Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del
Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

El uso de Excel como herramienta para el aprendizaje del concepto raíz real de funciones polinomiales

Tesis que presenta

José Raúl Salazar Santiago

Para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias en la
especialidad de Matemática Educativa

Director de la Tesis: Dr. Hugo Rogelio Mejía Velasco

México, Distrito Federal Marzo de 2015

A la MAESTRA: Áurea González Leal.

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Hugo Rogelio Mejía Velasco por el tiempo y dedicación para el desarrollo de este trabajo.

Al Dr. Armando Cuevas Vallejo por la lectura y sugerencias brindadas para el presente trabajo.

Al Dr. José Alberto Monzoy Vásquez por el tiempo, la dedicación, sugerencias y apoyo brindado para la consecución de esta meta.

Al Dr. Salvador Moreno Guzmán por la lectura, sugerencias y apoyo brindado para el presente trabajo.

A los alumnos que participaron en esta experiencia de enseñanza.

Al M. en EM. Fernando Ávila Villanueva por la lectura y sugerencias para el presente trabajo.

A Alma, por sus sabios consejos y su apoyo…

A todos los que me apoyaron…..gracias.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por su apoyo financiero durante el programa de Maestría.

CONTENIDO

RESUMEN

En esta investigación se presentan los resultados de la experiencia de enseñanza que tuvo como propósito la apropiación del concepto de raíz real de una función polinomial, sustentado en el software **Raíces**, elaborado en el entorno de la hoja electrónica de cálculo Excel. Las actividades fueron dirigidas mediante hojas de trabajo.

Para el diseño e implementación de las actividades, se consideró se debía hacer uso sistemático de diferentes representaciones al estudiar el concepto de raíz real de una función polinomial.

Las referencias teóricas para llevar a cabo la investigación se sustentaron principalmente en las concepciones sobre sistemas y registros de representación asociadas a un objeto matemático propuestas por R. Duval.

El software **Raíces** permite realizar actividades de identificación, tratamiento y conversión en relación con el concepto de raíz de una función polinomial en diferentes representaciones: gráfica, algebraica y tabular.

El análisis de los resultados muestra evidencia de que la mayoría de los estudiantes participantes exhibieron avances en la comprensión del concepto de raíz al realizar las actividades propuestas.

Los resultados de la experiencia de enseñanza nos dan elementos para afirmar que un ambiente tecnológico como el propuesto, junto con las actividades en papel y lápiz propuestas, pueden tener un papel importante en la apropiación del concepto de raíz de una función polinomial por el estudiante.

ABSTRACT

In this study, we present the results of the teaching experience which had the purpose of appropriating the concept of real root of a polynomial function; this was based on the software "Raíces", developed in the environment of the Excel program. The activities were carried through worksheets.

For the design and implementation of the activities we considered the systematic use of different representations to study the concept of real root of a polynomial function.

Theoretical references to conduct this research were based mainly on the concepts of representation systems associated with a mathematical object proposed by R. Duval.

The software "Raíces" allows identification, treatment and conversion activities related to the concept of root of a polynomial function in different representations: graphical, algebraic and tabular.

The analysis of the results shows evidence that the majority of participating students showed progress in understanding the concept of the root when they complete the proposed activities.

The results of the teaching experience give us elements to affirm that a technological environment as proposed, along with paper and pencil proposed activities, can play an important role in the appropriation of the concept of root of a polynomial function by the student.

INTRODUCCIÓN

Existen diferentes reportes de investigación, Cuevas, A. & Pluvinage, F. (2006), que ponen de manifiesto los problemas que tienen los estudiantes para apropiarse del concepto función en general y en particular de subconceptos relacionados con las funciones lineales o cuadráticas, García, M. (2000).

Lo anterior motivó mi interés para desarrollar la presente investigación sobre el concepto de raíz real de una función polinomial apoyado en la hoja electrónica de cálculo Excel y en hojas de trabajo, con la finalidad de brindar una propuesta que contribuya a solucionar esta parte de la problemática mencionada ya que se detectó una carencia de significado de este concepto por parte de los alumnos, Torres, J. C. (2010).

En ésta propuesta se considera la incorporación de la tecnología ya que permite el uso dinámico de múltiples representaciones del concepto matemático, Mejía, H. y Monzoy, J. *(2002)*.

En el presente reporte de investigación: “El uso de Excel como herramienta para el aprendizaje del concepto raíz real de funciones polinomiales”, se tratará de responder la pregunta: ¿El uso de la hoja electrónica de cálculo Excel, apoyado en hojas de trabajo, puede modificar positivamente el aprendizaje del concepto matemático de raíz real de una función polinomial? la respuesta a la pregunta anterior permitirá evaluar el impacto de la componente tecnológica, en el proceso de adquisición del concepto mencionado, en las actividades de enseñanza-aprendizaje.

El capítulo uno se inicia contextualizando el problema en mi centro de trabajo, La Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades plantel Naucalpan (ENCCHN), a partir del programa de estudios, de exámenes extraordinarios y material bibliográfico empleado por los profesores. Cabe destacar que se considera un tema importante ya que permite avanzar en el esclarecimiento de temas múltiples.

Una vez detectada la problemática se describen, en el capítulo dos, referentes teóricos que permitan explicarla y sirvan de fundamento para una propuesta de solución.

Posteriormente, en el capítulo tres, se describe el diseño de la experiencia didáctica. Se comentan en primer lugar los resultados de un examen diagnóstico aplicado a los alumnos, después se describe el diseño y la elaboración del software Raíces, así como de unas hojas de trabajo que le sirven de complemento.

En el capítulo cuatro se describe la fase de la experimentación y sus resultados, también se analizan los comentarios de algunos participantes en esta experiencia de enseñanza-aprendizaje. Es importante aclarar que, con fines de simplificación, sólo se consideraron polinomios con coeficiente principal igual a uno.

Finalmente, en el capítulo cinco, se exponen las conclusiones generales.

