para sus asignaturas, ¿qué requiere saber el alumno del tema cuando llega a sus clases?
3. Con base en su experiencia, ¿qué sabe el alumno del tema cuando llega a sus clases?
4. ¿Cómo detecta, en su clase, lo que el alumno sabe de la serie de Fourier?
5. ¿Qué sugiere que pueda hacer el profesor de matemáticas para el aprendizaje del tema por parte del alumno?

A partir de las respuestas de los docentes, Rodríguez (2009) concluye que la funcionalidad de la STF es para modelar y darle un sentido y significado en un contexto dado, además que es necesario que los estudiantes puedan interpretar e incluso predecir a partir del comportamiento de los términos de la serie en el contexto; al preguntar sobre los conocimientos previos de los estudiantes es importante señalar que los tres profesores coinciden en que la STF los estudiantes la han aprendido de manera algorítmica, sin significado en su propio contexto, para lo cual la investigadora plantea que deben poseer la capacidad de visualizar de forma estructurada, lógica y razonada a través del desarrollo del pensamiento matemático avanzado (Rodríguez, 2009).

4.2.3 Los planes y programas de estudio

Otro de los elementos de la componente didáctica es la revisión de planes y programas de estudio, a partir de la cual se pretende identificar la inclusión de temas de series numéricas, series de funciones y series trigonométricas en el currículum, para analizar su exposición progresiva y lógica dentro de los demás contenidos matemáticos abordados en el programa, además observar la presencia de la noción de estado estacionario y del estudio del fenómeno de propagación del calor.

El programa consultado es el de la carrera de bachillerato y licenciatura en enseñanza de las matemáticas de la Universidad de Costa Rica (UCR), sede Rodrigo Facio, en Costa Rica, dicho plan es lo que se conoce como una carrera compartida, pues los cursos de matemáticas son impartidos a cargo de profesores de la Escuela de Matemática de la UCR, mientras que los cursos de pedagogía están a cargo de la Escuela de Formación Docente, además de incluir cursos de conocimientos generales para una formación humanista (ver Anexo 1).

Se presenta a continuación un esquema de los cursos de matemáticas, pues es lo que nos interesa para la presente investigación, ya que en las materias de formación docente se aprenden conocimientos en educación general y no se problematizan los saberes matemáticos, el orden jerárquico de las materias significa que para poder cursar la siguiente es necesario haber aprobado la anterior, además cada nivel representa un ciclo semestral.

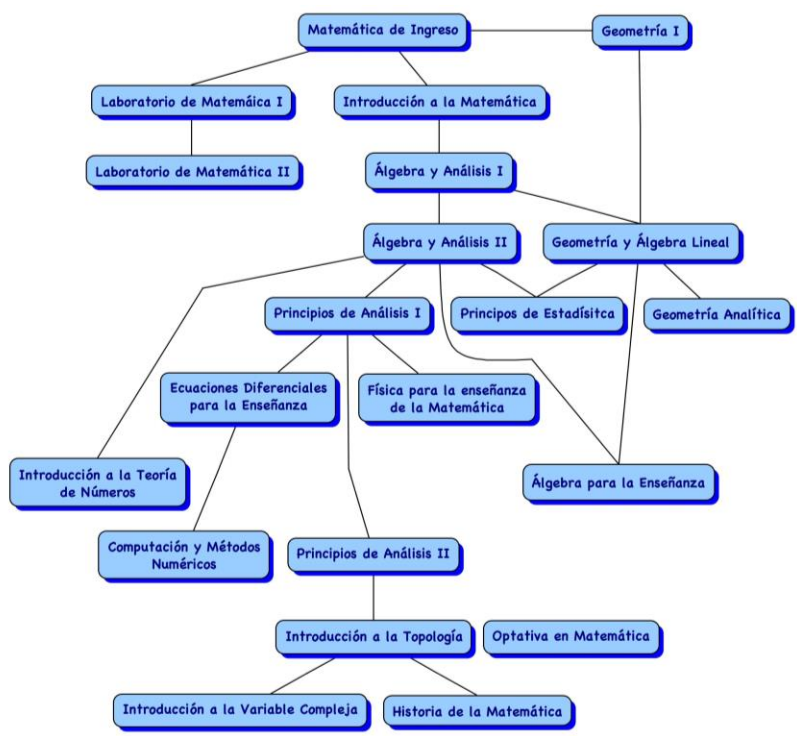


Ilustración 4-3. Organización del plan de estudios para la licenciatura en Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica.

En el Anexo 1 se encuentra un listado de las posibles materias optativa en Matemática con sus respectivos requisitos previos. Ahora bien, las materias con respecto al tema de series y su convergencia, sólo hay dos materias que abordan dicho tema: Álgebra y Análisis I y Principios de Análisis II, a continuación se presentan los objetivos y los contenidos relacionados:

Álgebra y Análisis I		Principios de Análisis II	
Objetivos	**Contenidos**	**Objetivos**	**Contenidos**
- Enunciar, interpretar y aplicar los conceptos de sucesión numérica y serie numérica. - Construir funciones trascendentes utilizando el concepto de sucesión numérica. - Calcular límites de sucesiones y de sumas infinitas. - Determinar convergencia de sucesiones y series numéricas mediante los criterios elementales.	**Tema 2: Sucesiones y series numéricas.** - Sumatorias y la fórmula del binomio. - Desigualdades del tipo Bernoulli. - Concepto intuitivo de sucesión, definición rigurosa y convergencia. - Cálculo de límites de sucesiones. - Sucesiones recurrentes. - Teorema de Weierstrass. - Subsucesiones. - Criterio de Cauchy. - Existencia de raíces vía sucesiones. - Series geométricas. - Series de términos positivos. - Series telescópicas. - Aproximación de sumas infinitas.	- Determinar el valor de convergencia de series numéricas convergentes. - Determinar la convergencia o divergencia de series mediante el uso de criterios de convergencia. - Desarrollar series de Taylor y combinaciones de estas, así como su aplicación en la resolución de problemas.	**Tema 3: Series numéricas.** - Repaso de sucesiones de Cauchy, series geométricas y telescópicas. - Criterios de convergencia: comparación, cociente, raíz, integral. - Series alternantes, criterio de Leibniz y de Abel. - Criterio de Dirichlet, series trigonométricas. - Series de potencias. - Series geométricas. - Series telescópicas. - Criterios de convergencia: comparación, cociente, raíz, integral, Raabe. - Series alternantes, criterio de Leibniz.

Tabla 4.1. Las series numéricas en el plan de estudios de Enseñanza de la Matemática en la UCR.

Al igual que en el análisis de otros programas de estudio en México (Albert, 1996) se puede constatar que el tema de series de funciones no se aborda explícitamente, salvo las series de potencias, lo que sugiere que a través de la situación de aprendizaje planteada será su primer acercamiento a la noción de convergencia de series de funciones, en particular, series trigonométricas[4].

Con respecto al estudio de la propagación del calor y de la noción del estado estacionario, cabe destacar que este no forma parte del plan de estudios, ni siquiera en la asignatura de física presente en el programa, por lo que las herramientas brindadas por el sistema de enseñanza no son suficientes para modelar un fenómeno como las que requieren aquellos relacionados con las STF (Morales, 2003), por lo que **para esta población** no sería adecuado utilizar un contexto "real" para introducir este tema.

4.2.4 Síntesis de la componente didáctica

En esta sección se ha comentado acerca del cómo vive la STF en el sistema didáctico, es decir su intencionalidad a la hora de enseñarla, cuando este es incluido en planes y programas, además de los elementos necesarios presentes en programas que no incluyen a la STF como objeto de estudio, todo esto con el fin de ver cómo ha evolucionado ese saber en los entornos escolares y no escolares.

Para este propósito se estudiaron aquellas investigaciones que han analizado libros de texto, planes y programas de estudio, las creencias y realizaciones de los profesores alrededor de varias temáticas: las series y su convergencia, la noción de estado estacionario, la STF en particular. A continuación se presenta un cuadro que resume los principales hallazgos al respecto.

Temática	Libros de texto	Profesores	Planes y Programas
Series y su convergencia	- El contenido aparece de forma operatoria y mecánica, sin construcción por parte del estudiante. - No consideran las dificultades que generan el infinito actual y potencial.	- Su exposición en clase está marcadamente influencia por los libros de texto. - Confusión al distinguir una serie de una sucesión, sus argumentos para decidir sobre la convergencia	- Existen licenciaturas que utilizan nociones sobre series de funciones, pero no se abordan explícitamente (v.g. licenciatura en Economía). - En programas en los que se aborda el tema de

[4] Aunque se incluye el tema de series trigonométricas, este es sobre series numéricas y no sobre series de funciones, por ejemplo, se estudia la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(n\pi/2)}{n}$.

Temática	Libros de texto	Profesores	Planes y Programas
	- Fuertemente influenciados por el método deductivo.	los estudian sobre la sucesión de los términos.	series numéricas, hay poca presencia de las series de funciones.
La noción de estado estacionario	- No tratan directamente sobre la noción de estado estacionario, utilizan argumentos de naturaleza intuitiva.	- Consideran que este tipo de problemas varían en complejidad, dependiendo de sus condiciones iniciales y aseguran que las ideas intuitivas son sumamente importantes. - Los profesores que utilizan la STF, es decir, lo que utilizan la serie como un conocimiento previo a su curso, opinan que es importante que el estudiante sepa predecir a partir de los términos de la serie, pero que la han aprendido de manera algorítmica.	- Está presente en los diferentes cursos que reciben los estudiantes de ingeniería, pero no se hace explícita. - En el programa de Enseñanza de la Matemática de la UCR no está explícita, pero en algunos de los temas de la materia de física está presente de forma intuitiva.
La Serie Trigonométrica de Fourier.	- Los libros de texto privilegian la *hipótesis de periodicidad*, pero sus ejemplos y análisis siempre son sobre un intervalo acotado.	- Consideran que las nociones de sucesiones, series y convergencia previos son obstáculo para estudiar la STF.	- En la licenciatura en Enseñanza de la Matemática de la UCR no está presente el tema de series trigonométricas.

Tabla 4.2. Resumen de hallazgos para la componente didáctica.

4.3 Resignificaciones alrededor de la STF

En esta componente se busca ahondar en las construcciones de los estudiantes, en situación escolar, sus saberes sobre estado estacionario (propagación de calor), series numéricas, series de funciones y convergencia, siempre teniendo como foco principal las series trigonométricas. La componente cognitiva requiere de un acercamiento a las ideas que provienen de los estudiantes al involucrar estos saberes en la resolución de situaciones problema. Para esto se citan aquellos trabajos que busquen explicar estrategias, procedimientos y razonamientos de estudiantes y profesores en situaciones nuevas para ellos, concernientes a los conocimientos matemáticos ya mencionados.

La investigación de Solís (1993) estudia la noción de variación en el contexto de la propagación de calor, en su experimentación trabaja con tres estudiantes: el primero había concluido el primer año de primaria recientemente, el segundo estaba por ingresar a la escuela secundaria y el tercero un estudiante de octavo semestre de licenciatura en educación; uno de los experimentos utilizados para la toma de datos es acerca del calentamiento de una barra de cobre fijada en uno de sus extremos para quedar en posición horizontal y calentarla utilizando un mechero en el otro extremo, luego se realizó la misma experiencia pero con una barra con un recubrimiento delgado de parafina para hacer visual el "movimiento de calor".

A partir de esta experiencia, y otras, se puede notar como los sujetos atribuyen un comportamiento dual al fenómeno de la propagación de calor, pues en su lenguaje corporal y en algunas frases verbales utilizan un movimiento pausado para explicar cómo el calor se propaga en un barra, lo que permite discernir una naturaleza continua al calor, mientras que la mayoría de las descripciones verbales son discretas (Solís, 1993).

Por su parte, Farfán (1994) aplica un diseño exploratorio a profesores del nivel superior, dicho diseño se basó en uno de los problemas iniciales resueltos por Fourier en la La Teoría Analítica del Calor, el que corresponde a la propagación del calor a través de un anillo de metal sólido, dicho diseño hace una adaptación del problema original añadiendo la notación y terminología de nuestros días, además de representar gráficamente la situación (la Ilustración 4-4 es un ejemplo de las representaciones dadas). Dicha exploración tenía la intención de analizar las ideas intuitivas, que sobre la propagación de calor tenían los participantes.

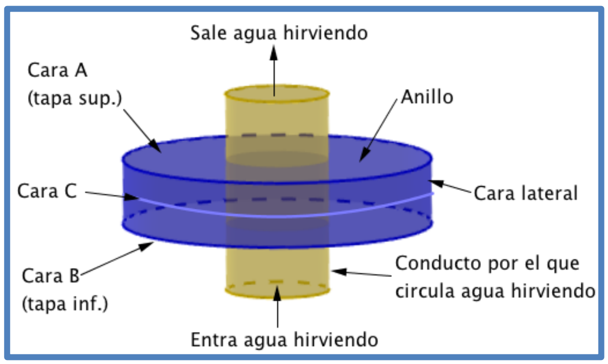


Ilustración 4-4. Representación gráfica del problema experimental aplicado por Farfán (1994).

En las respuestas de los participantes al problema planteado se puede notar que perciben el fenómenos de conducción de calor, pero tienen dificultades al dar su representación gráfica; además de no ser capaces de dar una ecuación que represente el fenómeno, aunque la mayoría acepta la posibilidad de darla, uno de los participantes propone la necesidad de plantear la ecuación diferencial que modela el problema antes, cuya solución será la serie de Fourier. Con respecto a la imagen mental acerca del estado estacionario la investigadora observa "el reconocimiento de un estado de «equilibrio» del que distinguen sus: causas y su representación gráfica" (Farfán, 1994, p. 209).

Ante la noción de estado estacionario Marmolejo (2006) aplica una secuencia exploratoria a cuatro estudiantes de quinto semestre de la carrera de ingeniería mecánica, que han cursado diferentes asignaturas en las cuales la noción de estado estacionario está presente, aunque no se haga explícita, además de cursos sobre series de Fourier, esto con el fin de conocer sus concepciones previas a la noción de estado estacionario, las cuales, según el investigador, basado en la intuición acerca de que las temperaturas no pueden variar demasiado al transcurrir el tiempo, tiene una idea de que los procesos tienden a estabilizarse, o equilibrarse térmicamente; sin embargo, es el ambiente fenomenológico y sus condiciones de frontera las que permiten hacer esta distinción y orientar la intuición de estudiante.

Con respecto a las series numéricas, una investigación importante es la de Flores (1992), quien a través de una experiencia con dos estudiantes observa las diferentes estrategias y heurísticas al trabajar con series numéricas, se puede deducir que los estudiantes podrán tener problemas al trabajar con el infinito y que buscarán "eliminar" el problema mediante el grado de exactitud, pues aludirán la imposibilidad de alcanzar efectivamente el límite, hecho que también se reporta en Farfán (1994). Por otra parte Flores (1992) asegura que a los estudiantes no les resulta natural operar con los términos de una serie para saber si esta converge o diverge.

Por otra parte, en la investigación de Farfán (1994), se solicita a los profesores dar una fórmula que exprese una función periódica en todo $\mathbb{R}$ (ver Ilustración 4-5). Resultó difícil para los profesores proponer la fórmula de la función dada su gráfica y determinar cuándo esta es periódica, se sostiene que este problema se debe a que la concepción de función instalada en los sujetos es de proceso y no de objeto, lo cual es un

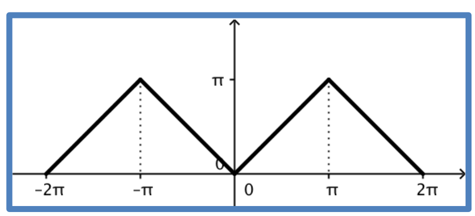


Ilustración 4-5. Función periódica.

problema ya que la convergencia opera sobre sumas parciales, que es un proceso que actúa sobre objetos, las funciones, pero luego esta suma parcial debe concebirse como objeto susceptible de acercarse a un valor fijo, la convergencia.

Ante este problema de la periodicidad, Vásquez (2006) hace un montaje experimental para conocer las concepciones de los estudiantes acerca de la noción de periodicidad y el papel que juega como hipótesis en la definición de la STF que, ya comentamos antes, está presente en los libros de texto. En dicha investigación se concluye que los alumnos no han construido una noción de periodicidad adecuada, además que “la hipótesis de periodicidad no es necesaria cuando se realizan los cálculos de series de Fourier; es decir, la hipótesis es irrelevante para calcular, no así para definir” (Vásquez, 2006, p. 69).

Por otra parte, y volviendo al problema de la convergencia, Farfán (1994) solicita a los profesores graficar cada una de las siguientes funciones:

a) $y = \operatorname{sen} x$
b) $y = \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$
c) $y = \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x$
d) $y = \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x$
e) ¿Es posible, si el número de sumandos aumenta a infinito, definir una función? En caso de ser afirmativo, dé las condiciones para que ello suceda y esboce la gráfica correspondiente. En caso contrario argumente suficientemente.

Se observa en esta actividad que la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ fue dada por todos los docentes correctamente, pero solamente dos profesores logran dar la gráfica límite de la sucesión; se nota en sus respuestas que para la mayoría la forma sinusoidal permanece inalterable en el límite, esto es, inducen propiedades válidas en el caso finito al infinito.

Por su parte Albert (1996), mediante un diseño experimental, busca desarrollar las nociones de serie, infinito, serie infinita y convergencia de series infinitas, además de la operatividad del infinito; después de varias puestas en escena y reiterados rediseños de su secuencia concluye que existe dificultad por el predominio de la noción de sucesión por sobre la de serie, es decir, en repetidas ocasiones los estudiantes no lograron llegar a la noción de serie pues desarrollaron esta como una sucesión.

Mediante una secuencia didáctica exploratoria Moreno (1999) analiza las nociones que sobre series trigonométricas y su convergencia tienen estudiantes de cuarto semestre de la carrera de ingeniería mecánica del Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez, dicha secuencia consta de dos problemas, el primero tomado de la investigación de (Albert, 1996) cuyo objetivo es evidenciar las nociones de serie numérica y su convergencia; y el segundo problema fue una adaptación del problema de sumas de sinusoidales tomado de (Farfán, 1994) con el fin de suscitar nociones sobre serie trigonométrica y su convergencia, en ambos problemas se trata de evidenciar nociones acerca del infinito con relación a la convergencia de una serie.

Con base en esta secuencia exploratoria Moreno (1999) concluye que, aunque sea con poblaciones distintas, se dan los mismos resultados ya reportados en las anteriores investigaciones; donde el infinito potencial es un obstáculo para manejar el infinito actual, el principio de permanencia de Leibniz como generalización de las propiedades de la suma parcial a su límite, el fenómeno de Gibbs los conduce a reconocer un comportamiento "extraño" en las gráficas de las sumas parciales en una vecindad de la discontinuidad del límite, esto también influenciado por la escasa experiencia de los estudiantes al trabajar con funciones definidas por intervalos.

Por su parte, Rodríguez (2009) analiza la respuesta de dos parejas de estudiantes ante una pregunta de un examen de un curso habitual en el que estudian la STF, el cual se les permitió trabajar en sus casas, la pregunta a analizar fue la siguiente: *Para la función dada* (ver Ilustración 4-6) *determine la convergencia de la serie de Fourier haciendo uso de las condiciones de Dirichlet y después encuentre la serie trigonométrica de Fourier*; para lo cual les proporcionan la gráfica y el criterio de la función $f(x) = x^2$, con $-3 \leq x \leq 3$.

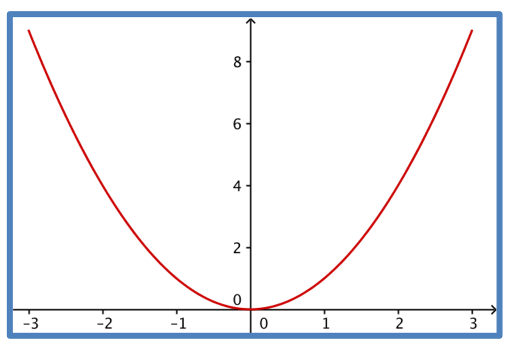


Ilustración 4-6. Gráfica de la función.

Según las respuestas de los estudiantes, Rodríguez (2009) concluye que la noción de función no está construida significativamente en los estudiantes y que no se ha dado interacción entre el registro gráfico y el analítico-algebraico, además la STF se percibe como fórmulas que se aplican sin reflexión al respecto, aún con uso de tecnología los estudiantes resuelven los problemas de forma “automática”.

A continuación se presenta, a manera de resumen, un cuadro de debilidades y fortalezas de los estudiantes con respecto a la STF reportados en la investigación, además las recomendaciones, en caso de que las halla, de los investigadores para potenciar las fortalezas o superar las debilidades.

Dificultad para…	Fortaleza para…	Se puede promover…
- Explicar el comportamiento de la propagación del calor de manera analítica. - Representar el fenómeno de propagación de calor de manera gráfica y analítica.	- Explicar el comportamiento del calor de forma corporal y verbal. - Percibir el fenómeno de forma intuitiva. - Reconocer el estado estable del fenómeno de calor, sus causas y reconocer su representación gráfica. - Aceptar la posibilidad de que haya una ecuación que modele el fenómeno.	- Una comprensión profunda del ambiente fenomenológico y sus condiciones de frontera para guiar la intuición.
- Apoyarse en sus conocimientos previos, pues estos se encuentran aislados.	- Trabajar con uso de tecnología. - Buscar significados en su experiencia.	- Utilizar tecnología la integración de los conocimientos.
- Trabajar con la noción de infinito actual, pues aluden que el imposible alcanzarlo. - Operar con los términos de las series numéricas. - Concebir la idea de serie, pues predomina por sobre esta la noción de sucesión.	- Aceptar el infinito potencial. - Comprensión adecuada la forma sinusoidal. - Predominio de la noción de sucesión. - Reconocer el fenómeno de Gibbs.	- Uso de herramientas tecnológicas.
- Expresar en forma analítica una función periódica o definida por intervalos. - Construir la noción de periodicidad adecuada.	- Hacer cálculos en la STF aun cuando no han significado la hipótesis de periodicidad.	- La asimilación de la noción de función con el estatus de objeto y no solo de proceso. - La hipótesis de periodicidad puede ser un resultado del trabajo con la STF y no una hipótesis. - Promover interacción entre los diferentes registros de representación.

Tabla 4.3. Debilidades y fortalezas de los estudiantes con respecto a la STF.

5 Construcción Social de la STF

Para plantear una **construcción social** se requiere de analizar la evolución del conocimiento e ideas en la historia que permitan encontrar las circunstancias, los escenarios, los medios, que posibilitaron la emergencia del conocimiento matemático (Montiel, 2005), en este caso dicho conocimiento se corresponde con la STF. Para ello se analizó el contexto de origen del conocimiento para reconocer los escenarios, los contextos, las problemáticas y las prácticas de referencia asociadas a la STF y que se consideran fundamentales para significar al concepto en escenario escolar.

Por otra parte, a partir de la dimensión didáctica, se considera el estado del dME predominante y como este influye en la didáctica; con la componente cognitiva analizamos las construcciones mentales de estudiantes y profesores y como este afecta la manera en que conciben la STF y los conceptos relacionados con la misma.

Se puede decir que, de cierta manera, se busca complementar la construcción social de las funciones trigonométricas (Montiel, 2011), ya que la STF corresponde al estadio más avanzado en el desarrollo del pensamiento trigonométrico, por lo que, haciendo la misma aclaración que Montiel (2005) acerca de las funciones trigonométricas, al referirnos a la STF lo haremos desde una problemática contextualizada y no sólo a una simple definición.

Por lo tanto, en lo que sigue, se hará evidente la presencia de Práctica de Referencia - Práctica Socialmente Compartida – Actividad - Acciones, en su escenario histórico, institucional y cultural, y su relación con el estado actual del sistema de enseñanza y las nociones mentales de profesores y estudiantes acerca de la STF; a todo esto sumamos la presencia de obstáculos epistemológicos (OE) ligados a la serie, que aunque no sean el foco de atención, aportarán ideas importantes para un diseño de intervención basado en la CSCM.

5.1 El problema de la cuerda vibrante

Taylor es quien propone el problema de la cuerda vibrante en 1715, y en su análisis concluye que las soluciones al problema son periódicas, pero considera que las vibraciones subsecuentes son proporcionales, mismo supuesto que toma J. Bernoulli en su abordaje del problema, lo que no les permite construir una ecuación que modele el fenómeno, esto evidencia la presencia de un OE:

OE(1): La proporción es un tipo de relación privilegiado (Sierpinska, 1992).

Si bien es cierto que este obstáculo cumple roles positivos en nuestra manera de pensar y resolver problemas, en este caso constituye un obstáculo para modelar un fenómeno de estado estacionario, lo que puede provocar que surjan argumentos de este tipo en los estudiantes, por ejemplo, en la investigación de Farfán (1994) ante el problema de propagación de calor en un anillo metálico, el cual comentamos anteriormente, al pedir una representación gráfica del fenómeno uno de los profesores da la gráfica de una proporción (ver Ilustración 5-1).

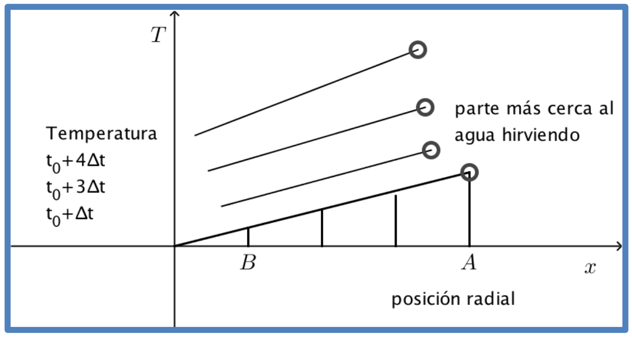


Ilustración 5-1. Respuesta de un sujeto al pedir la gráfica en el problema del anillo metálico (Farfán, 1994).

Es D'Alembert quien, en 1747, propone el primer modelo matemático del problema mediante la ecuación (4.1), luego la discusión alrededor del problema radica en cuál es la solución general de dicha ecuación; D'Alembert aseguraba que la solución debía ser una *función continua*, en el sentido de Euler, impar y periódica. Un año después Euler llega a la misma solución que D'Alembert, pero difiere en la forma inicial de la curva, pues no existen razones físicas para pensar que la forma inicial de la cuerda no pueda estar definida por distintas fórmulas analíticas, lo que provoca el siguiente OE:

OE(2): Sólo las relaciones descritas por una única fórmula analítica se pueden hacer llamar funciones (Sierpinska, 1992).

Lo cual se relaciona con el rol que empezó a ocupar el álgebra dentro del análisis matemático durante el siglo XVIII, hecho que se evidencia en los estudiantes, pues no consideran que una función condicional sea función (Albert, 1996) y, esto implica, dificultades ante el hecho de definir algebraicamente una función de este tipo o una función periódica (Moreno, 1999).

Cabe destacar que Euler acude al fenómeno físico para hacer sus argumentaciones, pues el problema físico no pone restricciones sobre la forma inicial de la cuerda, entonces la discusión radica en que dada una función sólo hay una gráfica asociada, pero dada la gráfica no necesariamente hay una única función (en la definición de Euler) que le corresponda.

Cuando D. Bernoulli da su solución al problema de la cuerda vibrante, ecuación (4.5), Euler rebate su solución diciendo:

> Pero tal vez pueda argumentarse que la ecuación, […], debido a que contiene una infinidad de coeficientes indeterminados, es tan general que encierra todas las curvas posibles; es necesario reconocer que si eso fuese cierto el método del Sr. Bernoulli proporcionaría un método completo. Pero, aparte del hecho de que este gran geómetra no ha presentado el argumento, todas las curvas comprendidas en dicha ecuación, aun cuando se aumente el número de términos al infinito, poseen ciertas características que las distinguen de todas las demás curvas[1] […] Así pues, si la curva dada a la cuerda al comienzo no tiene estas propiedades es seguro que no estará encerrada en la ecuación. Sin embargo, ninguna curva algebraica tiene tales propiedades, de modo que es necesario excluirlas a todas de la ecuación; y, sin duda alguna, hará también falta excluir de allí una infinidad de curvas trascendentes. (Farfán, 2012, p. 66)

Es decir, Euler expresa que la función inicial en el problema de la cuerda vibrante debe cumplir las propiedades de periodicidad y paridad que posee la función seno, pues los términos de la solución dada por D. Bernoulli son funciones sinusoidales, esto nos lleva al siguiente OE:

OE(3): La sobre-generalización de las propiedades de procesos finitos a procesos infinitos (principio de permanencia de Leibniz) (Artigue, 1998).

