Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

COMPRENSIÓN DE LA DIVISIÓN DE FRACCIONES: UN ESTUDIO CON PROFESORES EN FORMACIÓN

Tesis que presenta

Carlos Javier Salaj

para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa

Directora de Tesis: Dra. Olimpia Figueras Mourut de Montppellier

Ciudad de México Octubre, 2017

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca otorgada para la realización de estudios de Maestría en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Índice

Resumen

Por medio de la investigación descrita en esta tesis se presenta una caracterización de la comprensión de profesores en formación acerca del concepto matemático división de fracciones, tomando como base cuatro de cinco dimensiones propuestas por Usiskin. Este estudio se hizo con futuros profesores de matemáticas a nivel secundario.

El proyecto de investigación se estructuró usando un Modelo Teórico Local, propuesto por Filloy, en el cual se distinguen dos etapas. En la etapa teórica se hizo un análisis fenomenológico en el sentido de Freudenthal, de la división de fracciones y se describen cada una de las dimensiones de la comprensión de este concepto. Así mismo, se examinaron determinados modelos de enseñanza e investigaciones acerca de estrategias y errores comunes que cometen los estudiantes al dividir fracciones en distintos contextos. Para el desarrollo de la etapa experimental, se diseñaron y aplicaron instrumentos de recolección de datos a partir de lo descrito en la etapa teórica, se analizaron esos datos y los resultados obtenidos se contrastaron con las hipótesis que se formularon luego del análisis que se describe en la etapa teórica.

Los resultados muestran que desde la perspectiva de la dimensión Uso–Aplicación, casi la mitad de los futuros profesores muestran fortalezas en tareas relacionadas con la resolución de problemas multiplicativos, así mismo considerando los aspectos de la dimensión Habilidad–Algoritmo, casi el total de los participantes identificaron y usaron por lo menos un algoritmo para dividir fracciones. Sin embargo, en términos de las dimensiones Propiedad–Prueba y Representación–Metáfora, la comprensión que tienen el grupo de profesores en formación sobre este concepto es limitada.

Abstract

Through the research described in this thesis, it is presented a characterization of the comprehension of the mathematical concept 'fractions division' from the point of view of prospective teachers, on the basis of the 4 out of 5 dimensions proposed by Usiskin. The study was developed with future mathematics teachers at secondary level.

The research project was structured using a Local Theorical Model, proposed by Filloy, in which two stages are distinguished. In the theoretical stage a phenomenological analysis was developed in Freudenthal's sense of the division of fractions and each of the dimensions of the comprehension of this concept is described. Furthermore, we examined certain models of teaching and research about strategies and common (mis)conception that students make when dividing fractions in different contexts. For the development of the experimental stage, data collection instruments were designed and applied, as described in the theoretical stage, these data were analyzed and the results obtained were contrasted with the hypotheses formulated after the analysis described in the theoretical stage.

The results indicate that from the perspective of the Use–Application dimension, approximately half of the prospective teachers show strength in tasks related to the resolution of multiplicative problems. Furthermore, considering the aspects of the dimension Ability–Algorithm, almost the total of the participants identified and used at least one algorithm to divide fractions. However, in terms of the dimensions Property–Proof and Representation–Metaphor, the understanding that the group of teachers in training have about this concept is limited.

0. Introducción

El proyecto de investigación que se describe en esta tesis se hizo en México con estudiantes para profesor de matemáticas a nivel secundario en relación con la comprensión del concepto división de fracciones al resolver tareas en las que se usa esta operación.

Investigaciones en Matemática Educativa se han hecho sobre el aprendizaje de la división de fracciones tanto con niños y jóvenes, como con profesores en formación atendiendo a diversos aspectos de esa operación tales como la resolución de problemas multiplicativos en diversos contextos, el uso de representaciones pictóricas y el uso de algoritmos particulares o generales (Alenazi, A., 2015; Yim, J., 2010; Işiksal, M., y Çakiroğlu, E., 2008; Contreras, 2012). Asimismo, con base en los resultados que han obtenido en sus estudios, investigadores sugieren que las fracciones y la división son de los contenidos más difíciles de enseñar tanto en primaria como en secundaria (Işiksal, M., y Çakiroğlu, E., 2011), y a la vez ellos aseguran que estos contenidos son predictores únicos para el buen desempeño en las matemáticas superiores (Siegler, R., et al., 2012).

Los resultados reportados en este documento conforman posibles aportes a la investigación en Matemática Educativa relacionados con el aprendizaje de la división de fracciones por parte de profesores en formación. Dichos resultados se desprenden de un análisis teórico y experimental cuyo objetivo era determinar las fortalezas y debilidades de futuros profesores respecto a la comprensión de la división de fracciones. Este estudio sirve como base para establecer qué componentes de la comprensión requieren de la reestructuración de modelos de enseñanza que ayuden a superar las limitaciones y potenciar las fortalezas encontradas.

La experiencia docente, el análisis de investigaciones precedentes y los resultados encontrados ponen de manifiesto que tanto profesores en formación, como estudiantes de primaria y secundaria tienen dificultades con la resolución de tareas en las que aparece implícita o explícitamente el concepto división de fracciones.

Una manera de atender a estas dificultades es ocupándose del currículo de la formación de profesores en matemáticas. Por ello, con esta investigación se pretende contribuir, en la medida de lo posible, en los currículos de matemáticas tanto para el ciclo básico de educación en México, como para la formación de profesores en matemáticas, brindando el aporte teórico necesario para que, a quienes corresponda, tengan presente los diferentes aspectos de la comprensión del concepto división de fracciones.

Se diseña y estructura el proyecto de investigación en el marco teórico–metodológico que Filloy (1999) ha denominado Modelos Teóricos Locales, en los cuales el objeto de estudio se enfoca a través de cuatro componentes interrelacionados: Modelos de Competencia Formal, Modelos de Procesos Cognitivos, Modelos de Enseñanza y Modelos de Comunicación. Considerando la relación que existen entre estos componentes, lo que se intentó fue caracterizar la comprensión de futuros profesores de matemáticas acerca de la división de fracciones. Los resultados de la investigación, se presentan en este documento conformado por cuatro capítulos y dos anexos.

El contenido del primer capítulo se centra en la descripción de la problemática que da origen a la investigación y se expone la importancia y pertinencia de hacer un estudio sobre la misma. Además se delimita el objeto de estudio, se formulan las preguntas de investigación y se establecen los alcances de éstas a través de la enunciación de los objetivos. Por último, se describen brevemente elementos del Modelo Teórico Local propuesto por Filloy (1999) y cómo se han usado para organizar la investigación, presentando un esquema de la misma sobre la división de fracciones.

La descripción de la etapa teórica del Modelo Teórico Local inicial es como se muestra en el Capítulo 2 donde se detallan cada uno de los componentes de dicho modelo, es decir, cómo se construyó cada uno de estos componentes. Esta descripción constituye el marco de referencia del proyecto de investigación que sirvió de base para su planteamiento y desarrollo y, por otra parte, ser un soporte para la obtención, organización, análisis de datos y producción de resultados. Además, se hace una síntesis de los resultados de investigaciones que influyeron en este estudio.

En el Capítulo 3 se detalla cómo se llevó a cabo la etapa experimental del Modelo Teórico Local. En él se describe la población de estudiantes con los que se trabajó así como la metodología de recolección y análisis de datos obtenidos de dicha población. Además, se hace una caracterización de las actuaciones de los participantes de la investigación en relación con sus respuestas a tareas planteadas. Se exponen también los resultados que se obtuvieron luego de analizar los cuestionarios y entrevistas, así como las primeras conclusiones que se derivan de estos análisis.

Como conclusión de la tesis, en el Capítulo 4 se exponen detalladamente los resultados encontrados en las dos etapas del Modelos Teórico Local, a saber: la etapa teórica y la etapa experimental. Además, se presentan los resultados de los análisis y cómo estos dan respuestas a las preguntas de investigación formuladas. A modo de cierre se exponen las implicaciones del estudio tanto para la enseñanza, como para futuras investigaciones.

El Apéndice 1 contiene las respuestas dadas por los 14 estudiantes a las tareas propuestas en un cuestionario de lápiz y papel, así como las tablas de análisis de dichos cuestionarios que han permitido caracterizar las actuaciones de cada estudiante en la resolución de las tareas de división de fracciones. Por otra parte, el contenido del Apéndice 2 son las preguntas y respuestas de las entrevistas hechas a 4 de los 14 estudiantes que participaron de la investigación.

1. Objeto de estudio: Comprensión de la División de Fracciones

En el presente capítulo se hace una reseña de la problemática investigada, delimitando el objeto de estudio y resaltando la importancia de su investigación. El planteamiento de la problemática permitió formular cuatro preguntas de investigación y los objetivos a alcanzar para responder a esas preguntas y contrastar con las hipótesis que surgieron del análisis previo de los problemas. El capítulo concluye con una breve explicación del marco teórico-metodológico que se usó para diseñar y organizar la investigación, incluyendo un esquema del estudio llevado a cabo detallando brevemente cada una de las etapas del proyecto de investigación.

1.1. DESCRIPCIÓN DE LA PROBLEMÁTICA

El estudio de las fracciones como objeto matemático[1], en México, se lleva a cabo en el transcurso de la educación primaria y durante los primeros años de la educación secundaria. Entre los contenidos que se desarrollan en estos primeros años de educación

---

[1] Se usa este término en el sentido de Freudethal (1983/2002), para quien los objetos matemáticos son "*noumena*". Es decir, se entiende por 'objetos matemáticos' a los conceptos, estructuras e ideas matemáticas.

secundaria, los alumnos estudian las operaciones con fracciones, como por ejemplo la multiplicación y la división. Lo que ellos aprendan sobre estos objetos matemáticos formará bases para la comprensión del estudio del álgebra. Parte de este aprendizaje depende del conocimiento de los contenidos que tienen los profesores que lo enseñan.

Castro-Rodríguez, Pitta-Pantazi, Rico, y Gómez (2016) afirman que la comprensión que tienen los profesores sobre las fracciones es limitada y esto afecta el aprendizaje de los estudiantes. Lo que estos investigadores aseguran es que los conocimientos que han construido los profesores, al parecer no les permiten estructurar una enseñanza centrada en los aspectos semánticos de la división de fracciones y ponen más énfasis en el aspecto sintáctico y en un uso flexible de los símbolos, que puede afectar la comprensión de los alumnos sobre los significados de la división, sus algoritmos y sus representaciones.

La comprensión de la división de fracciones es el objeto de estudio de esta investigación. Si bien este tema al parecer es poco relevante en la aritmética escolar, por lo menos en el aspecto curricular en México (ver Secretaría de Educación Pública (SEP), 2011a), las habilidades sobre los algoritmos y los significados de la división son base para una adecuada comprensión y uso de las expresiones racionales algebraicas. Es decir, como lo plantea Usiskin (1979), para entender el significado de a/b, el estudiante debe tener experiencias con fracciones tales como 2/3, $\pi/2$, 15/8 y otras “fracciones comunes”.

Así mismo, Siegler et al (2012) aseguran que las fracciones y la división son predictores únicos para el entendimiento de las matemáticas superiores y que el conocimiento de fracciones por parte de los estudiantes puede ser crucial para el aprendizaje posterior de matemáticas, por ejemplo del álgebra. Además, estos autores afirman que al no comprender las fracciones los estudiantes no pueden estimar las respuestas ni siquiera de las soluciones de ecuaciones algebraicas simples, como por ejemplo que en la ecuación $1/3x = 2/3y$, x debe ser dos veces mayor que y, o que para la ecuación $3/4x = 6$, el valor de x debe ser algo, pero no mucho, mayor que 6 (Siegler et al, 2012, pág. 5).

La importancia de este tema dentro de la educación básica trasciende el hecho de representar situaciones o resolver problemas usando números racionales y sus operaciones. Este contenido tiene implicaciones directas en las matemáticas superiores, como se mencionó en el párrafo anterior, y por ello no es suficiente que los estudiantes simplemente conozcan los números racionales y sus operaciones, sino que se requiere de un aprendizaje con significado; de modo que los conocimientos que adquieran les puedan ser útiles en otros contextos más avanzados y en la vida real.

Contreras (2012) investigó sobre la resolución de problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones, afirmando que la necesidad de investigar acerca de la enseñanza y aprendizaje de la división de números racionales se debe a las dificultades que enfrentan los estudiantes ante este tipo de problemas. Al respecto, Lamon (2000, citado por Contreras, 2012) propone que, si se centra la enseñanza en una sola y selectiva interpretación de las fracciones, introduciendo solo alguna de sus representaciones, esto puede llevar a que los estudiantes apoyen su comprensión en fundamentos inadecuados.

En el sentido de esta afirmación, los profesores que se dedican entre otros contenidos a la enseñanza de fracciones y en particular a la división deben poseer un amplio conocimiento del tema. Esto implica que, entre otras cosas, sean capaces de identificar las diferencias entre comprender la división de fracciones como concepto y saber algoritmos para efectuarla. Yamaguchi y Jwasaqui (1999, citado por Gómez, Figueras y Contreras, 2016) consideran que hay una separación entre el concepto de división y el algoritmo de división. Comprender el significado de la división implica tener en cuenta, entre otros, las nociones de repartir y medir; mientras que comprender el o los significados del algoritmo de división implica tener presente el tipo de algoritmo que se utiliza, ya sea particular o general y porqué funciona. En el sentido de Usiskin (2015) se dice que ambas comprensiones son diferentes puesto que una de las dimensiones de la comprensión de la división es precisamente la habilidad con los algoritmos; mientras que las otras dimensiones que el autor menciona son: Uso–Aplicación, Propiedad–Prueba y Representación-Metáfora las cuales se explican detalladamente más adelante.

En síntesis y de acuerdo con Işiksal y Çakiroğlu (2011) se considera que en la educación básica las fracciones y los números racionales son uno de los contenidos más complejos. Muchos estudiantes parecen entender las fracciones y sus operaciones, sin embargo y por lo general, su entendimiento solo se basa en la mera aplicación memorística de los algoritmos, los cuales con el transcurso del tiempo se olvidan y es por ello que surgen las dificultades de los alumnos con las matemáticas superiores. Por esta razón es que los profesores deben desafiar y apoyar a los estudiantes en el desarrollo de una sólida comprensión de los contenidos matemáticos, y por otra parte estos profesores deben conocer y comprender la separación que existe entre lo que los alumnos saben y lo que necesitan aprender. Así mismo, se supone que los profesores deben tener una clara comprensión de las matemáticas que van a enseñar, particularmente en términos de esta investigación, comprender conceptualmente la división de fracciones. Sin embargo, en muchas investigaciones se sugiere que los propios profesores pueden tener conceptos erróneos sobre los significados de las operaciones y las relaciones entre estos conceptos (ver por ejemplo

Azim 1995; Borko et al. 1992; Post et al. 1991; Simon y Blume 1994; Tirosh 2000; citados por Işiksal y Çakiroğlu, 2011).

1.2. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

De la problemática descrita suscitan dos líneas de indagación, una de ellas se enfoca en la comprensión de los estudiantes sobre la división como un elemento fundamental para su desempeño en matemáticas en los años posteriores a la escuela primaria y la otra está centrada en la comprensión que el profesor debe tener de este concepto matemático para enseñarlo a sus alumnos. En esta tesis se optó por indagar acerca de la comprensión de la división de fracciones de profesores en formación. Por ello se formulan las siguientes preguntas de investigación.

a) ¿Cuáles son las fortalezas de futuros profesores al emplear la división de fracciones para resolver problemas asociados a los diferentes significados de la división?
b) ¿Cuáles son las fortalezas que tienen profesores en formación en el uso de una variedad de algoritmos, técnicas o procedimientos para efectuar la operación división de fracciones?
c) ¿Cuáles son las fortalezas que tienen los estudiantes para profesor en relación con el uso de propiedades de las fracciones y sus operaciones para hacer cálculos y para justificar la validez de oraciones numéricas?
d) ¿Cuáles son las fortalezas que tienen los profesores en formación para representar la operación división de fracciones?

1.3. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Para responder las a preguntas de investigación, se formularon los siguientes objetivos:

- Determinar los tipos de problemas que los estudiantes para profesor resuelven usando la división de fracciones.
- Identificar los algoritmos, técnicas o procedimientos que utilizan los profesores en formación para efectuar la operación división de fracciones.
- Caracterizar las propiedades de las fracciones y sus operaciones que los futuros profesores usan para justificar la validez de oraciones numéricas.
- Describir las representaciones de la división de fracciones que hacen los futuros profesores.

Para lograr alcanzar estos objetivos, se construyó un Modelo Teórico Local (MTL) de la división de fracciones y su comprensión, el cual se describe a grandes rasgos en el siguiente apartado.

1.4. MODELO TEÓRICO LOCAL

Dado que para llevar a cabo un proyecto de investigación se necesita, entre otras cosas, un marco de referencia que organice la investigación del objeto de estudio, ese debe en primer lugar dar forma al proyecto, es decir, servir de base para su planteamiento y desarrollo; y en segundo lugar debe ser un soporte para la obtención, organización, análisis de datos y producción de resultados. Filloy (1999) establece que para observar, a través de la experimentación, los fenómenos en torno a la enseñanza y al aprendizaje de conceptos matemáticos se debe contar con un marco teórico que permita la interpretación de estos fenómenos y además proponer nuevas observaciones que evidencien las relaciones que existen entre los diferentes componentes participantes. Por ello, se consideró conveniente adoptar para la investigación descrita en esta tesis el marco teórico y metodológico de los Modelos Teóricos Locales (MTL) propuesto por Filloy.

Este marco teórico–metodológico sirve como herramienta para la observación experimental en Matemática Educativa. En él, el objeto de estudio se enfoca a través de cuatro componentes interrelacionados: 1) Modelos de Enseñanza, 2) Modelos de Procesos Cognitivos, 3) Modelos de Competencia Formal y, 4) Modelos de Comunicación (ver Filloy, 1999, pág. 4). Considerar estos cuatro componentes es una manera de incorporar al modelo teórico los resultados de otras observaciones y experimentos.

En este documento, los términos "modelo" y "modelo teórico" son utilizados en el mismo sentido que lo hacen Filloy, Rojano y Puig (2008), a saber:

a) Un modelo teórico se basa en un conjunto de supuestos sobre determinado concepto o sistema.
b) Un modelo teórico permite analizar un fenómeno que muestra determinadas regularidades conocidas y las reduce a componentes más básicos.
c) Un modelo teórico es considerado como una aproximación útil para ciertos propósitos. Permite proponer algo como modelo de algo más, equivale a sugerirlo como una manera de representarlo, brindando al menos alguna aproximación a la situación real.
d) Los modelos teóricos posibilitan encontrar explicaciones basadas en suposiciones posiblemente simplificadas y se debe tener en cuenta esta condición cuando se los compara con las teorías.

Por otra parte, pero no aislándolo de lo anterior, en la investigación descrita en este documento se usa el término local para indicar que lo que se hace es un acercamiento local y no uno general, ya que en el marco de referencia de los Modelos Teóricos Locales los resultados que se obtienen tras realizar observaciones no se consideran apropiados para cualquier situación en general y por ello se habla de modelos teóricos ‘locales’.

Según Filloy (1999) un Modelo Teórico Local se diseña para observar las interacciones y discrepancias en las competencias de uso de un Sistema Matemático de Signos (SMS) y, desde un punto de vista pragmático, se centra la atención en el significado dado por el uso del lenguaje matemático, en lugar de centrarla en el significado formal o abstracto del texto matemático. De igual manera, la investigación que se describe en este documento se centra en las actuaciones y formas de hablar (discurso) de los usuarios de los SMS de la división de fracciones.

Los textos matemáticos se expresan y comunican en un Sistema Matemático de Signos (Filloy, 1999). Dicho sistema posee un estrato que está en correspondencia con los diferentes usos que van dando cuenta de las acciones, operaciones y transformaciones cada vez más generales y que provienen de estratos del lenguaje o del Sistema Matemático de Signos cada vez más abstractos.

Es por ello que en la investigación, cuyo informe es esta tesis, se observaron de acuerdo con la metodología, las actuaciones de los estudiantes al resolver tareas de división de fracciones, que corresponde al componente de los modelos de procesos cognitivos y el intercambio de descodificación y emisión de mensajes, es decir, el modelo de comunicación entre sujetos con ciertos grados de competencia en el uso de lenguajes o SMS.

En relación con el componente de los modelos de competencia formal del MTL, surge la necesidad de contar con determinado modelo formal descrito en un Sistema Matemático de Signos que permita describir las situaciones observadas y descodificar todos los textos que se producen en el intercambio de mensajes.

Se remarca la importancia del componente formal si se tiene en cuenta el orden en el que se deben hacer los distintos tipos de fenómenos pertinentes en el análisis fenomenológico. Este análisis fenomenológico, o simplemente fenomenología, implica un cierto tipo de análisis que se describe y que es una herramienta para el trabajo en Matemática Educativa (Freudenthal, 2002).

El orden en que se deben hacer los distintos tipos de análisis fenomenológico se inicia con fenomenología pura, el componente formal del MTL, para la que prima conocer las matemáticas y sus usos, que se completa con una fenomenología histórica, seguida por una fenomenología didáctica, el componente de enseñanza, para la que es necesario conocer el proceso de enseñanza y de aprendizaje, terminando con una fenomenología genética, que son los fenómenos que se consideran con respecto al desarrollo cognitivo de los aprendices, el componente cognitivo del MTL. Ningún análisis fenomenológico puede resultar efectivo cuando se organice, posteriormente, la enseñanza a partir de él, si no se sustenta en un sólido análisis de pura fenomenología, es decir en el componente formal (Filloy, 1999, págs. 7 y 8).

A grandes rasgos el MTL consta de dos etapas:

- La etapa teórica, que constituye un Modelo Teórico Local inicial (MTLi) y que involucra la descripción de la problemática, que en términos de la investigación tiene que ver con la comprensión del concepto división de fracciones, la realización de un análisis previo de los problemas en el cual entran en juego los distintos componentes del MTL, concluyendo con la formulación de hipótesis.

- La etapa experimental, en la cual se procede a la elaboración y validación de los instrumentos de recolección de datos, el trabajo con los estudiantes, el análisis de los datos y las conclusiones que comprueban o desechan las hipótesis formuladas.

En el siguiente apartado se exponen brevemente cada una de las etapas del Modelo Teórico Local (MTL) de la división de fracciones y su comprensión producidas para esta investigación.

1.5. ETAPA TEÓRICA: MODELO TEÓRICO LOCAL DE LA DIVISIÓN DE FRACCIONES Y SU COMPRENSIÓN

El marco de referencia de los MTLs ha permitido organizar la investigación que condujo a esta tesis. En la Figura 1.1 hay un esquema con las diferentes etapas de la investigación, el cual es una adaptación de los que aparecen en Filloy (1999, págs. 9 y 10). Así mismo se hace una reseña general del diseño del MTL de la división de fracciones y su comprensión, detallando en qué parte del documento se encuentra la descripción específica de cada etapa.

En el esquema se observa una recurrencia, si se parte del cuadro de la problemática al final de todo el proceso se vuelve a él, indicando esto que la problemática inicial que se enmarcó en un MTLi se vuelve a enmarcar en la perspectiva de un nuevo MTL.

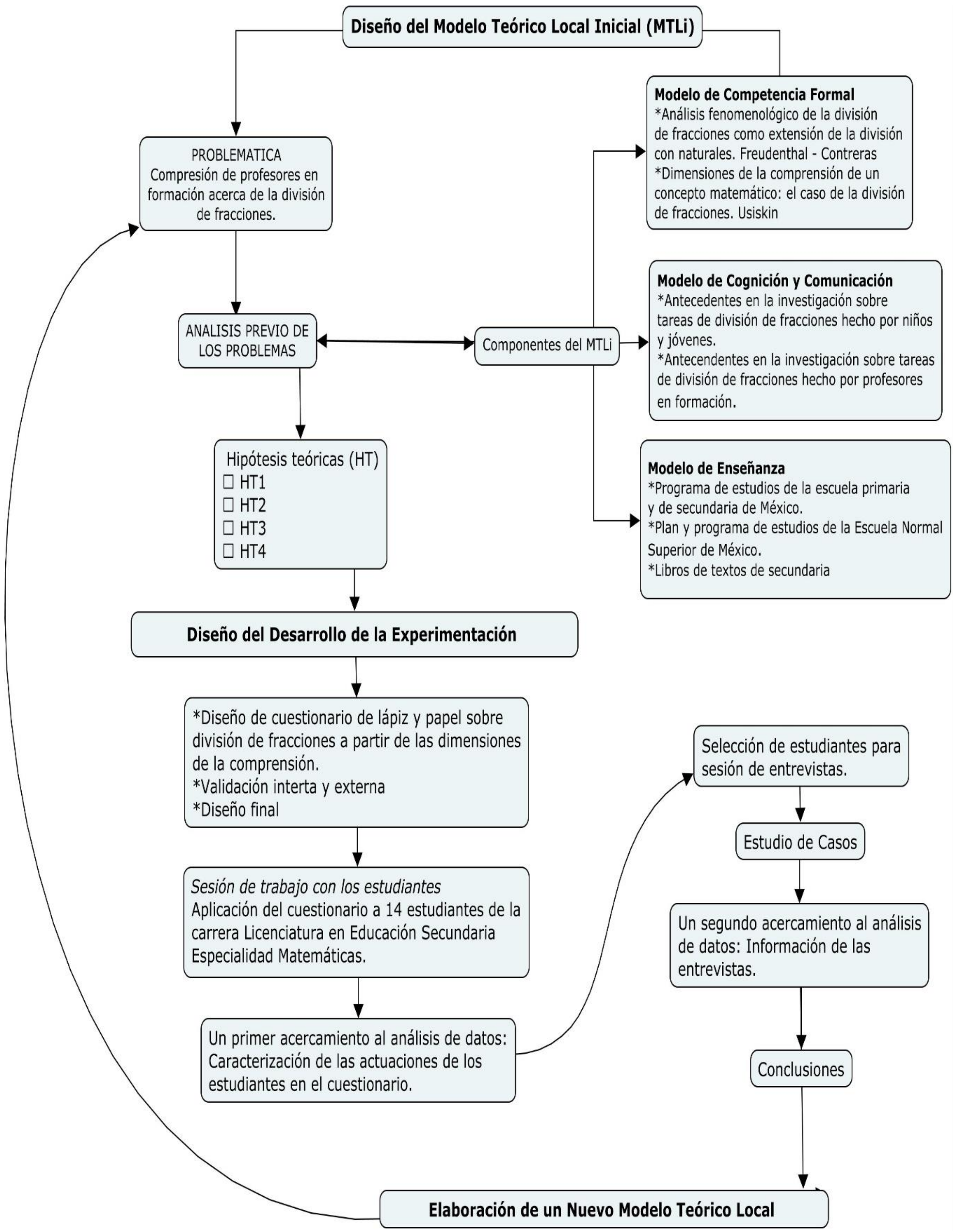


Figura 1.1. Esquema de la investigación sobre la división de fracciones

Siguiendo el orden del esquema, la descripción de la problemática se encuentra en el apartado 1.1 de este capítulo. En dicho esquema también se pueden ver los elementos que forman cada uno de los componentes del MTL que concurren para hacer el análisis previo de la problemática investigada.

El componente formal agrupa todos los elementos necesarios que permiten describir y descodificar lo observado, es decir que contiene todos los conocimientos de un usuario ideal capaz de descodificar el intercambio de mensajes que se producen al realizar las actividades de división de fracciones. Para este componente se han considerado dos marcos de referencias, uno de ellos es la fenomenología de la división de números naturales hecha por Freudenthal (2002) que con el aporte de otros autores se ha hecho una extensión de esta fenomenología a la división de fracciones y el segundo marco de referencia considerado son las dimensiones de la comprensión de un concepto propuestas por Usiskin (2015).

El componente del MTL de los Modelos de Procesos Cognitivos está asociado a los

procesos cognoscitivos que se ponen en acción para llevar a cabo las formas del pensamiento matemático y su comunicación […] como los que se utilizan [por ejemplo] b) en el direccionamiento de la atención y sus relaciones con los procesos de comprensión,[…] e) en las concepciones heurísticas utilizadas en la resolución de las situaciones problemáticas, f) en el aprendizaje, muy ligados a los procesos de generalización y abstracción … (Filloy, 1999, pág. 36).

El componente de Modelos de Procesos Cognitivos y el de Modelos de Comunicación del MTLi, en la investigación descrita en esta tesis, han sido fundamentados en un marco de referencia elaborado a través de una revisión de la literatura sobre la división de fracciones. En el Capítulo 2 se presentan los distintos tipos de actuaciones y estrategias, tanto correctas como no, de niños y jóvenes al resolver tareas relacionadas con la división de fracciones.

Además, se exhiben los resultados encontrados sobre la comprensión de la división de fracciones que tienen profesores de matemáticas en ejercicio o en formación. Para la investigación cuyo informe es esta tesis, solo se considera el componente de comunicación en el sentido de cómo descodifican los estudiantes el intercambio de mensajes contenidos en un cuestionario de papel y lápiz y en una entrevista individual.

Para el Modelo de Enseñanza que interviene en el análisis de la problemática y se refiere a cómo se enseña el concepto división de fracciones, se analizaron planes y programas de estudios de la escuela primaria y de secundaria mexicanas y de la Escuela Normal Superior de México, y se hizo un análisis comparativo de actividades propuestas en tres libros de textos de secundaria.

Una descripción más detallada de cada uno de estos componentes y cómo se relacionan con la investigación realizada, se encuentra en el Capítulo 2 de este documento.

El análisis de la problemática a través de cada uno de los componentes y sus interrelaciones del MTL, permitió proponer las hipótesis teóricas (HT) que se detallan a continuación y que posteriormente se contrastaron con las observaciones empíricas (Capítulo 4, apartado 4.4).

- HT1: Los problemas de tipo cuotitivo son aquellos que los futuros profesores resuelven usando la división de fracciones.
- HT2: El algoritmo usado por los profesores en formación, es aquel que aparece con mayor frecuencia en los modelos de enseñanza de la educación mexicana, este es el producto cruzado.

- HT3: El uso de propiedades no está considerado en la enseñanza, por ello los estudiantes para profesor tendrán limitaciones para emplearlas en la validación de oraciones numéricas.
- HT4: Debido a que la enseñanza se centra en el aspecto sintáctico tanto de las fracciones como de sus operaciones, se espera que los profesores en formación usen la representación simbólica de la división.

Luego de establecido el MTLi que corresponde a la etapa teórica, se procedió al diseño de la etapa experimental.

Tomando en cuenta el marco de referencia del componente de los Modelos Formales del MTL, se elaboró un cuestionario que luego de pasar por un proceso de validación, fue aplicado a los estudiantes que participaron en la investigación descrita en esta tesis. Posterior a un primer análisis de las respuestas dadas por parte de los estudiantes a las tareas del cuestionario de lápiz y papel y caracterización de las actuaciones, se procedió a hacer un estudio de casos a través de entrevistas personalizadas, del que se obtuvo más información con relación a cómo los estudiantes enfrentaron las actividades propuestas en el cuestionario. Los detalles correspondientes a esta segunda etapa del MTL, la etapa experimental, se encuentran en el Capítulo 3.

El Capítulo 4 constituye la conclusión de este informe, en el cual se detallan los resultados obtenidos luego del análisis en forma conjunta de las respuestas de los estudiantes tanto a las tareas del cuestionario como a las preguntas de las entrevistas. Se hace un contraste entre estos resultados encontrados y las hipótesis formuladas y se responden a las preguntas de investigación planteadas (apartado 1.2). Finalmente, el capítulo concluye con la exposición de las implicaciones de la investigación tanto para la enseñanza, como para la investigación en Matemática Educativa.

2. Descripción de la primera etapa del MTLi: Etapa Teórica

Siguiendo el orden en el que Freudenthal (2002) propone que se debe hacer el análisis fenomenológico de un concepto, idea o estructura matemática es como se describe, en este capítulo la manera en la cual se construyó cada uno de los componentes del MTLi. Se empieza describiendo cómo se procedió a construir el componente de los Modelos de Competencia Formal (que se puede asociar con la Fenomenología Pura sugerida por Freudenthal), seguido por el componente de los Modelos de Enseñanza (componente que se puede vincular con la Fenomenología Didáctica descrita por él) y finalizando con los componentes de los Modelos de Procesos Cognitivos y Modelos de Comunicación (que pueden ligarse a la Fenomenología Genética considerada por ese investigador).

2.1. METODOLOGÍA DE LA CONSTRUCCIÓN DE LOS COMPONENTES DEL MTLI

Para la construcción del componente de los Modelos de Competencia Formal se eligieron dos marcos de referencia, cuyos creadores son Freudenthal (2002) y Usiskin (2015). De Freudenthal se tomó en cuenta el análisis fenomenológico de la división de números naturales que él expone en su libro, esto es, se consideraron los significados de la división que según este investigador organizan ciertos tipos de fenómenos, es decir determinadas situaciones que se pueden formular como problemas en los cuales se involucran diferentes aspectos de la división. Con el aporte de otros autores, se logró ampliar el análisis de la división de números naturales para hacer un análisis fenomenológico de la división de fracciones considerando las diferencias y semejanzas que existen al pasar de un conjunto numérico a otro (Hiebert, 1989; Contreras, 2012; Gómez, Figueras y Contreras, 2016).

De Usiskin se han considerado las dimensiones de la comprensión de un concepto matemático. Este investigador describe las características de esas dimensiones tomando como ejemplos dos conceptos matemáticos: la multiplicación de fracciones y la congruencia en geometría. A efectos de la investigación cuyo informe es esta tesis, se han expuesto esas características usando el concepto división de fracciones.

En la construcción del componente de los Modelos de Enseñanza se han considerado para su análisis los programas de estudio de la escuela primaria (SEP, 2011b, 2011c y 2011d) de la secundaria (SEP, 2011a) y el plan y programa de estudios de la Licenciatura en Educación Secundaria de la Escuela Normal Superior de México (SEP, 1999 y 2002). Además se analizó cómo se estructuran las secuencias de enseñanza de la división de fracciones en tres libros de textos de secundaria (aceptados como texto por las autoridades educativas de la SEP, Carrasco y Martínez, 2014; Peña, 2016; Trigueros et al, 2016).

Finalmente para la construcción del componente de los Modelos de Procesos Cognitivos y Modelos de Comunicación se ha hecho un análisis de los antecedentes en la investigación en educación matemática referido a estrategias, correctas o no, para hacer división de fracciones, indagaciones hechas con estudiantes de educación básica y profesores de matemáticas en formación. De los estudios revisados se tomaron en consideración las producciones de estudiantes que dieran cuenta de cómo respondían a diferentes tareas en las que se requería la división de fracciones.

En los apartados 2.2, 2.3 y 2.4 se describen detalladamente los resultados de la construcción de los componentes del MTLi que en conjunto constituyeron el análisis de la problemática.

2.2. LA CONSTRUCCIÓN DEL COMPONENTE DE LOS MODELOS DE COMPETENCIA FORMAL

Al inicio de este capítulo se hizo mención que la construcción del componente de los Modelos de Competencia Formal se hizo considerando dos elementos fundamentales, a saber: la fenomenología didáctica de Freduenthal (2002) y la teoría de la comprensión de Usiskin (2015). En los siguientes subapartados se describen aquellas piezas de esos referentes teóricos que sirven para la construcción del componente del MTLi.

2.2.1. FENOMENOLOGÍA DIDÁCTICA DE LA DIVISIÓN DE FRACCIONES

En este apartado se expone el resultado de un análisis fenomenológico de la división de fracciones, sin embargo, previo a ello se detalla el que hace Freudenthal (2002) acerca de la división de los números naturales.

Según este investigador, vista fenomenológicamente la división de números naturales, ésta aparece de tres maneras distintas: 1) continuamente quitando, 2) distribuyendo en partes iguales, y 3) invirtiendo la multiplicación. Por ello, haciendo una reinterpretación de la investigación hecha por Contreras (2012) e incorporando las ideas de Hiebert (1989) y Freudenthal, se exponen en la siguiente sección los seis significados de la división de números naturales que se han identificado y que se usarán en la investigación descrita en esta tesis.

2.2.1.1. SIGNIFICADOS DE LA DIVISIÓN CON NÚMEROS NATURALES

Antes de describir en qué consiste cada uno de los significados de la división de números naturales, se destacan dos características generales de esta división que son independientes de los significados:

- El dividendo siempre es mayor o igual que el divisor y que el cociente.
- Tanto dividendo, divisor y cociente son números naturales[2].

Tras esta consideración, a continuación, se detallan los significados de la división de números naturales.

DIVISIÓN PARTITIVA: Una cantidad o valor de magnitud se divide en partes del mismo tamaño o en subconjuntos con la misma cardinalidad. Freudenthal (2002, pág.115) denomina a esta división como *división distributiva* y se refiere, precisamente, a la distribución en partes iguales de una cantidad o valor de magnitud.

La división partitiva tiene las siguientes características:

- El cociente puede ser mayor que el divisor.
- La cantidad o valor de magnitud se debe poder partir.

Las tareas vinculadas con este tipo de división tienen que ver con repartir, partir, dividir y distribuir.

Según Freudenthal (2002) en la ecuación $a = qd$ al preguntar por d, dados a y q, la solución corresponde a una división partitiva y la pregunta que se asocia a esta división es: ¿cuál es la parte q de a?

[2] Se considera que el cociente debe ser un número distinto de cero, puesto que se pedirá que el divisor quepa por lo menos una vez en el dividendo o que se pueda repartir entre uno o más ítems.

Ejemplo: Se tienen 20 dulces para repartir equitativamente entre 4 niños, ¿cuántos dulces le tocarán a cada uno?

DIVISIÓN CUOTITIVA: Averiguar cuántas veces cabe una cantidad o valor de magnitud (el divisor) en otra cantidad o valor de magnitud (el dividendo) o cuántas veces contiene una cantidad o valor de magnitud (el dividendo) a otra cantidad o valor de magnitud (el divisor) corresponde a la división cuotitiva. En este tipo de división, se está midiendo al dividendo utilizando como unidad de medida al divisor. Freudenthal (2002, pág. 115) lo llama *división de la proporción* y tiene que ver con poder restar q veces d de una cantidad o valor de magnitud a, donde el resto debe ser menor que d. Este investigador, hace referencia a que dividir por sustracción repetida es la contrapartida de multiplicar por adición repetida.

La división como cuotición se caracteriza por lo siguiente:

- El cociente se puede obtener restando reiteradamente el divisor al dividendo hasta obtener resto cero o resto menor que el divisor (o también se puede sumar reiteradamente el divisor hasta obtener el dividendo).

Las tareas implicadas en esta división tienen que ver con medir y sustraer reiteradamente.

Considerando nuevamente la ecuación $a = qd$, para Freudenthal (2002) preguntar por q dados a y d corresponde a una división de la proporción, es decir a la división cuotitiva y la pregunta asociada es ¿cuántas veces cabe d en a?

Ejemplo: Se tiene una cinta A de 42 m y otra cinta B de 6 m. ¿Cuántas veces cabe la cinta B en la cinta A?

INVERSIÓN DE LA MULTIPLICACIÓN: Esta división consiste en encontrar una cantidad o valor de magnitud cuando se conocen la otra cantidad o valor de magnitud y el producto de ambas.

En el caso discreto, este significado de la división se ejemplifica con problemas de combinatoria (denominado "producto cartesiano" en la investigación precedente hecha por Contreras, 2012); situaciones en las que se conoce el cardinal del producto y el cardinal de una de las cantidades o valores de magnitud y se pregunta por la otra cantidad o valor de magnitud.

Ejemplo: Se tienen 12 atuendos con 3 faldas. ¿Cuántas blusas hay?

Problemas de área rectangular se suelen utilizar en el caso continuo, en esos se conocen el área de un rectángulo y una de sus dimensiones y se pide hallar la otra.

Ejemplo: El área de un rectángulo es 21 m^2 y su altura es 7 m, ¿cuánto mide la base?

Hiebert (1989) denomina a este significado de la división como 'transformación del referente', él considera por ejemplo la división de dos cantidades extensivas diferentes, ejemplo: millas÷horas, que da como resultado la cantidad intensiva, millas por hora, y la división de una cantidad extensiva entre una cantidad intensiva, ejemplo: millas÷ (millas por horas) cuyo resultado es la cantidad extensiva, horas.

Semánticamente hablando, la división como inversión de la multiplicación no es conmutativa ya que se pueden ver los dos significados anteriores si uno se fija en que los factores no son intercambiables cuando se los dota de significado: si qd se lee como q veces d preguntar por q lleva a la división coutitiva y preguntar por d lleva a la división partitiva (Puig y Cerdán, 1988). En este sentido, también Freudenthal (2002) indica que desde el punto de vista de la inversión de la multiplicación, los dos significados de la división antes vistos se pueden distinguir si $a = qd$ se lee como a igual a q veces d, los factores q y d no son lo mismo, ya que d es lo que se toma q veces, y esto se aprecia mejor si d no es un simple número, sino un número concreto o abstracto (número que indica una cantidad extensiva o intensiva en términos de Puig y Cerdán).

La tarea asociada a esta división es encontrar un factor o una medida indirectamente.

<u>Ejemplos</u> (adaptados de Greer (1992), citado en Contreras 2012, pág. 66):

1) Hay 12 rutas diferentes de A hasta C, a través de B, y 3 rutas de A a B, ¿cuántas rutas hay de B a C?
2) El área de un rectángulo es 15 metros cuadrados y la altura es de 3 m, ¿cuál es la base?

<u>INVERSIÓN DEL FACTOR MULTIPLICATIVO</u>: "Consiste en hacer el dividendo tantas veces menor como indica el divisor. Es decir, el dividendo se reduce según un factor multiplicativo escalar dado por el divisor" (Contreras, 2012, pág. 67).

La división por inversión del factor multiplicativo tiene las siguientes características:

- El dividendo debe ser estrictamente mayor que el divisor y que el cociente.
- El dividendo y el cociente deben pertenecer al mismo espacio de medidas, lo que convierte al divisor en un escalar o factor multiplicativo.

La tarea es hacer tantas veces menor o reducir una cantidad o valor de magnitud.

<u>Ejemplo</u> (adaptado de Greer (1992), citado en Contreras, 2012, pág. 67): "Una pieza elástica puede ser alargada hasta 3 veces su longitud original. Si se ha alargado hasta alcanzar una longitud de 15 m, ¿cuál es su longitud original?"

PROPORCIÓN DE VALOR UNITARIO DESCONOCIDO**:** Se debe determinar una cantidad o valor de magnitud de un espacio de medida[3] que corresponde a la unidad de una cantidad o valor de magnitud de otro espacio de medida conociendo la correspondencia entre las dos cantidades o valores de magnitud no unitarias de los espacios de medidas. Corresponde a la proporción $\frac{D}{d} = \frac{C}{1}$. Esta división tiene las siguientes características:

- El dividendo es estrictamente mayor que el divisor.
- El divisor es estrictamente mayor que el cociente.

Ejemplo (adaptado de Greer (1992), citado en Contreras, 2012, pág. 68): "Un barco recorre 14 metros en 7 segundos, ¿cuál es su velocidad media en metros/segundo?"

La tarea asociada a esta división es determinar una tasa a partir de la relación entre dos cantidades o valores de magnitud de los espacios de medidas.

Los problemas que se asocian a este significado de la división se refieren a isomorfismos de medidas. En este sentido, Puig y Cerdán (1988) afirman que esos tipos de problemas se tratan de aquellos en los que hay una proporción simple directa entre dos espacios de medidas y sus enunciados se caracterizan porque aparece una proposición que es una descripción existencial y otra que expresa la regla de correspondencia. Por su parte, Vergnaud (1983, citado por Puig y Cerdán, 1988) incluye dentro de los problemas de isomorfismos de medida a los que se resuelven usando la regla de tres, ya que desde su punto de vista tienen la misma estructura.

[3] Se entiende por espacio de medida a los conjuntos de cantidades o valores de magnitud entre los cuales se puede establecer una relación. Este término se usa en el sentido de Vergnaud, quien propone diferentes situaciones en las que él usa dicho término, por ejemplo: "Pagué 12 francos por 3 botellas de vino. ¿Cuál es el precio de una botella?" (2003/1991, pág. 198), en el cual la cantidad de botellas constituye un espacio de medida y la cantidad de francos constituye un espacio de medida diferente.

PROPORCIÓN DE VALOR UNITARIO CONOCIDO: En este caso se conoce la cantidad o valor de magnitud del segundo espacio de medidas que corresponde a la unidad del primer espacio de medidas y también se conoce una cantidad o valor de magnitud del segundo espacio de medidas y se pregunta por la cantidad o valor de magnitud correspondiente al primer espacio de medidas. Corresponde a la proporción $\frac{D}{c} = \frac{d}{1}$. Esta división se caracteriza porque:

- El dividendo es estrictamente mayor que el divisor.
- El divisor es estrictamente mayor que el cociente.

La tarea en esta división consiste en determinar una cantidad o valor de magnitud de un espacio de medida cuando se conoce el valor unitario del otro espacio de medida.

Ejemplo (adaptado de Greer (1992), citado en Contreras, 2012, pág. 68): "¿Cuánto tiempo necesita un barco para recorrer 14 metros teniendo una velocidad de 7 metros/segundo?"

La Figura 2.1 es un esquema que resume los diferentes significados de la división con números naturales que se han descripto anteriormente.

Sinicrope, Mick y Kolb (2002, citado por Contreras, 2012) apuestan por extender los significados antes vistos a la división de fracciones. A partir de esto, Contreras toma en consideración para su investigación las contribuciones de estos investigadores y adopta el criterio de caracterizar los significados de la división de fracciones a partir de extender los significados de la división de números naturales.

En el siguiente subapartado se detallan los seis significados de la división de fracciones tomando como base los significados de la división de números naturales, y las diferencias al pasar de un conjunto numérico a otro.

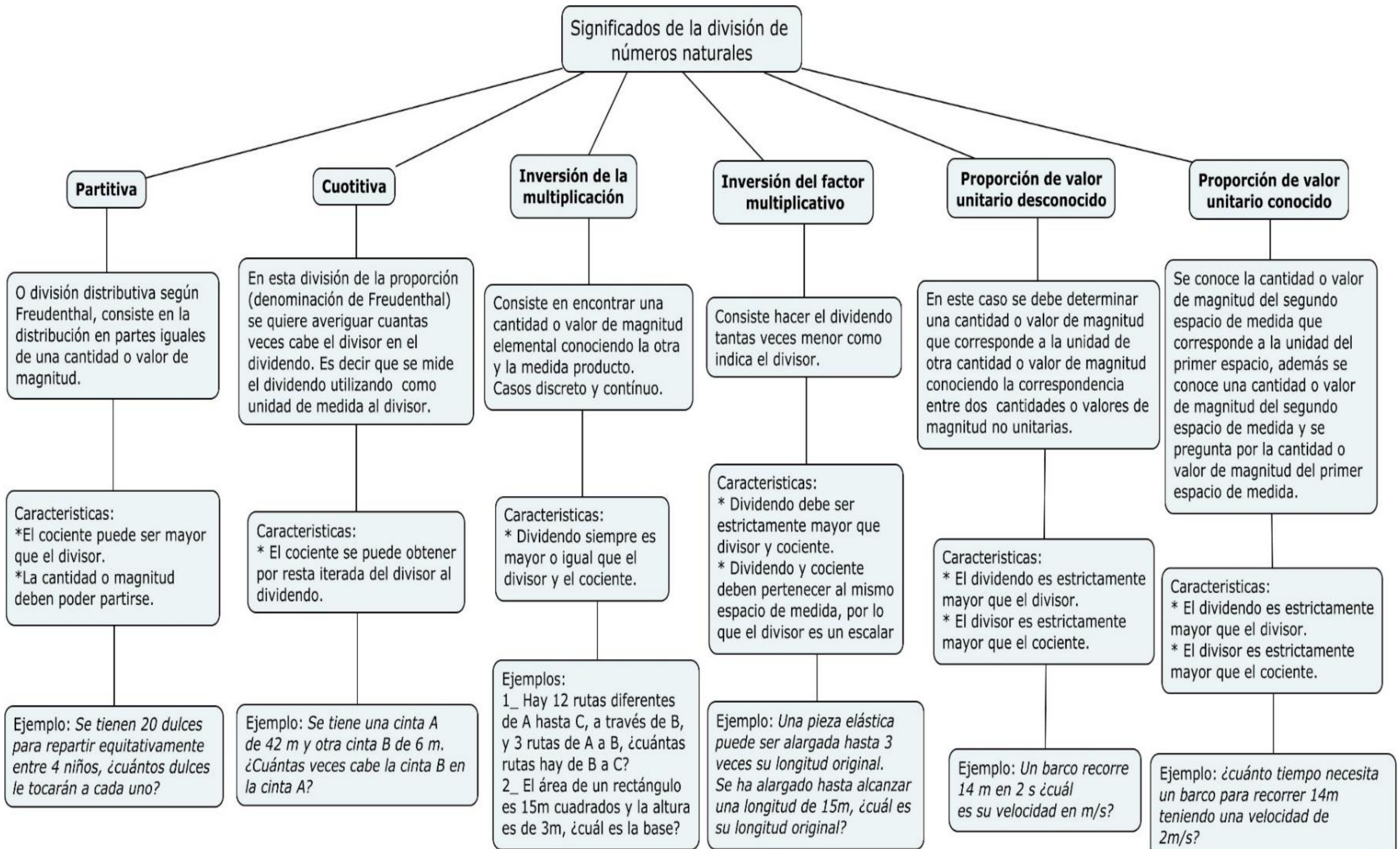


Figura 2.1. Esquema de significados de la división de números naturales

2.2.1.2. SIGNIFICADOS DE LA DIVISIÓN CON FRACCIONES

En la investigación hecha por Gómez, Figueras y Contreras (2016) se afirma que los fundamentos de los algoritmos para dividir fracciones son extensiones de los modelos de dividir con naturales.

Como característica general de la división con fracciones, solamente se puede decir que el dividendo puede ser menor que el divisor, lo cual no ocurre nunca con números naturales.

DIVISIÓN PARTITIVA**:** Este tipo de división implica dividir o repartir una cantidad fraccionara o valor fraccionario de magnitud en partes iguales. Esta división tiene las siguientes características:

- El divisor debe ser un número natural para poder hacer un reparto en partes iguales.
- El cociente es menor que el dividendo y puede ser menor que el divisor.
- La cantidad o valor de magnitud se deben poder dividir.

Las tareas vinculadas con la división partitiva son partir, repartir, dividir y distribuir.

Ejemplos:

1) Se tienen $35\frac{1}{2}$ litros de aceite para distribuir igual cantidad entre 71 botellas. ¿Cuánto de aceite llevará cada botella?
2) Se debe repartir 12/5 de terreno rectangular entre 2 personas. ¿Qué parte del terreno le corresponde a cada una?

A la división partitiva con fracciones se le pueden asociar las siguientes preguntas: ¿Cuánto de…? ¿Qué tanto de…? ¿Qué parte de…? ¿Qué fracción de…? El tipo de respuesta que se esperaría, dependerá del tipo de pregunta que se haga.

DIVISIÓN CUOTITIVA: Averiguar cuántas veces cabe una cantidad fraccionaria o valor de magnitud fraccionario (el divisor) en otra cantidad o valor de magnitud (el dividendo), que puede ser un número natural o una fracción; o averiguar cuantas veces contiene una cantidad o valor de magnitud (el dividendo, natural o fracción) a otra cantidad fraccionaria o valor de magnitud fraccionario (el divisor).

En este caso se debe reconceptualizar el término 'cuántas veces cabe' ya que esta puede ser un número fraccionario de veces.

Al igual que en la división partitiva, en este caso el dividendo puede ser menor que el divisor. Además, la división cuotitiva tiene las siguientes características:

- El cociente puede ser un número natural o una fracción. Esto significa que la cantidad de veces que cabe el divisor en el dividendo puede ser entero, una fracción propia o, una cantidad formada por un entero y una fracción propia (como por ejemplo: cabe un cuarto de vez o, cabe tres veces y tres cuartos de vez, que se diría como tres tres cuartos veces).
- Si el cociente es natural, se lo puede obtener por diferencia repetida. Si el cociente es una fracción, se lo puede obtener por conmensuración.

La tarea implicada en este tipo de división tiene que ver con medir.

Ejemplo: Un cajón donde se guardan toallas tiene 7/8 m de largo. Al doblar y guardar las toallas, cada una ocupa 1/4 m del largo. Considerando el largo del cajón, ¿cuántas toallas caben?

Este problema se puede resolver por conmensuración.

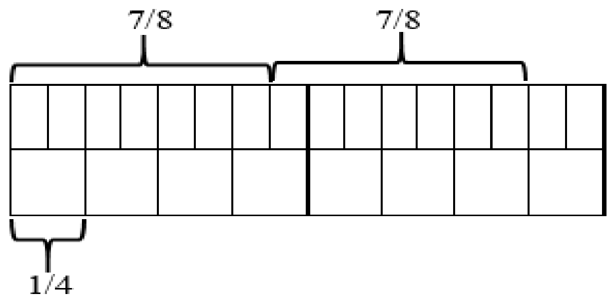


Figura 2.2. Proceso de conmensuración para resolver un problema dado

Como se puede apreciar en la Figura 2.2, si se toman 2 veces 7/8, en él caben 7 veces 1/4, es decir:

$$2 \cdot \frac{7}{8} = 7 \cdot \frac{1}{4}$$

Pero se quiere ver cuántas veces cabe 1/4 en 1 vez de 7/8, entonces se tiene:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot \frac{7}{8}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(7 \cdot \frac{1}{4}\right),$$

entonces $7/8 = 7/2 \cdot 1/4$ y por lo tanto $7/8 \div 1/4 = 7/2 = 3\ 1/2$. Es decir 1/4 cabe 3 veces y media en 7/8.

La pregunta asociada a esta división es: ¿cuántas veces cabe…?

INVERSIÓN DE LA MULTIPLICACIÓN: En este caso deja de tener validez la inversión del producto cartesiano, que se ejemplifican con combinatoria (Contreras, 2012), por ello la inversión de la multiplicación se reduce al caso de inversión del producto de espacios de medidas. Consiste en encontrar una de las dos cantidades o valores de magnitud cuando se conoce la otra, además del producto de ambos.

En el caso continuo se ejemplifica con problemas de área rectangular donde, dado el área de un rectángulo y una de sus dimensiones, se pide calcular la otra.

Este modelo de división se caracteriza por lo siguiente:

- El dividendo puede ser menor que el divisor y que el cociente.
- Tanto dividendo, como divisor y cociente pueden ser números naturales o fracciones.

Las tareas vinculadas con este modelo de división tienen que ver con calcular un factor o medida indirectamente.

Ejemplo: ¿Qué tiempo ha viajado un automóvil que a velocidad constante de 80 km/h recorrió $53\frac{1}{3}$ km?

INVERSIÓN DEL FACTOR MULTIPLICATIVO: El significado de la división de inversión del factor multiplicativo consiste en reducir el dividendo según un factor multiplicativo escalar dado por el divisor.

La división por inversión del factor multiplicativo se caracteriza porque:

- El dividendo y cociente deben pertenecer al mismo espacio de medidas.
- El dividendo puede ser mayor o menor que el divisor y que el cociente.

Si el divisor es un número natural, el modelo coincide con el correspondiente para números naturales, salvo por el hecho de que el dividendo es una fracción. Sin embargo, si el divisor es una fracción, la tarea de hacer el dividendo tantas veces menor como indica el divisor implica hacer el dividendo tantas veces menor como indica el numerador del divisor y tantas veces mayor como indica el denominador del divisor. Como en este caso el dividendo puede aumentar o disminuir, esto supone reconceptualizar la expresión ‘hacer tantas veces menor’.

La tarea asociada a esta división es la de medir.

Ejemplo: Un resorte se puede alargar hasta $5\frac{1}{2}$ veces su longitud original sin que se deforme. Se ha alargado hasta obtener una longitud de 2 y $\frac{3}{4}$ m, ¿Cuál es la longitud original del resorte?

PROPORCIÓN DE VALOR UNITARIO DESCONOCIDO: En este tipo de división se conocen la correspondencia entre dos cantidades fraccionarias no unitarias de dos espacios de medidas y se busca determinar una cantidad fraccionaria o valor de magnitud fraccionario del segundo espacio de medidas asociado a la unidad del primer espacio de medidas. Este significado de división se relaciona con la proporción $\frac{D}{d} = \frac{C}{1}$.

Esta clase de división tiene las siguientes características:

- El dividendo puede ser menor que el divisor y que el cociente.
- El cociente no tiene porqué ser natural, la proporción anterior se mantiene si D, C y d son fracciones.

La tarea implicada en este significado de la división es determinar una tasa a través de la relación entre dos cantidades de los dos espacios de medidas.

Ejemplo: (Edelvives, 1934, pág. 244, citado en Contreras, 2012, pág. 106): “Las 3/4 partes de una carretera miden $3\frac{5}{8}$ km. ¿Cuál es la longitud total?”

PROPORCIÓN DE VALOR UNITARIO CONOCIDO: En este caso se conoce la cantidad fraccionaria o valor de magnitud fraccionario del segundo espacio de medidas que corresponde a la unidad del primer espacio de medidas y se conoce también una cantidad fraccionaria o valor de magnitud fraccionario del segundo espacio de medidas y se pregunta por la cantidad fraccionaria o valor de magnitud fraccionario correspondiente al primer espacio de medidas. Corresponde a la siguiente proporción $\frac{D}{C} = \frac{d}{1}$.

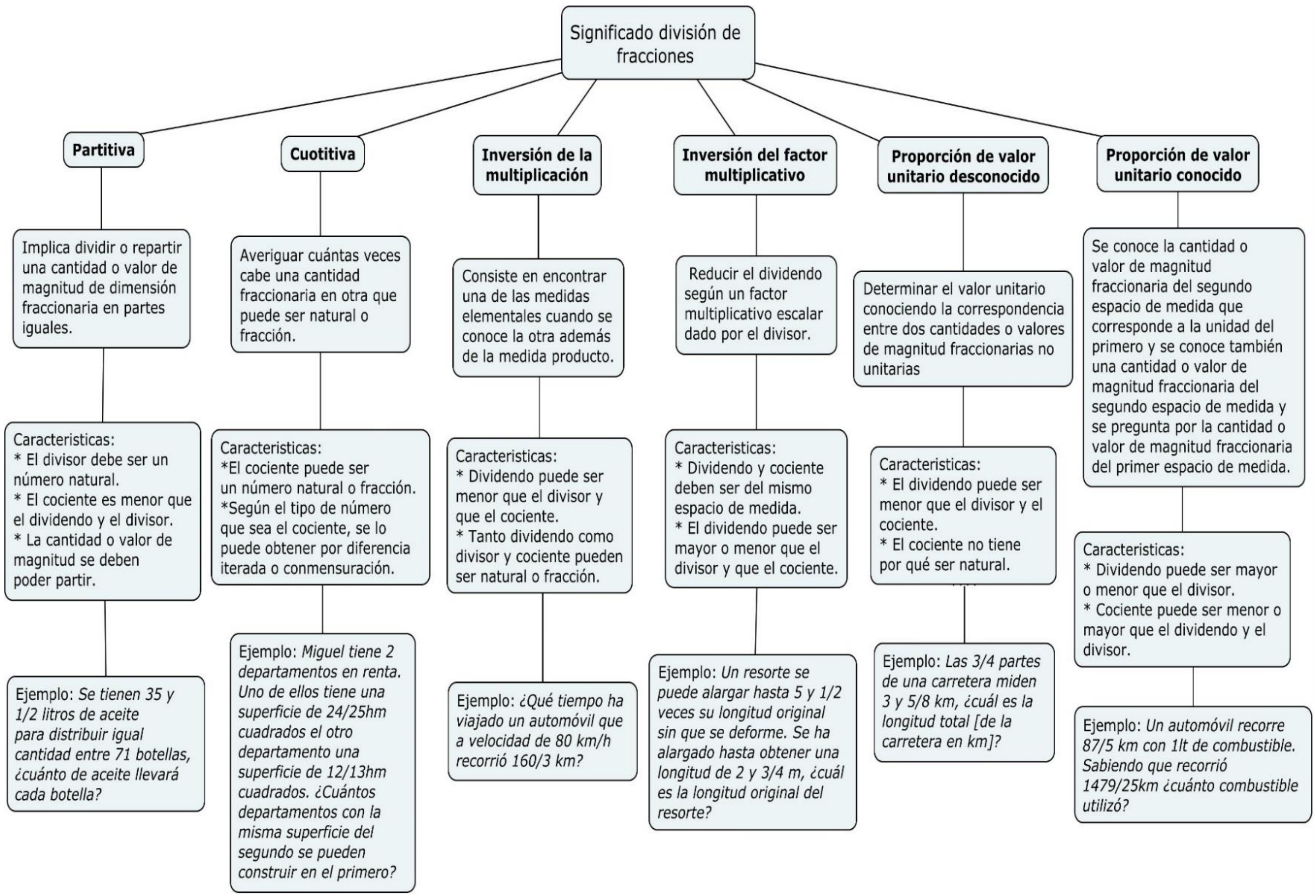


Figura 2.3. Esquema de significados de la división de fracciones

Este significado de la división tiene las siguientes características:

- El dividendo puede ser menor o mayor que el divisor.
- El cociente puede ser menor o mayor que el dividendo y el divisor y no tiene porqué ser un número natural.

La tarea vinculada con este significado de la división es determinar una cantidad o valor de magnitud de un espacio de medidas.

Ejemplo: Un automóvil recorre $17\frac{2}{5}$ kilómetros con 1 litro de combustible. Sabiendo que recorrió un total de $59\frac{4}{25}$ km, ¿cuánto combustible utilizó?

La Figura 2.3 es un esquema que resume los diferentes significados de la división con fracciones que se han descripto anteriormente.

En el próximo subapartado se hace la descripción de las dimensiones de la comprensión de un concepto matemático en el sentido de Usiskin (2015) usando el concepto división de fracciones.

2.2.2. COMPRENSIÓN DE LA DIVISIÓN DE FRACCIONES

Según Usiskin (2015) la comprensión de la actividad matemática en educación es diferente para el político, para el matemático, para el maestro y para el estudiante y por eso centra su atención en la comprensión de un concepto matemático desde el punto de vista del estudiante y considera para ello la fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas (Freudenthal, 1983, citado por Usiskin). Skemp (1976, citado por Usiskin, 2015) utiliza los términos comprensión instrumental y comprensión relacional para referirse a la comprensión de procedimientos y a la comprensión conceptual considerando estas dos concepciones como temas diferentes.

Si bien Usiskin coincide con Skemp en que ambas comprensiones son distintas, no está de acuerdo en que sean temas diferentes ya que afirma que una plena comprensión de las matemáticas requiere una comprensión tanto de los procedimientos, como de los conceptos, y considera que hay más de dos aspectos distintos de los que habla Skemp y llama a éstos, dimensiones de la comprensión.

Para Usiskin hay al menos cinco dimensiones de la comprensión de un concepto matemático, las cuales denomina de la siguiente manera:

- Habilidad–algoritmo [*Skil–algorithm*]
- Propiedad–prueba [*Property–proof*]
- Uso–aplicación (modelización) [*Use–application (modeling)*]
- Representación–metáfora [*Representation–metaphor*]
- Historia–cultura [*History–culture*]

Como se ha dicho, este investigador en el artículo del 2015 toma como ejemplo para describir estas dimensiones los conceptos multiplicación de fracciones y congruencia en geometría, considerando que un concepto es aquello que se presta a ser analizado por medio de estas dimensiones de la comprensión.

Debido a que la investigación, cuyo informe es esta tesis, versa sobre la división de fracciones, se toman en cuenta las dimensiones de Usiskin (2015) para caracterizar la comprensión de este concepto matemático.

Siguiendo la idea del autor, antes de tratar cada una de las dimensiones de la comprensión de la división de fracciones, es necesario hablar del vocabulario. Usiskin dice que:

Las matemáticas son […] un lenguaje del discurso. Es a la vez una lengua escrita y una lengua hablada […]. La familiaridad con este lenguaje es un precursor de toda comprensión. Una persona no puede empezar a entender la multiplicación de fracciones sin saber lo que es una fracción y lo que parece, y que la multiplicación es una operación que, dados dos números, produce un tercero […]. En general, tratar el vocabulario escrito y hablado de un concepto es una parte esencial de su comprensión que trasciende todos los aspectos de ese entendimiento (2015, pág. 824).

Es esencial, entonces, que para hablar de la comprensión de la división de fracciones de un individuo, éste debe estar familiarizado con el lenguaje tanto escrito, como hablado de las fracciones y de la división.

En las siguientes secciones se detallan las dimensiones de la comprensión de la división de fracciones.

2.2.2.1. DIMENSIÓN HABILIDAD–ALGORITMO

Esta dimensión de la comprensión se refiere a la capacidad de utilizar algoritmos de acuerdo con los números implicados en el cálculo a efectuar. Contreras (2012) identificó seis algoritmos para efectuar la división de fracciones, algunos de los cuales se describen a continuación.

Al iniciar la descripción de esta dimensión, Usiskin (2015) toma como ejemplo dos fracciones para describir diferentes algoritmos de la multiplicación. En este caso, para la división se consideró el ejemplo siguiente:

$$\frac{3}{2} \div \frac{1}{5},$$

al efectuar la operación aplicando el algoritmo de “invertir y multiplicar” o “producto cruzado” se obtiene el resultado de dicha división, 15/2. Existe otro algoritmo general como los dos anteriores, denominado "reducción de las fracciones a común denominador y división de los numeradores", que consiste en convertir ambas fracciones, tanto dividendo como divisor, a fracciones con un común denominador y dividir los numeradores. En el ejemplo dado, esto es:

$$\frac{15}{10} \div \frac{2}{10} = \frac{15}{2} \qquad \textbf{(A)}$$

Se debe resaltar que este es un algoritmo general válido, y por lo general no se lo considera en la enseñanza de la división de fracciones. Los tres algoritmos para dividir fracciones que se han mostrado son generales, es decir valen para cualesquier par de fracciones que se dividan (Contreras, 2012, pág. 49 y 50).

Un cuarto procedimiento general que permite dividir fracciones es el que se muestra a continuación

$$\frac{3}{2} \div \frac{1}{5} = \left(\frac{3}{2} \cdot 5\right) \div 1 = \frac{15}{2}.$$

Este procedimiento muestra que para dividir dos fracciones, primero se multiplica al dividendo por el denominador del divisor y al resultado se lo divide por el numerador del divisor.

Considerando a continuación el siguiente ejemplo:

$$\frac{3}{2} \div \frac{1}{2}$$

se puede apreciar que este es un caso particular de división de fracciones debido a que ambas tienen el mismo denominador. Procediendo igual que el ejemplo **(A)**, solo basta con dividir los numeradores, obteniendo así como resultado de dicha división 3.

En Gómez, Figueras y Contreras (2016) se denomina al algoritmo anterior como "producto de cancelaciones". Los autores también consideran el caso en que las fracciones dividendo y divisor tienen numeradores iguales, como se muestra a continuación:

$$\frac{5}{4} \div \frac{5}{3}$$

en cuyo caso, el resultado de la división tendrá como numerador al denominador del divisor y como denominador al denominador del dividendo, por ello el resultado de la división anterior es igual a 3/4.

