

Tesis para optar al grado de Maestría en Ciencias Especialidad

Matemática Educativa

Integración digital a la práctica del docente de geometría

Sergio Andrés Rubio Pizzorno

Directora de tesis: Dra. Gisela Montiel Espinosa

Índice general

Índice de imágenes	7
Índice de tablas	8
1. Problemática	9
1.1. Tercera Revolución en la Humanidad	9
1.2. La tecnología digital en la educación matemática	12
1.3. GeoGebra como manifestación de la Sociedad 3.0	17
1.3.1. Manipulación dinámica	17
1.3.2. Herramientas integradoras	18
1.3.3. Organización social abierta	19
1.3.4. Ambientes híbridos	20
1.4. Construir conocimiento matemático en la era digital	22
1.4.1. Organización social propiciada por la tecnología digital	22
1.4.2. Énfasis en qué y cómo se aprende	23
1.5. Investigación basada en el diseño	24
2. Fundamentación Teórica	25
2.1. Organización social propiciada por la tecnología digital	26
2.1.1. Planteamiento inicial de la Scot	28
2.1.2. Planteamiento actual de la Scot	31
2.1.2.1. Críticas al planteamiento inicial de la Scot	31
2.1.2.2. Versión actual de los principios de la Scot	33
2.1.3. Construcción Social de la tecnología digital (<i>Social Construction Of Digital Technology: Scodt</i>)	35
2.1.3.1. Descripción de la cultura digital	35
2.1.3.2. Modelo sobre la Construcción social de la tecnología digital	44
2.1.3.3. Construcción social de GeoGebra	60
2.1.4. Inteligencia-red como morfología social de las comunidades digitales, cuando construyen conocimiento	72
2.2. Problematización de la Geometría	74
2.2.1. Naturaleza epistémica	75
2.2.1.1. Construcciones euclidianas	75
2.2.1.2. Propiedades de los objetos geométricos	83
2.2.1.3. Estatus de precisión y exactitud de los diagramas geométricos	85

2.2.2.	Naturaleza epistemológica	87
2.2.3.	Naturaleza filosófica	90
2.2.4.	Naturaleza digital - Geometría Dinámica	95
2.2.4.1.	Funcionamientos del arrastre	96
2.2.4.2.	Consideraciones epistémicas de la GD y el arrastre	96
2.2.4.3.	Jerarquización de las modalidades de uso del arrastre	97
2.2.4.4.	Diseño de tarea en GD	99
2.2.4.5.	Discernimiento de propiedades geométricas, empleando el arrastre como instrumento	100
2.2.4.6.	Arrastre como elemento esencial de la naturaleza digital de la geometría	101
2.2.5.	Trabajo geométrico con atención en el carácter dinámico de la geometría	102
2.2.5.1.	Discusión	104
2.2.5.2.	Conclusión	108
2.3.	Construcción de conocimiento geométrico en la era digital	110
2.4.	Trabajo con profesores	112
2.4.1.	Panorama de Inclusión/Integración digital	113
2.4.2.	Revisión literatura especializada sobre profesores y tecnología (digital)	117
2.4.2.1.	Working with Teachers: Context and Culture	119
2.4.2.2.	Teachers and Teaching: Theoretical Perspectives and Issues Concerning Classroom Implementation	124
2.4.2.3.	Teacher Education Courses in Mathematics and Techno- logy: Analyzing Views and Options	127
2.4.2.4.	Aportes de la investigación sobre integración digital en la práctica del docente de matemáticas	128
2.4.3.	Confrontación de significados matemáticos	131
2.4.3.1.	Resignificación de la Matemática Escolar	131
2.4.3.2.	Saberes docentes y Voces sociales	133
2.5.	Integración Digital en la Práctica Docente en Geometría	135
3.	Diseño del SIDPDM	139
3.1.	Planeación general del Seminario	142
3.1.1.	Etapa 1: Introducción	143
3.1.1.1.	Objetivo Etapa 1	143
3.1.1.2.	Tareas Etapa 1	144
3.1.2.	Etapa 2: Apresto técnico	144
3.1.2.1.	Objetivo Etapa 2	145
3.1.2.2.	Tareas Etapa 2	146
3.1.3.	Etapa 3: Confrontación de significados	146
3.1.3.1.	Objetivo Etapa 3	146
3.1.3.2.	Tareas Etapa 3	147
3.1.4.	Etapa 4: Elaboración de diseños	147
3.1.4.1.	Objetivo Etapa 4	148

3.1.4.2.	Tareas Etapa 4	148
3.1.5.	Etapa 5: Retroalimentación colaborativa	149
3.1.5.1.	Objetivo Etapa 5	149
3.1.5.2.	Tareas Etapa 5	149
3.2.	Introducción	150
3.2.1.	Planeación S01	150
3.2.1.1.	Objetivo S01	150
3.2.1.2.	Tareas S01	150
3.2.1.3.	Trayectoria S01	151
3.3.	Apresto	153
3.3.1.	Planeación S02	153
3.3.1.1.	Objetivo S02	153
3.3.1.2.	Tareas S02	153
3.3.1.3.	Trayectoria S02	153
3.3.2.	Planeación S03	157
3.3.2.1.	Objetivo S03	157
3.3.2.2.	Tareas S03	157
3.3.2.3.	Trayectoria S03	157
3.4.	Confrontación	162
3.4.1.	Planeación S04	162
3.4.1.1.	Objetivo S04	162
3.4.1.2.	Tareas S04	162
3.4.1.3.	Trayectoria S04	162
3.4.2.	Planeación S05	166
3.4.2.1.	Objetivo S05	166
3.4.2.2.	Tareas S05	166
3.4.2.3.	Trayectoria S05	166
3.5.	Elaboración del diseño	169
3.5.1.	Planeación S06	169
3.5.1.1.	Objetivo S06	171
3.5.1.2.	Tareas S06	171
3.5.1.3.	Trayectoria S06	171
3.5.2.	Planeación S07	173
3.5.2.1.	Objetivo S07	173
3.5.2.2.	Tareas S07	173
3.5.2.3.	Trayectoria S07	173
3.5.3.	Planeación S08	177
3.5.3.1.	Objetivo S08	177
3.5.3.2.	Tareas S08	177
3.5.3.3.	Trayectoria S08	178
3.5.4.	Planeación S09	181
3.5.4.1.	Objetivo S09	181
3.5.4.2.	Tareas S09	181
3.5.4.3.	Trayectoria S09	182

3.5.5.	Planeación S10	185
3.5.5.1.	Objetivo S10	185
3.5.5.2.	Tareas S10	185
3.5.5.3.	Trayectoria S10	186
3.5.6.	Planeación S11	188
3.5.6.1.	Objetivo S11	188
3.5.6.2.	Tareas S11	188
3.5.6.3.	Trayectoria S11	188
3.5.7.	Planeación S12	190
3.5.7.1.	Objetivo S12	190
3.5.7.2.	Tareas S12	190
3.5.7.3.	Trayectoria S12	190
3.6.	Retroalimentación colaborativa	192
3.6.1.	Planeación S13	192
3.6.1.1.	Objetivo S13	192
3.6.1.2.	Tareas S13	192
3.6.1.3.	Trayectoria S13	192
3.6.2.	Planeación S14	194
3.6.2.1.	Objetivo S14	194
3.6.2.2.	Tareas S14	194
3.6.2.3.	Trayectoria S14	194
4.	Selección de datos	196
4.1.	Estructura de la descripción	198
4.2.	Introducción	199
4.2.1.	Descripción S01	199
4.3.	Apresto	202
4.3.1.	Descripción S02	202
4.3.2.	Descripción S03	206
4.4.	Confrontación	209
4.4.1.	Descripción S04	209
4.4.2.	Descripción S05	212
4.5.	Elaboración del diseño	214
4.5.1.	Descripción S06	214
4.5.2.	Descripción S07	217
4.5.3.	Descripción S08	220
4.5.4.	Descripción S09	225
4.5.5.	Descripción S10	227
4.5.6.	Descripción S11	232
4.5.7.	Descripción S12	236
4.6.	Retroalimentación colaborativa	240
4.6.1.	Descripción S13	240

5. Análisis de Datos	247
5.1. Manifestación de los componentes en cada sesión	248
5.1.1. Aspectos de organización social	248
5.1.2. Aspectos técnicos o de la cultura digital	255
5.1.3. Aspectos didácticos o relacionados con el saber geométrico	260
5.1.4. Aspectos de los saberes docentes	266
5.2. Manifestación de los componentes en cada etapa	277
5.2.1. Aspectos de organización social	277
5.2.2. Aspectos técnicos o de la cultura digital	281
5.2.3. Aspectos didácticos o relacionados con el saber geométrico	283
5.2.4. Aspectos de los saberes docentes	287
5.3. Manifestación de los componentes en el Seminario	294
5.3.1. Aspectos de organización social	294
5.3.2. Aspectos técnicos o de la cultura digital	296
5.3.3. Aspectos didácticos o relacionados con el saber geométrico	298
5.3.4. Aspectos de los saberes docentes	303
5.3.5. Integración digital en el Seminario	305
6. Conclusiones	306
Índice analítico	310
Bibliografía	310

Índice de figuras

1.1. Cambios provocados por la Tercera Revolución de la Humanidad.	12
1.2. Actividad sobre visualización de derivadas obtenida del sitio web de Khan Academy en bit.ly/2BBJNMw	15
1.3. Diferentes vistas de GeoGebra.	19
2.1. Constitución grupos sociales relevantes.	51
2.2. Propósito comunitario.	52
2.3. Constitución de las comunidades digitales.	53
2.4. Proceso elemental de construcción de tecnología digital.	54
2.5. Proceso de estabilización parcial y progresiva de la tecnología digital.	55
2.6. Construcción de diferentes modelos de tecnología digital.	55
2.7. Ruta de desarrollo de las comunidades digitales.	56
2.8. Estructuras sociales preeminentes en la era predigital (a la izquierda) y en la era digital (a la derecha).	56
2.9. Inteligencia-red.	58
2.10. Temas del foro GeoGebra ordenado por los más recientes.	64
2.11. Temas del foro GeoGebra ordenado por los más votados.	65
2.12. Eventos de la wiki de desarrolladores de GeoGebra.	66
2.13. Wiki de desarrolladores de GeoGebra.	67
2.14. Wiki de desarrolladores de GeoGebra.	67
2.15. Versión estable 6.0.367.0 (arriba) y 5.0.369.0 (abajo).	69
2.16. Modelo de construcción social de GeoGebra	70
2.17. Diagrama del segmento trazado entre los puntos A y B	78
2.18. Diagrama del círculo trazado con centro en A y radio AB	79
2.19. Diagrama del círculo trazado con centro en B y radio BA	79
2.20. Segmentos trazado entre C y A , y C y B	80
2.21. Prueba de la congruencia entre los segmentos AC y AB	80
2.22. Prueba de la congruencia entre los segmentos BC y AB	81
2.23. Prueba de la congruencia entre los segmentos AC y CB	81
2.24. Resultado de la sección de Demostración.	82
2.25. Resultado de la sección de Proposición.	82
2.26. Propiedades teóricas y gráfico-espaciales de un objeto geométrico.	84
2.27. Jerarquización de las geometrías (Meserve, 1983, p. vi).	89
2.28. Modalidades de arrastre asociado a las tipologías cognitivas.	99
2.29. Esquema general del trabajo geométrico.	105

2.30. Rol de las prácticas geométricas en el trabajo geométrico.	106
2.31. Detalle de las prácticas geométricas.	107
2.32. Trabajo geométrico, considerando el carácter dinámico de la geometría. . .	108
3.1. Marco para la elaboración de los diseños.	147
3.2. Botón +Nuevo en perfil personal GeoGebra.	155
3.3. Áreas principales de un Libro GeoGebra.	156
3.4. Proceso de negociación para la configuración del objetivo de la THA	178
3.5. Proceso de negociación para la configuración del objetivo de la THA	182
3.6. Proceso de negociación para la elaboración de materiales.	186
3.7. Productos elaborados en la Etapa de Diseño.	190
5.1. Uso del modelo de Trabajo geométrico en la tarea 1.	299
5.2. Uso del modelo de Trabajo geométrico en la tarea 2.	299
5.3. Uso del modelo de Trabajo geométrico en la tarea 3.	300
5.4. Uso del modelo de Trabajo geométrico en la tarea 4.	300
5.5. Uso del modelo de Trabajo geométrico en la tarea 5.	301

Índice de tablas

1.1. Paradigmas que han normado relación tecnología-educación matemática. . .	16
2.1. Tipología de redes y nodos asociados.	39
2.2. Evolución en el servicio que entregan los grupos de concentración del poder a los consumidores.	45
2.3. Problemas presentados por los servicios entregados en la era digital, que subyacen a una mentalidad predigital.	46
2.4. Tecnologías digitales oficiales y no oficiales.	47
3.1. Grupos sociales relevantes representados en el Seminario.	140
3.2. Actividades y Recursos de Moodle.	154
3.3. Planeacion general del Seminario.	158
3.4. Estrategia de comunicación de resultados de investigación	170
3.5. Parejas de trabajo para la elaboración de materiales.	187
4.1. Resumen de códigos de los aspectos a identificar en los datos.	197

Capítulo 1

Problemática

*La Tecnología ha penetrado e impactado a la Educación.*¹

La relación entre educación y tecnología digital (TD) comenzó a mediados del siglo XX (Freiman, 2014) y, a partir de ese momento esta tecnología ha penetrado e impactado en la educación a distintos niveles, tanto en la sala de clases, las escuelas, el sistemas educativos, las políticas gubernamentales e, incluso, los acuerdos de organizaciones internacionales preocupadas por la educación. Vemos como en la actualidad las aulas están equipadas con aparatos electrónicos como proyectores, pizarras digitales interactivas y computadores; las escuelas cuentan con conexión a Internet y laboratorios de computación; instituciones educativas brindan cursos de formación a distancia por medio de aulas virtuales; los gobiernos promulgan leyes y planes para entregar un computador o tableta por estudiante. Esta penetración condensa y hace converger las declaraciones de organismos internacionales preocupados de la educación, refiriéndose, por ejemplo, a la importancia de las competencias digitales como parte de las ocho competencias fundamentales de los ciudadanos del siglo XXI, por parte de la Agenda de Lisboa (Cobo y Moravec, 2011) o, la tecnología como un dominio de aprendizaje del siglo XXI, por la Unesco (Learning Metrics Task Force - Unesco, 2013).

1.1. Tercera Revolución en la Humanidad

Esta penetración digital no es exclusiva de la educación, otros ámbitos de la humanidad, como la sociedad, el trabajo y la vida privada, se han visto modificadas por la incorporación tecnológica a sus prácticas. Estos cambios se fueron gestando durante la segunda mitad del siglo XX y, detonaron la aparición de las tecnologías digitales, lo cual dio origen a lo que Serres (2013) denomina como una de las tres revoluciones principales en la historia de la humanidad, luego de la creación de la escritura y la invención de la imprenta. Esta Tercera Revolución de la Humanidad (3RH) cambió, entre otros, la manera en que se articula la sociedad y cómo se entiende la educación.

¹Algunos aspectos de este capítulo fueron reportados en Rubio-Pizzorno, S. y Montiel, G. (2017). Aprendizaje invisible en educación matemática. En L. A. Serna (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 30, (pp. 254 - 262). Ciudad de México, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. ISSN: 2448-6469

Cobo y Moravec (2011) caracterizan el cambio social a raíz de la 3RH, describiendo un cambio de paradigma social, desde el paso de la sociedad 1.0 (análoga, jerárquica, mecánica y determinista) a la sociedad 3.0 (digital, intencionada y autoorganizada, sinérgica y diseñada).

La *sociedad 1.0* refleja las normas y prácticas que prevalecieron desde la sociedad preindustrial hasta la sociedad industrial. Por su parte, la *sociedad 2.0* hace referencia a las enormes transformaciones sociales que están teniendo lugar en la sociedad actual y que encuentran su origen, principalmente, en el cambio tecnológico. Por último, la *sociedad 3.0* alude a la sociedad de nuestro futuro más inmediato, para la que se pronostican enormes transformaciones producto del cambio tecnológico acelerado. (Cobo y Moravec, 2011, p. 48)

El paradigma de la sociedad 1.0 prevaleció desde el siglo XVII a finales del XX. En él, la actividad económica pasó de generarse a través de empresas familiares a una economía industrial, donde el orden laboral era predominantemente jerárquico y la educación tenía el propósito de formar a los trabajadores, para que estos fueran capaces de interpretar la información.

Por su parte, la sociedad 2.0 “se asocia con la aparición de la sociedad del conocimiento cuya materialización tiene lugar en el siglo XX” (Cobo y Moravec, 2011, p. 50). En este paradigma, ya no sólo basta con interpretar datos y generar información, sino que existe la necesidad de interpretarla para producir conocimiento. El orden social y laboral tiende a ser heterárquico, entendido como “una organización horizontal y bidireccional, generando así una ausencia de poder de unos sobre otros aunque se haga presente la influencia entre pares” (Errasti, 2009). En cuanto al efecto de la 3RH en la educación, Freiman (2014) identifica que en su mayoría, los organismos oficiales se preocuparon de incorporar la tecnología teniendo en cuenta sus necesidades institucionales, por sobre atender a las necesidades educativas de las personas. Es decir, atender las directrices establecidas por políticas de los países, que fomentan el uso de tecnología en las escuelas, pero sin considerar cómo llevar a cabo magna tarea. Por ejemplo, las instituciones oficiales han generado entornos de aprendizaje virtual, cuya estructura solo está pensada para abarcar los objetivos curriculares, como la organización de información a través de cursos, calendarización de tareas y toma de exámenes, generalmente descuidando las necesidades educativas reales de sus estudiantes.

La descripción realizada sobre los efectos de la 3RH en el paradigma social dominante y el desempeño de la educación, se enmarca en un nivel de desarrollo oficial, entendiendo esto como las instituciones, centros de enseñanzas u otras instancias, que ejercen cierta autoridad sobre los miembros o conjunto de la sociedad, la nación, el Estado o entidades territoriales.

Sin embargo, gracias a la proliferación y expansión de Internet, herramienta insigne de la sociedad 2.0 que emerge como instancia de democratización social y apertura a la libre disponibilidad de la información, también sucedieron cambios sociales y educativos a un nivel *no oficial*, motivados por la posibilidad que este ámbito le brinda a las personas de incidir en cambios locales, personales y colectivos, con efectos y resultados instantáneos o

a corto plazo.

En términos sociales, a partir de la 3RH, el avance tecnológico y la omnipresencia de Internet, la sociedad y la ciudadanía también se comenzaron a vivir de manera digital. Emergieron entornos de interacción y de construcción social, plataformas para compartir información personal y comunitaria (YouTube, Flickr, Wikipedia, etc.), las cuales permitieron no sólo compartir ideas, sino también generar nuevas interpretaciones de las ya existentes. Cobo y Moravec (2011) denominan a este cambio social a nivel no oficial como el paradigma cultural del *corta-pega*, aludiendo a “la característica de remezclar y reutilizar información ya existente, para dar lugar a significados tan exclusivos y personales como los de las obras originales en las que se basaron” (p. 51). Los blogs son un claro ejemplo de esta cultura, ya que son un espacio en el cual los autores comparten sus ideas personales con la comunidad global, valiéndose de la información compartida y disponible en la red, expresada en distintos y diversos formatos, tales como audio, video, texto, imágenes. Actualmente, en el contexto de la educación, existen modalidades de aprendizaje mediadas por la tecnología digital que nacen de manera independiente al ámbito oficial y a lo que este determina que se debe aprender. Estas modalidades, como videos tutoriales en YouTube², plataformas de aprendizaje personalizado como Khan Academy³, comunidades mundiales alrededor de *software* libre como GeoGebra⁴, aplicaciones y sitios web para aprender idiomas como Duolingo⁵, entre muchos otros, nace en la búsqueda por satisfacer las necesidades colectivas y personales de los miembros de la comunidad.

²Sitio web de YouTube: [YouTube.com](https://www.youtube.com)

³Sitio web de Khan Academy: [KhanAcademy.org](https://www.khanacademy.org)

⁴Sitio web de GeoGebra: [GeoGebra.org](https://www.geogebra.org)

⁵Sitio web de Duolingo: [Duolingo.com](https://www.duolingo.com)



Imagen 1.1: Cambios provocados por la Tercera Revolución de la Humanidad.

A finales del siglo XX, la humanidad se vio envuelta en una revolución solo comparable con grandes hitos de la historia, que permitieron avanzar al siguiente nivel en el proceso de evolución del conocimiento humano.

Esta revolución afectó de manera íntegra a la humanidad y, en consecuencia, a la sociedad como una dimensión de ella, así como a la educación como manifestación social.

La Figura 1.1 muestra la focalización del fenómeno, comenzando desde los cambios generados en la humanidad y transitando hacia los efectos que provocó en la sociedad y en la educación, para situar nuestra investigación en los efectos de la 3RH en la educación matemática.

Por lo tanto, es de interés en este trabajo, dirigir el análisis realizado hacia los efectos de esta revolución en la educación matemática, para lo cual a continuación se realiza una descripción documentada de la relación entre tecnología digital y educación matemática.

1.2. La tecnología digital en la educación matemática

La tecnología digital ha penetrado e impactado a la educación y, por lo tanto, a la educación matemática.

La relación entre la educación matemática y tecnología digital ha vivido un proceso evolutivo no lineal, a partir de 1950, cuando los computadores penetraron por primera vez en la educación (Freiman, 2014), hasta nuestros días, donde los dispositivos portátiles (teléfonos inteligentes o tabletas), tecnología educativa (pizarras interactivas digitales,

software educativo, entre otros) e Internet son herramientas habituales, tanto en nuestra vida cotidiana, como en el trabajo y en la escuela.

Si bien la la relación entre educación matemática y tecnología digital se ha dado a partir de mediados del siglo XX, la relación entre educación matemática y tecnología tiene una historia mucho más longeva. La tecnología, entendiendo de manera amplia se refiere a la “rama del conocimiento que se ocupa de diseñar artefactos y procesos, así como de la normalización y el diseño de la acción humana” (Bunge, 2007, p. 206). Este amplio sentido permite pensar, además de las herramientas digitales, en artefactos físicos como por ejemplo tablillas de arcilla, huesos tallados, regla y compás. Al respecto, Roberts y otros (2013) afirman que la tecnología y la matemática han estado relacionadas durante gran parte de la historia, a veces en una simbiosis sinérgica, donde la tecnología nace para el desarrollo y la realización concreta de la matemática y, en otras donde la tecnología realiza su aporte a la matemática, viniendo desde otras áreas, como el comercio o la ciencia. Al respecto, en este escrito se adopta la postura de Freiman (2014), la cual permite referirnos a la tecnología en términos más contemporáneos, denotando por este término a las *nuevas tecnologías, las más prominentes* y las *más recientes y modernas herramientas*, concepción que alberga tanto a las herramientas análogas, mecánicas o digitales. Sin embargo, luego de la 3RH, el progreso tecnológico esta cada vez más ligado al desarrollo en el ámbito digital, por lo cual se emplea el término *tecnologías digitales* para referir a dispositivos físicos o virtuales, con una clara conexión al desarrollo digital, vale decir: hardware y *software*. Finalmente, el concepto de TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación) se refiere a *software* genéricos, tales como procesadores de texto, hojas de cálculo, herramientas de presentación y comunicación (como gestores de presentaciones y el correo electrónico).

Por lo tanto en esta investigación nos centramos en las tecnologías digitales, en tanto impacto o presencia en la educación matemática.

Nutriendo el análisis de la relación tecnología-educación matemática con la concepción de tecnología recién descrito, se tiene una perspectiva más atingente al proceso evolutivo, que entrega la posibilidad de estudiarlo de manera más fina. La relación entre tecnología digital y educación matemática se remonta a partir de 1950 y sigue hasta nuestros días, es decir, alrededor de 65 años, durante los cuales la 3RH es el hito que provoca un cambio importante en esta relación, pasando de un paradigma *estático* a uno *dinámico*.

En el paradigma estático, que norma la interacción entre la tecnología digital y educación matemática desde la mitad del siglo XX hasta la 3RH, se llevó a cabo la primera incursión del uso de computadores en la educación, reflejo de la tendencia a adaptar tecnologías científicas e industriales al contexto educativo.

No obstante, existían herramientas tecnológicas creadas con propósito educativo en general y, para estudiar matemáticas en particular, tales como las herramientas de almacenamiento (libros), herramientas para la visualización (pizarras), para la demostración (compás) y para el cálculo (ábaco, regla de cálculo y calculadora) (Roberts y otros, 2013), las cuales son características y representativas de la Educación Matemática de la época,

por sobre las escasas herramientas digitales existentes. En su conjunto, tales herramientas permitían un trabajo y tratamiento casi exclusivamente concreto de los objetos matemáticos en ambientes materiales. Esto implica una manipulación con características estáticas de tales objetos (Moreno-Armella, L., Hegedus, S. y Kaput, J., 2008).

En las últimas décadas de este paradigma, comenzaron a aparecer programas computacionales con intencionalidad didáctica, basados en ideas constructivistas y con un campo de manipulación limitado a objetos matemáticos específicos (Freiman, 2014). El desarrollo de estos *software* estaban a cargo de pequeños grupos de trabajos cerrados, propio de los *software* privativos, y su uso estaba restringido a quienes conocieran el producto y pudieran pagar su licencia de uso. Ambas situaciones son muestra de las relaciones sociales generadas alrededor del *software* privativo, típicas del paradigma dominante. En síntesis, el paradigma de relación estático tiene como características el trabajo en *ambientes materiales*, la manipulación *estática* de los objetos matemáticos, el uso de herramientas tecnológicas *monotemáticas* y trabajo en *grupos cerrados* alrededor del *software* privativo.

El paradigma dinámico que describe la relación entre la tecnología y la educación matemática, toma protagonismo a partir de la 3RH, donde las tecnologías digitales aparecen para cambiar de manera radical todo el panorama. A partir de este hito, el uso de tecnología en la educación se masificó a tal extremo que políticas públicas de ciertos países, entregaron un computador o una tableta a cada estudiante de una determinada región; así como también, se comienza a generar tecnologías educativas cuyo propósito es ser usadas en la escuela o en ambientes formativos.

Las herramientas digitales, además de poseer características propias del paradigma dinámico, del cual son nativas, también cuentan con todas las características de las herramientas del paradigma estático, lo que amplía y fortalece sus potencialidades. En conjunto, tales características propician el trabajo en ambientes híbridos, a saber, ambientes materiales, propios del paradigma estático, y ambientes digitales o virtuales, inherentes al paradigma vigente. Estas herramientas permiten una manipulación dinámica de objetos matemáticos (Moreno-Armella y otros, 2008), lo cual supone una mayor interacción entre estudiantes y objetos matemáticos.

En respuesta a que las instituciones oficiales no quisieron suplir las necesidades educativas de las personas, las comunidades comienzan a utilizar Internet como la herramienta que les permite atender estas necesidades educativas que hasta el momento han sido descuidadas. El uso de Internet con este propósito, tuvo implicaciones en el tipo de *software* educativos que se comienzan a desarrollar, los cuales comenzaron a emplear múltiples representaciones de un mismo objeto, con la opción de trabajar de manera simultánea con todas ellas. También, hubo cambios en la manera de articular la información, valiéndose de pequeñas “piezas que combinan el uso discreto, pero complementario, de herramientas y servicios web -tales como blogs, wikis y otras redes sociales- para apoyar la creación de comunidades de aprendizaje *ad hoc*” (Freiman, 2014, p. 626). Ambas implicaciones tienen el propósito de integrar distintas representaciones o formatos para enriquecer la ilustración

y estudio de los objetos o procesos a analizar.

Este es el caso de la plataforma de aprendizaje personal Khan Academy, que encarna las características descritas en esta sección, para el caso particular de estudiar matemáticas⁶. En esta, las personas configuran su propia ruta de aprendizaje a partir de declarar sus necesidades e inquietudes. Sumado a esto, las lecciones están diseñadas usando distintos formatos digitales, integrados en una actividad con intencionalidad didáctica. En la Figura 1.2 se observa a la izquierda la ruta de actividades del tema a estudiar, en el centro la pregunta enriquecida con imágenes y animaciones, a la derecha el botón *Me gustaría una pista* el cual muestra indicaciones sucesivas que permiten resolver el problema y, por último la posibilidad de ver un video en el que se tratan los contenidos puesto en juego en la actividad.

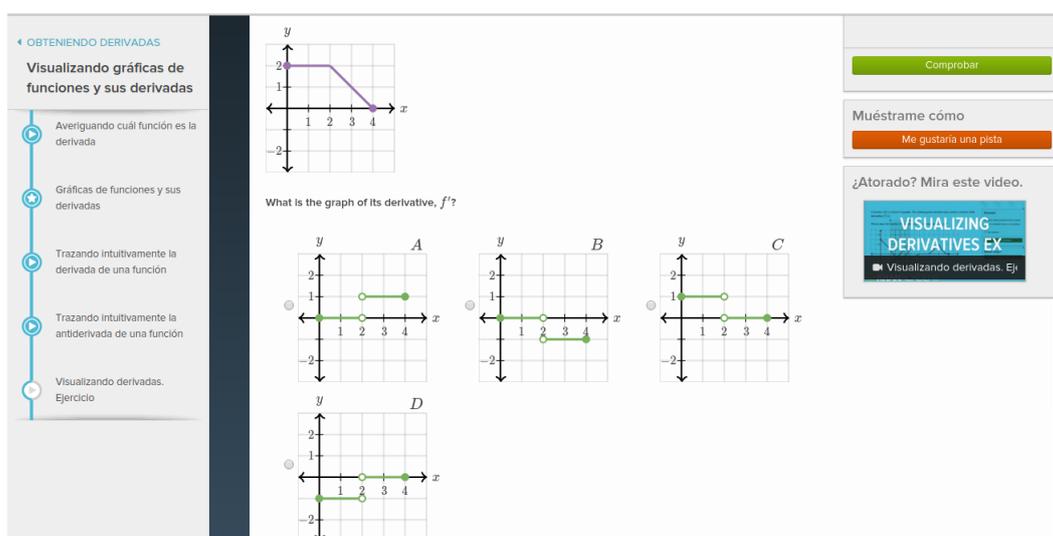


Imagen 1.2: Actividad sobre visualización de derivadas obtenida del sitio web de Khan Academy en bit.ly/2BBJNMw

Además de estas implicaciones por el uso de Internet, se añade la posibilidad de construir y organizar comunidades sin fronteras (ya que Internet las difumina) preocupadas tanto de desarrollar ambientes de aprendizajes, así como de utilizarlos para estudiar y atender sus necesidades educativas. Otra característica importante es la posibilidad y deseo de compartir de manera libre, donde cualquiera que pueda aportar, tiene la oportunidad de hacerlo. En este sentido se habla de comunidades abiertas y de alcance global.

Por lo tanto, el paradigma dinámico se diferencia del estático, al revolucionar la manera de entender el mundo educativo, fomentando el trabajo en *ambientes híbridos*, manipulando objetos de manera *dinámica*, generando y organizando el conocimiento de forma *integradora* y cimentando comunidades *abiertas*, con alcance global y cuyo propósito es generar y

⁶Desde su creación en el 2006, Khan Academy estaba orientada exclusivamente al trabajo con las matemáticas. Sin embargo, con el paso de los años y el crecimiento de la comunidad, se fueron añadiendo diversas temáticas de interés para los usuarios, como ciencias, artes y humanidades, economía y finanzas, y computación. Para más información sobre esta organización sin fines de lucro visitar el sitio web khanacademy.org

compartir conocimiento.

Por lo tanto, la relación tecnología-educación matemática pasó de darse en ambientes materiales, ser estática, monotemática y cerrada, a desarrollarse en ambientes híbridos, ser dinámica, integradora y abiertas (Freiman, 2014; Moreno-Armella y otros, 2008; Roberts y otros, 2013), como sintetiza la Tabla 1.1.

	Paradigma estático <i>Antes de la 3RH</i>	Paradigma dinámico <i>A partir de la 3RH</i>
Ambientes	Materiales	Híbridos
Manipulación de objetos	Estática	Dinámica
Herramientas	Monotemáticas	Integradoras
Organización social	Grupos cerrados	Comunidades abiertas

Tabla 1.1: Paradigmas que han normado relación tecnología-educación matemática.

1.3. GeoGebra como manifestación de la Sociedad 3.0

Este trabajo reconoce como uno de sus principios de investigación, que debido al impacto global que ha provocado la aparición de la tecnología digital en el panorama educativo, los distintos campos disciplinares comparten de manera general algunas descripciones y caracterizaciones. Sin embargo, cada una de ellas tiene sus propias y privativas características, lo que obliga a considerar las particularidades de cada una al momento de investigar.

Por lo tanto es posible declarar que, de manera general, aprender en ambientes materiales es diferente de aprender en ambientes híbridos. Más aún, cuando se aprende en un ambiente híbrido, aprender matemática es distinto de aprender, por ejemplo, lengua o historia. Reconocer este principio permite enfocar las investigaciones a su campo disciplinar, que en el presente caso es la Matemática Educativa, disciplina que “se ocupa de los fenómenos didácticos ligados al saber matemático” (Cantoral y Farfán, 2003). En este sentido, se hace necesario dar luces del paradigma dinámico en la Matemática Educativa.

Para mostrar estas evidencias, se indaga en la herramienta digital GeoGebra, de gran presencia en las prácticas desarrolladas por profesores de matemáticas en la actualidad. Para realizar este estudio, nos valemos de los descriptores empleados para caracterizar los paradigmas de la relación tecnología-educación matemática: manipulación dinámica, herramientas integradoras, organización social en comunidades abiertas y ambientes híbridos.

Se escoge estudiar la herramienta GeoGebra puesto que representa las características de las tecnologías del paradigma dinámico: favorece el trabajo con ambientes híbridos, permite una manipulación dinámica de los objetos matemáticos, todas sus áreas de trabajo (vistas) están integradas para desarrollar un trabajo interrelacionado (al crear un objeto en una vista, se crea su representación en todas las demás vistas de manera automática), y se construye al alero de una comunidad abierta.

En términos generales, GeoGebra es un *software* educativo cuyo propósito inicial fue combinar en una sola interfaz gráfica, las bondades de un procesador geométrico y de un sistema de cálculo algebraico simbólico (CAS), de ahí su nombre: GEOMETRÍA y álGEBRA.

1.3.1. Manipulación dinámica

Una de las características emblemáticas de GeoGebra es la capacidad de dinamizar el tratamiento de los objetos matemáticos involucrados en las construcciones y actividades realizadas en el *software*. Tan relevante es esta característica, que desde los inicios de la geometría dinámica (GD) se ha teorizado acerca de la “transformación continua en tiempo real, a menudo llamada *arrastre*” (Goldenberg y Cuoco, 1998, p. 351), la cual permite diferenciar a los *software* de geometría dinámica de otros *software* de geometría, como Logo.

El arrastre permite manipular los objetos matemáticos abstractos de una forma en la cual, sólo con herramientas mecánicas o análogas, era imposible de realizar. Del Castillo y

Montiel (2009) mencionan respecto de los ambientes informáticos que “permiten al usuario operar de una forma directa los objetos matemáticos y sus relaciones, concretando de alguna manera los conceptos matemáticos abstractos” (p. 462).

En cuanto a los objetos matemáticos, es posible darse cuenta de su inmaterialidad, es decir, la incapacidad humana de poder acceder a ellos de manera física o perceptible. No podemos tomar una función entre nuestras manos, ni mirar a lo lejos cómo camina el dos. De ahí la importancia, en este campo disciplinar, de la representación de los objetos matemáticos para poder interactuar con ellos.

En consecuencia, la representación dinámica de los objetos, en este caso la cualidad de arrastre en el *software* GeoGebra, emerge como un gran avance a la hora de interactuar con los abstractos objetos matemáticos.

1.3.2. Herramientas integradoras

Debido al propósito inicial de GeoGebra, se concibió como un *software* que permitía mostrar distintas representaciones de los objeto matemáticos de manera simultánea. La relevancia de esta multirepresentación es que “contribuyen al entendimiento de una noción específica, facilitada por el uso de *software* que ofrecen una conexión de diferentes aplicaciones” (Aldon, 2015, p. 367). En la actualidad, GeoGebra cuenta con un variado número *vistas* (ver la imagen 1.3), donde cada una de ellas se asocia a una representación de los objetos matemáticos: vista algebraica, vista gráfica (x2), cálculo simbólico (CAS), hoja de cálculo, vista gráfica 3D, entre otros.

La puesta en funcionamiento de estas multirepresentaciones se produce gracias a la integración de todas las vistas de GeoGebra, por ejemplo, al crear un punto en la vista gráfica, se obtendrá su representación visual, además de sus coordenadas cartesianas en la vista algebraica, como se muestra en la imagen 1.3. Pero esta característica por sí sola, no asegura que el trabajo realizado en el ambiente propicie un mejor entendimiento del objeto matemático en cuestión, ya que si bien se puede asegurar la multirepresentación simultánea de un objeto, esto no es garantía de su integración para generar una actividad con intención didáctica.

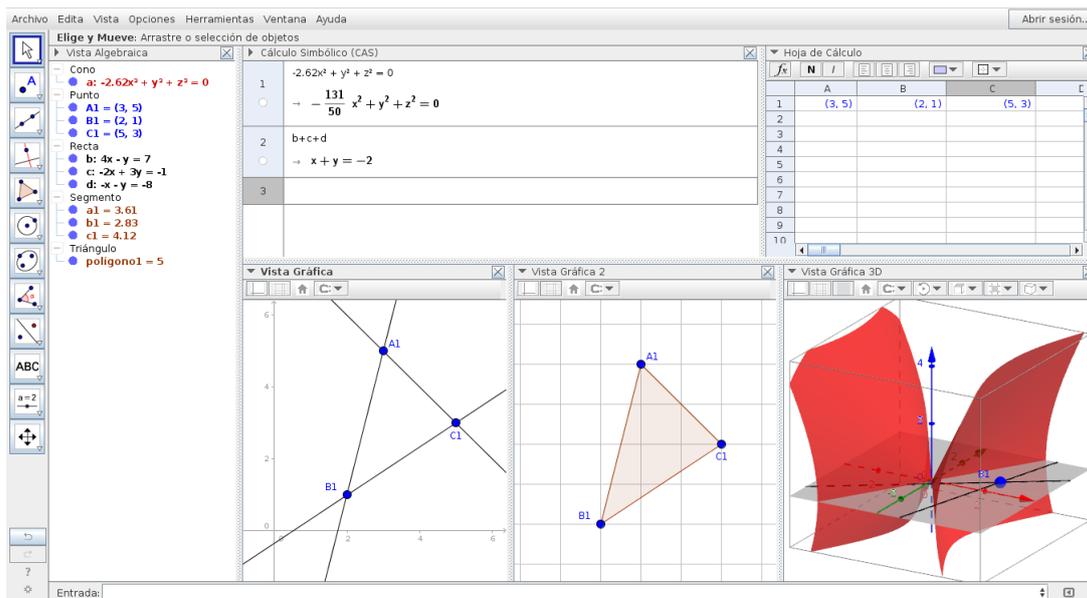


Imagen 1.3: Diferentes vistas de GeoGebra.

La multirepresentación habla del potencial productivo del *software* (eficiencia, costo y campo de validez), llamado *valor pragmático* de la herramienta. Pero no se refiere a lo que se está estudiando con el *software*, ni cómo este ambiente ayuda al entendimiento del objeto de estudio. Cuando el *software* afecta el cómo se comprende el objeto matemático y genera preguntas sobre este, se habla de su *valor epistémico* (Artigue, 2002). Por lo tanto, la multirepresentación, como valor pragmático, corresponde sólo a una condición necesaria para generar una herramienta integradora. Se requiere también integrar tales representaciones con una intencionalidad didáctica, que de cuenta del valor epistémico de la herramienta.

1.3.3. Organización social abierta

Esta característica habla de la manera en que se construye y articula una herramienta en el Paradigma dinámico. Los grupos que desarrollan el *software* ya no son pequeñas y cerradas, por el contrario, se constituyen en comunidades con alcance global alrededor de la herramienta digital. Pero no sólo en el desarrollo del programa, sino también en la posibilidad de compartir el conocimiento de manera libre y sin fronteras. Esta organización social alrededor del *software* es natural cuando se habla de Software Libre, un concepto desarrollado por Richard Stallman (1953) en la década de 1980, como respuesta a la hegemonía de los sistemas operativos privativos y, la imposibilidad de hallar una alternativa que no estuviese vinculada al monopolio comercial de tales *software*. La propuesta de Stallman, que se sigue desarrollando de manera fructífera en estos días a través del Proyecto GNU⁷ y la Free Software Foundation⁸, propone que un programa es

⁷Página web del Proyecto GNU en gnu.org

⁸Sitio web de la Free Software Foundation: fsf.org

un *software* libre, si sus *usuarios* tienen las cuatro libertades esenciales⁹:

Libertad 0 : La libertad de ejecutar el programa como se desea, con cualquier propósito.

Libertad 1 : La libertad de estudiar cómo funciona el programa, y cambiarlo para que haga lo que usted quiera. El acceso al código fuente es una condición necesaria para ello.

Libertad 2 : La libertad de redistribuir copias para ayudar a su prójimo.

Libertad 3 : La libertad de distribuir copias de sus versiones modificadas a terceros. Esto le permite ofrecer a toda la comunidad la oportunidad de beneficiarse de las modificaciones. El acceso al código fuente es una condición necesaria para ello.

(Free Software Foundation, 2018)

Es llamativo que la definición de *software* libre recién expuesta, tiene que ver más con efectos éticos, sociales y políticos, que con cuestiones técnicas. Como declara Stallman en una de sus conferencias sobre el *software* libre: el “[*software* libre] es el [*software*] que respeta tu libertad y la solidaridad social de tu comunidad” (Stallman, 2013). Además enfatiza que el uso del *software* libre implica desarrollo social, ya que permite y fomenta el libre acceso a la información.

Conjugar las propuestas del *software* libre y el potencial de Internet, propicia de manera natural, el establecimiento y desarrollo de una comunidad abierta y con alcance global, alrededor de las herramientas digitales involucradas.

En el caso de GeoGebra, queda de manifiesto lo natural que se vuelve la colaboración entre los miembros de la comunidad. En palabras del creador de GeoGebra, Markus Hohenwarter (1976), en su conferencia Dynamic Mathematics for Everyone: “para mí y para todos los que trabajamos con GeoGebra, la idea de compartir materiales educativos gratuitos con otros es muy importante” (Hohenwarter, 2013). Un dato interesante en cuanto a la articulación social alrededor del *software*, es que, según Hohenwarter (2013) el origen de la Comunidad GeoGebra ocurrió sólo después que el programa pasara a ser *software* libre.

1.3.4. Ambientes híbridos

GeoGebra fue creado con la intención de ayudar a los profesores de matemáticas en su quehacer docente. Junto con esto, las características propias del *software* (descritas de manera general en la sección sección 1.2), permiten integrar el programa a una clase escolar, a través de la proyección digital de su interfaz, su uso en *tablet* y teléfonos inteligentes, al aprovechar su potencial dinámico en una pizarra digital interactiva, compartir o buscar construcciones de manera libre en su plataforma web, etc.

Todas estas maneras de integrar GeoGebra al quehacer educativo, propician una hibridación en los ambientes de trabajo, desarrollando actividades tanto en ambientes materiales (sala

⁹En la página gnu.org/philosophy/free-sw#History se puede acceder al historial de las diferentes versiones significativas de la definición de *software* libre.

de clase), como en ambientes digitales (plataforma web, dispositivos móviles, proyecciones digitales).

1.4. Construir conocimiento matemático en la era digital

En la investigación educativa, el principal cuestionamiento ha dejado de ser si acaso la tecnología digital contribuye a que los estudiantes puedan aprender más y mejor. El tono de la investigación ha cambiado, pues se reconoce que la tecnología digital está inserta en el panorama educativo o, de manera más precisa, es parte natural en nuestra ecología de la educación. Lo cual invita a pensar que el cuestionamiento en estos tiempos, respecto de las tecnologías digitales en la educación, es más cercano a preguntarse cómo aprovecharlas para potenciar los aprendizajes de nuestros estudiantes.

Un ejemplo de este nuevo tono en las investigaciones educativas lo entrega Aldon (2015), quien posiciona su investigación sobre tecnología y educación, declarando que la enseñanza y aprendizaje a través del uso efectivo de la tecnología es una meta común entre investigadores, profesores, estudiantes y otros ciudadanos.

Un elemento trascendental en este cambio de tono en la investigación, es el reconocimiento de la tecnología digital como parte de la ecología educativa. Es decir, se declara que es un elemento con una presencia casi permanente en los fenómenos educativos en la actualidad.

Cabe destacar, que la tecnología digital no es sólo un elemento más en la amplia gama de variables que están configurando la educación en la actualidad, sino por el contrario es *el* elemento que ha revolucionado la manera de entender qué, cómo y en qué modalidad se aprende.

Esta trascendencia de la tecnología digital en el ecosistema educativo provocado por la 3RH, ha permeado en la manera en que se entiende la educación, tanto en el rol que juegan las personas en su propio proceso de aprendizaje, así como en qué quiere aprender y cómo quiere aprenderlo.

Debido a esto, en esta investigación nos proponemos reconocer a la tecnología digital como parte natural del ecosistema educativo, así como de cada ámbito de nuestra vida (social, política, económica, etc.). Este supuesto de partida nos permite reconocer como una problemática viable de investigar, las implicaciones de la 3RH en la educación matemática, centrándonos en la organización social propiciada por la tecnología digital y la manera en que esta organización ha impactado en el qué aprender y cómo aprenderlo.

1.4.1. Organización social propiciada por la tecnología digital

En el desarrollo de las secciones anteriores, fueron mencionados varios ejemplos de respuesta social a propósito a que el ámbito oficial no quiso suplir las necesidades educativas de las personas y, que gracias a la proliferación de Internet, las comunidades se lograron organizar para atender y saciar ellas mismas, las necesidades de los individuos que la constituyen y de las propias comunidades.

La 3RH provocó cambios a distintos niveles, donde lo oficial respondió atendiendo sus

propias necesidades. A nivel social, se produjo el cambio de la sociedad 1.0 a la 2.0; y a nivel de educación, lo oficial se preocupó de atender sus necesidades institucionales. En respuesta, lo no oficial reaccionó haciendo emerger una cultura del corta-pega, y a nivel educación, suplieron las necesidades educativas personales y colectivas.

En cuanto al Paradigma dinámico que describe la relación entre tecnología y educación matemática, una de sus características es el desarrollo y trabajo interconectado, concretizado en comunidades de carácter público, colaborativo y global (Contreras, 2003). Comunidades que nacieron en respuesta al trabajo independiente que se daba en comunidades cerradas y restringidas, propias del Paradigma estático.

El *software* libre nace también, como respuesta a la desidia de lo oficial por suplir las necesidades de los usuarios, preocupándose más por desarrollar estrategias económicas, cuyo fin es establecer un oligopolio. En cuanto a la organización en torno al *software* libre, el uso de este implica desarrollo social, ya que sus principios se preocupan por respetar la libertad individual y la solidaridad social de la comunidad.

En síntesis, al considerar la tecnología digital en el panorama educativo, este nuevo paradigma dinámico da cuenta de una evidente organización social alrededor de la tecnología digital, permitiendo la constitución de comunidades abiertas, colaborativas y de alcance global.

1.4.2. Énfasis en qué y cómo se aprende

Es importante volver a enfatizar que lo relativo al saber compete a cada campo disciplinar, ya sea matemáticas, historia, arte u otro. Este trabajo se centra en los fenómenos didácticos ligados a las matemáticas, que se dan en un paradigma dinámico, posterior a la 3RH.

Generalmente las teorías *tradicionales* de Educación Matemática se han preocupado de estudiar los fenómenos asociados a la enseñanza y aprendizaje de la matemática *escolar*, en la cual el foco de atención ha sido usualmente preguntarse *qué* es lo que se aprende en los ambientes escolares. Esto denota una preocupación por los objetos matemáticos susceptibles de ser enseñados o aprendidos. La tecnología digital añade al cuestionamiento sobre qué aprender, la posibilidad de estudiar las particularidades del ambiente y el proceso involucrado en esta aprendizaje, es decir, la posibilidad de analizar también *cómo* se aprende. Al respecto y a la luz de lo expuesto en este capítulo, nos interesa indagar qué matemáticas y cómo se aprenden en el ámbito no oficial.

1.5. Investigación basada en el diseño

A partir de los lineamientos trazados en el reconocimiento de la problemática a abordar en la presente investigación, sobre la construcción de conocimiento matemático en la era digital, consideramos pertinente desarrollar el proyecto como una investigación basada en el diseño, ya que este tipo de investigación provee el marco para explorar explicaciones teóricas amplias que luego sean fundamento para el diseño de intervención a elaborar, fundamentos que también servirán para analizar la puesta en escena del diseño. En palabras de Swan (2014):

La investigación basada en el diseño es un enfoque formativo de la investigación, en el cual un producto o proceso (o “herramienta”) es concebido, diseñado, desarrollado y refinado a través de ciclos de promulgación, observación, análisis y rediseño, con la retroalimentación sistemática de los usuarios finales.

(...) La teoría educativa se utiliza para orientar el diseño y el refinamiento de las herramientas y se perfecciona durante el proceso de investigación.

(...) En última instancia, la meta es transformadora; se busca crear nuevas posibilidades de enseñanza y aprendizaje y estudiar su impacto en maestros, niños y otros usuarios finales. (Swan, 2014, p. 148)

La investigación basada en el diseño se orienta por la teoría para fundamentar el diseño, para analizar los datos recogidos de su implementación y en el refinamiento, tanto las herramientas teóricas como del diseño mismo, en ciclos sucesivos. De esta manera, en el capítulo siguiente desarrollamos explicaciones teóricas respecto de las interrogantes que emergen de la problemática, sobre ¿cómo se organiza la sociedad para construir conocimiento aprovechando la tecnología digital? y ¿qué matemáticas y cómo se aprende esta en la era digital? El desarrollo teórico de explicaciones para ambas preguntas nos permitirán delinear principios que guíen la elaboración del diseño, los cuales serán puestos a prueba durante la implementación y el análisis de los datos.

Capítulo 2

Fundamentación Teórica

A partir del fenómeno de la aparición de la tecnología digital en el panorama de la humanidad, identificado en la Problemática (ver 1), reconocemos que se ha modificado la manera en que se organiza la sociedad y cómo se entiende la educación. Es por ello que, por una parte nos preguntamos ¿cómo se organiza la sociedad para construir conocimiento aprovechando la tecnología digital?, y por otra, ¿qué geometría y cómo se aprende esta en la era digital? Ambas preguntas guían la estructuración del marco teórico de esta investigación.

Por una parte, se indaga en aspectos teóricos que permiten entender y analizar a la tecnología como una construcción social, junto con explorar las características de la cultura digital. La articulación de ambas explicaciones teóricas nos permiten estudiar la tecnología digital como una construcción social, específicamente de comunidades digitales.

Por otro lado, se desarrolla un estudio de la geometría, el cual parte de reconocer la complejidad de los fenómeno u objetos a estudiar (en este caso la geometría), de los cuales diferentes disciplinas pueden arrojar luz respecto cierto aspecto particular del fenómeno u objeto a estudiar. Sin embargo, dado que se esta estudiando el mismo fenómeno u objeto, es natural encontrar puntos de convergencia en los estudios o resultados que identifica cada disciplina. De esta manera, el estudio de la geometría que presentamos parte de consideraciones relativas a diferentes esferas del conocimiento humano, para luego encontrar convergencias que nos permitan hablar de la geometría en términos sistémicos.

2.1. Organización social propiciada por la tecnología digital

De la Problemática se desprende la identificación de una nueva forma de organización social propiciada por la tecnología digital. Esta idea habla de una relación entre la sociedad y la tecnología digital, reconociendo una manera de ser de la primera que se configura en su relación con la tecnología digital, es decir, una cultura digital. Añadido a lo anterior, y con la influencia de perspectivas sociales de investigación, reconocemos las características situacionales de los grupos sociales que conforman su propia versión de esta cultura, que tiene elementos compartidos entre los distintos grupos y otros que son propios de cada uno.

En definitiva y con base lo anterior, nos referirnos a comunidades digitales como agrupaciones sociales situadas, que poseen una cultura que emerge a partir de su relación con la tecnología digital. Consideramos el proceso en el cual se conforma la cultura digital, como una relación mutuamente constituyente entre la cultura y la tecnología digital, en donde la cultura se construye a medida que se incorpora la tecnología digital a las prácticas cotidianas y especializadas, y la tecnología se construye y se desarrolla por humanos, para satisfacer necesidades humanas. Por lo tanto, asumimos a la tecnología digital como una construcción social, y en particular una construcción de las comunidades digitales.

Para estudiar la relación entre cultura y tecnología digital, nos valemos de explicaciones teóricas de la antropología social, que tiene a esta relación como uno de sus objetos de estudios. Al respecto, es posible dar cuenta de un cambio en la manera de estudiar el vínculo cultura-tecnología por la antropología (Santos y Díaz Cruz, 2015), de donde se pueden diferenciar dos paradigmas de investigación:

Paradigma tradicional las investigaciones se centran fundamentalmente en el estudio de las tecnologías o el cambio tecnológico en las sociedades tradicionales, incurriendo en el reduccionismo de considerar a la tecnología simplemente como un fenómeno de la cultura material de las sociedades, lo cual corresponde solo a una de las dimensiones de esta “institución total”.

A continuación unas preguntas para esclarecer qué se entiende por tecnología y cambio tecnológico en este paradigma:

- Las tecnologías: ¿qué tecnologías están o son representativas de tal cultura, época o sociedad?
- El cambio tecnológico: ¿cómo ha cambiado tal tecnología en tal cultura, época o sociedad?

Paradigma moderno las investigaciones analizan a la tecnología como una construcción social, cultural y simbólica en nuestras sociedades modernas y complejas. Esto con el propósito de ser sensibles a la realidad, si consideramos que “nuestra vida cotidiana es impensable hoy sin el enorme conjunto de artefactos técnicos que nos rodean” (Santos y Díaz Cruz, 2015, p. 10).

De esta manera, se considera a la tecnología como un elemento propio y constitutivo

de la sociedad, con lo cual se pasa de considerar una *sociedad con tecnología* a una *sociedad tecnologizada*, que para el caso de la presente investigación y en consecuencia a sus motivaciones e intereses, se considera el caso de una *sociedad tecnologizada digitalmente* o simplemente una *sociedad digitalizada*.

Entre las corrientes de investigación enmarcadas en el paradigma moderno, la construcción social de la tecnología o Scot por sus siglas en inglés (*Social Construction Of Technology*) es una de las “más fructíferas e influyentes en los años noventa, y que sigue vigente en la actualidad, para explicar la adopción y el desarrollo de las tecnologías de la información y la comunicación” (Santos y Díaz Cruz, 2015, p. 11 y 12). Corriente que se vislumbra muy pertinente para estudiar la relación entre tecnología y cultura, atendiendo a las especificidades de esta investigación que han sido expuestas en esta sección.

Desde un punto de vista general, la Scot ha experimentado modificaciones propias de una teoría social que esta progresiva y constantemente en construcción, a partir de las cuales identificamos dos etapas en su devenir histórico que son expuestas en esta sección como *planteamiento inicial* y *planteamiento actual* de la Scot. Ambos proveen elementos para analizar tecnologías y prácticas de la era predigital (antes de la 3RH). Por este motivo, se hace necesario proponer una adaptación de la Scot para este trabajo, con la cual se pretende atender a las particularidades de las comunidades digitales, es decir, que de cuenta de la construcción social de la tecnología digital, con lo que estaríamos proponiendo hablar de Scotd, siguiendo la tradición de usar sus siglas en inglés (*Social Construction Of Digital Technology*).

2.1.1. Planteamiento inicial de la Scot

Los inicios de la Scot se remontan a comienzos de 1980 cuando un gran número de científicos pertenecientes a la tradición constructivista social en la sociología de la ciencia, volvieron su atención hacia la tecnología, lo cual decantó en el trabajo conjunto de especialistas de la historia de la tecnología, sociología de la tecnología y sociología de la ciencia, que sentó las bases de la Scot.

Debido, quizá, a su múltiple naturaleza, el término construcción social puede tener diversos significados, dentro de los cuales la distinción más importante radica entre el constructivismo *moderado* y *radical*.

- La versión moderada del constructivismo social sostiene que las tecnologías “están construidas socialmente en el sentido de que los grupos de consumidores, los intereses políticos y otros similares desempeñan un papel para determinar la forma final que tomó la tecnología” (Pinch, 2015, p. 21).
- La versión radical del constructivismo social “sostiene que el significado de la tecnología, incluyendo hechos sobre su funcionamiento -establecidos quizá mediante un proceso de diseño de ingeniería y prueba-, es en sí una construcción social” (Pinch, 2015, p. 22).

La Scot se posiciona como una perspectiva constructivista social radical, lo que declara explícita y fuertemente en su consideración de la tecnología:

La tecnología forma parte de un tejido sin costuras de la sociedad, la política y la economía. Por ello, el desarrollo de un artefacto tecnológico (...) no es simplemente un logro técnico; inmerso en él se encuentran las consideraciones sociales, políticas y económicas. [La construcción social de la tecnología] esta interesada en buena medida en considerar lo social y lo técnico de manera equivalente. La parte más difícil (...) es demostrar la manera en que **los artefactos mismos contienen a la sociedad inmersa en ellos** (Pinch, 2015, pp. 25).

Lo radical de la Scot esta en que no existe ningún fundamento para dar por hecho un reino puramente técnico que pueda ser usado en la definición del significado de una tecnología para todo tiempo y espacio y para toda la comunidad (p. 27).

A partir de esta consideración de partida, con base en una perspectiva radical del constructivismo social, la Scot declara sus principios sobre los cuales sustentan su planteamiento, los cuales fueron propuestos por primera vez en la obra *The Social Construction of Facts and Artefacts: Or How the Sociology of Science and the Sociology of Technology Might Benefit Each Other* de Pinch y Bijker de 1985:

Grupos sociales relevantes “El elemento clave fue la noción de que los diferentes grupos sociales relevantes asociados con el desarrollo de un artefacto tecnológico compartían un significado que podía ser usado entonces para explicar las trayectorias

particulares del desarrollo que tomaba el artefacto” (Pinch, 2015, p. 25).

Por ejemplo, explicó que la aparición de bicicletas con ruedas cada vez más grande se debía al significado de “máquina macho” que tenía para el grupo social de hombres jóvenes, fuertes y vigorosos, quienes buscaban una máquina más peligrosa y rápida, lo cual se conseguía a medida que la rueda era más grande.

Por lo tanto, el sentido de este principio es identificar el significado que compartido por los distintos grupos sociales relevantes, respecto de una tecnología, lo cual permite explicar su ruta de desarrollo.

Flexibilidad interpretativa “Significados radicalmente diferentes de un artefacto podrían ser identificados por distintos grupos sociales” (Pinch, 2015, p. 25).

Siguiendo con el ejemplo de la bicicleta, para el grupo de hombres fuertes y vigorosos representaba la máquina macho, en cambio para grupos sociales que estaban interesados en la seguridad y el confort, como adultos mayores y mujeres, la bicicleta de ruedas grandes representaba la *máquina insegura*.

“Sugiere que el diseño tecnológico es un proceso abierto que puede producir diferentes resultados dependiendo de las circunstancias sociales de desarrollo (Klein y Kleinman, 2002, p. 29)”. El quid de la flexibilidad interpretativa es su adaptabilidad y variedad de significados asociados al artefacto, ya que se reconoce la posibilidad de que distintos grupos sociales relevantes pueden tener significados diametralmente opuestos sobre un artefacto, en desmedro de una interpretación universal y absolutamente compartida.

Esta variedad de interpretaciones sobre una tecnología se debe a que los significados de cada grupo social relevante son manifestaciones de sus propias características. En el caso de los hombres jóvenes, fuertes y vigorosos, una bicicleta con ruedas grandes representaba un artefacto que encarnaba la valentía, el vigor y el riesgo; en cambio para mujeres y ancianos, la misma tecnología representaba una máquina que podía poner en peligro su integridad física, contrario al artefacto de transporte seguro que podrían haber querido.

Mecanismo de Cierre “Proceso de cierre mediante el cual desaparece la flexibilidad interpretativa de un artefacto, al identificar los mecanismos particulares que inciden en la desaparición de algunos significados” (Pinch, 2015, p. 26).

Por ejemplo, existía una pugna entre las bicicletas que tenían neumáticos de aire y las que no. Para algunos representaba una fuente de problemas interminables (pinchaduras), y para otros la solución al problema de vibración. Esta disyuntiva entre tales significados se resolvió cuando las bicicletas con neumáticos de aire comenzaron a ganar todas las carreras. Debido a esta superioridad en cuanto a la velocidad se optó por generalizar el uso de este tipo de llantas. A la redefinición del problema, de la vibración a la velocidad se le llamó mecanismo de cierre.

“Un proceso de diseño en el que influyen varios grupos puede experimentar controversias cuando diferentes interpretaciones conducen a imágenes conflictivas de un artefacto. El diseño continúa hasta que tales conflictos sean resueltos y el artefacto no plantee un problema a ningún grupo social relevante. El proceso alcanza el cierre, no se producen modificaciones de diseño adicionales y el artefacto se estabiliza en su

forma final. De alguna manera se produce una decisión final -o al menos un cese de decisiones” (Klein y Kleinman, 2002, p. 30).

En definitiva, el mecanismo de cierre corresponde a un proceso mediante el cual cierto significado relativo al artefacto desaparece, dando paso a un único significado imperante.

Marco tecnológico “Marco de significado relacionado con una tecnología en particular, compartido por varios grupos sociales y que además guía y da forma al desarrollo de los artefactos. Con este concepto (...) se logra un vínculo entre la amplísima sociedad en la cual se encuentra inmersa la tecnología y su trayectoria de desarrollo” (Pinch, 2015, p. 27).

“Este [marco tecnológico] es el *milieu* [ambiente] sociocultural y político más amplio en el cual tiene lugar el desarrollo del artefacto” (Klein y Kleinman, 2002, p. 30). Este principio tiene como objetivo explicar la manera en que los distintos significados alrededor de una tecnología, manifestados por distintos grupos sociales relevantes, trascienden de un nivel local a un nivel social del desarrollo de la tecnología.

Por lo tanto, los análisis realizados por la Scot no se quedan a un nivel social de interacción, sino que escudriñan como influyen las decisiones sociales en el funcionamiento del artefacto tecnológico y su posterior trayectoria de desarrollo. Por ejemplo:

No sería satisfactorio si el análisis de un (...) sistema de satélite estuviera basado simplemente en demostrar que el hardware final y lo que se supone debe hacer que dependa de una serie de negociaciones entre una compleja red de instituciones y diferentes grupos de usuarios. Un análisis más satisfactorio tendría que demostrar la manera en que estaba inmerso el funcionamiento técnico del sistema en las decisiones sociales y negociaciones.

(Pinch, 2015, pp. 27 - 28)

2.1.2. Planteamiento actual de la Scot

Posteriormente a la formulación original de la Scot, a través de varias investigaciones se realizaron críticas su planteamiento inicial, y en el ejercicio de responder, refutar o aceptar la crítica, se fueron refinando y actualizando sus elementos y principios, las que pueden ser aglomerados como una versión contemporánea de la Scot.

El acierto situacional y relativista de la flexibilidad interpretativa, que Pinch (2015) declara como el elemento que posiciona a la Scot en la perspectiva radical del constructivismo social, estaba ausente o débilmente representado en los otros principios. En consecuencia, las críticas de este periodo apuntan en general a la poca flexibilidad del planteamiento y al olvido de aspectos sociales fundamentales en tanto construcción social.

2.1.2.1. Críticas al planteamiento inicial de la Scot

A continuación se exponen algunas críticas que se han recabado al revisar literatura especializada, las cuales son presentadas comenzando con aspectos más particulares hasta los que se refieren a un nivel general y amplio de las relaciones sociales.

En los principios de grupos sociales relevantes y mecanismo de cierre se identifica la citada falta de flexibilidad. Por ejemplo, en la formulación original de la Scot se concibe a los grupos sociales relevantes como el conjunto de individuos que comparten el mismo significado respecto de una tecnología, sin embargo esta conceptualización pasa por alto las explicaciones sobre el surgimiento y articulación de los tales grupos sociales relevantes, ya que “simplemente porque una multitud de individuos comparten un conjunto de significados, no asegura que ellos se organizarán en un grupo para participar del proceso de diseño” (Klein y Kleinman, 2002, p. 37). Por lo tanto se propone una concepción no tan estática de los grupos sociales relevantes, los cuales no están determinados de una vez y por todas, junto con la posibilidad de la identificar la configuración de nuevos grupos sociales relevantes.

En cuanto al mecanismo de cierre, el planteamiento inicial considera que este ocurre cuando todos los grupos sociales relevantes llegan a un acuerdo respecto de la pugna de significados alrededor de la tecnología en particular. Sin embargo, es natural reconocer que este cierre (cese a la pugna entre significados) puede darse por la imposición del significado de un grupo que posee mayor poder que los otros, los cuales tienen una relación de dependencia con el primero.

Otro aspecto del mecanismo de cierre que da cuenta de su rigidez es considerarlo como la manera en que desaparece la flexibilidad interpretativa de un artefacto (ver en 2.1.1). Por el contrario y atendiendo a consideraciones situacionales, “proceso de cierre y estabilización no necesariamente tienen que ser final. Pueden emerger nuevos problemas y con esto la flexibilidad interpretativa puede reaparecer” (Kline y Pinch, 1996, p. 766).

Apuntando al objetivo de las primeras investigaciones de la Scot, se ha criticado que ellas ponían demasiada atención a la etapa del diseño de la tecnología. Lo cual se explica al

reconocer que originalmente la Scot fue concebida para analizar principalmente y casi con exclusividad, la etapa del diseño de la tecnología. “La flexibilidad interpretativa adoptó la forma de identificar las diferentes opciones del diseño, y sólo algunas fueron estabilizadas. Quizá la noción de cierre fue un poco rígida. Lo que faltaba era un sentido de cómo y en qué circunstancias podría ser reabierto una tecnología, particularmente la manera en que era adoptada y usada por los diferentes grupos sociales” (Pinch, 2015, p. 31).

En respuesta a esta crítica el autor concluye que “al parecer la Scot puede ser ampliada para incluir el uso de la tecnología, y encontramos que (...) la *flexibilidad interpretativa*, *conclusión* [mecanismo de cierre] y *grupos sociales* [relevantes], son completamente aplicables” (p. 32).

Una crítica muy extendida a la formulación original de la Scot se refiere a que esta ignora las relaciones de poder que estructuran a nuestra sociedad. Por ejemplo Klein y Kleinman (2002) declaran que “implícitamente, la Scot asume que los grupos sociales son iguales y que todos los grupos sociales relevantes están presente en el proceso de diseño. Esto no satisface adecuadamente la asimetría de poder entre grupos. (p. 30)”. Bijker (1995) lleva un poco más lejos la crítica al preguntarse “¿cómo los artefactos se convierten en instrumentos de poder? Y a la inversa, ¿cómo las relaciones de poder materializan artefactos?” (p. 4).

Si se reconoce que la relación entre los grupos sociales relevantes esta determinada por la relación de poder y dependencia que existe entre ellos, será natural reconocer que en primer lugar, no todos los grupos participan del proceso de desarrollo de una tecnología en particular, y en segundo, que de participar en este proceso, cada grupo lo hará de acuerdo a su estatus de poder en la estructura social:

Generalmente, es probable que la industria tenga mayor influencia en la conformación de un artefacto que los consumidores minoristas, porque los consumidores minoristas suelen estar atomizados y desorganizados. La inversión del consumidor individual es típicamente más baja que la de la empresa individual, y las industrias tienden a ser más concentradas que los consumidores. En tales casos, es justo decir (...) que el consumidor final puede tener poca oportunidad de involucrarse en el diseño y desarrollo de tales artefactos (por ejemplo, bienes nacionales) que no sea el poder de veto a adoptar o no.

(Klein y Kleinman, 2002, p. 41)

Como respuesta y en prospectiva, Pinch (2015) propone que debido a que los primeros trabajos de la Scot estaban orientados a esclarecer el diseño final de la tecnología, estos no se pronunciaron respecto de las estructuras sociales y las relaciones de poder. Sin embargo, declara que la Scot puede, sin duda, aclarar cuestiones sociales de esta naturaleza, es decir, estructura y poder.

Añadido a la crítica de las relaciones de poder, Klein y Kleinman (2002) proponen la incorporación del concepto de *estructura social* al andamiaje de la Scot. Los autores parten de la premisa que el mundo social esta constituido por estructuras históricamente establecidas, que en cualquier momento puede poner en confrontación a los actores, tanto

individuos como grupos. El concepto de estructura social lo retomaron de la tradición de la economía política institucional, el cual definen como:

Reglas de juego específicas, formales e informales, explícitas e implícitas, que establecen capacidades e incapacidades, distintas distribuciones de recursos, y definen restricciones y oportunidades específicas para los actores, en función de su ubicación estructural.

El poder y su funcionamiento se entienden dentro de este contexto estructural. Las reglas de juego que definen las estructuras dan ventajas a ciertos actores por sobre otros, dotándoles de recursos valiosos o, de hecho sirviendo ellos mismos como recursos.

(Klein y Kleinman, 2002, p. 35)

La relevancia de las estructuras sociales radica en su utilidad para explicar el funcionamiento el marco tecnológico, el cual tiene por propósito manifestar cómo se relacionan los grupos sociales relevantes para incidir en el diseño, desarrollo o transformación de la tecnología, a través de comunicar sus significados particulares sobre esta. Gracias a reconocer la estructura social, podemos considerar que la interacción entre los grupos sociales esta normada por estas estructuras que se han ido constituyendo de manera histórica y que se están modificando de manera permanente.

Por último, y a un nivel macro, es necesario hacer patente la manera en que la tecnología y la sociedad sostienen una relación dialéctica que las constituye mutuamente. Al respecto Kline y Pinch (1996) menciona, en términos de la identidad social y la tecnología, que es necesario “reconocer la importancia de mostrar cómo los grupos sociales relevantes moldean la tecnología, así como enunciar de qué manera la identidad de los grupos sociales relevantes es reconstituida en el proceso de usar la tecnología” (p. 767).

Por su parte, Bijker (1995) se refiere a esta dialéctica como “moldear socialmente a la tecnología junto con moldear tecnológicamente a la sociedad” (p. 3). Por ejemplo, en un comienzo el uso de la bicicleta se entendió de alguna manera para reforzar el orden de género existente. Debido a esto, las mujeres tenían permitido únicamente montar triciclos y preferiblemente bicicletas con dos asientos, para que fuese acompañada de un hombre (moldear tecnológicamente a la sociedad). Sin embargo, y con el paso del tiempo, la bicicleta se convirtió en un instrumento de emancipación para las mujeres (moldear socialmente a la tecnología).

2.1.2.2. Versión actual de los principios de la Scot

En consecuencia a las críticas y la manera en que la Scot las fue asimilando, se postula una versión actual de sus principios:

Grupos sociales relevantes Conjunto de individuos que comparten ciertos significados respecto de una tecnología, relativos a su diseño, uso o transformación. Estos grupos pueden constituirse de distintas maneras y en diferentes momentos del desarrollo (diseño - uso - transformación) de una tecnología, entendiendo que no están determinados de una vez y por todas.

Flexibilidad interpretativa Variedad de significados asociados a una tecnología específica que pueden ser identificados en diferentes grupos sociales relevantes, tanto en el diseño, uso o posterior transformación de la tecnología. Entre tales significados se pueden encontrar interpretaciones muy cercanas y similares, o, por el contrario, ser diametralmente opuestas.

Los significados o las interpretaciones de cada grupo asigna a una tecnología, reflejan las características propias del grupo social relevante.

Estabilización Momento en que los distintos grupos sociales relevantes llegan a un consenso o imposición de un significado particular para una tecnología, es decir, en esta instancia los significados asociados a tal tecnología alcanzan una *estabilización*. En tanto la estabilización se sustenta en los significados asociados a la tecnología, estos pueden cambiar con el paso del tiempo y por diversas razones, provocando un nuevo desequilibrio y nuevamente la aparición de una variedad de interpretaciones. Por lo tanto, se reconoce que la estabilización es un estado de equilibrio respecto de las interpretaciones asociadas a una tecnología, que puede romperse para volver a buscar una nueva estabilización, vale decir, no es un estado final.

Un aspecto importante en la manera en que se alcanza esta estabilización tecnológica, es reconocer las relaciones de poder entre los distintos grupos sociales relevantes, que dictamina el grado de participación y comunicación de sus significados en el diseño, uso o transformación de la tecnología.

Marco tecnológico Explicaciones respecto de la interacción entre los grupos sociales relevantes que inciden en el desarrollo de una tecnología, dadas las características reconocidas en los otros principios.

Se reconoce que cada grupo social relevante participa en distinto grado del desarrollo de la tecnología, según su ubicación en la estructura social, que responde a una relación de poder y dependencia entre los diferentes grupos.

Las estructuras sociales se entiende como las reglas de juego específicas, formales o informales, explícitas o implícitas, que establecen capacidades e incapacidades, distintas distribuciones de recursos, y definen restricciones y oportunidades específicas para los actores, en función de su ubicación estructural. El rol de las estructuras sociales es explicar el funcionamiento del marco tecnológico, dando cuenta de la forma en que la interacción de los grupos sociales relevantes están normados por estas estructuras, las cuales se han ido construyendo de manera histórica y que, a su vez, se están modificando de forma permanente.

2.1.3. Construcción Social de la tecnología digital (*Social Construction Of Digital Technology: Scotd*)

La evolución entre el planteamiento inicial y actual de la Scot esta marcado por intentar progresivamente de reconocer de mejor manera las características de la sociedad, representada por los grupos sociales relevantes, los cuales van experimentando cambios a través del paso del tiempo y a partir de la misma interacción social. En específico esta evolución esta marcada por reconocer las relaciones de poder y dependencia entre los grupos sociales relevantes; que los grupos sociales relevantes inciden no sólo en el diseño, sino también en el uso y la transformación de la tecnología; tomar una postura más acorde con el relativismo, la flexibilidad y lo situacional de las interacciones sociales, en ciertos principios de la Scot que se concebían como muy rígidos, por ejemplo el mecanismo de cierre, que evolucionó en la estabilidad tecnológica. Todos ellos fueron cambios relevantes para el propósito de tener herramientas teóricas cada vez más afinadas, para estudiar e investigar cómo se construye socialmente la tecnología.

También es necesario tener presente que ambos planteamientos fueron desarrollados para analizar la relación tecnología-cultura previo a la 3RH, es decir, para el estudio de sociedades y tecnologías predigitales, por ejemplo: la construcción social de la bicicleta y baquelitas en Bijker (1995); de la bicicleta de seguridad en Pinch y Bijker (1987); de la tecnología del misil balístico en MacKenzie (1991); del sistema de ultracentrífugo en Elzen (1986); de la manufactura de acero en Misa (1992) y de la bicicleta de montaña en Rosen (1993).

En consecuencia, este hecho hace que cuestionemos la fiabilidad de utilizar alguno de los dos planteamientos de la Scot para analizar a las tecnologías digitales como una construcción social. Por lo tanto, con base en este motivo y el mismo proceder evolutivo de la Scot, exponemos algunas características propias de las sociedades de la era digital, para ensayar un planteamiento que se acerque más a esta realidad, es decir, un planteamiento sobre la construcción social de la tecnología digital (Scotd).

2.1.3.1. Descripción de la cultura digital

Como punto de partida de este desarrollo sobre la tecnología digital como una construcción social, se intenta describir a la *cultura digital* puesto que es un aspecto central para tal desarrollo. Esta descripción no pretende ser exhaustiva, sino que tiene como propósito mencionar cuestiones de carácter general y relevantes, que permitan caracterizar este elemento de la sociedad. Para un estudio profundo, amplio y acabo al respecto, se recomienda la trilogía *La era de la información¹: economía, sociedad y cultura*, obra del sociólogo Manuel Castells, la cual ha servido de base para la descripción a desarrollar en esta sección.

¹Castells se refiere a la sociedad de finales del siglo XX y comienzos del siglo XXI como la *sociedad de la información*. En este trabajo estamos enfocados a los cambios y características *sociales de la era digital*, la cual situamos a partir del siglo XXI. En consecuencia, ambas sociedades corresponden a manifestaciones de una sociedad en transición, entre las racionalidades mecánicas y análogas, y una racionalidad líquida y digital, idea que Cobo y Moravec (2011) sintetizan en su denominada **sociedad 2.0**.

De esta manera, cuando en este trabajo se mencione a la *sociedad de la información*, también nos estaremos refiriendo a la *sociedad de la era digital*.

La descripción de la cultura digital es desarrollada tomando como estructura cinco elementos declarados en la investigación de Flores (2016), la cual se sustenta de aspectos sociológicos respecto del impacto de los medios de comunicación en la emergencia de las sociedades modernas y en cuanto a la manera en que las tecnologías de información y comunicación están vinculadas a las transformaciones sociales de la sociedad de finales del siglo XX y principios del siglo XXI.

Lo que reconoce Flores en Thompson², del impacto de los medios de comunicación en la sociedad, lo ampliamos al efecto en general de las tecnologías digitales en la sociedad, al considerar lo que toma de Castells³. Así:

“El uso de [las tecnologías digitales] han transformado la organización espacial y temporal de la vida social, mediante nuevas formas de acción e interacción, así como de ejercicio del poder”⁴ (Flores, 2016, p. 42), a partir de esta cita se extraen las categorías que guían y dan estructura a la descripción de la cultura digital: (1) acción social, (2) estructura social, (3) organización temporal, (4) interacción social y (5) ejercicio de poder, las que se desarrollan a continuación.

1. Acción social

En primer lugar en esta descripción, aludimos a un hecho que da sentido a reconocer una cultura digital, como diferente a culturas configuradas en otras eras y épocas. Esta distinción esta dada por la *acción social*, entendida como el modelo cambiante de las relaciones entre naturaleza y cultura. Esencialmente este elemento se refiere a la manera en que uno de los polos subyuga al otro. Con esta caracterización identificamos tres acciones sociales a lo largo de la historia, según la propuesta de Castells (1999):

- **1ra acción social:** “dominio de la naturaleza sobre la cultura. Relación que duró dos milenios. Los códigos de la organización social expresaban casi directamente la lucha por la supervivencia bajo el rigor incontrolable de la naturaleza” (Castells, 1999, p. 513).

Con esta acción social se reconoce una cultura que se configuraba para sobrevivir en una naturaleza mayoritariamente libre del uso o designio del hombre.

- **2da acción social:** “el segundo modelo de relación establecido en los orígenes de la Edad Moderna, asociado con la Revolución industrial y el triunfo de la razón, contempló el dominio de la naturaleza por la cultura, formando a la sociedad mediante el progreso del trabajo, por el cual la humanidad encontró tanto su liberación de las fuerzas naturales como su sometimiento a sus propios abismos de opresión y explotación” (Castells, 1999, p. 513).

En esta acción social se comienza a producir un cambio en la relación entre la cultura y la naturaleza. Se vive una emancipación por parte de la cultura, para comenzar a cambiar la balanza de poder hacia su favor.

²Thompson, J. B. (1995). *The media and modernity. A social theory of the media*. California: Stanford University Press.

³Castells, M. (2001). *La era de la información: economía, sociedad y cultura. Volumen I: La sociedad red*. México: Siglo XXI Editores.

⁴La cita original se refiere solo a los medios de comunicación.

- **3ra acción social:** “Estamos entrando [o ya entramos] en un nuevo estadio en el que la cultura hace referencia directa a la cultura, una vez dominada la naturaleza hasta el punto de que esta se revive («preserva») de modo artificial como una forma cultural (...) Debido a la convergencia de la evolución histórica y del cambio tecnológico, hemos entrado en un modelo puramente cultural de interacción y organización sociales. Por ello, la información es el ingrediente clave de nuestra organización social, y los flujos de mensajes e imágenes de unas redes a otras constituyen la fibra básica de nuestra estructura social” (Castells, 1999, p. 513).

La característica primordial de esta acción social, es su modelo puramente cultural de interacción y organización social. Por primera vez en la historia de la humanidad, la cultura ha subyugado a la naturaleza, lo cual posibilita que la cultura se desarrolle por sí misma y sin ocuparse vitalmente de su interacción con la naturaleza.

La actual acción social da evidencia del grado de profundidad que ha alcanzado (y puede seguir ampliando) el desarrollo cultural en cada ámbito de la sociedad. Este resultado avala considerar aspectos sociales en la investigación y la tarea de afinar las herramientas teóricas, para que puedan responder de manera más certera y cercana a la realidad social de la era digital.

2. Estructura social

Luego de reconocer que por primera vez en la historia, vivimos en un mundo predominantemente social, abordamos la descripción de la estructura social que da sustento a este cambio revolucionario en la acción social, lo cual se debe a que:

Como tendencia histórica, las funciones y los procesos dominantes en la era de la información cada vez se organizan más en torno a redes. Estas constituyen la nueva morfología social de nuestras sociedades [red] y la difusión de su lógica de enlace [espacio de flujo] modifica de forma sustancial la operación y los resultados de los procesos de producción, la experiencia, el poder y la cultura. Aunque la forma en red de la organización social ha existido en otros tiempos y espacios, el nuevo paradigma de la tecnología de la información proporciona la base material para que su expansión cale toda la estructura social.

(Castells, 1999, p. 506).

La base material que sustenta la estructura de red esta dada por una idea del espacio que recoge su conceptualización material y física, a la cual se añade armónicamente una idea de espacio inmaterial, que es provista por la estructura tecnológica del paradigma actual.

Desde la perspectiva de la teoría social, **el espacio es el soporte material de las prácticas sociales que comparten el tiempo.** (...) Mediante prácticas sociales que comparten el tiempo hago referencia al hecho de que el espacio reúne aquellas prácticas que son simultáneas en el tiempo. Es la articulación material de esta simultaneidad la que otorga sentido al espacio frente a la sociedad.

(Castells, 1999, p. 445).

El sustento material de la red esta dado por la articulación material de la simultaneidad de prácticas sociales, vale decir, prácticas que se dan en un mismo tiempo. Esta articulación simultánea es la que le da sentido al espacio (soporte material) frente a la sociedad. Ahora, es necesario desarrollar la idea del espacio en un contexto tecnológico, que amplía su entendimiento como aspecto físico de la sociedad, a un aspecto material híbrido: físico y digital.

Tradicionalmente, esta noción se asimilaba a la contigüidad⁵, pero es fundamental que separemos el concepto básico de soporte material de prácticas simultáneas de la noción de contigüidad, con el fin de dar cuenta de la posible existencia de soportes materiales de la simultaneidad que no se basan en la contigüidad física, ya que este es precisamente el caso de las prácticas sociales dominantes en la era de la información. (Castells, 1999, p. 445).

Por lo tanto, en nuestra sociedad actual el soporte material de las prácticas sociales simultáneas es un hibridación entre lo físico y lo digital. El primero entendido como un espacio social clásico o *lugares*⁶, y el segundo como un espacio social provisto por la tecnología digital o *espacio de flujos*⁷.

Esta articulación social híbrida se basa en una estructura de organización flexible y dinámica: *la red*.

Una red es un conjunto de nodos interconectados. Un nodo es el punto en el que una curva se intersecta a sí misma. Lo que un nodo es concretamente depende del tipo de redes a que nos refiramos. (...) La tipología definida por las redes determina que la distancia (o intensidad y frecuencia de la interacción) entre dos puntos (o posiciones sociales) sea más corta (o más frecuente, o más intensa) si ambos son nodos de una red que si no pertenecen a la misma.

(Castells, 1999, p. 506).

Es decir, la estructura o morfología social de red, se puede entender como un conjunto de nodos interconectados, donde un nodo es un punto por el cual se conectan distintos ejes de la red. Las redes se caracterizan por ser “estructuras abiertas, capaces de expandirse sin límites, integrando nuevos nodos mientras puedan comunicarse entre sí, es decir, siempre que compartan los mismos códigos de comunicación (por ejemplo, valores o metas de actuación)” (Castells, 1999, p. 507). Estas características hacen de la red “un sistema muy dinámico y abierto, susceptible de innovarse sin amenazar su equilibrio” (p. 507).

De manera particular, cada red tiene características propias según el tipo de relación o flujo que desempeñe. En la tabla 2.1 se presentan ejemplos de redes y nodos, los cuales han sido tomados en su mayoría de Castells (1999):

⁵Contigüidad: Inmediación (proximidad en torno a un lugar) de algo a otra cosa (RAE, 2017).

⁶Un lugar es una localidad cuya forma, función y significado están delimitados por las fronteras de la contigüidad física (Castells, 1999, p. 457).

⁷Los flujos se entienden como secuencias de intercambio e interacción determinadas, repetitivas y programables entre las posiciones físicamente inconexas que mantienen los actores sociales en las estructuras económicas, políticas y simbólicas de la sociedad (Castells, 1999, p. 445).

Tipo de red	Nodos respectivo
Flujos de capital.	Mercados de la bolsa y sus centros auxiliares de servicios avanzados en la red de los flujos financieros globales.
Flujos de imágenes, sonidos y símbolos.	Canales de televisión, los estudios de filmación, los entornos de diseño informático, los periodistas de los informativos y los aparatos móviles que generan, transmiten y reciben señales en la red global de los nuevos medios que constituyen la base de la expresión cultural y la opinión pública en la era de la información.
Flujos de narcotráfico.	Campos de coca y amapola, los laboratorios clandestinos, las pistas de aterrizaje secretas, las bandas callejeras y las instituciones financieras de blanqueo de dinero en la red del tráfico de drogas que penetra en economías, sociedades y Estados de todo el mundo.
Flujo de conocimiento.	Flujos de política. Instituciones educativas, centros de investigación, escuelas, colectivos no oficiales (e.g. <i>hackers</i>), congresos internacionales, editoriales, etc.

Tabla 2.1: Tipología de redes y nodos asociados.

3. Organización temporal

Castells (1999) declara que para Leibniz el tiempo es *el orden de sucesión de las cosas*, y a partir de esta idea propone que la temporalidad dominante de nuestra sociedad es el tiempo atemporal, el cual “se da cuando las características de un contexto determinado, a saber, el paradigma informacional y la sociedad red, provocan una perturbación sistémica en el *orden secuencial* de los fenómenos realizados en ese contexto” (p. 499). Tales perturbaciones se pueden dar en dos sentidos: (1) condensar la ocurrencia de los fenómenos con el fin de lograr la instantaneidad, o (2) introducir la discontinuidad aleatoria en la secuencia, lo cual produce una *eliminación de la secuenciación*, lo que crea un tiempo indiferenciado, que es equivalente a la eternidad.

En cuanto a esta concepción de la temporalidad de Castells, tenemos ciertos reparos. En primer lugar, y bajo la idea del tiempo de Leibniz, por *orden secuencial* entendemos que Castells se refiere al orden cronológico. En segundo lugar, parece que en vez de que se este *eliminando la secuenciación*, en realidad se esta diversificando la manera de secuenciar las cosas o de ordenar la sucesión de las cosas.

Esto nos permite inferir que Castells se refiere a lo atemporal como negación de la secuenciación cronológica de las cosas, no como una lógica de secuenciación en general, la cual puede ser cronológica o no.

En respuesta, reconocemos la temporalidad como el orden de sucesión de las cosas, el cual puede ser, entre otros, cronológico, biológico, simultáneo, desfasado. En definitiva, consideramos que la temporalidad dominante en nuestra era es el tiempo *asíncrono*, entendido como el orden de sucesión de las cosas, dado por una forma de secuenciar que no tiene lugar en completa correspondencia temporal [cronológica] con otro proceso o con la causa que lo produce. Tal caracterización de la temporalidad actual, permite declarar que la organización temporal depende de las diversas maneras de secuenciar las cosas, que no son excluyentes.

Luego de proponer al tiempo atemporal como su caracterización de la temporalidad dominante en nuestra era, declara una división entre el tiempo del espacio de flujos y el del espacio de los lugares:

El tiempo atemporal pertenece al espacio de los flujos, mientras que la disciplina temporal, el tiempo biológico y la secuenciación determinada por la sociedad caracterizan a los lugares de todo el mundo, estructurando y desestructurando materialmente nuestras sociedades segmentadas.

(Castells, 1999, p. 500).

Como respuesta a esta división, basado en los supuestos integradores de esta investigación, asumimos que la realidad está constituida entre los flujos, los lugares y los puentes que naturalmente se tienden entre ellos. Esta asunción se debe a la concepción de la realidad como el desarrollo menos artificial de las cosas, es decir, al más orgánico. Por lo tanto, desde esta perspectiva, estamos motivados a reconocer también esos puentes que nos den luces y nos permitan entender la constitución híbrida de la realidad.

4. Interacción social

Con interacción social se hace referencia a la manera en que la red, tanto nodos como ejes, se relacionan e interactúan, es decir, la forma en que funcionan los flujos. En el apartado de estructura social, se dio cuenta de los espacios de lugares y espacios de flujos, y cómo nuestra sociedad está construida en torno a estos últimos:

Propongo la idea de que hay una nueva forma espacial característica de las prácticas sociales que dominan y conforman la sociedad red: el espacio de los flujos. **El espacio de los flujos es la organización material de las prácticas sociales en tiempo compartido que funcionan a través de las secuencias de intercambio e interacción determinadas, repetitivas y programables entre las posiciones físicamente inconexas que mantienen los actores sociales en las estructuras económicas, políticas y simbólicas de la sociedad**".

(Castells, 1999, p. 445).

De estos espacios de flujo así descritos, se identifican tres capas de funcionamiento:

1. “El primer soporte material de los flujos, esta formado por un circuito de impulsos electrónicos” (Castells, 1999, p. 446).

La infraestructura tecnológica [digital] que conforma a la red, proporciona el soporte material y posibilidades de interacción, lo cual define el nuevo espacio.

2. “La segunda capa del espacio de los flujos la constituyen sus nodos y ejes” (Castells, 1999, p. 446).

Con base en el soporte material de la primera capa del espacio de los flujos, se identifican dos elementos relevantes para el desarrollo de las interacciones sociales: los nodos y los ejes. Un nodo corresponde a la ubicación de funciones estratégicamente importantes que constituyen una serie de actividades y organizaciones de base local en torno a una función clave de la red; un eje es el conducto por el cual se comunican diferentes nodos, fomentando la interacción para que la haya de forma uniforme con todos los elementos integrados a la red.

Por ejemplo, Castells muestra el caso de las ciudades de Rochester y Villejuif, que si bien se encuentran distanciadas geográficamente, en conjunto se han convertido en un nodo central de la red médica mundial.

3. “La tercera capa importante del espacio de los flujos hace referencia a la organización espacial de las elites gestoras dominantes (más que clases)” (Castells, 1999, p. 448)

Al asumir que las sociedades están organizadas de forma asimétrica en torno a los intereses específicos dominantes de cada estructura social, se esta reconociendo que hay un sector de la sociedad que conduce el flujo de intereses y funciones dominantes. Este poder de decisión, configura a este sector de la sociedad como una elite, las cuales forman, por una parte, su propia sociedad, y por otra, constituyen comunidades simbólicamente aisladas, atrincheradas tras la barrera material del precio de la propiedad inmobiliaria.

Esta configuración de una elite social, conduce a dos fenómenos que determinan la frontera formal del espacio de flujos: (1) una sucesión de procesos de segregación jerárquicos o una fragmentación socioespacial; y (2) la creación de un estilo de vida e idear formas espaciales encaminadas a unificar su entorno simbólico en todo el mundo.

Tomando en cuenta la última capa del espacio de flujos, se comienza a configurar y delinear lo que se entiende por relaciones de poder en el espacio de flujos, punto que se desarrolla en el siguiente apartado.