CAPÍTULO 1: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La presente investigación tiene el propósito de poner en práctica planteamientos teóricos que permitan promover una mayor comprensión del concepto de raíz real de una función polinomial.

Este tema está presente en la unidad uno: “Funciones Polinomiales”, del programa de estudios 2003, correspondiente al cuarto semestre de La Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades plantel Naucalpan (ENCCHN) de la UNAM, en el nivel medio superior.

Es importante mencionar que se detectó la problemática al estar realizando un estudio sobre un método de aproximación numérica a las raíces de funciones polinomiales de grado superior a dos. Al realizar un examen de conocimientos previos al estudio del método numérico se detectó que el concepto de raíz real de funciones polinomiales no era comprendido, razón por la cual se consideró pertinente no hacer énfasis en un método particular de obtención de la raíz de una función polinomial, sino en el significado mismo del concepto, con la finalidad de contribuir a remediar esta carencia.

Para encontrar respuesta a esta problemática de enseñanza primero se describirá la ubicación del concepto raíz real de una función polinomial en el actual programa de estudios[1] de la ENCCH de la UNAM, con la finalidad de ver cuáles son los conceptos relacionados. Posteriormente se analizarán los resultados de un ***examen diagnóstico*** (ver Anexo A) que se aplicó con el objetivo de conocer el estado de los conceptos previos relacionados con el tema de raíz real de una función polinomial.

[1] Vigente a partir de junio de 2003.

1.1 UBICACIÓN DEL CONCEPTO RAÍZ REAL DE UNA FUNCIÓN POLINOMIAL EN EL PLAN DE ESTUDIOS.

En primer término, cuando se estudia el tema de función lineal en la unidad dos de Matemáticas I, no se menciona el concepto raíz de una función lineal. Se analiza la función lineal expresada en la forma $y = mx + b$ y se estudia el efecto de los parámetros m y b (pendiente y ordenada al origen respectivamente) en la gráfica de la función. No se analiza la función en la forma $y = m(x - a)$ (el parámetro a representa la abscisa al origen) y la relación con su gráfica, aspecto que considero es de gran ayuda para el estudio del tema de raíces reales de una función polinomial de grado mayor que uno.

El término raíz se menciona por primera vez en la unidad uno (funciones cuadráticas) de Matemáticas II, cuando se solicita relacionar el número de intersecciones de la curva de una función cuadrática con el eje *x*, con la naturaleza de la raíces [Ver Programa de Estudio de Matemáticas Semestres I al IV, Pág. 37]. Se sugiere el uso de Excel para tareas fuera del aula, sin embargo, con base en mi experiencia, la gran mayoría de maestros no tienen una idea precisa sobre cómo usar la hoja electrónica de cálculo sugerida en el programa de estudios.

También se menciona, en esta misma unidad, que el alumno interprete en el modelo $y = a(x - h)^2$ el papel del parámetro h, como la forma para desplazar la parábola $y = ax^2$ a la derecha o a la izquierda, según el valor de h sea positivo o negativo [Ver Programa de Estudio de Matemáticas Semestres I al IV, Pág. 37] y no se menciona explícitamente que el valor de h corresponde al valor de la raíz o cero de la función de segundo grado.

Posteriormente se detectó que se hace más énfasis sobre este tópico en la unidad uno: “Funciones polinomiales” de Matemáticas IV[2] ya que se enuncian aprendizajes que se relacionan con la presente investigación:

- Empleará **métodos de exploración** para obtener las raíces en funciones polinomiales factorizables de grado 3 y 4.
- Identificará las raíces de una función polinomial como las soluciones de la ecuación polinomial asociada y como las abscisas de los puntos de intersección de la gráfica de la función con el eje de las abscisas.
- Construirá una función polinomial y bosquejará la gráfica asociada a ella a partir de sus raíces reales.
- Resolverá ecuaciones polinomiales que se puedan factorizar.
- Relacionará los factores del polinomio con las raíces de la función polinomial.

Finalmente se consideró que el tema de raíz real de una función polinomial es importante ya que sirve de sustento a conceptos que se estudian en los cursos de cálculo diferencial e integral, tales como hallar puntos críticos de una función o encontrar raíces reales de funciones por métodos no algebraicos.

[2] Programa de Estudio de Matemáticas semestres I a IV, junio 2003, Págs. 73, 74 y 75.

1.2 APLICACIÓN DE UN EXAMEN DIAGNÓSTICO.

A partir de los resultados del **examen diagnóstico** (ver Anexo A), donde se trabajó con conceptos relacionados con la raíz de funciones polinomiales, es posible inferir lo siguiente:

Los alumnos lograron en su mayoría, identificar una ecuación cuadrática si esta se presenta en la forma $ax^2+bx+c=0$, sin embargo, si la expresión se presenta en forma factorizada tuvieron dudas para reconocerla.

Los estudiantes presentaron problemas para relacionar las raíces de una función lineal o cuadrática con los puntos de intersección de su gráfica con el eje x. También se les dificultó reconocer la raíz de una función lineal o cuadrática a partir de una tabla o una gráfica.

Tuvieron dificultades con la lectura de coordenadas de puntos sobre la gráfica de una función, y la mayoría no reconocieron una raíz de una función cuadrática expresada en forma algebraica o a partir de una serie de valores tabulados.

La mayoría de participantes supo reconocer correctamente la solución de una ecuación lineal, sin embargo les costó trabajo reconocer las soluciones de una ecuación de segundo grado, especialmente si esta se escribe en forma factorizada.

Los alumnos estuvieron más familiarizados con el concepto de solución de una ecuación lineal que con el concepto de raíz de una función lineal.

La mayoría de participantes tuvieron problemas para relacionar las representaciones algebraica y gráfica del concepto raíz real de una función cuadrática.

Se observó que interpretaron incorrectamente el signo de una función lineal en el registro gráfico.

La mayoría de los participantes no logró extraer información de la representación gráfica de una función lineal y no interpretaron correctamente la notación *f(x)*.