Otro algoritmo particular que también mencionan Gómez, Figueras y Contreras (2016) y que es útil para la división de fracciones, es el caso en que los números de las fracciones son múltiplos entre numeradores y denominadores respectivamente. Por ejemplo:

$$\frac{24}{35} \div \frac{3}{7}$$

en este cálculo es suficiente dividir los numeradores y denominadores entre sí para obtener que el resultado de la división es 8/5.

Considerando el primer ejemplo, si ahora en lugar de dividir por $\frac{1}{5}$ se divide por $\frac{3}{2}$, es decir, si se tiene:

$$\frac{3}{2} \div \frac{3}{2}$$

basta saber que al dividir un número por sí mismo se obtiene como resultado 1, y no es necesario utilizar algoritmo alguno para hacer la división planteada.

Otro algoritmo para dividir fracciones es el que Contreras (2012) llama "uso de la unidad fraccionaria". El investigador dice:

Este algoritmo consiste en buscar la fracción unitaria cuando se conoce la fracción correspondiente a una fracción no unitaria […] Consta de dos pasos: el primero consiste en averiguar la fracción correspondiente a la fracción unitaria y el segundo consiste en, conocido el valor correspondiente a la fracción unitaria, resolver el problema original. Como por ejemplo se ve en Dalmau Carles (1898, p. 152): “Se han comprado 3/8 de Hg de azafrán por 7/9 de peseta. ¿A cuánto resulta el Hg?” Sol: si 3/8 valen 7/9 pta, 1/8 vale $\frac{7}{9\text{x}3}$ y 8/8 valen $\frac{7\text{x}8}{9\text{x}3} = \frac{56}{27}$ o bien $\frac{7}{9} \div \frac{3}{8} = \frac{56}{27}$ (Contreras, 2012. Págs. 50-51).

Otro caso particular para hacer la división de fracciones, es la conversión a números decimales. Se dice que es particular puesto que no siempre se puede efectuar la operación de esta manera, debido a que no toda fracción se puede convertir en un número decimal, por ejemplo, la división de 1/3 y 1/7 no se puede hacer con números decimales ya que esos números no tienen una escritura decimal finita. El siguiente ejemplo muestra un caso donde dicha conversión a números decimales sí es posible:

$$\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = 0.75 \div 0.5 = 1.5 = \frac{3}{2}$$

Los siguientes casos, en los cuales se involucra a la unidad en la operación, no fueron considerados por Usiskin (2015) en sus ejemplos de multiplicación y sí se consideró conveniente tomarlos en cuenta en este análisis de la división de fracciones.

Se sabe que al dividir cualquier número entre la unidad, el resultado de la operación es el mismo que el dividendo, es decir, considerando el primer ejemplo se tiene:

$$\frac{3}{2} \div 1 = \frac{3}{2}$$

Por otra parte, en la división $1 \div \frac{3}{2}$, teniendo presente que si el dividendo es uno y el divisor es una fracción, el resultado de dicha división será el inverso multiplicativo del divisor, en este ejemplo, 2/3.

Usiskin (2015) dice que a veces se considera a la habilidad relacionada con la dimensión Habilidad–Algoritmo como una forma de pensamiento de orden inferior. Sin embargo, él no está de acuerdo con esa forma de pensar puesto que afirma que las personas hábiles muestran destrezas en los aspectos relacionados con esta dimensión cuando obtienen la respuesta correcta utilizando varios métodos y optan por uno determinado porque consideran que es el más eficiente (pág. 826). Se puede decir entonces que las personas que conocen diferentes algoritmos para dividir fracciones y los usan, según sea el caso, tienen una mayor comprensión del concepto división de fracciones.

2.2.2.2. DIMENSIÓN PROPIEDAD – PRUEBA

Para muchas personas, según Usiskin (2015), comprender un concepto matemático va más allá de obtener la respuesta correcta. El autor dice que según estas personas, alguien no entiende algo a menos que pueda identificar las propiedades matemáticas que están en juego en la aplicación de determinado algoritmo.

En su artículo del 2015, el autor hace una demostración del algoritmo para multiplicar fracciones usando la definición de división y las propiedades de las fracciones con las operaciones que allí se definen (ver Usiskin, 2015, pág. 826).

Para el caso de la división de fracciones, se demuestra la validez del algoritmo que consiste en multiplicar el dividendo por el denominador del divisor y al resultado dividirlo por el numerador del divisor. Es decir, para cualesquiera números enteros a, b, c y d con $b \neq 0$ y $d \neq 0$, se quiere demostrar que:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b} \cdot d\right) \div c$$

Prueba: Dados a, b, c y d con $b \neq 0$ y $d \neq 0$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} \underbrace{=}_{\mathbf{1}} \frac{a}{b} \div \left(c \cdot \frac{1}{d}\right) \underbrace{=}_{\mathbf{2}} \frac{a}{b} \div \left(\frac{1}{d} \cdot c\right) \underbrace{=}_{\mathbf{3}} \frac{a}{b} \cdot \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{d} \cdot c\right)}\right] \underbrace{=}_{\mathbf{4}} \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{d}} \cdot \frac{1}{c}\right) \underbrace{=}_{\mathbf{5}} \frac{a}{b} \cdot \left(d \cdot \frac{1}{c}\right)$$

$$\underbrace{=}_{\mathbf{6}} \left(\frac{a}{b} \cdot d\right) \cdot \frac{1}{c} \underbrace{=}_{\mathbf{3}} \left(\frac{a}{b} \cdot d\right) \div c$$

Las igualdades indicadas en la expresión anterior son verdaderas debido a lo siguiente:
1. algoritmo producto entero–fracción; 2. propiedad conmutativa del producto;
3. definición de división; 4. algoritmo del producto de fracciones; 5. inverso multiplicativo, y 6. propiedad asociativa del producto.

En este sentido la dimensión Propiedad–Prueba es diferente de la dimensión Habilidad–Algoritmo, ya que en la primera el estudiante aprende que un algoritmo se deduce a partir de definiciones y de propiedades generales de las operaciones y que no es algo arbitrario.

Según afirma Usiskin (2015), "algunas personas creen que si se entiende la aplicación de estas propiedades y se usa correctamente el lenguaje, entonces uno podría ser más hábil" (pág 827). Sin embargo, este investigador asegura que está comprobado que la transferencia del dominio de las habilidades al dominio de las propiedades no es automática, debido a que la primera requiere de práctica y flexibilidad de elegir entre algoritmos, cualidades que las propiedades no transmiten.

2.2.2.3. DIMENSIÓN USO–APLICACIÓN (MODELIZACIÓN)

Usiskin (2015) establece que una persona puede conocer un algoritmo y saber cómo se usa e incluso porqué funciona, sin embargo puede no saber cuándo se aplica, es por ello que él considera al Uso–Aplicación como una dimensión de la comprensión de un concepto matemático. Al respecto, el investigador indica que comúnmente en las clases de matemáticas, un estudiante puede ser hábil en la utilización de diferentes algoritmos e incluso en el uso de propiedades, pero que no sepa dónde se aplican. Esto deja ver que este tipo de comprensión no surge de forma espontánea.

Para la investigación descrita en este documento se han identificado seis significados de la división de fracciones, las cuales se han explicado en la sección 2.2.1.2 de este capítulo. En la descripción de cada uno de esos significados, se han propuesto ejemplos de fenómenos que se organizan con la división de fracciones.

Tomando en cuenta esto, se espera tener elementos para reflexionar en lo siguiente, como lo hace Usiskin: 'Se pasa una gran cantidad de tiempo enseñando los algoritmos para realizar cálculos que se dedica muy poco tiempo a enseñar a los estudiantes dónde aplicar esta operación con fracciones. El resultado de esta situación es que el rendimiento de los alumnos en la resolución de problemas es menor que el rendimiento en el uso de algoritmos, lo cual lleva a creer que los aspectos que se relacionan con la dimensión Uso–Aplicación son más difíciles que aquellos que se relacionan con la dimensión Habilidad–Algoritmo' (2015, pág. 828).

2.2.2.4. DIMENSIÓN REPRESENTACIÓN–METÁFORA

En la dimensión Representación–Metáfora, según lo expone Usiskin (2015), desde la psicología cognitiva se tiene la idea de que una persona no entiende realmente un concepto a menos que ésta pueda representarlo de alguna manera; ya sea con objetos concretos para algunos o representaciones pictóricas para otros.

Contreras (2012) identificó en su investigación dos tipos de representaciones de fracciones: 1) parte–todo continuo o discreto y 2) recta numérica. La primera hace referencia al caso en el cual la fracción representa una parte del todo, que puede ser continua como el área de una figura geométrica o un pastel, o discreta como una bolsa con paletas, una caja con bolas, entre otras, mientras que la representación recta numérica implica la representación de las fracciones en la recta numérica real.

Partiendo de estas dos clases de representaciones, se exponen algunos ejemplos de representaciones pictóricas de división de fracciones.

La Figura 2.4[4] muestra mediante el modelo de área, cómo determinar el ancho de un rectángulo cuyo alto es 3/4 de unidades y tiene un área de 6/20 unidades cuadradas.

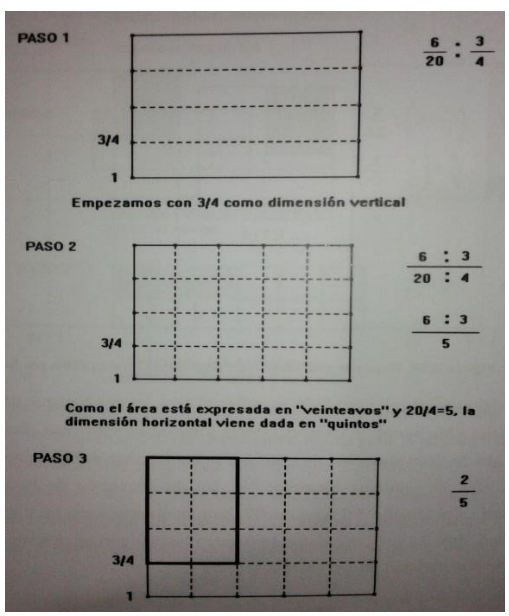


Figura 2.4. Representación pictórica de una división de fracciones usando un modelo continuo

[4] Las Figuras 2.4, 2.5 y 2.6 fueron tomadas de Contreras, 2012, págs. 91, 95 y 96.

Este ejemplo es un modelo continuo de la relación parte-todo y muestra el caso particular del algoritmo para dividir fracciones que tienen numerador y denominador que son múltiplos entre sí.

Como se sabe que el área del rectángulo es 6/20 unidades cuadradas y la altura está dada en cuartos, entonces el ancho del rectángulo debe estar dado en quintos. Ahora se deben distribuir 6 rectángulos con medidas 1/20 entre tres filas, lo que se hace dividiendo 6 entre 3, por lo que el ancho del rectángulo de 6/20 unidades cuadradas de área es 2/5 unidades.

En la Figura 2.5 se representa la versión de un modelo discreto de la división 3/4÷3/5. Se toman tantas bolas como indica el producto de los denominadores, es decir, 20. Hay que dividir tres cuartos de las 20 bolas (es decir, 15 bolas) entre los 3/5 de 20 bolas (es decir, 12 bolas). Por tanto el resultado de la división es 15/12 = 5/4 de las bolas.

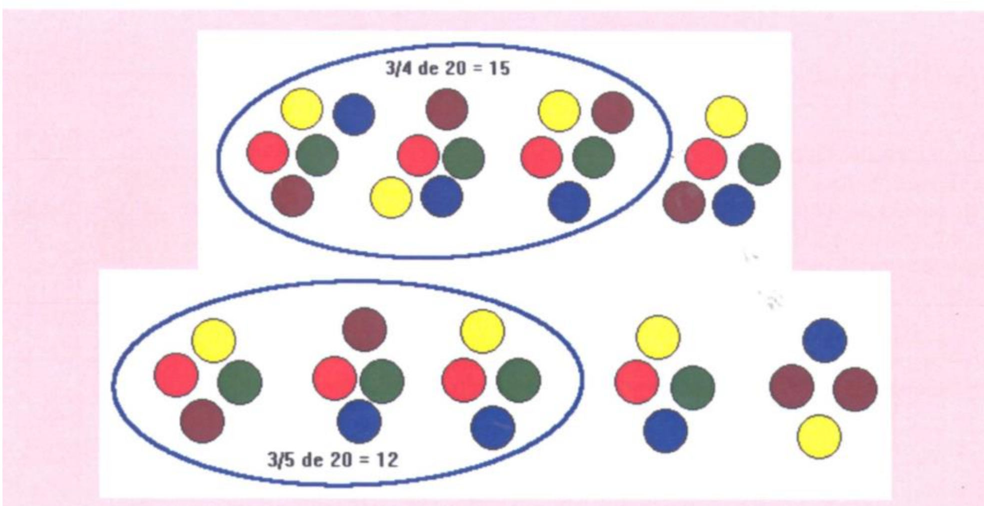


Figura 2.5. Representación pictórica de una división de fracciones usando un modelo discreto

Finalmente, en la Figura 2.6 se utiliza una representación de las fracciones en la recta numérica para efectuar la división 3/4÷2/5. Se usa la recta numérica para hallar un número racional a/b tal que a/b · 2/5 = 3/4.

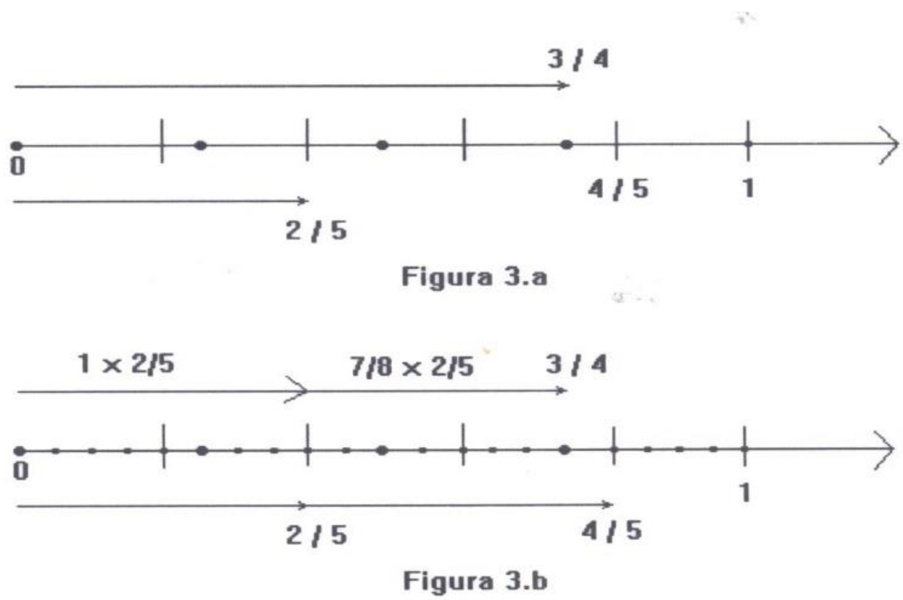


Figura 2.6. Representación pictórica de una división de fracciones usando el modelo de recta numérica

La elección de las representaciones de modelos continuos, discretos y de recta numérica se debe a que son las que comúnmente se encuentran en los libros de textos y en la enseñanza de fracciones, aunque se utilicen poco como representaciones de las operaciones. El modelo de recta numérica tiene un particular interés por el hecho de que las operaciones de multiplicación y división generalmente se asocian a dos dimensiones, sin embargo, dicho modelo unidimensional también permite representar las operaciones, como se ha visto en el ejemplo de la Figura 2.6.

Usiskin (2015) afirma que el uso de representaciones concretas o pictóricas no tiene por qué preceder a la adquisición de los otros tipos de comprensión, ya que muchos han adquirido las habilidades para usar distintos algoritmos, han aprendido los fundamentos matemáticos e incluso han desarrollado la capacidad de aplicar las matemáticas sin necesidad de recurrir al uso de representaciones. Claro está que la comprensión que proviene de representar puede ser muy útil, ya que los gráficos también transmiten información.

Para esta investigación se considera importante esta dimensión de la representación dentro de la enseñanza, debido a que el uso de ellas como herramientas puede ayudar a los estudiantes a elaborar estrategias para dividir fracciones e incluso ‘descubrir’ algoritmos para hacer cálculos. En el apartado 2.4 en este Capítulo, la investigación realizada por Yim (2010) dará cuenta de la afirmación hecha en este párrafo.

En términos de Usiskin (2015), “las cuatro dimensiones de la comprensión [que se consideraron en las secciones anteriores] son relativamente independientes en el sentido de que pueden ser, y son a menudo, aprendidas de manera aislada unas de otras, y ninguna dimensión en particular debe preceder a cualquiera de las otras. Algunos creen que la matemática tiene que comenzar con situaciones del mundo real; otros con habilidades; otros con materiales concretos; y aún otros creen que deben desarrollar la teoría matemática primero y dejar que todo lo demás provenga de eso. […] por eso creo que la comprensión de la matemática es una entidad multidimensional” (pág. 834).

2.2.2.5. DIMENSIÓN HISTORIA–CULTURA

La dimensión Historía–Cultura de la comprensión por lo general no se encuentra en las matemáticas escolares y sin embargo es muy importante para una plena comprensión de las matemáticas.

Aquí se hace referencia a por ejemplo ¿cómo y por qué surgió un cierto conocimiento matemático? ¿Cómo ha ido evolucionando en la historia? ¿Cómo se ha usado dicho conocimiento en las diferentes culturas? Usiskin (2015) afirma que aquellas personas que se dedican a la historia de las matemáticas o a las matemáticas interculturales obtienen una comprensión de los conceptos matemáticos que es diferente de cualquiera de las dimensiones analizadas anteriormente. Este investigador hace la siguiente observación:

Las primeras fracciones fueron mitades, tercios, y cuartos. Hace más de 3000 años, los egipcios representaban otras fracciones como sumas de fracciones unitarias. Simon Stevin, en su invención de decimales a finales de 1500 los llamó fracciones decimales, y en algunos lugares todavía usan ese término. El primer uso de la barra para representar fracciones parece estar entre los matemáticos árabes hace más de 1000 años, pero su uso común no apareció hasta el siglo XVI (Flegg, 2002, págs. 74-75; Cajori 1928, pág. 310; citados por Usiskin, 2015, pág. 835).

En relación con la división de fracciones, por ejemplo, los algoritmos que actualmente se usan en la enseñanza – producto cruzado y multiplicar por el inverso del divisor – son los que ya se utilizaban mucho antes. En en siglo XVI, Andrés de Zaragoza (1515, citado por Contreras, 2012, págs.49 y 50) explica en su libro el algoritmo producto cruzado. Por otra parte, en el libro de Valdivia Ureña y García Roca (1969, citado por Contreras, 2012, pág.50) se encuentra el caso reglado del algoritmo multiplicar por el inverso del divisor.

Toda la descripción anterior, a saber: tanto la fenomenología de la división de números naturales y de las fracciones, como las dimensiones de la comprensión del concepto división de fracciones, constituyen el componente formal del MTLi de la investigación cuyo informe es esta tesis.

2.3. LA CONSTRUCCIÓN DEL COMPONENTE DE LOS MODELOS DE ENSEÑANZA

Para construir el componente Modelos de Enseñanza del MTLi como parte del análisis de la problemática, como se mencionó en el apartado 2.1 de este capítulo, se analizaron los programas de estudio de matemáticas de primaria y secundaria, así como el plan y programas de estudios de la Licenciatura en Educación Secundaria que se imparte en la Escuela Normal Superior de México. También se analizaron ejemplos de actividades en tres libros de texto utilizados para la enseñanza en secundaria. En los siguientes subapartados se detallan el análisis hecho a estos documentos.

2.3.1. PROGRAMAS DE ESTUDIO DE PRIMARIA Y SECUNDARIA

En los programas de estudio de la educación primaria y secundaria se especifican los propósitos del estudio de las matemáticas en la educación básica en México. Entre los diferentes propósitos que se describen, se encuentra el que los estudiantes utilicen diferentes técnicas o recursos para hacer más eficientes los procedimientos de resolución (SEP, 2011a, pág. 13). Además, se exponen los estándares curriculares de matemáticas que comprenden el conjunto de los aprendizajes esperados. Los mismos se organizan en cuatro ejes temáticos:

1) Sentido numérico y pensamiento algebraico;
2) Forma, espacio y medidas;
3) Manejo de la información, y
4) Actitud hacia el estudio de las matemáticas (pág. 15).

En el periodo antes de culminar el sexto grado de primaria, pero también antes de concluir el tercer grado de secundaria, los estándares curriculares están en correspondencia con los tres primeros ejes temáticos. A efectos de la investigación descrita en este documento, interesa el primero. Durante el periodo de la primaria, el eje Sentido numérico y pensamiento algebraico incluye los temas:

1) Números y sistemas de numeración,
2) Problemas aditivos, y
3) Problemas multiplicativos (SEP, 2011b, pág. 65);

y para el periodo de la secundaria incluye los temas:

1) Números y sistemas de numeración,
2) Problemas aditivos,
3) Problemas multiplicativos, y

4) Patrones y ecuaciones (SEP, 2011a, pág. 16).

Posterior a un enfoque didáctico de estos estándares, se especifica la organización de los aprendizajes. En esa parte del documento se describen los tres niveles de desglose en los cuales se organiza la asignatura matemáticas para su estudio. El primero corresponde a los ejes temáticos, que son los estándares curriculares, el segundo a los temas que se trata en cada eje – referidos con anterioridad, tanto para primaria, como para secundaria – y el tercer y último nivel de desglose corresponde a los contenidos que se tratan en cada tema.

El eje Sentido numérico y pensamiento algebraico alude a los fines más relevantes del estudio de la aritmética y del álgebra.

Tras analizar los programas de cuarto, quinto y sexto grados, siguiendo la organización de los mismos, se ha encontrado que se propone un estudio detallado de las fracciones considerando ciertas partes de una fenomenología didáctica descrita en el sentido de Freudenthal (2002); la fracción como parte de un todo, como cociente, como medida, entre otros. En los programas de estudio se hace hincapié en el uso de las fracciones para resolver problemas aditivos y multiplicativos con diferentes contextos, como también en cálculos mentales. Tanto en cuarto grado, como en quinto se pone énfasis en las operaciones como adiciones y sustracciones de fracciones con diferentes características, tales como denominadores iguales o diferentes y uso de fracciones equivalentes (SEP, 2011c, 2011d). Es casi finalizando sexto grado que los estudiantes tienen un acercamiento a operaciones como multiplicación y división y la resolución de problemas multiplicativos con fracciones; explícitamente se hace referencia a la resolución de problemas que impliquen una división de número fraccionario o decimal entre un número natural.

Además, se ha identificado que se propone el uso de 'algoritmos convencionales' para efectuar las diferentes operaciones, pero no se especifica cuál o cuáles son dichos algoritmos. Esto conduce a replantearse si esos 'algoritmos convencionales' son diferentes técnicas o recursos que permite a los estudiantes para hacer más eficiente los procedimientos de resolución de problema o de cálculo, siendo éste uno de los propósitos establecidos. También se ha encontrado que aparecen como contenido de estudio, diferentes significados de la multiplicación, pero no se hace referencia a distintos significados de la división.

En el análisis del programa de secundaria de primero, segundo y tercer grados se evidencia que el estudio de las operaciones con fracciones como objeto matemático, se lleva a cabo específicamente en el primer grado. Esto se interpreta como que en los grados segundo y tercero, todo el estudio hecho por los estudiantes de las fracciones y sus operaciones hasta primero de secundaria inclusive, ya forman parte de los conocimientos de los estudiantes y por tanto, el foco está puesto en otros contenidos matemáticos.

En el primer grado de secundaria se propone como modelo de enseñanza centrarse en distintas representaciones de los números racionales, esto es: la conversión de fracciones decimales y no decimales a su escritura decimal y viceversa, y las representaciones de éstos en la recta numérica. Así mismo, se insiste en la resolución de problemas aditivos y multiplicativos. Respecto de los problemas aditivos, se proponen la resolución y el planteamiento de problemas de ese tipo, cuya resolución implique más de una operación de adición y sustracción en distintos contextos combinando números fraccionarios y decimales, haciendo uso de 'algoritmos convencionales'. De igual manera, sobre los problemas multiplicativos, se pone énfasis en el uso de la multiplicación y la división de fracciones en la resolución de problemas en diferentes contextos haciendo uso de los 'algoritmos convencionales'. Se resalta el hecho de que explícitamente se indique la resolución de problemas en la que se haga uso de estas operaciones con números decimales.

Retomando las dimensiones de la comprensión de la división de fracciones expuestos en el subapartado 2.2.2, se hace un análisis general de estos programas de educación básica.

En relación con la dimensión U–A se puede decir que se hace un estudio profundo de las fracciones en diferentes situaciones y contextos, más específicamente en la resolución de problemas aditivos y multiplicativos. Aunque se propone la resolución de problemas cuyos significados de la multiplicación sean diferentes, en los programas no se sugiere lo mismo para problemas con diferentes significados de la división.

Respecto a la dimensión H–A, se propone el cálculo de operaciones, entre ellas la división con números decimales y fraccionarios, tanto en la resolución de problemas como en el cálculo mental haciendo uso de algoritmos convencionales. Sin embargo, no se explicita en los programas cuales son los 'algoritmos convencionales' y, por tal razón, si incluye o no el estudio de algoritmos generales y particulares ('*shortcut'*).

De los aspectos relacionados con la dimensión P–P, en los programas de estudios se destaca la obtención de fracciones equivalentes, a través de la propiedad de multiplicar y dividir numeradores y denominadores de las fracciones por un mismo número natural. No queda claro si se considera el uso de propiedades para otras tareas matemáticas como hacer ciertas 'justificaciones' y/o cálculos.

En lo referente a la dimensión R–M, se identificó un mayor énfasis en las representaciones simbólicas de fracciones y números decimales así como en la recta numérica. Sin embargo, no se ha identificado que se dé relevancia a las representaciones pictóricas de la multiplicación y división de fracciones.

2.3.2. PLAN Y PROGRAMAS DE ESTUDIOS DE LA LICENCIATURA EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

Para encontrar en qué etapa de su formación académica los futuros profesores vuelven a estudiar los conjuntos numéricos, en particular las fracciones y sus operaciones, se analizó de la Licenciatura en Educación Secundaria Especialidad: Matemáticas, el Plan de Estudios (SEP, 1999). En él, se encontró que en el tercer semestre de su formación, los estudiantes de licenciatura tienen como materia de estudio 'Los números y sus relaciones'.

Al analizar el programa de estudios de dicha materia, se encuentra como sugerencia para los alumnos, que en el estudio de los números y sus relaciones se deben tener en cuenta tres aspectos fundamentales, a saber:

1) El significado de los números. Esto implica, las diferentes formas de representarlos, las relaciones entre ellos y los diferentes sistemas numéricos. Con relación al proceso de entender el significado de los números, los estudiantes tienen que diferenciar y dar sentido a números pequeños o grandes. De los números racionales, se destaca la importancia de las diferentes representaciones: fracciones, decimales, porcentajes, y su representación en una recta numérica.
2) El significado de las operaciones y sus relaciones. En este aspecto se recalca que comprender el significado de las operaciones en los sistemas numéricos es el fundamento para estudiar otras áreas de las matemáticas como el álgebra, la geometría y el cálculo diferencial e integral. Además, comprender las propiedades de las operaciones permitirá a los estudiantes simplificar o transformar cálculos.

3) Calcular con fluidez y hacer aproximaciones razonables. Se destaca la importancia de que al resolver problemas matemáticos se debe decidir si la situación requiere de una solución precisa o más o menos precisa y cómo obtenerla. Además, discernir entre el uso de cálculos mentales, el empleo de calculadoras o computadoras o la utilización de lápiz y papel (SEP, 2002, págs. 9 y 10).

El programa se organiza en cuatro bloques, pero para fines de la investigación descrita en esta tesis, solo se analizó el bloque tres en el cual se encuentra el estudio de los números racionales. Son ocho los temas que se proponen en este bloque; entre ellos se encuentran las operaciones con números decimales que implican cálculo mental, algoritmos, aproximaciones y el uso de propiedades para simplificar cálculos. Con relación a las representaciones, se hace referencia a las diferentes representaciones de los números racionales, decimales, fracciones, porcentaje, así como a sus representaciones en la recta numérica.

No es posible inferir a partir de la información analizada en este bloque del programa si, de los algoritmos, los alumnos estudian la validez de los mismos o la variedad de éstos. Tampoco si estudian los diferentes significados de las operaciones, particularmente de la división y a los tipos de problemas que éstos organizan.

Al parecer no se da atención a las representaciones pictóricas de las operaciones, por lo menos al de división de fracciones; más bien, se resalta el estudio de representaciones simbólicas de las fracciones.

2.3.3. ACTIVIDADES EN LIBROS DE TEXTO DE SECUNDARIA

Tres libros de texto de matemáticas de la editorial Santillana para el primer grado de la educación secundaria se han analizado (Trigueros et al., 2016; Peña, 2016; Carrasco y

Martínez 2014), y se identificaron como 'Horizontes', 'Todos juntos' e 'Integral' respectivamente. Estos libros están autorizados por la SEP y se encuentran en la lista de los textos gratuitos para ese nivel escolar. Para consulta se pueden examinar en la siguiente dirección:

http://libros.conaliteg.gob.mx/content/common/consulta-libros-gb/index.jsf?busqueda=true&nivelEscolar=3&grado=1&materia=2&editorial=&tipo=&clave=&titulo=&autor=&key=key-3-1-2.

El análisis que se ha hecho se enfoca exclusivamente en la manera en que los autores de estos libros han estructurado secuencias de enseñanza sobre la división de fracciones.

2.3.3.1. RESULTADOS DEL ANÁLISIS DEL LIBRO DE TEXTO 'HORIZONTES'

Las actividades de división de fracciones propuestas en el libro de Trigueros et al (2016), son escasas. En la página 107, ver Figura 2.7, se define el inverso multiplicativo de un número y se expone de manera explícita y usando lenguaje vernáculo el algoritmo producto cruzado, mismo que se expresa simbólicamente. Además, se proponen una serie de ejercicios para que el estudiante calcule divisiones con fracciones.

Dividir una fracción entre otra, se multiplica la fracción que juega el papel de numerador, por el inverso multiplicativo de la fracción que se encuentra en el lugar del denominador. Es decir, para dividir dos fracciones: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$, se multiplica *a* por *d* y el producto representa al numerador del resultado. Del mismo modo *b* se multiplica por *c* para formar el denominador del resultado: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}$

Ahora responde:

- ¿Cómo resolverías la división $\frac{2}{5} \div \frac{7}{3}$? Elige una de las siguientes opciones:

  $\frac{2 \times 3}{5 \times 7}$ $\frac{2 \times 7}{5 \times 3}$ $\frac{2 \times 5}{3 \times 7}$

Comenta con tus compañeros cuál elegiste y por qué.

- ¿Qué operación te permite obtener el resultado de $\frac{1}{2}$ entre $\frac{3}{4}$? ¿Cuánto sería $\frac{2}{5}$ entre $\frac{7}{8}$?
- Realiza las siguientes operaciones:

  $\frac{2}{3} \div \frac{6}{8} =$ $\frac{9}{4} \div \frac{2}{5} =$ $\frac{3}{7} \div \frac{3}{4} =$

- Compara tus resultados con los de otros compañeros.

Figura 2.7. Secuencia de aprendizaje de división de fracciones propuesta en Trigueros et al. (2016)

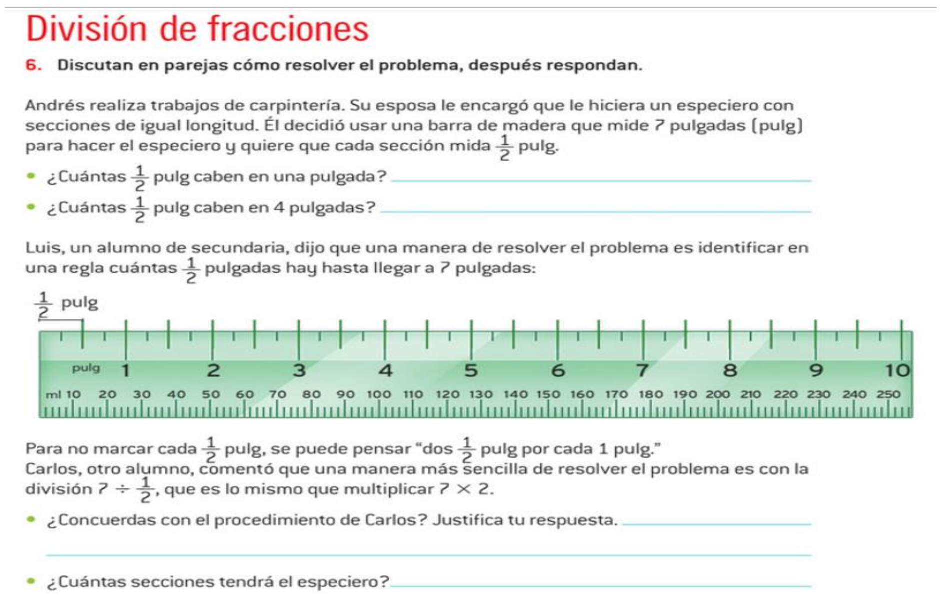
En este sentido, en el libro se resaltan ciertas características de la dimensión H–A de la comprensión de la división de fracciones, puesto que se muestra el algoritmo producto cruzado y se proponen ejercicios de cálculos para usarlo. Con relación a los aspectos que caracterizan a las dimensiones U–A, P–P y R–M, dicho libro no propone actividades que den cuenta de esos aspectos.

Por lo tanto, se puede decir que la secuencia de enseñanza propuesta en ese libro se centra en un aspecto sintáctico de la división de fracciones y no toma en cuenta el aspecto semántico de la misma.

2.3.3.2. RESULTADOS DEL ANÁLISIS DEL LIBRO DE TEXTO 'TODOS JUNTOS'

En el libro de Peña (2016) se dedica una lección completa, la lección 13, al estudio de la multiplicación y la división con fracciones. Al analizar la secuencia de enseñanza propuesta para la división de fracciones, tomando en cuenta las dimensiones antes descritas (ver subapartado 2.2.2), se encontró que en lo que refiere al U–A, este libro propone situaciones problemáticas que se resuelven con división de fracciones resaltando su significado cuotitivo, puesto que el tipo de preguntas formuladas es: "¿cuántas veces cabe?" (ver como ejemplo Figura 2.8).

Considerando las características de la dimensión H–A, en el texto de Peña (2016) se explica que "dividir entre cierto número es lo mismo que multiplicar por su recíproco" (pág. 104). De esa forma se está dejando implícito en el texto, considerando un ejemplo numérico de dos fracciones, que para dividir dos números se debe multiplicar el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor, lo que se conoce como el algoritmo 'invertir y multiplicar'. Además en el libro, de forma coloquial, se explica que para dividir dos fracciones se usa el



División de fracciones

6. Discutan en parejas cómo resolver el problema, después respondan.

Andrés realiza trabajos de carpintería. Su esposa le encargó que le hiciera un especiero con secciones de igual longitud. Él decidió usar una barra de madera que mide 7 pulgadas (pulg) para hacer el especiero y quiere que cada sección mida $\frac{1}{2}$ pulg.

- ¿Cuántas $\frac{1}{2}$ pulg caben en una pulgada? ______
- ¿Cuántas $\frac{1}{2}$ pulg caben en 4 pulgadas? ______

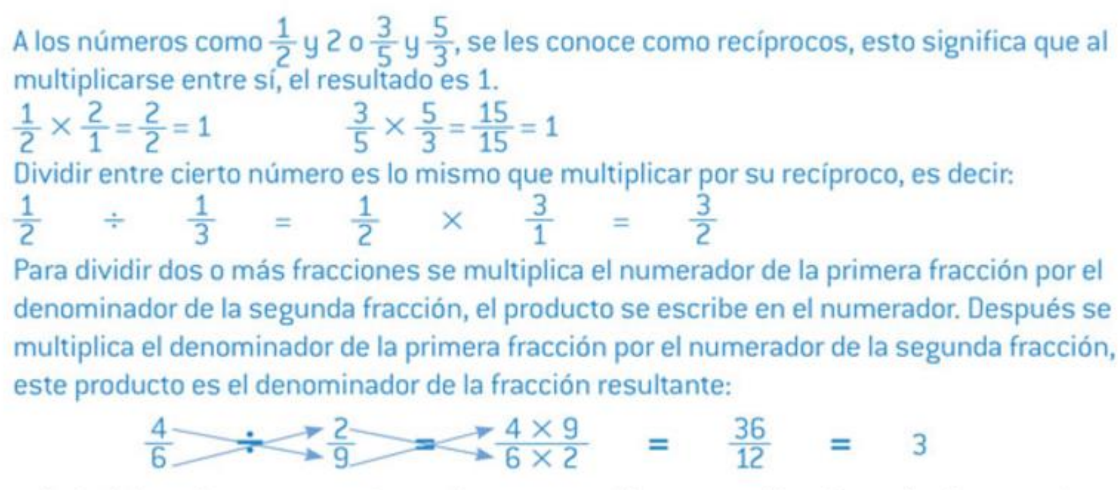
Luis, un alumno de secundaria, dijo que una manera de resolver el problema es identificar en una regla cuántas $\frac{1}{2}$ pulgadas hay hasta llegar a 7 pulgadas:

Para no marcar cada $\frac{1}{2}$ pulg, se puede pensar "dos $\frac{1}{2}$ pulg por cada 1 pulg."
Carlos, otro alumno, comentó que una manera más sencilla de resolver el problema es con la división $7 \div \frac{1}{2}$, que es lo mismo que multiplicar 7×2.

- ¿Concuerdas con el procedimiento de Carlos? Justifica tu respuesta. ______
- ¿Cuántas secciones tendrá el especiero? ______

Figura 2.8. Introducción a la división de fracciones a través de una situación problemática propuesta en Peña (2016)

algoritmo producto cruzado, y se proporciona un ejemplo numérico después de esta explicación (ver Figura 2.9).



A los números como $\frac{1}{2}$ y 2 o $\frac{3}{5}$ y $\frac{5}{3}$, se les conoce como recíprocos, esto significa que al multiplicarse entre sí, el resultado es 1.

$\frac{1}{2} \times \frac{2}{1} = \frac{2}{2} = 1$ $\quad$ $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{15}{15} = 1$

Dividir entre cierto número es lo mismo que multiplicar por su recíproco, es decir:

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{3}{2}$$

Para dividir dos o más fracciones se multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción, el producto se escribe en el numerador. Después se multiplica el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda fracción, este producto es el denominador de la fracción resultante:

$$\frac{4}{6} \div \frac{2}{9} = \frac{4 \times 9}{6 \times 2} = \frac{36}{12} = 3$$

Figura 2.9. Algoritmos 'invertir y multiplicar' y 'producto cruzado' propuestos en Peña (2016)

Por otra parte en relación con las representaciones que se exponen en Peña (2016), se resaltan las representaciones simbólicas y en la recta numérica de la división de fracciones así como una señal ostensiva de uno de los algoritmos que allí se describe. Sin embargo, no se han identificado propuestas de una variedad de representaciones pictóricas para esa operación, tal como se han presentado en la dimensión R–M.

Para concluir el análisis de este libro de texto, no se han identificado actividades que promuevan en los estudiantes el uso de propiedades de las fracciones y sus operaciones para hacer cálculo y/o justificaciones, es decir, no se identificaron características relacionadas con la dimensión P–P.

2.3.3.3. RESULTADOS DEL ANÁLISIS DEL LIBRO DE TEXTO 'INTEGRAL'

En el libro de Carrasco y Martínez (2014) al igual que en el de Peña (2016), también se dedica una lección completa, la número 13, al estudio de la multiplicación y la división con fracciones. Al igual que se ha hecho para el análisis de los dos libros anteriores, para éste texto también se consideraron las características de las dimensiones de la comprensión de la división de fracciones, presentadas en el subapartado 2.2.2 de esta tesis.

De los problemas multiplicativos que se muestran en Carrasco y Martínez (2014) se pueden identificar que, con relación a la dimensión U–A, corresponden a los significados de la división: partitivo, cuotitivo, inversión de la multiplicación y proporción de valor unitario desconocido. Es decir, en este libro de texto se exponen una variedad de fenómenos que se organizan a través de la división de fracciones (ejemplo, Figura 2.10)[5].

Respecto a los algoritmos para hacer dicha operación que se exponen en el libro de texto, que se vinculan con la dimensión H – A, se proponen de diferentes tipos. Es decir, se plantean algoritmos particulares como la división de fracciones con igual denominador y algoritmos generales como por ejemplo 'invertir y multiplicar', producto cruzado y

[5] Para más ejemplos de problemas con distintos significados de la división, ver Carrasco y Martínez (2014, pág.: 99 – 106).

conversión de fracciones con distinto denominador a fracciones equivalentes con igual denominador. Se resalta que en el libro se sugieren actividades de manera que sea el estudiante el que razone y 'descubra' esos algoritmos (ver como ejemplo, Figura 2.11).

1. De una jarra de $\frac{3}{4}$ de litro se han consumido las dos quintas partes. ¿Qué fracción de litro queda?

2. En un hospital, las enfermeras hacen rondas cada $1\frac{1}{4}$ horas para revisar a los enfermos. ¿Cuántas rondas se deben hacer para cuidar a los enfermos durante las 24 horas?

3. El peso de un objeto sobre la Luna es aproximadamente $\frac{1}{6}$ de su peso sobre la Tierra.
   a) ¿Cuánto pesa allí un vehículo espacial que en la Tierra tiene una masa de 220 kg?

4. Inventa un problema que se resuelva mediante la división $2\frac{3}{4} \div \frac{1}{8}$.

5. El tinaco de agua de la casa de Manuel, contiene $\frac{6}{7}$ partes de su capacidad. Los miembros de la familia consumen $\frac{4}{13}$ partes de la capacidad del tinaco diariamente. ¿Para cuántos días les alcanza el agua del tinaco?

6. El papá de Lalo revisó cuánta agua había en el tinaco de la casa y encontró que la familia había consumido $\frac{7}{8}$ partes del agua que tenía cuando estaba lleno. El señor comentó que debía agregar 380 litros para que el tinaco llegará a $\frac{3}{4}$ partes de su capacidad. ¿Cuántos litros le caben al tinaco?

Figura 2.10. Ejemplos de situaciones problemáticas propuestos en Carrasco y Martínez (2014)

Equipo

Discutan en el grupo una regla para dividir dos fracciones que tienen el mismo denominador.

- Lleguen a un acuerdo acerca de la mejor formulación de esa regla y escríbanla en su cuaderno. Luego contrástenla con el siguiente texto.

Para obtener el cociente entre dos fracciones que tienen el mismo denominador, se dividen sus numeradores.

$$\frac{a}{n} \div \frac{c}{n} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{\frac{a}{n}}{\frac{c}{n}} = \frac{a}{c}$$

Por ejemplo $\frac{7}{6} \div \frac{4}{6} = \frac{7}{4}$ $\quad \frac{5}{11} \div \frac{2}{11} = \frac{5}{2}$.

Figura 2.11. Algoritmo para dividir fracciones con igual denominador propuesto en Carrasco y Martínez (2014)

De los aspectos que caracterizan a la dimensión P–P, en Carrasco y Martínez (2014) se puede identificar el uso de propiedades para efectuar cálculos. En este sentido, se presentan de manera implícita a modo de preguntas, propiedades como el elemento neutro para la multiplicación y la división, el inverso multiplicativo de un número distinto de cero y la propiedad de que al dividir un número distinto de cero por el mismo, el resultado obtenido es igual a uno (ver Figura 2.12).

Discutan sus respuestas en el grupo y lleguen a un acuerdo.

- ¿Qué resultado se obtiene al multiplicar un número entero por 1? Explica por qué.
- ¿Y al dividir un número entero entre 1? Explica tu respuesta.
- ¿Cuál es el resultado de multiplicar una fracción por 1?
- ¿Y el resultado de dividir una fracción entre 1? La explicación que diste para el caso de los números enteros, ¿sirve también en este caso? ¿Por qué?
- ¿Cuál es el resultado de dividir un número entero, diferente de cero, entre él mismo? Explica por qué.
- ¿Y el resultado de dividir una fracción entre ella misma?

Comenta tus argumentos con tus compañeros.

En cada uno de los siguientes casos, encuentra la fracción indicada y explica cómo la obtuviste.

- Fracción que al multiplicarse por 18 dé como resultado una fracción equivalente a 1.
- Fracción que al ser multiplicada por el número entero n dé como resultado una fracción equivalente a 1.
- Fracción por la que se pueda multiplicar $\frac{5}{4}$ para obtener como resultado 1.
- Fracción por la que se pueda multiplicar $\frac{11}{7}$ para que el resultado sea 1.

El procedimiento que empleaste para contestar las preguntas anteriores, ¿se puede usar con cualquier número entero? Explica por qué.

- Fracción que al ser multiplicada por $\frac{a}{b}$ dé como resultado una fracción equivalente a 1.

Compara tus resultados con los de tus compañeros.

Figura 2.12. Propiedades de los números y sus operaciones propuestos en Carrasco y Martínez (2014)

Por último, en el libro de texto se da una señal ostensiva del algoritmo producto cruzado (Figura 2.13) y de la recta numérica para la división de fracciones (Figura 2.14), que corresponden a características de la dimensión R–M. Así mismo, dicha operación se representa simbólicamente de dos formas distintas, como se puede apreciar en la Figura 2.15.

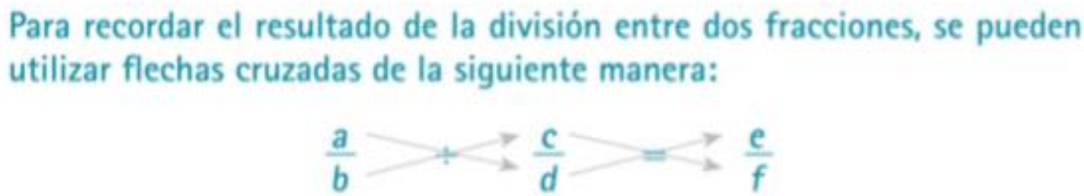


Figura 2.13. Señal ostensiva del algoritmo producto cruzado propuesto en Carrasco y Martínez (2014)

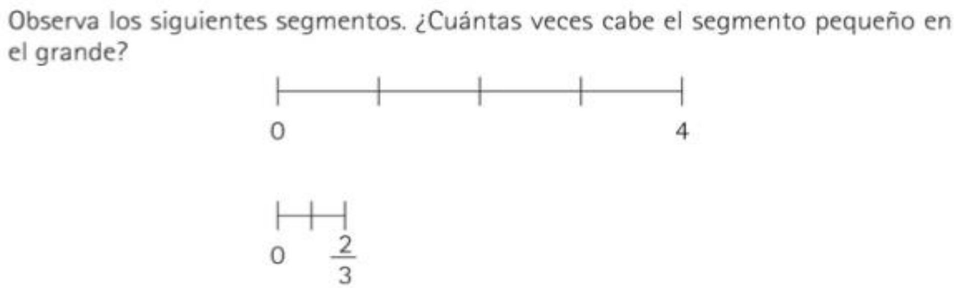


Figura 2.14. Representación de la división de fracciones usando el modelo de recta numérica propuesto en Carrasco y Martínez (2014)

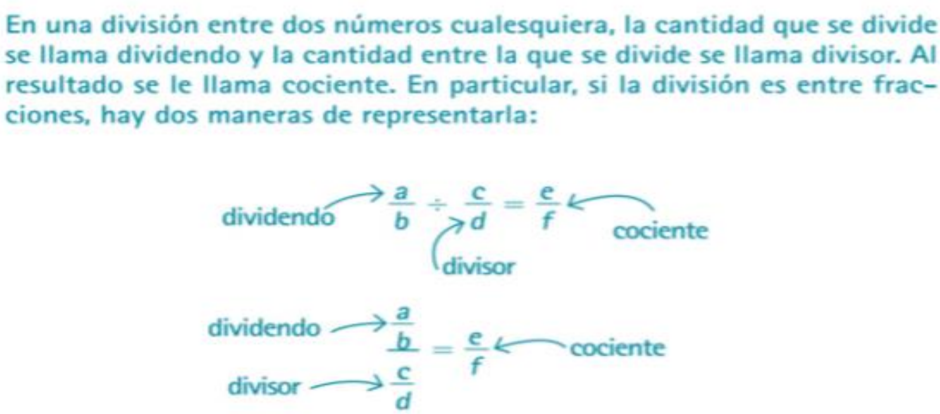


Figura 2.15. Representaciones simbólicas de una división de fracciones propuestas en Carrasco y Martínez (2014)

Tanto en el libro de Peña (2016) como en Carrasco y Martínez (2014) los modelos de enseñanza de la división de fracciones propuestos, se centran en un aspecto sintáctico de dicha operación pero también se proponen actividades que se centran en un aspecto semántico de la misma. En la siguiente sección se hace una comparación detallada del análisis de los tres libros consultados.

2.3.3.4. COMPARACIÓN DEL ANÁLISIS DE LOS TRES LIBROS DE TEXTO

En los tres libros de texto analizados, se pudieron identificar distintos modelos de enseñanza. Aunque el enfoque es el mismo en los tres casos, la resolución de problemas que impliquen la multiplicación y la división de fracciones, la dedicación e importancia que les dan unos u otros autores al contenido, es diferente.

En el libro de texto de Trigueros et al (2016) se evidenció que el contenido de estudio para el concepto división de fracciones es escaso e incluso no permite a los estudiantes profundizar y/o construir sus propios objetos mentales referentes a dicho concepto. Se pudo apreciar que este libro se centra en la aplicación de solo un algoritmo para efectuar cálculos, dejando de lado otros aspectos importantes necesarios para lograr una plena comprensión del concepto en cuestión, como el uso de propiedades para distintas tareas (P–P), la resolución de una variedad de problemas que se resuelven con dicha operación (U–A) y las representaciones pictóricas (R–M).

Sin embargo de los otros dos libros de texto, el de Peña (2016) y el de Carrasco y Martínez (2014), se han identificado algunas semejanzas respecto a las actividades propuestas. Esto significa que, por ejemplo, en ambos libros de texto se consideran aspectos relacionados con la dimensión U–A, puesto que contienen situaciones que se pueden resolver con la división de fracciones. Sin embargo, en solo en uno de los libros la división responde a diferentes significados, esto es, a una variedad de fenómenos.

Desde la dimensión R–M, en ambos libros de textos citados en el párrafo anterior, se hacen uso de representaciones simbólicas de la división de fracciones así como de señales ostensivas de los algoritmos, como por ejemplo el producto cruzado, y la representación de la división en la recta numérica. Empero, no se ha identificado en esos textos otras representaciones pictóricas como los que se han desarrollado en la sección 2.2.2.4.

Considerando el texto de Peña (2016), allí se especifica el uso de dos algoritmos para dividir fracciones, a saber 'invertir y multiplicar' y 'producto cruzado'. Por otra parte, en el texto de Carrasco y Martínez (2014), se exponen el uso de esos y otros algoritmos que se describieron en la dimensión Habilidad–Algoritmo del presente capítulo; como por ejemplo, el caso particular de la división de fracciones con igual denominador. Además, se resalta que en los tres libros se dedica una lección completa a la división de números decimales, y ello es importante puesto que la división de decimales es considerada en esta investigación como un algoritmo para la división de fracciones.

Por último en solo un libro de texto, el de Carrasco y Martínez (2014), se proponen actividades que se corresponden con características de la dimensión P–P, es decir actividades en las que se propone a los estudiantes pensar en propiedades de las fracciones y sus operaciones que facilitan hacer cálculos.

En síntesis, se puede decir que aquellos profesores que tomen como base para estructurar secuencias de enseñanza sobre la división de fracciones el libro de texto de Carrasco y Martínez (2014), probablemente logren que sus estudiantes adquieran una mayor comprensión del concepto división de fracciones permitiéndoles esto tener mejor estructurado su objeto mental, es decir, ser usuarios ideales de un sistema matemático de signos que les permitirá tener un buen desempeño en las matemáticas posteriores.

2.4. LA CONSTRUCCIÓN DEL COMPONENTE DE LOS MODELOS DE PROCESOS COGNITIVOS Y MODELOS DE COMUNICACIÓN

Para formar el componente de los Modelos de los Procesos Cognitivos y de Comunicación relacionados con la problemática descrita en el Capítulo 1, se hizo una revisión de investigaciones empíricas acerca de la división de fracciones llevadas a cabo con niños y jóvenes y también con profesores en formación. Se retomaron de cada investigación analizada las estrategias, correctas e incorrectas, estructuradas por esos sujetos al momento de hacer tareas de división de fracciones, que permitieron dar cuenta de los procedimientos y técnicas que se pueden usar para resolver diferentes tareas de división de fracciones así como las dificultades comunes al resolver estas tareas.

2.4.1. APORTES DE LA INVESTIGACIÓN DE ALENAZI

En 2015, Alenazi publicó los resultados que obtuvo tras investigar con profesores de secundaria en formación. Su investigación consistió en identificar las estrategias que usaron estos profesores en formación en la resolución de problemas en los que se usa la división de fracciones para determinar la interpretación que ellos hacen de esta operación. La investigadora organizó los problemas en simbólicos, que involucran solo números, y contextuales, que abarcan la interpretación como medida y la de la determinación de la tasa unitaria. La autora afirma que en la operación división de fracción, por lo general, se introducen dos interpretaciones tradicionales, a saber repartición y medición, y que en investigaciones recientes se han discutido tres interpretaciones no tradicionales: la determinación de la tasa unitaria, la inversa de la multiplicación y la inversa del producto cartesiano. En la investigación descrita en esta tesis, se ha denominado a estas interpretaciones como: proporción de valor unitario desconocido, inversión del factor multiplicativo e inversión de la multiplicación respectivamente.

A cada uno de los 11 profesores en formación que participaron en la investigación que hizo Alenazi (2015) se le aplicaron 6 problemas, 2 simbólicos y 4 contextuales. De estos últimos, 2 fueron de interpretación de medición y 2 de determinación de la tasa unitaria. De los problemas simbólicos, las estrategias de solución para dividir las fracciones dadas que identificó la investigadora fueron las de invertir y multiplicar (IM) y la estrategia de común denominador. También menciona Alenazi que los participantes intentaron dar sentido a lo que hicieron a través de una representación pictórica, pero ninguno de ellos lo pudo hacer con éxito, ya que principalmente representaron las fracciones a través del uso del modelo de área y no la división de fracciones. Respecto a los problemas contextuales, la investigadora señala que la mayoría de los participantes los pudieron resolver correctamente utilizando formas pictóricas para representar los problemas de medición y realizar la determinación de la tasa unitaria en las situaciones planteadas. Sin embargo, sostiene Alenazi que los participantes no reconocieron los problemas como de división de fracciones, a excepción de una, y que no estaban convencidos de que esta operación fuera relevante para los problemas que se les propuso.

Estos resultados revelan que aunque los participantes tienen conocimientos de los procedimientos para resolver los problemas simbólicos y comprenden cómo y porqué obtienen las respuestas correctas a los problemas contextuales; aun así ninguno de los participantes logró dar una interpretación a los problemas simbólicos, ni aceptaron que los problemas contextuales implicaban la operación división de fracciones.

2.4.2. APORTES DE LA INVESTIGACIÓN DE YIM

Yim (2010) hizo una investigación con niños de entre 10 y 11 años de edad que consistió en analizar las estrategias que usaban para hacer tareas de división de fracciones.

Estos niños fueron identificados como capaces y con actitudes positivas hacia las matemáticas. La tarea dada por el investigador fue la de encontrar el largo de un rectángulo cuyo ancho y área eran dados. En primer lugar, Yim categorizó las estrategias inventadas por 8 de un grupo de 10 estudiantes para resolver la división de fracciones, y en segundo lugar investigó sobre la formulación de algoritmos numéricos a partir de las estrategias construidas por otro grupo constituido por 9 estudiantes. Debido a que en la segunda parte de la investigación no pudieron participar los mismos estudiantes, el primer grupo formado por 10 niños, Yim realizó el estudio con otro grupo de estudiantes (9 niños) con las mismas características del primer grupo.

En la primera indagación, como se dijo, participaron 10 estudiantes de quinto grado y la tarea que les asignó el investigador fue averiguar cuánto mide el largo de un rectángulo que tiene un área de 2/7 m^2 y un ancho de 3/4 m , o bien, encontrar el largo de un rectángulo con área de 3/7 m^2 y un ancho de 4/5 m. Solo una de las tareas se aplicó a cada participante, quienes lo relacionaron con la tarea de división 2/7÷3/4 ó 3/7÷4/5.

Yim (2010) afirma que los estudiantes en esta primera investigación pusieron de manifiesto tres estrategias, las cuales se describen en las siguientes secciones.

2.4.2.1. HACER QUE EL ANCHO SEA IGUAL A 1

El investigador distingue dos maneras de hacer el ancho igual a 1:

a) *Reducir y luego expandir*. En la primera tarea muestra cómo los estudiantes dividen el área del rectángulo cuyo ancho es 3/4 en 3 partes, de manera que cada porción de área determinada es 2/7÷ 3 y cada parte del ancho es $1/4$. Posteriormente repiten 4 veces el rectángulo cuyo ancho es 1/4 de manera que el ancho del nuevo rectángulo pasa a tener el valor de 1 y el área tiene el valor de (2/7÷ 3) x 4; siendo este resultado el valor del largo del rectángulo original (ver Figura 2.16).

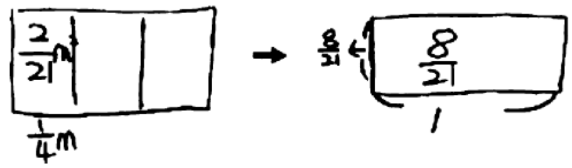


Figura 2.16. Estrategia 1_ a) en Yim (2010, pág.: 110)

b) *Ampliar y reducir*. En la segunda tarea, los estudiantes reproducen el rectángulo 4 veces más de manera que el valor del ancho se convierte en un número natural (4/5 x 5 = 4) y por tanto se obtiene un nuevo rectángulo con un área de 3/7 x 5. Posteriormente dividen el ancho del nuevo rectángulo de manera que el valor de su área se convierta en 1 y el área también queda dividida en la misma razón, por lo que se obtiene un área de (3/7 x 5) ÷ 4, cuyo resultado es el largo del rectángulo original (ver Figura 2.17).

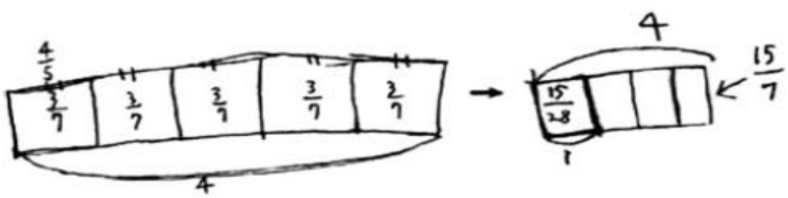


Figura 2.17. Estrategia1_ b) en Yim (2010, pág.: 110)

2.4.2.2. HACER QUE EL ÁREA SEA IGUAL A 1

También para este caso, el investigador encontró dos formas ideadas por los estudiantes para transformar el valor del área en 1; a continuación se detallan esos procedimientos.

a) *Cambiar el ancho para hacer un rectángulo de área 1.* Para la primera tarea, 2/7÷3/4, los estudiantes unen un rectángulo de 5/7 de área al rectángulo original de manera que el valor del área del nuevo rectángulo es 1. Como las longitudes de los lados de los tres rectángulos son proporcionales, la proporción de sus áreas es igual a la de sus anchos; esto significa que la proporción del área del rectángulo adjunto al original es 5/2 y por lo tanto, el ancho del rectángulo adjunto es 3/4 x 5/2 = 15/8. De esta manera, el ancho del rectángulo con área 1 es 3/4 + 15/8 = 21/8 por lo que el largo es el recíproco del ancho, es decir 8/21 (ver Figura 2.18).

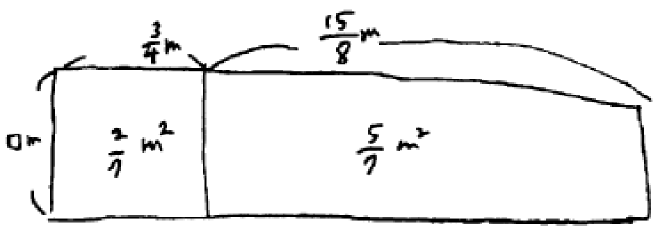


Figura 2.18. Estrategia 2_a) en Yim (2010, pág. 111)

Yim (2010) identifica otra estrategia usada por otro estudiante: el autor dice que este estudiante repite el rectángulo original tantas veces que el área total sea igual al numerador del dividendo, es decir que el nuevo rectángulo tiene un área de $3/7x\ 7 = 3$ y un ancho de $4/5x\ 7 = 28/5$. Posteriormente el estudiante divide este nuevo rectángulo en 3 partes iguales de manera que se determinan tres nuevos rectángulos de área 1 y ancho $(4/5x\ 7) \div 3 = 28/15$ por lo que el largo será15/28.

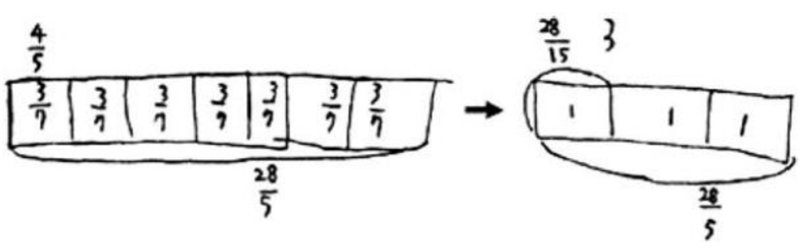


Figura 2.19. Estrategia 2_a) en Yim (2010, pág. 111)

b) *Cambiar la longitud para hacer el área 1*. El investigador destaca que un estudiante amplió el rectángulo original verticalmente y aplicó la relación proporcional entre área y longitud. El autor hace referencia a que, como el rectángulo de área 1 se crea por una ampliación vertical, el largo se convierte en el recíproco del ancho (4/3). Posteriormente, usando la relación de proporcionalidad entre los lados y el área, el largo del rectángulo original es 2/7 del largo del rectángulo ampliado, y por tanto el largo del rectángulo original es 4/3 x 2/7 = 8/21 (ver Figura 2.20).

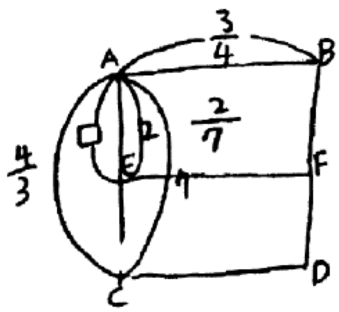


Figura 2.20. Estrategia 2_ b) en Yim (2010, pág. 112)

2.4.2.3. CAMBIAR ÁREA Y ANCHO A NÚMEROS NATURALES

En esta última estrategia identificada por Yim (2010), los estudiantes expanden el rectángulo, de área 2/7 y ancho 3/4, siete veces de manera horizontal de modo que el área es 2/7 x $7 = 2$, sin embargo el ancho sigue siendo una fracción (3/4 x $7 =$ 21/4) por lo que el nuevo rectángulo lo expanden 4 veces horizontalmente y por tanto el ancho es 21/4 x $4 = 21$. De esta manera el área del nuevo rectángulo grande es 2 x 4 = 8. Como el rectángulo grande lo dividen en 8 rectángulos finos cuyas áreas son 1 y el ancho es 21 por lo que su largo es 1/21, de allí que el largo del rectángulo grande que es igual al original, osea 8/21.

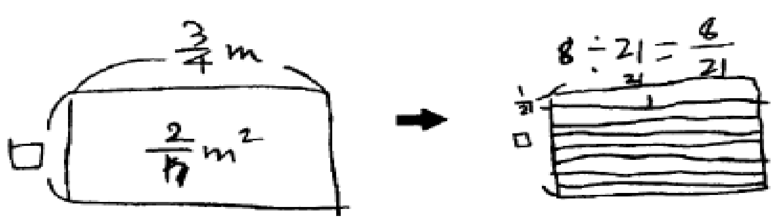


Figura 2.21. Estrategia 3 en Yim (2010, pág. 112)

En la segunda parte de la investigación, en la cual el autor se centra en extraer un algoritmo numérico general para la división de fracciones, él identificó tres algoritmos que idearon 6 de los 9 estudiantes y que son capaces de justificarlos a partir de sus propios procedimientos pictóricos, esto es, le dan sentido a las operaciones que hacen.

Considerando a/b÷c/d la división de fracciones que se debe efectuar, los algoritmos que identificó el investigador que hicieron los estudiantes fueron:

1) $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \div c \times d$
2) $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times d \div c$
3) $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}$.

Estas expresiones que permiten realizar la división de fracciones, son verdaderas y se pueden demostrar usando propiedades de las fracciones, de la multiplicación y de la división (para una prueba del segundo algoritmo, ver la sección 2.2.2.2), conduciendo esto a una mayor comprensión de la división de fracciones.

A modo de conclusión, Yim (2010) sostiene que su estudio muestra la posibilidad de que los estudiantes puedan construir estrategias para dividir fracciones y además formular algoritmos numéricos para esa operación.

2.4.3. APORTES DE LA INVESTIGACIÓN DE IŞIKSAL Y ÇAKIROĞLU

En 2008, Işiksal y Çakiroğlu publicaron los resultados de su investigación hecha con futuros profesores de matemáticas sobre los conocimientos de estos acerca de las ideas erróneas y dificultades que podrían tener los estudiantes de primaria al efectuar tareas de división de fracciones, así como las posibles fuentes de esas dificultades y qué estrategias ellos sugerirían para superarlas. Estos autores usaron un diseño de estudio de casos de tipo cualitativo en el cual participaron 17 profesores en formación. A los participantes les hicieron una pregunta escrita relacionada con la división de fracciones y se empleó un protocolo de entrevista semiestructurada para comprender más a fondo el conocimiento de los profesores sobre las concepciones y dificultades que ellos creen que pudieran tener estudiantes de primaria. Los resultados, los agruparon en las categorías que se describen en las siguientes secciones.

2.4.3.1. ERRORES BASADOS EN ALGORITMOS

Los investigadores señalan que los futuros profesores creen que la memorización de los algoritmos y el conocimiento inadecuado de las cuatro operaciones básicas pueden ser las principales fuentes de errores (Işiksal y Çakiroğlu, 2008). Ellos consideran que los estudiantes pueden resolver un determinado problema a través de la multiplicación, sustracción o adición en lugar de la división. Por ejemplo, para los problemas

1) "Cuatro amigos compraron $\frac{1}{4}$ kg de dulces y compartieron por igual, ¿Cuántos dulces le tocó a cada uno?"

2) "Cuatro kg de queso se envasaron en paquetes de $\frac{1}{4}$ kg cada uno, ¿Cuántos paquetes fueron necesarios para empacar todo el queso?" (pág. 183),

los profesores manifestaron que en lugar de $1/4 \div 4$ los estudiantes podrían hacer $4 \div 1/4$, $1/4\ x\ 4$, $4 \div 4$ o $4 - 1/4$ debido al conocimiento inadecuado. Además creen que los estudiantes pueden invertir el dividendo en lugar del divisor, invertir ambos o simplificar numerador y denominador mientras se hace la división.