5. Ejercicio de poder

Gracias a la aparición de las tecnologías digitales en el panorama mundial, se experimentó un cambio (quizá evolución) en la manera de entender la sociedad, incluyendo su relación con la naturaleza, su estructura, cómo se concibe el tiempo y el espacio, y también la manera en que se estructura el poder:

La convergencia de la evolución social y las tecnologías de la información ha creado una nueva base material para la realización de actividades por toda la estructura social. Esta base material, compuesta por redes, marca los procesos

sociales dominantes, con lo cual organiza la misma estructura social.

(Castells, 1999, p. 507).

Para ratificar su postura, Castells (1999) declara que “la morfología de redes también es una fuente de reorganización de las relaciones de poder” (p. 507), e identifica una forma en la que se dan las relaciones de poder, en estructuras oficiales, donde las elites sociales determinan el curso de las acciones dominantes en un ámbito formal, lo que en este trabajo se ha identificado como un ámbito oficial.

Con base en la misma declaración se puede asumir que existen otras formas de reorganizar las relaciones de poder. En consecuencia al interés de esta investigación, consideramos con bastante atención las redes y espacios de flujos no oficiales, para lo cual se presenta el caso de la estructura social de los *hackers*⁸, puesto que representa un grupo cuya interacción es eminentemente digital y su conformación se remonta a finales de la década de 1950. En consecuencia, vemos la investigación antropológica de los grupos *hackers*, realizada por Contreras (2003), como una forma de adentrarse en un presente opacado y en un futuro bastante plausible, ya que los grupos *hackers* fueron los pioneros de una organización social mediante tecnologías de la información o tecnologías digitales, que se ha extendido a la mayoría de las sociedades contemporáneas.

Tomando en cuenta las características recién expuestas de los grupos *hackers*, es posible asumir sin mucha dificultad, que su estructura social es en red y su interacción esta dada por el espacio de flujos, cuyas primeras dos capas comparte con los flujos oficiales. En cuanto a la tercera capa, respecto de las relaciones de poder entre sus integrantes, Contreras (2003) plantea que:

El estatus social de un *hacker* depende, fundamentalmente se su prestigio.
(...) El cual puede ser analizado teniendo en cuenta tres grandes dimensiones:
el seguimiento de los preceptos éticos fundamentales, el nivel de dominio de la
tecnología y la capacidad de compartir con el grupo. (p. 134).

Esta forma de configurar el estatus social de un *hacker* dista mucho de segregar a otros miembros o del objetivo de constituir otra sociedad exclusiva, solo con los *hackers* de mayor estatus, como sí se recoge de la tercera capa propuesta por Castells (1999).

Por lo tanto, es posible hacer una distinción en la tercera capa del espacio de flujos (que representa las formas en que se establecen las relaciones de poder en los grupos sociales), entre un flujo oficial de uno no oficial. Tal distinción da cuenta de las diferentes formas de interacción social y poder, según sea el tipo de red y flujo, que en un flujo oficial son mayoritariamente asimétricas y jerarquizadas; en cambio en un flujo no oficial las relaciones de poder tienden a ser horizontales y en todas direcciones, lo que se denomina *heterárquico*.

⁸Los *hackers* son actual y popularmente conocidos como piratas informáticos, aunque esta caracterización esta muy alejada del significado original, asociado a la eficiencia y elegancia de un diseño computacional: “hacer un buen *hack* era un diseño original, innovador, simple y eficaz, que resolvía un determinado problema computacional de manera elegante” (Contreras, 2003, p. 32).

Síntesis de la descripción de la cultura digital

En este apartado se sintetiza la descripción realizada acerca de la cultura digital, apuntando a los aspectos relevantes de cada una de las categorías empleadas para desarrollar la descripción:

1. **Acción social:** importancia de realizar investigaciones donde se considere una componente social en la era digital, puesto que gracias a la aparición de las tecnologías digitales, nuestro mundo ha pasado a ser eminentemente social.
2. **Estructura social:** la estructura social preponderante de nuestra sociedad actual es la red (articulación entre nodos y ejes), donde el soporte material de las prácticas sociales simultáneas es una hibridación entre lo físico y lo digital. El primero entendido como un espacio social clásico o *espacio de lugares*, y el segundo como un espacio social provisto por la tecnología digital o *espacio de flujos*.
3. **Organización temporal:** temporalidad dada por el tiempo asíncrono, entendido como el orden de sucesión de las cosas, dado por una forma de secuenciar que no tiene lugar en completa correspondencia cronológica con otro proceso o con la causa que lo produce, lo cual admite y reconoce distintas maneras de secuenciar las cosas, lo cual depende del contexto tecnológico y social.
4. **Interacción social:** funcionamiento de los flujos de la red social, caracterizados por la relación e interacción entre nodos y ejes, que se dan a tres niveles: (1) soporte material; (2) espacio de flujos, constituido por nodos y ejes; y (3) determinación del curso de las acciones dominantes.
5. **Ejercicio de poder:** la morfología social en red es una fuente de reorganización de las relaciones de poder, entre las cuales se reconocen los flujos oficiales (relaciones de poder asimétricas y jerárquicas) y los flujos no oficiales (relaciones heterárquicas de poder).

2.1.3.2. Modelo sobre la Construcción social de la tecnología digital

Luego de realizar el ejercicio de describir la cultura digital y contar con los planteamientos inicial y actual de la Scot, se cuenta con el sustrato suficiente para proponer una adaptación de los principios de esta última, apuntando a la construcción social de tecnología digital.

La Scot desarrolla sus análisis antropológicos sociales con base en sus cuatro principios: *grupos sociales relevantes*, que se refiere a los distintos conjuntos de personas que inciden en la elaboración, uso o transformación de cierta tecnología; la *flexibilidad interpretativa* versa sobre los diferentes significados que existen alrededor de cierta tecnología, los cuales están asociados a grupos sociales relevantes correspondientes; *estabilización* es el momento en que se resuelve un conflicto de interpretaciones respecto a una tecnología (por imposición o consenso), con lo cual se alcanza un estado de equilibrio, el cual puede romperse con posterioridad; y *marco tecnológico*, que corresponde a las explicaciones respecto de la interacción entre los grupos sociales relevantes que inciden en el desarrollo de una tecnología, lo cual está normado por las estructuras sociales preeminentes.

Al tener como objetivo el estudio de las sociedades actuales, complejas y modernas, influenciadas en todas sus capas por las tecnologías digitales, se hace necesario repensar estos principios a la luz de las transformaciones sociales y culturales que han manifestado estas sociedades con el paso del tiempo y a causa de su interacción social.

En primer lugar, al mencionar los grupos sociales relevantes que influyen en el desarrollo de cierta tecnología, desde una mirada predigital se reconocen las diferencias de relaciones de poder entre los grupos, donde hay unos que concentran el poder (político o económico) y, en consecuencia, otros que son susceptibles de ser manipulados o fácilmente influenciados, debido a su estatus inferior en la estructura social.

Esta relación persiste en la era digital, manifestado por la dinámica que existe entre los *grupos de concentración de poder* y los grupos sociales desprovistos de poder denominados *consumidores*. Los primeros pueden ser representantes del poder político (Estados, gobiernos, organismos -de educación, por ejemplo- dependientes del Estado, organismos internacionales de articulación entre diferentes Estados, etc.) o del poder económico (empresas de grandes dimensiones, conglomerados de empresas, organismos educacionales dependientes de entes privados, *lobbistas* que realizan acciones dirigidas a influir ante la administración pública para promover decisiones favorables a los intereses de un sector concreto de la sociedad, etc.). En el caso de los consumidores, se les atribuye esta denominación puesto que al estar en una posición de desventaja social frente a los grupos que concentran el poder, sólo pueden acceder a los recursos que tales grupos están dispuestos a entregarles, los cuales son limitados y a veces insuficientes, y por lo tanto se gastan, se extinguen o se destruyen.

Gracias a las tecnologías digitales, los grupos de concentración de poder han actualizado la forma de brindar sus servicios, logrando una marcada alza de eficiencia y percepción de satisfacción entre los consumidores. Los ejemplos de esta situación son numerosos, en los cuales están reflejados la manera en que el servicio fue subsumido por una estructura

superior, o el completo rechazo a su estrategia predigital. Algunos de ellos se listan en Tabla 2.2:

Servicio	Era predigital	Era digital
Alquiler de producciones audiovisuales	Blockbuster®	Netflix®
Comunicación	Llamadas únicamente por teléfono, locales o de larga distancia	Videollamadas o llamadas utilizando Internet
Ubicación espacial	Uso de mapas de ciudades o guías impresas, para buscar o ubicar direcciones	Uso de la geolocalización para buscar o ubicar direcciones, además de trazar rutas considerando el uso de transporte público, bicicleta, caminar, vehículos particulares
Servicio de biblioteca	Uso de bibliotecas analógicas	Búsqueda de información en catálogos virtuales, acceso a información en la red, etc.
Servicio de correspondencia	Mensajería por correspondencia (telégrafo, cartas)	Mensajería por servicios de chat
Servicio de movilización urbana	Servicio de taxi regular	Servicio de taxi por demanda y solicitud por dispositivo digital (Uber®)
Televisión	Contenido televisivo en vivo o con transmisión diferida	Contenido audiovisual a disponibilidad del tiempo del usuario (YouTube)
Interacción social cotidiana	Clubes de intereses	Redes sociales
Servicio bancario	Transacciones bancarias presenciales	Transacciones bancarias presenciales y digitales
Servicios de librería	Lectura analógica	Lectura en tinta digital
Educación	Educación presencial en escuelas o por correspondencia	Educación a distancia

Tabla 2.2: Evolución en el servicio que entregan los grupos de concentración del poder a los consumidores.

Es importante notar que a pesar de la actualización de los servicios entregados por los grupos de concentración de poder, lo cual es percibido por los consumidores con un mayor grado de satisfacción, el poder sigue atendiendo a sus propias necesidades, ya

sean institucionales (poder político) o corporativas (poder económico). Esto provoca un fenómeno que en el corto plazo se muestra como una estrategia que satisface necesidades de los consumidores mediante la entrega de un mejor servicio, sin embargo en un mediano o largo plazo se traduce en problemas éticos, morales e incluso legales⁹, como se muestra en la Tabla 2.3:

Servicio	Representante en la era digital	Problema
Alquiler de producciones audiovisuales	Netflix®	Los contenidos audiovisuales están disponible según las regiones, lo cual provoca discriminación a ciertos sectores del planeta donde los contenidos llegan atrasados en varios meses o simplemente nunca están disponibles
Comunicación	Videollamadas o llamadas utilizando Internet	Las compañías que brindan servicio de video llamadas o llamadas por Internet, las empresas que dan servicio de Internet o los gobiernos, disponen de mecanismos para capturar información de los consumidores sin su consentimiento, lo cual vulnera el derecho a la privacidad de las personas. En Martínez y otros (2017) se presenta un informe respecto al caso de las telecomunicaciones en México en la era digital.

Tabla 2.3: Problemas presentados por los servicios entregados en la era digital, que subyacen a una mentalidad predigital.

En este caso, las tecnologías digitales son empleadas para mantener el *statu quo* de la estructura social en cuanto a sus relaciones de poder, y de la cultura en general. Sin

⁹El caso de la reforma en telecomunicaciones en México es un ejemplo de la pugna entre los consumidores y los grupos de concentración de poder. Para más detalles se recomienda el libro de Martínez, A., Osorno, G., y Leonardo, I. (Eds.). (2017). *Derechos digitales en México: ganadores y perdedores de la reforma en telecomunicaciones*. (Grupo Cult). Ciudad de México, México: Horizontal. Recuperado de horizontal.mx

embargo, las tecnologías digitales (con Internet a la cabeza) también se han consolidado como potentes herramientas que han servido de catalizador social, para que las personas y sus comunidades generen una estructura social paralela a la oficial, donde las relaciones de poder entre los diferentes grupos sociales relevantes tienden a democratizarse. Esto provoca una nueva relación entre los diferentes grupos que inciden en la construcción de una tecnología digital, entre los *desarrolladores* de la tecnología digital y los *usuarios* de tal tecnología. Por desarrolladores se entiende al grupo de individuos que poseen los conocimientos éticos, técnicos y sociales para programar o diseñar cierta tecnología digital. En cuanto a los usuarios, se les denomina de esta manera ya que tiene la potestad de decidir si usa o no la tecnología, y a diferencia de los consumidores, el usuario puede incidir en los cambios que se efectúan a la tecnología mediante vías de comunicación colectiva entre los usuarios y los desarrolladores.

Este tipo de interacción entre desarrolladores y usuarios fomenta una relación social donde la estructura de poder es horizontal y las interacciones sociales son en todas direcciones. A tal relación social se le denomina *heterárquica*. Además, cabe destacar que la conformación de ambos tipos de grupos sociales relevantes es dinámica, por lo que un sujeto puede pertenecer a ambos tipos de grupos en un mismo o en distintos momentos y fases de la tecnología. Esto se debe a que la manera en que las personas participan en una comunidad es completamente voluntaria, tanto en afiliación como en grado y momentos de participación.

Hay numerosos ejemplos de la relación desarrolladores-usuarios en la construcción social de una tecnología digital, de los cuales mencionamos en la Tabla 2.4 algunos casos insignes que permiten mostrar las características de esta particular manera de construir una tecnología digital, a lo cual nos referimos como no oficial:

Servicio	TD oficial	TD no oficial
Programas computacionales	<i>Software</i> privativo	<i>Software</i> libre
Derechos sobre una obra	Registro de patente y derechos de autor (<i>Copyright</i>)	Licencias para compartir (Creative Commons )
Servicio de enciclopedias	Enciclopedias digitales en versión acabada (Encarta®)	Enciclopedias digitales construidas progresivamente por la comunidad global (Wikipedia y todos los servicios de Wikimedia)

Tabla 2.4: Tecnologías digitales oficiales y no oficiales.

El primer ejemplo presentado en la Tabla 2.4 es uno de los más significativos y representativos de las tecnologías digitales construidas socialmente de manera no oficial, quizá por ser el primer atisbo histórico de la relación desarrolladores-usuarios que estamos

caracterizando, que además surge como respuesta al yugo e imposición del poder oficial, vale decir, como una suerte de emancipación digital. Además, este caso presentó un ejemplo a seguir por varias comunidades durante las décadas siguientes, logrando influir por ejemplo en la constitución de la comunidad Creative Commons¹⁰, así como lo declaran Stacey y Hinchliff Pearson (2017) aludiendo a que las licencias Creative Commons se basaron en los estándares para compartir, que con anterioridad había propuesto la comunidad del *software* libre, es decir, la Free Software Foundation¹¹:

En 2001, Creative Commons fue creado como una organización sin fines de lucro para apoyar a todos aquellos que querían compartir contenido digital. Un conjunto de licencias de Creative Commons fue modelado con base en las de *software* de código abierto, pero para uso con contenido digital en lugar de código de *software*. Las licencias dan a todos, desde creadores individuales a grandes empresas e instituciones, una forma sencilla y estandarizada de otorgar permisos de *copyright* a su trabajo creativo. (pp. 10 - 11)

De esta manera, hemos logrado distinguir entre dos tipos de relaciones entre grupos sociales relevantes en la construcción de tecnología digital. Por una parte la relación *grupos de concentración de poder - consumidores*, propias del ámbito oficial, la cual representa la manera en que los sectores que concentran el poder, ya sea político o económico, usa o construye tecnología digital. Por otra parte se tiene la relación *desarrolladores - usuarios*, propias del ámbito no oficial, la cual ejemplifica la forma en que las personas han estado construyendo tecnología digital de manera independiente de lo oficial, libre, abierta y colaborativa, con el propósito de materializar las soluciones a sus problemáticas.

En cuanto a estructura, en el ámbito oficial se pone en funcionamiento estructuras rígidas y herméticas, con claras divisiones entre el los grupos de poder y los consumidores. Por el contrario, en el ámbito no oficial, las comunidades se estructuran como una red, un sistema muy dinámico en su conformación y desarrollo; abierto a la incorporación o desafiliación de sus miembros según sus propios intereses, lo cual provoca que se expanda según los intereses de la comunidad. Estas características fomentan que la red sea un sistema susceptible de innovarse sin amenazar su equilibrio.

A pesar que tanto en el ámbito oficial como en el no oficial se produce tecnología digital, cuando hablamos de la *construcción social de la tecnología digital* nos estaremos refiriendo única y exclusivamente a la construida por comunidades no oficiales, pues hasta este momento histórico son las únicas que ponen en funcionamiento la relación constitutiva entre tecnología digital y cultura digital. En esta última frase se alude al propósito declarado por la Scot en cuanto a que sus análisis deben mostrar cómo la sociedad esta inserta en la tecnología, así como lo plantea Pinch (2015) en cuanto a las perspectivas antropológicas que estudian la relación entre la tecnología y la cultura, y en particular para la Scot: “la parte más difícil de cualquiera de dichos análisis, por

¹⁰Sitio web de la comunidad Creative Commons: creativecommons.org

¹¹Sitio web de la Free Software Foundation: fsf.org

supuesto, es demostrar la manera en que los artefactos mismos contienen a la sociedad inmersa en ellos” (p. 25). Esto quiere decir que el objetivo de la Scot es estudiar la manera en que la sociedad construye la tecnología, por lo cual sus análisis no sólo se quedan a un nivel de interacción social para dar cuenta de cuáles grupos sociales relevantes estuvieron en contacto cuando se estaba gestando cierta tecnología, sino que además se trata de desentrañar cuáles son las condiciones sociales que dieron paso a esta construcción.

En sintonía con el propósito declarado por Pinch (2015) para los análisis sobre la construcción social de la tecnología, planteamos un *modelo de construcción social de la tecnología digital* para estudiar la manera en que la tecnología construida por las comunidades digitales. La fundamentación de ese modelo se encuentra en los principios de la Scot (ver en la sección 2.1.2.2), los cuales nos permiten indagar en la manera en que los artefactos son construidos socialmente; y en la descripción de la cultura digital realizada en este escrito (ver en la sección 2.1.3.1), que nos permite entender el funcionamiento de la sociedad y su cultura digital, vigente luego de la 3RH.

El modelo esta confeccionado para analizar la construcción social de la tecnología digital atendiendo a dos grandes dimensiones, la componente social y la componente técnica, las cuales se articulan de manera dialéctica, para explicar cómo se construye socialmente la tecnología digital, lo cual denominamos marco tecnológico, término que retomamos de los principios de la Scot.

La componente social del modelo atiende a la constitución de la comunidad, la cual se estructura a partir de la participación de diferentes grupos sociales relevantes, que se aúnan en una estructura social superior gracias a que todos ellos persiguen un interés común, identificado como el propósito comunitario.

La componente técnica del modelo alude a la ruta de desarrollo de la tecnología digital denominada *versioning*, debido a la temporalidad dada por el tiempo asíncrono, en donde la forma de secuenciar las cosas depende del propósito de la situación y su contexto. En cuanto a la tecnología digital, esta se crea, desarrolla y transforma mediante sus diferentes versiones, generadas a través estrategias de interacción social que se dan de manera simultánea: la estabilización progresiva de las versiones y la revisión retrospectiva de cada versión. Cabe destacar que ambas estrategias son abiertas y favorecen la participación de todos los miembros de la comunidad.

El marco tecnológico se refiere a la dialéctica técnico-social que permite explicar cómo se construye socialmente la tecnología digital, a través de estudiar la forma en que la tecnología es moldeada socialmente, a la vez que la sociedad es moldeada tecnológicamente (Bijker, 1995), empleando la estructura social en red como marco explicativo de esta dialéctica.

Componente social del modelo

En primer lugar, la Scot menciona que en la construcción social de la tecnología intervienen diferentes grupos sociales relevantes, los cuales se conforman como una agrupación de personas que comparten interpretaciones respecto de la tecnología, tanto en su proceso de diseño, de desarrollo como de transformación. En términos generales, se pueden identificar

dos tipos de grupos sociales relevantes en la construcción social de tecnología digital: los desarrolladores y los usuarios. Los desarrolladores corresponden al grupo que cuenta con los conocimientos éticos, técnicos y sociales para programar o diseñar cierta tecnología digital. Por su parte, los usuarios son denominados así ya que tiene la potestad de decidir si usan o no la tecnología y, cómo la usan (para más detalles ver la descripción de estos grupos al comienzo de esta sección en 2.1.3.2).

Es importante mencionar que si bien la identificación general de desarrolladores y usuarios como grupos sociales relevantes refleja de manera sensible la realidad la constitución de comunidades digitales que construyen tecnología, al indagar en la construcción social de tecnologías digitales particulares, se espera poder identificar grupos sociales más específicos, que den más profundidad a la caracterización de los grupos sociales relevantes.

Cabe destacar también, que la conformación de estos grupos es dinámica y flexible, vale decir, los miembros de cada grupo pueden pertenecer a uno u otro, o incluso a ambos. Además la afiliación a los grupos es completamente voluntaria en tanto participación y grado de participación.

La variedad de grupos sociales relevantes que están involucrados en la construcción de la tecnología digital, esta completamente relacionada con las variadas interpretaciones que los sujetos y sus grupos manifiestan acerca de ella, las cuales pueden ser cercanas, o por el contrario, interpretaciones opuestas respecto de la tecnología. Esto alude al principio de flexibilidad interpretativa de la Scot. Sin embargo, a pesar de esta variedad de interpretaciones, los diferentes grupos sociales relevantes se articulan como una unidad social más amplia (comunidad) para construir tecnología digital, puesto que todos persiguen un propósito común respecto ella. Esta articulación se produce mediante el aporte de las diversas interpretaciones que cada grupo pueda tener respecto de la tecnología, lo cual se logra comunicar a toda la comunidad gracias a la estructura social en red, que promueve las relaciones heterárquicas.

Las explicaciones que brindan los principios de grupos sociales relevantes y flexibilidad interpretativa de la Scot, nos permiten reconocer la manera en que la sociedad se organiza para construir tecnología en la era digital.

En cuanto a la interacción y articulación de la comunidad, se relaciona con la interacción social en espacios de flujos y la estructura social en red, propias de la cultura digital, que, como ya se ha mencionado, fomentan la interacción de diversos grupos sociales que están detrás de un mismo propósito, aunque cada uno de ellos pueda tener su propio objetivo en cuanto al desarrollo de la tecnología digital (ver imagen 2.1).

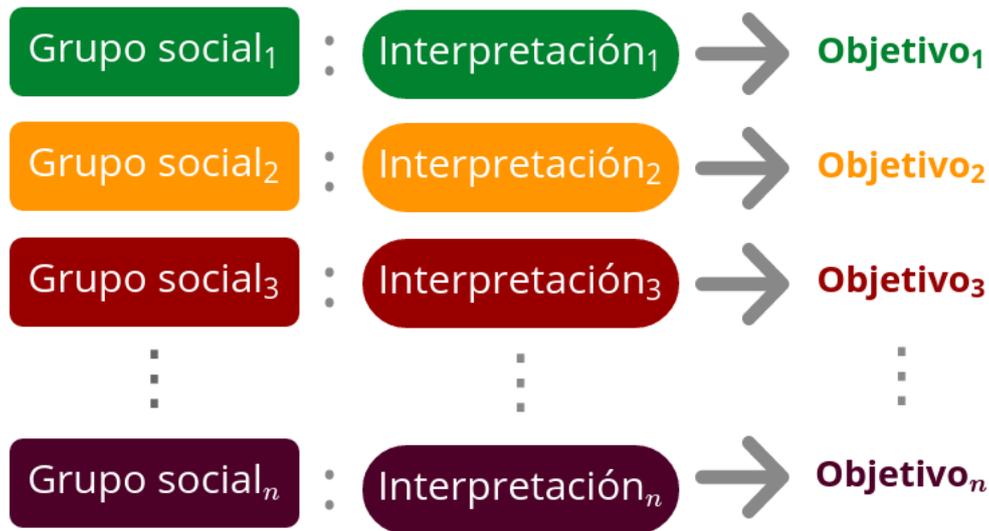


Imagen 2.1: Constitución grupos sociales relevantes.

Reconocemos la dualidad propósito/objetivo como un rasgo de las comunidades digitales relacionada con la colaboración, característica relevante en las comunidades que manifiestan una cultura digital (Contreras, 2003). Para hablar de colaboración, nos basamos en las ideas de trabajo colaborativo que Boavida y da Ponte (2002) desarrollan para el campo de la investigación, aludiendo que:

El simple hecho de que diversas personas actúen en conjunto, no significa que se este, necesariamente, ante una situación de colaboración (...)

Para que haya un proyecto colectivo, debe existir un *objetivo general*, o por lo menos, un *interés común* compartido por todos. Además, pueden reconocerse objetivos específicos para cada uno de los miembros del equipo. En realidad, estos objetivos individuales existen siempre, de manera más explícita o implícita, consciente o inconsciente. Lo que varía es la forma en que son oficialmente reconocidos en el seno del proyecto.

(Boavida y da Ponte, 2002, pp. 45 - 48)

Esta cita nos permite corroborar que la dualidad propósito comunitario (interés común)/objetivos individuales o grupales, es un componente necesario y muy importante para que emerja el trabajo colaborativo. La relevancia del propósito comunitario es su rol unificador de los individuos y los grupos sociales en una comunidad, por lo que se podría declarar que el propósito comunitario funciona como pegamento social de la comunidad (ver imagen 2.2).



Imagen 2.2: Propósito comunitario.

Por otra parte, Boavida y da Ponte (2002) pone atención en que la existencia de un interés común y el reconocimiento de objetivos individuales no es suficiente para propiciar un trabajo colaborativo, también es necesario cuidar las relaciones sociales y de trabajo:

Las formas de trabajo y de relación entre los miembros del equipo también tienen que propiciar el trabajo conjunto (...) Subyacente a la idea de colaboración, también está una cierta mutualidad en la relación: todos tienen algo que dar y algo a recibir del trabajo conjunto (...) todos los participantes tienen un papel reconocido en el proyecto y se benefician de manera inequívoca con su realización. (Boavida y da Ponte, 2002, p. 48)

En esta cita Boavida y da Ponte (2002) mencionan que las relaciones (sociales y de trabajo) necesitan tener una mutualidad, para favorecer la colaboración en un proyecto. Desde el estudio de las comunidades digitales ha sido posible reconocer que las relaciones sociales entre sus miembros está marcada por la heterarquía, la cual establece algo más que la mutualidad entre sus miembros, tendiendo a la horizontalidad en términos de poder y logrando una interacción multidireccional, propio del espacio de flujos. En síntesis, las relaciones heterárquicas son un ingrediente necesario en la interacción social dentro una comunidad digital, para lograr establecer un trabajo colaborativo.

De esta manera, la constitución de las comunidades digitales se da a partir de la articulación de diferentes grupos sociales relevantes, los cuales poseen una interpretación particular respecto a cierta tecnología digital, la cual está estrechamente ligada al objetivo que cada grupo asigne a esta. Sin embargo y, dada la dinámica del trabajo colaborativo, todos los grupos están aunados por un mismo propósito respecto de la tecnología digital, el cual los articula y convierte en una comunidad. Esta idea se plasma en la figura 2.3.

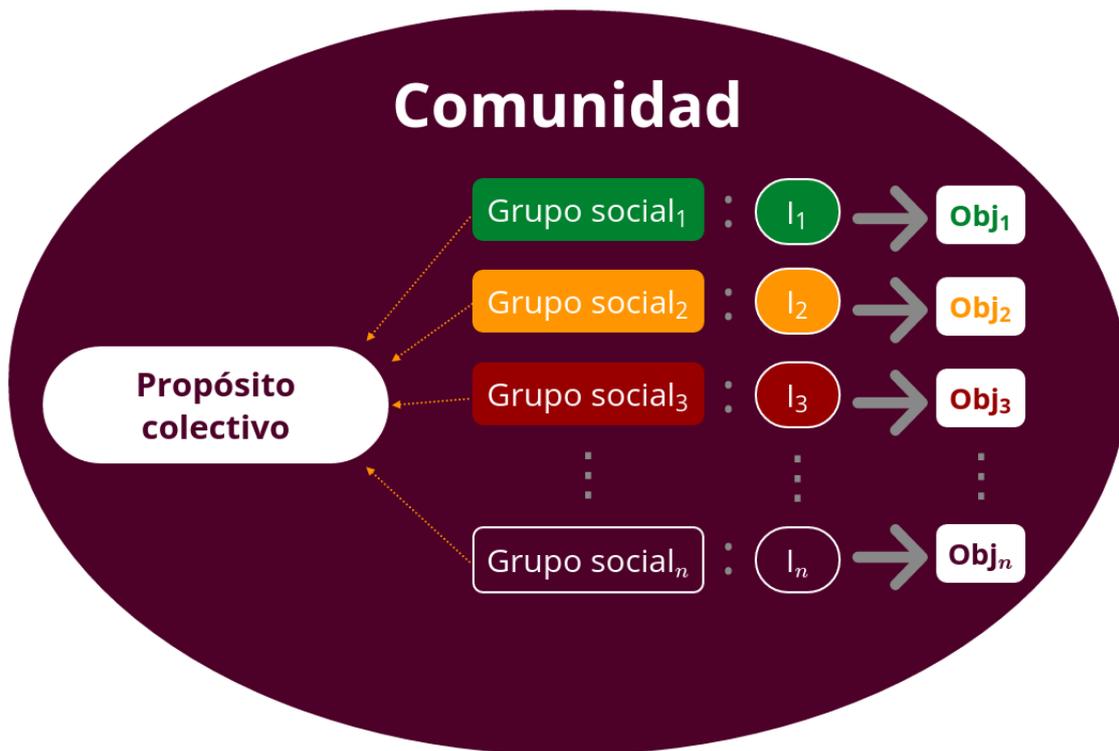


Imagen 2.3: Constitución de las comunidades digitales.

Componente técnica del modelo

En cuanto al proceso de construcción de la tecnología, todos los niveles sociales de la comunidad (individuos y grupos sociales) se organiza para comunicar las diversas interpretaciones, las cuales se aglomeran en proyectos abiertos que, a su vez, se convierten en modelos de la tecnología digital abiertamente disponibles.

La característica de *abierto* corresponde a un rasgo importante en las comunidades digitales, el cual promueve las ideas que encuentran su origen en el *software* libre (ver sección 1.3.3), sobre promover la solidaridad social entre las personas y las comunidades, a través de la libre o abierta disponibilidad de la propia tecnología digital, así como de su código fuente, para el caso de los *software*, o de las condiciones de diseño, para el caso de otras tecnologías digitales. En el proceso de construcción social de tecnología digital se manifiesta en dos ámbitos. En primer lugar, se identifica en la posibilidad que cualquier integrante de la comunidad pueda comunicar sus ideas, inquietudes o necesidades, las cuales son recogidas y consideradas para el diseño, desarrollo o transformación de la tecnología digital, es decir, existe una abierta comunicación y recepción de las interpretaciones. En segundo lugar, cualquier integrante de la comunidad puede acceder a cualquier proyecto de la comunidad, para formar parte o, simplemente, para enterarse del proceso que se esta llevando a cabo, es decir, existe acceso abierto a las instancias de construcción de la tecnología, como a la tecnología misma.

De esta manera, en el proceso de construcción de la tecnología se ve concretada la frase respecto a que las comunidades digitales están materializando las soluciones a sus

problemáticas, ya que a partir de sus interpretaciones respecto de la tecnología, comunican sus necesidades, inquietudes o ideas, las cuales son organizadas en interpretaciones afines para constituir proyectos. Los proyectos son la instancia en que se alcanzan consensos entre las diferentes interpretaciones, para luego hacer concreta esta estabilización en un modelo de la tecnología. En síntesis, este es un proceso donde las interpretaciones son concretadas en modelos de la tecnología digital (ver imagen 2.4).



Imagen 2.4: Proceso elemental de construcción de tecnología digital.

El principio de estabilización de la Scot nos ayuda a explicar este proceso, puesto que se refiere al proceso en el cual se alcanza un consenso o imposición de interpretación respecto de una tecnología, cuando distintos grupos sociales relevantes tienen diferentes interpretaciones de una misma tecnología. En el caso de las comunidades digitales, la imposición de interpretaciones de los grupos de concentración de poder ha dejado de tener un rol central en la evolución de la tecnología, ya que todas las interpretaciones alrededor de esta se consideran válidas, susceptibles de ser atendidas y preservadas.

Esto se debe a que el uso de la red dado por la cultura digital, provoca un flujo que se ha denominado no oficial (entendido como el tipo de interacción predominante en esta estructura social) que fomenta una distribución del poder horizontal. Esta tendencia a eliminar las barreras jerárquicas impulsa la construcción colaborativa de la tecnología digital entre todos los grupos que constituyen la comunidad, donde cada grupo e integrante de la comunidad participa en el grado que quiera y este en condiciones de aportar.

Esta manera de construir la tecnología por comunidades digitales permite ir delineando su rumbo que se da y se va configurando en respuesta a las necesidades e inquietudes de las personas, los grupos y la comunidad. Esto se realiza mediante un proceso de estabilización progresivo y de revisión retrospectiva: el primero alude a la estrategia con la cual se traza la ruta de desarrollo de la tecnología, entendiendo que sus distintas versiones representan un momento de *estabilidad parcial o relativa*; el segundo corresponde a un proceso de revisión de los momentos de estabilidad parcial, ya que las distintas versiones de la tecnología se van *estabilizando progresivamente* (ver imagen 2.5).

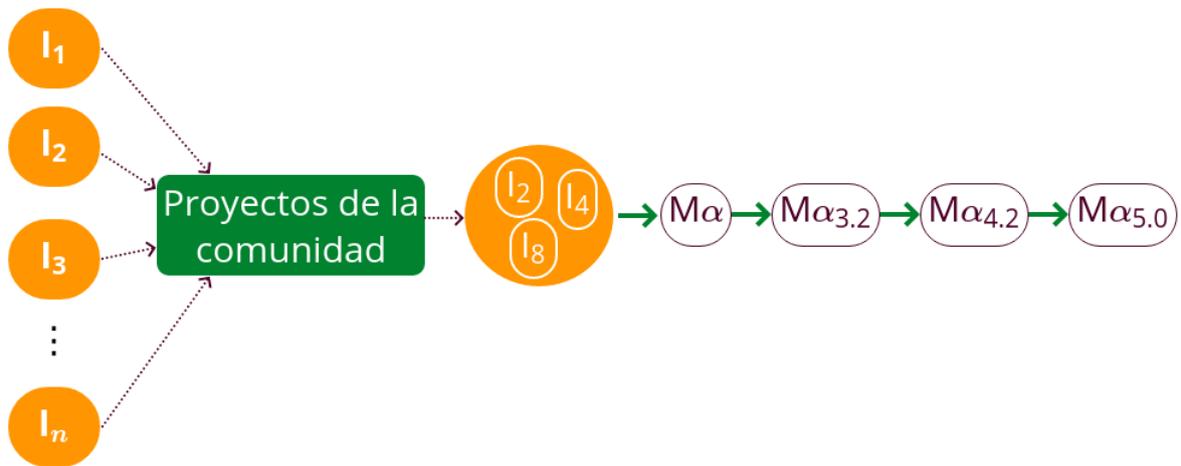


Imagen 2.5: Proceso de estabilización parcial y progresiva de la tecnología digital.

Debido a que la interacción social en las comunidades digitales es multidireccional y las relaciones de poder son horizontales, se asume de manera natural y, más aún, se propicia el trabajo colaborativo y abierto entre todos los miembros y los grupos sociales, la comunidad busca atender todas las interpretaciones respecto de la tecnología digital, ya que de esa manera se atienden verdaderamente las necesidades e inquietudes de las personas y sus grupos sociales. De esta manera, es natural que las comunidades digitales construyan varios modelos de tecnología digital (ver imagen 2.6), donde cada uno de ellos representa un conjunto de interpretaciones afines concretadas materialmente, las cuales quedan disponibles de manera abierta, en tanto diseño como en producto.

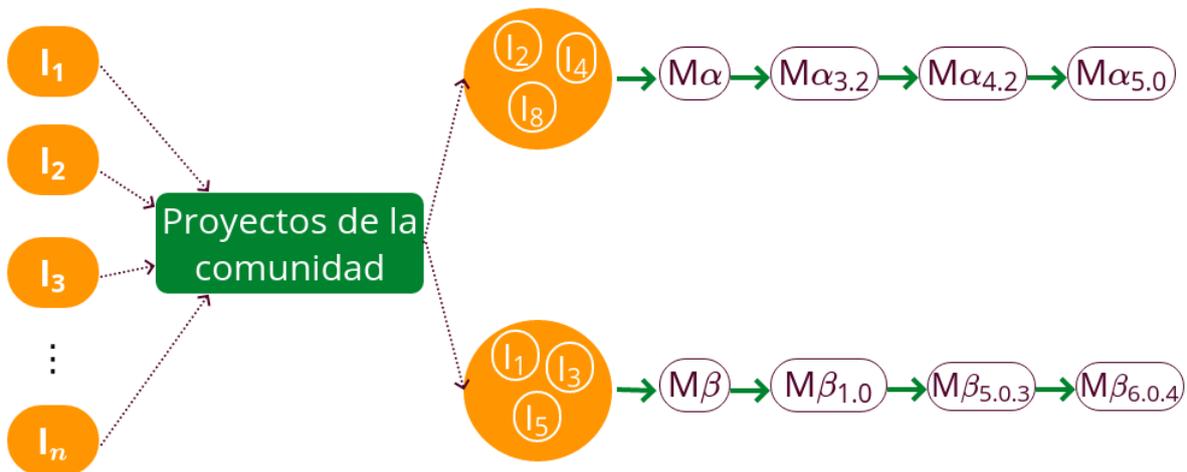


Imagen 2.6: Construcción de diferentes modelos de tecnología digital.

Esta manera de trazar la ruta de desarrollo de la tecnología digital es posible también, gracias a la nueva conceptualización de la temporalidad, que hemos planteado como un tiempo asíncrono, donde la forma de secuenciar las cosas depende del propósito de la situación y su contexto. En este caso la manera de secuenciar mediante una estabilización

progresiva y una revisión retrospectiva configura un tiempo de versiones o *versioning* (ver imagen 2.7).

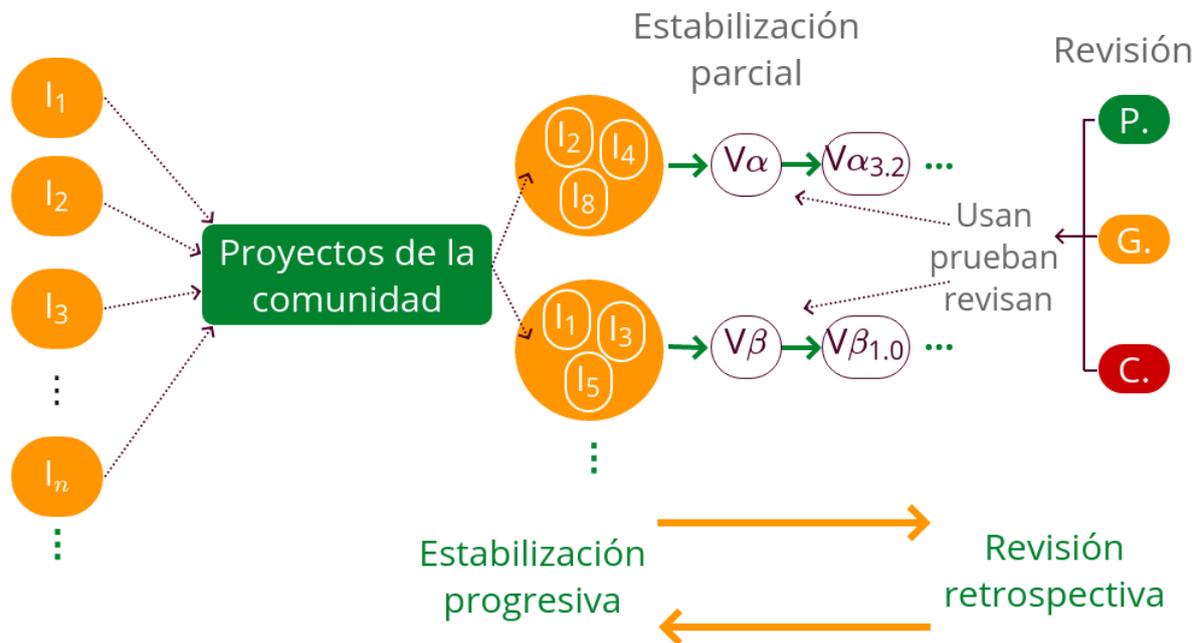


Imagen 2.7: Ruta de desarrollo de las comunidades digitales.

Estructura social regente: la inteligencia-red

Como se reportó en la sección 2.1.3.1, la estructura social regente en la era digital es la sociedad red, constituida por un conjunto de nodos interconectado mediante ejes, donde los nodos corresponden a puntos claves en la estructura social que articulan y organizan actividades relevantes para la comunidad, alimentando a otros nodos y generando una interacción en flujos multidireccionales. Debido a la importancia de cada nodo para el funcionamiento de la red, las relaciones de poder entre los nodos tienden a ser democráticas y horizontales, a diferencia de las relaciones jerárquicas y verticales representativas de la era predigital (ver comparación en imagen 2.8).

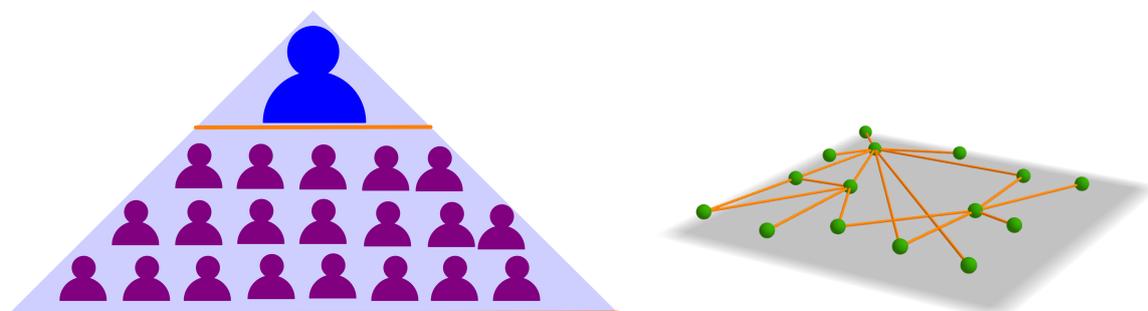


Imagen 2.8: Estructuras sociales preeminentes en la era predigital (a la izquierda) y en la era digital (a la derecha).

Específicamente, consideramos que la estructura social tipo red que norma el proceso de construcción social de tecnología digital es la *inteligencia-red*, propuesta por Contreras (2003) para el caso de las comunidades *hacker*, aunque en términos generales aplica para las comunidades digitales que tienen como propósito unificador la creación de conocimiento:

En esta el conocimiento juega un rol fundamental, puesto que las actividades sociales del grupo se articulan sobre la base de su creación y distribución continua. Creo que se trata de una particular forma de construcción social de conocimiento, configurando una especie de “amplificador operacional” en el que el conocimiento es a la vez el origen y el destino de las transformaciones.
(Contreras, 2003, p. 138)

De esta manera, la finalidad de las interacciones entre sus integrantes “no es la construcción de un objeto determinado como fin en sí mismo, sino la resolución de un problema [o atender a necesidades] que la comunidad considera importante” (Contreras, 2003, p. 137), ya que tal problema o necesidad a atender actúa como motor de la acción colectiva. Otra característica de las comunidades cuya morfología social es la inteligencia-red corresponde a su “tendencia a crecer exponencialmente tanto en el número de miembros que aglutinan como en la calidad del conocimiento generado” (Contreras, 2003, p. 139), ya que, como dice Castells (1999) la red “es un sistema muy dinámico y abierto, susceptible de innovarse sin amenazar su equilibrio” (p. 507).

Por lo tanto, las necesidades de los miembros y de los grupos sociales, plantean proyectos de la comunidad, y dado que tales necesidades (inquietudes, problemas o ideas) son el motor de la acción colectiva, existe una completa preocupación por desarrollar los proyectos, para así atender a las necesidades. Es importante recalcar que dadas las relaciones heterárquicas características de las comunidades digitales, los proyectos son abiertos a la incorporación y revisión de cualquier miembro, y colaborativos, en el sentido de desarrollarlos por diferentes objetivos personales, aunque colaborando con un propósito común a toda la comunidad. Todo este proceso, tiene como soporte material en la hibridación entre los espacios físicos y los espacios digitales, tal como se ilustra en la imagen 2.9.

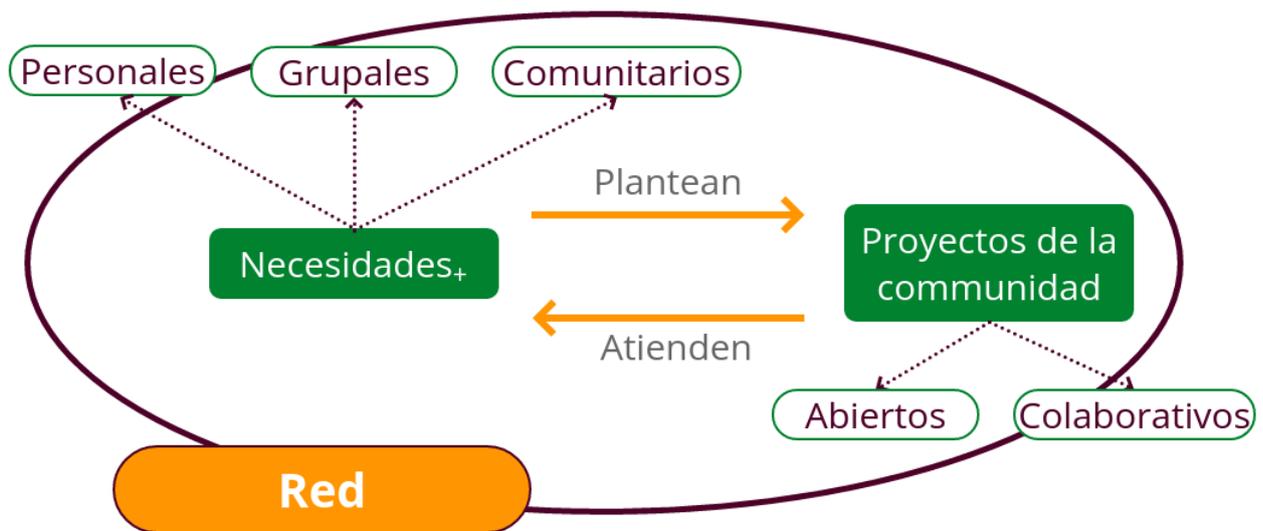


Imagen 2.9: Inteligencia-red.

Con base en las componentes social y técnica del modelo, junto con la estructura social de inteligencia-red, es posible ensayar explicaciones sobre cómo se construye socialmente la tecnología digital.

Por una parte, la posibilidad que tienen las comunidades digitales de materializar las soluciones a sus problemáticas y hacerlo de manera colaborativa, provoca que el desarrollo y la misma tecnología digital adquieran características sociales de acceso, uso y distribución abierta, es decir, cualquier persona puede tener acceso libre a la tecnología construida por una comunidad digital, usarla o modificarla cuando y como estime conveniente y hacer que otras también puedan acceder a ella. Por lo tanto, es posible reconocer que la tecnología digital es moldeada socialmente por las comunidades digitales, de tal manera que se construya como una tecnología abierta.

Por otra parte, el soporte material que la tecnología digital le brinda a las personas, los grupos sociales y las comunidades, influyen en sus relaciones e interacciones. La incorporación de la tecnología digital a la vida privada, laboral y social de las personas a ido configurando espacios de interacción globales, favoreciendo las relaciones sociales horizontales y la interacción multidireccional. En definitiva, reconocemos que la sociedad es moldeada tecnológicamente configurando una cultura digital, de la cual ya se dio cuenta en la sección 2.1.3.1.

En conclusión, el modelo de construcción social de la tecnología digital se sintetiza así:

- Constitución de la comunidad digital:
 1. Identificación de grupos sociales relevantes.
 2. Flexibilidad interpretativa.
 3. Identificación del propósito comunitario.
- *Versioning*:
 1. Estabilización progresiva.

2. Revisión retrospectiva.

■ Marco tecnológico:

1. ¿Cómo se moldea socialmente la tecnología?
2. ¿Cómo se moldea tecnológicamente la sociedad?

2.1.3.3. Construcción social de GeoGebra

Con el modelo de construcción social de la tecnología digital, pasamos a caracterizar a GeoGebra como una tecnología digital construida socialmente, por una comunidad digital¹².

Comunidad digital

La comunidad GeoGebra se gesta sólo después que GeoGebra (como programa computacional) pasara a ser *software* libre a partir de 2003, pues se aprovechó las implicaciones sociales que tiene este tipo de *software* (ver sección 1.3.3), entre ellas, su potencial para compartir (Hohenwarter, 2013). En el año 2005 se crea el Foro de usuarios¹³ y una Wiki¹⁴, espacios que configuran la primera versión del espacio de flujos de la Comunidad GeoGebra.

A continuación se caracterizan aspectos esenciales en el propósito de estudiar la constitución de la Comunidad GeoGebra, los cuales corresponden a los grupos sociales relevantes, la flexibilidad interpretativa y el propósito comunitario:

1. Grupos sociales relevantes: A lo largo del desarrollo de la Comunidad GeoGebra se pueden identificar varios grupos sociales relevantes que constituyen la Comunidad, donde sus integrantes pueden pertenecer a diferentes grupos según sean sus intereses, y participan en el grado que cada uno considera pertinente. Todo esto es relativo a los objetivos de cada grupo los cuales están relacionados a los diferentes significados que manifiestan respecto de GeoGebra.

Al respecto detectamos al menos dos fuentes de articulación e interacción de los grupos sociales relevantes: por una parte, desde una vertiente más clásica o *espacio de lugares*, donde las personas se reúnen físicamente para compartir, discutir y trabajar; por otra parte, están los espacios que brinda el soporte digital, o espacio de flujos, cuyo representante insigne es el sitio web de GeoGebra (www.geogebra.org).

En el espacio de lugares se articulan nodos como los talleres sobre el uso técnico o educativo de GeoGebra, las charlas y conferencias de investigaciones sobre su impacto educativo, los centros representantes de la Comunidad GeoGebra alrededor del mundo, los llamados Institutos GeoGebra locales y, por sobre todo, las clases donde se utilicen recursos GeoGebra.

En el espacio de flujos se encuentran y organizan varios grupos sociales relevantes del espacio de lugares, y otros inéditos que son propios de la organización en este espacio digital. Por ejemplo, la wiki (wiki.geogebra.org), con sus tutoriales y manuales, representan un paralelo complementario de los talleres técnicos o educativos sobre GeoGebra; el mapa de eventos (events.geogebra.org) muestra un catastro de las actividades realizadas y a realizar alrededor del mundo en pos de GeoGebra; otro

¹²Los primeros ensayos sobre el estudio de GeoGebra como una construcción social, fueron reportados en Rubio-Pizzorno, S. y Montiel, G. (2017). GeoGebra as a socially constructed technology: An anthropological analysis. En *GeoGebra Global Gathering GeoGebra Book* (p. 5). Linz, Austria: GeoGebra Team. En geogebra.org/m/Mvpvu5v6

¹³Página del Foro GeoGebra help.geogebra.org

¹⁴Página de la Wiki de GeoGebra wiki.geogebra.org

mapa muestra la ubicación de los Institutos GeoGebra locales alrededor del mundo (www.geogebra.org/institutes), donde cada uno cuenta con una página de perfil, que hace las veces de página oficial de cada Instituto GeoGebra; en Materiales GeoGebra (geogebra.org/materials) se despliega un repositorio y buscador de recursos elaborados con GeoGebra y que son reportados por los miembros de la Comunidad para compartir de manera libre y abierta con los otros miembros.

Los espacios reportados, ya sean lugares o flujos, corresponden a los espacios de interacción y articulación de los distintos grupos sociales relevantes, de los cuales se identifican:

- **Equipo central:** grupo constituido de los miembros con roles administrativos de la Comunidad, como el CEO o el creador del *software*. Este grupo se encarga de organizar y establecer los preceptos filosóficos de la Comunidad, lo cual se puede revisar en geogebra.org/license.
- **Desarrolladores:** grupo integrado por las personas que realizan la programación del software y estructura del sitio web. Se articulan en el espacio digital dev.geogebra.org
- **Profesores:** principal grupo objetivo de los aportes y cambios de la Comunidad GeoGebra, bajo el lema de mantener todo lo más simple para el profesor.
- **Contribuyentes:** conjunto de entusiastas de las matemáticas que elaboran diseños con GeoGebra y los comparten de manera libre y abierta para toda la comunidad, a través de la plataforma web geogebra.org/materials
- **Traductores:** grupo de miembros de la Comunidad GeoGebra que ayudan en la labor de traducción del software, las páginas del sitio web y los recursos oficiales de GeoGebra. La traducción se hace generalmente desde el inglés a los diferentes idiomas registrados y reportados por la Comunidad. El grupo de traductores esta constituido por un subgrupo por cada idioma, donde cada subgrupo tiene sus propias instancias de organización y trabajo, como Grupos GeoGebra o sitios web propios.
De manera general, las tareas de traducción se sintetizan en la página wiki.geogebra.org/en/Translation:GeoGebra
- **Investigadores:** este grupo social relevante se ha estructurado más en los espacios tradicionales, como congresos, simposios y eventos académicos en general. En tales espacios se comparten ideas, avances y resultados de investigaciones sobre GeoGebra o donde este a estado involucrado en algún sentido.
En este grupo también cabe destacar las revistas que se han fundado alrededor del funcionamiento de la Comunidad GeoGebra, como es el caso de la Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo (revistas.pucsp.br/index.php/IGISP)
- **Blogueros:** la Comunidad GeoGebra tiene un medio de comunicación de las principales novedades y eventos alrededor de GeoGebra. La publicación de información y nuevos eventos esta a cargo de los blogueros, y al igual que en el

grupo de traductores, existen subgrupos según cada idioma del blog. La página principal de este medio de comunicación es community.geogebra.org

- **Miembros de Institutos GeoGebra locales:** los miembros de Institutos GeoGebra locales son embajadores de la Comunidad en su localidad, pudiendo realizar actividades de difusión, introducción al software y sus plataformas en Internet, entre otros.

2. Flexibilidad interpretativa: Cada uno de los grupos sociales relevantes que constituyen la Comunidad GeoGebra, aportan con sus significados respecto de GeoGebra. El aspecto a destacar de esta situación es que todos pueden dar a conocer sus interpretaciones, las cuales serán efectivamente recibidas por la Comunidad.

Por ejemplo, el equipo central propone los preceptos filosóficos y legales sobre los cuales se sustentan las acciones y actividades de la Comunidad, es decir, se ve a esta como un espacio de desarrollo disciplinar, por lo que es necesario poner atención de aspectos delicados en la era digital, como lo son las formas de compartir de manera abierta y libre, y la manera de relacionarse con organismos que deseen hacer usos comerciales con GeoGebra o derivados de él. Con esto, el equipo central puede dirimir cuáles espacios de organización aportar o reconocer, así como trazar el rumbo del *software* y la Comunidad.

Otro caso lo representan los desarrolladores, quienes pueden ver el desarrollo técnico de GeoGebra como un espacio de crecimiento profesional, al involucrarse en la escritura o traducción del código fuente del *software*, que en un comienzo estaba en Java, a otros lenguajes más afines a los usos de la cultura digital, como HTML5 para versiones web y Android e iOS para versiones móviles (teléfonos inteligentes o *smartphones*, y tabletas o *tablets*).

Son variados los casos de significados alrededor de GeoGebra, que manifiestan sus diferentes grupos sociales relevantes. Relacionados con estos significados cada grupo tiene un objetivo, latente o patente, respecto de GeoGebra que aporta en cierta medida a toda la Comunidad, lo cual se presenta resumidamente a continuación:

- **Equipo central:** traza ruta de desarrollo de la Comunidad, tomando en cuenta los objetivos que reportan los grupos sociales relevantes que la constituyen.
- **Desarrolladores:** Realizan progresos o ajustes técnicos de las distintas modalidades del *software* (escritorio, web, para dispositivos móviles) y su plataforma web.
- **Profesores:** usuarios principales que emplean GeoGebra para diseñar actividades, explorar junto a sus alumnos en clases, etc. Todo esto, mientras prueban el *software* y la plataforma web.
- **Contribuyentes:**elaborar recursos que ponen a disposición de toda la Comunidad.
- **Traductores:** realizan la traducción e interpretación de GeoGebra en sus distintos ámbitos (*software*, recursos, plataforma web, etc.).

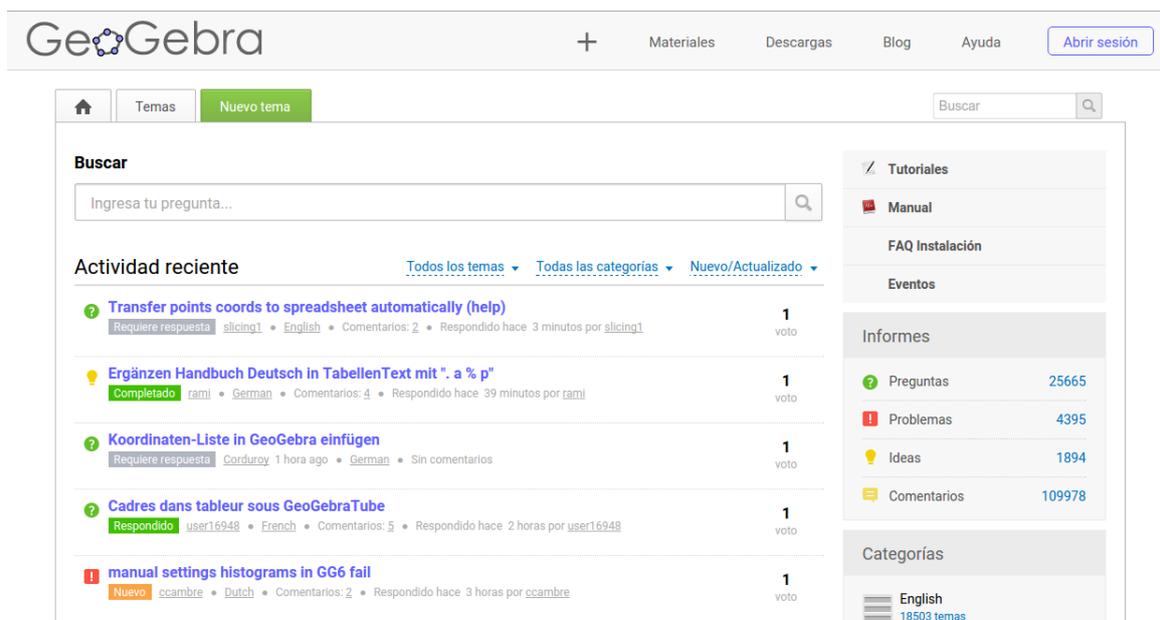
- **Blogueros:** comunican en su idioma las novedades de la Comunidad, como nuevos lanzamientos o eventos.
- **Miembros de los Institutos GeoGebra locales:** representan oficialmente a la Comunidad.

3. Propósito comunitario: A pesar de las distintas interpretaciones y objetivos que reportan los diferentes grupos, y que estos inciden de distintas manera al desarrollo de la Comunidad, todos estos grupos están aunados bajo un mismo propósito, el cual “de alguna manera los conecta con la enseñanza o educación matemática” (Hohenwarter, 2013, 40:45-42:11), que identificamos como el propósito articulador de la Comunidad GeoGebra.

Versioning

Dada la relación de poder heterárquica entre los grupos sociales relevantes que constituyen la comunidad GeoGebra, todos pueden influir en el desarrollo del *software* como desarrolladores o usuarios. Los espacios designados para este flujo de comunicación son el foro de GeoGebra y la Wiki para desarrolladores del *software*¹⁵, tanto en su versión de escritorio, web y para dispositivos móviles.

El funcionamiento de estos espacios de flujos esta dado por la posibilidad que tiene cualquier integrante de la comunidad para ingresar, responder, revisar o incluso comentar preguntas, problemas o ideas, que estén publicadas en el foro por otros integrantes, ya sean desarrolladores o usuarios. La estrategia para organizar las interpretaciones de los diferentes grupos representados, es mediante la constante atención a los temas nuevos o actualizados recientemente (ver imagen 2.10) y la participación democrática mediante votos (ver imagen 2.11), donde cada tema (pregunta, problema o idea) puede ser votado por los integrantes de la comunidad, y los temas con más votos serán los de mayor prioridad para ser atendidos, al igual que los temas más recientes.



The screenshot shows the GeoGebra forum interface. At the top, there is a navigation bar with the GeoGebra logo, a search bar, and links for 'Materiales', 'Descargas', 'Blog', 'Ayuda', and 'Abrir sesión'. Below the navigation bar, there are tabs for 'Temas' and 'Nuevo tema'. The main content area is titled 'Actividad reciente' and lists several topics with their respective status, language, and number of votes. The topics are:

- Transfer points coords to spreadsheet automatically (help)**: Requirere respuesta, slicing1, English, Comentarios: 2, Respondido hace 3 minutos por slicing1, 1 voto.
- Ergänzen Handbuch Deutsch in TabellenText mit %, a % p'**: Completado, rami, German, Comentarios: 4, Respondido hace 39 minutos por rami, 1 voto.
- Koordinaten-Liste in GeoGebra einfügen**: Requirere respuesta, Corduroy, 1 hora ago, German, Sin comentarios, 1 voto.
- Cadres dans tableur sous GeoGebraTube**: Respondido, user16948, French, Comentarios: 5, Respondido hace 2 horas por user16948, 1 voto.
- manual settings histograms in GG6 fail**: Nuevo, ccambre, Dutch, Comentarios: 2, Respondido hace 3 horas por ccambre, 1 voto.

On the right side, there is a sidebar with sections for 'Tutoriales', 'Manual', 'FAQ Instalación', 'Eventos', 'Informes', and 'Categorías'. The 'Informes' section shows statistics: Preguntas (25665), Problemas (4395), Ideas (1894), and Comentarios (109978). The 'Categorías' section shows 'English' with 18503 temas.

Imagen 2.10: Temas del foro GeoGebra ordenado por los más recientes.

¹⁵Wiki para desarrolladores de GeoGebra dev.geogebra.org

Temas **Nuevo tema**

Todos los temas [Todos los temas](#) [Todos los estados](#) [Todas las categorías](#) [Popular](#) [Nuevo tema](#)

upload blocked by spam detection Resuelto beleznay English Comentarios: 152 Respondido hace 4 meses por Fabian	48 votes
error with can't find name of intel ICD OpenGL driver whem Open 3D Respondido jorge.g. Comentarios: 5 Respondido hace 12 horas por Michael.B.	29 votes
Geogebra6 (app) is less convenient than geogebra 5 Requiere respuesta Tang D. English Comentarios: 21 Respondido hace 2 meses por mathmagic	13 votes
SetAxesRatio[<function>, <function>] or Log axes En consideración acron English Comentarios: 4 Respondido hace 1 año por mikkelstouby	11 votes
New forum En curso Zbyněk 1 año ago English Sin comentarios	11 votes
Problemas para compartir archivos por HTML Nuevo 1410oscar Spanish Comentarios: 15 Respondido hace 6 meses por LalitoM	11 votes
GeoGebra-Kurs online bei YouTube auf deutsch	0

Todos los temas

- [Preguntas](#)
- [Problemas](#)
- [Ideas](#)
- [Manual](#)
- [Tutoriales](#)

Imagen 2.11: Temas del foro GeoGebra ordenado por los más votados.

Los desarrolladores de la comunidad son quienes tienen la responsabilidad de moderar el foro en sus distintas versiones, según los diferentes idiomas. Ellos etiquetan cada publicación a partir de su progreso y retroalimentación de la comunidad, pudiendo catalogarlos como: nuevo, resuelto, requiere respuesta, en consideración, respondido, en curso o planeado. Además de moderar el foro, los desarrolladores también realizan ajustes a las versiones del *software*, los cuales quedan registrados como eventos en la wiki de desarrolladores, constituyendo un conjunto de cambios (ver imagen 2.12).

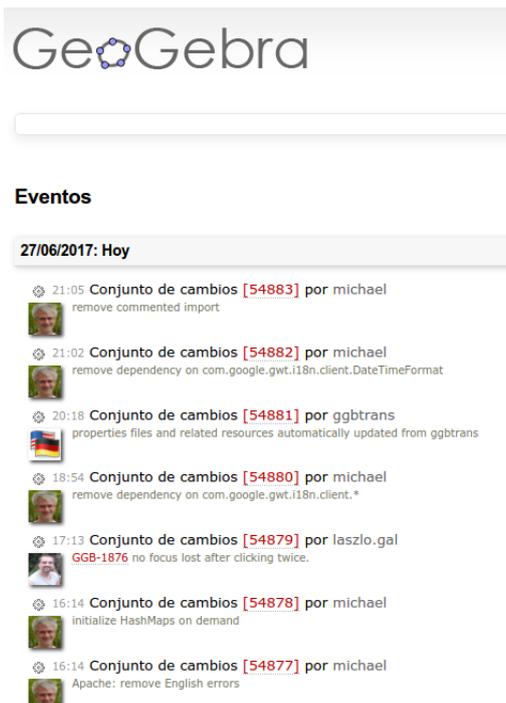


Imagen 2.12: Eventos de la wiki de desarrolladores de GeoGebra.

Al tener esta doble responsabilidad, los desarrolladores pueden estar constantemente atendiendo a las necesidades de la comunidad y, en consecuencia, realizar los ajustes pertinentes al *software* y todas sus plataformas digitales.

En las siguientes imágenes se muestra un caso donde el integrante de la comunidad *rinat* comenta que no puede abrir un archivo en el cual invirtió varias horas de trabajo¹⁶. Luego de recibir varias respuestas y ayuda satisfactoria por otros miembros de la comunidad, el tema se da por resuelto y luego de cinco años, el desarrollador *Michael Borchers* abre un evento¹⁷ en la wiki de desarrolladores para reportar un ajuste a partir de lo comentado en el tema iniciado por *rinat* (ver imagen 2.14).

¹⁶Ver tema en el foro en help.geogebra.org/topic/cannot-open-file-1

¹⁷Ver cambios realizados por Michael Borchers que fueron reportados en la wiki de desarrolladores de GeoGebra en dev.geogebra.org/trac/changeset/54803

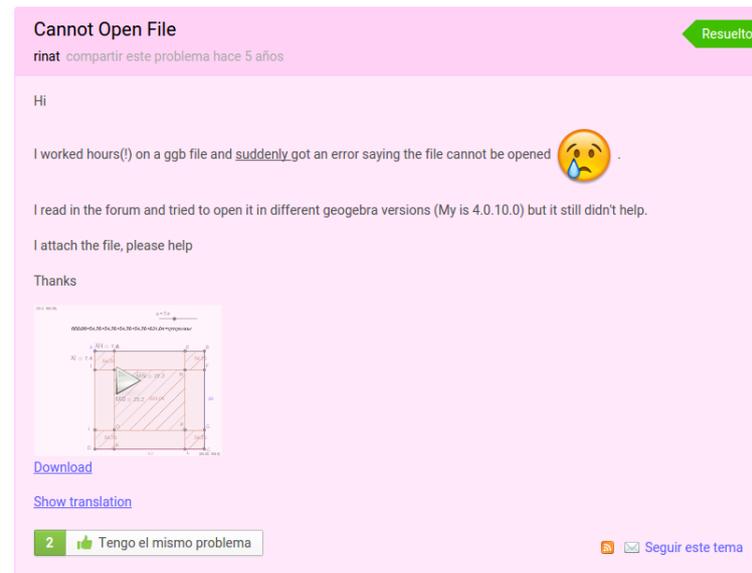


Imagen 2.13: Wiki de desarrolladores de GeoGebra.

Conjunto de cambios 54803

Fecha y hora: 22/06/2017 15:56:41 (hace 5 días)

Autor: michael

Mensaje: quick NPE fix for <https://help.geogebra.org/topic/cannot-open-file-1>

Fichero: 1 editado

[trunk/geogebra/common/src/main/java/org/geogebra/common/kernel/algos/AlgoDependentListExpression.java](#) (2 diferencias)

No modificado Añadido Eliminado

```

trunk/geogebra/common/src/main/java/org/geogebra/common/kernel/algos/AlgoDependentListExpression.java
r54551 r54803
33 33 import org.geogebra.common.kernel.arithmetic.VectorValue;
34 34 import org.geogebra.common.kernel.arithmetic3D.Vector3DValue;
35 35 import org.geogebra.common.kernel.cas.AlgoDependentCasCell;
35 36 import org.geogebra.common.kernel.geos.GeoBoolean;
36 37 import org.geogebra.common.kernel.geos.GeoCurveCartesian;
...
113 114 @Override
114 115 public final void compute() {
116
117     // https://help.geogebra.org/topic/cannot-open-file-1
118     if (list.getParentAlgorithm() instanceof AlgoDependentCasCell) {
119         return;
120     }
121
122 // get resulting list of ExpressionNodes
123 ExpressionValue evlist = list.getDefinition()

```

Imagen 2.14: Wiki de desarrolladores de GeoGebra.

Con base en estos espacios de flujo e interacción social, el desarrollo técnico del *software* se concreta en una estrategia de *versioning*, en la cual se produce una estabilización progresiva y una revisión retrospectiva:

- 1. Estabilización progresiva:** Los momentos de estabilización del *software* GeoGebra mediante versiones se han dado con dos mecanismos distintos, en un primer momento con una estrategia par-impar y en la actualidad con un modelo de integración continua (GeoGebra, 2016).

En una primera etapa, desde la versión 3.0 a la 5.0, el *versioning* correspondía a una estrategia par-impar, en la cual los lanzamientos estables estaban representados por

números pares y las versiones de desarrollo por números impares.

Bajo el *versioning* par-impar, el *software* GeoGebra lanzó las versiones estables 3.0¹⁸, 3.2¹⁹, 4.0²⁰, 4.2²¹, 4.4²² y 5.0²³, donde las versiones impares, como la 4.9.1.0 era una versión de desarrollo para la siguiente versión estable, en este caso la 5.0.

La estrategia par-impar se emplea habitualmente en software de ciclos largos de lanzamiento, por lo cual se realizó un cambio de estrategia a partir de la versión 5.0, a una que permitiera realizar lanzamientos estables más a menudo. En consecuencia se adopta el *versioning* llamado modelo de integración continua, el cual consiste en realizar integraciones automáticas lo más a menudo posible, para poder detectar y resolver problemas cuanto antes. En el caso de GeoGebra, los lanzamientos suelen publicarse semanalmente, los cuales quedan registrados en la página de referencia changelog 6.0²⁴.

Desde la adopción de la estrategia de integración continua, las versiones de GeoGebra se han modificado en su tercera cifra, por ejemplo desde la 5.0.282.0 a la 5.0.283.0, numeración que se continúa aún cuando se da un cambio importante de versión, como lo es de la 5.0 a la 6.0, lo cual se tradujo en el paso de la versión 5.0.352.0 a la 6.0.354.0 (no tenemos explicación para el salto de la versión 0.353.0).

En términos generales, se puede visitar la página *An introduction to the development of GeoGebra* (GeoGebra, 2011) para conocer una introducción de la manera en que se desarrolla GeoGebra, desde su inicio como un trabajo de maestría de Markus Hohenwarter, hasta la forma de estructurar sus librerías en la actualidad.

2. Revisión retrospectiva: La comunidad cuenta con un foro para publicar en formato de temas, las preguntas, los problemas o las ideas que los usuarios deseen compartir con la comunidad. En este espacio existe la posibilidad de tanto usuarios como desarrolladores puedan comentar los temas publicados, lo cual fomenta la interacción entre todos los miembros de la comunidad para solucionar problemas o fallos, de usuarios o del *software* mismo. Los moderadores están encargados de etiquetar los temas y, en caso de ser fallos del *software*, recogen las incidencias para ser incluidas en los arreglos a realizar en el *software*, y cuando están listas se incluyen en alguna versión estable para actualizar el *software*.

Por ejemplo, la versión 6.0.376.0 para GNU/Linux fue lanzada el 18 de junio de 2017 y el siguiente lanzamiento de una versión estable para los usuarios de GNU/Linux, la 6.0.369.0, se realizó seis días después (ver imagen 2.15).

¹⁸Notas de lanzamiento de la versión 3.0 en wiki.geogebra.org/en/Release_Notes_GeoGebra_3.0

¹⁹Notas de lanzamiento de la versión 3.2 en wiki.geogebra.org/en/Release_Notes_GeoGebra_3.2

²⁰Notas de lanzamiento de la versión 4.0 en wiki.geogebra.org/en/Release_Notes_GeoGebra_4.0

²¹Notas de lanzamiento de la versión 4.2 en wiki.geogebra.org/en/Release_Notes_GeoGebra_4.2

²²Notas de lanzamiento de la versión 4.4 en wiki.geogebra.org/en/Release_Notes_GeoGebra_4.4

²³Notas de lanzamiento de la versión 5.0 en wiki.geogebra.org/en/Release_Notes_GeoGebra_5.0

²⁴Página de referencia del changelog 6.0 en wiki.geogebra.org/en/Reference:Changelog_6.0



Imagen 2.15: Versión estable 6.0.367.0 (arriba) y 5.0.369.0 (abajo).

Sin embargo, entre la versión 6.0.367 y la 6.0.369 se lanzó la versión 6.0.368 que no fue visible para los usuarios, aunque se realizaron ajustes en el *software*, los cuales quedan registrados en la página changelog 6.0:

6.0.367.0 18 de junio de 2017²⁵

- boolean XOR operator (\oplus or $\langle \text{Alt} \rangle +$) added
- Editor: Korean working in the Input Bar with the on-screen keyboard
- Android Native Apps: 'ABC' keyboard option added for non-Latin alphabets
- Editor: fix for $x * \text{sqrt}(x)$ and $5 \geq (2/3 * x + 5/3)$
- CAS View: improvement for eg

$$NIntegral[\text{sqrt}((2 * (\cos(2 * x)))^2 + (3 * (\cos(3 * x)))^2), x, 0, 2 * \pi]$$

- new parameter preventFocus

6.0.368.0 21 de junio de 2017²⁶

- Editor: Allow | to close an abs() block
- Classic: make sure "Graphics View 1" checkbox isn't checked for 3D objects
- Spreadsheet: make sure ".Algebra Descriptions" works
- Korean: working with physical keyboard
- faster versions of Div[], Mod[], Division[] for polynomials

6.0.369.0 24 de junio de 2017²⁷

- fix for font size on Retina screens.

²⁵Página de registro del cambio de versión en dev.geogebra.org/trac/changeset/54773

²⁶Página de registro del cambio de versión en dev.geogebra.org/trac/changeset/54835

²⁷Página de registro del cambio de versión en dev.geogebra.org/trac/changeset/54913

Marco tecnológico

Con base en el propósito de la Comunidad GeoGebra referido a fenómenos didácticos ligados a las matemáticas, y dadas las características de una comunidad digital, las necesidades reportadas y los proyectos articulados en consecuencia, desembocan en la creación de diversos tipos de conocimientos. Por ejemplo, el *software* GeoGebra, el Instituto GeoGebra Internacional, la plataforma Materiales GeoGebra, las aplicaciones para dispositivos móviles (teléfonos inteligentes y tabletas), los eventos académicos como congresos mundiales o regionales, talleres locales, entre varios otros.

Así, la construcción social de GeoGebra se desarrolla, de manera general, al plantear proyectos cuyo propósito es atender las necesidades de los miembros de la comunidad, los cuales sirven de sustrato para la creación y evolución de estos, todo lo cual está impulsado por el propósito comunitario. El funcionamiento general de esta inteligencia-red se ilustra en la imagen 2.16.

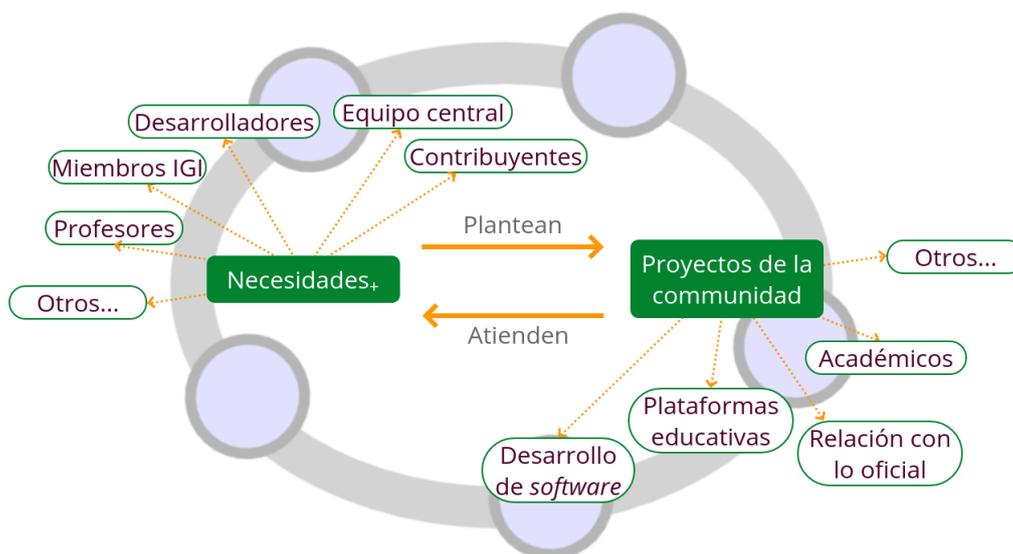


Imagen 2.16: Modelo de construcción social de GeoGebra

Con base en este modelo, junto con el reporte de la constitución de la Comunidad GeoGebra y la explicación de su *versioning*, es posible proponer una explicación sobre la construcción social de GeoGebra, como tecnología digital.

En primer lugar, desde el comienzo del *software*, el propósito fue aportar al fenómeno de enseñar y de aprender matemáticas, con énfasis en la atender las necesidades de los profesores y su labor docente. De esta manera, el *software* fue evolucionando con la retroalimentación que iba proveyendo la comunidad, con lo cual el *software* pasó de ser una herramienta para enseñar geometría analítica, para luego dar soporte al trabajo con cálculo diferencial e integral, la incorporación de una hoja de cálculo, ambientes para el estudio de probabilidad y estadística, cálculo algebraico simbólico, entre otros, convirtiéndolo actualmente en un motor matemático libre. En consecuencia al énfasis en la atención al profesorado, también se fue configurando la plataforma de Materiales GeoGebra²⁸, en la cual se pueden encontrar

²⁸Ver plataforma Materiales GeoGebra en la página geogebra.org/materials

más de un millón de materiales interactivos (GeoGebra, 2017, noviembre 20) construidos por los contribuyentes con las herramientas que provee la Comunidad GeoGebra, como el *software*, las Hojas dinámicas y los Libros GeoGebra.

A la luz de estos ejemplos, es posible reconocer que GeoGebra es moldeada socialmente produciendo tecnologías digitales abiertas, como los recursos educativos y el *software* libre en sus diferentes versiones.

En segundo lugar, el uso del soporte material dado por la tecnología digital, permitió que los diferentes modelos de GeoGebra fueran usados alrededor de todo el mundo, adaptando su uso a las necesidades locales. Así también, la misma comunidad tuvo un alcance global, propiciando la colaboración entre miembros de distintos países, la organización de eventos académicos internacionales, regionales y locales, entre otros. Todas estas implicaciones sociales del uso de la GeoGebra como tecnología digital, nos permiten reconocer que la sociedad se moldea tecnológicamente en el cambio de interacción social y la manera de articular la comunidad, lo cual se puede sintetizar en el hito de la fundación del Instituto GeoGebra Internacional (Hohenwarter y Lavicza, 2011), el cual funge como una manera de organizar de manera amplia a la comunidad GeoGebra a nivel global y también local.

2.1.4. Inteligencia-red como morfología social de las comunidades digitales, cuando construyen conocimiento

En la problemática del presente escrito se plantearon tres aspectos directrices para indagar en cómo se construye conocimiento matemático en la era digital (ver en sección 1.4). De los cuales en esta sección se ha atendido a la pregunta *¿cómo se organiza la sociedad para construir conocimiento aprovechando la tecnología digital?*

Con la intención de comprender el fenómeno subyacente a la pregunta, sin incurrir en reduccionismos, nos hemos asido de perspectivas de investigación antropológica que atienden a la relación cultura-tecnología, específicamente a la teoría *Social construction of Technology*, de modo tal de acceder a explicaciones y modelos teóricos sobre la manera en que las sociedades se han organizado a lo largo de la historia moderna, para construir tecnología.

Dada las consideraciones situacionales de esta investigación, fue necesario caracterizar la sociedad actual para actualizar las herramientas teóricas, con el propósito de tener un modelo y mirada más sensible a la realidad actual. De tal forma se configuró la herramienta *Social Construction of Digital Technology*, la cual se utilizó para caracterizar a la comunidad GeoGebra, una comunidad de interés en nuestra investigación debido a sus características generales: es una comunidad digital que construye conocimiento matemático, aprovechando el potencial de las tecnologías digitales.

Con base en lo expuesto en esta sección, resumido en el camino recién narrado, estamos en condiciones de dar una respuesta a la pregunta que detonó el desarrollo de esta sección: *¿cómo se organiza la sociedad para construir conocimiento aprovechando la tecnología digital?*

Desde el siglo XX, la humanidad fue configurando una estrecha relación entre el desarrollo de las sociedades y la penetración de la tecnología digital en ella, y a partir de la 3RH, la relevancia de la tecnología digital en esta relación se ha declarado de manera abierta y explícita. La TD ha provisto al ser humano de soportes materiales y de flujos que diluyen las barreras geográficas y políticas; permite la reconceptualización de la temporalidad, según los intereses de las personas y las comunidades que integran; las relaciones de poder son reinterpretadas para tender a las relaciones heterárquicas; se modifican los elementos que han constituido durante siglos nuestra sociabilidad, como la confesión religiosa, nación, pueblo o clase social por sentido de pertenencia a grupos sociales afines a nuestros intereses, estatus tecnomeritocrático, la capacidad de compartir y ser sensibles a las necesidades de la comunidad.

Por lo tanto, así como lo vaticinó el elemento diferenciador entre *software* libre y privativo, las implicaciones más importantes con la aparición de la tecnología digital, son las incidencias sociales, por sobre las técnicas. Como propone Contreras (2003):

El elemento clave aquí es la dinámica social que se establece en la comunidad, no las infraestructuras técnicas subyacentes. Las redes de comunicaciones, el *software* de los foros de comunicación, los chats, los sitios web, etcétera, es decir, toda la revolución TIC en la que se asienta esta configuración organizativa, son elementos *necesarios*, pero no *suficientes*. (p. 146).

Además de la infraestructura técnica necesaria, también se requiere de un grupo humano que este dispuesto a trabajar de manera colaborativa y abierta, tras la consigna de suplir necesidades personales, grupales y comunitarias. Colaborativa en el sentido de aportar a lograr el propósito de la comunidad, aún cuando tal propósito no refleje de manera total mis objetivos personales. Abierta pues se alude a la oportunidad de todos los integrantes de la comunidad, para participar en cualquier de sus proyectos. Las necesidades a atender configuran la *personalidad* de la comunidad, por ejemplo, para las comunidades *hackers* la necesidad a las cual atienden es hacer que todos los datos, la información y el conocimiento estén disponible para cualquier persona en el mundo, aunque en el camino se riñan con lo que el mundo oficial considera “legal”; por su parte, para la comunidad GeoGebra las necesidades a atender están ligadas al fenómeno de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, como por ejemplo, disponer de material profesionales y educativos que se adapten a sus necesidades locales (Hohenwarter y Lavicza, 2011), generar un ambiente que permita experimentar con las matemáticas o sus representaciones, entre otros.

A la luz de estos resultados, es posible concebir que la TD provee de soporte para las comunidades que pretenden atender a cierta necesidad. Este es el vínculo entre cultura y tecnología característica de la era digital, donde las mismas tecnologías digitales son un producto más de los proyectos que llevan a cabo las comunidades en su labor de atender necesidades, y la manera en que se organizan es a través de la sociedad red, específicamente como una inteligencia-red, cuando su propósito esta ligado a la construcción de conocimiento, como es el caso de las comunidades *hackers* y la comunidad GeoGebra.

2.2. Problematización de la Geometría

Como se adelantó al comienzo de este capítulo, en el intento de abordar la pregunta respecto de qué geometría y cómo se está aprendiendo esta en la era digital, se desarrolla un estudio sistémico de la geometría, el cual pretende indagar en las potencialidades de los ambientes de geometría dinámica (AGD), en tanto soporte material para desarrollar un trabajo geométrico, a la luz de aspectos propios de la geometría. De esta manera, se nos hizo natural preguntarnos *cuál es la naturaleza de la geometría*, para así reconocer sus características y aspectos inherentes, para cotejarlos con las características de los AGD y pronunciarse respecto de la pertinencia de estos ambientes digitales, para el trabajo geométrico.

Sin embargo, la postura que subyace a la pregunta respecto de la naturaleza de la geometría es bastante absolutista, ya que reconoce de manera latente que la geometría posee una única naturaleza. Al respecto Olivé y Pérez Tamayo (2014) proponen un posicionamiento más consiente de la manera en que se construye el conocimiento: “(...) la naturaleza que le asignemos al conocimiento dependerá del contexto en que estemos trabajando” (p. 16).

A raíz de este posicionamiento respecto del conocer, asumimos que aquello que se pueda estudiar/analizar/conocer, por ejemplo un fenómeno o un objeto (en este caso, la geometría), es un ente que se ha construido en respuesta a la realidad (en sentido amplio), por lo tanto es una entidad compleja. También reconocemos que tal complejidad es inabordable completamente por una única disciplina o perspectiva de estudio, sino que cada una de ellas puede acceder a cierto aspecto de la geometría. Por lo tanto, la pregunta directriz se replantea como *cuál es la naturaleza de la geometría, relativa a cierta esfera del conocimiento*, con la cual también se asume que este tipo de estudio relativista nunca será completo y siempre se podrán encontrar e indagar en nuevas naturalezas de la geometría, que hagan más robusto el entendimiento que tengamos de ella.

También es importante notar que, si bien con este estudio se accede a diferentes naturalezas de la geometría, debido a que todas las perspectivas se usan para estudiar el mismo fenómeno (la geometría), es esperable encontrar convergencias y puntos en común entre ellas. Esto habla de la manera en que el estudio reconoce a la geometría como un sistema, donde todas las naturalezas están relacionadas en ciertos grados, y por lo tanto, habla de un estudio sistémico de ella.

En la problematización de la geometría que se presenta a continuación, se indaga en la naturaleza de la geometría, desde perspectivas epistémica, epistemológica, filosófica y, debido a los intereses de la presente investigación, digital. Al respecto, en esta investigación se entiende por *naturaleza epistémica* a lo que se refiere al conocimiento mismo, a lo que responde la pregunta *¿qué conocimiento?*, que es diferente de preguntar *¿cómo se construye ese conocimiento?*, cuya respuesta alude a la *naturaleza epistemológica*. En cuanto a la *naturaleza filosófica*, nos referimos a las explicaciones racionales a nivel general, que orientan el conocimiento de la realidad y el proceder humano. Y finalmente, la *naturaleza digital* da cuenta de los rasgos de la geometría a los cuales se accede mediante los ambientes de geometría dinámica.

2.2.1. Naturaleza epistémica

Al hablar de la naturaleza epistémica de la geometría, nos referimos específicamente al conocimiento geométrico construido metodológica y racionalmente, a través de sus objetos y representaciones. En este sentido nos preguntamos por la manera en que estos son elaborados y, por consiguiente, las propiedades que manifiestan debido a esta manera de ser elaborados.

2.2.1.1. Construcciones euclidianas

Como punto de partida para abordar la naturaleza epistémica de la geometría, se estudian las bases filosóficas y sistemáticas sobre las que Euclides articula los *Elementos*, lo cual permite entender la racionalidad que subyace a toda su obra y cómo esta incide en los objetos generados.

Cabe destacar que se ha utilizado la primera versión traducida al castellano de los *Elementos* en los análisis presentados en este escrito, cuya traducción fue realizada por Zamorano (1576).

Euclides empleó un método de organización basado en la filosofía de Platón, que influyó en el uso de principios no demostrados, de los cuales algunos se perfilan como comunes a todas las ciencias, denominados *comunes sentencias* (10 en total), y otros que son propios de la ciencia que se está tratando, en este caso la geometría, llamados *peticiones*, que son cinco.

La escritura de los *Elementos* también fueron influidos por la sistematización de Aristóteles, lo cual inspiró la definición de los objetos de la geometría a partir de sus componentes esenciales, aludiendo a sus características fundamentales. De esta manera, Euclides establece que el punto, la línea y la circunferencia son los componentes esenciales a partir de los cuales es posible construir la totalidad de las figuras que constituyen su obra.

Punto, línea y circunferencia son introducidos en las definiciones 1, 2 y 15 respectivamente, para luego hacer explícito los métodos que permiten ponerlos en funcionamiento, declarados en las peticiones 1, 2 y 3:

- **Definición 1:** Punto es cuya parte es ninguna.
- **Definición 2:** Línea es longitud que no se puede ensanchar.
- **Definición 15:** Círculo es una figura llana contenida de una línea, que se llama circunferencia, hasta la cual todas las líneas que salieren de un punto que este dentro, cayendo en la circunferencia del mismo círculo son entre sí iguales.
- **Petición 1:** Tirar una línea recta desde cualquier punto hasta cualquier punto.
- **Petición 2:** Una línea recta terminada extenderla continua y derechamente.
- **Petición 3:** Sobre cualquier centro y distancia describir una circunferencia.

(Zamorano, 1576).

Tanto las definiciones del punto, la línea y la circunferencia, junto con los métodos para operacionalizarlos, representan lo que denominamos como *herramientas teóricas*, puesto que introducen los elementos esenciales para la geometría euclidiana y se indica la manera de proceder con ellos, como una especie de manipulación ideal.

Contando con estas herramientas teóricas, y en general con las definiciones, peticiones y comunes sentencias, Euclides procede a construir la geometría a través de proposiciones, que pueden ser de dos tipos: problemas y teoremas. No importando el tipo, cada proposición tiene una estructura discursiva similar que pone de manifiesto una construcción deductiva y el uso de las herramientas teóricas.

Existen diversos análisis respecto de la estructura discursiva de las proposiciones de los *Elementos*, de las cuales, en este trabajo rescatamos la propuesta por Cruz-Márquez et al. (2016), en la que se explicitan todas las secciones por las cuales puede estar compuesta una proposición, aun cuando algunas de ellas presenten una estructura más escueta. Luego, la estructura discursiva de las proposiciones de los *Elementos* es:

1. **Enunciado:** fase en la que se declara lo que se quiere demostrar o lo que se quiere construir.
2. **Exposición:** apartado en el que se exponen los objetos que van a intervenir en el desarrollo de la proposición y se concretan en un dibujo (representación material). En esta sección se presenta la primera construcción, la cual ya está dada.
3. **Preparación:** planteamiento de las relaciones a establecer a partir de los objetos declarados anteriormente. Se caracteriza por comenzar con la frase *digo que*, en el caso de los teoremas, y *conviene o es menester* en los problemas.
4. **Demostración:** bloque en el cual se lleva a cabo la construcción o prueba (o demostración). Se puede constituir de alguna combinación, tanto en orden como en presencia, de las siguientes secciones:
 - a) **Construcción:** parte en la que se completa el dibujo (o representación material), por medio de añadir al dibujo inicial las unidades figurales (puntos, líneas o circunferencias) que se necesitan para poder demostrar la afirmación del enunciado. En esta sección se presenta una segunda etapa de construcción, las cuales complementan la construcción ya dada, a través de elementos auxiliares que permiten lograr el objetivo planteado en el enunciado.
 - b) **Prueba:** apartado dedicado a plantear y justificar los pasos lógicos necesarios para probar la tesis o la construcción deseada.
 - c) **Conclusión particular:** en ciertas proposiciones, para realizar la demostración general, se vale de demostrar relaciones particulares, cuyas conclusiones son también particulares en cuanto al enunciado.
 - d) **Generalización:** al realizar una conclusión particular, se establece una relación local, que extendida a otros casos homólogos, conforman la conclusión general, atendiendo a la totalidad del enunciado. Cabe destacar que Euclides sólo

demuestra un caso particular, y luego generaliza este resultado declarando que se debería proceder de la misma forma en los casos restantes, explicitando cuáles son estos.