Lo mencionado en párrafos anteriores me llevó a concluir que los participantes no se apropiaron del concepto de raíz real de una función polinomial (en particular de las funciones de primero y segundo grado), razón por la cual se planteo **diseñar un software** para su posterior implementación con ayuda de ***hojas de trabajo*** (ver Anexo C) para tratar de remediar la problemática detectada.

1.3 OBJETIVOS DE LA EXPERIENCIA DE ENSEÑANZA

El propósito del trabajo de tesis es probar si el software Raíces, junto con las hojas de trabajo, constituye un elemento sustantivo para promover una mayor comprensión del concepto de raíz real de una función polinomial.

Se considera que el software, junto con las hojas de trabajo, favorece la apropiación del concepto de raíz real de una función polinomial si el alumno logra resolver correctamente los ejercicios de conversión y de coordinación del concepto presente en las hojas de trabajo y en el ***examen de contraste*** (ver Anexo B).

Concretamente se intentará responder las siguientes preguntas:

1. Usando el software Raíces, conducido con hojas de trabajo, ¿el alumno logra identificar que las raíces reales de una función cuadrática se determinan por las raíces de las funciones lineales componentes?.
2. Usando el software Raíces, conducido con hojas de trabajo, ¿el alumno puede encontrar las raíces reales de funciones polinomiales transitando entre las diferentes representaciones del concepto?.

Las actividades de aprendizaje se sustentaron en el empleo de varias representaciones del concepto, principalmente se recurrió al uso de los registros gráfico y numérico.

1.4 CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN

Se analizará brevemente cómo se imparte el tema de raíz real de una función polinomial en mi centro de trabajo con esto se pretende dar un contexto a la investigación y con ello detectar los diferentes factores que inciden en la problemática.

El análisis se realizará a partir de tres contextos:

a) Del programa de estudios.
b) De los exámenes extraordinarios.
c) Del material bibliográfico empleado.

1.4.1 Análisis del contexto a partir del programa de estudios.

1.4.1.1 En relación al programa de estudios de Matemáticas I

En la página 21 (Matemáticas I, unidad 2: Variación directamente proporcional y funciones lineales) del programa de estudios vigente se mencionan los siguientes aprendizajes: *"Reconoce a b (en la expresión $y = ax + b$) como el parámetro que desplaza verticalmente b unidades a la gráfica de la recta $y = ax$. Reconoce a a como el parámetro que determina una mayor o menor inclinación, respecto del eje x, de la recta $y = ax + b$. Grafica funciones de la forma $y = ax + b$, a partir de la información que proporcionan los parámetros a y b"*.

No se considera el análisis de la función lineal expresada en la forma $y = m(x - a)$, la cual considero de igual importancia que el análisis que se realiza sobre la función $y = mx + b$ ya que daría oportunidad a que se analizaran los parámetros m y a que representan la pendiente y la abscisa al origen (raíz) en la representación gráfica de la función lineal.

No se menciona en el programa de estudios de Matemáticas I referencia alguna al concepto raíz de la función lineal; en la página 21 se menciona: *"En esta unidad se inicia el estudio de las funciones, pero no se* pretende *agotar todos los aspectos relacionados con el concepto, pues se irán incorporando con creciente grado de abstracción y formalidad a lo largo de los cuatro semestres…*". Es notoria la ausencia de este concepto ya que se considera que el concepto raíz constituye una propiedad fundamental del objeto función, Torres, J. C. (2010, p. 14).

Una aproximación a la interpretación de la raíz de una función lineal en su forma gráfica y algebraica se presenta en la página 25 (Matemáticas I, Unidad 3: Ecuaciones Lineales) del programa de estudios vigente: "*Identificará a la ecuación lineal como un caso particular de una función lineal*". A partir del aprendizaje anterior: "*asociará de manera adecuada, la solución de una ecuación de la forma* $ax+b=0$*, con la abscisa del punto en donde la gráfica de la función* $y=ax+b$*, corta al eje* x", sin embargo, no se menciona ninguna estrategia de enseñanza para alcanzar este objetivo.

Se puede concluir que en Matemáticas I no se considera el estudio del concepto de raíz de la función lineal, todo el análisis se centra en el estudio de la pendiente y la ordenada al origen, esto se confirma por el tipo de preguntas que sobre la función lineal se realizan en los exámenes extraordinarios, como se comenta más adelante.

1.4.1.2 En relación al programa de estudios de Matemáticas II

En la página 37 (Matemáticas II, Unidad 1: Funciones Cuadráticas) del programa de estudios vigente se propone: "*Relaciona el número de intersecciones de la curva de una función cuadrática con el eje* x*, con la naturaleza de las raíces. En* particular *identificará su ausencia con la existencia de raíces complejas.*" Al igual que sucede con la función lineal, se carece de estrategias de enseñanza para lograrlo y a pesar que se sugiere como una estrategia el uso de Excel como apoyo, no se dice en qué forma se debería usar, es decir no existe material en el colegio que trate estos temas con el apoyo de Excel y que se sugiera como sustento concreto para la realización de actividades que contribuyan a lograr los objetivos planteados en el programa de estudios, por consiguiente, en general, tanto el docente como el alumno no emplean el software recomendado.

También se sugiere en la página 36 (Matemáticas II, Unidad 1: Funciones Cuadráticas) como tema de estudio que ***se compare a la función cuadrática con la función lineal*** *y que* se *estudien las intersecciones de la gráfica de una función cuadrática con el eje* x, sin embargo, esto no se consideró al estudiar a la función lineal.

En la página 38 (Matemáticas II, Unidad 1: Funciones Cuadráticas) se lee: "*Integra a su lenguaje términos como concavidad, vértice, máximo, mínimo, traslación y simetría*", no se menciona la integración al lenguaje del estudiante de conceptos como *raíces* de la función cuadrática. Sólo se estudia el efecto de los parámetros: a, c, h y k en la gráfica de la función cuadrática expresada en la forma $y = ax^2 + c$ o $y = a(x-h)^2 + k$, esto se refleja en los reactivos que se proponen para evaluar este tema en los exámenes extraordinarios que usualmente son elaborados de forma colegiada.