Esto se evidenció en el problema que solicita a sujetos de investigación que graficaran los primeras cuatro sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}(nx)$ y que además tratasen de hacer la gráfica en caso de considerar infinitos términos (la función a la que converge); la

[1] Se refiere a las propiedades de la función seno: periódica e impar.

mayoría de los sujetos conserva la forma sinusoidal inalterable en el límite (Farfán, 1994; Moreno, 1999).

Por su parte D. Bernoulli sostiene que la ecuación (4.5) es la solución general del problema, sus argumentos están insertos en la física, pero se puede vislumbrar que comprendía a profundidad como se comportaba la superposición de ondas, lo cual indica que esto es esencial para la comprensión de la serie trigonométrica de Fourier, pues al saber cómo se comportan las sumas parciales se pueden **predecir** ciertas propiedades del comportamiento general de la serie, donde lo que se requiere es acercarse a la forma inicial de la cuerda (el valor de convergencia de la serie trigonométrica), mediante la comprensión del comportamiento de las sumas parciales.

Se puede notar como, a pesar de ser el problema de la cuerda vibrante un problema de determinación de estado estacionario, no hubo consideraciones por parte de los matemáticos de la época acerca de la convergencia de la serie trigonométrica, aunque, hoy en día lo veríamos, matemáticamente, como un problema de fondo, esto se relaciona al siguiente OE:

OE(4): El infinito potencial como obstáculo para el infinito actual (Albert, 1996).

El cual es claro de los comentarios de Euler acerca de la solución dada por D. Bernoulli, al decir que aunque en su solución existen infinitos coeficientes, eso no garantiza que sea la solución general del problema y que encierre a todas las soluciones posibles. Esto se evidencia en la actualidad pues los estudiantes solo logran hablar del infinito potencial y no del infinito actual en la convergencia, pues en ellos ven la posibilidad de seguir añadiendo términos a la suma (infinito potencial) pero no que esta suma pueda llegar a ser igual a un número finito (o una función en nuestro caso), aseguran que se acerca a dicho número, pero que no llega a ser ese número y es en esta igualdad donde está la comprensión del infinito actual (Albert, 1996).

5.2 El contexto del trabajo de Fourier

Ante el problema de la propagación de calor Fourier reconoce que no se pueden aplicar los principios de la Mecánica Racional ni del Análisis Matemático del siglo XVIII, de esto da cuenta la incapacidad que tuvieron los matemáticos de la época para dar una respuesta contundente al problema de la cuerda vibrante.

Previo al trabajo de Fourier, el programa de Bélidor (primera mitad del siglo XVIII) busca cambiar la manera de trabajar en ingeniería, dotándola de un lenguaje, el de las matemáticas, por encima del uso de tablas numéricas, sumarios y guías prácticas (lo propio de la época). Sin embargo, el programa no fue bien recibido por la comunidad, por lo que no logró todo lo que Bélidor esperaba.

Al lado del trabajo de Fourier, se encuentra el desarrollo de la ingeniería como ciencia (ingeniería matemática) por sobre la práctica habitual del ingeniero, en lo cual la Escuela Politécnica jugó un papel central para su consolidación, misma de la que Fourier fue profesor. Por lo que los problemas que se resolvían estaban íntimamente ligados a la práctica de la ingeniería.

Así el análisis de Fourier sobre la propagación de calor "se da en el marco de la profesionalización de una *práctica de referencia*, la práctica de la ingeniería y por ende en el seno de la comunidad politécnica" (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez-Sierra, 2006, p. 90). Por lo que el problema de propagación del calor nace ligado a la práctica de la ingeniería, en un momento en que se está consolidando la ingeniería como ciencia.

5.3 El establecimiento de la ecuación de propagación de calor

Con el trabajo de Biot se establece la primera ecuación diferencial que modela el fenómeno de propagación del calor, lo hace a través de la noción de calórico y de mediciones con un termómetro, lo que provoca que no estudie el fenómeno en sí, sus cálculos están basados en la empírica, además no explica la naturaleza de los coeficientes de la ecuación diferencial, lo que es propio del material y lo que no (conductividad, densidad, entre otros). En la experimentación de Farfán (1994), se observa que en el contexto físico, la primera impresión sobre el fenómeno es perceptible, pero al solicitar su representación gráfica y analítica, se tienen tantas representaciones como respuestas, lo que se relaciona con el siguiente OE:

> OE(5): Se observan los cambios como fenómenos, enfocando la atención en cómo cambian los objetos, ignorando qué cambia (Sierpinska, 1992).

Por lo que:

> En el contexto físico ha de tenerse una clara referencia para distinguir *lo que varía* respecto *a qué* es lo que produce tal variación, para, enseguida, *predecir* cuándo la variación que subsiste ha llegado a un estado estable. Esa **predicción** es la determinación del estado estacionario al que se aproximan los diversos estados en donde, para cada uno, se tiene determinada su evolución. (Farfán, 2012, p. 271)

Es con el trabajo de Fourier, en la *Théorie Analytique de la Chaleur* (1822), donde se analiza el problema de la propagación del calor en los sólidos, donde la variación está presente y se significa en la ecuación general que modela el fenómeno:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{C \cdot D}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

Se puede decir que esta es la ecuación que modela completamente el fenómeno, pues se corresponde con la que Biot había obtenido de forma empírica. La discusión siguiente gira en torno de la solución de la ecuación diferencial, para lo cual Fourier da ejemplos de su aplicación.

Es así como el estudio del ambiente fenomenológico de la transferencia del calor propicia la construcción de la ecuación diferencial que modela el problema, considerando aquellas variables necesarias para su modelaje, las condiciones iniciales y de frontera (Marmolejo, 2006), pero la solución de esta ecuación en los casos particulares está inserta en la matemática misma, sin hacer alusión a la situación física, y es aquí en donde surge la serie trigonométrica, esto se aborda con más detalle en la parte siguiente.

5.4 La serie trigonométrica y su convergencia

Como ya se comentó, después de establecer la ecuación de propagación del calor, Fourier presenta una serie de problemas de uso de la ecuación, entre ellos está el problema de la transferencia de calor en un lámina infinita, el cual es un modelo de la trasferencia del calor en la Tierra, cuya ecuación diferencial omite la variable z y su correspondiente derivada parcial (el grosor de la lámina es infinitesimal), y además $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ (pues se trata de determinar el estado estacionario, independiente del tiempo), para tener:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

De aquí en adelante, los argumentos de Fourier son meramente matemáticos, siempre comprobando que sus argumentos respondan al fenómeno físico, pero las ideas físicas no afectan a la matemática en sí; dándose de esta manera el inicio de la separación entre la física y la matemática, que desde sus inicios trabajaban una junto a la otra.

Para resolver la ecuación Fourier utiliza el *método de separación de variables*, que, desde un punto de vista matemático, es uno de sus grandes aportes a las técnicas de resolución de ecuaciones diferenciales parciales, obteniéndose:

$$v(x,y) = ae^{-x}\cos y + be^{-3x}\cos 3y + ce^{-5x}\cos 5y + \cdots$$

Al considerar las condiciones de frontera de este problema se llega a que:

$$1 = a\cos y + b\cos 3y + c\cos 5y + \cdots$$

Esta solución, al igual que la dada por D. Bernoulli en el problema de la cuerda vibrante, es una representación en serie trigonométrica de una constante, lo que logró hacer Fourier, que no hizo D. Bernoulli, fue proporcionar el cálculo de los coeficientes. Pero antes de esto vio necesario justificar dicha solución físicamente, lo que permite ver que tanto Fourier y como la comunidad de la Escuela Politécnica[2], están interesados en "**anticipar** el comportamiento de la naturaleza, en **modelarla**" (Cantoral et al, 2006, p. 94). A continuación se muestran los comentarios de Fourier al respecto:

> Supposons que la température fixe de la base A, au lieu d'être égale à l'unité pour tous ses points, soit d'autant moindre que le point de la droite A est plus éloigné du milieu 0, et qu'elle soit proportionnelle au cosinus de cette

[2] No se debe olvidar que Fourier es parte de un momento histórico en que la ingeniería se está desarrollando como ciencia, donde la Escuela Politécnica jugo un rol sumamente importante y de la cual Fourier fue profesor. Por lo que podemos asegurar que las preocupaciones de Fourier son una imagen de las preocupaciones de su entorno (social, cultural, histórico e institucional).

distance ; on connaîtra facilement dans ce cas la nature de la surface courbe, dont l'ordonnée verticale exprime la température v o $\varphi(x,y)$. Si l'on coupe cette surface à l'origine par un plan perpendiculaire à l'axe des x, la courbe qui termine la section aura pour équation $v = a\cos y$: les valeurs des coefficients seront les suivants :

$$a = a, b = 0, c = 0, d = 0,$$

ainsi de suite, et l'équation de la surface courbe sera

$$v = ae^{-x}\cos y$$

Si l'on coupe cette surface perpendiculairement à l'axe des y, on aura une logarithmique dont la convexité est tournée vers l'axe ; si on la coupe perpendiculairement à l'axe des x, on aura une courbe trigonométrique qui tourne sa concavité vers l'axe. Il suit de là que la fonction $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, a toujours une valeur positive, et que celle de $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ est toujours négative. Or la quantité de chaleur qu'une molécule acquiert à raison de sa place entre deux outres dans le sens des x, est proportionnelle à la valeur de $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ (art. 123); il s'ensuite donc que la molécule intermédiaire reçoit de celle qui la précède, dans le sens des x, plus de chaleur qu'elle n'en communique à celle qui la suit. Mais, si l'on considère cette même molécule comme placée entre deux autres dans le sens des y, la fonction $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ étant négative, on voit que la molécule intermédiaire communique à celle qui la suit plus de chaleur qu'elle n'en reçoit de celle qui la précède. Il arrive ainsi que l'excédent de chaleur qu'elle acquiert dans le sens des x, compense exactement ce qu'elle perd dans le sens des y, comme l'exprime l'équation $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$. On connaît ainsi la route que suit la chaleur qui sort du foyer A. Elle se propage dans le sens des x, et en même temps elle se décompose en deux parties, dont l'une se dirige vers une des arêtes, tandis que l'autre partie continue de s'éloigner de l'origine, pour être décomposée comme la précédente et ainsi de suite à l'infini. La surface que nous considérons est engendrée par la courbe trigonométrique, qui répond à la base A, et se meut perpendiculairement à l'axe des x en suivant cet axe, pendant que chacune de ses ordonnées décroît à l'infini, proportionnellement aux puissances successives d'une même fraction.

On tirerait des conséquences analogues, si les températures fixes de la base A étaient exprimées par le terme

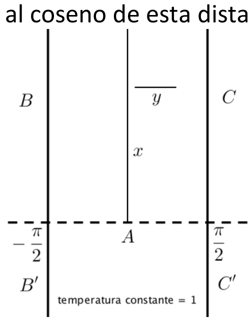
$$b\cos 3y \text{ ou } c\cos 5y \text{ etc.,}$$

et l'on peut, d'après cela, se former une idée exacte du mouvement de la chaleur dans le cas plus généraux; car on verra par la suite que ce mouvement se décompose toujours en une multitude de mouvements élémentaires, dont chacun s'accomplit comme s'il était seul. (Fourier, 1822, p. 165).

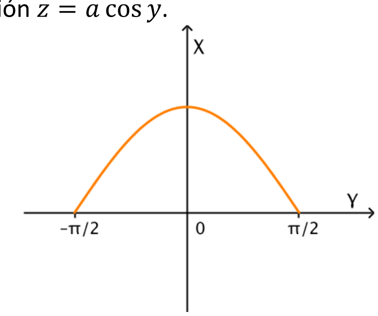
Se evidencia la necesidad que tiene Fourier de validar la matemática en el contexto físico, asegurándose que es acorde con el problema, se puede reinterpretar esta justificación física de la manera siguiente:

Se debe tener en cuenta la situación planteada (ver subsección 4.1.4).

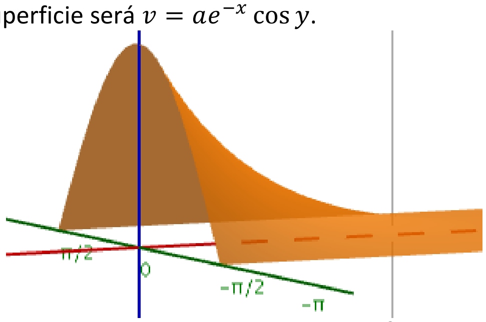
1. Suponemos que la temperatura en A, en lugar de ser igual a la unidad, es un tanto menor conforme se aleja del punto (0,0) y que esta es proporcional al coseno de esta distancia.



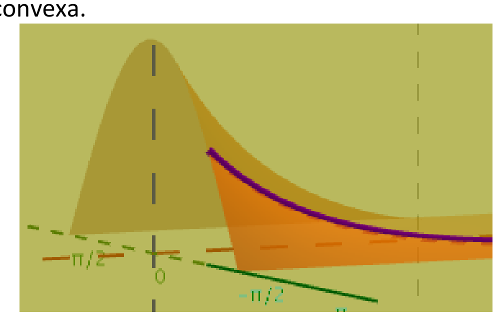
2. Se conoce, en este caso, la naturaleza de la curva cuya ordenada vertical expresa la temperatura v. Si se corta esta superficie por el origen con un plano perpendicular al eje de las x, la curva determinada por esta sección tendrá ecuación $z = a \cos y$.



3. Los valores de los coeficientes serán $a = a$, $b = c = d = \cdots = 0.$, y la ecuación de la superficie será $v = ae^{-x} \cos y$.



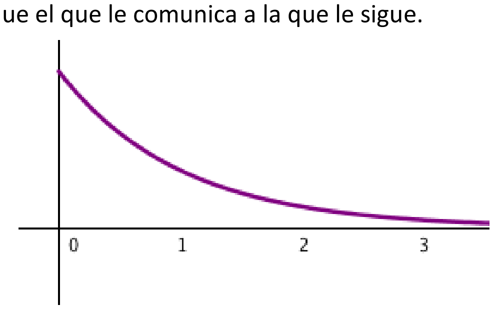
4. Si se corta esta superficie perpendicular al eje de las x, se tendrá un curva exponencial convexa.



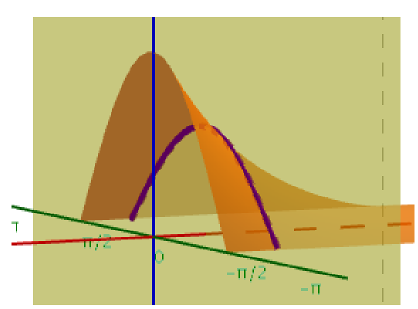
5. Se tiene entonces que es valor de $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ es siempre positivo.

La cantidad de calor que adquiere una molécula en el sentido de las x es proporcional al valor de $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$.

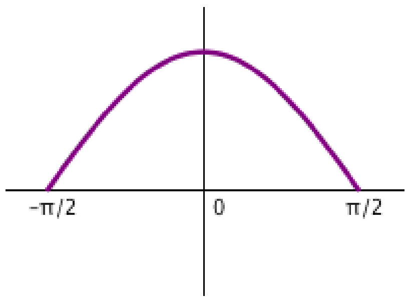
Por tanto esta recibe más calor de la precedente que el que le comunica a la que le sigue.



6. Si se corta esta superficie perpendicular al eje de las y, se tendrá un curva trigonométrica cóncava.



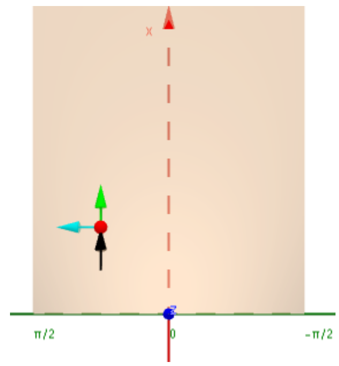
7. Se tiene entonces que es valor de $\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}^2}$ es siempre negativo.
La cantidad de calor que adquiere una molécula en el sentido de las y es proporcional al valor de $\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}^2}$.
Por tanto esta comunica más calor a la molécula que le sigue que el que recibe de la precedente.



8. Se llega a que el excedente de calor que la molécula recibe en el sentido de las x se compensa exactamente en el sentido de las y, pues es lo que expresa la ecuación:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}^2} = 0$$

Se sabe así la ruta que sigue el calor, que sale de la fuente A. Se propaga en el sentido de las x y a la vez se descompone en dos partes, una se dirige hacia los ejes y la otra sigue alejándose del origen para descomponerse como la anterior y así sucesivamente al infinito.



Para Fourier, a diferencia de D. Bernoulli que presenta argumentos físicos como demostración, es importante comprobar que la solución matemática es **coherente** con la situación física, pero la demostración se inserta en la matemática misma, sin hacer alusión a los argumentos físicos, se da así en inicio de la separación entre física y matemática que siempre iban de la mano (Farfán, 2012).

Después de dar esta justificación física, Fourier procede a hacer el cálculo de los coeficientes de la serie, para esto calcula diferenciaciones sucesivas de la ecuación, con lo que obtiene un sistema de infinitas ecuaciones con infinitas variables, con un gran dominio aritmético-algebraico resuelve dicho sistema utilizando un número finito de ecuaciones e incógnitas, generaliza sus resultados para el caso infinito, llegando a:

$$\frac{\pi}{4} = \cos y - \frac{1}{3}\cos 3y + \frac{1}{5}\cos 5y - \frac{1}{7}\cos 7y + \cdots, \qquad con\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Desde nuestro punto de vista el problema ya está resuelto, pero Fourier ve la necesidad de estudiar la convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cos[(2n-1)y]$$

La necesidad de este estudio de convergencia la podemos observar si ponemos atención a la solución general del problema dada por Fourier:

$$\frac{\pi}{4}v = e^{-x}\cos y - \frac{1}{3}e^{-3x}\cos 3y + \frac{1}{5}e^{-5x}\cos 5y + \cdots$$

Si se consideran los puntos que están muy alejados de la fuente de calor, el valor que toman las exponenciales es “despreciable”, por lo que para que se logre una estabilidad la serie de cosenos debe ser convergente, lo que podríamos suponer llevó a Fourier a estudiar su convergencia, previo a dar la solución general.

Además, refiriéndose a la solución general Fourier expresa:

> Pour connaître le système des températures **permanentes** dans une lame rectangulaire dont l’extrémité A est entretenue à la température 1, et les deux arêtes infinies à la température 0, on pourrait considérer les changements que subsistant les températures, depuis **l’état initial** qui es donné jusqu’à **l’état fixe qui es l’objet de la question**. On déterminerait ainsi l’état variable du solide pour toutes les valeurs du temps, et l’on supposerait ensuite cette valeur infinie.
> …**l’état final**, est celui que représente l’équation (a)[3] ou $v = v(x, y)$. Si cet état était formé d’abord, il subsisterait de lui-même, et c’est cette propriété qui nous a servi à le déterminer. Si l’on suppose la lame solide dans un outre état initial, la différence entre ce dernier état et l’état fixe forme un état partiel, qui disparaît insensiblement. Après un temps considérable, cette différence est presque évanouie, et le système des températures fixes n’subit aucun changement. **C’est ainsi que les températures variables convergent de plus en plus vers un état final, indépendant de l’échauffement primitif.** (Fourier, 1822, p. 200, el subrayado es nuestro)

Por lo que el problema tiene la característica de presentar un estado inicial y uno final fijo (en palabras de Fourier), es decir, es un problema que inicia en un estado transitorio y con el paso del tiempo llega a su estado estable o estacionario, para el cual la serie representa el estado estable del fenómeno, donde el paso del tiempo ya no provoca cambios en la

[3] Se refiere a la ecuación $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$.

temperatura. Surge la cuestión, al no afectar el flujo de tiempo el estado estable ¿cómo se observa dicha estabilidad en la solución? Esta estabilidad se vislumbra en la convergencia de la serie[4].

Se puede asegurar entonces, que un ambiente de significación para la STF requiere de *modelar un fenómeno estable con variación periódica y acotada en el paso del tiempo, en el cual, la estabilidad se vislumbra en la convergencia de la serie, es decir, en el estudio del límite de la sucesión de sumas parciales*.

5.5 El cálculo de los coeficientes de Fourier

Cómo ya se comentó, Fourier hace uso de un gran dominio aritmético para hacer el cálculo de los coeficientes de la representación en serie trigonométrica para una función arbitraria dada. Se discute aquí respecto de la **estructura** de la demostración seguida por Fourier, ya comentada en la subsección 4.1.6.

Primeramente, Fourier demuestra que una función arbitraria e impar $\varphi(x)$ se puede representar como serie de senos, es decir, se pueden determinar los valores de $a, b, c, d, \dots$ en la ecuación:

$$\varphi(x) = a \operatorname{sen} x + b \operatorname{sen} 2x + c \operatorname{sen} 3x + d \operatorname{sen} 5x + \cdots$$

Luego, reinterpretando las ideas de Fourier al lenguaje matemático actual, desarrolla la función $\varphi(x)$ en serie de potencias alrededor de $x = 0$, y sustituye las derivadas sucesivas por constantes $A, B, C, D, E, \dots$ con lo que obtiene un sistema con infinitas ecuaciones e infinitas incógnitas (ver Ilustración 5-2). Luego asegura:

[4] La característica principal de un fenómeno en estado estacionario es que no varía con el paso del tiempo, pero en este caso al no ser el tiempo una variable que forme parte de la solución, el estado estacionario se vislumbra por la convergencia de la serie.

> On considéra donc successivement les cas où l'on aurait à déterminer une inconnue par une équation, deux inconnues par deux équations, trois inconnues par trois équations, ainsi de suite à l'infini. Supposons que l'on désigne comme il suit différent système d'équations analogues à celles dont on doit tirer les valeurs des coefficients (Fourier, 1822, p. 213).

$$
\begin{aligned}
A &= a + 2\,b + 3\,c + 4\,d + 5\,e + \text{etc.}\\
B &= a + 2^3 b + 3^3 c + 4^3 d + 5^3 e + \text{etc.}\\
C &= a + 2^5 b + 3^5 c + 4^5 d + 5^5 e + \text{etc.}\\
D &= a + 2^7 b + 3^7 c + 4^7 d + 5^7 e + \text{etc.}\\
E &= a + 2^9 b + 3^9 c + 4^9 d + 5^9 e + \text{etc.}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Ilustración 5-2. Sistema de ecuaciones de Fourier (1822, p. 212)

Por lo que Fourier resuelve sistemas de ecuaciones particulares para **generalizar** sus resultados, aquí pareciera que se evidencia nuevamente la presencia del OE(3), principio de permanencia de Leibniz[5], pues Fourier generaliza resultados de sistemas de ecuaciones finitos al sistema de ecuaciones infinito. Después de una gran cantidad de cálculos, evidencia de su gran dominio aritmético, concluye que, en general $\int_0^{\pi} \varphi(x)\operatorname{sen} nx\, dx$ es el coeficiente de $\operatorname{sen} nx$ en el desarrollo en serie trigonométrica de $\varphi(x)$.

Dicho cálculo de los coeficientes trae consigo un problema, que ya se comentó anteriormente, en esa época la noción de integral es la de antiderivada, entonces viene la pregunta ¿a qué es igual la integral de una función arbitraria? Fourier, consciente de este detalle, señala:

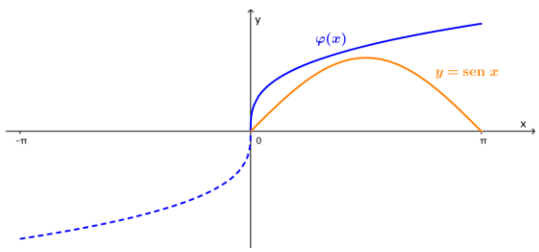
> …si la fonction $\varphi(x)$ est représentée par l'ordonnée variable d'une courbe quelconque dont l'abscisse s'étend depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, et si l'on construit sur cette même partie de l'axe de la courbe trigonométrique connue, dont ´'ordonnée est $y = \operatorname{sen} x$; il sera facile de se représenter la valeur d'un terme intégral. Il faut concevoir que pour chaque abscisse x, à laquelle réponde une valeur de $\varphi(x)$, et un valeur de $\operatorname{sen} x$, on multiplie cette dernière valeur par la première, et qu'au même point de l'axe on élève une ordonnée proportionnelle au produit $\varphi(x)\operatorname{sen} x$. On formera, par cette opération continuelle, une troisième courbe, dont les ordonnées sont celles de la courbe trigonométrique, réduite proportionnellement aux ordonnées de la courbe arbitraire qui représente $\varphi(x)$. Cela posé, l'aire de la courbe réduite étant pris depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, donnera la valeur exacte du coefficient de $\operatorname{sen} x$; et quelle que puisse être la courbe donnée que répond à $\varphi(x)$, soit qu'on puisse lui assigner une équation analytique, soit qu'elle ne dépende d'aucune

[5] No se puede asegurar si este es un obstáculo epistemológico, pues falta buscar evidencia empírica con estudiantes de que este tipo de argumentos está presente al enfrentarse a situaciones que requieran resolver un sistema con infinitas ecuaciones e infinitas incógnitas.

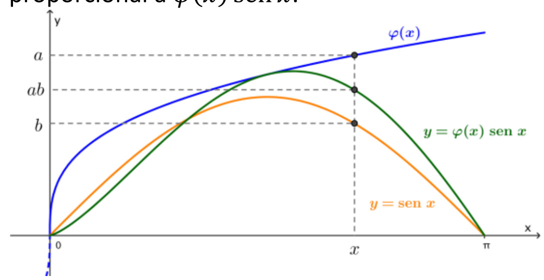
> loi régulière, il est évident qu'elle servira toujours à réduire d'une manière quelconque la courbe trigonométrique ; en sorte que l'aire de la courbe réduite a, dans tous les cas possibles, un valeur déterminée qui donne celle du coefficient de sen x dans le développement de la fonction. Il est le même du coefficient suivant (Fourier, 1822, p. 234).

Estos argumentos geométricos dados por Fourier, se podrían reinterpretar de la manera siguiente:

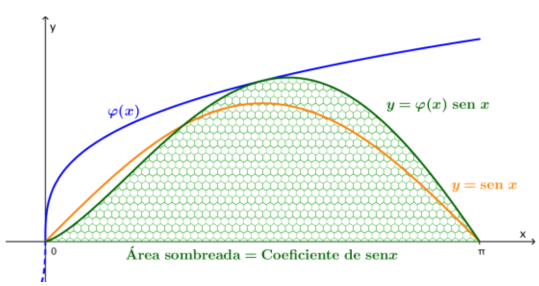
1. Se considera una función impar $\varphi(x)$ y se grafica junto con la curva $y = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $(0, \pi)$ (podría ser un intervalo cerrado o semiabierto).



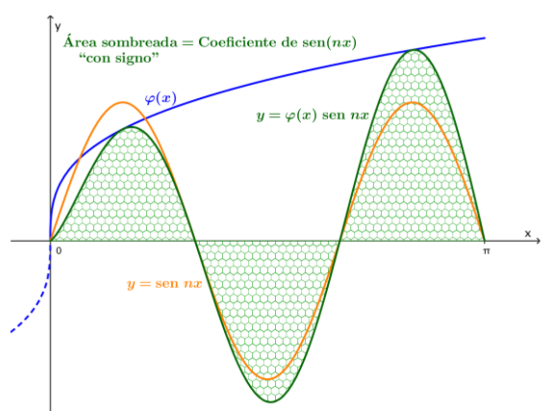
2. Para cada abscisa x, multiplíquese los valores que le corresponden en $\varphi(x)$ y $\operatorname{sen} x$. Y para esa misma abscisa levante una ordenada proporcional a $\varphi(x) \operatorname{sen} x$.