5. **Conclusión:** último párrafo de la proposición. Este se corresponde de manera general con el Enunciado, y en un menor número de casos con la Preparación. Su fin es cerrar el problema o teorema puntualizando lo que se demostró o construyó en la proposición (p. 2).

Al analizar esta estructura discursiva desde los cuestionamientos de qué se hace y cómo se hace, es posible notar que elementos abstractos y materiales se van entrelazando para lograr el objetivo de la proposición. Al principio se declara un propósito general (abstracto) que se aborda a partir de construir representaciones concretas, sobre las cuales se enuncian justificaciones abstractas que validan lo realizado en términos materiales, para finalmente concluir de manera abstracta y general.

Siguiendo la tradición investigativa de la geometría, en este trabajo nos referimos a los elementos abstractos como *aspectos teóricos*, aludiendo a su uso en la construcción de la teoría (geometría); de igual forma se hace referencia a las consideraciones materiales como *aspectos concretos*, aludiendo al adjetivo que caracteriza lo que particularmente está en oposición a lo abstracto y general, con exclusión de cuanto pueda serle extraño o accesorio; por último, en diferentes investigaciones se menciona como figura (Fischbein, 1993), representación externa (Arzarello y otros, 2002) o dibujo (Hölzl, 2001) a los objetos construidos en un ambiente material, que en caso de nuestra investigación llamaremos *diagrama*, que corresponde a un término que por definición se refiere al “dibujo geométrico que sirve para demostrar una proposición, resolver un problema o representar de una manera gráfica la ley de variación de un fenómeno” (RAE, 2017).

A continuación se presenta un análisis de la manera en que los elementos teóricos y concretos se imbrican para lograr el objetivo de la proposición:

1. En el comienzo de la proposición se enuncia lo que se quiere demostrar o construir en términos generales (teórico), para en seguida declarar el objeto concreto que le da forma material al enunciado (concreto) y luego declarar en qué manera opera la relación general dada en el enunciado sobre el objeto concreto (teórico-concreto). En estas tres secciones se evidencia la manera de relacionarse entre los planos teórico y concreto: primero se declara una sentencia abstracta y general, para a continuación emplear un objeto concreto al cual se le aplicarán las relaciones manifestadas en el enunciado.
2. En el bloque de demostración se lleva a cabo una instancia de construcción (concreto), que complementa a la representación concreta dada en la exposición, y luego una instancia de inferencias lógicas y deductivas aplicados al objeto completo en su totalidad (teórico-concreto). De ser necesarias, se realizan construcciones auxiliares que complementan la construcción inicial, para luego emplear resultados teóricos (definiciones, comunes sentencias,

peticiones o proposiciones anteriores) sobre la representación material, a fin de lograr las secuencias lógicas necesarias para llevar a cabo el objetivo del enunciado.

3. Luego de esto se extraen conclusiones para el objeto particular (concreto), las cuales son abstraídas para dar un aserto general (teórico).

En un primer momento de síntesis, se manifiestan las conclusiones obtenidas luego de operar teóricamente sobre el objeto concreto, para finalmente hacer un proceso de abstracción al generalizar ese resultado y concluir de manera total, es decir, a un nivel teórico de resultados.

Con el estudio de la estructura discursiva de las proposiciones de los *Elementos*, junto con analizar la disposición de los planos teórico y concreto en tal estructura, se ve con claridad la estrecha relación entre elementos abstractos y materiales en el modo en que se construye la geometría euclidiana, tal como se reporta en el estudio de su naturaleza epistemológica.

Como ejemplo de la estructura discursiva, se presenta la *proposición 1 del Libro 1* que se refiere a la construcción de un triángulo equilátero, en la cual se pueden identificar las secciones enunciado, exposición, preparación, demostración (construcción y prueba) y conclusión:

Enunciado Sobre una recta dada terminada hacer un triángulo equilátero.

Exposición Sea la línea recta dada terminada AB .

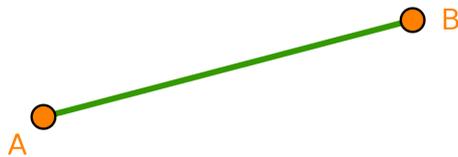


Imagen 2.17: Diagrama del segmento trazado entre los puntos A y B .

Preparación Conviene describir sobre AB un triángulo equilátero.

Demostración

1. Construcción

Sobre el centro A y según el espacio AB describese el círculo BCD (P3).

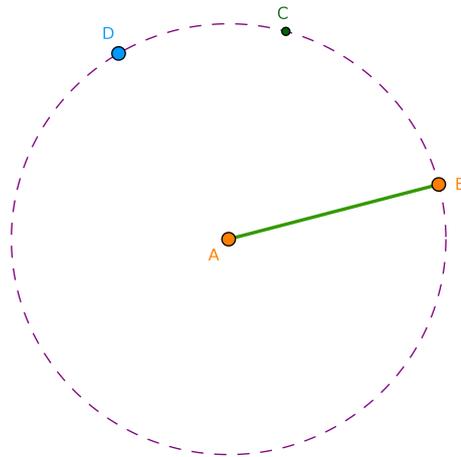


Imagen 2.18: Diagrama del círculo trazado con centro en A y radio AB .

Y también (P3) sobre el centro B y en el espacio BA describese el otro círculo ACE .

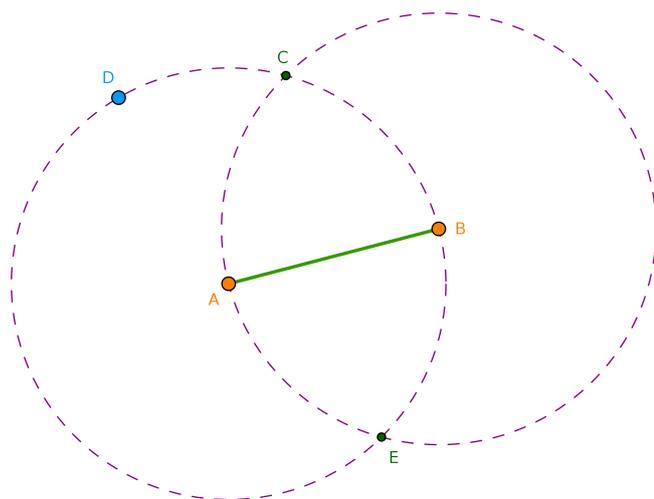


Imagen 2.19: Diagrama del círculo trazado con centro en B y radio BA .

Y (P1) desde el punto C , donde los círculos se cortan, tírese las líneas rectas CA [y] CB hasta los puntos A [y] B .

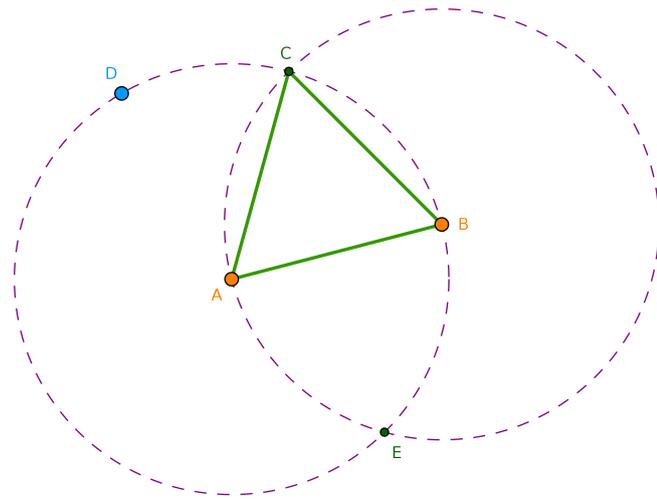


Imagen 2.20: Segmentos trazado entre C y A , y C y B .

2. Prueba

Y porque el punto A es centro del círculo CBD será igual la línea AC a la línea AB (D15).

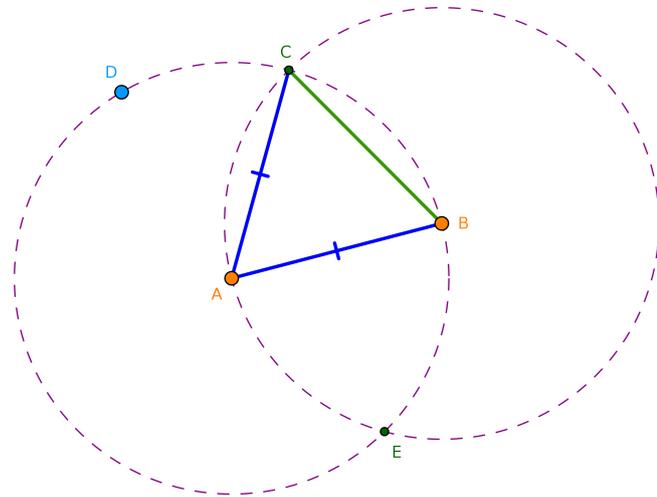


Imagen 2.21: Prueba de la congruencia entre los segmentos AC y AB .

Ítem porque el punto B es centro del círculo CAE será igual la línea BC a la línea AB [D15].

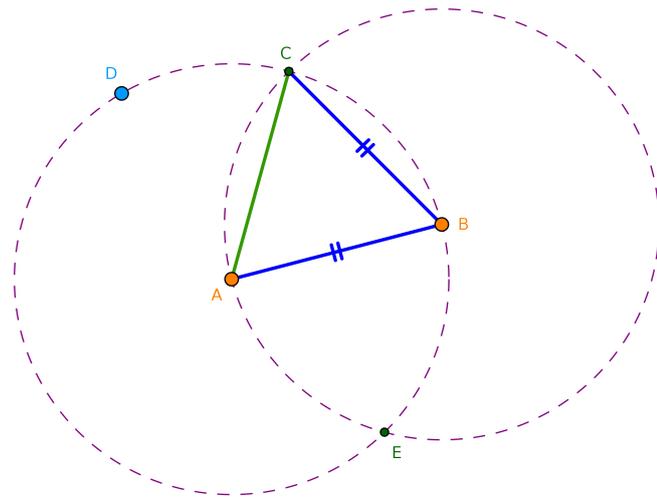


Imagen 2.22: Prueba de la congruencia entre los segmentos BC y AB .

Luego ambas, CA y la CB , son iguales a la línea AB y las cosas que a una son iguales entre sí son iguales (CS1), luego la línea AC es igual a la línea CB .

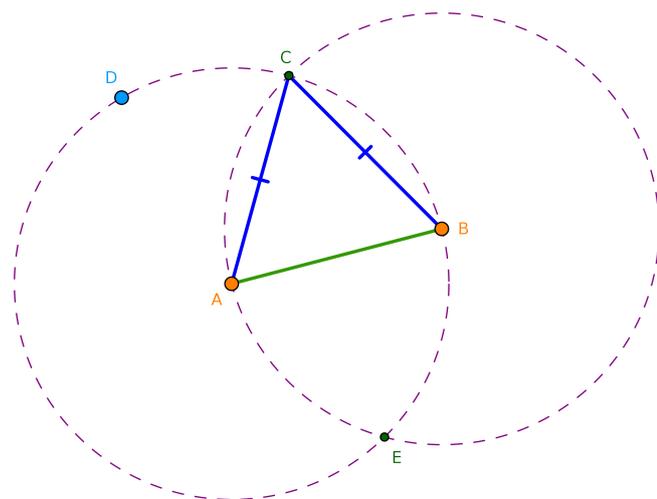


Imagen 2.23: Prueba de la congruencia entre los segmentos AC y CB .

Luego las tres líneas CA , AB [y] BC son iguales entre sí.

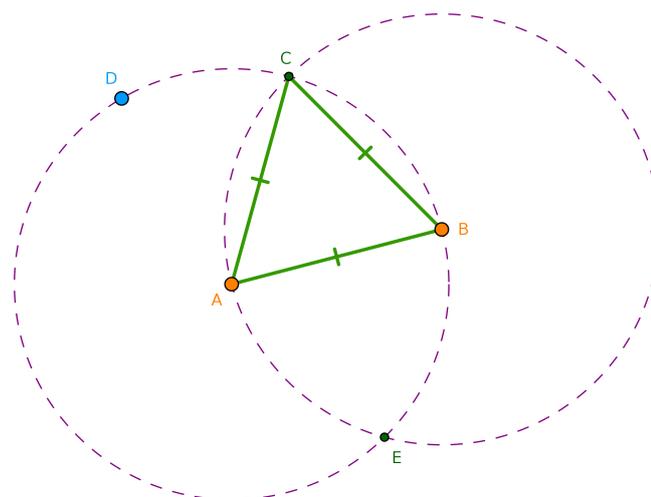


Imagen 2.24: Resultado de la sección de Demostración.

Conclusión Será pues equilátero el triángulo ABC y fabricado sobre la línea recta dada terminada AB ; lo cual convino hacerse.

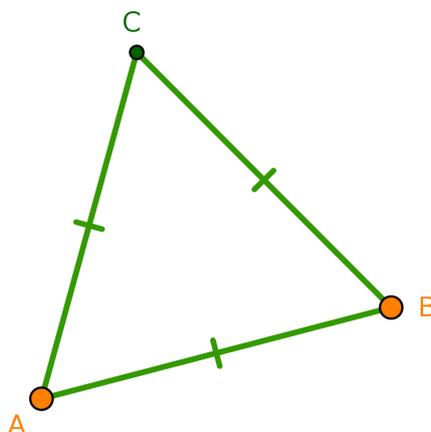


Imagen 2.25: Resultado de la sección de Proposición.

Tomamos este ejemplo y la estructura discursiva de las proposiciones para destacar algunas cuestiones importantes en la estructuración de los *Elementos*. En primer lugar, Euclides tiene la necesidad de construir de manera concreta algunos de los objetos que ya ha declarado en sus definiciones. En el caso de la proposición 1 del Libro 1, se construye un triángulo equilátero a partir de una longitud dada, aunque en la definición 24 ya se ha introducido la idea de triángulo equilátero:

Definición 24 Otrosí [además] de las figuras de tres lados, triángulo equilátero es el que se contiene debajo de tres lados iguales.

La diferencia entre la definición del objeto y la proposición que permite su construcción radica en que, la primera establece su existencia ideal y la segunda asegura la construcción concreta del objeto. Esta situación permite reconocer y ejemplificar que “la definición de un objeto matemático [en los *Elementos*] no implica su existencia” (Euclides, 1991, p. 54), es decir, los objetos se usan únicamente después de haberse declarado (definición) y haber propuesto un método de construcción concreta de los mismos.

Otro aspecto relevante corresponde a la manera en que Euclides hace uso de las herramientas teóricas, a través de instrumentos concretos. Gracias a las investigaciones históricas (Martin, 1998) sabemos que Euclides empleaba una regla no graduada, que utilizaba únicamente para hacer trazos, y un compás desarmable, que solamente le permitía trazar circunferencias, ya que al levantar el compás de la superficie donde se trazó la circunferencia, el compás se cerraba o desarmaba sin conservar la abertura del compás, consideración que contrasta con el manejo escolar tradicional que usa el compás para transportar distancias. En definitiva, Euclides utiliza instrumentos concretos que encarnan a su conjunto de herramientas teóricas, lo cual da cuenta de una correspondencia entre los objetos ideales declarados en las definiciones y operacionalizados por las herramientas teóricas, y las representaciones concretas o diagramas y su construcción mediante instrumentos materiales.

Los objetos geométricos se elaboran siguiendo una estructura discursiva que pone en juego los aspectos teóricos y concretos; con base en proposiciones, definiciones, postulados y comunes sentencias; empleando instrumentos que encarnen las herramientas teóricas propuestas por Euclides. A los diagramas generados de esta manera les denominamos *construcciones euclidianas*.

Cabe destacar que la palabra construcción se utiliza en geometría para referirse tanto al proceso, como al producto de dicho proceso. Martin (1998) se refiere a esta dualidad del concepto construcción como “un algoritmo geométrico o un dibujo que ilustra un teorema” (p. 3). Para los propósitos de este trabajo, se adoptan ambas acepciones del término²⁹.

2.2.1.2. Propiedades de los objetos geométricos

Del apartado anterior sobre las construcciones euclidianas, se advierte que la geometría posee una constitución que entrelaza aspectos teóricos y concretos. En la literatura especializada varios autores mencionan esta característica, dentro de los más destacados está Arzarello y otros (2002), quien declara que la dialéctica teórico-perceptual caracteriza a todo el razonamiento geométrico. En esta misma sintonía, aunque ampliando la reflexión hacia los objetos geométricos, Laborde (2005) realiza la distinción entre el dominio de los objetos y las relaciones geométricas (refiriéndose a los aspectos teóricos) y las entidades gráfico-espaciales (refiriéndose a los aspectos concretos), mencionando que esta distinción se observa tanto en diagramas dibujados en papel, con un computador o por artefactos mecánicos que realizan construcciones euclidianas. Es decir, la dialéctica teórico-concreto que caracteriza al pensamiento geométrico, es heredada a los objetos geométricos

²⁹Algunos resultados de este apartado están reportados en Rubio-Pizzorno, S., y Montiel Espinosa, G. (en prensa). Construcciones dinámicas. En F. J. Córdoba Gómez; J. C. Molina García y L. A. Ciro López (Ed.), *Avances en la integración de tecnologías para la innovación en educación. Congreso Latinoamericano de GeoGebra 2016* (en prensa). Bogotá, Colombia: Fondo Editorial Universidad La Gran Colombia.

(construcciones euclidianas), gracias a su proceso de elaboración, el cual fue expuesto en el apartado anterior.

De esta manera, es posible reconocer que los objetos geométricos poseen una dualidad de esencia:

- **Propiedades teóricas:** se trata de referentes (teóricos) en una teoría geométrica, incluidos: objetos teóricos, relaciones y operaciones con esos objetos, propiedades invariantes, conjeturas, teoremas y demostraciones.
- **Propiedades gráfico-espaciales:** aspectos perceptuales, los cuales pueden ser analizados como fenómeno visual, de movimiento o cinestésicos; entidades gráficas en las cuales es posible realizar acciones físicas, y acerca de las cuales es posible expresar ideas, interpretaciones, opiniones y juicios.

Por ejemplo, en el siguiente pentágono podemos identificar características de tipo teóricas o gráfico-perceptuales:

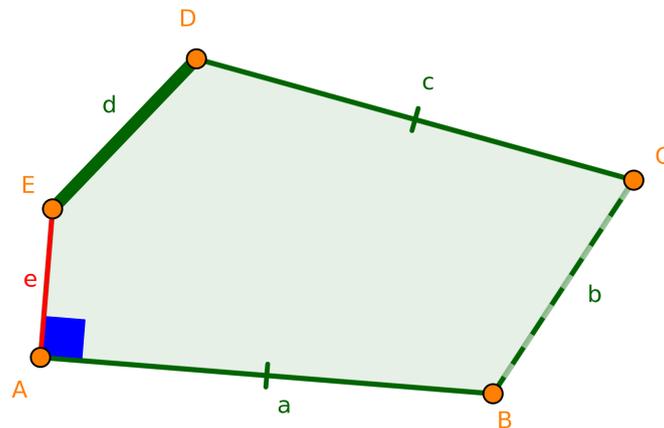


Imagen 2.26: Propiedades teóricas y gráfico-espaciales de un objeto geométrico.

En términos teóricos, se puede identificar que los segmentos a y e son perpendiculares, y que los segmentos a y c son congruentes. Por otra parte, en cuanto a las propiedades gráfico-perceptuales, se identifica que el pentágono es verde, los puntos son de color naranja, el segmento e es de color rojo, el d es más grueso que el resto y el b está segmentado. Ambos grupos de propiedades son independientes entre sí, por ejemplo, que el segmento e sea rojo no tiene incidencia en que sea perpendicular con el segmento a . Además, ambos tipos de propiedades representan aspectos diferentes del diagrama geométrico: las propiedades teóricas reflejan características geométricas y las propiedades gráfico-espaciales corresponden a aspectos concretos de los objetos materiales, como color, grosor, textura, entre otros³⁰.

³⁰Algunos resultados de este apartado están reportados en Rubio-Pizzorno, S., y Montiel Espinosa, G. (en prensa). Naturaleza de los objetos de la geometría dinámica. En F. J. Córdoba Gómez; J. C. Molina

2.2.1.3. Estatus de precisión y exactitud de los diagramas geométricos

Los apartados anteriores, sobre construcción euclidiana y propiedades de los objetos geométricos, hablan de las características de estos objetos debido a la manera en que son elaborados. Estas características de los diagramas geométricos, entendida como un estatus de precisión y exactitud, los distinguen de otro tipo de representaciones concretas.

De los apartados anteriores es posible interpretar que los diagramas geométricos son elaborados siguiendo una estructura discursiva, utilizando herramientas concretas que encarnan al conjunto de herramientas teóricas declaradas en los *Elementos*, lo cual les confiere una dualidad de esencia, en tanto poseen propiedades teóricas y gráfico-espaciales. En conjunto, estas consideraciones configuran el estatus de precisión y exactitud de los objetos geométricos, lo que permiten distinguirlos de otras representaciones concretas.

Este estatus es relativo a obtener un objeto geométrico declarado *a priori*, como resultado de un proceso de construcción. Por ejemplo, supóngase que se quiere construir un cuadrado utilizando una regla graduada y una escuadra, comenzando por trazar un segmento de cinco centímetros de longitud, luego se trazan segmentos perpendiculares de la misma medida con la ayuda de la escuadra, para finalmente unir los extremos de estos segmentos completando el cuadrado. Este procedimiento de construcción está basado en aspectos percetuales y la pericia que tenga el sujeto para manipular la regla graduada y la escuadra, lo cual puede incidir en una falta de precisión en el proceso de construcción, lo que puede provocar que los ángulos internos no sean rectos, pero sí muy cercano a serlo, y en consecuencia los segmentos no son todos congruentes. Por lo tanto el objeto no es un cuadrado, sino que corresponda a un rombo o un romboide. Decimos entonces que el proceso de construcción no fue preciso, pues no resultó exactamente un cuadrado, que se había declarado como objetivo de la construcción.

Para asegurar la construcción de un cuadrado, por ejemplo, en primer lugar es necesario seguir un procedimiento con base en los aspectos teóricos declarados en los *Elementos*, en este caso el trazo de segmentos de rectas perpendiculares desde un punto dado y la copia de longitud de un segmento (proposición 2). En segundo lugar, es menester utilizar herramientas concretas que encarnen el conjunto de herramientas teóricas, las cuales pueden ser las tradicionales regla no graduada y compás, pues con la primera se puede trazar segmentos de recta y con la segunda trazar circunferencias dado su radio.

Este estatus es reflejo de la relación intrínseca entre los aspectos teóricos y concretos de la geometría, que se manifiestan en todos sus ámbitos y de diferentes maneras. En el caso particular de la precisión al construir los diagramas para que correspondan exactamente a lo que se quería construir, incide completamente en la práctica geométrica de postular verdades universales, a partir del análisis de objetos concretos. Este tema es tratado a

García y L. A. Ciro López (Ed.), *Avances en la integración de tecnologías para la innovación en educación. Congreso Latinoamericano de GeoGebra 2016* (en prensa). Bogotá, Colombia: Fondo Editorial Universidad La Gran Colombia.

profundidad en la sección 2.2.3 sobre la naturaleza filosófica de la geometría³¹³².

³¹Algunos resultados de este apartado están reportados en Rubio-Pizzorno, S., y Montiel Espinosa, G. (en prensa). Precisión y Exactitud. Propuesta inicial sobre el estatus de los objetos de la Geometría Dinámica. En F. J. Córdoba Gómez; J. C. Molina García y L. A. Ciro López (Ed.), *Avances en la integración de tecnologías para la innovación en educación. Congreso Latinoamericano de GeoGebra 2016* (en prensa). Bogotá, Colombia: Fondo Editorial Universidad La Gran Colombia.

³²En Rubio-Pizzorno, S. y Montiel, G. (2017). Consideraciones epistémicas sobre los objetos geométricos en ambientes de geometría dinámica. Análisis inicial. En L. A. Serna (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 30, (pp. 1505 - 1514). Ciudad de México, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. ISSN: 2448-6469 se pone a prueba una actividad basada en lo reportado en este apartado de la Naturaleza epistémica de la geometría, además de presentar un análisis inicial de las actividades que se llevaron a cabo.

2.2.2. Naturaleza epistemológica

Con la naturaleza epistemológica pretendemos dar cuenta de los fundamentos y métodos con los cuales se construye el conocimiento científico (la episteme), en este caso, la geometría. De esta manera, abordamos la evolución histórica de la geometría, haciendo énfasis en los hitos relevantes y cómo se fueron gestando.

Son múltiples las obras históricas (Ostermann y Wanner, 2012; Scriba y Schreiber, 2015) que escogen como inicio de su reporte temporal sobre la geometría, la relación entre los desarrollos prácticos de las civilizaciones de Babilonia y Egipto, como la medición de la tierras, la inspección de los campos después de las inundaciones regulares del Nilo, calcular la cantidad de maíz en un contenedor cilíndrico, construir espectaculares templos y pirámides; con la teorización griega de esos resultados, como el teorema de Tales y el de Pitágoras, por ejemplo. Esto se debe a la gran influencia que ejerció la geometría euclidiana durante 2000 años en el devenir científico de la humanidad, y a la posibilidad de explicar cómo la teorización griega de la geometría, devino de las aplicaciones prácticas propias de Babilonia y Egipto. Al respecto, Greenberg (1994) postula que la geometría antigua (Babilonia y Egipto) era una colección de procedimientos de regla general, los cuales eran llevados a cabo mediante la experimentación, la observación de analogías, suposiciones e incluso luces de intuición ocasional. En resumen, era un tema empírico en el que las respuestas aproximadas eran generalmente suficientes para propósitos prácticos. Este autor fija los inicios de la geometría griega con las teorizaciones de Tales de Mileto, Pitágoras, Eudoxo, los cuales decantaron en aportaciones a diferentes libros de los *Elementos* de Euclides, la primera sistematización del saber geométrico conocido por la humanidad. Estas obras nos permiten clarificar que la geometría posee una inalienable relación entre los aspectos teóricos y su aplicación práctica.

En términos históricos, la evolución de la geometría y su tradición, que ha influenciado al mundo occidental, se puede describir a través de hechos claves, que provocaron cambios en su concepción (Piaget y García, 1992):

1. Como génesis de este relato se encuentra a los *Elementos* de Euclides, con una tradición geométrica basada en la construcción (método sintético).
2. Con la introducción de la geometría analítica se vive una revolución en la metodología y significados de la geometría. En este punto, se cuestiona la validez general y universal de los resultados particulares de la geometría sintética (euclidiana), y se contrapone con la posibilidad de establecer propiedades generales de familias completas de curvas, por parte de la geometría analítica, gracias al uso de expresiones algebraicas.
3. A partir de este cuestionamiento a la geometría sintética, Poncelet y Chasles pretenden buscar por métodos propios de la geometría (es decir, sin recurrir al álgebra) la manera de aplicar el razonamiento implícito, haciendo abstracción de la figura, y de obtener así el mismo grado de generalidad que la geometría analítica. Como producto de esta búsqueda, surgen las bases de la geometría proyectiva, representadas por

elementos imaginarios (puntos imaginarios, por ejemplo), que están inspirados en métodos algebraicos que les da un sentido puramente geométrico.

4. Como pináculo de esta evolución histórica, Klein logra pasar de las transformaciones proyectivas a la de estructuras de grupo. De esta manera y sobre la base de la noción de grupo de transformaciones y de sus correspondientes invariantes, se dispone de la herramienta necesaria para introducir distinciones precisas entre los diferentes tipos de geometrías, y lograr así, la reformulación más clara y precisa de la geometría, desarrollada por Klein (1872) en su *Programa de Erlangen*.

A modo de conclusión, Piaget y García (1992) proponen a la relación entre geometría y álgebra como hilo conductor del desarrollo histórico de la geometría, lo cual permite diferenciar entre las etapas más significativas de esta evolución, mediante la identificación de las distintas formas en que se aplicaban métodos algebraicos en geometría, así como explicar el orden de sucesión entre tales etapas:

1. Con los *Elementos* y su tradición, se estudian las propiedades o relaciones internas de una figura o un cuerpo. En este caso, el uso algebraico queda remitido a una “simple traducción algebraica de la relación entre los elementos de una figura en un problema geométrico específico, como por ejemplo, asignar un número a un segmento” (Ibíd., p. 105).

Debido a que no se toma en consideración el espacio como tal, no es posible dar cuenta de las transformaciones de las figuras en el espacio que las contiene.

2. Con el surgimiento de la geometría analítica, se da inicio a una etapa que continúa con la geometría proyectiva, donde la noción de transformación es fundamental. En esta etapa el uso del álgebra se da como una aplicación de la función algebraica y de las transformaciones de dicha función, es decir, la representación algebraica corresponde a un elemento variable en un sistema de transformaciones posibles. A pesar de la búsqueda de transformaciones como manifestación de la relación entre figuras, las estructuras de conjunto a las cuales se subordinan tales transformaciones, no son evidenciadas.

3. Con el *Programa de Erlangen* de Klein (1885), comienza una tercera etapa caracterizada por la prominencia de las estructuras (algebraicas) y las relaciones entre los elementos de una estructura dada.

Ya no se trata de estudiar cómo una figura se transforma en otra, manteniendo sin variación ciertos elementos o relaciones, sino de cómo una estructura opera sobre un conjunto de elementos.

El análisis epistemológico sobre la naturaleza de la geometría nos provee dos interesantes resultados, uno en término de su aplicación al mundo real y la otra referente a su devenir histórico.

El primer resultado expresa que la geometría es un área del conocimiento humano que, en primera instancia, se inspira en la experiencia para luego desarrollar sus elementos teóricos al respecto.

El segundo resultado que arroja el estudio de la naturaleza epistemológica de la geometría, corresponde a la importancia de la noción de transformación para la su evolución conceptual. Tal noción, parece haber sido tratado desde el comienzo histórico de la geometría por el mismo Euclides en su desaparecida obra *Sobre los Porismas*, acerca de la cual existe consenso respecto a que trataba de geometría proyectiva (Euclides, 1991; Melogno y otros, 2011). Sin embargo, los aportes de Euclides a la noción de transformación quedaron en estado embrionario hasta la llegada de los aportes de Poncelet y Chasles a la geometría proyectiva (Piaget y García, 1992) y, finalmente, de Klein (1985) a la formulación de la geometría.

La importancia de la noción de transformación es la posibilidad de formular completamente el concepto de geometría, como estructuras que persisten a través de los cambios en sus aplicaciones particulares, lo cual permite establecer una jerarquización entre las distintas geometrías (como se ve en la Imagen 2.27) y lograr la reformulación más importante de esta área del saber.

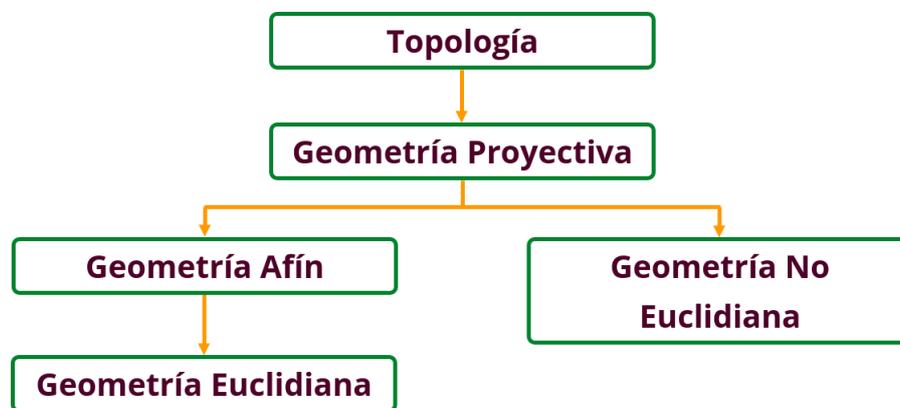


Imagen 2.27: Jerarquización de las geometrías (Meserve, 1983, p. vi).

Por lo tanto, una manera de definir a las geometrías (el plural es completamente intencional) son las propiedades que permanecen invariantes a través de cierto grupo transformaciones espaciales. De este enunciado se reconoce la relevancia del par transformación-invariante, para caracterizar completamente a las geometrías respecto de lo que no se modifica cuando se realiza cierto dinamismo.

2.2.3. Naturaleza filosófica

Como ya se mencionó al comienzo de la problematización, con naturaleza filosófica nos referimos a las explicaciones racionales a nivel general, que orientan el conocimiento de la realidad y el proceder humano. Específicamente en la naturaleza filosófica de la geometría, indagamos en la relación entre los diagramas (representaciones geométricas concretas) y las verdades universales que se abstraen a partir de trabajar con ellos.

Cabe destacar que el estudio de la naturaleza filosófica de la geometría, se basa ampliamente en las ideas comunicadas en el artículo *Construcción, necesidad e intuición de esencias en geometría* de Cedrés (2009), en el cual el autor aborda la problemática ya descrita, a partir de la documentar la evolución histórico-filosófica de la noción de intuición de esencias o intuición sofisticada, como base de la práctica geométrica.

Uno de los resultados del estudio acerca de la naturaleza epistemológica de la geometría, es la relación inalienable entre la teoría y la realidad (ver 2.2.2), dualidad que se ve reflejada en los objetos geométricos y sus propiedades (ver en 2.2.1.1). Por ejemplo, los agrimensores egipcios de la antigüedad determinaban el área de terrenos luego de cada inundación provocada por el Nilo, es decir, tenían un problema de la realidad al cual necesitaban dar solución. Este tipo de resultados prácticos que obtuvieron los egipcios, basados en ensayo y error, fueron teorizados por los griegos pasando a formar parte de una estructura axiomática. Esto permitió extender los resultados particulares a conclusiones generales, como verdades universales. A partir de esta característica de la geometría, surge un cuestionamiento que ha intrigado tanto a matemáticos como a filósofos a lo largo de la historia, respecto de cómo se pretende que las conclusiones matemáticas con un pretendido valor de necesidad y universalidad, descansan en el trazado de figuras particulares. Esta pregunta es desarrollada en extenso por el filósofo Cedrés (2009), en su estudio de la dependencia de la geometría euclidiana a los diagramas y la demanda de necesidad y universalidad de sus resultados. Para lo cual desarrolla un estudio histórico-filosófico, abordando las explicaciones que distintos filósofos y matemáticos han dado a este fenómeno a lo largo de la historia.

El punto de partida de este recorrido corresponde a los *Elementos* de Euclides, paradigma clásico del uso del método sintético de demostración, el cual consiste en:

Tratar de producir el resultado deseado mediante la efectuación real de construcciones, y lo que es más importante, que dicha construcción proceda desde elementos simples a partir de un conjunto fijo de reglas.

(Cedrés, 2009, p. 597).

La descripción del método sintético está en completa sintonía con (1) la dualidad teórico-concreta que permea a toda la geometría, por ejemplo al reconocer la existencia de los objetos geométricos únicamente después que hayan sido construidos de manera concreta, ya que su definición no implica su existencia; y (2) la sistematización desarrollada en los *Elementos*, la cual corresponde a definir los objetos de la geometría a partir de sus componentes esenciales (ver en 2.2.1.1). Con base en ambas características, el método sintético presenta dos implicaciones relevantes:

Por un lado, se reconocía la fundamental importancia que las construcciones jugaban en el establecimiento de las verdades geométricas y, por el otro, se creyó firmemente que sus resultados carecían de la ambigüedad y falta de determinación característica del conocimiento sensible, es decir, que sus resultados se seguían con necesidad y certeza absoluta.

(Cedrés, 2009, pp. 598 y 599).

Estas implicaciones son un nuevo ejemplo de la relación teórico-concreta característica de la geometría, en este caso centrada en la relevancia de la construcción, la cual se entiende como *proceso y objeto*: en primer lugar, el *proceso de construcción* es la manera de producir verdades geométricas; y en segundo lugar, la *construcción como objeto* es la prueba absoluta de la proposición y lo que se pretendía demostrar en ella. Como declara Cedrés (2009) “para Euclides, la fuerza y conclusividad de una prueba consiste en la posibilidad de exhibir la figura en cuestión” (p. 595).

De esta manera queda en evidencia la importancia de los diagramas en la obra de Euclides, ya que su producción corresponden al máximo estándar de prueba geométrica, y su proceso de elaboración funge como un camino labrado entre la teoría y lo concreto, cuyo propósito es el establecimiento de verdades universales. Esta es, pues, la relación de dependencia de la geometría a los diagramas, fenómeno que ha sido abordado por insignes filósofos y matemáticos a lo largo de la historia, tratando de responder a la pregunta “¿cómo se pretende que conclusiones matemáticas con un pretendido valor de necesidad y universalidad, descansen en el trazado de figuras particulares?” (Cedrés, 2009, p. 596).

El primero en referirse a este tema fue Platón, declarando respecto de la importancia fundamental que juegan las construcciones en el establecimiento de verdades geométricas y el reconocimiento de estas verdades como certezas absolutas sin ambigüedades:

Las proposiciones de la geometría tratan acerca de objetos de un mundo inmaterial y eterno, y cuyo conocimiento se obtenía a través de una facultad que, utilizando las representaciones sensibles, se concentraba en las propiedades esenciales de las mismas. (Cedrés, 2009, p. 599).

Platón pone en juego el plano teórico (objetos de un mundo inmaterial y eterno) y el plano concreto (utilizando representaciones sensibles), aunque pone el énfasis en aquella facultad que nos permite acceder al conocimiento geométrico cuando reconocemos las propiedades esenciales representadas en los objetos concretos. Esa facultad es denominada como una mirada del pensamiento por Platón, la cual atiende a los modelos o ideas puras que esas construcciones sensibles se encuentran representando.

Es importante señalar que esta mirada del pensamiento no equivale a una mera contemplación de verdades ya hechas, sino a una construcción de las mismas siguiendo un procedimiento estrictamente deductivo. Es decir, esta facultad nos permite acceder a verdades universales, pero por sobre todo nos da la posibilidad de generar tales verdades mediante un procedimiento constructivo.

Algunos siglos después, Proclo (s. V d.C.) realiza una detallada fundamentación filosófica del proceso constructivo de Euclides, basándose en la idea de imaginación, ya que ocupa una posición intermedia entre las formas de conocimiento superiores y las inferiores, esto es, entre el conocimiento intelectual y la percepción sensorial. Para Proclo, los objetos matemáticos puros están encerrados en la inteligencia, por lo que es necesario de la imaginación, dada su naturaleza híbrida, para proveer de una forma sensible pero que, a la vez, capture las propiedades formales puras de dichos objetos, y así, volverlos manifiestos y verdadero objetos de conocimiento. Es decir, la imaginación “facilita que los conceptos encerrados en la inteligencia sean desplegados para ser conocidos” (Cedrés, 2009, p. 602).

Esta manera de trabajar con la geometría, donde la dependencia de los resultados estaba íntimamente relacionada con los diagramas construidos, presentaban dos problemas: “aquellas cosas que manifestaban características visibles diferentes no pudieran ser subsumidas bajo un concepto simple; y la carencia de unidad en los principios constructivos de la geometría” (p. 603). Por lo que Descartes (1596 - 1650) hace su crítica a esta manera de hacer geometría, donde el pensamiento fundamental de Descartes propone que “la geometría sólo puede ser completada a través de su determinación por medios aritméticos” (p. 603). De esta manera sería posible realizar un estudio sistémico de la totalidad de los objetos geométricos de cierta clase.

El siguiente filósofo que analiza Cedrés que se pronunció sobre el fenómeno de dependencia es Immanuel Kant (1724 – 1804), quien tuvo que lidiar con una versión actualizada de la geometría, impulsada por la obra *La Géométrie* publicada en 1637 por René Descartes (1596 – 1650), en la cual se cuestiona el modo de estudiar la geometría sintética, mediante el análisis de casos particulares. Esta crítica provocó una primera reformulación de la geometría, impulsando el desarrollo de la geometría proyectiva. Por ejemplo, al considerar la incorporación de elementos imaginarios al plano euclidiano, como los puntos cíclicos (puntos de intersección en el infinito de cualquier par de circunferencias).

La importancia de incorporar elementos imaginarios en el sistema geométrico radica en la revolución que provocó en el modo de entender la cuestión de la naturaleza de las representaciones geométricas. Por lo cual, en esta nueva visión, “el objeto real de la investigación geométrica no es la forma individual en su existencia sensorial, sino las diversas clases de dependencia que pueden subsistir entre las formas” (Cedrés, 2009, p. 605).

A partir de esta nueva visión de la geometría, Kant desarrolla una explicación de la relación entre las representaciones y las propiedades que relacionan a los elementos geométricos de cierta clase. Según la filosofía kantiana, a todo concepto le corresponde una intuición, la cual viene suministrada por la sensibilidad. En el caso de las matemáticas, que procede constructivamente en relación a todos sus conceptos, sus intuiciones han de proveerse *a priori*, las cuales deben expresar las propiedades compartidas por todas las intuiciones pertenecientes al mismo concepto. Por lo tanto “una intuición pura *a priori* es una representación que surge como una necesidad de la forma pura de la sensibilidad, independientemente de los caracteres sensibles pasados o actuales, aunque no completamente independiente de toda clase de representación sensible” (Cedrés, 2009, p. 607).

De esta manera, la geometría procede desde ciertos elementos básicos o primitivos, regida por sus axiomas, para producir objetos imaginarios, ideales, representaciones que

aprehenden las propiedades universales de una clase de figuras. Lo cual se realiza gracias a la intuición pura *a priori*. En otras palabras, la intuición pura *a priori* es la facultad que nos permite aprehender las características teóricas de una clase de objetos geométricos, mediante la producción de objetos de una forma pura de sensibilidad.

Debido al avance en geometría analítica y los avances en la geometría proyectiva, Poncelet (1788 – 1867) realizó dos contribuciones:

Hizo esfuerzos importantes por justificar la introducción de elementos imaginarios en los sistemáticas geométricos, pero problematizó al mismo tiempo la dependencia de la geometría sintética de los diagramas explícitamente trazados.

(...) Se preguntó si la geometría sintética no podría incorporar métodos tan potentes y efectivos como los del álgebra, embarcándose en una reinterpretación de los contenidos de la geometría.

(...) No se trataba finalmente de borrar la frontera entre geometría sintética y analítica, sino de reinterpretar el uso y la significación de los diagramas empleados en la primera. (Cedrés, 2009, pp. 609 y 610).

Poncelet observó que el álgebra opera con signos abstractos y consideró aplicar esta idea a los diagramas geométricos, por lo que propuso reconocerlos como un signo complejo cuyos elementos constituyentes puede ser operados a niveles esenciales, sin considerar las características particulares de cada representación. De esta manera, lo importante son las propiedades que se sostienen luego que todos los puntos de una figura sufren un movimiento continuo. Por lo tanto, “la fuerza y conclusividad de toda prueba geométrica descansa en los invariantes del sistema, no en lo que es peculiar a los miembros individuales como tales” (p. 610).

El punto decisivo en esta historia es la introducción de la teoría de grupos en la geometría, realizada por Félix Klein (1849 – 1925) en su *Programa de Erlangen* (1885). En este escrito emplea el concepto de grupo como principio para clasificar las diferentes geometrías: se considera una geometría como aquellas propiedades que permanecen invariantes a través de ciertas transformaciones espaciales. Por ejemplo, la geometría euclidiana corresponde al estudio de las propiedades invariantes bajo el grupo de las transformaciones rígidas (translación, rotación y reflexión). De esta manera, lo importante para el estudio de las geometrías ya no son las características de figuras particulares, o las relaciones entre ellas, sino las propiedades que, a través de cierto grupo de transformaciones, permanecen invariantes.

Sumando a esta nueva formulación de las geometrías propuesta por Klein, y la consideración de los diagramas geométricos como símbolos complejos, propuesta por Poncelet, es posible preguntarse si es necesaria una facultad especial, para abstraer las condiciones particulares expresadas en el diagrama y leer las propiedades estructurales que el diagrama expresa. Al respecto, Klein (1996) propone que la facultad necesaria es una intuición sofisticada (*refined intuition*), la cual se orienta hacia las propiedades abstractas que los diagramas se encuentran instanciando.

A manera de síntesis, a lo largo del devenir histórico de la geometría se ha reconocido una evolución en su objeto de estudio, partiendo del estudio de las características de objetos particulares, pasando por el estudio de las relaciones entre objetos, para finalizar con el análisis de la conexión sistemática de la totalidad de objetos en el espacio. En cada etapa de esta evolución se investigó la relación entre los resultados universales de la geometría y la necesidad de utilizar diagramas. En la primera etapa, se logró explicar el fenómeno de dependencia como una relación imbricada entre aspectos teóricos y concretos, con la imaginación como mediador, que permite generar verdades universales mediante un proceso constructivo. En la segunda etapa se explica la relación entre objetos y los resultados generales obtenidos de esa relación, con la noción de intuición pura *a priori*, que permite acceder a las características teóricas de una clase de objetos geométricos, mediante la producción de objetos sensibles, a través de un proceso constructivo. En la etapa final, se propone la necesidad de una intuición sofisticada que permita reconocer las propiedades esenciales que los diagramas geométricos se encuentran instanciando.

Gracias a estos resultados es posible concluir que la naturaleza filosófica de la geometría reporta que son necesarias una facultad de contemplación de los diagramas y una facultad de generación de verdades geométricas universales. Por una parte, la facultad de contemplación se constituye de la intuición sofisticada coordinada con la intuición empírica, para la identificación de esencias. Por otra parte, la facultad de generación de verdades son producidas mediante un proceso de construcción de representaciones geométricas concretas. Estas verdades universales corresponden a las propiedades geométricas o aspectos esenciales de los objetos geométricos, que caracterizan la conexión sistémica entre ellos cuando se les aplica una transformación, las cuales se reconocen como las cualidades que permanecen invariantes mediante esta variación. Además, tal conjunto de transformaciones son las que definen el espacio o estructura geométrica puesta en juego, es decir, la geometría misma.

2.2.4. Naturaleza digital - Geometría Dinámica

Con base en el interés de esta investigación por la construcción de conocimiento geométrico en la era digital, al estudio de las naturalezas epistémica, epistemológica y filosófica de la geometría, se suma el estudio de su *naturaleza digital*, que representa los aspectos geométricos a los cuales se pueden acceder y tratar mediante los ambientes de geometría dinámica. Para ello, presentamos una revisión de literatura especializada en educación de la geometría, en los cuales el tema principal es la geometría dinámica y, en particular, el arrastre sea central, ya que este elemento corresponde a la característica que define y distingue a los *softwares* de geometría dinámica de otros programas computacionales.

Desde la década de 1980 los software de geometría dinámica han alcanzado una marcada presencia en ámbitos didácticos y de investigación de la Educación de la Geometría. Desde su aparición, se usó el término geometría dinámica (GD), que Goldenberg y Cuoco (1998) atribuyen a Nick Jackiw y Steve Rasmussen, para nombrar colectivamente a un nuevo tipo de software. Tales programas computacionales poseen ciertas características que los hace atractivos para ser usados en ambientes escolares, por ejemplo: objetos primitivos (puntos, líneas, círculos, etc.), herramientas básicas (recta paralela, perpendicular, bisectriz, etc.) y la posibilidad de interactuar entre ellos, por ejemplo, a través de transformaciones como la reflexión a través de un punto o recta.

El término GD se popularizó en la literatura, debido a su idoneidad para caracterizar el elemento que distingue a estos programas de los otros software de geometría, esta es: “la transformación continua en tiempo real llamada *arrastre*” (Goldenberg y Cuoco, 1998, p. 351).

En una publicación de la revista ZDM del 2002, cuyo tema fue la investigación acerca de los software de GD (SGD), se ratifica la importancia del arrastre para la GD, al mencionar tres características que todos los SGD comparten, no importando sus diferencias conceptuales o ergonómicas (Straber, 2002), a saber:

- **Arrastre:** modelo dinámico de la geometría euclidiana escolar y sus herramientas.
- **Macros:** posibilidad de agrupar una secuencia de construcción en un sólo comando, el cual se convierte en una nueva herramienta de construcción.
- **Lugares geométricos:** trazo generado por un punto que se mueve dependiendo del movimiento de otros puntos.

Si bien, al inicio, se consideraron estas tres características, la investigación en GD se ha decantado por mostrar la importancia del arrastre. 12 años después, Fahlgren y Brunström (2014) identifican que la literatura enfatiza el arrastre como la característica definitoria de la GD.

Esto ayudó a centrar aún más nuestra atención, dentro de la revisión bibliográfica, en investigaciones donde el arrastre fuese un elemento clave. Desde esta consideración reportamos una evolución en el objeto de estudio de las investigaciones educativas en GD, al presentar de manera cronológica, los objetivos y los aportes a la GD y a la forma en que se considera al arrastre.

2.2.4.1. Funcionamientos del arrastre

Hölzl (2001) reconoce que las investigaciones realizadas hasta ese momento, a menudo utilizan el arrastre únicamente como herramienta de verificación. Por lo tanto su objetivo es evidenciar otras funcionalidades, según las variables didácticas puestas en juego en la situación de aprendizaje.

De esta manera concluye que en un aspecto epistemológico, el arrastre tiene una definición como herramienta y tiene distintas formas de uso (Hölzl, 2001, p. 83):

- **Definición:** es una herramienta para encontrar diferentes representaciones de una y la misma figura en transición continua.
- **Modo de uso:** debido a que el arrastre actúa sobre la representación concreta, cuyo efecto es determinado por la figura conceptual, se reconoce que el arrastre posee una función mediadora, que puede ser usada, por lo menos, de dos modos principales:
 1. **Arrastre como modo de prueba:** se utiliza para comprobar si una construcción tiene las propiedades que declara.
 2. **Arrastre como modo de búsqueda:** se utiliza para reconocer nuevas propiedades.

Por lo tanto, esta investigación identifica que el arrastre se puede utilizar para probar o para buscar, al resolver una tarea geométrica, y menciona como prospectiva, la posibilidad de investigar situaciones donde los estudiantes se enfoquen en reconocer invariantes más que en detalles específicos en una situación geométrica.

2.2.4.2. Consideraciones epistémicas de la GD y el arrastre

Ya con una definición del arrastre como herramienta, una descripción de su funcionamiento y determinados dos tipos de usos, la investigación de largo aliento de Laborde (2002) proporciona elementos que permiten valorar el uso del SGD y entender con mayor profundidad una de las características del arrastre.

El objetivo de esta investigación es mostrar que la integración de las tecnologías digitales al quehacer docente, es un proceso complejo, que necesita de mucho tiempo y el trabajo integrado de distintos profesionales y especialistas.

El foco de la investigación está en cómo los profesores diseñan tareas con la ayuda de un SGD y cuáles son sus intenciones depositadas en el instrumento. De esta manera, se propone una clasificación de tareas, de acuerdo al rol que el docente le atribuye al SGD y el grado de cambio de pueda anticipar. Basados en esta clasificación, reconocemos distintas valoraciones de la herramienta digital, lo que nos permite presentarla en términos de lo que Artigue (2002) llama valor pragmático (potencial productivo: eficiencia, costo y campo de validez) y valor epistémico (cómo se comprende el objeto matemático y qué preguntas genera sobre este) de la tecnología:

- **Valor pragmático para la generación de datos y construcción:** una tarea de construcción se puede realizar de manera más productiva (eficiencia-costos) en un ambiente de GD que en un ambiente de lápiz y papel.

- **Valor pragmático para la identificación:** al poner en juego la identificación de propiedades en una tarea, el ambiente de GD funge como un amplificador visual que permite desarrollar la tarea de modo más eficiente, en comparación con un ambiente de lápiz y papel.
- **Valor epistémico como evolución de la estrategia:** debido a las características del ambiente, la estrategia de resolución de la tarea evoluciona, en comparación con la resolución de la misma en un ambiente de lápiz y papel. Esto involucra más conocimientos matemáticos y geométricos por parte del estudiante.
- **Valor epistémico como generador de nuevas preguntas:** las tareas adquieren sentido y significado en el ambiente de GD, es decir, son tareas que únicamente se pueden resolver en un ambiente de tales características.

A partir de esta valoración, queda claro que la tecnología digital permite hacer más cosas en el mismo tiempo, si lo comparamos con el lápiz y el papel, pero esta corresponde sólo a uno de los valores que se le puede dar a la tecnología. La importancia del uso de una herramienta de este tipo, recae en la manera en que esta afecta epistémicamente al saber matemático. Llegando incluso al nivel de proponer tareas que tienen sentido únicamente en un ambiente de GD, como por ejemplo, preguntar al estudiante que construya una familia de triángulos que sólo admitan transformaciones isométricas. De querer resolver esta tarea con lápiz y papel, la única forma de hacerlo sería cambiando a un registro algebraico, dejando sin una representación geométrica a la situación.

En este mismo sentido, la autora pone énfasis en la característica de variación continua del arrastre, aludiendo a que el cambio continuo de una representación geométrica, puede ayudar a la idea de que la imagen representa un objeto variable, es decir, el mismo objeto bajo cierta variación. Con lo cual, el estudiante podría reconocer, de manera directa, propiedades geométricas como invariantes, en desmedro de variar una representación de manera discreta, lo cual provoca que el estudiante conciba tal representación modificada como un objeto matemático distinto, y por lo tanto estaría identificando características comunes de distintos objetos, es decir, faltaría el momento de considerar que tal propiedad identificada es la misma para cada uno de los diferentes casos.

En síntesis, esta investigación aporta en la valoración de la GD como una herramienta y ambiente propicios para estudiar y, aún más, cuestionar la geometría euclidiana. Junto con lo anterior, se reconoce un modelo de variación continua, que alienta al estudiante a reconocer de manera directa propiedades geométricas en sus representaciones concretas.

2.2.4.3. Jerarquización de las modalidades de uso del arrastre

La investigación de Arzarello y otros (2002) está completamente dedicada al estudio del arrastre, desde un punto de vista cognitivo. Comenzando por considerar crucial al arrastre en la dialéctica entre lo perceptual y lo teórico, propio de todo el razonamiento geométrico. Lo cual caracteriza al proceso cognitivo asociado a trabajar con el arrastre aplicado a una representación concreta, en una situación geométrica, configurando así una tipología cognitiva ascendente y descendente, desde lo concreto a lo teórico y viceversa respectivamente.

Luego identifica diferentes usos del arrastre por parte de los alumnos al resolver tareas geométricas, las cuales se reflejan en los diferentes modos de uso que hacen del ratón del computador:

- ***Wandering dragging* (arrastre errante)**: mover un punto basal al azar, sin un plan, con el fin de descubrir configuraciones o regularidades interesantes en las representaciones.
- ***Bound dragging* (arrastre ligado)**: mover un punto semi-libre, el cual está ligado a un objeto.
- ***Guided dragging* (arrastre guiado)**: arrastrar un punto basal de una representación con el fin de determinar una forma particular.
- ***Dymmy locus dragging* (arrastre a través de un lugar simulado)**: mover un punto basal de tal manera que la representación mantenga una propiedad ya descubierta; el punto que se mueve sigue un camino, incluso si el usuario no es consciente de este hecho: el lugar (*locus*) no es visible y, en consecuencia, “no le habla al estudiante”, quien no siempre se percata que está arrastrando a lo largo de un lugar (*locus*).
- ***Line dragging* (arrastre lineal)**: dibuja nuevos puntos a lo largo de una línea con el fin de mantener la regularidad de la figura.
- ***Linked dragging* (arrastre vinculado)**: vincular un punto a un objeto, para luego moverlo a través de él. Esta modalidad parece ser un arrastre ligado, con el paso previo de vincular un punto a un objeto.
- ***Dragging test* (prueba del arrastre)**: mover un punto libre o semi-libre con el fin de ver si la representación mantiene una propiedad inicial. Si es así, entonces la representación pasa la prueba; de lo contrario, la representación no fue construida de acuerdo a las propiedades geométricas que se pretendía que tuviese.

Estas modalidades del arrastre se enmarcan en una de las dos tipologías cognitivas, o bien, se ubican en el tránsito entre ambas, estableciendo de este modo una jerarquía cognitiva de las distintas modalidades de uso del arrastre, como se puede apreciar en la Imagen 2.28.

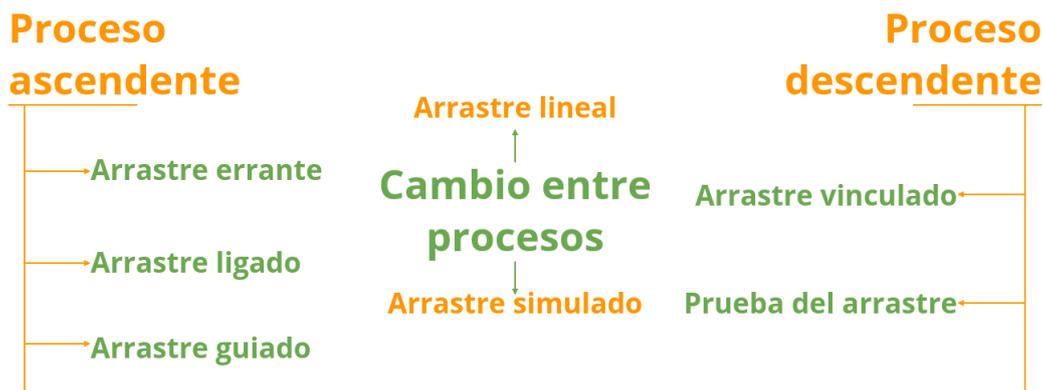


Imagen 2.28: Modalidades de arrastre asociado a las tipologías cognitivas.

Estas modalidades de uso del arrastre fueron ampliamente aceptadas por la comunidad, quien las adoptó como un lenguaje común y elementos a considerar en las investigaciones posteriores.

2.2.4.4. Diseño de tarea en GD

Hasta este punto, ya se cuenta con elementos que permiten caracterizar al arrastre y describir sus usos, por lo que Fahlgren y Brunström (2014) ponen su atención en el diseño de tarea apropiado para los ambientes de GD, poniendo énfasis en las fases previas y posteriores al proceso de demostración (*proof construction*): conjeturar, verificar, explicar (antes) y generalizar (después).

Los antecedentes teóricos que son considerados en esta investigación son las fases previas y posteriores a la demostración, y el diseño de tareas. En las fases anteriores a la demostración, de la exploración a la explicación, el arrastre es el componente característico en las investigaciones consideradas, lo cual confirma el modo de uso que se le da al arrastre, reportado por Hölzl (2001).

Uno de los aportes de Fahlgren y Brunström (2014), pertinente a nuestro propósito, es su revisión de literatura en cuanto a cómo interviene el arrastre en las fases de exploración y explicación de una tarea geométrica. Las investigaciones consultadas sugieren que un modelo para usar los SGD, que tengan como objetivo promover el desarrollo de las capacidades de demostración de los estudiantes, debería capitalizar:

1. La *función de arrastre* para apoyar exploraciones de relaciones entre objetos matemáticos o percepciones invariantes, que emergen a través del arrastre.
2. Añadir elementos de construcción apropiados para apoyar la construcción de pruebas.
3. Fomentar la reflexión y verificación, para disciplinar la exploración.
4. El desarrollo de representaciones informales para apuntalar la producción de pruebas semánticas. (p. 290).

2.2.4.5. Discernimiento de propiedades geométricas, empleando el arrastre como instrumento

Un avance importante en las investigaciones educativas en GD, fue comenzar a considerar el arrastre junto a ciertos elementos teóricos que permitieran ampliar y robustecer su uso en el diseño de una tarea o al resolverla.

Leung (2015) toma el arrastre y lo aúna a los cuatro patrones básicos de la teoría de variaciones, a saber: contraste, generalización, separación y fusión. De esta manera, propone cuatro tipos de interacción-variación bajo el modo de arrastre, que se podrían configurar cuando un estudiante está explorando en busca de invariantes geométricos:

- **Arrastrar para contrastar:** estrategia para discernir si un objeto satisface cierta condición o no, esto es, buscar distinguir diferentes fenómenos de un ambiente de GD.
- **Arrastrar para separar:** es la estrategia para conocer las características geométricas críticas que pueden convertirse en invariantes.
- **Arrastrar para generalizar:** en la estrategia que explora si después de contrastar y separar, una característica geométrica observada puede ocurrir en varias situaciones.
- **Arrastrar para fusionar:** es la estrategia para integrar características geométricas críticas bajo simultánea covariación. (pp. 455 - 456).

Como aporte final de su artículo, se propone un principio de exploración del arrastre (*dragging exploration principle*), el cual establece que los objetos de la GD poseen cierta cualidad que los diferencia de los objetos tradicionales de la geometría euclidiana:

Durante el arrastre, una figura (representación) mantiene todas las propiedades de acuerdo a las cuales fue construida y todas las consecuencias que conlleva la construcción de la geometría euclidiana (p. 467).

Esto nos habla del grado de profundidad que la investigación está alcanzando respecto del arrastre, pudiendo incluso llegar a reconocer características inherentes a esta variación continua en tiempo real, que define a la GD.

2.2.4.6. Arrastre como elemento esencial de la naturaleza digital de la geometría

El arrastre, concebido como la característica definitoria de los software de GD, es el elemento que los diferencia de otros software de geometría, como por ejemplo los basados en el lenguaje de programación Logo³³.

El arrastre, por ser una transformación continua en tiempo real, desempeña un papel importante en la mediación entre los diagramas geométricos y el sujeto que los manipula, puesto que, a diferencia de los ambientes estáticos (como el tradicional lápiz y papel), el usuario puede cambiar a voluntad la posición en el plano de los objetos geométricos; variar las dimensiones de los objetos, mediante la modificación de la longitud de sus segmentos o cambiando la posición de sus vértices o puntos definitorios; modificando el comportamiento de objetos, como la concavidad o excentricidad, modificando sus elementos definitorios. Todas estas modificaciones, realizadas de manera continua y en tiempo real.

A esta función mediadora del arrastre, se suma su incidencia en el vínculo percepción-teoría, al desarrollar un trabajo geométrico en un ambiente de GD, ya sea cuando se construye un objeto geométrico o se realizan acciones a partir de él o con él. Esto se debe a que todos los objetos geométricos elaborados en un ambiente de GD, mantienen las propiedades que de acuerdo a las cual fue construido, por ejemplo, obteniendo resultados que pueden ser distintos si se utiliza un segmento, una recta o un rayo en una construcción. Por otra parte, los ambientes de GD son espacios que han sido diseñados con base en la geometría euclidiana, lo cual implica que la construcción de los objetos dinámicos conllevan todas las consecuencias de la geometría euclidiana.

Esta característica constructiva de los ambiente de GD y la posibilidad de manipular a los objetos geométricos a través del arrastre, hacen posible identificar o percibir propiedades geométricas como invariantes durante la aplicación de transformaciones a los objetos geométricos. De esta manera, se puede utilizar el arrastre para buscar propiedades geométricas (elementos teóricos) en objetos ya construidos, o probar que cierta construcción posee tales aspectos teóricos que se le atribuyeron *a priori*.

En esta revisión se reportan dos maneras de identificar invariantes: a través de las tipologías cognitivas o la estrategia de interacción-variación bajo el modo de arrastre.

³³Para más información sobre el lenguaje de programación Logo visitar el.media.mit.edu/logo-foundation

2.2.5. Trabajo geométrico con atención en el carácter dinámico de la geometría

Con el estudio de las naturalezas de la geometría, relativas a distintas esferas de conocimiento, ya contamos con información suficiente para pasar al siguiente nivel del estudio, en el cual buscamos los puntos en común o convergencias entre diferentes naturalezas, lo cual habla de lo sistémico del estudio.

Presentamos, a manera de síntesis, los resultados del estudio de cada naturaleza de la geometría presentado en este capítulo, con el objetivo de articularlos y, posteriormente, destacar las aportaciones de la problematización a la fundamentación de la investigación.

Naturaleza epistémica :

1. Construcciones euclidianas.
2. Propiedades teóricas y propiedades gráfico-espaciales.
3. Estatus de precisión y exactitud de los diagramas geométricos.

Naturaleza epistemológica :

1. La geometría es un área del conocimiento humano que, en primera instancia, se inspira en la experiencia para luego desarrollar sus elementos teóricos al respecto.
2. Importancia de la noción de transformación para la evolución conceptual de la geometría, con la cual es posible formular completamente el concepto de geometría como estructuras que persisten a través de los cambios en sus aplicaciones particulares. Esto permite establecer una jerarquización entre las distintas geometrías (euclidiana, sintética, no euclidianas, proyectiva) y lograr la reformulación más importante de esta área del saber.

Naturaleza filosófica :

1. Reinterpretación de los diagramas geométricos como signos complejos, los cuales presuponen a los invariantes.
2. Proceso de construcción como generador de invariantes, los cuales corresponden a propiedades geométricas o verdades geométricas universales.
3. Necesidad de una intuición empírica coordinada con la intuición sofisticada para la identificación de esencias.

Naturaleza digital :

1. El arrastre induce la noción de transformación geométrica (transformaciones afines).

2. El arrastre se desempeña como mediador entre diagramas geométricos y sujeto (herramienta mediacional), así también como un mediador entre aspectos teóricos y perceptuales (herramienta para dialectizar).
3. Los diagramas dinámicos mantienen todas las propiedades de acuerdo a las cuales fueron construidos, las cuales subyacen a la geometría euclidiana. Al aplicar el arrastre a tales diagramas, es posible identificar o percibir invariantes, entendidos como propiedades geométricas.
4. Dado su rol en la identificación de invariantes, el arrastre se puede utilizar para probar o para explorar.

Con los elementos de cada naturaleza recién presentados, fuimos identificando convergencias que asocian los resultados de dos naturalezas, vale decir, aspecto epistémico-epistemológico (AeE), aspecto epistemológico-filosófico (AEF) y aspecto epistémico-filosófico (AeF), cuyo detalle se presenta a continuación³⁴:

Aspecto epistémico-epistemológico (AeE) Este aspecto está marcado por la relación dialéctica entre lo concreto y lo teórico, la cual ha ido constituyendo a la geometría a través de la historia, y a la manera de hacer o relacionarse con la geometría.

Por una parte se reporta que en el origen de la geometría se tomaron datos concretos y experiencias empíricas para luego teorizarlas, constituyendo así el cuerpo de conocimiento geométricos plasmados en los *Elementos*. En este sentido se identifica un devenir desde los objetos concretos a los teóricos, o simplemente de lo concreto a lo teórico.

Por otra parte, en los *Elementos* se hace necesario asegurar la existencia concreta de los entes definidos teóricamente, puesto que de tal manera se está probando su existencia. Ésta relación que va de la declaración de objetos teóricos a la comprobación de su existencia, en términos concretos, es la forma en que se construye el conocimiento geométrico en la obra de Euclides. En este sentido se identifica un hacer que va desde lo teórico a lo concreto.

En consecuencia, la relación dialéctica entre lo concreto y lo teórico se identifica cuando la geometría se inspira en la experiencia concreta y los datos empíricos, para desarrollar sus elementos teóricos. De esta manera, sus objetos manifiestan tales propiedades (gráfico-espaciales y teóricas).

Incluso se puede sugerir que para la actividad didáctica, es recomendable poner atención en las experiencias cotidianas de los estudiantes y los casos concretos del trabajo geométrico.

En los AGD se reconoce que el arrastre es crucial en la dialéctica entre lo perceptual y lo teórico, relación que caracteriza a todo el razonamiento geométrico. La relevancia del arrastre en este sentido se debe a que tiende un puente entre la actividad geométrica concreta y teórica, dando la oportunidad de manipular objetos geométricos

³⁴Algunos resultados de este apartado están reportados en Rubio-Pizzorno, S., y Montiel Espinosa, G. (2017). Geometría dinámica como actualización didáctica de la evolución conceptual de la geometría. En P. Perry (Ed.), *23 Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 143 - 148). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional. ISSN: 2346-0539.

tanto teóricos como con características concretas. Con lo cual se puede postular que los ambientes de geometría dinámica reducen la brecha mediacional entre los objetos geométricos y el sujeto que los manipula.

Aspecto epistemológico-filosófico (AEF) El cambio de interpretación de los diagramas geométricos, de representaciones particulares a signos complejos, presupone el reconocimiento de invariantes como propiedades geométricas. Sumado a lo anterior, cuando la noción de transformación dejó de estar en un estado embrionario, fue posible caracterizar completamente a las geometrías, mediante las estructuras algebraicas que determinan los invariantes que permanecen cuando se aplican ciertas transformaciones, configurando el espacio y sus características.

Por lo tanto se identifica al par transformación-invariante como los fundamentos del carácter dinámico de la geometría, el cual se ve reflejada en ciertas prácticas y las propiedades dinámicas de sus objetos.

En los AGD, el carácter dinámico de la geometría está dado por el arrastre, el cual puede inducir la noción de transformación geométrica (transformaciones afines).

Aspecto epistémico-filosófico (AeF) Debido a la manera en que se producen las construcciones euclidianas (empleando herramientas que encarnen las teóricas declaradas en los *Elementos*, y siguiendo un procedimiento adecuado), tales diagramas entrelazan aspectos teóricos y concretos en su proceso, como establecimiento de verdades geométricas, y resultado, el que se seguía con necesidad y certeza absoluta. Luego, se reinterpretan los diagramas geométricos como signos complejos, los cuales pueden ser operados sin tomar en cuenta sus particularidades, y de allí obtener propiedades generales de las figuras, lo que presupone el reconocimiento de los invariantes como propiedades geométricas. De esta manera se puede entender al proceso de construcción como un generador de invariantes.

Por su parte, en los AGD todos los objetos manifiestan propiedades que les son atribuidas a partir de su proceso de construcción y las propiedades teóricas que subyace a la geometría euclidiana, y a través del arrastre, es posible identificar invariantes para probar o buscar propiedades geométricas.

2.2.5.1. Discusión

Con base en los resultados de análisis de las naturalezas de la geometría relativa a diferentes esferas del saber, se plantean ciertos componentes que nos permiten comenzar a configurar nuestra propuesta del trabajo geométrico, considerando el carácter dinámico de la geometría.

En primer lugar, en el AeE se reconoce la relación entre los ámbitos teórico y concreto, tanto en la geometría misma como en sus objetos, a través de las propiedades que manifiestan y de la manera de producirlos. Por lo tanto, de manera general el trabajo (la manera de hacer/estudiar geometría) geométrico se enmarca en un esquema que tiene a los objetos teóricos y concretos como polos (ver imagen 2.29)

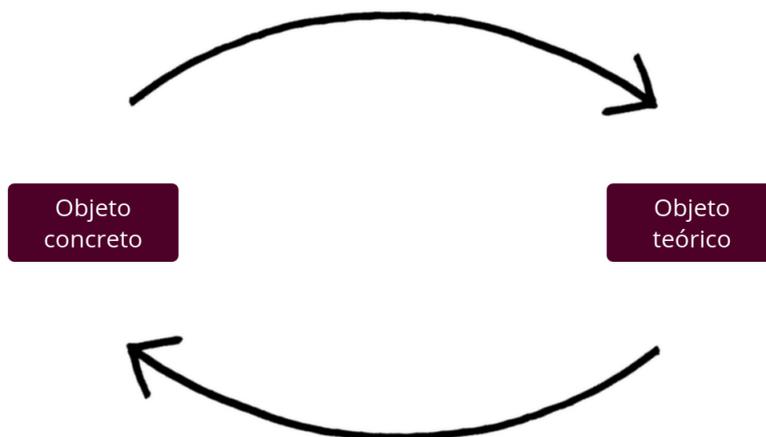


Imagen 2.29: Esquema general del trabajo geométrico.

Dado lo dialéctico y constitutivo de la relación entre lo concreto y lo teórico en la geometría, es necesario ciertos mecanismos para transitar de un polo a otro.

Uno de los resultados de la naturaleza filosófica se refiere a la necesidad de una intuición sofisticada, coordinada con la intuición empírica, para la identificación de esencias o propiedades geométricas que los diagramas están representando. Vale decir, para captar propiedades teóricas desde un diagrama (objeto geométrico concreto) es necesario un mecanismo que coordine la identificación de propiedades gráfico-espaciales (como el color, grosor o tipo de trazo) junto con la identificación de propiedades geométricas, las cuales tienen un estatus teórico. Al mecanismo de identificar propiedades gráfico-espaciales se le denomina *intuición empírica* y al mecanismo de identificar propiedades teóricas (o esencias) se le denomina *intuición sofisticada*.

Ambas intuiciones permiten, a partir del estudio de diagramas, el reconocimiento de propiedades teóricas. Así, es posible reconocer propiedades geométricas de diagramas, no importando qué tan preciso fue su proceso de construcción ni lo exacto de la figura resultante, siempre y cuando la vaguedad del diagrama no sea tal que violente la regla contenida en el concepto del cual emana. Por lo cual reconocemos a este mecanismo como la práctica geométrica de abstracción.

En el AeF se propone al proceso de construcción como un mecanismo en el cual los objetos concretos adquieren propiedades teóricas. Por lo cual se entiende al proceso de construcción como el mecanismo a través del cual se asignan propiedades geométricas a los diagramas.

Por otra parte, según la manera en que los diagramas son representados, pueden manifestar distinto estatus de exactitud y precisión, que lo pueden disponer como un bosquejo, una construcción particular o una construcción general. Aunque este estatus hable de cuán apegado está el diagrama al concepto geométrico que está representando, a la luz de la intuición de esencias, en todos ellos es posible abstraer propiedades teóricas, por lo tanto no importando el caso existen mecanismos para dotar propiedades teóricas a los diagramas: ya sea por el uso de símbolos que asignan significados geométricos o a través de un preciso y adecuado proceso de construcción. Ambos mecanismos representan una manera de dotar

propiedades teóricas a objetos concretos, uno mediante el uso de simbología y el otro a través del proceso de construcción. En consecuencia, de manera general reconocemos a éstos mecanismos como la práctica geométrica de representar.

Tanto la práctica de abstraer, como la práctica de representar, corresponden a acciones que permiten transitar de un polo al otro, en el esquema de trabajo geométrico (ver Imagen 2.30)

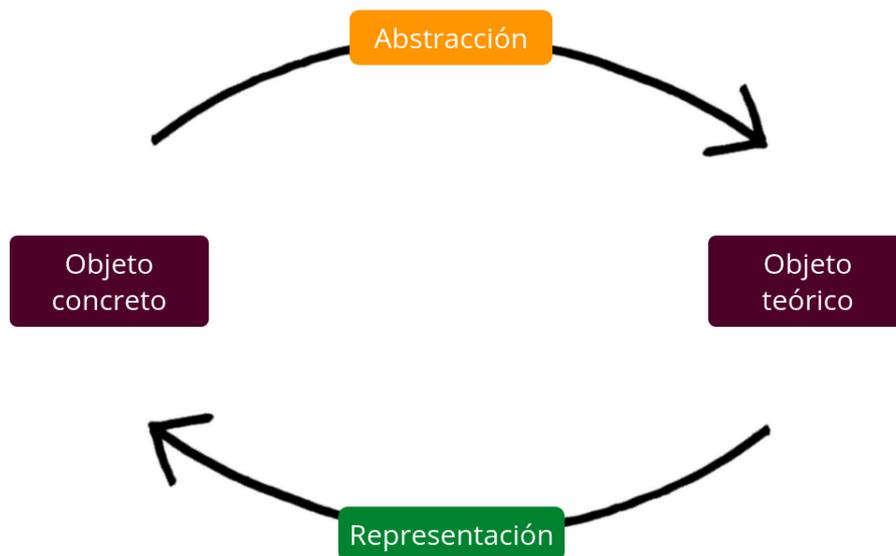


Imagen 2.30: Rol de las prácticas geométricas en el trabajo geométrico.

Para detallar más al respecto, la práctica de abstracción se compone de la intuición empírica y la intuición sofisticada:

1. Intuición empírica: permite percibir las propiedades gráfico-espaciales de los diagramas.
2. Intuición sofisticada: permite abstraer las propiedades teóricas que los diagramas están representando, ya sea a través de la interpretación de símbolos o el reconocimiento de patrones.

Por su parte, la práctica de representación puede generar dos tipos de diagramas:

1. Bosquejo: diagrama geométrico con escasa precisión en su proceso de producción, que por tanto, no refleja las propiedades geométricas o lo hace de manera vaga. Es necesario el uso de símbolos.
2. Construcción: diagrama geométrico con un grado de precisión suficiente en su proceso de producción, para reflejar las propiedades geométricas. Se puede complementar la construcción con el uso de simbología.

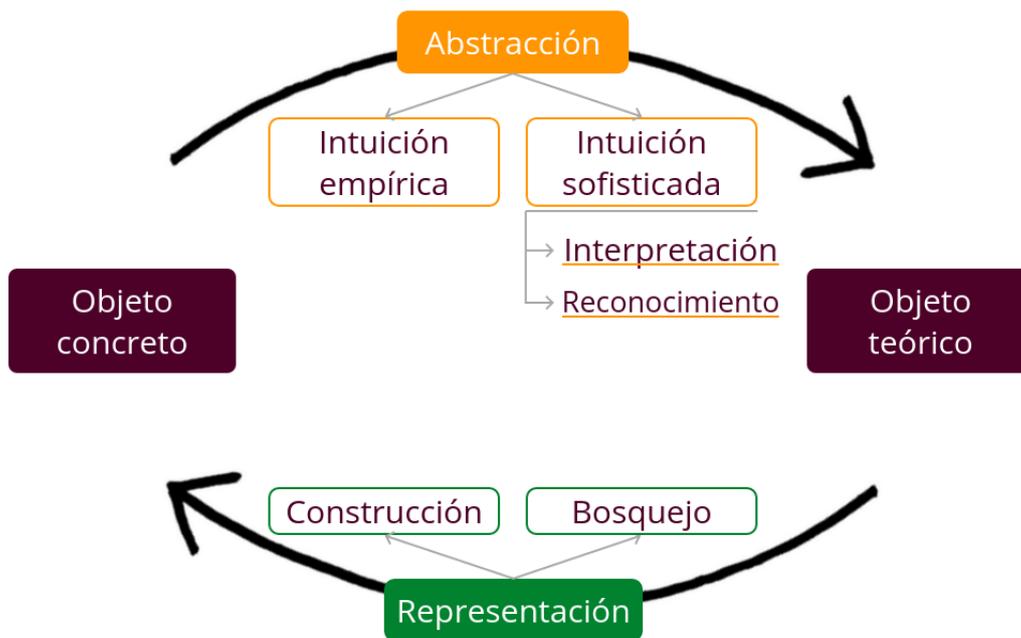


Imagen 2.31: Detalle de las prácticas geométricas.

El AEF permitió reconocer el carácter dinámico de la geometría, a través del par transformación-invariante. Con este resultado, es posible robustecer el esquema de trabajo geométrico presentado hasta el momento, que se ajusta a las maneras estáticas de trabajar con la geometría, representado por el método sintético o el tratamiento escolar tradicional de la geometría.

Al considerar el carácter dinámico de la geometría en el trabajo geométrico, las prácticas de abstracción y representación se amplían:

- En la práctica de abstracción, el carácter dinámico se refleja en la intuición sofisticada a través de la posibilidad de identificar propiedades geométricas como invariantes que se manifiestan mediante la aplicación de transformaciones.
- En cuando a la práctica de representación, la construcción de diagramas se reinterpreta como un proceso de generación de invariantes.

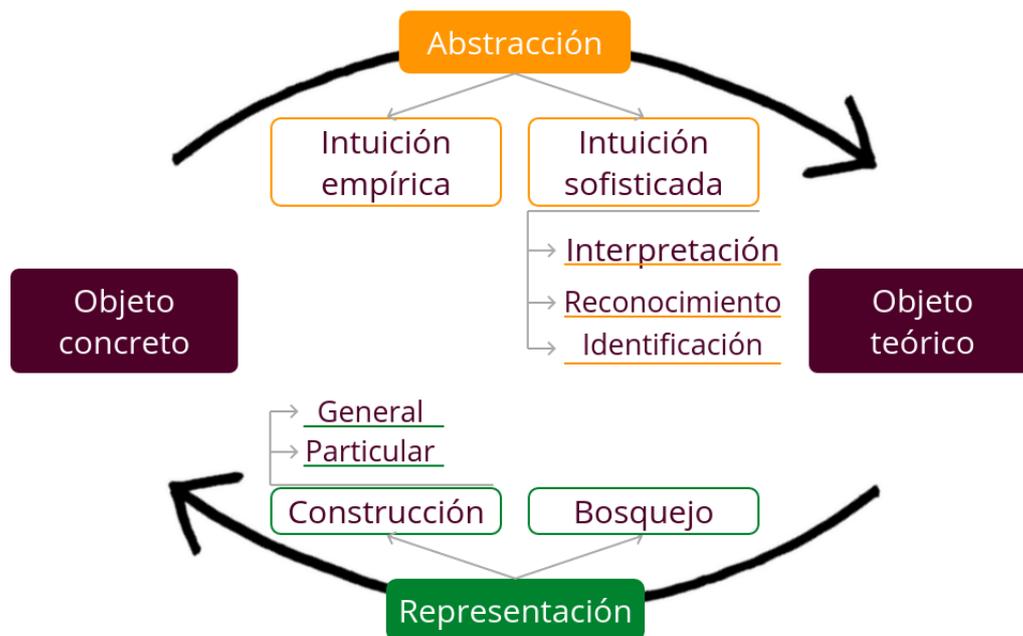


Imagen 2.32: Trabajo geométrico, considerando el carácter dinámico de la geometría.

2.2.5.2. Conclusión

En conclusión, gracias a este estudio podemos evidenciar la idoneidad de los ambientes de geometría dinámica, como un entorno que soporta todas las características reflejadas en el trabajo geométrico, considerando el carácter dinámico de la geometría.

En términos generales y con base a lo expuesto en esta sección, podemos reconocer que los ambientes de geometría dinámica reivindican dos aspectos de la geometría, que en su dimensión didáctica han estado (1) ocultos, debido a la hegemonía de los ambientes estáticos al estudiar la geometría, en particular el papel y lápiz, o (2) trivializados, debido a la imposición del discurso escolar relativo a la geometría. Con estos dos aspectos nos referimos a la característica dinámica de la geometría y a la importancia del proceso de construcción.

En primer lugar, la característica dinámica de la geometría está dada por el par transformación-invariante reportada en la naturaleza epistemológica. Esta característica permite identificar a las propiedades geométricas como invariantes que permanecen cuando se aplica una transformación. Esta identificación de invariantes es imposible realizarla en ambientes estáticos, como el papel y lápiz, donde a lo sumo se puede estudiar distintos casos de un objeto geométrico y reflexionar sobre lo que tienen todos en común, a lo cual se le podría llamar propiedad geométrica. En cambio los ambientes de GD permiten variar continuamente sus diagramas (Laborde, 2002), acción que propicia la identificación de invariantes mediante la transformación aplicada, lo cual se reconoce como propiedades geométricas, que están en sintonía con la propuesta epistemológica de la característica dinámica de la geometría.

En segundo lugar, la naturaleza filosófica nos reporta un resultado que es contradictorio

con el tratamiento escolar de la construcción geométrica. Por una parte, la naturaleza filosófica alude a la importancia del proceso de construcción geométrica como un generador de propiedades geométricas universales, reconocidas como invariantes, y por otra parte, el tratamiento escolar de esta operación geométrica se realiza despojada de todo significado e importancia, sino sólo como una actividad curricular más que se debe realizar. En respuesta, casi la totalidad de los ambientes de GD existentes hasta este momento son de tipo constructivos-funcionales (Sinclair y otros, 2016), es decir, ambientes “donde las configuraciones geométricas [diagramas] deben estar expresadas en términos de construcciones secuenciales” (p. 702). Por lo tanto, en tales ambientes dinámicos, el proceso de construcción toma gran relevancia, pues todos sus diagramas son producto de tal proceso, y más aún, las propiedades geométricas que manifiestan los diagramas son producto de la manera en que fueron construidos, vale decir, su proceso de construcción.

2.3. Construcción de conocimiento geométrico en la era digital

Gracias a la aparición de la tecnología digital en el panorama mundial, las comunidades digitales, como la Comunidad GeoGebra, están materializando las soluciones a sus problemáticas. El acceso a tecnología eficiente de bajo costo, la motivación por abordar problemáticas cotidianas, la preocupación por atender y compartir necesidades junto a otros con intereses similares, el uso de Internet que permite difuminar fronteras, la responsabilidad por colaborar con otros, entre muchas otras acciones, han permitido que las comunidades digitales puedan atender a las necesidades de sus miembros, de sus grupos sociales y, en definitiva, de la comunidad.

Específicamente, la Comunidad GeoGebra se articula como una inteligencia-red para producir soluciones (conocimiento, productos, instancias, etc.) de diversos tipos. En su origen, el *software* GeoGebra fue creado para dar la posibilidad de manipular representaciones gráficas y algebraicas de manera sincronizada e interrelacionadas. Luego se añadieron más características al *software*, a propósito de la retroalimentación e inquietudes de la comunidad. Debido al gran crecimiento de esta, fue necesario instaurar una organización que diera reconocimiento y albergara los aportes de sus miembros, motivo por el cual se funda el Instituto GeoGebra Internacional (Hohenwarter y Lavicza, 2011). A través de él se realizan instancias para desarrollar y compartir recursos educativos abiertos, mejorar y ampliar las características del *software*, colaborar con profesores, diseñar e implementar proyectos sobre GeoGebra a lo largo de todo el mundo, etc.

Ya que la estructura social que configura la Comunidad GeoGebra es la inteligencia-red, su propósito principal es atender las necesidades e inquietudes de la comunidad y sus miembros, donde el desarrollo de tecnología no es el fin último. En consecuencia, la Comunidad GeoGebra construye conocimiento de diversos tipos: didáctico, pedagógico, recursos educativos, informático, desarrollo de *software*, diseño web, interacción social en red, organizacional, entre muchos otros. Esta diversidad de conocimientos también da cuenta de la gran cantidad de grupos sociales relevantes que componen la Comunidad, quienes tienen distintos objetivos respecto a la Comunidad y pueden aportar al desarrollo de conocimiento desde diferentes áreas del saber, siendo clave el trabajo colaborativo y abierto entre ellos. Todo esto es posible gracias a las relaciones heterárquicas que caracterizan a la inteligencia-red.

Uno de los últimos proyectos de la comunidad ha sido la creación de los recursos educativos Hojas Dinámicas, Libros y Grupos GeoGebra. Las Hojas Dinámicas corresponden a una plataforma en línea que permite elaborar material de diversa índole, según las necesidades de los profesores, ya que permite el uso de texto, archivos de imágenes, pdf, applet GeoGebra, incrustar videos y sitios web, así como también crear preguntas abiertas o de opción múltiple. Los Libros GeoGebra son una especie de *libros digitales abiertos*, los cuales se componen de Hojas Dinámicas que son estructuradas por capítulos. Finalmente, los Grupos GeoGebra corresponden a aulas virtuales donde el profesor puede administrar recursos a sus estudiantes, abrir foros y dar tareas, para las cuales existe un sistema de

evaluación (aunque no de calificación, ya que este corresponde a un interés oficial de poco sentido para las comunidades digitales).

El más representativo producto de esta versátil construcción de conocimiento, en este caso mediacional y didáctica, corresponde a su ambiente de geometría dinámica, del cual se ha reportado que es un entorno propicio para desarrollar el trabajo geométrico de manera estática, dinámica o híbrida. Al indagar más en este hecho, se ha evidenciado que trabajar en los AGD permite un nuevo tipo de interacción con la geometría y sus objetos, debido a la reducción de la brecha mediacional entre los objetos geométricos y el sujeto que los manipula, identificado como la posibilidad de manipular objetos geométricos con un impacto perceptual. Por ejemplo, el arrastre permite explorar características de los diagramas o buscar relaciones entre ellos y, con la prueba del arrastre es posible examinar el comportamiento de dichos diagramas, dando cuenta así de la dialéctica entre aspectos teóricos y gráfico-espaciales.

En términos didácticos, los AGD son entornos que también dan soporte al trabajo geométrico, considerando el carácter dinámico de la geometría. Esto se refleja mediante la identificación de invariantes al examinar un diagrama en transición continua, así como la generación de tales invariantes a través del proceso de construcción, o en la determinación de condiciones iniciales para determinar cierto comportamiento y luego poner a prueba el resultado con la prueba del arrastre, dando paso a la reconfiguración del diagrama en caso de no pasar la prueba.

En consecuencia, las nuevas posibilidades que brindan los AGD en su relación con los objetos geométricos y la geometría misma, a través de la exploración, prueba, examinación, identificación, construcción, configuración y reconfiguración, nos permite reconocer a esta nueva manera de interactuar con la geometría y sus objetos como la posibilidad de *experimentar con la geometría*. Por lo tanto, los AGD son entornos que funcionan como un laboratorio geométrico, y en particular GeoGebra, como un *laboratorio geométrico abierto*, dada las características de la comunidad que lo construye.

En definitiva, es recomendable tener en cuenta la posibilidad y oportunidad que brindan los AGD para experimentar con la geometría, a la hora de desarrollar proyectos e iniciativas relacionadas con el fenómeno didáctico de aprender y enseñar geometría, en cualquier esfera de desarrollo de la disciplina, ya sea en desarrollo profesional docente, escenarios didácticos experimentales, diseño curricular, diseño de tareas, elaboración de recursos, entre muchos otros.

2.4. Trabajo con profesores

Con la consideración de GeoGebra como un laboratorio geométrico abierto, es necesario para la investigación focalizar hacia un campo de la disciplina en el cual poder llevar a cabo instancias de diseño y validación con el acervo teórico ya construido. Es por ello que para el desarrollo de este proyecto se ha decidido focalizar hacia el *desarrollo profesional docente*, ya que consideramos al profesorado como un actor clave en el fenómeno educativo, en sentido amplio, y, específicamente, en el de enseñar y aprender matemáticas. Esta importancia del rol de los profesores cobra aún mayor relevancia cuando se considera la tarea de incorporar tecnologías (digitales) al aula de matemáticas.

Por un lado, es común que el peso de los resultados educativos (buenos y, sobre todo, malos) recaea en el profesorado. Desde la investigación reconocemos que es el actor educativo que necesita mayor cuidado, atención y sobre todo, reivindicación de su rol. Por otra parte, en el marco de la relación oficial-no oficial, el profesor cumple un rol de puente entre las necesidades oficiales (currículo, plan de estudio, porcentaje mínimo de aprobación, etc.) y las necesidades educativas reales de sus estudiantes, las cuales son invisibilizadas y trivializadas por lo oficial.

En este sentido, hemos evidenciado que la Comunidad GeoGebra, como ejemplo de las comunidades digitales, desborda la oficialidad desde lo no oficial en su interés por suplir las necesidades de las personas y sus grupos sociales. En este panorama, el profesorado es un aliado clave de la Comunidad GeoGebra, en su interés abordar el fenómeno de enseñar y aprender matemáticas, desde una perspectiva no oficial, sin dejar de lado los requerimientos oficiales.

Con esta natural elección realizada, a continuación se presenta una revisión de literatura especializada con foco en el trabajo con el profesorado, que también incorpore aspectos del trabajo con tecnología, dado los intereses de la investigación y los componentes teóricos ya configurados en este escrito. De esta manera, se escogió la sección tres *Teachers and technology*, del libro *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (Hoyles y Lagrange, 2010).