1.4.1.3 En relación al programa de estudios de Matemáticas IV

En las páginas 70 y 71 del programa de estudios de Matemáticas IV, se menciona que se consolidan e integran conceptos y procedimientos; que corresponde a este semestre profundizar y ampliar el concepto de función e identificar sus elementos. Se vuelve a sugerir el uso de software como GeoLab, Cabri, Derive, etc. ya que favorece que el alumno explore las características de los diversos tipos de funciones, reconozca patrones de comportamiento, formule conjeturas, establezca relaciones entre la gráfica y los parámetros presentes en su regla de correspondencia, etcétera.

Los objetivos anteriores no se consideran cuando se estudia el concepto de raíz real entendida como un elemento de una función.

En las páginas 71 y 72 se presentan los siguientes objetivos: "*Obtiene conclusiones sobre el* comportamiento *de las funciones estudiadas y es capaz de distinguir el tipo de variación que las caracteriza. Comprende y maneja el concepto de función, así como el sentido e interrelación de* **subconceptos***, características y procedimientos asociados a él*"; no es claro en este propósito a que subconceptos se refieren pero *considero que puede ser el concepto de raíz real de una función polinomial.*

En la página 74 (Matemáticas IV, Unidad 1: Funciones Polinomiales) se tienen los siguientes aprendizajes que se relacionan con el concepto de raíz real de una función polinomial:

a) “Identifica los ceros de una función polinomial como las raíces de la ecuación polinomial asociada”.

b) “A partir de las raíces reales de una ecuación polinomial construye una función polinomial y bosqueja la gráfica asociada a ella”.

c) “Determina las concavidades de la gráfica con base en el signo y al exponente del término de mayor grado de la función polinomial y los ceros de la misma”.

Como estrategia se sugiere (página 74) que: “***Se retome lo que el alumno ya vio para funciones*** lineales ***y cuadráticas*** *y extenderlo a las propiedades de las funciones polinomiales de* grado *mayor a dos*”, sin embargo, considero que esto es difícil de lograr, ya que según se comentó en párrafos anteriores, el alumno no se ha apropiado del concepto de raíz real de una función de primero o segundo grado y por consiguiente no podrá ampliar el concepto.

Se comenta que se debe hacer hincapié en que:

a) “Las raíces de una función son las soluciones de la ecuación $f(x)=0$, y corresponden a las abscisas de los puntos de intersección de la gráfica de la función con el eje de las abscisas, además de la relación que existe entre los factores del polinomio y los ceros de la función polinomial”.

b) “Se recomienda el uso de la computadora para construir las gráficas de las funciones utilizando software como Excel, Derive, Cabri, etc.”.

En la temática, sugerida por el programa, se lee lo siguiente:

Métodos de exploración para la obtención de los ceros, aplicable a las funciones polinomiales factorizables de grado 3 y 4:

a) División de polinomios.

b) División sintética.

c) Teorema del residuo.

d) Teorema del factor y su recíproco.

e) Divisores del término independiente.

f) Identificación de tipos de raíz: enteras, racionales, reales, complejas y su multiplicidad.

CONCLUSIÓN

Se puede concluir que en el programa de estudios de Matemáticas I y II no se menciona explícitamente el término raíz de las funciones de primero o segundo grado. Además, al realizar un análisis de los parámetros presentes en las funciones lineales y cuadráticas, expresadas en las formas $y = ax + b$ y $y = a(x-h)^2 + k$, se nota que ninguno representa a la raíz de la función lineal y de la función cuadrática.

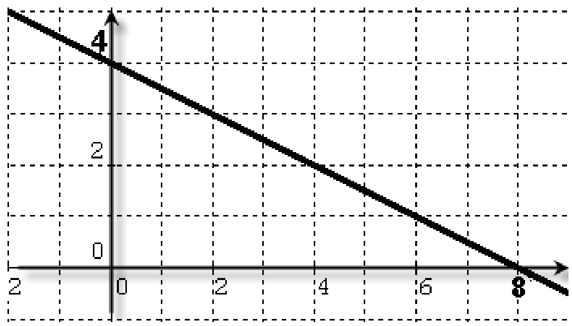
Al llegar a cuarto semestre se pretende profundizar en un concepto que el alumno no posee. En este semestre se enseña un procedimiento -algoritmo- para hallar las raíces de las funciones polinomiales de grado mayor que dos factorizables donde se usa la división sintética y el teorema del factor y del residuo; una vez más el alumno no se apropiará del concepto de raíz real de una función polinomial, sino de un procedimiento algebraico que fácilmente olvidará.

1.4.2 Análisis del contexto a partir de exámenes extraordinarios.

1.4.2.1 En relación con Matemáticas I

En seis periodos de exámenes extraordinarios que se aplicaron se presentan preguntas como la siguiente:

¿Cuál es la función que se debe asociar a la gráfica? (gráfica 1.4.2.1)

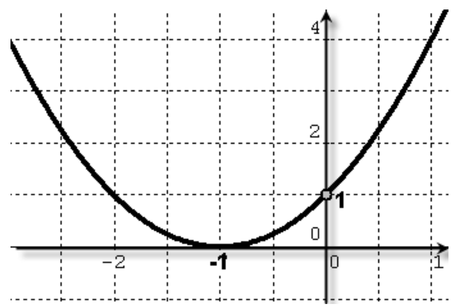


Gráfica 1.4.2. 1

En ninguno de los reactivos propuestos en los diferentes periodos de exámenes extraordinarios se nota que se evalué si el alumno aprendió el concepto de raíz de la función lineal, sin embargo, es notorio como se evalúan de manera consistente (el reactivo mostrado está presente en los seis periodos analizados y sólo existe variación en la ordenada y la abscisa al origen) actividades monótonas de conversión del registro grafico al algebraico de una función lineal. Considero que al alumno únicamente se le evalúa el aprendizaje de un procedimiento que consiste en la identificación de los parámetros m y b a partir del registro gráfico y su posterior sustitución en la forma algebraica $y = mx + b$ de la función. Creo que se apreciaría una aprehensión del concepto si, por ejemplo, un alumno que responde correctamente este reactivo se le planteara la misma actividad, pero ahora se partiera del registro tabular o numérico al registro algebraico.