3. En esta nueva curva, cuyas ordenadas son las de la curva trigonométrica reducidas proporcionalmente a la curva arbitraria $\varphi(x)$, el área en el intervalo $(0, \pi)$, dará el valor exacto del coeficiente de $\operatorname{sen} x$ en el desarrollo trigonométrico de $\varphi(x)$ en serie de senos.



4. Este proceso se generaliza para calcular el coeficiente de $\operatorname{sen} nx$ en el desarrollo trigonométrico de $\varphi(x)$ en serie de senos.



Luego de hacer esto Fourier comenta el procedimiento que se utiliza hoy en día para demostrar el cálculo de los coeficientes de la serie trigonométrica, el cual consiste en considerar la serie:

$$\varphi(x) = b_1 \operatorname{sen} x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + b_n \operatorname{sen} nx + \cdots$$

Se multiplica por $\operatorname{sen} nx$, con lo que resulta:

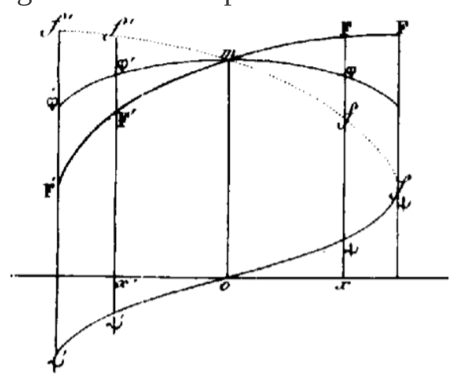
$$\varphi(x) \operatorname{sen} nx = b_1 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} nx + b_2 \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} nx + \cdots + b_n \operatorname{sen}^2 nx + \cdots$$

Se integra término a término desde 0 hasta π, con lo que se concluye que $b_n = \int_0^\pi \varphi(x) \operatorname{sen} nx$. Fourier realiza un análisis análogo para representar una función par $\psi(x)$ en serie de cosenos:

$$\psi(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx + \cdots$$

Concluye que $a_n = \int_0^\pi \varphi(x) \cos nx$.

Ahora bien, ya demostrado que dos funciones, una impar y la otra par, se puede desarrollar en serie de senos y cosenos, respectivamente, Fourier presenta geométricamente la demostración de que una función cualquiera se puede representar como suma de dos funciones, una par y la otra impar.

> Une fonction quelconque $F(x)$, représentée arbitrairement dans l'intervalle de $-\pi$ à $+\pi$, peut toujours être partagée en deux fonctions telles que $\varphi(x)$ et $\psi(x)$. En effet, si la ligne $F'F'mFF$ représente la fonction $F(x)$,
>
> 
>
> et que l'on élève par le point o l'ordonnée o m, on tracera par le point m à droite de l'axe $0m$ l'arc mff semblable à l'arc $mF'F'$ de la courbe donnée, et à gauche du même axe on tracera l'arc $mf'f'$ semblable à l'arc mFF ; ensuit on fera passer par le point m un linge $\varphi'\varphi' m\varphi\varphi$ qui partagera en deux parties égales la différence de chaque ordonnée xF ou $x'f'$ à l'ordonnée correspondante xf ou $x'F'$. On tracera aussi la ligne $\psi'\psi' 0\psi\psi$, dont

l'ordonnée mesure la différence de l'ordonnée de $F'F'mFF$ à celle de $f'f'mff$. Cela posé, les ordonnées de la ligne $F'F'mFF$ et de la ligne $f'f'mff$ étant désignées l'une par $F(x)$ et la seconde par $f(x)$, on aura évidemment $f(x) = F(-x)$; désignant aussi l'ordonnée de $\varphi'\varphi'm\varphi\varphi$ par $\varphi(x)$, et celle de $\psi'\psi'0\psi\psi$ por $\psi(x)$, on aura

$$F(x) = \varphi(x) + \psi(x) \text{ y } f(x) = \varphi(x) - \psi(x) = F(-x)$$

donc

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2}F(x) + \tfrac{1}{2}F(-x) \text{ y } \psi(x) = \tfrac{1}{2}F(x) - \tfrac{1}{2}F(-x)$$

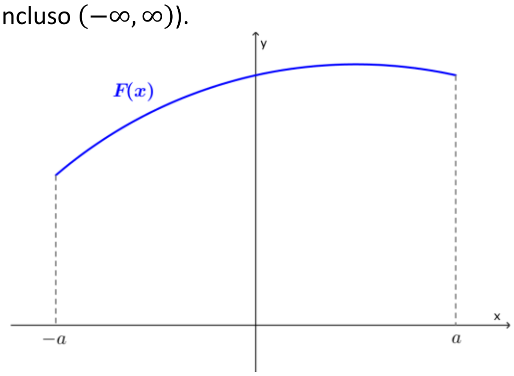
on en conclut

$$\varphi(x) = \varphi(-x) \text{ y } \psi(x) = -\psi(-x)$$

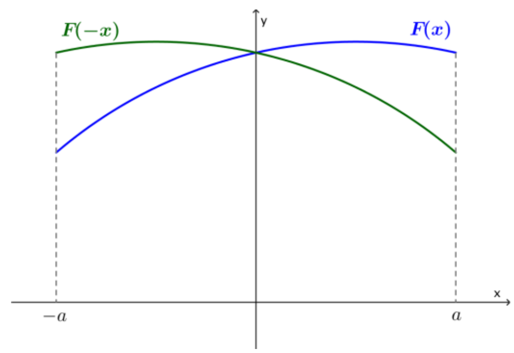
(Fourier, 1822, p. 254)

Siguiendo paso a paso la explicación geométrica de Fourier se puede reinterpretar su exposición, utilizando un lenguaje actual, de la siguiente manera:

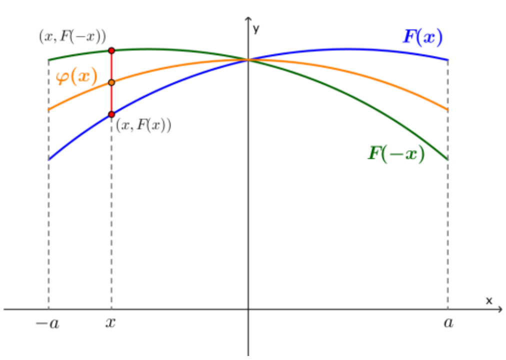
1. Considérese una función arbitraria $F(x)$ definida en un intervalo $[-a, a]$, con $a \in \mathbb{R}^+$ (podría ser un intervalo abierto o semiabierto, incluso $(-\infty, \infty)$).



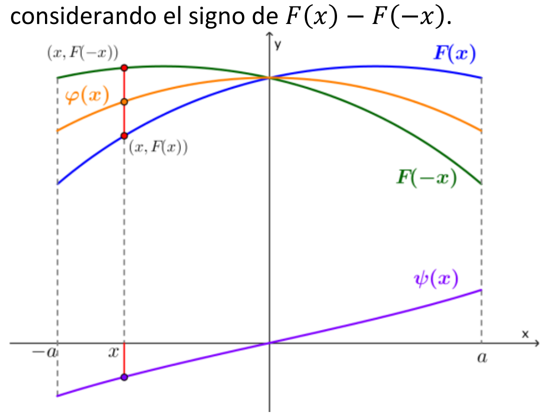
2. Realice una reflexión respecto del eje de las ordenadas a $F(x)$. Se obtiene $F(-x)$.



3. Pada cada x en $[-a, a]$, se toma el punto medio del segmento cuyos extremos son $(x, F(x))$ y $(x, F(-x))$, genera una curva $\varphi(x)$.



4. Pada cada x en $[-a, a]$, se genera la curva $\psi(x)$, con la mitad de la medida del segmento cuyos extremos son $(x, F(x))$ y $(x, F(-x))$, considerando el signo de $F(x) - F(-x)$.



La demostración analítica que proporciona Fourier es la que se da hoy día en la escuela, pero se omite la construcción geométrica presentada anteriormente, además de no ser un recurso metodológico para demostrar un teorema actualmente, pues en el actual dME alrededor de la STF predomina el contexto algebraico (Rodríguez, 2009). Con esta demostración Fourier logra lo que deseaba generalizar, pues dado que una función arbitraria se puede representar como suma de una función par y otra impar, y estas se pueden desarrollar en serie trigonométrica de senos y cosenos, respectivamente, entonces la función inicial se puede representar en serie trigonométrica de senos y cosenos.

Es importante resaltar como Fourier, tanto en cálculo de los coeficientes como en la demostración previa, utiliza razonamientos geométricos como argumento para demostrar sus ideas matemáticas, visualiza en la gráfica todos los pasos necesarios al lado de la operatoria aritmética que le permite calcular los coeficientes para la STF.

Se puede asegurar entonces que, en la forma de trabajo de Fourier, la manera de construir el conocimiento matemático relativo al cálculo de los coeficientes está ligado a la coordinación y articulación de diferentes miradas del objeto, una geométrica-gráfica y la otra algebraica-analítica, para validar la segunda en la primera.

En este sentido, el cálculo de los coeficientes de Fourier es un problema con características propias independientes del ambiente fenomenológico el que se origina la serie trigonométrica (la conducción de calor). Por lo que del trabajo de Fourier se evidencia que *la forma de acercarse al objeto (los coeficientes de Fourier) debe incluir movilidad en dos registros de representación: el geométrico y el algebraico-analítico, en donde nociones como operación de funciones, integral definida y ortogonalidad de las funciones trigonométricas, desde una interpretación geométrica, cobran gran importancia*.

5.6 Una epistemología de prácticas preliminar

Ahora bien, el análisis socioepistemológico presentado hasta ahora, basado en una problematización del saber alrededor de la STF, evidenció la presencia de la **predicción** como práctica socialmente compartida. Está regulada por un paradigma imperante alrededor del trabajo de Fourier, el desarrollo de la ingeniería como ciencia, por lo que denominamos a la práctica de referencia: el **surgimiento de la ingeniería como ciencia**. Es dentro de ésta donde Fourier hace el estudio de la propagación del calor, en la cual la actividad que permite la formación de funciones psicológicas superiores es el **estudio de la convergencia** de series trigonométrica particulares.

La predicción, **como práctica socialmente compartida**, surge ante la incapacidad del ser humano de controlar el tiempo a voluntad (Cantoral, 2013), y ante la necesidad de conocer el comportamiento futuro de diferentes fenómenos de su entorno el ser humano *predice*. En este sentido, “la predicción se construye socialmente a partir de las vivencias y experiencias cotidianas de los individuos y de los grupos sociales” (Cantoral, 2013, p. 91).

El problema inicial de Fourier consiste en conocer el estado ulterior (estable) de un sistema, en particular el fenómeno de propagación del calor cuyas variaciones son periódicas y acotadas, y del cual se conocen sus condiciones iniciales y de frontera. Se requiere, entonces, conocer el valor que tomará la temperatura cuando el flujo de tiempo ya no sea una variable que modifique el comportamiento del sistema (estado estacionario).

Las STF se presenta entonces como resultado de una situación que precisa de la predicción, cuya fenomenología intrínseca es la *determinación del estado estacionario* (Farfán, 2012). Es así como “la *predicción* en tanto que no es un objeto matemático, tiene que entrar en la problemática teórica no como noción, o representación, sino como expresión de una *práctica social* […]: el *Prædiciere*” (Cantoral, 2013, p. 93)[6].

La predicción, como práctica socialmente compartida es regulada por el surgimiento de la ingeniería matemática (práctica de referencia), va a significar la STF como un modelo de predicción para fenómenos estables con variación periódica y acotada, en el cual, la estabilidad se vislumbra en la convergencia de la serie trigonométrica (ver subsección 5.3); para lo que es necesario la intervención de las acciones de *predecir*, *modelar* e *interpretar*, las cuales se describen a continuación.

[6] Un análisis detallado del *Prædiciere* como práctica social se encuentra en Cantoral (2013).

5.6.1 La acción de predecir

La STF en su ambiente fenomenológico, la propagación del calor, requirió de la comprensión de las variables involucradas, sus causas y cómo se comportaban en el sistema, sus efectos. Fue necesario cuantificar estas causas y efectos para generar el modelo matemático del problema, en este sentido la predicción y el estudio de la variación, están íntimamente relacionadas, pues:

> La **predicción** es una actividad racional que permite determinar el estado futuro de un sistema, de un objeto o de un fenómeno con base en el estudio sistemático de las causas que lo generan y los efectos que produce (Cantoral, Molina y Sánchez, 2005, p. 467).

Según Cantoral (2013), la estructura de todo proceso de cambio, sigue el modelo del crecimiento de estados vecinos, sucesivos o infinitamente próximos: Si E_i es el estado i, la dinámica de interés se centra en el paso “siguiente”, $i+1$, o bien al próximo:

$$E_i \to E_{i+1}$$

En este sentido, dada una serie trigonométrica de la forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

Existen varias sucesiones presentes en la serie: (1) las sucesiones numéricas $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, (2) la generada por el término general $c_n = a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$ y (3) la sucesión de sumas parciales generada por $S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx$. A partir de esto se puede analizar la variación en la serie de maneras diferentes, aquellas que se corresponden a las funciones trigonométricas, y otras propias de la serie trigonométrica:

Objeto	**Situación de Variación**	**Para predecir sobre…**
$\{a_n\}\ y\ \{b_n\}$	$a_n + variación = a_{n+1}$ $b_n + variación = b_{n+1}$	El límite de las sucesiones.
$\{c_n\}$	$c_n(x) \to c_n(x+dx)$	El comportamiento periódico y acotado.
	$c_n(x) + variación = c_{n+1}(x)$	El límite de la sucesión.

$\{S_n\}$	$S_n(x) \to S_n(x+dx)$	El comportamiento periódico y acotado.
	$S_n(x) + variación = S_{n+1}(x)$	La convergencia de la serie.

Tabla 5.1. Variaciones presentes en la STF.

No es de extrañarse que se haya reportado en la investigación de Farfán (2012) que la determinación del estado estacionario es cognitivamente más complejo que la serie misma, se puede notar de la Tabla 5.1, que las variaciones presentes en el problema involucran lo numérico, lo funcional trigonométrico y lo convergente, todas a la vez en un mismo fenómeno, lo que hace necesario el estudio de las variaciones para comprender el todo.

5.6.2 La acción de modelar

Dentro de la matemática educativa existe una gran cantidad de enfoques desde los cuales se puede hablar de modelación matemática, dentro de todas esas perspectivas, Morales indica:

> Lo que si podemos decir, es que los modelos matemáticos usan una especie de analogías para ayudar a la comprensión de un sistema más complejo, este proceso de usar analogías no nos es ajeno, de hecho podríamos decir que modelar matemáticamente es un resultado de una actividad que realizamos de alguna forma u otra, desde siempre en la vida cotidiana (Morales, 2003, p. 10).

La actividad de modelación desde la TSME se observa en el trabajo de Arrieta (2003), para quien el modelo de algún fenómeno es una herramienta[7] para interpretar e **intervenir en un contexto**, transformándolo, que se utiliza en sustitución de lo modelado, donde la manipulación del modelo permite entender y predecir el comportamiento del fenómeno, así como **validar hipótesis** y **elaborar estrategias** para la intervención.

> La modelación no es representación. La modelación, a diferencia de la representación, es una práctica que refleja la intencionalidad humana […] Así el modelo es un ente para la intervención en la naturaleza, es una

[7] Un objeto en sí mismo no es herramienta, es herramienta hasta que el ser humano lo utiliza con una intención, determinada no individualmente, sino socialmente.

herramienta, es algo utilizado para comprender e intervenir en lo modelado (Arrieta, 2003, p. 35).

De esta manera, es importante resaltar que un modelo no es una representación exacta de la realidad, estos dependen de la pregunta que se quiere responder, lo que implica que puedan existir diferentes modelos para un mismo fenómeno, que son adecuados según la necesidad del modelador y validados en la experimentación.

Ilustración 5-3. Las prácticas de modelación (Arrieta, 2003).

En este sentido, y con base en el análisis hecho, se deja ver como el trabajo de Fourier requiere de la modelación como actividad matemática, esto no solo en el modelaje del problema de la propagación del calor y en los casos particulares que explica, sino que lo hace explícito en el discurso preliminar de la *La Théorie*:

Les causes primordiales ne nous sont point connues; mais elles sont assujetties à des lois simples et constantes, que l'on peut découvrir par **l'observation**, et dont l'étude est l'objet de la philosophie naturelle.
La chaleur pénètre comme la gravité, toutes les substances de l'univers, ses rayons occupent toutes les parties de l'espace. Le but de notre ouvrage est **d'exposer les lois mathématiques que suit cet élément [**…]
J'ai déduit ces lois d'une longue étude et de la comparaison attentive de faits connus jusqu'à ce jour ; je les ai tous observés de nouveau dans les cours des plusieurs années, avec les instruments les plus précis dont on ait encore fait usage.
Pour fonder cette théorie, il était d'abord nécessaire de distinguer et de définir avec précision les propriétés élémentaires qui déterminent l'action de la chaleur. J'ai reconnu ensuite que tous les phénomènes qui dépendent de cette action, se résolvent en un très-petit nombre de faits généraux et simples; et

> par là toute question physique de ce genre est ramenée à une recherche d'analyse mathématique […]
> **Elles [ces recherches] ont aussi une relation nécessaire avec le système du monde**, et l'on connaît ces rapports, si l'on considère les grands phénomènes qui s'accomplissent près de la surface du globe terrestre (Fourier, 1822, p. Discours Préliminaire).

Se puede notar como Fourier asegura que los problemas del mundo físico, descubiertos gracias a *la observación y a la interacción con los mismos*, se deben convertir en problemas del Análisis Matemático. Para esto Fourier cuenta con sus *hipótesis de partida*, por ejemplo, asegura que el calor penetra todas las sustancias del universo o que el calor debe llegar a un estado estable o estacionario; además de que para cada procedimiento matemático presentaba su correspondiente interpretación física para *validar* sus argumentaciones, así como revisar que esto se correspondiera con la evidencia empírica con la que contaba.

Un ejemplo de la modelación que hace Fourier es el problema de la lámina infinita (ver subsección 5.1.4), en cual es un modelo del calentamiento de la tierra, fenómeno que ya preocupaba a Fourier antes de escribir *Las Temperaturas del Globo Terrestre* en 1827 (Morales, 2003). En la Ilustración 5-4 se puede identificar la relación de este modelo con el calentamiento de la Tierra.

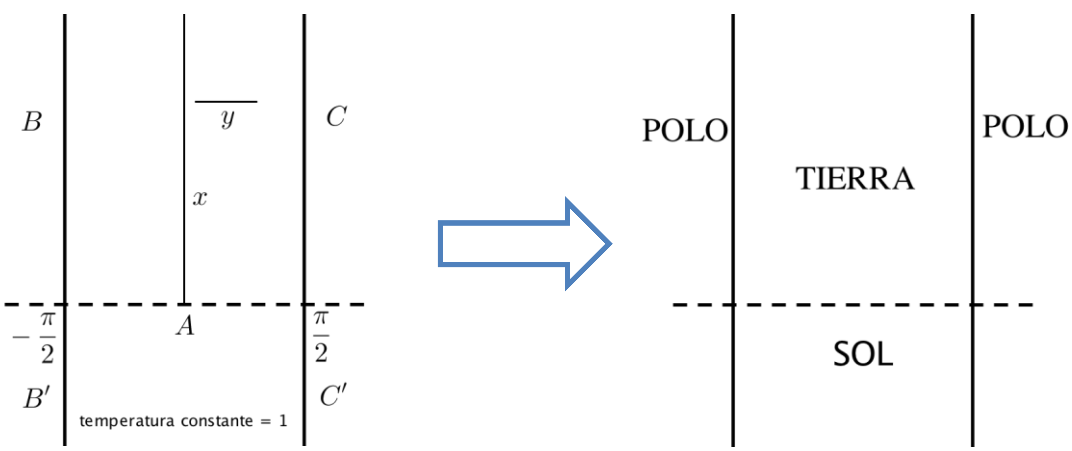


Ilustración 5-4. Modelo del calentamiento de la Tierra

5.6.3 La acción de interpretar

Aunada a la actividad de modelar, la actividad de interpretar cumple un rol importante en el trabajo de Fourier, entendiendo esta como la acción de "asignar significado a los resultados obtenidos con el modelo" (Izquierdo, Galán, Santos y Del Olmo, 2008, p. 97), pues estos resultados no poseen significado intrínseco sino es mediante la interpretación que hace quien modela, esta interpretación dependerá de sus conocimientos previos, sus creencias, sus vivencias, su experiencia con el fenómeno, entre muchos otros factores, todo esto dota la interpretación de un carácter social.

Es decir, bajo la idea de que un modelo no es una simple representación de un fenómeno, sino más bien una herramienta para intervenir en la naturaleza, la acción de interpretar cobra una importancia significativa en el proceso, pues es la que permite tomar los resultados del modelo y, con base en la interpretación de ellos, intervenir sobre el fenómeno.

Fourier tiene la necesidad de validar cada uno de sus argumentos matemáticos en el contexto físico, es un "ir y venir" entre el fenómeno y el modelo. Aunque las ideas físicas y las matemáticas estén separadas siempre busca que haya coherencia entre ambas. Esto se vislumbra en sus interpretaciones en el problema de la lámina infinita ya comentado previamente.

El análisis anterior permite identificar las prácticas asociadas a la STF, donde **predecir, modelar e interpretar** corresponden a las *acciones* directas del sujeto sobre el medio; estas acciones se organizan para el **estudio de la convergencia** de series trigonométricas como *actividad* que provoca el surgimiento de funciones psicológicas superiores, para perfilar a la **predicción** como *práctica socialmente compartida*; dicha práctica cae bajo la regulación de una *práctica de referencia*, la cual es el **surgimiento de la ingeniería como ciencia**; la que a su vez es normada por la **Prædiciere** como *práctica social*.

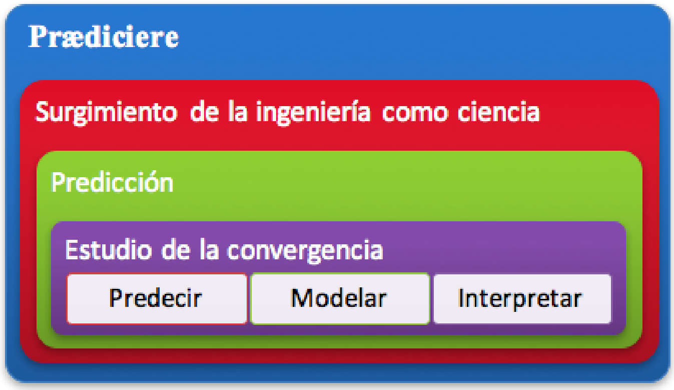


Ilustración 5-5. Epistemología de prácticas preliminar de la STF.

Ahora bien, la construcción social de la STF, lo que incluye la significación del cálculo de sus coeficientes, requiere de dos momentos importantes: (1) el estudio de fenómenos estacionarios en el flujo del tiempo y (2) el estudio matemático de la representación de una función arbitraria en serie trigonométrica. Esto se evidencia en la historia, los grandes matemáticos que discutieron alrededor del problema de la cuerda vibrante no lograron llegar a lo segundo, fue hasta que Fourier se preocupó por la convergencia de series trigonométricas específicas que se dio paso a la manera de calcular los coeficientes de Fourier.

Donde se reconoce, en medio de estos dos momentos, un cambio de mirada: trasladar el problema de la comprensión de la convergencia de series trigonométricas particulares, al problema de dado el valor de convergencia de la serie calcular sus coeficientes. El cálculo de los coeficientes emerge del trabajo de Fourier a partir de su ambiente fenomenológico, es una aportación matemática que surge de su quehacer, pero que trata de responder a la necesidad de formalidad y generalización propia de la época.

De esta manera se busca significar el cálculo de los coeficientes a partir de dotar de significado a la demostración que se hace hoy en día en la escuela, mediante la significación con ideas geométricas, tal y como se mencionó en la sección previa, *la forma de dar significado al cálculo de los coeficientes de Fourier debe incluir movilidad en dos registros de representación: el geométrico y el algebraico-analítico, en donde nociones como operación de funciones, integral definida y ortogonalidad de las funciones trigonométricas, desde una interpretación geométrica, cobran gran importancia*.

6 Un diseño de intervención para el aula

6.1 Rediseño del dME para la STF

Para realizar una propuesta de rediseño del dME se requiere de la comprensión del dME actual, esto mediante la consideración de sus características principales: el carácter utilitario y no funcional del conocimiento, la atomización en los conceptos, el carácter hegemónico del dME, la concepción de que la matemática es un conocimiento acabado y continuo, falta de marcos de referencia para la resignificación de la matemática escolar (Soto, 2010). A continuación se hará un recorrido por el mapa del dME alrededor de la STF.

El *carácter utilitario* de la STF en el dME actual está asociado a que este saber es útil para resolver ciertas problemáticas, por lo que el centro de atención está en qué tipo de problemas que resuelve la STF y no en cómo ha sido construida en su génesis, lo que no permite que esta construcción se perciba como resultado de la actividad humana. Esta mirada provoca que la matemática escolar privilegie la algoritmia por sobre las características de la circunstancias histórico-sociales que provocan el surgimiento de la STF, como ya se evidenció en los capítulos precedentes (Capítulos 4 y 5).

Es así como desde la TSME se propone una esquema de prácticas anidadas preliminar para la STF (ver Ilustración 5-5 en p. 88), el cual promueve la construcción social de la misma a partir del uso culturalmente situado en contextos de significación cercanos al que aprende (individual o colectivo), es decir, que el aprendiz cuente con las herramientas necesarias para hacer frente al problema planteado por la situación de aprendizaje, en este caso convirtiendo a la STF en una herramienta de predicción.

En este sentido, el actual dME presenta a la STF como un procedimiento para calcular los coeficientes de una serie trigonométrica a partir de una función dada, lo que no le permite al estudiante construir un conocimiento funcional que tome sentido a partir de su contexto de significación. Esto a su vez provoca que al trabajar con la STF haya carencia de argumentaciones y significados que provengan de la actividad humana, ya que no entra en juego la práctica de referencia que hace emerger dicho conocimiento, ni tampoco el contexto de quien aprende (aula extendida), lo que hace manifiesta la presencia de la *atomización de* *los conceptos* en el dME alrededor de la STF. Es así, como la consideración de la evolución de lo trigonométrico (de la funcionalidad a la formalidad trigonométrica) es de vital importancia, ya que permite el surgimiento de nuevas argumentaciones a resignificar a la función trigonométrica, para pasar al estudio de propiedades más analíticas como lo es el estudio de la convergencia, característica primordial de las series trigonométricas.

Es importante aclarar en este punto que esta investigación no pretende significar la noción de convergencia de series, pues es un problema por demás complejo debido a la incapacidad que tiene el ser humano de percibir el infinito a través de los sentidos. El estudio de la convergencia se refiere, más bien, a la significación de las sumas parciales y la comprensión de su comportamiento; ¿cómo cambian? y ¿cuánto cambian?; para que a partir de esto el estudiante tenga una idea intuitiva más estable con respecto a la noción de convergencia de series trigonométricas, en particular de la STF.

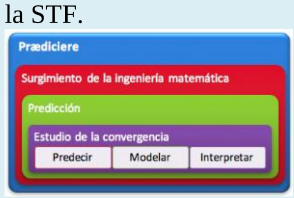
El dME imperante impone como argumentación que la STF se utiliza para aproximar una función (con ciertas características) a través de una serie trigonométrica (marco algebraico), lo que provoca que los significados y procedimientos alrededor de la misma también sean impuestos como una regla que se debe aplicar, lo que no permite que el estudiante se involucre en su construcción, esto evidencia el *carácter hegemónico* del dME alrededor de la STF. A partir del análisis hecho se puede notar como detrás de la STF hay otro tipo de argumentaciones (físicas, geométricas, algebraicas, empíricas) de las cuales pueden surgir diferentes significados y procedimientos a utilizar, lo que permite que sea el estudiante quien construya el conocimiento a la luz de las prácticas.