2.4.3.2. ERRORES BASADOS EN LA INTUICIÓN

Işiksal y Çakiroğlu (2008) resaltan en su investigación que los profesores en formación destacan que las concepciones de los estudiantes de primaria sobre los modelos primitivos son la principal fuente de errores. Algunos ejemplos de estos modelos primitivos, es que en un problema de división los estudiantes creen que el cociente debe ser un número entero, el divisor debe ser entero, el dividendo debe ser mayor que el divisor o que la división siempre 'achica'.

2.4.3.3. ERRORES BASADOS EN EL CONOCIMIENTO FORMAL

Los profesores en formación pusieron énfasis en que los profesores en ejercicio juegan un papel fundamental, ya que si éstos no tienen suficiente competencias en el área temática, pueden ser la principal fuente de las dificultades o errores que tengan sus estudiantes. En este sentido, como se expuso en el Capítulo 1, Castro-Rodríguez, Pitta-Pantazi, Rico, y Gómez (2016) aseguran que si la comprensión de los profesores es limitada, esto afecta al aprendizaje de sus estudiantes; de allí la importancia de que los profesores tenga un amplio conocimiento sobre el tema que van a enseñar.

2.4.3.4. PROBLEMAS QUE NO SE ENTIENDEN

Según los investigadores, algunos participantes declararon que los estudiantes pueden cometer errores debido a que no entendieron el problema dado y que esto puede ser por la falta de atención, la falta de conocimiento matemático y la falta de creencia en sus propias capacidades para hacer frente a la situación planteada.

Entre las estrategias sugeridas por los futuros profesores para que los estudiantes puedan superar las ideas erróneas y/o las dificultades en las tareas de división de fracciones se encuentran las siguientes:

- Estrategia basada en metodología de enseñanza;
- Estrategia basada en el conocimiento formal sobre fracciones, y
- Estrategia basada en construcciones psicológicas

(Işiksal & Çakiroğlu, 2008, págs. 179 y 180).

A modo de conclusión, estos investigadores sugieren que se deben realizar más estudios de investigación para explorar el conocimiento, tanto de la materia como pedagógico, que tienen los profesores y cómo estas estructuras del conocimiento afectan el aprendizaje de los estudiantes.

En el análisis de estas investigaciones, se pudo determinar que cada una de ellas reúne características de las dimensiones de la comprensión de la división de fracciones. Tal es así que en relación con la dimensión U–A, en dos de las investigaciones se destaca el planteo de situaciones que se resuelven con dicha operación retomando diferentes significados de la misma como la división cuotitiva, inversión de la multiplicación entre otros.

A partir de esta construcción del MTLi se formularon las hipótesis incluidas en el Capítulo 1 de esta tesis. Así mismo, este MTLi constituye un marco de referencia que permitió estructurar la etapa experimental de la investigación para contrastar esas hipótesis con los resultados a obtener en el experimento. En el siguiente capítulo se describe dicha etapa experimental.

3. Descripción de la segunda etapa del MTL: Etapa Experimental

La etapa experimental del MTL de la división de fracciones y su comprensión se describe en este capítulo. También se especifican las características de la población con la cual se llevó a cabo la investigación y se detalla la metodología de recolección y análisis de datos. Así mismo, se exponen los resultados obtenidos de estos análisis y las primeras conclusiones que se derivan de los escrutinios de las actuaciones de los participantes.

3.1. Metodología de la construcción de la etapa experimental

Para el desarrollo de la etapa experimental del MTL que se construyó, primero se determinó la población con la cual se llevó a cabo la investigación que se describe en esta tesis. Una vez definidas las características generales de los participantes, se pensó en cómo hacer la recolección de datos y el, o los instrumentos a utilizar. En este sentido, se determinó que un cuestionario de lápiz y papel era el instrumento adecuado para obtener datos por parte de los participantes. Se procedió a su elaboración a partir del marco teórico de referencia expuesto en el Capítulo 2, apartado 2.2.

Posterior a la elaboración de una primera versión del cuestionario, se llevaron a cabo dos procesos de validación por medio de los cuales se hicieron modificaciones hasta obtener una versión final que fue aplicada a los participantes de la investigación.

Una vez obtenidos los datos, se hizo un primer análisis general y luego uno detallado de las respuestas a las tareas del cuestionario proporcionadas por cada uno de los estudiantes. Como parte del proceso de análisis, se elaboraron categorías para caracterizar las respuestas de los participantes, y posteriormente se seleccionaron cuatro estudiantes para hacer un estudio de casos mediante entrevistas semiestructuradas.

Las preguntas de las entrevistas se elaboraron a partir de las actuaciones de los estudiantes en las tareas del cuestionario. El objetivo del estudio de casos fue obtener información más precisa, por parte de los estudiantes, respecto a los procedimientos y estrategias empleados para resolver las tareas de división de fracciones propuestas. Asimismo, interesaba identificar las dificultades que tuvieron, y caracterizar su comprensión en relación con aspectos como nociones, significados y propiedades de la división de fracciones, lo cual era difícil de observar en las respuestas escritas a las preguntas del cuestionario.

Hecho el análisis de las respuestas de los estudiantes a las preguntas del cuestionario, así como de las actuaciones de los elegidos para el estudio de casos en las entrevistas, los resultados se contrastaron con las hipótesis formuladas en el Capítulo 1 de esta tesis (ver Capítulo 4).

3.2. UN ESTUDIO CON PROFESORES EN FORMACIÓN

Como población para el estudio, se seleccionó a un grupo de estudiantes matriculados en la carrera Licenciatura en Educación Secundaria Especialidad Matemáticas que se dicta en la Escuela Normal Superior de México (ENSM), con sede en la Ciudad de México. La recolección de datos se hizo en el primer semestre del año 2017.

Para la selección del grupo se juzgó oportuno que los estudiantes hubieran cursado la asignatura 'Los números y sus relaciones', que se imparte en el tercer semestre de la mencionada carrera, debido a que en esta materia los futuros profesores vuelven a estudiar contenidos de fracciones (ver Capítulo 2, subapartado 2.3.2). Considerando esto y con el apoyo de uno de los profesores de la carrera de la ENSM, se llevó a cabo la recolección de datos con su grupo de estudiantes, quienes al momento de hacer el estudio estaban cursando el cuarto semestre de la licenciatura citada anteriormente. Fueron 14 los estudiantes que estaban presentes en el salón de clases cuando se aplicó el cuestionario.

¿Por qué se eligió la población descrita? Es decir, ¿por qué investigar con profesores en formación?

Para lograr que los estudiantes construyan sólidas bases en matemáticas durante su paso por la escuela, es necesario que los profesores tengan un conocimiento especializado y profesional sobre la materia. Es decir, brindar una instrucción de calidad en general, y particularmente en matemáticas, requiere de una comprensión amplia de la disciplina por parte de los profesores y este aspecto en relación con las matemáticas, va más allá de simplemente aplicar reglas memorizadas (Capítulo 2, subapartado 2.4.3).

En este sentido, a partir de las contribuciones de Shulman (1986) acerca del papel de los contenidos en la enseñanza y la comprensión de los mismos como un conocimiento esencial, Ball, Thames y Phelps (2008) señalan la importancia de que el profesor conozca la materia que va a enseñar, es decir: conozca qué cosas se pueden justificar y cuáles no, qué es central y qué es periférico, cómo se genera y estructura el conocimiento en la disciplina, entre otros; y por ello han elaborado un modelo para estructurar el conocimiento matemático para la enseñanza. Este modelo lo construyeron a partir de un enfoque práctico centrándose en cuáles son esos conocimientos que los profesores necesitan para realizar la tarea de enseñar matemáticas.

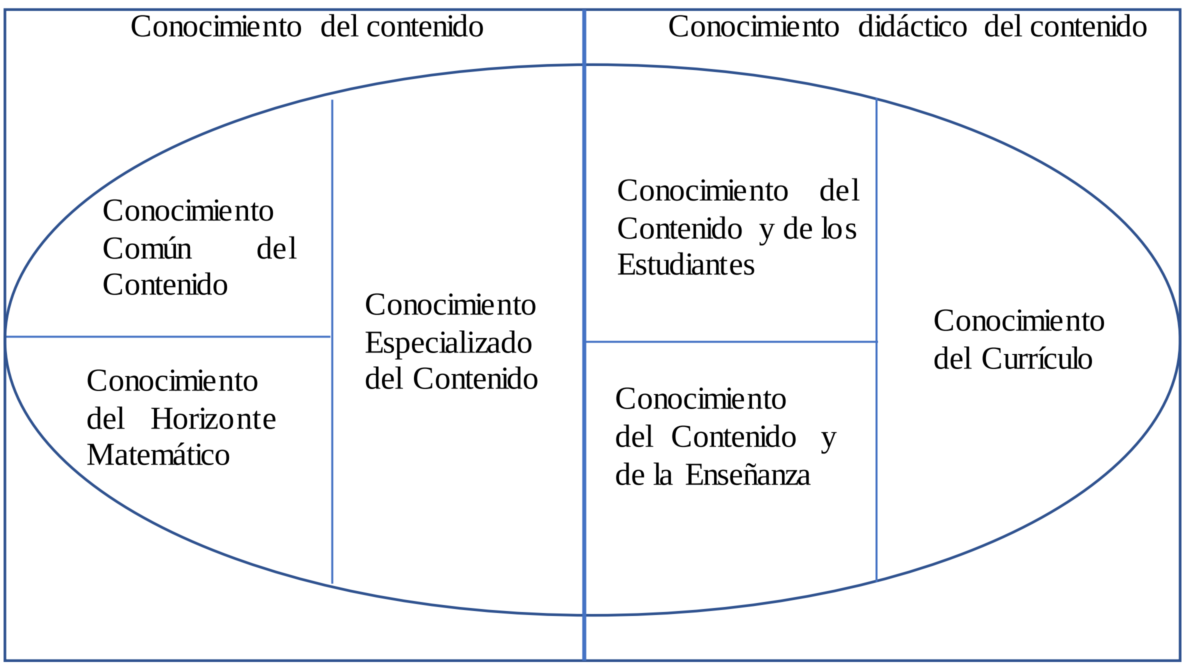


Figura 3.1. Dominio del conocimiento para la enseñanza de las matemáticas tomado de Ball (2008, pág. 403).

En el esquema se muestra que el modelo del conocimiento para la enseñanza de las matemáticas, propuesto por Ball, Thames y Phelps (2008), se divide en dos grandes dominios: Conocimiento del Contenido y Conocimiento Didáctico del Contenido.

Dado que en la investigación descrita en esta tesis, el objeto de estudio es la comprensión que tienen futuros profesores acerca de la división de fracciones, se centró la atención en el Conocimiento del Contenido y por ello, a continuación, se hace una breve descripción de este dominio.

Ball, Thames y Phelps (2008) denominan al Conocimiento del Contenido como el "conocimiento matemático 'implicado por la enseñanza', es decir el conocimiento matemático necesario para realizar las tareas recurrentes de enseñanza de las matemáticas a los estudiantes" (pág. 399). Por el Conocimiento Común del Contenido se refieren al conocimiento y la destreza matemática utilizado por los que tienen ciertas bases matemáticas, en otras palabras, se trata de un tipo de conocimiento usado en una amplia variedad de entornos y no exclusivo de la enseñanza. El Conocimiento del Horizonte Matemático se refiere a las relaciones que existen entre los diferentes contenidos matemáticos y la manera en que los conocimientos sobre un contenido se incrementan en los diferentes niveles de educación. Finalmente, el Conocimiento del Contenido Especializado es el conocimiento matemático que por lo general no se necesita más que para enseñar, es decir, es el tipo de conocimiento matemático que no es necesario en entornos distintos de la enseñanza. Los autores llegan a la conclusión que:

> Los maestros deben conocer el tema que enseñan. De hecho, no puede haber nada más fundamental para la competencia del maestro. La razón es simple: los maestros que no conocen bien un tema, probablemente no tendrán los conocimientos que necesitan para ayudar a los estudiantes a aprender este contenido (pág. 404).

Resumiendo, el conocimiento acerca de la división de fracciones por parte de los profesores es importante porque de esta manera podrán estructuras secuencias de enseñanza con actividades que ayuden a sus estudiantes a construir un mejor objeto mental de ese concepto, de allí que se haya seleccionado a esta población para hace este estudio.

En el próximo apartado se expone en detalle cómo se llevó a cabo la recolección de datos, tomando en cuenta los objetivos propuestos para la investigación.

3.3. RECOLECCIÓN DE DATOS

Para cumplir con los objetivos planteados en el Capítulo 1 de esta tesis, cómo se indicó en la metodología, se usaron dos formas de recolectar los datos: un cuestionario de lápiz y papel y una entrevista personalizada.

Las tareas propuestas en el cuestionario permitieron evaluar aspectos relacionados con las dimensiones de la comprensión del concepto división de fracciones, mostrando las fortalezas y/o debilidades que tienen los profesores en formación acerca de la comprensión de dicho concepto. Así mismo, el uso del cuestionario facilitó la tarea de obtener datos sobre las actuaciones de los 14 estudiantes participantes. Por otra parte, y como se ha mencionado, las entrevistas a 4 de los alumnos ha brindado información más precisa respecto a las formas en que ellos encararon cada tarea del cuestionario, cómo las resolvieron y las dificultades que enfrentaron.

3.3.1. DISEÑO DEL CUESTIONARIO

Tomando como base el componente Formal del MTLi construido para la investigación (ver Capítulo 2, apartado 2.2) se diseñó el cuestionario de lápiz y papel. Desde la perspectiva de cuatro de las cinco dimensiones se elaboraron los reactivos para valorar la comprensión de la división de fracciones de los estudiantes para profesor.

Considerando los aspectos que caracterizan a la dimensión Uso–Aplicación (U–A), se enunciaron problemas siguiendo la fenomenología de la división de fracciones, es decir, se propusieron una variedad de situaciones que se resuelven usando esta operación, en los cuales subyacen diferentes significados de la misma. En este sentido, con esta tarea se buscó determinar la capacidad de los futuros profesores para resolver esa variedad de problemas usando la división de fracciones.

A partir de las características inherentes de la dimensión Habilidad–Algoritmo (H–A) se consideraron diferentes casos de cálculos para la división de fracciones. Esto significa que en el cuestionario, se propusieron reactivos que permitieron identificar algoritmos, técnicas o procedimientos utilizados por los profesores en formación para efectuar la operación.

Tomando en cuenta que la demostración formal no es parte del currículo de la educación básica en México, se consideró que si los estudiantes eran capaces de usar propiedades de las fracciones y sus operaciones para estructurar justificaciones de oraciones numéricas, aun cuando no sean 'formales' en el sentido de una prueba matemática, estos alumnos exhibirían una mejor comprensión de la división de fracciones desde la perspectiva de la dimensión Propiedad–Prueba (P–P). En este sentido, en el cuestionario se propuso una cadena de igualdades en la cual la tarea de los estudiantes consistía en justificar la validez de cada igualdad propuesta.

Finalmente, para hacer una valoración de la comprensión desde el punto de vista de la dimensión Representación–Metáfora se les pidió a los estudiantes hacer una representación pictórica de tres de las divisiones de fracciones propuestas en la actividad de indagar acerca

Para resolver las tareas dadas en el cuestionario no se permitió el uso de calculadoras u otros dispositivos electrónicos de cálculo, ya que el principal objetivo era caracterizar los algoritmos y estrategias usados por los estudiantes para resolver cada una de las tareas dadas.

Para cada una de las preguntas haz todos los cálculos si hacer uso de la calculadora y detalla lo más posible el o los procedimientos que usaste para responder.

1_ Haz las siguientes divisiones con fracciones y explica cómo lo hiciste en cada caso.

a) $\frac{8}{9} \div \frac{7}{8} =$ b) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} =$ c) $\frac{25}{16} \div \frac{5}{4} =$

d) $1 \div \frac{1}{2} =$ e) $\frac{1}{2} \div 2 =$ f) $\frac{3}{2} \div 1 =$

2_ Representa gráficamente las fracciones implicadas y el resultado de la operación de los incisos b), d) y e) del punto anterior.

3_ Formula como mínimo 4 problemas que se resuelvan mediante la división de fracciones y resuélvelos.

4_ Resuelve los siguientes problemas explicando detalladamente cómo lo hiciste.

- Se tienen $35\frac{1}{2}$ lts de una determinada sustancia líquida para distribuir igual cantidad entre 71 botellas de ¾ lts. ¿Cuánto de la sustancia líquida llevará cada botella?
- Se debe repartir 12/5 de terreno rectangular entre 2 personas. ¿Qué parte del terreno le corresponde a cada una?
- Miguel tiene dos departamentos en renta. Uno de ellos tiene una superficie de 24/25 hm^2 y el otro departamento una superficie de 12/13 hm^2. ¿Cuántas veces contiene el primer departamento al segundo?
- Un automóvil viaja a velocidad constante de 80 km/h y ha recorrido 4/3 km de camino. ¿Qué tiempo ha viajado en este trayecto?

5_ Justifica las siguientes cadenas de igualdades

a) $2\frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \left(2 + \frac{1}{4}\right) \div \frac{1}{2} = 2 \div \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

b) $\frac{4}{3} \div \frac{6}{5} = \left(4 \cdot \frac{1}{3}\right) \div \left(6 \cdot \frac{1}{5}\right) = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \div \frac{1}{5} = \frac{10}{9}$

Tabla 3.1. Primera versión del cuestionario de lápiz y papel de la comprensión desde la perspectiva de la dimensión Habilidad–Algoritmo.

No se ha considerado en el diseño del cuestionario la dimensión Historia–Cultura, por ser una de las que, como lo plantea Usiskin (2015, págs. 834-835) no se encuentra normalmente en la matemática escolar.

La Tabla 3.1 contiene la primera versión del cuestionario elaborado, mismo que sufrió cambios luego de pasar por procesos de validación. El objetivo de hacer dichos procesos fue la de analizar y mejorar las situaciones propuestas, su redacción, coherencia y si las actividades eran acordes con los objetivos propuestos. En los siguientes subapartados se describe el proceso de refinamiento por el que pasó el cuestionario.

3.3.2. VALIDACIÓN INTERNA

Participar en el seminario de Aritmética y Pensamiento Numérico, llevado a cabo en el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (México), permitió que el grupo de pares del investigador que desarrolló este proyecto ponga en evaluación la primera versión del cuestionario de lápiz y papel (ver Tabla 3.1). Este grupo de investigadores en formación resolvieron las tareas propuestas en dicho cuestionario, lo cual posibilitó analizar las posibles respuestas que podrían dar los estudiantes participantes de la investigación. Luego de que los integrantes del seminario resolvieran el cuestionario, hicieron sugerencias respecto a las actividades propuestas, la redacción y orden de presentación de las mismas.

Este trabajo con el grupo de investigación ha llevado a analizar factores como el tiempo de resolución de todas las tareas del cuestionario, orden de presentación de las actividades, redacción de las consignas y actividades según los objetivos propuestos para la investigación descrita en este documento. Tras analizar todos estos factores se hicieron modificaciones que condujeron a la elaboración de diferentes versiones del cuestionario. En el subapartado 3.3.4 se encuentra la versión final de este instrumento de recolección de datos que se aplicó a los participantes de la investigación.

3.3.3. VALIDACIÓN EXTERNA

La validación externa consistió en que un grupo de estudiantes futuros profesores de matemáticas de segundo semestre de la carrera Licenciatura en Educación Secundaria Especialidad Matemáticas de la ENSM resolvieran el cuestionario. Fueron 10 los alumnos que participaron en este proceso, cuyas respuestas sirvieron para determinar si era necesario hacer nuevas modificaciones al cuestionario. Con base en el tiempo estimado de resolución de las tareas y las respuestas dadas por parte de estos estudiantes, se determinó que el cuestionario dado sería la versión final del instrumento de recolección de datos.

3.3.4. DESCRIPCIÓN DEL DISEÑO FINAL

En la Tabla 3.2 se presenta la versión final del cuestionario. La primera parte constó de 6 problemas, uno de los cuales era de control y los otros cinco eran situaciones que se podían resolver usando la división de fracciones en las que subyacían diferentes significados de esta operación. La segunda parte, consistió de tres actividades elaboradas desde las perspectivas de las dimensiones H–A, P–P y R–M, descritas en el apartado 3.3.1.

Entre las sugerencias dadas en los procesos de validación, se concluyó que se debía pedir a los estudiantes que primero resuelvan los problemas antes de hacer actividades que correspondían al cálculo de división de fracciones. Por tal razón, las situaciones planteadas constituyeron la primera parte del cuestionario.

Apellido/s y Nombre/s: _

Fecha: _ _ /_ _ /_ _ _ Hora de inicio: ______ Hora de fin: ______

Parte I

Lee detenidamente los siguientes problemas y resuélvelos sin hacer uso de dispositivos electrónicos de cálculo y detallando lo más posible el o los procedimientos que usaste para resolverlos.

1) Se distribuyen, en igual cantidad, $35\frac{1}{2}$ lts de aceite entre 71 botellas. ¿Qué cantidad de aceite contiene cada botella?

2) Un cajón donde se guardan toallas tiene $\frac{7}{8}$ m de largo. Al doblar y guardar las toallas, las mismas ocupan $\frac{1}{4}$ m de largo. Considerando el largo del cajón, ¿cuántas toallas caben?

3) ¿Qué tiempo ha viajado un automóvil que a velocidad constante de 80 km/h recorrió 160/3 km?

4) Un peatón camina 4km en 5hs. ¿Cuántos km caminará en 48 min?

5) Un campo rectangular tiene una superficie que mide $\frac{2}{3}u^2$. Sabiendo que su ancho mide $\frac{5}{7}u$, averigua cuánto mide el largo.

6) Un tonel tiene una cabida de 300 lts; un grifo que da 5 lts en 3 min y otro que da 7 lts en 5 min se abren al mismo tiempo para llenarla. ¿Cuántos minutos tardarán en llenarla? ¿Cuántos litros habrá dado cada grifo?

Parte II

Para cada una de las actividades propuestas haz todos los cálculos sin hacer uso de dispositivos electrónicos de cálculo y detalla lo más posible el o los procedimientos que usaste para responder.

1) Haz las siguientes divisiones con fracciones y explica cómo lo hiciste en cada caso.

a) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} =$ b) $\frac{25}{12} \div \frac{5}{4} =$ c) $1 \div \frac{1}{2} =$ d) $\frac{1}{2} \div 2 =$

e) $\frac{3}{2} \div 1 =$ f) $\frac{8}{9} \div \frac{7}{8} =$ g) $\frac{8}{9} \div \frac{8}{7} =$

2) Representa gráficamente las operaciones de los incisos a), c) y d) del punto anterior.

3) Dada la siguiente división con fracciones, justifica por qué es posible realizar el cálculo como se muestra a continuación:

$$\frac{4}{3} \div \frac{3}{2} = \frac{4}{3} \div \left(3 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{4}{3} \cdot 2\right) \div 3 = \frac{8}{9}$$

Tabla 3.2 Versión final del cuestionario de lápiz y papel

1) Se distribuyen, en igual cantidad, $35\frac{1}{2}$ lts de aceite entre 71 botellas. ¿Qué cantidad de aceite contiene cada botella?

$$35\,\frac{1}{2} \div 71 = \frac{71}{2} \div 71 = \frac{1}{2}$$

$\underline{Respuesta}$: Cada botella contiene $\frac{1}{2}$ lts de aceite.

2) Un cajón donde se guardan toallas tiene $\frac{7}{8}$ m de largo. Al doblar y guardar las toallas, las mismas ocupan $\frac{1}{4}$ m de largo. Considerando el largo del cajón, ¿cuántas toallas caben?

$$\frac{7}{8}\ m \ \div \frac{1}{4}\ m = \frac{7}{2} = 3.5$$

$\underline{Respuesta}$: Considerando el largo del cajón, caben 3 toallas.

3) ¿Qué tiempo ha viajado un automóvil que a velocidad constante de 80 km/h recorrió 160/3 km?

160/3 km ÷ 80 km/h $= \frac{2}{3}h$ = 40 minutos

$\underline{Respuesta}$: En el automóvil se ha viajado 40 minutos.

4) Un peatón camina 4km en 5hs. ¿Cuántos km caminará en 48 min?

Problema de control.

<u>Respuesta</u>*:* El peatón caminará $\frac{16}{25}km$ = 0.64 km

5) Un campo rectangular tiene una superficie que mide $\frac{2}{3}u^2$. Sabiendo que su ancho mide $\frac{5}{7}u$, averigua cuánto mide el largo.

$$\frac{2}{3}u^2 \ \div \ \frac{5}{7}u = \frac{14}{15}u$$

$\underline{Respuesta}$: El largo del campo rectangular mide 14/15 u.

6) Un tonel tiene una cabida de 300 lts; un grifo que da 5 lts en 3 min y otro que da 7 lts en 5 min se abren al mismo tiempo para llenarla. ¿Cuántos minutos tardarán en llenarla? ¿Cuántos litros habrá dado cada grifo?

$$\frac{5lts}{3min} + \frac{7lts}{5min} = \frac{46lts}{15min}$$

$$300\ lts \ \div \frac{46lts}{15min} = 97\frac{19}{23}min$$

$\underline{Respuesta\ \ 1}$: Los dos grifos tardarán $97\frac{19}{23}min$ en llenar el tonel.

$$\frac{5lts}{3min} \cdot 97\frac{19}{23}\mathrm{min} = \frac{5lts}{3min} \cdot \frac{2250}{23}\mathrm{min} = 163\frac{1}{23}\ lts$$

$$\frac{7lts}{5min} \cdot 97\frac{19}{23}\mathrm{min} = \frac{7lts}{5min} \cdot \frac{2250}{23}\mathrm{min} = 136\frac{22}{23}\ lts$$

$\underline{Respuesta\ \ 2}$: Uno de los grifos aportó $163\frac{1}{23}\,lts$ mientras que el otro grifo contribuyó con $136\frac{22}{23}\ lts$.

Tabla 3.3. Primera parte. Respuestas esperadas por lo estudiantes a la resolución de los problemas

3.3.5. RESPUESTAS ESPERADAS

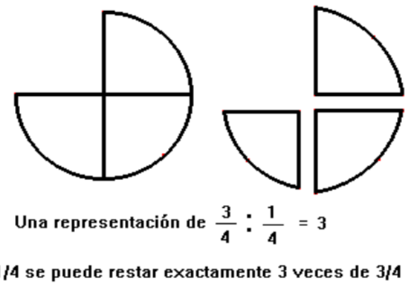
Las tres partes en que se divide la Tabla 3.3 muestran las respuestas que el autor de este documento esperaba por parte de los estudiantes participantes. En otras palabras, las respuestas esperadas se corresponden con el componente Formal del MTL construido para la investigación, puesto que brindan un acercamiento a las competencias de un usuario ideal de los sistemas matemáticos de signos (SMS) en términos del MTL.

Parte II - Actividad 1 Para cada una de las actividades propuestas haz todos los cálculos sin hacer uso de dispositivos electrónicos de cálculo y detalla lo más posible el o los procedimientos que usaste para responder. 1) Haz las siguientes divisiones con fracciones y explica cómo lo hiciste en cada caso. a) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} = 3 \div 1 = \frac{3}{1} = 3$ Como los denominadores son iguales, basta con dividir los numeradores. b) $\frac{25}{12} \div \frac{5}{4} = \frac{25 \div 5}{12 \div 4} = \frac{5}{3}$ División de numeradores y denominadores entre sí. c) $1 \div \frac{1}{2} = 2$ Para este caso, se espera que el estudiante tenga presente que al dividir la unidad entre una fracción, el resultado de dicha división será el inverso multiplicativo del divisor. Es este inciso, el inverso multiplicativo de 1/2 que es 2. d) $\frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{4}$ Esta división se propuso para determinar si el alumno usa el significado cuotitivo de la división, a pesar de no estar contextualizado, y resuelve a partir de pensar 'cuantas veces' cabe 2 en 1/2. e) $\frac{3}{2} \div 1 = \frac{3}{2}$ La idea con esta división es que el estudiante use la propiedad de la división por 1, es decir, que al dividir cualquier número distinto de cero entre 1, el resultado de la división es el mismo número que el dividendo. f) $\frac{8}{9} \div \frac{7}{8} = \frac{64}{63}$ Se propuso esta división para que el estudiante haga uso de cualquiera de los algoritmos generales que permiten dividir fracciones. g) $\frac{8}{9} \div \frac{8}{7} = 7 \div 9 = \frac{7}{9}$

Tabla 3.3. Segunda parte. Respuestas esperadas por lo estudiantes a las divisiones de fracciones

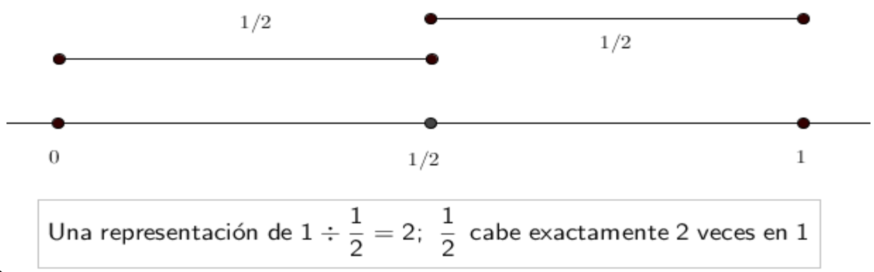
Parte II - Actividades 2 y 3

2) Representa gráficamente las operaciones de los incisos a), c) y d) del punto anterior[6].



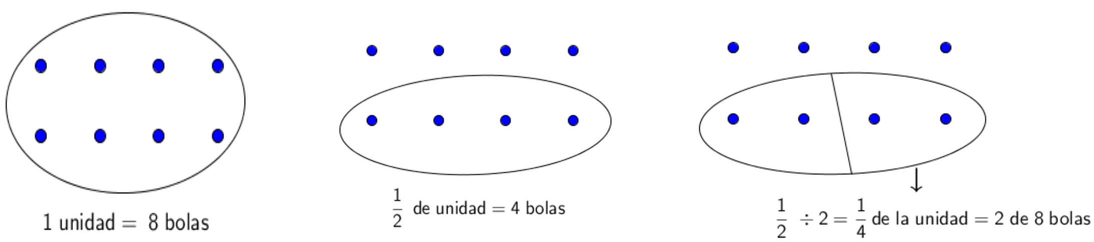
a)

Figura 3.2. Representación pictórica de 3/4 ÷ 1/4 Modelo del Pastel[7]



c)

Figura 3.3. Representación pictórica de 1 ÷ 1/2 Modelo de recta numérica



d)

Figura 3.4. Representación pictórica de 1/2 ÷ 2 Modelo discreto

3) Dada la siguiente división con fracciones, justifica por qué es posible realizar el cálculo como se muestra a continuación:

$$\frac{4}{3} \div \frac{3}{2} = \frac{4}{3} \div \left(3 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{4}{3} \cdot 2\right) \div 3 = \frac{8}{9}$$

Respuesta: El procedimiento por medio del cual se puede responder a esta tarea, se encuentra en la prueba que se encuentra en el Capítulo 2, sección 2.2.2.2.

Tabla 3.3. Tercera parte. Respuestas esperadas por lo estudiantes a las tareas 2 y 3 del cuestionario.

[6]Las representaciones pictóricas que se muestran aquí como respuesta esperada, constituyen posibles representaciones pictóricas que los estudiantes podrían hacer, esto significa pueden aparecer otras representaciones diferentes a las expuestas en esta actividad que respondan a lo pedido.

[7] Figura 3.2. fue tomada de Gómez, Figueras y Contreras (2016, Pág. 48).

3.4. ANÁLISIS DE DATOS UN PRIMER ACERCAMIENTO

En este apartado, se hace la descripción de un primer análisis de los datos obtenidos por medio de la aplicación del cuestionario que ha permitido establecer categorías de actuación y seleccionarlos para una posterior entrevista. Previo a esto, se describe la metodología usada para el análisis.

3.4.1. METODOLOGÍA DE ANÁLISIS

Por medio de un proceso de triangulación entre dos investigadores que participaron en el análisis de los datos se aunaron criterios que permitieron buscar aspectos en común entre las actuaciones de quienes respondieron a las tareas del cuestionario. Con la intención de caracterizar estas actuaciones de los 14 participantes, se elaboró una tabla para organizar los datos (ver Tabla 3.4) tomando como base las cuatro dimensiones de la comprensión de la división de fracciones que se consideraron en la elaboración del cuestionario.

En la fila denominada (U–A) se caracterizan las respuestas dadas por un estudiante a la resolución de los problemas del cuestionario; para ello se consideró:

- Que el estudiante haya resuelto los problemas que correspondían a división de fracciones, usando esta operación y se indica además en cuántos de los cinco problemas lo usó.
- Que el estudiante haya resuelto los problemas, ya sea todos o parte de ellos, haciendo uso de cualquier otra estrategia diferente a la división de fracciones.

En la investigación se consideró que las dimensiones se relacionan entre sí, por ello se estimó la posibilidad de que en las actuaciones de los estudiantes aparezcan características de la: Representación–Metáfora (R–M); Habilidad–Algoritmo (H–A); Propiedad–Prueba (P–P) en los cuales se hizo una descripción de las producciones de cada alumno. Respecto a las características de la dimensión Uso–Aplicación (U–A), se hizo una descripción de la actuación que tuvo cada uno con los problemas en general.

<table>
<tr><td rowspan="2">U – A</td><td>División de fracciones: x/5</td><td>R – M:
H – A:
P – P:
U – A:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Otra/s estrategia/s:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">H – A</td><td>Cálculo</td><td></td></tr>
<tr><td>Propiedades</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">P – P</td><td colspan="2">Numérico – Verbal:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Propiedades:</td></tr>
<tr><td>R – M</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="3">Caracterización de la actuación del Alumno A:
1.
2.
3.
4.</td></tr>
</table>

Tabla 3.4. Caracterización de las respuestas al cuestionario hecha para cada participante.

Si un estudiante resolvió los problemas, o parte de ellos, haciendo uso de estrategias diferentes a la división de fracciones, en la fila "Otra/s estrategia/s" se describe lo que ese estudiante haya hecho.

En la segunda fila de la tabla, nombrada H–A, se describió la manera en que un estudiante resolvió las tareas relacionadas con los aspectos de la dimensión Habilidad–Algoritmo, pero también lo que hizo en la resolución de problemas. En la fila "cálculo" se especifica el o los algoritmos, procedimientos o técnicas que usó ese estudiante para calcular divisiones. En “propiedades”, se describe si dicho estudiante usó propiedades de las fracciones y sus operaciones para hacer los cálculos de dicha operación.

En la fila P–P, se reseñó el tipo de justificación dado por un alumno a la oración numérica propuesta. Se distinguieron dos tipos de justificaciones: 1) la numérico–verbal, que se relaciona con que el estudiante haya justificado dicha oración numérica a través de igualdades numéricas y/o explicando de forma coloquial el por qué se cumple cada igualdad y, 2) que el estudiante haya usado propiedades de las fracciones y sus operaciones para responder a la tarea dada.

Finalmente, en la fila R–M, se detalla el tipo de representación hecho por cada estudiante como respuesta a la actividad relacionada con los aspectos de la dimensión Representación–Metáfora, además de las que aparecieron como respuestas a las tareas anteriores.

Con base en las descripciones de las actuaciones de cada estudiante hechas usando la Tabla 3.4 se caracterizaron al final esas actuaciones que sirvieron para elaborar las categorías que permiten agrupar actuaciones similares.

En las Figuras 3.5, 3.6, 3.7 y 3.8 se representan las categorías que permitieron agrupar las actuaciones de los estudiantes en las preguntas del cuestionario.

Como puede verse en la Figura 3.5, la categoría denominada D1, relacionada con los aspectos de la dimensión Uso–Aplicación, se dividió en dos subcategorías llamadas A y B. La subcategoría A está constituida por las actuaciones de los estudiantes que dieron cuenta de haber reconocido los problemas de división de fracciones y haber usado dicha operación para resolverlos, mientras que en la subcategoría B se ubican las actuaciones de aquellos alumnos que no reconocieron los problemas como tales. En la primera subcategoría se distinguieron tres clases, en las que se ubican: 1) las actuaciones de estudiantes que resolvieron los cinco problemas de división de fracciones, usando esta operación, 2) las actuaciones de alumnos que resolvieron tres o cuatro de los cinco problemas usando la división de fracciones, y 3) las actuaciones de los educandos que solo resolvieron uno o dos de los problemas de división de fracciones. De la subcategoría B, se desprende solo una clase, en la que se ubican las actuaciones de aquellos estudiantes que no proporcionan la evidencia necesaria para determinar cómo resolvieron los problemas.

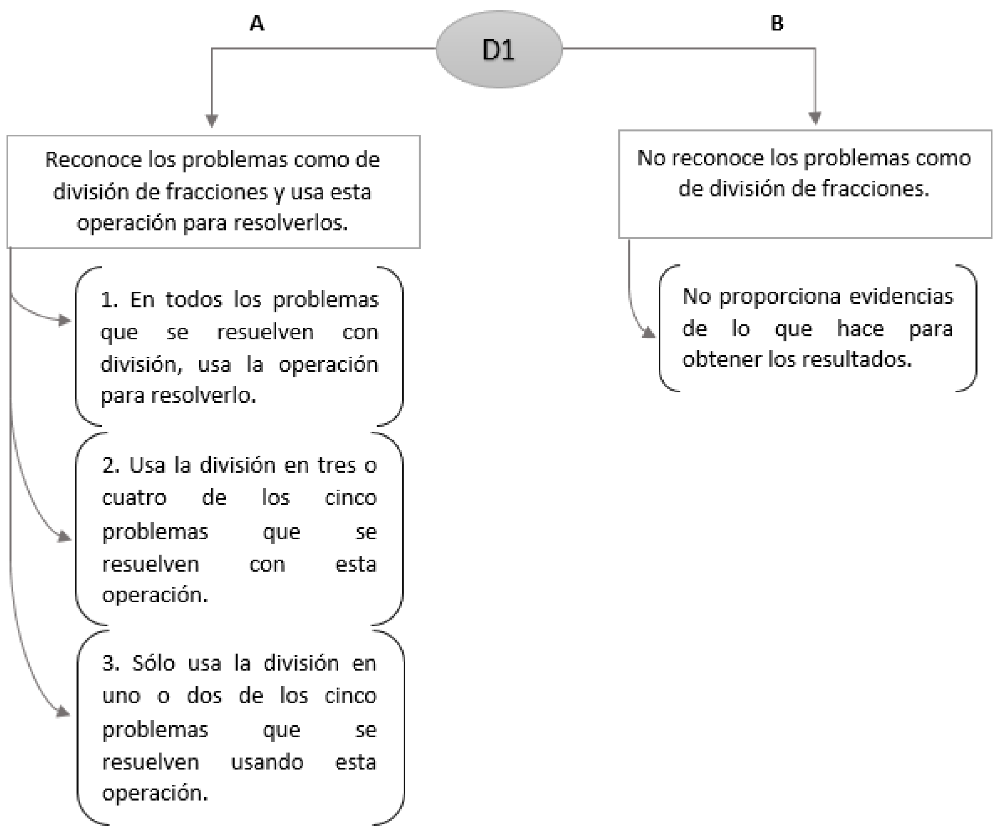


Figura 3.5. Categoría D1

La categoría D2 está formada por las subcategorías A, B y C (ver la Figura 3.6). En la subcategoría A se ubican las actuaciones de estudiantes que usaron distintos algoritmos para dividir fracciones, y se divide en tres clases: 1) las actuaciones de los estudiantes en las que se aprecia el uso de la 'ley del sandwich' y conversión a decimales, 2) las actuaciones de los alumnos en las que se pone de manifiesto el empleo del producto cruzado y la conversión a un número decimal, y 3) las actuaciones de los educando en las que se usaron los tres algoritmos mencionados en 1) y 2). La subcategoría B se compone de solo una clase, y corresponde a las actuaciones de estudiantes que hicieron uso de un solo algoritmo para dividir fracciones. Por último, en la subcategoría C se ubican las actuaciones de los estudiantes en las cuales no hay información necesaria para saber cómo obtuvieron los resultados de dividir.

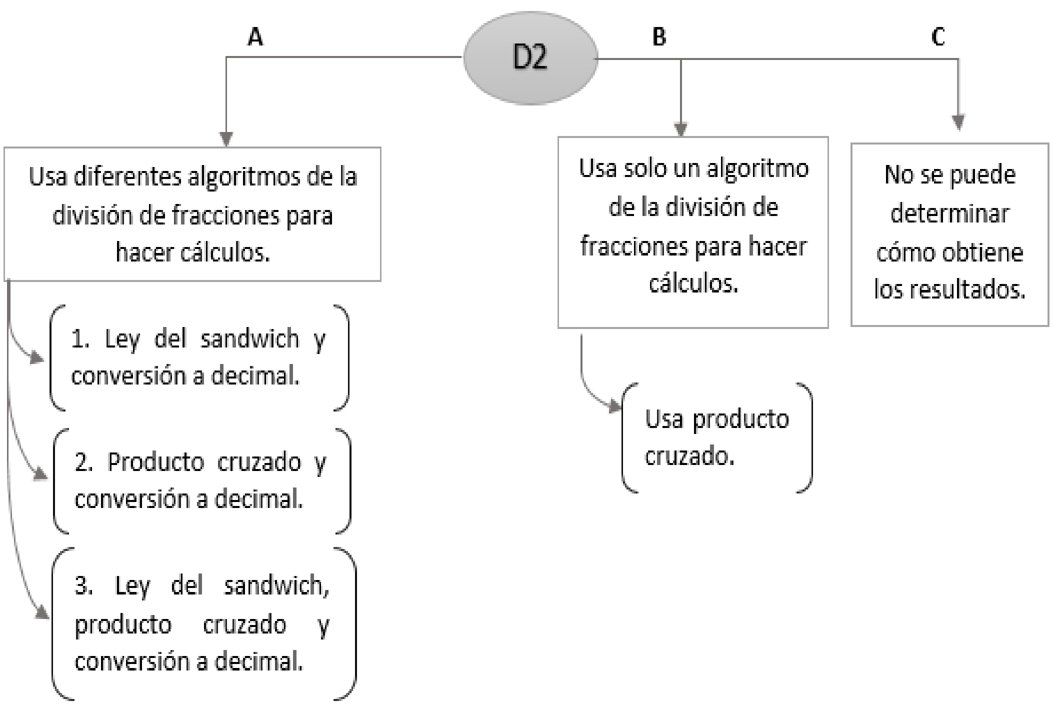


Figura 3.6. Categoría D2

En la Figura 3.7, aparece la estructura de la categoría D3 que se vincula con las características de la dimensión Propiedad–Prueba de la comprensión. Esta categoría está constituida por tres subcategorías. La primera, la subcategoría A, en la cual se ubican las actuaciones de esos alumnos que usaron las propiedades de las fracciones y sus operaciones para justificar las igualdades que aparecen una cadena de igualdades para hacer una división entre fracciones. En la subcategoría B, se colocan las actuaciones de los alumnos que usaron otras formas de justificación, de la que se desprenden dos clases: 1) las actuaciones en la que se pone de manifiesto una justificación numérica–verbal y, 2) las actuaciones en las cuales la justificación se centra en solo una parte de la igualdad, es decir los estudiantes argumentan la validez de solo una parte de la cadena de igualdades. En la subcategoría C, se ubican las respuestas dejadas en blanco.

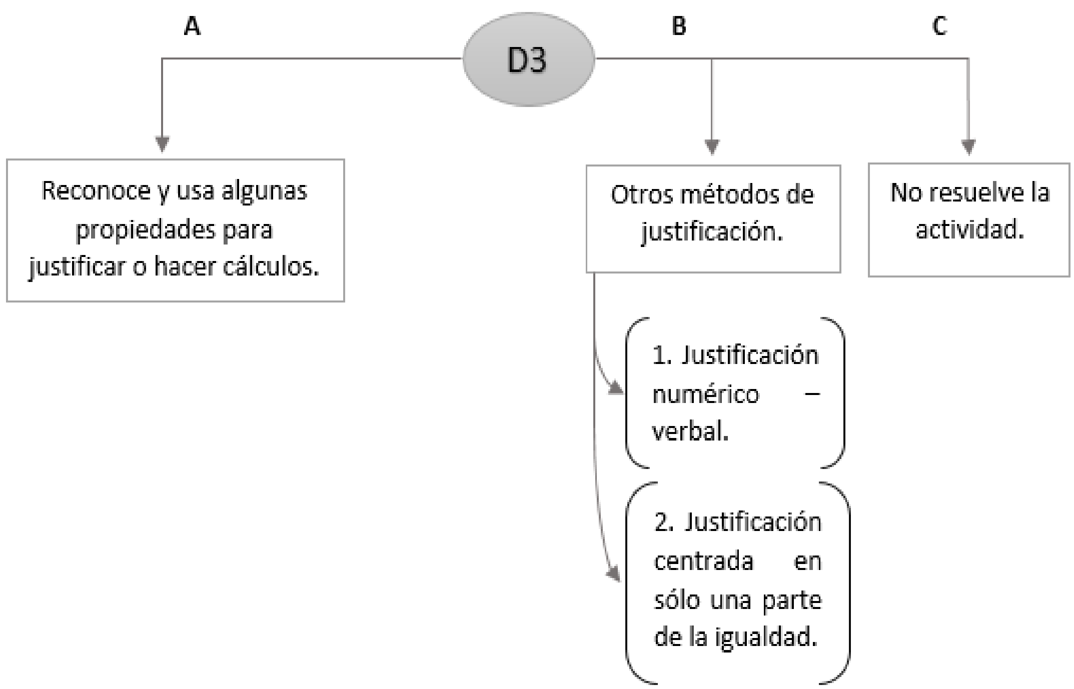


Figura 3.7. Categoría D3

Por último, para la categoría D4 se estructuraron las subcategorías A y B (ver Figura 3.8). La subcategoría A, está compuesta por las actuaciones de los alumnos que hicieron representaciones pictóricas en respuesta a las tareas relacionadas con los aspectos de la dimensión Representación–Metáfora. Tres tipos de representaciones se identificaron con las cuales se determinaron las siguientes clases: 1) las actuaciones en las que se representaron las fracciones –el dividendo y el divisor–, 2) las actuaciones en las que se representaron los resultados de las divisiones, y 3) las actuaciones en las que se representaron tanto las fracciones, como el resultado de las divisiones. Por otra parte, la subcategoría B está formada por las actuaciones de estudiantes que no respondieron a la actividad.

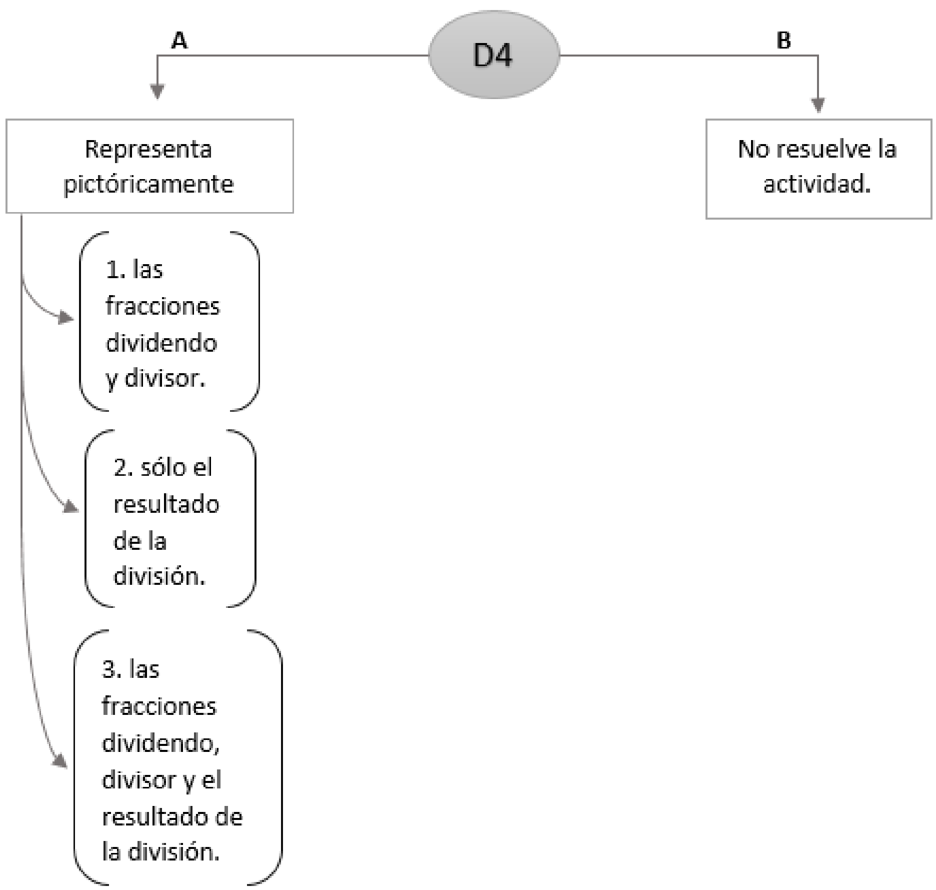


Figura 3.8. Categoría D4

Con base en las categorías, subcategorías y clases descritas anteriormente, se construyó la Tabla 3.5 en la que se agruparon las actuaciones similares de los estudiantes al momento de responder las tareas relacionadas con cada uno de los aspectos de las cuatro dimensiones de la comprensión consideradas en el cuestionario. A partir de esa agrupación, se seleccionaron cuatro estudiantes para participar en una entrevista semiestructurada.

La Tabla 3.5 es de doble entrada. En la fila superior se ubican las cuatro categorías descritas anteriormente, seguida de la segunda fila en la cual se encuentran las subcategorías pertenecientes a cada categoría y, en la tercera fila, las respectivas clases de cada subcategoría. En la primer columna a la izquierda se sitúan los códigos de los 14 estudiantes que respondieron el cuestionario. De esta manera, la tabla se debe interpretar como sigue: en ella se indica con X que la actuación del alumno 1 (codificado como A1), se caracterizó según la categoría D1 subcategoría A clase 1, lo que significa que el alumno A1 reconoce los problemas como de división de fracciones y usa esta operación para resolver todos los problemas que se resuelven con la división.

El próximo subapartado expone los resultados del análisis de las respuestas de los profesores en formación a las tareas propuestas en el cuestionario.

3.4.2. SOBRE LOS RESULTADOS DEL ANÁLISIS

En la primera parte del cuestionario en la cual se incluyen situaciones que corresponden con los aspectos característicos de la dimensión Uso–Aplicación de la comprensión de la división de fracciones, 6 de los 14 estudiantes lograron demostrar un desempeño acorde a las expectativas para dichas tareas, puesto que reconocieron los problemas como de división de fracciones y usaron esta operación para resolverlos.

	D1				D2					D3				D4			
	A			B	A			B	C	A	B		C	A			B
	1	2	3		1	2	3				1	2		1	2	3	
A1	X					X					X			X			
A2			X		X							X			X		
A3	X						X				X						X
A4	X					X					X					X	
A5			X		X						X				X		
A6				X					X				X				X
A7		X					X					X			X		
A8			X			X					X				X		
A9			X			X						X			X		
A10			X						X				X			X	
A11			X			X					X				X		
A12			X			X					X				X		
A13		X						X		X						X	
A14		X					X				X				X		

Tabla 3.5. Caracterización de las actuaciones de los estudiantes

Se identificaron diversos recursos usados por estos estudiantes para ayudarse a resolver las situaciones problemáticas como por ejemplo el empleo de representaciones pictóricas, ecuaciones, relaciones entre variables y tablas.

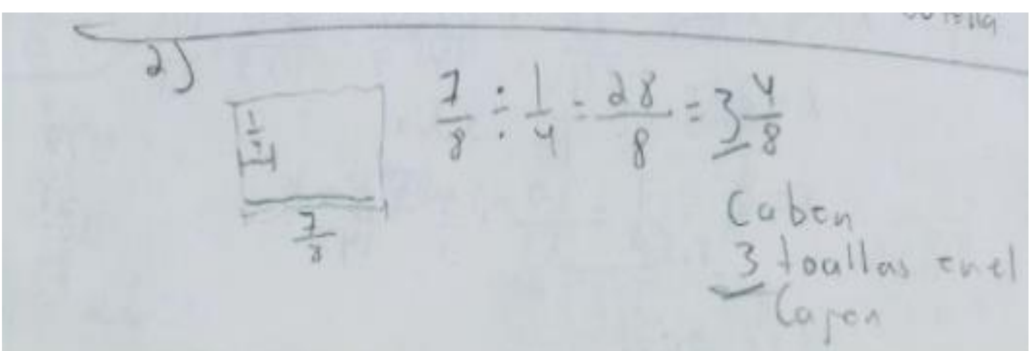


Figura 3.9. Resolución del alumno A1 al problema 2 del cuestionario

La Figura 3.9 muestra un ejemplo de recurso usado por los estudiantes para ayudarse a resolver las situaciones problemáticas. En este caso se ve que el alumno A1, al igual que otros estudiantes, hace una representación pictórica para comprender la situación formulada y poder resolverla a partir de ese dibujo.

También, los alumnos recurrieron al uso de relaciones entre variables como distancia, velocidad y tiempo, así como a la utilización de ecuaciones lineales para resolver los problemas planteados.

Las Figuras 3.9, 3.10 y 3.11 son ejemplos de las respuestas del alumno A1 que evidencian las estrategias o recursos usados por otros estudiantes para resolver las situaciones problemáticas planteadas.

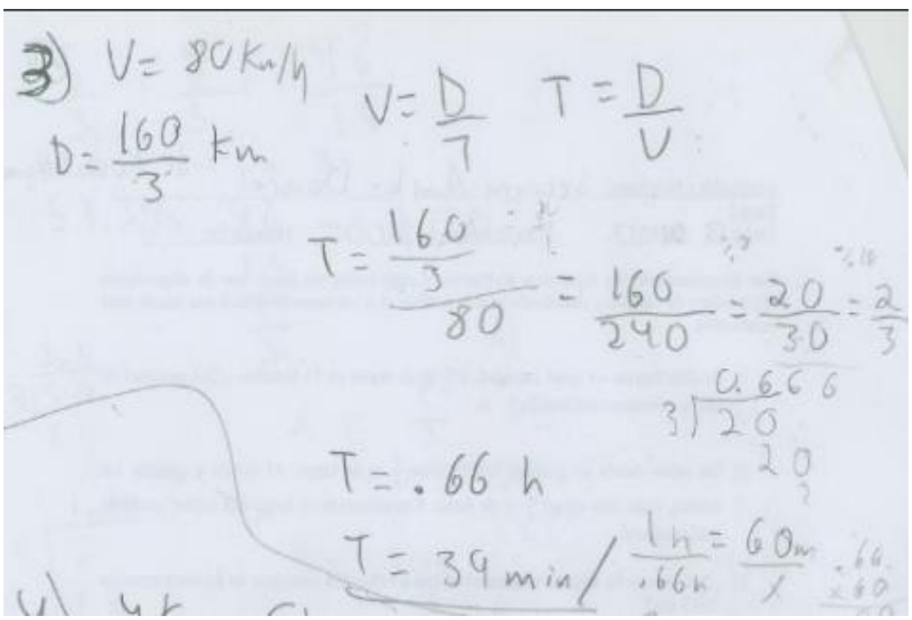


Figura 3.10. Resolución del A1 para el problema 3 del cuestionario.

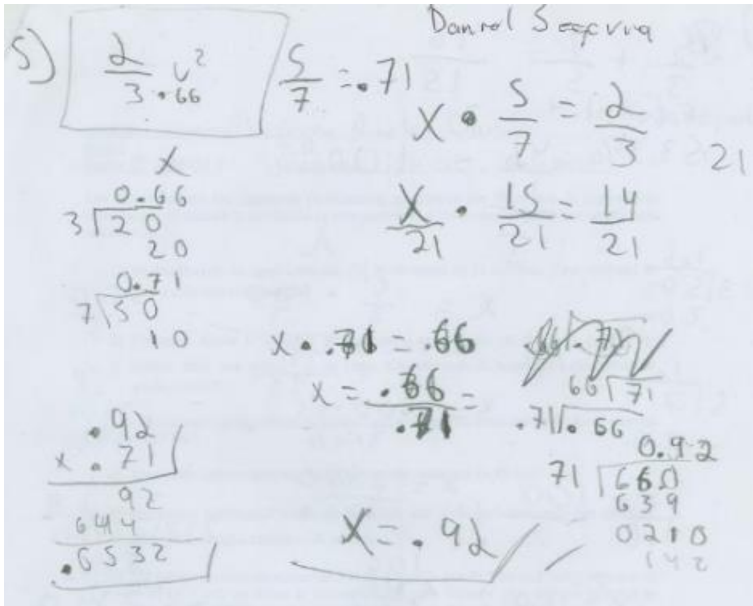


Figura 3.11. Resolución del alumno A1 para el problema 5 del cuestionario.

Por otra parte, 8 de los 14 estudiantes no se desempeñaron según las expectativas para las tareas de resolución de problemas, puesto que no reconocieron todos, o parte de las situaciones como aquellos que se pueden resolver usando división de fracciones. En la Figura 3.12 se puede apreciar que el alumno A5, para responder al problema 2 usa una representación pictórica y escribe como respuesta "14 veces", sin dar cuenta de cómo obtuvo ese resultado y a qué hace referencia. Por otra parte se puede ver en la Figura 3.13 que el mismo alumno plantea una ecuación para responder el problema, pero no logra resolverlo.

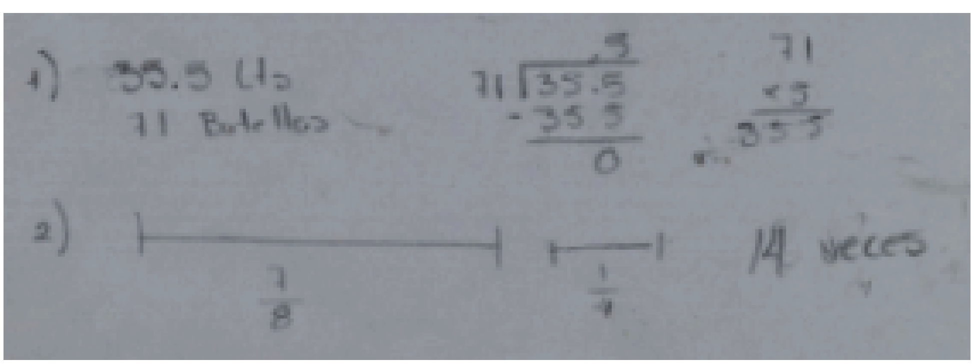


Figura 3.12. Resolución del alumno A5 para los problemas 1 y 2 del cuestionario.

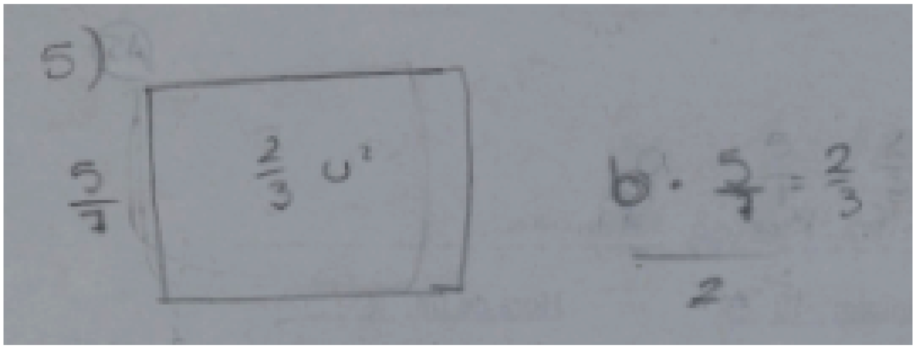


Figura 3.13. Planteamiento de resolución del alumno A5
para el problema 5 del cuestionario

Se observó además, en este grupo de 14 estudiantes, una amplia tendencia a convertir las fracciones en expresiones decimales para después dividirlas y obtener las respuestas e incluso se identificó que hacen la operación con fracciones, pero expresan la respuesta usando la escritura decimal correspondiente.

A modo de síntesis y retomando aspectos de la dimensión Uso–Aplicación se puede afirmar que casi la mitad de los 14 estudiantes para profesor fueron capaces de resolver situaciones variadas usando la división de fracciones y que, además, disponen de recursos que les permiten hacerlo. La otra parte de los alumnos pusieron en evidencia una comprensión débil desde la perspectiva de dicha dimensión.

Desde el punto de vista de la dimensión Habilidad–Algoritmo, en relación con las tareas de cálculo pero también con las otras, se identificó que los algoritmos más usados por los futuros profesores son el producto cruzado y la conversión a números decimales. El primer procedimiento lo usan con mayor frecuencia en los reactivos que corresponden a hacer divisiones dadas de manera explícita como en la Actividad 1 de la segunda parte del cuestionario, mientras que la conversión a números decimales es más frecuente en la resolución de problemas.

Según la caracterización hecha, 6 de los 14 estudiantes usaron producto cruzado (ver Figura 3.14) y la conversión a expresiones decimales para resolver los cálculos.

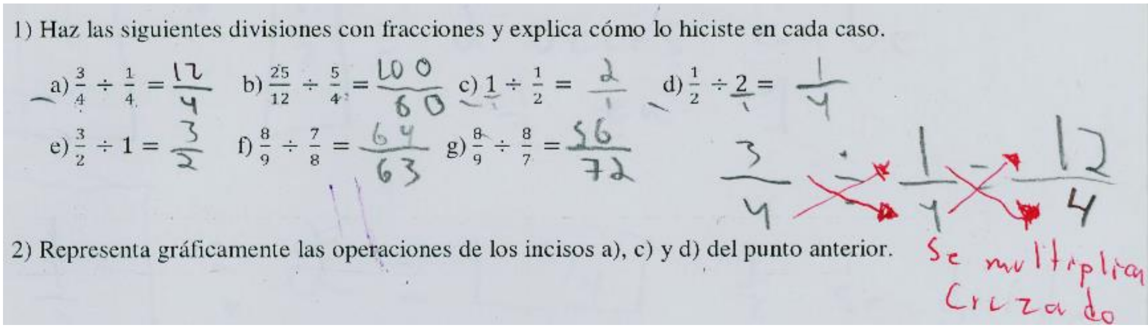


Figura 3.14. Aplicación del algoritmo producto cruzado usado por A1

Además, 3 de los 14 estudiantes que participaron de esta investigación, usaron los algoritmos producto cruzado, ley del sandwich (ver Figura 3.15) y conversión a expresiones decimales en diferentes contextos para hacer las distintas actividades del cuestionario.

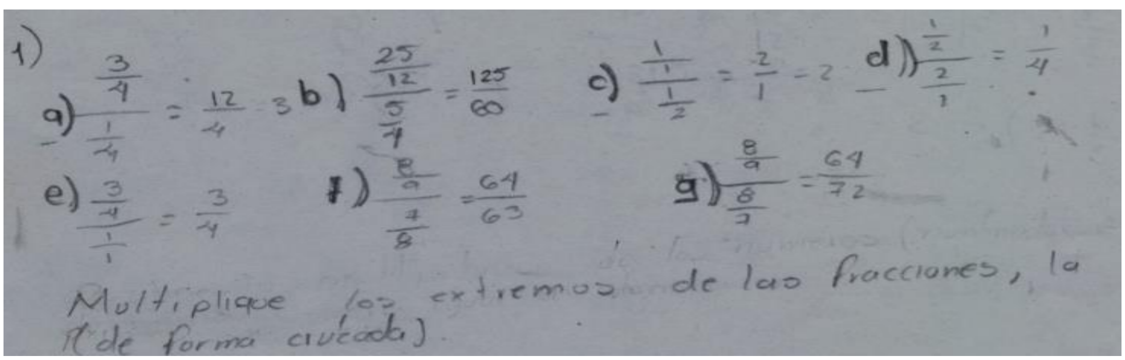


Figura 3.15. Aplicación del alumno A5 de la 'ley del sandwich'

Los resultados del análisis de las respuestas al cuestionario revelaron que los algoritmos más usados por los estudiantes son: 'producto cruzado' y 'ley del sandwich', al hacer las divisiones de fracciones dadas de manera simbólica. No se ha identificado el uso, por parte de los estudiantes, de algoritmos particulares para dividir fracciones que se han denominado '*shortcuts*' en la investigación descrita en esta tesis, salvo excepción en algunos casos en los que al parecer usan la propiedad de dividir un número entre uno, cuyo resultado es igual al dividendo.

Por otra parte en relación con la dimensión Propiedad–Prueba, en general los estudiantes en sus actuaciones, no se han desempeñado según las expectativas esperadas para justificar la validez de la cadena de igualdades que se propuso para el cálculo de una división de fracciones con números particulares considerando los lineamientos que caracterizan dicha dimensión. Sólo una estudiante de los 14 mostró conocimiento de propiedades de las fracciones y sus operaciones para proporcionar una justificación a la oración numérica. La alumna A13 (ver Figura 3.16) reconoce que puede usar propiedades de las operaciones, tales como la propiedad asociativa de la multiplicación y el empleo del inverso multiplicativo para dar respuesta a la tarea de la cadena de igualdades.

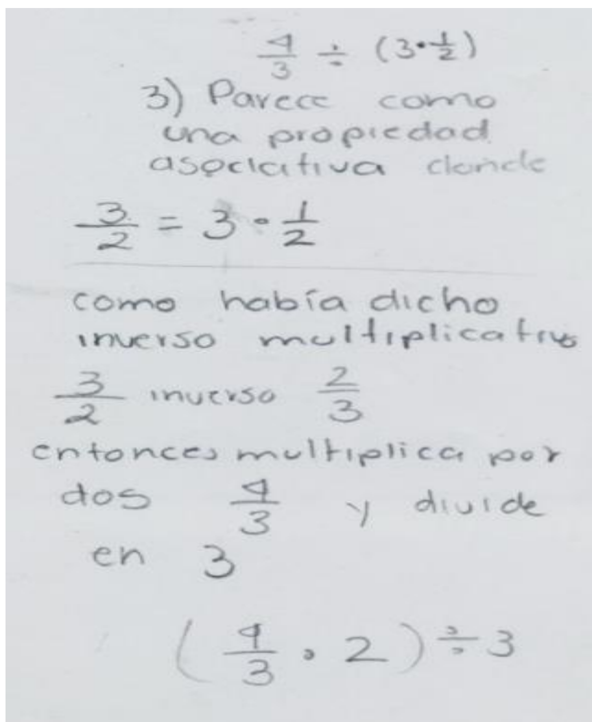


Figura 3.16 Respuesta de A13 a la tarea 3 del cuestionario

Sin embargo los estudiantes han usado otras formas de justificar la cadena de igualdades. Una de las más frecuentes es que los alumnos usaron igualdades numéricas (ver Figura 3.17). Con esta forma de justificar, los educandos están comprobando que si numéricamente cada miembro de la igualdad es equivalente al hacer las operaciones, la cadena de igualdades propuesta es correcta.