1.4.2.2 En relación con Matemáticas II

En seis periodos de exámenes extraordinarios que se aplicaron se presentan preguntas muy similares a la siguiente: "*para la función cuadrática* $y=-x^2+6x-5$, *obtenga su forma* estándar*, las coordenadas del vértice, la ecuación del eje de simetría, las intersecciones con los ejes, su valor máximo o mínimo y trace su gráfica*". O bien las preguntas se presentan en la forma: "*a partir de la siguiente gráfica* (gráfica 1.4.2.2)*, obtenga la forma estándar de la función cuadrática*"



Gráfica 1.4.2. 2

En ningún momento se hace referencia explícita a la abscisa del punto de intersección de la gráfica de la función con el eje *x* como la raíz de la función cuadrática y, una vez más, el examen mide el recuerdo de algoritmos como completar cuadrados e identificar, a partir del registro algebraico o gráfico, las coordenadas del vértice de la parábola.

1.4.2.3 En relación con Matemáticas IV

En seis periodos de exámenes extraordinarios que se aplicaron se presentan preguntas muy similares a la siguiente: "Para la siguiente función $f(x)=4x^4-4x^3-6x^2+6x$, encuentre los ceros (raíces), dominio, rango y dibuje su gráfica".

Todos los reactivos son de tratamiento en el registro algebraico, es decir se observa una fuerte tendencia a usar este registro y se podría decir que el alumno se adiestra en un procedimiento –memoriza un algoritmo- que debe recordar el día del examen. El procedimiento a recordar es el algoritmo de la división sintética y el teorema del factor y del residuo, para encontrar las raíces del polinomio. No se presenta ningún reactivo para evaluar procesos inversos, como por ejemplo, el siguiente objetivo: *"A partir de las raíces reales de una ecuación polinomial construye una función polinomial y bosqueja la gráfica asociada a ella"*.

1.4.3 Análisis del contexto a partir de material bibliográfico empleado.

Se realizó un análisis de algunos materiales de Matemáticas que son producto del esfuerzo de profesores en servicio o bien son elaborados en forma conjunta y de manera institucional con el objetivo de abatir el rezago educativo que se presenta en el área de Matemáticas.

1.4.3.1 En relación con Matemáticas I

Se analizó la unidad dos: "variación directa y funciones lineales" del libro "Matemáticas I" plan 2003 (Hernández, et al. 2004), se observó que es un material que se elaboró atendiendo al programa de estudios por tanto se orienta totalmente al estudio de la función lineal expresada en la forma $y = mx + b$ y en consecuencia se enfocan al análisis del efecto, que sobre la gráfica de la función, tienen los parámetros m y b. Los autores no consideran la sugerencia de asociar de manera adecuada, la solución de una ecuación de la forma $mx + b = 0$, con la abscisa del punto en donde la gráfica de la función $y = mx + b$ corta al eje x, quizás porque no lo consideren un aprendizaje significativo o tal vez porque en el programa de estudio no se menciona ninguna estrategia de enseñanza para alcanzar el objetivo.

1.4.3.2 En relación con Matemáticas II

Se examinó la unidad 1 de Matemáticas II correspondiente al "Material didáctico para el subprograma de mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas" (Barrera, S. 2007). Se notó que se realiza un abordaje del tema basado en la resolución de problemas. En la parte que corresponde al estudio de las intersecciones con el eje x no se menciona en ningún momento el concepto raíz de la función cuadrática, en cambio cuando se habla del valor máximo o mínimo de la función sí se hace referencia al término vértice.

Posteriormente se analiza el eje de simetría de la parábola y los parámetros b y c en la expresión $f(x) = (x + c)^2 + b$ y del parámetro a en la expresión $f(x) = ax^2$.

Una vez más no aparece el concepto raíz de la función cuadrática, al igual que sucede en Matemáticas I, considero que en consecuencia el alumno no podrá establecer una relación entre los conceptos de raíces de funciones polinomiales de grado mayor que dos y las raíces de funciones lineales y cuadráticas, esto traerá como consecuencia que el alumno no pueda ampliar, mucho menos *profundizar,* el concepto como se menciona en los objetivos del programa de estudios.

1.4.3.3 En relación con Matemáticas IV

Al revisar la forma en que se desarrolla el tema de raíces de funciones polinomiales en el libro para cuarto semestre (Salcedo, et al. 2004) se observa una fuerte inclinación hacia el uso del algoritmo de la división sintética y el uso del teorema del factor y del residuo para hallar las raíces de las funciones polinomiales, dejando al margen el uso de la representación gráfica y tabular del concepto, en el mejor de los casos, el registro gráfico se usa simplemente como comprobación de las actividades realizadas en el registro algebraico.

1.5 CONCLUSIÓN

Podemos concluir el presente apartado considerando que el programa de estudio orienta la actividad académica y sirve de sustento para la elaboración tanto de material de apoyo, así como de exámenes extraordinarios, quedando la actividad del docente supeditada al enfoque presente en el programa.

Con base en la problemática detectada y en las recomendaciones sugeridas en el programa de estudio, el siguiente paso consiste en plantear referentes teóricos que permitan explicar, en primer lugar, las dificultades a las que se enfrenta el estudiante cuando trabaja con las representaciones de un concepto; en segundo lugar, que justifiquen una solución, y de este modo se pueda elaborar una propuesta de enseñanza que permita al estudiante lograr un aprendizaje significativo en relación con el concepto de raíz real de una función polinomial.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

2.1 REFERENTES TEÓRICOS

De acuerdo con diferentes investigaciones que se han realizado sobre el concepto de función y de conceptos relacionados, se sabe que éstos aun no están completamente definidos y que se prestan a diferentes interpretaciones, sin embargo existe una serie de esfuerzos encaminados a resolver la problemática de su enseñanza-aprendizaje, Cuevas, A. & Pluvinage, F. (2006) y Mejía, H. R. & Monzoy, J. A. (2002).