2.4.1. Panorama de Inclusión/Integración digital

Como se menciona en el capítulo 1, desde el ámbito oficial se ha estado abordando a las demandas educativas de una sociedad digitalizada, a través de iniciativas que únicamente responden a necesidades institucionales y corporativas. En concreto, tales necesidades están relacionadas con cumplir los estándares relativos a acortar la *primera brecha digital*, también llamada brecha de acceso, puesto que se refiere a la distancia social y económica que separa a distintos estratos sociales, respecto de la disponibilidad de recursos digitales.

Por lo tanto, es posible declarar que el ámbito oficial únicamente se ha preocupado de aportar en la reducción la primera brecha digital, es decir, de brindar a los sectores sociales de menos ingresos, dispositivos digitales para emplear en la educación, aunque generalmente sin atender a las necesidades educativas de las personas que se relacionan con las estrategias para utilizar tales dispositivos de manera efectiva en prácticas educativas. En Latinoamérica existen varios casos de políticas públicas que buscan reducir la primera brecha digital a través de la entrega de un dispositivo digital a los estudiantes de escasos recursos:

- En Brasil a partir del año 2010 entra en vigencia el Programa un computador por alumno (PROUCA)³⁵.
- En Chile se han desarrollado planes tanto para entregar tabletas, como Tablet para Educación Inicial³⁶, y computadores, como Yo Elijo Mi PC³⁷ y Me Conecto para Aprender³⁸. Además existen programas para proveer de WI-FI a establecimientos educacionales³⁹.
- El 31 de octubre de 2014, en México entró en vigencia el Programa de Inclusión y Alfabetización Digital (PIAD), que entregó tabletas a estudiantes de quinto de primaria⁴⁰.
- En la región se desarrolló el programa One Laptop per Child, con presencia en varios países: Nicaragua, Paraguay, Perú y Uruguay⁴¹.

A pesar de estos esfuerzos por incluir la tecnología digital al ámbito educativo dotando a la mayoría de los estudiantes con herramientas tecnológicas, los resultados educativos no han mostrado mejoras significativas, así como lo mencionan Cobo y Moravec (2011):

Este espejismo tecnologizante se encuentra en una importante cantidad de políticas públicas. Muchas de ellas, procurando un mejor futuro para la educación, han apostado casi de manera unívoca por la incorporación masiva de tecnologías en los entornos formales de aprendizaje. Sin embargo, (...) ello

³⁵Sitio web de PROUCA: bit.ly/2ho1i7v

³⁶Sitio web del programa Tablet para Educación Inicial: bit.ly/2D5Jveq

³⁷Sitio web del programa Yo Elijo Mi PC: yoelijomipc.cl

³⁸Sitio web del programa Me Conecto para Aprender: meconecto.mineduc.cl

³⁹Sitio web del programa One Laptop per Child: one.laptop.org

⁴⁰Sitio web del programa Iluminación WIFI a establecimientos educacionales: bit.ly/2yZ6Awg

⁴¹Sitio web del programa One Laptop per Child: one.laptop.org

no se ha traducido necesariamente en mejores resultados educativos.

(Cobo y Moravec, 2011, p. 80)

El fracaso en la dimensión educativa de los planes y las políticas públicas para disminuir la primera brecha digital, a los cuales nos referimos como programas de *inclusión digital*, se debe en gran medida a que las necesidades educativas no quedan atendidas solo por disponer de un computador o una tableta, también es necesario atender la manera de usarlas con propósito educativo y, que ese uso sea de calidad. Esta situación también provoca la emergencia de una segunda brecha digital entre estudiantes de diferentes estratos sociales, brecha que esta referida a las habilidades para tener un uso de calidad de los aparatos tecnológicos, por lo que también se le conoce como la brecha de la *digital literacy*:

Una segunda “brecha digital” emerge, no entre los estudiantes que tienen y no tienen computadoras, sino entre aquellos que tienen las habilidades para beneficiarse del uso de la computadora y aquellos que no. Estas competencias están estrechamente vinculadas con el capital económico, cultural y social de los estudiantes.

(Cobo y Moravec, 2011, p. 200)

Ya consciente de ambas brechas digitales, la de acceso y la del uso de calidad, la academia comenzó a desarrollar investigaciones para proponer estrategias en las cuales se consideren ambos aspectos al momento de incluir tecnología digital en el ecosistema educativo. A esta manera de abordar el fenómeno por parte de la investigación (dimensión académica del ámbito oficial), las denominamos instancias de *integración digital*, estableciendo así una diferencia con las para instancias de inclusión digital, llevadas a cabo por las dimensiones política y económica del ámbito oficial.

Los términos inclusión e integración los tomamos de Rubio-Pizzorno, Farfán-Cera y Montiel (2017), entendiendo estos como un cambio en el centro de atención al incorporar tecnología digital a la educación y, específicamente, a las prácticas docentes:

(...) Cómo utilizar la tecnología digital disponible, para favorecer un cambio en la práctica del profesorado: de una *inclusión digital*, entendiendo la inclusión como poner algo (la tecnología digital) dentro de una cosa (aula de clases), hacia una *integración digital*, entendido la integración como hacer que algo (la tecnología digital) pase a formar parte de un todo (quehacer docente). (Rubio-Pizzorno y otras, 2017, p. 1070)

En cuanto a las investigaciones sobre integración digital, específicamente en la educación matemática, identificamos tres focos de atención puestos en juego al estudiar la manera en que la tecnología digital incide en la enseñanza y el estudio de las matemáticas, los cuales también representan tres momentos diferentes de la investigación:

¿Con o sin tecnología digital?

Este es el modelo típico de investigación sobre los efectos de la tecnología digital en educación matemática. Son muy abundantes las investigaciones sobre geometría dinámica que realizan un comparativo entre realizar tareas con papel y lápiz realizarlas en ambientes de geometría dinámica. Algunos ejemplos de este primer momento, en la investigación

sobre GD son (Stylianides y Stylianides, 2005; Iranzo y Fortuny, 2009; Koyuncu y otros, 2015; Hitt y otros, 2017b,a).

Este momento de investigación y su pregunta motivadora (¿con o sin tecnología digital?), encuentran sustento en el paradigma tradicional de investigación antropológica sobre la relación entre tecnología y cultura, ya que en esta se a la tecnología como un periférico de las sociedades, que podría estar o no. Para más detalles sobre este paradigma de investigación ver la sección 2.1.

Ampliación de lo concreto a lo digital

El segundo momento esta marcado por el interés en extender los resultados y conclusiones ya conocidos por la investigación para ambientes materiales o concretos, hacia los ambientes digitales. Esta ampliación se ha realizado tanto en la elaboración de diseños y de recursos, que pueden estar basados o no en la investigación; y en las explicaciones teóricas de los fenómenos asociados a la presencia de la tecnología digital al enseñar o aprender matemáticas.

Al respecto, Sinclair y Yerushalmy (2016) mencionan que en el campo de la investigación en educación matemática:

En términos teóricos, hemos notado una tendencia de los investigadores a combinar dos o más perspectivas teóricas para tener en cuenta adecuadamente sus contextos de investigación. A veces, las teorías generales del aprendizaje deben combinarse con teorías que proporcionan un enfoque más centrado en el uso de las herramientas y su papel en la enseñanza y el aprendizaje. Vemos la necesidad de articular mejor las teorías del aprendizaje con las teorías del uso de herramientas, que actualmente se hace, en su mayor parte, combinando enfoques. (Sinclair y Yerushalmy, 2016, p. 264)

Así, se hace muestra la necesidad de abordar las investigaciones que involucren a la tecnología digital en los fenómenos didácticos ligados a las matemáticas, atendiendo a las explicaciones teóricas sobre aprendizaje y a las que se centran en el uso de la tecnología digital y cómo incluye en la enseñanza y el aprendizaje.

De esta manera, este momento encuentra su fundamento antropológico, al presentarse como una transición entre el paradigma tradicional y el moderno en la investigación antropológica sobre la relación entre tecnología y cultura. Esta transición esta marcada por comenzar a reconocer la necesidad y responsabilidad por no trivializar el rol de la tecnología en su relación constituyente con la cultura y, en consecuencia, al estar presente en fenómenos educativos.

Énfasis epistémico: lo específico de lo digital en educación

El tercer momento, se caracteriza por el interés en indagar lo específico de aprender o de enseñar matemáticas en ambientes digitales. Ya no tiene cabida la pregunta ¿con o sin tecnología digital?, y se van dejando atrás los intentos por extender las explicaciones sobre el uso de tecnología análoga hacia la tecnología digital. Aquí el foco de atención esta en reconocer que existe un cambio en la manera de interactuar con las matemáticas cuando se emplea tecnología digital.

Laborde (2002) da un ejemplo al respecto, al investigar sobre diferentes tipos de tareas al estudiar geometría utilizando ambientes de geometría dinámica, identifica que en tales ambientes emergen nuevos tipos de tareas, las cuales tienen sentido y significado en el ambiente de geometría dinámica, es decir, son tareas que únicamente se pueden resolver en un ambiente de tales características.

Este enfoque encuentra sustento en el paradigma moderno de investigación antropológica sobre el vínculo tecnología-cultura, el cual asume a la tecnología (digital) como una construcción social, cultural y simbólica en nuestras sociedades modernas y complejas. Dicho de otro modo, la tecnología es parte de la cultura y, a su vez, de la sociedad. Para más detalles sobre este paradigma de investigación ver la sección 2.1.

Identificados estos tres momentos en la investigación en educación matemática integrando tecnología, establecemos que para abordar la integración digital a los ecosistemas educativos, ya no basta solo con cuestionar si utilizar tecnología digital o no, o ampliar constructos teóricos elaborados para lo análogo hacia ambientes digitales, sino que es necesario enfatizar en lo específico del ambiente.

Sin embargo, los ambientes de diseño ya no son espacios discretos y aislados unos de otros, sino que se construyen de manera simbiótica aprovechando lo mejor de cada uno. A este tipo de ambientes o ecosistemas educativos los denominamos híbridos, puesto que se constituyen a partir de soportes materiales de diversas naturalezas.

De esta manera reconocemos que los ambientes o ecosistemas educativos actuales son una hibridación entre espacios de diferente naturaleza. Esta propuesta encuentra sustento en la descripción de la estructura social en red (ver sección 2.1.3.1), en donde se declara que el soporte material de las prácticas sociales simultáneas es una hibridación entre lo físico y lo digital. Incluso cabe pensar que la hibridación es entre todos los espacios involucrados, más amplia que sólo dada entre lo concreto y lo digital, por ejemplo ampliada por la realidad aumentada.

Por lo tanto, asumimos la importancia de atender a los ambientes de diseño considerando su constitución híbrida, poniendo atención, por un lado en lo específico de cada espacio, y por otro, a las formas de articularse entre los diferentes espacios.

En conclusión y a la luz de lo presentado en esta sección, reconocemos que para trabajar con profesores en la incorporación de tecnologías digitales en su aula de matemáticas, necesitamos desarrollar una instancia de integración digital donde se ponga atención en las particularidades de estudiar geométrica en ambientes híbridos, con énfasis en los espacios digitales.

En consecuencia, en las secciones siguientes se presentan una revisión de literatura especializada en el trabajo con el profesor integrando tecnología digital y, una revisión de literatura especializada en instancias de desarrollo profesional docente donde se discuta sobre aspectos epistémicos de las matemáticas. Todo esto, matizado con la propuesta de construcción de conocimiento geométrico en la era digital (ver en la sección 2.3), con la intención de configurar una propuesta de integración digital para desarrollar en la presente investigación.

2.4.2. Revisión literatura especializada sobre profesores y tecnología (digital)

La sección tres *Teachers and technology*, del libro *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain*, aborda la investigación en educación matemática sobre el trabajo con el profesorado y la tecnología con los siguientes cuatro capítulos:

Capítulo 12 *Introduction to Section 3* (Healy y Lagrange, 2010).

Capítulo 13 *Working with Teachers: Context and Culture* (Fuglestad y otros, 2010).

Capítulo 14 *Teachers and Teaching: Theoretical Perspectives and Issues Concerning Classroom Implementation* (Goos y otros, 2010).

Capítulo 15 *Teacher Education Courses in Mathematics and Technology: Analyzing Views and Options* (Grugeon y otros, 2010).

Comenzando con la Introducción a la sección tres, se reporta que la investigación de la relación entre la tecnología digital y la educación matemática, típicamente descuidaba el rol del profesor. Por ejemplo, en algunas de ellas el foco estaba en lo que el individuo hace con el *software* de matemáticas. Una de las conclusiones/resultados de la investigación sobre proyectos de integración digital a gran escala realizada por Sinclair, Arzarello, Trigueros y Lozano (2010), es el cambio de audiencia de lo que hacen los individuos con la tecnología a incorporar al profesor en los procesos de integración digital.

Healy y Lagrange (2010) indican que la modificación de la práctica de los profesores para incluir una nueva herramienta no representa una hazaña para ellos. El desafío se presenta cuando, además de dominar las posibilidades para hacer matemáticas que ofrecen diferentes herramientas digitales, también enfrentan la necesidad de:

- Repensar una serie de problemas o asuntos de gestión en el aula.
- Adaptar sus estilos de enseñanza para incluir nuevas formas de interacción, con sus estudiantes, entre estudiantes y, entre los estudiantes y las ideas matemáticas.
- Diseñar actividades de aprendizaje.
- Confrontar una serie de cuestiones epistémicas relacionadas con la aceptación y legitimación de prácticas matemáticas desconocidas o, incluso, completamente nuevas (Healy y Lagrange, 2010, p. 288).

La investigación también reporta que la introducción de la tecnología digital a la clase de matemáticas, generalmente se ha realizado mediante cursos para profesores que tienen por objetivo hacer que usen estos nuevos recursos: calculadora de cuatro operaciones, calculadora científica, calculadora graficadora, sensores de movimiento, de temperatura, y en los últimos tiempos, dispositivos móviles como tabletas. Este tipo de iniciativas consideran al profesorado como estudiantes a los cuales se les enseñará a usar cierta herramienta, la cual va evolucionando o cambiando, según las modas educativas o los intereses oficiales. Esta manera de introducir la tecnología digital al aula de matemáticas

representa un problema de obsolescencia y de actualización, ya que el ritmo de cambio en las tecnologías digitales es abrumador y constante, haciendo que la vigencia de la tecnología (dispositivos o *software*) sea cada vez más breve. De esta manera habría que estar constantemente enseñando al profesorado el uso técnico de diferentes tecnologías, para mantener al día sus conocimientos respecto de los nuevos *software* o dispositivos disponibles.

En la actualidad se ha podido reconocer que usar herramientas digitales en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es algo más complejo de lo que se pensaba originalmente. Por lo cual, se ha hecho cada vez más evidente la necesidad de involucrar a los profesores como socios más que como estudiantes, en este proceso de introducir tecnología digital en el ecosistema educativo de manera efectiva.

Para desarrollar esta perspectiva se desarrollan tres temas transversales a lo largo de toda la sección, los cuales también guían la composición de los tres capítulos siguientes, presentados en las siguientes secciones:

1. Discusiones de colaboración entre profesores en servicio e investigadores, en escenarios educativos.
2. Comprensión de los asuntos relacionados con la implementación en clases.
3. Formación de profesores de matemáticas en la era digital.

2.4.2.1. Working with Teachers: Context and Culture

En este capítulo se aborda el trabajo en equipo con profesores, articulado con base en consideraciones de contexto y cultura. Se presentan tres casos de estudio en los cuales se trabajó con profesores de secundaria de diferentes países: Noruega, Grecia y Brasil. En las investigaciones presentadas en el capítulo, se asumen los siguientes supuestos de partida para el trabajo con profesores:

1. El trabajo con profesores de escuela no consiste en decirle a los profesores qué hacer, sino que se requiere establecer un diálogo en el que los diferentes puntos de vista (profesores en servicio, formador de profesores, investigadores, etc.) sean respetados.
2. Las consideraciones del contexto y la cultura del profesor son primordiales para establecer tal dialogo.
3. La enseñanza es una empresa compleja, e introducir tecnologías digitales al aula de clases suma a esta complejidad, independientemente si los profesores consideran que esto es algo fácil o difícil de hacer.

En cuanto al contexto, se utilizan dos metáforas para abordar la idea: es lo que rodea o es lo que se entreteje. En la actividad educativa, se puede asumir al contexto, en primer lugar, como “lo que rodea y sitúa al profesor en una clase, con recursos, en una escuela, en un sector educativo y en un país”; y, en segundo lugar, como “lo que se entreteje en vez de rodear, y la enseñanza puede verse como un hilo conductor entre otros hilos institucionales y populares” (Fuglestad y otros, 2010, p. 294). En las investigaciones presentadas en este capítulo se toma postura por la segunda metáfora, ya que es más sensible a la realidad de los actores involucrados en los entornos de enseñanza, por ejemplo profesores y estudiantes, quienes son sujetos inmersos, al mismo tiempo, en contextos escolares (institucional) y populares (no oficiales).

En cuanto a la cultura, se declara que

Los artefactos son los constituyentes fundamentales de la cultura. Las cosas que la gente hace en su entorno cotidiano involucra una multitud de artefactos coordinados, lo cuales median sus actitudes y creencias, sus interacciones sociales y sus acciones en un mundo no humano.

En la enseñanza, para que nuevos artefactos, como las tecnologías digitales, puedan entrar en el aula en forma no periférica, es necesario establecer una nueva cultura en la que las prácticas digitales se coordinen con los artefactos y rutinas establecidos. (pp. 294 y 295).

Para permitir que la tecnología digital sea incorporada en la educación, como un agente natural de tal entorno, es necesaria una nueva cultura que se constituya a partir de la coordinación de artefactos y rutinas ya establecidas (cultura tradicional) y prácticas digitales (cultura externa).

El caso de Noruega

En el caso de estudio realizado en Noruega, se utiliza un ciclo de investigación con los profesores e investigadores:

1. **Planear:** trazar un plan de enseñanza.
2. **Actuar:** implementación del plan de enseñanza.
3. **Observar:** tanto el profesor como sus estudiantes son observados en situación de clase por un formador de profesores (*teacher educator*) o profesores colegas.
4. **Reflexionar:** discusión y reflexión sobre el trabajo realizado. En la discusión participa el profesor y los observadores.
5. **Retroalimentación:** la discusión incluye retroalimentación y la planeación de nuevo ciclo (pp. 297 - 298).

La discusión y el trabajo en conjunto del equipo escolar giraban en torno a aspectos didácticos, pedagógicos, matemáticos, así como a aspectos técnicos, como la construcción de la actividad consensuada en la hoja de cálculo.

Se puede notar que el uso de la herramienta digital fue transparente, ya que no se reportaron dificultades en el uso de la herramienta por parte de los alumnos, aunque sí se necesitó la colaboración de colegas para desarrollar la herramienta deseada.

A pesar de esta situación, no se da cuenta de elementos o características específicas del uso de la tecnología digital en términos teóricos para estructurar la actividad, sino sólo para analizarla escuetamente como un proceso de génesis instrumental.

El caso de Grecia

Este caso de estudio está inserto en un sistema educativo con una administración centralizada a nivel nacional junto con un único plan de estudios. En este sentido, el profesor es colocado en el rol de *ejecutor técnico del currículo*, más que en un papel de *profesional de la educación implementando un desarrollo pedagógico personal*.

Con estas restricciones es muy difícil distinguir innovación de una reforma sistémica, y es difícil imaginar a profesores involucrados en el diseño del currículo y probando métodos de enseñanza alternativos.

El curso estudiado en este caso fue una iniciativa a mediana escala, impulsada por el Ministerio de Educación para capacitar a profesores experimentados, con el fin de convertirlos en formadores de profesores en el uso de tecnologías digitales para la enseñanza y el aprendizaje en sus respectivas asignaturas.

En particular se presenta la situación en que profesores producían *Turtleworlds*, es decir, micromundos que consistían en programas de *geometría tortuga* basados en Logo. A medida que los profesores se involucraban en el diseño de los micromundos como ambientes tecnológicos de aprendizaje, comenzaron a percibirlos como:

- Una herramienta de ilustración utilizada por el profesor.

- Una herramienta para el aprendizaje del estudiante, a través de su uso personal (p. 301).

Mientras el proceso de diseño avanzaba, los profesores fueron considerando involucrar a los estudiantes en el proceso de construcción del ambiente de aprendizaje, más que sólo ser el usuario final, debido a la rica discusión matemática que ellos estaban viviendo en ese proceso.

De esta manera, los profesores decidieron construir micromundos *a medio hornear* y que los estudiantes pudieran completar el diseño, apuntando a un objetivo de aprendizaje matemático específico e intencionado por los profesores.

En términos teóricos, se reporta que la instrumentalización fue el procedimiento que jugó un rol crítico en favorece una discusión matemática “genuina” y en la actividad dentro del contexto de la práctica profesional del profesor. Por lo tanto podría valer la pena considerar a la instrumentalización como un factor o variable de diseño, para el desarrollo de contextos por el formador de profesores.

El caso de Brasil

En este caso el objeto fue diseñar una herramienta tecnológica, para lo cual se constituyó un grupo de trabajo formado por:

- Formador de profesores,
- Programadores computacionales.
- Profesores en servicio.

En el proceso de creación de la herramienta se evidencia como al comienzo era percibida como un artefacto para la mayoría de los profesores, para luego dar paso al proceso de transformación en un instrumento, poniendo atención en aspectos técnicos asociados a su uso, así como la relación entre el instrumento y los conceptos estadísticos que fueron objeto de estudio para los participantes.

Como cierre de la sección se comparten tres comentarios de los profesores acerca del proyecto:

1. Un profesor se sintió escéptico sobre lograr los mismos resultados en la escuela, donde no contaban con tantos lujos como en la universidad.
2. Otra profesora estaba interesada en darle otra forma al uso de la herramienta, cuando la implementara con sus estudiantes.
3. Para una tercera profesora, lo realmente importante de la experiencia fue el proceso de diseño y desarrollo, no el producto como tal. Ya que en esa fase se llevaron a cabo las discusiones y reflexiones más radicales respecto a la enseñanza de las matemáticas (pp. 307 - 308).

Reflexiones sobre los casos de estudio

Como cierre de este capítulo, Fuglestad y otros (2010) reflexionan sobre los aspectos comunes a los tres casos presentados, de los cuales destacan el diseño colaborativo de las herramientas a emplear en la práctica docente, donde el equipo de trabajo este conformado por diversos especialistas relacionados a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; la relevancia del proceso de diseño de las herramientas digitales la integración digital a la práctica docente, proceso que se reporta en dos de los casos como más relevante que contar con una herramienta acabada; reconocer y no trivializar la cultura digital que se ha desarrollado fuera del ámbito escolar, la cual junto con el reconocimiento de la cultura del profesor, son clave en las instancias de integración digital.

En primer lugar, se enfatiza que el diseño (de la herramienta) es central. En esta etapa se intentó establecer un diálogo en el cual todos los participantes pudieran contribuir en la constitución de la herramienta. Esta estrategia difiere mucho de otras en que cada grupo contribuye en diferentes momentos del proceso: los programadores son los principales responsables del diseño de herramientas; los investigadores, los desarrolladores curriculares y los formadores de docentes se encargan del diseño de tareas; y, posteriormente, los profesores de las escuelas usan los productos en su aula de matemáticas.

El riesgo que se corre cuando las herramientas y los diseños son presentados como ventas al por mayor a los profesores, es que los significados construidos por los diseñadores no son transparentes en al menos dos niveles:

1. La presencia de la tecnología trae cambios epistemológicos en el contenido matemático involucrado.

Esta declaración esta en sintonía con la problematización de la geometría realizada en la sección 2.2.

2. Los supuestos pedagógicos hechos por los diseñadores pueden ser bastante diferentes a los que subyacen a la práctica usual del profesor.

Debido a estas consideraciones y con el objetivo de atravesar las fronteras entre investigadores y profesorado, los autores proponen una estrategia que involucre a todos los miembros del grupo, tanto en el diseño de actividades, como en el desarrollo de ambientes computacionales.

Por lo tanto es fundamental establecer equipos de trabajo con diversos especialistas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en donde todos puedan aportar desde su especialidad y experiencia, en igualdad de condiciones, entendiendo que todos contribuyen desde sus diversas áreas, al fenómeno didáctico relacionado con las matemáticas.

En segundo lugar, se reconoce que si bien el proceso de diseño es central, los productos no estaban destinados a ser un “*software* bien acabado”. Incluso en dos de los casos se subraya que el potencial de trabajo con herramientas “a medio hornear”, de tal manera que los participantes pudieran modificar las herramientas, así como posteriormente otros podrían modificar la herramienta según su conveniencia. En una estrategia así, el proceso

de génesis instrumental comienza con la génesis misma de un artefacto.

Finalmente, se identifica que incorporar al docente en todas las etapas del proceso de integración digital y, sobre todo, a la etapa de diseño, se puede incrementar el sentido de pertenencia que los profesores sienten por las herramientas y los diseños a ser implementados. Quizá esto también llegue a ser una forma más natural para ellos de aceptar el desafío de convertirse en agentes activos en el proceso de crear nuevas culturas de prácticas, que capitalicen en las posibilidades de las herramientas digitales.

Si bien este tipo de estrategias propicia que los docentes puedan modificar su cultura docente, añadiendo elementos de diseño en entornos o de herramientas digitales, es necesario tener en cuenta también, la cultura que se ha configurado fuera de la escuela con relación al desarrollo y el uso de tecnología digital de manera cotidiana.

2.4.2.2. Teachers and Teaching: Theoretical Perspectives and Issues Concerning Classroom Implementation

En este capítulo se presentan varios marcos teóricos que abordan la relación del profesor en el proceso de integración digital en los ambientes de aprendizaje. Esto se realiza a través de la comparación y análisis de tales marcos teóricos.

El capítulo comienza recordando que a principios de la década de 1990 se predijo que la tecnología se integraría rápidamente a todos los niveles de la educación. Sin embargo, la evidencia acumulada durante los últimos 15 años indican que esta predicción ha procedido mucho más lento. Muchos autores se refieren a posibles razones de por qué la tecnología sigue jugando un rol marginal en las clases de matemáticas, tales como:

1. Acceso a recursos tecnológicos.
2. Apoyo institucional.
3. Políticas educativas.

La completa falta o mínima presencia de tales características son condiciones insuficientes para asegurar una efectiva integración de la tecnología en la práctica cotidiana del profesor. Esto sugiere que se necesitan marcos teóricos más sofisticados para entender:

1. El rol del profesor en entornos de aprendizaje tecnológicamente integrados.
2. La interrelación entre los factores que influyen el uso de la tecnología digital por el profesor.
3. Qué se considera un uso “efectivo” de la tecnología.
4. Cómo se puede identificar el progreso en la integración tecnológica.

De esta manera, en el capítulo se pretenden responder las siguientes preguntas:

1. ¿Qué marcos teóricos iluminan el rol de los profesores en ambientes tecnológicamente integrados para el aprendizaje de las matemáticas?
2. ¿Cómo las creencias, actitudes, conocimiento matemático y pedagógico del profesor moldean (y cómo ellos son moldeados por) su uso de tecnología digital en la enseñanza de las matemáticas, y cómo estas cuestiones son influenciadas por el acceso a recursos y por diferencias culturales?

Estas dos preguntas son abordadas en la primera sección, en la cual se considera el origen y la relevancia de varios marcos teóricos para analizar el rol del profesor y la influencia en la integración tecnológica de una serie de factores personales, contextuales y profesionales.

3. ¿Qué podemos aprender de los profesores que usan, o han tratado de usar tecnología digital para la enseñanza de las matemáticas?

En la segunda sección se aborda esta pregunta, en la cual se presentan investigaciones sobre cuestiones de implementación en el aula.

Instrumental Genesis

De acuerdo al enfoque instrumental desarrollado por Vérillon y Rabardel (1995), el individuo aprende cómo usar la herramienta para llevar a cabo una tarea por medio de esta.

La idea principal de este enfoque es considerar que un instrumento es una entidad compleja que combina un objeto material o simbólico con estructuras que organizan la acción del sujeto. La parte del instrumento que es externa al sujeto es llamada artefacto, en tanto la parte interna esta constituida por los esquemas de uso y resulta tanto de la construcción personal de un sujeto sobre la forma de usar el artefacto, como de una apropiación de esquemas sociales preexistentes.

El proceso de construcción de esquemas, la génesis instrumental, es un proceso de dos caras:

- **Instrumentalización:** construcción de esquemas orientados hacia el uso del artefacto.
- **Instrumentación:** construcción de esquemas orientado hacia la tarea a realizar.

Con base en este enfoque se presenta la Integración instrumental, entendida como un medio para describir:

1. Cómo los profesores organizan las condiciones para la génesis instrumental de la tecnología propuesta a los estudiantes.
2. En qué medida el profesor fomenta el aprendizaje matemático a través de la génesis instrumental.

Zones and Affordances

Esta teoría pretende dilucidar el rol del profesor en ambientes de enseñanza y de aprendizaje tecnológicamente enriquecidos, mediante la extensión de la zona de desarrollo próximo de Vygotsky a dos zonas:

- La estructura de desarrollo del ambiente del niño. La *Zona de Movimiento Libre*, que corresponde a la estructuración del acceso del niño a diferentes áreas del ambiente, a diferentes objetos en esas áreas y a las diferentes formas de actuar sobre tales objetos.
- La relación entre el niño y otras personas en el ambiente, la llamada *Zona de Acción Promovida*, la cual corresponde a un conjunto de actividades, objetos o áreas en el ambiente en el cual son promovidas las acciones de la persona.

Esta teoría puede ser aplicada a situaciones de clase para analizar el rol del profesor integrando tecnologías en las prácticas matemáticas de la clase. Por lo tanto podemos decir que la teoría de zona se ocupa de aspectos de un macro nivel de aprendizaje mediante interacción con otras persona y las herramientas materiales y representacionales ofrecidas por el ambiente de aprendizaje, donde la tecnología es una herramienta.

Complexity Theory

Se propone una adaptación de la Teoría de la Complejidad para analizar a la clase como un todo, para estudiar cómo los profesores pueden nutrir el desarrollo de sistemas de aprendizaje en un entorno con soporte tecnológico.

De esta adaptación teórica sobresalen dos aspectos:

1. La diferencia entre “causar” y “ocasionar” los eventos emergentes se da en la diferencia en las tareas:
 - a) **Tareas prescriptivas:** especifican que está permitido y todo lo demás está olvidado.
 - b) **Tareas proscriptivas:** especificando que está olvidado y todo lo demás está permitido.
2. Hacer que la tecnología sea parte integral de la enseñanza, cambiando el enfoque de cómo usar la tecnología hacia cómo la tecnología puede ser usada para explorar las matemáticas.

2.4.2.3. Teacher Education Courses in Mathematics and Technology: Analyzing Views and Options

En este capítulo se presenta un estudio exploratorio que toma como datos cinco cursos de formación de profesores, analizando los distintos puntos de vista y opciones de cada curso, con el propósito de proveer una herramienta útil para el desarrollo de este campo de estudio. Tal clasificación se realiza a partir de estos tres aspectos:

1. Implementación de la tecnología.
2. Cambio en el rol del profesor.
3. Adaptación de la práctica de enseñanza.

Tomando en cuenta estos aspectos se identifican contenidos a enseñar y estrategias a desarrollar en cursos de desarrollo profesional:

■ Contenidos:

1. **El impacto de la tecnología en las matemáticas y la consecuente evolución del currículo:** esta se declara como una información básica a considerar en cualquier tipo de curso de desarrollo profesional. Es interesante la consideración desde la investigación que al incorporar tecnología digital al fenómeno de enseñar y de aprender matemática, el currículo debe evolucionar. Por lo tanto, es natural que al incluir tecnologías, las prácticas del profesorado respecto del currículo también cambien.
2. **El potencial de las aplicaciones informáticas como nuevas alternativas en el aprendizaje matemático:** la tecnología digital como soporte material para trabajar con matemáticas permite nuevas formas de interacción o facilitar otras ya conocidas, por ejemplo conjeturar e investigar, ilustración de teoremas, entre otros.
3. **Las ideas de génesis instrumental y, conocimiento matemático e instrumental entrelazados:** se identifica como importante que los profesores consideren cómo organizar las actividades y las sesiones, tomando en cuenta la génesis instrumental de los estudiantes.
4. **Creando nuevas tareas y haciéndolas trabajar juntas con tareas antiguas:** es necesario hacer explícita la relación entre las tareas tradicionales con la introducción de nuevos artefactos. Se puede preguntar qué es posible aprender con tecnología digital (ambientes de geometría dinámica, por ejemplo) que no sea posible con enfoques tradicionales (papel y lápiz), lo cual puede proveer algunas indicios acerca de la dialéctica entre las nuevas y las viejas tareas.
5. **Nuevas habilidades de enseñanza:** este contenido también es declarado como una información elemental en cualquier curso de desarrollo profesional docente donde se discuta la incorporación de la tecnología. Al incluir tecnología en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, las prácticas docentes se modifican o se añaden nuevas, por ejemplo un rol más pasivo ante la exploración o experimentación de los estudiantes, entre otros.

6. **Introduciendo tecnología en el contexto profesional:** es necesario tener en cuenta el contexto al cual se incorpora la tecnología, para obtener el mayor provecho de ella. Las sugerencias dadas se refieren a un contexto técnico, por ejemplo, la diferencia de equipamiento en diferentes escuelas; la diferencia entre temas matemáticos, en los cuales algunos son más fáciles enseñar con tecnología; y el contexto institucional, ya que habrán instituciones donde la tecnología será aceptada con mayor facilidad que en otros.

■ Estrategias:

1. **Demostración:** mostrar cómo alcanzar una meta específica.
2. **Juego de roles:** profesores como estudiantes.
3. **En práctica:** profesores como participantes reflexivos.
4. **Aprender en comunidad:** trabajar en un curso de desarrollo profesional docente que propicie la conformación o simulación de una comunidad, fomenta aspectos que impactan en la práctica docente, como compartir recursos con los colegas y participar de instancias de reflexión comunitaria respecto de la propia práctica docente. Esto se conoce como una práctica escasa y más bien rehusada por los profesores.

Finalmente se plantea que cualquiera que sea la estrategia que se tome, es ampliamente reconocido que desarrollo profesional docente es crucial para una exitosa integración tecnológica en las aulas de matemáticas.

Esta taxonomía de contenidos y estrategias para los cursos de desarrollo profesional docente incorporando tecnología digital, se presenta como una valiosa ayuda obtenida de manera empírica, para tener en cuenta la conformación de nuevas instancias de integración digital.

2.4.2.4. Aportes de la investigación sobre integración digital en la práctica del docente de matemáticas

A continuación se presentan los aportes de la revisión de literatura especializada recién presentada, que recogemos para la presente investigación.

A partir de las consideraciones que proponen (Healy y Lagrange, 2010), se reconoce que al incorporar tecnología digital al quehacer docente, si bien es necesario un proceso de apropiación de la herramienta digital por parte del profesor, el desafío mayor es lograr que tal herramienta sea un aporte en los distintos ámbitos del quehacer docente: gestión de aula, estilos de enseñanza, elaboración de diseños, aspectos epistémicos del saber matemático. Es decir, el desafío radica en lograr que la herramienta digital pueda influir y ser un aporte en la configuración del ecosistema educativo que propicia el profesor en su labor docente.

Fuglestad y otros (2010) presentan tres investigaciones sobre equipos de trabajo con profesores para el proceso de integración digital, tomando en cuenta el contexto y la cultura del profesor, de lo cual rescatamos de manera general, los siguientes aportes:

1. Es necesario constituir equipos de trabajo donde estén representados diferentes roles asociados a los fenómenos didácticos ligados al saber matemático. En un escenario permeado por las tecnologías digitales, asumimos a cada rol como representante de diferentes grupos sociales relevantes que conforman una comunidad digital, donde el propósito comunitario está asociado al fenómeno de aprender y de enseñar matemáticas.
2. Es primordial considerar el contexto y la cultura del profesor para establecer el diálogo entre todos los roles. Esto es clave, sobre todo cuando se reconoce al profesor como un mediador natural entre el ámbito oficial y no oficial relativos a su práctica docente, entendiendo a lo oficial como los requerimientos institucionales a nivel de la escuela y el currículo y, a lo no oficial como las necesidades educativas reales de sus estudiantes.
3. La práctica del profesor de matemáticas está inmersa en un ecosistema educativo complejo donde interactúan diversas esferas de conocimientos, por lo que declaramos la necesidad de trabajos, por lo menos, multidisciplinares que atiendan a la realidad del fenómeno, sin reducir o trivializar la problemática a un sólo escenario disciplinar.

De manera específica, se extraen los aportes principales de cada uno de los casos estudiados. En el caso del estudio en Noruega, se rescata la planeación del trabajo con el profesor, el cual se asume como un ciclo de investigación integrado tanto por el profesorado como por los investigadores.

En el caso griego, destaca el reconocimiento de las distintas formas de valorar y de percibir al profesorado, desde el ámbito oficial y no oficial. Desde el mundo oficial se asume al profesorado sólo como un ejecutor técnico del currículo; en cambio, para que el profesorado pueda atender de manera efectiva las necesidades educativas reales de sus estudiantes (no oficial), es necesario considerarlo como un profesional de la educación, donde una de sus facultades es implementar un desarrollo pedagógico personal, ya que cada profesor es el único experto en su contexto situacional (grupo o curso).

Del caso de Brasil retomamos la importancia de conformar grupos de trabajo colaborativo y, por lo menos, multidisciplinares, para tener más oportunidad de interactuar de manera más sensible a la realidad del fenómeno educativo.

Por último, se reflexiona sobre los aspectos que tienen en común en los tres casos, que son clave en la integración digital, de los cuales se destacan los siguientes:

- Constituir equipos de trabajo conformado por diversos especialistas relacionados a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, donde todos participen íntegramente del proceso de integración digital.
- Enfatizar en la participación activa de los profesores en el diseño de las herramientas digitales, en desmedro de estrategias de integración que sólo conciben al profesor como un usuario final de herramientas construidas por terceros.

- Reconocer y, por sobre todo, no trivializar la cultura digital que se ha desarrollado fuera del ámbito escolar, ya que esta junto con el reconocimiento de la cultura del profesor, son clave en las instancias de integración digital.

En cuanto a las perspectivas teóricas acerca de la implementación de la tecnología digital en clases desarrollados por Goos y otros (2010), rescatamos los aportes realizados a la luz de la Génesis Instrumental y la Teoría de la Complejidad.

En cuanto a la Génesis instrumental, situamos a esta perspectiva teórica en el segundo momento de la investigación sobre la integración de la tecnología a los procesos educativos (ver sección 2.4.1), la cual se caracteriza por ampliar o adaptar marcos o explicaciones teóricas para estudiar el objeto de estudio, en este caso, el rol del profesorado en la incorporación de la tecnología a los procesos de enseñanza y de aprendizaje matemático. De esta perspectiva teórica rescatamos la importancia que tanto los estudiantes o los profesores puedan vivir instancias donde exploren y comiencen a entender los instrumentos tecnológicos y su uso en las tareas matemáticas. En este sentido hablamos de un momento de *apresto técnico*, puesto que reconocemos que la apropiación de la herramienta tecnológica se desarrolla a medida que el sujeto usa progresivamente la herramienta. Por lo tanto tenemos la convicción que el instrumento no se aprende a usar de una vez por todas, sino que consideramos el apresto técnico como un proceso y no como una fase que pudiera concluir o se le podría poner fin de manera determinada.

En cuanto al uso de la Teoría de la complejidad en la integración de tecnología digital al aula de matemáticas, rescatamos la idea de cambiar el foco de atención en la integración de la tecnología a las prácticas de enseñanza, hacia preguntarnos cómo se puede emplear la tecnología digital para hacer algo con las matemáticas. A la luz de la Problematización de la geometría (ver sección 2.2), ese *hacer algo*, que en el capítulo se plantea como *explorar*, proponemos que puede ser algo más profundo como *experimentar con las matemáticas*.

2.4.3. Confrontación de significados matemáticos

En el capítulo sobre Implementación de tecnologías digitales a escala nacional (Sinclair y otros, 2010), incluido en el libro *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (Hoyles y Lagrange, 2010), se reportaron dos temas emergentes entre los proyectos tratados: (1) Cambios en la audiencia: hacia una mayor participación del profesor y (2) Cambios en el valor: de lo pragmático a lo epistémico. Con el primero se atiende a dos niveles de instrumentalización: que el profesor use y dé forma a la tecnología, y que la promueva en sus propios estudiantes al utilizar tecnología; lo que convierte al profesor en una figura central del uso de la tecnología en el aula.

Con el segundo tema, se refuerza la importancia de “(...) confrontar una serie de cuestiones epistémicas relacionadas con la aceptación y legitimación de prácticas matemáticas desconocidas o, incluso, completamente nuevas” (Healy y Lagrange, 2010, p. 288). Es decir, atender a la comprensión y al entendimiento mismos de la matemática en juego, a lo que en la problemática de esta investigación señalamos como el qué (además del cómo) se enseña. En esta sección nos centramos en dos nociones que nos permitirán incorporar y analizar la confrontación de las cuestiones epistémicas con el profesor, partiendo de asumir que ésta se hace en relación a los significados construidos sobre el conocimiento matemático escolar; la geometría, para el caso de la presente investigación.

Iniciamos con la noción de resignificación, que alude a la significación progresiva que se da al conocimiento matemático cuando éste se pone en uso; y continuamos con la noción de saberes docentes, para referir a los conocimientos que el profesor pone en juego a partir de vivir una experiencia donde se trabaja con significados, de la matemática escolar, distintos a los convencionales.

2.4.3.1. Resignificación de la Matemática Escolar

Desde su estudio sobre las interacciones, de profesores de matemática en servicio, en un escenario en línea, Montiel (2005) centró su atención en la resignificación de la matemática escolar que se logra cuando los profesores enfrentan tareas matemáticas basadas en una problematización del saber matemático, en tanto lo hacen transitar del dominio de los objetos matemáticos escolares a prácticas relativas a ciertos significados de la matemática en juego. En este primer estudio, Montiel identificó la resignificación del concepto escolar “derivada” en la construcción de argumentos de variación, en el uso de las variaciones sucesivas y sus relaciones, así como en la construcción de argumentos predictivos, que los profesores lograron en sus interacciones con el contenido (las tareas matemáticas) de un curso de posgrado en matemática educativa, con el investigador responsable del curso y con sus pares.

Las tareas del curso se fundamentaron en el planteamiento socioepistemológico de Cantoral y Farfán (1998, 2003), que asume que la noción de derivada es adquirida cuando ésta es vista como una organización de las variaciones sucesivas. La interacción de los profesores, en torno a las tareas, los confronta, más no los lleva a negar ni desechar su dominio de conocimientos, sean estos algorítmicos o basados en definiciones o teoremas. Sin embargo, quedan al descubierto sus limitaciones en la resolución de ciertas tareas.

Tales limitaciones giran en torno a los significados que subyacen y se transmiten a través

de las estrategias didácticas y los discursos escolares, mismos que se mantienen aún con el cambio de modelos educativos o enfoques pedagógicos Montiel (2016) y que en la Socioepistemología se ha denominado como discurso Matemático Escolar.

Un estudio similar, con profesores (estudiantes de posgrado) resignificando un concepto escolar, fue reportado en García-Zatti y Montiel (2008). En este se identificó la resignificación de la linealidad como propiedad de la relación funcional de dos variables; encontrando evidencia de dicha resignificación en la resolución de las secuencias escolares no tradicionales que, con la incorporación de herramientas tecnológicas y las características del escenario en línea, permitieron que el profesor priorizara el lenguaje gráfico y realizara cambios en el tipo de argumentos, estrategias y formas de explicitar sus procedimientos. En ambos estudios es notorio que la resignificación no se asume como aprendizaje o comprensión de los conceptos, sino como el reconocimiento explícito, por parte de los profesores, de los significados relativos a dichos conceptos; significados que quedan ocultos o excluidos del discurso escolar, pero que son construibles y hacen del conocimiento un saber funcional.

Sobre la base de estos resultados de investigación, Montiel (2009, 2010) emprende un proyecto de desarrollo profesional docente donde busca la resignificación de la matemática escolar a través de la vivencia de un laboratorio didáctico, para que los profesores analicen el desarrollo del pensamiento matemático de sus estudiantes.

Este laboratorio didáctico se caracteriza como una práctica experimental donde el profesor pone en escena, con sus estudiantes, un diseño didáctico fundamentado en resultados de investigación y adaptado a sus condiciones escolares, toma registro de vídeo de la experiencia y junto con las producciones escritas clasifica y analiza los resultados Montiel (2009).

Montiel (2009, 2010) reconoce que en este momento del proceso formativo resulta relevante que el profesor identifique cómo la teoría y los resultados de investigación fundamentan el diseño y explican ciertos fenómenos didácticos; pero, al ser productos de la investigación social, son susceptibles de robustecerse con nueva evidencia y, en ese sentido, se abre la posibilidad una relación bidireccional y continua entre la teoría y la práctica educativa.

El laboratorio que se reporta en el estudio, se llevó a cabo adaptando la secuencia didáctica de Rotaache (2008). En su diseño, Rotaache se propone la construcción del concepto de ángulo en estudiantes del nivel básico-secundaria, en el sistema educativo mexicano; atendiendo al uso (implícito) del ángulo como cantidad, cualidad y relación, de forma estática y dinámica, a través de actividades concretas donde se interactúa con formas, medidas, patrones y relaciones, en situaciones que van desde el manejo de material manipulable hasta el manejo de la unidad de medida “grado” en la circunferencia.

En el análisis que realiza Montiel (2010), ubica los reportes del laboratorio entregados por los profesores en uno de cuatro niveles, según el detalle y profundidad con que se relaciona la teoría con la experiencia de aula. Sin embargo, independientemente del nivel donde se ubique el reporte identifica que, en el análisis de la actividad de sus estudiantes, los profesores describieron respuestas referidas al giro, a la parte de vuelta, a las formas, a las estrategias para medir, a las direcciones para girar, entre otras, como la interacción didáctica del estudiante con el concepto escolar de ángulo; reconociéndolas todas como pertinentes para el contexto donde las ponían en uso.

Es en este reconocimiento que hace el profesor de nuevos usos y significados, como formas del pensamiento matemático (relativo al ángulo) de sus estudiantes, donde Montiel (2010) identifica la resignificación de la matemática escolar.

Finalmente, de nuevo en un contexto de posgrado con profesores en servicio, pero ahora en la modalidad educativa presencial, Montiel (2016) reporta la configuración un espacio de formación docente sobre la base de la relación y la interacción entre la investigación y la práctica educativa, con un modelo que articula las aportaciones de la Matemática Educativa, la práctica docente y las necesidades y demandas por el cambio y la innovación que caracterizan al medio educativo. De esta experiencia, Montiel lleva a cabo un análisis del comportamiento innovador que manifiestan los profesores-estudiantes a lo largo de su proceso formativo, en un seminario que concluye con el diseño e implementación de una secuencia didáctica.

Inicialmente, Montiel hace vivir a los profesores una situación de aprendizaje donde confrontan sus significados trigonométricos, haciéndolos transitar de usar la razón trigonométrica como herramienta de cálculo para encontrar un valor faltante, a usarla como herramienta proporcional para el estudio de la relación, no-proporcional, entre el ángulo central y la cuerda que subtiende en el círculo, en un contexto de construcciones geométricas típicamente escolares (polígonos regulares inscritos en el círculo). De aquí se desprende la discusión sobre contextos extra-escolares donde pueda estudiarse dicha relación, para recolectar datos con los cuales estudiar su naturaleza.

Para llevar a cabo su diseño, los profesores eligen una situación-problema enmarcada en la mecánica y en la física: el cigüeñal de un motor; para el que prepararon videos explicativos de su funcionamiento, un mecanismo que simula el cigüeñal (hecho de madera, para incorporar la experimentación en el diseño) y un modelo hecho en geometría dinámica para obtener datos a partir del movimiento.

Dado el dinamismo del mecanismo elaborado, los profesores identificaron que gracias a los datos obtenidos podían estudiar la relación en juego, también como una relación de dependencia y abarcar el trabajo tanto con la razón trigonométrica como con la función trigonométrica. Es la forma en cómo se abordan estas herramientas que Montiel identifica la resignificación: se inicia con los videos; se da paso a la manipulación física y virtual del mecanismo; se determinan variables y se toman datos; se analizan relaciones, crecimientos y decrecimientos; y, finalmente, se elaboran modelos situacionales y geométricos de la situación para llevar hacia la expresión matemática.

En estos tres estudios se distingue el elemento de confrontación como crucial para la resignificación de la matemática escolar, en el profesor. Montiel alude siempre a que dicha confrontación no se asume, ni se transmite al profesor, como “no saber”; sino como una oportunidad de valorar los significados construidos en torno al discurso Matemático Escolar, para evidenciar que existen otros, propios de la matemática en juego, que se invisibilizan o se pierden en el proceso de transposición didáctica.

2.4.3.2. Saberes docentes y Voces sociales

Mercado habla de saberes docentes para referirse al conocimiento específico que los profesores tienen en relación a la enseñanza y que, naturalmente, orientan su trabajo. El

profesor se apropia de estos saberes en el trabajo cotidiano del aula y en la condición reflexiva que éste impone; y en el transcurso de esta apropiación, se generan nuevos saberes (Mercado, 1994). El carácter cotidiano del saber se entiende desde el planteamiento sociológico de Heller, quien “concibe a la vida cotidiana como un momento del movimiento social y al hombre como un sujeto histórico que se apodera de los usos sociales que son propios de los sistemas de expectativas y de las instituciones en que actúa, así como del lugar que ocupa en la división social de trabajo” (Heller, 1977, p. 21; citado en Mercado, 2002). De aquí que se caracterice al saber docente como histórico y social. Para el análisis del conocimiento del profesor, Mercado relaciona la noción de saberes docentes con la de voces sociales, para identificar las ideas, nociones y proposiciones, referidas tanto a los contenidos como a las formas de enseñarlos, que provienen de periodos, contextos y discursos sociales diversos. Lo importante de considerar esta noción es que las voces sociales en la enseñanza coexisten en una manera contradictoria y dialógica, por lo que, la toma de decisiones se basa en una actividad reflexiva por parte del profesor.

Mercado (2002) identifica la expresión de fragmentos de voces sociales provenientes de distintos momentos y espacios sociales e históricos (formación inicial, experiencia de aula, cursos de actualización, experiencias como estudiante, recomendaciones de otros profesores, libros de texto, reformas y modelos educativos, entre otros), que los profesores hacen propios en un proceso dialógico, con sus necesidades, intereses y propósitos, durante su práctica (cotidiana) docente. En ese sentido, Mercado reconoce a las decisiones del profesor como producto de apropiaciones culturales y de construcción colectiva desarrolladas en situación local. Con ello concreta su caracterización del saber docente como dialógico, histórico y social.

Como se puede rescatar, la resignificación de la matemática escolar, en el profesor, se ha identificado tanto en los productos de su actividad matemática como en los productos de actividades docentes del tipo: planeación, diseño y análisis de experiencias didácticas. Vislumbramos entonces, que la confrontación-resignificación de la matemática escolar permite poner en dialogo los saberes docentes, por lo que ambas nociones nos permitirán enfocar una parte del análisis en el profesor, reconociéndolo como sujeto social.

2.5. Integración Digital en la Práctica Docente en Geometría

En la problemática educativa identificada en el primer capítulo de este escrito (ver capítulo 1), sobre la aparición de las tecnologías digitales en el panorama mundial y educativo, emergen dos interrogantes generales en el interés por dar cuenta de la manera en que se construye conocimiento matemático en la era digital.

La primera interrogante se cuestiona sobre las variables sociales involucradas en el panorama educativo con la presencia de tecnología digital o ¿cómo se organiza la sociedad para construir conocimiento aprovechando la tecnología digital? (ver sección 1.4.1). La segunda interrogante se relaciona con el tipo de conocimiento matemático y sus procesos de construcción, cuando se considera al ecosistema digital o ¿qué geometría y cómo se aprende esta en la era digital? (ver sección 1.4.2). Ambas interrogantes motivan el desarrollo de explicaciones teóricas sobre comunidades digitales construyendo tecnología (ver sección 2.1) y la problematización de la geometría (ver sección 2.2). Con este aservo teórico, se propone una articulación de ambas vertientes teóricas que nos permiten ensayar una explicación sobre la construcción de conocimiento geométrico en la era digital (ver sección 2.3), alcanzando un primer nivel de síntesis teórica.

Alcanzada esta síntesis teórica, fue necesario un campo disciplinar donde llevar a cabo la presente investigación, escogiendo el desarrollo profesional docente con base en las razones expuestas en la sección 2.4. A continuación se presentan elementos que aportan a la confección del marco teórico sobre desarrollo profesional docente, tomando en cuenta la presencia de la tecnología digital en el ecosistema educativo. En primera instancia se presenta la dualidad en el panorama de la incorporación de tecnologías digitales en la educación, entre la inclusión y la integración digital (ver sección 2.4.1). En segundo lugar se realiza una revisión de literatura especializada sobre trabajo con profesores y tecnología digital (ver sección 2.4.2). Finalmente se desarrolla una revisión sobre instancias de confrontación y resignificación de la matemática escolar, identificadas en el trabajo con profesores (ver sección 2.4.3).

Todo este camino nos permite plantear un marco teórico sobre integración digital en el trabajo con el profesorado, específicamente a la práctica docente en geometría, con base en la fundamentación teórica y los aspectos de desarrollo profesional docente ya comentados. Así, planteamos nuestra propuesta de Integración digital a la práctica docente en geometría como que *el profesor se integre a la cultura digital para que pueda integrar prácticas digitales en su quehacer docente*. Esta propuesta la desarrollamos a través de la configuración de un espacio de trabajo colaborativo entre un equipo que este conformado por diferentes representantes de grupos sociales relevantes en el fenómeno de aprender y de enseñar matemáticas; las condiciones sociales estén inspiradas en las relativas a la estructura social inteligencia-red; las interacciones didácticas se desarrollen de manera dialógica entre diferentes voces sociales, donde, por una parte, la perspectiva didáctica respecto al saber geométrico esta dada por el modelo de trabajo geométrico, considerando el carácter dinámico de la geometría, y, por otra parte, el AGD de GeoGebra se use como un

laboratorio geométrico para experimentar con la geometría.

El espacio diseñado para llevar a cabo nuestra propuesta de integración digital, corresponde al Seminario de Integración Digital a la Práctica del Docente de Matemáticas (SIDPDM), el cual se elabora considerando los siguientes aspectos tomados de la fundamentación teórica y los aspectos de desarrollo profesional docente.

En primer lugar, *para que los profesores se integren a la cultura digital*, proponemos instancias para trabajar con construcciones y estrategias propias de las comunidades que manifiestan una cultura digital, en un espacio de desarrollo profesional docente con atención en la elaboración de diseños didácticos. Específicamente se considera a la Comunidad GeoGebra, debido a su directa relación con la especificidad disciplinar y su preocupación por atender las necesidades de los profesores y de los estudiantes, aunque también se consideran aspectos de otras comunidades específicas y de la cultura digital en general:

- Interacción social multidireccional.
- Relaciones de poder horizontales.
- Trabajo colaborativo: objetivos particulares / propósito común.
- Uso de tecnologías abiertas proporcionadas por la Comunidad GeoGebra: Hojas dinámicas, AGD, Libros y Grupos GeoGebra.
- Uso de tecnologías digitales en general: Moodle, video llamadas, confección de documentos colaborativos en Google Drive, presentaciones en HTML5 con Slides.com, entre otros.
- Configurar un equipo de trabajo diverso, el cual este unido por un propósito común, asociado a los fenómenos didácticos ligados a las matemáticas.
- Uso del AGD de GeoGebra como laboratorio, para experimentar con la geometría.

*El propósito del Seminario es la integración digital, sin embargo, el propósito común del equipo de trabajo esta relacionado con la elaboración de los diseños didácticos.

En segundo lugar, *para que los profesores integren prácticas digital a su quehacer docente* se proponen instancias para trabajar con construcciones y estrategias de comunidades digitales. Tales instancias se desarrollan en el marco de un proceso de negociación que busca favorecer la integración de prácticas digitales en el quehacer docente de los profesores, a través de la elaboración de diseños didácticos usando recursos digitales, como las Hojas dinámicas y los Libros GeoGebra, por lo menos.

El proceso de negociación esta inspirado en los proceso de búsqueda de consenso reconocidas en las diferentes perspectivas de construcción social empleadas en esta investigación, como el diálogo entre diferentes voces sociales en la CS de los saberes docentes; la confrontación - resignificación en la CS del conocimiento matemático; y la flexibilidad interpretativa - estabilización en la CS de la tecnología (digital). De esta manera se configura un proceso de negociación para la elaboración de diseños didácticos, entre tres polos: experiencia

docente, resultados de investigación en educación matemática y atención al ambiente del diseño.

En cuanto a los resultados de investigación, se pretende acercar estos a los profesores, a través de considerarlos para la fundamentación de sus diseños didácticos. Así mismo, reconocemos que la experiencia docente es una fuente de saberes de diversos tipos, que los profesores ponen en juego durante el desarrollo de su labor docente, y específicamente al momento de planear y elaborar diseños a ser aplicados con sus estudiantes. Finalmente, para poner en realce el propósito del Seminario en cuanto a la integración digital, consideramos importante que uno de los polos corresponda a la atención al ambiente de diseño, que en la era digital son típicamente híbridos, aunque haciendo énfasis en los ambientes digitales donde, por ejemplo, serán elaborados los diseño didácticos tomando en cuenta las particularidades de construir conocimiento geométrico en la era digital.

El proceso de negociación se desarrolla durante las instancias donde se elaboran los diseños didácticos, de manera colaborativa entre todos los integrantes del equipo de trabajo. Las instancias corresponden a la planeación del diseño, elaboración de este en ambientes digitales y construcción de los materiales necesarios para llevar cabo el diseño.

Para la planeación se propone utilizar la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA), por lo que en esta instancia se espera desarrollar el proceso de negociación para consensuar el objetivo del diseño, las tareas asociadas a tal objetivo y el proceso hipotético de aprendizaje ligado a las tareas. En esta instancia se espera que en la negociación, además de sus polos, también confluyan al diálogo voces educativas oficiales, como el currículo, los planes y programa, libros de texto, entre otros.

En la instancia de la elaboración del diseño en ambientes digitales, se espera que las prácticas y estrategias digitales tomen un papel relevante durante las discusiones, de tal manera de hacer explícita su integración en la confección del diseño didáctico. En cuanto a las prácticas y estrategias digitales, nos referimos por ejemplo a las formas de compartir información digital (privado, oculto, público); uso y cita de recursos de terceros; uso de múltiples tipos de archivos (texto, imagen, video, applet, páginas web, documentos pdf, archivos de preguntas, etc.); distinción entre tecnologías libres (o abiertas) y privativas y sus implicaciones, entre otros.

La instancia de construcción de materiales pone en relieve la articulación entre los diferentes espacios de diseño, ya sean concretos, digitales o de otro tipo. Entender el ambiente de diseño como un ecosistema híbrido, encuentra eco en el modelo de trabajo geométrico, en el cual se pone de manifiesto las prácticas de geometrización que permiten transitar de los objetos concretos a los objetos teóricos, mediante la abstracción y la representación. En definitiva, la construcción de materiales se guía por las consideraciones de construir conocimiento geométrico en la era digital, en tanto uso del ambiente de geometría dinámica de GeoGebra, como un laboratorio para experimentar con la geometría; así como en la atención al modelo de trabajo geométrico, con atención en el carácter dinámico de la geometría.

Se espera que las discusiones desarrolladas en el marco del proceso de negociación, le permitan a los profesores incorporar las prácticas propias de la cultura digital que consideren pertinentes y signifiquen un aporte a su quehacer docente, ya sean de corte didáctico o

extra-didáctico.

Finalmente, y en consecuencia a la propuesta de integración digital respecto a que el profesor se pueda integrar a la cultura digital, para que pueda integrar prácticas digitales a su quehacer docente, se espera que este espacio de desarrollo profesional, para la integración digital, se convierta en una voz social de los saberes de todos los participantes.

En el capítulo siguiente se presenta la elaboración del diseño del Seminario, donde se concretan cada una de los aspectos enunciados en la propuesta de integración digital.

Capítulo 3

Diseño del Seminario de Integración Digital a la Práctica del Profesorado de Matemáticas

El capítulo donde se expone el marco teórico construido para esta investigación, sirve de fundamentos para la elaboración del diseño con el cual se realiza la toma de datos. En consecuencia a los intereses de esta investigación por abordar los aspectos de la integración digital en la práctica de docentes de geometría, consideramos apropiado elaborar un instrumento que permita poner en juego los aspectos de la organización social propiciada por las tecnologías digitales, los aspectos específicos del saber, representados por los resultados de la problematización, y matizados por los aportes de la revisión de literatura especializada en el trabajo con profesores y tecnología. Poniendo atención en estos tres fuentes de fundamentos es que consideramos conveniente organizar un espacio para trabajar colaborativamente entre profesores e investigadores, el cual se constituya considerando los aspectos de organización de una inteligencia-red, donde el objetivo sea que en conjunto entre todos los participantes se elaboren diseños didácticos que los profesores puedan utilizar en su labor docente real.

De esta manera se elabora un *Seminario de Integración Digital a la Práctica del Profesorado de Matemáticas* (SIDPDM), pensado como un espacio de interacción académica-profesional con profesores de matemáticas de Educación Básica (Primaria y Secundaria) del Estado de México. El propósito de esta interacción es que los profesores puedan integrar la tecnología digital a su quehacer docente, específicamente en sus clases de geometría. La propuesta de integración digital está basada en la idea de que es necesario que los profesores reconozcan y se integren a la cultura digital, para que puedan integrar prácticas digitales a su quehacer docente.

Para la llevar a cabo este proceso de integración digital, el grupo completo elabora un diseño por cada profesor participante, de un contenido de geometría que ellos reporten. El grupo de trabajo se constituyó pensando en la diversidad de grupos sociales relevantes que participan de la construcción de conocimiento en comunidades digitales. Es por ello que para el caso particular del Seminario, se invitó a participar de este espacio a personas interesadas en el fenómeno didáctico de enseñar y de aprender matemáticas, atendiendo

a la existencia de un propósito comunitario común, y que cada una de ellas pudiera representar un grupo social relevante de interés en esta experiencia colaborativa:

- Una profesora (Abigail) y un profesor de primaria (Alberto).
- Dos profesoras de secundaria (Dina y Sabrina).
- Una investigadora, que es doctora en Matemática Educativa (Xisela).
- Dos estudiantes de doctorado en Matemática Educativa (Rosa y Zaid).
- Dos estudiantes de maestría en Matemática Educativa (Alejandro y Josué).
- Un miembro de la Comunidad GeoGebra (que, a su vez, es estudiante de maestría en Matemática Educativa, *coordinador* del Seminario e investigador principal del proyecto).

Con estos integrantes del Seminario, se pretende que al menos estén representados tres grupos sociales relevantes en el fenómeno de aprender y de enseñar matemáticas, en la era digital:

Profesorado	Representado por los profesores de aula (primaria y secundaria), quienes dan clases día a día, por lo tanto aportan al grupo su experiencia y cercanía a la realidad educativa de sus centros de estudios y de sus estudiantes.
Investigadores	Grupo representado por la Investigadora, los dos estudiantes de doctorado y los tres estudiantes de maestría. Ellos aportan al grupo los resultados de investigación y la experiencia en hacer investigación en Matemática Educativa.
Representante de la cultura digital	Con este grupo tiene pretende que este representada la cultura digital y, sobre todo, sus prácticas. Este grupo esta representado por el miembro de la Comunidad GeoGebra y por un estudiante de maestría y otro de doctorado, ambos usuarios avanzados del <i>software</i> GeoGebra.

Tabla 3.1: Grupos sociales relevantes representados en el Seminario.

Un aspecto muy importante a destacar en la constitución y representación de los grupos sociales relevantes, es su dinamismo. Los miembros del seminario pueden ejercer diferentes roles, según el momento o las tareas que se estén realizando, por lo tanto no es de nuestro interés identificar cómo los sujetos ejercen diferentes roles, sino la manera en que todos estos grupos y roles interactúan para llevar a cabo los objetivos del Seminario.

Un ejemplo de esta situación es que tanto los estudiantes de maestría y doctorado tienen formación universitaria de profesores de matemáticas, es decir, también son profesores de

matemáticas que han dado clases día a día.

Un aspecto importante de la planeación del Seminario, que está relacionado con la metodología de investigación basada en el diseño empleada en este proyecto, corresponde a la característica de ser *ecológicamente válido*. Esta característica se refiere a que el diseño se refina en ambientes auténticos, que en el caso de la presente investigación es el SIDPDM, lo cual a evitar la manipulación previa de datos, y distinguir entre los aspectos del diseño que se están estudiando de los que son extraños (o que no se estudiarán) (Swan, 2014). En consecuencia, la planeación del Seminario se presenta en dos iteraciones. La primera de ellas, la planeación general, está orientada por la investigación; y la segunda, corresponde a la planeación de cada sesión del Seminario, la cual además de estar orientada por la investigación, también se va refinando y respondiendo a las interacciones y desarrollo de cada sesión. Por ejemplo, en la sesión 03 quedó pendiente una tarea que estaba considerada desde la planeación general, sin embargo, por el devenir de tal sesión, quedó pendiente y se incluyó en la planeación de la sesión 04.

3.1. Planeación general del Seminario

La estructura del Seminario esta basada en la *Estrategia de planeación para el trabajo con profesores, integrando tecnología digital* de Rubio-Pizzorno y otras (2017), la cual se basa en la trayectoria hipotética de aprendizaje Simon (1995) y aspectos de la valoración pragmática y epistémico Artigue (2002).

Esta Estrategia de planeación declara cuatro etapas de trabajo con profesores: de apresto, de confrontación, de diseño y de retroalimentación colaborativa. A estas añadimos al diseño del Seminario una etapa de introducción, la cual está pensada para consensuar ciertas decisiones entre todos los miembros del Seminario, quedando de la siguiente manera:

1. Introducción.
2. Aprestó técnico.
3. Confrontación de significados.
4. Elaboración del Diseño.
5. Retroalimentación colaborativa.

En términos generales, para la planeación del Seminario se configura un objetivo para cada etapa, a partir del cual se desprenden las tareas necesarias para lograr tal objetivo. En cuanto a la trayectoria de trabajo asociada a cada tarea, esta corresponde a la planeación específica de cada sesión, la cual también cuenta con un objetivo, el cual se configura a partir de los objetivos de la etapa correspondiente y del trabajo realizado en las sesiones previas; a partir de este objetivo de la sesión, se plantean las tareas que permitan lograr el objetivo; y por último, se traza una trayectoria de trabajo específica para cada sesión dada por momentos, los cuales están asociados a las tareas planteadas.

Para ejemplificar la manera de llevar a cabo la planeación del Seminario, se presenta la estructura de la planeación de la *Etapa 2: Aprestó técnico*:

Etapa 2: Aprestó técnico.

- Objetivo de la etapa.
- Tareas asociadas al objetivo.
- Trayectoria de trabajo de la etapa:
 - Sesión 1:
 - Objetivo de la Sesión 1.
 - Tareas de la Sesión 1:
 - ◇ Tarea 1.
 - ◇ Tarea 2.
 - Trayectoria de trabajo de la Sesión 1:
 - ◇ Momento 1.
 - ◇ Momento 2.

- Sesión 2:
 - Objetivo de la Sesión 2.
 - Tareas de la Sesión 2:
 - ◊ Tarea 1.
 - ◊ Tarea 2.
 - ◊ Tarea 3.
 - Trayectoria de trabajo de la Sesión 2:
 - ◊ Momento 1.
 - ◊ Momento 2.
 - ◊ Momento 3.
 - ◊ Momento 4.

A continuación se presenta la planeación general del Seminario por etapas, detallando los objetivos y tareas de cada una de ellas. La trayectoria de cada una de las etapas corresponde a la planeación de las sesiones, las cuales se presentan en detalle en las secciones 3.2 (Introducción), 3.3 (Apresto técnico), 3.4 (Confrontación de significados), 3.5 (Elaboración del diseños) y 3.6 (Retroalimentación colaborativa).

3.1.1. Etapa 1: Introducción

Esta es la etapa con la cual se da inicio al Seminario, por lo que se presenta una propuesta de trabajo a los profesores para ser discutida y llegar a consenso entre todos los miembros. Es importante para las pretensiones del Seminario, que desde el comienzo se promuevan condiciones propias de las comunidades digitales, como la interacción multidireccional y el ejercicio de poder horizontal, las cuales son puestas en juego al momento de consensuar el rumbo del Seminario (número de sesiones, horario de trabajo, etc.) y la forma de trabajo (presencial, virtual).

3.1.1.1. Objetivo de la Etapa 1: Introducción

En esta etapa se presente dar a conocer el propósito general del Seminario, plantear la modalidad de trabajo y consensuar con todo el grupo cada una de las decisiones relativas al Seminario:

1. Dar a conocer el propósito del Seminario: *Integrar la tecnología digital a la práctica docente, a través de la planeación y elaboración de diseños didácticos.*
2. Presentar una reflexión sobre la aparición de las tecnologías digitales en la humanidad, y su impacto en la sociedad y la educación.
3. Presentar las Etapas del Seminario.
4. Consensuar aspectos relevantes del Seminario.

3.1.1.2. Tareas de la Etapa 1: Introducción

Las tareas de esta etapa están asociadas con los acuerdos a llegar entre todos los participantes del Seminario, presentar una propuesta del Seminario y comunicar información importante:

1. Comunicar información importante del Seminario: propósito, entrega de certificados de participación, perspectiva con la cual se asume a la tecnología digital en la presente investigación, etapas del Seminario.
2. Consensuar las modalidades de trabajo (presencial o virtual), tiempos (horario y número de sesiones) y contenido para realizar el diseño.
3. Recoger datos de los profesores a través de un formulario electrónico.

3.1.2. Etapa 2: Apresto técnico

Varias investigaciones sobre el trabajo con tecnología digital y, en particular con geometría dinámica (Arzarello y otros, 2002; Fahlgren y Brunström, 2014), reportan una instancia donde se introduce a los usuarios a la tecnología a utilizar, al comienzo de sus diseños de intervención o toma de datos. En sintonía con estas investigaciones, también reconocemos la necesidad de disponer de una etapa del Seminario para que los miembros puedan comenzar a ambientarse con las tecnologías digitales a utilizar a lo largo de todas las sesiones.

Así también como se expuso en el sección 2.4.2.2, es importante que tanto los estudiantes o los profesores puedan vivir instancias donde exploren y comiencen a entender los instrumentos tecnológicos que utilizan en las tareas matemáticas, a través de procesos de instrumentación e instrumentalización.

Por nuestra parte, declaramos la relevancia de una etapa en la cual los miembros del Seminario puedan comenzar a ambientarse con ciertas tecnología digital de interés para el desarrollo del Seminario y, que puedan utilizar tales tecnologías como mediadores entre cada sujeto y la matemática. Sin embargo, nuestro interés no se centra en que en esta etapa los miembros del Seminario aprendan a utilizar una herramienta y la conviertan en instrumento, mediante la resolución de una tarea matemática, porque hacerlo de esta manera sería incurrir en un reduccionismo sobre la tecnología digital, la cual esta constantemente en cambio, siempre presentando versiones actualizadas con modificaciones y, con una ingente cantidad de herramientas, comandos, modos de usos, etc. que sería un sinsentido pretender que se *aprendieran* cada una o un conjunto de ellas en un tiempo acotado.

Nuestro interés esta en poder entender a la tecnología digital como un soporte material que permite materializar ideas, inquietudes o soluciones a problemáticas, que en el caso de los profesores, seguramente las habrá de tipo didácticas donde el saber matemático es central, pero también las habrá de otros tipos donde el saber matemático no sea necesariamente el foco de atención, como en los aspectos pedagógicos, educativos, organizacionales, a los

cuales nos referiremos como *extra-didácticos*.

Así también, reconocemos la importancia de intencionar un momento que permita introducir las tecnologías digitales, tanto para usos didácticos y extra-didácticos. Al respecto también declaramos que la apropiación de la herramienta tecnológica se desarrolla a medida que el sujeto usa progresivamente la herramienta, por lo tanto tenemos la convicción que el instrumento no se aprende a usar de una vez por todas, sino que es un proceso que comienza cuando el sujeto se pone en contacto por primera vez con la tecnología, pero que carece de un final marcado y determinado.

Por lo tanto, nos referimos a esta etapa como *Apresto técnico*, la cual corresponde al momento en el que se introducen ciertas tecnologías digitales, que serán utilizadas durante el desarrollo de todo el Seminario. Se escogió el término *técnico* por sobre el *tecnológico*, puesto que esta etapa también servirá para comenzar un apresto de otro tipo de herramienta, la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA), de corte didáctico-pedagógica, que será la estructura a utilizar como base de cada uno de los diseños a elaborar durante el Seminario.

Esta etapa esta caracterizada por:

- Ser el comienzo de la exploración y uso de las tecnologías digitales, ya que consideramos el apresto como un proceso con inicio definido y sin un fin necesario.
- Las tecnologías digitales a explorar son robusta y tienen muchas herramientas y formas de uso, por lo que se espera que la exploración y uso de ellas sea en la medida que los profesores sientan interés y necesidad de hacerlo, para abordar las problemáticas de su quehacer docente.
- La exploración inicial es guiada y la misma para todos los miembros del Seminario, para luego continuar con una exploración más personal que este guiada por las inquietudes y dudas personales, lo cual los lleve a proponer maneras propias de uso de estas tecnologías.
- La exploración y el uso de las tecnologías continuará a lo largo de todo el Seminario y, vislumbramos que luego que este acabe, el uso de las tecnologías digitales pueda continuar.
- Las tecnologías que serán propuestas no son solo herramientas que se convertirá en un instrumentos, sino que corresponden a todo un ecosistema digital construido por comunidades digitales, los cuales serán explorados para los fines que el profesorado estime conveniente, ya sean aspectos didácticos o extra-didácticos (pedagógicos, didácticos, educativos, de organización, entre muchos otros).

3.1.2.1. Objetivo de la Etapa 2: Apresto técnico

Ambientarse y comenzar a interactuar con los elementos técnicos del trabajo a realizar en el Seminario. Tales aspectos técnicos se presentan en dos áreas:

- Tecnologías digitales, con el uso principal de diferentes modalidades de Moodle y de GeoGebra.
- Planificación de actividades, empleando como estructura la trayectoria hipotética de aprendizaje.

3.1.2.2. Tareas de la Etapa 2: Apresto técnico

Las tareas de esta etapa están relacionadas a la interacción con Moodle, GeoGebra y la THA:

1. Explorar versiones web y móvil de Moodle, pensando en su uso para el Seminario.
2. Explorar versiones de escritorio, web y móvil de GeoGebra, pensando en las posibilidades para la labor docente.
3. Estudiar la trayectoria hipotética de aprendizaje como una herramienta técnica, en términos de la planeación de los diseños y clases de los profesores.
4. Analizar un ejemplo de THA ya elaborada, y confeccionar una de manera colaborativa para un contenido propuesto

3.1.3. Etapa 3: Confrontación de significados

Esta etapa es clave en la discusión de aspectos matemáticos desde una mirada relativista. Se pretende que los profesores puedan reconocer que los significados matemáticos escolares no son los únicos que existen, ni los únicos que son válidos. Esto a través de desarrollar y analizar actividades donde se ponen en juego significados no escolares de ciertas nociones matemáticas, reconocidos en la investigación en educación matemática. Al reconocer una pluralidad de significados matemáticos válidos, se espera que los profesores experimenten un cambio en su manera de concebir a la matemática, de una completamente establecida y terminada, a una en variada y en constante construcción. Con base en el reconocimiento de la pluralidad de significados matemáticos y el cambio de estatus de la matemática escolar, se pretende compartir con los profesores la idea de resignificación, como una manera de relacionarse con las nociones matemáticas mediante la posibilidad de reconocer progresivamente nuevos significados asociados a una noción. Dicho de otra manera, el conocimiento respecto de una noción matemática nunca es acabado y siempre se puede ir robusteciendo.

También se espera propiciar que los profesores puedan favorecer esta perspectiva de resignificación en la elaboración de sus diseños, lo cual se desarrolla en la siguiente etapa.

3.1.3.1. Objetivo de la Etapa 3: Confrontación de significados

Que los profesores puedan confrontar los saberes geométricos escolares que poseen, a través diferentes momentos de resignificación, tales como al desarrollar un diseño, al analizar la fundamentación de tal diseño y al estudiar el proceso de elaboración de un diseño basado en la investigación.

3.1.3.2. Tareas de la Etapa 3: Confrontación de significados

1. Desarrollar una actividad para confrontar significados geométricos escolares con significados geométricos relacionados con el proceso de construcción y el carácter dinámico de la geometría.
2. Analizar la THA y fundamentos teóricos de un diseño de confrontación de significados geométricos asociados a la clasificación de cuadriláteros.
3. Estudiar la elaboración de un diseño basado en la investigación, sobre significados geométricos y angularidad.

3.1.4. Etapa 4: Elaboración de diseños

La cuarta etapa del Seminario esta dispuesta para elaborar diseños didácticos, para cada uno de los contenidos geométricos curriculares que reportaron los profesores en la primera etapa. También se pretende que el trabajo realizado en las etapas anteriores (Introducción, Apresto técnico y Confrontación de significados geométricos) se manifieste y ayude a la elaboración de los diseños.

De esta manera se configura un *proceso de negociación* (ver imagen 3.1) entre los resultados de investigación, la experiencia docente y la atención al ambiente de diseño, lo cual funciona como el marco en el cual se irán gestando cada diseño, la THA y los materiales respectivos.

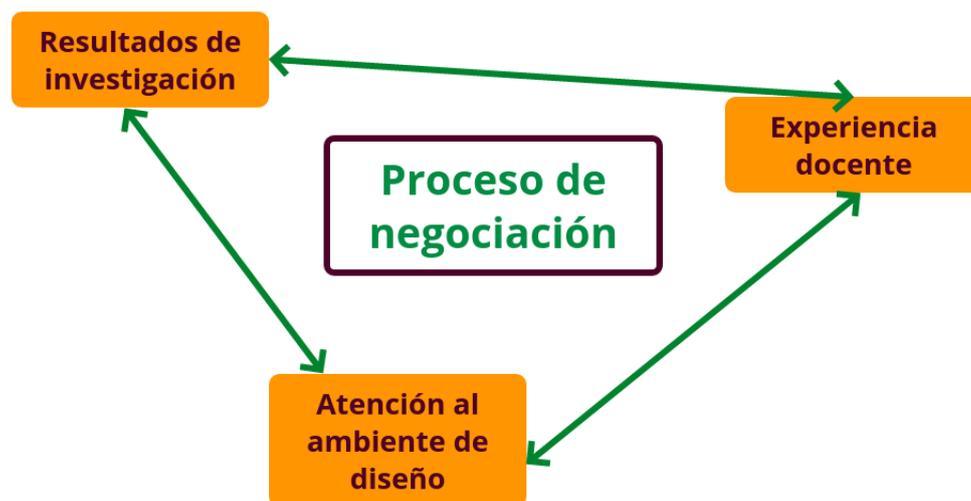


Imagen 3.1: Marco para la elaboración de los diseños.

Este proceso de negociación para la elaboración de los diseños esta inspirado en varias consideraciones. En primer lugar, se pretende aportar al acercamiento de la investigación al profesorado, lo cual se propicia con la elaboración de diseños basados en la investigación para ser usados por los profesores en su práctica docente real. En segundo lugar, se pretende aportar al acercamiento del profesorado a la investigación, poniendo la experiencia docente

al mismo nivel que los resultados de investigación, en donde ambos aporten de la misma manera a la elaboración de los diseños. En tercer lugar, y dado el propósito general del Seminario, se pretende aportar en la integración de tecnologías digitales a la práctica de los profesores, específicamente en esta etapa, en lo que respecta a su relación con el saber geométrico a través de los ambientes de geometría dinámica.

Este marco también está pensado como una manera de propiciar las relaciones heterárquicas, ya que reconocemos a la práctica docente como un quehacer donde concluyen diversos saberes y el profesor pone en juego lo que estime conveniente según cada situación que le toque afrontar. En este sentido consideramos que ningún saber es más importante que otro, sino que reconocemos al saber docente como una construcción dialógica constituida a partir de diversas fuentes de conocimientos, ya sean de tipo didáctica, pedagógica, educativa, curricular, personal, entre muchas otras.

En el caso de los resultados de investigación, estos aportan en términos del saber didáctico, que tiene que ver específicamente con el saber matemático. Por otra parte, en cuanto a la atención al ambiente de diseño, este entrega elementos de acercamiento a la cultura digital, el uso de herramientas tecnológicas en la práctica educativa que se puede complementar con aspectos didácticos o extra-didácticos. En el caso de la experiencia docente, este saber aporta en todos los ámbitos de la práctica de los profesores y permite matizar los aportes de los otros polos del proceso de negociación, al contrastarlos con la realidad del aula de clases de cada profesor que está participando del Seminario.

Con base en estas consideraciones se declara el objetivo y las tareas de esta etapa:

3.1.4.1. Objetivo de la Etapa 4: Elaboración de diseños

Elaborar un diseño por cada contenido geométrico curricular reportado, su THA y materiales respectivos, con base en el proceso de negociación entre los resultados de investigación, la experiencia docente y la atención al ambiente de diseño.

3.1.4.2. Tareas de la Etapa 4: Elaboración de diseños

1. Comunicar resultados de investigación encontrados sobre los contenidos que reportaron los profesores.
2. Presentar el proceso de negociación entre los elementos a considerar para el la elaboración de los diseño: resultados de investigación, experiencia docente y atención al ambiente de diseño.
3. Elaborar una THA para el diseño de cada profesor (objetivo, tareas y proceso hipotético).
4. Confeccionar el diseño en un Libro GeoGebra y los materiales necesarios (atendiendo a los ecosistemas híbridos), ambos con base en la THA.

3.1.5. Etapa 5: Retroalimentación colaborativa

Esta etapa esta pensada para promover explícitamente prácticas propias de las comunidades digitales, tales como el trabajo colaborativo y retroalimentar los productos construidos en conjunto.

Esta etapa se lleva a cabo como una combinación en las estrategias de juego de roles, donde los miembros del Seminario tomarán el rol de estudiantes mientras un profesor guía el desarrollo del diseño, y en práctica, donde se va reflexionando entre los profesores e investigadores la puesta en escena del diseño. Ambas estrategias pensadas para robustecer el diseño y el uso de los materiales, antes del momento de aplicarlo con los estudiantes de cada profesor.

3.1.5.1. Objetivo de la Etapa 5: Retroalimentación Colaborativa

Presentar ante el grupo, las ideas generales de la actividad diseñada, y recibir retroalimentación por parte de éste.

3.1.5.2. Tareas de la Etapa 5: Retroalimentación Colaborativa

1. Cada profesor presenta el diseño y los materiales ante el resto de los integrantes del Seminario, realizando una especie de juego de roles, en el cual el profesor guía la actividad y el resto de los participantes la desarrolla, haciendo las veces de estudiante.
2. Realizar una retroalimentación colaborativa de parte de todos los miembros del Seminario, al colega que presenta su diseño, para incorporar ajustes a este.

3.2. Introducción

Esta etapa corresponde a la apertura del Seminario, en donde el coordinador del Seminario presenta a todos los miembros el propósito, los objetivos, sus etapas, además de consensuar junto a los profesores, tiempos, modalidades de trabajo, entre otros.

La intención de llevar a cabo esta etapa corresponde a poder configurar desde el comienzo, un espacio de trabajo donde se propicien, explícita e implícitamente, las relaciones heterárquicas, el trabajo colaborativo y abierto. Dicho en otras palabras, en este proyecto de investigación planteamos la relación investigadores-profesores como una colaboración, donde cada uno aporta desde área y su experiencia, en sintonía con la propuesta de Healy y Lagrange (2010) de que es necesario involucrar a los profesores como socios más que como estudiantes, en este proceso de introducir tecnología digital en el ecosistema educativo de manera efectiva.

La Etapa 1: Introducción es la única que cuenta con sólo una sesión, por lo tanto los objetivos, tareas y trayectorias de la etapa corresponden a la de la Sesión 01.

3.2.1. Planeación de la Sesión 01

3.2.1.1. Objetivo de la Sesión 01

En esta sesión se presente dar a conocer el propósito general del Seminario, plantear la modalidad de trabajo y consensuar con todo el grupo cada una de las decisiones relativas al Seminario:

1. Dar a conocer el propósito del Seminario: *Integrar la tecnología digital a la práctica docente, a través de la planeación y diseño de trayectorias hipotéticas de aprendizaje.*
2. Presentar una reflexión sobre la aparición de las tecnologías digitales en la humanidad, y su impacto en la sociedad y la educación.
3. Presentar las Etapas del Seminario.
4. Consensuar aspectos relevantes del Seminario.

3.2.1.2. Tareas de la Sesión 01

Las tareas de esta etapa están asociadas con los acuerdos a llegar entre todos los participantes del Seminario, presentar una propuesta del Seminario y comunicar información importante:

1. Comunicar información importante del Seminario: propósito, entrega de certificados de participación, perspectiva con la cual se asume a la tecnología digital en la presente investigación, etapas del Seminario.
2. Consensuar las modalidades de trabajo (presencial o virtual), tiempos (horario y número de sesiones) y contenido para realizar el diseño.
3. Recoger datos de los profesores a través de un formulario electrónico.

3.2.1.3. Trayectoria de la Sesión 01

A partir de los objetivos y las tareas propuestas, se configura la siguiente trayectoria de trabajo por momentos. Esta sesión fue planificada considerando la participación de:

- Una profesora (Abigail) y un profesor de primaria (Alberto).
- Dos profesoras de secundaria, (Dina y Sabrina).
- Una investigadora, que es doctora en Matemática Educativa (Xisela).
- Un estudiante de maestría en Matemática Educativa (Alejandro).
- Un miembro de la Comunidad GeoGebra (que, a su vez, es estudiante de maestría en Matemática Educativa, *coordinador* del Seminario e investigador principal del proyecto).

Momento 1: Presentación del Seminario

En primer lugar la Investigadora da la bienvenida a los profesores y miembros del Seminario. Luego, el coordinador del Seminario da una breve presentación sobre el impacto que ha producido la aparición de la tecnología digital en la humanidad, en la sociedad, la educación y la educación matemática. Esta exposición está basada en cierto elementos identificados en la Problemática (ver Capítulo 1).

Luego se presentan los detalles del Seminario, para ser discutidos con todo el grupo de trabajo:

1. **Propósito:** integrar la tecnología digital a la práctica profesional, a través de la planeación y diseño de trayectorias hipotéticas de aprendizaje.
2. **Etapas:** se utiliza la *Estrategia de planeación para el trabajo con profesores, integrando tecnología digital* (Rubio-Pizzorno y otras, 2017) como base para estructurar el Seminario, a la cual se le añade una primera etapa de introducción.
 - a) **Introducción:** presentar las propuestas para el desarrollo del seminario, consensuar con los colegas algunos aspectos del seminario.
 - b) **Apresto tecnológico:** creación y activación de las cuentas de GeoGebra.org, revisión de los distintos formatos y plataformas de uso de GeoGebra; análisis de una actividad desarrollada a partir de una THA (presentar la tarea y el proceso a un mismo nivel); ejercicio grupal de configurar una THA de un contenido geométrico específico.
 - c) **Confrontación de significados:** presentar actividad genérica de confrontación de significados geométricos; comunicar los resultados de investigación específicos del contenido seleccionado y crear una actividad de confrontación.
 - d) **Diseño:** configurar una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje que guíe el diseño de una actividad experimentación con las matemáticas, la cual se desarrolla para el trabajo en ambientes híbridos, enfatizando en la indagación de su naturaleza epistémica.

- e) **Retoalimentación colaborativa:** recreación del modelo de construcción social de GeoGebra, a un nivel micro para la construcción social de sus diseños.

Momento 2: Consensos

En cuanto a los consensos, se desea acordar:

- Modalidad de trabajo: (1) Presencial, acordar lugar de las sesiones. (2) Virtual, se dispone de un aula virtual para el Seminario aulavirtual.zergiorubio.org¹ en la cual irá quedando el registro de los acuerdos tomados en las sesiones presenciales, habrán espacios disponibles para la entrega de tareas, se alojará el material empleado en las sesiones presenciales, entre otros.
- Decidir el bloque curricular a planificar. Los contenidos curriculares a partir de los cuales se elaborarán los diseños, las THA y los materiales asociados, serán escogidos por cada profesor, con la única salvedad de que en el Seminario se trabajarán contenidos de geometría, en consecuencia a la problematización realizada en la presente investigación.
De esta manera, entre todo el grupo se escogerá el bloque del cual se obtendrá el contenido curricular de geometría que abordará cada profesor, el cual puede ser el bloque VI (marzo-abril) o el bloque V (mayo-junio).
- Tiempo de cada sesión: la propuesta es desde las 09:00 hasta 13:00 los días sábados.
- Duración del Seminario, en número de sesiones.

Momento 3: Recolección de datos

Se les pide a los profesores que puedan llegar un formulario digital, en el cual registren sus datos personales, de formación y laborales.

Como actividad final de la Sesión 01, se propone al profesorado que su elección del contenido geométrico correspondiente al bloque escogido, lo den a conocer en un foro dispuesto para este propósito en el aula virtual.

¹Para ingresar al aula virtual del Seminario, utilizar los siguientes datos:
Usuario invitado **Contraseña:** InvitadoSIDPDM

3.3. Apresto

En esta etapa se exploran las herramientas técnicas que serán utilizadas para la elaboración de los diseños, tanto en aspectos digitales (como GeoGebra y Moodle), como en aspectos del quehacer docente (como el uso de la THA para planear los diseños).

3.3.1. Sesión 02

En esta sesión se abordan las primeras dos tareas de la Etapa 2, apuntando a trabajar en el desarrollo del objetivo de la Etapa, en cuanto al apresto de las herramientas digitales a utilizar durante el Seminario. A continuación la focalización de los aspectos generales para esta sesión:

3.3.1.1. Objetivo de la Sesión 02

Ambientarse y comenzar a interactuar con las herramientas tecnológicas a utilizar durante el Seminario, principalmente con Moodle y GeoGebra en sus diferentes modalidades.

3.3.1.2. Tareas de la Sesión 02

1. Exploración del aula virtual. Creación o actualización de perfil en GeoGebra.org para explorar sus características y posibilidades.
2. Análisis técnico-digital de la actividad de confrontación de significados geométricos.

3.3.1.3. Trayectoria de la Sesión 02

Esta sesión fue planificada considerando la participación de:

- Una profesora (Abigail) y un profesor de primaria (Alberto).
- Dos profesoras de secundaria (Dina y Sabrina).
- Un estudiante de maestría en Matemática Educativa (Alejandro).
- Un miembro de la Comunidad GeoGebra (que, a su vez, es estudiante de maestría en Matemática Educativa, *coordinador* del Seminario e investigador principal del proyecto).

Momento 1: ¿Cómo usar y para qué me sirve Moodle y GeoGebra?

Este momento responde a la tarea 1 y está dividido en dos partes, para explorar cada una de las herramientas digitales, comenzando por Moodle y continuando con GeoGebra.

En primera instancia se comunica a todos los profesores la dirección del aula virtual (aulavirtual.zergiorubio.org) y sus datos de acceso. Luego de ingresar al aula e iniciar sesión con su cuenta personal, los profesores deben buscar entre la oferta de cursos disponibles, el curso *Seminario de Integración Digital a la Práctica del Docente de Matemáticas* (en adelante SIDPDM) en el cual ya están matriculados (el administrador

del aula los matriculó antes de comenzar el Seminario).