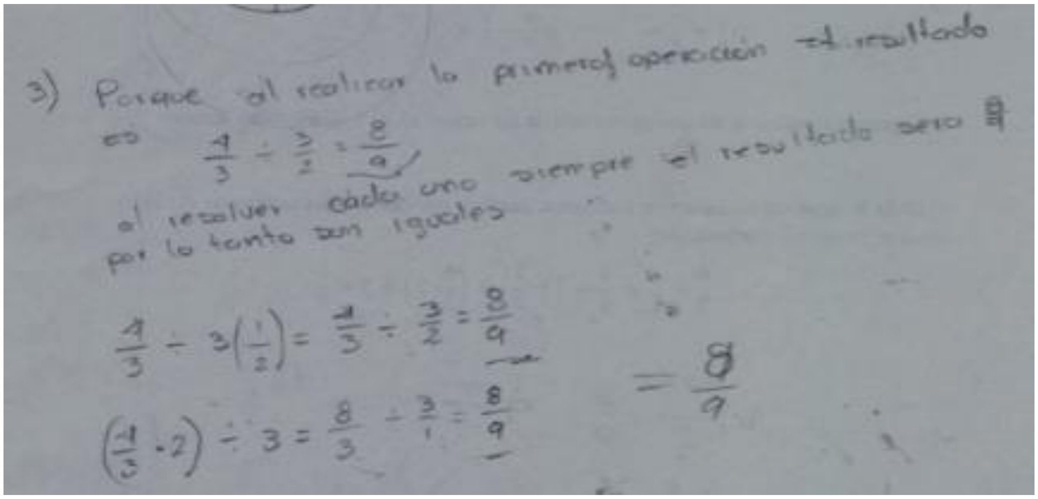


Figura 3.17 Respuesta del alumno A5 al inciso 3 del cuestionario

En dos estudiantes se observó que sus actuaciones relacionadas con la tarea de justificar las igualdades se centraron en solo una parte de la oración numérica (ver Figura 3.18), y la justificación que se da también se centra, al parecer, en un sentido numérico.

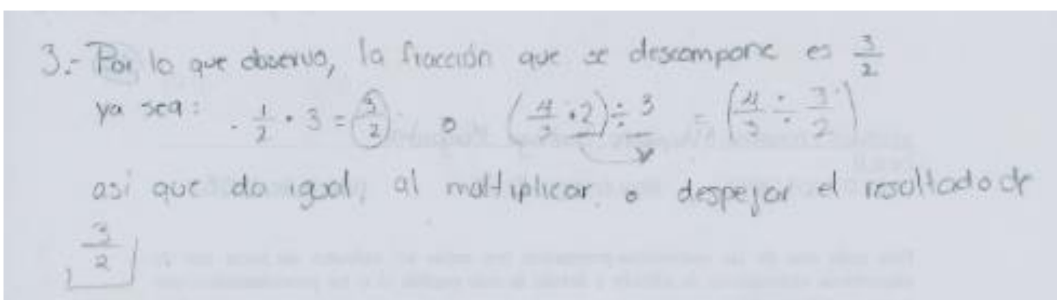


Figura 3.18. Respuesta del alumno A2 al inciso 3 del cuestionario

El uso de la equivalencia, que podría considerarse como una propiedad de las fracciones, ha sido utilizada por los alumnos participantes, en las diferentes tareas del cuestionario, para simplificar fracciones ya sea antes o después de hacer las operaciones.

Finalmente desde la perspectiva de la dimensión Representación–Metáfora se identificó que, en el análisis a las respuestas dadas por los estudiantes, éstos representaron: a) las fracciones dividendo y divisor, b) los resultados de las divisiones y c) las fracciones dividendo y divisor, junto con los resultados de las divisiones. En este sentido, ninguno de los 14 estudiantes cumplió con las respuestas esperadas que correspondían a la actividad relacionada con los aspectos de dicha dimensión de la comprensión. En las Figuras 3.19, 3.20 y 3.21 se ejemplifican las actuaciones de los alumnos relacionadas con cada una de las tipos de representación descritas en este párrafo.

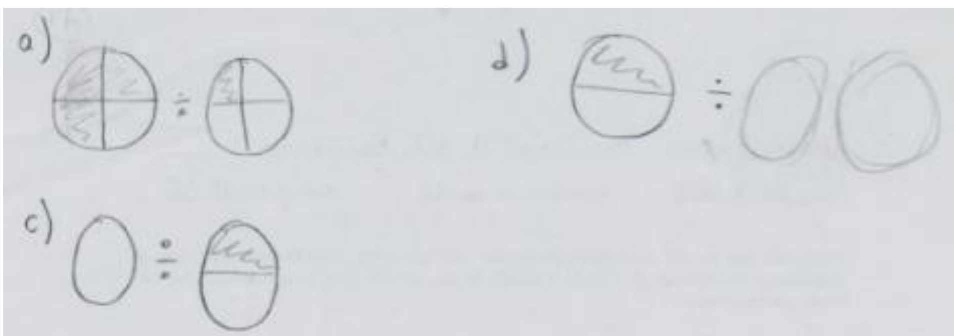


Figura 3.19. El alumno A7 representa las fracciones dividendo y divisor

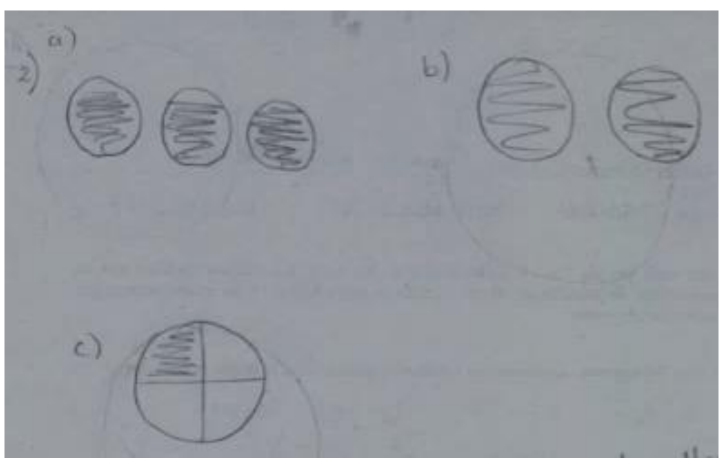


Figura 3.20. El alumno A5 representa los resultados de las divisiones

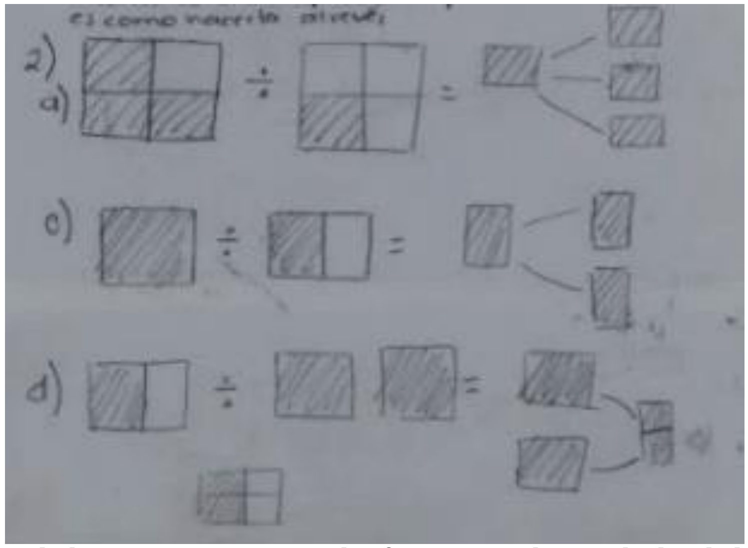


Figura 3.21 El alumno A13 representa las fracciones y los resultados de las divisiones

Con respecto a los tipos de representaciones que usaron los alumnos en relación con los modelos expuestos en el Capítulo 2, sección 2.2.2.4, se identificaron los modelos continuo (Figuras 3.19 a 3.21) y el modelo de recta numérica (Figura 3.22).

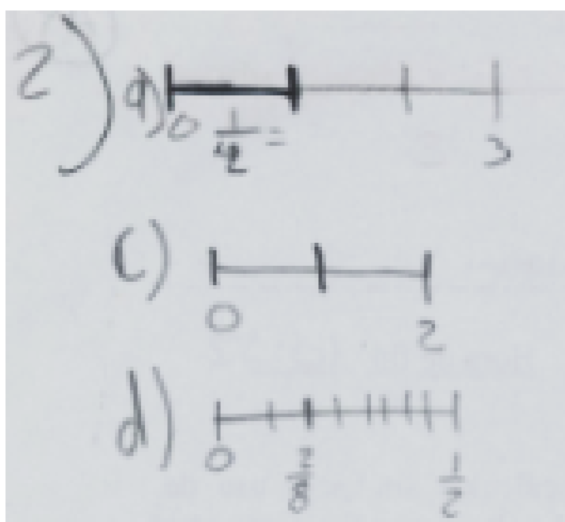


Figura 3.22. Representación de los resultados de las divisiones hecha por el alumno A9 quien usó el modelo de recta numérica

Solo un estudiante, el alumno A12, utiliza un modelo discreto para representar pictóricamente los resultados de las divisiones dadas, aunque una de dichas representaciones no es correcta (Figura 3.23).

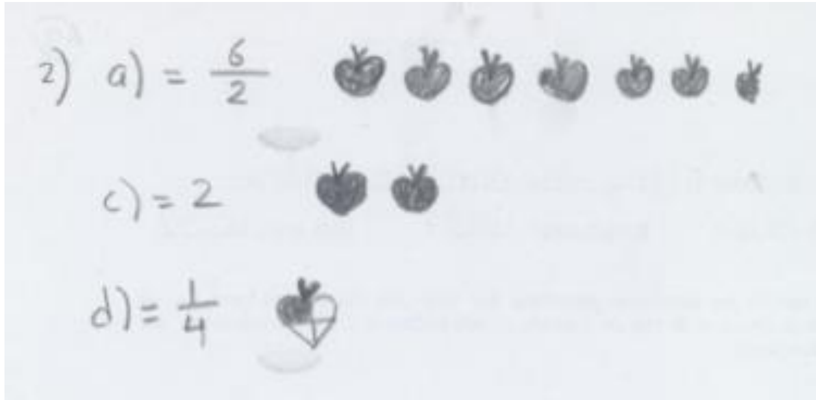


Figura 3.23. Representación de los resultados de las divisiones hecha por el alumno A12 usando el modelo discreto

Los resultados del análisis de las actuaciones de los estudiantes a las tareas del cuestionario mostrados hasta aquí, han puesto en evidencia la comprensión que tienen estos sujetos sobre la división de fracciones desde el punto de vista de las dimensiones. Sin embargo, ese análisis hecho ha planteado nuevos interrogantes en relación con procedimientos usados por los alumnos o errores cometidos por estos al hacer tareas de división. Por ello, se vio la necesidad de hacer un estudio de casos por medio de una entrevista personalizada. En el siguiente apartado, se describen los resultados de aplicar dichas entrevistas.

3.5. ANÁLISIS DE DATOS: UN SEGUNDO ACERCAMIENTO

Como ya se describió en la metodología, posterior al análisis de las respuestas dadas por los 14 estudiantes a las tareas del cuestionario, se seleccionó a 4 alumnos para llevar a cabo las entrevistas. Esta selección se hizo a partir de la caracterización hecha a la que pertenecían sus actuaciones.

Dos de los estudiantes elegidos para el estudio de casos demostraron un desempeño acorde a las expectativas en la resolución de los reactivos relacionados con las dimensiones

Uso–Aplicación y Habilidad–Algoritmo y, los otros dos no han exhibido ese tipo de actuación.

Las preguntas de las entrevistas se elaboraron a partir de los datos que se quiso obtener de cada estudiante según lo que hicieron en la resolución de las actividades del cuestionario (ver Anexo 2 'Las entrevistas'). La sesión de entrevista con cada alumno se llevó a cabo en un lugar tranquilo en el cual solo estaban el investigador y el entrevistado. Cada sesión duró en promedio 30 minutos y cada una de las entrevistas fue audiograbada. Además el estudiante contaba con papel y lápiz, por si requería escribir lo que estaba expresando de forma oral.

3.5.1. ANÁLISIS DE DATOS A PARTIR DE LAS ENTREVISTAS

Los datos obtenidos a partir de las entrevistas revelaron las razones por las cuales los estudiantes enfrentaron dificultades al resolver las tareas de división de fracciones.

Dos de los alumnos entrevistados manifestaron que sus dificultades con la resolución de problemas se debieron al tipo de datos involucrados. En particular, una estudiante expresó que su problema se debió a las fracciones y a que no recordaba en un primer momento, el algoritmo de la división de números enteros debido a que usa frecuentemente la calculadora, ella dice (fragmento de entrevista audiograbada del alumno A5, Apéndice 2):

A: *Bueno, en primera instancia, las fracciones… este los números fraccionarios se me complicaron un poco, y en segunda, ¡ja!, aunque fue broma lo que comenté, bueno todos lo consideraron así, no recordaba cómo dividir. Yo creo que fue, como tanto usar la calculadora mucho tiempo, y después dije, "y esto, ¿cómo lo hago?". Pero ya después como tratando de recordar, porque bueno, pedías el procedimiento, y yo este pues, así lo hacía más rápido en la calculadora, pues en este caso me pediste la división.*

Esta parte de la transcripción deja ver cómo el uso frecuente de la calculadora provoca en los alumnos el olvido de cómo se hacen los procedimientos de cálculo. Si bien es importante el uso de las tecnologías en la educación, estas no deben impedir que los estudiantes puedan usar distintas estrategias de cálculos. De hecho, entre los propósitos que se describen en los programas de estudio (Capítulo 2, subapartado 2.3.1) se encuentra el que los estudiantes utilicen diferentes técnicas o recursos que les permitan hacer más eficientes los procedimientos de resolución, por tal razón dado que estos estudiantes serán profesores, es importante que no olviden los procedimientos de cálculo.

Por otra parte, hay estudiantes que tienen la habilidad de pasar de una fracción a un número decimal o viceversa, según la situación que se les presenta. Tal es el caso del alumno A1, que al no estar convencido de un resultado obtenido tras operar con fracciones decide resolver el mismo problema (problema 5) pero con expresiones decimales para corroborar que los datos que obtuvo eran correctos (fragmento de entrevista audiograbada del alumno A1, Apéndice 2):

I: Pero, digamos, con decimales el resultado, ¿sí te convence más que si fuera con fracciones?

A: Mmm, en sí quería comprobar que si no me había equivocado, porque te digo que me conflicto entonces dije: "¡Ah! 0.92, es congruente con 14/15 que igual es casi. Entonces, ¡Ah!, no hay falla", entonces ya comprobé que sí estaba bien el procedimiento.

I: Entonces me dice,s que lo hiciste más que nada para comprobar.

A: ¡Ajá!

Así mismo, este estudiante tiene en mente situaciones de la vida real como un marco de referencia para valorar sus respuestas y ver si éstas tienen sentido o no en relación al resultado que obtiene luego de operar. En respuesta a preguntas del investigador referidas al mismo problema, el alumno dice (fragmento de entrevista audiograbada del alumno A1, Apéndice 2):

A: ¡Eh!, bueno, llegué a la misma comprensión, que sí estaban bien los dos, pero en la parte de las fracciones, digamos que, bueno a lo mejor tú nos diste medidas fraccionarias que no se podían digamos comparar con las dimensiones de un campo de futbol, entonces íbamos a buscar algún numero entero más grande que 1 y me da 0.71. Ya multipliqué, y si me da todo eso. Pero digamos que más brevemente mi concepto, te imaginas un campo y buscaba como que muchos metros, o sea por esa parte, caí a lo mejor como en ese juego no sé de desviarnos, despistarnos, entonces yo al dividir 2/3 u^2 entre 5/7 me daba que apenas llegaba a 1, bueno, si apenas llegaba a 1, o sea ni siquiera 1.

Las entrevistas con los cuatro estudiantes seleccionados han revelado que ellos deciden trabajar con un tipo de representación de los números, ya sea fracción o número decimal, según se les facilite más operar. Los fragmentos de entrevistas a los alumnos A5 y A8 dan cuentan de esta afirmación (Fragmentos de entrevista audiograbada de los alumnos A5 y A8 respectivamente, Apéndice 2):

I: ¡Ah!, ok vale, entonces decides de acuerdo a cómo se te facilita más trabajar.

A: Fracciones.

Por su parte, el alumno A8 manifiesta:

A: ¿Qué prefiero?

I: ¿Qué prefieres, exacto, dividir?

A: Yo creo que decimales.

I: Números decimales, ¿por qué?

A: Porque así como que los veo más claro, con dividirlo con números enteros o algo así.

Esta situación, de elegir operar con números decimales, también se debe a que en la escuela se les pide a los estudiantes hacer los cálculos con esos números, especialmente en otras materias, como la física. En las preguntas hechas al educando A1 en relación con el problema 3 del cuestionario, este lo manifiesta de la siguiente manera (Fragmento de entrevista audiograbada del alumno A1, Apéndice 2):

A: Porque, bueno, pensándolo en todos los ejercicios que he hecho como de física y matemática y todos esos, creo que es más como por comodidad hacia… y bueno, es que a lo mejor desde que… 0.66, lo calculas y se te queda como que la idea de usar decimales en términos de física ¿no? Porque, siempre te andan pidiendo 'hasta dos décimas' ¿no? 'Exprésame el resultado, no sé, 7, y quiero 4 décimas' ¿no? Entonces tú buscas en la calculadora las 4 décimas, bueno siento… porque también se puede expresar el resultado como con fracciones y sería más exacto que lo que dije. Y ya, de hecho si… todos siguen la misma idea, igual creo que aquí pasé del punto al tiempo e hice la igualación, 1 es igual a 60 y ya 0.66 y salió la producción 39 minutos. Igual creo, es la misma idea, te digo a lo mejor por tener ideas, problemas de física a lo mejor es, siento que me quedo con esa idea que física, decimales.

Cuando el investigador pregunta en la entrevista a cada alumno sobre los significados de la división que ellos conocen, en las respuestas de 3 de ellos se identificaron los dos más usuales en la enseñanza: la división como partición y la división como cuotición.

Sin embargo, el alumno A8 no logró identificar significados de la división a pesar de que el investigador propusiera a modo de ejemplo un significado de la multiplicación. Para este estudiante, el único significado que pudo determinar es el algoritmo de la división entera. Para ayudar a este estudiante a pensar en la posibilidad de la existencia de diversos significados de la división, el investigador le pregunta si los problemas propuestos eran iguales, a lo que el alumno responde afirmativamente asegurando que el problema 6 era el único distinto porque no tenía fracciones; dejando ver esto que se basó en el tipo de números involucrados en los problemas para determinar la semejanza o diferencia entre ellos. El siguiente fragmento muestra lo que se describió en este párrafo (fragmento de entrevista audiograbada del alumno A8, Apéndice 2):

A: Pues yo creo que es la multiplicación ahí, o ¿no?

I: Es, ¿cómo?

A: ¿La multiplicación? Por decir, si tenemos… mmm [escribe] *36 entre 6, es 6, porque pues multiplicamos 6 x 6 y nos da…*

I: 36. O sea, para ti un significado de la división es un significado multiplicativo.

A: ¡Aja!, o por decir, si fuera 37, sería 6 [el cociente] *pero sumas 1. Entonces yo digo, es una multiplicación, pero a veces también tiene, tenemos que añadirle…*

I: El resto.

A: ¡Aja!

I: Ok. ¿Lo único que conoces?

A: ¡Aja!

I: Bueno con respecto a los problemas, a esos 6 problemas, ¿te parece que son todos del mismo tipo?

A: Mmm.

I: O sea, ¿son todos similares los problemas o tienen diferencias?

A: Pues yo el 6 si creo que tiene diferencias, porque aquí trae, no venían como fracciones, entonces ahí si fue como al que le entendí mejor.

Las entrevistas, por otra parte, proporcionaron información acerca de que los profesores en formación tienden a quedarse con las formas en que les han enseñado a lo largo de su formación. Un ejemplo de ello es lo que manifiesta el estudiante A13 (Fragmento de entrevista audiograbada del alumno A13, Apéndice 2):

A: *¡Eh!, bueno a mí me enseñaron cruzado ¿no? De una pelotita que está aquí* [indicando el numerador del dividendo] *rebota hacía el denominador* [del divisor] *y como rebota, pues, va hacia el numerador otra vez* [indicando el numerador del resultado], *y que inversamente ¿no? tú la avientas hacía arriba* [indicando el denominador del dividendo] *hacía el numerador* [del divisor] *rebota hacía el denominador nuevamente* [indicando el denominador del resultado], *y ya después aquí cuando vimos lo de las divisiones, y todo eso de las fracciones, nos enseñaron que es una operación inversa, la división de la multiplicación, entonces nos explicaron esta parte que, la multiplicación como es lineal, estamos haciendo la operación inversa.*

El algoritmo que describe el alumno A13 en el fragmento de entrevista anterior, también se hace evidente en las preguntas relacionadas con las tareas de división de fracciones de la segunda parte del cuestionario. Allí se comprobó que las formas de dividir fracciones que conocen los alumnos son los algoritmos producto cruzado y/o ley del sandwich. Cuando se pregunta a los alumnos en la entrevista si en todos los casos de la actividad 1 de la segunda parte del cuestionario era necesario aplicar alguno de los algoritmos identificados, unos manifestaron que no y mostraron en los casos que no era necesario hacerlo.

El estudiante A5 reconoce uno de los '*shortcuts*' cuando el investigador se lo enseña e incluso está de acuerdo en que no siempre es posible aplicarlo, sin embargo otros dos '*shortcuts*' los considera incorrectos y afirma que eso es algo que no se puede hacer (fragmento de entrevista audiograbada del alumno A5, Apéndice 2):

I: Denominador, ¡ajá! Bueno, pero ya que mencionas el g), un estudiante viene y te dice, tenemos 8/9 entre 8/7 y viene un estudiante y te dice 'yo aquí vi que los numeradores son iguales, ahora entonces el resultado de la división va a ser 7/9', éste denominador entre éste denominador, ¿qué le dices a ese estudiante?

A: Mmm, le diría que no está bien, pero no sabría por qué justificárselo, como tal…

A: Bueno yo por default diría que está mal ¿no?, pero o sea igual tendría que investigar… bueno a mí siempre me han dicho que no se puede hacer eso, pero nunca pregunté por qué.

Por otra parte, tras mostrar el investigador los '*shortcuts'* al estudiante A13, éste razona brevemente sobre ellos concluyendo que son correctos y que no en todos los casos es posible aplicarlos (ver Apéndice 2, entrevista A13).

En relación con las tareas que se vinculan con la dimensión Propiedad–Prueba, los estudiantes a quienes se entrevistó, no lograron reconocer las propiedades para dar una justificación del porqué la cadena de igualdades propuesta es verdadera, a excepción de uno. Tal es el caso del estudiante A5 que al pedir que diga porqué $\frac{3}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2}$, éste no fue capaz de dar otra justificación más que la de efectuar el producto de 3 por $\frac{1}{2}$. (Fragmento de entrevista audiograbada del alumno A5, Apéndice 2).

A: Que aquí hay 3… no, no sabría, así como tal no. Yo sí tendría que como que multiplicar para poderte decir que estos dos son iguales.

I: ¿Necesitas multiplicarlos para decir que son iguales?

A: ¡Ajá!

Por otra parte, el estudiante A13, logra razonar y deducir algunas propiedades que permiten justificar cada igualdad propuesta (ver Apéndice 2, entrevista del alumno A13).

Finalmente se puede afirmar que lograr comprender el concepto división de fracciones desde el punto de vista de la dimensión Representación–Metáfora, es una de las tareas más difíciles. En este caso, ningún estudiante fue capaz de hacer una representación pictórica de la división. Los resultados de las entrevistas revelan que los alumnos descodificaban la tarea a realizar de manera equivocada, ya que representaron los resultados de las divisiones, las fracciones dividendo y divisor o ambas. Tras hacerles notar que sus representaciones no respondían a la tarea pedida y solicitarles que intentaran volver a hacer la representación, los educandos no fueron capaces de proporcionar una respuesta, a excepción del estudiante A13 que tuvo una buena aproximación utilizando el modelo de recta numérica.

El análisis que se ha hecho de las respuestas que dieron los futuros profesores a las tareas dadas en el cuestionario en esta etapa experimental del MTL, ha permitido obtener resultados que se contrastan con las hipótesis formuladas en el Capítulo 1 de este documento. En el siguiente capítulo se describen esos resultados en contraste con las hipótesis.

4. Resultados y el futuro

La investigación descrita en este documento se elaboró y organizó construyendo un Modelo Teórico Local (MTL) de la división de fracciones y de su comprensión. Al hacer uso de dicho marco de referencia se han diferenciado dos etapas: la teórico–metodológica y la experimental.

En este último capítulo se exponen los resultados encontrados en ambas etapas de la construcción del MTL y cómo estos hallazgos, más específicamente los que corresponden a la etapa experimental, proporcionaron elementos para responder las preguntas de investigación que se plantearon al inicio.

Por último, después de mencionar las dificultades encontradas en el proceso de la investigación, se exponen las implicaciones de este trabajo tanto para la enseñanza, como para futuras investigaciones.

4.1. Resultados Teóricos–Metodológicos

En el Capítulo 2 se describió la etapa teórica de la construcción del Modelo Teórico Local inicial de la división de fracciones elaborado para sustentar la investigación descrita en esta tesis. Los resultados encontrados en esa etapa para cada uno de los componentes del MTLi se describen en los siguientes subapartados.

4.1.1. EL COMPONENTE DE LOS MODELOS DE COMPETENCIA FORMAL

A partir de las ideas de Freudenthal (2002) e incorporando las del trabajo de Contreras (2012) y otros autores, se caracterizaron seis significados diferentes de la división para el conjunto de los números naturales y se explicó cómo se extienden al conjunto de las fracciones y la división definida en esta estructura numérica. En otras palabras, se ha hecho un análisis fenomenológico del concepto división de fracciones. Además, se han descrito cinco dimensiones que constituyen elementos que permiten diagnosticar la comprensión de un concepto matemático en términos de la propuesta que hace Usiskin (2015), a saber: Uso–Aplicación, Habilidad–Algoritmo, Propiedad–Prueba, Representación–Metáfora e Historia–Cultura. Tomando en consideración la descripción de cada una de esas dimensiones hecha por el investigador se ejemplificaron usando el concepto división de fracciones.

4.1.2. EL COMPONENTE DE LOS MODELOS DE ENSEÑANZA

Para la construcción del componente Modelos de Enseñanza se analizaron programas de estudio de la escuela primaria y secundaria de México, así como el plan y programa de estudios de la Licenciatura en Educación Secundaria Especialidad Matemáticas de la ENSM. Además, se analizaron secuencias de enseñanza para la división de fracciones propuestas en tres libros de texto de secundaria (textos con aval oficial de la SEP para su uso en la escuela secundaria).

Desde el punto de vista de la dimensión Uso–Aplicación de la comprensión de la división, el análisis de los distintos programas de estudio reveló que el Modelo de Enseñanza propuesto para ese concepto se centra en la resolución de problemas.

Para los problemas de tipo multiplicativo, se propone el uso de la división de fracciones para resolverlos. En este sentido, uno de los libros de texto analizados plantea una variedad de problemas que se resuelven con dicha operación y que tienen diferentes significados, como por ejemplo la división cuotitiva, partitiva, inversión de la multiplicación y proporción de valor unitario desconocido. Sin embargo, en otro de los libros de texto se identificó que la secuencia de enseñanza que se sugiere es débil en relación con las tareas de resolución de problemas.

Considerando los aspectos de la dimensión de la comprensión Habilidad–Algoritmo, en los programas de estudio se sugiere el uso de 'algoritmos convencionales' para operar con fracciones en distintos contextos, es decir tanto en la resolución de problemas como en cálculos. Aunque en los programas no se especifican cuáles son los algoritmos convencionales, en los libros de texto consultados se explican los procedimientos 'invertir y multiplicar' y 'el producto cruzado'; poniendo más énfasis en este último y sugiriendo esto que para ciertos autores, esos son los denominados 'algoritmos convencionales'. Solo uno de los libros desarrolla otros dos procedimientos que permiten dividir fracciones, estos son: el caso particular de dividir fracciones que tienen el mismo denominador, por un lado y, la conversión de fracciones con diferentes denominadores a fracciones equivalentes con iguales denominadores, por otro. Así mismo, puesto que en la investigación se ha considerado la conversión de fracciones a números decimales como un algoritmo para dividir fracciones, se resalta el hecho de que en los tres libros de texto consultados se dedica un capítulo completo al estudio de los números decimales y sus operaciones.

Partiendo desde la perspectiva de la dimensión Propiedad–Prueba, los resultados del análisis de los programas de estudio sugieren, como propiedad de los números, el estudio de fracciones equivalentes para efectuar cálculos. En este sentido, solo en un libro de texto se proponen actividades que involucran el uso de propiedades de los números y sus operaciones para hacer cálculos.

Finalmente, partiendo de las características de la dimensión Representación–Metáfora de la comprensión, los resultados de analizar los textos y programas de estudio pusieron en evidencia el uso de representaciones como, por ejemplo, la recta numérica para la división de fracciones así como representaciones simbólicas para dicha operación. No se encontraron como propuestas, el uso de otros modelos para representar pictóricamente la división de fracciones.

Los análisis que se hicieron desde el punto de vista de las cuatro dimensiones de la comprensión de la división de fracciones a los programas de estudio y los textos, ponen de manifiesto que hay fortalezas en la comprensión de este concepto. Pero esas fortalezas son vistas desde la perspectiva de las primeras dos dimensiones, puesto que centran la enseñanza de la división a partir de la resolución de problemas multiplicativos y por lo menos uno de los tres textos atiende a diferentes significados de la misma.

Sin embargo, considerando las características de las dos últimas dimensiones se encuentran debilidades, debido a que no proponen actividades que impliquen el uso de propiedades como elementos que permiten hacer justificaciones; así como las representaciones de la división de fracciones como herramientas que permiten resolver problemas y 'descubrir' procedimientos para hacer cálculos.

4.1.3. EL COMPONENTE CONJUNTO DE LOS MODELOS DE PROCESOS COGNITIVOS Y MODELOS DE COMUNICACIÓN

El estudio de los antecedentes de la investigación en educación matemática sobre la división de fracciones ha puesto en evidencia estrategias que usan tanto niños, como profesores en formación para resolver tareas en las que se usa dicha operación, así como las posibles razones de los errores que surgen al hacer estas tareas.

Los resultados de la revisión de los antecedentes de la investigación sobre la división de fracciones mostraron que el uso de representaciones pictóricas, aunque se podría considerar como tarea difícil, constituye una herramienta que permite a los estudiantes resolver tareas que usen esta operación, como la resolución de problemas y la generalización de casos particulares de cálculos que les permite 'encontrar' algoritmos para dividir fracciones (Yim, 2010). También se encontró que a pesar de que los estudiantes conozcan procedimientos para dividir fracciones o resolver problemas que involucren dicha operación, a veces ellos no logran dar una interpretación a las divisiones que están haciendo o incluso no aceptan que una variedad de problemas se pueda resolver usando división de fracciones. Entre los posibles errores que se pueden identificar al resolver las tareas de dividir fracciones, en las investigaciones precedentes se destaca que los alumnos, entre otros cosas, hacen mal uso de los algoritmos o no comprenden la situación problemática que se les presenta (Işiksal y Çakiroğlu, 2008; Alenazi, 2015).

4.2. RESULTADOS DE LA ETAPA EXPERIMENTAL

El contenido de este apartado son los resultados encontrados durante el desarrollo de la etapa experimental de la construcción del Modelo Teórico Local construido para la investigación expuesta en este documento. En el Capítulo 3 se describió el análisis de los datos obtenidos a través de un cuestionario y una entrevista semiestructurada, aplicados a profesores en formación. Los resultados de eso análisis han permitido obtener elementos para responder a las preguntas de investigación formuladas al principio de esta tesis.

En los siguientes subapartados se exponen esos resultados encontrados de acuerdo a las características de las dimensiones de la comprensión de la división de fracciones que se tomaron para elaborar el cuestionario y las categorías que permitieron caracterizar las actuaciones de los estudiantes.

4.2.1. DIMENSIÓN USO–APLICACIÓN

El análisis de las respuestas dado por los estudiantes a las tareas del cuestionario y a las preguntas de la entrevista reveló que, en lo que refiere a la resolución de problemas que se resuelven usando la división de fracciones, casi la mitad de los futuros profesores participantes cuentan con recursos que les permiten entender y resolver las situaciones formuladas. Por ello, se puede decir que esta es una fortaleza que tiene ese grupo de profesores en formación en relación con la dimensión Uso–Aplicación vinculada a la comprensión del concepto división de fracciones.

De los 14 participantes en la indagación, fueron seis los que lograron resolver tres, cuatro o todos los problemas propuestos en la primera parte del cuestionario que se resolvían usando división de fracciones. Es de destacarse que, particularmente en las tareas relacionadas con esta dimensión, los estudiantes deciden operar con números decimales por sobre las fracciones, en contraste a cómo operan cuando se les presentan divisiones con fracciones de manera simbólica. Esa actitud de los estudiantes, como se ha dicho en el Capítulo 3 subapartado 3.5.1, se puede relacionar con el hecho de que en otras materias en las que los alumnos resuelven problemas, se les solicite que hagan los cálculos usando números decimales.

Como recursos usados por los alumnos para resolver los problemas de división de fracciones, se identificaron: representaciones pictóricas, ecuaciones de primer grado, tablas y relaciones entre variables.

Entre las dificultades enfrentadas por el grupo de 8 estudiantes que no lograron resolver adecuadamente los problemas de división de fracciones, se detectaron debilidades con relación a sus conocimientos previos y sus destrezas en la resolución de problemas. El tipo de dificultades encontradas se relacionan con: el uso incorrecto del algoritmo para la división de enteros y de algoritmos para la división de fracciones, lo que los condujo a la obtención de resultados erróneos; procedimientos para la resolución de ecuaciones de primer grado, es decir los pasos a seguir para resolver una ecuación lineal; la formulación inadecuada de la situación problemática a resolver (ver Anexo 1, respuestas al cuestionario por el alumno A7 resolución al problema 3) y el planteo erróneo de las relaciones entre variables, como por ejemplo que el producto entre la velocidad y la distancia es igual al tiempo (ver Anexo 1, respuestas al cuestionario del alumno A8 resolución al problema 3 y al problema 5). Parte de estas dificultades concuerdan con algunas de las identificadas por Işiksal y Çakiroğlu (2008) en el estudio que hicieron con profesores en formación (ver Capítulo 2, subapartado 2.4.3)

Sintetizando, se puede afirmar que casi la mitad de los participantes tienen un adecuado desempeño en la resolución de problemas que implican el uso de la división de fracciones y, las dificultades a las que se enfrentaron los que no lograron cumplir con las expectativas en la resolución de tareas vinculadas a esta dimensión, se debieron a la falta de destreza de conocimientos relacionados con dicha operación así como con otros independientes de la división de fracciones.

4.2.2. DIMENSIÓN HABILIDAD–ALGORITMO

Desde la perspectiva de la dimensión Habilidad–Algoritmo, en la que se pretendía identificar la destreza de los estudiantes en relación con el uso de diferentes algoritmos, generales y particulares (‘*shortcuts*’) y/o el uso de propiedades para hacer divisiones de fracciones de acuerdo con el tipo de números involucrados en la operación, el grupo de futuros profesores reconocen y usan por lo menos un algoritmo para dividir fracciones, lo que constituye una fortaleza en ese sentido. Sin embargo, tomando en cuenta las características de dicha dimensión y partiendo de las respuestas esperadas para las tareas relacionadas con esas características, el grupo de alumnos no cumplió con las expectativas.

Durante el análisis de los datos se identificaron tres algoritmos usados por los profesores en formación en las tareas de dividir fracciones: 1) la conversión de fracciones a número decimal; 2) el denominado ‘Producto cruzado’, y 3) el conocido coloquialmente como ‘Ley del sandwich’.

En los subapartados 2.3.1, 2.3.3 y 4.1.2, en los que describen los resultados de los Modelos de Enseñanza de la división de fracciones hechos para la investigación, se mostró que el algoritmo más frecuentemente considerado por autores de libros de texto para hacer esta operación es el denominado ‘Producto cruzado’. De esta observación de puede inferir que este sea el procedimiento más usado por los futuros profesores para hacer cálculos de divisiones con fracciones. Sin embargo, una técnica que no se consideró en esta investigación y que se ha identificado en el análisis de las respuestas a las tareas del cuestionario fue la de dividir fracciones usando la ‘Ley del sandwich’, técnica que solo se ha visto en uno de los libros de texto. Del algoritmo 'conversión de fracciones a números decimales', como se dijo, fue usado solamente en la resolución de los problemas.

Algunos profesores en formación, aunque no lo han expresado de manera escrita en el cuestionario, hicieron uso de propiedades, como por ejemplo en el caso en el que se dividía una fracción entre la unidad o en el que la unidad era el dividendo de la división. Además, en el estudio de casos que se hizo por medio de las entrevistas se encontró que uno de los participantes, aunque desconocía los '*shortcuts*' mostrados por el investigador, concluyó que eran algoritmos válidos y que se podían usar sólo en determinadas situaciones, es decir, consideró que eran algoritmos particulares.

Sin embargo, los datos también evidenciaron debilidades por parte de los alumnos en sus respuestas a las tareas que tienen que ver con la dimensión H–A. Se identificó que ciertos participantes no reconocen e incluso no son capaces de usar propiedades u otros algoritmos para hacer la división de fracciones, los consideran incluso incorrectos. Esto se atribuye a que a lo largo de su formación académica, a los estudiantes, solo les han enseñado los denominados algoritmos convencionales que aparecen en el currículo y es la 'única' forma correcta que ellos conocen para dividir fracciones, según lo expresaron en las entrevistas. Esta actitud de los profesores en formación se asemeja con la hallada en la investigación de Alenazi (2015), en la que la autora concluye que los participantes con los que ella trabajó, no aceptaban que los problemas que había propuesto se pudieran resolver con división de fracciones (ver Capítulo 2, subapartado 2.4.1).

Se debe también resaltar que el uso continuo de la calculadora provoca que los estudiantes olviden los procedimientos para hacer cálculos. Por ello, considerando que el uso de las tecnologías digitales es importante en la educación, se debería pensar en cómo hacer uso de estos dispositivos de manera que se pueda poner énfasis en cómo se hacen los diversos algoritmos o procedimientos de cálculo y el uso de propiedades de las operaciones y de los números.

4.2.3. DIMENSIÓN PROPIEDAD–PRUEBA

Considerando los aspectos de la dimensión Propiedad–Prueba, se puede decir que es una de las dimensiones de la comprensión en la que los estudiantes manifestaron más debilidades que fortalezas, puesto que casi ninguno de los participantes logró tener una actuación acorde a las respuestas esperadas. Es decir, que los estudiantes hicieran uso de las propiedades de las operaciones y los números para argumentar la veracidad de una cadena de igualdades.

Entre las formas de justificación más común que se encontraron al analizar los datos, se identificó la que se denominó numérico–verbal, en la cual algunos estudiantes resolvían las operaciones propuestas en cada miembro de la cadena de igualdades y al ver que numéricamente el resultado obtenido era el mismo, entonces afirmaban que la oración numérica propuesta era válida. Otros estudiantes daban una explicación coloquial, que en algunos casos, en dicha explicación no se argumentaba porqué esas igualdades eran verdaderas.

Solo un estudiante, A13, mostró el uso de algunas propiedades en su argumentación sobre la validez de la cadena de igualdades (ver Capítulo 3, subapartado 3.4.2 y Anexo 1 Respuestas a la segunda parte del cuestionario por el alumno A13).

Desde el punto de vista de esta dimensión, el uso de propiedades para hacer cálculos y/o simplificar fracciones no se han considerado en la investigación. Sin embargo, esta fue una práctica usual en algunos estudiantes al resolver las tareas de división propuestas en el cuestionario, y esto constituye una fortaleza en términos del uso de propiedades. Dicho uso, se ha identificado en los Modelos de Enseñanza de la división de fracciones (ver Capítulo 2, apartado 2.3).

En síntesis, se afirma que la comprensión de la división de fracciones de los futuros profesores es débil según las características de la dimensión Propiedad–Prueba, constituyendo dichas características una parte fundamental en el proceso de formación de estos estudiantes. Se destaca además, que este hecho puede deberse a que las demostraciones formales o justificaciones de las tareas matemáticas no forman parte del currículo.

4.2.4. DIMENSIÓN REPRESENTACIÓN–METÁFORA

Por último, considerando las singularidades de la dimensión Representación–Metáfora, esta constituye una de las dimensiones de la comprensión de la división de fracciones en la cual se identificaron pocas destrezas de los participantes para resolver las tareas con las cuales se valoró esta dimensión de la comprensión. De hecho, los aspectos de esta dimensión prácticamente no están considerados en los Modelos de Enseñanza analizados, y por tal razón los profesores mostraron una comprensión débil en relación con dichos aspectos.

Ninguno de los participantes de la investigación fue capaz de realizar una representación pictórica de la división de fracciones, que era lo esperado en términos de la caracterización de esta dimensión. El análisis de datos reveló que los futuros profesores hicieron tres tipos de representaciones: 1) las fracciones dividendo y divisor; 2) el resultado de la división, y 3) una combinación de las dos anteriores.

Este resultado es similar a los obtenidos por Alenazi (2015), quien menciona que los participantes de su investigación representaban pictóricamente las fracciones y no la división de fracciones (Capítulo 2, subapartado 2.4.1).

En el estudio de casos de la investigación descrita en esta tesis, se puso en evidencia que los alumnos no fueron capaces de hacer una representación pictórica de la división, ya que ellos se centraban en solo una de las fracciones y en darles un significado a los números de la fracción a través de una representación pictórica de la misma.

Durante el desarrollo de la entrevista al alumno A13, al pedirle nuevamente que intente realizar la tarea de representar pictóricamente la división de fracciones, éste logra hacer una aproximación haciendo uso del modelo de recta numérica, pero posteriormente lo abandona porque no logra concretar lo que pretendía (Anexo 2, Entrevista del alumno A13).

Por otra parte, los modelos más usados por los estudiantes para representar fracciones son los modelos continuos, como el del área de un rectángulo y el del pastel, además de la recta numérica. Dichos modelos de representación coinciden con los encontrados en el análisis de los Modelos de Enseñanza y en investigaciones precedentes (ver Capítulo 2, apartado 2.3 y sección 2.2.2.4), quizá por ello esas fueron las actuaciones de los futuros profesores al hacer las tareas relacionadas con los aspectos de la dimensión R–M. Solo un estudiante hizo uso de un modelo discreto para representar los resultados de las divisiones, a pesar que un caso lo hace de forma errónea (Anexo 1, Respuestas a la segunda parte del cuestionario del alumno A12).

4.3. CONCLUSIONES GENERALES

Como se describió en el Capítulo 1, comprender el concepto división de fracciones es de suma importancia tanto para los profesores que lo enseñan, como para sus alumnos, ya que este tema es uno de los principales pilares de la comprensión y el uso adecuado de las expresiones racionales algebraicas y el rendimiento en matemáticas en general (Usiskin, 1979; Siegler et al, 2012).

Debido a que el estudio de la división de fracciones es un tema fundamental en la enseñanza de la educación básica con la intención de que los estudiantes logren tener un buen desempeño en las matemáticas superiores, es deber de los profesores tener una amplia comprensión del tema. Esto significa que para poder proponer actividades que permitan a los estudiantes hacer matemáticas y construir el conocimiento del concepto, los profesores deben ser diestros en la resolución de tareas y problemas que refieren a las dimensiones de la comprensión (Castro-Rodríguez, Pitta-Pantazi, Rico, y Gómez, 2016, Shulman, 1986, Ball, Thames y Phelps, 2008).

En términos de la investigación cuyo informe es esta tesis, los profesores deben tener presente los distintos fenómenos que organiza la división de fracciones, es decir es importante que ellos identifiquen los problemas que se pueden resolver usando dicha operación y las diferencias que pueden existir entre unos y otros tipos de problemas, puesto que "la resolución de [estos] es una actividad fundamental en el desarrollo de las matemáticas" (Santos Trigo, 2014, pág. 17).

Por otra parte, el conocimiento de una variedad de algoritmos para dividir fracciones les brindará a los profesores, entre otras cosas, la posibilidad de considerar situaciones particulares en la enseñanza y cómo éstas se extienden a otros dominios del conocimiento matemático, como el álgebra.

Además, se debe tener en cuenta que la justificación de las tareas matemáticas es una de las principales bases de esta disciplina y por tal razón es importante considerar este aspecto en las propuestas de modelos de enseñanza, y por ello es esencial en la formación de profesores.

Finalmente, las representaciones pictóricas constituyen una herramienta poderosa que permite a los estudiantes, desde representar situaciones problemáticas propuestas y resolverlas, hasta formular algoritmos numéricos para la división de fracciones (Yim, 2010).

Que los futuros profesores comprendan el concepto división fracciones desde las perspectivas de las 4 dimensiones descritas permitirá a estos, por ejemplo, decidir qué secuencia de enseñanza se ajusta mejor a las características de las dimensiones de la comprensión de dicho concepto y, en consecuencia, proponer actividades en la cual la constitución del objeto mental de sus estudiantes esté más próximo al objeto matemático división de fracciones.

4.4. CONTRASTE DE LAS HIPÓTESIS CON LOS RESULTADOS ENCONTRADOS

Los resultados de la etapa experimental de la construcción del MTL de la división de fracciones expuestos en el apartado 4.2 permitieron contrastar las hipótesis formuladas en el Capítulo 1 del informe que se describe en este documento.

El análisis de datos ha revelado que del grupo de profesores participantes de la investigación, casi la mitad fueron capaces de resolver problemas en los que se usa la división de fracciones, pero no solo los de tipo cuotitivo como se planteó en la hipótesis teórica 1

(HT1), sino que ellos cuentan con recursos que les permiten entender y resolver una variedad de problemas usando la división de fracciones con distintos significados, lo que constituye una fortaleza para estos estudiantes en la comprensión de dicha operación desde el punto de vista de los aspectos relacionados con la dimensión Uso–Aplicación.

Con relación a los algoritmos que usaron los profesores en formación para dividir fracciones se identificaron tres: 1) la conversión de fracciones a números decimales, que se aparece exclusivamente en el contexto de la resolución de problemas, 2) el algoritmo producto cruzado, que es el que se usa con mayor frecuencia en los tres libros de textos de la educación secundaria analizados, tal como se formuló en la HT2, y 3) la 'Ley del sandwich', técnica que no se incluyó en la construcción del componente Formal del MTLi. En este sentido se podría considerar una fortaleza el que los estudiantes sean diestros en el uso de por lo menos un algoritmo para efectuar tareas de división. Sin embargo, en términos de las características de la dimensión Habilidad–Algoritmo, los estudiantes para profesor deben conocer otros algoritmos que les permitan valorar otras estrategias que podrían usar sus alumnos.

Como se afirmó en la HT3, puesto que los Modelos de Enseñanza que se consideraron en la investigación como análisis no reparan en el uso de propiedades para hacer validaciones de oraciones numéricas, ni otro tipo de validaciones, la comprensión que tienen los estudiantes para profesor participantes acerca de la división de fracciones desde el punto de vista de la dimensión Propiedad–Prueba, es limitada. Al respecto se puede afirmar que esta es una debilidad que tienen esos estudiantes. Como fortaleza, se puede decir que, en relación con el uso de propiedades de las fracciones y sus operaciones, algunos de los futuros profesores los usan para hacer cálculos.

Finalmente, en relación con los aspectos de la dimensión Representación–Metáfora, los resultados muestran que como los libros de textos examinados se centran en un aspecto sintáctico de la división de fracciones, los profesores en formación solo identifican ese tipo de representaciones para dicha operación, como se había planteado en la HT4. Esto constituye una debilidad de los futuros profesores puesto que no tienen presentes otros tipos de representaciones, como por ejemplo, las pictóricas. En este sentido, desde la perspectiva de dicha dimensión, la comprensión de la división de fracciones de los futuros profesores, es limitada.

En los siguientes apartados se exponen las dificultades a las que hubo que enfrentarse en el proceso de la investigación, así como las implicaciones de este trabajo tanto para la enseñanza, como para futuras investigaciones.

4.5. Dificultades encontradas en el proceso de investigación

La principal dificultad a la que hubo que enfrentarse fue la de obtener un grupo de estudiantes que cumpliera con los requerimientos establecidos para el desarrollo de la investigación y que dicho grupo se comprometiera a participar en la etapa experimental de la construcción del MTL de la división de fracciones. Puesto que los 14 estudiantes que participaron formaban un grupo de la ENSM al que se accedió gracias a un profesor de la licenciatura, no todos los participantes se comprometieron en colaborar con el estudio que se estaba llevando a cabo.

Otra de las dificultades que conllevó el hecho de que el grupo no estuviera comprometido, fue que el investigador tuvo que ajustarse a los tiempos que tanto el profesor del grupo, como los alumnos tuvieran disponibles. Esta situación motivó inconvenientes al momento de hacer las entrevistas debido a que, en un primer momento cuando el investigador iba a entrevistar, ellos no estaban en la institución, lo cual provocó que pasara un tiempo considerable por situaciones ajenas al investigador para poder hacer el estudio de casos completo.

4.6. IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA

En esencia se constata que en la enseñanza se tienen en cuenta de forma limitada aspectos de las dimensiones de la comprensión del concepto división de fracciones mientras que otras prácticamente no se consideran, así como el vínculo que se puede establecer entre ellas. Este hecho provoca que los estudiantes cometan errores al resolver ciertas tareas de división de fracciones o, incluso, que no sean capaces de resolverlas. Estas dificultades, se podrían disminuir si en la enseñanza de la división de fracciones se tienen en cuenta las características de cada una de las dimensiones de la comprensión de este concepto.

El contraste de los resultados con las hipótesis deja en evidencia que la enseñanza de la división de fracciones solo se centra en un aspecto sintáctico de este concepto dejando de lado el aspecto semántico de la misma, resultados que concuerdan con investigaciones precedentes descritas en la problemática que se investigó.

En la enseñanza se debería tener en cuenta, y más aún en la formación para profesores, los distintos fenómenos que organiza la división de fracciones, pero también la existencia de diferentes algoritmos para esta tarea, generales y particulares, y porqué estos funcionan siempre o en el caso de los algoritmos particulares indagar y justificar en qué casos son válidos. En este último sentido, la justificación en matemáticas debe ser crucial en la formación de profesores y para ello es necesario que conozcan las propiedades, en este caso, de las fracciones y de las operaciones con estas.

Por último, como ya se ha dicho, el estudio de las representaciones pictóricas de la división de fracciones también se debe considerar en la enseñanza, ya que estas representaciones no solo permiten visualizar y dar sentido a la tarea que se está realizando, sino que además es un recurso que permite a los estudiantes efectuar tareas de división e incluso 'descubrir' por ellos mismos determinados algoritmos para efectuar la división.

4.7. IMPLICACIONES PARA LA INVESTIGACIÓN

Este estudio es un aporte a la investigación en educación matemática en el sentido que relaciona aspectos, según Usiskin (2015), que se deben tener en cuenta en la comprensión de un concepto matemático, en este caso de la división de fracciones.

Los resultados obtenidos permiten considerar porqué la comprensión de un concepto que tiene una persona es más difícil desde el punto de vista de ciertas dimensiones, en contraste con los aspectos de otras de las dimensiones según se han descrito en esta tesis y, cómo revertir eso. También se puede analizar, en relación a los aspectos de las dimensiones que no se tienen en cuenta en los modelos de enseñanza o se hace muy poco, por qué ocurre ello y por qué sí es importante hacerlo.

Por otra parte, este estudio constituye una base para una futura investigación que consista en determinar cómo influye en las prácticas docentes el que los profesores adquieran destrezas relacionadas con cada una de las dimensiones de la comprensión del concepto división de fracciones.

5. Referencias Bibliográficas

Alenazi, A. (2015). Examining middle school pre-service teachers' knowledge of fraction division interpretations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(5), pág. 696–716. doi:10.1080/0020739X.2015.1083127

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), pág. 389–407.

Carrasco, G. y Matínez, P. (2014). *Matemáticas 1. Integral.* Recuperado de http://libros.conaliteg.gob.mx/content/restricted/libros/carrusel.jsf?idLibro=1792

Castro-Rodríguez, E., Pitta-Pantazi, D., Rico, L., y Gómez, P. (2016). Prospective teachers' understanding of the multiplicative part-whole relationship of fraction. *Educational Studies in Mathematics*, 92(1), pág. 129–146. doi:10.1007/s10649-015-9673-4

Contreras, M. (2012). *Problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. Un estudio sobre su enseñanza y aprendizaje*. Tesis doctoral. Universitat de València.

Filloy, E y cols (1999), *Aspectos teóricos del álgebra educativa*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, DF.

Filloy, E., Rojano, T. y Puig L. (2008). *Educational Algebra. A Theorical and Empirical Approach*. New York: Springer.

Freudenthal, H. (1983). El método (Trad. Puig, L). En Puig, L (ed), *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados.* Cinvestav: México.

Freudenthal, H. (2002). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* [version eBook]. doi: 10.1007/0-306-47235-X

Gómez, B., Figueras, O., y Contreras, M. (2016). Modelos de enseñanza de los algoritmos de la división de fracciones. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 9, pág. 43–63.

Recuperado de http://www.aiem.es/index.php/aiem/article/view/147

Hiebert, J., y Behr, M. (1989). Introduction. In J. Hiebert, y M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, pág. 1–18. Virginia: Lawrence Erlbaum Associates.

Işiksal, M., y Çakiroğlu, E. (2008). Preservice teachers' knowledge of students' cognitive processes about the division of fractions. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *35*(35), pág. 175–185.

Isiksal, M., y Cakiroglu, E. (2011). The nature of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge: The case of multiplication of fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*(3), pág. 213–230.

Peña, A. (2016). *Matemáticas 1. Todos juntos.* Recuperado de http://libros.conaliteg.gob.mx/content/restricted/libros/carrusel.jsf?idLibro=2114

Puig, L., y Cerdán, F. (1988). *Problemas artiméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria,* pág. 61–94. Barcelona: Horsori

Santos Trigo, L. M (2014). *La resolución de problemas matemáticos Fundamentos cognitivos*. México: Trillas.

SEP (1999). *Plan Licenciatura en Educación Secundaria Especialidad: Matemáticas.* Recuperado de

http://www.dgespe.sep.gob.mx/public/planes/les/mod_esc/matematicas.pdf

SEP (2002). Los números y sus relaciones. *Programa de estudio Licenciatura en Educación Secundaria Especialidad: Matemáticas. Tercer semestre.* Recuperado de

http://camzac.edu.mx/newsite/doc_descarga/programas/mat/3num_rel.pdf

SEP (2011a). *Programas de estudio Guía para el Maestro Educación Básica Secundaria. Matemáticas.* Recuperado de

http://formacion.sigeyucatan.gob.mx/formacion/materiales/4/2/d2/p2/1.%20Programas%20de%20estudio%202011.pdf

SEP (2011b). *Programas de estudio Guía para el Maestro Educación Básica Primaria. Sexto grado*. Recuperado de https://zonaescolar114primarias.blogspot.mx/2011/12/plan-de-estudios-2011-y-programas-de-1.html

SEP (2011c). *Programas de estudio Guía para el Maestro Educación Básica Primaria. Quinto grado*. Recuperado de https://zonaescolar114primarias.blogspot.mx/2011/12/plan-de-estudios-2011-y-programas-de-1.html

SEP (2011d). *Programas de estudio Guía para el Maestro Educación Básica Primaria. Cuarto grado*. Recuperado de https://zonaescolar114primarias.blogspot.mx/2011/12/plan-de-estudios-2011-y-programas-de-1.html

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), pág. 4–14.

Siegler, R., et al. (2012). Early Predictors of High School Mathematics Achievement. *Psychological Science A Journal of the Association for Psychological Science*, *23*(7), pág. 691-697. doi:10.1177/0956797612440101

Trigueros, M., et al (2016). *Matemáticas 1. Horizontes.* Recuperado de http://libros.conaliteg.gob.mx/content/restricted/libros/carrusel.jsf?idLibro=2116

Usiskin, Z. (1979). The Future of Fractions. *The Arithmetic Teacher*, *26*(5), pág. 18–20. Recuperado de http://www.jstor.org/stable/41187745

Usiskin, Z. (2015). What Does It Mean to Understand Some Mathematics? In: Cho S. (eds) *Select Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education*. Springer, Cham, pág. 821–841 doi: 10.1007/978-3-319-17187-6_46.

Vergnaud, G. (2003). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas (primera edición en español, 1991)

Yim, J. (2010). Children's strategies for division by fractions in the context of the area of a rectangle. *Educational Studies in Mathematics*, 73(2), pág. 105–120. doi:10.1007/s10649-009-9206-0

APÉNDICE 1

Cuestionarios y Tablas de análisis

Cuestionario A1 – Primera parte

Parte I

Fecha: 13 /03/017 Hora de inicio: 10:00 Hora de fin: 10:40

Lee detenidamente los siguientes problemas y resuélvelos sin hacer uso de dispositivos electrónicos de cálculo y detallando lo más posible el o los procedimientos que usaste para resolverlos.

1) Se distribuyen, en igual cantidad, $35\frac{1}{2}$ lts de aceite en 71 botellas. ¿Qué cantidad de aceite contiene cada botella?

2) Un cajón donde se guardan toallas tiene $\frac{7}{8}$ m de largo. Al doblar y guardar las toallas, cada una ocupa $\frac{1}{4}$ m de largo. Considerando el largo del cajón, ¿cuántas toallas caben?

3) ¿Qué tiempo ha viajado un automóvil que a velocidad constante de 80 km/h recorrió 160/3 km?

4) Un peatón camina 4km en 5hs. ¿Cuántos km caminará en 48 min?

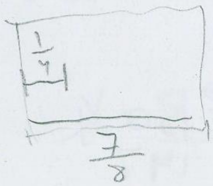
5) Un campo rectangular tiene una superficie que mide $\frac{2}{3}u^2$. Sabiendo que su ancho mide $\frac{5}{7}u$, averigua cuánto mide el largo.

6) Un tonel tiene una capacidad de 300 lts. Un grifo que da 5 lts en 3 min y otro que da 7 lts en 5 min se abren al mismo tiempo para llenarlo. ¿En cuántos minutos se llenará el tonel? ¿Cuántos litros habrá proporcionado cada grifo?

1) 70

$\frac{71}{2} \div \frac{71}{1} = \frac{71}{142} = \frac{1}{2}$ ∴ $\frac{1}{2}$ de Aceite en cada Botella

2)



$\frac{7}{8} \div \frac{1}{4} = \frac{28}{8} = 3\frac{4}{8}$

Caben 3 toallas en el Cajon

3) $V = 80 \, Km/h$

$D = \frac{160}{3} \, Km$ $\quad V = \frac{D}{T} \quad T = \frac{D}{V}$

$T = \frac{\frac{160}{3}}{80} = \frac{160}{240} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

$\begin{array}{r} 0.666 \\ 3\overline{)2.0} \\ 20 \\ 2 \end{array}$

$T = .66 \, h$

$T = 39 \, min$ $\quad \frac{1 \, h}{.66 \, h} = \frac{60 \, m}{x}$

$\begin{array}{r} .66 \\ \times 60 \\ \hline 00 \\ 396 \\ \hline 39.60 \end{array}$

4) $4 \, Km - 5 \, h$ $\quad x = 48 \, min$

$\frac{4 \, km}{x} = \frac{300 \, min}{48 \, min}$ $\quad x = \frac{4 \, km \cdot 48 \, min}{300 \, min}$

$x = \frac{192 \, km \cdot min}{300 \, min}$

$x = .64 \, km$

$\begin{array}{r} 0.64 \\ 300\overline{)1920} \\ 1800 \\ \hline 1200 \\ 1200 \\ \hline 0 \end{array}$

5)

$\boxed{\frac{2}{3} u^2} \quad \frac{5}{7}$

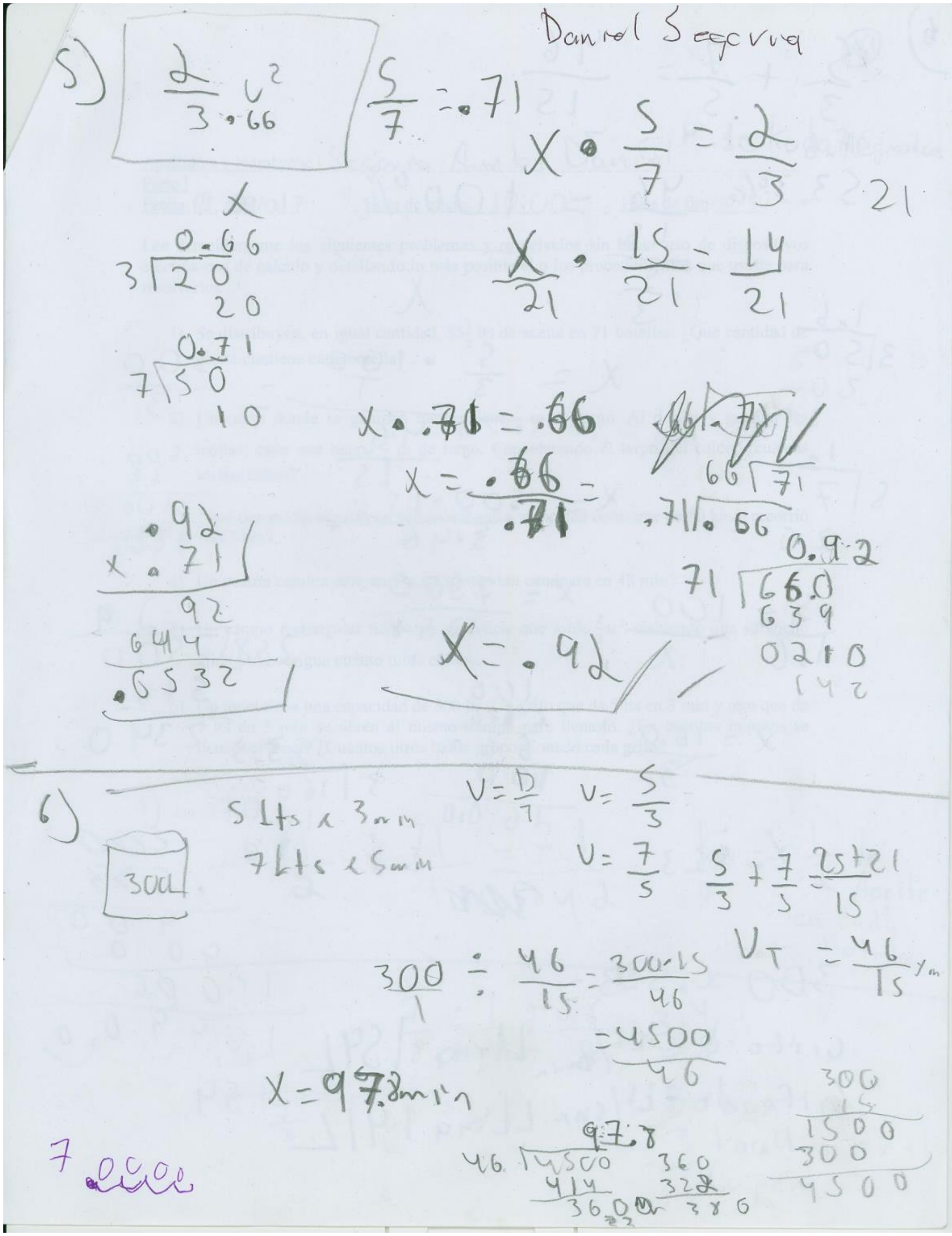
x

$x \cdot \frac{5}{7} = \frac{2}{3}$ $\qquad \frac{14}{15} \cdot \frac{5}{7} = \frac{70}{105} = \frac{14}{21}$

$x = \frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{14}{15}$ x No

$x = \frac{2}{3} \div \frac{7}{5} = \frac{10}{21} \cdot \frac{5}{7} = \frac{50}{147}$

$\begin{array}{r} 14 \\ 5\overline{)70} \\ 20 \\ 21 \\ 5\overline{)105} \\ 05 \end{array}$



Daniel Segovia

5) $\boxed{\frac{2}{3} = .66}$ $\frac{5}{7} = .71$

$X \cdot \frac{5}{7} = \frac{2}{3}$ 21

$\frac{X}{21} \cdot \frac{15}{21} = \frac{14}{21}$

$3\overline{)2\,0}$ 0.66

20

$7\overline{)5\,0}$ 0.71

10

$X \cdot .71 = .66$

$X = \frac{.66}{.71} =$

$.71\overline{).66}$

$71\overline{)66.0}$ 0.92

639

0210

142

$X = .92$

.92 × .71

92

644

.6532

6) 5 Lts x 3 min

7 Lts x 5 min

$\boxed{300L}$

$V = \frac{D}{T}$ $V = \frac{5}{3}$

$V = \frac{7}{5}$ $\frac{5}{3} + \frac{7}{5} = \frac{25+21}{15}$

$V_T = \frac{46}{15}$ l/m

$\frac{300}{1} \div \frac{46}{15} = \frac{300 \cdot 15}{46}$

$= \frac{4500}{46}$

$X = 97.8$ min

300

15

1500

300

4500

$46\overline{)4500}$ 97.8

414

360

322

380

7

b)

$\frac{5}{3} + \frac{7}{5} = \frac{46}{15}$

1.6 . 1.4 = 3

53.3%

$\frac{\frac{46}{15}}{\frac{5}{3}} = \frac{100\%}{X}$

$3\overline{)50}$ = 1.6
20
2

$5\overline{)7}$ = 1.4
20

$X = \frac{5}{3} \cdot \frac{100}{1} = \frac{500}{3}$

$\frac{500}{3} : \frac{46}{15}$

$X = \frac{500 \cdot 15}{3 \cdot 46} =$

500
× 15
2500
500
7500

$X = \frac{7500}{258}$

$258\overline{)7500}$ = 29
516
2340

$\frac{3}{1.6} = \frac{100}{X}$

$X = \frac{160}{3}$

100
× 1.6
600
100
160.0

$3\overline{)160}$ = 53.3
10
10

$X = 53.3$

~~300~~

300 × .533 =

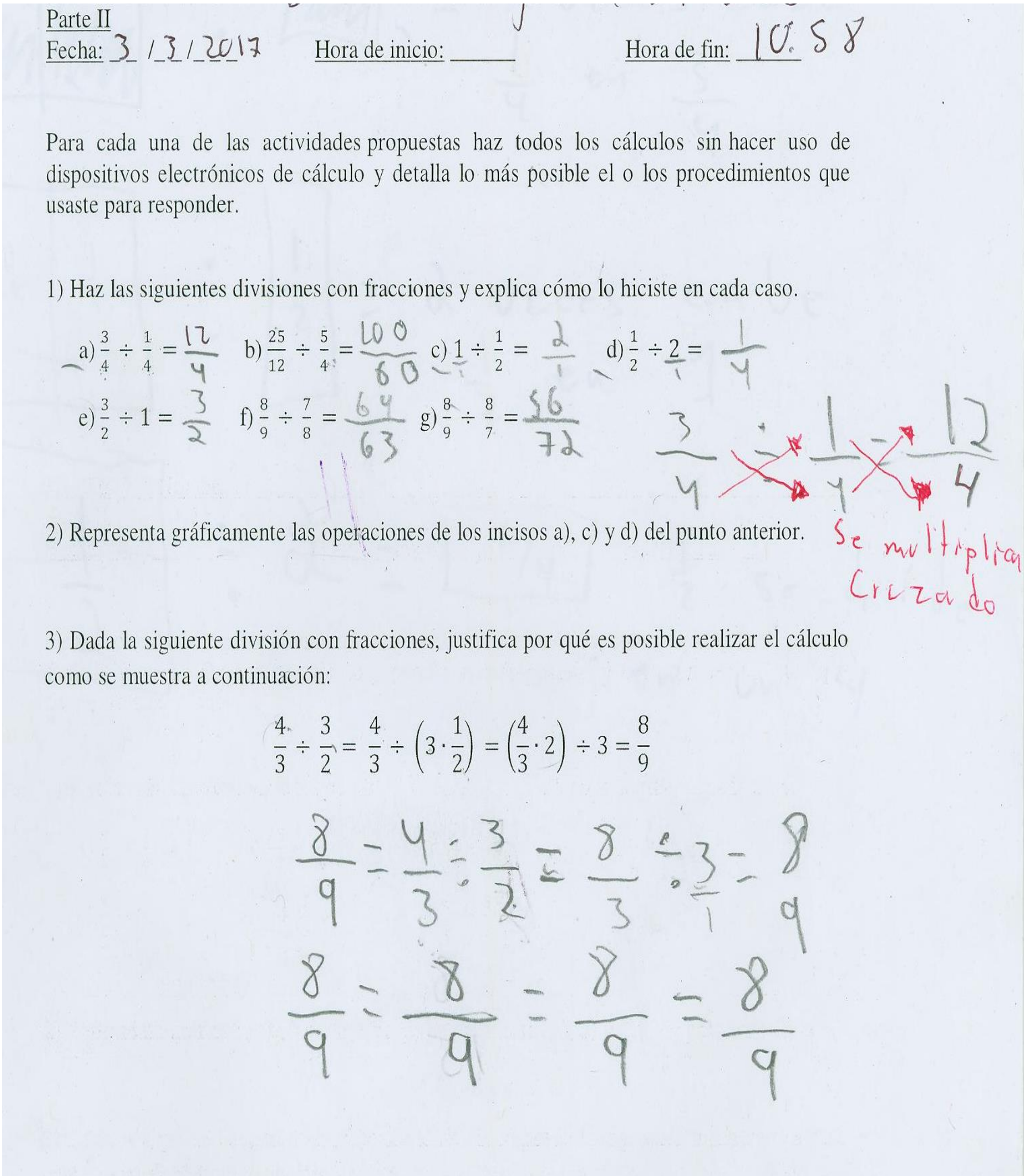
300
× .533
900
900
1500
159.900

Grifo de 5Lt/3min Llena 154L

Grifo de 7Lt/5min Llena 141L

159

Cuestionario A1 – Segunda Parte



Parte II

Fecha: 3 / 3 / 2017 Hora de inicio: ______ Hora de fin: 10.58

Para cada una de las actividades propuestas haz todos los cálculos sin hacer uso de dispositivos electrónicos de cálculo y detalla lo más posible el o los procedimientos que usaste para responder.