Resultados de otras investigaciones muestran una falta de significado en la apropiación del concepto de función (Cuevas, Moreno & Pluvinage 2005), esto se debe a que en la educación matemática se otorga un gran peso a la operatividad, soslayando la comprensión de los conceptos. Lo anterior se reflejó en algunos resultados obtenidos por los participantes en la experiencia de enseñanza, donde en términos generales se aprecia un aprendizaje memorístico.

Es importante recordar que en el caso de la matemática, y a diferencia de otras ciencias, no se tiene una percepción directa de los objetos matemáticos, ya que éstos se presentan al estudiante a través de diversas representaciones, observándose que al alumno se le hace difícil relacionar las propiedades de los conceptos que cada representación exhibe.

Las preguntas que surgen ante la problemática descrita son: ¿qué papel juegan las diversas representaciones de los conceptos matemáticos para el aprendizaje?, ¿existe alguna teoría de las representaciones de los conceptos matemáticos que pueda conducir a una propuesta de enseñanza?.

Para responder a las preguntas anteriores se desarrollará una experiencia de enseñanza sustentada en los planteamientos de Duval (1999) respecto a los registros de representación de un concepto matemático; este investigador explora las actividades cognitivas derivadas del uso de las representaciones; la teoría propuesta por Duval se fundamenta particularmente en el uso variado de los sistemas de representación de los conceptos matemáticos; la respuesta que él da con respecto al papel que juega una representación es que las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que son necesarias tanto para el desarrollo de la actividad matemática misma como para el ejercicio de actividades cognitivas que propician la aprehensión conceptual (Duval, 1999, p. 14).

De acuerdo con lo anterior, se tiene que el acceso a los objetos matemáticos no es posible si no se recurre a un registro semiótico de representación, sin embargo, de acuerdo con Duval (1999, p. 16), el uso de un solo registro semiótico de representación no es suficiente para movilizar el conocimiento matemático.

Se considera indispensable trabajar en actividades de aprendizaje que involucren el uso de más de un registro de representación de un concepto, de modo que el estudiante no confunda un concepto con una de sus representaciones, pues esto a la larga trae como consecuencia una carencia de comprensión ya que el alumno no estará capacitado para resolver problemas que involucren otra representación del concepto (Duval, 1999, p. 13) o que tengan problemas inclusive para trabajar en actividades que involucren una transformación del concepto en el mismo registro; considero que esto se reflejó en la preferencia que tuvieron los estudiantes para trabajar con la función cuadrática cuando se expresa en la forma $y=ax^2+bx+c$ y que tienen problemas para trabajar con la función cuadrática cuando se expresa en la forma $y=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$ o $y=a\left(x-m\right)^2$ (García, 2000, p.68).

Duval (1999, p.29) caracteriza los sistemas semióticos de representación del modo siguiente: "los sistemas semióticos…deben permitir cumplir las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación: en primer lugar, constituir una marca o un conjunto de marcas posibles que sean identificables como *una representación de alguna cosa* en un sistema determinado. Luego, *transformar* las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias al sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales. Por último, *convertir* las representaciones producidas en un sistema de representaciones en otro sistema, de manera tal que estas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado".

Duval (1999, p. 31) afirma que: "un *tratamiento* es una transformación que se efectúa en el interior de un mismo registro…. la *conversión* es, al contrario una transformación que hace pasar de un registro a otro; requiere pues su coordinación por parte del sujeto que la efectúa".

Según Duval, se debe trabajar con varios sistemas de representación en concordancia con las actividades cognitivas que estos propician: *identificación*, *tratamiento* y *conversión* del concepto.

Cuando se realizan actividades de conversión es importante considerar las posibles dificultades derivadas de la no congruencia entre las representaciones, o sea problemas al relacionar sus unidades semánticas; para esto primero se deben analizar los elementos relevantes del concepto matemático en un registro, y después se comparan con los elementos relevantes de otra representación del concepto.

Una vez realizado lo anterior se analiza la forma en como se relacionan los elementos relevantes del concepto en cada uno de los registros de representación. Por ejemplo, cuando se expresa el hecho de que una función es positiva en un punto, esto expresado en forma simbólica se escribe $f(x) > 0$ y en el registro gráfico se corresponde con el hecho de que la gráfica de la función esta ubicada en el primero o segundo cuadrante del plano cartesiano, es decir, arriba del eje x.

Por otra parte, se considera importante el empleo de los registros semióticos de representación, ya que las representaciones mentales, que el estudiante va construyendo de los objetos matemáticos, están ligadas a la interiorización de las representaciones externas.

Las transformaciones Matemáticas no pueden efectuarse independientemente de un sistema semiótico de representación. Esta función de transformación solo la pueden cumplir las representaciones semióticas y no las representaciones mentales.

El hecho de que existan varios registros semióticos de representación, implica la existencia de varias representaciones mentales en los estudiantes y la puesta en marcha de sus capacidades cognitivas. Esta interdependencia entre las representaciones internas y externas, la expresa Duval en su hipótesis principal: "no hay noesis[3] sin semiosis; es la semiosis la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la noesis" (Duval, 1999, p. 15).