El curso está construido con un *formato de temas*, por lo cual en su página principal se presentan se muestra el encabezado de todas sus secciones, en el cual aparece el nombre y objetivo de la sección:

1. Introducción.
2. Apresto técnico.
3. Confrontación.
4. Diseño Trayectoria Hipotética de Aprendizaje.
5. Retroalimentación colaborativa.

Para ingresar a una sección se da clic en su nombre. Cada sección tiene sigue un formato de título y objetivo en el encabezado, y a continuación las actividades o recursos, los cuales pueden ser foro, url, página, entre muchos otros. Se accede a alguna sección y se exploran sus actividades y recursos, atendiendo a la manera de usarlos, ya sea creando un tema en un foro, descargando materiales etc.

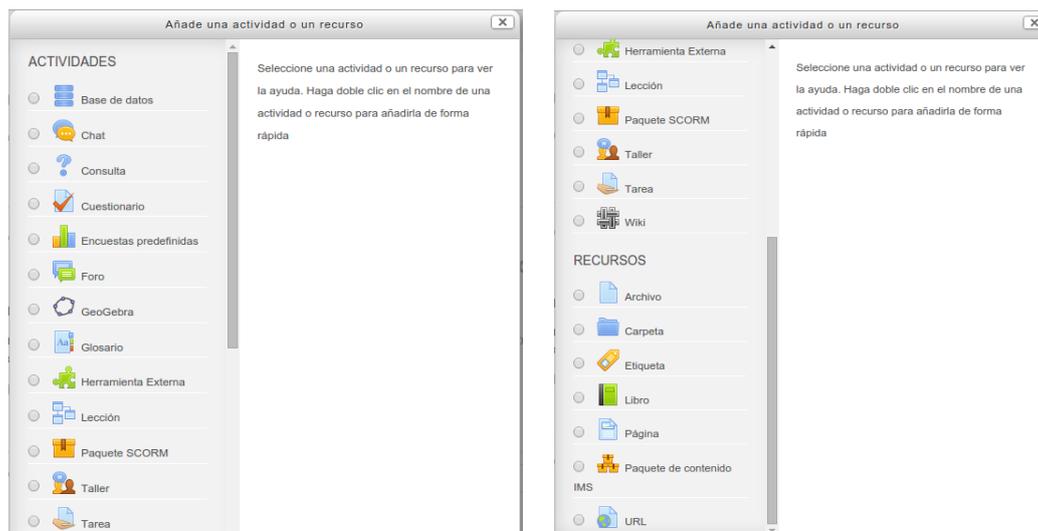


Tabla 3.2: Actividades y Recursos de Moodle.

Luego de explorar el aula virtual en su versión web, se muestra a los profesores la aplicación para teléfonos inteligentes Moodle Mobile, con la cual pueden acceder al aula y al curso a través de su teléfono para revisar las publicaciones realizadas y los materiales subidos a la plataforma. Debido a las configuraciones del aula, sólo es posible visualizar el curso, sin la posibilidad de interactuar, por ejemplo, respondiendo comentarios, publicando en foros, o enviando mensajes a otros estudiantes.

Debido a estas características, el uso de esta aplicación será consensuada con los profesores, valorando su pertinencia respecto del Seminario.

En segundo lugar, se explora el sitio www.geogebra.org mostrando sus distintas áreas y formas de uso, por ejemplo los Recursos GeoGebra², Blog oficial³, descarga del software⁴, aplicación en línea⁵, entre otros.

Se centra la atención en la opción *Abrir sesión*, con la cual se puede acceder al perfil personal y la creación de recursos en formato Hoja dinámica, Libro GeoGebra, Grupos GeoGebra, así como poder seguir y ser seguido por otros usuarios. En esta opción se crean usuarios para cada profesor o se actualiza su información, en caso que ya cuenten con un perfil. Se recomienda incluir en su perfil una breve descripción de quién soy, qué hago y para qué uso GeoGebra, además de incluir una fotografía de perfil y de portada.

Luego de tener el perfil, se exploran las opciones en línea a través del botón *+Nuevo* que aparece en cada perfil. Este entrega seis opciones: (1) Aplicaciones GeoGebra, para crear un applet GeoGebra desde cero en su versión web; (2) Nueva Hoja dinámica⁶, para crear una Hoja dinámica; (3) Nuevo Libro GeoGebra⁷; (4) Subir, para alojar en nuestros recursos un applet que haya sido creado en la modalidad de escritorio de GeoGebra; (5) Nuevo grupo, para crear desde cero un Grupo GeoGebra⁸; y (6) Unirse a un grupo, para ingresar el código de un Grupo GeoGebra y unirse a él.

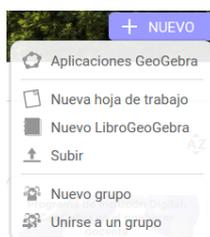


Imagen 3.2: Botón +Nuevo en perfil personal GeoGebra.

Para los propósitos del Seminario, se exploran los recursos Hoja dinámica y Libro GeoGebra. En el caso de las Hojas dinámicas se exploran todas las opciones de recursos que pueden ser incluidos en una hoja (texto, applet GeoGebra, página web, video, imagen, archivo pdf, pregunta y tarea GeoGebra), y del Libro GeoGebra la manera en que se crea, cómo se realizan las configuraciones generales y la forma de articular el libro mediante capítulos y añadiendo Hojas dinámicas. De esta manera se establecen similitudes y diferencias entre ambas herramientas, así como la manera de usarlas para crear una actividad y la forma de articularlas. De manera opcional se podría explorar los Grupo GeoGebra, según el interés y necesidades de los profesores.

Luego de haber explorado las plataformas en línea de Moodle y GeoGebra, se realiza una comparación de las características que aportan cada una de estas herramientas a la

²geogebra.org/materials

³community.geogebra.org

⁴geogebra.org/download

⁵geogebra.org/apps

⁶Ver detalle del recurso Hoja dinámica en la página ggbm.at/K2ekJs69

⁷Ver detalle del recurso Libro GeoGebra en la página ggbm.at/Smmt4pVM

⁸Ver detalle del recurso Grupo GeoGebra en la página ggbm.at/Ucar7PHU

práctica del profesor. Esto con la finalidad que el profesor pueda conocer las potencialidades, ventajas y limitaciones de las herramientas y las pueda valorar, tanto para su trabajo en el Seminario como fuera de este.

Momento 2: ¿Cómo se construye un Libro GeoGebra?

En este momento se atiende a la tarea de realizar un análisis técnico-digital de una actividad de confrontación de significados geométricos, construida utilizando un Libro GeoGebra.

En primera instancia se accede al Libro GeoGebra a través del sitio web de GeoGebra⁹ y se identifican las principales áreas del libro (ver imagen 3.3): portada (título, autor, fecha de publicación, imagen, resumen y tabla de contenidos), barra de navegación, capítulos y hojas.



Imagen 3.3: Áreas principales de un Libro GeoGebra.

Se explica que la manera de articular un Libro GeoGebra es a partir de Hojas dinámicas, por lo tanto es recomendable tener construidas tales hojas para su posterior articulación en el Libro GeoGebra. Ésta se realiza a partir de capítulos, los cuales se constituyen de Hojas dinámicas. Por lo tanto, se podrían incluir todas las Hojas dinámicas en el Libro GeoGebra y posteriormente crear los capítulos, realizando una asignación de las hojas en estos, o crear los capítulos y posteriormente ir agregando las hojas directamente a cada capítulo correspondiente.

⁹ Actividad de confrontación de significados geométricos, en cuando a la clasificación de cuadriláteros geogebra.org/m/P5s4gkbb

3.3.2. Sesión 03

En esta sesión se abordan las últimas dos tareas de la Etapa 2, apuntando a trabajar en el desarrollo del objetivo de la Etapa, en cuanto al apresto de la herramientas teórica a utilizar durante el Seminario, para el diseño de actividades. De manera adicional y, como consecuencia a las dudas que manifestaron los profesores en cuanto a la estructuración del Seminario, se presenta un esquema que muestra su Planeación general (Imagen 3.3), para explicar el propósito del este espacio académico, visto como un espacio de *desarrollo profesional docente*, donde uno de sus productos será el diseño de una actividad; y esclarecer las dudas que puedan surgir y aún puedan persistir en los profesores, respecto a este tema. Finalmente se retoma la actividad el último momento de la sesión 02 (momento 3) sobre el análisis técnico de la construcción de un Libro GeoGebra.

A continuación la focalización de los aspectos generales para esta sesión:

3.3.2.1. Objetivo de la Sesión 03

Ambientarse y comenzar a interactuar con elementos técnicos de la práctica docente, en específico con la planificación de actividades, empleando como estructura la THA.

3.3.2.2. Tareas de la Sesión 03

1. Presentación de la Planeación general del Seminario.
2. Análisis técnico-didáctico de la actividad de confrontación de significados geométricos, empleando la THA.
3. Configuración colaborativa de una THA para un contenido geométrico curricular en particular y articulación individual de tal THA en un LibroGeoGebra.

3.3.2.3. Trayectoria de la Sesión 03

Esta sesión fue planificada considerando la participación de:

- Una profesora (Abigail) y un profesor de primaria (Alberto).
- Dos profesoras de secundaria (Dina y Sabrina).
- Un estudiante de maestría en Matemática Educativa (Alejandro).
- Un miembro de la Comunidad GeoGebra (que, a su vez, es estudiante de maestría en Matemática Educativa, *coordinador* del Seminario e investigador principal del proyecto).

Momento 1: Presentación de la Planeación general del Seminario

Se presenta la Presentación de la Planeación general del Seminario, a través del esquema de la Imagen 3.3. La intención es mostrar el Seminario a los profesores, como un espacio de desarrollo profesional, en el cual se tiene contemplado discutir aspectos de innovación, disciplinares (matemáticos), de diseño, de integración digital, entre otros.



Tabla 3.3: Planeacion general del Seminario.

Momento 2: Análisis técnico-didáctico de la actividad como THA

Se presenta una actividad en los términos de la THA, es decir, objetivo, tareas y proceso hipotético. Esta actividad está construida a partir de los siguientes contenidos geométricos curriculares:

- **Contenido (antes del 2017):** clasificación de cuadriláteros con base en sus características (lados, ángulos, diagonales, ejes de simetría, etc.).
- **Contenido (después del 2017):** construir triángulos y cuadriláteros para analizar sus características geométricas (comparación de lados, ángulos, paralelismo, perpendicularidad y simetría).

Objetivo: Confrontar conocimientos geométricos escolares con significados no usuales del saber geométrico, mediante el cuestionamiento de la clasificación de cuadriláteros, empleando la tecnología digital (GeoGebra) como herramienta de análisis epistémico de los objetos geométricos.

Tarea₁: Analizar diferentes formas de clasificar cuadriláteros.

Proceso hipotético₁:

1. Para abrir la actividad, se muestran varios cuadriláteros y se propone enunciar la clasificación de cuadriláteros, considerando las propiedades a tener en cuenta para proponer la clasificación.

2. Se espera que los participantes enuncien diferentes clasificaciones, algunos tomando como parámetro los ángulos, otros los lados, otros combinando ambos criterios.
3. Luego de exponer las clasificaciones de los participantes, se muestra la que propone Euclides en los Elementos.
4. Se espera que la presentación de la clasificación de Euclides, de estilo particional, confronte las clasificaciones que han propuesto los participantes, que se esperan sean de tipo jerárquica.
5. Finalmente se presenta un esquema de clasificaciones particionales y jerárquicas, a partir de la cual se discute la validez y pertinencia de cada una de ellas.

Tarea₂: Analizar la importancia de construir en geometría, como un generador de invariantes (propiedades).

Proceso hipotético₂:

1. Se propone a los participantes que seleccionen una clasificación de cuadriláteros, atendiendo su tipo y propiedades, para construir los cuadriláteros en un ambiente de GD.
2. Se propone el siguiente procedimiento para llevar a cabo la construcción, teniendo en cuenta las particularidades del ambiente:
 - a) Identificar las propiedades características de cada cuadrilátero.
 - b) Reflejar tales propiedades en su proceso de construcción.
 - c) Emplear la prueba del arrastre para corroborar que las propiedades identificadas en el primer punto permanecen invariante.
3. Luego, los asistentes muestran al resto del curso una de sus construcciones, para evaluar qué tan representativa es ésta, respecto de la clasificación declarada *a priori*.
4. Se espera que las construcciones presentadas manifiesten propiedades y comportamientos propios de objetos de una clasificación jerárquica, aún cuando los asistentes se hayan propuesto construir objetos representativos de una clasificación particional. Esto se debe a que el proceso de construcción se obviaron las consideraciones que descartarían ciertos casos, para así manifestar sólo un cuadrilátero en la construcción.

Tarea₃: Analizar propiedades dinámicas de los objetos geométricos construidos.

Proceso hipotético₃:

1. En esta tarea se pretende aunar las conclusiones obtenidas en la Tarea₁ y la Tarea₂, para analizar las particularidades de trabajar en un ambiente de GD.
2. Se presentan dos cuadrados en apariencia idénticos, a los cuales se le puede aplicar la prueba del arrastre en dos de sus vértices.

3. Se insta a los participantes a que exploren tales construcciones y mencionen cuáles son sus diferencias y similitudes.
4. Se espera que puedan reconocer que ambas construcciones corresponden a cuadrados, aunque uno admite transformaciones isomórficas y el otro admite transformaciones homomórficas.
5. Valorar el rol de la tecnología digital, en particular los ambientes de geometría dinámica, en el estudio de objetos geométricos y en particular en la tarea de clasificación y construcción, considerando las propiedades dinámicas.

Momento 3: Configuración colaborativa de una THA para contenido geométrico específico

Luego de revisar la actividad como una THA, se propone un contenido geométrico para construir, de manera colaborativa, una THA para tal contenido. El contenido a tratar está relacionado con la noción matemática de *ángulo*, debido a sus diversas maneras de interpretarlo y concebirlo.

En este momento se impulsa una discusión en cuanto al uso del Marco curricular (contenidos curriculares) por parte de los profesores. Para ello se comparten dos citas que hablan del rol del profesor respecto al currículo, visto como un ejecutor técnico (desde una mirada oficial) y como un profesional de la educación (desde una mirada no oficial) (Fuglestad y otros, 2010), y la necesidad de reformas curriculares (Robinson, Febrero de 2010).

Producto de esta discusión se espera que los profesores puedan concebir la importancia en realizar una propia interpretación del currículo, y en particular de los contenidos curriculares, así como también comprender que los Planes y Programas son una interpretación del marco curricular, el cual es desarrollado como recomendación para los profesores, no una imposición.

Luego de esta discusión se pasa a articular, de manera colaborativa, la THA del contenido geométrico curricular propuesto a los profesores, de la siguiente forma:

1. Se parte de realizar una interpretación consensuada del contenido, para determinar el objetivo de la actividad.
2. A continuación, se identifican las tareas que los estudiante deberían realizar para lograr el objetivo.
3. Finalmente, para cada tarea se elabora su proceso hipotético, con base en la experiencia de los docentes y sus consideraciones matemáticas, didácticas y pedagógicas.

Momento 4: Articulación de una actividad en un LibroGeoGebra, a partir de la THA configurada

En este momento se pide a uno de los profesores que pase al computador que se está proyectando y guíe el proceso de construcción del LibroGeoGebra, en el cual se articulará la THA configurada de manera colaborativa.

Como producto de esta actividad, cada profesor tendrá en su perfil de GeoGebra.org un LibroGeoGebra en el cual estará articulada la THA configurada de forma colaborativa. El

contenido del Libro será el mismo para todos los profesores, propiciando un piso mínimo de conocimientos sobre la herramienta digital y la construcción grupal de esta, en donde todos tengan la posibilidad de participar, guiando la construcción, opinando y argumentando sobre cómo debería ser esa construcción e incluso validando el procedimiento grupal.

Este momento se aprovecha para explorar la herramienta digital HTD y LibroGeoGebra, lo cual era una tarea de la sesión 02 y que debido a su desarrollo, no se llevó a cabo de manera plena.

Como última tarea, se muestra el procedimiento para descargar una HTD y un LibroGeoGebra desde el sitio GeoGebra.org.

3.4. Confrontación

En esta etapa se trabaja en la confrontación y resignificación de nociones geométricas, mediante el análisis y discusión de diferentes diseños de confrontación.

3.4.1. Sesión 04

En esta sesión se retoma el último momento de la que sesión 03 (momento 4), que por motivos de tiempo no se llevó a cabo en la sesión 03. Por lo tanto, la primera tarea de la sesión 04 permite abordar de manera completa la tarea 3 de la sesión 03.

En cuanto a las tareas de la Etapa 3, se abordan las primeras dos, apuntando a que los profesores experimenten dos instancias de confrontación, primero al resolver una actividad y luego al analizar la racionalidad y la fundamentación de tal diseño.

A continuación la focalización de los aspectos generales para esta sesión:

3.4.1.1. Objetivo de la Sesión 04

Explorar la herramienta Libro GeoGebra mediante la articulación de una THA y experimentar distintas instancias de confrontación.

3.4.1.2. Tareas de la Sesión 04

1. Articulación individual en un Libro GeoGebra de la THA elaborada de manera colaborativa en la sesión 03.
2. Resolución de un extracto de una actividad de confrontación de significado geométricos.
3. Análisis de una actividad de confrontación, para identificar la racionalidad de sustenta la articulación de la actividad, fundamentados en resultados de investigación.

3.4.1.3. Trayectoria de la Sesión 04

Esta sesión fue planificada considerando la participación de:

- Una profesora (Abigail) y un profesor de primaria (Alberto).
- Dos profesoras de secundaria (Dina y Sabrina).
- Un estudiante de maestría en Matemática Educativa (Alejandro).
- Un miembro de la Comunidad GeoGebra (que, a su vez, es estudiante de maestría en Matemática Educativa, *coordinador* del Seminario e investigador principal del proyecto).

Momento 1: Articulación de una actividad en un Libro GeoGebra, a partir de la THA configurada

Este momento corresponde a la última parte que estaba planeada para la sesión 03. Por lo tanto, el primer momento de la sesión 04 es homólogo al *momento 4: Articulación de una actividad en un Libro GeoGebra, a partir de la THA configurada*, de la sesión 03.

Es importante notar que la THA configurada de manera colaborativa en la sesión 03, se fue delineando de manera natural para una actividad sin contemplar el uso de herramientas digitales. Esto provocó una especie de confrontación en los profesores, quienes se percataron que al articular la THA en un Libro GeoGebra, necesitaban adecuarla para que pudiera funcionar en este recurso digital.

En este caso, los profesores vivieron un atisbo del segundo momento en el devenir histórico de la investigación educativa con tecnología (ver sección 2.4.1), en la cual se piensa cómo adecuar los aparatos teóricos desarrollados para ambientes análogos, para utilizarlos ahora en ambientes digitales.

La presente investigación se ha planteado el desafío de responder a el tercer momento del devenir histórico de la investigación educativa con tecnología, esta es, atendiendo los aspectos propios de cada ambiente, ya sean digitales o análogos, puesto que reconocemos la complementariedad de estos ambientes, y que de manera natural al atender a las necesidades educativas personales y de nuestra comunidad, se constituye un ambiente híbrido de aprendizaje, donde no hay restricciones artificiales en el uso de uno u otro ambiente, sino que esto es regulado por las potencialidades y las limitaciones de cada uno de ellos. En definitiva, para la Etapa 4 proponemos una hibridación entre lo digital y análogo, por lo que es necesario atender a sus especificidades, ya no a la adaptación de una a la otra.

En síntesis, en este momento se continúa con la adaptación de la THA construida para un ambiente análogo, hacia un ambiente digital (Libro GeoGebra), con el propósito de evidenciar el contraste entre adaptar un resultado y atender lo específico de cada ambiente.

Momento 2: Desarrollo de una actividad de confrontación

En este momento se les plantea a los profesores resolver una actividad que involucra la construcción de cuadriláteros, previa identificación de sus propiedades características. La actividad propone que se seleccione un cuadrilátero para ser construido, y luego se sigan los siguientes pasos para desarrollar su construcción en un ambiente de geometría dinámica:

1. Identificar las propiedades características de cada cuadrilátero.
2. Reflejar tales propiedades en su proceso de construcción.
3. Emplear la prueba del arrastre para corroborar que las propiedades identificadas en el punto 1 permanecen invariante.

Cabe destacar que los profesores ya han sido introducidos a la idea de la *prueba del arrastre* (Arzarello y otros, 2002). Aunque de igual forma se recuerda su funcionamiento.

Se espera que los profesores puedan tener dificultades para reflejar las propiedades del cuadrilátero escogido identificadas *a priori*, lo cual provoque que el polígono no pase la prueba del arrastre.

Esto debido a lo persistente del significado contemplativo que impera en el tratamiento escolar de las propiedades de los polígonos y la escasa posibilidad de manipular de manera concreta, a los objetos geométricos durante su estudio.

De esta manera se espera que los profesores puedan sentir que sus significados asociados a la noción de cuadrilátero y sus propiedades, son insuficientes para desarrollar la actividad. Lo cual los mueva a revisar el proceso de construcción realizado y mejorarlo, de tal suerte que este proceso adquiriera relevancia para ellos, en el trabajo geométrico.

Momento 3: Análisis de un actividad de confrontación

En este momento se analiza la actividad, atendiendo las instancias de confrontación propiciadas en cada una de sus tres tareas:

Tarea₁: Analizar diferentes formas de clasificar cuadriláteros.

Tarea₂: Analizar la importancia de construir en geometría, como un generador de invariantes (propiedades).

Tarea₃: Analizar propiedades dinámicas de los objetos geométricos construidos.

En la Tarea₁ se tiene la intención de contrastar la percepción de unicidad de la clasificación de cuadriláteros que fomenta el tratamiento escolar de los polígonos, basado en la exposición y contemplación; con una variedad de clasificaciones distintas, según su criterio de clasificación o uso: clasificaciones según segmentos o tipo de ángulos; clasificaciones jerárquicas o particionales, según usen definiciones incluyentes o excluyentes respectivamente.

La Tarea₂ tiene como finalidad, ahondar en los efectos del estudio contemplativo de los objetos geométricos, en este caso, ejemplificado en la evocación de propiedades de un cuadrilátero y la importancia del su proceso de construcción para *asignarle* tales propiedades.

Finalmente, la Tarea₃ pone atención en las características de los objetos geométricos, al trabajar en un ambiente de geometría dinámica. Las cuales están relacionadas con la manera en que se construye el objeto y permiten cuestionar la posibilidad de ampliar los criterios de clasificaciones de cuadriláteros.

Para concluir este momento, se indica el modo en que influye la literatura especializada en cada una de estas tareas:

1. Para contrastar el significado escolar de la clasificación de cuadriláteros, se investigó en dos obras especializadas en temas de definición y clasificación de polígonos, y en especial de cuadriláteros.

En el libro *The Classification of Quadrilaterals. A Study of Definition* (Usiskin

y otros, 2008) realizan una revisión de 86 textos estadounidenses de geometría para el nivel *high school*, para identificar y clasificar los tipos de definiciones de cada cuadrilátero (cuadriláteros en general, paralelogramos, trapecoides, rectángulos, trapecios isósceles, deltoides, romboides y rombos, cuadrados y cuadriláteros cíclicos), lo cual les permite analizar las definiciones que son equivalentes o no, para proponer clasificaciones parciales. Finalmente, y a la luz de lo anterior, realizan el ejercicio de proponer diferentes clasificaciones de cuadriláteros, según los tipos de clasificación y las propiedades empleadas como criterio.

Este libro permitió reconocer la amplia gama de clasificaciones y definiciones de cuadriláteros, las cuales podían ser mencionadas por los profesores al momento de pedirles que mencionaran cuál es *la* clasificación de cuadriláteros, aludiendo a la existencia de una única clasificación, como lo promueve el tratamiento escolar.

Del libro *Some Adventures in Euclidean Geometry* (de Villiers, 2009) tomamos en cuenta que el tipo de clasificación que a emplear, depende del uso que se le dé. Por ejemplo, el tipo de clasificación jerárquica se emplea por razones económicas, es decir, si el cuadrado es un caso particular del rectángulo, todos los teoremas demostrados para los rectángulos también sirven para los cuadrados. Este fue un argumento para comunicar a los profesores la existencia, importancia y usos de los tipos de clasificaciones.

2. La importancia del proceso de construcción en el trabajo geométrico, fue un resultado obtenido a partir del análisis del Libro I de los Elementos (Euclides, 1991), en el que el autor se da a la tarea de demostrar (con el paradigma de rigor de la época) 48 proposiciones. En la mayoría de ellas, se menciona una etapa de construcción de la situación geométrica, para luego pasar a reflexionar sobre lo construido.
3. Leung (2015) menciona que «los objetos geométricos mantienen todas las propiedades de acuerdo a las cuales fueron construidos (en un ambiente dinámico) y todas las consecuencias de la construcción que conlleva de la geometría euclidiana». Esto quiere decir, que los objetos geométricos tendrán ciertas propiedades que son generadas durante su proceso de construcción. Una afirmación que contrasta con la tradición escolar contemplativa, respecto de la geometría.

Al considerar el ambiente dinámico, los objetos geométricos construidos allí heredan cualidades dinámicas, las cuales inciden en sus comportamientos y propiedades (?). Ambas consideraciones de los objetos de la geometría dinámica, permiten hacer la propuesta de considerar las propiedades dinámicas para ampliar y robustecer la clasificación de cuadriláteros.

3.4.2. Sesión 05

A partir de una actividad que quedó pendiente de la Sesión 04, sobre la construcción de un trapecio, se añadió una tarea a la Sesión 05 para abordar la construcción geométrica del trapecio en un ambiente de geometría dinámica y, además, hacer la entrega de esta tarea en un Grupo GeoGebra, aprovechando la instancia para explorando este ambiente. En cuanto a las tareas de la Etapa 3, se aborda la última tarea sobre analizar una actividad de confrontación para ser aplicada con estudiantes, la cual es parte de una investigación ya concluida.

A continuación la focalización de los aspectos generales para esta sesión:

3.4.2.1. Objetivo de la Sesión 05

Explorar el ambiente Grupos GeoGebra mediante la entrega de una tarea allí y analizar una actividad producida desde la investigación, para distinguir los diversos significados matemáticos asociados a la noción de ángulo y cómo esta situación es una fuente de confrontación.

3.4.2.2. Tareas de la Sesión 05

1. Realizar la construcción de un trapecio en el ambiente de geometría dinámica de GeoGebra, para luego reportar tal actividad en el Grupo GeoGebra dispuesto para el Seminario.
2. A partir de la conferencia de Araceli Rotaeché sobre su investigación de maestría acerca de los significados del ángulo y la angularidad (Rotaeché y Montiel, 2017), establecer un diálogo sobre las consideraciones para elaborar su diseño.

3.4.2.3. Trayectoria de la Sesión 05

Esta sesión fue planificada considerando la participación de:

- Una profesora (Abigail) y un profesor de primaria (Alberto).
- Dos profesoras de secundaria (Dina y Sabrina).
- Una investigadora, que es doctora en Matemática Educativa (Xisela).
- Una estudiante de doctorado en Matemática Educativa (Rosa).
- Un estudiante de maestría en Matemática Educativa (Alejandro).
- Un miembro de la Comunidad GeoGebra (que, a su vez, es estudiante de maestría en Matemática Educativa, *coordinador* del Seminario e investigador principal del proyecto).

Momento 1: Reporte de una actividad en Grupo GeoGebra

En primer lugar se solicita a los miembros del Seminario que se matriculen en el Grupo GeoGebra del Seminario, llamado Seminario de IDPDM, ingresando el código **RMABX** en geogebra.org/groups.

Luego, el coordinador del Seminario crea una tarea en el Grupo GeoGebra desde cero, para que así todos puedan ver cómo se realiza esto. Cuando la tarea ya está creada, los otros miembros del Seminario desarrollan la tarea de construir un trapecio en el ambiente de geometría dinámica de GeoGebra a partir de las siguientes instrucciones:

1. Identificar las propiedades del trapecio rectángulo.
2. Llevar a cabo esas propiedades a través de un proceso de construcción.
3. Aplicar la prueba de arrastre.

Luego que se registren las tareas, se explora el ambiente de evaluación que disponen los Grupos GeoGebra, en los cuales se puede dar retroalimentación de manera privada o pública, evaluar las tareas como no iniciadas, en curso, listo y completo, entre otras características¹⁰.

Momento 2: Conferencia de la maestra Araceli Rotaeché

Desde la postura de resignificación y confrontación que se expuso en la sección 2.4.3, algunas investigaciones muestran que los profesores pueden vivir momentos de confrontación y resignificación respecto al saber matemático, en diferentes ocasiones del ámbito educativo. Por ejemplo, al resolver una actividad, al analizar un fragmento de un diseño o el diseño completo o al elaborar una diseño.

En este momento se pretende que, a través de la conferencia de la maestra Rotaeché, los miembros del Seminario puedan vivir un momento de confrontación de significados asociados al ángulo, y también de resignificación mediante la propuesta de angularidad de la autora.

La conferencia esta planteada en las siguientes partes:

1. Motivación del diseño.
2. Revisión bibliográfica del tema (ángulo).
3. Elaboración del diseño y materiales.

Con cada una de las partes de la conferencia esta pensada para que, en primer lugar, se visualice la práctica del docente de aula como una fuente para plantear problemáticas susceptibles de ser investigadas, las cuales consideramos, tienen sobre todo el valor de responder a la realidad del aula y de los estudiantes reales.

A partir de la problemática identificada, que motiva la investigación y posterior elaboración del diseño, el tema central de ella, en este caso el ángulo, orienta una revisión de literatura

¹⁰Para revisar con más detalles las características de los Grupos GeoGebra se sugiere visitar el Libro GeoGebra ggbm.at/Ucar7PHU

especializada al respecto, para saber qué se ha investigado al respecto, cómo se ha hecho y, quizá lo más relevante para el proceso de investigación, que aspectos aún no se han investigado, lo cual guía las siguientes fases de la propia investigación.

Finalmente se espera que se muestre la manera en que los resultados de investigación recabados en la revisión bibliográfica, fundamentan la elaboración del diseño y los materiales asociados a él.

3.5. Elaboración del diseño

En esta etapa, en primera instancia, se trabaja en la configuración de proceso de negociación que se dará para la elaboración de los diseños. En segundo lugar, se dará paso a la planeación de los diseños usando la THA, para luego confeccionar cada diseño en su respectivo Libro GeoGebra y los materiales asociados al diseño, tendiendo a la hibridación de los espacios concretos y digitales.

3.5.1. Sesión 06

En cuanto a las tareas de la Etapa 4, se aborda la primera tarea respecto de la comunicación de los resultados de investigación sobre cada contenido geométrico curricular que reportaron los profesores al comienzo del seminario.

El proceso de búsqueda y comunicación de los resultados de investigación se realizó de la siguiente manera:

- En la etapa de Introducción, cada profesor escogió un contenido de geometría del Bloque V (mayo-junio), el cual tenía planeado abordar con sus estudiantes.
- Los profesores registraron el contenido que cada uno escogió en el aula virtual del Seminario.
- Con esa información, el estudiante de maestría realizó una búsqueda de literatura especializada que abordara específicamente los temas reportados por los profesores, siguiendo los siguientes parámetros, los cuales fueron consensuados entre la investigadora en Matemática Educativa, el estudiante de maestría y el coordinador del Seminario:
 - Buscar en revistas con tradición en publicación de investigaciones relacionadas con diseños, como las del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)¹¹, The Journal of Mathematical Behavior¹², Mathematical Thinking and Learning¹³, entre otros.
 - Buscar *enseñanza y aprendizaje* del contenido respectivo, en títulos, resúmenes o palabras claves.
 - Filtrar la búsqueda de los resultados de 2010 a la fecha.
 - Con los que hayan pasado los filtros anteriores, discriminarlos según los siguientes criterios:
 1. Que se mencione que se trabajó en algún ambiente de GD, o que explícitamente se mencione el nombre de *software* de GD, como GeoGebra, Cabri-Géomètre, The Geometer's Sketchpad®, entre otros.

¹¹Sitio web del NCTM: jstor.org/publisher/nctm

¹²Sitio web The Journal of Mathematical Behavior: journals.elsevier.com/the-journal-of-mathematical-behavior

¹³Sitio web de la revista Mathematical Thinking and Learning: tandfonline.com/toc/hmtl20/current

2. Que se hable del proceso de aprendizaje, es decir, de la manera que los estudiantes actuaban, reflexionaban o realizaban acciones durante el desarrollo de las tareas.
 3. Que se mencionen dificultades al trabajar cierto concepto geométrico en ambientes de GD, o que se reportaran confrontaciones de significados geométricos.
- Finalmente se seleccionó un artículo para cada contenido y se elaboró una estrategia para comunicar los resultados de las investigaciones a todos el en Seminario, centrándose en los profesores.

La estrategia se pensó para comunicar los resultados en un lenguaje común entre los profesores y los investigadores, cuidando de evitar términos muy rebuscados de la jerga investigativa, que pudieran dificultaran el entendimiento de los resultados por todos los participantes del Seminario. De esta manera se toma la estructura base de una investigación, los cuales se expresan como preguntas relacionadas con el quehacer docente:

Problemática	→	¿Por qué enseñar <i>concepto respectivo</i> ?
Revisión bibliográfica (Antecedentes)	→	¿Qué se sabe al respecto?
Planteamiento	→	Nuevas preguntas y cómo responderlas
Fundamentos (teoría, conceptos, modelos) y metodología	→	¿Qué y cómo lo estudiamos?
¿Método?	→	Instrumento escrito
Resultados, discusión y conclusiones	→	¿Qué sabemos ahora?

Tabla 3.4: Estrategia de comunicación de resultados de investigación

- Otro aspecto de la comunicación de los resultados de investigación es que se omitió el nivel o grado escolar en el cual se aplicó el instrumento que reportaba cada investigación. Esto se decidió para evitar la posible interpretación respecto de que el resultado que se estaba comunicando, sólo tenía sentido en el nivel escolar respectivo, el cual podía no coincidir con el nivel para el cual se iba a elaborar el diseño.
- Finalmente se elaboró una presentaciones por cada contenido, para la comunicación de los resultados de investigación respectivamente.

Los contenidos geométricos curriculares que reportaron los profesores, correspondientes al bloque V (mayo-junio), del marco curricular vigente en el Estado de México el año 2017 fueron:

- 5to de primaria: Distinción entre círculo y circunferencia; su definición y diversas formas de trazo. Identificación de algunos elementos importantes como radio, diámetro y centro.
- 6to de primaria: Armado y desarmado de figuras en otras diferentes. Análisis y comparación del área y el perímetro de la figura original, y la que se obtuvo. Uso del tangram.
- 1ro de secundaria: Resolver problemas que impliquen el cálculo de áreas de diversas figuras planas
- 2do de secundaria: Determinar las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras. Construir y reconocer diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y traslación de figuras.

Además, en respuesta al proceso de negociación en el cual se van a elaborar los diseños, se realiza una recapitulación del Seminario, para resaltar los aspectos ya trabajados que van a aportar en esta etapa.

De esta manera se focalizaron de los aspectos generales para esta sesión:

3.5.1.1. Objetivo de la Sesión 06

Comunicar las bases del proceso de negociación para la elaboración de los diseños, que se fueron construyendo a lo largo de todo el Seminario, además de comenzar con la comunicación de los resultados de investigación para cada contenido geométrico curricular reportado.

3.5.1.2. Tareas de la Sesión 06

1. Recapitulación del Seminario.
2. Comunicación de significados curriculares identificados.
3. Comunicación de resultados de investigación.

3.5.1.3. Trayectoria de la Sesión 06

Esta sesión fue planificada considerando la participación de:

- Una profesora (Abigail) y un profesor de primaria (Alberto).
- Dos profesoras de secundaria (Dina y Sabrina).
- Una investigadora, que es doctora en Matemática Educativa (Xisela).
- Un estudiante de maestría en Matemática Educativa (Alejandro).
- Un miembro de la Comunidad GeoGebra (que, a su vez, es estudiante de maestría en Matemática Educativa, *coordinador* del Seminario e investigador principal del proyecto).

Momento 1: Recapitulación del Seminario

Debido a que en esta sesión comienza la etapa más relevante del Seminario y donde se invertirá más tiempo, se presenta una recapitulación del trabajo ya realizado en el Seminario. Se comienza recordando la planificación general del Seminario y sus cinco etapas; luego se mencionan los recursos técnicos (GeoGebra y la THA) trabajados en la etapa de Apresto técnico; y de la etapa de Confrontación se recuerdan las distintas instancias en las cuales los profesores han podido confrontar significados geométricos (al resolver una actividad, al analizar una actividad y al estudiar un diseño para ser aplicado con estudiantes).

Momento 2: Comunicación de significados curriculares identificados

En respuesta a una tarea dejada en sesiones anteriores, se pide a cada uno de los profesores que puedan compartir cuáles son los significados escolares que encontraron asociados al contenido que reportaron. Para ello se les sugirió que buscaran en libros de texto, marco curricular, planes y programas y otros instrumentos oficiales.

Momento 3: Comunicación de resultados de investigación

En este momento la investigadora en Matemática Educativa comunica los resultados de investigación encontrados para el contenido de transformaciones geométricas, correspondiente a 2do de secundaria.

El artículo del cual se comunican los resultados de investigación es de H. Bahadır Yanik (2014). Middle-school students' concept images of geometric translations. *The Journal of Mathematical Behavior*, Volume 36, December 2014, Pages 33-50, ISSN 0732-3123, doi: 10.1016/j.jmathb.2014.08.001 La comunicación de los resultados se realiza con base en la estrategia presentada en la tabla 3.4 y mediante la presentación correspondiente¹⁴

¹⁴Para ver la presentación sobre la comunicación de resultados de investigación asociada a transformaciones geométricas, ingresar a bit.ly/2yjsTfE

3.5.2. Sesión 07

En esta sesión se abordan las primeras dos tareas de la Etapa 4, apuntando a trabajar en el desarrollo del objetivo de la Etapa, en cuanto a completar la tarea de comunicar de los resultados de investigación, y a presentar el proceso de negociación que servirá de marco para la elaboración de cada una de las partes de los diseños.

Por otra parte, debido a discusiones sobre el rol del docente frente al marco curricular, se decidió añadir un momento de discusión sobre la autonomía docente, ya que desde las fundamentaciones teóricas del diseño del Seminario se ha considerado al profesora como un profesional de la educación, donde una de sus facultades es poder implementar un desarrollo pedagógico personal, ya que cada profesor y profesora es el único expertos en su contexto situacional (grupo o curso). Así también, como parte de los polos del proceso de negociación, se incluye un momento para presentar diversas formas de uso de los ambientes de GD, lo cual está fundamentado en la Problematización de la geometría (ver la sección 2.2).

De esta manera se focalizaron de los aspectos generales para esta sesión:

3.5.2.1. Objetivo de la Sesión 07

Instalar la discusión sobre la autonomía de los profesores en su labor docente; explorar diversos usos de los ambientes de GD, para luego comunicar el proceso de negociación en el cual se enmarca la elaboración de los diseños, donde los ambientes son uno de sus polos; y completar la comunicación de los resultados de investigación.

3.5.2.2. Tareas de la Sesión 07

1. Propiciar la discusión sobre lo que conocemos por los estilos de aprendizaje y el uso en la enseñanza, para contrastarlo con una noticia donde científicos los tildan de neuromito. Esto con la intención de reflexionar sobre la autonomía de los profesores para discernir qué y cómo incluir en sus prácticas educativas, en favor del aprendizaje de sus estudiantes.
2. Exponer diferentes usos de los ambientes de GD que han sido reportados en la investigación.
3. Presentar el marco para la elaboración de los diseños, sus THA y sus materiales, llamado proceso de negociación, puesto que se pretende fomentar una dialéctica entre los resultados de investigación, la experiencia docente y la atención al ambiente de diseño.
4. Comunicar los resultados de investigación encontrados para los contenidos Círculo y circunferencia, y Área de polígonos.

3.5.2.3. Trayectoria de la Sesión 07

Esta sesión fue planificada considerando la participación de:

- Una profesora (Abigail) y un profesor de primaria (Alberto).

- Dos profesoras de secundaria (Dina y Sabrina).
- Un estudiante de maestría en Matemática Educativa .
- Dos estudiante de maestría en Matemática Educativa (Alejandro y Josué).
- Un miembro de la Comunidad GeoGebra (que, a su vez, es estudiante de maestría en Matemática Educativa, *coordinador* del Seminario e investigador principal del proyecto).

Momento 1: ¿Qué sabemos de los estilos de aprendizaje?

El coordinador recuerda al resto de los participantes que la sesión anterior (06) se comentó algo sobre la independencia o la autonomía que tiene el profesor para tomar decisiones, en un sistema educativo donde constantemente se realizan reformar sin consultarle al profesorado. Por lo que en esta sesión se preparó una discusión sobre la *autonomía docente*, y el tema utilizado para motivar la discusión corresponde a los estilos de aprendizaje y su uso en la labor docente.

En primer lugar se pregunta a los profesores *¿qué sabemos de los estilos de aprendizaje?*, esperando que los participantes den respuestas relacionadas con que todos los estudiantes (y las personas en general) tenemos distintos estilos de aprendizajes y que los profesores deberíamos potenciar el estilo de cada uno de nuestros estudiantes. Luego que los participantes den su opinión y argumentos, se muestra una cita de una nota del periódico *The Guardian* del 13 de marzo de 2017 titulada *Científicos instan a la comunidad educativa a olvidarse del “neuromito” de los estilos de aprendizaje*:

Enseñar a los niños de acuerdo con su “estilo de aprendizaje” no logra mejores resultados y debe ser abandonado por las escuelas en favor de la práctica basada en la evidencia. Científicos expertos en la materia aseguran que esta creencia es ineficaz, un desperdicio de recursos e incluso perjudicial, ya que podría perjudicar el potencial de los alumnos para aplicar o adaptarse a diferentes formas de aprendizaje¹⁵. (Weale, 2017, 13 de marzo)

La idea es contrastar lo que “se sabe” de los estilos de aprendizaje con la noticia de *The Guardian*, para concluir la necesidad de una practicar o buscar una docencia crítica, en el sentido de cuestionar y valorar los cambios que se imponen al docente desde escalafones superiores en el sistema educativo, que a veces responden a necesidades institucionales y corporativas, más que a las reales necesidades educativas de los estudiantes, las cuales manifiestan día a día en la sala de clases en la interacción con sus compañeros y sus profesores.

Se finaliza la discusión con la siguiente reflexión, la cual tiene como objetivo relativizar los aportes de las teorías (educativas, pedagógicas, didácticas, etc.) a los contextos situacionales de cada profesor, con miras a poder atender a las necesidades reales de los estudiantes, sin dejar de cumplir con los requerimientos oficiales:

¹⁵Traducción libre

Los profesores necesitamos ser críticos con estas tendencias en la Educación, ya que son perfectibles y dependen de la perspectiva con la cual se mire, si son útiles o no en su labor, y cómo se pueden utilizar.

Esto para poder ir preparando el camino de la discusión que se sostendrá en el proceso de negociación, puesto que los profesores han mostrado a veces que consideran que los resultados de investigación son absolutos, y la intención del diseño es que, en primer lugar puedan comenzar a cuestionar la pertinencia de los resultados de investigación para ser incluidos en su práctica docente, y en segundo lugar, que puedan poner al mismo nivel de los resultados de investigación su experiencia docente.

Momento 2: Ambientes de Geometría Dinámica

En consecuencia a considerar ambientes de diseños híbridos, atendiendo sus especificidades y cómo se relacionan, el coordinador aborda uno de los espacios que aportan a tal hibridación, a través de las particularidades de los AGD, dando respuesta a la pregunta *¿para qué me sirven lo ambientes de Geometría Dinámica?*. Tal respuesta se basa en los usos de los AGD reportados en la investigación, que se recogen en la la Problematización de la geometría, reportada en la sección 2.2. A continuación la lista de los usos de los AGD:

- Para explorar.
- Para probar.
- Para generar datos.
- Para construir.
- Para explorar.
- Para hacer evolucionar estrategias.
- Para generador de nuevas preguntas.
- Otros...

Se pretende recordar los usos que los mismos participantes del Seminario le han dado a los ambientes de GD en las actividades que desarrollaron en las etapas anteriores, y añadir otros, con el fin de ir dando forma al tercer polo del proceso de negociación y atender al propósito del Seminario en términos de integración digital.

Momento 3: Elementos para el diseño

Se presentan los polos del proceso de negociación, donde cada uno de ellos son relevantes para la elaboración de los diseños, considerando que se pretende acercar los resultados de investigación a la elaboración de diseños por parte de los profesores, y al mismo tiempo, que la experiencia docente sea una fuente de conocimiento que también intervenga en el diseño de las actividades, y por último, ampliar los ambientes de diseño desde los concretos, hacia los digitales, con el fin de abordar el propósito de integración digital del Seminario.

Para operacionalizar el proceso de negociación, se recuerda la THA que servirá como la estructura de planeación del diseño, para el cual es necesario identificar elementos que nos ayudarán a determinar la THA para nuestro contenido reportado:

1. Objetivo: generalmente se atiende a un objetivo más “grande” que el declarado curricularmente (en el mismo tiempo asignado).
2. Tareas: ¿Cuáles son los elementos importantes que se identificaron para lograr el objetivo?
3. Proceso hipotético: “si le propongo esto a los estudiantes, es probable que reacciones o respondan así”.

Luego de presentar el proceso de negociación en términos generales y la estructura a desarrollar para la elaboración de los diseños, se pasa a recordar la discusión sostenida la sesión anterior, cuando la investigadora en Matemática Educativa comunicó los resultados de investigación para el contenido de transformaciones geométricas, y las conclusiones de este proceso de negociación que estuvo fuertemente marcado entre los resultados de investigación y la experiencia docente.

Momento 4: Comunicación de resultados de investigación

Este momento se inicia cuando el coordinador del Seminario retoma el proceso de negociación y se pone de ejemplos los objetivos de cada uno de los polos, es decir, que la investigación tenía su propia objetivo, distinto del objetivo curricular que reportan los planes y programas de estudio. A su vez, ambos se pueden ser modificados si se abordan en ambientes digitales, específicamente de GD.

Por lo tanto, la idea es poder establecer una negociación entre lo que reporta la investigación, lo que los profesores saben debido a su vasta experiencia y las particularidades de abordar ciertos contenidos en ambientes de GD.

Luego, el estudiante de maestría que realizó la búsqueda de literatura, presenta los resultados de investigación para los contenidos reportados de círculo y circunferencia (5to de primaria), y área de polígonos. Esta última aborda tanto el contenido de conservación de áreas (6to de primaria) como el cálculo de áreas (1ro de secundaria).

Para los resultados de investigación asociado al área de polígonos es Kospentaris, G., Spyrou, P. y Lappas, D. (2011). Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics* 77(1), pp. 105-127. doi: 10.1007/s10649-011-9303-8

El artículo del cual se comunican los resultados de investigación para círculo y circunferencia es de LeAnn E. Neel-Romine, Sara Paul and Kathryn G. Shafer (2012). Get to Know a Circle. *Mathematics Teaching in the Middle School* 18(4), pp. 222-227. doi: 10.5951/mathteachmidscho.18.4.0222

La presentación de ambas investigaciones se realizan con base en la la estrategia de comunicación presentada en la tabla 3.4, para las cuales se elaboró una presentación para cada una ¹⁶

¹⁶Presentación sobre la comunicación de resultados de investigación asociada a conservación de áreas,

3.5.3. Sesión 08

En esta sesión se continua con el proceso de negociación, específicamente para determinar el objetivo de la THA para cada diseño, con atención al tercer polo respectivo a la atención al ambiente híbrido de diseño, el cual vislumbra que se de en espacios digitales (como los ambientes de GD) o espacios concretos (como materiales manipulables).

Para optimizar el tiempo de la sesión e invertirlo de manera equitativa en la discusión de los objetivos de los cuatro diseños, se propone a los participantes utilizar un cronómetro¹⁷ visible en todo momento, para utilizar el mismo tiempo en las cuatro discusiones, y así también moderar las participaciones personales siendo certeros y concisos en los comentarios. El tiempo a proponer para cada una de las discusiones es de 45 minutos.

3.5.3.1. Objetivo de la Sesión 08

Configurar colaborativamente una primera versión del objetivo de la THA de cada uno de los diseños a elaborar en el Seminario, en el marco del proceso de negociación entre los resultados de investigación, la experiencia docente y la atención al ambiente de diseño. Recordar los usos de los ambientes de GD reportados por la investigación.

3.5.3.2. Tareas de la Sesión 08

1. Recordar los diferentes usos de los ambientes de geometría dinámica, según se ha reportado en la investigación.
2. Configurar el objetivo de cada diseño, mediante un proceso de negociación entre el objetivo curricular asociado al contenido escogido, los resultados de investigación, la experiencia docente y la atención al ambiente de diseño (ver imagen 3.4). Cada proceso de negociación se lleva a cabo en un lapso de 45 minutos.

ingresar a bit.ly/2o2UVfQ

Presentación sobre la comunicación de resultados de investigación asociada a círculo y circunferencia, ingresar a bit.ly/2ABIFZB

¹⁷Se utiliza el cronómetro del sitio web [OnlineClock.net](https://www.onlineclock.net)

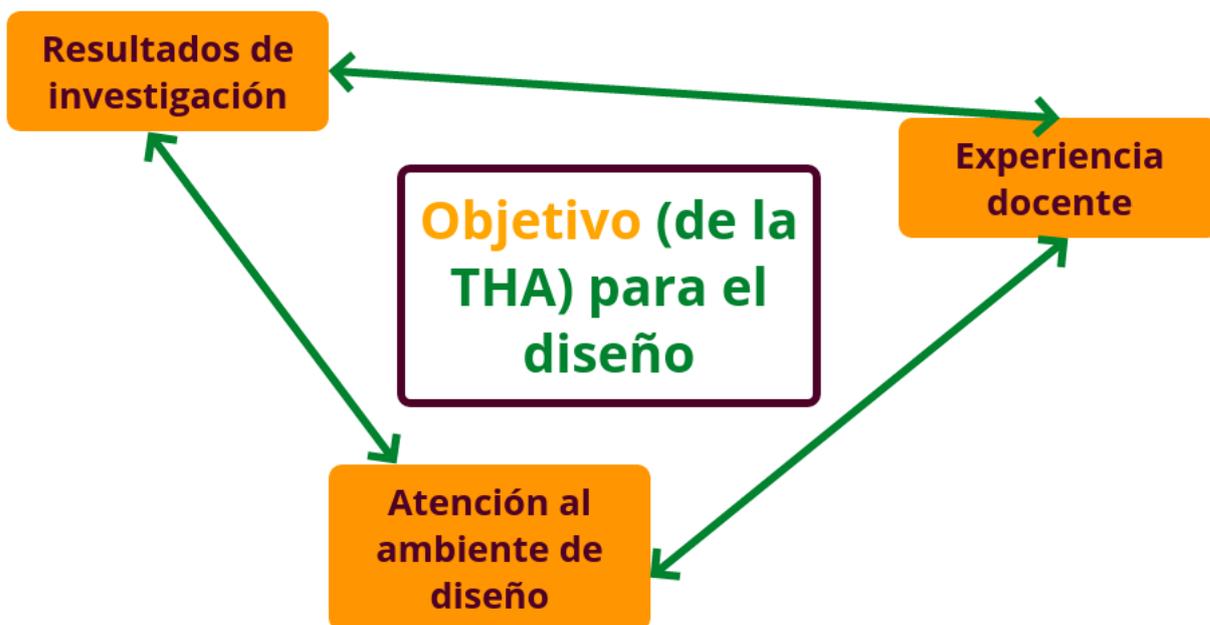


Imagen 3.4: Proceso de negociación para la configuración del objetivo de la THA

3.5.3.3. Trayectoria de la Sesión 08

Esta sesión fue planificada considerando la participación de:

- Una profesora (Abigail) y un profesor de primaria (Alberto).
- Dos profesoras de secundaria (Dina y Sabrina).
- Un estudiante de maestría en Matemática Educativa (Alejandro).
- Un miembro de la Comunidad GeoGebra (que, a su vez, es estudiante de maestría en Matemática Educativa, *coordinador* del Seminario e investigador principal del proyecto).

Momento 1: Información y propuestas

En este momento se comunica la dinámica de la sesión, así también se propone a los participantes el uso de cronómetro para optimizar el tiempo y se comunican las actualizaciones realizadas en el aula virtual, específicamente que se encuentran disponibles las presentaciones con las cuales se comunicaron los resultados de investigación e información sobre el nuevo Modelo Educativo.

Finalmente se vuelve a presentar los diferentes usos de los ambientes de GD, con el propósito de tenerlos frescos al momento de la negociación.

Momento 2: Configurar objetivo (de la THA) para diseño de Transformaciones geométricas

En primer lugar el coordinador configura el cronómetro en 45 minutos y se deja visible para todos los participantes del Seminario, con la intención de moderar el tiempo de la discusión.

Luego el coordinador da las indicaciones de cómo se llevará a cabo la discusión, teniendo en cuenta el proceso de negociación. A continuación se da la palabra al profesor que le corresponde el contenido de transformaciones geométricas para que pueda presentar su propuesta inicial de objetivo, con base en lo que recabó de la comunicación de los resultados de investigación, su experiencia docente y las consideraciones de los ambientes de diseño. Seguido de esta intervención, el resto de los participantes del Seminario realizará comentarios y sugerencias para robustecer el objetivo del diseño en discusión.

Momento 3: Configurar objetivo (de la THA) para diseño de Círculo y circunferencia

En primer lugar el coordinador configura el cronómetro en 45 minutos y se deja visible para todos los participantes del Seminario, con la intención de moderar el tiempo de la discusión.

Luego el coordinador da las indicaciones de cómo se llevará a cabo la discusión, teniendo en cuenta el proceso de negociación. A continuación se da la palabra al profesor que le corresponde el contenido de círculo y circunferencia para que pueda presentar su propuesta inicial de objetivo, con base en lo que recabó de la comunicación de los resultados de investigación, su experiencia docente y las consideraciones de los ambientes de diseño. Seguido de esta intervención, el resto de los participantes del Seminario realizará comentarios y sugerencias para robustecer el objetivo del diseño en discusión.

Momento 4: Configurar objetivo (de la THA) para diseño de Conservación de áreas

En primer lugar el coordinador configura el cronómetro en 45 minutos y se deja visible para todos los participantes del Seminario, con la intención de moderar el tiempo de la discusión.

Luego el coordinador da las indicaciones de cómo se llevará a cabo la discusión, teniendo en cuenta el proceso de negociación. A continuación se da la palabra al profesor que le corresponde el contenido de conservación de áreas para que pueda presentar su propuesta inicial de objetivo, con base en lo que recabó de la comunicación de los resultados de investigación, su experiencia docente y las consideraciones de los ambientes de diseño. Seguido de esta intervención, el resto de los participantes del Seminario realizará comentarios y sugerencias para robustecer el objetivo del diseño en discusión.

Momento 5: Configurar objetivo (de la THA) para diseño de Cálculo de área de polígonos

En primer lugar el coordinador configura el cronómetro en 45 minutos y se deja visible para todos los participantes del Seminario, con la intención de moderar el tiempo de la discusión.

Luego el coordinador da las indicaciones de cómo se llevará a cabo la discusión, teniendo en cuenta el proceso de negociación. A continuación se da la palabra al profesor que

le corresponde el contenido de cálculo de área de polígonos para que pueda presentar su propuesta inicial de objetivo, con base en lo que recabó de la comunicación de los resultados de investigación, su experiencia docente y las consideraciones de los ambientes de diseño. Seguido de esta intervención, el resto de los participantes del Seminario realizará comentarios y sugerencias para robustecer el objetivo del diseño en discusión.

3.5.4. Sesión 09

En esta sesión se continua con el proceso de negociación, específicamente en para determinar las tareas necesarias a realizar por los estudiantes para lograr el objetivo de la THA asociado a cada diseño, y el proceso hipotético asociado a cada tarea. También se continúa con el uso del cronómetro, para regular el tiempo utilizado para la discusión de cada diseño. El tiempo a proponer para cada una de las discusiones es de 45 minutos.

Se incluye un espacio para que los profesores puedan registrar en el Aula virtual, la primera versión del objetivo de la THA de sus diseños, y en caso que ya lo hayan registrado, revisar la versión para hacer mejoras.

Adicional a las tareas de la Etapa 4, se añade una reflexión sobre el funcionamiento de las comunidades digitales y la manera en que ellas mismas se van construyendo, usando el ejemplo de [Reveal.js](#) y su editor *online* [Slides.com](#). Se escoge esta herramienta debido a que todas las presentaciones utilizadas en el Seminario han sido construidas con esta ella. El motivo de instalar la discusión sobre el funcionamiento de las comunidades digitales y cuál es su cultura, radica en la importancia para la propuesta de integración digital que se esta desarrollando mediante el Seminario.

A continuación la focalización de los aspectos generales para esta sesión:

3.5.4.1. Objetivo de la Sesión 09

Asegurarse que quede registro en el Aula virtual, de la primera versión del objetivo de cada THA. Además, configurar colaborativamente una primera versión de las tareas y sus procesos hipotéticos, asociados al objetivo de la THA de cada uno de los diseños a elaborar en el Seminario, en el marco del proceso de negociación. Por otra parte, reflexionar sobre el funcionamiento de las comunidades digitales.

3.5.4.2. Tareas de la Sesión 09

1. Reflexionar sobre el funcionamiento de las Comunidades digitales y la manera en que ellas mismas se van construyendo.: (1) uso libre (o por lo menos gratuito); (2) constante actualización de la herramienta; (3) comunicación directa entre desarrolladores y usuarios, a través de redes sociales o sitio web.
2. Reportar o revisar en el Aula virtual, la primera versión del objetivo de la THA de cada diseño.
3. Identificar las tareas necesarias para lograr el objetivo de cada diseño, y el proceso hipotético asociado a cada una de ellas, en el marco del proceso de negociación (ver imagen 3.5). Cada proceso de negociación se lleva a cabo en un lapso de 45 minutos.

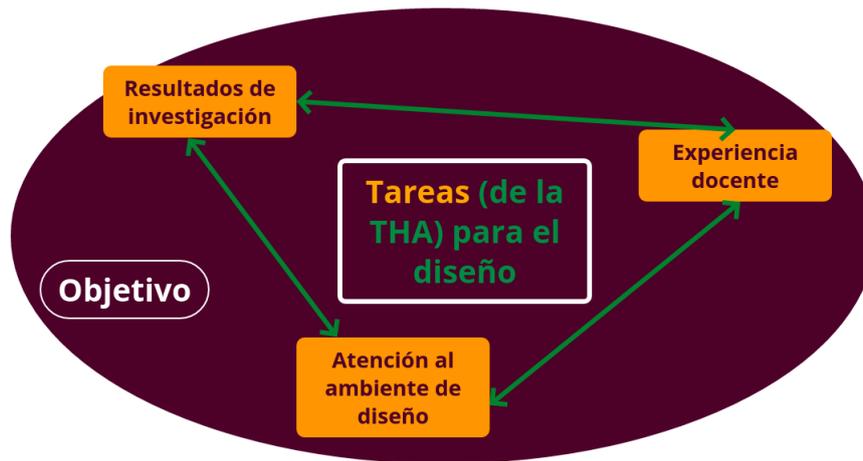


Imagen 3.5: Proceso de negociación para la configuración del objetivo de la THA

3.5.4.3. Trayectoria de la Sesión 09

Esta sesión fue planificada considerando la participación de:

- Una profesora (Abigail) y un profesor de primaria (Alberto).
- Dos profesoras de secundaria (Dina y Sabrina).
- Un estudiante de maestría en Matemática Educativa (Alejandro).
- Un miembro de la Comunidad GeoGebra (que, a su vez, es estudiante de maestría en Matemática Educativa, *coordinador* del Seminario e investigador principal del proyecto).

Momento 1: Reflexión sobre las comunidades digitales

El coordinador abre la sesión platicando del funcionamiento técnico del editor de presentaciones *online* Slides.com, con la intención de captar la atención de los participantes del Seminario, debido a las características de esta herramienta digital, como por ejemplo, la compatibilidad con todos los sistemas operativos y navegadores, a diferencia de otros *software* más populares para crear presentaciones.

Luego se dirige la reflexión hacia la manera en que una comunidad se organiza para construir, desarrollar y transformar esta tecnología, proceso a través del cual la misma comunidad va evolucionando. Este proceso comienza con la libre (o por lo menos, gratuita) disponibilidad de la tecnología, la cual está en constante actualización gracias a los comentarios de los usuarios y los intereses de los desarrolladores. Todo el proceso se ve potenciado gracias a la comunicación directa entre desarrolladores y usuarios, a través de redes sociales o sitios web.

Momento 2: Registro o revisión de la primera versión del objetivo de cada THA

En el Aula virtual se ha dispuesto un espacio para registrar la primera versión del objetivo de cada THA, los cuales fueron confeccionados colaborativamente durante la sesión 08. El coordinador propone a los participantes ingresar al Aula virtual y registrar el objetivo en caso de que no lo hayan hecho ya, o que lo revisen en caso contrario. Esto con la idea de recibir comentarios de parte de los miembros del Seminario, para ir refinando el objetivo de manera colaborativa y abierta.

Momento 3: Describir las tareas asociadas al objetivo de la THA para el diseño de Transformaciones geométricas

En primer lugar el coordinador configura el cronómetro en 45 minutos y se deja visible para todos los participantes del Seminario, con la intención de moderar el tiempo de la discusión.

Luego el coordinador da las indicaciones de cómo se llevará a cabo la discusión, teniendo en cuenta el proceso de negociación. A continuación se da la palabra al profesor que le corresponde el contenido de transformaciones geométricas para que pueda presentar su propuesta inicial de las tareas, con base en lo que recabó de la comunicación de los resultados de investigación, su experiencia docente y las consideraciones de los ambientes de diseño. Seguido de esta intervención, el resto de los participantes del Seminario realizará comentarios y sugerencias para robustecer la descripción de las tareas asociadas al objetivo del diseño en discusión.

Finalmente se configuran los procesos hipotéticos asociados a cada tarea descrita.

Momento 4: Describir las tareas asociadas al objetivo de la THA para el diseño de Círculo y circunferencia

En primer lugar el coordinador configura el cronómetro en 45 minutos y se deja visible para todos los participantes del Seminario, con la intención de moderar el tiempo de la discusión.

Luego el coordinador da las indicaciones de cómo se llevará a cabo la discusión, teniendo en cuenta el proceso de negociación. A continuación se da la palabra al profesor que le corresponde el contenido de círculo y circunferencia para que pueda presentar su propuesta inicial de las tareas, con base en lo que recabó de la comunicación de los resultados de investigación, su experiencia docente y las consideraciones de los ambientes de diseño. Seguido de esta intervención, el resto de los participantes del Seminario realizará comentarios y sugerencias para robustecer la descripción de las tareas asociadas al objetivo del diseño en discusión.

Finalmente se configuran los procesos hipotéticos asociados a cada tarea descrita.

Momento 5: Describir las tareas asociadas al objetivo de la THA para el diseño de Conservación de áreas

En primer lugar el coordinador configura el cronómetro en 45 minutos y se deja visible para todos los participantes del Seminario, con la intención de moderar el tiempo de la discusión.

Luego el coordinador da las indicaciones de cómo se llevará a cabo la discusión, teniendo en cuenta el proceso de negociación. A continuación se da la palabra al profesor que le

corresponde el contenido de conservación de áreas para que pueda presentar su propuesta inicial de las tareas, con base en lo que recabó de la comunicación de los resultados de investigación, su experiencia docente y las consideraciones de los ambientes de diseño. Seguido de esta intervención, el resto de los participantes del Seminario realizará comentarios y sugerencias para robustecer la descripción de las tareas asociadas al objetivo del diseño en discusión.

Finalmente se configuran los procesos hipotéticos asociados a cada tarea descrita.

Momento 6: Describir las tareas asociadas al objetivo de la THA para el diseño de Cálculo de área de polígonos

En primer lugar el coordinador configura el cronómetro en 45 minutos y se deja visible para todos los participantes del Seminario, con la intención de moderar el tiempo de la discusión.

Luego el coordinador da las indicaciones de cómo se llevará a cabo la discusión, teniendo en cuenta el proceso de negociación. A continuación se da la palabra al profesor que le corresponde el contenido de cálculo de área de polígonos para que pueda presentar su propuesta inicial de las tareas, con base en lo que recabó de la comunicación de los resultados de investigación, su experiencia docente y las consideraciones de los ambientes de diseño. Seguido de esta intervención, el resto de los participantes del Seminario realizará comentarios y sugerencias para robustecer la descripción de las tareas asociadas al objetivo del diseño en discusión.

Finalmente se configuran los procesos hipotéticos asociados a cada tarea descrita.

3.5.5. Sesión 10

Esta sesión está dispuesta para abordar la última tarea de la Etapa 4, respecto de elaborar el diseño en un Libro GeoGebra y confeccionar los materiales necesarios, ambos con base en la THA correspondiente. El ambiente de diseño se considera híbrido, puesto que los materiales pueden ser confeccionados en espacios concretos o digitales. En este último caso se usan diferentes recursos de la Comunidad GeoGebra, tales como ambiente de GD, Hoja dinámica y Libro GeoGebra.

Con el objetivo de aportar a la discusión respecto de la atención al ambiente de diseño, se invita al Seminario a dos estudiantes de posgrado en Matemática Educativa (uno de maestría y el otro de doctorado), quienes tienen experiencia en el uso de los recursos GeoGebra. De esta manera, la dinámica de trabajo del Seminario se adapta para potenciar la producción del diseño y los materiales, organizando parejas de trabajo constituidas por un profesor o una profesora junto con estudiante de posgrado en Matemática Educativa. Con esta organización se pretende propiciar que estén representados todos los grupos relevantes en el fenómeno de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas declarados al comienzo del diseño del Seminario, es decir, el profesorado, los investigadores y los representantes de la cultura digital (ver en la tabla 3.1).

A continuación la focalización de los aspectos generales para esta sesión:

3.5.5.1. Objetivo de la Sesión 10

Con base en cada THA, elaborar los materiales a utilizar en el diseño con sus estudiantes (Hoja de Trabajo Dinámico, Libro GeoGebra, Grupo GeoGebra, applet GeoGebra, material concreto, situaciones presenciales, entre otros).

3.5.5.2. Tareas de la Sesión 10

1. Comunicar la nueva dinámica de trabajo para la sesión, en respuesta al tipo de trabajo a realizar (confección de recursos, usando tanto diferentes modalidades de GeoGebra, como materiales concretos).
2. Recordar la manera en que el proceso de negociación ha influido en la configuración del objetivo, las tareas y sus procesos hipotéticos de la THA de cada diseño (ver imagen 3.6).
3. Trabajar en parejas para confeccionar los materiales asociados al diseño, y el diseño mismo en un Libro GeoGebra.

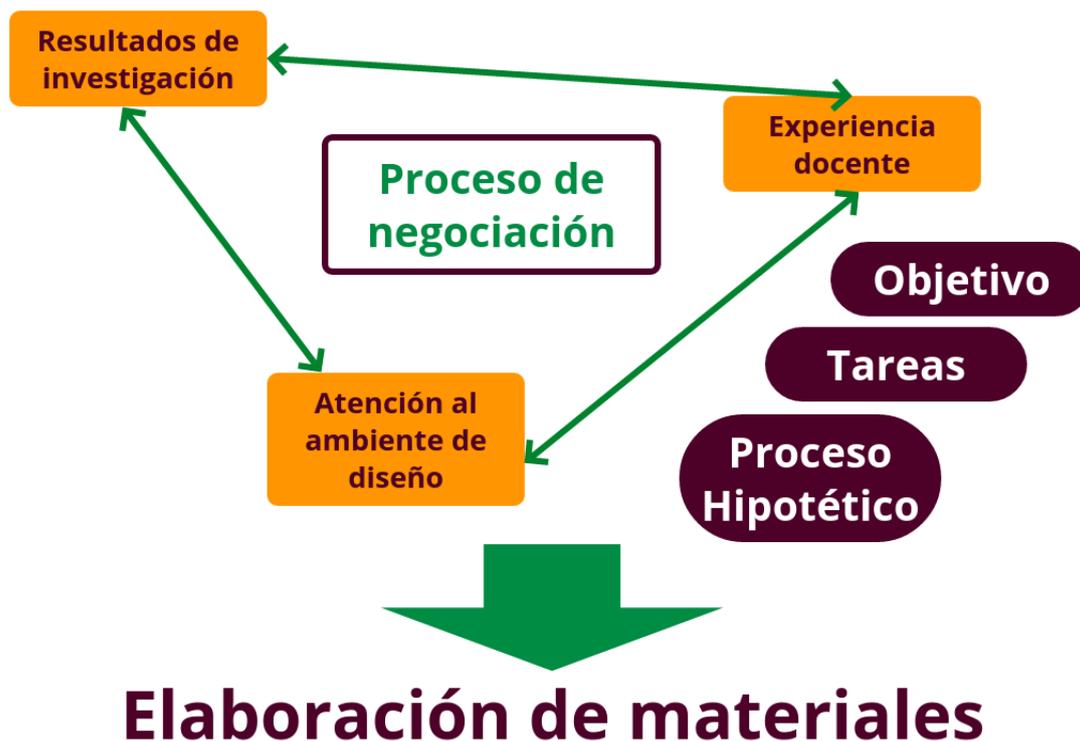


Imagen 3.6: Proceso de negociación para la elaboración de materiales.

3.5.5.3. Trayectoria de la Sesión 10

Esta sesión fue planificada considerando la participación de:

- Una profesora (Abigail) y un profesor de primaria (Alberto).
- Dos profesoras de secundaria (Dina y Sabrina).
- Un estudiante de maestría en Matemática Educativa (Alejandro y Josué).
- Un estudiante de doctorado en Matemática Educativa (Zaid).
- Un miembro de la Comunidad GeoGebra (que, a su vez, es estudiante de maestría en Matemática Educativa, *coordinador* del Seminario e investigador principal del proyecto).

Momento 1: Comunicación de la dinámica de trabajo para la sesión

El coordinador comienza la sesión presentando la nueva dinámica de trabajo para la presente sesión, en respuesta a la elaboración de los materiales en ambientes digitales de GeoGebra y el diseño en un Libro GeoGebra. De esta manera se introduce a dos estudiantes de posgrado en Matemática Educativa, donde uno es estudiante de maestría y ya nos había acompañado en la sesión 07 cuando se comunicaron resultados de investigación, y el otro es estudiante de doctorado, quien nos acompaña por primera vez en el Seminario. La dinámica consiste en trabajar en parejas para confeccionar el Libro GeoGebra que representa el diseño y la elaboración de los materiales asociados al mismo. Todas las

parejas están constituidas por un profesor o profesora junto a un estudiante de posgrado en Matemática Educativa, cuyo detalle se encuentra en la tabla 3.5.

(Sabrina) Profesora de 2do de secundaria que está trabajando en el diseño de transformaciones geométricas	(Josué) Estudiante de maestría que nos participó de la sesión 07
(Dina) Profesora de 1ro de secundaria que está trabajando en el diseño de cálculo de área de polígonos	Coordinador del Seminario
(Alberto) Profesor de 5to de primaria que está trabajando en el diseño de círculo y circunferencia	(Alejandro) Estudiante de maestría que nos ha acompañado durante todo el Seminario
(Abigail) Profesora de 6to de primaria que está trabajando en el diseño de conservación de área	(Zaid) Estudiante de doctorado que se integra en esta sesión al Seminario

Tabla 3.5: Parejas de trabajo para la elaboración de materiales.

Momento 2: Recuento del trabajo realizado hasta el momento, en el marco del proceso de negociación

El coordinador realiza un recuento del trabajo realizado en la Etapa de diseño con el fin de recordar la manera en que el proceso de negociación ha servido de marco para configurar todos los elementos de cada THA. Esto se lleva a cabo con el uso del esquema de la imagen 3.6.

Momento 3: Elaboración del diseño en un Libro GeoGebra y los materiales asociados a este.

En este momento, cada pareja se junta a trabajar, partiendo de la revisión de la THA, para luego pasar a la confección del Libro GeoGebra y los materiales.

3.5.6. Sesión 11

Esta sesión está dispuesta para abordar la última tarea de la Etapa 4, específicamente para concluir la confección del diseño en un Libro GeoGebra y los materiales necesarios, ambos con base en la THA correspondiente.

A continuación la focalización de los aspectos generales para esta sesión:

3.5.6.1. Objetivo de la Sesión 11

Concluir la elaboración del Libro GeoGebra donde se está estructurando el diseño de cada profesor, junto con los materiales asociados a cada diseño.

3.5.6.2. Tareas de la Sesión 11

1. Reflexión sobre el trabajo realizado a lo largo del Seminario, y cómo ha aportado a cada instancia del diseño.
2. Concluir la confección del Libro GeoGebra y los materiales asociados al diseño.

3.5.6.3. Trayectoria de la Sesión 11

Esta sesión fue planificada considerando la participación de:

- Una profesora (Abigail) y un profesor de primaria (Alberto).
- Dos profesoras de secundaria (Dina y Sabrina).
- Un estudiante de maestría en Matemática Educativa (Alejandro y Josué).
- Un estudiante de doctorado en Matemática Educativa (Zaid).
- Un miembro de la Comunidad GeoGebra (que, a su vez, es estudiante de maestría en Matemática Educativa, *coordinador* del Seminario e investigador principal del proyecto).

Momento 1: Recuento del trabajo realizado hasta el momento, en el marco del proceso de negociación

El coordinador hace una reflexión sobre la manera en que cada etapa del Seminario a influido en la configuración de la THA y los diseños.

En primer lugar, se comenzó una proceso de apresto técnico, para explorar herramientas digitales y pedagógicas que fuesen útiles al momento de confeccionar materiales o el diseño mismo, y la planeación de este último.

Luego se llevó a cabo una etapa de confrontación de significados geométricos, cuyo propósito fue que los profesores pudieran vivir un proceso de resignificación de sus conocimientos geométricos, a la vez que aceptaban la existencia y validez de significados no escolares, y conceptualizando un cambio de estatus de las matemáticas. Todo esto con la intención de poder robustecer los diseños a elaborar con esta perspectiva de las matemáticas.

Ya en la etapa de diseño, se dispuso de un proceso de negociación mediante el cual se determinaron todas las piezas de la THA, y a a continuación, con base en la THA se elaboró el diseño en un Libro GeoGebra y se confeccionaron materiales atendiendo a las características de los ambientes de diseño, ya sean concretos o digitales.

Momento 2: Elaboración del diseño en un Libro GeoGebra y los materiales asociados a este.

En este momento, cada pareja se junta a trabajar, con el propósito de finalizar la confección del Libro GeoGebra y los materiales.

3.5.7. Sesión 12

Debido al progreso en la elaboración del diseño, se acordó en la sesión 11 por parte de todo el grupo, disponer de la sesión 12 para concluir con la Etapa de Diseño.

A continuación la focalización de los aspectos generales para esta sesión:

3.5.7.1. Objetivo de la Sesión 12

Concluir la elaboración del Libro GeoGebra donde se está estructurando el diseño de cada profesor, junto con los materiales asociados a cada diseño.

3.5.7.2. Tareas de la Sesión 12

1. Reflexión sobre las etapas del Seminario, centrándose en la Etapa de diseño y los productos elaborados en ella (ver imagen 3.7).
2. Concluir la confección del Libro GeoGebra y los materiales asociados al diseño.



Imagen 3.7: Productos elaborados en la Etapa de Diseño.

3.5.7.3. Trayectoria de la Sesión 12

Esta sesión fue planificada considerando la participación de:

- Una profesora (Abigail) y un profesor de primaria (Alberto).
- Dos profesoras de secundaria (Dina y Sabrina).
- Un estudiante de maestría en Matemática Educativa (Alejandro y Josué).
- Un estudiante de doctorado en Matemática Educativa (Zaid).

- Un miembro de la Comunidad GeoGebra (que, a su vez, es estudiante de maestría en Matemática Educativa, *coordinador* del Seminario e investigador principal del proyecto).

Momento 1: Recuento general del Seminario, y específico de la Etapa de Diseño

El coordinador hace un recuento de cada etapa del Seminario, donde pone atención a la Etapa de Diseño y a los productos que se han elaborado en ella: la trayectoria hipotética, el diseño (Libro GeoGebra) y los materiales. Donde la THA está constituida por un objetivo, las tareas y sus procesos hipotéticos; el diseño elaborado en un Libro GeoGebra está estructurado a partir de actividades confeccionadas en Hojas dinámicas, las cuales están organizadas por capítulos; y finalmente los materiales creados atendiendo también a las características del ambiente de diseño, ya sea concreto o digital.

Aprovechando que se está hablando de los productos de la Etapa de Diseño, y en respuesta al progreso del Seminario, se propone a los participantes una depuración de la información que se ha compartido en el Aula virtual, de tal forma que se tenga un registro claro de los diferentes materiales y sus distintas versiones. Esto también está pensado para completar información que aún pueda faltar en el Aula virtual.

Momento 2: Elaboración del diseño en un Libro GeoGebra y los materiales asociados a este.

Cada grupo se junta a trabajar, con el propósito de finalizar la confección del Libro GeoGebra y los materiales.

3.6. Retroalimentación colaborativa

En esta etapa se lleva a cabo una puesta en escena de cada diseño, donde los miembros del Seminario harán las veces de estudiantes a quienes se les aplica el diseño, y luego se dará paso a una ronda de retroalimentación de cada uno de los integrantes, con la intención de robustecer el diseño y el uso de sus materiales.

3.6.1. Sesión 13

En esta sesión se abordan las dos tareas de la Etapa 5, donde son presentados los diseños sobre Conservación de área y Círculo y circunferencia, para realizar una retroalimentación colaborativa por parte de todo el grupo.

A continuación la focalización de los aspectos generales para esta sesión:

3.6.1.1. Objetivo de la Sesión 13

Presentar los diseños sobre Conservación de área, y Círculo y circunferencia, ante el grupo para recibir retroalimentación de parte de este.

3.6.1.2. Tareas de la Sesión 13

1. Presentar cada diseño en el marco de un juego de roles entre profesor y estudiantes.
2. Retroalimentación colaborativa por parte de todos los participantes del Seminario.

3.6.1.3. Trayectoria de la Sesión 13

Esta sesión fue planificada considerando la participación de:

- Una profesora (Abigail) y un profesor de primaria (Alberto).
- Dos profesoras de secundaria (Dina y Sabrina).
- Una investigadora, que es doctora en Matemática Educativa (Xisela).
- Un estudiante de maestría en Matemática Educativa (Alejandro y Josué).
- Un estudiante de doctorado en Matemática Educativa (Zaid).
- Un miembro de la Comunidad GeoGebra (que, a su vez, es estudiante de maestría en Matemática Educativa, *coordinador* del Seminario e investigador principal del proyecto).

Momento 1: Introducción y comunicación de parámetros para evaluar los diseños

El coordinador inicia comunicando el propósito de la sesión, para luego presentar los parámetros que se pueden utilizar para ir evaluando cada diseño. Estos parámetros corresponden a cada uno de los elementos confeccionados durante la Etapa 4 de Diseño (ver imagen 3.7), los cuales se pueden utilizar para identificar cada uno de ellos durante el transcurso del desarrollo del diseño.

Para concluir este momento, el coordinador indica la dinámica de las presentaciones, donde en primer lugar se presenta el diseño sobre Conservación de área y luego el de Círculo y circunferencia. Cada profesor guía el desarrollo de su diseño, mientras el resto de los participantes del Seminario hace las veces de estudiantes y resuelve las actividades. Al finalizar la aplicación de cada diseño, se da paso a una ronda de retroalimentación colaborativa, donde cada uno de los miembros del Seminario realiza comentarios y sugerencias al diseño, las cuales tienen el propósito de robustecer la planeación (THA), los materiales y el diseño mismo.

Momento 2: Presentar el diseño de Conservación de áreas para la retroalimentación de todo el grupo

La profesora reparte los materiales concretos a utilizar en el diseño, proporciona el enlace del Libro GeoGebra donde se encuentra el diseño¹⁸, y a continuación guía el completo desarrollo de este. De manera simultánea, el resto de los participantes toman nota de las observaciones y sugerencias que les vayan surgiendo, utilizando los parámetros de evaluación propuestos y otros.

Momento 3: Presentar el diseño de Círculo y circunferencia para la retroalimentación de todo el grupo

El profesor reparte los materiales concretos a utilizar en el diseño, proporciona el enlace del Libro GeoGebra donde se encuentra el diseño¹⁹, y a continuación guía el completo desarrollo de este. De manera simultánea, el resto de los participantes toman nota de las observaciones y sugerencias que les vayan surgiendo, utilizando los parámetros de evaluación propuestos y otros.

¹⁸Libro GeoGebra del diseño sobre Conservación de áreas: [geogebra.org/m/MUh7Pzz8](https://www.geogebra.org/m/MUh7Pzz8)

¹⁹Libro GeoGebra del diseño sobre Círculo y circunferencia: [geogebra.org/m/gk97hyVa](https://www.geogebra.org/m/gk97hyVa)

3.6.2. Sesión 14

En esta sesión se abordan las dos tareas de la Etapa 5, donde son presentados los diseños sobre Transformaciones geométricas, y Área de polígonos y círculo, para realizar una retroalimentación colaborativa por parte de todo el grupo.

A continuación la focalización de los aspectos generales para esta sesión:

3.6.2.1. Objetivo de la Sesión 14

Presentar los diseños sobre Transformaciones geométricas, y Área de polígonos y círculo, ante el grupo para recibir retroalimentación de parte de este.

3.6.2.2. Tareas de la Sesión 14

1. Presentar cada diseño en el marco de un juego de roles entre profesor y estudiantes.
2. Retroalimentación colaborativa por parte de todos los participantes del Seminario.

3.6.2.3. Trayectoria de la Sesión 14

Esta sesión fue planificada considerando la participación de:

- Una profesora (Abigail) y un profesor de primaria (Alberto).
- Dos profesoras de secundaria (Dina y Sabrina).
- Un estudiante de maestría en Matemática Educativa (Alejandro y Josué).
- Un estudiante de doctorado en Matemática Educativa (Zaid).
- Un miembro de la Comunidad GeoGebra (que, a su vez, es estudiante de maestría en Matemática Educativa, *coordinador* del Seminario e investigador principal del proyecto).

Momento 1: Introducción y comunicación de parámetros para evaluar los diseños

El coordinador inicia comunicando el propósito de la sesión, para luego presentar los parámetros que se pueden utilizar para ir evaluando cada diseño. Estos parámetros corresponden a cada uno de los elementos confeccionados durante la Etapa 4 de Diseño (ver imagen 3.7), los cuales se pueden utilizar para identificar cada uno de ellos durante el transcurso del desarrollo del diseño.

Para concluir este momento, el coordinador indica la dinámica de las presentaciones, donde en primer lugar se presenta el diseño sobre Conservación de área y luego el de Círculo y circunferencia. Cada profesor guía el desarrollo de su diseño, mientras el resto de los participantes del Seminario hace las veces de estudiantes y resuelve las actividades. Al finalizar la aplicación de cada diseño, se da paso a una ronda de retroalimentación colaborativa, donde cada uno de los miembros del Seminario realiza comentarios y sugerencias al diseño,

las cuales tienen el propósito de robustecer la planeación (THA), los materiales y el diseño mismo.

Momento 2: Presentar el diseño de Transformaciones geométricas para la retroalimentación de todo el grupo

La profesora reparte los materiales concretos a utilizar en el diseño, proporciona el enlace del Libro GeoGebra donde se encuentra el diseño²⁰, y a continuación guía el completo desarrollo de este. De manera simultánea, el resto de los participantes toman nota de las observaciones y sugerencias que les vayan surgiendo, utilizando los parámetros de evaluación propuestos y otros.

Momento 3: Presentar el diseño de Área de polígonos y círculo para la retroalimentación de todo el grupo

La profesora reparte los materiales concretos a utilizar en el diseño, proporciona el enlace del Libro GeoGebra donde se encuentra el diseño²¹, y a continuación guía el completo desarrollo de este. De manera simultánea, el resto de los participantes toman nota de las observaciones y sugerencias que les vayan surgiendo, utilizando los parámetros de evaluación propuestos y otros.

²⁰Libro GeoGebra del diseño sobre Transformaciones geométricas: [geogebra.org/m/UW2gfeFH](https://www.geogebra.org/m/UW2gfeFH)

²¹Libro GeoGebra del diseño sobre Área de polígonos y círculo: [geogebra.org/m/vUN3zyhf](https://www.geogebra.org/m/vUN3zyhf)

Capítulo 4

Selección de datos

En el este capítulo se recogen los datos seleccionados del Seminario para su posterior análisis, que son tomados de un total de 14 videos de las sesiones del SIDPDM, con un total 56 horas aproximadamente. Los datos recogidos para la investigación corresponden a intervalos y transcripciones de los videos.

Reconocemos que en una instancia social, como el Seminario, existen diversos tipos de temáticas e interacciones entre los participantes, todas valiosas y válidas, entre las cuales hay algunas de interés para el propósito de integración digital, y otras que no estarán relacionadas con este propósito. Por lo tanto, el registro plasmado en este documento corresponde sólo a los intervalos donde se encuentra evidencia de las interacciones relevantes para hablar del propósito de integración digital del Seminario, las cuales se agrupan en:

Para integrar a los profesores a la cultura digital:

- Aspectos de organización social [AOS]:
 - Interacción social multidireccional.
 - Relaciones de poder horizontales.
 - Trabajo colaborativo: objetivos particulares / propósito común.
 - Configurar un equipo de trabajo diverso, el cual esté unido por un propósito común, asociado a los fenómenos didácticos ligados a las matemáticas.
- Aspectos técnicos o de la cultura digital [ACD]:
 - Uso de tecnologías abiertas proporcionadas por la Comunidad GeoGebra: Hojas dinámicas, AGD, Libros y Grupos GeoGebra.
 - Uso de tecnologías digitales en general: Moodle, video llamadas, confección de documentos colaborativos en Google Drive, presentaciones en HTML5 con Slides.com, entre otros.
- Aspectos didácticos o relacionados con el saber geométrico [ADG]:
 - Uso del AGD de GeoGebra como laboratorio, para experimentar con la geometría.

Para que los profesores integren prácticas digitales a su práctica docente:

- Aspectos de los saberes docentes [ASD]:

- Resultados de investigación en educación matemática [**RIEM**].
- Experiencia docente [**ED**].
- Atención al ambiente del diseño [**AAD**].

[AOS]	Aspectos de organización social.
[ACD]	Aspectos técnico o de la cultura digital.
[ADG]	Aspectos didácticos o relacionados con el saber geométrico.
[ASD]	Aspectos de los saberes docentes.
[RIEM]	Resultados de investigación en educación matemática.
[ED]	Experiencia docente.
[AAD]	Atención al ambiente del diseño.

Tabla 4.1: Resumen de códigos de los aspectos a identificar en los datos.

Se espera que estos aspectos vayan emergiendo y sean identificados a medida que sean provocados por el diseño del Seminario y sean necesarios para los participantes. Además, vislumbramos que existirá una evolución en la manera en que se manifestarán tales aspectos, a lo largo del Seminario.

Estamos considerando a todos los participantes del Seminario, y específicamente a los profesores, como sujetos sociales que se construyen en interacción con otros a lo largo de su historia personal. Debido a que los profesores son un grupo social relevante, se espera que el Seminario ejerza una influencia similar en todos ellos, y que a su vez, la participación de todos ellos también moldee el Seminario. De esta manera, se escoge a un profesor para analizar su proceso de integración digital vivido en el Seminario, lo cual se hace pensando que es un caso que refleja aspectos sociales vividos o construidos por todos los miembros de su grupo social en este espacio de desarrollo profesional docente, específicamente respecto a la integración digital entre la cultura y la práctica docente.

Una de las razones para escoger al profesor Alberto para analizar su caso, es que estuvo presente en todas las sesiones del Seminario, distinto del caso de otras profesoras, que por razones personales tuvieron que ausentarse de algunas sesiones.

De tal manera, durante la selección de datos se recogen episodios que dan cuenta de la propuesta de integración digital en la interacción grupal y en la participación del profesor Alberto. Es por ello, que en las etapas de Diseño (ver secciones 4.5.1, 4.5.2, 4.5.3, 4.5.4, 4.5.5, 4.5.6 y 4.5.7) y Retroalimentación colaborativa (sección 4.6.1,) nos centramos en la selección de datos que lo involucren directamente.

4.1. Estructura de la descripción

La descripción se realiza por cada sesión del Seminario que involucre directamente al profesor Alberto (13 sesiones en total), donde para cada una de ellas se emplean los momentos reportados en la planeación respectiva de su sesión. En cada momento se registran los episodios que den cuenta de algún aspecto de la propuesta de integración digital, consignada por las claves de la tabla 4.1, registrando el intervalo de tiempo del episodio y el tipo de intervención, si es grupal o individual. En caso de ser grupal, se registra la discusión del grupo de participantes del Seminario. Por otra parte, si es individual se registra la participación del profesor que se está tomando como caso de estudio. La estructura del registro es de este tipo:

Momento Z: Nombre del momento

| 00:00:00 - 00:00:00 | Grupal/Individual | Descripción general del episodio.

Detalle del registro.

-

Transcripción (en caso de ser necesario).

-

4.2. Descripción de la Etapa Introducción

4.2.1. Descripción de la Sesión 01

La presentación de la Sesión 01 se encuentra en slides.com/zergiorubio/sidpdm-01

Momento 1: Presentación del Seminario

| 00:02:51 - 00:22:30 | Grupal | **Presentación de todos los participantes del Seminario que estaban presentes¹.**

Primero se presenta el coordinador, luego el estudiante de maestría en matemática educativa Alejandro (que también es profesor de formación normalista y universitaria). Luego la investigadora en matemática educativa, la Dra. Xisela se presenta y les da la bienvenida a los profesores. A continuación se presentan los profesores: la profesora Sabrina, quien esta dando 1ro de secundaria; la profesora Abigail, quien esta dando 6to de primaria; el profesor Alberto, quien esta dando 5to de primaria; y la profesora Dina, quien esta dando 2do de secundaria[AOS][ACD].

| 00:17:12 - 00:18:25 | Individual | **El profesor Alberto se presenta ante el resto de los miembros del Seminario:**

El profesor se presenta como un docente y destaca su formación[AOS]. También realiza una reflexión entre lo que el sistema educativo le pide que enseñe y lo que le evalúan, y entre lo que le demanda el sistema y lo que reconoce en sus alumnos[ASD].

-
Soy Alberto, también trabajo en primaria, de formación normalista. Después de ahí he tomado varios cursos y también diplomados.

El conflicto es lo que me pide el sistema que enseñe y lo que el niño sabe para poder recibir eso que quieren que yo enseñe... Son tantas las ideas que yo veo en el sistema que son contradictorias con nuestra práctica; con lo que nos piden que enseñemos y luego con lo que ellos nos evalúan...

Yo vengo aquí [al Seminario] muy abierto a recibir todo lo que me sirva y de igual forma, compartir lo que yo pueda aportar.

-

| 00:22:39 - 00:51:01 | Grupal | **Efecto de la 3RH en la sociedad, la educación y la educación matemática.**

El coordinador del Seminario presenta la perspectiva con la cual se esta asumiendo a la tecnología digital desde la planeación del Seminario. Esto basado en la Problemática de este trabajo (ver capítulo 1)[ACD]. Cabe destacar que la exposición se dio como una conversación, donde todos participaron cuando tenían algo que compartir con el resto del grupo[AOS].

| 00:46:48 - 00:47:52 | Individual | **Intervención del profesor Alberto sobre la manera de aprender de los estudiantes con la presencia de tecnología digital, comparado con la manera de aprender previa su aparición**

¹Otros integrantes se irán incorporando a medida que avance el Seminario.