1) Haz las siguientes divisiones con fracciones y explica cómo lo hiciste en cada caso.

a) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} = \frac{12}{4}$ b) $\frac{25}{12} \div \frac{5}{4} = \frac{100}{60}$ c) $\frac{1}{1} \div \frac{1}{2} = \frac{2}{1}$ d) $\frac{1}{2} \div \frac{2}{1} = \frac{1}{4}$

e) $\frac{3}{2} \div 1 = \frac{3}{2}$ f) $\frac{8}{9} \div \frac{7}{8} = \frac{64}{63}$ g) $\frac{8}{9} \div \frac{8}{7} = \frac{56}{72}$

$\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} = \frac{12}{4}$

Se multiplica cruzado

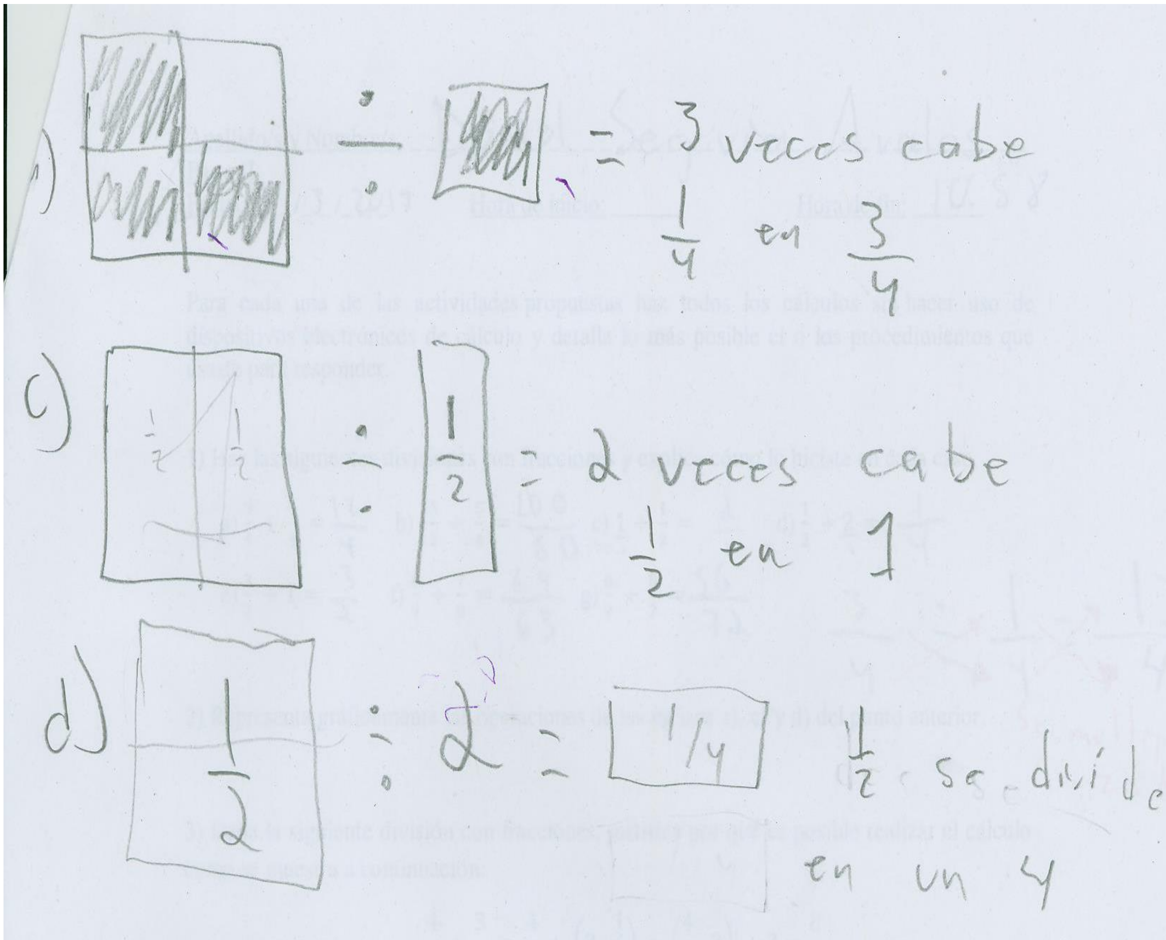
2) Representa gráficamente las operaciones de los incisos a), c) y d) del punto anterior.

3) Dada la siguiente división con fracciones, justifica por qué es posible realizar el cálculo como se muestra a continuación:

$$\frac{4}{3} \div \frac{3}{2} = \frac{4}{3} \div \left(3 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{4}{3} \cdot 2\right) \div 3 = \frac{8}{9}$$

$$\frac{8}{9} = \frac{4}{3} \div \frac{3}{2} = \frac{8}{3} \div \frac{3}{1} = \frac{8}{9}$$

$$\frac{8}{9} = \frac{8}{9} = \frac{8}{9} = \frac{8}{9}$$


= 3 veces cabe
1/4 en 3/4
c)
1/2 1/2
1/2 = 2 veces cabe
1/2 en 1
d)
1/2 ÷ 2 = 1/4
1/2 se divide
en un 4

Cuestionario A2 – Primera parte

Parte I

Fecha: 03 /03 /2017 Hora de inicio: 10:00 Hora de fin: 10 :36

Lee detenidamente los siguientes problemas y resuélvelos sin hacer uso de dispositivos electrónicos de cálculo y detallando lo más posible el o los procedimientos que usaste para resolverlos.

1) Se distribuyen, en igual cantidad, $35\frac{1}{2}$ lts de aceite en 71 botellas. ¿Qué cantidad de aceite contiene cada botella? .4 lts

2) Un cajón donde se guardan toallas tiene $\frac{7}{8}$ m de largo. Al doblar y guardar las toallas, cada una ocupa $\frac{1}{4}$ m de largo. Considerando el largo del cajón, ¿cuántas toallas caben? 3 toallas

3) ¿Qué tiempo ha viajado un automóvil que a velocidad constante de 80 km/h recorrió 160/3 km?

4) Un peatón camina 4km en 5hs. ¿Cuántos km caminará en 48 min? .53 km

5) Un campo rectangular tiene una superficie que mide $\frac{2}{3}u^2$. Sabiendo que su ancho mide $\frac{5}{7}u$, averigua cuánto mide el largo.

6) Un tonel tiene una capacidad de 300 lts. Un grifo que da 5 lts en 3 min y otro que da 7 lts en 5 min se abren al mismo tiempo para llenarlo. ¿En cuántos minutos se llenará el tonel? ¿Cuántos litros habrá proporcionado cada grifo?

R1 = 200 min
R2 = 125 y 175 Lts

1.- 35.5 - 71
x - 1

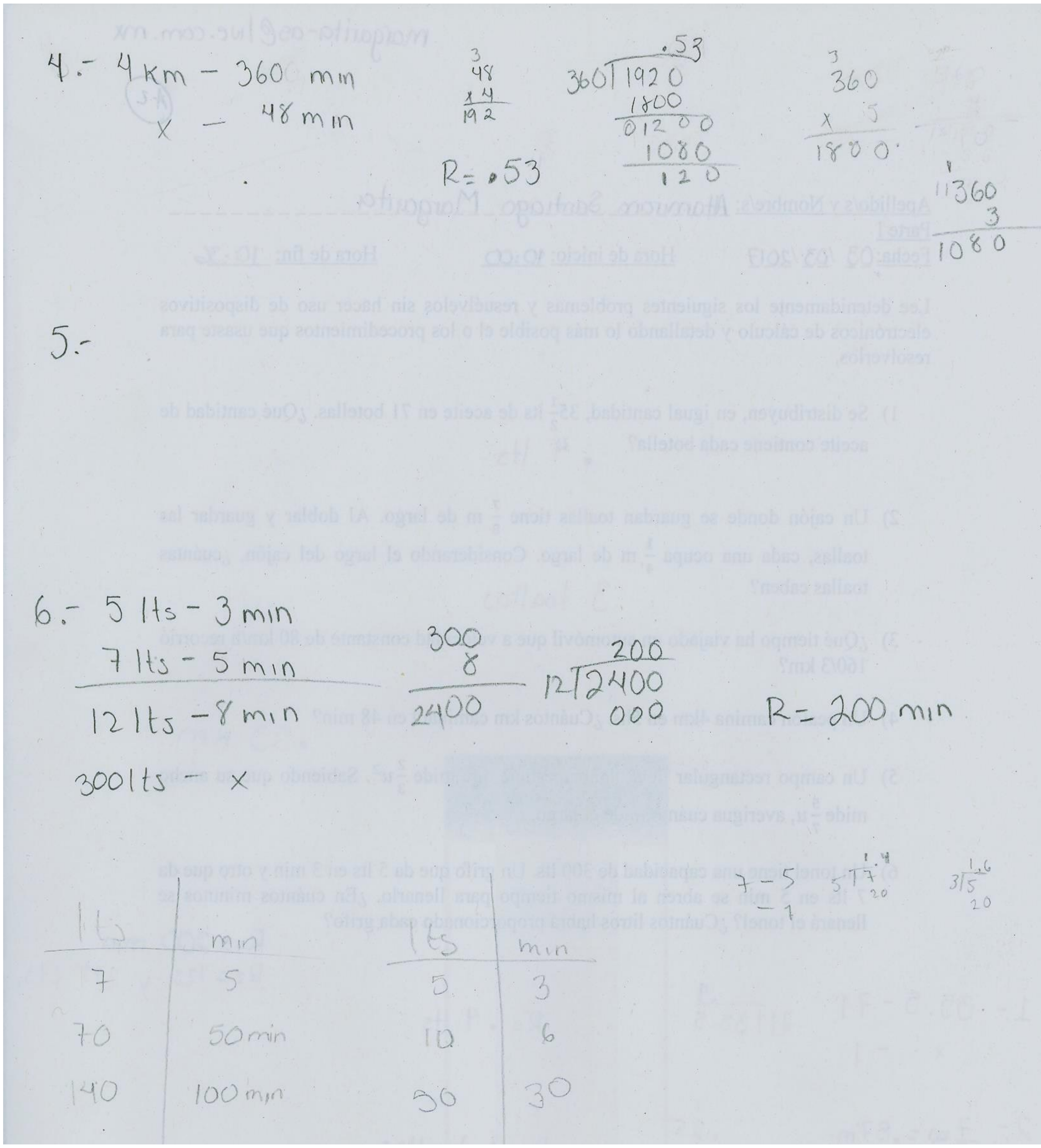
$71\overline{)35.5}$ .4

R= .4 lts

2: $\frac{7}{8}$m = .87m
$\frac{1}{4}$m = .25m

.25
x 3
.75

R= 3 toallas



4.- 4 km – 360 min
x – 48 min

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times 4 \\ \hline 192 \end{array}$$

$$360 \overline{)1920}$$ = .53
1800
01200
1080
120

$$\begin{array}{r} 360 \\ \times 5 \\ \hline 1800 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 360 \\ \times 3 \\ \hline 1080 \end{array}$$

R = .53

5.-

6.- 5 lts – 3 min
7 lts – 5 min
12 lts – 8 min
300 lts – x

$$\begin{array}{r} 300 \\ \times 8 \\ \hline 2400 \end{array}$$

$$12 \overline{)2400}$$ = 200
000

R = 200 min

7 – 5
– 1

$5 \overline{)7}$ = 1.4, 20

$3 \overline{)5}$ = 1.6, 20

lts	min
7	5
70	50 min
140	100 min

lts	min
5	3
10	6
50	30

Cuestionario A2 – Segunda parte

Parte II

Fecha: 03 /03 /2017 Hora de inicio: 10:36 Hora de fin: 10:58

Para cada una de las actividades propuestas haz todos los cálculos sin hacer uso de dispositivos electrónicos de cálculo y detalla lo más posible el o los procedimientos que usaste para responder.

1) Haz las siguientes divisiones con fracciones y explica cómo lo hiciste en cada caso.

a) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} =$ b) $\frac{25}{12} \div \frac{5}{4} =$ c) $1 \div \frac{1}{2} =$ d) $\frac{1}{2} \div 2 =$

e) $\frac{3}{2} \div 1 =$ f) $\frac{8}{9} \div \frac{7}{8} =$ g) $\frac{8}{9} \div \frac{8}{7} =$

2) Representa gráficamente las operaciones de los incisos a), c) y d) del punto anterior.

3) Dada la siguiente división con fracciones, justifica por qué es posible realizar el cálculo como se muestra a continuación:

$$\frac{4}{3} \div \frac{3}{2} = \frac{4}{3} \div \left(3 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{4}{3} \cdot 2\right) \div 3 = \frac{8}{9}$$

1.-

a) $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{12}{4}$

b) $\dfrac{\frac{25}{12}}{\frac{5}{4}} = \frac{100}{60} = \frac{50}{30} = \frac{25}{15} = \frac{4}{3}$

c) $\dfrac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{1} = 2$

d) $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{1}} = \frac{1}{4}$

e) $\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{1}} = \frac{3}{2}$

f) $\dfrac{\frac{8}{9}}{\frac{7}{8}} = \frac{64}{63}$

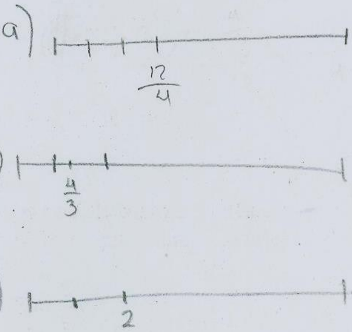
g) $\dfrac{\frac{8}{9}}{\frac{8}{7}} = \frac{63}{72}$

2)

a)

b)

c)



3.- Por lo que observo, la fracción que se descompone es $\frac{3}{2}$

ya sea: $\frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$ o $\left(\frac{4}{3} \cdot 2\right) \div 3 = \left(\frac{4}{3} \div \frac{3}{2}\right)$

así que da igual, al multiplicar o despejar el resultado de $\frac{3}{2}$

Cuestionario A3 – Primera parte

Parte I

Fecha: 03 /03/2017 Hora de inicio: 10:00 a.m. Hora de fin: 10:36

Lee detenidamente los siguientes problemas y resuélvelos sin hacer uso de dispositivos electrónicos de cálculo y detallando lo más posible el o los procedimientos que usaste para resolverlos.

1) Se distribuyen, en igual cantidad, $35\frac{1}{2}$ lts de aceite en 71 botellas. ¿Qué cantidad de aceite contiene cada botella?

2) Un cajón donde se guardan toallas tiene $\frac{7}{8}$ m de largo. Al doblar y guardar las toallas, cada una ocupa $\frac{1}{4}$ m de largo. Considerando el largo del cajón, ¿cuántas toallas caben?

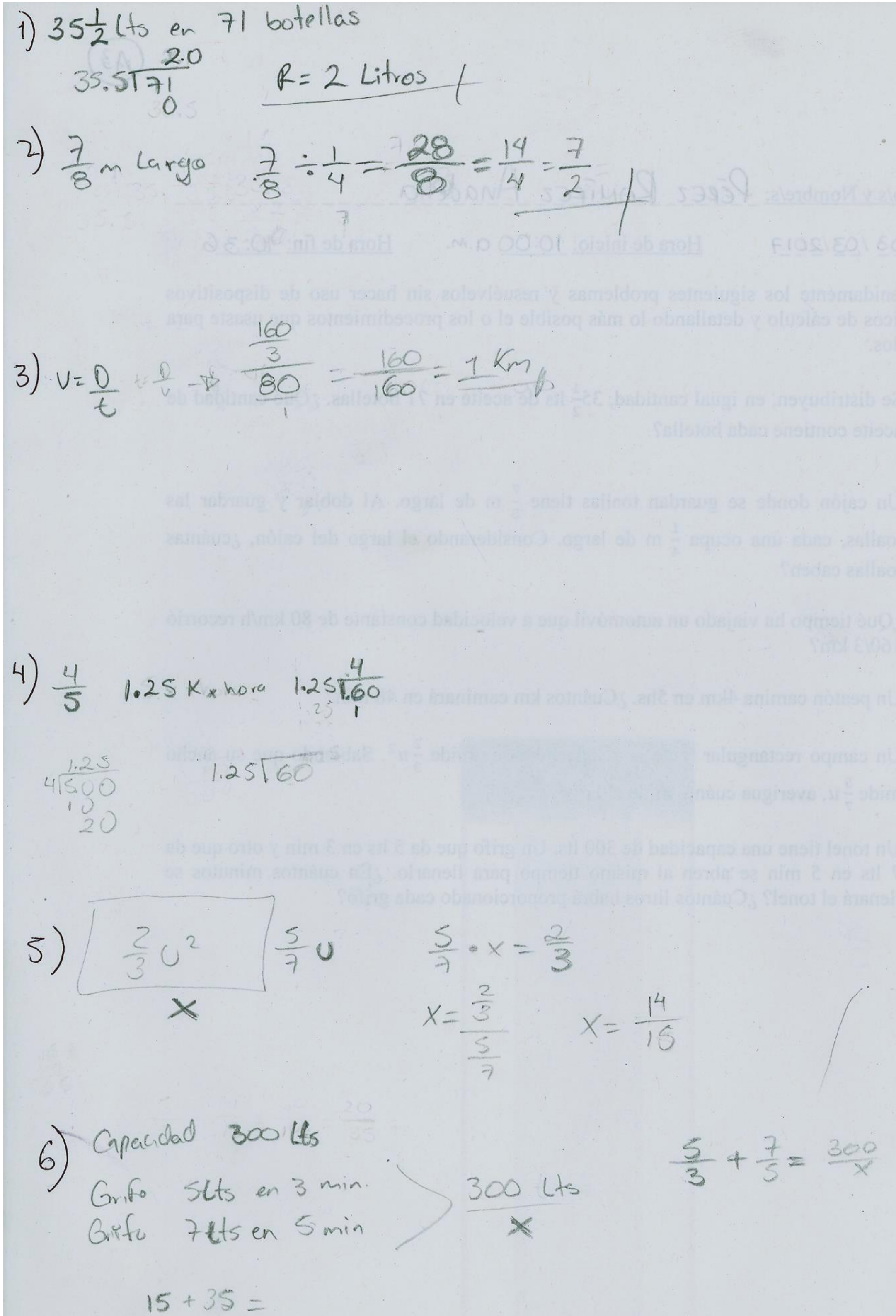
3) ¿Qué tiempo ha viajado un automóvil que a velocidad constante de 80 km/h recorrió 160/3 km?

4) Un peatón camina 4km en 5hs. ¿Cuántos km caminará en 48 min?

5) Un campo rectangular tiene una superficie que mide $\frac{2}{3}u^2$. Sabiendo que su ancho mide $\frac{5}{7}u$, averigua cuánto mide el largo.

6) Un tonel tiene una capacidad de 300 lts. Un grifo que da 5 lts en 3 min y otro que da 7 lts en 5 min se abren al mismo tiempo para llenarlo. ¿En cuántos minutos se llenará el tonel? ¿Cuántos litros habrá proporcionado cada grifo?

$\frac{5}{3}$



1) $35\frac{1}{2}$ Lts en 71 botellas

$35.5 \overline{)71}$ 2.0 — 0

R= 2 Litros

2) $\frac{7}{8}$ m Largo $\frac{7}{8} \div \frac{1}{4} = \frac{28}{8} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$

3) $V = \frac{D}{t}$ $\frac{\frac{160}{3}}{80} = \frac{160}{160} = 1$ Km

4) $\frac{4}{5}$ 1.25 K x hora $1.25 \overline{)1.60}$

$4 \overline{)5.00}$ 1.25

$1.25 \overline{)60}$

5) $\frac{2}{3} u^2$ $\frac{5}{7} u$ x

$\frac{5}{7} \cdot x = \frac{2}{3}$

$x = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}$ $x = \frac{14}{15}$

6) Capacidad 300 Lts

Grifo 5Lts en 3 min.

Grifo 7Lts en 5 min

$\frac{300 \text{ Lts}}{x}$

$\frac{5}{3} + \frac{7}{5} = \frac{300}{x}$

15 + 35 =

Cuestionario A3 – Segunda parte

Parte II

Fecha: 03/03/2017 Hora de inicio: 10:37 Hora de fin: 10:53

Para cada una de las actividades propuestas haz todos los cálculos sin hacer uso de dispositivos electrónicos de cálculo y detalla lo más posible el o los procedimientos que usaste para responder.

1) Haz las siguientes divisiones con fracciones y explica cómo lo hiciste en cada caso.

Numerador

a) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} = \frac{12}{4} = \frac{6}{2} = 3$ b) $\frac{25}{12} \div \frac{5}{4} = \frac{25}{15}$ c) $1 \div \frac{1}{2} = 2$ d) $\frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{4}$

Denominador

e) $\frac{3}{2} \div 1 = \frac{3}{2}$ f) $\frac{8}{9} \div \frac{7}{8} = \frac{64}{63}$ g) $\frac{8}{9} \div \frac{8}{7} = \frac{7}{9}$

b) $\begin{array}{r}25\\ \times 4\\ \hline 100\end{array}$ $\begin{array}{r}12\\ \times 5\\ \hline 60\end{array}$

$\frac{100}{60} = \frac{50}{30} = \frac{25}{15} =$

c) $\frac{1}{2}\times\frac{2}{1}$

d) $\frac{1}{4}$

e) $\frac{3}{2}$

f) $\frac{64}{63} =$

g) $\frac{56}{72} = \frac{28}{36} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$

2) Representa gráficamente las operaciones de los incisos a), c) y d) del punto anterior.

3) Dada la siguiente división con fracciones, justifica por qué es posible realizar el cálculo como se muestra a continuación:

$$\frac{4}{3} \div \frac{3}{2} = \frac{4}{3} \div \left(3 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{4}{3} \cdot 2\right) \div 3 = \frac{8}{9}$$

$$\frac{4}{3} \div \frac{3}{2} = \frac{4}{3} \div \frac{3}{2} = \frac{8}{3} \div 3 = \frac{8}{9}$$

$$\frac{8}{9} = \frac{8}{9} = \frac{8}{9} = \frac{8}{9}$$

3) $\frac{8}{9} =$

2A

Cuestionario A4 – Primera parte

Parte I

Fecha: 02 / 03 / 17 Hora de inicio: 10:00 am Hora de fin: 10:35

Lee detenidamente los siguientes problemas y resuélvelos sin hacer uso de dispositivos electrónicos de cálculo y detallando lo más posible el o los procedimientos que usaste para resolverlos.

1) Se distribuyen, en igual cantidad, $35\frac{1}{2}$ lts de aceite en 71 botellas. ¿Qué cantidad de aceite contiene cada botella?

3

•5 lts.

2) Un cajón donde se guardan toallas tiene $\frac{7}{8}$ m de largo. Al doblar y guardar las toallas, cada una ocupa $\frac{1}{4}$ m de largo. Considerando el largo del cajón, ¿cuántas toallas caben?

$\frac{28}{8}$ = 7 toallas

3) ¿Qué tiempo ha viajado un automóvil que a velocidad constante de 80 km/h recorrió 160/3 km?

$\frac{160}{240} = \frac{2}{3}$ t

4) Un peatón camina 4km en 5hs. ¿Cuántos km caminará en 48 min?

•6 Km

5) Un campo rectangular tiene una superficie que mide $\frac{2}{3}u^2$. Sabiendo que su ancho mide $\frac{5}{7}u$, averigua cuánto mide el largo.

$\frac{14}{15}$ u

6) Un tonel tiene una capacidad de 300 lts. Un grifo que da 5 lts en 3 min y otro que da 7 lts en 5 min se abren al mismo tiempo para llenarlo. ¿En cuántos minutos se llenará el tonel? ¿Cuántos litros habrá proporcionado cada grifo?

1) $\frac{4500}{46}$ -> en 97.7 minutos

2) Un grifo -> $\frac{13500}{230}$

Dos grif -> $\frac{31500}{230}$

Problema 3 = $v = \frac{d}{t}$ $t = \frac{d}{v}$ $d = 160/3$ Km $v = 80$ Km/hr $\frac{160}{3} \div \frac{80}{1} = \frac{160}{240}$

$\frac{160}{240} = \frac{8}{3}$ t

Problema 4)

4Km = 300 min.

48 min.

$48 \times 4 = 192$

$300\overline{)1920}$ 6, 120

$300\overline{)11.92}$ .006

$4\overline{)15}$ 1.2 1920 − 1800 0120

Problema 5) $\boxed{\frac{2}{3}v^2}$

$\frac{5}{7}v$

$\frac{5}{7} \cdot x = \frac{2}{3}$

~~$x = \frac{2}{3} - \frac{5}{7} = \frac{14-15}{21} = -\frac{1}{21}$~~

$x = \frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{14}{15}$

$14 \times 5 = 70$ $\frac{70}{105} = \frac{2}{3}$

$\frac{14}{15} \cdot \frac{5}{7} = \frac{70}{105} = \frac{2}{3}$

$15 \times 7 = 105$

$7\overline{)300}$ 75

Problema 6) 5 lts = 3 min

7 Lts = 3 min.

$\frac{3}{3} + \frac{7}{5} = \frac{25+21}{15} = \frac{46}{15}$ Lts / 15 min

$46\overline{)300}$ 6

$46 \times 8 = 368$ $46 \times 7 = 322$ $46 \times 6 = 276$ $300 \times 15 = 1500$, 300, 4500

$46\overline{)4500}$ 97.7 360 380 360 − 322 38

$46 \times 9 = 414$ 450 − 414 36

46 Lts = 15 min

300 Lts =

Problema 1)

$71\overline{)35.5}$ .5

$71 \times .5 = 35.5$

$71 \times 5 = 355$

Problema 2)

$\frac{7}{8} \div \frac{1}{4} = \frac{28}{8} =$

Problema 6

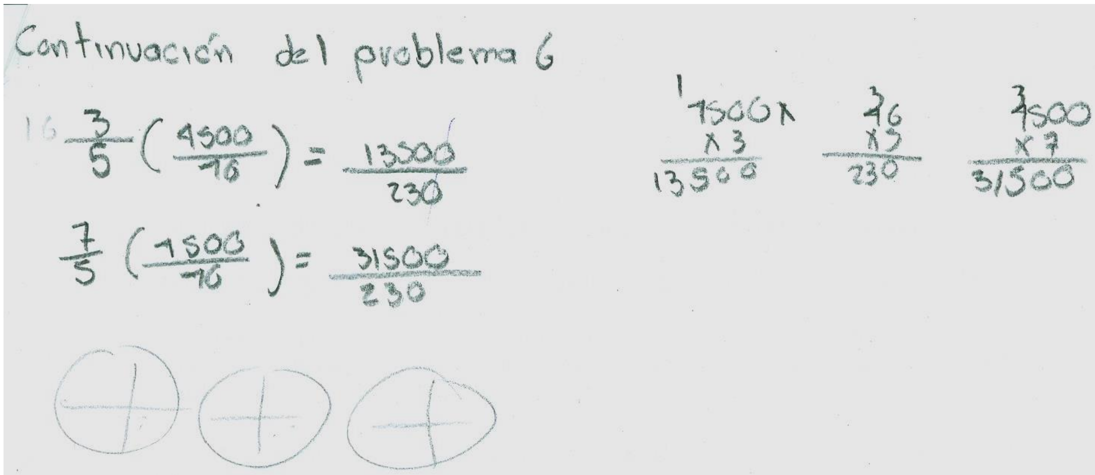
$\frac{3}{5}x + \frac{7}{5}x = 300$ Lts

$\frac{46}{15}x = 300$ Lts

$x = \frac{300}{46/15}$

$\frac{300}{1} \div \frac{46}{15} = \frac{4500}{46}$

$300 \times 15 = 1500$, 300, 4500

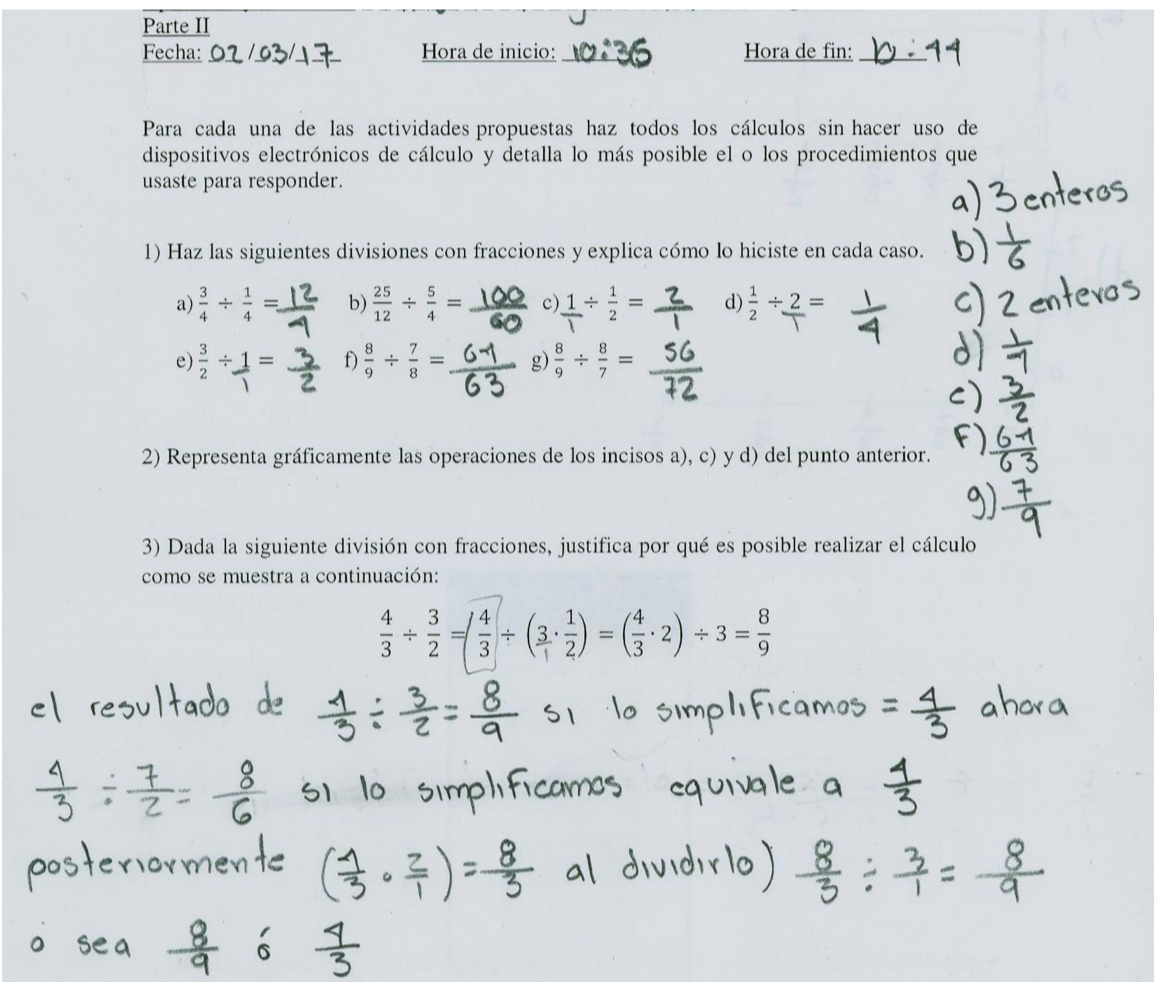

Continuación del problema 6

16 $\frac{3}{5}\left(\frac{4500}{46}\right) = \frac{13500}{230}$

$\frac{7}{5}\left(\frac{4500}{46}\right) = \frac{31500}{230}$

$4500 \times 3 = 13500$ $\quad 46 \times 5 = 230$ $\quad 4500 \times 7 = 31500$

Cuestionario A4 – Segunda parte


Parte II

Fecha: 02/03/17 Hora de inicio: 10:36 Hora de fin: 10:44

Para cada una de las actividades propuestas haz todos los cálculos sin hacer uso de dispositivos electrónicos de cálculo y detalla lo más posible el o los procedimientos que usaste para responder.

1) Haz las siguientes divisiones con fracciones y explica cómo lo hiciste en cada caso.

a) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} = \frac{12}{4}$ b) $\frac{25}{12} \div \frac{5}{4} = \frac{100}{60}$ c) $\frac{1}{1} \div \frac{1}{2} = \frac{2}{1}$ d) $\frac{1}{2} \div \frac{2}{1} = \frac{1}{4}$

e) $\frac{3}{2} \div \frac{1}{1} = \frac{3}{2}$ f) $\frac{8}{9} \div \frac{7}{8} = \frac{64}{63}$ g) $\frac{8}{9} \div \frac{8}{7} = \frac{56}{72}$

a) 3 enteros

b) $\frac{1}{6}$

c) 2 enteros

d) $\frac{1}{4}$

e) $\frac{3}{2}$

f) $\frac{64}{63}$

g) $\frac{7}{9}$

2) Representa gráficamente las operaciones de los incisos a), c) y d) del punto anterior.

3) Dada la siguiente división con fracciones, justifica por qué es posible realizar el cálculo como se muestra a continuación:

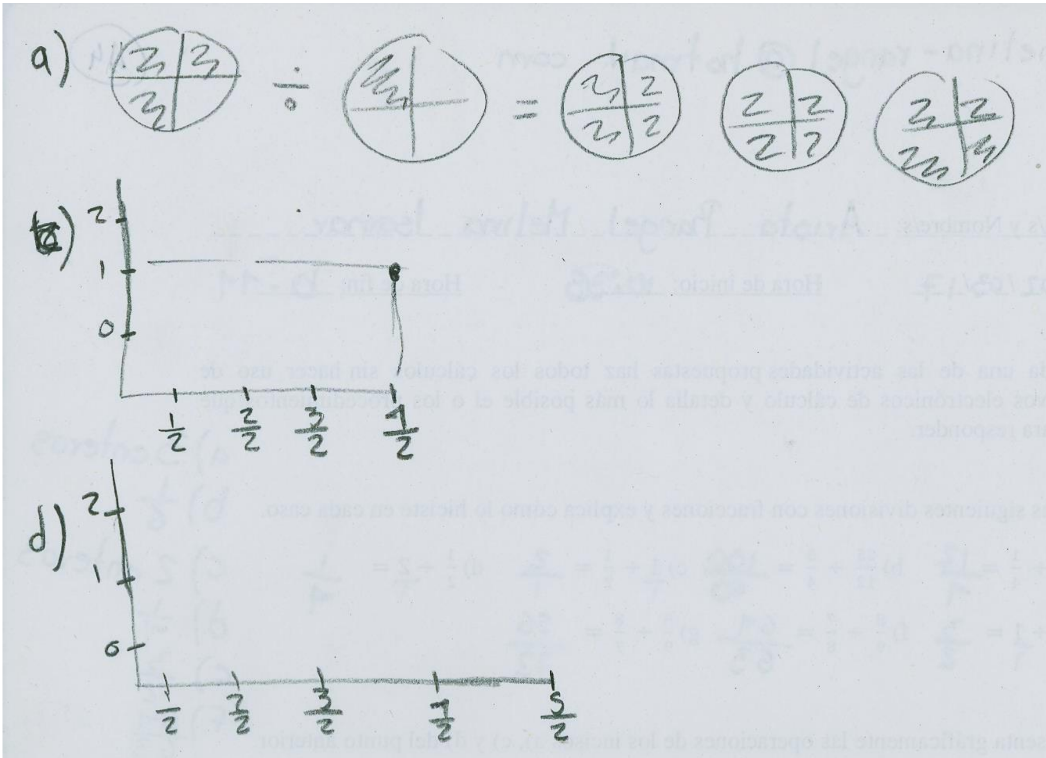
$$\frac{4}{3} \div \frac{3}{2} = \boxed{\frac{4}{3}} \div \left(\frac{3}{1} \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{4}{3} \cdot 2\right) \div 3 = \frac{8}{9}$$

el resultado de $\frac{4}{3} \div \frac{3}{2} = \frac{8}{9}$ si lo simplificamos $= \frac{4}{3}$ ahora

$\frac{4}{3} \div \frac{7}{2} = \frac{8}{6}$ si lo simplificamos equivale a $\frac{4}{3}$

posteriormente $\left(\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{1}\right) = \frac{8}{3}$ al dividirlo) $\frac{8}{3} \div \frac{3}{1} = \frac{8}{9}$

o sea $\frac{8}{9}$ ó $\frac{4}{3}$


a)
÷
=
2
1
0
1/2
2/2
3/2
4/2
d)
2
1
0
1/2
2/2
3/2
4/2
5/2

Cuestionario A5 – Primera parte

Parte I

Fecha: 03 / 03 / 2017 Hora de inicio: 10:00 Hora de fin: 10:34

Lee detenidamente los siguientes problemas y resuélvelos sin hacer uso de dispositivos electrónicos de cálculo y detallando lo más posible el o los procedimientos que usaste para resolverlos.

1) Se distribuyen, en igual cantidad, $35\frac{1}{2}$ lts de aceite en 71 botellas. ¿Qué cantidad de aceite contiene cada botella?

2) Un cajón donde se guardan toallas tiene $\frac{7}{8}$ m de largo. Al doblar y guardar las toallas, cada una ocupa $\frac{1}{4}$ m de largo. Considerando el largo del cajón, ¿cuántas toallas caben?

3) ¿Qué tiempo ha viajado un automóvil que a velocidad constante de 80 km/h recorrió 160/3 km?

4) Un peatón camina 4km en 5hs. ¿Cuántos km caminará en 48 min?

5) Un campo rectangular tiene una superficie que mide $\frac{2}{3}u^2$. Sabiendo que su ancho mide $\frac{5}{7}u$, averigua cuánto mide el largo.

6) Un tonel tiene una capacidad de 300 lts. Un grifo que da 5 lts en 3 min y otro que da 7 lts en 5 min se abren al mismo tiempo para llenarlo. ¿En cuántos minutos se llenará el tonel? ¿Cuántos litros habrá proporcionado cada grifo?

1) 35.5 Lts
71 Botellas

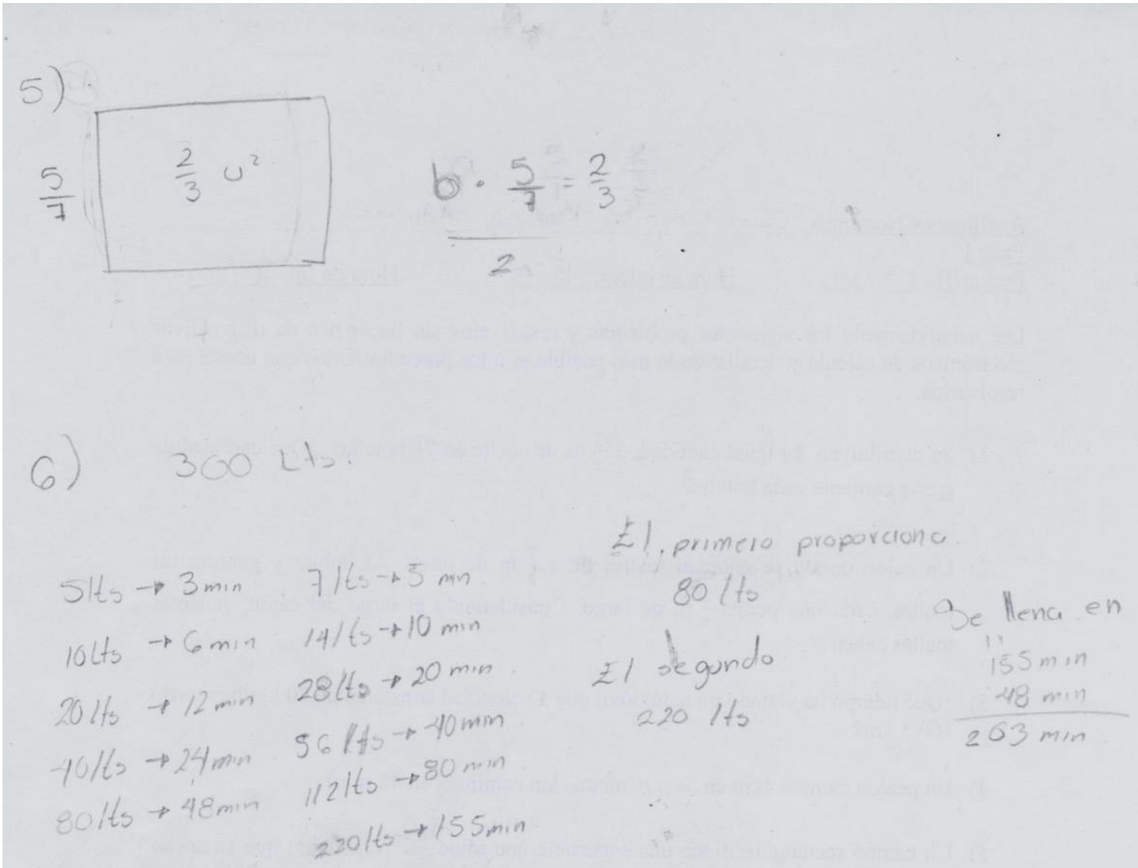
$71 \overline{)35.5}$ = .5
-35.5
0

$71 \times 5 = 355$

2) $\frac{7}{8}$ $\frac{1}{4}$ 14 veces

3) V = 80 Km/h $\frac{160}{3}$ Km =

4) 4 Km → 5 hs
x Km → 48 min



5)

$\frac{5}{7}$ $\quad \frac{2}{3}\ u^2$

$$\frac{b \cdot \frac{5}{7}}{2} = \frac{2}{3}$$

6) 300 Lts.

5lts → 3 min   7 lts → 5 mn
10Lts → 6 min   14 lts → 10 min
20 lts → 12 min   28 lts → 20 min
40 lts → 24 min   56 lts → 40 mm
80 lts → 48 min   112 lts → 80 min
220 lts → 155 min

El primero proporciona 80 lts

El segundo 220 lts

Se llena en
155 min
48 min
263 min

Cuestionario A5 – Segunda parte

Parte II

Fecha: 03/03/2017 Hora de inicio: 10:36 Hora de fin: 10:54

Para cada una de las actividades propuestas haz todos los cálculos sin hacer uso de dispositivos electrónicos de cálculo y detalla lo más posible el o los procedimientos que usaste para responder.

1) Haz las siguientes divisiones con fracciones y explica cómo lo hiciste en cada caso.

a) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} =$ b) $\frac{25}{12} \div \frac{5}{4} =$ c) $1 \div \frac{1}{2} =$ d) $\frac{1}{2} \div 2 =$

e) $\frac{3}{2} \div 1 =$ f) $\frac{8}{9} \div \frac{7}{8} =$ g) $\frac{8}{9} \div \frac{8}{7} =$

2) Representa gráficamente las operaciones de los incisos a), c) y d) del punto anterior.

3) Dada la siguiente división con fracciones, justifica por qué es posible realizar el cálculo como se muestra a continuación:

$$\frac{4}{3} \div \frac{3}{2} = \frac{4}{3} \div \left(3 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{4}{3} \cdot 2\right) \div 3 = \frac{8}{9}$$

1)

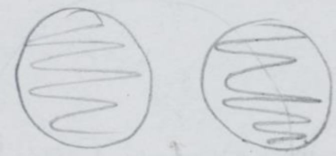
a) $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{12}{4} = 3$ b) $\dfrac{\frac{25}{12}}{\frac{5}{4}} = \frac{125}{60}$ c) $\dfrac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{1} = 2$ d) $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{1}} = \frac{1}{4}$

e) $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{1}} = \frac{3}{4}$ f) $\dfrac{\frac{8}{9}}{\frac{7}{8}} = \frac{64}{63}$ g) $\dfrac{\frac{8}{9}}{\frac{8}{7}} = \frac{64}{72}$

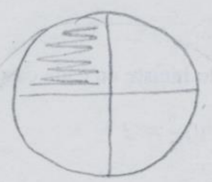
Multiplique los extremos de las fracciones, la (de forma cruzada)

2) a)

b)



c)



3) Porque al realizar la primera operación el resultado es $\frac{4}{3} \div \frac{3}{2} = \frac{8}{9}$ siempre el resultado será $\frac{8}{9}$ al resolver cada uno por lo tanto son iguales

$$\frac{4}{3} \div 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3} \div \frac{3}{2} = \frac{8}{9}$$

$$\left(\frac{4}{3} \cdot 2\right) \div 3 = \frac{8}{3} \div \frac{3}{1} = \frac{8}{9}$$

$$= \frac{8}{9}$$

Cuestionario A6 – Primera parte

Parte I

Fecha: 3 / 3 / 2017 **Hora de inicio:** 10:00 am **Hora de fin:** 10:30 am

Lee detenidamente los siguientes problemas y resuélvelos sin hacer uso de dispositivos electrónicos de cálculo y detallando lo más posible el o los procedimientos que usaste para resolverlos.

1) Se distribuyen, en igual cantidad, $35\frac{1}{2}$ lts de aceite en 71 botellas. ¿Qué cantidad de aceite contiene cada botella? Un litro

2) Un cajón donde se guardan toallas tiene $\frac{7}{8}$ m de largo. Al doblar y guardar las toallas, cada una ocupa $\frac{1}{4}$ m de largo. Considerando el largo del cajón, ¿cuántas toallas caben? Seis

3) ¿Qué tiempo ha viajado un automóvil que a velocidad constante de 80 km/h recorrió 160/3 km? 2 horas

4) Un peatón camina 4km en 5hs. ¿Cuántos km caminará en 48 min? 0.64 km

5) Un campo rectangular tiene una superficie que mide $\frac{2}{3}u^2$. Sabiendo que su ancho mide $\frac{5}{7}u$, averigua cuánto mide el largo. 0.5

6) Un tonel tiene una capacidad de 300 lts. Un grifo que da 5 lts en 3 min y otro que da 7 lts en 5 min se abren al mismo tiempo para llenarlo. ¿En cuántos minutos se llenará el tonel? ¿Cuántos litros habrá proporcionado cada grifo?

$35\frac{1}{2}$

$71 \div 71 = 1$

0.6

0.7

0.14

0.12

5L 3min

7L 5 min

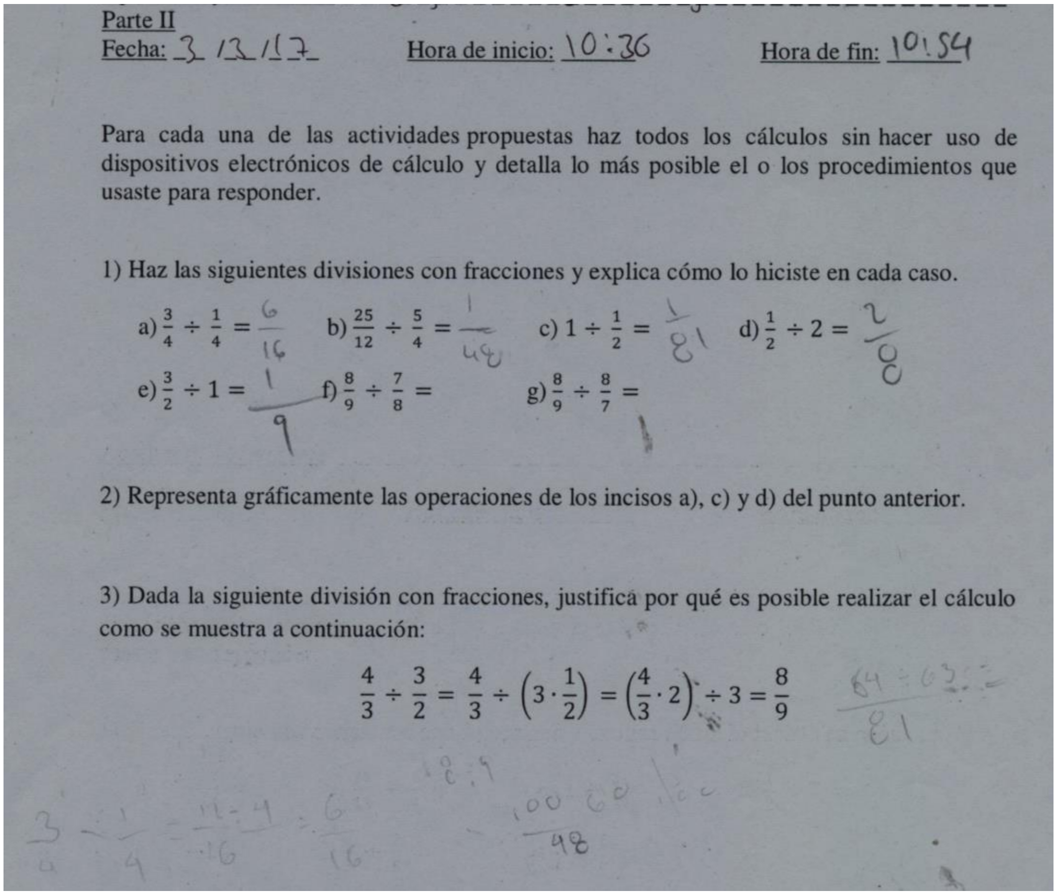
70

14

26

$\frac{4}{5} + \frac{10}{14}$

Cuestionario A6 – Segunda parte



Parte II

Fecha: 3 /13 /17 Hora de inicio: 10:36 Hora de fin: 10:54

Para cada una de las actividades propuestas haz todos los cálculos sin hacer uso de dispositivos electrónicos de cálculo y detalla lo más posible el o los procedimientos que usaste para responder.

1) Haz las siguientes divisiones con fracciones y explica cómo lo hiciste en cada caso.

a) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} = \frac{6}{16}$ b) $\frac{25}{12} \div \frac{5}{4} = \frac{1}{48}$ c) $1 \div \frac{1}{2} = \frac{1}{81}$ d) $\frac{1}{2} \div 2 = \frac{2}{8}$

e) $\frac{3}{2} \div 1 = \frac{1}{9}$ f) $\frac{8}{9} \div \frac{7}{8} =$ g) $\frac{8}{9} \div \frac{8}{7} =$ 1

2) Representa gráficamente las operaciones de los incisos a), c) y d) del punto anterior.

3) Dada la siguiente división con fracciones, justifica por qué es posible realizar el cálculo como se muestra a continuación:

$$\frac{4}{3} \div \frac{3}{2} = \frac{4}{3} \div \left(3 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{4}{3} \cdot 2\right) \div 3 = \frac{8}{9}$$

Cuestionario A7 – Primera parte

Parte I

Fecha: 03 /03/ 2017 Hora de inicio: 10:00 Hora de fin: 10:40

Lee detenidamente los siguientes problemas y resuélvelos sin hacer uso de dispositivos electrónicos de cálculo y detallando lo más posible el o los procedimientos que usaste para resolverlos.

1) Se distribuyen, en igual cantidad, $35\frac{1}{2}$ lts de aceite en 71 botellas. ¿Qué cantidad de aceite contiene cada botella? $\frac{1}{2}$ l

2) Un cajón donde se guardan toallas tiene $\frac{7}{8}$ m de largo. Al doblar y guardar las toallas, cada una ocupa $\frac{1}{4}$ m de largo. Considerando el largo del cajón, ¿cuántas toallas caben? 3 toallas

3) ¿Qué tiempo ha viajado un automóvil que a velocidad constante de 80 km/h recorrió 160/3 km? 40 min

4) Un peatón camina 4km en 5hs. ¿Cuántos km caminará en 48 min? 0.64Km

5) Un campo rectangular tiene una superficie que mide $\frac{2}{3}u^2$. Sabiendo que su ancho mide $\frac{5}{7}u$, averigua cuánto mide el largo. $\frac{14}{15}$ U

6) Un tonel tiene una capacidad de 300 lts. Un grifo que da 5 lts en 3 min y otro que da 7 lts en 5 min se abren al mismo tiempo para llenarlo. ¿En cuántos minutos se llenará el tonel? ¿Cuántos litros habrá proporcionado cada grifo?

1) $71\overline{)35.5}$ .5 $\frac{35}{2} \div \frac{71}{2} = \frac{1}{2}$

2) $\frac{\frac{7}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{28}{8}$ $8\overline{)28}$ 3.5 40

3) $\frac{80}{1}$ Km/h $\frac{160}{3}$ Km $\frac{\frac{80}{1}}{\frac{160}{3}} = \frac{240}{160}$

4) 4Km - 300min

x - 48min

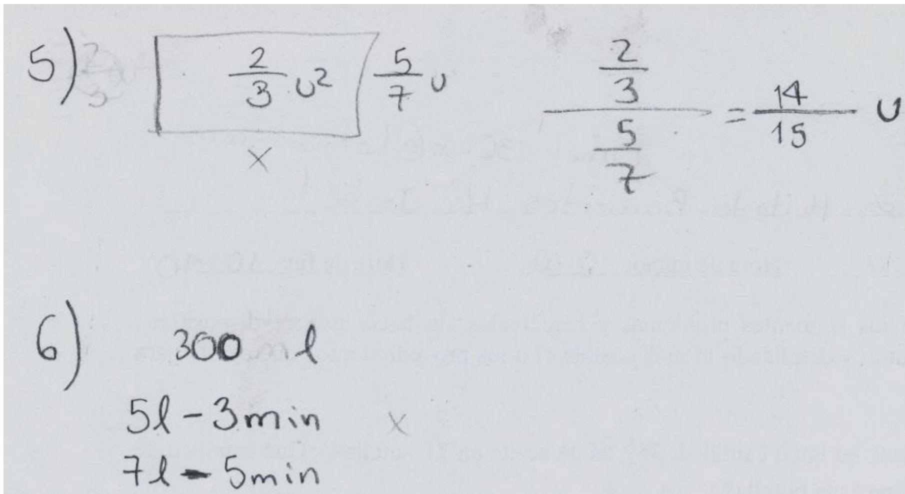
0.64

48 × 4 = 192

$300\overline{)1920}$ 0.64 1200

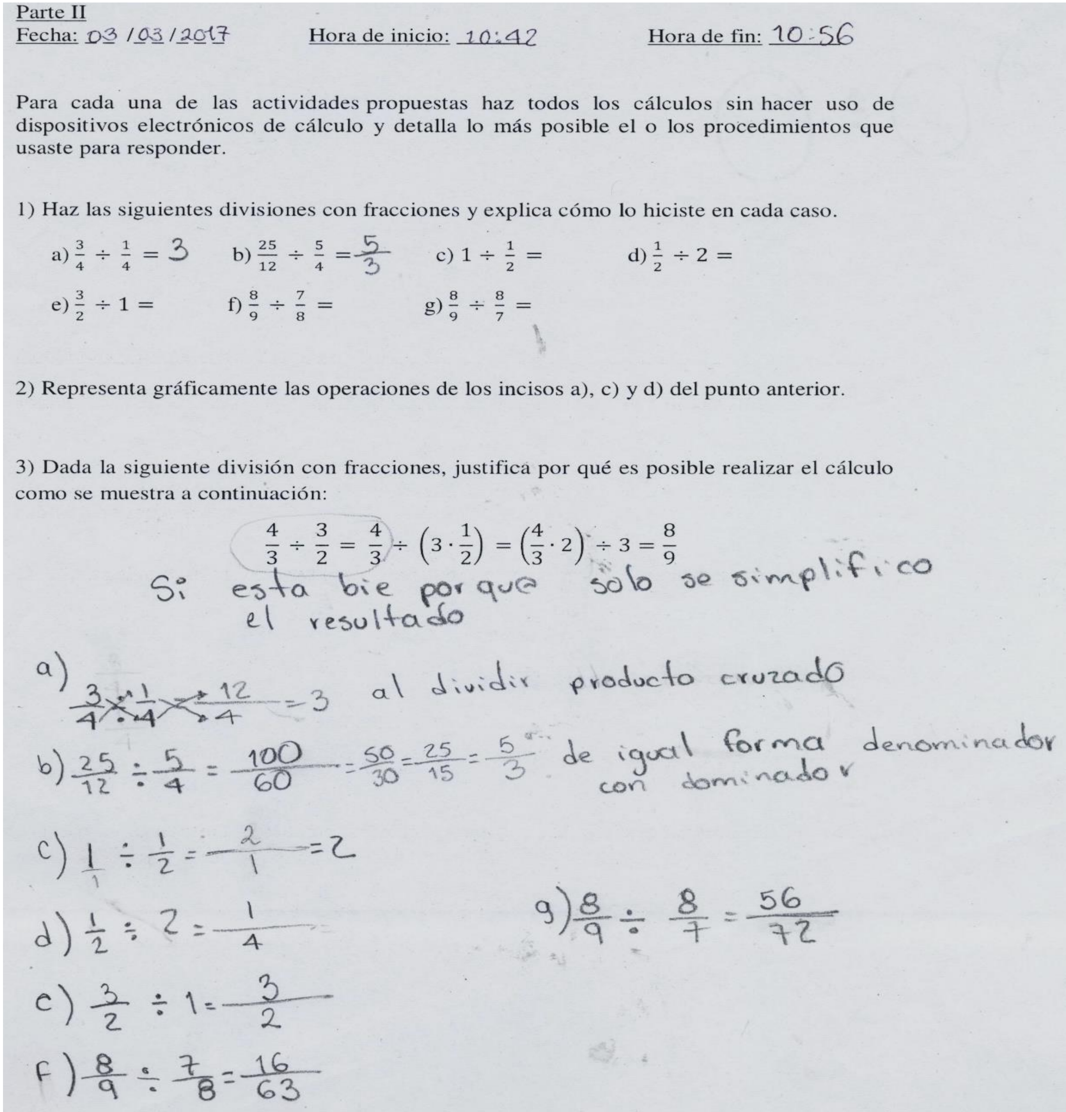
300 × 6 = 1800

300 × 4 = 1200


5) $\boxed{\frac{2}{3}u^2}\ \frac{5}{7}u$ $\qquad \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{14}{15}\,u$

6) 300 l
5l - 3min
7l - 5min

Cuestionario A7 – Segunda parte



Parte II

Fecha: 03/03/2017 Hora de inicio: 10:42 Hora de fin: 10:56

Para cada una de las actividades propuestas haz todos los cálculos sin hacer uso de dispositivos electrónicos de cálculo y detalla lo más posible el o los procedimientos que usaste para responder.

1) Haz las siguientes divisiones con fracciones y explica cómo lo hiciste en cada caso.

a) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} = 3$ b) $\frac{25}{12} \div \frac{5}{4} = \frac{5}{3}$ c) $1 \div \frac{1}{2} =$ d) $\frac{1}{2} \div 2 =$

e) $\frac{3}{2} \div 1 =$ f) $\frac{8}{9} \div \frac{7}{8} =$ g) $\frac{8}{9} \div \frac{8}{7} =$

2) Representa gráficamente las operaciones de los incisos a), c) y d) del punto anterior.

3) Dada la siguiente división con fracciones, justifica por qué es posible realizar el cálculo como se muestra a continuación:

$$\frac{4}{3} \div \frac{3}{2} = \frac{4}{3} \div \left(3 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{4}{3} \cdot 2\right) \div 3 = \frac{8}{9}$$

Si esta bie porque solo se simplifico el resultado

a) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} = \frac{12}{4} = 3$ al dividir producto cruzado

b) $\frac{25}{12} \div \frac{5}{4} = \frac{100}{60} = \frac{50}{30} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$ de igual forma denominador con dominador

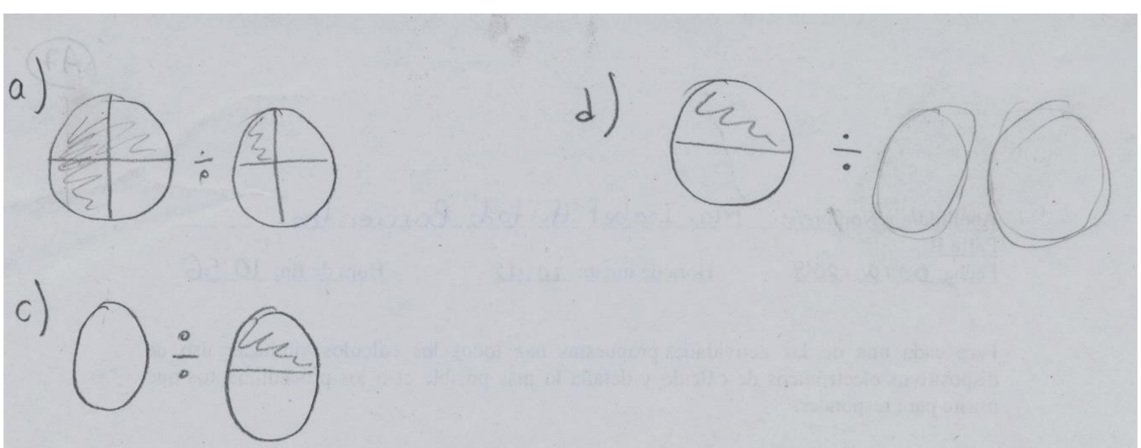
c) $\frac{1}{1} \div \frac{1}{2} = \frac{2}{1} = 2$

d) $\frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{4}$

g) $\frac{8}{9} \div \frac{8}{7} = \frac{56}{72}$

c) $\frac{3}{2} \div 1 = \frac{3}{2}$

F) $\frac{8}{9} \div \frac{7}{8} = \frac{16}{63}$



Cuestionario A8 – Primera parte

Parte I

Fecha: 03 / 03 / ___ Hora de inicio: 10:00 Hora de fin: 10:36

Lee detenidamente los siguientes problemas y resuélvelos sin hacer uso de dispositivos electrónicos de cálculo y detallando lo más posible el o los procedimientos que usaste para resolverlos.

1) Se distribuyen, en igual cantidad, $35\frac{1}{2}$ lts de aceite en 71 botellas. ¿Qué cantidad de aceite contiene cada botella?

2) Un cajón donde se guardan toallas tiene $\frac{7}{8}$ m de largo. Al doblar y guardar las toallas, cada una ocupa $\frac{1}{4}$ m de largo. Considerando el largo del cajón, ¿cuántas toallas caben?

3) ¿Qué tiempo ha viajado un automóvil que a velocidad constante de 80 km/h recorrió 160/3 km?

4) Un peatón camina 4km en 5hs. ¿Cuántos km caminará en 48 min?

5) Un campo rectangular tiene una superficie que mide $\frac{2}{3}u^2$. Sabiendo que su ancho mide $\frac{5}{7}u$, averigua cuánto mide el largo.

6) Un tonel tiene una capacidad de 300 lts. Un grifo que da 5 lts en 3 min y otro que da 7 lts en 5 min se abren al mismo tiempo para llenarlo. ¿En cuántos minutos se llenará el tonel? ¿Cuántos litros habrá proporcionado cada grifo?

1) $71\overline{)350}$ .4   .41 lts

2) 4 toallas

3) $\left(\frac{160}{3}\right)\left(\frac{80}{1}\right) = \frac{12800}{3} = 4266 = 71$ horas con 6 minutos

$3\overline{)12800}$ = 4266
08
20
20

$60\overline{)4266}$ = 71
420
66
6

d/=

4) 4 km → 5 hrs 48 mindos

$$\begin{array}{r} 60 \\ \times 5 \\ \hline 300 \end{array}$$

4 km → 300 minutos

.64 km → 48 minutos

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times 4 \\ \hline 192 \end{array}$$

$$300\overline{)1920}$$ .6

1800

1200

1800

6).- Tonel 300 lts.

	lts	T
1	5	3 min
2	7	5 min

$5 \times 25 = 125$ $3 \times 25 = 75$ minutos

$7 \times 25 = 175$ $5 \times 25 = 125$ mintos

300 200 minutos

R= Se llenara en 200 minutos o 3 horas y 20 minutos y el primero proporciono 125 lts y el segundo 175 lts

5) $\boxed{2/3\,v^2}$ 5/7 v

$$\left(\frac{5}{7}\right)\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{35}{56}$$

Cuestionario A8 – Segunda parte

Parte II

Fecha: 03/03/17 Hora de inicio: 10:37 Hora de fin: 10:54

Para cada una de las actividades propuestas haz todos los cálculos sin hacer uso de dispositivos electrónicos de cálculo y detalla lo más posible el o los procedimientos que usaste para responder.