El conocimiento no es posible sin recurrir a varios registros semióticos de representación, lo cual se logra a través de su *coordinación* por parte del sujeto; la coordinación presupone la capacidad del sujeto de elegir conscientemente ya sea el uso de un sistema de representación o de otro durante la resolución de un problema. La coordinación entre las representaciones que provienen de sistemas semióticos diferentes no es espontánea, requiere un aprendizaje específico; según Duval “Un trabajo de aprendizaje específico centrado en la diversidad de los sistemas de representación, en la utilización de sus posibilidades propias, en su comparación por la puesta en correspondencia y en sus “traducciones” mutuas, parece ser lo necesario para favorecer tal coordinación” (Duval, 1999, p. 17)

En general se cree que la coordinación entre registros es una consecuencia de la aprehensión conceptual (noesis), sin embargo, Duval propone que el logro de dicha coordinación es una condición esencial de la noesis.

[3] Noesis, aprehensión conceptual de un objeto; semiosis, la aprehensión o la producción de una representación semiótica.

Considerando lo anterior, la propuesta de enseñanza debe contemplar actividades que permitan al alumno:

- La transformación de una representación del concepto raíz real dentro de un mismo registro.
- Utilizar dos o más registros de representación del concepto raíz real de una función polinomial.
- Reconocer las unidades semánticas en un determinado registro semiótico de representación.
- Poner en correspondencia las unidades semánticas de un registro con las unidades semánticas del otro registro.

Por otra parte, se considera importante implementar la componente tecnológica ya que se logra una representación dinámica de los objetos matemáticos, a diferencia de la representación estática que se observa en la enseñanza tradicional; además, la diversificación de la representación de los conceptos matemáticos y el trabajo con tales representaciones favorece el aprendizaje de los mismos (Mejía y Monzoy, 2002). Por otra parte, Monzoy (2002, p. 23) afirma que: “el uso de la computadora para el estudio de conceptos matemáticos a partir de sus representaciones enriquece las actividades de identificación, tratamiento y conversión de dichas representaciones”.

2.2 CONCLUSIÓN

Se concluye el presente capítulo considerando que el marco teórico expuesto y lo expresado en el párrafo anterior, en relación a la componente tecnológica, permiten orientar la elaboración de un recurso didáctico, el software Raíces, que permitirá enriquecer las actividades cognitivas de los alumnos. En el capítulo siguiente, se describe la elaboración del software Raíces y de su complemento, las hojas de trabajo.

CAPÍTULO 3: DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE LA EXPERIENCIA DIDÁCTICA

3.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se describen los resultados del examen diagnóstico (Anexo A) que se aplicó a jóvenes estudiantes con la finalidad de detectar el estado de apropiación del concepto raíz real de una función polinomial. Los resultados que arrojó este examen permiten afirmar que el estudiante es capaz de resolver sólo problemas rutinarios en el registro de representación algebraico.

Para resolver la problemática detectada se diseñó un software, Raíces, que incorpora la representación múltiple del concepto raíz real de una función polinomial y que se presenta como un medio para que el estudiante pueda avanzar en la comprensión de dicho concepto por medio del trabajo con representaciones múltiples usando la computadora.

Se describen también las hojas de trabajo, complemento del software Raíces, donde se presentan actividades de coordinación del concepto raíz real de una función polinomial usando diferentes representaciones.

3.2 EXPLORACIÓN DIAGNÓSTICA

Para ubicar el conocimiento que los alumnos tienen del concepto raíz real de una función polinomial, se aplicó un examen de diagnóstico (Anexo A) a 27 estudiantes de sexto semestre, con un promedio de edad de 17 años, con la finalidad de investigar en qué medida el alumno se ha apropiado de los conceptos de raíz real en funciones polinomiales de primero y segundo grado al establecer actividades en los registros algebraico, gráfico y numérico. Los temas evaluados están presentes en el programa de estudios vigente (a partir del año 2003) en las asignaturas de Matemáticas I y II. En Matemáticas I en la unidad 2 (funciones lineales), unidad 3 (ecuaciones lineales) y unidad 5 (ecuaciones cuadráticas). En Matemáticas II en la unidad 1 (funciones cuadráticas).

A partir de los resultados de este examen se extrajeron las siguientes conclusiones:

1.- Se considera que los alumnos reconocen a una ecuación lineal en su forma algebraica, ya que el porcentaje de respuestas correctas para el siguiente reactivo (pregunta 1 del examen) fue del 96%.

Una ecuación lineal es:

A) $x^2 = 0$

B) $x^2 + 3 = 0$

C) $x^2 + 5x - 2 = 0$

D) $x^5 - 2 = 0$

E) $5x - 2 = 0$

2.- Tienen problemas para reconocer una ecuación cuadrática dada en la forma $(x+a)(x+b)=0$, ya que sólo la reconoce correctamente (inciso B) el 43% de los participantes al plantearles el siguiente reactivo (pregunta 2 del examen):

Es una ecuación cuadrática:

A) $x^3 = 0$

B) $(x-2)(x-3) = 0$

C) $x^4 + 5x - 2 = 0$

D) $5x - 2 = 0$

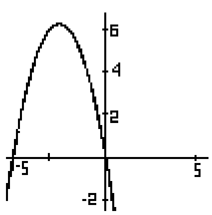
E) No aparece ninguna ecuación cuadrática.

La mitad de los participantes eligió, erróneamente, el inciso E, algunos de los participantes comentaron que dieron esta respuesta porqué “*para que sea una ecuación cuadrática debe tener como exponente un 2”*.

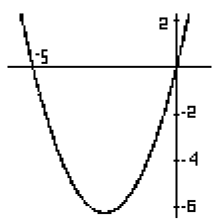
Después se les propuso otro reactivo (pregunta 3 del examen) acerca del reconocimiento de una ecuación cuadrática en forma simbólica, sin embargo, la ecuación $(x-2)(x-3)=0$ se expresó en la forma $x^2-5x+6=0$, con esta modificación, el porcentaje de participantes que contestaron correctamente fue del 93%. Esto induce a concluir que el reconocimiento de una ecuación cuadrática expresada en forma simbólica se ve afectado por la *forma como se expresa*, se nota que el aprendizaje del alumno queda sujeto a una forma particular de expresar un concepto en un registro de representación.