-
Respecto al aprendizaje de los niños, hoy día se ha vuelto más compleja porque los niños se están acostumbrando a un aprendizaje intuitivo más que a razonar. A partir de un [clic] tienen acceso a una gran cantidad de información. Lo que a nosotros nos costó: teníamos que estudiar, teníamos que leer, teníamos que repasar y, de algún modo, memorizar; y ellos ya no están viendo eso como una necesidad, porque toda la información que hay en Internet es lo que hace fácil a los niños fácil aprender algo, sin la necesidad de razonarlo. Entonces eso es lo complejo, como hacer que el niño vea como una necesidad el aprender a partir de la razón, no nada más por repetición. [ASD]
-

Momento 2: Consensos

| 01:04:40 - 01:28:15 | Grupal | Aspectos del Seminario a consensuar entre todos.

Momento en el que ciertas decisiones importantes del Seminario son discutidas y consensuadas entre todos los miembros del Seminario [AOS].

- Las sesiones serán los sábados, desde las 09:00 a las 13:00.
- Se comunica a los participantes del Seminario que ya todos poseen una cuenta personal en el Aula virtual.
- Se les entregará un certificado de participación, por el número de horas total del Seminario.
- Se decide trabajar con el bloque VI, del cual los profesores obtendrán el contenido a trabajar para la elaboración del diseño.
- Se acuerda que la duración del Seminario sean 12 sesiones, finalizando el 29 de abril. Luego nos juntaríamos el sábado 20 y el 27 para compartir la experiencia de aplicar los diseños con los estudiantes.

Momento 3: Recolección de datos

| 01:28:15 - 02:39:14 | Grupal | Recolección de información de los profesores participantes del Seminario.

Se aprovecha la instancia para que los profesores ingresen al Aula virtual con su nombre de usuario y contraseña [ACD], y de allí obtener el formulario digital para llenar con sus datos personales, laborales y de formación [AOS]. Además, se deja pendiente para el martes siguiente, que los profesores puedan registrar el contenido geométrico curricular a atender en la Etapa de Diseño, para que el estudiante de maestría pueda iniciar la búsqueda de literatura especializada sobre cada contenido [RIEM].

| 02:06:18 - 02:06:40 | Grupal | Propuesta de colaboración con el desayuno en las sesiones.

El coordinador comenta que todas las sesiones habrá disponible café y galletas. Los profesores responden que todos van a traer algo para cooperar con el desayuno [AOS].

| 02:07:57 - 02:22:33 | Grupal | Exploración de los recursos que dispone la plataforma de Materiales GeoGebra.

En respuesta a la consulta de una profesora, el coordinador explora, compartir y descargar los recursos que dispone la plataforma de Materiales GeoGebra: Hojas dinámicas, Libros y Grupos GeoGebra[ACD].

| 02:22:33 - 02:24:30 | Grupal | Uso de videotutoriales para comunicar y buscar información.

El coordinador explica el uso de la descripción de los videos de YouTube para revisarlos de manera expedita y precisa, cuando son de larga duración[ACD].

4.3. Descripción de la Etapa Apresto

4.3.1. Descripción de la Sesión 02

La presentación de la Sesión 02 se encuentra en slides.com/zergiorubio/sidpdm-02

Momento 1: ¿Cómo usar y para qué me sirve Moodle y GeoGebra?

| 00:15:49 - 00:46:08 | Grupal | ¿Cómo usar Moodle?

Espacio donde el coordinador les presenta Moodle al resto de los miembros del Seminario, indagando en su filosofía de *software* libre y en cómo usarlo, desde el ingreso al aula virtual del Seminario a través de su url, acceder mediante la cuenta personal, navegar entre las diferentes secciones del aula, revisión de la versión web y para teléfonos inteligentes, entre otros[ACD].

| 00:15:49 - 00:19:28 | Grupal | Reflexión sobre el *software* libre y sus implicaciones sociales.

El coordinador aprovecha que se esta revisando un video sobre Moodle para hablar del *software* libre, que se construye de manera abierta en comunidad, y que en consecuencia, se desarrolla de manera mucho más rápida en comparación con el *software* privativo[ACD].

También se menciona que, desde que GeoGebra pasó a ser *software* libre se comenzó a constituir una comunidad alrededor del *software*, donde cualquier persona en el mundo puede dar retroalimentación al grupo de desarrolladores para seguir mejorándolo[ACD].

| 00:23:32 - 00:28:29 | Grupal | Organización del aula virtual, en tanto recursos como los espacios de participación..

El coordinador presenta la estructura del aula virtual, en tanto disponibilidad de los recursos utilizados en las sesiones presenciales (presentaciones, acuerdos, etc.)[ACD], así como de los espacios de participación (foro de consulta, reporte de tareas, etc.)[AOS].

| 00:28:30 - 00:43:48 | Grupal | Moodle en su modalidad para teléfonos inteligentes.

El coordinador presenta la modalidad app de Moodle como una opción para revisar las novedades del Seminario, contactándose al aula virtual por medio de los teléfonos inteligentes de cada participante[ACD].

| 00:49:03 - 01:05:41 | Grupal | ¿Cómo usar GeoGebra?

El coordinador presenta a GeoGebra, en tanto su modalidad web como en su modalidad app. Se presenta el perfil personal del sitio web de GeoGebra y los recursos a los cuales se puede acceder teniendo esa cuenta (Hojas dinámicas, Libros y Grupos GeoGebra). Para el perfil se sugiere añadir una descripción (quien soy, que hago

y para que uso GeoGebra), una foto de perfil, entre otros elementos de netiqueta² [ACD].

| 01:05:41 - 01:07:16 | Grupal | Motivación de la Comunidad GeoGebra

El coordinador relata que la motivación de la Comunidad GeoGebra es atender las necesidades de los profesores, mediante la creación de herramientas y plataformas (digitales o materiales), de tal manera que no se añada más carga a la labor de los docentes, sino que todas ellas sean fácil de usar [ACD].

| 01:19:52 - 01:20:30 | Grupal | Libro GeoGebra como portafolio

El coordinador recuerda que en la sesión 01, la profesora Dina vislumbró que los Libros GeoGebra se podrían usar como portafolio de trabajo de sus estudiantes, donde cada hoja corresponda a una tarea que ellos vayan realizando y el libro completo la compilación de todas las tareas de una unidad [ASD][ED].

| 01:21:30 - 01:31:15 | Grupal | Grupo GeoGebra para compartir libro de texto

La profesora Sabrina comenta al grupo que este año le dieron tres libros de texto, para 32 estudiantes. Para solucionar este problema ha intentado varias cosas: ha mostrado el libro en pdf desde su computador personal a los estudiantes para que ellos copien sólo el ejercicio; ha mostrado el libro en pdf con ayuda de un proyectos, aunque su director no le permite usar durante tanto tiempo el proyector. En consecuencia a estar revisando en el Seminario los diferentes tipos de publicaciones que se pueden hacer en un Grupo GeoGebra, pregunta si soporta archivos pdf para poder subir el libro de texto y compartirlo con todos sus estudiantes [ASD][ED].

El coordinador le muestra cómo inscribirse en un Grupo GeoGebra y comparte un video sobre cómo añadir un recursos (archivos pdf, por ejemplo) a los Grupos GeoGebra [ACD].

Momento 2: Exploración del recurso Hoja dinámica de GeoGebra

| 01:45:31 - 01:59:40 | Grupal | Construcción de una Hoja dinámica de GeoGebra.

El coordinador guía la exploración de los recursos con los cuales se constituye una Hoja dinámica [ACD].

| 01:49:49 - 01:53:20 | Grupal | Visibilidad, permisos o privacidad de recursos digitales en la Red.

Se desarrolla una conversación sobre la visibilidad, los permisos para acceder o los niveles de privacidad de los recursos digitales, con el caso de GeoGebra. Una profesora aporta que los recursos digitales generalmente se pueden dejar privados

²Netiqueta corresponde al término para referirse a las normas de urbanidad o de comportamiento educado en la Red. La netiqueta es una adaptación de las reglas de etiqueta del mundo real al virtual. Para más información sobre este término, visitar la página de Intef bit.ly/2pNJvxp

o públicos. El coordinador complementa con un tercer caso, que corresponde a oculto, compartir mediante enlace o no listado, que se refiere a que el recurso sólo se encuentra disponible si se tiene acceso al enlace (url) del recurso[ACD].

| 01:55:59 - 03:08:29 | Grupal | Puesta en práctica de los recursos en Hojas dinámicas.

El coordinador pregunta si quedó claro la manera de construir una Hoja dinámica, y luego de recibir una respuesta afirmativa propone a los asistentes que construyan una Hoja que incluya cada tipo de archivo que se acaba de explorar.

En respuesta a la actividad de trabajo individual, los profesores comenzaron a trabajar en sus respectivos contenidos del Bloque V: la profesora Abigail abrió la versión de escritorio de GeoGebra y comenzó a trabajar en la construcción de un tangram, lo cual está relacionado con el contenido que ella escogió del Bloque V; el profesor Alberto comenzó la exploración de la Hoja dinámica tratando de usar la herramienta para articular el contenido que él abordará en el Bloque V; la profesora Sabrina se sintió muy atraída por las posibilidades de los Grupos GeoGebra, espacio que le ofrece soluciones a ciertas necesidades específicas que tiene con su grupo en la asignatura de matemáticas[ASD][AOS].

| 02:02:48 - 02:08:20 | Grupal | Preguntas en Hoja dinámica de GeoGebra.

El coordinador muestra los recursos pregunta de una Hoja dinámica de GeoGebra, que las hay de tipo respuesta abierta o de opción múltiple[ACD]. Los profesores hacen preguntas respecto de los usos pedagógicos del recurso pregunta[ASD].

| 02:15:22 - 02:17:33 | Individual | Consulta sobre el recurso *pregunta* de las Hojas dinámicas, trabajando sin conexión a Internet.

El profesor Alberto le hace una pregunta al coordinador respecto del uso de las preguntas de las Hojas dinámicas sin conexión a Internet:

-

Cuando descargamos el Libro [GeoGebra], hay una actividad donde corregimos las respuestas virtualmente, pero al hacerlo sin conexión no nos da la parte de verificación de respuestas.

-

El coordinador creía que sí se podían verificar las respuestas aunque no se tuviera conexión a Internet. De igual forma se pasa a explorar la herramienta y su desempeño sin conexión, corroborando que la opción de verificar no esta disponible bajo estas condiciones.

Gracias a la intervención del profesor Alberto se descubre una limitación de la herramienta, a considerar cuando se elaboren los diseños[ACD][ASD][AAD].

| 02:17:33 - 02:18:47 | Grupal | Uso de las Hojas dinámicas o Libros GeoGebra sin conexión a Internet.

Se explora el uso del recurso pregunta de las Hojas dinámicas de GeoGebra cuando no se tiene conexión a Internet. Se descubre entre todos que no se pueden controlar las respuestas a las preguntas en caso de no contar con Internet[ACD]. En respuesta

a esta situación, una profesora propone crear una Hoja dinámica con las respuestas a todas las preguntas y ponerla al final del Libro, para corroborar las respuestas de los estudiantes[ASD][ED][AAD].

Momento 3: ¿Cómo se construye un Libro GeoGebra?

| 02:22:28 - 03:41:13 | Grupal | Creación de un Libro GeoGebra.

El coordinador comunica que ahora pasarán a construir un Libro GeoGebra, como ensayo de lo que harán en la etapa de diseño, donde elaborarán el diseño didáctico planeado usando los recursos digitales de GeoGebra. Sin embargo los profesores continúan con sus consultas sobre aspectos específicos y relacionados con sus contenidos del Bloque V.

El coordinador del Seminario fue platicando con cada uno de ellos en los temas que cada uno abordó, aunque no fuera lo que se propuso desarrollar en la sesión [AOS]. Sin embargo, cuando se percata que todos los profesores están trabajando en su contenido del Bloque V[ASD][ED], explica el plan del Seminario con las Etapas y las sesiones dispuestas para cada una de ellas, donde en particular, la Etapa 4: Diseño hay contempladas cinco sesiones. En esa Etapa se utilizará la THA como estructura de los diseños, los cuales serán desarrollados a partir de la experiencia de los profesores y los resultados de investigación encontrados.

En respuesta, los profesores comunican que habían pensando que para ese momento del Seminario ya deberían tener algún avance en el diseño, el cual debían presentar para ser evaluado por el coordinador. En consecuencia se les comunica la intención del espacio de trabajo, pensado como trabajo colaborativo entre pares, donde cada parte (investigación y docencia) aportan desde su área al desarrollo y logro de un propósito compartido: que los estudiantes aprendan más y mejor matemáticas[AOS].

-

Sabrina: Yo me había equivocado porque había pensado, o había tenido la concepción de que tengo que pre-elaborar el diseño, para poder ver *si lo estoy haciendo bien o lo estoy haciendo mal, o en qué puedo mejorar*. Pero así como lo esta planteando, me la voy a llevar muy relajada porque aquí voy a aprender mucho más.

-

Debido a la falta de claridad en la planificación del Seminario, el coordinador se compromete a compartir el plan general, donde se especifica el número de sesiones para cada Etapa y una descripción general de lo que se hará en cada una de ellas. De tal suerte, que los profesores puedan estar al tanto de los planes del Seminario y el avance del mismo[AOS].

4.3.2. Descripción de la Sesión 03

La presentación de la Sesión 03 se encuentra en slides.com/zergiorubio/sidpdm-03

Momento 1: Presentación de la Planeación general del Seminario

| 00:00:27 - 01:10:46 | Grupal | **Presentación de la Planeación general del Seminario.**

El coordinador presenta el plan general del Seminario, invitando a que lo vean como un espacio de desarrollo profesional docente, donde se discutirá de varios temas (innovación educativa, disciplinares, sobre diseño de actividades, integración digital, entre otros), y uno de los productos del Seminario será el diseño didáctico para el contenido del Bloque V[AOS].

| 00:15:23 - 00:15:48 | Individual | **Valoración de los conocimientos construidos fuera de la escuela.**

El profesor Alberto menciona que no todos los conocimientos son construidos dentro de la escuela, sino que también lo hacemos en nuestra vida diaria[ASD]:

-

Hay cosas que no se aprenden dentro de la currícula [currículo], sino en la vida práctica. [Por ejemplo], hay gente que es analfabeta y puede resolver sus problemas cuando compra en el mercado, aunque no llevó una instrucción formal. [Aunque son analfabetas] “no las hacen tontas”.

-

| 00:18:10 - 00:19:48 | Individual | **Valoración de procedimientos no usuales.**

Reflexión de Alberto sobre la importancia de considerar procedimientos no usuales en la resolución de tareas matemáticas, tratando que los estudiantes puedan verbalizar sus razonamientos[ASD][ADG]

-

Quizá lo que falta en esas situaciones es hacer consciente los procedimientos. Hay situaciones que salen fuera de los algoritmos y los niños llegan a la solución correcta, y cuando se les pregunta porqué hicieron lo que hicieron, ellos responden que no saben y que sólo lo hicieron.

-

Momento 2: Análisis técnico-didáctico de la actividad como THA

| 01:12:38 - 02:24:00 | Grupal | **Exposición sobre la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje.**

El coordinador presenta la THA a los participantes del Seminario, como una herramienta que emerge desde la investigación, y que en nuestro caso la utilizaremos para realizar la planeación de cada uno de los diseños. Luego muestra un ejemplo de una THA[ASD][RIEM][ED].

Momento 3: Configuración colaborativa de una THA para un contenido geométrico específico

| 01:58:38 - 02:24:02 | Grupal | Reflexión sobre el uso del Marco curricular por los profesores.

A modo de sensibilización a la importancia de asumir que los profesores tienen un rol fundamental en la mejora educativa, se plantea una discusión sobre el uso del Marco curricular (contenidos curriculares) por parte de los profesores. Para ello el coordinador comparte dos citas que hablan del rol del profesor respecto al currículo, visto como un ejecutor técnico (desde una mirada oficial) y como un profesional de la educación (desde una mirada no oficial) (Fuglestad y otros, 2010)[ASD]:

El profesor es colocado en el rol de implementador técnico del currículo, más que en el rol de un profesional [de la educación] implementando un desarrollo pedagógico personal. Con tales restricciones, es muy difícil distinguir la innovación de la reforma sistémica [curriculares] y, es difícil imaginar a los profesores involucrados en el diseño curricular y probando métodos de enseñanza alternativos. (Fuglestad y otros, 2010, p. 300)

También una sobre la necesidad de reformas educativas (Robinson, Febrero de 2010)[ASD]:

Las reformas [educativas] no tienen sentido, porque simplemente están mejorando un modelo obsoleto. Lo que necesitamos (...) no es una evolución, sino una revolución en la educación. Tiene que ser transformada en algo más. (Robinson, Febrero de 2010, min 3:59)

| 02:24:02 - 03:22:46 | Grupal | Configuración colaborativa de una THA.

Se trabaja de manera colaborativa en la confección de una THA para el contenido curricular *concepto básico de ángulo*. De la discusión entre todo el equipo se van proponiendo y consensuando el objetivo de la actividad, dos tareas relativas al objetivo y el proceso hipotético de la tarea 1 y la tarea 2[AOS][ASD][RIEM].

| 02:28:17 - 02:38:18 | Grupal | Discusión sobre definiciones de ángulos.

El coordinador presenta definiciones de ángulos obtenidas de los *Elementos* y la realizada por Hilbert (1862 - 1943), identificando aspectos que aportan a la discusión sobre el dilema de considerar a las matemáticas universales, por ejemplo cuando en los *Elementos* no se consideraban ángulos a los llanos (o extendidos) y en cambio Hilbert necesitó hacer explícito que sí los considera ángulos[ADG].

| 02:37:18 - 02:37:49 | Individual | Validez de distintos significados geométricos asociados al ángulo.

El coordinador pregunta cuál significado respecto del ángulo (como la intersección de dos rectas o como una recta que se quiebra) *esta bien* y *cuál esta mal*, a lo que Alberto responde diciendo que “ambas tienes razón”[ASD].

| 02:40:22 - 03:22:46 | Grupal | Discusión para configurar la THA.

En la discusión, Sabrina proponía tareas de manera recurrente durante la discusión

para determinar el objetivo[ASD][ED].

La profesora Dina se muestra muy cercana a los elementos que dicta el currículo, como la Taxonomía de Bloom, y los pone en juego en la mayoría de sus intervenciones[ASD]. Desde el comienzo de la discusión, Abigail y Alberto se apegaron al ejercicio propuesto por el coordinador de determinar un objetivo para el contenido, luego con base en ese objetivo delinear las tareas y finalmente trazar un proceso hipotético para cada tarea[ASD][RIEM].

Momento 4: Articulación de una actividad en un Libro GeoGebra, a partir de la THA configurada

| 03:24:32 - 03:27:37 | Grupal | Construcción del Libro GeoGebra con base en la THA.

El coordinador deja como tarea la construcción del Libro GeoGebra con base en la THA elaborada colaborativamente. Se propone que el Libro cuente con un capítulo de aspectos generales, incluyendo el objetivo, declarar contenido a atender, etc.; un capítulo para cada tarea; y cada capítulo de las tareas tenga por lo menos dos hojas dinámicas[AOS][ACD][ASD].

| 03:27:37 - 03:30:42 | Grupal | Considerar el ambiente del diseño.

La THA confeccionada colaborativamente tuvo la particularidad que se pensó para ambientes concretos, por lo que al articularla en un Libro GeoGebra es necesario adaptarla a un ambiente digital[AAD]. En ese momento se fue dando una discusión respecto de cómo adaptar la THA al ambiente digital.

| 03:34:14 - 03:36:37 | Grupal | Organización de las sesiones.

Aunque el coordinador dejó de tarea la construcción del Libro GeoGebra con base en la THA, menciona que lo ideal que es esa actividad la realizaran en conjunto. Algunos profesores proponen que la próxima sesión parta con esta actividad; otra profesora (Dina) menciona que le gustaría por lo menos construir las primeras hojas dinámicas. En consecuencia, el coordinador propone que la actividad sea optativa, incluso disponiendo de un foro en el aula virtual para hacer consultas al respecto[AOS].

4.4. Descripción de la Etapa Confrontación

4.4.1. Descripción de la Sesión 04

La presentación de la Sesión 04 se encuentra en slides.com/zergiorubio/sidpdm-04

| 00:05:20 - 00:07:36 | Individual | Uso de video llamada como herramienta docente.

La profesora Dina cuenta en el Seminario que durante la semana necesitaba organizarse con algunos estudiantes para preparar un homenaje, pero que ya se había acabado la jornada escolar, por lo que entre los estudiantes surgió la idea de comunicarse luego por video llamada, a lo que la profesora responde que *sí sabe*, puesto que ya había tenido una sesión del Seminario por video llamada de Facebook con el coordinador[ACD][ASD].

Momento 1: Articulación de una actividad en un Libro GeoGebra, a partir de la THA configurada

| 00:16:07 - 01:39:00 | Grupal | Construcción del Libro GeoGebra.

El coordinador guía la construcción desde cero de un Libro GeoGebra y todos los participantes van reproduciendo de manera individual tal construcción. El propósito de esta actividad es explorar el recurso Libro GeoGebra y realizar un ejercicio con él, ya que luego, en la Etapa 4, el diseño a elaborar se construirá en un Libro GeoGebra[ACD].

| 00:18:42 - 00:37:14 | Individual | Dina comparte los avances que logró durante la semana.

Dina comenta que durante la semana construyó una Hoja dinámica, atendiendo a la tarea de exploración planeada en la THA configurada entre todos en la sesión anterior (03). El coordinador propone al resto de los profesores usar la Hoja dinámica³ elaborada por la profesora Dina, para comenzar con la exploración de la Hoja dinámica, por lo que todos copian tal Hoja y la modifican⁴⁵⁶. [AOS].

| 01:19:21 - 01:23:00 | Grupal | Reflexión sobre derechos de autor y Creative Commons.

A propósito de la característica de las Hojas dinámicas de GeoGebra de poner, automáticamente, el nombre de todos los autores involucrados en la creación del recurso, el coordinador realiza una reflexión sobre la diferencia entre los derechos de autor (restricciones de uso de la obra) y las licencias Creative Commons, que son licencias para compartir[ACD].

³Hoja dinámica construida por la profesora Dina en la página ggbm.at/dAmEkGBB

⁴Hoja dinámica modificada por la profesora Sabrina en la página ggbm.at/m4s6afzg

⁵Hoja dinámica modificada por la profesora Abigail en la página ggbm.at/HU8tVNMw

⁶Hoja dinámica modificada por el profesor Alberto en la página ggbm.at/UFXYdFJ

| 01:28:06 - 01:39:00 | Grupal | Reflexión sobre los ambientes de diseño y la investigación.

Debido a que en la sesión 03 se dio la situación de configurar una THA para ambientes concretos, y luego el grupo se vio en la necesidad de adaptarla para ambientes digitales, el coordinador realiza una reflexión sobre los ambientes de diseño con base en la evolución que ha vivido la investigación en educación matemática al integrar tecnología (ver sección 2.4.1), con el propósito de enfatizar en la importancia de atender a lo específico del ambiente de diseño[AAD].

Al respecto, la profesora Dina alude a los distintos estilos de aprendizaje y que es necesario abarcarlos al momento de confeccionar los diseños, ya que pueden haber estudiantes que el trabajo en ambientes digitales les acomode, pero no hay que dejar de lado los que son más afines al trabajo concreto[AOS]. En respuesta, el coordinador aclara que la propuesta del Seminario es atender a lo híbrido de los ecosistema educativos, por lo que se consideran espacios digitales, concretos y otros que vayan emergiendo. De esta manera se pretende atender de manera más sensible a la realidad, sin incurrir restricciones artificiales[AAD][ACD].

Momento 2: Desarrollo de una actividad de confrontación

| 01:39:00 - 02:23:00 | Grupal | Actividad de confrontación de significados geométricos estáticos y dinámicos.

El coordinador propone a los miembros del Seminario, desarrollar una actividad que pretende confrontar significados geométricos inspirados en el carácter dinámico de la geometría (importancia del proceso de construcción e identificar invariantes), con significados geométricos escolares[ADG][AAD].

| 02:03:00 - 02:18:01 | Grupal | Desarrollo de la actividad.

El coordinador realizar frente a todo el grupo un par de desarrollos llevados a cabo por algunos profesores. Se reflexiona respecto de la importancia del proceso geométrico de construcción para determinar propiedades (perpendicularidad, paralelismo) y el uso de la prueba arrastre como método para poner a prueba la construcción[ADG].

| 02:20:27 - 02:22:36 | Grupal | Colaboración entre el grupo.

En consecuencia a la tarea que quedó propuesta (hacer la misma actividad anterior, pero ahora para un trapecio rectángulo), la profesora Sabrina declara que necesita llevarse una caracterización de tal cuadrilátero, ya que no es experta en matemáticas y sí quiere realizar la tarea. El coordinador alude a que pueden usar la caracterización que mencionó el profesor Alberto, puesto que una de las ideas del Seminario es propiciar el trabajo colaborativo[AOS].

Momento 3: Análisis de un actividad de confrontación

| 02:27:55 - 03:35:38 | Grupal | Revisión de THA de actividad de confrontación.

El coordinador guía la revisión de la THA de un diseño, del cual se desarrolló una de sus actividades en el momento 2. Se muestra en detalle cada una de las partes de

la THA, especificando la confrontación de significado que se pretende propiciar en cada tarea y el sustento teórico que la avala [ADG][RIEM].

En términos didácticos se presentan los siguientes significados geométricos a confrontar:

- **Tarea 1:** Percepción de la existencia de una única clasificación de cuadriláteros (la clasificación) $\rightarrow\leftarrow$ Variedad de clasificaciones, según su criterio de clasificación o uso.
- **Tarea 2:** Estudio contemplativo de los objetos geométricos y sus propiedades $\rightarrow\leftarrow$ Importancia del su proceso de construcción para *asignar* propiedades a los polígonos.
- **Tarea 3:** Inmutabilidad de las matemáticas, sin posibilidad de cuestionarlas $\rightarrow\leftarrow$ Cuestionar la posibilidad de ampliar los criterios de clasificaciones de cuadriláteros.

| 02:35:19 - 02:36:12 | Individual | **Hegemonía de conocimiento matemático escolar.**

El coordinador muestra un libro que registra una investigación sobre clasificación de cuadriláteros. En este momento se habla específicamente de un resumen sobre las diferentes clasificaciones de cuadriláteros y las definiciones de los mismos que se encontraron en la investigación. Este dato contrasta de la creencia usual de pensar que las matemáticas son únicas y universales.

La profesora Sabrina pregunta si las clasificaciones y definiciones que enseñamos en la escuela están obsoletas, a lo que el profesor Alberto responde que “no es que sea obsoleta, sino que nos piden [el ámbito oficial] enseñar un contenido único. Aquí se ve una homogeneidad” [ASD].

| 02:37:30 - 02:38:51 | Grupal | **Los estudiantes responden según sus conocimientos previos, en respuesta a como les ha formado el sistema educativo y las preguntas que les hagamos.**

Se discute que los alumnos están acostumbrados a dar respuesta muy acotados, son poco creativos y que no amplían sus perspectivas. Luego de discutir al respecto se llega a la conclusión grupal que esta actitud de los estudiantes se debe a cómo se les enseña y cómo se les pregunta [ASD][ED].

4.4.2. Descripción de la Sesión 05

La presentación de la Sesión 05 se encuentra en slides.com/zergiorubio/sidpdm-05

Momento 1: Reporte de una actividad en Grupo GeoGebra

| 00:02:28 - 00:50:00 | Grupal | Reportar actividad en Grupo GeoGebra.

El coordinador guía el reporte de una actividad, sobre la construcción de un trapecio rectángulo en el AGD de GeoGebra[ADG]. En primer lugar muestra cómo registrarse en el Grupo GeoGebra usando el código de inscripción, luego hace una publicación con la especificación de la tarea dada en el momento 2 de la sesión 04 (ver sección 3.4.1.3), la cual pasan a desarrollar el resto de los miembros del Seminario, para finalmente reportarla en el Grupo cuando la hayan desarrollado[ACD].

| 00:14:40 - 00:21:56 | Grupal | Reflexión sobre la evaluación desde una perspectiva no oficial.

El coordinador muestra al resto del grupo la pestaña de *evaluación* del Grupo GeoGebra, donde se puede ir evaluando progreso de las tareas mediante el uso de los códigos *no iniciado*, *en curso*, *listo* y *completo*⁷, y también se menciona la posibilidad de mantener interacción privada entre el profesor y cada alumno, o de manera pública para que lo vean todos los inscritos en el Grupo. Un aspecto a destacar es que este recurso no cuenta con una opción para calificar las tareas, es decir, poner una nota, ya que esto corresponde a una necesidad oficial, que se percibe como algo artificial en el ámbito no oficial, como lo es en las comunidades digitales, por ejemplo, la Comunidad GeoGebra[ACD].

Momento 2: Conferencia de la maestra Rosa

| 00:51:48 - 02:55:42 | Grupal | Conferencia sobre "La construcción del concepto de ángulo en estudiantes de secundaria".

La maestra Rosa comparte con el grupo su proceso de investigación sobre la construcción del concepto de ángulo en estudiantes de secundaria (Rotaèche y Montiel, 2017), poniendo atención en la emergencia de la problemática de investigación, la motivación del diseño, su revisión bibliográfica del tema (ángulo) y en el proceso de elaboración del diseño y materiales[ADG][ASD][RIEM][AAD][ED].

| 00:52:16 - 01:00:00 | Grupal | Motivación de la investigación: identificación de una problemática.

Rosa relata la manera en que su práctica docente le permitió identificar una problemática a investigar, en este caso respecto del uso que le dan los estudiantes a las diferentes escuadras, sin considerar los ángulos que provee cada escuadra (30°, 45° o 60°)[ED].

-

Les decía [a los estudiantes] la escuadra de 35°, y ellos me respondían “la grande o la chica”. [En consecuencia a su pregunta] yo les enseñaba el juego de geometría que usan los maestros, y les decía

⁷Ver detalle de las Tareas en los Grupos GeoGebra en la página ggbm.at/Ucar7PHU

que mi escuadra es grande comparada con la de sus juegos de geometría. Pero para los estudiantes la escuadra grande es la de 30°- 60°, porque es más alargada, y la chica es la de 45°, porque es más corta. Los estudiantes no estaban poniendo atención a los ángulos y eso me causaba un poquito de ruido

(...) Esa fue una de las situaciones que fui detectando, y ustedes que son maestros sabrán que año con año van surgiendo las mismas preguntas. Entonces me preguntaba si acaso no lo estaba explicando bien.

-

| 01:00:59 - 01:12:00 | Grupal | Revisión bibliográfica del tema.

Rosa relata que en sus primeros contactos con la revisión de investigaciones, se fue dando cuenta que se reportaban problemáticas que a ella también le ocurrían en su práctica docente[RIEM][ED].

-

Cuando estudié la maestría en Matemática Educativa y comencé a leer, dices “ah, eso también me pasa a mi”, es decir, te das cuenta que esos problemas que se te presentan [en tu práctica docente], no solo pasan en dibujo técnico, sino también en otras temas (como álgebra), y cuando te pones a leer [investigaciones] te das cuenta [que esa situación] nos pasa a muchos, entonces algo está sucediendo ahí.

-

| 01:12:01 - 01:43:02 | Grupal | Objetivo de la investigación, marco teórico y aspectos metodológicos.

Rosa presenta su objetivo de investigación a la luz de la problemática y su revisión de literatura. También muestra la teoría y metodología que empleó en su investigación: teoría de situaciones didácticas e ingeniería didáctica respectivamente[RIEM].

| 01:43:05 - 02:02:56 | Grupal | Fase de diseño.

Rosa muestra los materiales a usar en su diseño y la manera de usarlos[AAD].

| 1:56:30 - 02:22:08 | Grupal | Diferentes significados del ángulo en el diseño.

Rosa comienza a mostrar las tareas de su diseño, las cuales se configuraron con base en lo reportado en la investigación, lo cual provoca una discusión grupal sobre los aspectos didácticos del ángulo[ADG][RIEM].

| 02:55:50 - 04:04:37 | Grupal | Discusión sobre diversos ámbitos de la práctica docente.

Detonado por la conferencia de Rosa se produjo una discusión sobre diversos aspectos de la labor docente y las contradicciones que plantea el ámbito educativo oficial. Como consecuencia de la discusión, el coordinador identifica que quizá sea necesario cambiar lo que estamos entendiendo por aprender (o lo que el ámbito oficial nos impone como aprender), de una manera responsable y en equipo, apoyados en la investigación, la experiencia docente, aprovechando el potencial del trabajo colaborativo entre diferentes actores educativos[ASD].

4.5. Descripción de la Etapa Elaboración del diseño

4.5.1. Descripción de la Sesión 06

La presentación de la Sesión 06 se encuentra en slides.com/zergiorubio/sidpdm-06

Momento 1: Recapitulación del Seminario

| 00:06:40 - 00:19:20 | Grupal | Recapitulación del Seminario.

El coordinador realiza una recapitulación del Seminario, rescatando las partes que se pondrán en uso en la Etapa de diseño, tales como los recursos GeoGebra[ACD], la THA[ASD] y la confrontación de significados matemáticos[RIEM].

Momento 2: Comunicación de significados curriculares identificados

| 00:19:20 - 1:29:42 | Grupal | Reporte de contenidos curriculares.

Los profesores comunican lo que reportan los documentos oficiales (currículo, planes y programas, estándares curriculares, aprendizajes esperados, etc.) respecto del contenido geométrico curricular que escogieron para elaborar el diseño didáctico[ASD].

| 01:21:55 - 1:29:42 | Grupal | Reflexión sobre cambios curriculares e independencia (autonomía) docente.

El coordinador realiza una reflexión acerca de los cambios curriculares, que generalmente son producto de decisiones políticas y no educativas, y el rol del profesor frente a tales cambios oficiales.

Durante la intervención de todos los profesores, ellos comunicaron que habían revisado instrumentos oficiales como los programas de estudio, planes y programas, etc., y utilizaron terminología usual de estos contextos educativos, como aprendizaje esperado, perfil de egreso, estándar curricular, propósito educativo de primaria, intención didáctica, etc. Frente a esta nomenclatura, el profesor necesita utilizarla para poder comunicar sus decisiones y planeaciones, sin embargo, con cada reforma educativa, esa terminología (y todo lo que ello implica) se cambian, y los profesores deben adoptar la nueva nomenclatura cada vez que se produce una reforma[ASD]. En cuanto al aspecto tecnológico, diversos organismos internacionales como la OEI, Unesco, etc. recomiendan a los Estados que instauren políticas públicas para incluir tecnología digital en el sistema educativo. Sin embargo son usuales los casos en que tales iniciativas quedan obsoletas o son sacadas de circulación a propósito de los cambios en el sistema educativo[ACD].

Frente a este panorama el coordinador plantea la siguiente reflexión: “el cambio es una constante en términos de administración en educación, lo cual repercute en modificaciones curriculares y en los programas de inclusión digital. En este panorama de cambio en el ámbito educativo, la única constante es el profesor y lo que hace.”. Dado este panorama, se hace necesario que el profesorado manifieste independencia (o autonomía) docente responsable, respecto de los cambios curriculares y de las modificaciones de los programas de inclusión digital[ASD].

En ese sentido, las comunidades digitales, como GeoGebra, se muestra como una estabilidad dinámica en el ámbito de las tecnologías digitales incorporadas a la educación matemática. Esto se da debido a que las comunidades digitales responden a intereses distintos de los oficiales (políticos o corporativos), haciendo que su desarrollo y evolución sea diferente de los proyectos de inclusión digital, que son acotados y caducan rápidamente, sino que tales comunidades se desarrollan de manera dinámica, flexible y abierta, haciendo que evolucionen sin amenazar su equilibrio[ACD].

Momento 3: Comunicación de resultados de investigación

| 1:29:42 - 03:16:08 | Grupal | Comunicación de resultados de investigación sobre transformaciones geométricas⁸.

La presentación esta a cargo de la Dra. Xisela, investigadora en Matemática Educativa, quien expone ante todos los miembros del Seminario los resultados de investigación correspondiente a las transformaciones geométricas, para su posterior discusión[AOS][ED].

| 1:29:42 - 01:31:10 | Grupal | Propósito de la comunicación de resultados de investigación

La Dra. declara que el propósito es dialogar entre los resultados de investigación, la experiencia docente y la parte tecnológica[ASD][RIEM].

| 01:31:12 - 01:33:07 | Grupal | Funcionalidad de la investigación para el diseño

La Dra. reflexiona respecto del uso de los resultados de investigación en la elaboración del diseño[RIEM][ASD]:

-

(...) Eso es lo que se espera que aprendan [los estudiantes], en cambio el reporte de investigación nos cuenta lo que realmente aprenden. Y eso esta bonito, porque si yo sé lo que realmente aprenden puedo tomar decisiones sobre qué y cómo enseñar. Es decir, no me voy a lo que espera el currículo, que todos aprendan por igual, sino lo que realmente esta entendiendo cada niño, para que pueda tomar decisiones respecto del diseño. Porque si solo me baso en lo que debe aprender, entonces no voy a estar haciendo actividades pensada en los niños, sino en el contenido.

-

| 2:29:31 - 03:16:08 | Grupal | Resultados de investigación sobre traslación.

La investigadora cierra su presentación retomando los resultados que reporta la investigación[RIEM]de H. Bahadır Yanik (2014). Middle-school students' concept images of geometric translations. *The Journal of Mathematical Behavior, Volume 36*, December 2014, Pages 33-50, ISSN 0732-3123, doi:10.1016/j.jmathb.2014.08.001, poniendo atención en lo que se reporta en específico para ambientes concretos y digitales (AGD)[AAD], en las cuales se pone atención en el proceso, diferente del aprendizaje esperado reportado por la profesora Sabrina:

⁸Ver la presentación utilizada para comunicar los resultados de investigación sobre transformaciones geométricas en bit.ly/2yjsTfE

- Entendimiento operacional: Cuando los estudiantes mostraban un razonamiento basado en el movimiento.
- Entendimiento menos operacional: Cuando los estudiantes usaban razones a partir del resultado final del movimiento, más que del movimiento en sí.
- Entendimiento estructural: Cuando los estudiantes mostraban un razonamiento basado en propiedades, y no se enfocaban más en el movimiento[ADG].

4.5.2. Descripción de la Sesión 07

La presentación de la Sesión 07 se encuentra en slides.com/zergiorubio/sidpdm-07

Momento 1: ¿Qué sabemos de los estilos de aprendizaje?

| 00:50:37 - 00:39:44 | Grupal | **Reflexión sobre Autonomía docente, mediante la discusión de los Estilos de aprendizaje.**

El coordinador pregunta a los profesores ¿qué sabemos de los estilos de aprendizaje? a lo que la profesora Dina responde que existen siete estilos de aprendizaje[RIEM]y que es necesario favorecerlos todos en todas las actividades que diseñemos, para poder favorecer a todos los estudiantes[ASD]. A continuación el coordinador muestra un extracto de la noticia publicada por The Guardian “Científicos instan a la comunidad educativa a olvidarse del ‘neuromito’ de los estilos de aprendizaje”. Esto provoca la participación del resto de los profesores en la discusión, mencionando que si bien cada estudiante posee más afinidad con un estilo, hay que pretender que el estudiante pueda estar en contacto con actividades que le ayuden a desarrollar el resto de los estilos, propiciando un desarrollo pleno e integral.

El coordinador concluye invitando a los profesores a ser críticos con el uso de teorías, tomando en cuenta nuestra realidad contextual[ASD].

Momento 2: Ambientes de Geometría Dinámica

| 00:39:44 - 00:55:38 | Grupal | **¿Para qué me sirven lo ambientes de Geometría Dinámica?**

El coordinador da respuesta a la pregunta mediante ciertos usos que se han reportado en la investigación[AAD][RIEM], dando ejemplos donde se pone en juego aspectos geométricos[ADG].

Momento 3: Elementos para el diseño

| 01:03:13 - 01:05:04 | Grupal | **Proceso de negociación.**

El coordinador introduce por primera vez en el Seminario, y de manera explícita, el proceso de negociación que servirá de marco para elaborar los diseños didácticos[ASD].

Se menciona que hasta el momento en el Seminario se ha trabajado en la relación entre los resultados de investigación y la experiencia docente. Se recuerda el caso de la exposición de la investigación sobre traslación geométrica realizada por la investigadora, y los comentarios que iba realizando la profesora Sabrina con base en su experiencia como docente[ASD]. También se recuerda que durante las sesiones anteriores se ha mencionado que se pondrá atención al ambiente de diseño, el cual consideramos de partida de naturaleza híbrida, y que ahora se incorpora como un polo del proceso de negociación[ASD].

| 01:05:10 - 1:07:43 | Grupal | **Uso de los resultados de investigación para construir la THA.**

El coordinador comenta que al considerar resultados de investigación para elaborar el diseño, será natural que el objetivo de la THA sea más robusto y amplio que el contenido curricular. No obstante, un diseño que tenga un objetivo así de amplio, de igual forma se puede abordar en el mismo tiempo que se podría contemplar para otra que se construya únicamente al alero del contenido curricular. En términos de las tareas, se pueden rescatar desde las investigaciones y la misma experiencia docente de los profesores, los elementos importantes para lograr el objetivo. En cuanto al proceso hipotético, considerar los aspectos de la investigación que otorgan un poco de control en el diseño, en el sentido de que si le propongo cierta tarea o pregunta a los estudiantes, es probable que reaccionen o respondan a ella de un modo ya identificado y reportado[ASD][RIEM].

| 1:07:43 - 1:17:24 | Grupal | Consulta sobre la evaluación.

Al respecto de la propuesta de uso de la investigación para elaborar el diseño y su THA, la profesora Dina pregunta cómo es la evaluación en este tipo de actividades. El estudiante de maestría Josué responde que incluso se pueden seguir haciendo las mismas pruebas para calificar, la diferencia radica en que con el tipo de diseño que se propone en el Seminario, se busca el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, en cambio los diseños tradicionales buscan responder al currículo y sus contenidos[ASD].

| 01:20:33 - 01:46:20 | Grupal | Completar la discusión sobre el proceso de negociación para transformaciones geométricas.

El coordinador propone completar el proceso de negociación para el contenido de transformaciones geométricas, ampliando la discusión de la semana pasada a las consideraciones del ambiente de diseño[ASD][AAD].

Esta discusión se dio, en primera instancia con los comentarios que la profesora Sabrina registró en la exposición de la sesión anterior, luego Alejandro hizo un resumen de la presentación que realizó la Dra. Xisela la sesión anterior, y luego el coordinador realiza sugerencias sobre el uso del AGD en consecuencia a la discusión ya realizada[ASD][RIEM][ED][AAD].

Momento 4: Comunicación de resultados de investigación

| 01:46:20 - 02:55:57 | Grupal | Comunicación de resultados de investigación sobre conservación de área⁹.

Alejandro realiza una presentación para todo el grupo de los resultados de investigación sobre conservación de área del artículo de Kospentaris, G., Spyrou, P. y Lappas, D. (2011). Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics* 77(1), pp. 105-127. doi: 10.1007/s10649-011-9303-8[AOS]. Algunos resultados rescatados de la presente investigación son[RIEM]: Las estrategias de los estudiantes al resolver tareas para determinar el área son:

- Conocimiento geométrico formal.

⁹Ver la presentación utilizada para comunicar los resultados de investigación conservación de área en bit.ly/2o2UVfQ

- Percepción visual.
- Nociones intuitivas personales.

| 02:52:10 - 02:55:57 | Grupal | Organización de las sesiones.

Debido a que la discusión de los resultados de investigación sobre conservación de área se extendió mucho, el coordinador propone que la próxima sesión (08) se completara el proceso de negociación, incorporando el polo de atención al ambiente de diseño, para así dar tiempo suficiente a la presentación de la investigación sobre círculo y circunferencia[AOS].

| 02:56:00 - 03:28:28 | Grupal | Comunicación de resultados de investigación sobre círculo y circunferencia¹⁰.

Alejandro, realiza una presentación para todo el grupo de los resultados de investigación sobre círculo y circunferencia del artículo de LeAnn E. Neel-Romine, Sara Paul and Kathryn G. Shafer (2012). Get to Know a Circle. *Mathematics Teaching in the Middle School* 18(4), pp. 222-227. doi: 10.5951/mathteacmiddscho.18.4.0222[AOS]. Algunos resultados rescatados de la presente investigación son[RIEM]:

- Los estudiantes notaron que algunas definiciones de círculo que construyeron en la actividad eran afirmaciones verdaderas, pero no les ayuda a dibujarlo.
- Los estudiantes también sabían lo que era un radio, pero no lo reconocían como una parte importante de la construcción del círculo.
- Hacen referencia a un círculo como “360 grados”.
- Los estudiantes decidieron rápidamente que las definiciones de forma redonda y que parezcan una moneda o naranja, podrían aplicarse a varias formas que podrían no ser círculos.
- Los estudiantes deben explorar, hablar e interactuar con el contenido mientras aumentan su aprendizaje[ADG].

¹⁰Ver la presentación utilizada para comunicar los resultados de investigación sobre círculo y circunferencia en bit.ly/2ABIFZB

4.5.3. Descripción de la Sesión 08

La presentación de la Sesión 08 se encuentra en slides.com/zergiorubio/sidpdm-08

Momento 1: Información y propuestas

| 00:07:00 - 00:08:44 | Grupal | **Propuesta del uso de cronómetro para regular el tiempo de cada discusión.**

El coordinador propone a los miembros del Seminario, utilizar un cronómetro para regular el tiempo de las discusiones, pensando optimizar el tiempo de las sesiones repartiéndolo equitativamente entre las discusiones para los cuatro diseños. Todos los miembros se muestran a favor de la propuesta[AOS].

| 00:08:44 - 00:11:15 | Grupal | **Comunicación de la información actualizada en el aula virtual.**

El coordinador informa a todo el grupo que se han subido al aula virtual las presentaciones utilizadas para comunicar los resultados de investigación[ACD][AOS].

| 00:11:15 - 00:12:36 | Grupal | **Recordatorio sobre los diferentes usos de los ambientes de geometría dinámica.**

El coordinador recuerda los usos de los AGD que se han reportado en la investigación[AAD][RIEM], a propósito de las discusiones a desarrollar durante la presente sesión, para completar el proceso de negociación de todos los diseños con el polo de atención al ambiente de diseño, para configurar el objetivo de cada THA.

Momento 2: Configurar objetivo (de la THA) para diseño de Transformaciones geométricas

| 00:12:36 - 01:21:00 | Grupal | **Proceso de negociación para configurar objetivo de THA sobre transformaciones geométricas.**

Sabrina comienza leyendo el objetivo curricular para el contenido de transformación geométrica que aparece en el libro del estudiante[ASD]. Luego menciona los resultados de investigación que registró de la presentación correspondiente (sesión 06 ver sección 3.5.1.3)[RIEM]. Con estos dos referentes ensaya un objetivo para su THA[ASD].

En respuesta, el coordinador alude a que la investigación revisada reporta que los estudiantes responden, en primera instancia, a partir de sus conocimientos cotidianos, que para el caso de la translación corresponde a pensar la translación como un movimiento de cualquier tipo[RIEM][ADG].

Luego la profesora se le ocurre que podría preguntar a sus estudiantes qué es para ellos la translación, y que espera que le respondan que es un movimiento[ASD].

Alberto propone que los alumnos podrían describir el movimiento que realizan (de arriba abajo, de derecha a izquierda u oblicuo)[ADG]. A partir de esta intervención la discusión giró en torno a describir geoméricamente el movimiento cotidiano

Avanzada la discusión, la profesora Sabrina menciona la actividad del libro del estudiante, donde se pide que compruebe si una figura es la trasladada de otra[ASD].

Al estudiar tal actividad entre todos, y compararla con lo que dice la investigación y lo que han aportado los profesores, respecto que los estudiantes conciben de manera cotidiana a la traslación como movimiento, se concluye que la actividad curricular ha desnaturalizado a la translación, puesto que solo se plantea una comprobación en un ambiente estático[ADG][RIEM][ED].

Finalmente se discute sobre el uso de sistemas de referencia (cuadrícula, línea de referencia, etc.) en la actividad sobre transformaciones geométricas[ADG].

Por otra parte, en la discusión sobre valorar los conocimientos cotidianos de los estudiantes y usarlos para construir el conocimiento *curricular*[ASD], Alberto menciona que:

-

Aprovechar el conocimiento empírico que ellos [los estudiantes] tienen, para formular el conocimiento científico, o por lo menos curricular que se espera que adquieran en la escuela. Yo creo que es un poco salirnos de lo que nos marcan en el libro y nosotros innovar, a partir de qué actividades podemos plantear la idea al niño y llevarlo a esa formulación de conocimiento, porque si nos seguimos centrando en el libro vamos a seguir igual, y seguimos igual pues no estamos innovando al menos en este contenido específico que vamos a abordar

- Finalmente el objetivo de la THA queda así: *que los estudiantes describan el movimiento geoméricamente*[AOS][ADG][ASD].

Momento 3: Configurar objetivo (de la THA) para diseño de Círculo y circunferencia

| 01:20:18 - 02:02:40 | Grupal | Proceso de negociación para configurar objetivo de THA sobre círculo y circunferencia.

Alberto comienza leyendo el contenido curricular[ASD], y luego propone su primera versión del objetivo: que los establezcan diferencias entre círculo y circunferencia a partir de la construcción y exploración del programa de GD GeoGebra[ADG][AAD]. Menciona la actividad que se propone en el libro de texto, y que en realidad es una actividad sin sentido para construir un círculo, puesto que las condiciones empíricas que propone la actividad, no hacen alusión a las características que permiten generar un círculo o una circunferencia[ASD][ADG].

Luego comienza a mencionar ciertos elementos del círculo y la circunferencia que considera importante, como el radio, el centro[ADG]. A partir de esto el rumbo de la discusión se desarrolla respecto de qué manera se determina o construye al círculo.

El coordinador recuerda algunos aportes de la investigación reportada.[RIEM]

Alberto comenta que en 5to grado es la primera vez que se ve de manera formal y explícita el círculo[ASD].

En consecuencia a una de las partes del objetivo sobre distinguir entre círculo y circunferencia, el coordinador cuestiona que antes de poder compararlos necesito

saber qué es cada uno de los objetos a comparar. En consecuencia la discusión gira hacia plantear manera de reconocer al círculo y la circunferencia, donde el profesor Alberto propone que se le proponga a los estudiantes explorar su sala de clases reconociendo círculos y circunferencias[ADG], y en la etapa siguiente se podría pasar a trabajar con el AGD[AAD].

Luego de la propuesta de reconocer formas circulares, se recuerda una de las actividades de la investigación donde se traza una circunferencia con un par de lápices unidos por un clip sobre plastilina[ADG][AAD].

Dina propone que a la actividad de construcción del círculo en la plastilina, se podría añadir una actividad de exploración que tenga las mismas condiciones, únicamente cambiando el clip por un elástico (liga), para que los estudiantes puedan comparar las formas resultantes de ambos casos. Luego se considera añadir una cuerda[AAD][ADG].

El coordinador propone que en el AGD se podría abordar una actividad que permita identificar la relevancia del centro y el radio para construir un círculo[ADG].

Finalmente el objetivo de la THA queda así: *Que los alumnos establezcan diferencias entre círculo y circunferencia, a partir de la caracterización y reconocimiento de elementos cotidianos, así como reconocer el centro y el radio como elementos importantes para el trazo de círculo y circunferencia, a partir de la construcción y exploración en ambientes híbridos*[AOS][ADG][ASD].

Momento 4: Configurar objetivo (de la THA) para diseño de Conservación de áreas

| 2:13:52 - 02:14:12 | Grupal | Reporte del objetivo en el aula virtual.

El coordinador muestra que hay un espacio disponible en el aula virtual para reportar el objetivo, y que ese espacio también se puede usar para que los demás miembros del Seminario puedan comentar las diferentes versiones del objetivo que allí se vayan registrando[AOS][ACD].

| 02:16:06 - 03:14:11 | Grupal/Individual | Proceso de negociación para configurar objetivo de THA sobre conservación de área.

Abigail comunica el siguiente objetivo: que los alumnos identifiquen que el perímetro de una figura puede cambiar cuando se descompone en otras, pero el área se conserva. Esto, con la ayuda del recurso tangram y GeoGebra[ADG][AAD][ASD].

También comunica al grupo algunas actividades que tenía delineadas, para explorar el tangram[ADG][AAD], luego realizar actividades para confrontar la relación *a igual perímetro, igual área*, luego que construyan o darles un tangram digital en el AGD de GeoGebra. En este último caso, se presenta el problema de obtener el área

total al construir el cuadrado del tangram con las diferentes figuras[ADG][AAD].

El coordinador recuerda que en la investigación revisada sobre conservación de área, además de la confrontación de la relación igual perímetro-igual área, se reporta la relación *sólo figuras congruentes tienen la misma área*[RIEM][ADG]. Para lo cual emerge la idea de construir *otro tangram* en el AGD, que permita confrontar la relación congruencia-área. Para ello se busca en Internet modelos de disecciones geométricas como ejemplo de *otros tangram*[ACD].

Finalmente el objetivo de la THA queda así: *Que los alumnos pongan en juego la relación congruencia-área para identificar que el perímetro de una figura puede cambiar cuando se descompone en otras figuras pero el área se conserva*[AOS][ADG][ASD].

Momento 5: Configurar objetivo (de la THA) para diseño de Cálculo de área de polígonos

| 03:14:11 - 04:00:250 | Grupal | Proceso de negociación para configurar objetivo de THA sobre cálculo de área.

Dina comunica el siguiente objetivo: resolver problemas que impliquen el cálculo de áreas de diversas figuras planas. Luego comenta que en el libro del maestro se consigna: que el alumno haga uso de sus propios recursos para diseñar una estrategia en áreas de figuras formadas por rectas y círculos[ADG][ASD].

Luego, la profesora Dina comunica al resto del grupo, una serie de tareas secuenciadas para abordar el contenido curricular[ASD].

El coordinador cuestiona la amplitud del objetivo, ya que en ellas se pueden contemplar figuras irregulares, constituidas de trazos rectos y curvos a la vez, y el objetivo alude a calcular el área de tales figuras planas.[ADG] Como producto de la discusión, Dina decide incluir la aproximación (y luego la estimación) a las tareas y, en consecuencia, al objetivo[ADG][ASD].

Posteriormente, el coordinador recuerda lo que propone la investigación respecto de que para llegar al objetivo de calcular áreas, es necesario pasar previamente por el concepto o noción de área y la medición.[RIEM] La discusión gira en torno a diferenciar la medición del cálculo[ADG].

A propósito, se realiza una reflexión sobre el área, partiendo de una unidad de medida arbitraria, el proceso de conteo de tal unidad de medida en una superficie, y el uso de fórmulas para sintetizar tal proceso. Al respecto, Alberto menciona que en cuanto a las fórmulas para calcular áreas, no es problema que los estudiantes se las aprendan, porque incluso las llegan a recitar, el problema radica en aplicarla y cómo aplicarla en diferentes casos.[ADG]

Finalmente el objetivo de la THA queda así: *Que los alumnos desarrollen una noción de área, que identifiquen cuál es la diferencia entre medición y medida de áreas, para poder realizar el cálculo de figuras planas utilizando diferentes materiales y ambientes híbridos.* [AOS][ADG][ASD].

4.5.4. Descripción de la Sesión 09

La presentación de la Sesión 09 se encuentra en slides.com/zergiorubio/sidpdm-09

Momento 1: Reflexión sobre las comunidades digitales

| 00:03:12 - 00:22:17 | Grupal | Reflexión sobre funcionamiento de comunidades digitales.

A propósito de las presentaciones que se usan en cada sesión del seminario, el coordinador comparte una reflexión con el grupo, sobre tecnologías construida por comunidades digitales, las cuales cuentan con la ventaja de ser libres, compartir de manera abierta y estar desarrolladas pensando en los usuarios.[ACD]

Momento 2: Registro o revisión de la primera versión del objetivo de cada THA

| 00:31:55 - 02:21:00 | Grupal | Publicar en foro del aula virtual.

El coordinador dispone de un momento para que los profesores publiquen en el aula virtual, el objetivo de su THA configurado la sesión anterior (sesión 08)[AOS]. Se guía el proceso para asegurar que todos lo puedan hacer[ACD].

| 00:35:29 - 00:36:46 | Grupal | Trabajo colaborativo en el aula virtual.

La profesora Sabrina pregunta si antes de registrar el objetivo en el aula virtual lo lee al resto de los miembros para que le hagan observaciones. El coordinador responde que, si bien vamos a tener una discusión al respecto, la idea de publicarlo en el aula virtual para que este siempre disponible y el resto del grupo pueda hacer observaciones allí, no importando la hora o el lugar.[AOS][ACD]

En consecuencia, el coordinador propone hacer el ejercicio de revisar las publicaciones de los objetivos realizadas en el aula virtual, sostener entre todos una breve discusión en el marco del proceso de negociación, para finalmente registrar los comentarios personales sobre el objetivo en el aula virtual.[ACD][AOS][ASD]

Momento 3: Describir, de manera individual, las tareas asociadas al objetivo de la THA para cada uno de los diseños

| 02:21:00 - 02:44:24 | Grupal | Descripción individual de las tareas de la THA.

El coordinador propone, a propósito de las discusiones sostenidas en la presente sesión y el tiempo restante, que cada profesor describa de manera general *todas* las tareas necesarias para lograr el objetivo de la THA.[AOS][ASD]

| 02:44:24 - 02:53:10 | Grupal | Propuesta de sesiones de trabajo individuales.

Debido a que la presente sesión corresponde a la penúltima de la etapa de diseño y en la próxima sesión esta planeado construir los materiales asociados a cada diseño, el coordinador propone a los profesores tener sesiones individuales con cada uno de ellos por medio de video llamada, para trabajar en la THA con el objetivo de

concluirla.[AOS][ACD][ASD].

Los profesores comentan sus disponibilidades y acceden a la propuesta del coordinador. Se negocian los horarios que calzan entre la agenda de cada profesor y el coordinador, con lo cual se establece un calendario de trabajo para la semana entre la sesión 09 y 10.[AOS]

| 03:03:55 - 03:28:43 | Grupal | Uso de documento compartido para elaborar cada la THA.

El coordinador le propone a los profesores que para complementar y agilizar las sesiones individuales que tendrán entre la sesión 09 y 10, podrían utilizar un documento de texto de Google Drive para confeccionar la THA de cada diseño, ya que este tipo de recurso permite compartirlo con otros y modificarlo de manera simultánea.[ACD][AOS][ASD]

Los profesores se expresan de acuerdo con la propuesta, aunque no todos saben usar tal recurso. De esta manera, se pasa a explorar el recurso digital para asegurarse que todos sepan usarlo[AOS][ACD].

Finalmente el coordinador abre un espacio en el aula virtual para registrar el enlace de cada documento de las THA respectivas[AOS][ACD].

4.5.5. Descripción de la Sesión 10

A partir de esta sesión, se seleccionan episodios y transcripciones de las sesiones donde este involucrado el profesor Alberto, a fin de canalizar los posteriores análisis respecto de nuestra propuesta de integración digital.

La presentación de la Sesión 10 se encuentra en slides.com/zergiorubio/sidpdm-10
La versión de la THA con la cual el profesor Alberto se presentó a esta sesión esta disponible en bit.ly/2zS4xKQ

La versión de la THA resultante del trabajo en esta sesión entre el profesor Alberto y Alejandro esta disponible en bit.ly/2zRlTHX

Momento 1: Comunicación de la dinámica de trabajo para la sesión

| 00:09:04 - 00:12:00 | Grupal | Dinámica de trabajo en parejas.

El coordinador comunica al resto de los miembros del Seminario, que la forma de trabajar se modificará un poco en esta sesión, en consecuencia a que cada uno estará trabajando en la fase de elaboración del diseño en un Libro GeoGebra y los materiales. Es por ello que se invita a dos estudiantes de posgrado en Matemática Educativa con experiencia en el uso de los Recursos GeoGebra, para constituir parejas de trabajo entre una profesora o profesor y un estudiante de posgrado [AOS]. Todos los estudiantes de posgrado tuvieron acceso a las THA respectivas. Por lo tanto las parejas de trabajo quedan constituidas así:

(Sabrina) Profesora de 2do de secundaria que está trabajando en el diseño de transformaciones geométricas	(Josué) Estudiante de maestría que nos acompañó en la sesión 07
(Dina) Profesora de 1ro de secundaria que está trabajando en el diseño de cálculo de área de polígonos	Coordinador del Seminario
(Alberto) Profesor de 5to de primaria que está trabajando en el diseño de círculo y circunferencia	(Alejandro) Estudiante de maestría que nos ha acompañado durante todo el Seminario
(Abigail) Profesora de 6to de primaria que está trabajando en el diseño de conservación de área	(Zaid) Estudiante de doctorado que se integra en esta sesión al Seminario

No obstante, la comunicación y las discusiones entre todos no se coartan, sino que cuando sea necesario también se utilizará esa modalidad de trabajo.

Momento 2: Recuento del trabajo realizado hasta el momento, en el marco del proceso de negociación

| 00:12:00 - 00:18:12 | Grupal | Recapitulación del trabajo realizado en el Seminario.

El coordinador realiza una recapitulación del trabajo realizado durante todas las etapas del Seminario, poniendo atención en la manera en que se ha ido constituyendo cada polo del proceso de negociación[ASD].

Luego comenta que el proceso de negociación fue utilizado como marco de las discusiones para determinar los componentes de la THA.[ASD]

Con base en todo lo anterior, a partir de la presente sesión se trabaja en la elaboración del diseño en un Libro GeoGebra y los materiales (concretos o digitales) asociados al diseño.[AAD]

Momento 3: Elaboración del diseño sobre Círculo y circunferencia en un Libro GeoGebra y sus materiales asociados

| 00:02:10 - 00:10:07 | Alberto y Alejandro | Revisión de la tarea 1.

Discusión sobre la primera tarea del diseño: *identificar la forma del círculo y circunferencia*[ASD].

00:02:10 Alejandro propone añadir a la THA el tiempo estimado a invertir en cada tarea y declarar los materiales que se utilizarán[ED].

00:05:29 Respecto de la última actividad de la tarea 1, Alejandro sugiere que se deje en el aula de clases una esfera (balón) para que los estudiantes la identifiquen con una forma circular, pero que no corresponde ni a un círculo ni a una circunferencia.[ADG]

| 00:10:07 - 00:18:12 | Alberto y Alejandro | Revisión de la tarea 2.

Discusión sobre la segunda tarea del diseño: *Explorar y confrontar distintas formas circulares (espiral, círculo y circunferencia, y otras formas circulares), para identificar los elementos característicos del círculo y circunferencia (centro y radio)*[ASD].

00:11:05 Alejandro pregunta si en la actividad de construcción con materiales concretos, cada estudiante hará las tres construcciones. Al respecto, Alberto menciona que la actividad se puede realizar en grupos de tres para que cada uno de ellos realice una construcción[ED].

00:13:56 En el proceso hipotético de la actividad 2C se hace referencia a las propiedades de los materiales[AAD][ADG]:

-

Se espera que los estudiantes mencionen que el trazo mantiene un mismo largo, porque el clip es rígido, además que uno de los lápices no se mueve de su lugar, y el otro es que se va moviendo alrededor del otro, manteniendo siempre la misma distancia; que la plastilina dentro del trazo

dejado por el lápiz que se iba moviendo en derredor del otro, es lo que llamamos círculo.

-

| 00:18:18 - 00:31:41 | Alberto y Alejandro | Revisión de la tarea 3.

Discusión sobre la tercera tarea del diseño: *Explorar la construcción en plastilina para distinguir círculo y circunferencia*[ASD].

00:19:00 Se consensua que en vez que todos los estudiantes construyan la circunferencia de nuevo, el que la construyó en la tarea anterior le explique a sus compañeros de grupo la construcción realizada, para que luego puedan reconocer las características de los materiales utilizados que permite construir una circunferencia.[AAD][ADG].

00:30:40 Alejandro describe la ruta general de la actividad, partiendo de una exploración concreta, luego hacer un diagnóstico de tal exploración, que permite ensayar una descripción de círculo y circunferencia, la cual se irá refinando aún más con el trabajo en el AGD de GeoGebra[AAD][ADG].

| 00:32:28 - 01:40:00 | Alberto y Alejandro | Revisión de la tarea 4.

Discusión sobre la cuarta tarea del diseño: *Trazar, explorar y caracterizar elementos de la circunferencia y el círculo en un ambiente de geometría dinámica*[ASD].

00:37:30 Se planea usar los recursos de GeoGebra para explorar los elementos del círculo y la circunferencia, y luego relacionarlos con sus respectivas definiciones[AAD].

00:50:27 Se propone usar el Libro GeoGebra solo para una parte del diseño y utilizarlo para hacer un repaso de lo realizado en la actividad concreta, explorar y relacionar los elementos del círculo y circunferencia, y sus definiciones, comparar la descripción realizada en la actividad concreta con las definiciones formales, y finalmente construir el círculo y la circunferencia[AAD][ADG].

1:18:14 Luego de refinar el objetivo del diseño a partir de las tareas revisadas, Alberto dice que falta una actividad de cierre para retomar los elementos importantes trabajados durante el diseño[ASD][AAD][ADG].

| 01:42:20 - 01:52:33 | Alberto, Alejandro y coordinador | Discusión con el coordinador sobre el diseño.

El coordinador se une a la discusión, donde Alberto y Alejandro le muestran el plan del diseño. El coordinador está de acuerdo con el diseño, a excepción de la articulación de las actividades concretas con las planeadas en AGD, puesto que no ve conexión entre los resultados logrados en la primera parte del diseño (actividades concretas) y las tareas de la segunda parte (actividades en AGD)[ADG][AAD][AOS].

En consecuencia el coordinador les propone el siguiente hilo conductor de la actividad[ADG][AAD]:

1. Diferenciar entre formas circulares y el círculo (y circunferencia).

2. Distinguir entre círculo y circunferencia.
3. Identificar en la actividad concreta elementos relevantes (centro y radio) para la construcción del círculo y la circunferencia.
4. Poner a prueba en el AGD los elementos identificados en la actividad concreta, que permiten construir el círculo y la circunferencia. También reflexionar porqué tales elementos permiten construir el círculo y circunferencia.
5. Explorar elementos secundarios del círculo y la circunferencia (diámetro, cuerda, etc.).

| 01:52:33 - 2:40:00 | Alberto y Alejandro | Modificación de las tareas y añadir tarea 5.

01:52:33 Alberto y Alejandro toman en consideración las sugerencias del coordinador y modifican la planeación del diseño, ubicando la actividad de construcción en AGD a continuación de haber concluido las actividades concretas[AOS][ADG].

2:31:30 En sintonía con las modificaciones realizadas a la planeación, Alberto y Alejandro añaden una tarea de cierre del diseño[ASD]: Tarea 5: *Confirmar el papel de los elementos del círculo y la circunferencia en su construcción.*

| 02:40:02 - 3:00:00 | Alberto y Alejandro | Elaboración del diseño en Libro GeoGebra.

Alberto y Alejandro comienzan la construcción de un Libro GeoGebra, aunque no corresponde a todo el diseño, sino sólo a las actividades pensadas en ambientes digitales. Al principio se añade un resumen de las actividades realizadas en ambientes concretos.[AAD][ACD]

Momento 4: Recuento del trabajo realizado hasta el momento, en el marco del proceso de negociación

| 03:03:48 - 03:13:20 | Grupal | Propuesta de organización para las sesiones restantes.

Debido a la buena respuesta de los miembros del Seminario a la dinámica de trabajo de la presente sesión, el coordinador propone que la sesión 11 se siga trabajando en la elaboración del diseño en el Libro GeoGebra y la confección de los materiales asociados, con el propósito de finiquitar ese trabajo. Y que la sesión 12 sea la única sesión de retroalimentación[AOS].

La profesora Abigail se muestra incrédula respecto de cumplir los tiempos que comenta el coordinador, sobre todo por las experiencias de las etapas anteriores donde se hicieron presentaciones a todo el grupo y se invirtió una gran cantidad de tiempo[AOS]. Al respecto, el coordinador propone volver a utilizar el temporizador para moderar las intervenciones y el tiempo empleado en cada presentación, a lo cual todos acceden.

En definitiva, estaba planificado que la sesión 11 fuera la primera de la Etapa 5: Retroalimentación colaborativa, la cual se cambia para ser la última sesión de la Etapa 4: Diseño, dejando la sesión 12 como la única sesión de la Etapa 5.

4.5.6. Descripción de la Sesión 11

La presentación de la Sesión 11 se encuentra en slides.com/zergiorubio/sidpdm-11

| 00:03:53 - 00:05:44 | Grupal | Aclaración sobre propuesta de uso del Libro GeoGebra.

El coordinador aclara la propuesta sobre el uso del Libro GeoGebra como recurso para estructurar todo el diseño, articulando las partes de trabajo en ambientes concretos y digitales[ASD][AAD][ACD]:

-

Algunos estaban construyendo el Libro GeoGebra solo para la parte del diseño que era en ambiente digital, y la otra parte [del trabajo en ambientes concretos] no la estaba considerando hacer en el Libro GeoGebra. Entonces, la idea es estructurar todo el diseño en el Libro GeoGebra; no es que vayamos a hacer una guía en un documento de texto para las actividades concretas e imprimirla y por otra parte un Libro GeoGebra, la idea es que lo hagamos todo en el Libro GeoGebra.

-

Momento 1: Recuento del trabajo realizado hasta el momento, en el marco del proceso de negociación

| 00:05:56 - 00:08:40 | Grupal | Proceso de negociación en la elaboración del diseño.

El coordinador recuerda que en la sesión anterior se trabajó en parejas entre una profesora o un profesor, junto con un estudiante de posgrado, comenzando por revisar las respectivas THA, y que tal trabajo ayudó a refinar la planeación[AOS].

El proceso de negociación permitió delinear el hilo conductor de cada diseño, a partir del cual se fue determinando la THA, el diseño y los materiales[ASD].

Momento 2: Elaboración del diseño en un Libro GeoGebra y los materiales asociados a este

| 00:02:09 - 00:36:42 | Alberto y Alejandro | Configuración de la tarea 1 en una Hoja dinámica.

Creación de hoja dinámica Identificación del círculo y la circunferencia¹¹ para la primera tarea del diseño: *identificar la forma del círculo y circunferencia*[ACD][ASD].

00:02:09 Alberto y Alejandro mencionan que necesitan cambiar el Libro GeoGebra para que todo el diseño este estructurado en él, ya que lo habían pensado sólo para las actividades en ambiente digital, proponiendo que sea una Hoja dinámica por tarea[ASD][AAD][ACD].

00:05:32 Adecuación de la THA para estructurar cada actividad en Hojas dinámicas,

¹¹Para acceder a la hoja dinámica **Identificación del círculo y la circunferencia** ir a la página ggbm.at/edHDDaQS

por ejemplo, redactando las preguntas de manera directa aludiendo a los estudiantes. Deciden usar el recurso *texto* para añadir la descripción de la actividad y el recurso *pregunta* para crear las preguntas de cada actividad[ASD][ACD].

00:10:27 Escogen el recurso *pregunta* para hacer registrar las respuestas de los estudiantes y Alberto comenta que pueden dejar una respuesta, para predecir los que ellos van a contestar[ASD][ACD].

00:16:09 Discuten si indicarle a los estudiantes que dibujen formas circulares que no sean círculo ni circunferencia en su cuaderno o en la Hoja dinámica. Alejandro dice que para hacer esto en la Hoja dinámica tendría que añadir algo así como un *Paint*¹², porque en caso de poner un applet GeoGebra los estudiantes usarían de inmediato la herramienta circunferencia y no podrían dibujar otras formas diferentes. En consecuencia deciden dejar la instrucción para que dibujen en el cuaderno [AAD][ADG][RIEM][ASD][ACD].

| 00:36:55 - 01:49:46 | Alberto y Alejandro | Configuración de la tarea 2 en una Hoja dinámica.

Creación de hoja dinámica Construye y explora distintas formas circulares¹³ para la segunda tarea del diseño: *Explorar y confrontar distintas formas circulares (espiral, círculo y circunferencia, y otras formas circulares), para identificar los elementos característicos del círculo y circunferencia (centro y radio)*[ACD][ASD].

00:42:16 Alejandro sugiere añadir una indicación para decirle a los estudiantes que corroboren si cuentan con todos los materiales necesarios para la actividad. Se ilustra la situación con una foto con los materiales [ED][ACD].

01:04:31 Alejandro menciona que es necesario probar la actividad de construcción de la circunferencia con plastilina, pues con la indicación de *hacer marcas en la plastilina* puede que no se construya una circunferencia, debido a las características del material. Por lo tanto deciden cambiar la indicación a que hagan puntos en la plastilina[AAD][ADG].

01:09:56 Descubren que pueden mover las imágenes dentro de la Hoja dinámica, para reordenar los recursos que están en ella[ACD][ASD].

01:21:50 Alejandro propone preguntar a los estudiantes si las características de los distintos materiales (clip, elástico y cordel) influyen en la figura producida[AAD][ADG].

| 01:29:47 - 02:57:16 | Alberto y Alejandro | Configuración de la tarea 3 en una Hoja dinámica.

Creación de hoja dinámica Exploración de la construcción con lápices y clip¹⁴ para la tercera tarea del diseño: *Explorar la construcción en plastilina para distinguir*

¹²Software que permite hacer de dibujos a mano alzada.

¹³Para acceder a la hoja dinámica **Construye y explora distintas formas circulares** ir a la página ggbm.at/HqjdkBy6

¹⁴Para acceder a la hoja dinámica **Exploración de la construcción con lápices y clip** ir a la página ggbm.at/mA5mtyZm

círculo y circunferencia[ACD][ASD].

1:44:36 El coordinador pregunta cómo van a ligar las diferentes tareas, porque no se ve una articulación clara. Sugiere que puedan añadir alguna alusión a las tareas anteriores en la descripción[ASD].

1:46:14 El coordinador sugiere que puedan añadir un video mostrando la manera de utilizar los materiales para la actividad concreta. Alejandro declara que le parece una buena indicación, porque con la instrucción escrita, los estudiantes podrían hacer diferentes interpretaciones, en cambio con el video se disminuye este riesgo[ASD][ACD].

1:53:47 Sobre la pregunta respecto de si se producen figuras iguales en las construcciones con los diferentes materiales, el coordinador propone preguntar por qué ocurre eso. De esta manera la discusión siempre se encausará hacia la importancia del radio y del centro, y la equidistancia de la circunferencia, ya que en caso de lograr construir tal figura, se debe a que se conservó siempre la misma longitud del radio; en caso de no resultar la construcción, se debe a que no se mantuvo esa longitud[ASD].

Alejandro no estaba convencido tomar en cuenta la sugerencia del coordinador. En respuesta, este les comenta que si somos capaces de anticiparnos ante cierta situación en el diseño, es necesario que las actividades se hagan cargo de ello[ASD].

Debido a que no se llegaba a consenso, el coordinador le pregunta a Alberto y Alejandro por el objetivo de la actividad, para basar en el las decisiones a tomar. Luego de revisar el objetivo se llega al consenso de tomar en cuenta la sugerencia del coordinador[ASD][ADG][AOS].

2:08:57 Alejandro comenta que les falta hacer los dos applet GeoGebra que tienen planificado usar en el diseño, pero el coordinador recuerda que ya los tenían. Alejandro responde que ya los descargaron, pero que de igual forma habría que editarlos, por lo que el coordinador recomienda adaptarlos y citar al creador del applet[ACD].

2:10:26 A propósito del episodio anterior, el coordinador hace la misma sugerencia a todo el grupo y realiza una reflexión sobre la manera de compartir en la Comunidad GeoGebra[AOS][ACD].

2:15:26 Alberto y Alejandro modifican el applet y discuten sobre qué elementos del círculo y la circunferencia van a mantener[AAD][ADG].

2:48:42 Alejandro y el coordinador realizan modificaciones al applet, según decisiones didácticas, y luego lo suben a la plataforma de Materiales GeoGebra[AAD][ASD][ACD][AOS].

| 03:22:56 - 03:56:39 | Alberto y Alejandro | Configuración de la tarea 4 en una Hoja dinámica.

Creación de hoja dinámica *Traza, explora y caracteriza elementos de la circunferencia y el círculo*¹⁵ para la cuarta tarea del diseño: *Trazar, explorar y caracterizar elementos de la circunferencia y el círculo en un ambiente de geometría dinámica*[ACD][ASD].

03:30:13 Registra en la Hoja dinámica la pregunta *¿con qué elementos concretos*

¹⁵Para acceder a la hoja dinámica **Traza, explora y caracteriza elementos de la circunferencia y el círculo** ir a la página ggbm.at/jTBh2DfV

relacionamos el radio y el centro?[ADG][ASD].

Momento 3: Recalendarización del Seminario a partir de las sugerencias de los profesores

| 04:03:34 - 04:33:41 | Grupal | Discusión sobre recalendarización.

El coordinador recuerda que la calendarización del Seminario fue un acuerdo entre todos los miembros, por lo que se podría volver a ajustar para que calce con los tiempos de los profesores[AOS].

Luego, comenta que si bien los diseños van muy avanzados, aún no están terminados, por lo que quizá con una sesión más de diseño ya se podría concluir con la elaboración de los materiales. Por lo tanto, se propone que la sesión 12 sea de diseño, en vez de retroalimentación colaborativa, a lo cual todos los profesores están de acuerdo[AOS].

| 04:12:56 - 04:32:15 | Grupal | Discusión sobre número de sesiones de la Etapa de Retroalimentación colaborativa.

El coordinador comenta que para la etapa de retroalimentación las opciones serían: solo una sesión, en la cual se presenten los cuatro diseños; o dos sesiones, donde se presenten dos diseños cada sesión. La profesora Sabrina se muestra a favor de la segunda opción. La profesora Dina opta por la primera. El profesor Alberto se inclina por la segunda alternativa. La profesora Abigail comenta:

-

Que sean dos sesiones para que [la retroalimentación] sea rica, y así nos llevemos la esencia del trabajo, ya que a lo mejor lo podemos implementar. Porque además vi cómo lo hizo la maestra [indica a la profesora Sabrina] y todo su proceso, no solo la versión final.

-

En consecuencia, el grupo decide que se añadan dos sesiones más y se ocupen para la etapa de retroalimentación colaborativa[AOS].

4.5.7. Descripción de la Sesión 12

La presentación de la Sesión 12 se encuentra en slides.com/zergiorubio/sidpdm-12

Momento 1: Recuento general del Seminario, y específico de la Etapa de Diseño

| 00:03:34 - 00:11:39 | Grupal | Recapitulación del trabajo realizado en el Seminario.

El coordinador realiza una recapitulación del trabajo realizado durante todas las etapas del Seminario, poniendo atención en la manera en que se ha ido constituyendo cada polo del proceso de negociación[ASD].

Luego comenta que el proceso de negociación fue utilizado como marco de las discusiones para determinar los componentes de la THA, y con base en la THA se comenzó a elaborar el diseño en un Libro GeoGebra y los materiales asociados al diseño, para los cuales se dio la particularidad en todos los diseños de usar primero materiales concretos y luego digitales[ASD][ACD][AAD][ADG].

| 00:13:16 - 00:14:19 | Grupal | Productos del Seminario.

El coordinador realiza una revisión de los productos que se han elaborado en el Seminario, que en general han sido para cada diseño la THA, el diseño en Libro GeoGebra y los materiales (ver imagen 3.7)[ASD].

| 00:14:20 - 00:17:38 | Grupal | Registro de información en el aula virtual.

El coordinador propone a los miembros del Seminario, que a medida que vayan concluyendo sus Libros GeoGebra y materiales, puedan depurar y completar el registro de información de cada diseño en el aula virtual, compartiendo el enlace de la THA, del Libro GeoGebra y otros[AOS][ACD].

Momento 2: Elaboración del diseño en un Libro GeoGebra y los materiales asociados a este

| 00:18:25 - 01:19:10 | Alberto y Alejandro | Configuración de la tarea 4 en una Hoja dinámica.

Alberto y Alejandro continúan el trabajo de la sesión anterior, con la creación de la hoja dinámica “Traza, explora y caracteriza elementos de la circunferencia y el círculo”¹⁶ para la cuarta tarea del diseño: *Trazar, explorar y caracterizar elementos de la circunferencia y el círculo en un ambiente de geometría dinámica*[ACD][ASD].

00:28:27 A partir de la estructuración de una actividad en una Hoja dinámica, Alberto y Alejandro discuten sobre posibles desempeños de los estudiantes[ASD]:

-

¹⁶Para acceder a la hoja dinámica **Traza, explora y caracteriza elementos de la circunferencia y el círculo** ir a la página ggbm.at/jTBh2DfV

Alberto: igual podríamos dejarlo aquí mismo para que ellos [los estudiantes] vean que es lo que se les esta dando, con lo que se les esta proponiendo.

Alejandro: Buena idea, para que ellos comparen.

Alberto: Y a partir de eso, igual y alguien se regresa y dice ¡ah!, puedo cambiar mi respuesta.

Alejandro: ¿Pero eso sería bueno o malo? que ellos cambien sus respuestas.

Alberto: Pues sería bueno, porque así le dan significado a lo que ellos están estudiando, y se vale esa parte de la adecuación del pensamiento.

-

00:38:50 Alejandro comenta con Alberto que en el applet *Elementos del círculo y la circunferencia*¹⁷ hubiese sido bueno que cada definición de un elemento del círculo (asociada a una casilla de Control¹⁸) haya sido independiente, para que la exploración de los estudiantes sea por cada elemento del círculo. Sin embargo no saben como hacer esa modificación al applet, por lo que ambos deciden solicitar la asesoría del coordinador. De igual forma comienzan sólo los dos la exploración del recurso digital para poder hacer las modificaciones deseadas, y cuando se encuentran con algo que no logran hacer, le piden asesoría al coordinador[AOS][AAD].

00:50:58 Alberto y Alejandro editan el applet siguiendo la asesoría técnica que les dio el coordinador, sin embargo al querer cambiar un aspecto de la edición, no lo logran porque ninguno de los dos conoce los comandos L^AT_EX. Al percatarse de esta situación, Zaid, que esta sentado al lado de ellos, les comenta que pueden encontrar editores L^AT_EX en línea, donde pueden construir la expresión deseada con la ayuda de botones, y el editor les arroja la expresión correspondiente, la cual puedes copiar y pegar en el applet[AOS][ACD].

| 01:22:48 - 01:33:52 | Alberto y Alejandro | Configuración de la tarea 5 en una Hoja dinámica.

Creación de hoja dinámica *Discusiones finales de la construcción del círculo y la circunferencia en su construcción*¹⁹ para la quinta tarea del diseño: *Confirmar el papel de los elementos del círculo y la circunferencia en su construcción*[ACD][ASD].

01:23:04 Alejandro propone que se incluya una actividad donde se pregunte a los estudiantes por las dificultades que tuvieron al construir el círculo y la circunferencia, tanto con los materiales concretos como en el AGD[ASD][ED][ADG].

01:24:56 Alberto menciona que en esta actividad hará la construcción del círculo y la circunferencia en el AGD de GeoGebra, donde, por una parte, activará sólo el rastro²⁰ del punto sobre la circunferencia, y por otro, activará solo el rastro del radio. En el primer caso para estudiar el significado de ese contorno y en el segundo para discutir sobre los puntos que se pintaron entre el centro y el extremo del radio[AAD][ADG].

¹⁷Para acceder al applet **Elementos del círculo y la circunferencia** ir a la página ggbm.at/jTBh2DfV

¹⁸Ver detalle de la herramienta Casilla de Control de GeoGebra en la página wiki.geogebra.org/es/Herramienta_de_Casilla_de_Control

¹⁹Para acceder a la hoja dinámica **Discusiones finales de la construcción del círculo y la circunferencia en su construcción** ir a la página ggbm.at/YcXMxHNS

²⁰Ver detalle de la opción de rastro o rastreo en GeoGebra en la página wiki.geogebra.org/es/Rastreo

01:32:45 Como actividad final del diseño, proponen una discusión con todos los estudiantes la importancia de considerar las características de los elementos del círculo y la circunferencia, en su proceso de construcción[ASD][ADG].

| 01:34:18 - 03: | Alberto y Alejandro| Organización de las Hojas dinámicas en un Libro GeoGebra.

Creación del Libro GeoGebra Círculo y circunferencia: exploración y caracterización²¹ para estructurar el diseño completo, organizando todas las Hojas dinámicas ya construida[ACD][ASD].

01:35:07 Alejandro propone crear tres capítulos en el Libro GeoGebra, donde el primero contenga las actividades concretas, el segundo las actividades digitales y el tercero el cierre del diseño[ASD][AAD].

02:15:37 Alberto y Alejandro exploran el funcionamiento del Libro GeoGebra, descubriendo que las descripciones de cada capítulo son visibles en su respectiva portada[ACD].

02:17:00 Alejandro propone buscar imágenes en Internet para ponerlas en las Hojas dinámicas y así hacer más atractivo el diseño en términos visuales. Alberto responde que ellos podrían crear las imágenes a través de tomar fotografías, aprovechando que Alberto trajo los materiales concretos[ACD].

02:53:25 A propósito de las fotos de los materiales y su forma de uso, que estaban tomando Alberto y Alejandro, el coordinador les recuerda que es necesario hacer la depuración y el registro de la información en el aula virtual, sobre los materiales digitales empleados en el diseño (THA, Libro GeoGebra, etc.)[AOS].

03:26:15 Alejandro y Alberto ayudan a la profesora Dina a crear el Libro GeoGebra de su diseño, dándole algunas indicaciones, por ejemplo, que construya primero las Hojas dinámicas y luego el Libro GeoGebra[AOS][ACD].

| 03:27:10 - 04:08:02 | Alberto y Alejandro| Incluir imágenes a las Hojas dinámicas.

Finalmente, Alberto y Alejandro añaden a las Hojas dinámicas respectivas, las imágenes que tomaron de los materiales concretos mostrando cómo usarlos[ASD][ACD].

Momento 3: Registro de información en el aula virtual

| 03:01:26 - 03:24:09 | Grupal | Compartir archivos digitales.

El coordinador pregunta a los profesores si quieren hacer todos a la vez el registro de sus archivos digitales en el aula virtual, y así él los va guiando. Todos los profesores se muestran de acuerdo[AOS]. Luego guía la exploración de distintos recursos digitales

²¹Para acceder al Libro GeoGebra **Círculo y circunferencia: exploración y caracterización** ir a la página ggbm.at/gk97hyVa

(documento de texto de Google Drive y Libro GeoGebra) y las formas de opciones para compartirlos (privados, ocultos, públicos, con permisos de edición o no, etc.)[ACD].

| **03:25:07 - 03:30:17 | Grupal | Orden de las presentaciones en la Etapa de Retroalimentación colaborativa.**

El coordinador comenta con todo el grupo que la próxima sesión (13) comienza la Etapa de Retroalimentación colaborativa, y pregunta quién quiere presentar en tal sesión. Tanto la profesora Dina como la profesora Sabrina comentan que sería difícil presentar en la sesión 13 el diseño completo, la primera aludiendo a que esta más atrasada que el resto y la segunda por asuntos personales. En consecuencia la profesora Abigail y el profesor Alberto aceptan presentar en la sesión 13[AOS].

| **03:45:25 - 03:57:40 | Grupal | Compartir de manera responsable.**

El coordinador comenta al grupo que va a crear una Hoja dinámica con las referencias de los artículos²² reportados por la Dra. Xisela y Alejandro en las sesiones 06 (ver sección 4.5.1) y 07 (ver sección 4.5.2), para que cada uno de los profesores la copie en su Libro GeoGebra del diseño y haga las modificaciones respectivas[ACD].

²²Para ver la Hoja dinámica con las referencias ir a la página ggbm.at/JaggEun4

4.6. Descripción de la Etapa Retroalimentación colaborativa

4.6.1. Descripción de la Sesión 13

La presentación de la Sesión 13 se encuentra en slides.com/zergiorubio/sidpdm-13.

En esta sesión se presenta el diseño sobre Conservación de área y sobre Círculo y circunferencia. En respuesta a la focalización en el caso del profesor Alberto para la selección de datos de esta investigación, en la revisión de esta sesión se incluye el momento de introducción y el momento de la presentación del diseño sobre Círculo y circunferencia.

Momento 1: Introducción y sugerencia de parámetros para evaluar los diseños

| 00:00:04 - 00:04:10 | Grupal | Recuento del Seminario y parámetros para la evaluación.

El coordinador menciona que se ha pasado por varias etapas para llegar a la sesión actual, cada una de las cuales aportó de diferentes maneras a la elaboración de los diseños, de manera técnica en el uso de tecnologías digitales, uso de la THA como planeación de los diseños, exploración de actividades que permitieron confrontar significados escolares y resignificar nociones geométricas, comunicación de resultados de investigación en educación matemática, entre otros[ASD].

En esta sesión se presentan dos de los cuatro diseños didácticos elaborados en el Seminario. En primer lugar presenta la profesora Abigail su diseño sobre conservación de área y luego el profesor Alberto con su diseño sobre círculo y circunferencia, para los cuales el coordinador sugiere poner atención en los aspectos y productos ilustrados en la imagen 3.7 como guía para reconocer en la presentación de los diseños y la posterior retroalimentación[ASD].

Momento 2: Presentar el diseño de Círculo y circunferencia para la retroalimentación de todo el grupo

La presentación del diseño se da como un juego de roles, donde el profesor Alberto guía su desarrollo y el resto de los miembros del Seminario actúan como estudiantes que realizan la actividad. A su vez, mientras avanza la actividad de manera natural se dan discusiones sobre el funcionamiento de las actividades, las cuales se comenta entre todo el grupo. Finalmente, cuando se acaba el desarrollo del diseño, comienza la fase de retroalimentación colaborativa donde cada miembro da sus impresiones respecto del trabajo realizado con el diseño.

Para acceder al Libro GeoGebra donde está estructurado el diseño sobre Círculo y Circunferencia, ingresar a la página ggbm.at/gk97hyVa

| 02:11:40 - 02:12:56 | Grupal | Información general del diseño.

El profesor Alberto comenta que el diseño está pensado para aplicarse con estu-

diantes de 5to de primaria, para trabajar en grupos de tres en el aula de cómputo[ED].

| **02:13:58 - 02:18:07 | Grupal | Presentación de la tarea 1: Identificación del círculo y la circunferencia.**

02:13:58 El profesor Alberto comunica la descripción de la tarea y la primera actividad, la cual se refiere a preguntar a los estudiantes qué es para ellos el círculo y la circunferencia. Luego de registrar sus respuestas, los estudiantes pueden usar el botón Comprobación de respuestas²³) de la Hoja dinámica para comparar sus respuestas con las sugeridas por el profesor[ADG][ASD][AAD].

02:14:13 Se pide a los estudiantes que dibujen formas que no sean ni círculo ni circunferencia, pero que cumplan con las características que dieron en la actividad 1[ADG].

02:15:06 Se pide a los estudiantes que identifiquen en su aula de clases, formas circulares y circunferencias. Para ello se dispondrán algunos objetos en el aula, como aro, pelota, semáforo para ir al baño, etc.[ADG]. Alberto dice que se espera que los alumnos aún no distingan entre círculo y circunferencia[ED].

02:16:55 A partir de las respuestas que los estudiantes dieron en las actividades anteriores, se les pide que las comparen con las de otros dos compañeros y luego las reporten en la discusión con todos en la clase, donde el profesor las registra en la pizarra[ASD].