1) Haz las siguientes divisiones con fracciones y explica cómo lo hiciste en cada caso.

a) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} =$ b) $\frac{25}{12} \div \frac{5}{4} =$ c) $1 \div \frac{1}{2} =$ d) $\frac{1}{2} \div 2 =$

e) $\frac{3}{2} \div 1 =$ f) $\frac{8}{9} \div \frac{7}{8} =$ g) $\frac{8}{9} \div \frac{8}{7} =$

2) Representa gráficamente las operaciones de los incisos a), c) y d) del punto anterior.

3) Dada la siguiente división con fracciones, justifica por qué es posible realizar el cálculo como se muestra a continuación:

$$\frac{4}{3} \div \frac{3}{2} = \frac{4}{3} \div \left(3 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{4}{3} \cdot 2\right) \div 3 = \frac{8}{9}$$

a) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} = \frac{12}{4}$

b) $\frac{25}{12} \div \frac{5}{4} = \frac{100}{60} = \frac{50}{30} = \frac{10}{6}$

c) $1 \div \frac{1}{2} = \frac{2}{1} = 2$

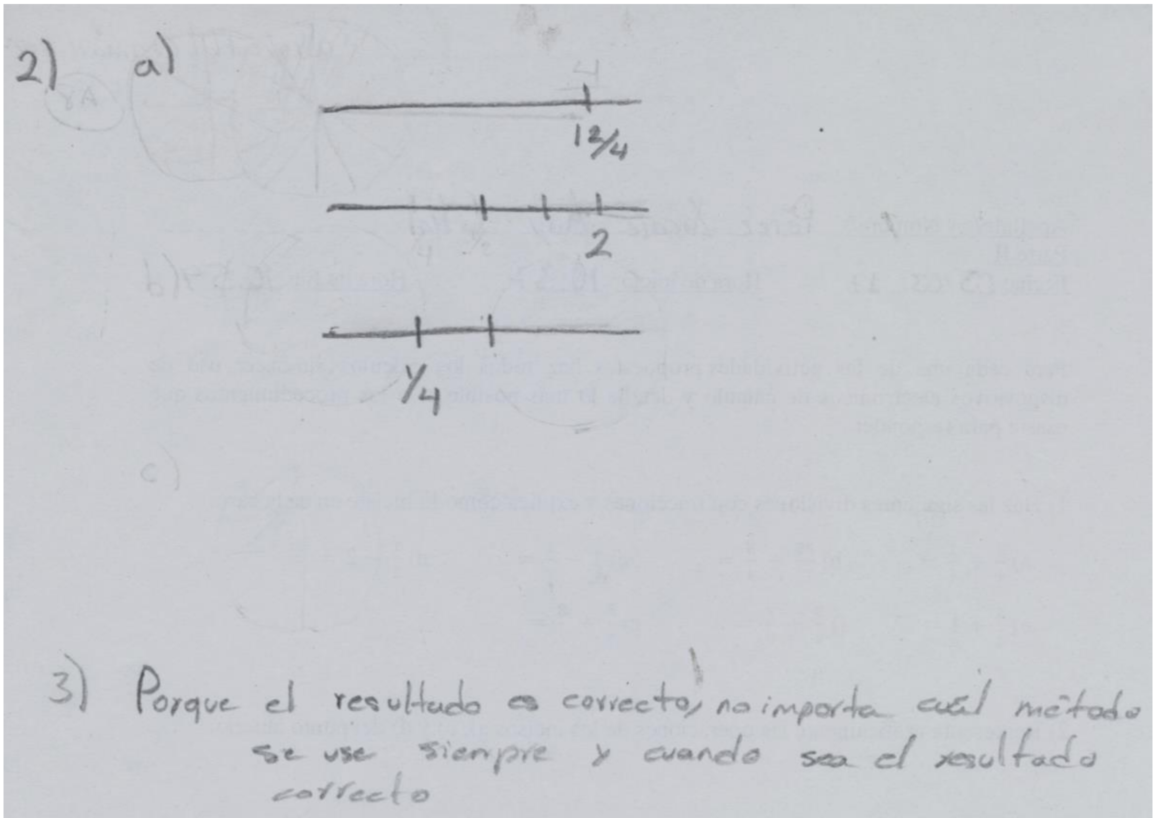
d) $\frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{4}$

e) $\frac{3}{2} \div 1 = \frac{3}{2}$

f) $\frac{8}{9} \div \frac{7}{8} = \frac{64}{63}$

g) $\frac{8}{9} \div \frac{8}{7} = \frac{56}{72}$

8 1 9 1
7)56 7)72 3)56
02 26


2) a)

4

12/4

2

1/4

3) Porque el resultado es correcto, no importa cuál método se use siempre y cuando sea el resultado correcto

Cuestionario A9 – Primera parte

Parte I

Fecha: 3 /may/ 2017 Hora de inicio: 10:00 Hora de fin: 10:30

Lee detenidamente los siguientes problemas y resuélvelos sin hacer uso de dispositivos electrónicos de cálculo y detallando lo más posible el o los procedimientos que usaste para resolverlos.

1) Se distribuyen, en igual cantidad, $35\frac{1}{2}$ lts de aceite en 71 botellas. ¿Qué cantidad de aceite contiene cada botella? .5 Lts

2) Un cajón donde se guardan toallas tiene $\frac{7}{8}$ m de largo. Al doblar y guardar las toallas, cada una ocupa $\frac{1}{4}$ m de largo. Considerando el largo del cajón, ¿cuántas toallas caben? 3 toallas

3) ¿Qué tiempo ha viajado un automóvil que a velocidad constante de 80 km/h recorrió 160/3 km?

4) Un peatón camina 4km en 5hs. ¿Cuántos km caminará en 48 min?

5) Un campo rectangular tiene una superficie que mide $\frac{2}{3}u^2$. Sabiendo que su ancho mide $\frac{5}{7}u$, averigua cuánto mide el largo. $\frac{14}{15}$

6) Un tonel tiene una capacidad de 300 lts. Un grifo que da 5 lts en 3 min y otro que da 7 lts en 5 min se abren al mismo tiempo para llenarlo. ¿En cuántos minutos se llenará el tonel? ¿Cuántos litros habrá proporcionado cada grifo?

1 35.5 Lts
71 botellas

$71\overline{)35.5}$ = .5 litros, residuo 0

$71 \times 4 = 284$ $71 \times 5 = 355$

2 $\frac{1}{4}$ $\frac{7}{8}$ m

$\frac{4}{8} = 2$ $\frac{6}{8} = 3$

$3\overline{)160}$ = $53.\overline{3}$, 10, 10

3 v - 80km/h
d - $\frac{160}{3}$ km
t - ?

$v = \frac{d}{t}$

$\frac{t\cancel{v}}{\cancel{v}} = dv$

$t = dv$

$53.3333 \times 8 = 426.6664$

$t = (53.3)(80)$

$t = 426.\overline{66}$

(4) 4km → 300min

? → 48min

.64 km

$5\overline{)40}$ 0.8

1 hrs .8 km

60 × 5 = 300

48 × 4 = 192

$300\overline{)1920}$ .64 — 01200 — 0

300 × 6 = 1800

(5) $(x)\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{2}{3}$

$\left(\frac{14}{15}\right)\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{2}{3}$

$x = \frac{2}{3} \div \frac{5}{7}$

$x = \frac{14}{15}$

$\frac{70}{105}$

$105\overline{)700}$ .6 — 630 — 70

105 × 6 = 630

(6) 300Lt

A − 5 → 3min

B − 7 → 5min

A + B = 300

5(A) + 7(B) = 300

5 3min

1.6 ? 1min

$3\overline{)5}$ 1.6 — 20 — 2

A → 90

B → 110

5.4 hrs

78.5 hrs

7 5

1.4 ? 1

$5\overline{)7}$ 1.4 — 20

3.2 2.8

4.8 4.2

13 × 1.4 = 52 + 13 = 18.2

110 × 1.4 = 44 + 11 = 15.4.0

100 × 1.6 = 60 + 10 = 160.0

90 × 1.6 = 540 + 90 = 144.0

5 − 3min

90 ?

$5\overline{)27}$ 5.4 — 20

154 + 144 = 248.

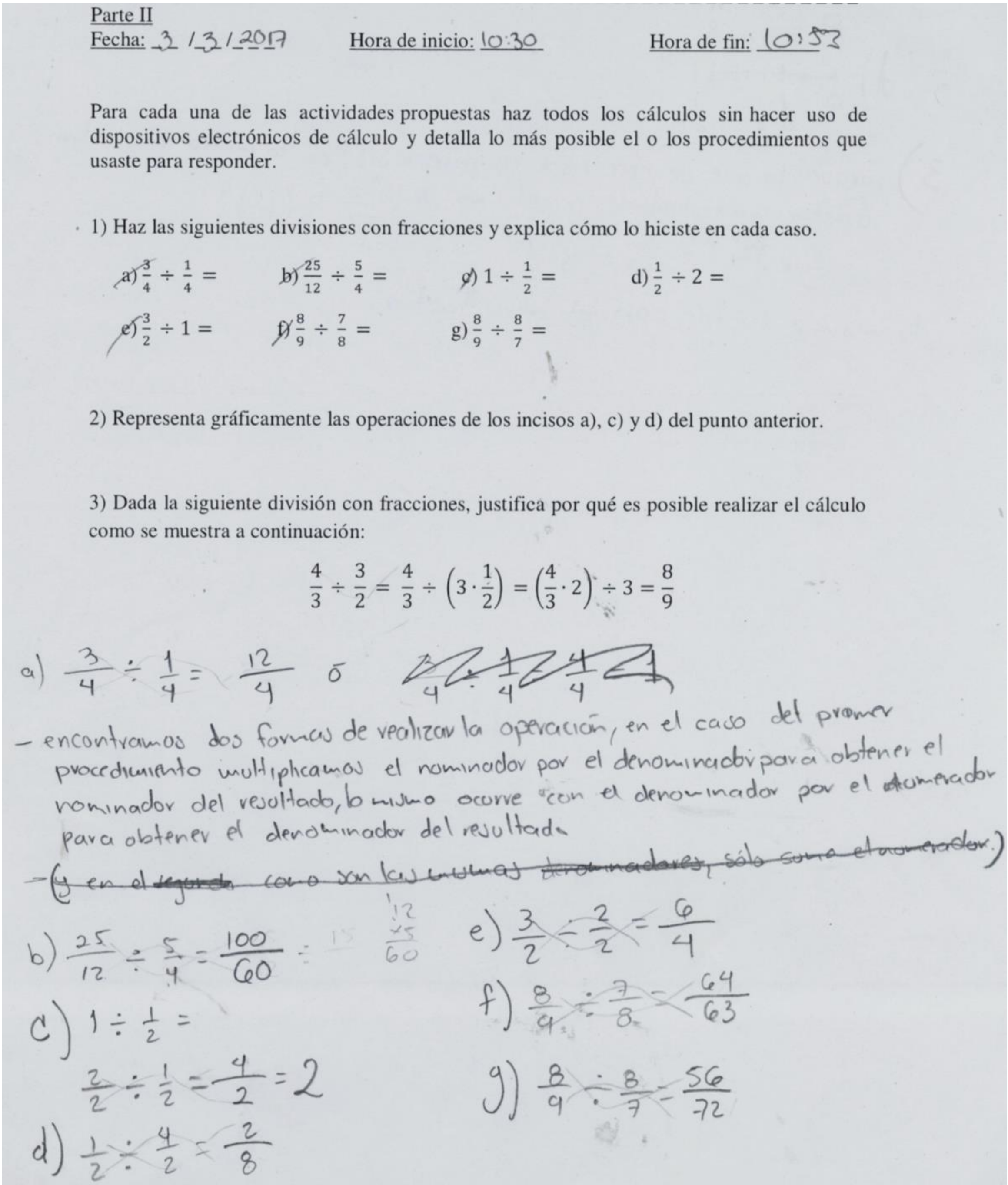
7 5

110 ?

110 × 5 = 550

$7\overline{)550}$ 78.5 — 60 — 40 — 5

Cuestionario A9 – Segunda parte



Parte II

Fecha: 3 / 3 / 2017 Hora de inicio: 10:30 Hora de fin: 10:53

Para cada una de las actividades propuestas haz todos los cálculos sin hacer uso de dispositivos electrónicos de cálculo y detalla lo más posible el o los procedimientos que usaste para responder.

1) Haz las siguientes divisiones con fracciones y explica cómo lo hiciste en cada caso.

a) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} =$ b) $\frac{25}{12} \div \frac{5}{4} =$ c) $1 \div \frac{1}{2} =$ d) $\frac{1}{2} \div 2 =$

e) $\frac{3}{2} \div 1 =$ f) $\frac{8}{9} \div \frac{7}{8} =$ g) $\frac{8}{9} \div \frac{8}{7} =$

2) Representa gráficamente las operaciones de los incisos a), c) y d) del punto anterior.

3) Dada la siguiente división con fracciones, justifica por qué es posible realizar el cálculo como se muestra a continuación:

$$\frac{4}{3} \div \frac{3}{2} = \frac{4}{3} \div \left(3 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{4}{3} \cdot 2\right) \div 3 = \frac{8}{9}$$

a) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} = \frac{12}{4}$ ó $\cancel{\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1}$

– encontramos dos formas de realizar la operación, en el caso del primer procedimiento multiplicamos el nominador por el denominador para obtener el nominador del resultado, lo mismo ocurre con el denominador por el numerador para obtener el denominador del resultado

– ~~(y en el segundo como son los mismos denominadores, sólo suma el numerador.)~~

b) $\frac{25}{12} \div \frac{5}{4} = \frac{100}{60}$ $\quad \begin{array}{r} 12 \\ \times 5 \\ \hline 60 \end{array}$

c) $1 \div \frac{1}{2} =$

$\frac{2}{2} \div \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

d) $\frac{1}{2} \div \frac{4}{2} = \frac{2}{8}$

e) $\frac{3}{2} \div \frac{2}{2} = \frac{6}{4}$

f) $\frac{8}{9} \div \frac{7}{8} = \frac{64}{63}$

g) $\frac{8}{9} \div \frac{8}{7} = \frac{56}{72}$

Cuestionario A10 – Primera parte

Parte I

Fecha: __ /__/___ Hora de inicio: 10:00am Hora de fin: 10:37 am.

Lee detenidamente los siguientes problemas y resuélvelos sin hacer uso de dispositivos electrónicos de cálculo y detallando lo más posible el o los procedimientos que usaste para resolverlos.

1) Se distribuyen, en igual cantidad, $35\frac{1}{2}$ lts de aceite en 71 botellas. ¿Qué cantidad de aceite contiene cada botella?

2) Un cajón donde se guardan toallas tiene $\frac{7}{8}$ m de largo. Al doblar y guardar las toallas, cada una ocupa $\frac{1}{4}$ m de largo. Considerando el largo del cajón, ¿cuántas toallas caben?

3) ¿Qué tiempo ha viajado un automóvil que a velocidad constante de 80 km/h recorrió 160/3 km?

4) Un peatón camina 4km en 5hs. ¿Cuántos km caminará en 48 min?

5) Un campo rectangular tiene una superficie que mide $\frac{2}{3}u^2$. Sabiendo que su ancho mide $\frac{5}{7}u$, averigua cuánto mide el largo.

6) Un tonel tiene una capacidad de 300 lts. Un grifo que da 5 lts en 3 min y otro que da 7 lts en 5 min se abren al mismo tiempo para llenarlo. ¿En cuántos minutos se llenará el tonel? ¿Cuántos litros habrá proporcionado cada grifo?

Respuestas

1.- $7\overline{)35\frac{1}{2}}$ 5.0714285

$7\overline{)35.5}$

5.0714285

$7\overline{)35.5}$

0 50

10

30

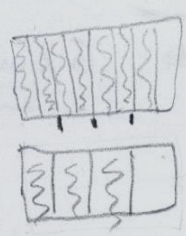
20

60

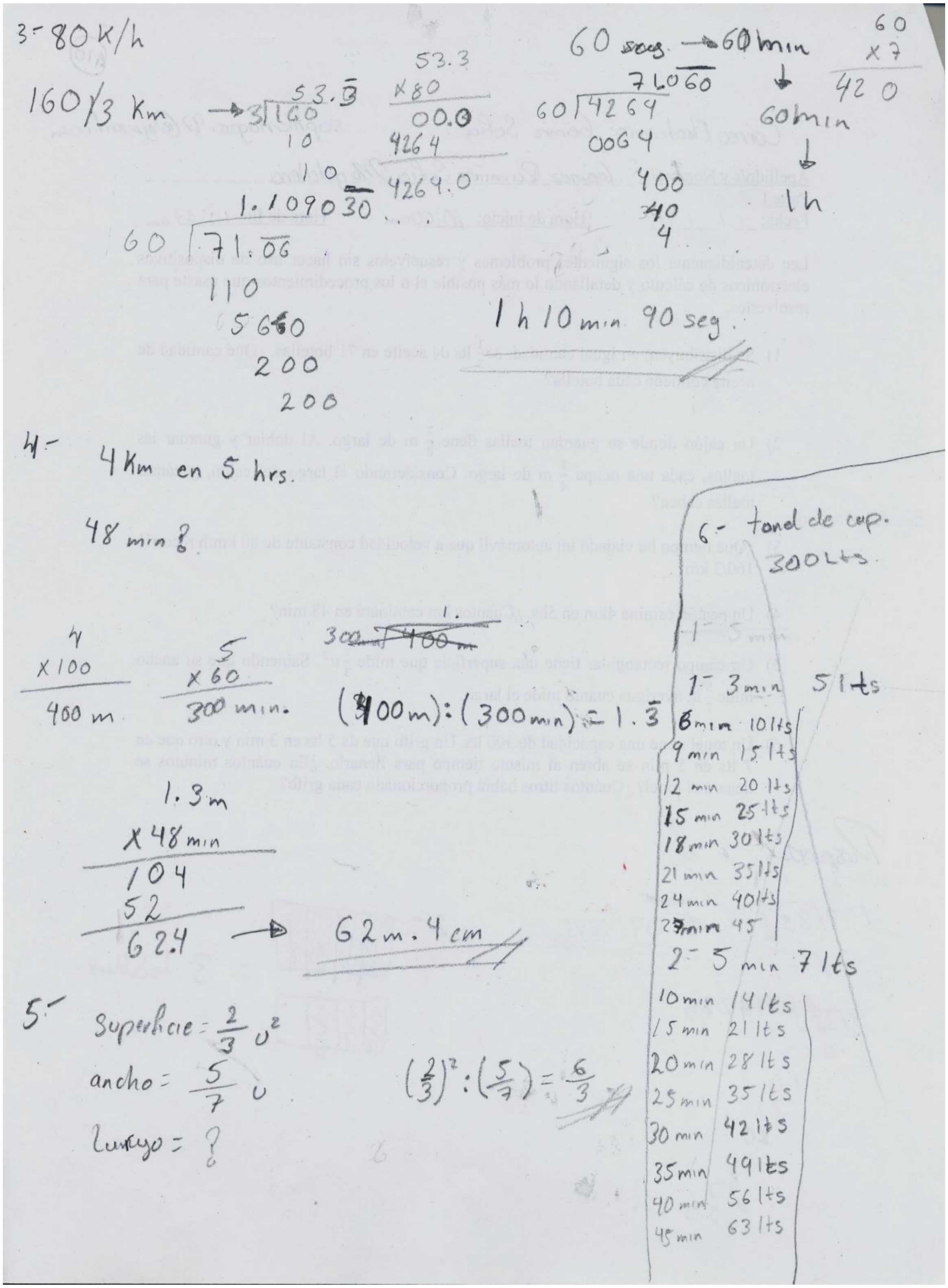
40

50

2.-



= 3 toallas


3- 80 K/h

160/3 Km → $3\overline{)160}$ 53.$\bar{3}$

10

10

1.109030

53.3
× 80
00.0
4264
4264.0

60 seg → 60 min
60 min
1 h

71.060
$60\overline{)4264}$
0064
400
40
4

60
× 7
420

$60\overline{)71.06}$
110
5660
200
200

1 h 10 min 90 seg.

4- 4 Km en 5 hrs.

48 min ¿

4
× 100
400 m

5
× 60
300 min.

300 ~~400 m~~

(400 m) : (300 min) = 1.$\bar{3}$

1.3 m
× 48 min
104
52
62.4 → 62 m. 4 cm

5- Superficie = $\frac{2}{3}$ u²

ancho = $\frac{5}{7}$ u

Largo = ?

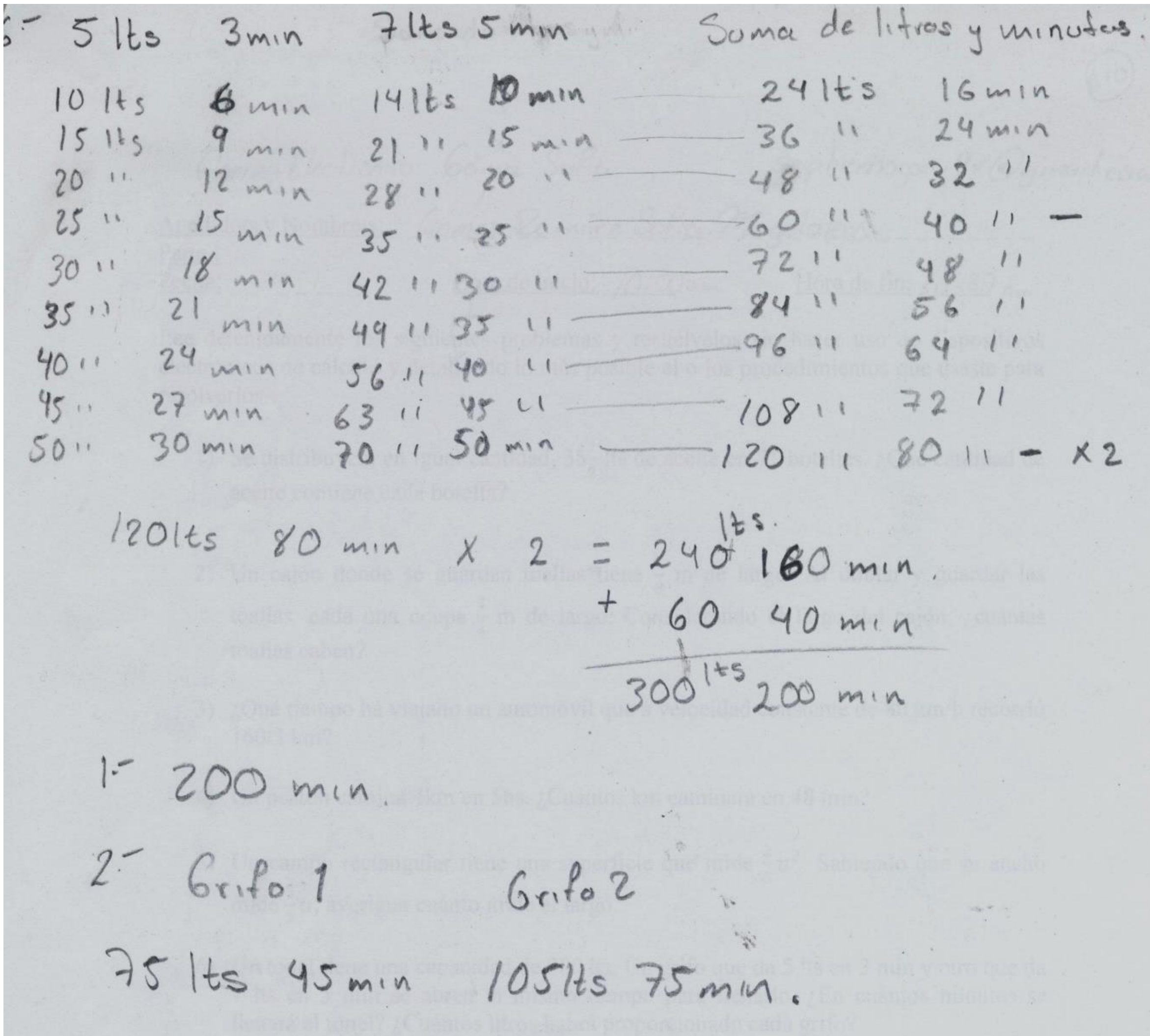
$\left(\frac{2}{3}\right)^2 : \left(\frac{5}{7}\right) = \frac{6}{3}$

6- tonel de cap.
300 Lts.

1- 5 min

1- 3 min 5 lts
6 min 10 lts
9 min 15 lts
12 min 20 lts
15 min 25 lts
18 min 30 lts
21 min 35 lts
24 min 40 lts
27 min 45

2- 5 min 7 lts
10 min 14 lts
15 min 21 lts
20 min 28 lts
25 min 35 lts
30 min 42 lts
35 min 49 lts
40 min 56 lts
45 min 63 lts



5.- 5 lts 3min 7lts 5 min Suma de litros y minutos.

10 lts	6 min	14lts	10 min	24lts	16min	
15 lts	9 min	21 "	15 min	36 "	24 min	
20 "	12 min	28 "	20 "	48 "	32 "	
25 "	15 min	35 "	25 "	60 "	40 "	–
30 "	18 min	42 "	30 "	72 "	48 "	
35 "	21 min	49 "	35 "	84 "	56 "	
40 "	24 min	56 "	40 "	96 "	64 "	
45 "	27 min	63 "	45 "	108 "	72 "	
50 "	30 min	70 "	50 min	120 "	80 "	– x2

120lts 80 min x 2 = 240 lts. 160 min
\+ 60 40 min
300 lts 200 min

1.- 200 min.

2.- Grifo 1 Grifo 2

75 lts 45 min 105lts 75 min.

Cuestionario A10 – Segunda parte

Parte II

Fecha: 02 /03 /17 Hora de inicio: 10:37 am. Hora de fin: 10:53 am

Para cada una de las actividades propuestas haz todos los cálculos sin hacer uso de dispositivos electrónicos de cálculo y detalla lo más posible el o los procedimientos que usaste para responder.

1) Haz las siguientes divisiones con fracciones y explica cómo lo hiciste en cada caso.

a) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} =$ b) $\frac{25}{12} \div \frac{5}{4} =$ c) $1 \div \frac{1}{2} =$ d) $\frac{1}{2} \div 2 =$

e) $\frac{3}{2} \div 1 =$ f) $\frac{8}{9} \div \frac{7}{8} =$ g) $\frac{8}{9} \div \frac{8}{7} =$

2) Representa gráficamente las operaciones de los incisos a), c) y d) del punto anterior.

3) Dada la siguiente división con fracciones, justifica por qué es posible realizar el cálculo como se muestra a continuación:

$$\frac{4}{3} \div \frac{3}{2} = \frac{4}{3} \div \left(3 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{4}{3} \cdot 2\right) \div 3 = \frac{8}{9}$$

Respuestas:

1.- a) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} = \cancel{\frac{3 \div 1}{4} = \frac{3}{4}}$ $\frac{3}{1}$

b) $\frac{25}{12} \div \frac{5}{4} = \cancel{\frac{25 \div}{12}}$ $\frac{5}{3}$

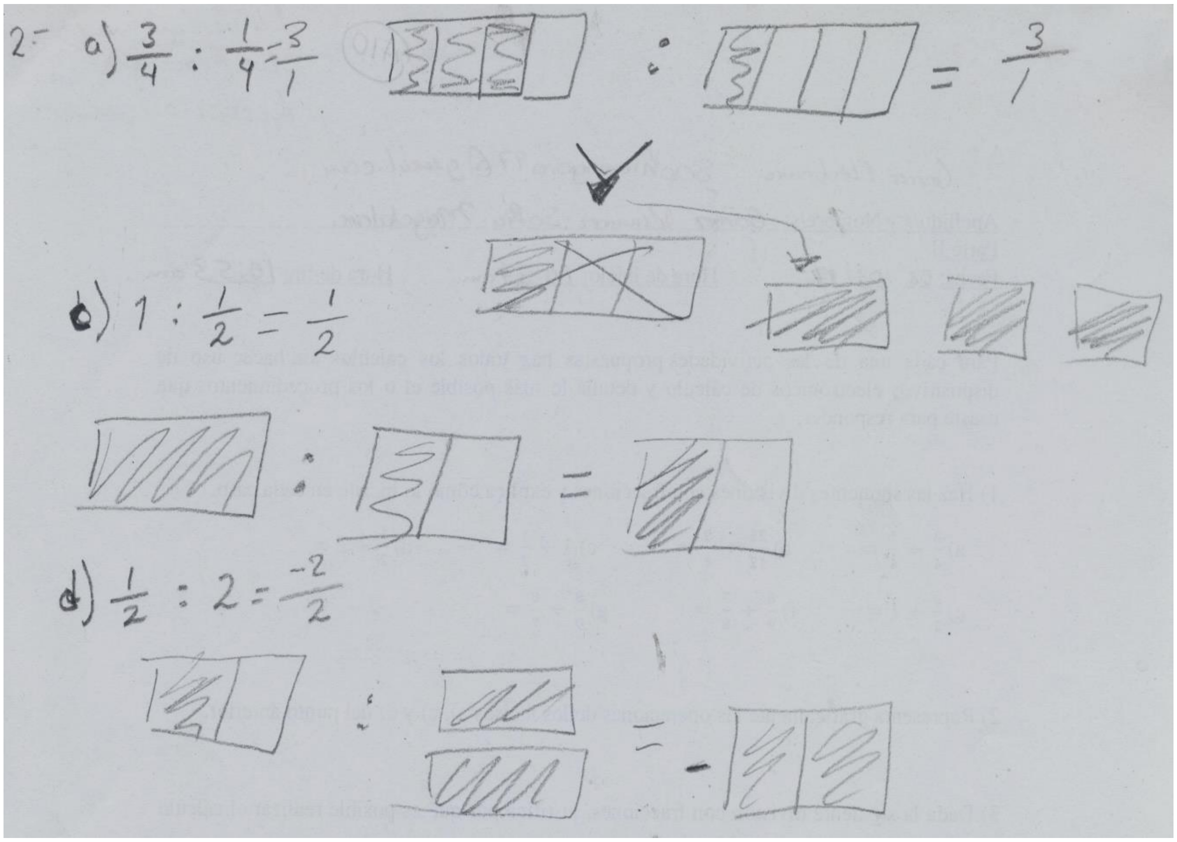
c) $\left(\frac{1}{1}\right) = 1$ $\frac{1}{1} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{2} \div \frac{2}{1} = \frac{-2}{2}$

e) $\frac{3}{2} \div 1 = \frac{3}{2} : \frac{1}{1} = \frac{3}{2}$

f) $\frac{8}{9} \div \frac{7}{8} =$ procedimiento recíproco $\frac{9}{8} \div \frac{7}{8} = \frac{1\frac{2}{8}}{1}$

g) $\frac{8}{9} \div \frac{8}{7} = \frac{1}{1\frac{2}{8}}$


2- a) $\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = \frac{3}{1}$
$= \frac{3}{1}$
b) $1 : \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
d) $\frac{1}{2} : 2 = \frac{-2}{2}$

Cuestionario A11 – Primera parte

A11

pitafrios36@gmail.com

Apellido/s y Nombre/s: Cervantes Frios Guadalupe

Parte I

Fecha: 3 /03/13 Hora de inicio: 10 Hora de fin: 10:35

Lee detenidamente los siguientes problemas y resuélvelos sin hacer uso de dispositivos electrónicos de cálculo y detallando lo más posible el o los procedimientos que usaste para resolverlos.

1) Se distribuyen, en igual cantidad, $35\frac{1}{2}$ lts de aceite en 71 botellas. ¿Qué cantidad de aceite contiene cada botella?

   0.0.5
   71 | 35.50
   R = .5L

2) Un cajón donde se guardan toallas tiene $\frac{7}{8}$ m de largo. Al doblar y guardar las toallas, cada una ocupa $\frac{1}{4}$ m de largo. Considerando el largo del cajón, ¿cuántas toallas caben?

   8 | 7.0 4 | 1.0

3) ¿Qué tiempo ha viajado un automóvil que a velocidad constante de 80 km/h recorrió 160/3 km?

   R = 2 hrs.
   80 km/h
   160/3 km

4) Un peatón camina 4km en 5hs. ¿Cuántos km caminará en 48 min?

   300 min – 4 km
   48 min – x =
   R = 0.64 km

5) Un campo rectangular tiene una superficie que mide $\frac{2}{3}u^2$. Sabiendo que su ancho mide $\frac{5}{7}u$, averigua cuánto mide el largo.

   $\boxed{2/3}$ $\frac{5}{7}$
   x

6) Un tonel tiene una capacidad de 300 lts. Un grifo que da 5 lts en 3 min y otro que da 7 lts en 5 min se abren al mismo tiempo para llenarlo. ¿En cuántos minutos se llenará el tonel? ¿Cuántos litros habrá proporcionado cada grifo?

2) $\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{4}$ 4 | 1.0 (0.25) R 6m de toalla.

6) 5 Lts – 3 min
   7 Lts – 5 min
   R1 = 66.6 min.
   8 min – 12 Lts.
   x 300 Lts
   12 | 800 (66.6)
   R2 =

5. $\frac{2}{3} - \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{3}{4}$ R = $\frac{3}{4}$u largo

Cuestionario A11 – Segunda parte

Pitafrias35@gmail.com (AM)

Apellido/s y Nombre/s: Guadalupe Cervantes Frías
Parte II
Fecha: 3 03/17 Hora de inicio: 10:35 Hora de fin: 10:53

Para cada una de las actividades propuestas haz todos los cálculos sin hacer uso de dispositivos electrónicos de cálculo y detalla lo más posible el o los procedimientos que usaste para responder.

1) Haz las siguientes divisiones con fracciones y explica cómo lo hiciste en cada caso.

a) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} = \frac{12}{4} = \frac{6}{2}$ b) $\frac{25}{12} \div \frac{5}{4} = \frac{100}{60}$ c) $\frac{1}{1} \div \frac{1}{2} = \frac{2}{1}$ d) $\frac{1}{2} \div \frac{2}{1} = \frac{1}{4}$

e) $\frac{3}{2} \div \frac{1}{1} = \frac{3}{2}$ f) $\frac{8}{9} \div \frac{7}{8} = \frac{64}{63}$ g) $\frac{8}{9} \div \frac{8}{7} = \frac{56}{72}$

2) Representa gráficamente las operaciones de los incisos a), c) y d) del punto anterior.

3) Dada la siguiente división con fracciones, justifica por qué es posible realizar el cálculo como se muestra a continuación:

$$\frac{4}{3} \div \frac{3}{2} = \frac{4}{3} \div \left(3 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{4}{3} \cdot 2\right) \div 3 = \frac{8}{9}$$

1. Al momento de realizar las divisiones unicamente multiplique el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción.

2. a) c) d)

3. $\frac{4}{3} \div \frac{3}{2} = \frac{4}{3} \div \left(\frac{3}{1} \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{4}{3} \cdot 2\right) \div 3 = \frac{8}{9}$

$\frac{4}{3} \div \frac{3}{2} = \frac{4}{3} \div \frac{3}{2} = \frac{8}{3} \div 3 = \frac{8}{9}$

$\frac{8}{9} = \frac{8}{9} = \frac{8}{9} = \frac{8}{9}$

Cuestionario A12 – Primera parte

Parte I

Fecha: 03/03/2017 Hora de inicio: 10:00 am Hora de fin: 10:36 am

Lee detenidamente los siguientes problemas y resuélvelos sin hacer uso de dispositivos electrónicos de cálculo y detallando lo más posible el o los procedimientos que usaste para resolverlos.

1) Se distribuyen, en igual cantidad, $35\frac{1}{2}$ lts de aceite en 71 botellas. ¿Qué cantidad de aceite contiene cada botella?

   4 Lts.

2) Un cajón donde se guardan toallas tiene $\frac{7}{8}$ m de largo. Al doblar y guardar las toallas, cada una ocupa $\frac{1}{4}$ m de largo. Considerando el largo del cajón, ¿cuántas toallas caben?

   13 toallas.

3) ¿Qué tiempo ha viajado un automóvil que a velocidad constante de 80 km/h recorrió 160/3 km?

4) Un peatón camina 4km en 5hs. ¿Cuántos km caminará en 48 min?

   0.48 Km

5) Un campo rectangular tiene una superficie que mide $\frac{2}{3}u^2$. Sabiendo que su ancho mide $\frac{5}{7}u$, averigua cuánto mide el largo.

6) Un tonel tiene una capacidad de 300 lts. Un grifo que da 5 lts en 3 min y otro que da 7 lts en 5 min se abren al mismo tiempo para llenarlo. ¿En cuántos minutos se llenará el tonel? ¿Cuántos litros habrá proporcionado cada grifo?

$5 \times 30 = 150$

$7 \times 24 = 140$

90
98
178

70 min
104 min.

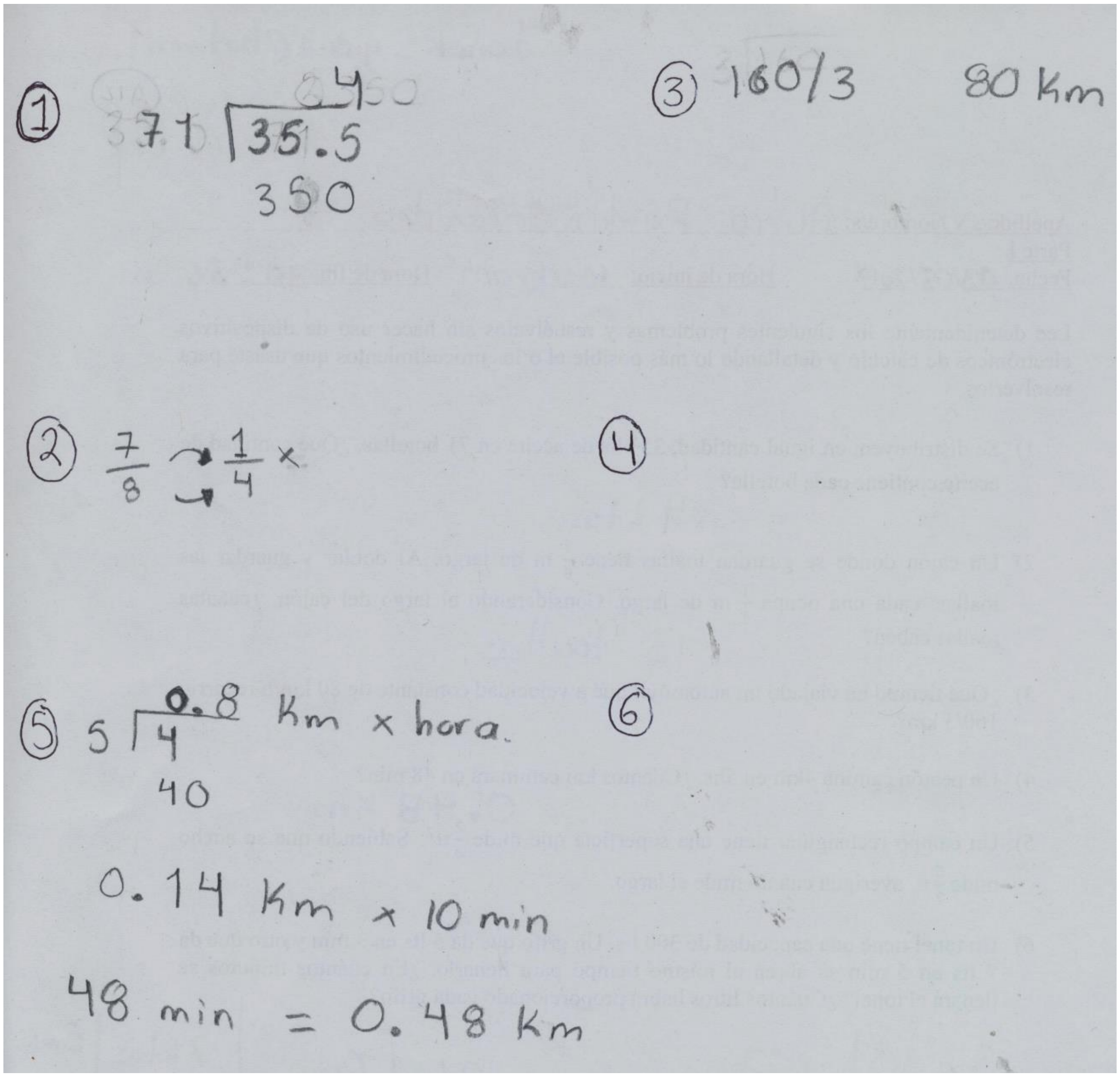
10 l	6 min
15 l	9
20	12
25	15
30	18
35	21
70	42
160	84

7 litros	5 min
14	10 min
21	15
28	20
56	40
14	10
70	50
	10
104, 84	60
98	70
122	70

122 | 90
28
150 | 90
150 | 98
310

160 + 122 = 282

2 horas 58 min
150 Lts cada grifo.



1

$$7\,\overline{)\,35.5}$$ 4

350

3 160/3 80 Km

2 $\frac{7}{8}$ $\frac{1}{4}$ ×

4

5 $$5\,\overline{)\,4}$$ 0.8 Km x hora.

40

6

0.14 Km x 10 min

48 min = 0.48 Km

Cuestionario A12 – Segunda parte

Parte II

Fecha: 03/03/2017 Hora de inicio: 10:37 Hora de fin: 10:52

Para cada una de las actividades propuestas haz todos los cálculos sin hacer uso de dispositivos electrónicos de cálculo y detalla lo más posible el o los procedimientos que usaste para responder.

1) Haz las siguientes divisiones con fracciones y explica cómo lo hiciste en cada caso.

a) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} =$ b) $\frac{25}{12} \div \frac{5}{4} =$ c) $\frac{1}{1} \div \frac{1}{2} =$ d) $\frac{1}{2} \div 2 =$

e) $\frac{3}{2} \div \frac{1}{1} =$ f) $\frac{8}{9} \div \frac{7}{8} =$ g) $\frac{8}{9} \div \frac{8}{7} =$

2) Representa gráficamente las operaciones de los incisos a), c) y d) del punto anterior.

3) Dada la siguiente división con fracciones, justifica por qué es posible realizar el cálculo como se muestra a continuación:

$$\frac{4}{3} \div \frac{3}{2} = \frac{4}{3} \div \left(3 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{4}{3} \cdot 2\right) \div 3 = \frac{8}{9}$$

{Por la manera matematica correcta de resolución.

$\frac{8}{9} = \frac{4}{3}$

a) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} = \frac{12}{4} = \frac{6}{2}$

b) $\frac{25}{12} \div \frac{5}{4} = \frac{100}{60} = 10$

c) $\frac{1}{1} \div \frac{1}{2} = \frac{2}{1} = 2$

d) $\frac{1}{2} \div \frac{2}{1} = \frac{1}{4}$

e) $\frac{3}{2} \div \frac{1}{1} = \frac{3}{2}$

f) $\frac{8}{9} \div \frac{7}{8} = \frac{64}{63}$

g) $\frac{8}{9} \div \frac{8}{7} = \frac{64}{72}$

o Se multiplico de manera cruzada y posteriormente se saco el minimo comun multiplo en cada inciso correspondiente

2) a) $= \frac{6}{2}$ 

c) $= 2$ 

d) $= \frac{1}{4}$ 

Cuestionario A13 – Primera parte

Parte I

Fecha: 03/03/2017 Hora de inicio: 10:00 Hora de fin: 10:35

Lee detenidamente los siguientes problemas y resuélvelos sin hacer uso de dispositivos electrónicos de cálculo y detallando lo más posible el o los procedimientos que usaste para resolverlos.

1) Se distribuyen, en igual cantidad, $35\frac{1}{2}$ lts de aceite en 71 botellas. ¿Qué cantidad de aceite contiene cada botella? $\frac{1}{2}$ lt

2) Un cajón donde se guardan toallas tiene $\frac{7}{8}$ m de largo. Al doblar y guardar las toallas, cada una ocupa $\frac{1}{4}$ m de largo. Considerando el largo del cajón, ¿cuántas toallas caben? 3 toallas

3) ¿Qué tiempo ha viajado un automóvil que a velocidad constante de 80 km/h recorrió 160/3 km? 40 min

4) Un peatón camina 4km en 5hs. ¿Cuántos km caminará en 48 min?
0.64 Km

5) Un campo rectangular tiene una superficie que mide $\frac{2}{3}u^2$. Sabiendo que su ancho mide $\frac{5}{7}u$, averigua cuánto mide el largo. $\frac{14}{15}$ u

6) Un tonel tiene una capacidad de 300 lts. Un grifo que da 5 lts en 3 min y otro que da 7 lts en 5 min se abren al mismo tiempo para llenarlo. ¿En cuántos minutos se llenará el tonel? ¿Cuántos litros habrá proporcionado cada grifo?
98 min. 5lt en 3min - 163 litr
7lt en 5min - 137 lts.

1) $35\frac{1}{2} = \frac{71}{2}$

$\frac{71}{2} \div \frac{71}{1} = \frac{71}{142} = \frac{1}{2}$

2) $\frac{7}{8} \div \frac{1}{4} = \frac{28}{8} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$

3) 80km — 1h $\left(\frac{160}{3}\right)1 = \frac{160}{3}$

$\frac{160}{3}$Km X $\frac{160}{3} \div \frac{80}{1} = \frac{160}{240} = \frac{16}{24} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ h

$20 \times 2 = 40$

4) 1hr — 60min

0.8 Km — 60min
X — 48min

48
0.8
38.4

$38.4 \div 60 = .64$

5) $\boxed{2/3}$

A = bh. $h = \frac{14}{15}$

$\frac{2}{3} = \frac{5}{7}h$

$\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{14}{15}$

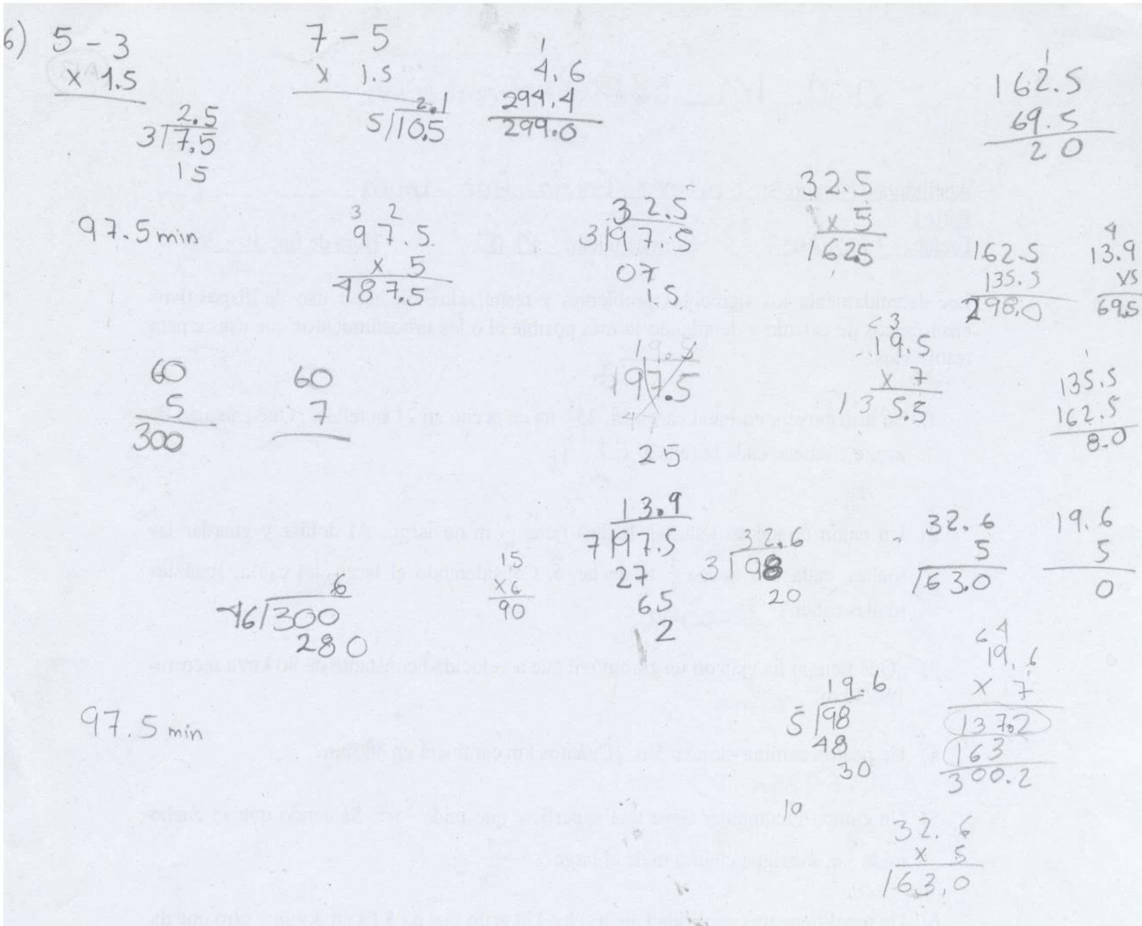
6) 300 lts.

5 lts 3min
7 lts 5min

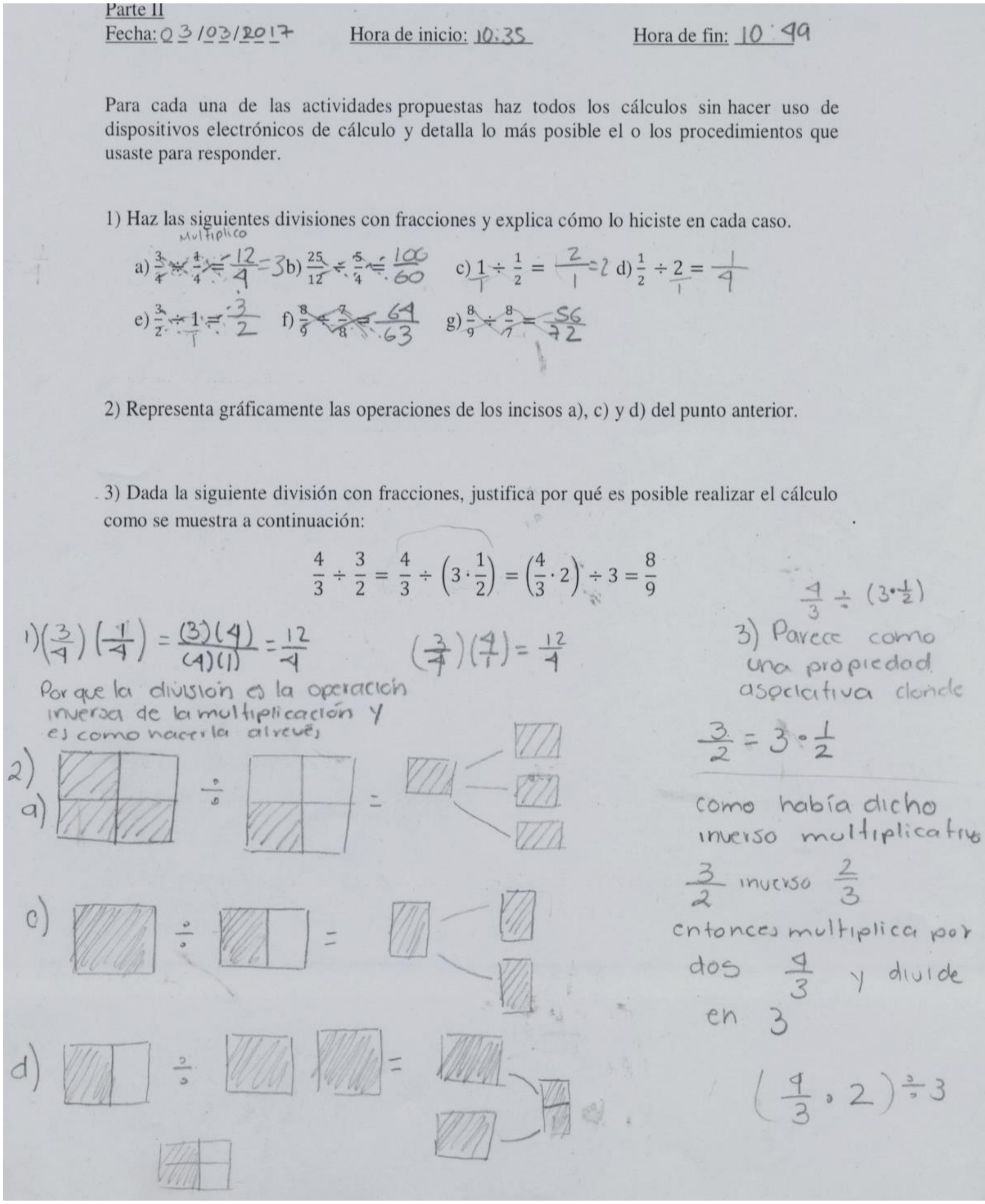
15 min 25 lts, 21 lts, 46
30min 92
60min 184
90min 276
93min 9.2

276
18.4
294.4 — 96min

5.9


6) 5 − 3
x 1.5
7 − 5
x 1.5
97.5 min
97.5 min

Cuestionario A13 – Segunda parte



Parte II

Fecha: 03/03/2017 Hora de inicio: 10:35 Hora de fin: 10:49

Para cada una de las actividades propuestas haz todos los cálculos sin hacer uso de dispositivos electrónicos de cálculo y detalla lo más posible el o los procedimientos que usaste para responder.

1) Haz las siguientes divisiones con fracciones y explica cómo lo hiciste en cada caso.

Multiplico

a) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} = \frac{12}{4} = 3$ b) $\frac{25}{12} \div \frac{5}{4} = \frac{100}{60}$ c) $1 \div \frac{1}{2} = \frac{2}{1} = 2$ d) $\frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{4}$

e) $\frac{3}{2} \div 1 = \frac{3}{2}$ f) $\frac{8}{9} \div \frac{7}{8} = \frac{64}{63}$ g) $\frac{8}{9} \div \frac{8}{7} = \frac{56}{72}$

2) Representa gráficamente las operaciones de los incisos a), c) y d) del punto anterior.

3) Dada la siguiente división con fracciones, justifica por qué es posible realizar el cálculo como se muestra a continuación:

$$\frac{4}{3} \div \frac{3}{2} = \frac{4}{3} \div \left(3 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{4}{3} \cdot 2\right) \div 3 = \frac{8}{9}$$

1) $\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{1}\right) = \frac{(3)(4)}{(4)(1)} = \frac{12}{4}$ $\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{1}\right) = \frac{12}{4}$

Porque la división es la operación inversa de la multiplicación y es como hacerla al revés

2) a) c) d)

$\frac{4}{3} \div \left(3 \cdot \frac{1}{2}\right)$

3) Parece como una propiedad asociativa donde

$\frac{3}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2}$

como había dicho inverso multiplicativo

$\frac{3}{2}$ inverso $\frac{2}{3}$

entonces multiplica por dos $\frac{4}{3}$ y divide en 3

$\left(\frac{4}{3} \cdot 2\right) \div 3$

Cuestionario A14 – Primera parte

Parte I

Fecha: 3 / 03 / 2017 Hora de inicio: 10:00 Hora de fin: 10:36

Lee detenidamente los siguientes problemas y resuélvelos sin hacer uso de dispositivos electrónicos de cálculo y detallando lo más posible el o los procedimientos que usaste para resolverlos.

1) Se distribuyen, en igual cantidad, $35\frac{1}{2}$ lts de aceite en 71 botellas. ¿Qué cantidad de aceite contiene cada botella?

2) Un cajón donde se guardan toallas tiene $\frac{7}{8}$ m de largo. Al doblar y guardar las toallas, cada una ocupa $\frac{1}{4}$ m de largo. Considerando el largo del cajón, ¿cuántas toallas caben?

3) ¿Qué tiempo ha viajado un automóvil que a velocidad constante de 80 km/h recorrió 160/3 km?

4) Un peatón camina 4km en 5hs. ¿Cuántos km caminará en 48 min?

5) Un campo rectangular tiene una superficie que mide $\frac{2}{3}u^2$. Sabiendo que su ancho mide $\frac{5}{7}u$, averigua cuánto mide el largo.

6) Un tonel tiene una capacidad de 300 lts. Un grifo que da 5 lts en 3 min y otro que da 7 lts en 5 min se abren al mismo tiempo para llenarlo. ¿En cuántos minutos se llenará el tonel? ¿Cuántos litros habrá proporcionado cada grifo?

1

$35\frac{1}{2} = 35.5$ $\qquad 71\overline{)35.5}$ $\rightarrow 0.5$, residuo 0

$\boxed{0.5 = \frac{1}{2}}$

R= Cada botella lleva $\frac{1}{2}$ Litro de aceite

2

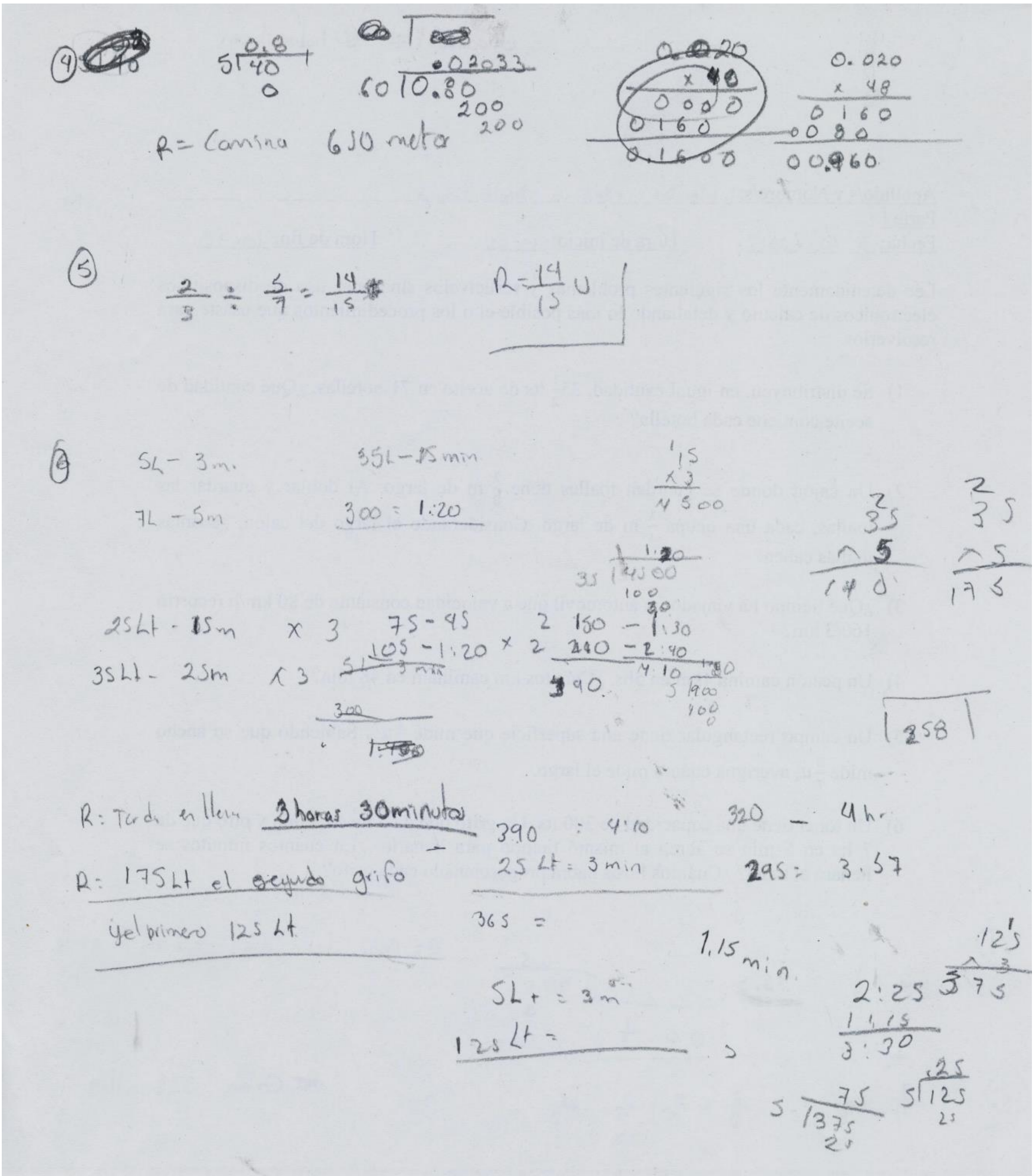
$\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ $\qquad \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{6}{8}$

R= Caben 3 toallas

3

R= $\dfrac{80}{\frac{160}{3}} = \dfrac{240}{160} = 1.5 = 1:30$ hrs

$160\overline{)240}$ $\rightarrow 1.5$; 800



(4)
$5\overline{)40}$ 0.8
0
$60\overline{)0.80}$ .02033
200
200

R = Camina 650 metr

0.020
× 48
0160
0080
00.960

(5)
$\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{14}{15}$

R = $\frac{14}{15}$ u

(6)
5L – 3m.
7L – 5m
35L – 15 min
300 = 1:20

25Lt · 15m × 3 75 – 45
35Lt – 25m × 3 105 – 1:20 × 2 210 – 2:40
2 150 – 1:30
390.

R: Tarda en llenar 3 horas 30 minutos

R: 175Lt el segundo grifo
y el primero 125 Lt

390 : 4:10
320 – 4 h.
25 Lt = 3 min
295 = 3.57
365 =
1.15 min.
5Lt = 3 m
125 Lt =
2:25
1:15
3:30

Cuestionario A14 – Segunda parte

Parte II

Fecha: 3 /03/2019 Hora de inicio: 10:37 Hora de fin: 10:48

Para cada una de las actividades propuestas haz todos los cálculos sin hacer uso de dispositivos electrónicos de cálculo y detalla lo más posible el o los procedimientos que usaste para responder.

1) Haz las siguientes divisiones con fracciones y explica cómo lo hiciste en cada caso.

a) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} =$ b) $\frac{25}{12} \div \frac{5}{4} =$ c) $1 \div \frac{1}{2} =$ d) $\frac{1}{2} \div 2 =$

e) $\frac{3}{2} \div 1 =$ f) $\frac{8}{9} \div \frac{7}{8} =$ g) $\frac{8}{9} \div \frac{8}{7} =$

2) Representa gráficamente las operaciones de los incisos a), c) y d) del punto anterior.

3) Dada la siguiente división con fracciones, justifica por qué es posible realizar el cálculo como se muestra a continuación:

$$\frac{4}{3} \div \frac{3}{2} = \frac{4}{3} \div \left(3 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{4}{3} \cdot 2\right) \div 3 = \frac{8}{9}$$

1

a) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} = \frac{12}{4} = \frac{8}{2} = \frac{4}{1} = \underline{4}$ //

b) $\frac{25}{12} \div \frac{5}{4} = \frac{100}{60} = \frac{50}{30} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3} = \underline{1\frac{2}{3}}$ /

c) $\frac{1}{1} \div \frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{2}}$ //

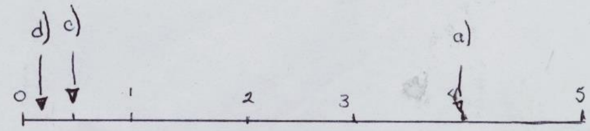
d) $\frac{1}{2} \div \frac{2}{1} = \underline{\frac{1}{4}}$ /

e) $\frac{3}{2} \div \frac{1}{1} = \frac{3}{2} = \underline{1\frac{1}{2}}$ //

f) $\frac{8}{9} \div \frac{7}{8} = \frac{64}{63} = \underline{1\frac{1}{63}}$ //

g) $\frac{8}{9} \div \frac{8}{7} = \frac{56}{72} = \frac{28}{36} = \frac{14}{18} = \underline{\frac{7}{9}}$ //

2



Caracterización de las respuestas del alumno A1

<table>
<tr><td rowspan="2">U – A</td><td>**División de fracciones**: 5/5</td><td>**R – M**: En la resolución de dos problemas, se apoya de representaciones pictóricas, al parecer, para imaginar y entender la situación que se le plantea para posteriormente resolver el problema (ver problemas 2 y 5).

H – A: En los casos que divide fracciones, al parecer aplica el algoritmo producto cruzado. Cuando no está convencido de algún resultado, convierte la/s fracción/es en decimales para dividirlos (ver problema 5).

P – P: En un caso aplica la equivalencia de fracciones para simplificar y obtener una fracción irreducible.

U – A: Reconoce que los problemas son de división de fracciones y usa esa operación para resolverlos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">**Otra/s estrategia/s**: El problema que se resuelve con multiplicación, aplica regla de tres.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">H – A</td><td>**Cálculo**</td><td>Toma la división $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4}$ como ejemplo para indicar que en todos los demás casos de división aplica el algoritmo “producto cruzado”. En los casos de división por un entero, lo convierte en una fracción con denominador 1, salvo excepción de $\frac{3}{2} \div 1$, donde no hay rastros que convierta a 1 en fracción.</td></tr>
<tr><td>**Propiedades**</td><td>Al parecer usa la propiedad: ‘al dividir un número distinto de cero entre uno, el resultado es el mismo número’ en el inciso 1e.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">P – P</td><td colspan="2">**Numérico – Verbal**: La idea que este alumno manifiesta sobre la veracidad de una cadena de igualdades es que cada elemento de la cadena sea numéricamente equivalente, por ello hace cálculos de forma aislada y convierte las fracciones hasta encontrar las mismas expresiones numéricas en cada caso.

Empero, en estricto, no está usando propiedades de las operaciones y las representaciones simbólicas de las fracciones para argumentar la veracidad de las igualdades parciales.</td></tr>
<tr><td colspan="2">**Propiedades**: No aplica</td></tr>
<tr><td>R – M</td><td colspan="2">En cada caso que se pide que represente la división de fracciones, el estudiante representa pictóricamente las fracciones dividendo y divisor de la división, utilizando un modelo continuo: área de rectángulos. Esta ‘traducción’ al lenguaje gráfico no constituye la representación de la operación. Utiliza el significado cuotitivo de la división, ya que escribe: “3 veces cabe 1/4 en 3/4”. Para la división por un entero, no logra dar una interpretación con el modelo que él propone.</td></tr>
</table>

Caracterización de la actuación del Alumno 1:

1. Reconoce todos los problemas como de división de fracciones y de manera consistente usa esa operación para resolverlos.

2. De manera consistente usa el producto cruzado, pero también convierte a decimales.

3. No hay evidencias del uso de propiedades de las fracciones y sus operaciones al hacer cálculos o al justificar la veracidad de una cadena de igualdades, salvo en el caso de la división entre 1.

4. Representa pictóricamente las fracciones dividendo y divisor de la división, constituyendo esto una traducción del lenguaje simbólico al pictórico. Usa el modelo continuo de área de rectángulos.

5. Al encontrar una inconsistencia con sus cálculos usando fracciones convierte a decimales y efectúa las operaciones.

Caracterización de las respuestas del alumno A2

<table>
<tr><td rowspan="2">U – A</td><td colspan="2">División de fracciones: 1/5</td><td>R – M: No aplica, es decir no hace uso de representaciones pictóricas como apoyo a la comprensión de los problemas.

H – A: Solo aplica a un caso, puesto que convierte un número mixto a decimal para dividirlo por un entero (el cociente que obtiene no es correcto).

P – P: No aplica propiedades en los cálculos que realiza.