El hecho de ver a la STF como una regla, da cuenta de un dME que considera la matemática como un *conocimiento acabado y continuo*. La STF se presenta como un algoritmo que se debe memorizar y aplicar, lo cual provoca que no se cuestione acerca de la construcción de dicho concepto, sino que se considere preexistente al que aprende y que esto sólo debe asimilarlo, lo que no le permite dotarlo de otros significados en contextos diferentes (resignificarlo).

Lo anterior está íntimamente relacionado con la *falta de marcos de referencia* para significar a las STF, ya que las explicaciones en su introducción son meramente algorítmicas, carece de la consideración de otras áreas del conocimiento a las cuales la matemática responde, ni siquiera responde a un marco de referencia matemático, pues la mecanización y un solo tipo de argumentación son los privilegiados.

De esta manera se propone que para la significación de la STF se consideren las características esenciales de su contexto de origen, esto no quiere decir que se va a reproducir el mismo fenómeno en la clase de matemática (matematizar la transferencia de calor), más bien se consideran las características primordiales de dicho fenómeno para a partir de estas identificar contextos de significación para la serie cercanos al sujeto que aprende (individual o colectivo). Dichos contextos requieren de modelar un fenómeno estacionario con variación periódica y acotada, en el cual la STF se convierta en una herramienta de predicción.

Lo expuesto hasta este punto se puede resumir en la Tabla 6.1, la cual es una adaptación de la Tabla 2.1 (p. 19), directamente relacionada con una propuesta de rediseño para el dME alrededor de la STF, que dé cuenta de su construcción social.

dME actual alrededor de la STF	Principios de la Socioepistemología	Propuesta de dME para la STF
Carácter utilitario La STF se ha presentado como un algoritmo mecánico que permite resolver ciertos problemas, lo que no permite su construcción a partir de las características del contexto histórico-social de su surgimiento.	**Normativa de la práctica social** La significación de las matemáticas mediante el uso: esquema de anidación de prácticas preliminar para la STF. 	**Carácter funcional** La STF se presenta como una herramienta de predicción al modelar e interpretar ciertos fenómenos cercanos al sujeto (individual o colectivo), reconociendo a la Prædiciere como práctica social norma la construcción de la STF, mediante su uso culturalmente situado.
Atomización en los conceptos Existe carencia de argumentaciones y significados que provengan de la actividad humana, pues no se toma en cuenta la práctica de referencia que hace emerger a la STF ni	**Racionalidad contextualizada** La relación con el saber es una función contextual.	**Racionalidades contextuales diversas** Se reconocen privilegian y potencian diversos tipos de racionalidad relativos a la realidad en la que el individuo se encuentre en un momento y lugar; desde el cual se construirá conocimiento: aula extendida (contexto situado). Se considera la evolución de lo trigonométrico: de la funcionalidad a la formalidad trigonométrica; lo cual permita la

tampoco el contexto de quien aprende (aula extendida).		emergencia de argumentaciones en el contexto de quien aprende, ya que se debe resignificar a la función trigonométrica para que surja la serie trigonométrica a partir del estudio de la convergencia.
Carácter hegemónico La STF es vista como un objeto matemático para aproximar una función por serie trigonométrica (significado impuesto), esto a través de un algoritmo mecánico para el cálculo de sus coeficientes (predominio del marco algebraico-analítico). **Conocimiento acabado y continuo** La STF es un algoritmo preestablecido, con un carácter utilitario. Lo que no permite su construcción por parte de quien aprende, sino que debe ser memorizado y aplicado a problemáticas específicas.	**Relativismo epistemológico** La validez del saber es relativa al individuo y al grupo cultural.	**Validación de saberes (conocimientos construidos)** Detrás de la STF existe diversidad de argumentaciones: físicas, geométricas, analíticas y algebraicas. Por lo que se deben considerar esta diversidad a la hora de construir el conocimiento, ya que la validez del saber es relativa al individuo y al grupo cultural en el cual este ha emergido y respecto a la racionalidad contextualizada que éste posea.
Falta de marcos de referencia para su significación Se ha identificado la necesidad de identificar marcos de referencia a partir de los cuales se construyan las bases de significados para las STF.	**Resignificación progresiva** La significación no es estática, es funcional, relativa y contextual.	**Pluralidad de prácticas de referencia para la resignificación** La construcción dela STF requiere del modelaje e interpretación de un fenómeno estacionario de variación periódica y acotada, para el cual la STF se convierta en una herramienta de predicción. A partir de esto se debe identificar su interacción con diversos contextos y la propia evolución de la vida del individuo o grupo resignificarán los saberes hasta el momento construidos, enriqueciéndolos con nuevos significados.

Tabla 6.1. Propuesta de rediseño del dME alrededor de la STF.

Los elementos de la tercera columna de la Tabla 6.1 se pueden considerar, en términos de la Ingeniería Didáctica, como las variables Macrodidácticas, pues estas conciernen a la organización global de la ingeniería.

6.2 La población de destino

La población de destino son estudiantes de la licenciatura en enseñanza de las matemáticas de la Universidad de Costa Rica. A partir de una mirada a su plan de estudios y lo programas de las materias se puede evidenciar que su formación está dividida en dos partes, el conocimiento disciplinar en matemáticas y las materias de formación docente, en donde se aprenden conocimientos en educación general y no se problematizan los saberes matemáticos.

A partir de la organización de las materias de matemáticas, la cual puede recordar en la Ilustración 4-3 (p. 55) se puede notar como esta población tiene una fuerte formación matemática, pero en ninguna de sus materias se estudia la STF, de hecho sólo hay dos materia en las cuales se estudias temas relacionados con series y su convergencia.

Podemos asegurar que su plan de estudios se preocupa por una organización de la matemática de tipo deductiva (axiomas-definiciones-teoremas), y que no se consideran situaciones en las que estén involucrados los objetos matemáticos sino sólo dentro de la matemática misma. Esto permite resaltar que esta población no tiene cercanía con ningún fenómeno de determinación de estado estacionario, ni en su materia de física, por lo que se debe buscar un ambiente de significación dentro de la matemática misma. Es decir, su práctica de referencia es la matemática escolar y es en esta en donde se debe desarrollar el contexto necesario para significar la STF.

6.3 Situación de aprendizaje

A continuación se presenta una situación de aprendizaje propuesta para la población descrita en la sección anterior, para lo cual se propone el modelaje de un fenómeno de tipo físico-geométrico: *la superposición de movimientos circulares*[1].

Se busca entonces un ambiente de significación para este fenómeno ya que por las características de la población podemos asegurar que su marco de referencia proviene de situaciones abordadas desde la matemática misma, ya que en su formación no se relacionan con fenómenos estacionarios, ni siquiera en la materia de física, por lo que se un ambiente de significación que se le dote de significado dentro de la misma matemática.

Este ambiente de significación es el modelo de movimiento de los planetas propuesto por los astrónomos alejandrinos (323 a. C. – 30 a. C.), el cual se considera de gran importancia epistémica ya que perduró hasta el siglo XVI, cuando Copérnico propuso que la Tierra no era el centro del universo.

A continuación se presenta la situación de aprendizaje, la cual está divida en secuencias de tareas, se explica la intención de cada una de las tareas y de cada pregunta presente en la misma, el diseño completo para su aplicación se encuentra en el Anexo 2.

6.3.1 Introducción: El movimiento de los planetas

Se busca con esta parte que el estudiante se familiarice con el modelo del movimiento planetario propuesto por los astrónomos alejandrinos y su funcionamiento como superposición de movimientos circulares, para esto se utilizará un applet de Geogebra (click aquí) con el fin de visualizar el comportamiento del sistema[2], cabe resaltar en esta parte que para la época el Sol y la Luna eran considerados planetas, por lo que durante todas las tareas cuando se hace referencia a los planetas se está considerando también al Sol y la Luna. Se puede ver la introducción completa en el Anexo 2.

[1] Se puede encontrar una explicación detalla de la relación entre la superposición de movimientos circulares y la STF en (Moreno, 1999).

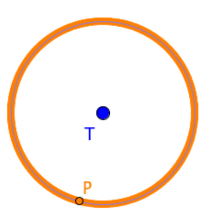
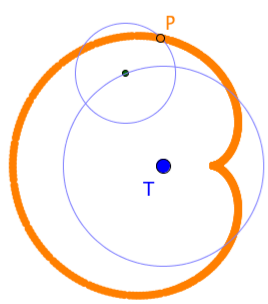
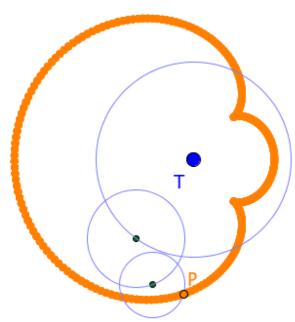
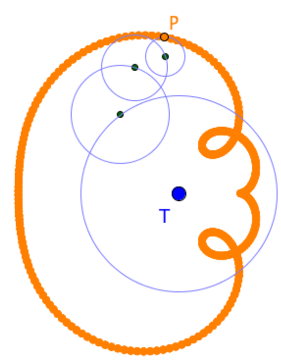
[2] Para tener referencia de este modelo y ampliar la introducción se puede revisar (Calles, Yépez, & Peralta, 2003).

6.3.2 Tarea #1: Explicando el movimiento de los planetas

Objetivo: Caracterizar el comportamiento del sistema de forma cualitativa, lo que permitirá una comprensión más profunda del fenómeno y no solo aquello que detectan los sentidos a simple vista. Esta Tarea se divide en dos partes, la primera procura comprender por qué el modelo de los alejandrinos permite explicar aquello que el modelo griego no permitía, la segunda parte busca vislumbrar la noción de estabilidad del sistema. Se busca de esta manera propiciar una comprensión profunda del sistema, así como Fourier conocía el comportamiento del fenómeno de propagación del calor a través de la empírea antes de proponer su modelo matemático del fenómeno.

Parte I. ¿Qué permite explicar este modelo?

Llamemos a la Tierra *T* y considere la trayectoria de un planeta *P* que se mueve alrededor de la Tierra, utilizando el modelo de los epiciclos con una, dos, tres y cuatro circunferencias.

1 circunferencia	2 circunferencias	3 circunferencias	4 circunferencias
			

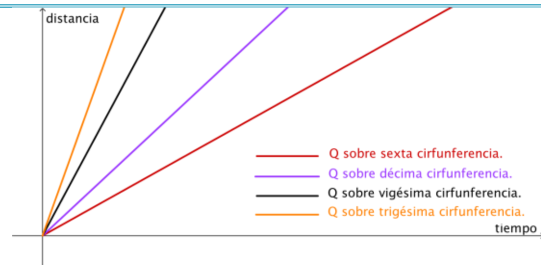
Pregunta (a):	¿Por qué crees que el modelo con una única circunferencia no permite explicar el cambio de luminosidad de los planetas, las estaciones del año y el fenómeno de retrogradación? Explica con tus propias palabras.
Pregunta (b):	Del modelo con 2, 3 y 4 circunferencias ¿cuál(es) permite(n) explicar el cambio de luminosidad de los planetas y las estaciones

	del año? Explica con tus propias palabras y ejemplifica utilizando una porción de trayectoria de alguno(s) de los modelos.
Pregunta (c):	Del modelo con 2, 3 y 4 circunferencias ¿cuál(es) permite(n) explicar el fenómeno de retrogradación de los planetas? Explica con tus propias palabras y ejemplifica utilizando una porción de trayectoria de alguno(s) de los modelos.
Intencionalidad:	Se espera que el estudiante relacione el cambio de luminosidad y las estaciones del año con la distancia que hay entre T y P, por lo tanto el modelo de una circunferencia no permite explicar estos fenómenos ya que esta distancia nunca cambia, no así en el modelo con 2, 3 y 4 circunferencias en donde la distancia de P a T cambia durante la trayectoria. Además se espera que el estudiante relacione el fenómeno de retrogradación con los bucles que se generan en el modelo con 4 circunferencias, lo cual no sucede en los modelos con 1, 2 y 3 circunferencias. Esta es una pregunta de confrontación, pues obliga al estudiante no solo a decir lo que sucede, sino a explicar las causa de esos comportamientos.
Recomendaciones:	Si la discusión de la pregunta (a) no surge se puede pedir a los estudiantes que resuelvan la pregunta (b) y luego regresen a esa pregunta.

Parte II. ¿Y si aumentamos el número de epiciclos?

Llamemos a la Tierra T y considere la trayectoria de un planeta Q que se mueve alrededor de la Tierra, utilizando el modelo de los epiciclos. Con base en el applet proporcionado (click aquí) responde las preguntas siguientes:

Pregunta (a):	¿Cómo cambian los radios de una circunferencia a otra conforme se van agregando?
Pregunta (b):	La siguiente gráfica muestra la distancia recorrida por el punto que se mueve sobre las circunferencias sexta, décima, veinteava y treintava. ¿Cómo cambia el movimiento de dichos puntos de una circunferencia a otra?



Intencionalidad: Se espera que el estudiante se percate de que los radios de las circunferencias tienden a cero, para esto podría usar frases como "disminuyen", "se hacen más pequeños", entre otras.
También se busca que a través del estudio del cambio los estudiantes infieran que la velocidad de los puntos sobre cada circunferencia sigue aumentando sin cota, para esto podría utilizar frases como "va más rápido", "en el mismo tiempo recorre cada vez más distancia", entre otras.

Recomendaciones: Es posible que para la pregunta (b) los estudiantes crean que se refiere al movimiento al agregar circunferencias, cuando en realidad se refiere al movimiento del punto sobre cada circunferencia, se debe hacer esta aclaración.

Pregunta (c): Utilizando el applet proporcionado en la pregunta (a), explica con tus propias palabras ¿cómo cambia la trayectoria del planeta conforme se agregan más y más circunferencias?

Intencionalidad: Se espera que el estudiante identifique de forma cualitativa el carácter estable del sistema, es decir, que se percate de que el fenómeno a modelar es estacionario, esto a través de frases como "no cambia la forma de la trayectoria", "tiende a parecerse a una…"
En este sentido el applet proporcionado representa una variable de control, pues se espera que gracias al análisis sobre este el estudiante aumente su comprensión del modelo.

Recomendaciones: Si la discusión no surge se podría preguntar por las diferencias en las trayectorias cuando se utilizan 30, 40, 45 y 50 circunferencias.

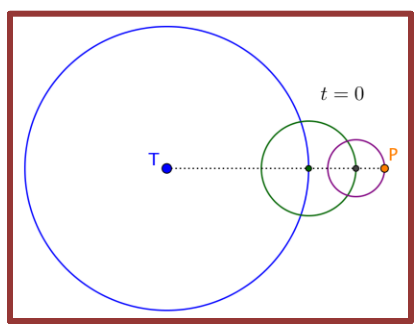
Pregunta (d): ¿Crees que exista alguna relación entre tu respuesta de la pregunta (c) y lo que respondiste en las preguntas (a) y (b) de la Parte II?, ¿Por qué si? o ¿por qué no?

Intencionalidad:	Esta pregunta busca confrontar el cómo cambia la trayectoria del planeta (estabilidad) con lo que provoca el cambio, se espera que los estudiantes se acerquen a la idea de que es al tender los radios de las circunferencias a cero y la velocidad de movimiento del punto al infinito esto provoca que le logre la estabilidad; es decir, agregar una circunferencia muy pequeña y un punto sobre esta que se mueve muy rápido no provoca cambios significativos en el sistema en general.
Recomendaciones:	Esta explicación del sistema, el cómo cambia y qué produce el cambio es una tarea cognitivamente muy compleja, para los fenómenos de determinación del estado estacionario, por lo que el docente debe guiar la discusión en esta parte a partir de las ideas expresadas por los estudiantes para llegar a un consenso.

6.3.3 Tarea #2: Modelando el movimiento de los planetas

Objetivo: Significar la convergencia de series trigonométricas mediante la estabilidad de la trayectoria del planeta, caracterizándola mediante el límite de la sucesión de sumas parciales. Se espera entonces, que al igual que en el trabajo de Fourier sobre propagación del calor, el carácter estable del fenómeno provoque la necesidad de hablar de la convergencia de series trigonométricas. La situación planteada es la siguiente:

Llamemos a la tierra *T* y consideremos un cierto planeta *P* cuya órbita corresponde a una superposición de movimientos circulares en torno de *T*, el modelo se comporta de la manera siguiente:



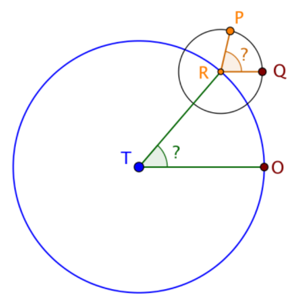
- Los radios de las circunferencias primera, segunda, tercera, … son respectivamente $\frac{4}{\pi}$, $\frac{4}{3\pi}$, $\frac{4}{5\pi}$, ...
- La velocidad angular, en radianes por mes, de los puntos sobre las circunferencias primera, segunda tercera, . . . son respectivamente $1, 3, 5, \ldots$

- Cuando el tiempo es $t = 0$, el ángulo en posición estándar del punto con respecto al centro de la circunferencia es nulo.

Parte I. Comprendiendo el modelo

Pregunta (a): Considere el modelo con dos circunferencias, es decir, aquel en la cual un punto R se mueve sobre la primera circunferencia con velocidad de 1 radián por mes, y este es centro de otra circunferencia sobre la cual se mueve el planeta P con velocidad de 3 radianes por mes. Complete la siguiente tabla para determinar la medida (en radianes) de los ángulos $\angle OTR$ y $\angle QRP$, después de t meses.

Meses	Medida de $\angle OTR$ (en radianes)	Medida de $\angle QRP$ (en radianes)
0		
1		
2		
3		
⋮	⋮	⋮
t		



Intencionalidad: Reconocer el comportamiento del movimiento de los puntos sobre cada circunferencia. Es probable que la idea de velocidad angular genere dificultades, esto debido a que la concepción de radian por sí misma provoca dificultades según se ha reportado en distintas investigaciones.

Recomendaciones: Hacer la analogía con otras velocidades como km/h, por ejemplo.

Pregunta (b): Con el mismo modelo utilizando dos circunferencias. Realice dos dibujos a escala para los valores de $t = \pi/12$ y $t = 5\pi/8$, explicando los pasos de tus construcciones. Determine la distancia del planeta P a la Tierra en esos instantes.

Intencionalidad: Esta pregunta busca verificar la comprensión del comportamiento del sistema, utilizando un modelo estático del mismo (para un tiempo determinado). La intención es que antes de buscar un procedimiento algebraico para determinar la distancia de P a T se realice el dibujo escala y se determine dicha distancia sobre el mismo dibujo.

Recomendaciones: Si se dificulta la escogencia de una escala adecuada podría recomendarse utilizar una escala de $1{:}\,\pi$.

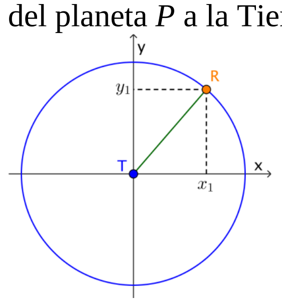
Pregunta (c): Utilice la siguiente guía para construir un applet en GeoGebra que le permita observar el comportamiento del sistema en el modelo con dos circunferencias (Se puede ver la guía en el Anexo 2).
Utilice el applet que acaba de construir para completar la siguiente tabla:

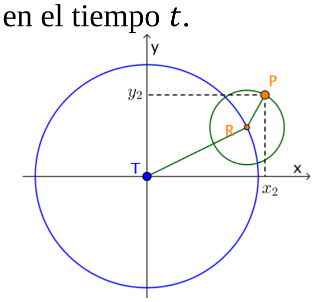
Tiempo transcurrido	Abscisa de P	Ordenada de P	Distancia del planeta P a la Tierra
$\frac{\pi}{12}$			
	0.6042	-1.2004	
			1.5305
	-0.102		1.0257

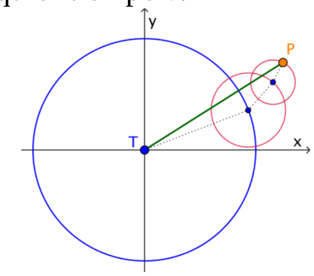
Intencionalidad: Esta pregunta busca confrontar la construcción realizada en la pregunta (b), para así seguir incentivando una mayor comprensión del funcionamiento del sistema.

Recomendaciones: Verificar que se estén siguiendo los pasos de la construcción de manera adecuada, no se espera haya dificultades con el uso de GeoGebra pues en un curso de su licenciatura los estudiantes han hecho uso de este software.

Pregunta (d): Continuando con el modelo utilizando dos circunferencias y agregando un sistema de coordenadas cuyo origen sea T (la Tierra). Determine las coordenadas (x_1, y_1) del punto R y las coordenadas (x_2, y_2) del planeta P, en el tiempo t. Determine además la distancia del planeta P a la Tierra, en el tiempo t.





Pregunta (e):	Considere ahora el modelo utilizando tres circunferencias. Determine una fórmula que permita calcular la distancia del planeta P a la Tierra, en cualquier tiempo t. 
Intencionalidad:	Estas preguntas buscan construir las primeras tres sumas parciales de dos series trigonométricas, pero con un significado asociado al fenómeno (las coordenadas del planeta) que permite determinar la distancia del planeta a la Tierra. Se espera que los estudiantes recurran a dibujar triángulos rectángulos sobre las figuras proporcionadas para identificar las razones trigonométricas involucradas, aunque para hacer la generalización a cualquier valor del tiempo se requiera que la función trigonométrica esté construida previamente.
Recomendaciones:	Se podría cuestionar al estudiante que verifique su fórmula con lo obtenido en las preguntas (b) y (c).

Parte II. ¿Y si agregamos más epiciclos?

Pregunta (a):	Considere ahora el modelo utilizando más circunferencias. A partir de lo observado en el applet proporcionado (click aquí), explica con tus propias palabras ¿cómo cambia la trayectoria del planeta conforme se agregan más y más circunferencias?
Intencionalidad:	Se espera que el estudiante identifique de forma cualitativa el carácter estable de este sistema particular, es decir, que se percate de que el fenómeno que está modelando es estacionario, esto a través de frases como “no cambia la forma de la trayectoria”, “tiende a parecerse a una…”. Es muy probable que haga referencia a la tarea #1- Parte II - pregunta (c) pues poseen la misma intencionalidad. En este sentido el applet proporcionado representa una variable de control, pues se espera que gracias al análisis sobre este el estudiante aumente su comprensión del modelo.

Recomendaciones:	Se espera que con la discusión generada en la Tarea #1 la respuesta surja por sí sola, de lo contrario se puede hacer referencia a dicha tarea y lo que se había discutido al respecto.

Pregunta (b):	Utilizando el mismo applet de la pregunta anterior. Completa la siguiente tabla y responde ¿cómo cambia la distancia del planeta P a la Tierra conforme se agregan más y más circunferencias en cada instante de tiempo? Explica con tus propias palabras. (Puede ver la tabla en el Anexo 2)
Intencionalidad:	Se espera con esta pregunta propiciar un análisis numérico de la variación de una suma parcial a otra, se busca que el estudiante se percate que la trayectoria del planeta no es estable para todos los valores del tiempo.
Recomendaciones:	Si la discusión no surge se puede pedir que expliquen sus resultados con base en lo que observan en el applet proporcionado.

Pregunta (c):	Considere ahora el modelo utilizando n circunferencias. Determine una fórmula que le permita calcular la distancia del planeta P a la Tierra, en cualquier tiempo t. [Sugerencia: retome sus soluciones a las preguntas (d) y (e) de la Parte I]
Intencionalidad:	Se espera con esta pregunta la identificación de la fórmula y que esta surja como una generalización de los resultados obtenidos en las preguntas (d) y (e) de la Parte I.
Recomendaciones:	Puede suceder que no se utilice la notación de sumatoria para dar el resultado, se debe propiciar la discusión de una manera compacta de poder expresar dicha respuesta mediante el consenso de grupo.

Pregunta (d):	¿Qué relación existe entre la fórmula obtenida en la pregunta anterior y sus respuestas de las preguntas (a) y (b) de la Parte II? Explique.
Intencionalidad:	Se espera con esta pregunta la interpretación de la matemática involucrada en el fenómeno físico, relacionar la estabilidad de la trayectoria el planeta con el límite de las sumas parciales involucradas en la fórmula calculada en la pregunta (c).

Recomendaciones:	Preguntar la relación existente para valores fijos del tiempo.

Pregunta (e):	Utiliza el applet proporcionado (click aquí) y responde ¿cómo es el comportamiento de las sumas parciales de las abscisas? y ¿cómo es el comportamiento de las sumas parciales de las ordenas? Explica con tus propias palabras. ¿Qué relación existe entre estas respuestas y las de las preguntas (a) y (b)?
Intencionalidad:	Se espera con esta pregunta la interpretación de la matemática involucrada en el fenómeno físico, relacionar la estabilidad de la trayectoria el planeta con la estabilidad de las sumas parciales involucradas en la fórmula calculada en la pregunta (c). Se espera que se percaten de que la suma parcial de las abscisas no siempre es estable y que la suma parcial de las ordenadas es siempre estable.
Recomendaciones:	Preguntar la relación existente para valores fijos del tiempo.

Pregunta (f):	Note que las fórmulas obtenidas corresponden a sumas parciales de series trigonométricas. Con base en el mismo applet y tu respuesta a la pregunta anterior ¿podrías asegurar si la serie de las ordenadas converge o diverge? En caso de que converja ¿podrías identificar su valor de convergencia? Explica tus respuestas.
Intencionalidad:	Se espera en esta pregunta que los estudiantes respondan que diverge, pues “se está acercando a dos valores” 1 y -1. Por otra parte aquellos que vislumbren la convergencia podrían pensar que cerca de las discontinuidades es divergente, pues ya está reportado que los estudiantes consideran convergente solo aquello que converge uniformemente y lo demás es divergente.
Recomendaciones:	En caso de que se diga que diverge hacer la analogía, ¿si una serie numérica converge a un número, una serie de funciones a qué converge? Y que se replantee la respuesta a partir de esto. Hacer la aclaración que lo que están notando cerca de las discontinuidades se analizará más adelante en la Tarea #4.

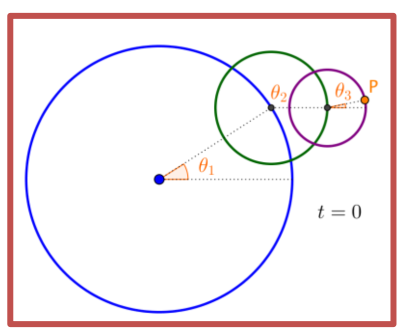
Pregunta (g):	Si se cambia el rango de valores de t, para todos aquellos en los que $t \geq 0$. ¿Cuál es el valor de convergencia de la serie de las ordenadas del planeta P? [Sugerencia: utiliza el applet de la pregunta (e) para visualizar]

Pregunta (h)	¿Tiene sentido en nuestro modelo considerar valores de t negativos? ¿Cuál sería el valor de convergencia de la serie de las ordenadas del Planeta P en caso de considerar a $t \in \mathbb{R}$?
Intencionalidad:	Estas preguntas pretenden provocar que la periodicidad sea un resultado de la serie y no una condición de la función que se está representando. Pues la serie, como objeto matemático, posee ciertas características que no tienen sentido en el fenómeno que se está modelando. En este caso dicha característica es la condición de periodicidad, la cual se da en toda la recta real, pero el fenómeno no tiene sentido al hablar de valores negativos del tiempo. Se espera que los estudiantes no sepan escribir en forma analítica una función periódica, ya que no es usual hacerlo en la escuela, posiblemente escriban la función para un intervalo y escriban con palabras que se repite de manera periódica.
Recomendaciones:	Se le debe recomendar al estudiante que cambie los intervalos de variación de t en el applet proporcionado para la pregunta (e).