02:17:29 El coordinador pregunta por el rol del botón Comprobación de respuestas, a lo que Alberto responde que se espera validar la discusión y las respuestas que dieron los estudiantes desde el comienzo de la tarea[ASD][AAD]

| **02:18:10 - 02:52:58 | Grupal | Presentación de la tarea 2: Construye y explora distintas formas circulares.**

02:18:12 Alberto da las instrucciones generales de la tarea 2, poniendo atención en la disponibilidad de los materiales y el trabajo en grupos de tres, donde cada integrante del grupo realiza una construcción con un material distinto (clip, elástico y cordel)[AAD][ED].

El grupo sugiere que se le indique a los estudiantes que es necesario aplastar la plastilina hasta una región mínima que permita el buen desarrollo de la actividad[AAD]. Zaid propone que sea una forma amorfa o un cuadrado punteado en el cartón, a lo que el coordinador propone que el cuadrado sería mejor, ya que la actividad tiene

²³Ver detalle de la comando Comprueba de GeoGebra en la página wiki.geogebra.org/es/Comando_Comprueba

como objetivo confrontar las formas circulares del círculo y la circunferencia[ADG]. Alberto da las instrucciones para realizar la actividad concreta, usando los materiales provistos. El punto es que a los estudiantes no les resultará siempre una circunferencia[ASD][RIEM].

02:25:31 Luego de realizar las construcciones, se les presenta a los estudiantes una serie de preguntas sobre la tarea de construcción. El resto del grupo comenta cuál fue el tipo de figura que obtuvo[ADG][AAD].

La Dra. Xisela comenta que se podría trabajar en parejas para hacer más fácil trazar las figuras[ASD]y que desde la investigación se habla del razonamiento cuantitativo, que en términos de la tarea geométrica que se esta realizando se podría interpretar como relacionar la figura que se obtiene con su motivo de ser (*su porqué*), es decir, qué estoy haciendo que producen ese trazo[RIEM].

El coordinador reflexiona con el grupo que generalmente como profesores hacemos una actividad esperamos que los estudiantes nos den las respuestas correctas, sin embargo en esta actividad todas las respuestas de los estudiantes serán útiles como sustrato para la discusión de fondo[ASD].

Zaid dice que le provoca ruido la frase *puntos continuos* de la instrucción, ya que allí no hay continuidad, a lo que la Dra. Xisela complementa diciendo que esa frase provoca ruido si la pensamos como concepto matemático, pero que los estudiantes deben tener otra interpretación al respecto[ADG]. El profesor Alberto declara que la interpretación que él espera en sus estudiantes de la frase *puntos continuos* es un punto detrás de otro[ED], a lo que Zaid menciona que sería pertinente declarar tal decisión en la THA[ASD].

Luego, Alberto presenta la última actividad de la tarea 2 con la cual se pretende reconocer las características de los materiales que permitan construir el círculo y la circunferencia[ADG]. Sin embargo, tanto el coordinador y Zaid están de acuerdo en que en realidad sólo se construye la circunferencia, no el círculo; y que este último se podría construir usando el elástico, donde su punto máximo de elasticidad trazaría la circunferencia y todos los puntos hacia adentro (entre el máximo y el centro) constituye el círculo[ADG].

| 02:53:04 - 03:04:10 | Grupal | Presentación de la tarea 3: Exploración de la construcción con lápices y clip.

02:18:12 Alberto comunica la instrucción general de esta tarea y Zaid hace la observación que, al igual que en la tarea anterior, la construcción de los lápices con el clip permite trazar sólo la circunferencia[ADG].

El coordinador propone que después de haber realizado las actividades sobre la construcción de la circunferencia, podrían realizar tareas para construir el círculo. Zaid se muestra de acuerdo y añade que, se podría preguntar a los estudiantes con cuál de los tres materiales se podría construir el círculo, ya que debería tener claro lo que es la circunferencia para distinguirla de los puntos interiores[ADG][AAD].

02:54:35 Alberto menciona que la presente actividad pretende que los estudiantes identifiquen los elementos, entre el clip, el elástico y el cordel, que le permiten construir la circunferencia (se excluye el círculo por los comentarios recién realizados al diseño) y que describan sus características[ADG].

03:01:13 Se proponen tres características del elemento identificado, para que los estudiantes escojan cuáles añadir a la descripción realizada en la actividad anterior[ADG][ASD].

03:02:23 Se les pide al estudiantes que escriban una definición de circunferencia, a partir del trabajo realizado. El grupo comenta que la palabra *definición* tiene una connotación muy formal y, en consecuencia, los estudiantes se abstendrán de ensayar una inspirada en sus ideas personales. Se sugiere que la frase *definición de circunferencia* se cambie por tu definición de circunferencia, qué entiendes por circunferencia, o explica con tus propias palabras qué entiendes por circunferencia[ED].

| 03:04:13 - 03:21:13 | Grupal | Presentación de la tarea 4: Traza, explora y caracteriza elementos de la circunferencia y el círculo.

03:02:23 Se pregunta por el resultado de la tarea anterior, que estaba realizada en ambiente concreto, para hacer una transición hacia el AGD[ADG][AAD].

03:04:46 En la actividad 2, se dispone de un applet GeoGebra en blanco, para que los estudiantes exploren las herramientas que les permitan construir una circunferencia[AAD][ADG].

Luego se pregunta a los estudiantes con cuáles objetos concretos pueden relacionar el radio (clip), el centro (lápiz fijo) y la circunferencia (borde que se genera)[ADG]. El coordinador comenta que en la construcción en GeoGebra no necesariamente se identificará el radio como un elemento esencial para trazar la circunferencia, ya que las dos herramientas Circunferencia²⁴ se usa el par centro-punto y el centro-radio (como longitud, no como segmento)[AAD][ADG].

En consecuencia, Zaid propone que se tome una fotografía de la actividad concreta que realizarán los estudiantes con los lápices y el clip, para luego insertarla en el AGD de GeoGebra y sobre ella colocar un punto en el lápiz fijo y otro punto en el lápiz que se mueve, con los cuales se puede determinar el segmento correspondiente al radio[ACD][ADG].

03:16:39 Luego, el profesor Alberto presenta una actividad de exploración donde se utiliza un applet GeoGebra en el cual aparecen casillas de control con el nombre de di-

²⁴Ver detalle del comando Circunferencia de GeoGebra en la página wiki.geogebra.org/es/Comando_Circunferencia

ferentes elementos de la circunferencia (centro, radio, diámetro y cuerda), así como la circunferencia misma y el círculo, los cuales se muestran gráficamente[AAD][ADG]. Luego se realizan preguntas que apuntan a que los estudiantes discutan una caracterización de la circunferencia[ASD][ADG].

Como una instancia de formalización, Alberto muestra un applet GeoGebra que muestra elementos de la circunferencia en tres registros diferentes: gráfico, casilla de control y texto (definición)[AAD][ADG].

El coordinador sugiere que, dada las características técnicas de las Hojas dinámicas las cuales ordenan todo el contenido en una única columna, el applet usado pueda ser más angosto, para evitar que en dispositivos con otra resolución se pierda información[ACD].

| 03:22:03 - 03:29:31 | Grupal | Presentación de la tarea 5: Discusiones finales de la construcción del círculo y la circunferencia en su construcción.

03:22:18 Se les pide a los estudiantes que escriban las dificultades que tuvieron al realizar la construcción de la circunferencia, tanto con los materiales concretos y el en AGD[ADG].

03:26:15 Alberto comparte la última actividad del diseño con el grupo, se le pide explícitamente a los estudiantes que escriban sobre la importancia de considerar las características de los elementos del círculo y la circunferencia, en su proceso de construcción[ADG].

| 03:29:31 - 04:02:45 | Grupal | Retroalimentación del grupo para el diseño sobre Círculo y Circunferencia.

03:29:39 La profesora Dina comenta que ella hizo con sus estudiantes la construcción de la circunferencia con los lápices y el clip, dibujando en sus cuadernos, y que le había sorprendido que a pesar que no estaban realizando la misma actividad, también se manifestaron algunos resultados que reportaba la investigación[RIEM].

03:34:27 El coordinador destaca el uso novedoso del botón Comprobación de respuesta en la Hoja dinámica, ya que permite retomar las respuestas de los estudiantes del inicio de la tarea y validar el consenso al cual se había llegado en la discusión con los estudiantes en la lluvia de idea[AAD].

03:38:35 La profesora Abigail comenta que pensaba que se iba a incluir el applet con el cual se exploraban características de la circunferencia y el círculo, usando el arrastre. A excepción de ello, el diseño le gusta mucho y que le puede servir para usarlo con futuros grupos[AAD][ACD].

03:39:16 Zaid comenta que le gusta el diseño porque se nota de manera clara el hilo conductor que lo articula. Sólo le quedan dudas respecto de dónde debería incluir las tareas del círculo, porque cuando Alberto comenzó su presentación, parecía que estaba incluido, pero luego el grupo se dio cuenta que no. Por lo tanto, al incluirlo va a modificar la secuencia, por ello hay que hacerlo con cuidado[ASD][ADG].

El coordinador propone que la discusión en el diseño sobre círculo se podría dar a partir del applet al cual hacía alusión la profesora Abigail, y entre todo el grupo discuten cuál sería el mejor lugar para incorporarlo al diseño[AOS][ASD].

03:42:44 Alejandro comenta con la propuesta de abordar primero la circunferencia y después el círculo, no se está aprovechando tanto la parte de trabajo concreto, ya que cree que es posible definir el círculo en la parte de trabajo concreto del diseño. Al respecto, el coordinador complementa diciendo que en la propuesta de trabajar primero con la circunferencia y luego con el círculo, se puede partir la exploración de la circunferencia con los materiales concretos, luego hacer el tránsito al AGD para formalizar la noción de circunferencia y sus elementos esenciales (centro y radio) y comenzar la exploración del círculo, para finalmente volver con los materiales concretos para seguir trabajando con la noción de círculo[AAD][ASD][ADG].

Luego, Josué y Zaid aportan ideas para las actividades con materiales concretos para trabajar con el círculo. La primera propuesta es hacer la construcción, trazar la circunferencia y luego usar un clip más pequeño, con lo cual se podría reflexionar sobre cómo ha quedado dividido el plano, entre lo que está dentro de la figura, la figura y fuera de la figura, siendo la primera de ellas lo que corresponde al círculo. La segunda propuesta es hacer una construcción usando el clip, para trazar la circunferencia, y luego usar el elástico, que por su propiedad material permite trazar puntos fuera de la circunferencia, dentro o sobre ella[ADG][AAD].

03:47:58 Josué comenta que le gusta que el diseño parte de las consideraciones de los estudiantes. Además recomienda que no se den todos los materiales desde el inicio, ya que pueden distraer a los estudiantes. Al respecto, el profesor Alberto comenta que ya han trabajado ese aspecto con sus estudiantes, por lo que considera que no cree que se de esa situación de distracción[ED].

Josué también valora del diseño que gracias a que el hilo conductor de la actividad es nítido, el paso del trabajo en ambientes concretos al ambiente digital está muy bien hecho, incluso se da de manera transparente en la actividad donde se incluye en el AGD de GeoGebra una foto de los materiales concretos[ASD][AAD].

04:02:51 La Dra. Xisela realiza una reflexión sobre lo que ella considera que se ha logrado en el Seminario, a partir del tipo de discusiones y del trabajo realizado en la presente sesión. Comenta que en esta sesión de retroalimentación colaborativa se vio un ejemplo de acto *subversivo responsable* (aludiendo a perspectivas de investigación latinoamericana sobre desarrollo profesional docente), aludiendo que el currículo le pide al profesorado que enseñe círculo y circunferencia juntos, aunque

no dice porqué o cómo, sin embargo, en consecuencia a la discusión sostenida en esta sesión, se tomó colaborativamente la decisión de cambiar la manera de abordar tales nociones geométricas, primero trabajando con la circunferencia y luego con el círculo. Esta decisión fue una alteración del orden propuesto por el currículo, pero muy responsable, ya que fue una decisión fundamentada en la investigación, en lo que nos dice la experiencia como docentes y en las discusiones del grupo. También se hizo pensando en personas que no están en el Seminario, es decir los estudiantes del profesor y las profesoras[ASD][AOS].

La Dra. resume que lo que han logrado los profesores en el Seminario es apropiarse de lo que están enseñando, cómo lo están enseñando y las decisiones que están tomando, las cuales son decisiones profesionales[ASD].

Capítulo 5

Análisis de Datos

El análisis presentado en este capítulo se desarrolla a partir de reconocer la forma en que los componentes de la propuesta de integración digital, van evolucionando durante el transcurso de las sesiones del SIDPDM y aportan en el proceso de integración digital de los profesores. Las componentes de la propuesta de integración digital corresponden a aspectos de organización social [AOS], aspectos técnicos o de la cultura digital [ACD], aspectos didácticos o relacionados con el saber geométrico [ADG], y aspectos de los saberes docentes [ASD].

Los datos a analizar corresponden a episodios de las sesiones del Seminario, en las cuales se manifiestan las cuatro componentes de la propuesta de integración digital. Para el análisis, en primer lugar se analiza las maneras en que se manifiesta cada componente en cada sesión; en segundo lugar se analiza la manifestación de cada componente en las etapas del Seminario, lo cual permite ir determinando la evolución de cada componente en el transcurso del Seminario; y finalmente, se establece el rol de cada componente en el proceso de integración digital de los profesores, específicamente en el caso del profesor Alberto.

5.1. Manifestación de los componentes en cada sesión

A modo de facilitar su lectura, se presenta el análisis por sesión, separado por cada componente:

5.1.1. Aspectos de organización social

Sesión 01

Al comienzo se vislumbran los distintos grupos relevantes representados en el Seminario, al momento de la presentación de cada miembro.

Se dan interacciones multidireccionales en el desarrollo de una charla donde todos aportan, y al momento de dar su opinión al tomar una decisión en grupo.

Se abre el Seminario con un ejercicio para favorecer y promover las relaciones horizontales entre los miembros, es decir, decidir entre todos mediante consenso, aspectos importantes para el desarrollo del Seminario, como el número de sesiones, la duración de cada sesión, entre otros.

Una de las tareas iniciales fue reportar el contenido geométrico curricular a abordar en los diseños. En esta tarea se identifican diferentes objetivos para el grupo de profesores y de los investigadores: los primeros tienen que hacer un diseño para el contenido curricular y Alejandro (estudiante de posgrado) realiza el ejercicio de buscar investigaciones sobre cada tema.

Sesión 02

Se presenta el aula virtual como el espacio digital de interacciones del Seminario.

Se produce un pugna entre las relaciones asimétricas y horizontales de poder en el Seminario. Durante el desarrollo de una tarea, los profesores responden a ella como si fueran a ser calificados. En respuesta, el coordinador respeta el actuar de los profesores no interfiriendo en las actividades que comenzaron a realizar. Sin embargo, cuando se da cuenta que esta situación se prolonga durante la sesión y que es reproducida por todos los profesores, interviene y declara a todos los miembros que en el Seminario se favorecen y promueven las relaciones horizontales.

El coordinador se compromete a presentar el esquema general del Seminario para la próxima sesión, a través del cual comunicará el propósito de este espacio de desarrollo profesional docente.

Sesión 03

El coordinador comunica a los miembros, respecto del Seminario, su propósito general (integración digital) y propósito específico (elaboración de diseños didácticos).

Por otra parte, entre todos los profesores, realizan el ejercicio de configurar una THA para un contenido dado, distinto del reportado por cada uno ellos. En este ejercicio todos trabajan en conjunto, discutiendo, planteando ideas y haciendo acuerdos, aunque la planeación realizada no corresponda a la de algunos de los diseños de los profesores, sino que apunta a explorar una herramienta para la planeación de los diseños a ser utilizada en etapas posteriores.

Debido a que no se alcanzó a desarrollar una tarea, el coordinador propone que la desarrollen durante la semana, aunque lo ideal era trabajar en conjunto. Los profesores responder que se podría comenzar la siguiente sesión con la tarea pendiente, a lo que una profesora comenta que le gustaría avanzar en la tarea durante la semana. Se decide abrir un espacio en el aula virtual, para los que quieran avanzar durante la semana, y que se comenzará con la tarea pendiente la siguiente sesión. De esta manera, entre todo el grupo se toman decisiones para atender a cada una de las inquietudes de los profesores, en vez de decidir democráticamente por lo que manifestó la mayoría.

Sesión 04

Se comienza con la tarea que quedó pendiente de la sesión anterior y, dado que la profesora Dina trabajó durante la semana en la tarea, se retoma su Hoja de trabajo para que el resto de los profesores la copien y puedan explorar el recurso con base en lo que la profesora Dina elaboró como desarrollo de la tarea. Así, se actúa de manera consecuente a las decisiones tomadas en la sesión anterior respecto de la planeación del Seminario, y se atiende a las inquietudes de cada profesor, por ejemplo, al usar por todos, el recurso construido por Dina durante la semana.

Durante esta sesión hubo varias discusiones y reflexiones, por ejemplo, sobre el *copyright* y las licencias Creative Commons, los ambientes de diseño, desarrollo de una actividad de confrontación y el análisis de la actividad revisando su THA. Cabe destacar que en todas ellas, cada profesor compartió sus opiniones, experiencia e inquietudes de manera abierta e interactuando con el resto de los miembros. En este sentido, vemos esta situación como muestra de las relaciones horizontales entre los miembros, dado que todos tienen la posibilidad de aportar y cada aporte es igualmente valorado, no importando, por ejemplo, si es para declarar una opinión contraria al coordinador, para corregirlo o ampliar la reflexión. Además, cada miembro interactúa con los miembros y en su conjunto.

A propósito que queda propuesto un ejercicio, la profesora Sabrina declara que necesita llevarse la caracterización del trapecio rectángulo, porque quiere realizar el ejercicio, pero no es experta en matemáticas. En consecuencia, el coordinador le pide al profesor Alberto que comparta con todo el grupo su descripción del trapecio rectángulo, para que todos puedan trabajar en base a tal descripción. Esto alude, nuevamente a actuar en el Seminario, teniendo en cuenta las relaciones horizontales, así como a un aspecto del trabajo colaborativo, donde cada uno aporta al grupo desde su expertiz y experiencia, y todos tienen algo que recibir del trabajo en conjunto.

Sesión 05

A propósito de la conferencia de la maestra Rosa, se identifica que la colaboración entre diferentes actores involucrados en el fenómeno educativo, es un ingrediente clave para lograr una innovación educativa, y no sólo una reforma curricular.

Sesión 06

La Dra. Xisela presenta a todo el grupo, los resultados de investigación encontrados para el diseño sobre transformaciones geométricas.

Sesión 07

El coordinador propone una discusión, en la cual todos participan de manera activa, sobre lo que sabemos de los estilos de aprendizaje, para contrastarlo con la declaración de algunos científicos que recomiendan abandonar ese “neuromito educativo”. Aquí se identifica un nuevo ejercicio para promover las relaciones horizontales, y reforzar la interacción multidireccional entre los miembros.

El estudiante de maestría, Alejandro, presenta a todo el grupo los resultados de investigación encontrados para los diseños sobre conservación de área, círculo y circunferencia, y cálculo de área.

Sesión 08

Con el propósito de hacer buen uso del tiempo de la sesión y así discutir sobre el diseño de los cuatro profesores, el coordinador propone el uso de un temporizador para llevar el tiempo dedicado a la discusión de cada diseño. Todos los miembros del Seminario se muestran a favor de la propuesta. Aquí se identifica una preocupación por seguir propiciando las relaciones horizontales, en este caso representado por un mecanismo para utilizar el mismo tiempo para la discusión de cada diseño.

El coordinador comunica que están disponibles en el aula virtual, todas las presentaciones utilizadas para comunicar los resultados de investigación. También comenta que en el aula virtual esta disponible un espacio para que registren las versiones de los objetivos para cada THA. En estos casos se evidencia del esfuerzo por continuar promoviendo la interacción social en espacios digitales.

Las discusiones giran en torno a determinar una primera versión del objetivo de la THA. Todo el grupo participa en la discusión de cada diseño, donde cada miembro aporta a la discusión de manera explícita. Cada una de las discusiones es un ejercicio de trabajo colaborativo, en el sentido que todos tienen objetivos diferentes (configurar el objetivo de la THA, aportar desde la experiencia docente, aportar con resultados de investigación, atender a los ambientes de diseño), sin embargo, todos trabajan persiguiendo el propósito común de elaborar los diseños didácticos. Sumado a esto, cada uno aporta al grupo, y todos se benefician del grupo.

Sesión 09

El coordinador guía a los profesores para que registren sus objetivos configurados la sesión anterior, en el espacio dispuesto para ello en el aula virtual, promoviendo el uso de este espacio digital para la interacción social.

En respuesta a una pregunta de la profesora Sabrina, el coordinador comenta que el aula virtual también está pensando como un espacio para que interactúen entre los profesores, comentando el trabajo de los otros y atendiendo las sugerencias que los demás registran en el aula sobre el diseño correspondiente. En este caso se evidencian rasgos del trabajo colaborativo, puesto que cada uno aporta al resto del grupo, y también, cada profesor se beneficia de los aportes del grupo, lo cual también habla de las interacciones multidireccionales.

Debido a la manera en que se desarrolla el trabajo, el coordinador propone a los profesores reconfigurar el plan de la presente sesión, de tal manera que cada uno de ellos pueda proponer las tareas de la THA, con base en la discusión grupal sostenida en la primera parte de la sesión. Todos los miembros se muestran de acuerdo. Dado que en la primera parte de la sesión se modificaron las actividades para atender las inquietudes de los profesores, lo cual demuestra un ejercicio horizontal de poder, se les propone que trabajen de manera individual con base en las discusiones ya sostenidas para planear las tareas de sus respectivas THA.

Debido a que la sesión 10 es la última de la Etapa de Diseño, el coordinador le propone a los profesores tener sesiones individuales durante la semana, para terminar la THA. Todos los profesores se muestran de acuerdo y se negocia el horario de trabajo con cada uno. En este caso identifica el ejercicio de acciones basadas en la horizontalidad en las relaciones entre los miembros, al tener en cuenta el plan del Seminario consensuado entre todos, y luego negociar los horarios para trabajar durante la semana.

En respuesta al trabajo a realizar durante la semana, el coordinador propone usar documentos compartidos de Google Docs para que tanto el profesor y el coordinador puedan editarlo. Todos se muestran de acuerdo, aunque hay algunos que no sabe utilizar tal recurso, por lo que todos lo exploran. En esta situación se sigue ejercitando las relaciones horizontales de poder, ya que nuevamente se toma una decisión en grupo, atendiendo a las necesidades e inquietudes de cada miembro.

Sesión 10

El coordinador comunica al resto de los miembros que la forma de trabajar en el Seminario se modificó, pensando en la fase de confección del Libro GeoGebra y los materiales. Es por ello que se invitó a dos estudiantes de posgrado en Matemática Educativa, con experiencia en el uso de los diferentes recursos GeoGebra, para que trabajen con los profesores. De tal manera, cada profesora o profesor trabaja junto a un estudiante de posgrado en la confección del Libro GeoGebra y los materiales del diseño.

En este episodio se identifica un rasgo del ejercicio horizontal de poder, al preocuparse por cumplir los tiempos consensuados entre todos, aunque la decisión de adaptar la forma de trabajo en el Seminario es tomada por el coordinador. También se incorpora al Seminario la participación de representantes de la cultura digital, para que cada pareja de trabajo quede constituida por un representante del profesorado y representante de a cultura digital, quienes también son representantes del grupo social de investigadores.

Al trabajar en conjunto el profesor Alberto con el estudiante Alejandro y el coordinador, este último les propone realizar ajustes al diseño, lo cual es estudiado por Alberto y Alejandro, decidiendo que sería bueno tomar en cuenta la observación. En este episodio se evidencia el ejercicio de las interacciones multidireccionales en el trabajo entre los tres (Alberto, Alejandro y el coordinador), donde también hay evidencia de desarrollar un trabajo colaborativo, en el sentido de la mutualidad y al atender a los objetivos particulares mientras se atiende al propósito específico el Seminario (elaboración de diseños). Sumado a lo anterior, interpretamos la acción de evaluar las propuestas del coordinador para luego decidir si tomarlas en cuenta o no, como un ejercicio de las relaciones horizontales por parte de los miembros, ya que asumen a la propuesta no como una imposición, sino como una instancia de diálogo y valoración respecto del trabajo.

En consecuencia al buen trabajo realizado en la presente sesión, el coordinador propone a los miembros cambiar la sesión 11 de la Etapa de Retroalimentación, para que sea la última de la Etapa de Diseño. Todos se muestran a favor de la propuesta. En este episodio es posible identificar una convergencia de varios aspectos sociales propiciados durante el Seminario, los cuales ya se están asumiendo con naturalidad por los miembros. Nuevamente el coordinador hace una propuesta al resto del grupo sobre un ajuste de la planeación del Seminario, con base en el trabajo realizado en la presente sesión y teniendo en cuenta los plazos consensuados entre todo el grupo (ejercicio de relaciones horizontales de poder desde el coordinador hacia el resto de los miembros). Luego se discute la propuesta entre todo el grupo, para tomarla, o no, o hacer ajustes, con lo cual se evidencia el ejercicio de relaciones horizontales por los miembros, quienes ya asumen una horizontalidad en la relación con los demás al manifestar estar en igualdad de condiciones que el coordinador y los demás miembros. En la discusión de la propuesta se pone en juego la dualidad objetivo particular/propósito común del trabajo colaborativo para valorar la pertinencia de la propuesta, ya que todos quieren seguir avanzando de buena manera en la confección del Libro GeoGebra y sus materiales, pero teniendo en cuenta los plazos definidos entre todos.

Sesión 11

El coordinador recuerda el formato de trabajo de la sesión anterior, donde se trabajó entre una profesora o un profesor junto a un estudiante de posgrado para la confección del Libro GeoGebra y los materiales del diseño. De esta manera, cada pareja de trabajo esta constituida por representantes de los tres grupos sociales relevantes considerados en la planeación del Seminario.

En el trabajo entre Alberto y Alejandro, cuando intervino el coordinador, entre los tres discuten cómo plantear las actividades concretas de construcción, el coordinador realiza una propuesta, de la cual Alejandro no estaba muy convencido. Para poder decidir, recuerdan el objetivo de la actividad en cuestión, lo cual avala la propuesta y entre todos deciden considerar la sugerencia del coordinador. En este caso se identifica nuevamente un ejercicio de relaciones horizontales entre todos los miembros, al cuestionar la propuesta del coordinador y evaluar su pertinencia entre todo el equipo.

A partir de la discusión entre Alberto, Alejandro y el coordinador, sobre buscar, usar y modificar recursos de la plataforma Materiales GeoGebra, el coordinador lleva esa discusión hacia una sugerencia a todo el grupo. Este es un caso muy específico de la interacción multidireccional llevada a cabo durante el Seminario, ya que la discusión entre tres miembros se lleva como sugerencia a todo el grupo, aprovechando el trabajo de cada equipo para el provecho de todo el grupo.

Finalizando la sesión, se propone cambiar la sesión 12 de la Etapa de Retroalimentación a la Etapa de Diseño, puesto que se ha trabajado muy bien durante esta sesión, pero aún quedan ajustes por realizar. En consecuencia a que no quedarían sesiones de retroalimentación, Abigail propone que se añadan dos, para que se presente en detalle cada uno de los diseños. Al comienzo todos menos Dina estaban de acuerdo, por lo que Abigail comenta que la propuesta de que sean dos sesiones es para que la retroalimentación sea rica y cada profesor se pueda entender la esencia de cada uno de los diseños, ya que podrían implementarlo en el futuro. Además, todos los profesores vieron el proceso de elaboración de los diseños, no sólo el producto final. En consecuencia a esta intervención, Dina también comparte la decisión de añadir dos sesiones más al Seminario. En este episodio en el cual se toma una decisión grupal respecto de la planeación del Seminario, se evidencian varios aspectos de organización social. Por un lado, se identifican claramente la horizontalidad ya asumida por todos, al discutir la propuesta del coordinador y la de Abigail. Dina expresa una opinión diferente a la del resto del grupo, consecuentes a sus deferentes objetivos, evidenciando la dualidad objetivo/propósito del trabajo colaborativo ya asumido con naturalidad por los miembros. Finalmente, la interacción entre Dina y Abigail, que luego se extrapola a la decisión del grupo completo, es un ejemplo de las interacciones multidireccionales asumidas desde hace varias sesiones por los miembros del Seminario.

Sesión 12

El coordinador propone a los miembros que a medida que vayan concluyendo sus Libros GeoGebra y materiales, puedan depurar y completar el registro de información asociada a los diseños, en el aula virtual, lo cual vuelve a recordar durante la sesión y finalmente guía a los profesores para que todos lo hagan al mismo tiempo. Aquí se identifica como se sigue promoviendo la interacción social en espacios digitales.

A propósito que Alberto y Alejandro quieren modificar un applet, reconocen que no

saben cómo lograr tal modificación, por lo que deciden pedir ayuda al coordinador. Sin embargo, comienzan entre los dos la exploración al recurso y solo solicitan ayuda cuando no saben cómo continuar. El coordinador los guía para lograr su objetivo, y luego se une Zaid, quien les sugiere que usen un editor \LaTeX para lograr su objetivo. Aquí identificamos el ejercicio de relaciones horizontales por todos los miembros del Seminario, al poder recurrir a cualquier miembro para solicitar ayuda. También se evidencia el trabajo colaborativo en pleno en esta situación.

Alejandro y Alberto ayudan a la profesora Dina a crear el Libro GeoGebra y dando algunas sugerencias para el trabajo con los recursos digitales. Aquí se reconoce la misma situación de relaciones horizontales y trabajo colaborativo pleno, del cual antes habían sido los beneficiados y ahora son los benefactores.

Por último, se define el orden de las presentaciones para la Etapa de Retroalimentación colaborativa. Al respecto, tanto la profesora Sabrina como la profesora Dina manifiestan dificultades para presentar sus diseños la próxima sesión. En consecuencia la profesora Abigail y el profesor Alberto acepta presentar la sesión 13. Este episodio es otra muestra de la manera en que se han estado tomando decisiones respecto a la planeación del Seminario entre todo el grupo. Se discute entre todos, con la libertad y seguridad de dar su opinión de manera abierta, expresando sus objetivos particulares. Todo ellos es un ejemplo del ejercicio de la interacción multidireccional, las relaciones horizontales y el trabajo colaborativo.

Sesión 13

Esta sesión se desarrolla como una instancia de trabajo colaborativo, donde cada miembro aporta desde su participación, experiencia y conocimiento, para reforzar, ajustar o robustecer los diseños presentados. La interacción es multidireccional y se dan en una horizontalidad entre las relaciones de los miembros, con la confianza y seguridad de que sus intervenciones serán consideradas y respetadas, aun cuando sean opiniones minoritarias.

5.1.2. Aspectos técnicos o de la cultura digital

Sesión 01

Se reflexiona sobre el impacto que la Tercera revolución de la humanidad tuvo a diferentes niveles (social, educativo y en la educación matemática), los cuales se han dado en dos planos generales: el ámbito oficial y el no oficial.

El coordinador guía la exploración de Moodle, para que cada profesor ingrese al aula virtual del Seminario con su usuario y contraseña.

Se da un atisbo de prácticas digitales como búsqueda, curaduría y descarga de información, así como compartir de manera abierta.

Sesión 02

Se reflexiona sobre la filosofía subyacente al *software* libre y sus implicaciones sociales. Además, se comunica que en la Comunidad GeoGebra se vislumbra el propósito de atender las necesidades de los profesores, no solo a los de matemáticas, sino a todo el profesorado en general.

El coordinador presenta a los profesores, las herramientas Moodle y GeoGebra, en sus diferentes modalidades y sus formas de uso. En primer lugar se explora el aula virtual (montada con Moodle) y se muestra la manera en que será usada durante el Seminario, tanto en su versión en línea como para dispositivos móviles. También se comienza la exploración de los recursos GeoGebra, Hoja dinámica, Libro y Grupo GeoGebra, y se aprovecha para que los profesores realicen el ejercicio de usar uno de estos recursos (Hoja dinámica) desde cero.

El coordinador guía la creación del perfil personal de GeoGebra de los profesores, espacio digital que sirve para compartir materiales de manera abierta y representa un espacio de interacción digital. También se reflexiona y se muestran ejemplos sobre los permisos de visibilidad que se le pueden dar a los materiales (privados, compartir mediante enlace o públicos). Todos estos recursos y espacios digitales son propios de la práctica digital de compartir de manera abierta y responsable.

En la sesión, también se realiza pone en funcionamiento la práctica de compartir de manera abierta, cuando el coordinador les provee un video tutorial sobre cómo añadir recursos a un Grupo GeoGebra.

Sesión 03

Se dan instrucciones técnicas para realizar la tarea de creación de un Libro GeoGebra, aunque no se alcanza a trabajar en esta sesión.

Sesión 04

La profesora Dina comparte con el grupo la experiencia que tuvo hace poco de poder organizar una actividad con sus estudiantes fuera del horario de clases, mediante una video llamada con ellos. Este es un ejemplo de la forma en que los profesores van a incorporar a su quehacer docente las prácticas digitales (comunicación en tiempo real y de manera no presencial) que le sean útiles, en este caso, en términos educativos y de organización.

El coordinador guía a los profesores en la exploración del recurso Libro GeoGebra, mostrando en detalle la manera de crear un Libro desde cero. En esta tarea se hace el ejercicio de articular en un Libro la THA configurada la sesión anterior. Todos los profesores van replicando el procedimiento que va guiando el coordinador.

El coordinador realiza una reflexión sobre las licencias de autoría de las obras, comparando el clásico derecho de autor con las licencias de Creative Commons.

Sesión 05

El coordinador guía la exploración y uso del Grupo GeoGebra del Seminario, donde los profesores reportan sus respectivos desarrollos de la actividad propuesta.

Se reflexiona respecto de la atención de las necesidades reales de las personas por parte de las comunidades digitales, en el caso de la Comunidad GeoGebra, sus necesidades educativas. De esta manera se explica que en el recurso Grupo GeoGebra exista una opción para evaluar, pero no para calificar (necesidad oficial).

Sesión 06

El coordinador realiza una reflexión sobre los intentos de los Estados, organizaciones internacionales y las corporaciones, por incorporar tecnología digital a la educación, y que en realidad tales intentos responden a necesidades institucionales o corporativas, no educativas. Esto, para distinguir los programas de inclusión digital de las propuestas de integración digital, como lo es el Seminario.

Frente al panorama siempre cambiante en la educación y las propuestas de incorporar tecnología digital, el coordinador identifica a las comunidades digitales (e.g. Comunidad GeoGebra) como una estabilidad dinámica en el ámbito de las tecnologías digitales incorporadas a la educación, a las cuales los profesores podrían poner atención. Aquí se identifica la declaración de una parte de la propuesta de integración digital del Seminario, la cual corresponde a que los profesores se integren a la cultura digital.

Sesión 07

No hay discusiones sobre este aspecto en esta sesión.

Sesión 08

Se comunica que en el aula virtual se está dejando los documentos trabajados en las sesiones, además de disponer de espacios para registrar los avances en la planeación de cada diseño. Aquí se evidencia el uso del aula virtual como repositorio y como instancia de discusión grupal.

En la discusión sobre el diseño de conservación de área, el coordinador propone que se use el AGD de GeoGebra para construir un tangram con las características necesarias para confrontar la idea de que sólo los polígonos con igual área son congruentes, idea que no es posible trabajar con el tangram de madera. Este caso es un ejemplo de la práctica digital de materializar las soluciones a las problemáticas de las personas.

Sesión 09

Para comenzar la sesión, el coordinador reflexiona sobre las implicaciones sociales de las tecnologías construidas por comunidades digitales, tanto en su desarrollo, distribución y uso. Se presenta el caso de Reveal.js y Slides.com como ejemplo de la reflexión.

El coordinador guía a los profesores en el uso del aula virtual para publicar sus objetivos de la THA. También se ilustra sobre las opciones de trabajo en conjunto que propicia el aula virtual.

El coordinador propone que las sesiones individuales se realicen a través de video llamadas, para lo cual guía la exploración de recursos que proveen tal servicio. Hace lo mismo con los documentos compartidos de Google Docs.

Sesión 10

Alberto y Alejandro comienzan la confección del diseño en un Libro GeoGebra, haciendo uso técnico de este recurso.

Sesión 11

El coordinador reflexiona sobre las características del Libro GeoGebra, que permiten estructurar todo el diseño en él, tanto las actividades concretas como las digitales, ya que la mayoría estaba pensando usar el Libro solo para las actividades digitales. Con esto se muestra el potencial pragmático del recurso, el cual, dadas sus características, da soporte a las actividades digitales y también a las concretas.

Alberto y Alejandro crean Hojas dinámicas para cada tarea del diseño, y a su vez van descubriendo nuevas formas de manipularla y usarla con fines didácticos y extra-didáctico. Este caso es un ejemplo de lo progresivo de la propuesta de apresto técnico, ya que cada vez que se vaya explorando y usando la tecnología digital, se irán aprendiendo más cosas

acerca de ella.

En varias actividades del diseño, Alberto y Alejandro incorporan recursos digitales para robustecer el diseño: crear un video para mostrar la forma de usar los materiales concretos, en vez de redactar una indicación muy larga que pueda confundir a los estudiantes; incluir applet de terceros y modificarlos para que se ajusten a las necesidades del diseño; tomar fotos de los materiales para incluirlas en las indicaciones de las Hojas respectivas. En este episodio se identifica que los profesores están repensando los usos de tecnologías y recursos digitales que ya conocían, como los videos y las fotografías, para integrarlos a su práctica docente.

Alberto y Alejandro buscan applet sobre círculo y circunferencia en la plataforma Materiales GeoGebra, descargan dos que les parecen pertinentes para sus actividades, luego los modifican y finalmente el coordinador recuerda citar a los autores de cada recurso. Este episodio es un ejemplo del funcionamiento de la práctica digital de compartir de manera abierta y responsable.

Sesión 12

Con el registro y depuración de la información sobre los diseños, se pretende promover la práctica digital de compartir de manera abierta. Se añade la consideración de compartir de manera responsable, citando las fuentes de los recursos de terceros que estamos utilizando, de manera íntegra o siendo modificados.

Cuando Zaid sugiere a Alberto y Alejandro que busquen un editor de \LaTeX , les sugiere que busquen en Internet la frase “editor \LaTeX ” y seguro van a encontrar el recurso que necesitan. Aquí se evidencia la práctica digital de búsqueda y acceso a la información, ya que aunque no sepamos exactamente lo que estamos buscando, la arquitectura de búsqueda nos permite acceder a la información mediante búsquedas poco precisas.

Debido al uso del Libro GeoGebra, Alberto y Alejandro van descubriendo nuevos usos del recurso. Esto está en sintonía con la idea de apresto técnico, el cual se da de manera progresiva a medida que se exploran y usan las tecnologías digitales.

Para hacer más ilustrativas las instrucciones Alejandro propone buscar imágenes en Internet para añadirlas al diseño, a lo que Alberto responde que ellos podrían tomar fotografías para incluirlas en el Libro GeoGebra. Este es un ejemplo de la ampliación de la propuesta de integración digital desarrollada en el Seminario, donde se integran tecnologías digitales desconocidas y también se repiensen los usos de las tecnologías que ya conocían.

Alberto y Alejandro asesoran a la profesora Dina en la construcción de su Libro GeoGebra y Hojas dinámicas. Aquí se identifica un uso técnico de GeoGebra, tanto en el uso guiado como en su exploración.

Sesión 13

En términos generales, la presentación del diseño se hace mostrando el Libro GeoGebra donde fue confeccionado íntegramente. Este recurso digital fue escogido por sus características para soportar la hibridación de ambientes, trabajando con espacios concretos y digitales.

Específicamente, en un episodio de la presentación del diseño de Alberto donde se muestra un applet muy ancho, el coordinador comenta que dada la estructura de las Hojas dinámicas a una sola columna, sería recomendable hacer más angosto el applet, para que no se pierda información en pantallas con una resolución distinta o de menos tamaño. En este episodio se reconoce el proceso de apresto técnico de GeoGebra, el cual se sigue dando progresivamente.

5.1.3. Aspectos didácticos o relacionados con el saber geométrico

Sesión 01

No hay discusiones sobre este aspecto en esta sesión.

Sesión 02

No hay discusiones sobre este aspecto en esta sesión.

Sesión 03

Alberto reflexiona sobre poder valorar los procedimientos no usuales en la resolución de tareas matemáticas, lo cual es un ejemplo de la concepción de matemáticas relativistas que tiene el profesor.

Exploración de propiedades esenciales de los ángulos, en las obras de Euclides y Hilbert.

Sesión 04

Los profesores desarrollan una actividades donde se trabaja, pro primera vez en el Seminario, con aspectos del carácter dinámico de la geometría, tales como el proceso de construcción y la identificación de invariantes. El primero visto como una práctica geométrica de representación, a través del cual se producen propiedades geométricas, como paralelismo y perpendicularidad. La segunda como una práctica de abstracción de propiedades geométricas, mediante la identificación de lo que permanece invariante al aplicar la prueba del arrastre a un diagrama geométrico.

A propósito de la revisión de la THA de la actividad ya desarrollada por los profesores en esta sesión, se presentan significados geométricos a confrontar. Estos significados geométricos a confrontar con los significados escolares, son ejemplos para promover una visión relativista de las matemáticas frente a una hegemónica promovida por lo oficial.

Sesión 05

Los profesores desarrollan y reportan en el Grupo GeoGebra, una actividad de construcción geométrica.

La maestra Rosa realiza una conferencia abordando los aspectos esenciales del ángulo, la cual detona una discusión entre los miembros del Seminario, acerca de aspectos didácticos del ángulo.

Sesión 06

Para finalizar su charla, la Dra. Xisela comunica los resultados de investigación sobre aspectos didácticos de las transformaciones geométricas que se podrían considerar para el diseño.

Sesión 07

En cada una de sus presentaciones, Alejandro comunica los resultados de investigación sobre aspectos didácticos de conservación de área, círculo y circunferencia, y cálculo de área que se podrían considerar para el diseño.

Sesión 08

En la discusión sobre el diseño de transformaciones geométricas, se menciona que en primera instancia la actividad podría guiar a los estudiantes a la exploración del movimiento en términos cotidianos, para luego ir describiendo ese movimiento y finalmente asociarlo a nociones geométricas de transformaciones. En este proceso es posible identificar la manera en que se considera el tránsito de los objetos concretos hacia los objetos (geométricos) teóricos, mediante la descripción de datos empíricos con la intención de ir abstrayendo sus cualidades teóricas.

También se pone en juego el rol del marco de referencia para trabajar con la noción de transformación geométrica, lo cual identificamos como un aspecto general de las matemáticas.

En la discusión sobre el diseño de círculo y circunferencia, se identifica al centro y el radio como elementos esenciales para construir la circunferencia.

También se propone que los estudiantes exploren su sala de clase para que reconozcan círculos y circunferencias. Aquí se evidencia el trabajo con la experiencias empíricas sobre las formas geométricas a estudiar.

Se propone construir con plastilina, un clip y dos lápices, el trazo de la circunferencia, y luego compararlo con el trazo que se produce en las mismas condiciones usando un elástico y una cuerda, para diferenciar formas circulares del círculo y la circunferencia. Aquí se pone de manifiesto la práctica geométrica de construir y bosquejar, para distinguir la circunferencia de formas amorfas con bordes redondos.

Finalmente se propone que usar el AGD para identificar la relevancia del centro y el radio en la construcción de la circunferencia, en lo que se identifica como una actividad para poner a prueba las conjeturas realizadas sobre los elementos geométricos esenciales.

En la discusión sobre el diseño de conservación de área, se propone el uso del tangram para confrontar la relación a igual perímetro, igual área; además se plantea usar el AGD para construir un tangram que permita confrontar la relación sólo los polígonos con igual área son congruentes. En este caso se pone atención en las ideas geométricas a confrontar, manipulando materiales concretos y digitales.

En la discusión sobre el diseño de cálculo de área, se considera que es necesario precisar a qué figuras se les calculará el área (polígonos regulares o irregulares, círculo, figuras en general); se recuerda de la investigación recomienda trabajar primero con la noción de área, luego con la medición y finalmente con el cálculo de área. En esta discusión se pone atención en los aspectos esenciales para el cálculo de área.

Sesión 09

No se identifica situaciones evidentes sobre este componente en los datos.

Sesión 10

Alberto y Alejandro revisan la THA sobre el diseño de círculo y circunferencia para hacer ajustes en caso de ser necesario. Al respecto se proponen actividades donde los estudiantes trabajen con objetos concretos, para favorecer la distinción entre formas circulares de círculo y circunferencia. Aquí hay evidencia de la atención al trabajo con objetos concretos para poner en funcionamiento la intuición empírica, distinguiendo objetos circulares de otros objetos curvos, que no sean ni círculo ni circunferencia.

Luego se proponen actividades para representar trazos que permitan reconocer la circunferencia, y distinguirla de otros trazos posibles como la espiral o un trazo amorfo. Aquí se evidencia la importancia de la práctica geométrica de representación, tanto en la acción de representar, como en el estudio de lo representado y cómo fue el proceso que generó tal representación. Para así, poder reconocer la relación entre las características de los materiales y su uso, con el trazo resultante, es decir, que el las características del trazo esta directamente relacionada con el proceso de representación que lo generó.

A partir de esta primera fase de la actividad donde se pretende reconocer propiedades gráfico-espaciales mediante la intuición empírica y la práctica de representación, se pasa a una segunda fase para hacer evolucionar tales características en propiedades geométricas, mediante la intuición sofisticada. Sin embargo el coordinador sugiere ajustar el diseño, ya que no se ve conexión entre el trabajo en ambientes concretos y ambientes digitales. Para lo cual propone un hilo conductor del diseño, con base en las consideraciones del Trabajo geométrico.

Sesión 11

Alberto y Alejandro construyen las Hojas dinámicas para el diseño de círculo y circunferencia. En este proceso, junto con el coordinador, discuten sobre el propósito de la actividad de representación con materiales concretos, donde concluyen que lo importante es que los estudiantes puedan justificar el tipo de trazo que les resultó, a partir de las características de cada material, no importando si bosquejaron la circunferencia o no. Por lo tanto, lo relevante de la actividad de construcción es razonar respecto de cómo el procedimiento, los materiales y el uso de ellos inciden en la producción de cada trazo.

Se incluye una tarea donde le indican a los estudiantes que dibujen en sus cuadernos formas circulares que no sean círculos ni circunferencias. Aquí se reconoce la práctica geométrica de representación, específicamente de bosquejar, además de emplear la intuición empírica para distinguir formas circulares de otras que no lo son.

Se propone la tarea de representación sobre plastilina, ayudados con un clip, un elástico y un trozo de cuerda, para que los estudiantes reflexionen sobre la relación entre cada trazo resultando y el material empleado. Luego se pregunta a los estudiantes con cuáles elementos concretos pueden relacionar el círculo y la circunferencia. En esta actividad se reconoce la práctica de representación, para luego reflexionar sobre las características del material (objeto geométrico concreto), y hacerlas evolucionar en las propiedades teóricas (geométricas) asociadas.

Sesión 12

Se propone una tarea en la cual se pregunte a los estudiantes por las dificultades que tuvieron al construir el círculo y la circunferencia, tanto con los materiales concretos como con el AGD. Aquí se identifica la atención que ponen en el la práctica geométrica de representación, específicamente como procedimiento.

Alberto comenta que hará una actividad donde usará un applet que le permita trazar el rastro de un punto para trazar una circunferencia, y luego activar el rastro del segmento para trazar el círculo. En el primer caso se pretende discutir sobre el significado del contorno, y en segundo lugar discutir sobre los puntos que se pintaron entre el centro y el extremo del segmento. En esta actividad alude a poder relacionar los elementos esenciales del círculo y la circunferencia, a saber el centro y el radio, con un procedimiento de representación.

Como actividad final, se propone una discusión con todos los estudiantes sobre la importancia de considerar las características de los elementos del círculo y la circunferencia, en su proceso de construcción. En esta actividad se pretende poner en funcionamiento la práctica geométrica de abstracción, para reconocer los elementos esenciales que permiten general al círculo y la circunferencia.

Sesión 13

El profesor Alberto presenta su diseño al resto del grupo, mostrando cada una de las tareas.

En la tarea 1, pregunta a los estudiantes qué es para ellos el círculo y la circunferencia. Aquí se identifica un trabajo con los objetos geométricos teóricos, mediante la práctica de abstracción. Se espera que la caracterización de los estudiantes sea sobre todo por propiedades gráfico-espaciales.

Luego se pide a los estudiantes que dibujen formas que no sean círculo ni circunferencia, pero que cumplan con las características dadas en la actividad anterior. Acá se pone en funcionamiento la práctica de representación mediante bosquejos, para representar ciertas formas; y la intuición empírica para distinguir entre ellas las que son circunferencias y círculos otras formas.

A continuación se pide a los estudiantes que puedan identificar en su aula de clases, formas circulares y circunferencias. Alberto declara que espera que los estudiantes no diferencien al círculo de la circunferencia. Se identifica un trabajo para obtener datos empíricos en el

trabajo con objetos concretos.

En la tarea 2, se comienza haciendo trazos sobre plastilina, usando dos lápices (uno fijo y otro móvil) y tres materiales que une el lápiz móvil al fijo: un clip, un elástico y una cuerda. Aquí se identifica la práctica de representación, cuyos resultados pueden ser construcciones o bosquejos.

Luego se realizan algunas preguntas a los estudiantes para que reflexionen sobre las características de los materiales y la manera en que influyen en el trazo obtenido. Aquí identificamos en funcionamiento la práctica de representación, poniendo atención en el procedimiento realizado, las características de los materiales y la forma en que fueron usados.

A continuación se pretende que los estudiantes reconozcan las características de los materiales que les permiten construir el círculo y la circunferencia. Se identifica el funcionamiento de la práctica de abstracción, en el sentido de reflexionar sobre las características de materiales concretos, para comenzar a identificar los elementos esenciales para determinar al círculo y la circunferencia.

Finalmente, Zaid y el coordinador advierten que la actividad propuesta permite construir solo la circunferencia, no el círculo.

En la tarea 3, se parte pidiendo a los estudiantes que identifiquen los elementos que le permitieron construir la circunferencia en la tarea anterior, y que describan sus características. Aquí se identifica la práctica de abstracción, específicamente la intuición empírica, puesto que se espera que reconozcan características de los materiales, como rigidez.

Luego se proponen al estudiante tres características de los elementos identificados, para que escojan los que puedan añadir a su descripción. Al igual que en la actividad anterior, se pone en funcionamiento la práctica de abstracción mediante la intuición empírica de las características de los materiales concretos que permiten trazar la circunferencia.

A continuación, se pide a los estudiantes que escriban su definición de circunferencia. En esta actividad es posible reconocer la práctica de abstracción, específicamente de la intuición sofisticada, al tratar de reconocer los elementos esenciales que permiten determinar a la circunferencia.

En la tarea 4, se pregunta a los estudiantes con cuáles materiales concretos logró representar la circunferencia, para identificar al clip como el material idóneo entre los tres, debido a su característica de rigidez, asociada a la propiedad de equidistancia característica de la circunferencia.

Luego se dispone de un applet en blanco para que los estudiantes exploren las herramientas del AGD de GeoGebra, y puedan construir la circunferencia e identificar sus elementos. Aquí se reconoce la práctica de representación, la cual puede darse como construcción o bosquejo.

A continuación se pregunta a los estudiantes con cuáles de los objetos concretos relacionamos el radio, el centro y la circunferencia. Aquí reconocemos un nuevo intento por reforzar la relación entre las características concretas de los materiales con objetos geométricos, estableciendo un tránsito entre lo concreto y lo teórico.

En seguida se presenta un applet con casillas de control con el nombre de diferentes elementos de la circunferencia, que al seleccionarlos muestran su representación gráfica correspondiente. Se pide a los estudiantes que exploren el applet y luego describan la circunferencia y sus elementos. Aquí identificamos en funcionamiento la intuición sofisticada coordinada con la intuición empírica, para describir la circunferencia a partir de sus elementos esenciales (centro y radio), usando ahora un lenguaje geométrico.

Finalmente se presenta un segundo applet, con caracterizaciones de la circunferencia y sus elementos, las cuales se piden contrastar con las que cada estudiante elaboró en la actividad anterior. En esta actividad se reconoce la intención de refinar las descripciones, alcanzando un estatus teórico.

En la tarea 5, se pide a los estudiantes que compartan las dificultades que tuvieron al representar la circunferencia con los materiales concretos como con el AGD. Aquí identificamos la atención al proceso de representación.

Luego se se pide a los estudiantes que explícitamente mencionen la importancia de considerar los elementos de la circunferencia en su proceso de representación. Reconocemos la intención por establecer una relación entre los elementos esenciales que permiten determinar la circunferencia (centro y radio), y la manera de usarlos para construirla.

En la fase de retroalimentación se hace la precisión de que las tareas generalmente permitían trabajar con la circunferencia y no con el círculo. Por lo cual es necesario incluir tareas para el círculo, lo cual modificará indefectiblemente el diseño.

Se propone añadir tareas en ambientes concretos después de la última tarea en ambientes digitales del diseño, en la cual se construya usando un clip, y añadir a la misma construcción un elástico para trazar puntos fuera, dentro y en la circunferencia, diferenciando así las regiones del plano que determina la circunferencia, y en consecuencia distinguir al círculo entre tales regiones. En esta propuesta se reconoce la práctica de representación para reconocer las regiones del plano y la abstracción de la esencia de la circunferencia.

5.1.4. Aspectos de los saberes docentes

Sesión 01

Alberto realiza un diagnóstico de la contradicción del sistema educativo, el cual les pide hacer algo (en términos de enseñar y qué enseñar) y les evalúa otra cosa. Este diagnóstico lo identificamos como una manifestación del rol mediador del profesor, entre lo oficial y no oficial en la educación.

Además identifica como un desafío el uso de la tecnología digital en la educación, puesto que en la actualidad toda la información está disponible y al alcance de los estudiantes, lo que provoca que los estudiantes no quieran razonar o estudiar. Por lo tanto el desafío es hacer que los estudiantes vean como una necesidad el aprender, mediante el razonamiento y no solo por la repetición. Esto lo interpretamos como una evidencia de los efectos de la 3RH en la educación, puesto que el profesor identifica que en la actualidad se tienen condiciones de acceso a la información más favorables que antes, debido a la aparición de las tecnologías digitales, lo cual propone el desafío de replantearse la educación.

Por otra parte, se informa a los profesores que se harán búsquedas de literatura especializada a partir de los contenidos geométricos que cada uno reportará en el aula virtual, para aportar con resultados de investigación a la elaboración de los diseños. De esta manera se pretende atender de manera robusta, e incluso desbordando, el requerimiento educativa oficial (cumplimiento del currículo).

Sesión 02

Al explorar los recursos de GeoGebra, emergen ideas desde los profesores sobre cómo podrían usarlo en su práctica docente, tanto como herramienta pedagógica y educativa. Tales propuestas generalmente están basadas en la experiencia docente de cada profesor.

Ante una tarea de la sesión, los profesores responden como si fuera una instancia oficial en la cual se les va a calificar por su desempeño.

Sesión 03

Alberto da muestras de su idea relativista de las matemáticas, al mencionar que no todos los conocimientos son construidos en la escuela, sino que también lo hacemos en la vida diaria. Al avanzar la sesión alude a que todos los significados asociados a una noción matemática están bien.

Se presenta la THA como una herramienta para articular las discusiones dadas en el marco del proceso de negociación, mediante la planeación del diseño.

Se propone una discusión sobre el rol del profesor como ejecutor técnico del currículo o profesional de la educación, declarando que la propuesta del Seminario los considera unos profesionales y eso se intenta favorecer.

En una tarea de la sesión, las dos profesoras de secundaria responden a ella de manera

tradicional (proponiendo tareas aunque se estaba discutiendo sólo del objetivo, y poniendo en juego aspectos pedagógicos cuando la discusión era didáctica).

Al configurar la THA no se discutió sobre el ambientes de diseño, por lo que se pensó por defecto para ambientes concretos. En consecuencia, luego se tuvo que adaptar para que encajara con los ambientes digitales.

Sesión 04

La profesora Dina comparte su experiencia de usar la video llamada con fines educativos, para organizar una actividad con sus estudiantes fuera del horario escolar.

Reflexión sobre la perspectiva de atender a lo específico de los ambientes de diseño, entendiendo que este es una hibridación entre el espacio concreto y digital.

El coordinador guía la revisión de la THA de una actividad, y muestra cómo se configuró con sustento de los resultados de investigación, de donde se rescataron ideas geométricas a confrontar.

A propósito de la revisión de resultados de investigación, se discute si la clasificación de cuadriláteros que usamos en la escuela es obsoleta, a lo que el profesor Alberto alude que el currículo solo nos pide que enseñemos esa como si fuera única, es decir, identifica el estatus hegemónico de las matemáticas escolares en este caso.

Entre todo el grupo se discute acerca de la manera poco creativa en que responden los estudiantes, y se concluye que esto se debe a lo que provoca el sistema educativo en ellos (cómo se enseña y qué preguntan los textos de estudio).

Sesión 05

La maestra Rosa muestra cómo confeccionó su diseño didáctico, en el cual se identifican aportes de cada uno de los polos del proceso de negociación usar en el Seminario (la investigación, su experiencia docente y la atención al ambiente de diseño).

Rosa muestra cómo una situación de clase que se repetía, le planteó una problemática susceptible de investigar, y que en la revisión de literatura se encontró con fenómenos que a ella también le ocurrían en su práctica docente. En ese sentido, se reconoce a la experiencia docente como fuente de problemáticas a investigar, y los resultados de investigación como una especie de generalización de ciertos fenómenos de la práctica docente.

También muestra cómo los resultados de investigación en educación matemática le permitieron fundamentar su diseño.

Recomienda hacer pruebas con los materiales a usar en el desarrollo del diseño, antes de aplicarlo con estudiantes. De manera que se pueda prever y ajustar situaciones provocada

por la manipulación y uso de los materiales.

Finalmente, entre todos discuten sobre la importancia de innovar en su práctica docente, ante la desidia el ámbito educativo oficial a las necesidades reales de profesores y estudiantes.

Sesión 06

El coordinador realiza una recapitulación del Seminario, rescatando los componentes que aportarán a la elaboración de los diseños, como la THA para la planeación y los resultados de investigación y los recursos digitales. Aquí se identifican los polos del proceso de negociación que se han ido configurando durante el Seminario, además de la THA como la articulación de las voces sociales representadas por cada polo. En su presentación sobre los resultados de investigación, la Dra. Xisela comienza a delinear el proceso de negociación, el cual se pone en funcionamiento pleno a partir de esta sesión.

Durante la presentación de la investigación por parte de la Dra. Xisela, cada profesor aporta a la discusión desde su experiencia docente; se vislumbra el aporte de la investigación en los diseños como el reporte de lo que en realidad aprenden los estudiantes, en contraste con los contenidos curriculares, que se refieren a lo que se espera que aprendan; se pone atención a los ambientes referidos en los resultados de investigación (concretos y digitales). En cada discusión se pone en funcionamiento el proceso de negociación, como una instancia de diálogo entre las voces sociales representadas por cada polo.

A propósito de la comunicación de aspectos curriculares asociados a los contenidos a trabajar por cada profesor, el coordinador realiza una reflexión sobre el impacto que tienen las reformas educativas en tales aspectos técnicos, y cómo responden generalmente a necesidades institucionales y corporativas, en vez de a las reales necesidades educativas de los estudiantes y profesorado. En respuesta, se invita al profesor a considerar cierta independencia (o autonomía) docente, para hacer frente, de manera profesional y responsable, a estos cambios educativos arbitrarios. Se identifica otro ejercicio de promover una docencia crítica y responsable.

Sesión 07

En la reflexión sobre la autonomía docente, mediante la discusión sobre los estilos de aprendizaje, se menciona como importante que los profesores puedan ser críticos con los resultados de investigación a incorporar en su práctica docente. Otro ejercicio para promover la visión de los profesores como profesionales de la educación, en este caso, siendo críticos con el uso de resultados de investigación en la práctica docente.

El coordinador presenta una síntesis de los diferentes usos de los ambientes de geometría dinámica que se han reportado en la investigación. Aquí se identifica como se comienza configurar explícitamente el polo de atención a los ambientes de diseño del proceso de

negociación.

El coordinador presenta, por primera vez en el Seminario y de manera explícita, el proceso de negociación que servirá de marco para la elaboración de los diseños didácticos. Se recuerda el caso de la sesión anterior, donde la Dra. Xisela iba presentando la investigación y la profesora Sabrina hacía observaciones con base en su experiencia docente; también se declara que se pondrá atención al ambiente de diseño, que de partida se está considerando como una hibridación entre los espacios concretos y digitales; en cuanto a los resultados de investigación, se menciona que pueden ayudar a estructurar el diseño y permitirá anticipar algunas respuestas de los estudiantes.

El coordinador propone ampliar el diálogo entre los resultados de investigación y la experiencia docente que se dio la sesión anterior, incorporando el polo de atención al ambiente de diseño.

La profesora Dina pregunta por el tipo de evaluación con este tipo de diseños, a lo que el estudiante de maestría, Josué, comenta que se pueden hacer las mismas pruebas tradicionales, lo que habrá cambiado es que el proceso educativo se habrá centrado en el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante y no al cumplimiento de un objetivo curricular. Aquí notamos una preocupación del profesorado por servir de puente entre los requerimientos oficiales en educación y las necesidades educativas de sus estudiantes, específicamente al preguntar por la calificación y evaluación con los diseños elaborados en el Seminario

En esta sesión termina de presentar las investigaciones.

Sesión 08

El coordinador recuerda los usos de los AGD reportados en las investigaciones, para reforzar las ideas del polo sobre atención al ambiente del diseño durante el proceso de negociación.

En la discusión sobre el diseño de transformaciones geométricas, en primer lugar, Sabrina ensaya la primera versión de su objetivo con base en el contenido curricular y los resultados de investigación. Aquí se identifica un diálogo entre la voz social del currículo y de los resultados de investigación, del cual emerge una primera versión del objetivo.

El coordinador recuerda el resultado de investigación que reporta que los estudiantes conciben la traslación como un movimiento cualquiera, poniendo atención a la voz social de la investigación.

Luego se evalúa la actividad curricular usando de parámetro los resultados de investigación, reconociendo que presenta a la traslación de manera desnaturalizada, por cual es necesario presentar una alternativa a tal diseño, que en este caso será el que se construya en el marco del proceso de negociación.

Se concluye la discusión con la propuesta de la segunda versión del objetivo, la cual fue

configurada en el marco del proceso de negociación.

En la discusión sobre el diseño de círculo y circunferencia, se comienza presentando el contenido curricular y compartiendo la primera versión del objetivo, en el cual se considera el uso del AGD de GeoGebra. Se identifica la preeminencia de la voz social del currículo a la hora de proponer un objetivo, aun cuando se considere el uso de ambientes no tradicionales, como el AGD.

Luego se critica la actividad curricular propuesta en el texto de estudio, ya que en realidad no permite construir la circunferencia. Aquí, se establece un diálogo entre la voz social del currículo y la experiencia docente, que permite desechar la actividad curricular por razones didácticas.

Al cuestionar el objetivo de distinguir círculo y circunferencia sin antes haber explorado qué es cada uno de ellos, la profesora Dina propone retomar la construcción reportada en la investigación, con plastilina, lápices y un clip, sugiriendo el uso de otros materiales, como elástico y cordel, donde cada uno aporta con sus características a la tarea de construcción. Aquí se evidencia como la profesora Dina pone atención al ambiente de diseño y a las características de los materiales concretos, con un propósito didáctico. Por lo que es posible evidenciar un diálogo entre la voz social de los resultados de investigación y la atención al ambiente de diseño, de donde se obtiene una adaptación de la actividad. Se concluye la discusión con la propuesta de la segunda versión del objetivo, la cual fue configurada en el marco del proceso de negociación.

En la discusión sobre el diseño de conservación de área, Abigail comunica su primera versión del objetivo, donde se alude directamente al uso de materiales concretos y digitales, dando muestra de poner atención al ambiente híbrido de diseño.

Se recuerda las ideas a confrontar que reporta la investigación, aludiendo que faltaría abordar una de ellas, para lo cual se propone una actividad en el AGD. En este episodio se establece el diálogo entre la voz social de los resultados de investigación y la atención al ambiente de diseño, del cual emerge una propuesta para abordar la idea de confrontación restante.

Se concluye la discusión con la propuesta de la segunda versión del objetivo, la cual fue configurada en el marco del proceso de negociación.

En la discusión sobre el diseño de cálculo de área, Dina comunica a primera versión de su objetivo y una serie de tareas. El coordinador cuestiona la amplitud del objetivo, por correr el riesgo de ser inabordable en los tiempos escolares.

Se recuerda el resultado de investigación que recomienda trabajar primero con la noción de área, luego con la medición y finalmente con el cálculo de área. Evidencia de cómo los resultados de investigación pueden ayudar a estructurar el diseño.

Se concluye la discusión con la propuesta de la segunda versión del objetivo, incluyendo una referencia directa al uso de ambientes híbridos.

Sesión 09

A propósito que el coordinador estaba guiando a los profesores para que registraran sus objetivos de la THA en el aula virtual, se aprovecha para discutir sobre cada uno de ellos, tanto de manera presencial como a través de comentarios en foros del aula virtual. Debido a la manera en la que se desarrolla la sesión, cada profesor trabaja en proponer las tareas de su THA, con base en el objetivo ya configurado. Finalmente se acuerda realizar sesiones individuales durante la semana para culminar la THA.

En estos casos se identifica el uso de la THA como una articulación de las voces sociales de la experiencia docente, los resultados de investigación y la atención al ambiente de diseño.

Sesión 10

El coordinador hace una recapitulación del trabajo realizado en el transcurso de las sesiones, poniendo atención en la manera en que se fue configurando cada polo del proceso de negociación, la manera en que sirvió como marco de las discusiones para configurar la THA y, finalmente, la forma en que está incidiendo en la confección del Libro GeoGebra y los materiales del diseño.

Alberto y Alejandro revisan la THA sobre el diseño de círculo y circunferencia para hacer ajustes. Al respecto, en la tarea 1, Alejandro recomienda declarar el tiempo de cada actividad y los materiales a utilizar en cada una de ellas. Aquí identificamos una manifestación de la experiencia docente, poniendo atención en aspectos relevantes a la hora de planificar y llevar a cabo el diseño.

En la tarea 2, se hacen ajustes en la configuración de los grupos de trabajo, basado en experiencias previas, y se pone atención al ambiente concreto de diseño, en cuanto a las características de los materiales. Otro ejemplo de la manifestación de la experiencia docente en la atención a aspectos de organización de los grupos de trabajo, decisión que se toma por razones didácticas atendiendo a las características de los materiales y cómo influyen en el desarrollo de la actividad.

En la tarea 3, los estudiantes van a construir con materiales concretos y reflexionar en grupo sobre sus características. Aquí se evidencia el saber docente de relacionar el trabajo individual con el trabajo grupal.

En la tarea 4, se considera comenzar a usar el Libro GeoGebra para hacer un repaso de las actividades hechas en ambientes concretos, además de usar el AGD para institucionalizar las propiedades del círculo y la circunferencia. Proponen usar el Libro GeoGebra para trabajar solo las actividades diseñadas en ambientes digitales. Finalmente, Alberto y Alejandro consideran necesario añadir una tarea de cierre, evidencia del saber docente de institucionalizar los contenidos curriculares. Para esta tarea se considera usar los AGD.

Sesión 11

El coordinador aclara que la idea es que en el Libro GeoGebra se estructure todo el diseño, ya que por sus características puede dar soporte a actividades concretas y digitales. Aquí reconocemos el recurso digital como un soporte para actividades en ambientes híbridos.

Luego recuerda la forma de trabajo de la sesión anterior y cómo el funcionamiento del proceso de negociación permitió delinear el hilo conductor de los diseños, así como su THA, el diseño en el Libro GeoGebra y los materiales.

Alberto y Alejandro construyen las Hojas dinámicas para cada tarea del diseño de círculo y circunferencia, y mencionan que necesitan cambiar el Libro GeoGebra para estructurar todo el diseño allí. En la tarea 1, escogen el recurso *pregunta* de GeoGebra para registrar respuestas abiertas de los estudiantes y dejar una respuesta sugerida, anticipando lo que ellos podrían responder. Aquí se identifica la relación que establecen entre un recurso digital (pregunta GeoGebra) y el proceso hipotético de la THA, dándole un uso pedagógico al recurso digital.

También se preguntan si usar el AGD de GeoGebra o el lápiz y papel para pedirle a los estudiantes que hagan dibujos a mano alzada. Se deciden por el lápiz y papel, debido a que desconocen que en el AGD de GeoGebra también se pueden hacer dibujos a mano alzada. Otro caso donde el conocimiento técnico incide en las decisiones pedagógicas.

En la tarea 2, Alejandro sugiere añadir una indicación a la actividad para que los estudiantes corroboren si cuentan con todos los materiales necesario, los cuales se ilustran con una fotografía. Otro ejemplo de cómo se ponen en juego los saberes docentes para tomar una decisión respecto del diseño, en este caso la disponibilidad de los materiales para el correcto desarrollo de la actividad y la atención al ambiente de diseño.

También modifican la instrucción sobre hacer marcas en la plastilina, ya que al probar los materiales, no se traza necesariamente una circunferencia. En consecuencia deciden cambiar la instrucción a que hagan puntos sobre la plastilina. Aquí se reconoce como la atención al ambiente de diseño (concreto) permite ajustar las instrucciones del diseño.

En la tarea 3, el coordinador sugiere añadir una breve descripción de qué se va a retomar de las tareas anterior en cada Hoja dinámica, para no perder el hilo del diseño, así también añadir un video para dar indicaciones de uso de los materiales concretos. Aquí se reconoce la necesidad de poner atención al ambiente de diseño, ya que cada ambiente tiene sus particularidades y es necesario atenderlas.

Se discute sobre ciertos ajustes del diseño para que cumpla con los objetivos de la planeación, en este caso, según los argumentos didácticos de reconocer las características de los materiales de construcciones y su influencia en el trazo obtenido, más que sólo centrarse en obtener el trazo de la circunferencia. Nuevamente se identifica la importancia de poner atención al ambiente de diseño, en este caso para cumplir el objetivo didáctico de la actividad.

El coordinador sugiere que busquen applet GeoGebra para incluir en su diseño, antes de confeccionarlos ellos mismos. En caso de encontrar algunos que se ajusten a sus objetivos, los pueden incluir o modificar para que se ajusten a las necesidades del diseño. Nuevamente se pone a atención en al ambiente de diseño, en este caso respecto de la disponibilidad de recursos y su maleabilidad para ajustarlos a los objetivos del diseño.

Sesión 12

El coordinador hace una recapitulación del trabajo realizado en el transcurso de las sesiones, poniendo atención en la manera en que se fue configurando cada polo del proceso de negociación, la manera en que sirvió como marco de las discusiones para configurar la THA, el Libro GeoGebra y los materiales.

El coordinador hace una revisión de los productos generados durante el transcurso del Seminario, los cuales son ejemplo del proceso de integración digital de cada profesor.

A propósito de la elaboración de una Hoja dinámica, Alberto y Alejandro discuten si dejar habilitada la opción de que los estudiantes puedan reescribir sus respuestas. Alejandro se muestra dubitativo, en cambio Alberto declara que si “se vale” que los estudiantes puedan cambiar sus respuestas, ya que así le dan significado a lo que están estudiando, como una adecuación del pensamiento. En este episodio identificamos la postura de Alberto como un reconocimiento del aprendizaje como un proceso no lineal.

Alberto y Alejandro quieren modificar un applet, para que se ajuste a los objetivos de las tareas propuestas en su THA. En este episodio se evidencia como los aspectos técnicos se ponen a disposición de las decisiones didácticas y extra-didácticas. Esto vuelve a ocurrir en varias ocasiones durante la sesión.

Comienzan a elaborar la actividad de cierre que habían planificado la sesión 10. Esto lo reconocemos como un aspecto de los saberes docentes respecto de la necesidad de institucionalizar el contenido curricular.

Sesión 13

El coordinador realiza un recuento de las etapas del Seminario, y de la manera en que se fue configurando el proceso de negociación, que sirvió de marco para las discusiones que permitieron configurar la THA, el Libro y los materiales de cada diseño. También sugiere que se tenga en cuenta tales productos y la manera en que fueron elaborados, para usarlos como parámetros para evaluar los diseños a presentar y así dar una retroalimentación de calidad a los colegas.

A continuación el profesor Alberto presenta su diseño al resto del grupo, mostrando cada una de las tareas, partiendo primero comentando las condiciones contextuales del diseño (5to grado de primaria, trabajo en grupos de tres, a realizar en aula de cómputo). En la tarea 1, se utiliza el botón de comprobación de respuestas de GeoGebra para comparar las respuestas de los estudiantes con una sugerida por el profesor. Aquí se evidencia un uso del recurso digital con fines pedagógicos, tratando de anticipar las respuestas de los estudiantes, lo cual se relaciona con el proceso hipotético de la planeación. Luego se propone una actividad de identificación de figuras a los estudiantes, donde el profesor declara que espera que los estudiantes no distinguan al círculo de la circunferencia. Reconocemos el rol de la experiencia docente en esta actividad, manifestada por los

saberes docentes de reconocer ciertos fenómenos recurrentes en la enseñanza, además del conocimiento de sus estudiantes.

A continuación se pide a los estudiantes que comparen sus respuestas con dos de sus compañeros y luego las reporten a la discusión de toda la clase, donde el profesor irá registrándolas en la pizarra. Aquí se identifica un saber docente de vincular el trabajo individual, con el de otros compañeros y con el de la clase completa.

En la tarea 2, se comienza pidiendo a los estudiantes que corroboren que tienen todos los materiales para desarrollar la tarea. Un aspecto relevante del saber docente de disponer las condiciones necesarias para el buen desarrollo de la tarea.

Luego se pide que organicen en grupos de tres, donde cada integrante realiza una construcción con un material distinto (clip, elástico y cordel). Aquí se evidencia el saber docente de organización del trabajo grupal, con base en decisiones didácticas.

A continuación se dan las instrucciones para realizar la actividad usando los materiales, donde se espera que el trazo resultante no sea siempre una circunferencia. Otra muestra de la anticipación del profesor a las respuestas de los estudiantes, en este caso basado en el proceso de negociación.

Al respecto, el grupo comenta que es necesario indicarle a los estudiantes que cuando aplasten la plastilina, esta pueda abarcar un área mínima. La Dra. Xisela comenta que los estudiantes podrían trabajar en parejas para facilitar el trazo de las figuras. Aquí notamos una preocupación por el uso de los materiales para el correcto desarrollo de la actividad didáctica.

A propósito de la tarea de construcción con materiales concretos, el coordinador reflexiona con el grupo respecto de la orientación de la actividad, donde todas las respuestas de los estudiantes serán útiles para la discusión, no solo los que obtuvieron la circunferencia. Aquí se identifica un cambio de orientación en las actividades, de estar centradas en los contenidos a estar centradas en el aprendizaje de los estudiantes.

Respecto a la frase puntos continuos de la instrucción de la tarea, Zaid comenta que le provoca ruido ya que allí no hay continuidad (en un sentido matemático). El profesor Alberto declara que espera que los estudiantes interpreten esa frase como un punto tras otro, a lo cual Zaid complementa que sería bueno reportar tal decisión en la THA. Aquí reconocemos un diálogo entre aspectos matemáticos y la experiencia, y se vislumbra a la planeación de la tarea, como un espacio en el cual convergen ambos aspectos.

En la tarea 3, el grupo identifica que las actividades que se han ido realizando están orientadas a trabajar con la circunferencia, pero no con el círculo, por lo que se propone reestructurar el diseño basados en consideraciones didácticas y las características de los materiales. En este episodio se evidencia el logro del objetivo de la Etapa de Retroalimentación colaborativa, referido a ajustar el diseño con base en su aplicación y las sugerencias del grupo que emanan del proceso de negociación.

En una actividad se le pide a los estudiantes que describan las características del material que les permitió trazar la circunferencia, para luego proponer a los estudiantes que escojan de entre tres descripciones dadas por el profesor, las que pueden complementar la que ellos propusieron. Aquí identificamos la intención del profesor de tomar en cuenta el trabajo de

los estudiantes y guiarlos hacia descripciones más robustas.

Por último se pide a los estudiantes que escriban una definición de circunferencia, a partir del trabajo realizado. Al respecto, el grupo comenta que se podría cambiar el término definición, ya su connotación formal podría inhibir las respuestas de los estudiantes, por frases como tu definición de, qué entiendes por, o explica con tus propias palabras. En este episodio se reconoce el diálogo entre la experiencia docente, anticipando dificultades a presentar, y el objetivo didáctico de hacer transitar a los estudiantes de las características de los materiales hacia las propiedades geométricas.

En la tarea 4, se pide a los estudiantes que recuerden el resultado de la tarea anterior sobre una descripción de la circunferencia, a partir del trabajo concreto realizado. Luego se les pide que exploren las herramientas del AGD de GeoGebra para que construyan una circunferencia, esperando que pongan en juego el centro y el radio para tal construcción. Sin embargo, el coordinador comenta que la construcción en el AGD no identificará necesariamente al centro y al radio como elementos esenciales para determinar la circunferencia, ya que hay las dos herramientas Circunferencia de GeoGebra se usa el par centro-punto y centro-radio (radio como longitud, no inmediatamente como segmento). Aquí se reconoce la importancia de atender a las particularidades de cada ambiente (concreto y digital), aun cuando se trabaje con la misma noción matemática, puesto que la manipulación o forma de trabajo podrían ser diferentes, lo cual incide en los aspectos didácticos de la actividad. Como parte de la misma discusión, Zaid propone que tomen una fotografía al resultado de la actividad concreta con lápices y el clip, para luego insertarla en el AGD de GeoGebra, sobre la cual puedan ubicar un punto sobre cada lápiz, determinando el segmento correspondiente al radio. Aquí se evidencia un ejemplo de reconocer la hibridación entre ambientes concretos y digitales, reconociendo su potencial y evitando las restricciones artificiales.

Luego se proponen varias actividades usando applet GeoGebra con información sobre la circunferencia y sus elementos, tanto en registro escrito como figural. En este episodio se identifica el saber docente de institucionalizar los contenidos curriculares.

En la fase de retroalimentación, la profesora Dina comenta que ella ya aplicó la actividad de construcción con lápices y clip sobre la plastilina y se sorprendió que a pesar de algunas modificaciones que hizo a la tarea, se manifestaron algunos resultados que reportaba la investigación. Aquí identificamos la investigación como una generalización de problemáticas escolares.

El coordinador destaca el uso del botón comprobación, puesto que permite retomar las respuestas de los estudiantes y validar el consenso producto de la discusión con la clase completa. Esto es una muestra del uso de los recursos digitales con fines didácticos o extra-didácticos.

Abigail comenta que pensaba que se iba a incluir el applet con el cual se exploran las características de la circunferencia y el círculo, usando el arrastre. Esto denota una preocupación y reconocimiento del valor epistémico de la tecnología digital.

Zaid comenta que se nota claramente el hilo conductor que articula el diseño, y que sólo tiene algunas dudas sobre dónde incluir las tareas sobre el círculo, ya que esto va a

modificar la secuencia, por lo que es necesario hacerlo con cuidado. Se reconoce el hilo conductor del diseño, idea que emerge como producto del proceso de negociación.

A partir de la intervención de Alejandro, se produce una discusión entre todo el grupo respecto de la incorporación de tareas sobre el círculo. Esto se debe a que Alejandro declara que se está desaprovechando el potencial del trabajo concreto al estudiar la circunferencia y luego el círculo, ya que desde allí se puede abordar el estudio de ambos objetos geométricos. Tanto el coordinador, Josué y Zaid proponen que se podría trabajar primero con la circunferencia en el ambiente concreto, y luego de haberla descrito teóricamente mediante el centro y el radio (trabajando en el AGD), se podría volver a trabajar con los materiales concretos para explorar las diferentes regiones que delimita la circunferencia (fuera, dentro y en), para que de esta manera se introduzca la noción de círculo a partir de lo ya trabajado con la circunferencia. En esta discusión se evidencia el reconocimiento del potencial epistémico de los ambientes concretos y digitales, y que su uso está subordinado a las decisiones didácticas del diseño.

Por su parte, Josué recomienda que no se entregue todos los materiales a los estudiantes desde el comienzo de las tareas, ya que podrían distraerlos de las actividades al usarlos para jugar. Alberto responde que ya han trabajado los aspectos disciplinares con sus estudiantes, por lo que considera que no cree que se de esa situación en con su clase. Este episodio es una muestra de la pericia del profesor Alberto en su grupo de estudiantes, con quienes ha trabajado diferentes aspectos y sabe qué tipo de reacción poder esperar de ellos.

Finalmente la Dra. Xisela realiza una reflexión sobre lo que ella considera que se ha logrado en el Seminario, tomando de ejemplo el trabajo y el tipo de discusiones sostenidas en la presente sesión. Alude a que en el ejercicio de retroalimentación colaborativa se vio un acto subversivo responsable, al cambiar el orden propuesto por el currículo (ver el círculo y la circunferencia juntos, pero sin saber por qué o cómo). Una decisión que se tomó producto de la discusión entre todos los miembros del Seminario, y que fue muy responsable, ya que se fundamenta en la investigación, en la experiencia docente y en las discusiones del grupo, y que además se hizo pensando en personas que no están en el Seminario, es decir, los estudiantes del profesor y las profesoras. En esta reflexión se describe que a raíz del trabajo realizado en el Seminario, los profesores se han apropiado de lo que están enseñando, cómo lo están enseñando y las decisiones que están tomando, las cuales son decisiones profesionales.

5.2. Manifestación de los componentes en cada etapa

A continuación se presenta el análisis por etapas del Seminario, separado por cada componente. Cabe destacar que a partir del análisis por sesiones se identificaron aspectos comunes entre ciertas sesiones, los cuales permiten constituir un bloque. En definitiva se identificaron tres bloques de trabajo en la Etapa 4, los cuales se mencionan en el análisis de la Etapa de Elaboración del diseño por cada componente:

- Bloque 1: terminar de configurar el proceso de negociación.
- Bloque 2: configurar THA con base en el proceso de negociación.
- Bloque 3: confección de Libro GeoGebra y materiales asociados al diseño.

5.2.1. Aspectos de organización social

Etapa 1: Introducción

Desde la etapa inicial, el Seminario se configura como un espacio de trabajo colaborativo entre los diferentes grupos sociales relevantes representados (profesorado, academia y representantes de la cultura digital). Además se realizan acciones que promuevan la interacción multidireccional y las relaciones horizontales, por ejemplo, al decidir entre todos, algunos aspectos importantes del Seminario.

Etapa 2: Apresto técnico

En la sesión 02, se presenta a Moodle (aula virtual) como un espacio digital de interacción a usar durante el Seminario.

También se produce un choque entre las estructuras asimétricas y horizontales de poder, durante el desarrollo de una tarea. Los profesores respondían a ella como si fueran a ser calificados, aun cuando el Seminario fue presentado como un espacio para trabajar todos en conjunto. Por lo tanto fue necesario hacer explícito que en el Seminario se favorecen las relaciones horizontales de poder, en el cual todos pueden dar sus opiniones y argumentos para cualquier aspecto del Seminario, y sobre todo, los profesores no serán calificados, sino que se buscan instancias donde sean retroalimentados por la interacción entre todos.

El coordinador se compromete a comunicar el propósito del Seminario y el plan general de este.

En la sesión 03, hay evidencia de trabajo colaborativo en el sentido de declarar el propósito del Seminario, el cual es compartido entre todos los miembros. En este caso hay un propósito global del Seminario, referido a la integración digital; y un propósito específico, que funciona como idea directriz del Seminario, referido a la elaboración de diseños didácticos.

Se realiza un primer ejercicio de trabajo colaborativo entre los profesores, en el cual configuraron entre todos una THA para un contenido diferente al que reportaron cada uno de los profesores.

A propósito de no alcanzar a desarrollar una tarea en la sesión, se produce por primera vez una situación donde entre todos toman decisiones para ajustar la planeación del Seminario. Aquí se identifican rasgos de varios aspectos de organización social que pretende propiciar el Seminario: la interacción entre todos los miembros (muchos a muchos); cada profesor expresa su objetivo respecto de la tarea a realizar, aunque sean diferente al de los demás; promover la relaciones horizontales, atendiendo las inquietudes de todos los miembros, en vez de decidir democráticamente.

Etapa 3: Confrontación de significados

La sesión 04 se ajusta según las decisiones tomadas en conjunto la sesión anterior. Como ejercicio para propiciar las relaciones horizontales de poder, se usa el recurso construido por la profesora Dina durante la semana, para el desarrollo de la tarea que quedó pendiente de la sesión anterior, aunque su opinión fue minoría respecto de lo que opinaron los demás miembros. Esta acción también favorece el ejercicio del trabajo colaborativo, en el sentido de que todos tienen algo que dar y algo que recibir del trabajo conjunto.

También se dieron discusiones donde se comienza a evidenciar que los profesores están manifestando un actuar consecuente a las relaciones horizontales. Por ejemplo, cuando la profesora Dina advierte al coordinador que no sólo hay que atender a los ambientes digitales, sino también a los concretos, pensando en los estudiantes y abarcar todos los estilo de aprendizaje. En este episodio, la profesora Dina corrige al coordinador del Seminario, lo cual es bien recibido por el resto de los miembros y se toma en consideración su comentario, en vez de minimizar su aporte, como podría haber sucedido en instancias donde las relaciones de poder son asimétricas.

Así también, se sigue reconociendo las interacciones multidireccionales entre los miembros del Seminario, lo cual fue uno de los aspectos sociales propiciado en el Seminario, que se asumió con rapidez y que comienza a formar parte de cada interacción en el Seminario.

En otro episodio de la sesión 04, se identifica nuevamente un proceder consecuente con las relaciones horizontales, cuando Sabrina declara sus inquietudes y el coordinador propone que todos usen un resultado de Alberto, para desarrolla un ejercicio. De esta manera se trata de atender a las inquietudes de cada miembro del Seminario.

Por otra parte, también se reconoce nuevamente, ejercicio de trabajo colaborativo, donde Alberto aporta al grupo, y este se beneficia de su aporte.

En la sesión 05, de identifica un aspecto que no fue considerado explícitamente en la planeación del Seminario. A propósito de la conferencia de la maestra Rosa y la discusión que detonó entre todos los miembros, se reconoce que el trabajo colaborativo entre diferentes representantes de grupos sociales relevantes en el fenómeno educativo, es un ingrediente clave para lograr una innovación educativa (que venga desde las aulas de clase -cambio educativo de abajo hacia arriba), y no sólo una reforma curricular (cambio educativo de arriba hacia abajo).

Etapa 4: Elaboración del diseño

Bloque 1: terminar de configurar el proceso de negociación

En la sesión 06, se realiza un ejercicio que promueve el trabajo colaborativo, en tanto se presenta para discutir entre todo el grupo, los resultados de investigación encontrados para el diseño de transformaciones geométricas, aun cuando cada miembro tiene sus propios objetivos: para la Dra. Xisela es comunicar de manera efectiva los resultados de investigación; para Sabrina, fundamentar su diseño; para los colegas, aportar al trabajo de Sabrina.

En la sesión 07, se realiza un ejercicio para seguir promoviendo las relaciones horizontales en el Seminario, de manera que se puedan compartir opiniones contrarias o complementarias, en un ambiente seguro de respeto. Así mismo, se usa esta discusión para reforzar las interacciones multidireccionales ya asumidas por los miembros.

Por otra parte, se realizan dos ejercicios para promover el trabajo colaborativo, del mismo tipo que se realizó en la sesión 06: discutir entre todo el grupo los resultados de investigación encontrados para los diseños de conservación de área, círculo y circunferencia, y cálculo de área.

Bloque 2: configurar THA con base en el proceso de negociación

En la sesión 08, se llega al consenso grupal de usar un temporizador para regular el tiempo de las discusiones, y así alcanzar a abarcar a los cuatro diseños. Este caso es otro ejemplo en el cual se promueven las relaciones horizontales, al repartir el tiempo de manera equitativa y al consensuar la decisión entre todo el grupo. Así también, se refuerzan la interacción multidireccional entre los miembros.

Se promueve el uso del aula virtual dejando disponible material del Seminario y habilitando recursos (foro) para reportar el avance de los trabajos, como un espacio digital de interacción social entre los miembros.

Cada discusión para configurar el objetivo de su respectiva THA es un ejercicio de trabajo colaborativo, en el cual todos ayudan a lograr el propósito común de elaborar diseños didácticos, aunque cada uno tenga objetivos diferentes. También se reconoce la faceta de aportar algo al grupo, mientras cada miembro se beneficia del trabajo en conjunto.

En la sesión 09, se vuelve a promover el uso del aula virtual como espacio digital de interacción social, lo cual se declara explícitamente. También se propone como un espacio para propiciar el trabajo colaborativo entre los miembros, realizando el ejercicio de comentar el trabajo de cada colega, y así, recibir la retroalimentación de todo el grupo. En esta sesión se dieron varias instancias en las que se puso en juego las relaciones horizontales de poder, primero atendiendo las inquietudes de los profesores al guiarlos en el trabajo reportado en el aula virtual, teniendo que modificar el plan de la sesión; luego proponiendo a los profesores que trabajaran de manera individual para planear las tareas de su respectiva THA; al tratar de cumplir con el plan del Seminario que todos consensuaron, teniendo que negociar horarios de trabajo durante la semana; y al proponer una herramienta digital para trabajar durante la semana, y guiar su exploración, según las necesidades que declaran los profesores.

Bloque 3: confección de Libro GeoGebra y materiales asociados al diseño

En la sesión 10, se amplía el número de representantes de la cultura digital, quienes también son representantes del grupo de investigadores, con el fin de trabajar individualmente con cada representante del profesorado. Aquí se evidencia el dinamismo de la constitución de los grupos sociales relevantes de las comunidades en la era digital, donde la afiliación es voluntaria y no excluye de participar de otros grupos sociales.

También se dan ejercicios de relaciones horizontales, desde el coordinador y también desde los miembros del seminario. Por parte del coordinador, se evidencia el ejercicio de relaciones horizontales al modificar la forma de trabajo en el Seminario, que aunque fue una decisión que el coordinador tomó en solitario, fue pensada para cumplir los tiempos de trabajo consensuados entre todos. Aquí reconocemos que las relaciones horizontales de poder tienen más que ver con el actuar individual respetuoso con el resto de los miembros y las decisiones tomadas en equipo, que con el hecho de tomar decisiones pidiendo la opinión de todos los miembros, puesto que este último ejercicio podría conducir a toma de decisiones democráticas, donde se decide por mayoría y generalmente las opiniones e inquietudes minoritarias no son tomadas en cuenta, lo cual van en un sentido distinto a las acciones promovidas y realizadas durante el Seminario (e.g. sesión 03).

Por parte de los miembros, se identifica que ya asumen una horizontalidad en las relaciones con los demás integrantes, al sentir la confianza de evaluar las propuestas del coordinador, ya sea para el diseño o para la planeación del Seminario.

Tal evaluación de las propuestas se realiza poniendo en juego la mutualidad del trabajo colaborativo, donde se valora el aporte que hago al grupo, a la vez que me beneficio del trabajo en conjunto, y así se valora la dualidad objetivo/propósito para tomar decisiones.

En la sesión 11, se vuelve a recordar la modalidad de trabajo, en la cual cada pareja esta constituida por representantes de los tres grupos sociales relevantes considerados desde la planeación del Seminario.

También se identifican casos en los que se actúa asumiendo una horizontalidad entre las relaciones de los miembros, tanto al discutir la propuesta del coordinador para ajustar un diseño, o para decidir entre todos un ajuste en la planeación del Seminario.