U – A: No hay evidencias de que reconozca los problemas como aquellos que se pueden resolver con división de fracciones, y en sólo un caso emplea la conversión a decimales para resolver el problema.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Otra/s estrategia/s: 1) Convierte las fracciones del segundo problema a decimales y estima las veces que uno cabe en el otro, luego multiplica para corroborar su estimación.

2) Deja rastros de hacer uso de tablas para responder a la segunda pregunta del problema del tonel y los grifos.

Notas: Deja sin resolver a 2/6 problemas.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">H – A</td><td>Cálculo</td><td colspan="2">En las 7 divisiones propuestas aplica ley del sandwich. En los casos de divisiones con entero, lo convierte en fracción escribiendo 1 como denominador.</td></tr>
<tr><td>Propiedades</td><td colspan="2">1/7 utiliza la equivalencia de fracciones para simplificar. Deja rastro de haber usado la equivalencia en otra división, pero luego borra. Quizá</td></tr>
</table>

		porque no acepta que el resultado de dividir dos fracciones pueda ser un entero.
P – P	**Numérico – Verbal:** Centra su atención en $\frac{3}{2}$, reconociendo que se puede expresar como $\frac{1}{2}\cdot 3$ y manifiesta que el penúltimo y primer miembro son iguales, pero no da una justificación de porqué es válido.	
	Propiedades: no aplica.	
R – M	Utiliza el modelo de recta numérica para representar allí los resultados de las divisiones. No explicita un punto de referencia en la recta.	
Caracterización de la actuación del Alumno 2: 1. Solo resuelve uno de los cinco problemas de división de fracciones, usando el algoritmo de conversión a decimal. Sin embargo el resultado que obtiene, es incorrecto. 2. Usa dos tipos de algoritmos, conversión a decimales y ley del sandwich. 3. Intenta usar la propiedad $\frac{1}{2}\cdot 3 = \frac{3}{2}$ para justificar la cadena de igualdades, centrándose en el primer y el penúltimo eslabón. Usa la equivalencia para obtener expresiones fraccionarias irreducibles. 4. Usa la recta numérica para representar los resultados.		

Caracterización de las respuestas del alumno A3.

U – A	**División de fracciones**: 5/5	**R – M**: En solo un caso, se apoya de una representación pictórica para comprender el problema y resolverlo (ver problema 5). **H – A**: en 2/5 problemas, convierte la fracción en decimal y luego realiza la operación correspondiente. En 3/5 problemas divide fracciones: en 2 de ellas aplica, al parecer, ley del sándwich y en la restante el algoritmo producto cruzado. **P – P**: En uno de los casos que divide con fracciones, usa fracciones equivalentes para simplificar. **U – A**: Reconoce que los problemas son de división de fracciones y usa esa operación para resolverlos.
	Otra/s estrategia/s: No aplica. **Nota1**: 1/5 problemas en los que resuelve con división de fracciones no corresponde al tipo de solución (problema de control – ver problema 4) **Nota2**: Del problema seis, realiza un planteo pero no concluye nada.	

<table>
<tr><td rowspan="2">H – A</td><td>Cálculo</td><td>No especifica cómo realiza la división de las fracciones dadas. Sin embargo, por el registro de un producto que hace, probablemente esté usando el algoritmo producto cruzado.</td></tr>
<tr><td>Propiedades</td><td>En 3/7 aplica equivalencia de fracciones para simplificar. Aunque en uno de ellos, lo puede seguir haciendo, lo deja expresado como una fracción reducible.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">P – P</td><td colspan="2">Numérico – Verbal: La idea que este alumno manifiesta sobre la veracidad de una cadena de igualdades es que cada elemento de la cadena sea numéricamente equivalente, por ello hace cálculos de forma aislada y convierte las fracciones hasta encontrar las mismas expresiones numéricas en cada caso.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Propiedades: No aplica</td></tr>
<tr><td>R – M</td><td colspan="2">No resuelve el inciso</td></tr>
<tr><td colspan="3">Caracterización de la actuación del Alumno 3:

1. Reconoce todos los problemas como de división de fracciones y de manera consistente usa esa operación para resolverlos.

2. De manera consistente usa el producto cruzado, pero también hace uso de la ley del sandwich y la conversión a decimales.

3. Hay evidencias del uso de propiedades de las fracciones para simplificar sin embargo no hay evidencia del uso de propiedades al hacer cálculos o al justificar la veracidad de una cadena de igualdades, salvo en el caso de la división entre 1.

4. No resuelve el inciso de representación gráfica.

Nota 1: Se puede apreciar que el estudiante tiene dificultades respecto al orden en que realiza la división, es decir que invierte el orden de dividendo y divisor.

Nota 2: Solo realiza los cálculos pero no responde los problemas, es decir no da sentido a los valores que obtiene.</td></tr>
</table>

Caracterización de las respuestas del alumno A4

<table>
<tr><td rowspan="2">U – A</td><td>División de fracciones: 5/5</td><td>R – M: En uno de los problemas, usa una representación pictórica para ubicar los datos del problema y, al parecer, interpretar la situación.

H – A: en 1/5 problemas, convierte el número mixto en decimal y luego realiza la división por un entero. En 4/5 problemas divide fracciones, al parecer, aplicando el algoritmo producto cruzado.

P – P: En uno de los casos que divide con fracciones, usa fracciones equivalentes para simplificar, pero en otra del mismo tipo lo deja expresado como fracción reducible incluso en la respuesta al problema.

U – A: Reconoce que los problemas son de división de fracciones y usa esa operación para resolverlos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Otra/s estrategia/s: Para el problema que no se resuelve con división de fracciones, utiliza regla de tres.

Nota: En tres problemas recurre a expresiones algebraicas para plantearlo y resolverlo.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">H – A</td><td>Cálculo</td><td>No especifica cómo realiza la división de las fracciones dadas. Al parecer hace uso del algoritmo producto cruzado. Los casos de división con un entero, el estudiante lo convierte en fracción colocando 1 como denominador.</td></tr>
<tr><td>Propiedades</td><td>No hay rastros que utilice propiedades, sin embargo en una parte del cuestionario al escribir los resultados de las divisiones lo hace con fracciones irreducibles a diferencia de como los expresa a lado de cada división.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">P – P</td><td colspan="2">Numérico – Verbal: Resuelve cada miembro de la igualdad y muestra que numéricamente son iguales, lo que constituye su justificación.

<u>Nota</u>: al parecer confunde el producto de un entero por una fracción con un número mixto, lo que lo lleva a obtener una fracción errónea. Al tiempo manifiesta errores de simplificación de fracciones.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Propiedades: no aplica</td></tr>
<tr><td>R – M</td><td colspan="2">En uno de los tres caso de representación, usa el modelo del pastel para representar pictóricamente las fracciones dividendo y divisor, además del resultado de la división. En los otros dos casos, usa dos rectas numéricas perpendiculares entre sí, y en uno de los casos se puede interpretar que representa el resultado de la división por un punto en el plano (ver tarea 2 inciso c). En el tercer caso, solo deja representado las rectas perpendiculares.</td></tr>
</table>

Caracterización de la actuación del alumno 4

1. Reconoce todos los problemas como los que se pueden resolver con división de fracciones y usa consistentemente esta operación para resolverlos.

2. Usa consistentemente el algoritmo producto cruzado, aunque también convierte a decimal.

3. Hay evidencias del uso de propiedades de las fracciones para, en algunos casos simplificar, sin embargo no hay evidencia del uso de propiedades al hacer cálculos o al justificar la veracidad de una cadena de igualdades.

4. Solo en un caso representa pictóricamente las fracciones y el resultado, usando el modelo del pastel.

Caracterización de las respuestas del alumno A5:

<table>
<tr><td rowspan="2">U – A</td><td colspan="2">División de fracciones: 1/5</td><td>R – M: En dos problemas, hace uso de representaciones pictóricas para, en un caso responder al problema y en el otro como apoyo a la comprensión del problema y ubicar allí los datos del mismo (ver problemas 2 y 5).

H – A: En uno de los cinco problemas, convierte el número mixto en decimal y luego realiza la división por un entero.

P – P: No aplica.

U – A: No hay evidencias que reconozca los problemas como aquellos que se pueden resolver con división de fracciones, ya que sólo en un caso emplea la conversión a decimales para resolver el problema.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Otra/s estrategia/s: Usa tablas de proporcionalidad para responder a las dos preguntas del último problema (ver problema 6)

Nota: Tres de los seis problemas los deja planteados, pero no los resuelve. De los problemas que resolvió, solo uno lo hizo correctamente.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">H – A</td><td>Cálculo</td><td colspan="2">En todos los casos, escribe la división de fracciones como fracción de fracciones para aplicar la ley del sándwich. Los casos de división con un entero, los convierte en fracción colocando 1 como denominador.</td></tr>
<tr><td>Propiedades</td><td colspan="2">Utiliza la equivalencia de fracciones para simplificar las mismas en los casos que es posible hacerlo.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">P – P</td><td colspan="3">Numérico – Verbal: Justifica explicando verbalmente que cada miembro de la igualdad, al resolver, da el mismo resultado y por ello son iguales. Resuelve cada miembro del igual y comprueba que son iguales.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Propiedades: Multiplicación de un entero por una fracción.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>R – M</td><td>Utiliza el modelo del pastel para representar los resultados de las divisiones más no para representar las divisiones dadas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Caracterización de las actuaciones del alumno 5:

1. Solo resuelve uno de los cinco problemas de división de fracciones, usando el algoritmo de conversión a decimal.

2. Usa consistentemente la ley del sandwich para dividir fracciones, pero también hace uso de decimales.

3. No hay evidencias del uso de propiedades de las fracciones y sus operaciones al hacer cálculos o al justificar la veracidad de una cadena de igualdades.

4. Representa los resultados de las divisiones mediante el modelo del pastel.</td></tr>
</table>

Caracterización de las respuestas del alumno A6

<table>
<tr><td rowspan="2">U – A</td><td colspan="2">División de fracciones: 1/5</td><td>R – M: No aplica

H – A: Deja rastro de convertir el número mixto en fracción, aunque al parecer ‘olvida’ el denominador.

P – P: No aplica.

U – A: No reconoce los problemas como los que se pueden resolver con división de fracciones.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Otra/s estrategia/s: No aplica.

Nota: Responde a cinco de los seis problemas, pero no muestra evidencia de los procedimientos utilizados.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">H – A</td><td>Cálculo</td><td colspan="2">Deja rastro de realizar una división y en las demás divisiones solo coloca resultados, pero ninguno de ellos es correcto.</td></tr>
<tr><td>Propiedades</td><td colspan="2">No aplica</td></tr>
<tr><td rowspan="2">P – P</td><td colspan="3">Numérico - Verbal: Deja rastro de realizar un cálculo sin llegar a nada concreto.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Propiedades: No aplica.</td></tr>
<tr><td>R – M</td><td colspan="3">No resuelve el inciso</td></tr>
</table>

Caracterización de las actuaciones del alumno 6

1. Solo resuelve uno de los cinco problemas de división de fracciones, convirtiendo el número mixto a fracción, pero como lo hace de forma incorrecta, termina dividiendo dos números enteros.

2. No hay rastros del algoritmo que utiliza para dividir fracciones.

3. No hay evidencias del uso de propiedades de las fracciones y sus operaciones al hacer cálculos o al justificar la veracidad de una cadena de igualdades.

4. No resuelve la tarea.

Nota: Tras especificar claramente en el cuestionario y decirlo verbalmente a los estudiantes que no estaba permitido el uso de calculadoras o dispositivos electrónicos, éste estaba haciendo uso del celular, probablemente usando calculadora.

Caracterización de las respuestas del alumno A7

<table>
<tr><td rowspan="2">U – A</td><td>División de fracciones: 4/5</td><td>R – M: En uno de los problemas realiza una representación pictórica para ubicar los datos del mismo y resolverlo.

H – A: En uno de los cinco problemas, convierte el número mixto a decimal y hace la división por un entero. Por otra parte, en tres de los cinco problemas aplica la ley del sándwich para dividir.

P – P: No aplica.

U – A: Reconoce que los problemas son de división de fracciones y usa esa operación para resolverlos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Otra/s estrategia/s: En el problema de control, el estudiante usa regla de tres para resolver. Nota: Una de las divisiones con fracciones lo plantea de forma inversa pero lo responde correctamente. Del último problema escribe los datos, pero no resuelve.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">H – A</td><td>Cálculo</td><td>Toma la primera división para especificar que utiliza el algoritmo producto cruzado. En una de las divisiones con un entero, convierte el mismo en fracción con denominador 1.</td></tr>
<tr><td>Propiedades</td><td>Utiliza equivalencia de fracciones para simplificar en los casos posibles.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">P – P</td><td colspan="2">Numérico - Verbal: Marca el primer miembro de la igualdad junto al primer factor del segundo miembro y escribe que “está bien porque solo se simplificó el resultado”.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Propiedades: No aplica.</td></tr>
</table>

R – M	Utiliza el modelo del pastel para representar pictóricamente las fracciones dividendo y divisor, pero no representa la operación.
Caracterización de las actuaciones del Alumno 7. 1. Reconoce los problemas como de división de fracciones y de manera consistente usa esa operación para resolverlos. 2. Usa ley del sandwich y producto cruzado, pero también convierte a decimal para dividir. 3. No hay evidencias del uso de propiedades de las fracciones y sus operaciones al hacer cálculos o al justificar la veracidad de una cadena de igualdades. Solo se centra en una parte de la igualdad. 4. Representa pictóricamente las fracciones dividendo y divisor, usando el modelo del pastel.	

Caracterización de las respuestas del alumno A8.

U – A	**División de fracciones**: 1/5	**R – M**: En uno de los problemas, se apoya de una representación pictórica para imaginar la situación que se le plantea y resolverlo. **H – A**: En uno de los problemas, convierte el número mixto a decimal, pero lo hace de manera errónea y posteriormente divide. Lo que obtiene es una división entre dos números enteros (Ver problema 1) **P – P**: No aplica. **U – A**: No hay evidencias que reconozca los problemas como aquellos que se pueden resolver con división de fracciones. En un caso divide sólo la parte entera del número mixto entre un entero. Al parecer identifica todos los problemas como los que se pueden resolver con multiplicación.
	Otra/s estrategia/s: En el problema de control, el estudiante usa regla de tres para resolver el problema. **Nota**: En tres de los cinco problemas los resuelve con multiplicación. En uno de los cinco solo da la respuesta.	
H – A	**Cálculo**	No hay evidencia del algoritmo que utiliza para dividir fracciones. Sin embargo, infiero que probablemente esté haciendo uso del algoritmo producto cruzado.
	Propiedades	Utiliza equivalencia de fracciones para simplificar en los casos posibles. En dos casos deja expresado como fracción reducible, aunque hay rastro que en uno de ellos lo simplificó y luego lo borra.

P – P	**Numérico - Verbal**: Solo expresa que sin importar el método que se utilice, el resultado siempre debe ser correcto.
	Propiedades: No aplica
R – M	Utiliza el modelo de recta numérica para representar los resultados de las divisiones. No pone puntos de referencia en las rectas.
Caracterización de las actuaciones del Alumno 8 1. Solo resuelve uno de los problemas haciendo una división. El resultado que obtiene no es correcto debido a que la conversión a decimal que hace, lo hace incorrectamente. 2. No se evidencia el algoritmo que está usando para dividir fracciones. Se infiere que quizá sea producto cruzado (se verifica este dato en la entrevista). Además convierte un número mixto a decimal. 3. No hay evidencia del uso de propiedades de las fracciones y sus operaciones al hacer cálculos o al justificar la veracidad de una cadena de igualdades. Intenta dar una justificación verbal. 4. Representa los resultados de las divisiones. (Modelo de recta numérica)	

Caracterización de las respuestas del alumno A9

U – A	**División de fracciones**: 2/5	**R – M**: En uno de los problemas se apoya de una representación pictórica, al parecer para comprender la situación planteada y ubicar los datos. Se infiere que usa el significado cuotitivo de la división. **H – A**: Convierte el número mixto a decimal. Por otra parte aplica el algoritmo producto cruzado en el caso que divide fracciones. **P – P**: No aplica. **U – A**: No hay evidencias de que reconozca los problemas como aquellos que se pueden resolver con división de fracciones, en sólo un caso emplea la conversión a decimales para resolver el problema y en otro caso aplica algoritmo producto cruzado.
	Otra/s estrategia/s: En el problema de control el estudiante hace uso de la regla de tres para resolverlos. **Nota**: En uno de los problemas, debido a una mala simplificación de expresiones algebraicas, termina realizando un producto en lugar de un cociente.	

<table>
<tr><td rowspan="2">H – A</td><td>Cálculo</td><td>En todos los casos aplica el algoritmo producto cruzado. En los casos de división por enteros los convierte en fracciones con el mismo denominador que la fracción dividendo o divisor según sea el caso.</td></tr>
<tr><td>Propiedades</td><td>No aplica</td></tr>
<tr><td rowspan="2">P – P</td><td colspan="2">Numérico - Verbal: Solo explica que $\frac{3}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2}$ argumentando que “lo que se encuentra entre paréntesis es lo mismo que algún factor multiplicativo”.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Propiedades: No aplica.</td></tr>
<tr><td>R – M</td><td colspan="2">Utiliza el modelo de recta numérica para representar los resultados de las divisiones.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Caracterización de las actuaciones del Alumno 9:
1. Solo resuelve dos de los cinco problemas con división de fracciones.
2. Usa consistentemente el algoritmo producto cruzado, pero también convierte un número mixto a decimal para posteriormente dividirlo por un entero.
3. Intenta usar la propiedad $\frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$ para justificar la cadena de igualdades, centrándose solo en el segundo factor del segundo miembro de la igualdad.
4. Representa pictóricamente, a través del modelo de recta numérica, los resultados de las divisiones.</td></tr>
</table>

Caracterización de las respuestas del alumno A10

<table>
<tr><td>U – A</td><td>División de fracciones: 2/5</td><td>R – M: En uno de los problemas recurre a una representación pictórica para resolver. Usando el modelo de área de rectángulo, sombrea 7/8 y marca cuantos cuartos caben 7/8 (ver problema 2).

H – A: Convierte el número mixto a decimal. Realiza una división de fracciones, pero no es posible determinar el algoritmo que usa; el resultado que obtiene no es correcto.

P – P: No aplica.

U – A: No hay evidencias de que reconozca los problemas como aquellos que se pueden resolver con división de fracciones, en sólo un caso emplea la conversión a decimales para resolver el problema y en otro no es posible determinar el algoritmo que utiliza.</td></tr>
</table>

	Otra/s estrategia/s: 1) Resuelve uno de los problemas a través de una representación pictórica. 2) En el problema de control, el estudiante reduce a unidades de medida inferiores y plantea una regla de tres. 3) Para responder al problema 6 recurre al uso de tablas de proporcionalidad.	
H – A	**Cálculo**	En dos cálculos deja rastros de que al parecer estaba usando el algoritmo para sumar fracciones, luego los anula. Solo escribe los resultados de las divisiones, pero no es posible determinar el algoritmo que usa. En los casos de divisiones con un entero los convierte a fracción colocando como denominador uno.
	Propiedades	No aplica.
P – P	**Numérico - Verbal**: No aplica.	
	Propiedades: No aplica.	
R – M	Utiliza el modelo de área rectangular. Aunque escribe las divisiones que se piden, luego representa pictóricamente las fracciones dividendo y divisor además del resultado de la división.	
Caracterización de las actuaciones del Alumno 10 1. Solo resuelve dos de los cinco problemas de división de fracciones usando esta operación, aunque el resultado que obtiene de uno de ellos no es correcto. 2. No es posible determinar el uso que hace de los algoritmos ya que solo responde correctamente 3/7 en los cálculos. 3. No responde a la actividad. 4. Representa pictóricamente las fracciones y el resultado de la división.		

Caracterización de las respuestas del alumno A11

U – A	**División de fracciones**: 1/5	**R – M**: En uno de los problemas se apoya de una representación pictórica para imaginar la situación planteada y ubicar los datos en él. **H – A**: Convierte el número mixto a decimal y realiza la división entre el entero. **P – P**: No aplica. **U – A**: No hay evidencias de que reconozca los problemas como aquellos que se pueden resolver con división de fracciones, en sólo un caso emplea la

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td></td><td>conversión a decimales para resolver el problema, en los demás aplica otras operaciones que no resuelven los problemas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Otra/s estrategia/s: 1) En el problema de control, el estudiante usa proporcionalidad para resolverlo.

2) En el problema 6, usa proporcionalidad para responder el problema pero lo hace combinando magnitudes de manera errónea.

Nota: En uno de los problemas (ver problema 3), al parecer solo divide el numerador de la fracción entre el número entero, llevándolo esto a una respuesta incorrecta.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">H – A</td><td>Cálculo</td><td>Describe verbalmente que en todos los casos aplica el producto cruzado para dividir las fracciones dadas. En los casos de división con un entero lo convierte a fracción con denominador 1.</td></tr>
<tr><td>Propiedades</td><td>En solo un caso usa la equivalencia de fracciones para simplificar, pero aun así obtiene una fracción reducible.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">P – P</td><td colspan="2">Numérico - Verbal: La idea que este alumno manifiesta sobre la veracidad de una cadena de igualdades es que cada elemento de la cadena sea numéricamente equivalente, por ello hace cálculos de forma aislada y convierte las fracciones hasta encontrar las mismas expresiones numéricas en cada caso.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Propiedades: No aplica.</td></tr>
<tr><td>R – M</td><td colspan="2">Utiliza el modelo de área rectangular. Se aprecia que representa pictóricamente los resultados de las divisiones dadas. Sin embargo, en dos casos divide en las partes que indica el numerador y marca las que indica el denominador y solo en un caso grafica correctamente el resultado de la división.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Caracterización de las actuaciones del Alumno 11

1. Solo resuelve uno de los cinco problemas de división de fracciones usando esta operación.

2. Usa el algoritmo producto cruzado, aunque también convierte a decimal.

3. No hay evidencia del uso de propiedades de las fracciones y sus operaciones al hacer los cálculos o al justificar la veracidad de una cadena de igualdades. Sin embargo, se apoya en la igualdad numérica entre cada miembro de la cadena de igualdad para justificar.

4. Mediante el modelo de área de rectángulos, representa pictóricamente los resultados de las divisiones.</td></tr>
</table>

Caracterización de las respuestas del alumno A12

<table>
<tr><td rowspan="2">U – A</td><td>División de fracciones: 1/5</td><td>R – M: No aplica.

H – A: Convierte el número mixto a decimal y realiza la división entre el entero.

P – P: No aplica.

U – A: No hay evidencias de que reconozca los problemas como aquellos que se pueden resolver con división de fracciones, en sólo un caso emplea la conversión a decimales para resolver el problema. Dos de los seis problemas no los resuelve.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Otra/s estrategia/s: 1) Para resolver el problema de control, hace una división y posteriormente una multiplicación, llegando a un resultado erróneo.

2) Recurre al uso de tabla de proporcionalidad para resolver el último problema.

Nota: Responde a uno de los problemas, pero no hay evidencia de cómo obtuvo la respuesta.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">H – A</td><td>Cálculo</td><td>En todas las divisiones aplica el algoritmo producto cruzado. En los casos de división con un entero, lo convierten en fracción con denominador 1.</td></tr>
<tr><td>Propiedades</td><td>En los casos que son posible, hace uso de la equivalencia de fracciones para simplificar. En algunos caso obtiene una fracción que aún es reducible y en otros casos resultados incorrectos.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">P – P</td><td colspan="2">Numérico - Verbal: Solo escribe “por la manera matemática correcta de resolución”.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Propiedades: No aplica.</td></tr>
<tr><td>R – M</td><td colspan="2">Utiliza un modelo discreto, número de manzanas, para representar pictóricamente los resultados de las divisiones. Para representar 6/2 dibuja 6 manzanas y la mitad de otra.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Caracterización de las actuaciones del Alumno 12.

1. Solo resuelve uno de los problemas de división de fracciones haciendo uso de esta operación.

2. Usa el algoritmo producto cruzado en los cálculos de las divisiones, sin embargo, también convierte el número mixto a decimal para posteriormente dividir.

3. No hay evidencia del uso de propiedades de las fracciones y sus operaciones al hacer los cálculos o al justificar la veracidad de una cadena de igualdades.

4. Mediante el modelo discreto (cantidad de manzanas), representa pictóricamente los resultados de las divisiones.</td></tr>
</table>

Caracterización de las respuestas del alumno A13

<table>
<tr><td rowspan="2">U – A</td><td>División de fracciones: 4/5</td><td>R – M: En uno de los problemas, recurre al apoyo de una representación pictórica para imaginar la situación y a partir de allí resolver el problema.

H – A: En los 4 problemas que resuelve con división de fracciones al parecer hace uso del algoritmo producto cruzado. Esta hipótesis se basa sobre los cálculos que realiza en la segunda parte del cuestionario, donde especifica que usa dicho algoritmo.

P – P: En los casos donde es posible hacerlo, hace uso de la equivalencia de fracciones para simplificar.

U – A: Reconoce que los problemas son de división de fracciones y usa esa operación para resolverlos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Otra/s estrategia/s: 1) En el problema de control, usa la regla de tres para resolverlo, convirtiendo previamente las magnitudes a una unidad inferior.

2) En el último problema, al parecer, reconoce que es un problema de más de una etapa y usa proporcionalidad para resolverlo.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">H – A</td><td>Cálculo</td><td>Posteriormente, en los cálculos hace uso del algoritmo producto cruzado. En los casos de división con un entero, los convierte en fracción con denominador 1.</td></tr>
<tr><td>Propiedades</td><td>Describe verbalmente, al parecer, el algoritmo invertir y multiplicar. En los casos donde es posible, hace uso de fracciones equivalentes para simplificar, solo en un caso no lo hace.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">P – P</td><td colspan="2">Numérico - Verbal: Interpreta como una propiedad asociativa el paréntesis del segundo miembro de la igualdad. Del tercer miembro de la igualdad, toma que como 2/3 es el inverso multiplicativo de 3/2, entonces por ello se multiplica a 4/3 por 2 y luego se divide por 3.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Propiedades: Reconoce las propiedades asociativa y la propiedad del inverso multiplicativo de un número.</td></tr>
<tr><td>R – M</td><td colspan="2">Utiliza el modelo de área rectangular. Representa pictóricamente las fracciones dividendo y divisor junto con el resultado de la división.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Caracterización de las actuaciones del Alumno 13

1. Reconoce los problemas como de división de fracciones y de manera consistente usa esta operación para resolverlos.

2. De manera consistente usa el algoritmo producto cruzado.

3. Hay evidencia del uso de propiedades de las fracciones y sus operaciones al hacer cálculos e intentar justificar la veracidad de una cadena de igualdades.</td></tr>
</table>

4. Usando el modelo de área de rectángulos, representa pictóricamente las fracciones dividendo y divisor junto al resultado de la división.

Caracterización de las respuestas del alumno A14

<table>
<tr><td rowspan="2">U – A</td><td>División de fracciones: 3/5</td><td>R – M: No aplica.

H – A: De los tres problemas que resuelve con división, en uno convierte el número mixto en decimal, en otro al parecer aplica ley del sándwich y el último algoritmo producto cruzado.

P – P: Hace uso de la equivalencia de fracciones para responder a uno de los problemas a través de sumarla iterativamente.

U – A: Reconoce que los problemas son de división de fracciones y en tres de los cinco problemas usa esta operación para resolverlos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Otra/s estrategia/s: 1) Suma de manera iterada una fracción equivalente a una de las fracciones del problema hasta aproximarse a la otra fracción y así responder el problema, es decir, está utilizando el significado cuotitivo de la división ya que suma el divisor hasta llegar al dividendo (ver problema 2).

2) En el problema de control, hace unas divisiones pero obtiene una respuesta equivocada.

3) En el último problema usa proporcionalidad para tratar de resolverlo, sin embargo lo hace estimando y por tal razón obtiene respuestas incorrectas.

Nota: Al resolver uno de los problemas usando la división, éste lo plantea de forma invertida es decir: divisor sobre dividendo y al aplicar ley del sandwich, obtiene un resultado erróneo (ver problema 3).</td></tr>
<tr><td rowspan="2">H – A</td><td>Cálculo</td><td>Al parecer hace uso del algoritmo producto cruzado para las divisiones de fracciones. En los casos de división con un entero, los convierte en fracción con denominador 1.</td></tr>
<tr><td>Propiedades</td><td>En los casos donde es posible aplicarlo, hace uso de fracciones equivalentes para simplificar los resultados. En los casos de fracciones mayores que la unidad, los expresa como números mixtos.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">P – P</td><td colspan="2">Numérico - Verbal: Solo expresa verbalmente que sí es posible realizar el cálculo como se muestra en el cuestionario, pero que es muy complejo hacerlo, y especifica que regularmente lo hacen por producto cruzado o por ley del sandwich.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Propiedades: No aplica.</td></tr>
</table>

R – M	Haciendo uso del modelo de recta numérica, representa los resultados de las divisiones.
Caracterización de las actuaciones del Alumno 14 1. Reconoce que los problemas son de división de fracciones y utiliza esta operación para resolverlos en tres de los cincos que se resuelven usando esta operación. 2. Usa el algoritmo producto cruzado para dividir fracciones, pero también hace uso de la ley del sandwich y conversión a decimales. 3. No hay evidencias del uso de propiedades de las fracciones y sus operaciones al hacer cálculos o al justificar la veracidad de una cadena de igualdades. 4. Representa los resultados de las divisiones usando el modelo de recta numérica.	

APÉNDICE 2
Entrevistas

Preguntas para entrevistar a A1

1. Puedo apreciar en tu cuestionario que todos los problemas que se resolvían con división de fracciones los hiciste usando esta operación, solo en un caso veo que primero hiciste la división con fracciones y después hiciste el mismo problema pero dividiendo decimales, ¿por qué decidiste hacerlo de ambas maneras? (Problema 5)
2. ¿Cómo decides cuando es conveniente trabajar con fracciones o cuando con decimales?
3. En tu cuestionario también pude ver que algunos problemas respondes con fracción y otros con decimales, por ejemplo los problemas 1, 3 y 6. ¿Cuándo consideras que se necesita expresar un resultado en decimal y no en fracción?
4. ¿Cuáles son los significados de la división que conoces? Por significados me refiero a, por ejemplo, un significado de la multiplicación es la suma repetida. **Si responde que no conoce, preguntar**: ¿Estos problemas son todos iguales? Tú los identificaste como problemas de división, pero ¿son todos iguales? Es decir, ¿son del mismo tipo o los puedes distinguir de alguna manera?
5. De la segunda parte del cuestionario, en el inciso 1, escribes que aplicaste el algoritmo producto cruzado. En el caso "e" ¿también lo aplicaste o cómo lo hiciste?
6. ¿Crees que el producto cruzado funciona siempre para dividir cuales quiera fracciones? Además del producto cruzado, ¿Qué otras formas de dividir fracciones conoces? **En caso que no sepa, preguntar**: si un alumno te hace estas divisiones así (se muestran los diferentes '*shortcuts*' con las divisiones del cuestionario) ¿te parece que están bien? ¿Por qué? ¿Será que siempre funcionan?
7. ¿Qué propiedades usarías para justificar el cálculo que se hace en el inciso 3?
8. En el inciso 2 veo que simplemente reemplazaste una forma de escribir por otra, es decir pasaste del símbolo al gráfico, ¿crees que ahí estas representando gráficamente la operación? ¿Cuál podría ser una representación de la división?

Entrevista A1

I: De la primera parte del cuestionario que eran 6 problemas, puedo apreciar que en el cuestionario, en todos los problemas que se resolvían con división de fracciones, vos lo hiciste usando esa operación. ¿Sí? Solo en un caso veo que primero usaste la división con fracciones y después hiciste el mismo problema, pero lo convertiste a decimal que es en el problema 5, que dice (lee el problema)… entonces aquí vi, en tu cuestionario que, bueno, utilizas una representación, digamos pictórica, para ubicar los datos y planteas como una ecuación que lo resuelves. Aquí, pusiste que no, como si no te convenciera, entonces hiciste otro planteamiento, el cual también después como que lo anulas, y entonces pasas a resolver el mismo problema pero con decimales, ¿sí?. ¿Por qué decidiste trabajarlo de ambas maneras?, o sea, con fracciones y con decimales.

A: ¡Eh!, bueno, llegué a la misma comprensión, que sí estaban bien los dos, pero en la parte de las fracciones, digamos que, bueno a lo mejor tú nos diste medidas fraccionarias que no se podían digamos comparar con las dimensiones de un campo de futbol, entonces íbamos a buscar algún numero entero más grande que 1 y me da 0.71. Ya multipliqué, y si me da todo eso. Pero digamos que más brevemente mi concepto, te imaginas un campo y buscaba como que muchos metros, o sea por esa parte, caí a lo mejor como en ese juego no sé de desviarnos, despistarnos, entonces yo al dividir 2/3 u^2 entre 5/7 me daba que apenas llegaba a 1, bueno, si apenas llegaba a 1, o sea ni siquiera 1.

I: Casi 1.

A: Ajá y dije ¿cómo casi 1? Entonces me lo imaginé y dije: "no pues, si es un campo, no puede ser casi 1, o sea no alcanzaría ni a la mitad… en esa lógica en fracciones e imaginan (interrupción de audio por ruido externo) entonces decidí hacerlo en decimales, y ya con decimales me salió en 0.71 que igual y …

I: Que tampoco es 1

A: Ahí sí que ya qué falla.

I: Pero entonces a ti lo que te perdió por así decirlo, ¿es la unidad?

A: Eh, las medidas. Por ejemplo si tu hubieras usado, no sé, 500 u^2 entre 5/7 ah pues ya yo iba a encontrar mejor, eh, no sé como unas 200 aproximadamente, o sea algo como más llamativo.

I: O sea, para ti, por tratarse de una situación problemática que habla de un campo, tiene que ser mayor que 1 o 1.

A: Ah, bueno, imaginariamente, no es que tenga que ser, pero a lo mejor tú dices un campo de futbol, tú te imaginas a lo mejor un campo de tu escuela, de tu secundaria, el de tu casa o algo así porque tu has jugado a lo mejor toda la vida, y entonces no te esperas, cuando te familiarizas, que te salga …

I: Algo más chico

A: Ajá, exactamente, entonces entré como en conflicto y dije no. Hasta que ya lo, es el mismo método solamente que como tú dices, las fracciones las pasé a decimales y con puros decimales, división de decimales.

I: Pero, digamos, con decimales, el resultado ¿sí te convence más que si fuera con fracciones?

A: Mmm, en sí quería comprobar que si no me había equivocado, porque te digo que me conflictuó, entonces dije Ah 0.92, es congruente con 14/15 que igual es casi 1, entonces Ah no hay falla, entonces ya comprobé que sí estaba bien el procedimiento.

I: Entonces me dices que lo hiciste más que nada, para comprobar.

A: Ajá.

I: Ok. ¿Cómo decidís cuando es conveniente trabajar con fracciones o resolver los problemas con fracciones y cuando con decimales?

A: Mmm, fracciones, yo me baso más con fracciones cuando son cosas que puedes como ver, cosas que puedo ver. Como en los problemas siguientes que dijiste que representáramos (busca en la segunda parte del cuestionario). ¡Ah!, éstas (inciso 2), Ajá, si, como estas cosas ¿no?, como ideas gráficas, se me hace más fácil trabajar así, en fracciones porque el denominador es el todo no, o sea las partes del todo, y el numerador son las partes que tiene esa representación. Se me hace más fácil en esa parte, trabajar de esa manera. Decimales, pues cuando son cosas un poco, no exactas, porque los decimales no son exactos, te digo como que a lo mejor no hay otra manera de representarlo gráficamente, a lo mejor sí, pero no sería como que tan congruente digamos.

I: Ok, entonces para ti es más fácil trabajar con fracciones cuando, por ejemplo, tienes que hacer representaciones gráficas.

A: Gráficas, exactamente, y los decimales, por ejemplo, si, yo lo hago en decimal, pero en fracción si represento ese decimal a lo mejor me sale en centésimas o milésimas, entonces ya no es factible como trabajar, entonces me voy más con… ahora aunque sé que con fracciones es exacto, te llevas todos los números.

I: Exacto. ¿Y en la parte de resolución de problemas? Porque aquí hablamos de la parte gráfica, pictórica, en la parte de resolución de problemas, ¿cuándo para ti es más fácil trabajar con fracciones o cuando conviene trabajar con fracciones y cuando con decimales?

A: Bueno, y es que en sí, a mí se me hace [fácil?], cualquiera de los dos [formas] trabajar, porque yo en mi mente, yo sé que 1 es equivalente al 100%, la unidad es el 100% y ya todo lo demás 0.70, 0.71 quizás yo ya las veo como en proporción de porcentaje con denominador 100 y esas cosas, entonces llego a darme un… no sé, me completan. Aquí, en estos casos te digo utilicé decimales para comparar, sé que es el mismo método pero con decimales. Ahí lo verifiqué.

I: Ok, o sea, para ti es exactamente lo mismo trabajar con decimales, no se te complica uno u otro.

A: No se me complica, entonces fracciones es exacto. Pero como dije, en el ejercicio si me… a lo mejor no sé si lo hiciste con ese fin para desviar …

I: En tu cuestionario también, en esta primera parte ¿no?, pude ver que algunos de los problemas los respondes con fracciones y otros con decimales. Por ejemplo, en el problema 1 respondes con fracción …

A: Porque ahí fue como muy inmediato.

I: En el problema 3 lo respondes con decimal, que lo pasas a minutos, y en el problema 6, también veo que lo respondes con decimales. La pregunta es: ¿cuándo consideras que se necesita expresar un resultado en decimal y no en fracción? O sea, por ejemplo …

A: Si, si, si, ya entendí esa parte.

I: … aquí en el problema 3 ¿por qué te parece…?

A: 0.666.

I: Ajá, expresar el resultado como un decimal y no como una fracción por ejemplo, una fracción de hora.

A: Porque, bueno, pensándolo en todos los ejercicios que he hecho como de física y matemática y todos esos, creo que es más como por comodidad hacia… y bueno, es que a lo mejor desde que… 0.66, lo calculas y se te queda como que la idea de usar decimales en términos de física ¿no? Porque, siempre te andan pidiendo 'hasta dos décimas' ¿no? 'Exprésame el resultado, no sé, 7, y quiero 4 décimas' ¿no? Entonces tú buscas en la calculadora las 4 décimas, bueno siento… porque también se puede expresar el resultado como con fracciones y sería más exacto que lo que dije. Y ya, de hecho si… todos siguen la misma idea, igual creo que aquí pase del punto al tiempo e hice la igualación, 1 es igual a 60 y ya 0.66 y salió la producción 39 minutos. Igual creo, es la misma idea, te digo a lo mejor por tener ideas, problemas de física a lo mejor es, siento que me quedo con esa idea que física, decimales.

I: Lo tienes que trabajar en decimales.

A: Ajá, siempre me lo han pedido así. Pero también, sé que lo puedo expresar como fracciones y por ejemplo en las de fracciones que las puse operaciones, aquí básicamente lo que son problemas de proporción

I: ¿El problema 1 es un problema de proporción?

A: Es un problema de proporción, es muy evidente… ya nada más divido la fracción que me das entre las 71 botellas y es inmediato, o sea, a lo mejor ya no tendría la necesidad de pasarlo a decimales, es inmediato… igual en el segundo problema, es igual de proporción y es inmediato y aquí me da 3 enteros; son cosas como más inmediatas.

I: Vale, perfecto. ¿Cuáles son los significados de la división que conoces? O sea, por significados me refiero a, si me remito a la multiplicación, un significado de la multiplicación es la suma repetida. Viste que cuando vos sumas 3 veces 5, por ejemplo 5+5+5 eso es lo mismo que 3*5, ese es un significado de la multiplicación, la división también tiene significados, entonces, conoces alguno en particular.

A: Creo que conozco varios. Bueno en división es la parte contraria a la multiplicación. Uno, la división es dividirlos por partes ¿no? Tú dices que la multiplicación es una suma abreviada y la división eh, hace mucho tiempo lo vi, que era la resta abreviada de esas partes. Si tu restabas como esa parte y después esta parte restabas y… te daba pues la conjunción de todos.

I: ¿Ese sería un segundo significado?

A: Ajá un segundo significado. Uno es el de las partes.

I: Uno es el repartido, ajá.

A: ¡Ajá!, y el otro es como el quitar una parte. O sea la multiplicación es una suma abreviada, entonces la división sería por diferencia abreviada, por así decirlo. ¿Que más?, no creo que ya, eso.

I: Bien vale. De la segunda parte del cuestionario, en el inciso 1, vos me escribiste que aplicaste el algoritmo producto cruzado ¿no?

A: Si.

I: Aquí (indicando en la producción del alumno) 3*4, 12 y 4*1, 4 y me escribes “se multiplica cruzado” En el caso e, ¿también aplicaste ese algoritmo?

A: Eh, acá me equivoqué, … Ah, si, también apliqué ese algoritmo. Bueno, sí y no.

I: ¿Por qué si y no?

A: Bueno, el algoritmo sé que es igual en o sea, exactamente eso. Me refiero a que por ejemplo si no sé…

I: Aquí por favor (el investigador indica al alumno que escriba en otra hoja y no sobre el cuestionario).

A: Por ejemplo si fuera 3/2 y en vez de 1 fuera 5, yo sé que aquí hay un denominador (indicando el denominador de 5) un 1 que no se pone, se sabe que sí existe y es lo mismo cruzado que es como el que es 2*5 ,10 y a lo mejor siento que el 1… sí conozco este método o este algoritmo mejor dicho, pero pues sabemos que todo lo que dividas o multipliques siempre va a dar el mismo número, siento que lo hice más por eso… Ajá, me guie más porque, dividiendo entre 1 es el mismo, pero sé qué se hace este algoritmo (Figura A2.1).

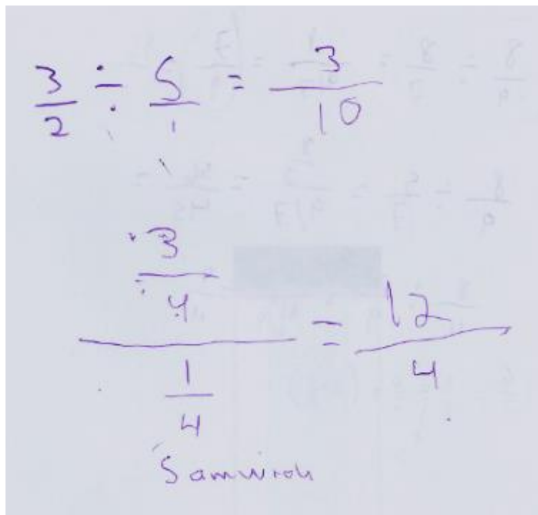


Figura A2.1 Ejemplo propuesto por A1
como respuesta a una pregunta de la entrevista.

I: ¡Ah!, perfecto, pero entonces en el inciso e?

A: Siento que lo contesté, y dije, ah, 1, ya fin.

I: ¿Consideras que no fue necesario aplicar el algoritmo, sino que como está dividiendo por 1 pues el resultado es el mismo?

A: Exactamente

I: Vale, perfecto. ¿Crees que este algoritmo que usaste, el de productos cruzados, funciona siempre para dividir cualesquiera fracciones que tengas?

A: ¿Cualquier fracción que tenga?

I: ¡Ajá!, o sea, ¿crees que funciona siempre?

A: Mmm, yo digo que sí. Pues bueno, inclusive ahí si tú tienes, si en vez del… me das una fracción también se tienen que acomodar o sea el…producto igual, se tienen que acomodar nada más que hay que llevar un orden.

I: ¡Ajá!, entonces, ¿ese algoritmo lo puedo aplicar siempre? ¿Siempre para dividir cualesquiera fracciones que tenga?... ¿O piensas que hay alguna situación en la que no?

A: Si, en principio yo diría que… no sé con otros tipos de números, pero yo digo que sí.

I: Va, perfecto. ¿Conoces alguna otra forma de dividir fracciones?

A: ¡Ajá!, este es el de producto cruzado ¿no?, está también el que le dicen normalmente la del sandwich o de la torta que es igual 3/4 (ver Figura A2.1).

El dispositivo de audio dejó de grabar sin que el investigador se percatara de ello.

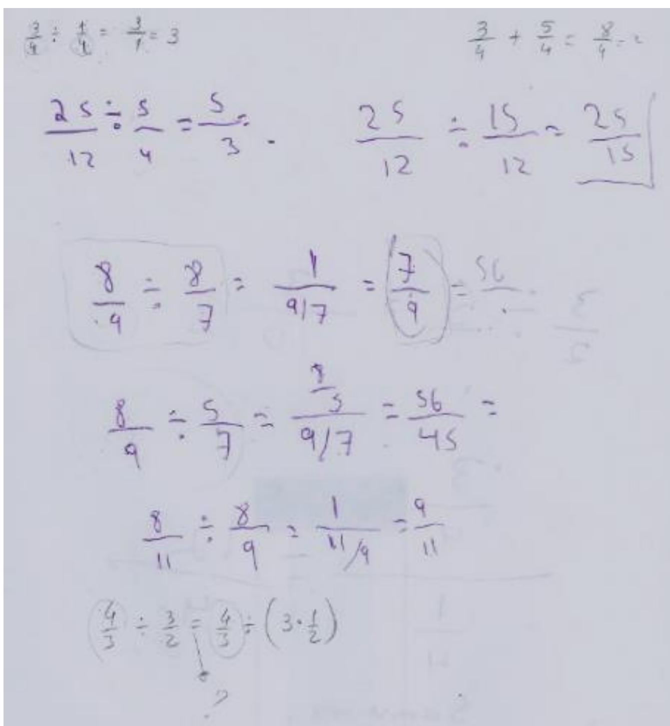


Figura A2.2 Producciones de A1 en la entrevista[8]

[8] Se muestran en esta figura los ejemplos hechos por el alumno A1 cuando el entrevistador está preguntando por diferentes algoritmos (‘*shortcut*’) y si los mismos son siempre válidos. Lo que se ve en el último renglón, corresponde a la tarea de justificar la cadena de igualdad y el investigador cuestiona al estudiante sobre ello.

Preguntas para entrevistar a A5

1. Respecto a los problemas del cuestionario dado, ¿te resultaron difíciles? ¿tuviste alguna dificultad al resolverlos? ¿Cuáles?
2. Los problemas 3 y 5 veo que no los resolviste, ¿por alguna razón no los hiciste? ¿Los podés resolver?
3. ¿Cómo lo pensaste al problema 2 para responder? ¿De qué otra manera lo podrías resolver?
4. Si tuvieras que decidir entre dividir fracciones o decimales ¿cómo decides eso? **Si no entiende, preguntar**: claro, por ejemplo en el problema 1, el número mixto tú decidiste convertirlo a decimal en lugar de fracción, entonces ¿cómo decides si trabajar con fracción o decimal?
5. ¿Cuáles son los significados de la división que conoces? Por significados me refiero a, por ejemplo, un significado de la multiplicación es la suma repetida. **Si responde que no conoce, preguntar**: ¿estos problemas son todos iguales? Es decir, ¿son del mismo tipo o los puedes distinguir de alguna manera?
6. De la segunda parte del cuestionario, en el inciso 1, veo que en todos los casos al parecer aplicaste la ley del sandwich. ¿es así? ¿crees que es necesario aplicar esa ley en todos los casos de división que aparecen?
7. ¿Crees que la ley del sandwich, que es el producto de extremos entre el producto de medios funciona siempre para dividir cualesquiera fracciones? Además de esta ley, ¿qué otras formas de dividir fracciones conoces? **En caso que no sepa, preguntar**: si un alumno te hace estas divisiones así (se muestran los diferentes '*shortcuts*' con las divisiones del cuestionario) ¿te parece que están bien? ¿Por qué? ¿Será que siempre funcionan?
8. ¿Qué propiedades usarías para justificar el cálculo que se hace en el inciso 3? Porque veo que usas una justificación numérica, es decir te basas en que cada miembro de la igualdad da el mismo resultado.

9. En el inciso 2 veo que representas los resultados de las divisiones usando el modelo circular, ¿crees que al representar los resultados estas representando la división? ¿Cómo crees que podrías representar gráficamente la división?

Entrevista A5

I: Respecto a los problemas, en la primera parte del cuestionario, ¿te resultaron difíciles los problemas? ¿Tuviste alguna dificultad al resolver alguno de ellos?

A: Si.

I: ¿Sí?

A: ¡Ajá!

I: ¿Cuál o cuáles?

A: Bueno, en primera instancia, las fracciones… este los números fraccionarios se me complicaron un poco, y en segunda, ¡ja!, aunque fue broma lo que comenté, bueno todos lo consideraron así, no recordaba como dividir, yo creo que fue como tanto usar la calculadora mucho tiempo y después dije "y esto, ¿cómo lo hago?". Pero ya después como tratando de recordar, porque bueno, pedías el procedimiento, y yo, este, pues así lo hacía más rápido en la calculadora, pues en este caso me pediste la división.

I: Si.

A: Y, ahí fue lo que se me complicó un poco.

I: Ok, ¿este tipo de división verdad? O sea lo que es el algoritmo… bueno aquí lo llaman "la casita" ¿no?

A: ¡Ajá!, efectivamente ese fue el que más se me complicó, bueno tratar de recordar cómo hacer.

I: O sea, recordar el algoritmo de la división.

A: ¡Ajá!,… y es que no recuerdo qué más (haciendo referencia a qué fue lo que se le complicó).

I: Si quieres como para ir checando también tus problemas, lo que tú fuiste resolviendo.

A: Es que este (señalando el inciso 2 de los problemas).

I: ¡Ajá!, el punto 2, veo que lo hiciste a través de una representación gráfica o pictórica, ¿no?

A: Sí, porque de hecho muchos lo hicieron así como más sumando las fracciones, dividiéndolas y eso, a mí se me hizo más fácil hacerlo así, más fácil y más rápido; el otro procedimiento sí se me complicó un poco.

I: Y, entonces ahí, por ejemplo ese, el problema 2, ¿cómo hiciste para responder 14 veces?

A: El que no recuerdo, pero el, o sea me acuerdo que sí tuve como alguna [dificultad?[9]] pero no recuerdo bien.

I: Porque el problema decía, ¿no?, o sea imaginemos la situación, tenemos un cajón donde se guardan toallas y ese cajón tiene 7/8 m, o sea tiene casi 1 m, de largo ¿no? Entonces cuando se doblan las toallas y se guardan cada una de esas toallas ocupa 1/4 del largo del cajón…

A: Es que no recuerdo bien.

I: Y, entonces tú hiciste, sí ahí, como una especie de representación, y lo que puedo interpretar, no sé, tú sabrás decirme, es que lo que estás diciendo es que éste 1/4 yo lo puedo colocar 14 veces aquí, en 7/8, ¿no sé si es eso lo que quisiste poner o…?

A: Si fue lo que, o sea sí tuve una complicación, pero no recuerdo cuál era, al relacionar no sé algo, como sí ya pasó mucho tiempo.

I: Sí, mucho… vale, sino no te preocupes. Y en el 3, el 3 que era (lee el problema), ese por ejemplo quedó inconcluso.

A: No, no la respondí.

I: La 3 y la 5 creo que ¿tampoco lo respondiste?

A: No.

I: A ver, permiso (revisando el cuestionario).

---

[9] Vale la aclaración puesto que la estudiante no lo especifica.

A: ¡Ah!, sí, la 5 sí… ay es que no recuerdo.

I: Solo planteaste, hiciste una representación, pusiste 2/3, 5/7, y ahí pusiste al parecer como una ecuación ¿no? Como que la base por la altura que es 5/7 te tiene que dar 2/3, y pero ahí quedaste.

A: ¡Ajá!, ya no pude.

I: Pero por ejemplo, así como lo planteaste, ¿cómo seguirías?

A: Ay es que no recuerdo bien, a ver.

I: Tenemos un campo que nos están dando el área y nos dan uno de los lados.

A: ¿Despejado?... no bueno es aquí ya te está dando el total del área.

I: ¡Ajá!

A: No es que no, no tengo ni idea.

I: ¿No?, vale no te preocupes… ,del problema 2 ya lo hablamos, ¿no es cierto?

A: Sería el 6, ¿no?

I: Si si, en realidad eran más que nada esos que te pregunté los que quería… aquí veo que hiciste una especie de proporcionalidad. Bueno entonces, siguiendo con los problemas, ya más a nivel general, si vos tenes que decidir entre dividir fracciones o dividir decimales ¿cómo decidís eso? O sea, con cuál te quedas, ¿con dividir decimales o dividir fracciones?… porque aquí por ejemplo en el 1, tú convertiste este número mixto en un número decimal 35.5, y fue eso lo que divides entre 71 ¿cierto?

A: Si, bueno quedaría un poquito, … si.

I: ¡Ajá! Pero entonces, por eso, aquí tú decides dividir decimales y podrías haber también dividido fracciones, o sea haber convertido este mixto a una fracción y haber dividido fracciones como lo hiciste aquí. Entonces, ¿cómo decidís con cuál quedarte?, ¿con cuál trabajar, qué tipo de división hacer?

A: Pues es que por ejemplo, en este caso que se me complicó esto, yo creo que me quedaría mejor esto.

I: ¿Con las fracciones?

A: Con la fracción.

I: ¡Ah!, ok vale, entonces decides de acuerdo a cómo se te facilita más trabajar.

A: Fracciones.

I: Kk. ¿cuáles son los significados de la división que conoces?

A: ¿Cómo cuáles son los significado?

I: Por ejemplo, viste que cuando vos sumas repetidamente un mismo número, por ejemplo, 5+5+5 eso es lo mismo que hacer 3*5, entonces es un significado, por ejemplo, de la multiplicación. Así como la multiplicación tiene ese significado y hay otros, la división también tiene distintos significados

A: Y, ¿qué significado tiene para mí?

I: ¡Ajá!, o cuál conoces, o cuál recordas, si alguna vez te lo enseñaron.

A: Cuántas veces cabe un número dentro del otro.

I: Cuántas veces cabe un número dentro del otro, ¿de qué numero estaríamos hablando?

A: ¿Cómo…?

I: No sé, por ejemplo aquí ¿no?, 3/4 entre 1/4, ¿qué significado tiene para ti esta división? Tú me dices, cuántas veces cabe un número dentro del otro, la pregunta es ¿cuántas veces cabe quién dentro de quién aquí?

A: Éste (indicando la fracción 3/4) en éste (indicando la fracción 1/4)

I: ¿Cuántas veces cabe 3/4 en 1/4 ?

A: ¿12/4?

I: 12/4.

A: ¡Ajá!, si.

I: Ese sería entonces un significado que conoces.

A: ¡Ajá!, cuantas veces cabe.

I: ¿Es el único? O, ¿conoces otro?

A: Si, ahorita que recuerdo sí.

I: Ok, si te digo, por ejemplo que tenemos 20 chocolates para 4 niños, ¿qué tipo de división es esa?

A: ¿Repartirla?, bueno un niño pequeño podría repartirlo ¿no?

I: Ese es otro significado, distinto al que tú conoces.

A: ¡Ah!, ok.

I: Bien. Entonces, ahí por ejemplo, ya hay dos significados de la división ¿sí? Hay muchos otros pero mi idea es indagar como cuáles conoces o cuáles te acuerdas ¿sí?... De todos los problemas, bueno de esos 6 problemas, ¿te parecen que son todos iguales?... , en el sentido de cómo se resuelven, digamos, ¿consideras que son todos iguales?, ¿hay alguna diferencia?

A: Si, si, porque al final de cuentas estás haciendo una división ¿no? Porque por ejemplo, aquí dice que cuando tienes que dividir el cajón, dice aquí tienes que distribuirlo como lo que me mencionabas del niño que… aquí igual, tienes que saber cuánto camina en 1 hs para saber cuántos camina aquí (indicando el problema 3), este no te podría decir porque sigo sin comprenderlo (haciendo referencia al problema 5) y éste igual (problema 6) porque tienes que hacer más o menos igual que éste (problema 4)

I: El [problema] 6 es más o menos igual que el [problema] 4? Del [problema] 5, ¿qué parte no estarías comprendiendo?

A: Es que sí se que tendría que, yo, como que despejar, o tendría que hacer la inversa del área para poder saber el lado, pero no sé cómo hacerlo, ahí es lo que se me complica.

I: O sea, tú sabes que hay que hacer como una especie de despeje, si lo pensas como una ecuación, pero no sabes qué específicamente.

A: ¡Ajá!, sí.

I: Vale. De la segunda parte de tu cuestionario, aquí donde están los cálculos, en el inciso 1 veo que, bueno en todos los casos, al parecer, aplicas lo que aquí, se conoce como 'ley del sandwich' o 'ley de la torta', algo así.

A: Si.

I: Bien. ¿Consideras qué en todos los casos del inciso 1 es necesario aplicar?

A: No.

I: ¿No?, ¿en cuál por ejemplo no?

A: Este (marcando los ítems c y d).

I: En el ítem c) y d), ¿te parece que no es necesario?.

A: ¡Ajá!, lo podría hacer como directo.

I: ¡Ajá!, ¿cómo sería?

A: Pues, ya nada más sería éste con éste y por default ¿no? Igual aquí, por default sé que éste es 2 por 2 igual a 4, entonces ya no es como necesario aplicar esto (haciendo referencia al algoritmo).

I: Ok. ¿sí lo puedes escribir, por favor, aquí?... entonces en el 1 c), es un entero entre 1/2.

A: (Escribe en la hoja). Ver Figura A2.3.

I: Ok, en el ítem d), tú dices que es 1/4, y ¿cómo lo haces?

A: Pues por default, o sea ya sabes que éste… multipliqué el de arriba por el de abajo y el de abajo por el de arriba (Ver Figura A2.3).

I: O sea, hiciste 2 por 2 igual a 4 y ¿1?

A: 1 por 1

I: Ok, 1 por 1 igual a 1. Y aquí lo mismo, 1 por 2 igual a 2 y 1 por 1 igual a 1. Perfecto, y ¿consideras que en algún otro? O, ¿solo esos dos?

A: Pues, es que en todos podría aplicar lo mismo, no es necesario que lo acomode como tal así (haciendo referencia a que en todos los casos puede multiplicar de forma cruzada, sin necesidad de escribirlo como fracción de fracciones para aplicar la ley del sandwich).

I: ¡Ah!, ok.

A: Solo que en el momento no lo recordaba, y dije "la ley del sandwich", y ya. Ya cuando empecé a resolver los demás dije así como que "ay pues no era necesario acomodarlos", lo podría haber hecho directo, igual en este.

I: Por ejemplo, en el a), te quedaría ¿cómo?.

A: Pues igual, 3 por 4 igual a 12 y 4 por 1 igual a 4.

I: Perfecto, o sea, el otro algoritmo que me estás diciendo que conoces es el denominado 'producto cruzado'.

A: ¡Ajá!

I: Vale. Crees que por ejemplo este, el algoritmo producto cruzado o ley del sandwich que utilizaste vos, ¿funciona siempre para cualesquiera fracciones que tengas para dividir?

A: Si, bueno…

I: Vale, además de esas dos, ¿conoces alguna otra forma de dividir fracciones?

A: Pues, dibujando.

I: ¿Dibujando? ¿Cómo?... bueno la parte de dibujos ya vamos a entrar ahora en el 2, ¿no es cierto, que les pedía?

A: ¡Ajá!, eso.

I: Ok. Bueno aquí, por ejemplo, como harías la división. Este es el 2 a), que sería 3/4 entre 1/4.

A: El resultado, ¿no?... Ah, es que no me acuerdo, a ver (lee el problema)… Bueno es que al dividir te sale, ¿cuánto habíamos quedado? ¿12/4 no?

I: ¡Ajá!

A: Y, serían 3 enteros, entonces así lo dibujé, 3 enteros.

I: Y, ese 3 es, ¿el resultado o la operación?

A: El resultado.

I: Y el inciso, ¿qué pedía?

A: Que hiciera las operaciones. Ja, ja.

I: Pedía que representes gráficamente la operación división, no el resultado.

A: Si, si, cierto.

I: ¿Se te ocurre como podrías hacer la gráfica de la división de 3/4 entre 1/4?

A: No.

I: ¿No?...

A: No es, que no. O sea, podría dibujarlo, pero relacionarlos como tal no,… voy a dividir este con este, ¿no? (señalando 3/4 y 1/4).

I: Vale. Volviendo a lo que es el inciso 1, supongamos que un estudiante viene y te dice en el 1 a) , ‘maestra, en este caso, en la división, me fijé que como aquí son iguales (indicando los denominadores) pues hice simplemente 3 entre 1 igual a 3 (ver Figura A2.3). ¿Cómo consideras que hizo la división ese alumno?, ¿lo hizo bien?, ¿lo hizo mal?... Porque, fíjate que no utilizó ni sandwich, ni producto cruzado, el vio que aquí como los denominadores son iguales, simplemente…

A: Pues está bien, porque como tal, no hay este… eso sería una relación, entonces sí está bien lo que está haciendo.

I: ¿Si está bien?

A: Ajá. Y.

I: ¿Crees que funciona siempre, para cualesquiera?

A: No.

I: ¿En qué caso no funcionaría por ejemplo?

A: En éste y en este, porque no tienen el mismo (señala los incisos f y g del punto 1)…

I: Denominador, ajá. Bueno, pero ya que mencionas el g), un estudiante viene y te dice, tenemos 8/9 entre 8/7 y viene un estudiante y te dice 'yo aquí vi que los numeradores son iguales ahora, entonces el resultado de la división va a ser 7/9' (ver Figura A2.3), éste denominador entre éste denominador, ¿qué le dices a ese estudiante?

A: Mmm, le diría que no está bien, pero no sabría porqué justificárselo como tal.

I: ¡Ah!, y entonces ahí el alumno se te puede rebelar y decir, 'ah no, si no me dice porqué'…

A: Bueno, yo por default diría que está mal ¿no?, pero o sea igual tendría que investigar… bueno a mí siempre me han dicho que no se puede hacer eso, pero nunca pregunté porqué.

I: Claro, vale, y… viene otro y en el b) te dice 25/12 entre 5/4 y te dice: 'ah maestra mire, acá yo hice la división así 25/5 me da 5 y 12/4 me da 3' (ver Figura A2.3), a ese estudiante ¿qué le dices?

A: Que no, que está mal.

I: ¿Qué está mal, también el b)?

A: Bueno este procedimiento.

I: O sea, el procedimiento que él hizo para dividir…

A: Claro, que él implicó.

I: ¡Ajá!, ¿no es correcto?

A: No.

I: Ok. Bueno, y el último, el último punto, el 3. En el 3, te pedía que dada esta división (indicando el ejercicio), sí, o sea esta forma de hacer el cálculo, que justifiques porqué se podía usarlo de esta manera. Es decir, yo tengo esto (primer miembro de la igualdad), porqué puedo decir que es igual a esto (segundo miembro de la igualdad) y a su vez esto que está aquí (segundo miembro de la igualdad) porqué es igual a esto que está aquí (tercer miembro de la igualdad), ¿sí? Entonces tú aquí escribiste 'porque al realizar la primera operación el resultado es 8/9', sí o sea te estas refiriendo a esto (primera parte de la igualdad), después dice ‘al resolver cada uno, el resultado siempre será 8/9’ por lo tanto, son iguales. Entonces, lo que haces es, haces esto (operación de la primera parte de la igualdad) te da 8/9, hiciste esto (segunda parte de la igualdad) te da 8/9, esto también (tercera parte) como que todos dan 8/9, pues son iguales, ¿sí? Se te ocurre, digamos, alguna manera de justificar eso usando propiedades …

A: Mmm.

I: En el sentido de que, fíjate aquí (indicando primer y segundo miembro de la igualdad), tenemos 4/3 entre 3/2 igual, 4/3 entre 3 por 1/2 ¿sí? Si comparamos, primero nos centramos aquí, si comparamos estos dos miembros de la igualdad, pues el 4/3 es igual a 4/3, la división se sigue manteniendo y al parecer lo que habría que decir porqué son iguales es 3/2 y 3 por 1/2 (ver Figura A2.3), esta igualdad es la que hay que justificar. Entonces la pregunta es, ¿por qué son iguales?... si nos guiamos por el algoritmo de multiplicar, pues sí, 3 por 1/2 es 3/2

A: ¡Ajá!, sí.

I: Y, ¿si no conociéramos cómo se multiplican fracciones, cómo sabemos que eso es correcto?

A: O sea, no realizando, ¿diciendo que esto es igual, pero sin realizar la multiplicación aquí?

I: Claro, suponete que viene alguien y te dice ‘estas dos cosas son iguales’ y nadie sabe multiplicar fracciones, matemáticamente, ¿qué justifica esa igualdad?

A: Que aquí hay 3… no, no sabría, así como tal no. Yo, sí tendría que, como que multiplicar, para poderte decir que estos dos son iguales.

I: ¿Necesitas multiplicarlos para decir que son iguales?

A: Ajá.

I: Ok, vale… muchísimas gracias.