6.3.4 Tarea #3: Un modelo más general

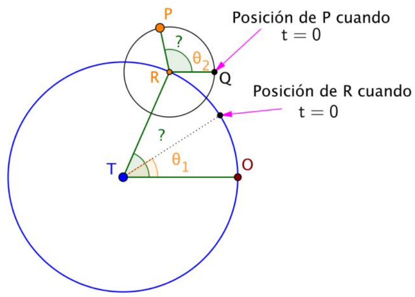
Objetivo: Significar la convergencia de series trigonométricas mediante la estabilidad de la trayectoria del planeta, caracterizándola mediante el límite de la sucesión de sumas parciales. Se espera entonces, que al igual que en la Tarea #2 el carácter estable del fenómeno provoque la necesidad de hablar de la convergencia de series trigonométricas, pero en esta vez dicha serie se podrá representar como suma de senos y cosenos. La situación planteada es la siguiente:

- El radio de la circunferencia número n está dado por $\frac{\sqrt{n^2\pi^2+2-2(-1)^n}}{n^2\pi}$
- La velocidad angular, en radianes por mes, de los puntos sobre las circunferencias primera, segunda tercera, . . . son respectivamente $1, 2, 3, \ldots$



- Cuando el tiempo es $t = 0$, el ángulo en posición estándar del punto con respecto al centro de la circunferencia número *n* es $\theta_n = \arctan\left(\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\right)$.

Parte I. Comprendiendo el modelo

Pregunta (a):	Considere el modelo con dos circunferencias, es decir, aquel en la cual un punto *R* se mueve sobre la primera circunferencia con velocidad de 1 radián por mes, y este es centro de otra circunferencia sobre la cual se mueve el planeta *P* con velocidad de 2 radianes por mes. Determine la medida (en radianes) de los ángulos $\angle OTR$ y $\angle QRP$, después de t meses. 
Intencionalidad:	Reconocer el comportamiento del movimiento de los puntos sobre cada circunferencia. Puede haber complicaciones con la idea de que el punto no inicia su movimiento en la posición horizontal. Se espera que la idea de velocidad angular no provoque conflicto pues ya fue trabajada en la Tarea #2.
Recomendaciones:	Hacer la analogía con otras velocidades como km/h, por ejemplo.

Pregunta (b):	Considere ahora el modelo utilizando **tres** circunferencias. Realice un dibujo a escala para el valor de $t = 3\pi/4$, explicando los pasos de tus construcciones. Determine la distancia del planeta *P* a la Tierra en ese instante.
Intencionalidad:	Esta pregunta busca verificar la comprensión del comportamiento del sistema, utilizando un modelo estático del mismo (para un tiempo determinado). La intención es que antes de buscar un procedimiento algebraico para determinar la distancia de *P* a *T* se realice el dibujo escala y se determine dicha distancia sobre el mismo dibujo.

Recomendaciones:	Si hay dificultad para comprender el papel del ángulo θ_n, se debe generar discusión grupal para llegar a un consenso.

Pregunta (c): Construya un applet en GeoGebra que le permita observar el comportamiento del sistema en el modelo con tres circunferencias. Sólo que en esta ocasión la Tierra debe estar centrada en el punto $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$. A partir de ese applet complete la siguiente tabla:

Tiempo transcurrido	Abscisa de P	Ordenada de P	Distancia del planeta P a la Tierra
$\frac{\pi}{2}$			
			0.6041
			2.0002
	-0.1903	0.8073	

Intencionalidad: Esta pregunta busca confrontar la construcción realizada en la pregunta (b), para así seguir incentivando una mayor comprensión del funcionamiento del sistema. En esta ocasión no se proporciona una guía de construcción, pues es muy similar a la proporcionada en la Tarea #2, se espera que el estudiante logre construirla, lo que verificará el entendimiento del funcionamiento del sistema.

Recomendaciones: No se espera haya dificultades con la construcción, en caso de haberlas se debe hacer referencia a la construcción realizada en la Tarea #2.

Pregunta (d): Regresando al modelo con dos circunferencias y agregando un sistema de coordenadas, en el cual T (la Tierra) está en el punto $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$. Determine las coordenadas (x_1, y_1) del punto R y las coordenadas (x_2, y_2) del planeta P, en el tiempo t. Determine además la distancia del planeta P a la Tierra, en el tiempo t.

Pregunta (e): Considere ahora el modelo utilizando tres circunferencias. Determine una fórmula que permita calcular las coordenadas (x_3, y_3) del planeta P en el sistema coordenado, en cualquier tiempo t.

Intencionalidad: Estas preguntas buscan construir las primeras tres sumas parciales de dos series trigonométricas, pero con un significado asociado al

	fenómeno (las coordenadas del planeta) que permite determinar la distancia del planeta a la Tierra. Se espera que los estudiantes recurran a su solución de la Tarea #2.
Recomendaciones:	Se podría cuestionar al estudiante que verifique su fórmula con lo obtenido en las preguntas (b) y (c).

Parte II. ¿Y si agregamos más epiciclos?

Pregunta (a):	Considere ahora el modelo utilizando más circunferencias. A partir de lo observado en el applet proporcionado (click aquí), explica con tus propias palabras ¿cómo cambia la trayectoria del planeta conforme se agregan más y más circunferencias?
Intencionalidad:	Se espera que el estudiante identifique de forma cualitativa el carácter estable de este sistema particular, es decir, que se percate de que el fenómeno que está modelando es estacionario, esto a través de frases como “no cambia la forma de la trayectoria”, “tiende a parecerse a una…”. Es muy probable que haga referencia a la Tarea #1 y Tarea #2, pues poseen preguntas con la misma intencionalidad. En este sentido el applet proporcionado representa una variable de control, pues se espera que gracias al análisis sobre el applet, el estudiante aumente su comprensión del modelo.
Recomendaciones:	Se espera que con la discusión generada en las Tareas #1 y #2 la respuesta surja por sí sola, de lo contrario se puede hacer referencia a dichas tareas y lo que se había discutido al respecto.

Pregunta (b):	Utilizando el mismo applet de la pregunta anterior ¿cómo cambian las distancias del planeta P a la Tierra conforme se agregan más y más circunferencias en cada instante de tiempo? Explica con tus propias palabras.
Intencionalidad:	Se espera con esta pregunta propiciar un análisis cualitativo de la variación de una suma parcial a otra, en cada instante de tiempo, se busca que el estudiante se percate que la trayectoria del planeta no es estable para todos los valores del tiempo. En este caso no se propone una tabla numérica como se hizo en la Tarea #2, podría suceder que el estudiante trate de hacer un análisis similar.

Recomendaciones:	Si la discusión no surge se puede pedir que completen una tabla similar a la de la pregunta en la Tarea #2 y que expliquen sus resultados con base en lo que observan en el applet proporcionado.

Pregunta (c):	Considere ahora el modelo utilizando *n* circunferencias. Determine una fórmula que le permita calcular las coordenadas (x_n, y_n) del planeta *P* en el sistema coordenado, en cualquier tiempo t. [Sugerencia: retome sus soluciones a las preguntas (d) y (e) de la Parte I]
Intencionalidad:	Se espera con esta pregunta la identificación de la fórmula y que esta surja como una generalización de los resultados obtenidos en las preguntas (d) y (e) de la Parte I.
Recomendaciones:	Puede suceder que no se utilice la notación de sumatoria para dar el resultado, se debe propiciar la discusión de una manera compacta de poder expresar dicha respuesta mediante el consenso de grupo.

Pregunta (d):	¿Qué relación existe entre la fórmula obtenida en la pregunta anterior y sus respuestas de las preguntas (a) y (b) de la Parte II? Explique.
Intencionalidad:	Se espera con esta pregunta la interpretación de la matemática involucrada en el fenómeno físico, relacionar la estabilidad de la trayectoria el planeta con el límite de las sumas parciales involucradas en la fórmula calculada en la pregunta (c).
Recomendaciones:	Preguntar la relación existente para valores fijos del tiempo.

Pregunta (e):	Utiliza el applet proporcionado (click aquí) y responde ¿cómo es el comportamiento de las sumas parciales de las abscisas? y ¿cómo es el comportamiento de las sumas parciales de las ordenas? Explica con tus propias palabras. ¿Qué relación existe entre estas respuestas y las de las preguntas (a) y (b)?
Intencionalidad:	Se espera con esta pregunta la interpretación de la matemática involucrada en el fenómeno físico, relacionar la estabilidad de la trayectoria el planeta con la estabilidad de las sumas parciales involucradas en la fórmula calculada en la pregunta (c). Se espera

	que se percaten de que la suma parcial de las abscisas no siempre es estable y que la suma parcial de las ordenadas es siempre estable.
Recomendaciones:	Preguntar la relación existente para valores fijos del tiempo.

Pregunta (f):	Note que las fórmulas obtenidas corresponden a sumas parciales de series trigonométricas. Con base en el mismo applet y tu respuesta a la pregunta anterior ¿podrías asegurar si la serie de las ordenadas converge o diverge? En caso de que converja ¿podrías identificar su valor de convergencia? Explica tus respuestas.
Intencionalidad:	Se espera en esta pregunta verificar la idea de que una serie trigonométrica puede converger a una función con base en lo trabajado en la Tarea #2. Por otra parte aquellos que vislumbren la convergencia podrían pensar que cerca de las discontinuidades es divergente, pues ya está reportado que los estudiantes consideran convergente solo aquello que converge uniformemente y lo demás es divergente.
Recomendaciones:	En caso de que se diga que diverge hacer la analogía, recordar lo trabajado en la Tarea #2. Hacer la aclaración que lo que están notando cerca de las discontinuidades se analizará en la Tarea #4.

Pregunta (g):	Si se cambia el rango de valores de t, para todos aquellos en los que $t \geq 0$. ¿Cuál es el valor de convergencia de la serie de las ordenadas del planeta P? [Sugerencia: utiliza el applet de la pregunta (e) para visualizar]
Pregunta (h)	¿Tiene sentido en nuestro modelo considerar valores de t negativos? ¿Cuál sería el valor de convergencia de la serie de las ordenadas del Planeta P en caso de considerar a $t \in \mathbb{R}$?
Intencionalidad:	Estas preguntas pretenden provocar que la periodicidad sea un resultado de la serie y no una condición de la función que se está representando. Pues la serie, como objeto matemático, posee ciertas características que no tienen sentido en el fenómeno que se está modelando. En este caso dicha característica es la condición de periodicidad, la cual se da en toda la recta real, pero el fenómeno no tiene sentido al hablar de valores negativos del tiempo.

	Se espera que los estudiantes no describan en forma analítica una función periódica, ya que no es usual hacerlo en la escuela, posiblemente escriban la función para un intervalo y escriban con palabras que se repite de manera periódica.
Recomendaciones:	Se le debe recomendar al estudiante que cambie los intervalos de variación de t en el applet proporcionado para la pregunta (e).

Pregunta (i):	Considere ahora la serie de las ordenadas de P. Utilizando identidades trigonométricas, escríbala en la forma: $$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_k \operatorname{sen}(kt)$$ es decir, identifique los valores de a_0, a_{k} y b_{k}.
Intencionalidad:	Se espera en esta pregunta verificar la idea de que una serie trigonométrica de senos y cosenos puede converger a una función.
Recomendaciones:	Se debe generar la discusión de que una serie de senos y cosenos puede converger a una función.

6.3.5 Tarea #4: El fenómeno de Gibbs

Objetivo: Diferenciar el tipo de convergencia entre los puntos cercanos a las discontinuidades y los que no, para así construir una mejor comprensión de la convergencia de la serie, a través del estudio del comportamiento de las sumas parciales. Esto porque se ha reportado que los estudiantes consideran que alrededor de las discontinuidades la serie diverge, debido a que visualizan el fenómeno de Gibbs (muchas oscilaciones alrededor de la discontinuidad) cuando en realidad si se da la convergencia, pero esta no es uniforme como en el resto de puntos. La situación planteada es la siguiente:

Retomemos los modelos de movimiento de los planetas estudiados en las Tareas #2 y #3. Cómo ya vimos la ordenada del planeta P corresponde a la suma parcial de una serie trigonométrica y en ambas situaciones notamos como la suma parcial se acercaba a una función.

Parte I. Volvamos a la serie de la Tarea #2

Pregunta (a):	Considere el applet utilizado en la Tareas #2 (click aquí), en el que se representan las sumas parciales de las ordenadas del planeta P, responda ¿cómo se comporta la sucesión de sumas parciales alrededor de $t = 0$, $t = \pi$ y $t = 2\pi$? ¿Cómo se observa este comportamiento en la trayectoria del planeta P?
Intencionalidad:	Se espera que el estudiante responda que la sucesión de sumas parciales diverge o que no esté totalmente seguro de su convergencia.
Recomendaciones:	Podría suceder que los estudiantes respondan acerca del comportamiento en los valores de t solicitados, se debe aclarar que es para valores cercanos, no para estos exactamente. Incentivar la discusión para propiciar que una análisis puntual podría aclarar la situación.

Pregunta (b):	Utilice el applet proporcionado (click aquí). Elija un valor de $t \in (0, \pi)$ "lejano" de los extremos del intervalo ¿a partir de cuál suma parcial la aproximación dada por la suma difiere del valor de la función límite en menos de 0.1?
Intencionalidad:	Se espera con esta pregunta que el estudiante se percate de que a partir de una suma parcial de orden bajo se obtiene la aproximación deseada.
Recomendaciones:	Se debe incentivar que realicen este mismo proceso con varios valores.

Pregunta (c):	Utilice el applet de la pregunta anterior. Elija un valor de $t \in (0, \pi)$ "cercano" de los extremos del intervalo ¿a partir de cuál suma parcial la aproximación dada por la suma difiere del valor de la función límite en menos de 0.1?
Intencionalidad:	Se espera con esta pregunta que el estudiante se percate de que a partir de una suma parcial de orden mucho mayor que en la pregunta anterior se obtiene la aproximación deseada.

Recomendaciones:	Se debe incentivar que realicen este mismo proceso con varios valores.

Pregunta (d):	¿Cuál es la diferencia en el comportamiento de las sumas parciales para los puntos "cercanos" a las discontinuidades y los "lejanos" de las discontinuidades?
Pregunta (e):	¿Es convergente la serie alrededor de $t = 0$? ¿y alrededor de $t = \pi$? Explica tus respuestas.
Intencionalidad:	Se espera con esta pregunta que el estudiante haga una diferencia entre convergencia rápida y lenta.
Recomendaciones:	Hacer la salvedad de que aunque haya convergencia las oscilaciones alrededor de la discontinuidad no desaparecen aunque se aumente el orden de las sumas parciales, y que a este comportamiento se le conoce como el fenómeno de Gibbs.

Pregunta (f):	¿Qué valor toman las sumas parciales exactamente en $t = 0$ y $t = \pi$? ¿Qué puedes decir respecto de la convergencia en estos valores? Explica tus respuestas.
Intencionalidad:	Se espera en esta pregunta que el estudiante se percate de que la serie es convergente en las discontinuidades, pero no a un valor de la función que había dado en un principio.
Recomendaciones:	Si el estudiante sigue con la idea de que la sucesión de sumas parciales diverge se debe regresar a la discusión de la pregunta anterior. Pedir al estudiante replantear la función límite de la sucesión de sumas parciales de la serie.

Parte II. Volvamos a la serie de la Tarea #3

Pregunta (a):	Considere el applet utilizado en la Tareas #3 (click aquí), en el que se representan las sumas parciales de las ordenadas del planeta P, responda ¿cómo se comporta la sucesión de sumas parciales alrededor de $t = 0$ y $t = 2\pi$?

Intencionalidad:	Se espera que el estudiante responda que la sucesión de sumas parciales converge, gracias a lo discutido en la Parte I. En general la Parte II sirve como mecanismo para verificar las ideas de la parte I.
Recomendaciones:	Podría suceder que los estudiantes respondan acerca del comportamiento en los valores de t solicitados, se debe aclarar que es para valores cercanos, no para estos exactamente. Incentivar la discusión para propiciar que un análisis puntual podría aclarar la situación.

Pregunta (b):	Utilice el applet proporcionado (click aquí). Elija un valor de $t \in (0,2\pi)$ "lejano" de los extremos del intervalo ¿a partir de cuál suma parcial la aproximación dada por la suma difiere del valor de la función límite en menos de 0.1?
Intencionalidad:	Se espera con esta pregunta que el estudiante se percate de que a partir de una suma parcial de orden bajo se obtiene la aproximación deseada.
Recomendaciones:	Se debe incentivar que realicen este mismo proceso con varios valores.

Pregunta (c):	Utilice el applet de la pregunta anterior. Elija un valor de t "cercano" a cero ¿a partir de cuál suma parcial la aproximación dada por la suma difiere del valor de la función límite en menos de 0.1?
Intencionalidad:	Se espera con esta pregunta que el estudiante se percate de que a partir de una suma parcial de orden mucho mayor que en la pregunta anterior se obtiene la aproximación deseada.
Recomendaciones:	Se debe incentivar que realicen este mismo proceso con varios valores.

Pregunta (d):	¿Cuál es la diferencia en el comportamiento de las sumas parciales para los puntos "cercanos" a las discontinuidades y los "lejanos" de las discontinuidades?
Pregunta (e):	¿Es convergente la serie alrededor de $t = 0$? Explica tus respuestas.

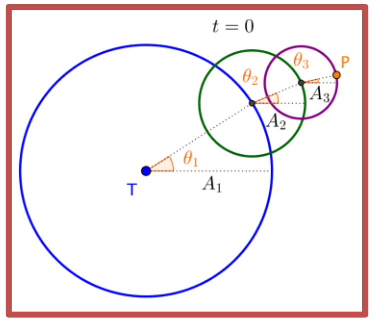
Intencionalidad:	Se espera con esta pregunta que el estudiante haga una diferencia entre convergencia rápida y lenta.

Pregunta (f):	¿Qué valor toman las sumas parciales exactamente en $t = 0$? ¿Qué puedes decir respecto de la convergencia en estos valores? Explica tus respuestas.
Intencionalidad:	Se espera en esta pregunta que el estudiante se percate de que la serie es convergente en las discontinuidades, pero no a un valor de la función que había dado en un principio.
Recomendaciones:	Si el estudiante sigue con la idea de que la sucesión de sumas parciales diverge se debe regresar a la discusión de la pregunta anterior. Pedir al estudiante replantear la función límite de la sucesión de sumas parciales de la serie.

6.3.6 Tarea #5: El modelo general

Objetivo: Significar los elementos presentes en la serie trigonométrica que emerge al matematizar el modelo del movimiento planetario de los alejandrinos en forma general. Se pretende con esta generalización que el estudiante identifique las condiciones para que el modelo sea estable, esto es, que asegure en el modelo general que la sucesión de los radios de las circunferencias debe tender a cero y que la sucesión de las velocidades de los puntos debe tender a infinito. Por otra parte debe encontrar condiciones para que el modelo sea equivalente a la STF. La situación propuesta es la siguiente:

Llamemos a la tierra T y consideremos un cierto planeta P cuya órbita corresponde a una superposición de movimientos circulares en torno de T, el modelo se comporta en forma general de la manera siguiente:



- La primera circunferencia está centrada en el punto (A_0, A_0).
- Los radios de las circunferencias primera, segunda, tercera, … son respectivamente A_1, A_2, A_3, …
- La velocidad angular, en radianes por unidad de tiempo, de los puntos sobre las circunferencias primera, segunda tercera, . . . son respectivamente w_1, w_2, w_3, …
- Cuando el tiempo es $t = 0$, el ángulo en posición estándar del punto con respecto al centro de la circunferencia número n es θ_n.

Parte I. Generando el modelo

Pregunta (a):	Con base en los modelos particulares estudiados en las Tareas #1 y #2, responde ¿qué condiciones deben cumplirse en el modelo general para que la trayectoria del planeta *P* se estabilice conforme se agreguen cada vez más circunferencias?
Intencionalidad:	Se espera que el estudiante identifique que para garantizar la estabilidad del sistema se debe cumplir que $A_n \longrightarrow 0$ y $w_n \longrightarrow \infty$.
Recomendaciones:	Hacer referencia a lo discutido en las Tareas #1, #2 y #3.

Pregunta (b):	Considere el modelo utilizando *n* circunferencias. Determine las coordenadas (x_n, y_n) del punto *P* en el tiempo t.
Intencionalidad:	Se espera que esta pregunta no genere dificultades, pues es una generalización de lo trabajado anteriormente.
Recomendaciones:	Si la fórmula no surge hacer referencia a la fórmula obtenida en la Tarea #3.

Pregunta (c):	¿Cómo se relaciona tu respuesta a la pregunta (a) con la fórmula obtenida en la pregunta anterior?
Intencionalidad:	Interpretar el modelo matemático con el fenómeno físico.

Recomendaciones:	Hacer referencia a lo discutido en las demás tareas.

Pregunta (d):	Note nuevamente que y_n representa la n-ésima suma parcial de una serie trigonométrica. Utiliza identidades trigonométricas para reescribir esta serie en la forma: $$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kw_0 t) + b_k \operatorname{sen}(kw_0 t)$$ Es decir, determina los valores de a_0, w_k, a_k y b_k, en términos de A_0, w_0, A_k y θ_k.
Pregunta (e):	¿Cómo se relaciona tu respuesta a la pregunta (c) con esta nueva fórmula?
Intencionalidad:	Establecer las condiciones para que el modelo sea equivalente con la STF.
Recomendaciones:	Hacer evidente que una serie de senos y cosenos puede converger a una función.

Parte II. Otra forma de interpretar w_0

Considere el movimiento del punto sobre la primera circunferencia, es decir aquella donde el punto se mueve con velocidad angular w_0 (en radianes por unidad de tiempo).

Pregunta (a):	Determina el tiempo t que tarda el punto *P* en dar un giro completo. [Sugerencia: recuerda que $velocidad\ angular = \frac{ángulo\ en\ radianes}{tiempo}$]
Pregunta (b):	Si llamamos *p* al tiempo que tarda el punto *P* para dar exactamente una vuelta. ¿Cuál es el valor de w_0 en términos de *p*?
Pregunta (c):	Reescribe la fórmula que obtuviste en la pregunta (d) de la Parte I, utilizando este nuevo valor de w_0.
Pregunta (d):	Dado que el valor *p* es el tiempo que tarda el planeta *P* en completar una vuelta alrededor de la Tierra *T*. ¿Cómo se observaría este valor en la gráfica de la función límite? Explica tu respuesta.
Intencionalidad:	Se espera que el estudiante reconozca a *p* como el periodo de la función límite cuando se considera la variable t un número real. Esto es importante para la Tarea #6, pues se espera que el

	estudiante realice su estudio en un intervalo de tamaño p, el cual es representativo del comportamiento general de la serie.
Recomendaciones:	Es muy probable que los estudiantes quieran considerar a p como el periodo de la función, pero se debe recordar que esta condición no es necesaria, que el análisis se puede hacer en un intervalo de tamaño p, sin considerar el resto de la recta real.

6.3.7 Tarea #6: El cálculo de los coeficientes

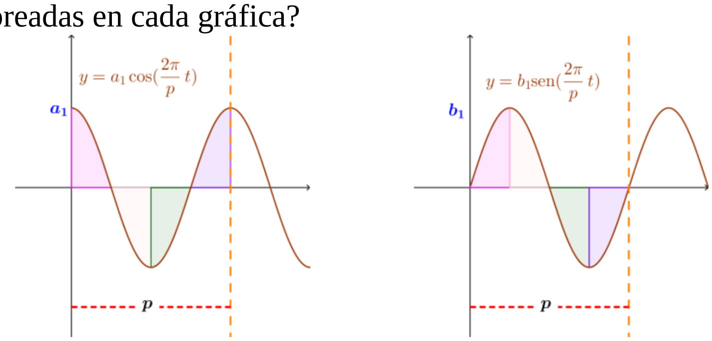
Objetivo: Significar el cálculo de los coeficientes de Fourier utilizando argumentaciones gráficas y geométricas, tal y como lo hizo Fourier. Es importante como inicio de esta tarea hacer al alumno consciente de que se trabajará el problema inverso, dada la función a la cual converge una serie, como saber cuáles son los coeficientes de dicha serie. La situación planteada es la siguiente:

Considera ahora la situación inversa, es decir, se conoce la función $f(t)$ a la cual converge la serie cuyas sumas parciales se forman con la ordenada del planeta *P* en un sistema de coordenadas. Es decir se cumple que:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$$

Parte I. El cálculo de a_0

Pregunta (a): Considera las siguientes gráficas de las curvas $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ y $y = b_1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$, responde ¿cuál es la relación entre las regiones sombreadas en cada gráfica?

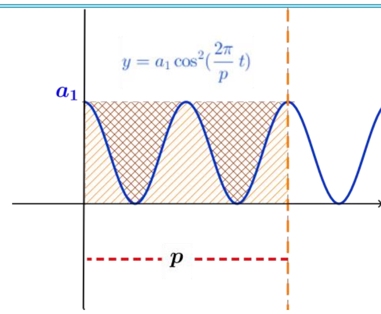


Pregunta (b):	En la siguiente secuencia de figuras se muestra la función $f(t)$ y los primeros términos de la serie, ¿cuál es el valor del área bajo la curva de cada término de la serie en un intervalo de tamaño p? (Ver la secuencia de figuras en el Anexo 2)
Intencionalidad:	Se espera que el estudiante se percate que el área bajo la curva de los términos de la serie son todos iguales a cero, salvo el del término constante.
Recomendaciones:	Es muy probable que los estudiantes quieran realizar explicaciones utilizando integrales definidas, se les debe cuestionar por razones geométricas sin necesidad de calcular integrales.

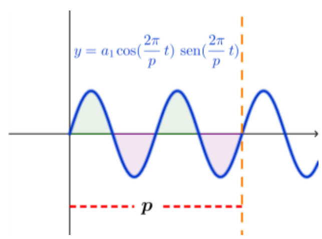
Pregunta (c):	¿Cómo es el área bajo la curva de la función $f(t)$ en un intervalo de tamaño p, con respecto a las áreas de los términos de la serie en un intervalo de tamaño p? Explica tu respuesta de forma geométrica.
Pregunta (d):	¿Cuál es la relación del área bajo la curva de la función $f(t)$ y el área bajo la curva $y = \frac{a_0}{2}$? Explica tu respuesta de forma geométrica.
Pregunta (e):	Propón un fórmula que permita calcular el valor de a_0.
Intencionalidad:	Se espera que el estudiante utilice argumentos geométricos y sus conocimientos sobre integral definida para decir que el área bajo la curva de función es igual a la suma de las áreas bajo la curva de los términos de la serie. De esta manera el estudiante puede construir la fórmula para el cálculo con un significado asociado a la noción de área bajo la curva.
Recomendaciones:	Si no surge la idea de que al área bajo la curva es la suma de las áreas bajo la curva, se puede relacionar con la idea de integral definida.

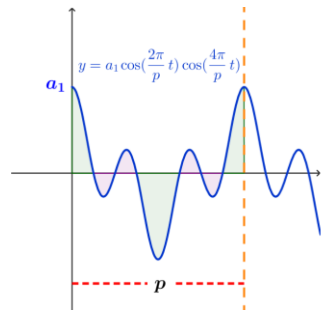
Parte II. El cálculo de a_k

Pregunta (a):	Considera la curva $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ y el resultado de multiplicarla por $\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$. ¿Cuál es la relación entre las áreas sombreadas? ¿Cuál es el valor de área bajo la curva de $y = a_1 \cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$?



Pregunta (b): Ahora se presentan las gráficas resultantes al multiplicar la curva $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ por $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ y por $\cos\left(\frac{4\pi}{p}t\right)$ ¿Cuál es el valor del área bajo la curva en cada caso?





Pregunta (c): Utilice el applet proporcionado (click aquí) y responda ¿cuál es el valor del área bajo las curvas $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ y $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, para valores de $k = 1, 2, 3, \ldots$?