Tanto el trabajo colaborativo y la interacción multidireccional entre los miembros del Seminario, ya han sido asumidas por los integrantes. En esta sesión se identifica el funcionamiento del trabajo colaborativo al confeccionar el Libro GeoGebra y los materiales, donde cada miembro de la pareja de trabajo aporta al diseño desde su expertiz; también cuando cada miembro comunica su opinión respecto del ajuste de la planeación del Seminario, basada en su objetivo particular, aunque apuntando a aportar al propósito comunitario. En cuanto a la interacción multidireccional, se identifica su funcionamiento al llevar una discusión entre tres miembros a todo el grupo, para hacer una sugerencia general; y al discutir entre dos profesoras respecto de sus objetivos para ajustar el plan del Seminario, lo cual permite tomar una decisión entre todo el grupo.

En la sesión 12, se sigue promoviendo el uso de espacios digitales de interacción social. Se identifican dos situaciones donde los miembros solicitan ayuda al resto del equipo,

recibiendo apoyo de ellos, y luego ayudando a una profesora con temas técnicos. Esto es un ejemplo de la horizontalidad en las relaciones entre los miembros y el trabajo colaborativo pleno, todo ello en interacción multidireccional de ida y vuelta.

Finalmente se discute nuevamente sobre un ajuste a la planeación del Seminario, en este caso para definir el orden de presentación en la Etapa de Retroalimentación colaborativa. Evidencia de otro ejemplo del ejercicio de la interacción multidireccional, las relaciones horizontales y el trabajo colaborativo.

Etapa 5: Retroalimentación colaborativa

En esta etapa se ponen en funcionamiento todos los aspectos de organización social propiciados durante el Seminario (participación de diferentes grupos sociales relevantes, relaciones horizontales, interacción multidireccional y trabajo colaborativo), que se han ido asumiendo con naturalidad de manera progresiva por los miembros. Esto es base para la retroalimentación de los diseños, con el objetivo de reafirmar sus aciertos y ajustar lo que sea necesario.

5.2.2. Aspectos técnicos o de la cultura digital

Etapa 1: Introducción

En esta etapa se realiza una reflexión sobre el impacto general de la Tercera revolución de la humanidad a diferentes niveles (sociedad, educación y educación matemática), como declaración de la perspectiva con la cual se considerará a la tecnología digital en el Seminario, en tanto diseño.

Se comienza con la exploración de tecnologías digitales, específicamente Moodle, y se comparte un pequeño atisbo de la práctica digital de compartir de manera abierta, práctica insigne de las comunidades digitales.

Etapa 2: Apresto técnico

En la sesión 02, a propósito que en el Seminario se van a usar generalmente *software* libre, se reflexiona sobre su filosofía e implicaciones sociales.

También se realiza un primer apresto a Moodle y GeoGebra en el Seminario, en tanto exploración guiada y uso de tales tecnologías, específicamente con la Hoja dinámica.

Con el caso de GeoGebra, se presenta espacios y propiedades de los materiales que dan soporte a la práctica digital de compartir de manera abierta. Para ejemplificar el funcionamiento de esta práctica, el coordinador comparte un video tutorial que ilustra sobre un aspecto técnico de los Grupos GeoGebra.

En la sesión 03, se tiene planeado comenzar con la exploración del Libro GeoGebra, pero se pospone para la siguiente sesión, debido al desarrollo de la presente.

Etapa 3: Confrontación de significados

En la sesión 04, se evidencia un primer atisbo de integración digital propuesta en el Seminario, cuando la profesora Dina comentan que pudo organizar a sus estudiantes usando una video llamada con ellos fuera del horario de clases, y que lo logró porque en el Seminario ya había usado este recurso. En este caso se una muestra que los profesores van integrando a su quehacer docente, las prácticas digitales que le sean útiles, en un sentido amplio, ya sea con fines didácticos o extra-didácticos.

Se realiza un primer apresto al recurso Libro GeoGebra en el Seminario, cuando el coordinador guía la creación de un Libro para articular una THA en él. Este recurso será utilizado para crear de manera íntegra el diseño didáctico.

También se reflexiona respecto de la práctica de compartir de manera abierta, propia de la cultura digital, específicamente estableciendo diferencias entre el derecho de autor o *copyright* (licencias que prohíben compartir) y las licencias Creative Commons (licencias para compartir).

En la sesión 05, se continúa con el apresto a GeoGebra, en este caso a su recurso Grupo GeoGebra, mediante la exploración guiada por el coordinador, y su uso por parte de los profesores, para reportar una actividad realizada en esta sesión.

Etapa 4: Elaboración del diseño

Bloque 1: terminar de configurar el proceso de negociación

En la sesión 06, se distingue los programas de inclusión digital, orientados por necesidades oficiales, de las propuesta de integración digital (como el Seminario), cuyo propósito es atender a las necesidades educativas reales de las personas.

Se declara por primera vez en el Seminario, la importancia de las comunidades digitales y su cultura, para la propuesta de integración digital del Seminario.

No hay discusiones sobre este aspecto en la sesión 07.

Bloque 2: configurar THA con base en el proceso de negociación

En la sesión 08, se usa el aula virtual (Moodle) como un repositorio y los miembros registran sus avances del trabajo, en un foro dispuesto para ello. En este episodio ya se comienza a usar la tecnología digital al servicio de las actividades didácticas llevadas a cabo en el Seminario, para configurar el objetivo de la THA.

El coordinador propone a la profesora Abigail usar el ambiente de geometría dinámica de GeoGebra, para construir un tangram con ciertas características, que no posee el tangram de madera. Esta situación es un ejemplo de la práctica digital de materializar las soluciones a las problemáticas de las personas.

En la sesión 09, se comienza reflexionando sobre las implicaciones social de las tecnologías construidas por comunidades digitales, como construir tecnologías libres, pensadas para los usuarios y que se pueden compartir de manera abierta.

Se sigue explorando y usando el aula virtual como un espacio de interacción social, la cual es asíncrona, no presencial y horizontal.

A propósito de las sesiones individuales que se planean para la semana, el coordinador guía la exploración de servicios de video llamadas y de documentos compartidos.

Bloque 3: confección de Libro GeoGebra y materiales asociados al diseño

En la sesión 10, se identifica el comienzo de la exploración y el uso del recurso Libro GeoGebra por parte de Alberto, al comenzar la confección del diseño en tal recurso.

En la sesión 11, se reflexiona sobre el potencial de las tecnologías digitales, que también poseen características de las tecnologías predigitales. Así, el recurso Libro GeoGebra da soporte tanto a actividades digitales como a concretas.

También ha evidencia del apresto progresivo de la tecnología digital, cuando Alberto y Alejandro siguen explorando y probando un recurso digital van descubriendo nuevos usos del recurso.

En esta sesión se evidencia un aspecto que no estaba contemplado completamente en la propuesta de integración digital del Seminario, respecto de repensar el uso de tecnologías digitales que los profesores ya conocían, para integrarlas a su práctica docente.

También se evidencia en el trabajo de los miembros, el funcionamiento de la práctica digital de compartir de manera abierta y responsable.

En la sesión 12, se sigue fomentando y poniendo en funcionamiento por parte de los miembros, la práctica digital de compartir de manera abierta y responsable.

También se reconoce el ejercicio de la práctica digital de búsqueda y acceso abierto a la información.

Se vuelve a dar una situación en la que a medida que se explora una tecnología digital, se descubren nuevas formas de uso, con lo cual se continúa el proceso progresivo de apresto técnico. Así también, algunos miembros guían la exploración de los recursos digitales, para ayudar a otros miembros que desarrollen un uso técnico de GeoGebra.

Nuevamente se aprovecha el potencial pragmático de tecnología digital ya conocida, lo cual amplía la propuesta de integración digital desarrollada en el Seminario, en la cual se fomenta la integración de tecnologías digitales desconocidas con anterioridad al Seminario y también se repensan los usos de las tecnologías que ya conocían.

Etapa 5: Retroalimentación colaborativa

En esta etapa se usa el Libro GeoGebra como recurso que da soporte a la hibridación entre espacios concretos y digitales, para mostrar el diseño íntegro.

Además se continúa el proceso de apresto técnico al aprender una nueva característica del recurso digital empleado en la confección del diseño.

5.2.3. Aspectos didácticos o relacionados con el saber geométrico

Etapa 1: Introducción

No hay discusiones sobre este aspecto en esta etapa.

Etapa 2: Apresto técnico

No hay discusiones sobre este aspecto en la sesión 02.

En la sesión 03, se comienzan a entablar discusiones sobre el saber geométrico, en este caso para reconocer los elementos esenciales del ángulo, mediante la intuición empírica, para planear actividades.

En estas discusiones, Alberto da muestra de su concepción relativista de las matemáticas, al declarar la importancia de valorar procedimientos no usuales en la resolución de tareas matemáticas.

Etapa 3: Confrontación de significados

En la sesión 04, se trabaja por primera vez en el Seminario con las práctica geométrica de representar, específicamente con la construcción, y la práctica geométrica de abstraer, específicamente con la identificación de invariantes.

Por otra parte, al analizar la THA de la actividad que desarrollaron los profesores, se van identificando ideas geométricas a confrontar, las cuales son ejemplos geométricos que permiten promover una concepción relativista de las matemáticas.

En la sesión 05, se sigue ejercitando con las prácticas geométricas de construcción e identificación de invariantes, mediante el desarrollo de la misma tarea de la sesión 04, pero ahora para otro cuadrilátero.

En la conferencia de la maestra Rosa, se reconocen elementos esenciales de los ángulos.

Etapa 4: Elaboración del diseño

Bloque 1: terminar de configurar el proceso de negociación

En la sesión 06, se comparten aspectos sobre las transformaciones geométricas emanados desde la investigación. Esto permite ir reconociendo ciertos elementos esenciales de las transformaciones geométricas.

En la sesión 07, se comparten aspectos sobre conservación de área, círculo y circunferencia, y cálculo de área emanados desde la investigación. Esto permite ir reconociendo ciertos elementos esenciales de cada noción geométrica.

Bloque 2: configurar THA con base en el proceso de negociación

En la sesión 08, comienzan las discusiones geométricas más profundas y específicas a cada noción geométrica considerada en los diseños. De manera general, las discusiones permiten identificar ciertos rasgos del modelo de Trabajo geométrico, por ejemplo, al considerar siempre comenzar trabajando con experiencias empíricas, para luego razonar sobre ellas y hacer evolucionar los datos empíricos a caracterizaciones geométrica. Por ejemplo, en la descripción del movimiento cotidiano para asociarlo a las transformaciones

geométricas, o la descripción de las formas trazadas en la plastilina, para distinguir la circunferencia de otras formas amorfas.

También se pone atención en los elementos esenciales de cada noción geométrica, para lo cual se pone en funcionamiento la intuición sofisticada coordinada con la intuición empírica. Esto permite llevar a cabo la práctica de representación para poner en juego tales elementos esenciales.

No hay discusiones sobre este aspecto en la sesión 09.

Bloque 3: confección de Libro GeoGebra y materiales asociados al diseño

En la sesión 10, hay evidencia de varios aspectos del modelo de Trabajo geométrico puestos en uso en el diseño de círculo y circunferencia.

En primer lugar se realizan actividades concretas para poner en funcionamiento la intuición empírica, al reconocer la forma de la circunferencia y distinguirlas de otras con características similares.

En segundo lugar, se pone en juego la práctica geométrica de representación para distinguir, mediante la inspección de los trazados finales, entre la construcción de una circunferencia y la de una espiral u otro trazo amorfo.

En tercer lugar se propone estudiar las características de los materiales concretos y la manera en que fueron usados, para explicar la representación de tales trazos, es decir, estudiar la manera en que el proceso de representación influye directamente en el trazo representado. Aquí se pone en funcionamiento también la intuición empírica para reconocer propiedades gráfico-espaciales de los objetos geométricos representados, que están relacionados con las características de los materiales empleados, por ejemplo, al reconocer que la rigidez del clip permite mantener la distancia entre el lápiz fijo y el lápiz que se va moviendo.

Luego se pretende hacer evolucionar tales características de los objetos materiales en propiedades en teóricas (geométricas), aunque no hay evidencia de una actividad que promueva este objetivo.

En la sesión 11, durante la discusión sobre el propósito de la actividad de representación con materiales concretos, se reconoce la importancia de la práctica de representación en el trabajo geométrico, junto con su complejidad, puesto que es una práctica que involucra tanto al procedimiento de representación, los materiales y el uso de ellos, los cuales influyen en el producto final o representación. Esto amplía la caracterización de la práctica de representación propuesta en el modelo de Trabajo geométrico.

El hilo conductor de diseño identificado es el tránsito de los objetos concretos a los objetos teóricos, mediante la exploración de datos empíricos usando la intuición empírica para distinguir formas circulares de las que no lo son; poniendo en funcionamiento la práctica de representación, construyendo circunferencias, espirales y otras formas amorfas, para reflexionar sobre las características de los materiales que permitieron construir la circunferencia. Para luego relacionar tales características de los materiales con el radio y el centro, identificados como elementos esenciales de la circunferencia.

En la sesión 12, se pone atención en la práctica geométrica de representación, específicamente como procedimiento. Sumado a ello se propone una actividad para relacionar los elementos esenciales del círculo y la circunferencia, con un procedimiento de representación. Por otra parte se propone una actividad para poner un funcionamiento la práctica geométrica de abstracción, para reconocer los elementos esenciales que permiten general al círculo y la circunferencia.

Etapa 5: Retroalimentación colaborativa

En esta etapa, Alberto muestra y aplica su diseño a sus colegas, en una especie de juego de roles, donde él es el profesor que guía la actividad, y el resto del grupo hacen el papel de estudiantes. Se va presentando cada tarea que constituye el diseño: En la tarea 1, se parte trabajando con los objetos geométricos teóricos, aunque se espera que las características dadas sean sólo propiedades gráfico espaciales. Luego se pone en funcionamiento la práctica de representación, al realizar bosquejos, para pasar a distinguir mediante la intuición empírica, los trazos que corresponden a círculo y circunferencia, de los que no lo son. A continuación se pide a los estudiantes reconocer círculos y circunferencias en su sala de clases, un trabajo para obtener datos empíricos en el trabajo con objetos concretos. En esta tarea se transita desde las posibles propiedades gráfico-espaciales que manifiestan los estudiantes, para luego hacer una distinción de tales diagramas representados, y finalmente explorar y obtener datos empíricos de los objetos concretos sobre el círculo y la circunferencia. En esta tarea es preeminente el trabajo con objetos concretos, tanto en abstracción como en representación.

En la tarea 2, se comienza poniendo en funcionamiento la práctica de representación, pudiendo obtener construcciones o bosquejos. Luego se hace énfasis en el procedimiento de representación, las características de los materiales y su forma de uso, con el objetivo de reconocer, mediante la práctica de abstracción, los elementos esenciales para determinar la circunferencia.

Esta tarea se centra en el trabajo con objetos concretos, mediante la representación, para luego reflexionar sobre ello para comenzar a identificar los elementos esenciales para determinar la circunferencia.

En la tarea 3, se parte con la abstracción, mediante la intuición empírica, de las características de los materiales concretos que permiten representar a la circunferencia. Luego se pone en funcionamiento la abstracción, mediante la intuición sofisticada, para reconocer los elementos esenciales que permiten determinar la circunferencia.

En esta tarea se pretende completar el tránsito de las características de los objetos concretos hacia las propiedades teóricas, específicamente a los elementos esenciales que permiten determinar la circunferencia.

En la tarea 4, se comienza reforzando el resultado de la tarea anterior que relaciona una característica concreta (rigidez) con una propiedad teórica (equidistancia). Luego se pone en funcionamiento la práctica de representación en AGD, lo cual puede resultar

en una construcción o un bosquejo. A continuación se vuelve a reforzar la relación entre las características concretas de los materiales con objetos geométricos, estableciendo un tránsito entre lo concreto y lo teórico. En seguida se pone en funcionamiento la intuición sofisticada coordinada con la empírica para describir la circunferencia a partir de sus elementos esenciales, el centro y el radio, lo cual se refuerza con una segunda actividad. Esta tarea es preeminente el trabajo con ideas teóricas, mediante la descripción geométrica de la circunferencia a partir de sus elementos esenciales, centro y radio.

En la tarea 5, se pone atención al proceso de representación, tratando de ligar los elementos esenciales que determinan la circunferencia (centro y radio), y la manera de usarlos para construirla.

En la fase de retroalimentación se reconoce que las tareas realizadas, en su mayoría permitían trabajar con la circunferencia y no con el círculo. En consecuencia se propone añadir tareas concretas para identificar, mediante la práctica de presentación, la esencia del círculo como región del plano al interior de la circunferencia.

5.2.4. Aspectos de los saberes docentes

Etapa 1: Introducción

Alberto se muestra crítico ante el ámbito oficial educativo y las contradicciones que provoca en la práctica docente, muestra del rol mediador de los profesores entre lo oficial y no oficial en la educación.

Por otra parte, se muestra sensible al propósito de integración digital del Seminario, al reconocer que la educación ha sido influenciada, y en cierto grado modificada, por la aparición de las tecnologías digitales.

También se comienza a configurar el polo de resultados de investigación en educación matemática, del proceso de negociación.

Etapa 2: Apresto técnico

En la sesión 02, al ir explorando los recursos tecnológicos, los profesores van reconociendo posibles usos que, dadas sus características, le podrían dar en su quehacer docente. Esos posibles usos, generalmente están inspirados en su experiencia docente. Consideramos que esto es un rasgo característico del profesorado, quienes ante algún elemento nuevo (como la tecnología digital) piensan en formas en las cuales podrían usar tales elementos en su práctica docente. Este rasgo se vislumbra como un elemento importante en el desarrollo de la propuesta de integración digital del Seminario.

Por otra parte, los profesores responden a una tarea como si el Seminario fuera una instancia oficial, en la cual son calificados por su desempeño, lo cual se podría deber a la gran influencia que ejercen las voces sociales ligada al ámbito educativo oficial sobre el profesorado, modificando su actuar y preocupaciones educativas.

En la sesión 03, Alberto da evidencia de considerar un estatus relativista de las matemáticas, en vez de uno hegemónico, en el proceso de resolución de una tarea matemática y los significados asociados a las nociones matemáticas. Pensamos que este es un aspecto favorable a la hora de confrontar y resignificar los conocimientos matemáticos.

Se presenta la THA como una estructura para realizar la planeación de los diseños, la cual se va a configurar a partir del proceso de negociación entre los resultados de investigación, la experiencia docente y la atención al ambiente del diseño. A propósito de hacer el ejercicio de elaborar entre todos una THA, se da una situación donde se omite el ambiente del diseño en las discusiones, por lo que la THA se piensa por defecto para un ambiente concreto, teniendo que adaptarla para ambientes digitales.

A propósito de que los diseños a elaborar en el Seminario abordarán un objetivo más robusto y amplio que el curricular, se plantea a los profesores que puedan concebirse como profesionales de la educación, con la facultad de realizar innovaciones educativas, modificando las consideraciones curriculares de manera responsable, vale decir, atender a las necesidades educativas invisibilizadas por lo oficial.

Etapas 3: Confrontación de significados

Así como en la sesión 02, cuando los profesores van pensando cómo incorporar nuevos elementos a su práctica docente, en la sesión 04, la profesora Dina comparte una experiencia de usar el recurso de video llamada para organizar una actividad con sus estudiantes fuera del horario de clases. Aquí se ve un ejemplo de que los profesores van a integrar a su práctica lo que estimen conveniente en beneficio del aprendizaje de sus estudiantes, es decir, los saberes docentes se van construyendo mediante el diálogo con voces sociales, en este caso con las consideraciones de integración digital del Seminario, e incorporar los aspectos que les parezca favorable a su labor de enseñanza y el aprendizaje de sus estudiantes.

Se declara explícitamente que en el Seminario se pondrá atención a lo específico del ambiente de diseño, el cual se asume como una hibridación entre los espacios concretos y digitales, con lo cual se comienza a configurar el polo de atención al ambiente de diseño, del proceso de negociación.

A propósito de desarrollar una actividad y analizar su THA, se proponen instancias de confrontación de significados matemáticos. En el primer caso al considerar la posibilidad que puedan existir más de una clasificación de cuadriláteros; en el segundo caso, al ver las ideas matemáticas a confrontar en cada actividad.

En el análisis de la THA, se aprovecha para mostrar formas de usar los resultados de investigación, como fundamentos para estructurar la planeación y como fuente de ideas geométricas a confrontar.

Durante las discusiones de esta sesión, se evidencia que la voz social de las evaluaciones y calificaciones, ligada a lo oficial en la educación, ejerce una gran influencia en el profesorado, que incluso los hace concebir que los estudiantes tienen problemas intrínsecos de

motivación y creatividad. Ante esta situación, se aprovecha la discusión para cuestionar en grupo la manera en que inciden el currículo, las evaluaciones estandarizadas, los tiempos escolares, e incluso, las preguntas que formulamos, en la manera de responder y actuar de los estudiantes. Se identifica la influencia de las voces sociales ligadas a lo oficial en la educación en el desempeño de los estudiantes.

En la sesión 05, se muestra un ejemplo de la forma en que cada polo del proceso de negociación aporta a la confección de diseños didácticos: resultados de investigación como fundamento, la experiencia docente como fuente de problemáticas a investigar, y atender a los ambientes de diseño haciendo pruebas con los materiales antes de aplicar con los estudiantes.

También se discute sobre la importancia de innovar en la propia práctica educativa, para cuestionar y cambiar lo que el ámbito educativo oficial nos impone como aprender. Esta discusión se vislumbra como un nuevo intento por reconocer al profesor como un profesional de la educación, en este caso, ejerciendo una docencia crítica con lo que se considera aprender.

Etapa 4: Elaboración del diseño

Bloque 1: terminar de configurar el proceso de negociación

En la sesión 06, se recuerda el trabajo realizado hasta el momento en el Seminario, para reflexionar sobre la manera en que se ha ido configurando el proceso de negociación, el cual se comenta de manera escueta a los profesores. También se continúa configurando el polo de resultados de investigación con la presentación de investigaciones.

En la comunicación de resultados de investigación realizada por la Dra. Xisela, se pone en funcionamiento, por primera vez, el proceso de negociación, como una instanciad de diálogo entre las voces sociales representadas por cada polo.

A propósito de una reflexión sobre las reformas educativas y sus motivaciones políticas, se realiza un nuevo ejercicio para promover la visión del profesor como un profesional de la educación, en este caso, para ser críticos ante los cambios arbitrarios del sistema educativo.

En la sesión 07, se identifica un nuevo ejercicio para promover la visión del profesor como un profesional de la educación, en este caso siendo crítico con el uso de resultados de investigación en la práctica docente. Al respecto, se continúa con la comunicación de investigaciones, concluyendo la configuración del polo correspondiente.

Se comienza a configurar explícitamente el polo de atención al ambiente de diseño, del proceso de negociación, al comunicar usos de los ambientes de geometría dinámica reportados en la investigación.

Se presenta por primera vez, de manera explícita en el Seminario, el proceso de negociación entre los polos de experiencia docente, resultados de investigación y atención al ambiente de diseño, el cual servirá de marco para la elaboración de los diseños y para la construcción de los saberes docentes en el diálogo de diversas voces sociales, entre las cuales se cuentan, por lo menos, los polos del proceso de negociación.

En el ejercicio de comunicar resultados de investigación, se pone en funcionamiento el proceso de negociación, cuidando que esta vez se incorpore al diálogo la atención al ambiente de diseño, que la discusión de la sesión anterior no estuvo muy presente.

Por otra parte, Dina manifiesta su inquietud sobre cómo es la evaluación (y calificación) con este tipo de diseños. En este episodio se vuelve a reconocer la preocupación de los profesores por atender las necesidades educativas reales de sus estudiantes (evaluación), sin dejar de lado el cumplimiento de sus obligaciones educativas oficiales (calificar), desempeñándose como un puente entre ambos ámbitos educativos.

Bloque 2: configurar THA con base en el proceso de negociación

En la sesión 08, el coordinador comienza la sesión recordando los usos de los ambientes de geometría dinámica reportados en la investigación. Con este recordatorio, se concluye la configuración del polo de atención al ambiente de diseño.

Se discute en el marco del proceso de negociación para configurar el objetivo de cada diseño, dialogando entre, por lo menos, las voces sociales de la experiencia docente, los resultados de investigación y la atención al ambiente del diseño.

En general, los profesores configuraron la primera versión de su objetivo atendiendo a la voz social curricular. Esto lo identificamos como un rasgo característico del saber docente de planear diseños, el cual nos parece natural, sobre todo si es una actividad que realizan día a día.

Luego, el proceso de negociación se dio entre los resultados de investigación, aportando ideas para dar estructura a los diseños, la atención al ambiente de diseño, al tomar en consideración las características de cada espacio (concreto o digital) que podrían ser útiles para llevar a cabo el objetivo o robustecerlo, y la voz social del currículo.

Cada discusión se concluyó con la propuesta de la segunda versión del objetivo de cada diseño, la cual fue configurada en el marco del proceso de negociación.

En la sesión 09, principalmente se usó la THA para articular los resultados del proceso de negociación, en este caso particular para el objetivo y las tareas de cada THA.

Bloque 3: confección de Libro GeoGebra y materiales asociados al diseño

En la sesión 10, se hace un recuento del trabajo en el Seminario, poniendo atención en la manera en que se fue configurando cada polo del proceso de negociación, el cual luego fue utilizado como marco para las discusiones que permitieron configurar cada THA, y que ahora se pondrá en funcionamiento para confeccionar el Libro GeoGebra y los materiales asociados al diseño. Muestra de la relevancia del proceso de negociación en todo el trabajo del Seminario y en el cumplimiento de los objetivos y propósito.

Alberto y Alejandro van revisando la THA para hacer ajustes en caso de ser necesario, antes de comenzar a confeccionar el Libro GeoGebra. Se evidencia la manifestación de la experiencia docente, que sugiere ajustes a la planeación, considerando saberes docentes de disposición del tiempo y recursos, de organización del trabajo en equipo, de relacionar el

trabajo individual con el trabajo grupal, y de institucionalizar los contenidos curriculares. También se reconoce una decisión en la cual se involucran diversos saberes sociales, cuando entre Alberto y Alejandro discuten si en la actividad de construcción los estudiantes harán las tres construcciones (con el clip, con el elástico y con el cordel), decidiendo finalmente que se organicen grupos de tres integrantes y que cada uno haga una construcción, para luego propiciar la discusión grupal sobre el trabajo individual de cada uno, con base en aspectos didácticos de la actividad. Aquí se evidencia cómo en una decisión que parece simple, el profesor pone en juego saberes docentes de organizar el trabajo grupal relacionado con el trabajo individual, la atención al ambiente de diseño (en este caso un ambiente concreto), y el saber didáctico referido a las características de los materiales que pueden hacer evolucionar en propiedades geométricas.

Se evidencia la manera en que la experiencia de uso de los recursos digitales, también incide en las decisiones didácticas y extra-didácticas. En este caso, Alberto y Alejandro deciden usar el Libro GeoGebra solo para las actividades diseñadas en ambientes digitales (segunda parte del diseño total), aunque las características de tal recurso permitan estructurar el diseño completo en él.

En la sesión 11, se atiende a las características del Libro GeoGebra, específicamente que en él se puede articular actividades en ambientes híbridos. De esta manera se construyen Hojas dinámicas para articular las actividades pensadas para desarrollar en ambientes concretos.

Se recuerda el funcionamiento del proceso de negociación para configurar la THA, el Libro GeoGebra y los materiales asociados al diseño.

A medida que van explorando los recursos digitales, van reconociendo usos didácticos y extra-didácticos que le puedan dar en el diseño, los cuales incorporan de inmediato.

Se identifica otro caso en el que se toman decisiones, en este caso pedagógicas, según el conocimiento que se tiene de los recursos digitales.

De manera general, en esta sesión las discusiones giraron en torno a la atención al ambiente de diseño. Por una parte, se añaden instrucciones a las actividades para asegurarse de la disponibilidad del material. Por otro lado, se hacen pruebas con el material para ajustar las instrucciones del diseño. También se reconoce lo específico de cada ambiente, al momento de transponer la planeación al Libro GeoGebra. Finalmente, se pone atención a las condiciones del ambiente digital, de donde se pueden abastecer abiertamente de recursos educativos, los cuales pueden adaptar y usar según las necesidades del diseño.

En la sesión 12, se hace un recuento del trabajo en el Seminario, poniendo atención en la manera en que se fue configurando cada polo del proceso de negociación, el cual luego fue utilizado como marco para las discusiones que permitieron configurar cada THA, y el Libro GeoGebra y los materiales asociados al diseño. Muestra de la relevancia del proceso de negociación en todo el trabajo del Seminario y en el cumplimiento de los objetivos y propósito.

Como muestra del trabajo realizado durante el Seminario, el coordinador hace una revisión de los productos elaborados, los cuales también son evidencia del proceso de

integración digital de cada profesor.

También se reconoce la postura de Alberto respecto de reconocer al aprendizaje como un proceso no lineal. Algo que forma parte de sus saberes docentes.

Durante la sesión hay varios ejemplos de ajustes técnicos realizados según decisiones didácticas y extra-didácticas. Esto lo reconocemos como un ejemplo del diálogo las diferentes voces sociales que construyen los saberes docentes del profesor.

Para concluir con la elaboración del Libro GeoGebra, elaboran una actividad de cierre. Esto lo reconocemos como un aspecto de los saberes docentes respecto de la necesidad de institucionalizar el contenido curricular.

Etapa 5: Retroalimentación colaborativa

En esta etapa, se realiza un recuento del Seminario poniendo atención en los productos generados, los cuales pueden ser usados como parámetros para evaluar el diseño y entregar una retroalimentación de calidad.

Se utiliza una estrategia de juego de roles y en práctica (profesores como participantes reflexivos), para desarrollar la sesión de retroalimentación colaborativa. Alberto comienza su presentación del diseño comentando sus condiciones contextuales, para luego presentar, una por una, las tareas.

En la tarea 1, se evidencia el uso del recurso digital con fines extra-didácticos, para anticipar las respuestas de los estudiantes, con base en la planeación. Luego, se reconoce el saber docente de reconocer ciertos fenómenos recurrentes en la enseñanza, además del conocimiento de sus estudiantes, al esperar cierta acción por parte de los estudiantes ante una tarea. A continuación se identifica el saber docente de vincular el trabajo individual, con el de otros compañeros y con el de la clase completa. En esta tarea es preeminente la acción del profesor en la anticipación de respuestas de sus estudiantes y relacionar el trabajo individual, grupal y total. Esto lo reconocemos como una característica del profesorado, donde cada profesor o profesora es el único experto en su contexto situacional (grupo o curso).

En la tarea 2, se reconoce el saber docente de disponer las condiciones necesarias para el buen desarrollo de la tarea. Luego se evidencia el saber docente de organización del trabajo grupal, con base en decisiones didácticas. A continuación se desarrolla una tarea de construcción con materiales concretos, donde se evidencia el saber docente de anticipar las respuestas de los estudiantes, en este caso con base en el proceso de negociación. Como retroalimentación, el grupo realiza sugerencias respecto del uso del material para un buen desarrollo de la tarea. También se identifica un diálogo entre aspectos matemáticos y la experiencia, y se vislumbra a la planeación de la tarea, como un espacio en el cual convergen ambos aspectos, con el propósito de tomar una decisión respecto del diseño.

El coordinador comenta que esta tarea es un ejemplo del cambio de orientación en las actividades, de estar centradas en los contenidos a estar centradas en el aprendizaje de los estudiantes.

En esta tarea se evidencia los saberes docentes anticipar el desarrollo de la tarea, en tanto cuestiones extra-didácticas (como la disponibilidad del material o la organización del trabajo en grupo) como en cuestiones didácticas (al prever posibles respuestas de los estudiantes a la tarea). La retroalimentación se centra en la atención al ambiente de diseño, en tanto uso del material; así como en el diálogo entre aspectos matemáticos y la experiencia docente, para tomar decisiones instruccionales.

En definitiva se evidencia que el diseño está centrado en el aprendizaje de los estudiantes, más que solo atender al contenido curricular. Lo que se identifica como un rasgo del profesorado asumido como un profesional de la educación.

En la tarea 3, se identifica el saber docente de tomar en cuenta el trabajo de los estudiantes y guiarlos hacia descripciones más robustas. También se reconoce la complejidad de las decisiones que toman los profesores, mediante el diálogo de varias voces sociales que hablan de manera simultánea. En este caso entre la experiencia docente, anticipando dificultades a presentar, y el objetivo didáctico de hacer transitar a los estudiantes de las características de los materiales hacia las propiedades geométricas.

En síntesis, en esta tarea se identifica evidencias del logro del objetivo de la Etapa de Retroalimentación colaborativa, referido a ajustar el diseño con base en su aplicación y las sugerencias del grupo que emanan del proceso de negociación.

En la tarea 4, se pone atención en el ambiente de diseño, ya que existen diferencias en el uso o manipulación de una misma noción matemática al trabajar en espacios concretos o digitales. También se reconoce un ejemplo del uso de los diferentes espacios de manera articulada, asumiendo la naturaleza híbrida del ambiente. Por último, se evidencia el saber docente de institucionalizar los contenidos curriculares como una preocupación del profesorado, por atender las necesidades educativas oficiales.

En esta tarea se evidencia el reconocimiento de la naturaleza híbrida del ambiente de diseño y la preocupación por no dejar de atender a las necesidades educativas oficiales, aun en instancias de innovación educativa. Esto último es un ejemplo del rol del docente como un mediador entre los ámbitos oficiales y no oficiales de la educación.

En la fase de retroalimentación, se identifican varios aspectos de los saberes docentes. Por ejemplo, se identifica a la investigación como una generalización de problemáticas escolares; se reconoce el valor epistémico de la tecnología digital; se destaca la articulación del diseño a partir de reconocer su hilo conductor, el cual emerge como producto del proceso de negociación; se reconoce del potencial epistémico de los ambientes concretos y digitales, y que su uso está subordinado a las decisiones didácticas del diseño; así también, se evidencia que cada profesor es el único experto en su situación contexto. Todos estos aspectos reflejan el trabajo realizado durante el Seminario, el cual ha logrado que, no solo se este llevando a cabo un proceso de integración digital, sino también un ejercicio de replantearse la labor docente como una actividad profesional y actuar en consecuencia.

5.3. Manifestación de los componentes en el Seminario

Con base en los análisis de cada sesión y cada etapa, en esta sección se presenta la manera en que se manifestaron los diferentes componentes de la propuesta de integración digital en el Seminario, la cual propone que es necesario integrar al profesor a la cultura digital, para que pueda integrar prácticas digitales en su quehacer docente.

Con la intención de facilitar su comprensión, la reflexión se presenta disgregada por cada componente de la propuesta de integración digital desarrolladas en el Seminario.

5.3.1. Aspectos de organización social

La propuesta de integración digital desarrollada en el Seminario, tenía como propósito que se fueran configurando relaciones heterárquicas entre los miembros, es decir, que se lograra una horizontalidad en las relaciones de poder entre los miembros y que la interacción fuera multidireccional. Además, se pretendía lograr un trabajo colaborativo entre los miembros del grupo, teniendo en cuenta a diversidad de representantes de grupos sociales relevantes en el fenómeno didáctico ligado a las matemáticas, donde se tienen objetivos particulares diferentes entre ellos, aunque están aunados por un propósito común referido a la elaboración de diseños didácticos.

En cuanto a las relaciones heterárquicas, se manifestaron en la distribución horizontal de poder entre los miembros, lo cual se fue dando por las actividades propuestas en el Seminario, las acciones del coordinador y, finalmente, por la asimilación de este tipo de relaciones por parte de los miembros.

Por una parte, las relaciones heterárquicas se promovieron desde las actividades propuestas en el Seminario y las acciones del coordinador. En cuanto a las actividades, estas siempre promovían que las decisiones respecto del Seminario fueran consensos alcanzados en discusiones donde todos los miembros participaran. Esto fue complementado con la acción mediadora del coordinador, quien atendía las opiniones e inquietudes de todos los miembros, no importando que fueran mayoría o minoría, para llegar, en la mayoría de los casos, a un consenso en el cual se considerara atender las inquietudes de todos los miembros, y en otros, a la toma personal de decisiones sobre el Seminario. Ambos casos (consenso o decisión personal) se relacionan más con el respeto a las opiniones e inquietudes de todos los miembros (las propias y las ajenas), que a solo tomar decisiones en grupo, lo cual podría corresponder a un ejercicio democrático del poder, en el cual se decide por mayoría, generalmente quedando desatendidas las opiniones e inquietudes minoritarias. De esta manera, en el caso del consenso se llegaba a un acuerdo tal que incorporara las consideraciones de todos los miembros; y en el caso de la decisión personal, siempre fue tomada pensando en respetar los consensos tomados en grupo.

Por otro lado, los miembros fueron manifestando la heterarquía cuando sintieron la confianza y seguridad de criticar o de evaluar abiertamente la pertinencia de las propuestas del coordinador o de otros miembros, en un completo marco de respeto. Esto se dio cuando el

coordinador u otros miembros proponían ajustes en la planeación del Seminario o cuando hacían observaciones o propuestas respecto del diseño que estaban elaborando. Todas las propuestas de ajustes (al Seminario o a los diseños) eran discutidas y evaluadas con el propósito de tomar una decisión que, en el caso de los ajustes al Seminario respetara los acuerdos tomados entre todos, y en el caso de los ajustes al diseño, tuvieran al aprendizaje de los estudiantes como prioridad.

En cuanto al trabajo colaborativo, en el Seminario se manifestó como una mutualidad en las relaciones entre los miembros, o dicho de otro modo, todos tienen algo que dar y algo a recibir del trabajo conjunto. Este concepto había sido desechado en la articulación teórica, ya que se habían entendido como el fin del trabajo colaborativo, donde un individuo aporta sólo si tiene algo que recibir, vale decir, como una relación de aprovechamiento. Sin embargo, y con la evidencia del Seminario, se puede entender la mutualidad como una consecuencia natural del trabajo colaborativo, donde la interacción con otros, en condiciones heterárquicas, siempre aportará a todos los integrantes del grupo, aunque tal aporte se puede dar de manera tácita o patente.

Cabe destacar que, si bien en el análisis de los datos se identificaron diferentes objetivos para los representantes de los distintos grupos sociales representados, esto no se identificó como algo patente para los miembros del Seminario, sino solo el propósito específico de la elaboración de diseños, que se declaró explícitamente en varias ocasiones y estaba asumido de manera tácita por todos. Este hecho nos habla de la independencia de lograr un trabajo colaborativo entre un grupo diverso y la declaración de los objetivos particulares de cada persona, al parecer solo sería necesario declarar el propósito común para que cada individuo evalúe su participación del trabajo conjunto.

Sumado a los objetivos ya reportados, el Seminario también pretendía propiciar el uso de espacios digitales de interacción social (como Moodle, Grupo GeoGebra, grupos de WhatsApp, entre otros), para extender el alcance de los soportes materiales de interacción usuales (como el presencial, espacio físico) a los espacios digitales. Sin embargo, este objetivo se logró en muy escasa medida y solo fue funcional durante el proceso de negociación de la THA de cada diseño. Por una parte, en las discusiones para determinar la THA de cada diseño, donde los profesores registraban la versión de su objetivo, y el resto de los miembros consignaban observaciones en algún espacio del aula virtual habilitado para ese propósito. Por otra parte, al culminar la THA de cada diseño, donde el coordinador trabajó de manera individual con cada profesor mediante video llamada.

Tendemos a pensar que uno de los motivos de la escasa interacción social en espacios digitales se debe a la misma planeación del Seminario, que esta estructurada en sesiones presenciales, donde el uso de los espacios digitales de interacción social estaban destinados al registro de la actividad presencial, y en caso extremo, para culminar un producto del Seminario que se fue trabajando durante las sesiones. Por lo tanto, para lograr una mayor o real interacción social en espacios digitales, esta se debe considerar desde la planeación del espacio de desarrollo profesional y otorgarle un lugar importante para el desarrollo de sus actividades.

5.3.2. Aspectos técnicos o de la cultura digital

La propuesta de integración digital desarrollada en el Seminario, pretende que los profesores se integren a la cultura digital, lo cual se fue propiciando mediante el trabajo técnico con herramientas digitales (apresto técnico) y la reflexión-acción sobre prácticas propias de las comunidades que manifiestan una cultura digital.

Por una parte, hubo evidencia clara de las características del apresto técnico considerado en la planeación del Seminario, tanto en su carácter progresivo como en la conceptualización de las tecnologías digitales. Si bien hubo un momento inicial (Etapa 2) en el cual se guió la exploración y el uso de diferentes recursos digitales, a medida que cada profesor iba explorando y usando tales herramientas, descubría nuevas herramientas y formas de uso, las cuales generalmente estaban relacionadas con aspectos didácticos o extra-didácticos.

Por lo tanto, en términos técnicos es posible declarar que cada profesor fue configurando su propio camino de apresto técnico a las tecnologías digitales usadas durante el Seminario, lo cual fue dirigido por los intereses individuales, disponibilidad de tiempo y las demandas del diseño de cada uno.

Por otro lado, respecto de la reflexión-acción sobre prácticas digitales, durante el Seminario se manifestaron de manera muy marcada las prácticas de compartir de manera abierta y responsable, y materializar las soluciones a las problemáticas de las personas. En primer lugar se propiciaron varias instancias de reflexión sobre la práctica de compartir de manera abierta y responsable, revisando el ejemplo de comunidades digitales, tales como GeoGebra, Moodle, Creative Commons, entre otras. Posteriormente, todos los profesores fueron incorporando esta práctica, por ejemplos, al crear su perfil de GeoGebra (espacio digital para compartir de manera abierta y responsable) para crear Hojas y Libros, recursos quedan disponibles para toda persona que ingrese al perfil. También compartieron en el aula virtual sus productos elaborados durante el Seminario, como la THA, el Libro GeoGebra de su diseño y *applet* construidos para sus actividades. En cuanto a la responsabilidad aludida en la práctica de compartir, se exhortaba a los profesores a citar a las fuentes de los recursos que estuvieran usando y que no fueran de su autoría, lo cual se concretó, por ejemplo, en la creación de una Hoja dinámica de referencias que fue incluida en todos los diseños. Cabe destacar que esta poner en funcionamiento esta práctica no fue espontáneo, sino producto de realizar varias actividades para promoverla.

En el caso de la práctica digital de materializar las soluciones a las problemáticas de las personas (al contrario de la práctica de compartir de manera abierta y responsable), se fue dando de manera espontánea a medida que los profesores encontraban la manera de abordar un problema con el uso de las tecnologías digitales presentadas durante el Seminario. Tales problemas eran de diversos tipos, tanto didácticos como extra-didácticos. Por ejemplo, la profesora Dina uso las video llamadas para organizar con sus estudiantes una actividad escolar, lo cual hizo gracias a que durante el Seminario había *aprendido* a usar tal tecnología digital, a propósito a las sesiones individuales de trabajo que tuvieron con el

coordinador. La profesora Sabrina usó el recurso Grupo GeoGebra con sus estudiantes para compartir la versión digital del libro de texto de matemáticas, ya que este año solo le habían llegado tres copias para usar con más de 30 estudiantes. La profesora Abigail construyó, con la ayuda de Zaid, un tangram que le permitía confrontar la idea de que solo los polígonos congruentes tienen igual área, idea que no podía trabajar con el tangram de madera. De manera general, todos construyeron *applet* para abordar los objetivos de sus respectivos diseños.

5.3.3. Aspectos didácticos o relacionados con el saber geométrico

La propuesta de integración digital desarrollada en el Seminario, pretendía que los profesores pudieran usar el AGD como un laboratorio geométrico, en el cual propiciarán la experimentación con la geometría. Para ello, se planearon actividades para que los profesores las desarrollaran y también se dispuso de la Etapa 4 para que elaboraran diseños didácticos sobre algún contenido de geometría, donde usaran el AGD de GeoGebra. Todo esto para poner en juego aspectos del modelo de trabajo geométrico, considerando el carácter dinámico de la geometría.

Un aspecto del trabajo geométrico desarrollado desde las primeras actividades geométricas, fue el reconocimiento de elementos esenciales de cada noción geométrica, primero a través de el desarrollo por parte de los profesores de una actividad sobre clasificación de cuadriláteros, luego en la conferencia de la maestra Rosa sobre el ángulo y la angularidad, a continuación en la presentación de resultados de investigación sobre el contenido curricular que cada profesor reportó, y finalmente, en la elaboración de los diseños didácticos. Las primeras dos instancias sirvieron de ejercicio para reconocer la importancia de los elementos esenciales de cada noción geométrica, y en las dos últimas, sirvieron de base para ir desarrollando la propuesta de cada diseño.

Así, el reconocimiento de los elementos esenciales de una noción geométrica, fue un aspecto del trabajo geométrico muy importante en el desarrollo del Seminario, en cuanto a cuestiones didácticas, aunque en el modelo de trabajo geométrico no está reflejado de manera explícita. Suponemos que la escasa mención en el trabajo geométrico, de los elementos esenciales (o esencia) de las nociones geométricas, se debe a lo amplio del modelo, el cual se refiere a prácticas de geometrización en general, que *a priori* se podrían identificar en el estudio de cualquier noción geométrica, mediante la intuición sofisticada (abstracción de esencia) o la construcción geométrica (guiada por tales esencias o que genera esencias reconocidas como invariantes). Sin embargo, en la elaboración de los diseños, cada uno de ellos atendía a una noción geométrica específica, por lo que el reconocimiento de los elementos esenciales de cada noción se volvió un aspecto de gran importancia para fundamentar el objetivo del diseño. Esta situación nos permite poner atención al uso del modelo de trabajo geométrico, para el estudio de una noción geométrica específica, donde cobra importancia la esencia de cada noción.

Por otra parte, se evidenció que todos los diseños elaborados en el Seminario favorecen las prácticas geométricas de abstracción y representación para transitar de lo concreto a lo teórico. Incluso, este tránsito fue el hilo conductor del diseño sobre Círculo y Círculo del profesor Alberto. Este resultado nos parece una cuestión de suma importancia, ya que la dialéctica concreto-teórica caracteriza a todo el razonamiento geométrico.

El análisis del diseño de Alberto permite evidenciar que el trabajo geométrico es un modelo maleable, según las características de cada noción geométrica (elementos esenciales) y las decisiones didácticas que se tomen, por ejemplo, para trazar el hilo conductor de cada actividad, tarea o diseño. De esta manera en el diseño sobre circunferencia y círculo

se identifica una manera particular de uso del modelo de trabajo geométrico:

Tarea 1

En esta tarea primero se moviliza la intuición empírica para esbozar características de las formas circulares, y la representación de bosquejos, para distinguir entre la circunferencia (o algo parecido a ella) de otras formas.

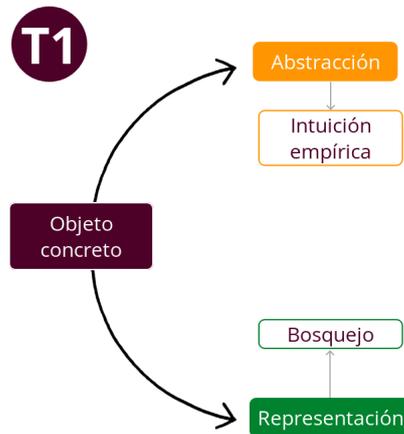


Imagen 5.1: Uso del modelo de Trabajo geométrico en la tarea 1.

Tarea 2

En esta tarea se emplea la intuición empírica para estudiar el proceso de representación, en tanto procedimiento, materiales y uso de estos; y para explicar la forma del trazo resultante, por medio de las características de los materiales, donde tales características se vislumbran como un *síntoma de la esencia* de los elementos que determinan a la circunferencia. En el caso de la representación, se llevan a cabo construcciones (de circunferencias, de espirales, u otras formas).



Imagen 5.2: Uso del modelo de Trabajo geométrico en la tarea 2.

Tarea 3

En esta tarea se proponen actividades que sólo movilizan la intuición empírica, primero para identificar las características de los materiales que permitieron trazar la circunferencia (forma); luego se realiza una descripción de tales características; y finalmente se describe la circunferencia (forma de) mediante las características de los materiales, a los cuales ya nos habíamos referido a *síntomas de esencia*.

La descripción de la forma de la circunferencia utilizando los síntomas de esencia, es la manera en que se comienza el tránsito desde los aspectos concretos hacia lo teórico. Cabe destacar que en esta tarea no se pone en funcionamiento la práctica de representación.

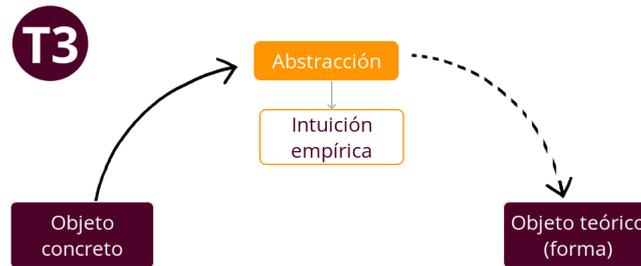


Imagen 5.3: Uso del modelo de Trabajo geométrico en la tarea 3.

Tarea 4

En la presente tarea se pone en funcionamiento la práctica de abstracción en pleno, tanto la intuición empírica como la intuición sofisticada. Por una parte se pone en funcionamiento la intuición empírica para recordar los *síntomas de esencia*. Por otro lado se coordina la intuición de sofisticada con la intuición empírica para relacionar las características de los materiales con los elementos esenciales que determinan la circunferencia (centro y radio). Finalmente, se moviliza la intuición empírica para estudiar las definiciones de circunferencia y sus elementos.

En el caso de la práctica de representación, se emplea el AGD para hacer construcciones o bosquejos de circunferencia. Sin embargo, no queda claro el tránsito desde las características concretas hacia las propiedades teóricas para llevar a cabo en un proceso de representación.

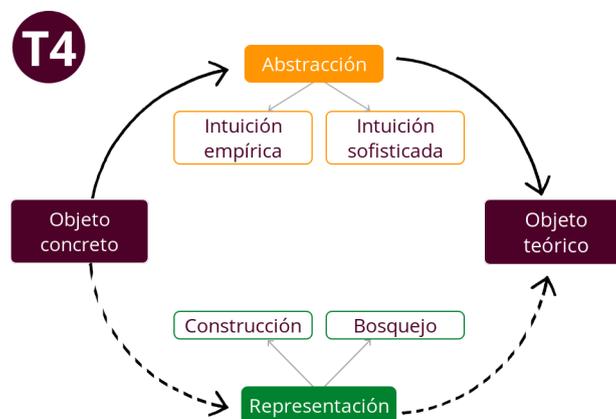


Imagen 5.4: Uso del modelo de Trabajo geométrico en la tarea 4.

Tarea 5

Finalmente, se coordina la intuición sofisticada con la intuición empírica para estudiar el proceso de representación, para comunicar dificultades encontradas, tanto en el trabajo en ambiente concreto como digital. Luego se pone en funcionamiento la intuición sofisticada para ratificar al radio y la circunferencia como elementos esenciales para determinar la circunferencia.

En el caso de la práctica de presentación, se realizan construcciones de casos específicos de la circunferencia usando sus elementos esenciales.



Imagen 5.5: Uso del modelo de Trabajo geométrico en la tarea 5.

Este uso específico del trabajo geométrico como fundamento para un diseño sobre la circunferencia y el círculo, permite seguir refinando el modelo. Vislumbramos que estudiar los usos específicos del trabajo geométrico en los otros tres diseños elaborados durante el Seminario, también contribuirían a seguir refinando el modelo, una tarea que puede ser prospectiva para futuros trabajos.

Por una parte, reconocer características de materiales concretos que luego se puedan relacionar con elementos esenciales, es decir, caracterizar *síntomas de esencia* lo relacionamos con la importancia de las herramientas concretas utilizadas al hacer geometría, como cuando Euclides usaba la regla no graduada y el compás desarmable debido a que encarnaban las herramientas teóricas declaradas en los *Elementos*.

Por otra parte, gracias a las tareas donde se estudia el procedimiento de representación es posible reconocer que, la identificación de esencias no se da solo mediante el estudio de un diagrama, sino también puede ser a través del estudio de un procedimiento geométrico. Esto lo relacionamos con la manera clásica de hacer geometría, mediante el método sintético, reflexionando sobre lo que se hizo, tanto como producto (diagrama) así también como proceso. Más aún, al reconocer el funcionamiento de la intuición sofisticada sobre el procedimiento de construcción, se hace necesario “hablar de geometría”, donde la verbalización y el diálogo geométrico se vuelve un aspecto relevante a la hora de reconocer elementos esenciales.

Cabe destacar que el estudio del proceso de construcción moviliza tanto a la intuición sofisticada como a la intuición empírica, prueba de su presencia plena en la práctica de abstracción. La intuición sofisticada permite reconocer elementos geométricos esenciales

en el estudio del proceso representación, mientras que la intuición empírica nos entrega información de las características de los materiales usados, y ambas de manera coordinadas, dan cuenta de la manera en que se usaron los materiales en el proceso de representación.

Finalmente, el diseño de Alberto aborda solo el aspecto constructivo de las dimensiones de carácter dinámico de la geometría. La identificación de invariantes mediante transformaciones se encuentra ausente de las tareas del diseño, aunque en la fase de planeación se había considerado incluir una actividad de este estilo. Suponemos que el cambio de perspectiva de estudio de la geometría, desde una estática a una dinámica, representa un esfuerzo adicional para el proceso de integración. Por lo que pensamos que acciones de acompañamiento y trabajo explícito en este aspecto podrían incidir en la incorporación de aspectos del carácter dinámico de la geometría a las consideraciones didácticas de los diseños.

5.3.4. Aspectos de los saberes docentes

La propuesta de integración digital desarrollada en el Seminario, considera aspectos generales del quehacer docente reflejados al asumir a los saberes docentes como una construcción social, histórica y dialógica entre diferentes voces sociales. Además, se hace énfasis en las discusiones didácticas sobre geometría, lo cual se desarrolla a través de diversas instancias de confrontación-resignificación de significados geométricos.

En el caso de la confrontación y resignificación de significados geométricos, en el Seminario se manifestó como la perspectiva con la cual se estudiaron aspectos matemáticos, los cuales siempre se confrontaban con las propuestas educativas oficiales (plasmadas en el currículo, los planes de estudio, los libros de texto), con el propósito de reconocer, primero la existencia y, luego la validez de los significados geométricos no escolares que se fueron encontrando en cada actividad.

Esta dinámica de confrontar los significados geométricos oficiales, de carácter hegemónico e invisibilizador, y para luego reconocer la existencia y validez de todos los significados (oficiales y no oficiales), entendiéndolo a esto último como un proceso de significación progresiva. Esta dinámica se fue desarrollando en diferentes actividades durante el transcurso del Seminario, con la intención de que los profesores pudieran experimentar diversas instancias de la práctica docente, pero ahora incorporando esta perspectiva para estudiar la matemática, y hacerlo en ambientes híbridos:

1. Al desarrollar una actividad.
2. Al analizar la planeación de una actividad.
3. Al estudiar un diseño sobre el ángulo elaborado para trabajar con estudiantes.
4. Al comunicar resultados de investigación sobre las nociones geométricas a trabajar en el diseño: se reconocen significados asociados a las nociones geométricas, que son distintos del significado curricular, y que se reportan como valiosos en cuanto a entender qué conciben usualmente los estudiantes.
5. Al planear el diseño: cuestionar las actividades propuestas en los libros de texto, ya que desnaturalizan la actividad geométrica. Idear nuevas formas de significar la noción geométrica, ampliando las propuestas de la investigación.
6. Al elaborar el diseño didáctico: pensar en la manifestación de los significados geométricos en diferentes espacios. Criticando el diseño elaborado.

En el caso de los saberes docentes, durante todo el Seminario hubo pugnas entre las voces sociales ligadas a lo oficial en la educación (currículo, procesos de evaluación docente, textos de estudios, etc.) y los componentes que fueron configurando la voz social del Seminario (integración digital), a saber, resultados de investigación, uso de recursos digitales, etc.

Específicamente, este diálogo entre las voces sociales ligadas a lo oficial en la educación y la voz social de la propuesta de integración digital, se manifestó como el desarrollo de

la idea del profesor como un profesional de la educación y no como un ejecutor técnico del currículo. En primer lugar la pugna se dio al asumirse como un profesional de la educación, quien está facultado, por ejemplo, para cuestionar lo que consideramos como aprender y lo que el ámbito oficial nos impone como aprender, para innovar en la práctica docente; ser críticos ante los cambios arbitrarios del sistema educativo; ser críticos con el uso de resultados de investigación, los cuales a veces se difunden como modas educativas; cambiar el enfoque de los diseños que elaboran, de unos centrados en el cumplimiento de la ordenanza curricular, a diseños centrados en el aprendizaje de los estudiantes.

Otra instancia donde se reconoce la pugna entre las voces sociales ligadas a lo oficial en la educación y la voz social que se estaba configurando en el Seminario, es el proceso de negociación, donde el primer referente para los profesores siempre fueron los elementos oficiales (currículo, texto de estudio, etc.). Asimilaron con rapidez los resultados de investigación para incorporarlos a la discusión y a sus planeaciones, lo cual suponemos se debe a que también representan un aspecto oficial, aunque en una dimensión académica y no política o burocrática.

En cuanto a la tecnología digital, se manifestó de dos formas, al considerarlo para aspectos didácticos y, por otra parte, para aspectos extra-didácticos. En cuanto a lo didáctico, el comienzo consideraban la tecnología en sus planeaciones como si fuera un aspecto a calificar, es decir, lo declaraban de una manera acrítica, solo para cumplir con un objetivo del Seminario. Luego, durante las discusiones dadas al confeccionar el Libro GeoGebra correspondiente al diseño, se fueron resignificando las nociones geométricas para ser estudiadas en ambientes híbridos, lo cual supuso un uso de los recursos materiales (concretos y digitales) con un sentido y propósito más claro, es decir, se fue dando una integración más crítica. En la Etapa de Retroalimentación colaborativa se dieron discusiones más profundas sobre esta dimensión, al cuestionar el uso de ciertos *applet* en el diseño y sugerir la incorporación de otros, donde la directriz de la discusión era el objetivo didáctico, al cual se subordinaban las características materiales de los ambientes considerados (concreto y digital).

En cuanto a los aspectos extra-didácticos, se vivió una situación completamente opuesta a la dificultad del uso de tecnología digital en la dimensión didáctica. A medida que se iban explorando ciertas tecnologías digitales, los profesores iban pensando cómo les podrían ser útiles en su quehacer docente (con énfasis en la dimensión extra-didáctica), para usarlas de inmediato en caso de encontrar una situación donde se ajustaran a sus necesidades. Por ejemplo, al usar video llamadas para organizar actividades escolares con sus estudiantes, fuera del horario de clases; disponer de la versión digital del texto de estudio, para que todos los estudiantes pudieran acceder a ese material; o al repensar el uso de tecnología digital que ya conocían, para utilizarla de esta nueva forma en su diseño.

En definitiva, la integración digital en términos didácticos fue la dimensión más compleja de desarrollar, por una parte debido a la poca discusión al respecto que propició el Seminario, y por otra, a la profundidad y amplitud necesaria de las discusiones didácticas para asimilar esta dimensión. Caso contrario a la integración digital en la dimensión extra-didáctica, a la cual se fue atendiendo a medida que se iba explorando un recurso digital.

5.3.5. Integración digital en el Seminario

La propuesta de integración digital desarrollada en el Seminario, considera la atención de diversos componentes: aspectos de organización social; aspectos técnicos y de la cultura digital, aspectos didácticos y geométricos; y aspectos de los saberes del profesor. Todos ellos abonan al propósito de que los profesores se integren a la cultura digital, para que puedan integrar prácticas digitales a su quehacer docente.

Este proceso de integración digital se manifestó en el conocimiento, por parte de los profesores, de la existencia y vigencia de la cultura digital, lo cual les permitió acercarse a una concepción más humana y social de las tecnologías digitales, es decir, ellas son construidas socialmente por comunidades de personas, para satisfacer necesidades humanas. Entender el fenómeno digital de esta manera, posibilitó que los profesores estuvieran dispuestos a poner en funcionamiento ciertas prácticas digitales, las cuales fueron integrando a su quehacer docente. Por ejemplo, un aspecto general muy marcado en la cultura del profesor, es la costumbre de no compartir sus diseños o resultados de sus aplicaciones con otros colegas. Esta situación comenzó a modificarse durante el Seminario, cuando los profesores comenzaron a compartir de manera abierta sus avances o productos, con el resto de los miembros, e incluso proponían instancias para dar y recibir retroalimentación del resto del grupo.

Estas condiciones sociales, tecnológicas, docentes y digitales, fueron configurando un terreno fértil para propiciar la integración digital en la práctica de cada uno de los docentes.

En términos generales, es posible decir que se durante el desarrollo del Seminario se dio una integración digital en la práctica del docente, en sentido amplio, ya que no sólo se comenzó a integrar la tecnología digital en aspectos didácticos, sino también en extra-didácticos. Esto habla de la construcción dialógica de los saberes docentes, donde se ponen a dialogar diferentes voces sociales que influyen en las decisiones del profesor, no sólo lo referido a lo didáctico y el cumplimiento de objetivos curriculares, sino también, a la atención de condiciones de gestión de los recursos, del trabajo individual o en equipo, de experiencias educativas exitosas o que no culminaron tan bien, entre muchos otros. Todo ello para lograr el funcionamiento de la acción educativa¹.

¹Algunos ejemplos del proceso de integración digital de los profesores fueron presentados en Rubio-Pizzorno, S. y Montiel, G. (2017). Didactical designs and Pedagogical strategies using GeoGebra Materials Platform. Some Mexican cases. En *GeoGebra Global Gathering GeoGebra Book* (p. 5). Linz, Austria: GeoGebra Team. En [geogebra.org/m/Mvpvu5v6](https://www.geogebra.org/m/Mvpvu5v6)

Capítulo 6

Conclusiones

Mediante el diseño fundamentado del Seminario, su planeación, implementación y posterior análisis, este proyecto de investigación abordó una de las aristas del fenómeno de la aparición de las tecnologías digitales en el panorama educativo, la cual corresponde a la integración digital en la práctica docente, y en específico a la integración digital en la práctica del docente de matemáticas.

A la luz de este proceso investigativo es posible aportar al entendimiento del fenómeno de la aparición de las tecnologías digitales en la educación y proponer aspectos a considerar al momento de abordar su estudio o intervención. Es necesario tener en cuenta la dualidad oficial-no oficial identificada en el fenómeno de la aparición de las tecnologías digitales y que permea a todos los niveles, específicamente al educativo.

En primer lugar, en este trabajo se asume a la tecnología digital en este trabajo, considerándola como una construcción social de comunidades digitales, para satisfacer necesidades humanas. Desde esta perspectiva, nos preguntamos cómo se organiza la sociedad para construir conocimiento aprovechando la tecnología digital. Al respecto fue posible responder en términos teóricos, que en esta era digital las personas se están agrupando y organizando en comunidades diversas, que configuran una inteligencia-red cuando su propósito principal es la construcción de conocimiento. Esta reflexión teórica abonó a la configuración de variables sociales y de la cultura digital en el diseño del SIDPDM, en donde fue posible reconocer la adopción, en un espacio de desarrollo profesional docente, de formas de trabajo colaborativo, asumir y actuar en consecuencia a la heterarquía entre las relaciones sociales de los miembros, así como incorporar prácticas digitales a sus dinámicas de trabajo, como compartir de manera abierta y responsable, así como materializar soluciones a sus problemáticas.

En este sentido, declaramos que es posible promover aspectos sociales y de la cultura digital que se dan en comunidades de alcance global, en instancias de trabajo con profesores, con el propósito de proveer a los docentes de herramientas que le permitan reconocer los fenómenos y la cultura digital a la cual están cercanos sus estudiantes, sin descuidar las demandas oficiales, que generalmente están completamente desconectadas de las reales necesidades educativas de las personas.

En segundo lugar, y focalizando hacia el campo disciplinar que le compete a esta investigación, nos preguntamos qué geometría y cómo se aprende esta en la era digital. En términos teóricos logramos articular una respuesta que posiciona a los ambientes de geometría dinámica como laboratorios que permiten experimentar con la geometría, gracias al cambio en la interacción con la representación de los objetos matemáticos, que permite disminuir la brecha mediacional. Específicamente, reconocemos al ambiente de geometría dinámica de GeoGebra como un laboratorio geométrico abierto, debido a las características de la comunidad que lo construye. Este resultado ayudó a realizar una vigilancia metodológica en las discusiones y elaboración de diseños didácticos durante el Seminario, en donde se dio cuenta de la desnaturalización del estudio de nociones geométricas que provocan las actividades y las propuestas curriculares que plantea el ámbito oficial de la educación. De tal manera que en los casos desarrollados en el Seminario, siempre fue necesario realizar modificaciones a las propuestas curriculares, con el propósito de atender a las reales necesidades educativas de los estudiantes, con base en un proceso de negociación establecido entre resultados de investigación en educación matemática, la experiencia de los docentes y la atención al ambiente del diseño.

En cuanto a la propuesta de integración digital plasmada en esta investigación, esta emerge como una respuesta desde la academia a los programas de inclusión digital implementados por el ámbito oficial de la educación (poder político y corporativo). La propuesta de integración digital desarrollada en esta investigación se sintetiza declarando la necesidad de que *el profesor se integre a la cultura digital para que pueda integrar prácticas digitales en su quehacer docente*. En esta frase se sintetiza la perspectiva con la cual se asume un proceso de integración a la práctica del profesor, no importando que sea sobre tecnología digital o una reforma educativa. Para integrar (y no incluir simplemente) algo a la práctica del profesor, es necesario entender que los saberes docentes, su práctica diaria, la relación con sus pares y su rol de mediador entre los intereses educativos oficiales y las reales necesidades educativas de sus estudiantes, configuran una cultura docente. Por lo tanto, cualquier proceso de integración a su práctica puede ser visto como un cambio cultural, cambio que se produce en tiempos sociales, que generalmente son extensos en años. De ahí que no tenga mucho sentido estar realizando constantemente *reformas educativas*, las cuales responden a intereses (y tiempos) políticos, y que en definitiva pueden ser reconocidos simplemente como planes de inclusión.

A la luz de las experiencias desarrolladas en el Seminario, su diseño y análisis, declaramos que la propuesta de integración digital llevada a cabo en el Seminario, inició un proceso de diálogo entre la cultura del profesor y la cultura digital, donde el profesor reconoce la existencia de una cultura asociada a lo digital, ya sean tecnologías, prácticas, comunidades, era histórica, etc., para luego idear formas en que los aspectos de la cultura digital le aportan a su práctica docente. Esto en un sentido amplio, en tanto integración de recursos digitales nuevos o nuevos usos de tecnologías ya conocidas, a su práctica docente plena, es decir, en la dimensión didáctica y la extra-didáctica.

En definitiva, el diálogo entre la cultura docente y la cultura digital decantará en la integración de las tecnologías y las prácticas digitales que el profesor considere útiles a

su práctica docente. Este proceso, además de los beneficios evidentes, también ayuda a fortalecer el rol mediador del profesor, entre los ámbitos educativos oficial y no oficial, ya que le permite valorar y reconocer que la Realidad de los estudiantes también es real, así como lo es la Realidad oficial en la educación, representada por políticas públicas, leyes, reformas educativas, currículo, calificaciones, etc., y a su vez también, como lo es su propia Realidad docente (mediador entre ambas Realidades).

Índice analítico

- Arrastre, 16
- Brecha digital
 - de la *digital literacy*, 113
 - Primera, 112
 - Segunda, 113
- Carácter dinámico de la geometría, 101, 103, 106, 107
- Comunidades digitales, 51
- Construcción social
 - de la Tecnología Digital, 43–58
 - Saberes docentes como, 132
- Creative Commons, 209
- Cultura digital, 34–42
 - Acción social, 35
 - Ejercicio de poder, 40
 - Estructura social, 36
 - Interacción social, 39
 - Organización temporal, 38
- Desarrolladores, 49
- Diagrama geométrico, 89
- Discurso Matemático Escolar, 131, 132
- GeoGebra, 16
 - Materiales (plataforma de), 69
 - Comandos y Herramientas
 - Casilla de Control, 237
 - Circunferencia, 243
 - Comprueba, 241
 - Rastro, 237
 - Comunidad, 19, 69
 - Grupo, 165, 212
 - Grupo GeoGebra, 154
 - Hoja dinámica, 154, 203
 - Libro GeoGebra, 154, 205
- Hacker, 56
- Inclusión digital, 113
- Integración digital, 113
- Inteligencia-red, 55
- Investigación basada en el diseño, 23, 140
- Naturalezas de la geometría, 101–103
 - Digital, 94–100
 - Epistémica, 74–85
 - Epistemológica, 86–88
 - Filosófica, 89–93, 104, 107
- Seminario de Integración Digital a la Práctica del Docente de Matemáticas, 135
- Social Construction Of Technology (Scot), 26–33
 - Estabilización, 33
 - Flexibilidad interpretativa, 28, 33
 - Grupos sociales relevantes, 27, 32
 - Marco tecnológico, 29, 33
 - Mecanismo de cierre, 28
 - Planteamiento actual, 30
 - Planteamiento inicial, 27
- Sociedad
 - 1.0, 10
 - 2.0, 10
 - 3.0, 9, 16
- Sociedad red, 55
- Software libre, 18, 52
- Tercera Revolución en la Humanidad, 9, 10
- Trabajo geométrico, 73, 100, 101, 103, 105–107, 136
- Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, 136
- Usuarios, 49

Bibliografía

- ALDON, GILLES (2015). «Technology and Education: Frameworks to Think Mathematics Education in the Twenty-First Century». En: Uwe Gellert; ; Joaquim Giménez Rodríguez; Corinne Hahn y Sonia Kafoussi (Eds.), *Educational Paths to Mathematics: A C.I.E.A.E.M. Sourcebook*, pp. 365–381. Springer International Publishing, Cham. ISBN 978-3-319-15410-7. doi: 10.1007/978-3-319-15410-7_24.
- ARTIGUE, MICHÈLE (2002). «Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work». *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, **7(3)**, pp. 245–274. ISSN 13823892. doi: 10.1023/A:1022103903080.
- ARZARELLO, FERDINANDO; OLIVERO, FEDERICA; PAOLA, DOMINGO y ROBUTTI, ORNELLA (2002). «A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments». *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, **34(3)**, pp. 66–72. ISSN 1615-679X. doi: 10.1007/BF02655708.
- BIJKER, WIEBE E. (1995). *Of Bicycles, Bakelites, and Bulbs: Toward a Theory of Sociotechnical Change*. MIT Press. ISBN 0262522276.
- BOAVIDA, ANA y DA PONTE, JOÃO PEDRO (2002). «Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas». *Reflectir e investigar sobre a prática profissional*, **(1)**, pp. 43–55.
- BUNGE, MARIO (2007). *Diccionario de filosofía*. Siglo XXI, México D.F., México.
- CANTORAL, RICARDO y FARFÁN, ROSA MARÍA (1998). «Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis». *Epsilon, Revista española de educación matemática*, **(42)**, pp. 353–369.
- (2003). «Matemática Educativa: Una visión de su evolución». *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, **6(1)**, pp. 27–40.
- CASTELLS, MANUEL (1999). *La Era de la Información. Economía, Sociedad y Cultura: La Sociedad Red (vol. I)*. Siglo XXI, Estado de México, México. ISBN 9789682321689.
- CEDRÉS, ÁLVARO JULIO PELÁEZ (2009). «Construcción, necesidad e intuición de esencias en geometría». *Scientiae Studia*, **7(4)**, pp. 595–617. ISSN 1678-3166. doi: 10.1590/S1678-31662009000400004.

- COBO, CRISTOBAL y MORAVEC, JOHN W. (2011). *Aprendizaje invisible. Hacia una nueva ecología de la educación*. Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona, Barcelona. ISBN 9788447535170.
- CONTRERAS, PAU (2003). *Me llamo Kohfam. Identidad de un hacker: una aproximación antropológica*. Editorial Gedisa S. A., Barcelona. ISBN 84-9784-007-0.
- DEL CASTILLO, ALEJANDRO y MONTIEL, GISELA (2009). «¿Artefacto O Instrumento? Esa Es La Pregunta». *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, **22**, pp. 459–468.
- ERRASTI, LAUTARO (2009). *La heterarquía*. Extraído el 25 de enero de 2018 desde <http://digigel.blogspot.mx/2009/05/la-heterarquia.html>.
- EUCLIDES (1991). *Elementos. Libros I-IV*. Editorial Gredos, S. A., Madrid, España. ISBN 8424914643.
- FAHLGREN, MARIA y BRUNSTRÖM, MATS (2014). «A model for task design with focus on exploration, explanation, and generalization in a dynamic geometry environment». *Technology, Knowledge and Learning*, **19(3)**, pp. 287–315. ISSN 22111662. doi: 10.1007/s10758-014-9213-9.
- FISCHBEIN, EFRAIM (1993). «The theory of figural concepts». *Educational studies in mathematics*, **24(2)**, pp. 139–162. ISSN 0013-1954. doi: 10.1007/BF01273689.
- FLORES, DORISMILDA (2016). «Internet más allá de internet: el estudio de la comunicación desde la etnografía digital». *VIRTUalis*, **7(14)**, pp. 39–52.
- FREE SOFTWARE FOUNDATION (2018). *¿Qué es el software libre?*. Extraído el 25 de enero de 2018 desde <https://www.gnu.org/philosophy/free-sw.html>.
- FREIMAN, V. (2014). «Types of Technology in Mathematics Education». En: Stephen Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*, pp. 623 – 629. Springer Netherlands.
- FUGLESTAD, ANNE BERIT; HEALY, LULU; KYNIGOS, CHRONIS y MONAGHAN, JOHN (2010). «Working with Teachers: Context and Culture». En: Celia Hoyles y Jean-Baptiste Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain*, caplo 13, pp. 293–310. Springer US. doi: 10.1007/978-1-4419-0146-0_13.
- GARCÍA-ZATTI, MÓNICA y MONTIEL, GISELA (2008). «Resignificando la linealidad en una experiencia de educación a distancia en línea». *Revista Electrónica de Investigación En Educación En Ciencias REIEC*, **3(2)**, pp. 12–26.
- GEOGEBRA (2011). *An introduction to the development of GeoGebra*. Extraído el 25 de enero de 2018 desde <https://dev.geogebra.org/trac/wiki/Versions>.
- (2016). *Versions*. Extraído el 25 de enero de 2018 desde <https://dev.geogebra.org/trac/wiki/Versions>.

- (2017, noviembre 20). *Find over 1 million free and interactive classroom resources on geogebra.org/materials. Search for a topic and share! [Publicación de Twitter]*. <https://twitter.com/geogebra/status/932586021010714624>
- GOLDENBERG, E. PAUL y CUOCO, ALBERT A. (1998). «What is Dynamic Geometry?» En: Richard Lehrer y Daniel Chazan (Eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space*, pp. 351–367.
- GOOS, MERRILYN; SOURY-LAVERGNE, SOPHIE; ASSUDE, TERESA; BROWN, JILL; KONG, CHOW MING; GLOVER, DEREK; GRUGEON, BRIGITTE; LABORDE, COLETTE; LAVICZA, ZSOLT; MILLER, DAVE y SINCLAIR, MARGARET (2010). «Teachers and Teaching: Theoretical Perspectives and Issues Concerning Classroom Implementation». En: Celia Hoyles y Jean-Baptiste Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain*, caplo 14, pp. 311–328. Springer US. doi: 10.1007/978-1-4419-0146-0_14.
- GREENBERG, MARVIN J. (1994). *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. W.H. Freeman and Company. ISBN 0-7167-2446-4.
- GRUGEON, BRIGITTE; LAGRANGE, JEAN-BAPTISTE; JARVIS, DANIEL; ALAGIC, MARA; DAS, MILI y HUNSCHEIDT, DIANA (2010). «Teacher Education Courses in Mathematics and Technology: Analyzing Views and Options». En: Celia Hoyles y Jean-Baptiste Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain*, caplo 15, pp. 329–345. Springer US. doi: 10.1007/978-1-4419-0146-0_15.
- HEALY, LULU y LAGRANGE, JEAN-BAPTISTE (2010). «Introduction to Section 3». En: Celia Hoyles y Jean-Baptiste Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain*, caplo 12, pp. 287–292. Springer US. doi: 10.1007/978-1-4419-0146-0_12.
- HITT, FERNANDO; SABOYA, MIREILLE y CORTÉS, CARLOS (2017a). «Task Design in a Paper and Pencil and Technological Environment to Promote Inclusive Learning: An Example with Polygonal Numbers». En: Aldon Gilles; Fernando Hitt; Luciana Bazzini y Uwe Gellert (Eds.), *Mathematics and Technology. Advances in Mathematics Education*, pp. 57–74. Springer, Cham. doi: 10.1007/978-3-319-51380-5_4.
- HITT, FERNANDO; SABOYA, MIREILLE y ZAVALA, CARLOS CORTÉS (2017b). «Rupture or continuity: The arithmetico-algebraic thinking as an alternative in a modelling process in a paper and pencil and technology environment». *Educational Studies in Mathematics*, **94**(1), pp. 97–116. ISSN 0013-1954. doi: 10.1007/s10649-016-9717-4.
- HOHENWARTER, MARKUS (2013). *Dynamic Mathematics for Everyone [Video]*. Rescatado de youtu.be/Yq1eBZjz16I.
- HOHENWARTER, MARKUS y LAVICZA, ZSOLT (2011). «The Strength of the Community». En: Lingguo Bu y Robert Schoen (Eds.), *Model-Centered Learning*, pp. 7–12. SensePublishers, Rotterdam. ISBN 978-94-6091-618-2. doi: 10.1007/978-94-6091-618-2_2.

- HOYLES, CECILIA y LAGRANGE, JEAN-BAPTISTE (2010). *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain*. volumen 13 de *New ICMI Study Series*. Springer, Boston, MA. ISBN 978-1-4419-0145-3. doi: 10.1007/978-1-4419-0146-0.
- HÖLZL, REINHARD (2001). «Using Dynamic Geometry Software to Add Contrast to Geometric Situations – A Case Study». *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, **6(1)**, pp. 63–86. ISSN 1573-1766. doi: 10.1023/A:1011464425023.
- IRANZO, NURIA y FORTUNY, JOSEP M (2009). «La influencia conjunta del uso del GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado». *Enseñanza de las Ciencias*, **27(3)**, pp. 433–446.
- KLEIN, FELIX (1985). «El Programa de Erlangen». *Revista del Seminario de Enseñanza y Titulación*, **3**.
<http://valle.fciencias.unam.mx/titulacion/4e.pdf>
- (1996). «On the mathematical character of space-intuition and the relation of pure mathematics to the applied sciences». En: W. Ewald (Ed.), *From Kant to Hilbert: a source book in the foundations of mathematics*, pp. 958–965. Oxford: Clarendon Press.
http://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.chmm/1437146810
- KLEIN, H. K. y KLEINMAN, D. L. (2002). «The Social Construction of Technology: Structural Considerations». *Science, Technology and Human Values*, **27(1)**, pp. 28–52. ISSN 0162-2439. doi: 10.1177/016224390202700102.
- KLINE, RONALD y PINCH, TREVOR (1996). «Users as agents of technological change: The social construction of the automobile in the rural United States». *Technology and culture*, **37(4)**, pp. 763–795.
- KOYUNCU, ILHAN; AKYUZ, DIDEM y CAKIROGLU, ERDINC (2015). «Investigation of plane geometry problem-solving strategies of prospective mathematics teachers in technology and paper-and-pencil environments». *International Journal of Science and Mathematics Education*, **13(4)**, pp. 837–862. ISSN 1571-0068. doi: 10.1007/s10763-014-9510-8.
- LABORDE, COLETTE (2002). «Integration of Technology in the Design of Geometry Tasks with Cabri-Geometry». *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, **6(3)**, pp. 283–317. ISSN 13823892. doi: 10.1023/A:1013309728825.
- (2005). «The Hidden Role of Diagrams in Students’ Construction of Meaning in Geometry». En: *Meaning in Mathematics Education*, pp. 159–179. Springer-Verlag, New York. doi: 10.1007/0-387-24040-3_11.
- LEARNING METRICS TASK FORCE - UNESCO (2013). *Toward Universal Learning. What Every Children Should Learn*. UNESCO Institute for Statistics and the Center for Universal Education at the Brookings Institution.
<http://www.brookings.edu/~media/Research/Files/Reports/2013/02/learning-metrics/LMTRpt1TowardUnivrsllLearning.pdf?la=en>

- LEUNG, A. (2015). «Discernment and Reasoning in Dynamic Geometry Environments». En: Sung Je Cho (Ed.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education*, pp. 451–469. Springer International Publishing. ISBN 978-3-319-17186-9. doi: 10.1007/978-3-319-17187-6.
- MARTIN, GEORGE E. (1998). *Geometric Constructions*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, New York, NY. ISBN 978-1-4612-6845-1. doi: 10.1007/978-1-4612-0629-3.
- MARTÍNEZ, ANTONIO; OSORNO, GUILLERMO y LEONARDO, ISAURA (Eds.) (2017). *Derechos digitales en México : ganadores y perdedores de la reforma en telecomunicaciones*. Horizontal, Ciudad de México, México.
<http://horizontal.mx/wp-content/uploads/2017/01/informe2016-web-pages.pdf>
- MELOGNO, PABLO; RODRÍGUEZ, PABLO y FERNÁNDEZ, SALOMÉ (Eds.) (2011). *Elementos de Historia de la Ciencia*. Universidad de la República, Montevideo, Uruguay. ISBN 9789974007604.
http://www.cse.edu.uy/sites/www.cse.edu.uy/files/documentos/CSE-EUBCA_Melogno_2011-07-06-lowres-p4.pdf
- MERCADO, RUTH (1994). «Saberes and social voices in teaching». En: Amelina Álvarez y Pablo del Rio (Eds.), *Education as cultural construction*, pp. 61–70. Aprendizaje S. L, Madrid, España. doi: 10.1007/978-94-6300-561-6_7.
- (2002). *Los saberes docentes como construcción social. La enseñanza centrada en los niños*. Fondo de Cultura Económica, D.F., México.
- MESERVE, BRUCE (1983). *Fundamental concepts of geometry*. New York. ISBN 0486634159.
- MONTIEL, GISELA (2005). «Interacciones en un escenario en línea. El papel de la socio-epistemología en la resignificación del concepto de derivada». *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, **8(2)**, pp. 219–235.
- (2009). «Formación docente a distancia en línea. Un modelo desde la matemática educativa». *Innovación Educativa*, **9(46)**, pp. 89–95.
- (2010). «Hacia el rediseño del discurso: formación docente en línea centrada en la resignificación de la matemática escolar». *Relime*, **13(4-I)**, pp. 69–84.
- (2016). «Condiciones para la innovación educativa en el posgrado». *Perfiles Educativos*, **38(esp)**, pp. 101–115.
- MORENO-ARMELLA, LUIS; HEGEDUS, STEPHEN J. y KAPUT, JAMES J. (2008). «From static to dynamic mathematics: Historical and representational perspectives». *Educational Studies in Mathematics*, **68(2)**, pp. 99–111. ISSN 00131954. doi: 10.1007/s10649-008-9116-6.

- OLIVÉ, LEÓN y PÉREZ TAMAYO, RUY (2014). *Temas de ética y epistemología de la ciencia. Diálogos entre un filósofo y un científico*. Fondo de Cultura Económica, México D. F., México. ISBN 978-607-16-0650-1.
- OSTERMANN, ALEXANDER y WANNER, GERHARD (2012). *Geometry by Its History*. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-642-29163-0. doi: 10.1007/978-3-642-29163-0.
- PIAGET, JEAN y GARCÍA, R (1992). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Siglo Veintiuno. ISBN 968-23-1156-X.
- PINCH, TREVOR (2015). «La construcción social de la tecnología: una revisión». En: María Josefa Santos y Rodrigo Díaz Cruz (Eds.), *Innovación tecnológica y procesos culturales. Perspectivas teóricas*, caplo 2, pp. 18–37. Fondo de Cultura Económica, México. ISBN 9786071622167.
- ROBERTS, D. L.; LEUNG, A. Y. L. y LINS, A. F. (2013). «From the Slate to the Web: Technology in the Mathematics Curriculum». En: M. A. Clements; Alan J. Bishop; Christine Keitel; Jeremy Kilpatrick y Frederick K. S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education*, pp. 525 – 547. Springer Science+Business Media, New York, USA.
- ROBINSON, SIR KEN (Febrero de 2010). «Sir Ken Robinson: ¡A iniciar la revolución del aprendizaje! [Archivo de video]». https://www.ted.com/talks/sir_ken_robinson_bring_on_the_revolution
- ROTAECHE, ROSA (2008). *La construcción del concepto de ángulo en estudiantes de secundaria. Tesis de maestría no publicada*. Tesina o Proyecto, Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación y de Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria, D.F., México.
- ROTAECHE, ROSA ARACELI y MONTIEL, GISELA (2017). «Aprendizaje del concepto escolar de angulo en estudiantes mexicanos de nivel secundaria». *Educacion Matematica*, **29(1)**, pp. 171–199. ISSN 16655826. doi: 10.24844/EM2901.07.
- RUBIO-PIZZORNO, SERGIO; FARFÁN-CERA, CYNTHI y MONTIEL ESPINOSA, GISELA (2017). «Estrategia de planeación para el trabajo con profesores, integrando tecnología digital». En: *Innovagogía 2016 - III Congreso Virtual Internacional sobre Innovación Pedagógica y Praxis Educativa*, pp. 1069–1077. Sevilla.
- RUBIO-PIZZORNO, SERGIO y MONTIEL ESPINOSA, GISELA (2017a). «Aprendizaje invisible en educación matemática». En: L. A. Serna (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, volumen 30, pp. 254–262. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Ciudad de México, México. ISSN 2448-6469.
- (2017b). «Consideraciones epistémicas sobre los objetos geométricos en ambientes de geometría dinámica. Análisis inicial». En: L. A. Serna (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, volumen 30, pp. 1505–1514. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Ciudad de México, México. ISSN 2448-6469.

- (2017c). «Didactical designs and Pedagogical strategies using GeoGebra Materials Platform. Some Mexican cases». En: GeoGebra Team (Ed.), *GeoGebra Global Gathering GeoGebra Book*, p. 5. Linz, Austria.
geogebra.org/m/Mvpvu5v6
- (2017d). «GeoGebra as a socially constructed technology: An anthropological analysis». En: GeoGebra Team (Ed.), *GeoGebra Global Gathering GeoGebra Book*, p. 5. Linz, Austria.
geogebra.org/m/Mvpvu5v6
- (2017e). «Geometría dinámica como actualización didáctica de la evolución conceptual de la geometría». En: P. Perry (Ed.), *Memorias 23 Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, pp. 143–148. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia. ISSN 2346-0539.
- (en prensa-a). «Construcciones Dinámicas». En: F. J. Córdoba Gómez; J. C. Molina García y L. A. Ciro López (Eds.), *Avances en la integración de tecnologías para la innovación en educación. Congreso Latinoamericano de GeoGebra 2016*, Fondo Editorial Universidad La Gran Colombia, Bogotá, Colombia.
- (en prensa-b). «Naturaleza de los Objetos de la Geometría Dinámica». En: F. J. Córdoba Gómez; J. C. Molina García y L. A. Ciro López (Eds.), *Avances en la integración de tecnologías para la innovación en educación. Congreso Latinoamericano de GeoGebra 2016*, Fondo Editorial Universidad La Gran Colombia, Bogotá, Colombia.
- (en prensa-c). «Precisión y exactitud. Propuesta inicial sobre el estatus de los objetos de la geometría dinámica». En: F. J. Córdoba Gómez; J. C. Molina García y L. A. Ciro López (Eds.), *Avances en la integración de tecnologías para la innovación en educación. Congreso Latinoamericano de GeoGebra 2016*, Fondo Editorial Universidad La Gran Colombia, Bogotá, Colombia.
- SANTOS, MARÍA JOSEFA y DÍAZ CRUZ, RODRIGO (2015). «Voces plurales en los estudios de tecnología y cultura: una introducción». En: María Josefa Santos y Rodrigo Díaz Cruz (Eds.), *Innovación tecnológica y procesos culturales. Perspectivas teóricas*, caplo 1, pp. 9–17. Fondo de Cultura Económica, México. ISBN 9786071622167.
- SCRIBA, CHRISTOPH J. y SCHREIBER, PETER (2015). *5000 years of geometry: Mathematics in history and culture*. Springer Basel. ISBN 978-3-0348-0898-9. doi: 10.1007/978-3-0348-0898-9.
- SERRES, MICHEL (2013). *Pulgarcita*. Fondo de Cultura Económica, Buenos Aires, Argentina.
- SIMON, MARTIN A (1995). «Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective». *Journal for Research in Mathematics Education*, **26(2)**, pp. 114–145. ISSN 0021-8251. doi: 10.2307/749205.

- SINCLAIR, NATHALIE; BARTOLINI BUSSI, MARIA G.; DE VILLIERS, MICHAEL; JONES, KEITH; KORTENKAMP, ULRICH; LEUNG, ALLEN y OWENS, KAY (2016). «Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report». *ZDM - Mathematics Education*, **48(5)**, pp. 691–719. ISSN 18639704. doi: 10.1007/s11858-016-0796-6.
- SINCLAIR, NATHALIE y YERUSHALMY, MICHAL (2016). «Digital Technology in Mathematics Teaching and Learning». En: Ángel Gutiérrez; Gilah C. Leder y Paolo Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*, pp. 235–274. SensePublishers, Rotterdam. ISBN 978-94-6300-561-6. doi: 10.1007/978-94-6300-561-6_7.
- STACEY, PAUL y HINCHLIFF PEARSON, SARAH (2017). *Made With Creative Commons*. Ctrl+Alt+Delete Books, Copenhagen, Dinamarca. ISBN 9788799873333. <https://creativecommons.org/made-with-cc/>
- STALLMAN, RICHARD (2013). *Conferencia sobre Software Libre*. Extraído el 25 de enero de 2018 desde https://www.youtube.com/watch?v=5t_EcPTEzh4.
- STRABER, RUDOLF (2002). «Research on Dynamic Geometry Software (DGS)—an introduction». *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, **34(3)**, pp. 65–65. ISSN 1615-679X. doi: 10.1007/BF02655707.
- STYLIANIDES, GABRIEL J. y STYLIANIDES, ANDREAS J. (2005). «Validation of Solutions of Construction Problems in Dynamic Geometry Environments». *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, **10(1)**, pp. 31–47. ISSN 1382-3892. doi: 10.1007/s10758-004-6999-x.
- SWAN, MALCOLM (2014). «Design Research in Mathematics Education». En: Stephen Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*, pp. 148–152. Springer Netherlands.
- DE VILLIERS, MICHAEL (2009). *Some Adventures in Euclidean Geometry*. Dynamic Mathematics Learning. ISBN 9780557102952.
- USISKIN, ZALMAN; GRIFFIN, JENNIFER; WITONSKY, DAVID y WILLMORE, EDWIN (2008). *The Classification of Quadrilaterals: A Study in Definition*. Information Age Publishing, Charlotte, NC. ISBN 978-1-59311-695-8.
- VÉRILLON, PIERRE y RABARDEL, PIERRE (1995). «Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity». *European Journal of Psychology of Education*, **10(1)**.
- WEALE, SALLY (2017, 13 de marzo). «Teachers must ditch 'neuromyth' of learning styles, say scientists». *The Guardian*. <https://www.theguardian.com/education/2017/mar/13/teachers-neuromyth-learning-styles-scientists-neuroscience-education>
- ZAMORANO, RODRIGO (1576). «Los seis Libros primeros de la Geometría de Euclides».