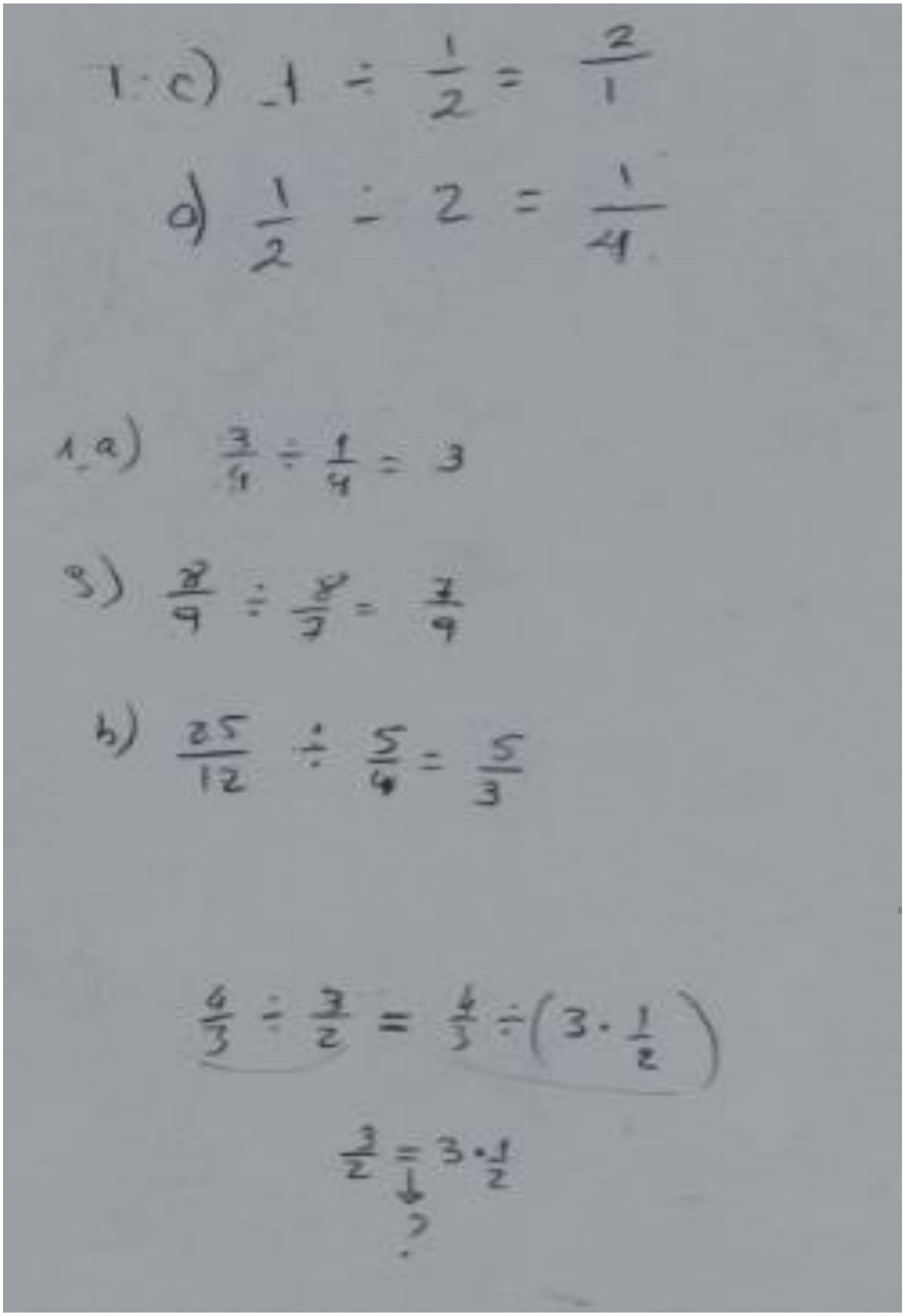


Figura A2.3 Producciones de A5 durante el desarrollo de la entrevista

Preguntas para entrevistar a A8

1. Respecto a los problemas del cuestionario dado, ¿te resultaron difíciles? ¿Tuviste alguna dificultad al resolverlos? ¿Cuáles?
2. Los problemas 3 y 5, veo que no los resolviste, ¿por alguna razón no los hiciste? ¿Los podés resolver?
3. ¿Cómo lo pensaste al problema 2 para responder? ¿De qué otra manera lo podrías resolver?
4. Si tuvieras que decidir entre dividir fracciones o decimales, ¿cómo decides eso? **Si no entiende, preguntar**: claro, por ejemplo en el problema 1, el número mixto, tú decidiste convertirlo a decimal en lugar de fracción, entonces, ¿cómo decides si trabajar con fracción o decimal?
5. ¿Cuáles son los significados de la división que conoces? Por significados me refiero a, por ejemplo, un significado de la multiplicación es la suma repetida. **Si responde que no conoce, preguntar**: ¿estos problemas son todos iguales? Es decir, ¿son del mismo tipo o los puedes distinguir de alguna manera?
6. De la segunda parte del cuestionario, en el inciso 1, veo que en todos los casos al parecer aplicaste la ley del sandwich, ¿es así? ¿Crees que es necesario aplicar esa ley en todos los casos de división que aparecen?
7. ¿Crees que la ley del sandwich, que es el producto de extremos entre el producto de medios, funciona siempre para dividir cualesquiera fracciones? Además de esta ley, ¿qué otras formas de dividir fracciones conoces? **En caso que no sepa, preguntar**: si un alumno te hace estas divisiones así (se muestran los diferentes '*shortcuts*' con las divisiones del cuestionario), ¿te parece que están bien? ¿Por qué? ¿Será que siempre funcionan?
8. ¿Qué propiedades usarías para justificar el cálculo que se hace en el inciso 3? Porque veo que usas una justificación numérica, es decir te basas en que cada miembro de la igualdad da el mismo resultado.
9. En el inciso 2 veo que representas los resultados de las divisiones usando el modelo circular, ¿crees que al representar los resultados estás representando la división? ¿Cómo crees que podrías representar gráficamente la división?

Entrevista A8

I: Entonces, respecto a los problemas, ¿sí?, fueron seis problemas, ¿te resultaron difíciles? ¿Tuviste alguna dificultad al resolverlos? Si querés volvé a mirarlos por uno y si en alguno tuviste dificultad me gustaría saber en cuál y cuál fue tu dificultad.

A: Mmm, bueno sí me parecieron un poco difícil la verdad, el primero yo creo.

I: ¡Ah!, ¡ah!, ¿porqué se te hizo difícil el primero?

A: Porque venia así como en … no sé, en … litros y yo trataba de convertirlos a mililitros para ver cuánto le quedaba a cada botella, cuánto le correspondía.

I: O sea, lo que querías hacer era llevar a una unidad inferior, de litros pasarlo a mililitros. Y, ¿por qué querías hacer esa conversión?, ¿qué fue lo que te dificultó para querer llevarlo a mililitros?

A: Mmm, … bueno, porque aquí nos daban 35 lts y la mitad… un medio, ¿no? Entonces quería ver cuantos litros le correspondían a las botellas, en 71, entonces lo que hice fue dividir. Entonces me dio 0.4, pero de ahí así como que …

I: Pero ahí, lo que hiciste fue 350 entre 71 ¿no es cierto?

A: ¡Ah!, ¡ah!, sí.

I: Porque me dices que lo llevaste a mililitros.

A: Mmm.

I: O, ¿por qué es 350? Es que como no hay unidades, ahí no supe interpretar que fue…

A: ¡Ah!, si, es que ya ni me acuerdo también,

I: No tranquila, si quieres vuelve a leer, piénsalo, al problema, cómo se te ocurre que se puede resolver.

A: Bueno, si yo pensaba, por decirlo, cuántos litros le corresponden a una botella, por eso dividí 35 entre 71, pero aquí no alcanza entonces le aumenté un cero y me da 0.4 pero de esos que sobraban tenía que… más el medio, quería ver cuánto salían para 71 botellas, bueno eso yo quería.

I: Querías hacer como una verificación. Entonces, por eso que me explicas, respondiendo al problema, ¿qué cantidad de aceite contendría cada botella?

A: Bueno yo aquí puse que 0.4.

I: Digamos, tú me dices que aquí lo completaste con cero, ¿no estaría faltando algo ahí? Porque si no es como un 350 eso.

A: ¡Ah!, un punto, ¿no?

I: Claro. Listo. En el problema 2, solo me respondiste que caben 4 toallas, pero no sé cómo hiciste para saber eso.

A: No, este sí, no me acuerdo la verdad.

I: ¿No?... y pero se te ocurre, ¿cómo lo podrías resolver? O sea, lee el problema y trata de imaginarte la situación.

A: Pues aquí, nos da como el largo del cajón, dice que un cajón mide de largo 7/8.

I: De metro.

A: Y, al doblar cada una ocupa 1/4 de metro …

I: Entonces trata de imaginarte, se tiene un cajón que tiene …

A: 7/8.

I: 7/8 de metro, y en ese cajón se guardan toallas. Hay toallas que se guardan y al doblarlas ocupan …

A: 1/4.

I: 1/4 de metro. Considerando solamente el largo del cajón, ¿sí?, no el ancho ni nada, solo el largo. ¿Cuántas toallas te parece que caben si cada uno ocupa 1/4 ? ¿Cómo resolverías ese problema?

A: Mmm… más o menos que sea proporcional ¿no?, ésta ...

I: ¿Qué significaría que sea proporcional?

Después de un rato de pensar…

A: Yo aquí digo que debemos multiplicar…

I: ¿Qué cosa?

A: Para, si las ponemos así equivalentes… 1/4 es equivalente a 7/8, algo así.

I: O sea quieres multiplicar 1/4 de manera que sea, o que tenga un denominador igual al de 7/8 …

A: Mmm.

I: Quieres obtener una fracción equivalente a 1/4 con denominador 8 … ¿Cuál sería esa fracción equivalente de 1/4 para que tenga denominador 8?

A: Mmm, 2/8 puede ser.

I: 2/8, es equivalente a 1/4, ajá, ¿y ahí?

A: Y, ahí multiplicar cuántas veces cabría, por decir …

I: ¿Lo puedes hacer?

A: Por decir esto es igual a (escribe 1/4 = 2/8) para que sea equivalente, dividido entre … por decir aquí, yo diría que sumar ¿no? (escribe 2/8+2/8).

I: Bueno.

A: Más otros 2/8, ahí serían 6/8 (ver Figura A2.4)

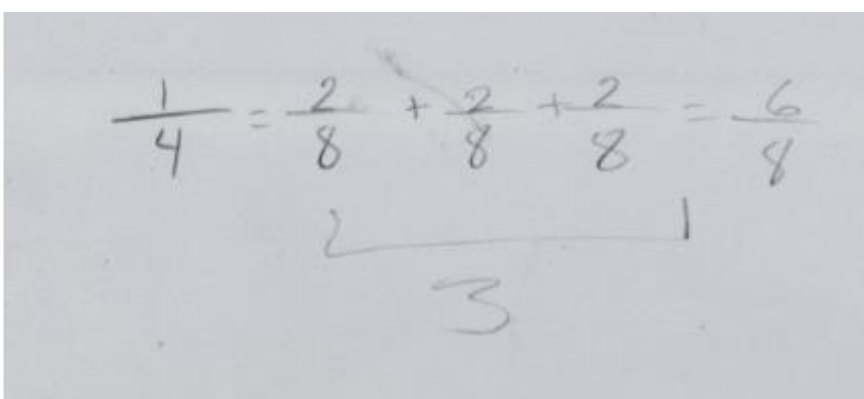


Figura A2.4 Estrategia de A8 para resolver el problema 2 durante el desarrollo de la entrevista

I: Mmm, esa es una estrategia.

A: Entonces serían 3 veces.

I: Bien … Está bien, lo resolviste bien. Esa es una manera de resolver, hay otra manera de resolver que no te has dado cuenta, pero no pasa nada. Ahora cuando termine de preguntarte si quieres te lo muestro, pero sí, esa es una manera de resolver y está bien. ¿Si?

A: Si.

I: En el problema 3, que pregunta sobre el tiempo que viajó un automóvil que está moviéndose a una velocidad constante y que recorre una cierta distancia, ¿no es cierto? Tú decidiste ahí multiplicar… ¿por qué?... ¿por qué te parece que en ese problema hay que multiplicar?

A: Porque bueno yo, lo hice creo que con la fórmula que distancia es igual a (está mirando su cuestionario)… es igual a, creo que lo borré… bueno aquí es distancia por… (escribe d=v/t, ver Figura A2.5).

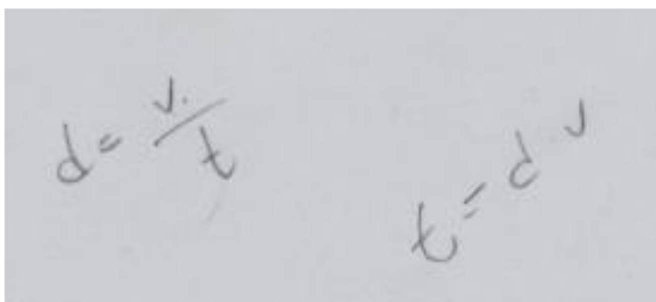


Figura A2.5 Relación entre variables propuesto por A8

I: Distancia es velocidad entre tiempo, o, ¿ al revés?

A: Algo así … Entonces, yo supuse que era multiplicar por… tenemos que obtener el tiempo ¿no? Entonces es como que despejé (t) de la formula…

I: Y, ahí te quedó la multiplicación, distancia por velocidad. Ok.

A: Yo supuse que era así.

I: Entonces, digamos, partiendo de esta relación entre distancia, velocidad y tiempo, despejaste el tiempo porque es lo que te pide, y ahí te queda la multiplicación, ¿si?

A: Si.

I: Vale. En el 5, ¿qué hiciste en el 5?... ¡Ah! …

A: Ese, no le entendí.

I: En el 5, también multiplicaste ¿no?

A: ¡Ajá!, sí, pero ese no lo entendí.

I: ¿Por qué? A ver, mira, veamos el problema 5, dice: un campo rectangular tiene una superficie, no sé cómo lo trabajen aquí si superficie o área es lo mismo…

A: Es lo mismo.

I: … Tiene una superficie que mide $2/3u^2$ ese "u" está representando puede ser metro hectómetro o kilómetros, etc. ¿sí? Es una unidad, digamos no es relevante para el problema por eso puse una "u". Entonces se tiene una superficie rectangular que tiene 2/3, si se sabe que uno de sus lados, en este caso el ancho, mide 5/7 de esas unidades ¿Cuánto mide el largo? Entonces tu dibujo está bien, tenemos un campo rectangular cuya superficie es esto (indicando en el dibujo) 2/3 y el ancho mide 5/7, me está preguntando por esto (indicando el largo en el dibujo). Veo que hiciste una multiplicación ahí.

A: Es que yo lo que planeaba encontrar era, por decir esto (indicando el ancho del rectángulo) que lo multiplicáramos con el resultado que no sabemos cuál es…

I: El largo.

A: … Para que nos saliera 2/3, era lo que yo buscaba.

I: Entonces lo que hiciste, ¡ah!, tú estabas probando, qué número multiplicado por 5/7 me va a dar 2/3.

A: Ajá.

I: ¿Por eso multiplicaste por 7/8?

A: ¡Ajá!, pero no.

I: Si vos tuvieras que decidir entre dividir fracciones o decimales ¿cómo decides eso? O sea, a lo que voy es, en el problema 1 tú decidiste convertir a este número mixto en un número decimal, ¿sí?

A: si

I: Entonces, aquí lo que estás haciendo es dividir por, o entre un número entero, pero no sé si te acuerdes que a un número mixto también lo puedes convertir en fracción. Entonces, ¿Cómo vos decidís, si dividir decimales o fracciones?

A: ¿Qué prefiero?

I: ¿Qué prefieres, exacto, dividir?

A: Yo creo que decimales,

I: ¿Números decimales, por qué?

A: Porque así, como que los veo más claro, con dividirlo con números enteros o algo así.

I: Entonces, tú prefieres dividir decimales que fracciones, ¿y te parece que siempre es como más, no sé si llamarlo fácil, quizá decirlo conveniente, … te parece que siempre es conveniente dividir decimales que fracciones?

A: Mmm, no, no creo.

I: ¿Por qué?

A: Porque yo creo que en algunos casos no se puede, no sé, convertir a decimales.

I: ¿En qué casos no se puede convertir a decimales?, dices, ¿qué no se puede convertir?

A: Mmm, por ejemplo, si planteamos un problema de repartir algo entre personas o algo así y tenemos una fracción yo creo que es más fácil con una fracción que con decimal.

I: Con una fracción que con una decimal, ok. O sea, en ese caso, no te quedaría otra que dividir con fracciones. ¡Eh!, mmm, pero si estás de acuerdo, por ejemplo, que hay números decimales que tienen una cifra decimal infinita, no sé por decirte 10/3 tiene una cifra periódica es infinita, entonces ¿cómo haces para dividir eso?

A: Bueno, sí (asintiendo).

I: No se puede, ¿verdad? Decíme, ¿cuáles son los significados de la división que conoces?

A: ¿Cómo?

I: Por significados de la división … A ver, te pongo un ejemplo, un significado de la multiplicación, por ejemplo que vos tengas 5 x 3, un significado de esa multiplicación es que vos sumes 5 veces 3. ¿si? Entonces, eso es lo que se denomina o lo podemos llamar como la suma repetida, ¿si? Entonces yo tengo (escribe 3 sumando 5 veces) esto es lo mismo que hacer 5 x 3, entonces yo acá le estoy dando un significado a esta multiplicación, ese significado que le estoy dando es que estoy diciendo al 3 yo lo estoy sumando 5 veces, bueno con la división pasa lo mismo, la división tiene significados.

A: Pues yo creo que es la multiplicación, ahí o ¿no?

I: Es ¿cómo?

A: ¿La multiplicación? Por decir, si tenemos… mmm (escribe) 36 entre 6, es 6, porque pues multiplicamos 6 x 6 y nos da (ver Figura A2.6).

I: 36. O sea, para ti un significado de la división es un significado multiplicativo.

A: ¡Ajá!, o por decir, si fuera 37, sería 6 (el cociente) pero sumas 1. Entonces yo digo, es una multiplicación pero a veces también tiene, tenemos que añadirle (ver Figura A2.6). …

I: ¿El resto?

A: ¡Ajá!

I: Ok. ¿Lo único que conoces?

A: ¡Ajá!

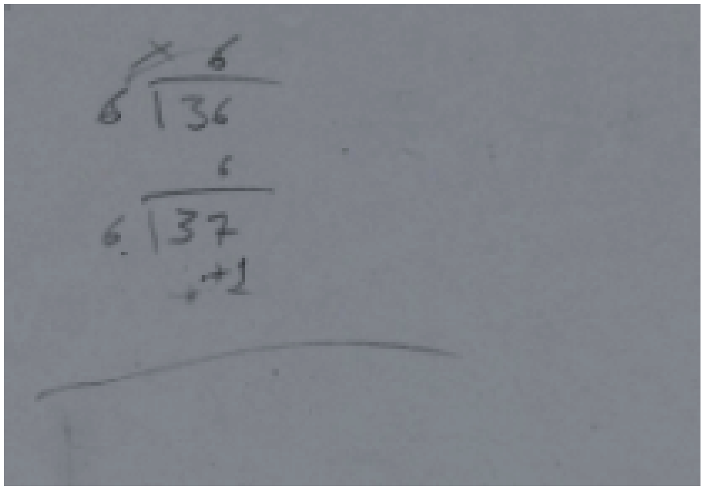


Figura A2.6 Ejemplo de A8 ante pregunta de entrevista

I: Bueno, con respecto a los problemas, a esos 6 problemas, ¿te parece que son todos del mismo tipo?

A: Mmm.

I: O sea, ¿son todos similares los problemas o tienen diferencias?

A: Pues yo el 6 si creo que tiene diferencias porque aquí trae, no venían como fracciones, entonces ahí si fue como al que le entendí mejor.

I: Lo entendiste mejor.

A: ¡Ajá!

I: Ok, a ver, ¿qué hiciste en el 6? Bueno en el 6, por ejemplo veo que anotas lo datos, si, tenés que una llave aporta 5 lts en 3 min y la otra 7 lts en 5 min (leyendo los datos escritos en el cuestionario) y veo que decides multiplicar aca por 25. ¿Por qué?

A: Para …, bueno tenía que encontrar un número que, igual aquí iba a multiplicar por 7 (indicando en los datos escritos) el mismo número por 5 y por 7 para que me saliera cierta cantidad y sumados te dieran los 300 lts, y de ahí se sacaban los minutos, porque lo que conocíamos eran los litros…

I: ¿Los litros?

A: Y, te tienen que darte sumado 300 lts.

I: Ok, y entonces, ¿cómo hiciste para dar con ese 25?

A: ¡Ah!, por inducción.

I: ¿Fuiste probando?, digamos.

A: ¡Ajá!, más o menos dije: yo creo que como por 22, y ya después dije no le faltan como 3 y por 25.

I: ¡Ah!, ok. Entonces, ¿vos identificas al problema 6 como el único que es diferente?

A: ¡Ajá! más o menos.

I: ¿Todos los demás tienen alguna similitud?, ¿si?

A: ¡Ajá!

I: Ok. En la segunda parte de tu cuestionario, en el inciso 1, veo que …, bueno acá, me gustaría saber cómo hiciste esas divisiones.

A: Bueno, es que a mí me la enseñaron que se hacía multiplicando cruzado las divisiones.

I: ¿Multiplicas cruzado qué cosas?

A: Por decirte tenemos 3/4 y 1/4, el tres por el …, el numerador por el denominador (indicando numerador del dividendo y denominador del divisor) que sería 3 x 4, yo coloqué ahí, 12 y el 4 x 1.

I: Ok, entonces lo que estás aplicando para dividir el … es denominado producto cruzado.

A: ¡Ajá!

I: ¿Si? Te parece que en todos los casos, viste que yo puse 7 divisiones, ¿te parece que en todos los casos es necesario aplicar ese algoritmo? ... ¿Por ejemplo, en el c, cómo hiciste? ¿También aplicaste el algoritmo?

A: ¡Ajá!, bueno nada mas le coloqué el 1, bueno a nosotros nos han dicho que… bueno por ejemplo al 1 (escribiendo, ver Figura A2.7), le ponemos también un número como abajo (escribe 1) imaginario, y ya para dividirlo, multiplicando, entonces es igual.

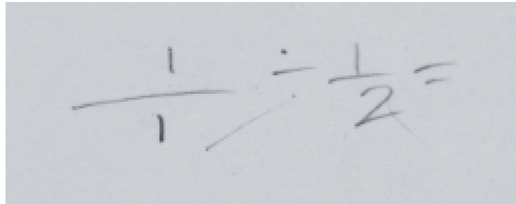


Figura A2.7 Explicación de A8 para dividir un entero entre una fracción

I: Ahí, ¿aplicas el producto cruzado? En el ítem e, ¿crees que es necesario aplicar ese algoritmo? Estoy preguntando si es necesario, no si puede o no, de poder se puede y de hecho lo hiciste y lo hiciste bien.

A: ¡Ajá!, pues tal vez no es necesario, no.

I: En el caso e, no es necesario, ¿por qué?

A: Porque… mmm, yo lo veo más claro en el c, por ejemplo tenemos 1 entre 1/2, entonces 1… mmm, ay es que tengo duda porque aquí me salió 2 (indicando el resultado de la división hecha en el cuestionario) y se supone que si tenemos 1 entre 1/2 sería la mitad ¿no? ¿Te daría como la mitad?.

I: Y, pero entonces, ¿cuál está bien?

A: ¿ 1/2?

I: ¿Lo que me estás diciendo que es la mitad, o el 2 que te salió acá?

A: Mmm, no sé.

I: En el ítem c, que es 1 entre 1/2, vos me estás diciendo que debería dar 1/2.

A: ¡Ajá!

I: Pero no te dio 1/2 , te dio 2.

A: ¡Ajá!

I: ¿Entones?

A: No sé.

I: ¿Será que el algoritmo falló? O, ¿hay algo ahí que…?

A: A lo mejor porque es … No, debería ser 1/2, ¿no? Porque aquí por ejemplo, sí nos sale, sería 1/2 entre 1.

I: ¿En el ítem c, sería 1/2 entre 1?, … me estás diciendo …

A: ¡Ajá!, y porque aquí sería 2 entre 1/2, y sí nos sale 1/4 (indicando el ítem d).

I: Ok, entonces, ¿me estás diciendo que en todos los casos aplicas el algoritmo producto cruzado?

A: ¡Ajá!

I: ¿Si? ¿Conoces alguna otra forma de hacer división? ¿Ese tipo de divisiones? (referente a la división de fracciones).

A: Mmm (dice no con la cabeza).

I: ¿Es el único algoritmo que conoces? ¿El de producto cruzado?

A: (Asiente con la cabeza).

I: Ok, entonces supongamos la siguiente situación, justo te tocó hacer práctica de fracciones y viene un estudiante y te dice maestra yo hice esto en el ítem b (escribe la división dada en b y divide numerador con numerador y denominador con denominador, ver Figura A2.8). ¿Qué le dices a ese estudiante que hizo eso? ¿Está bien? ¿Está mal? Y si le decís que está mal, le tenes que decir porqué está mal, porque viste que a los estudiantes no se los convence así no más.

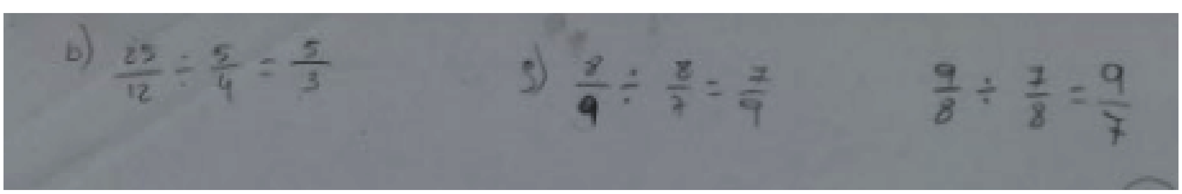


Figura A2.8 Muestras de los ‘*shortcuts*’ por parte del investigador a la alumna A8 en el desarrollo de la entrevista

A: ¡Ajá!,… mmm…, está bien porque (hace la división aplicando producto cruzado) bueno yo digo.

I: Bueno, vos hiciste ahí, por lo que veo, producto cruzado, y te dio 100 entre 60, esa fracción la puedes simplificar ¿no es cierto?

A: ¡Ajá!, y si nos quedaría como, 5/3.

I: Ok, ¿entonces? ¿Si está bien o esta mal?

A: Está bien.

I: Pero aplicó un algoritmo …

A: … diferente.

I: ¡Ajá!, ¿y si está bien?

A: ¡Ajá!

I: ¿Segura?

A: Si.

I: Vale. Entonces aplicó un algoritmo diferente, y que sí está bien. Ahora te parece que eso que hizo este supuesto estudiante ahí, ¿funciona siempre para cualquier fracción que tengas que dividir?

A: Mmm.

I: Por ejemplo, vos estás segura que el algoritmo que vos usás que es el producto cruzado, ¿funciona siempre para cualesquiera dos fracciones que tengas que se están dividiendo?

A: Si, yo creo que si.

I: Siempre funciona, ok. Entonces, ¿le podrías decir a ese estudiante si ese algoritmo en el ítem b funciona siempre? ¿Podrías arriesgarte a decir que sí o que no? o ¿tendrán que tener ciertas particularidades esos números para que funcionen?

A: ¡Ay!, no sabría decir.

I: De funcionar, ¿estás segura que funciona?, acá por lo menos funcionó. Pero entonces sería interesante como ver si funciona siempre o solo a veces.

A: Yo creo que si, sirve siempre.

I: ¿Sirve siempre?

A: ¡Ajá!

I: Imagínate que ahora viene un estudiante, otro estudiante, y te dice maestra, yo, en el g, lo que hice fue (escribe algoritmo de los numeradores iguales, ver Figura A2.8): 8/9 entre 8/7 y, ese estudiante te dice yo vi que en las dos fracciones los numeradores son iguales, entonces lo que hago es 7/9 (resultado de la división) o sea colocó el denominador de este (del divisor) sobre el denominador de este (del dividendo) y ahí ¿será que si o que no? Nuevamente, si quieres puedes hacer tus cálculos para verificar si sí o si no.

A: Mmm… no, yo creo que ese no.

I: ¿No?

A: ¿Si?

I: Si quieres, después que termine de grabar te contesto.

A: Mmm, no yo digo que no.

I: Que no funciona, o sea si un alumno te hace eso o te dice eso, esa división está mal ¿si?

A: (Asiente con la cabeza).

I: Supongamos que viene otro y te dice (escribe 9/8 entre 7/8, ver Figura A2.8), y te dice lo mismo: maestra yo vi que acá son iguales los denominadores, entonces hago 9/7 y ya ese es el resultado de la división. ¿Será que ese si está bien o está mal?

A: No, yo digo que sí, sí está mal.

I: Estos dos entonces no, ¿no están bien? (indicando las dos últimas divisiones sobre la que se está platicando).

A: (Asiente).

I: Ok, vale. Pasamos al 3, ¿el 3 lo hiciste?... si… en el 3, bueno, te plantea este cálculo ¿no? (muestra la actividad 3 del cuestionario) o sea hay una división de fracciones…

A: ¡Ajá!

I: … pero está resuelto de esta manera ¿si?. De hecho si aplicamos tu algoritmo (haciendo referencia al producto cruzado) que es 4 x 2… 8… 3 x 3…

A: 9.

I: El resultado al parecer está bien, pero entonces acá, se hacen una serie de cosas que la pregunta o lo que te pedía (la consigna del cuestionario) era que se justifique porqué se puede hacer el cálculo de esa manera, o sea al resultado correcto se llega, pero la pregunta es ¿por qué? ¿Qué me permite a mí hacer estos cálculos que estoy haciendo acá? Tú escribiste que el resultado es correcto no importa cuál método se use siempre y cuando sea el resultado correcto.

A: ¡Ajá! (se ríe).

I: ¿Qué me estás queriendo decir con eso?

A: Pues que, por decir aquí, aplico otro método, pero pues que es lo mismo que yo, … que a mí me hubiera resultado si yo lo hubiera hecho como hice las anteriores.

I: Pero entonces, ok, la cuestión es, ¿cómo justificas ese método? ¿Qué propiedades se te vienen a la cabeza quizás que te permiten a vos justificar eso? Por ejemplo, mira (muestra el cálculo del cuestionario) tenemos 4/3 entre 3/2 y decimos que esto es igual a 4/3 entre 3 x 1/2, este igual (indicando la primer igualdad) a mi lo que me está diciendo es que, veo que esto y esto son iguales (indicando el 4/3 del primer y segundo miembro de la igualdad), entonces lo que me está diciendo es que 3/2 = 3 * 1/2. ¿Eso es cierto, o no? o sea, lo que estamos planteando (escribe aislando la igualdad, ver Figura A2.9) es que 3/2 = 3 * 1/2, esa igualdad, ¿es verdadera o no?, y si, sí es verdadera, ¿qué te permite afirmar eso?

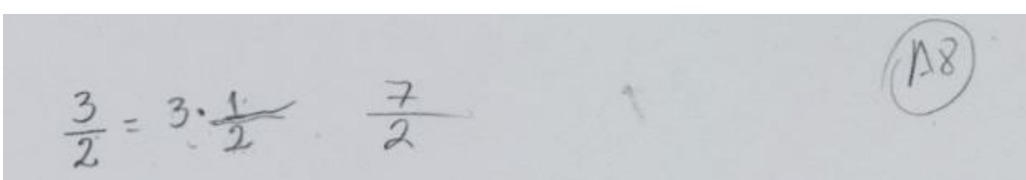


Figura A2.9 Investigador pidiendo a A8 que justifique la igualdad

A: Pues es que yo aquí (indicando el producto 3·1/2) lo convertiría como en fracción a ver si sí es igual a ésta (indicando el 3/2)

I: A ver, ¿cómo lo conviertes a fracción?

A: Multiplicando éste por éste más éste (multiplica el número entero por el denominador de la fracción y suma el numerador: algoritmo para convertir número mixto en fracción).

I: ¿Multiplicando cómo perdón?

A: Éste por éste.

I: El denominador de la fracción por el número entero,… ajá, ¿y después?

A: Le sumamos el numerador.

I: ¿Lo puedes hacer?

A: (Escribe, ver Figura A2.9) y pasamos el nominador[10] (indicando que luego de hacer ese cálculo, se mantiene el denominador)

I: El denominador, ok. Y, ¿sí son iguales o no?... ¿3/2 = 7/2?

A: No.

I: No, no son iguales. Entonces esta igualdad que está escrita aquí (indicando el primer igual del cálculo del punto 3 del cuestionario) ¿es mentira? O, ¿no son iguales?, yo puse un igual ahí y no son iguales, pero sin embargo da 8/9 el resultado.

A: ¡Ajá!,… ¡ay!, no sé.

I: ¿No?, no son iguales, ok. Y, bueno, del ítem 2, que te pedía una representación gráfica de la operación o sea de la división, por ejemplo que representes gráficamente la división 3/4 dividido 1/4, y tu aquí me representaste el resultado de la división.

A: ¡Ajá!,… mmm, si.

I: ¿Es lo que pedía, o no?

A: No.

I: ¿Se te ocurre cómo harías una representación de la división de esas dos fracciones?

[10] Se refiere al denominador de la fracción.

A: Mmm, pues sería igual una recta dividida en 4 partes.

I: Lo puedes hacer por favor.

A: (Dibuja un segmento de recta, ver Figura A2.10), igual dividirlo en 4 partes iguales y por decir aquí sería …

I: Estamos representando 3/4 entre 1/4.

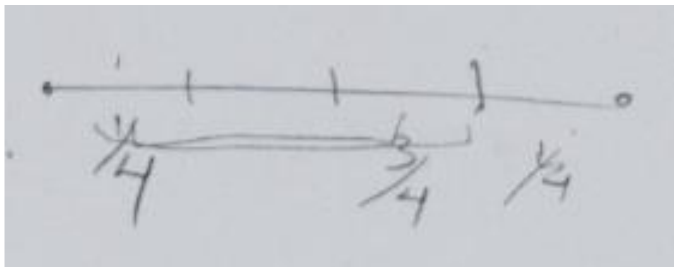


Figura A2.10 Producción del alumno A8 en el desarrollo de la entrevista para representar 3/4 ÷ 1/4

A: Aquí (indicando al segmento que corresponde a 3/4).

I: Ok, y este tercer segmento sería.

A: Todo esto (indicando desde el origen de la recta hasta el segmento que corresponde a 3/4).

I: Y, el 1/4, ¿dónde entra en juego ahí?

A: ¿Éste? (indicando el último segmento 1/4 que corresponde al complemento de 3/4)(se ríe), ¿no?

I: O sea, ¿esa sería para ti una representación de la división?

A: ¡Ajá!… o aquí podría ser (indicando el primer segmento que corresponde a 1/4 en la recta) de esas 3 que ya tomó.

I: Mmm, vale, ok.

Preguntas para entrevista a A13

1. Puedo apreciar en tu cuestionario que los problemas que se resolvían con división de fracciones los hiciste usando esta operación, ¿crees que algunos de ellos o todos se puedan resolver usando números decimales?
2. ¿Cómo decides cuando es conveniente trabajar con fracciones o cuando con decimales? Por ejemplo, en el problema 1, al número mixto lo conviertes en fracción en lugar de un decimal.
3. ¿Cuándo consideras que se necesita expresar un resultado en decimal y no en fracción? Por ejemplo en el problema 6, la primer pregunta es 97.82…= 97 19/23 lo que tu escribes como 98 min.
4. ¿Cuáles son los significados de la división que conoces? Por significados me refiero a, por ejemplo, un significado de la multiplicación es la suma repetida. **Si responde que no conoce, preguntar**: ¿estos problemas son todos iguales? Tú los identificaste como problemas de división, pero ¿son todos iguales? Es decir, ¿son del mismo tipo o los puedes distinguir de alguna manera?
5. De la segunda parte del cuestionario, en el inciso 1, escribes que "la división es la operación inversa de la multiplicación y es como hacerla al revés", es decir, ¿cómo estás haciendo las divisiones? ¿Crees que es necesario aplicar esa forma de dividir en todos los casos de división que aparecen?
6. ¿Crees que el producto cruzado funciona siempre para dividir cualesquiera fracciones? Además del producto cruzado, ¿qué otras formas de dividir fracciones conoces? **En caso que no sepa, preguntar**: si un alumno te hace estas divisiones así (se muestran los diferentes '*shortcuts*' con las divisiones del cuestionario) ¿te parece que están bien? ¿Por qué? ¿Será que siempre funcionan?
7. En el inciso 3 dices que "pareciera que se está usando la propiedad asociativa", y dices que 3/2 = 3 * 1/2, ¿por qué?
8. En el inciso 2, veo que cambias lo simbólico por lo gráfico, además de representar los resultados de las divisiones. ¿Consideras que esas son representaciones de las divisiones? ¿Cómo crees que podrías representar gráficamente la división?

Entrevista A13

I: Entonces, aquí en la carrera digamos, ¿s? en la licenciatura digamos ¿ya vieron este tema o lo van a ver?

A: Bueno vimos un poco de fracciones, de hecho ahorita estamos viendo proporciones, para ver las equivalencias.

I: Ah, si es que de hecho vi que, bueno precisamente muchos estudiantes usaron proporcionalidad cuando resolvían los ejercicios. Pero entonces mira, te entrego tu cuestionario. Acá en tu cuestionario puedo ver que, en la parte de los problemas, los problemas pues se resolvían con división de fracciones ¿sí?

A: Si.

I: Cinco de esos 6 problemas corresponden o se resuelven con división de fracciones ¿sí?, y puedo notar que sí utilizaste esa operación en la resolución de problemas lo cual pues está bien, era como lo que quería ver. Pero entonces ¿crees que algunos de estos problemas se puedan resolver utilizando decimales?

A: Mmm si, este el 2 puede ser, el de las toallas.

I: El de las toallas, ajá.

A: Podemos convertir las fracciones a decimales.

I: Perfecto ¿y después hacer qué?

A: Igual la división.

I: La división, exacto, o sea independientemente del número que, o sea de la representación que esté utilizando así sea fracción o decimal, se sigue resolviendo con una división ¿sí? ¿Solamente ese problema?

A: Ah, también el 4, de hecho creo que el 4 si puse decimales.

I: ¡Ajá! y el 4 ¿es un problema que corresponde a división?

A: No, era más como de proporción.

I: Bueno tú lo resolviste con proporcionalidad ¿no?, pero sí, es un problema que particularmente no se resuelve con división de fracciones. Eh, ¿cómo decidís cuándo es conveniente trabajar con decimales o cuando con fracciones? O sea, por ejemplo, vos en el problema 1, viste que en el problema 1 te daba un número mixto, vos decidiste convertir este número mixto a fracción. Entonces pues esa es la pregunta, ¿cómo decidís, digamos, cuando trabajar con decimales y cuándo con fracciones?

A: Bueno yo lo utilicé de acuerdo también a cómo se me facilitaba más. En el caso del primero, lo utilicé como fracciones porque se me hace más fácil a mí multiplicar, bueno hacer la división con productos cruzados, en cambio con la división tenía que dividir 71 entre, bueno primero convertirla a fracción impropia, la mixta y convertirla en decimal 71 entre 2 y me va a salir… 35.5 entre 71, entonces como era 35.5 siento que se me iba a dificultar más poner el 35.5 como dividendo y el divisor 71 e irle poniendo los punto cero cero, bueno todos los decimales. Entonces a mí se me hizo más fácil hacerlo en fracción para nada mas multiplicar e ir simplificando.

I: Entonces tú decides de acuerdo a como, o sea si para vos es más fácil o no operar, de acuerdo a eso tú decides si lo trabajas como decimal o como fracción. ¿Sí?

A: (asiente con la cabeza)

I: ¿Cuándo consideras que se necesita expresar un resultado en decimal y no en fracción?

A: Si, bueno de acuerdo a como se me facilite y aparte también checar que los decimales no sean infinitos.

I: De cifras decimales infinitas

A: Por ejemplo 10 tercios, convertirla en decimal me hubiera salido 3.333…

I: Exacto, entonces, porque por ejemplo en el problema 6 cuando respondes a la pregunta, a la primer pregunta que pregunta en cuántos minutos se llenará el tonel, tú decides responder aquí 98min ¿sí?, este problema, digamos para responder a esa pregunta, si vos hacías haces digamos la división te daba, en decimales 97.8 y seguían los decimales, vos decidiste escribirlo como 98 min, pero también ese decimal que te da lo puedes escribir como una fracción que es 97 y 19/23 entonces por eso te pregunto eso porqué digamos o cómo decidís "no acá voy a escribir el resultado en decimal" y en otra situación escribo en fracción. Eso, entonces tú dices que es por, de acuerdo al número o la fracción que tengas ¿sí?

A: Si.

I: Vale. Decime, ¿conoces significados de la división?

A: Mmm bueno yo lo entiendo como que es una operación que es para repartir.

I: ¡Ajá!, o sea el significado de la división que conoces es el de repartición ¿sí? ¿Algún ejemplo?

A: Por ejemplo tengo 30 chocolates y tengo 5 alumnos y se los quiero repartir a esos 5 alumnos, divido los 30 chocolates entre 5 y hago la división, me sale 6 entonces a cada alumno le toca 6, claro y también si esa repartición quiero que sea igual para todos.

I: Claro, si eso es fundamental ¿no? Un reparto equitativo digamos. Y ¿es el único significado que conoces, de la división? ¿Será que hay otros?

A: Pues por ejemplo… mmm ¿cómo para representarlo como fracción puede ser?

I: Por ejemplo en fracciones, ¿crees que, digamos, sigue valiendo ese significado de la división, el de repartición?

A: Ajá.

I: Porque vos ahí me diste un ejemplo con números enteros ¿no? 30 para repartir entre 5 chicos. Entre fracciones ¿te parece que sigue valiendo ese significado?

A: ¡Ajá! (asiente con la cabeza) sí.

I: Si. ¿Siempre, o sea cualesquiera sean dividendo y divisor?

A: Pues sí, yo siento que sí.

I: Por ejemplo el significado como medida, de la división, ¿te suena? O sea como medida es, yo tengo dividendo y divisor, un significado de medida que te comento es ¿Cuántas veces cabe el divisor en el dividendo? Ese significado, ¿lo conocías?

A: Mmm, no

I: Entonces pues lo que te planteo es esto, vos tenes por ejemplo, vamos con el mismo ejemplo (escribe 30 entre 5. Ver Figura A2.11), esto decimos que da 6. Un significado de esta división, así a secas como está, pues si podría tomarse que es como de repartición, pero otro significado ¿Cuántas veces cabe el 5 en 30?

A: Mmm, 6.

I: Pues cabe 6 veces.

A: es como por ejemplo cuando utilizas para física ¿no?, recorro 30 km en 5 hs, bueno en 5 min supongamos ¿Cuántas veces? O ¿Cuánto tiempo? ¿Cuánta distancia recorro en, por ejemplo la unidad de tiempo?

I: ¡Ajá!

A: ¿A eso te refieres más o menos?

I: Si digamos, ese puede ser digamos, de hecho un significado…

A: O cuando preguntabas no ¿cuál es más veloz? ¿Este o un carro que va de 30 sobre 5 o uno de 35 entre 5? ¿Cómo comparar entonces?

I: Eso es, eso entra más en la categoría de comparación digamos. Nosotros aquí, o sea yo lo que te estoy como mostrando y bueno antes te pregunté es esta cuestión de los significados de la división, vos me mencionaste uno que es el de cuando quiero repartir y ahora te estoy mostrando otro que es cuando quiero medir algo. Entonces cuando uno está midiendo algo y utiliza la división pues lo que está pensando es ¿Cuántas veces puedo ubicar el 5 en 30?, en este caso. Otra forma de ver esto es por ejemplo, ¿si te acuerdas un significado de la multiplicación? Que es como suma repetida.

A: Es como una abreviatura ¿no?, la multiplicación de la suma.

I: Bueno con la división pasa lo mismo, entonces fíjate yo puedo hacer, para saber esto cual es mi cociente de la división, si no sabes dividir puedes hacer esto (escribe la diferencia 30 menos 5. Ver Figura A2.11) esto te da 25, a esto le vuelvo a restar 5, me da 20 y así hasta que cuantas veces voy a restar el 5? 6 veces. Cuando uno hace esto, lo que está haciendo pues precisamente es estar midiendo, o sea cuantas veces cabe este número (el divisor) en el otro (el dividendo).

A: Ah, ya.

I: Ese por ejemplo es otro significado de la división, ajá, y que en fracciones es muy importante, ese significado de la división, la división como medida. Eso nada, era como para mostrarte que hay otros significados. Entonces considerando esto, ¿vos pensas que todos los problemas son del mismo tipo, o sea, son todos iguales?¿tienen todos el mismo significado de la división?

A: No.

I: no, ¿por qué?

A: Mmm bueno el primero si es de repartición, el segundo… el segundo es más yo creo como el que me mencionabas, de medición.

I: Exacto, porque lo que estamos haciendo es ¿qué cosa? Fíjate tú planteaste acá la división (indicando en el cuestionario el problema 2) 7/8 entre 1/4 ¿qué es lo que estamos viendo o analizando aquí? ¿Cuántas veces…?

A: Cabe 1/4 en 7/8.

I: Y tú al resolver esto pues dices que cabe ¿Cuántas veces?

A: 3 enteros y 1/2.

I: Y la mitad de otro entero ¿no?

A: ¡Ajá!… si también pude, a lo mejor como dices un niño lo pudo haber contestado con dibujos, 1/4 y 1/4 e ir sumando ¿no? que es como tú dices, nada más que en vez de restar…

I: Es que de hecho si hay otros cuestionarios que sí lo resolvieron como con dibujos, con el modelo de recta numérica. Bueno, de la segunda parte de tu cuestionario en el inciso 1, o sea aquí que tenías las divisiones tú me escribiste que la división es la operación inversa de la multiplicación y es como hacer al revés, escribes esto ¿no? Es decir, ¿Cómo estás haciendo vos la división?

A: ¡Eh!, bueno a mí me enseñaron cruzado ¿no? de una pelotita que está aquí (indicando el numerador del dividendo) rebota hacía el denominador (del divisor) y como rebota, pues va hacia el numerador otra vez (indicando el numerador del resultado) y que inversamente ¿no? tú la avientas hacía arriba (indicando el denominador del dividendo) hacía el numerador (del divisor) rebota hacía el denominador nuevamente (indicando el denominador del resultado) y ya después aquí cuando vimos lo de las divisiones y todo eso de las fracciones nos enseñaron que es una operación inversa la división de la multiplicación entonces nos explicaron esta parte que, la multiplicación como es lineal, estamos haciendo la operación inversa.

I: ¡Ajá! o sea, multiplicando ¿no?

A: ¡Ajá! por eso es multiplicando.

I: Entonces tú lo que estás haciendo para dividir aquí es utilizar lo que se denomina el algoritmo producto cruzado, ¿si?, o sea estás multiplicando en forma cruzada ¿sí?

A: ¡Ajá!

I: Ahora, viste que yo di acá 7 casos, si o sea a, b, c, d, e, f, g, ¿crees que en los 7 casos se necesita aplicar ese algoritmo producto cruzado, que es lo que estás usando vos?

A: Mmm pues, no por ejemplo en el d. pues 1/2, la mitad de 1/2, bueno ya se me viene a la mente rápidamente que es 1/4, sin necesidad de aplicar el algoritmo.

I: ¿Cómo se te viene rápidamente que eso es 1/4? O sea ¿Cómo lo estás pensando?

A: Un cuadrado, partido a la mitad y a la mitad de esa mitad es 1/4.

I: Es 1/4 ¿de quién?

A: De un entero.

I: ¡Ajá!, de todo el cuadrado, perfecto. ¿En algún otro caso que creas?

A: En el e), pues usamos por ejemplo creo que es la propiedad del neutro multiplicativo donde todo número multiplicado por 1 te da el mismo número, entonces al ser inverso, todo número dividido entre 1 te da el mismo número.

I: Exacto, bien. Y ¿en el caso c) que es al revés? En el caso c) estoy haciendo 1 entre otro número.

A: Entonces cuando divides, al dividir el 1 entre una cantidad, bueno en una fracción, te sale inverso.

I: ¿Inverso qué?

A: Inverso multiplicativo (dudando)

I: Exacto es el inverso multiplicativo, porque cuando vos multipliques esa fracción con su inverso, pues lo que te da es la unidad, si, es el 1. Entonces en esos casos no es, digamos, como muy necesario aplicar un algoritmo ¿no? en este caso pues el algoritmo que vos estás utilizando es el producto cruzado. ¿Por qué, digamos, igual se te ocurrió aplicar el algoritmo en esos caso? O por ejemplo en el e), sabiendo que cuando dividis por 1, pues el resultado es el mismo ¿por qué se te dio por aplicar el algoritmo? O ¿no te diste cuenta?

A: Bueno, si me di cuenta pero en las instrucciones dice explica como lo hiciste en cada caso, entonces por eso puse así los dibujitos (las líneas que indican en su cuestionario que está usando el producto cruzado) para mostrar en cada caso que, como hice, pero bueno no se me ocurrió que a lo mejor pude haber explicado rápidamente.

I: ¡Ajá! claro, la división por 1… ya perfecto. Entonces, te iba a preguntar ¿crees que el producto cruzado, en tu caso que es lo que estás usando funciona siempre para dividir cualesquiera fracciones que tengas?

A: Si.

I: ¿Siempre funciona?

A: Pues, si a mí siempre me ha funcionado.

I: Vale. A ver, por ejemplo mira, te quiero mostrar esto, en el caso b), (escribe la división, ver Figura A2.11) que tenemos 25/12 entre 5/4, nuevamente si un alumno, supongamos que vos estas enseñando este tema y viene un alumno y te dice maestra descubrí esto, puedo hacer esta división 25 divido 5, 5 y 12 divido 4, 3 (escribe el '*shortcut*') ¿Qué le decís a ese alumno? ¿Qué está bien o está mal?

A: Que está bien.

I: ¿Está bien? ¿Funciona?

A: ¡Ajá!

I: ¿Por qué?

A: Porque, bueno así a simple vista podemos notar… espérame… si, que 25 es múltiplo de 5 y 12 también es múltiplo de 4, entonces nada más hizo la división.

I: Entre numeradores y entre denominadores

A: ¡Ajá!

I: ¿Será que funciona siempre eso?

A: Mmm tal vez no siempre.

I: Tal vez no siempre. ¿Por qué? O ¿cuándo consideras que funciona?

A: Mmm espérame…

I: ¿Tú estás segura de que eso está bien?

A: ¡Ajá!

I: Bien está, por lo menos numéricamente creo que llegas a lo mismo ¿no? bueno, tú llegas a 100 entre 60.

A: Si, pero simplificando si está bien.

I: Si, llegas a 5/3. ¡Ajá!, entonces numéricamente al parecer está bien.

A: Si pero por ejemplo, si me hubieras dado aquí 10 (indicando el numerador del dividendo) y aquí 3 (indicando el numerador del divisor) ya no se hubiera logrado porque te hubiera salido decimal.

I: ¿Ya no funciona?

A: Ya no funciona.

I: Entonces, según lo que tú me dices, ¿qué condición tiene que cumplir eso para que funciones?

A: Que los dos sean, tanto múltiplos como divisores, por ejemplo 25 es un múltiplo de 5, 12 de 4 como te mencionaba desde un principio, entonces sí se puede, pero si no hubieran sido múltiplos…

I: ¿Eso ya no vale?

A: ¡Ajá!, ya no se hubiera logrado.

I: ¡Ajá!, y si viene digamos otro alumno y te dice, maestra yo en el f, no perdón, en el g) (escribe la división. Ver Figura A2.11) que es 8/9 entre 8/7, viene un alumno y te dice maestra yo vi que estos dos eran iguales (indicando numeradores del dividendo y divisor) entonces hice 7 entre 9, o sea esto (denominador del divisor) entre esto (denominador del dividendo) ¿estará bien?

A: ¡Ajá!, (asintiendo).

I: ¿Por qué?

A: Porque pues haciéndolo otra vez como mi método, 8 por 7 te da 56 y 9 por 8, da 72, entonces los estas multiplicando y al final de cuentas si vas simplificando te va a salir, es como un inverso de… ¿Cómo se llama?... una propiedad uniforme digamos, porque en ambos estas multiplicando por 8 y al final de todos modos si divides por, entre 8 también te va a salir.

I: ¿Multiplico y divido por 8 entonces? ¡Ajá!, entonces, en este caso también lo que este supuesto estudiante hizo fue vio que los numeradores de las fracciones eran iguales y dijo "el denominador del divisor es el numerador del resultado y el denominador del dividendo es el denominador del resultado" si lo queremos poner como una regla digamos, entonces ¿eso te parece que sí está bien?

A: ¡Ajá!

I: Y ¿será que también funciona siempre? O ¿Cuándo funcionará?

A: Eh igual, nada más cuando los números son… o sea los numeradores son iguales o los denominadores son iguales, no… suponte que aquí me hubiera salido 8 (indicando el numerador del dividendo) y aquí 8 (indicando el denominador del divisor) no hubiera funcionado.

I: Entonces tú dices que me salga 8 en el numerador del dividendo y 8 en el numerador del divisor, en el denominador, perdón, del divisor, ahí ya no funciona ese algoritmo, tienen que ser en los numeradores digamos.

A: ¡Ajá!

I: Y ¿en este caso? (escribe 7/8 entre 6/8. Ver Figura A2.11) ¿cómo crees que sería ahí?

A: Igual, lo mismo

I: ¿Cómo quedaría la fracción ahí?

A: 7/6.

I: 7/6… ¡Ajá!, nuevamente entonces tú dices que esto funciona. En el caso que ahora los denominadores de las fracciones sean iguales, simplemente lo que hago es numerador del dividendo entre numerador del divisor ¿sí?

A: Si.

I: ¿Conocías esos algoritmos?

A: Eh, estos si (indicando los últimos dos casos, cuando numeradores son iguales y cuando denominadores son iguales) ya los había visto antes, este es el que no lo había visto, el primero.

I: Cuando eran múltiplos (numeradores y denominadores respectivamente) ¡Ajá!,… viste que aquí nosotros vimos que, o sea son múltiplos pero el dividendo es múltiplo del divisor, ¿Cómo crees que quedaría si fuera al revés? (escribe 5/4 entre 25/12. Ver Figura A2.11) o sea en el primer caso lo hicimos fue 25/12 entre 5/4, dijimos que eran múltiplos entonces quedaba 25 entre 5, 5, 12 entre 4, 3 ¿Cómo crees que quedaría aquí? (indicando la división escrita) ¿será que se sigue manteniendo el orden?

A: Te darían al revés, 3/5.

I: ¿Me quedaría cuánto?

A: 3/5.

I: Y ¿cómo se llega a eso?

A: Pues igual que esta (indicando 25/12 entre 5/4), 25 entre 5 pero ahora quedaría en el denominador y 12 entre 4 en el numerador, porque es, bueno así, es igual que ésta pero inversa, entonces al ser inversa también el resultado, te va a dar su inverso.

I: Vale. En el inciso 3, aquí en las propiedades, tú aquí me dices que digamos esto es igual a esto (indicando lo escrito en el cuestionario 3/2 = 3 por 1/2 porque acá en 3 por 1/2 pareciera como que se aplica la propiedad asociativa, entonces tú me estás diciendo que 3/2 es igual a 3 por 1/2. Quizá lo que te llevó a pensar que esto es por una propiedad asociativa, sea éste paréntesis (primer paréntesis de la igualdad), pero este paréntesis lo que está haciendo es determinar que sigo manteniendo el orden, es decir que 3/2 yo lo descompongo o lo puedo descomponer como 3 por 1/2 ¿por qué te parece que se puede hacer eso?

A: Bueno esto también me recordó a las fracciones mixtas, donde multiplicabas el denominador por el entero y le sumabas el… a no, espera… no no… mmm bueno es que no vi que multiplicando 3 por 1/2 es igual a 3/2 pero…

I: Pero, ¿por qué se puede afirmar que es igual?

A: Bueno es que yo hice la comprobación, 3 por 1 me da 3 medios me queda.

I: O sea, estas multiplicando, ¡Ajá! pero entonces si un alumno te dice “maestra porqué son iguales, o sea yo numéricamente veo que son iguales pero ¿por qué?” ¿Cómo lo puedes pensar a ese 3 por 1/2?

A: Que tengo 3 enteros y le saco la mitad de 3.

I: ¡Ajá!, tengo 3 enteros y le saco la mitad de 3, sí. Viste que aquí hay una multiplicación, yo hoy te mencionaba un significado de la multiplicación, que se lo podía pensar como ¿qué?

A: Ah sí, que… ¡ah! ya, o sea que es 3 veces sumar 1/2 ¿verdad?

I: Por ejemplo, esa podría ser como una justificación de porqué son iguales… 3/2 es igual a 3 por ½ porque es lo mismo que 3 veces 1/2 ¿sí?

A: (Asiente).

I: Bien. Y después aquí, digamos, en el tercer miembro de la igualdad donde se tiene 4/3 por 2 y todo eso dividido entre 3, vos pones "como había dicho inverso multiplicativo, 3/2 su inverso pues es 2/3, entonces multiplica por 2 a 4/3 y divide en 3" o sea aquí lo que estás haciendo es explicarme esto que hace aquí ¿no? a 4/3 lo multiplico por 2 y a eso lo divido por 3, pero la pregunta es, pues porque vale pasar de esto a esto (del segundo miembro de la igualdad al tercer miembro de la igualdad) porque además fíjate que el paréntesis ahora está con el 4/3, nosotros aquí tenemos una multiplicación y una división, no podemos aplicar una propiedad asociativa porque pues no sabemos que valga la propiedad asociativa, pero entonces ¿de dónde sale este 2? (indicando el 2 que multiplica a 4/3)

A: Del 2 de medios.

I: Del 1/2 ¿no?

A: ¡Ajá!

I: ¿Y que es el 2 de 1/?

A: Es, este un denominador.

I: No, o sea el 2 y el ½ ¿qué son entre ellos?

A: Mmm.

I: De hecho es algo que me escribiste por aquí (indicando en el cuestionario lo que escribió la estudiante).

A: ¿Es su operación inversa?

I: Es el inverso multiplicativo, ¡Ajá! Entonces este 2 que aparece acá es el inverso multiplicativo de 1/2, pero y entonces ¿qué pasa con este 3?

A: Eh, pues si estas ocupando el inverso multiplicativo para la, o sea en vez de dividir, estas multiplicando entonces el que va a multiplicar, ahora pues lo vas a pasar dividiendo, o sea también le tienes que aplicar el inverso.

I: El inverso, vale. ¿Si conoces esta propiedad que dice que? si yo tengo a dividido b, si estoy poniendo un caso general, si yo tengo a dividido b esto es lo mismo que hacer a multiplicado por el inverso multiplicativo de b (escribe $a \div b = a \cdot 1/b$. Ver Figura A2.11) precisamente. ¿sí conocías esto?

A: ¡Ajá!

I: ¿Sí? Si es válido, ¿estamos de acuerdo?

A: Si.

I: Entonces, si tú utilizas esto (indicando la propiedad anterior), fíjate, aquí vamos a centrarnos aquí (indicando el segundo miembro de la igualdad) si tu utilizas esto lo que tienes es 4/3 entre $(3 \cdot 1/2)$ ¿sí?, si nosotros usamos esto pues lo que estamos diciendo es que esto es 4/3 por el inverso de todo esto (indicando el paréntesis) ¿sí?

A: 2/3.

I: 2/3 o lo escribimos así (escribe $1/(3 \cdot 1/2)$) para que veas precisamente de donde salen esos inversos. Entonces, acá yo tengo una multiplicación entonces puedo hacer esto (escribe $1/3 \cdot 1/(1/2)$) sin problemas ¿no es cierto? ¿hasta ahí está? ¿sí? O sea, como yo tengo una multiplicación en el denominador puedo como aplicar una propiedad distributiva, entonces fíjate ¿qué operaciones me quedan acá?

A: Una multiplicación

I: Me quedan todas multiplicaciones ¿verdad? Como me quedan todas multiplicaciones, ahí si yo ya puedo asociar todos los factores pues que me convengan, entonces, bueno ésta escritura (muestra 1 entre 1/2) ¿qué me está indicando? 1 entre 1/2 ¿qué me está indicando?

A: Que a 1 lo vas a dividir en 2.

I: ¿En 2?

A: No, es ¿cuántas veces cabe el medio en el 1?

I: El 1/2 en el 1, ¡Ajá! y ¿cuántas veces cabe?

A: 2.

I: 2 veces, ¿o sea que esto es? (indicando el 1 entre 1/2).

A: 2 enteros

I: 2 enteros, bien. Entonces lo que tenemos aquí pues es 4/3 por 1/3 por 2. Ahora ¿qué puedo hacer yo? Tengo una multiplicación y puedo conmutar y asociar ¿sí? Entonces me quedaría (escribe asociando los primeros dos factores $4/3 \cdot 2 \cdot 1/3$), acá puedo asociar esto porque tengo una multiplicación y acá ya aparece esto (indicando el paréntesis del tercer miembro de la igualdad), pero todavía sigue apareciendo una multiplicación y yo tengo una división acá (indicando a lo que ha llegado hasta el momento y a lo que debe llegar), pero nuevamente eso lo podemos justificar utilizando esto (muestra la propiedad $a \div b = a \cdot 1/b$) multiplicar por 1/3 es lo mismo que dividir, ¿por cuánto?

A: Por 3.

I: Por 3, ¿sí?, o sea es lo que hiciste tú pero faltaban ahí unos detalles afinar, ¿sí? Unas propiedades a tener en cuenta, ¿sí? ¿Quedó claro?

A: Si.

I: Finalmente, de las representaciones gráficas, bueno puedo apreciar que o que hiciste fue, acá esto (indica respuesta del estudiante) estaría representando 3/4 entre 1/4, o sea lo que hiciste fue reemplazar una escritura simbólica por una escritura gráfica, y además escribir el resultado de esas divisiones, o sea graficar el resultado de esas divisiones. Fíjate que en la consigna te decía representa gráficamente las operaciones, entonces ¿consideras que esto es una representación de la división de esas fracciones que te daba ahí? (referentes a las del inciso 1 segunda parte del cuestionario).

A: Mmm pues creo que no ¿verdad? Pude haber usado a lo mejor una recta.

I: ¿Cómo usarías la recta? Por ejemplo en el problema 1 que es, en la división 1 que es 3/4 entre 1/4 ¿cómo usarías la recta?

A: Pongo la recta y la divido en 4.

I: ¡Ajá! ¿y luego?

A: Y luego digamos nada más ocupo los 3/4, esos 3/4 los vuelvo a dividir en 4/4.

I: ¿Puedes hacerlo por favor?

A: (Dibuja una recta, la divide en 4 y marca 3. Ver Figura A2.11)

I: Eso que marcaste con línea rayada digamos es 3/4.

A: ¡Ajá!

I: Bien.

A: Y ahora divido en cuartos esta parte (indicando los segmentos de 1/4)… mmm.

I: ¿Qué hiciste ahí?

A: Lo dividí en 12 porque no puedo, bueno se me dificulta el 3 dividirlo en 4 entonces un común denominador podría ser 12.

I: Entonces, ¿a quién dividiste en 12?

A: A las 3/4 partes.

I: A los 3/4 lo dividiste en 12 partes, o sea tomaste partes más pequeñas ¿no?

A: ¡Ajá!

I: ¡Ajá! y ¿ahora?

A: Ahora, pues a estas 3 partes ya las dividí en 12, entonces cada 3, es una cuarta parte cada 3 (marca en la recta cada 3 segmentos de la nueva subdivisión, hecha en 12) ya tengo… ya tengo los cuartos.

I: Puedes ponerle por favor las referencias, o sea el cero, cuál es la primer división que hiciste.

A: (Coloca las referencias en la recta).

I: ¡Ajá!, entonces lo que estas indicando es que de cero a este segmento es 1/4 de 1, a ese primer segmento, de ese segundo segmento al segundo pues nuevamente es 1/4 de 1 y de ese segundo segmento al último que es donde tú marcaste como 3/4…

A: Entonces aquí sería más bien 3, y aquí 2 (renombra las particiones hechas).

I: ¡Ajá!, vale, y ¿en dónde entraría ahí lo que hiciste de dividir en 12 partes?

A: Mmm aquí.

I: ¡Ajá!, me dices que divides en 12 partes a los 3/4 y ¿luego qué hiciste?

A: Cada 3 son 1/4 de las 3/4 partes, o sea cada 3/12 son una cuarta parte.

I: ¿De quién?

A: De 3/4. Son 3/12 de ¾ que a la vez es igual a 1/4 de 3/4.

I: Y eso ¿cómo te lleva a la respuesta del problema o de la división?

A: Mmm, nada más me pide en ¿Cuánto?... ¿1/4 verdad?

I: Si ahí te pedía una representación gráfica, pero entonces, de esa representación que vos estás haciendo, puedes sacar la respuesta ¿no? entonces este 3/4 entre 1/4 te da, aplicando el algoritmo como lo hiciste tú te da 3, ¿qué significado tiene ese 3 en lo que estás haciendo tú?

A: Como que me guío más con el mío (la representación que usó en el cuestionario).

I: Vamos de vuelta… a los, a esto (indicando la representación hecha en el cuestionario) bueno a ver aquí ¿cómo lo hiciste entonces?

A: Puse los 3/4 y luego 1/4 y puse que a cada cuarto, este era 1/4 este dibujito (indicando la traducción simbólica a gráfica del 1/4) le tocan 3 partes de este cuarto (indicando la traducción simbólica a la gráfica del 3/4).

I: Vale, eso es con el modelo que tú hiciste en tu cuestionario. Y entonces, esto para ti está representando una…

A: División, pero para de repartición.

I: Mmm ok, esto que tú usas aquí, ¿te sirve para este caso?, para el caso d) donde tenes 1/2 entre 2.

A: Igual puse los medios, pero ahora al medio lo tenía que dividir por eso usé el medio en partes chiquitas.

I: Pero entonces acá, ¿cómo estás o como tengo que interpretar el gráfico? ¿tu resultado? Tengo que interpretar como que estos dos, que al parecer son los 2 enteros, ¿caben en el 1/2? O ¿cómo?

A: Les toca 1/2.

I: Les toca 1/2.

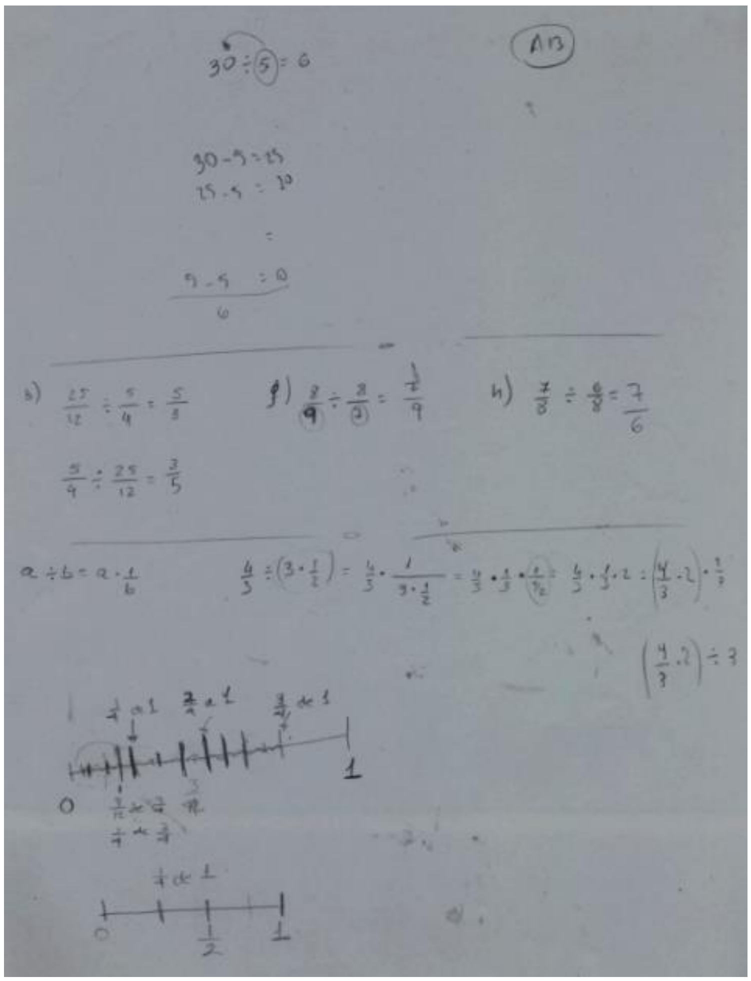


Figura A2.11. Producción del alumno A13 durante el desarrollo de la entrevista

A: No, les toca 1/4, porque era 1/2 entonces ese medio, bueno aquí más abajito lo puse que se dividía en 4 partes, para que se pudiera dividir este medio en 2, en los 2 enteros.

I: Dividir el medio en los 2 enteros. Ok, ¿podrías nuevamente utilizando el modelo de recta tratar de hacer esa representación?

A: Tengo 1/2 y lo voy a dividir en 2, sería aquí cero, 1 y a este medio lo dividí en 2 entonces esto es una cuarta parte de 1 (representa con el modelo de recta, ver Figura A2.11).

I: Perfecto, ¿ahí si te quedo más claro, con el modelo de recta?

A: Si.

I: Bien, vale pues, muchas gracias.