Pregunta (d): Considere la ecuación del desarrollo de la función $f(t)$ en serie trigonométrica, es decir,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + b_1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + \cdots + a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + \cdots$$

y multiplique a ambos lados por $\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$. ¿Qué relación existe entre el área bajo la curva de $f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ y la de $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$? [Sugerencia: Utilice los resultados de las preguntas (a) de la Parte I, (a), (b) y (c) de esta misma parte].

Pregunta (e): Proponga una fórmula que permita calcular el valor de a_1.

Intencionalidad: Se espera que el estudiante signifique geométricamente la ortogonalidad de las funciones trigonométricas y que utilice este

	hecho para calcular el valor de a_1 utilizando un razonamiento similar al de la Parte I.
Recomendaciones:	Es muy probable que los estudiantes quieran realizar explicaciones utilizando integrales definidas, se les debe cuestionar por razones geométricas sin necesidad de calcular integrales.

Pregunta (f):	Considere ahora el área bajo las curvas $y = a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ y $y = a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$, para valores de de $k = 1, 2, 3, \dots$ y de $m = 1, 2, 3, \dots$ Utilice el applet proporcionado (click aquí) para responder ¿cuál es el área bajo la curva cuando $k = m$? ¿y cuando $k \neq m$?
Pregunta (g):	Utilice un razonamiento similar al utilizado en la pregunta (d) para explicar cómo se puede calcular en valor de a_k.
Pregunta (h):	Proponga una fórmula que permita calcular el valor de a_k. ¿Qué relación encuentras entre esta fórmula y la que se propuso para calcular a_0?
Intencionalidad:	Se espera que el estudiante signifique geométricamente la ortogonalidad de las funciones trigonométricas y que utilice este hecho para calcular el valor de a_k utilizando un razonamiento similar al utilizado para a_1.
Recomendaciones:	Es muy probable que los estudiantes quieran realizar explicaciones utilizando integrales definidas, se les debe cuestionar por razones geométricas sin necesidad de calcular integrales.

Parte III. El cálculo de b_k

Pregunta (a):	Considere ahora el área bajo las curvas $y = b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ y $y = b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$, para valores de de $k = 1, 2, 3, \dots$ y de $m = 1, 2, 3, \dots$ Utilice el applet proporcionado (click aquí) para responder ¿cuál es el área bajo la curva cuando $k = m$? ¿y cuándo $k \neq m$?

Pregunta (g):	Utilice un razonamiento similar al utilizado en la pregunta (g) de la Parte II para explicar cómo se puede calcular en valor de b_k.
Pregunta (h):	Proponga una fórmula que permita calcular el valor de b_k.
Intencionalidad:	Se espera que el estudiante signifique geométricamente la ortogonalidad de las funciones trigonométricas y que utilice este hecho para calcular el valor de b_k utilizando un razonamiento similar al utilizado para a_k.
Recomendaciones:	Es muy probable que los estudiantes quieran realizar explicaciones utilizando integrales definidas, se les debe cuestionar por razones geométricas sin necesidad de calcular integrales.

6.4 Pilotaje de la situación de aprendizaje

Se realizó un pilotaje de la situación de aprendizaje con el fin de evaluar aspectos técnicos de la situación como el tiempo de ejecución, el orden y la claridad de las preguntas, entre otros. Para esto se puso en funcionamiento el diseño con cuatro estudiantes del área de educación superior del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN.

Previo a este pilotaje, en diferentes escenarios, se pusieron en funcionamientos preguntas aisladas de este diseño, con el fin de observar el cómo se iba conformando la secuencia de tareas, la primera vez con profesores de nivel bachillerato en la Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla durante la segunda parte de un taller de dos días titulado "Pensamiento Trigonométrico", una segunda implementación durante la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa 29 en el taller titulado "¡Visualicemos dos casos de convergencia!" y una última implementación durante la XVIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa en el laboratorio titulado "Visualizando la convergencia de la serie trigonométrica de Fourier". Sin bien es cierto que estas implementaciones no fueron controladas y que no se tiene registros de las mismas, se pudo observar la discusión generada entre los participantes alrededor de las preguntas planteadas, lo que permitió hacer cambios al diseño basado en estas experiencias.

Para un análisis de la situación de aprendizaje a partir del pilotaje se consideran las siguientes preguntas:

1. ¿Cuánto tardaron los participantes en resolver cada tarea?
2. ¿Cada una de las tareas provoca el objetivo previsto?
3. ¿La redacción de las preguntas es clara y su orden adecuado?
4. ¿Se generan las confrontaciones esperadas?

A continuación se tratará de responder a cada una de estas preguntas, para cada una de las tareas planteadas en la situación.

Tarea #1:

Tiempo de ejecución: Una hora aproximadamente.

¿Se provoca el objetivo previsto? Sí, los participantes lograron una comprensión del fenómeno más allá que lo que percibían a simple vista. Llegando principalmente a la comprensión de la estabilidad del sistema, por ejemplo, ante la última pregunta de la tarea uno de los participantes afirma:

> "Sí, pues el incremento de circunferencias, donde los radios disminuyen y la distancia aumenta, va provocando que la trayectoria tienda a una forma determinada, a mi parecer, tiende a una elipse"

Se evidencia aquí una comprensión más profunda del fenómeno, pues su explicación no está solo en lo observable, la estabilidad de la trayectoria del planeta al agregar cada vez más circunferencias, sino que trata de explicar las causas de este comportamiento, la disminución de los radios y el aumento de la velocidad de movimiento de los puntos.

¿La redacción de las preguntas es clara y su orden adecuado? En la pregunta (b) de la Parte II se identificó cierta dificultad, pues esta pregunta versa sobre el movimiento del punto sobre cada circunferencia y no sobre el movimiento del planeta sobre su propia trayectoria. Se cree porque en un principio la pregunta estaba redactada en términos del planeta, se cambió la pregunta para realizarla en términos de los puntos sobre cada circunferencia.

¿Se generan las confrontaciones esperadas? Sí, de hecho se evidenció que la preguntas de la Parte I requirieron que los participantes hicieran referencia a otros fenómenos cercanos a su experiencia. Por ejemplo, utilizaron la idea de que el brillo de un foco cuando está muy cerca de los ojos “duele” y no así cuando está lejos, lo que les permitió explicar el cambio de luminosidad de los planetas. Es decir, hubo necesidad de usar analogías con otros fenómenos para poder dar respuesta y no sólo a partir del fenómeno mismo, esta búsqueda se hace necesaria cuando no se cuenta con las herramientas cognitivas para dar respuesta de manera directa a la situación planteada.

Tareas #2 y #3:

Tiempo de ejecución: Dos horas aproximadamente, cada tarea.

¿Se provoca el objetivo previsto? Sí, los participantes lograron relacionar la estabilidad del fenómeno con la convergencia de las series. Por ejemplo, para la pregunta (d) de la Parte I de la Tarea #2, en la que se pide reflexionar acerca de la relación de la fórmula encontrada con el comportamiento del fenómeno uno de los participantes afirma que “dado un t fijo, el valor de $d(T,P)$[3] se va a acercar a un valor [convergencia]”. El mismo individuo para una pregunta análoga en la tarea #3 expresa que “Entre más circunferencias tengamos entonces su distancia converge a un valor dependiente del tiempo t es decir $\sqrt{\left(x_n-\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(y_n-\frac{\pi}{4}\right)^2}$ va a converger”.

Esta relación es importante, pero se notó que el docente debe guiar la discusión hacia las coordenadas del puntos, es decir para que la fórmula de la distancia converja, son las coordenadas del punto las que deben ser convergentes, lo que provocaría el estudio de las componentes por separado, lo cual se espera general, ya que en las situaciones propuestas la ordenada del planeta se corresponde con a STF.

¿La redacción de las preguntas es clara y su orden adecuado? En un principio, para ambas tareas, las preguntas (a), (b) y (c) tenían la intención de cuestionar, respectivamente, para el modelo con una circunferencia la medida del ángulo en el tiempo t, una fórmula para determinar la posición del punto en el tiempo t para ese mismo caso, y un dibujo a escala del

[3] Con la notación $d(T,P)$ el participante se refiere a la distancia del planeta P a la Tierra.

modelo utilizando dos circunferencias para algún tiempo determinado, para esta última cuestión se hacía importante que se considerara la preguntas (a) para el caso de dos circunferencias, pero esto no surgió en la discusión, se tuvo que dar pautas para que los participantes lograran este cometido. Por otra parte, la pregunta (c) solicita determinar la distancia del planeta a la tierra en el instante de tiempo, pero la idea es que se haga a partir de la propia construcción, al pedir una fórmula en la pregunta (b) se condicionó a los participantes para buscar una fórmula que les permitiera calcular esto, el cual no era el objetivo de la pregunta.

Por estas razones se decidió cambiar el orden y la redacción de las preguntas empezando por identificar el ángulo en función del tiempo para el modelo utilizando una y dos circunferencias, luego solicitar la construcción a escala, para después solicitar la fórmula, claramente esta nueva organización se debe validar en una puesta en escena futura.

¿Se generan las confrontaciones esperadas? Sí, En la tarea #2 se esperaba que para la pregunta (f) de la parte II, los participantes expresaran que la serie era divergente pues se acercaba a dos valores distintos -1 y 1. Esto sucedió tanto en la puesta en escena como en las aplicaciones previas en los diferentes contextos. Al cuestionársele sobre la naturaleza de la convergencia, es decir, una serie de funciones convergente debería converger a una función, así como una serie numérica convergente debe converger a un número, los participantes aceptaron el hecho de que se daba la convergencia.

Para la tarea #2 se esperaba que esta misma pregunta ya no generara este cuestionamiento y así fue como sucedió, los participantes lograron identificar el valor de convergencia de la serie. Aunque en ambos casos surgió la duda sobre la convergencia cerca de las discontinuidades, pues visualizaban muchas oscilaciones (fenómeno de Gibbs) y suponían que ahí cerca no se daba la convergencia.

Por otra parte en ambas tareas se pide expresar de manera analítica este valor de convergencia, primero en un intervalo acotado, pero luego de forma periódica, en ninguno de los dos casos lograron expresar un función periódica en forma analítica, tal y como se esperaba que sucediera.

Tarea #4:

Tiempo de ejecución: Dos horas aproximadamente.

¿Se provoca el objetivo previsto? Sí, los participantes lograron diferenciar que la convergencia que se da en los puntos cercanos a las discontinuidades es distinta para los puntos lejanos de la discontinuidad, al respecto mencionaron “cercano a las discontinuidades converge a un valor pero más lento que a los valores más lejanos a los extremos”. Además lograron notar que en la discontinuidad también se da la convergencia, aunque no es objetivo de esta tarea que identifiquen dicha convergencia.

¿La redacción de las preguntas es clara y su orden adecuado? No hubo problemas con la redacción ni el orden de las preguntas en esta tarea.

¿Se generan las confrontaciones esperadas? Si, se logró confrontar con la idea que apareció en las Tareas #2 y #3 al decir que alrededor de las discontinuidades parecía que la serie no es convergente.

Tarea #5:

Tiempo de ejecución: Dos horas aproximadamente.

¿Se provoca el objetivo previsto? Sí, los participantes lograron construir un modelo matemático general para el fenómeno, además de determinar las condiciones para las cuales el modelo es estable.

¿La redacción de las preguntas es clara y su orden adecuado? Las preguntas y el orden de las mismas generaron las discusiones deseadas.

¿Se generan las confrontaciones esperadas? Esta tarea no suponía generar ninguna confrontación, todo lo contrario, se esperaba que gracias a las tareas anteriores la generalización del modelo no presentara problemas, así fue como sucedió.

Tarea #6:

Tiempo de ejecución: Dos hora aproximadamente.

¿Se provoca el objetivo previsto? Sí, los participantes logran significar el cálculo delos coeficientes de Fourier a partir del análisis gráfico y geométrico, dotándolos de sentido a partir de la noción de área bajo la curva.

¿La redacción de las preguntas es clara? Sí, no hubo conflicto con las preguntas ni su orden.

¿Se generan las confrontaciones esperadas? Esta tarea no esperaba generar confrontaciones, más bien buscaba la significación de la demostración que se da usualmente en las aulas a partir de su construcción a través de las ideas geométricas detrás del cálculo delos coeficientes.

6.5 Una síntesis necesaria

Este capítulo propuso las pautas a seguir para el diseño de secuencias de aprendizaje que promuevan la construcción de la STF a partir de su uso, además de proponer un diseño de situación con fundamento socioepistemológico, según la Tabla 6.1.

Es así como la secuencia está divida en dos momentos importantes: (1) comprender que una serie trigonométrica puede converger a una función y (2) dada una función que se puede representar en serie trigonométrica, determinar los coeficientes de la serie. La siguiente tabla hace un resumen de la intencionalidad del diseño propuesto:

Momento	Tarea	Objetivo	Justificación.
Momento 1	Tarea #1	Caracterizar el comportamiento del sistema de forma cualitativa, lo que permitirá una comprensión más profunda del fenómeno y no solo aquello que detectan los sentidos a simple vista.	Farfán (2012) propone que es necesario desarrollar la intuición más allá de lo sensible ante los fenómenos de determinación de estado estacionario. Marmolejo (2016) sostiene que si se conoce la noción de estado estacionario, la parte matemática que dará solución al problema cobrará mayor significado.
	Tareas #2 y #3	Significar la convergencia de series trigonométricas mediante la estabilidad de la trayectoria del planeta, caracterizándola mediante el límite de la sucesión de sumas parciales.	Al igual que en el trabajo de Fourier sobre propagación de calor es el carácter estable del fenómeno el que provoca la necesidad de hablar de la convergencia de series trigonométricas.

	Tarea #4	Diferenciar el tipo de convergencia entre los puntos cercanos a las discontinuidades y los que no, para así construir una mejor comprensión de la convergencia de la serie, a través del estudio del comportamiento de las sumas parciales.	Según Albert (1996) los estudiantes consideran convergente solo aquello que converge de manera uniforme, y como divergente todo lo demás. Por lo que alrededor de las discontinuidades suelen considerar que la serie diverge, debido a que visualizan el fenómeno de Gibbs (muchas oscilaciones alrededor de la discontinuidad) cuando en realidad si se da la convergencia, pero esta no es uniforme como en el resto de puntos.
	Tarea #5	Significar los elementos presentes en la serie trigonométrica que emerge al matematizar el modelo del movimiento planetario de los alejandrinos en forma general.	Se pretende con esta generalización que el estudiante identifique las condiciones para que el modelo sea estable. Por otra parte debe encontrar condiciones para que el modelo sea equivalente a la STF. De esta manera, a partir de todo el trabajo previo, significará las nociones matemáticas en el ambiente físico-geométrico.
Momento 2	Tarea #6	Significar el cálculo de los coeficientes de Fourier utilizando argumentaciones gráficas y geométricas, tal y como lo hizo Fourier.	A propósito del trabajo de Fourier y la búsqueda de generalizar en matemáticas se propone el problema inverso, dada la función a la que converge la serie, determinar los coeficientes, para lo cual las argumentaciones gráficas y geométricas cobraran gran importancia, justo como se evidenció en el trabajo de Fourier.

Tabla 6.2. Esquema general de la situación de aprendizaje.

Se espera ahora que este diseño se ponga en funcionamiento en una experimentación controlada con estudiantes de la carrera de enseñanza de las matemáticas de una Universidad de Costa Rica, para así confrontar los resultados teóricos empíricos, además de validar el diseño mediante la confrontación de un análisis a posteriori con el análisis a priori dado en este capítulo.

7 Conclusiones

La TSME se preocupa por la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional, con este fin la investigación en matemática educativa realiza una aproximación sistémica al fenómeno didáctico mediante cuatro componentes: epistemológica, didáctica, cognitiva y sociocultural. Este estudio sistémico permite identificar las prácticas y las circunstancias socio-históricas que provocaron el surgimiento del objeto matemático, así como el estado del dME actual a su alrededor. Esto permite identificar la trasformación sufrida por el objeto desde su surgimiento hasta su introducción en el sistema de enseñanza (fenómeno de trasposición didáctica).

En esta investigación el objeto matemático en cuestión se corresponde con la STF, y esta aproximación sistémica desde la TSME permitió conocer a profundidad a la serie y el estatus que posee en el sistema de enseñanza, para a partir de esto proponer un rediseño del dME, el cual considere la construcción social del conocimiento basado en prácticas sociales y que se promueva el desarrollo del pensamiento matemático.

7.1 Acerca del dME alrededor de la STF

El dME es un sistema de razón que norma la organización de la matemática escolar, además de generar las maneras de participación y consenso en el ámbito didáctico alrededor de la STF. Se evidenció cómo este discurso promueve la algoritmia por sobre la construcción de conocimientos funcionales alrededor de la serie; por ejemplo, se privilegia la introducción de la STF mediante el método deductivo, donde primero se deben revisar las condiciones que debe cumplir una función para ser representada en serie trigonométrica para luego proceder con el cálculo de los coeficientes utilizando las fórmulas proporcionadas.

Esto provoca que la STF carezca de argumentaciones y significados que provengan de la actividad humana, pues no se considera la práctica de referencia que hace emerger dicho conocimiento, ni tampoco el contexto de quien aprende (aula extendida), por esta razón no es de extrañarse que el discurso escolar en los libros de texto considere a la serie como un algoritmo, para representar una función periódica en serie trigonométrica, sin considerar la naturaleza de los fenómenos que requieren de la serie para su significación.

Este privilegio al algoritmo para el cálculo de la serie provoca que se impongan significados y procedimientos que no le permiten al estudiante la construcción del objeto matemático, lo cual no le permite dotarlo de otros significados en diferentes contextos; no es de extrañarse que los profesores de cursos avanzados que requieren del dominio de la serie de Fourier expresen que los estudiantes no la comprenden y que solo conocen un algoritmo mecánico para calcularla.

De esta manera se evidencia como el dME imperante provoca la exclusión de la construcción social de la STF en el sistema de enseñanza, esto pues se presenta como un conocimiento acabado y continuo, útil para resolver ciertos problemas carentes de marcos de referencia para su significación; además de imponer procedimientos y significados que no permiten su resignificación en otros marcos de referencia (carácter hegemónico).

7.2 Consideraciones para una construcción social de la STF

Las características del dME actual alrededor de la STF obliga a que cualquier propuesta de enseñanza para la misma requiera de cambios significativos al discurso (rediseño del dME), desde la TSME se propone el desarrollo del pensamiento matemático y la construcción social del conocimiento basado en prácticas sociales.

De esta manera, gracias al análisis sistémico realizado se logró identificar aquellas prácticas que acompañan a la construcción social de la STF. Epistemológicamente dicha construcción requiere de dos momentos importantes:

- **Momento 1:** Comprender que una serie trigonométrica puede converger a una función.
- **Momento 2:** Para una función que se puede representar en serie trigonométrica, determinar los coeficientes de la serie.

El **Momento 1** implica el reconocimiento intuitivo de la convergencia, no así la significación de la convergencia de la STF, por esta razón se pone especial atención a la significación de las sumas parciales de la serie para que estas funcionen como mecanismo para fortalecer la noción de convergencia. Se propone entonces un esquema de prácticas anidadas preliminar que promueva la construcción social de la STF.

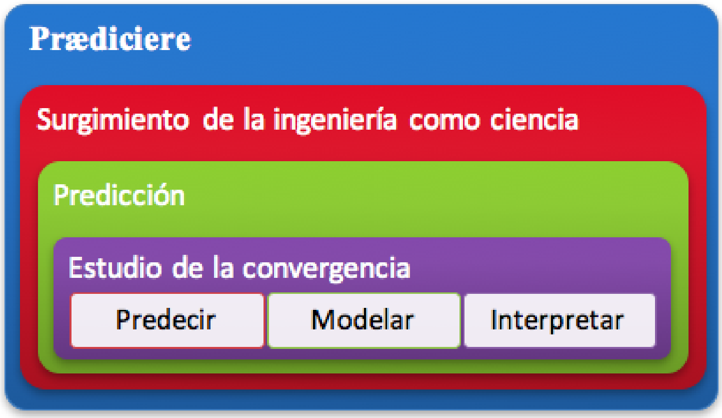


Ilustración 7-1. Epistemología de prácticas preliminar de la STF.

En este esquema la práctica de referencia proviene del contexto en el que se desarrolla el trabajo de Fourier, el **surgimiento de la ingeniería como disciplina científica**, donde el problema físico que provocó el surgimiento de la serie es el fenómeno de la propagación del calor. No se pretende que se aborde este mismo fenómeno es la escuela, ya que este ambiente fenomenológico es cognitivamente más complejo que la serie misma, pues su comprensión no proviene de la primera experiencia sensible, se requiere de una abstracción profunda cuyas herramientas necesarias no las provee la escuela, ni el entorno social (Farfán, 2012). Sin embargo, se rescatan para la escuela aquellas características propias del fenómeno, en este caso se propone como ambiente de significación el **modelaje** de un *fenómeno estacionario con variación periódica y acotada*, para el cual la STF se convierta en una herramienta de **predicción**, donde la acción de **interpretar** juega un rol fundamental al permitir validar la argumentación matemática en el fenómeno físico.

El ambiente fenomenológico de determinación del estado estacionario provoca el surgimiento de la noción de convergencia (Farfán, 2012), en particular de series trigonométricas. Se traslada el problema de calcular sumas a determinar la convergencia, es decir, se pasa de estudiar funciones a estudiar series, lo que permite vislumbrar la evolución de la funcionalidad trigonométrica a la formalidad trigonométrica, por lo que **estudiar la convergencia de series trigonométricas** es la actividad que provoca la formación de funciones psicológicas superiores.

De esta manera, desde un punto de vista teórico, se verifica nuestra hipótesis de investigación *lo trigonométrico evoluciona si las situaciones demandan su uso en la transición de la función a la serie y es en esta transición donde se puede significar la Serie Trigonométrica de Fourier*. Esto pues la funcionalidad trigonométrica se caracteriza por el estudio de fenómenos no estáticos de variación con comportamiento periódico y acotado, donde la función se convierte en una herramienta de predicción.

Por su parte la STF se caracteriza por el estudio de fenómenos estacionarios con variación periódica y acotada, donde el carácter estable de estas variaciones se vislumbra mediante la convergencia de una serie trigonométrica lo que convierte a la serie en una herramienta de **predicción** para un proceso infinito. Es decir, lo trigonométrico evoluciona gracias al estudio de la convergencia y es en esta transición en la que emerge la STF.

El **Momento 2** para la construcción social de la STF surge a partir del Momento 1, ya que gracias a la necesidad de generalizar en matemáticas, se hace natural realizar la pregunta inversa ¿y si se conoce la función a la que se converge, cuál es la serie? Este segundo momento no busca determinar las condiciones para que una función se pueda representar en serie trigonométrica, más bien, supone de antemano que la función se puede representar y se concentra únicamente en el cómo se calculan los coeficientes de la serie. Para esto se evidencia como detrás del trabajo de Fourier existe una base de argumentaciones gráficas y geométricas, que permiten significar el cálculo de los coeficientes de Fourier.

Cabe aclarar que estos momentos surgen de la epistemología, y que las consideraciones de no estudiar el concepto de convergencia para la STF y las condiciones para que la función se pueda representar en serie trigonométrica, se toman debido a que estos problemas corresponden a un momento epistemológico posterior al trabajo de Fourier, en particular se deben a Dirichlet, por lo que se considera que su estudio amerita de una investigación adicional.

7.3 Acerca de la situación de aprendizaje

La situación de aprendizaje propuesta busca contribuir al rediseño del dME alrededor de la STF, ya que con un fundamento socioepistemológico pretende realizar una construcción social de la serie basada en prácticas sociales. Si bien es cierto que aún falta analizar las interacciones que provocaría entre los participantes en alguna puesta en escena, se pueden rescatar de ella algunas reflexiones teóricas importantes.

Según la **Tabla 2.1** (p. 19) una propuesta de rediseño del dME debe poseer las siguientes características: Carácter funcional, racionalidades contextuales diversas, validación de saberes y pluralidad de prácticas de referencia. En este sentido el diseño propuesto presenta a la STF como una herramienta de predicción al analizar el modelo propuesto por los astrónomos alejandrinos para el movimiento planetario, donde se busca modelar e interpretar el sistema a partir de la superposición de movimientos circulares, reconociendo a la Prædiciere como práctica social que norma la construcción social de la STF (carácter funcional).

La elección de este ambiente físico-geométrico responde a la práctica de referencia de la población de destino, estudiantes de la licenciatura en enseñanza de las matemáticas de la Universidad de Costa Rica, quienes tienen como referente principal a la matemática escolar, pues su formación no incentiva la transversalidad de las nociones matemáticas. Se busca de esta manera la evolución del pensamiento trigonométrico, donde la situación planteada provoque la necesidad de considerar la convergencia de la serie trigonométrica, característica primordial que la diferencia de la función trigonométrica, cuyas argumentaciones provienen del contexto de quien aprende (racionalidad contextual y validación de saberes).

Por otra parte, Montiel (2011) asegura que para el tratamiento de la serie trigonométrica se requiere que la función trigonométrica se despoje de todo origen geométrico, trabajando exclusivamente con sus propiedades analíticas, particularmente la periodicidad. Desde esta investigación y en particular ejemplificado en la situación de aprendizaje propuesta, se propone que despojar a la función de su carácter geométrico no es necesario, más bien, el diseño busca potenciar este carácter geométrico para dar significado a la serie trigonométrica, donde la noción de convergencia, amparado en el estudio de sumas parciales cobra vital importancia (pluralidad de prácticas de referencia para la resignificación).

Es importante recalcar, de nueva cuenta, que estas afirmaciones son de carácter teórico, ya que se hace necesario un análisis de la puesta en escena de la situación de aprendizaje para poder confrontar estas aseveraciones con los datos empíricos.

7.4 Recomendaciones

Como ya se evidenció en la parte anterior, esta investigación con fundamento socioepistemológico propone una esquema de prácticas anidadas preliminar para la construcción social de la STF, además de un diseño de situación de aprendizaje. De esta manera se recomienda para próximas investigaciones:

- Considerar otros marcos de referencia en los que esté presente la STF, lo cual permitirá validar, modificar y fortalecer el esquema de prácticas anidadas propuesto para la STF.
- Como se dijo anteriormente, esta investigación no aborda la significación de la convergencia de la STF, ni las condiciones que se deben cumplir para que una función pueda ser representada en serie trigonométrica, ya que esto corresponde a un momento epistemológico posterior, en particular el trabajo de Dirichlet, por lo que se considera que esto amerita una investigación adicional.
- Esta investigación considera la forma trigonométrica de la serie de Fourier, pero en diferentes marcos de referencia se suele utilizar la forma compleja de la serie, por lo que surgen varias cuestiones: ¿Qué elementos de la forma trigonométrica de la serie son necesarios para hacer el salto a la forma compleja de la serie de Fourier?, ¿cuál es la necesidad de esta forma compleja y sus características principales a partir de su contexto histórico-social de surgimiento?
- La STF permite aproximar una función con ciertas características en un intervalo de longitud finita ¿qué pasaría si se considera este intervalo de longitud infinita? Esta pregunta da paso al estudio de la Transformada de Fourier, la cual no se ha considerado en las investigaciones en matemática

educativa, por lo que hacer cuestionamientos alrededor de la misma podría propiciar futuras investigaciones.

A manera de síntesis, se analizó el contexto histórico-social de surgimiento de la STF, lo que permitió determinar la naturaleza de los fenómenos que permiten significar y promover una génesis artificial de este conocimiento en las aulas. De esta manera, se propone el modelaje e interpretación de un fenómeno estacionario de variación periódica-acotada, en el cual la STF se convierta en una herramienta de predicción, donde el estudio de la convergencia de la serie es la que permite la evolución del pensamiento trigonométrico, de la funcionalidad a la formalidad trigonométrica.

Además con base en una problematización del saber matemático, la cual requiere del estudio integrado de las componentes epistemológica didáctica, cognitiva y social y cultural, se logró identificar aquellas prácticas sociales que acompañan la emergencia de la STF. En este sentido, **predecir, modelar** e **interpretar** corresponden a las *acciones* directas del sujeto sobre el medio; estas acciones se organizan para el **estudio de la convergencia** de series trigonométricas como *actividad* que provoca el surgimiento de funciones psicológicas superiores, para perfilar a la **predicción** como *práctica socialmente compartida*; dicha práctica cae bajo la regulación de una *práctica de referencia*, la cual es el **surgimiento de la ingeniería como ciencia**; la que a su vez es normada por la **Prædiciere** como *práctica social*.

Con base en los dos puntos anteriores se diseñó una situación de aprendizaje con el objetivo de promover la construcción social de la STF, que permite su significación mediante el uso, en la cual se propone potenciar el ambiente geométrico-dinámico de significación de la funcionalidad trigonométrica, para así hacer emerger la STF a partir de su relación con la función trigonométrica como momento previo de construcción social de lo trigonométrico.

Todo lo anterior permitió significar las nociones matemáticas alrededor de la STF, incluso el cálculo de sus coeficientes. En este sentido esta tesis tiene dos aportaciones fundamentales: una de orden teórico y otra de orden pragmático. Es necesaria que ésta última sea implementada como propuesta de enseñanza para así consolidar los aportes dados hasta el momento, pero esto se hará en un futuro cercano.

8 Prospectivas de la investigación

La STF se ha problematizado en múltiples investigaciones para conocer el funcionamiento del sistema didáctico y las concepciones de estudiantes y profesores acerca de las nociones involucradas con la serie. Concretamente, su estudio inició con los trabajos de investigación de Farfán (1986, 1994) en los cuales se dio cuenta de las circunstancias socio-históricas en las cuales emergió la noción de convergencia de series, situación ligada estrechamente con el surgimiento de la STF, además de su fenomenología intrínseca «la determinación del estado estacionario».

A partir de esas investigaciones, que podemos decir son fundacionales en tanto el estudio de las series y su convergencia en Matemática Educativa, se desbordan más investigaciones preocupadas por las nociones que se encuentran alrededor de la STF: la noción de estado estacionario en el fenómeno de transferencia de calor (Marmolejo, 2006), la modelación en el trabajo de Fourier (Morales, 2003), la ambigüedad en el tratamiento didáctico de la noción de calor (Morales, 2010), el rol de la visualización para el abordaje de la STF (Rodríguez, 2009), el papel de la hipótesis de periodicidad en la STF (Vásquez, 2006), la noción de convergencia de series trigonométricas en un ambiente físico-geométrico modelado por computadora (Moreno, 1999), por mencionar algunas.

Por otra parte, pero igualmente ligado a la STF, está la investigación de Montiel (2005) la cual versa sobre alrededor del desarrollo del pensamiento trigonométrico, para lo cual evidencia tres momentos de construcción social de lo trigonométrico: (1) la racionalidad trigonométrica, (2) la funcionalidad trigonométrica y (3) la formalidad trigonométrica. Para el primer momento propone el estudio de fenómenos no manipulables donde la proporción genera las nociones y los modelos asociados a la razón trigonométrica, el segundo momento requiere del estudio del movimiento y el cambio para fenómenos periódico-acotados. Sin embargo para el tercer momento, en el cual posiciona a la STF como el estadio más avanzado de las funciones trigonométricas, se recalca que hace falta distinguir el fenómeno que se requiere para provocar el surgimiento de la serie.

A partir de esta revisión se logró detectar que las investigaciones alrededor de la STF no la han abordado en su relación con la función trigonométrica como momento previo de construcción social. En este sentido esta investigación representa una fuerte fundamentación teórica que proporciona algunas pautas a considerar para el diseño de situaciones de aprendizaje que se preocupen por la construcción social de este conocimiento matemático, propósito muy importante para la matemática educativa, llevar la investigación a las aulas.

Este trabajo constituye un primer acercamiento a la caracterización de los fenómenos necesarios de estudiar para hacer evolucionar el pensamiento trigonométrico de la funcionalidad a la formalidad trigonométrica. El objetivo principal fue significar las nociones matemáticas alrededor de la STF, para esto se identificó, en relación con el desarrollo del pensamiento trigonométrico, la naturaleza de aquellos fenómenos necesarios para hacer evolucionar lo trigonométrico, para así, proponer una génesis artificial de la serie en el salón de clases, es en este tipo de ambientes en donde se significan las nociones matemáticas involucradas con la serie.

Además, a partir de una problematización del saber en juego, se logró dilucidar aquellas prácticas sociales que acompañan la construcción social de la STF, esto nos permite proponer pautas necesarias a considerar en los diseños de situaciones de aprendizaje que promuevan la construcción social de este conocimiento. Tomando esto en consideración se propuso un diseño de situación específico dirigido a estudiantes de la carrera de enseñanza de la matemática en la Universidad de Costa Rica.

De esta manera esta investigación generó hipótesis para el tratamiento de la STF en las aulas. Sin embargo, es necesario aún profundizar a través de la experimentación en situación controlada, ya que, lo encontrado hasta ahora ha sido sustentado en forma teórica y no con datos empíricos. Es por esto que se plantea como posible hipótesis que *la modelación e interpretación de fenómenos estacionarios de variación periódica-acotada permite la significación de las nociones matemáticas alrededor de la STF a partir de su uso, ya que para estos fenómenos la serie se convierte en una herramienta de predicción*.

En consecuencia se requiere probar esta hipótesis mediante un mayor análisis. Por tanto se pretende realizar un estudio más a fondo con la población de estudiantes de enseñanza de las matemáticas de la Universidad de Costa Rica a través de la implementación de la situación de aprendizaje propuesta en esta investigación, esto de manera controlada.

En términos de la Ingeniería Didáctica se pretende continuar con su esquema metodológico, ya que esta investigación corresponde a sus dos primeras fases (1) análisis preliminar y (2) diseño de la situación de aprendizaje y análisis a priori, por tanto, se busca a través de la experimentación, continuar con la tercera fase de la ingeniería, en la cual se pondrá en funcionamiento la situación de aprendizaje y se tomarán los datos mediante la observación de la puesta en escena, el análisis de las producciones de los estudiantes y algún otro mecanismo que se considere oportuno como las entrevistas.

En la cuarta fase de la Ingeniería Didáctica corresponde al análisis a posteriori y la validación interna de la secuencia de aprendizaje que fue teóricamente fundamentada, dicha validación se hace a partir de la confrontación de lo que se dijo que iba a suceder en el análisis a priori y lo que sucedió durante la puesta en escena. Es decir, se validan las hipótesis de diseño en las que se fundamenta la situación de aprendizaje.

En este sentido el diseño de situación propuesto en esta investigación está fundamentado teóricamente en los principios socioepistemológicos y utiliza un modelo preliminar de prácticas anidadas para la STF que provee de las acciones necesarias a llevar a cabo para que se produzca la construcción social de este conocimiento, es necesario entonces confrontar este modelo teórico con la experiencia. Esto permitirá:

- A nivel teórico: validar, mejorar y fortalecer el esquema de prácticas anidadas preliminar para la STF, pues como modelo de construcción social de este conocimiento, será sumamente importante para todas aquellas investigaciones que se preocupen por la significación de la STF en diferentes marcos de referencia.
- A nivel práctico: validar el diseño de situación de aprendizaje propuesto, y a partir de repetidas implementaciones y análisis proponer mejoras al mismo.

Lo cual hará dos aportes importantes, en primer instancia al estudio del desarrollo del pensamiento trigonométrico avanzado, identificando aquello necesario para hacer evolución el pensamiento de la funcionalidad a la formalidad trigonométrica, por otra parte la validación del diseño permitirá ponerlo a disposición como un recurso para los profesores, los cuales pueden adaptarlo según sus necesidades para la implementación en las aulas.

Prospectivas de la investigación

Estas investigaciones permitirán reflexionar sobre la importancia de la identificación de aquellas prácticas y fenómenos necesarios para la construcción social de los diferentes objetos matemáticos, en particular de la STF. En la actualidad, ha imperado en el sistema didáctico la necesidad de producir un desarrollo conceptual de los objetos a partir del razonamiento deductivo, esto ha ocasionado que los estudiantes no consideren a la STF como una construcción proveniente de la actividad humana, por lo que no la significan desde su propio contexto. Esto ha provocado carencia de significados y argumentaciones alrededor de la STF en su tratamiento didáctico, por tanto, se debe estar consciente de que se requiere de una mirada atenta y profunda del fenómeno en cuestión para así proponer recursos que ayuden a promover el desarrollo del pensamiento matemático, en particular el salto a la formalidad trigonométrica.

Referencias

Alanís, J. A., Cantoral, R., Cordero, F., Farfán, R. M., Garza, A., & Rodríguez, R. A. (2000). *Desarollo del pensamiento matemático.* México: Editorial Trillas.

Albert, J. A. (1996). *La convergencia de series en el nivel superior. Una aproximación sistémica.* Tesis doctoral no publicada, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis doctoral no publicada, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, & P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la invención y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (págs. 33-59). México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1*(1), 40-55.

Artigue, M. (1998). L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 18*(2), 231-262.

Artigue, M. (2014). Didactic Egineering in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (págs. 159-162). London: Springer.

Artigue, M. (2015). Perspectives on Design Research: The Case of Didactical Engineering. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knniping, & N. Presmeg, *Approches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (págs. 467-496). London: Advances in Mathematics Education.

Bélidor, B. (1729). *La science des ingeneurs, dans la conduite des travaux de fortification et d'architecture civile.* París: Chez Firmin Didot.

Calles, A., Yépez, E., & Peralta, J. (2003). El análisis de Fourier de las trayectorias planetarias y el modelo copernicano del sistema solar. *Revista Mexicana de Física, 49*(3), 283-289.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa.* Barcelona, España: Editorial Gedisa S.A.

Cantoral, R., & Farfán, R. M. (2003). Mathematics education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics, 53*, 255-270.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J., & Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*(especial), 83-102.

Referencias

Cantoral, R., Molina, J. G., & Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la predicción. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (págs. 463-468). Clame.

Cantoral, R., Montiel, G., & Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso matemático escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*(8), 9-28.

Cantoral, R., Montiel, G., & Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en matemática educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), 5-17.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., & Montiel, G. (2014). Socioepistemología, matemáticas y realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(3), 91-116.

Cañada, A. (2000). Una perspectiva histórica de las series de Fourier: de las ecuaciones de ondas y del calor a los operadores compactos y autoadjuntos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3*(3), 293-320.

Contreras, L. (2000). *Interpretación geométrica de las derivadas sucesivas de una función: Un estudio realizado con estudiantes de bachillerato.* Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma del Estado de Higalgo, Hidalgo.

Cordero, F. (2003). *Reconstrucción de significados del cálculo integral: la noción de acumulación como una argumentación.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

D'Amore, B. (2006). *Elementos de didáctica de la Matemática.* Bogotá, Colombia: Magisterio.

Díaz-Barriga, E. (1993). *La transformada rápida de Fourier: Un estudio de la matemática en un contexto que recupera significados.* Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.

Euler, L. (1748). *Introduction a l'analyse infinitésimale* (Vol. I). París, Francia: Imprimeur-Libraire de l'École Polytechnique.

Euler, L. (1748). *Introduction a l'analyse infinitésimale* (Vol. II). París, Francia: Imprimeur-Libraire de l'École Polytechnique.

Farfán, R. M. (1986). *Acerca de la representación de una función "arbitraria" en serie trigonométrica (Ensayo Histórico).* Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, Sección de Matemática Educativa, México D. F.

Farfán, R. M. (1994). *Construcción de la noción de convergencia en ámbitos fenomenológicos vinculados a la ingeniería.* Tesis doctoral no publicada, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.

Farfán, R. M. (1997). *Ingeniería didáctica: un estudio de la variación y el cambio.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R. M. (1997). La investigación en matemática educativa en la reunión Centroamericana y del Caribe referida al nivel superior. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 1*(0), 6-26.

Farfán, R. M. (2012). *Socioepistemología y ciencia. El caso del estado estacionario y su matematización* (Primera ed.). Barcelona, España: Editorial Gedisa S. A.

Flores, R. (1992). *Sobre la construcción del concepto de convergencia en relación al manejo heurístico de los criterios.* Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.

Fourier, J. (1822). *Théorie analytique de la chaleur* (Reimpressions Editions Jacques Gabay (1988) ed.). París: Chez Firmin Didot, père et fils. Libraires pour les mathématiques, l'architecture hydraulique et la marine. Rue Jacop. No. 24.

Izquierdo, L., Galán, J., Santos, J., & Del Olmo, R. (2008). Modelado de sistemas complejos mediante simulación basada en agentes y mediante dinámica de sistemas. *EMPIRIA. Revista de Metodología de Ciencias Sociales*(16), 85-112.

Marmolejo, R. (2006). *Estudio de la noción de estado estacionario en el ámbito fenomenológico de la transferencia de calor.* Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la función trigonométrica.* Tesis doctoral no publicada, CICATA-IPN, México D. F.

Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio socioepistemológico.* México: Diaz de Santos.

Montiel, G. (2013). *Desarrollo del pensamiento trigonométrico.* México D. F,: SEP.

Morales, F. (2003). *Acerca de la actividad de modelación: las temperaturas de la tierra.* Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.

Morales, F. (2010). *Causas y efectos de la ambigüedad en el tratamiento didáctico de la noción de calor. Una caracterización del pensamiento fisicomatemático.* Tesis doctoral no publicada, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.

Morales, F. (2013). El modelo matemático de Fourier para el calentamiento terrestre. *Ciencia y Tecnología*, *13*, 293-308.

Moreno, J. A. (1999). *Estudio de la noción de convergencia de series trigonométricas en un ambiente de simulación.* Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.

Muro, C. (2000). *Significación de la serie de Fourier en el contexto del proceso de transferencia de masa.* Tesis de maestría no publicada, UAEH, Hidalgo.

Muro, C. (2002). Las representaciones del estudiante sobre la noción de series de Fourier en el contexto de la transferencia de masa. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 15* (págs. 992-997). Clame.

Muro, C. (2003). Análisis de las concepciones del estudiante mediante la contextualización de la serie de Fourier en fenómenos de transferencia. En J. Delgado (Ed.), *Acta Latinoamericano de Matemática Educativa 16* (págs. 254-259). Clame.

Muro, C. (2004). *Análisis del conocimiento del estudiante relativo al campo conceptual de la serie de Fourier en el contexto de un fenómeno de transferencia de masa.* Tesis doctoral no publicada, CICATA-IPN, México D. F.

Reyes-Gasperini, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas.* Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, Ciudad de México.

Rodríguez, M. (2009). *Una matemática funcional para el ingeniero. La serie trigonométrica de Fourier*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.

Rodríguez, M., & Popoca, M. (2010). The trigonometrical series of Fourier: a visual approximation. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 8,* 64-71.

Shoenthal, D. (2014). Fourier series as a unifying topic in calculus II. *PRIMUS: Problems, Resources, and and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 24*(4), 294-300.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En G. Harel, & E. Dubinsky, *Teh concept of function: aspects of epistemology and pedagogy* (Vol. 25, págs. 26-58). MAA Notes.

Solís, M. (1993). *Estudio de la noción de variación en contextos físicos: El fenómeno de la propagación de calor.* Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.

Soto, D. (2010). *El discurso matemática escolar y la exclusión. Una visión socioepistemológica.* Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.

Taylor, B. (1715). *Methodus Incrementorum Directa et Inversa.* Londres: Impensis Gulielmi Innys.

Ulín, C. (1984). *Análisis histórico-crítico de la difusión de calor: el trabajo de Fourier.* Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.

Vásquez, R. (2006). *Sobre el papel de la hipótesis de periodicidad en las series de Fourier.* Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.

Anexos

Anexo 1. Plan de estudios Enseñanza de la Matemática UCR

Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
Departamento de Enseñanza de la Matemática

Bachillerato en Enseñanza de la Matemática (con salida lateral al profesorado)

Sigla	Nombre de la materia	Horas	Requisitos	Créd.
I año/I ciclo				
EG-	Humanidades I	8		6
EF-	Actividad Deportiva	2		0
MA-0101	Matemática de Ingreso	6		4
MA-0270	Geometría I	5		4
FD-0548	Introducción a la Pedagogía	4		3
I año/II ciclo				
EG-	Humanidades II	8	Humanidades I	6
MA-0123	Introducción a la Matemática	6	MA-0101	4
MA-0175	Laboratorio de Matemática I	2	MA-0101	2
OE-1103	Desarrollo y aprendizaje en la adolescencia	4	FD-0548	3
RP	Repertorio			3
II año/I ciclo				
MA-0205	Álgebra y Análisis I	5	MA-0123	4
MA-0275	Laboratorio de Matemática II	2	MA-0175	2
FD-0152	Fundamentos de Didáctica	4	FD-0548/OE-1103	3
FD-5051	Principios de Curriculum	4	FD-0548/OE-1103	3
EG-	Curso de Arte	3		2
Se obtiene el Certificado de Autorización para la Enseñanza de la Matemática (MT1)				
II año/II ciclo				
MA-0304	Algebra y Análisis II	5	MA-0205	4
MA-0307	Geometría y Algebra Lineal	5	MA-0270/MA-0205	4
EA-0350	Taller Mater. Didáct. y Medios Audiovisuales	4	FD-0152/FD-5051	3
OE-0342	Princ. de Evalaluación y Medición Educativa	4	FD-0152/FD-5051	3
SR-	Seminario de Realidad Nacional I			2
Se obtiene el Certificado de Suficiencia en Enseñanza de la Matemática (MT2)				
III año/I ciclo				
MA-0540	Principios de Análisis I	5	MA-0304	5
FD-0531	Metodología en Enseñanza de la Matemática	4	EA-0350/OE-0342 MA-0304/MA-0307	3
MA-0421	Geometría Analítica	5	MA-0307	5
MA-0372	Principios de Estadística Matemática	5	MA-0307/MA-0304	5
III año/II ciclo				
MA-0550	Ecuaciones Diferenciales para Enseñanza	5	MA-0540	5
FS-0226	Física para la Enseñanza de la Matemática	5	MA-0540	4
FD-0541	Experiencia Docente en Matemática	18	FD-0531/MA-0540/ MA-0372	6
Se obtiene el Profesorado en Enseñanza de la Matemática, previa aprobación de 150 horas de TCU				

Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
Departamento de Enseñanza de la Matemática

Sigla	Nombre de la materia	Horas	Requisitos	Créd.
IV año/I ciclo				
MA-0371	Algebra para la Enseñanza	5	MA-0307/MA-0304	5
MA-0420	Introducción a la Teoría de Números	5	MA-0304	4
OE-1012	Psicopedagogía del Adolescente	4	FD-0541	3
FD-0544	Teoría de la Educación	4	FD-0541	3
SR-	Seminario de Realidad Nacional II		Seminario I	2
IV año/II ciclo				
MA-0551	Principios de Análisis II	5	MA-0540	5
MA-0560	Computación y Métodos Numéricos	4	MA-0550	4
FD-0555	Seminario de Enseñanza de la Matemática	6	OE-1012/FD-0544	4
FD-0545	Ivestig. para el Mejoramiento del Aprendizaje	4	FD-0544	3
Se obtiene el Bachillerato en Enseñanza de la Matemática, previa aprobación de 300 horas de TCU.				
V año/I ciclo				
MA-0552	Introducción a la Topología	5	MA-0551	5
FD-5094	Curriculum en Matemática	4	FD-0545/FD-0555	4
FD-5093	Lenguaje Matemático	4	FD-0545/FD-0555	4
MA-	Optativa en Matemática	5		5
V año/II ciclo				
MA-0610	Introducción a la Variable Compleja	5	MA-0552	5
FD-5095	Investigación en Enseñanza de la Matemática	4	FD-5093/FD-5094	4
FD-5096	Optativa en Educación		FD-5093/FD-5094	4
MA-0911	Historia de la Matemática	5	MA-0552	5
TFG	Trabajo Final de Graduación			
Se obtiene la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática, previa aprobación del TFG				

Listas de Cursos Optativos para la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

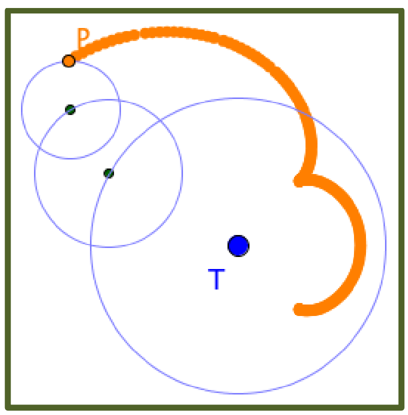
Sigla	Nombre de la materia	Horas	Requisitos	Créd.
MA-0415	Teoría Elemental de Conjuntos	5	MA-0540	5
MA-0502	Geometría III	5	MA-0307	5
MA-0602	Matemática en las Ciencias	5	MA-0540	5
MA-0606	Fundamentos de Algebra II	5	MA-0371	5
MA-0614	Introducción a los Métodos Numéricos II	5	MA-0560	5
MA-0712	Probabilidad Elemental	5	MA-0551	5
MA-0715	Introducción a la Lógica Matemática	5	MA-0540	5
MA-0821	Teoría Matemática del Equilibrio Económico	5	MA-0551	5
MA-0903	Principios de Geometría no Euclidea	5	MA-0307	5
MA-0904	Matemática Finita	5	MA-0372	5

Opciones a Nivel de Posgrado: Maestría en Matemática con énfasis en Matemática Educativa
Autorizado mediante resolución VD-R-8103-2007 del 07 de diciembre del 2007/ EFD-D-1549-2015

Anexo 2. Situación de aprendizaje

El Movimiento de los Planetas

Los griegos crearon un primer modelo del Universo, en el cual la Tierra se encuentra fija en el centro de una esfera en la que se encuentran adheridas las estrellas y que rotan con periodos de 24 horas aproximadamente. Este modelo habría bastado para hacerse una imagen mental del movimiento de los astros, sin embargo, siete de estos no se comportaban de una manera tan simple, pues diferían de los datos empíricos, eran: el Sol, la Luna, Mercurio, Venus, Júpiter y Saturno, por ejemplo el modelo era incapaz de explicar el fenómeno de las estaciones, el cambio de brillo de los planetas o el fenómeno de retrogradación.



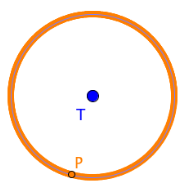
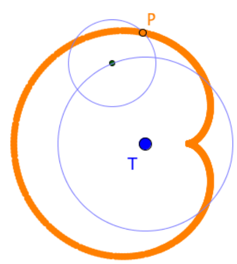
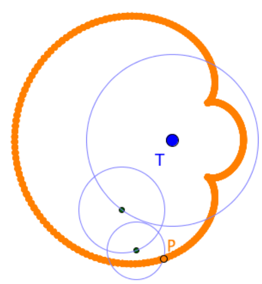
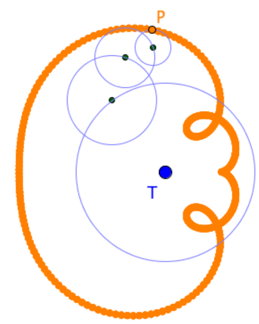
Puede ver una animación dando click aquí.

Los astrónomos alejandrinos (323 a. C. – 30 a. C.) propusieron un modelo para el movimiento de los planetas, el cual era consistente con los datos empíricos, dicho modelo consistía en una circunferencia centrada en la Tierra y sobre su perímetro se mueve un punto, este punto es el centro de otra circunferencia, y sobre el perímetro de esta última se mueve otro punto, el cual es centro de otra circunferencia y así sucesivamente, todos los puntos se mueven con velocidad angular uniforme y en sentido anti-horario, a este modelo geométrico del movimiento se le conoce con el nombre de superposición de movimientos circulares (o epiciclos).

Tarea #1: Explicando el Movimiento de los Planetas

Parte I. ¿Qué permite explicar este modelo?

Llamemos a la Tierra *T* y considere la trayectoria de un planeta *P* que se mueve alrededor de la Tierra, utilizando el modelo de los epiciclos con una, dos, tres y cuatro circunferencias.

1 circunferencia	2 circunferencias	3 circunferencias	4 circunferencias
			

a) ¿Por qué crees que el modelo con una única circunferencia no permite explicar el cambio de luminosidad de los planetas, las estaciones del año y el fenómeno de retrogradación? Explica con tus propias palabras.

b) Del modelo con 2, 3 y 4 circunferencias ¿cuál(es) permite(n) explicar el cambio de luminosidad de los planetas y las estaciones del año? Explica con tus propias palabras y ejemplifica utilizando una porción de trayectoria de alguno(s) de los modelos.

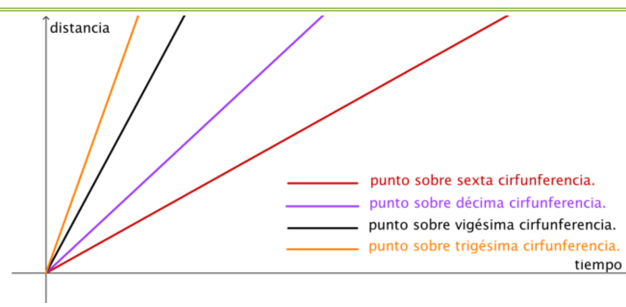
c) Del modelo con 2, 3 y 4 circunferencias ¿cuál(es) permite(n) explicar el fenómeno de retrogradación de los planetas? Explica con tus propias palabras y ejemplifica utilizando una porción de trayectoria de alguno(s) de los modelos.

Parte II. ¿Y si aumentamos el número de epiciclos?

Llamemos a la Tierra T y considere la trayectoria de un planeta Q que se mueve alrededor de la Tierra, utilizando el modelo de los epiciclos. Con base en el applet proporcionado (click aquí) responde las preguntas siguientes:

a) ¿Cómo cambian los radios de una circunferencia a otra conforme se van agregando?

b) La siguiente gráfica muestra la distancia recorrida por el punto que se mueve sobre las circunferencias sexta, décima, vigésima y trigésima. ¿Cómo cambia el movimiento de dichos puntos de una circunferencia a otra?



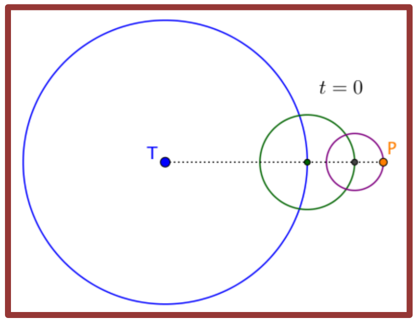
c) Utilizando el applet proporcionado en la pregunta (a), explica con tus propias palabras ¿cómo cambia la trayectoria del planeta conforme se agregan más y más circunferencias?

d) ¿Crees que exista alguna relación entre tu respuesta de la pregunta (c) y lo que respondiste en las preguntas (a) y (b) de la Parte II?, ¿Por qué si? o ¿por qué no?

Tarea #2: Modelando el Movimiento de los Planetas

Llamemos a la tierra T y consideremos un cierto planeta P cuya órbita corresponde a una superposición de movimientos circulares en torno de T, el modelo se comporta de la manera siguiente:

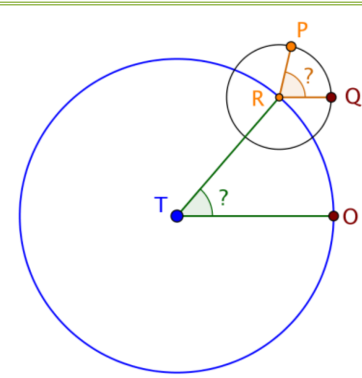
- Los radios de las circunferencias primera, segunda, tercera, … son respectivamente $\frac{4}{\pi}$, $\frac{4}{3\pi}$, $\frac{4}{5\pi}$, …
- La velocidad angular, en radianes por mes, de los puntos sobre las circunferencias primera, segunda tercera, . . . son respectivamente $1, 3, 5, \ldots$
- Cuando el tiempo es $t = 0$, el ángulo en posición estándar del punto con respecto al centro de la circunferencia es nulo.



Parte I. Comprendiendo el modelo

a) Considere el modelo con dos circunferencias, es decir, aquel en la cual un punto R se mueve sobre la primera circunferencia con velocidad de 1 radián por mes, y este es centro de otra circunferencia sobre la cual se mueve el planeta P con velocidad de 3 radianes por mes. Complete la siguiente tabla para determinar la medida (en radianes) de los ángulos $\angle OTR$ y $\angle QRP$, después de t meses.

Meses	Medida de $\angle OTR$ (en radianes)	Medida de $\angle QRP$ (en radianes)
0		
1		
2		
3		
⋮	⋮	⋮
t		



b) Con el mismo modelo utilizando dos circunferencias. Realice **dos dibujos a escala** para los valores de $t = \frac{\pi}{12}$ y $t = \frac{5\pi}{8}$, explicando los pasos de tus construcciones. Determine la distancia del planeta P a la Tierra en esos instantes.

Construcción para $\boldsymbol{t = \frac{\pi}{12}}$.
Construcción para $\boldsymbol{t = \frac{5\pi}{8}}$.

c) Utilice la siguiente guía para construir un applet en GeoGebra que le permita observar el comportamiento del sistema en el modelo con dos circunferencias.

- Abra una nueva ventana de GeoGebra.
- Seleccione la apariencia Álgebra y Gráficos.
- Vaya a Opciones – Etiquetado – Ningún objeto nuevo.
- Vaya a Opciones – Redondeo – 4 cifras decimales.

Sugerencia: No olvide leer los mensajes de ayuda si no sabe cómo utilizar una herramienta. Trate de usarla y entender cómo trabaja antes de iniciar la construcción que proponemos.

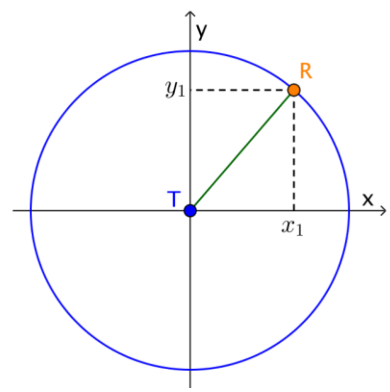
Pasos de la construcción:

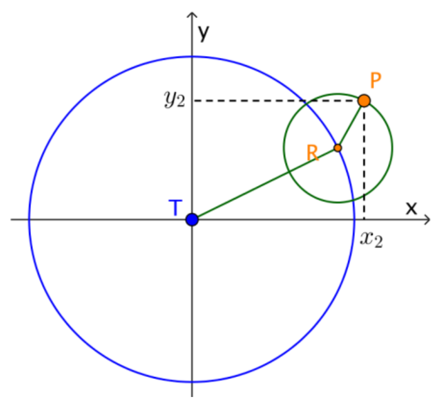
1	a = 2	Crear un deslizador con Nombre: t Intervalo – Mín: 0 – Máx: 2*pi – Incremento: 0.01 Animación – Repite: Creciente. [Utilice el deslizador en $t = 1$ para todo lo que sigue]
2		Crear el punto $T = (0,0)$ Click derecho sobre T – Propiedades - Básico – Fijar el objeto.
3		Crear una circunferencia *c* de centro *T* y radio 4/pi
4		Crear el punto *A* en la intersección de la circunferencia *c* y el eje positivo *x*
5		Crear el ángulo con punto lateral A, vértice en *T* y medida la fórmula obtenida para $\angle OTR$ en pregunta (a), lo que creará el punto *A'*
6		Crear una circunferencia *d* de centro *A'* y radio 4/(3*pi)
7		Crear una recta *f* que contenga al punto *A'* y sea paralela al eje *x*
8		Ocultar ejes coordenados. Click derecho sobre la vista gráfica - Ejes
9		Crear el punto *B* en la intersección de la circunferencia *d* y la recta *f*. [Note que hay dos intersecciones, debe crear la que está a su derecha]
10		Ocultar la recta *f*. Click derecho sobre f – Mostrar objeto
11		Crear el ángulo con punto lateral B, vértice en *A'* y medida la fórmula obtenida para $\angle QRP$ en pregunta (a),lo que creará el punto *B'*
12		Cambiar el nombre al punto *B'*. Click derecho sobre B' – Propiedades – Básico – Nombre: *P*
13		Ocultar puntos *A* y *B*. Click derecho sobre *A* – Mostrar objeto. Click derecho sobre *B* – Mostrar objeto
14		Crear el segmento *g* con extremos *T* y *P*.
15		Mostrar la medida del segmento *g* y las coordenadas del punto *P*. Click derecho sobre *g* – Propiedades – Básico – Mostrar etiqueta – Valor. Click derecho sobre *P* – Propiedades – Básico – Mostrar etiqueta – Nombre y Valor.

Utilice el applet que acaba de construir para completar la siguiente tabla:

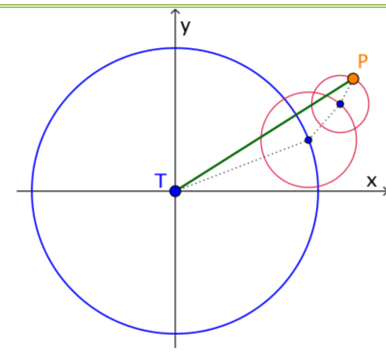
Tiempo transcurrido	Abscisa de P	Ordenada de P	Distancia del planeta P a la Tierra
$\frac{\pi}{12}$			
	0.6042	-1.2004	
			1.5305
	-0.102		1.0257

d) Continuando con el modelo utilizando dos circunferencias y agregando un sistema de coordenadas cuyo origen sea *T* (la Tierra). Determine las coordenadas (x_1, y_1) del punto *R* y las coordenadas (x_2, y_2) del planeta *P*, en el tiempo t. Determine además la distancia del punto P a T, en el tiempo t.





e) Considere ahora el modelo utilizando tres circunferencias. Determine una fórmula que permita calcular la distancia del planeta *P* a la Tierra, en cualquier tiempo t.



Parte II. ¿Y si agregamos más epiciclos?

a) Considere ahora el modelo utilizando más circunferencias. A partir de lo observado en el applet proporcionado (click aquí), explica con tus propias palabras ¿cómo cambia la trayectoria del planeta conforme se agregan más y más circunferencias?

b) Utilizando el mismo applet de la pregunta anterior. Completa la siguiente tabla y responde ¿cómo cambia la distancia del planeta *P* a la Tierra conforme se agregan más y más circunferencias en cada instante de tiempo? Explica con tus propias palabras.

Tiempo transcurrido	Distancia del planeta P a la Tierra según el número de circunferencias														
	1	5	10	15	20	25	30	35	40	45	46	47	48	49	50
$\frac{\pi}{12}$															
$\frac{\pi}{6}$															
$\frac{3\pi}{4}$															
π															

$\frac{4\pi}{3}$																
$\frac{3\pi}{2}$																
2π																

c) Considere ahora el modelo utilizando n circunferencias. Determine una fórmula que le permita calcular la distancia del planeta P a la Tierra, en cualquier tiempo t. [Sugerencia: retome sus soluciones a las preguntas (d) y (e) de la Parte I]

d) ¿Qué relación existe entre la fórmula obtenida en la pregunta anterior y sus respuestas de las preguntas (a) y (b) de la Parte II? Explique.

e) Utiliza el applet proporcionado (click aquí) y responde ¿cómo es el comportamiento de las sumas parciales de las abscisas? y ¿cómo es el comportamiento de las sumas parciales de las ordenas? Explica con tus propias palabras. ¿Qué relación existe entre estas respuestas y las de las preguntas (a) y (b)?

f) Note que las fórmulas obtenidas corresponden a sumas parciales de series trigonométricas. Con base en el mismo applet y tu respuesta a la pregunta anterior ¿podrías asegurar si la serie de las ordenadas converge o diverge? En caso de que converja ¿podrías identificar su valor de convergencia? Explica tus respuestas.

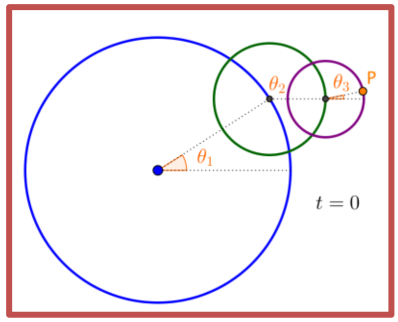
g) Si se cambia el rango de valores de t, para todos aquellos en los que $t \geq 0$. ¿Cuál es el valor de convergencia de la serie de las ordenadas del planeta *P*? [Sugerencia: utiliza el applet de la pregunta (e) para visualizar]

h) ¿Tiene sentido en nuestro modelo considerar valores de t negativos? ¿Cuál sería el valor de convergencia de la serie de las ordenadas del Planeta *P* en caso de considerar a $t \in \mathbb{R}$?

Tarea #3: Un Modelo más General

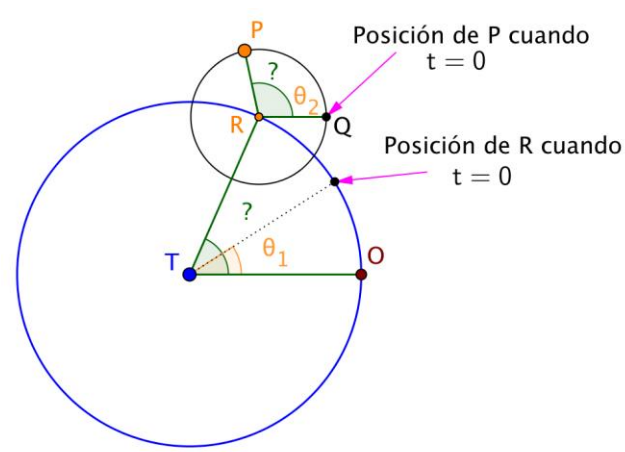
Llamemos a la tierra T y consideremos un cierto planeta P cuya órbita corresponde a una superposición de movimientos circulares en torno de T, el modelo se comporta de la manera siguiente:

- El radio de la circunferencia número n está dado por $\frac{\sqrt{n^2\pi^2+2-2(-1)^n}}{n^2\pi}$.
- La velocidad angular, en radianes por mes, de los puntos sobre las circunferencias primera, segunda tercera, . . . son respectivamente $1, 2, 3, \ldots$
- Cuando el tiempo es $t = 0$, el ángulo en posición estándar del punto con respecto al centro de la circunferencia número n es $\theta_n = \arctan\left(\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\right)$.



Parte I. Comprendiendo el modelo

a) Considere el modelo con dos circunferencias, es decir, aquel en la cual un punto R se mueve sobre la primera circunferencia con velocidad de 1 radián por mes, y este es centro de otra circunferencia sobre la cual se mueve el planeta P con velocidad de 2 radianes por mes. Determine la medida (en radianes) de los ángulos $\angle OTR$ y $\angle QRP$, después de t meses.



b) Considere ahora el modelo utilizando **tres** circunferencias. Realice un dibujo a escala para el valor de $t = \frac{3\pi}{4}$, explicando los pasos de tu construcción. Determine la distancia del planeta P a la Tierra en ese instante.

c) Construya un applet en GeoGebra que le permita observar el comportamiento del sistema en el modelo con tres circunferencias. Sólo que en esta ocasión la Tierra debe estar centrada en el punto $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$. A partir de ese applet complete la siguiente tabla:

Tiempo transcurrido	Abscisa de P	Ordenada de P	Distancia del planeta P a la Tierra
$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$			
			0.6041
			2.0002
	-0.1903	0.8073	

d) Regresando al modelo con dos circunferencias y agregando un sistema de coordenadas, en el cual T (la Tierra) está en el punto $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$. Determine las coordenadas (x_1, y_1) del punto R y las coordenadas (x_2, y_2) del planeta P, en el tiempo t.

e) Considere ahora el modelo utilizando tres circunferencias. Determine una fórmula que permita calcular las coordenadas (x_3, y_3) del planeta P en el sistema coordenado, en cualquier tiempo $\boldsymbol{t}$.

Parte II. ¿Y si agregamos más epiciclos?

a) Considere ahora el modelo utilizando más circunferencias. A partir de lo observado en el applet proporcionado (click aquí), explica con tus propias palabras ¿cómo cambia la trayectoria del planeta conforme se agregan más y más circunferencias?

b) Utilizando el mismo applet de la pregunta anterior responde ¿cómo cambia la distancia del planeta *P* a la Tierra conforme se agregan más y más circunferencias en cada instante de tiempo? Explica con tus propias palabras.

c) Considere ahora el modelo utilizando n circunferencias. Determine una fórmula que le permita calcular las coordenadas x_n y y_n del planeta P en el sistema coordenado, en cualquier tiempo $\boldsymbol{t}$. [Sugerencia: retoma tus soluciones a las preguntas (d) y (e) de la Parte I]

d) ¿Qué relación existe entre las fórmulas obtenidas en la pregunta anterior y tu respuesta de las preguntas (a) y (b) de la Parte II? Explica.

e) Utiliza el applet proporcionado (click aquí) y responde ¿cómo es el comportamiento de las sumas parciales de las abscisas? y ¿cómo es el comportamiento de las sumas parciales de las ordenas? Explica tus respuestas. ¿Qué relación existe entre estas respuestas y las de las preguntas (b) y (d)?

f) Note que las fórmulas obtenidas corresponden a sumas parciales de series trigonométricas. Con base en el applet y tu respuesta a la pregunta anterior ¿podrías asegurar si la serie de las ordenadas converge o diverge? En caso de que converja ¿podrías identificar su valor de convergencia? Explica tus respuestas.

g) Si se cambia el rango de valores de t, para todos aquellos en los que $t \geq 0$. ¿Cuál es el valor de convergencia de la serie de las ordenadas del planeta *P*? [Sugerencia: utiliza el applet de la pregunta (e) para visualizar]

h) ¿Tiene sentido en nuestro modelo considerar valores de t negativos? ¿Cuál sería el valor de convergencia de la serie de las ordenadas del Planeta *P* en caso de considerar a $t \in \mathbb{R}$?

i) Considere ahora la serie de las ordenadas de P. Utilizando identidades trigonométricas, escríbala en la forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_k \operatorname{sen}(kt)$$

es decir, identifique los valores de a_0, a_k y b_k.

Tarea #4: El Fenómeno de Gibbs

Retomemos los modelos de movimiento de los planetas estudiados en las Tareas #2 y #3. Cómo ya vimos la ordenada del planeta *P* corresponde a la suma parcial de una serie trigonométrica y en ambas situaciones notamos como la suma parcial se acercaba a una función.

Parte I. Volvamos a la serie de la Tarea #2

a) Considere el applet utilizado en la Tareas #2 (click aquí), en el que se representan las sumas parciales de las ordenadas del planeta *P*, responda ¿cómo se comporta la sucesión de las sumas parciales alrededor de $t = 0$, $t = \pi$ y $t = 2\pi$? ¿Cómo se observa este comportamiento en la trayectoria del planeta *P*?

b) Utilice el applet proporcionado (click aquí). Elija un valor de $t \in (0, \pi)$ "lejano" de los extremos del intervalo ¿a partir de cuál suma parcial la aproximación dada por la suma difiere del valor de la función límite en menos de 0.1?

c) Utilizando el mismo applet de la pregunta anterior. Elija un valor de $t \in (0, \pi)$ "cercano" a cada uno de los extremos del intervalo ¿a partir de cuál suma parcial la aproximación dada por la suma difiere de valor de la función límite en menos de 0.1?

d) ¿Cuál es la diferencia en el comportamiento de las sumas parciales para los puntos "cercanos" a las discontinuidades y los "lejanos" de las discontinuidades?

e) ¿Es convergente la serie alrededor de $t = 0$? ¿y alrededor de $t = \pi$? Explica tus respuestas.

f) ¿Qué valor toman las sumas parciales exactamente en $t = 0$ y $t = \pi$? ¿Qué puedes decir respecto de la convergencia en estos valores? Explica tus respuestas.

Parte II. Volvamos a la serie de la Tarea #3

a) Considere el applet utilizado en la Tarea #3 (click aquí), en el que se representan las sumas parciales de una serie trigonométrica, responda ¿cómo se comportan las sumas parciales alrededor de $t = 0$ y de $t = 2\pi$?

g) Utilice el applet proporcionado (click aquí). Elija un valor de $t \in (0,2\pi)$ "lejano" de los extremos del intervalo ¿a partir de cuál suma parcial la aproximación dada por la suma difiere del valor de la función límite en menos de 0.1?

h) Utilizando el mismo applet de la pregunta anterior. Elija un valor de t "cercano" a cero ¿a partir de cuál suma parcial la aproximación dada por la suma difiere de valor de la función límite en menos de 0.1?

i) ¿Cuál es la diferencia en el comportamiento de las sumas parciales para los puntos "cercanos" a las discontinuidades y los "lejanos" de las discontinuidades?

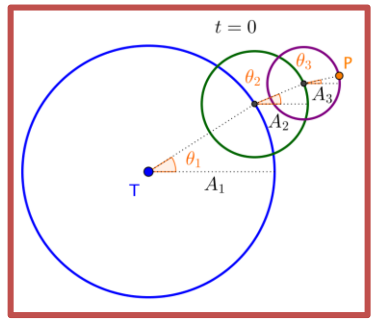
j) ¿Es convergente la serie alrededor de $t = 0$? Explica tu respuesta.

k) ¿Qué valor toman las sumas parciales exactamente en $t = 0$? ¿Qué puedes decir respecto de la convergencia en ese valor? Explica tus respuestas.

Tarea #5: El Modelo General

Llamemos a la tierra T y consideremos un cierto planeta P cuya órbita corresponde a una superposición de movimientos circulares en torno de T, el modelo se comporta en forma general de la manera siguiente:

- La primera circunferencia está centrada en el punto (A_0, A_0).
- Los radios de las circunferencias primera, segunda, tercera, … son respectivamente A_1, A_2, A_3, …
- La velocidad angular, en radianes por unidad de tiempo, de los puntos sobre las circunferencias primera, segunda tercera, . . . son respectivamente w_1, w_2, w_3, …
- Cuando el tiempo es $t = 0$, el ángulo en posición estándar del punto con respecto al centro de la circunferencia número n es θ_n.



Parte I. Generando el modelo

a) Con base en los modelos particulares estudiados en las Tareas #1 y #2, responde ¿qué condiciones deben cumplirse en el modelo general para que la trayectoria del planeta P se estabilice conforme se agreguen cada vez más circunferencias?

b) Considere el modelo utilizando n circunferencias. Determinar las coordenadas (x_n, y_n) del punto P en el tiempo t.

c) ¿Cómo se relaciona tu respuesta a la pregunta (a) con la fórmula obtenido en la pregunta anterior?

d) Note nuevamente que y_n representa la n-ésima suma parcial de una serie trigonométrica. Utiliza identidades trigonométricas para reescribir esta serie en la forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kw_0 t) + b_k \operatorname{sen}(kw_0 t)$$

Es decir, determinar los valores de a_0, w_{k}, a_k y b_k, en términos de A_0, w_0, A_k y θ_k.

e) ¿Cómo se relaciona tu respuesta a la pregunta (c) con esta nueva fórmula?

Parte II. Otra forma de interpretar w_0

Considere el movimiento del punto sobre la primera circunferencia, es decir aquella donde el punto se mueve con velocidad angular w_0 (en radianes por unidad de tiempo).

a) Determina el tiempo t que tarda el punto *P* en dar un giro completo. [Sugerencia: recuerda que $velocidad\ angular = \frac{ángulo\ en\ radianes}{tiempo}$]

b) Si llamamos *p* al tiempo que tarda el punto *P* para dar exactamente una vuelta. ¿Cuál es el valor de w_0 en términos de *p*?

c) Reescribe la fórmula que obtuviste en la pregunta (d) de la Parte I, utilizando este nuevo valor de w_0.

d) Dado que el valor *p* es el tiempo que tarda el planeta *P* en completar una vuelta alrededor de la Tierra *T*. ¿Cómo se observaría este valor en la gráfica de la función límite? Explica tu respuesta.

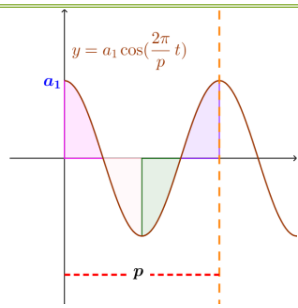
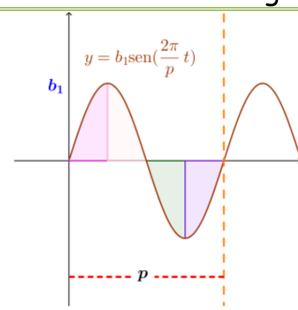
Tarea #6: El Cálculo de los Coeficientes

Considera ahora la situación inversa, es decir, se conoce la función f(t) a la cual converge la serie cuyas sumas parciales se forman con la ordenada del planeta *P* en un sistema de coordenadas. Es decir se cumple que:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p} t\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p} t\right)$$

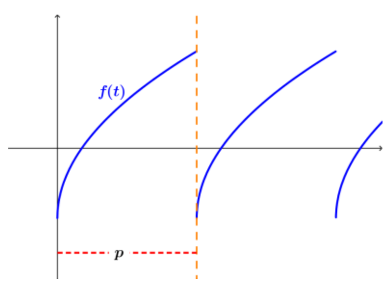
Parte I. El cálculo de a_0

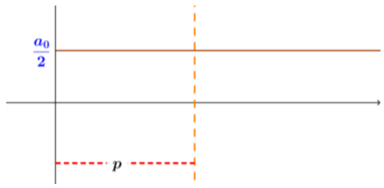
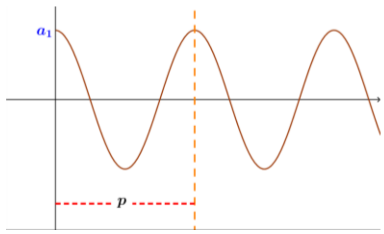
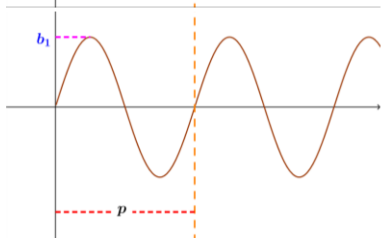
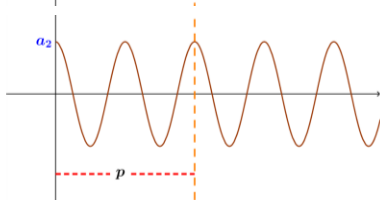
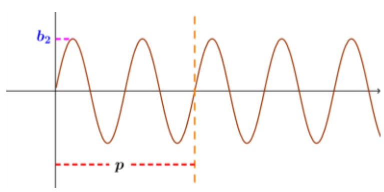
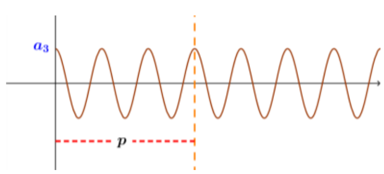
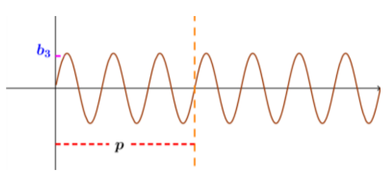
a) Considera las siguientes gráficas de las curvas $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p} t\right)$ y $y = a_1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{p} t\right)$, responde ¿cuál es la relación entre las regiones sombreadas en cada gráfica?

b) En la siguiente secuencia de figuras se muestra la función $f(t)$ y los primeros términos de la serie, ¿cuál es el valor del área bajo la curva de cada término de la serie en un intervalo de tamaño *p*?

Función $f(t)$



$y = \dfrac{a_0}{2}$		
$y = a_1 \cos\left(\dfrac{2\pi}{p} t\right)$		
$y = b_1 \operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi}{p} t\right)$		
$y = a_2 \cos\left(\dfrac{4\pi}{p} t\right)$		
$y = b_2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{4\pi}{p} t\right)$		
$y = a_3 \cos\left(\dfrac{6\pi}{p} t\right)$		
$y = b_3 \operatorname{sen}\left(\dfrac{6\pi}{p} t\right)$		
⋮	⋮	⋮

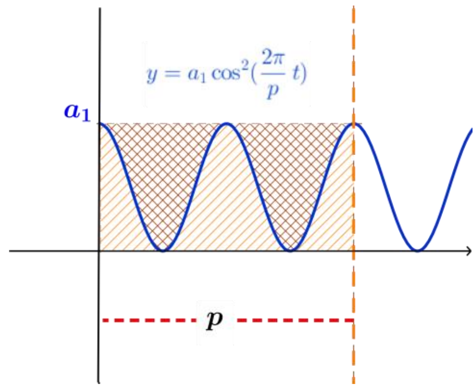
c) ¿Cómo es el área bajo la curva de la función $f(t)$ en un intervalo de tamaño *p*, con respecto a las áreas de los términos de la serie en un intervalo de tamaño *p*? Explica tu respuesta de forma geométrica.

d) ¿Cuál es la relación del área bajo la curva de la función $f(t)$ y el área bajo la curva $y = \frac{a_0}{2}$? Explica tu respuesta de forma geométrica.

e) Propón un fórmula que permita calcular el valor de a_0.

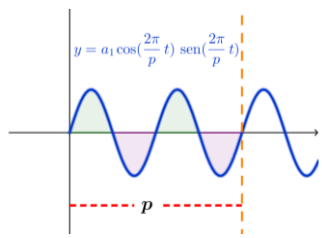
Parte II. El cálculo de a_k

a) Considera la curva $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ y el resultado de multiplicarla por $\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$. ¿Cuál es la relación entre las áreas sombreadas? ¿Cuál es el valor de área bajo la curva de $y = a_1 \cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$?

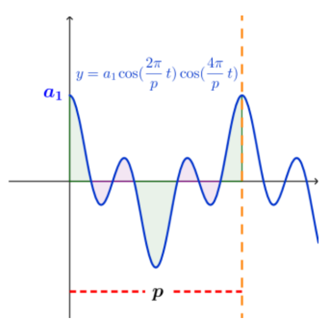


b) Ahora se presentan las gráficas resultantes al multiplicar la curva $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ por $\text{sen}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ y por $\cos\left(\frac{4\pi}{p}t\right)$ ¿Cuál es el valor del área bajo la curva en cada caso?

$$y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) \text{sen}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$$



$$y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) \cos\left(\frac{4\pi}{p}t\right)$$



c) Utilice el applet proporcionado (click aquí) y responda ¿cuál es el valor del área bajo las curvas $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ y $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, para valores de $k = 1, 2, 3, \ldots$?

d) Considere la ecuación del desarrollo de la función $f(t)$ en serie trigonométrica, es decir,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + b_1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + \cdots + a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + \cdots$$

y multiplique a ambos lados por $\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$. ¿Qué relación existe entre el área bajo la curva de $f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ y la de $y = a_1 \cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$? [Sugerencia: Utilice los resultados de las preguntas (a) de la Parte I, (a), (b) y (c) de esta misma parte].

e) Proponga una fórmula que permita calcular el valor de a_1.

f) Considere ahora el área bajo las curvas $y = a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ y $y = a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$, para valores de de $k = 1, 2, 3, \dots$ y de $m = 1, 2, 3, \dots$ Utilice el applet proporcionado (click aquí) para responder ¿cuál es el área bajo la curva cuando $k = m$? ¿y cuando $k \neq m$?

g) Utilice un razonamiento similar al utilizado en la pregunta (d) para explicar cómo se puede calcular en valor de a_k.

h) Proponga una fórmula que permita calcular el valor de a_k. ¿Qué relación encuentras entre esta fórmula y la que se propuso para calcular a_0?

Parte III. El cálculo de b_k

a) Considere ahora el área bajo las curvas $y = b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ y $y = b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \cos\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$, para valores de de $k = 1, 2, 3, \dots$ y de $m = 1, 2, 3, \dots$ Utilice el applet proporcionado (click aquí) para responder ¿cuál es el área bajo la curva cuando $k = m$? ¿y cuando $k \neq m$?

b) Utilice un razonamiento similar al utilizado en la pregunta (g) de la Parte II para explicar cómo se puede calcular el valor de b_k.

c) Propón una fórmula que permita calcular el valor de b_k.