3.- El siguiente reactivo (pregunta 17 del examen) tiene como finalidad revelar si los encuestados relacionan los ceros de una función cuadrática con los puntos de intersección de su gráfica con el eje x.

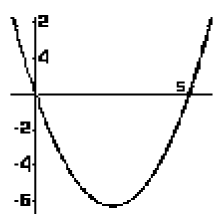
La gráfica correspondiente a $y=x(x+5)$ es:



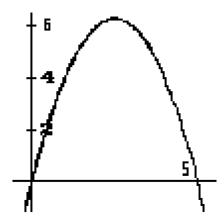
A)



B)



C)



D)

E) No aparece la gráfica

En este reactivo se presenta una expresión cuadrática factorizada, el 11% de los participantes contesta correctamente (inciso B), el 36% afirma de manera errónea que la respuesta corresponde a la gráfica del inciso D), es decir los participantes deducen que las raíces son 0 y 5 olvidando hacer el cambio de signo. Se considera que al no elegir la gráfica del inciso A) o B) como posible respuesta correcta, los participantes manifiestan no percatarse que la función se anula en $x=0$ y $x=-5$, ya que de lo contrario descartarían inmediatamente los incisos C) y D) como posibles respuestas correctas.

Con base en lo anterior se observa que el 89% de los estudiantes no toman como dato, para la resolución del presente problema, las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica de la función con el eje x, lo que hace suponer que tienen problemas para identificar las raíces de una función de segundo grado en el registro gráfico, y en consecuencia, tienen problemas para relacionar los factores de una función cuadrática con los puntos de intersección de su gráfica con el eje x.

4.- Con el siguiente reactivo (pregunta 20 del examen) se pretende averiguar si los participantes relacionan el concepto raíz de una función lineal con la intersección de su gráfica con el eje x.

La intersección de la gráfica de la función $y = x - 2$ con el eje x es:

A) 0

B) 2

C) -2

D) 1

E) No existe intersección con el eje x.

El 50% de los participantes responde correctamente este reactivo (inciso B), el 18% afirma, incorrectamente, que la respuesta corresponde al inciso C).

La mitad de los participantes no logra relacionar la raíz de una función lineal con la intersección de su gráfica con el eje x. Además, el 18% de los participantes relacionan al parámetro b, en la función $y = mx + b$, con la intersección de su gráfica con el eje x.

5.- El siguiente reactivo (pregunta 22 del examen) tiene como objetivo saber si los participantes reconocen la raíz de una función lineal en una tabla.

La siguiente tabla corresponde a valores de una función lineal.

La raíz es:

A) -1

B) -2

C) 0

D) 1

E) 2

x	y
-2	-3
0	-1
1	0
2	1

El 36% de los participantes responde correctamente (inciso D), el 32% afirma de manera errónea que la respuesta corresponde al inciso A), se concluye que los participantes no reconocen la raíz de una función lineal mostrada en el registro numérico y parece que tienen dificultades para discernir cual de las dos variables es la que se anula.

6.- Con el siguiente reactivo (pregunta 26 del examen) se pretende saber si el alumno reconoce la raíz de una función polinomial lineal a partir de su gráfica.

La raíz de la función lineal, cuya gráfica se muestra, es:

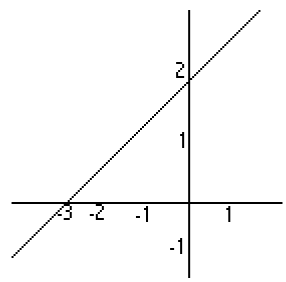
A) 2

B) -3

C) 0

D) 0.5

E) No tiene raíz.



El 50% de los participantes responde correctamente (inciso B), el 21% de los participantes no responde, un 14% afirma incorrectamente que la respuesta corresponde al inciso A) y el resto eligió erróneamente otros incisos.

A partir de los resultados de los dos reactivos anteriores (correspondientes a las preguntas 22 y 26 del examen) se infiere que la mayoría de los participantes no reconocen la raíz de una función lineal a partir del registro gráfico o tabular.

7.- Con el siguiente reactivo (pregunta 24 del examen) se pretende averiguar si los estudiantes encuestados reconocen una raíz de una función cuadrática expresada en forma algebraica.

La siguiente es una función de segundo grado $y = 2x^2 - 2$

Una de sus raíces es:

A) 2

B) 1

C) 0

D) -2

E) No tiene raíces

El 21% de los participantes responde correctamente (inciso B), el 32% afirma incorrectamente que la respuesta corresponde al inciso A). Con base en las respuestas dadas se deduce que la mayoría de los encuestados no reconoce una raíz de una función de segundo grado a partir de un grupo de valores. Esto muestra que no se han apropiado del concepto de raíz real de una función cuadrática.

8.- Con el siguiente reactivo (pregunta 25 del examen) se pretende explorar si los estudiantes reconocen una raíz de una función cuadrática a partir de una serie de valores tabulados.

La siguiente tabla corresponde a valores de una función cuadrática.
Una raíz es:

A) -2
B) 6
C) -1
D) 0
E) 2

x	y
-2	6
-1	0
0	-2
1	0
2	6

El 29% de los participantes responde correctamente (inciso C), el 29% afirma, incorrectamente, que la respuesta corresponde al inciso A).

Se deduce, a partir de las respuestas dadas a los reactivos 7 y 8 (correspondientes a la preguntas 24 y 25 del examen), que la mayoría de encuestados no reconocen una raíz de una función cuadrática expresada en forma algebraica o a partir de una serie de valores tabulados, esto refuerza la conjetura que la mayoría de los participantes no se han apropiado del concepto de raíz real de una función de segundo grado.

9.- Para detectar si los participantes reconocen la gráfica de una función lineal o cuadrática, se les presentaron cinco gráficas (pregunta 4 del examen) que corresponden a las funciones: $y = x^2$, $y = -x^2$, $y = -x$, $y = x^3$ y $y = -x^3$, el 93% logró identificar la gráfica que corresponde a una función lineal, por otra parte, en el reactivo propuesto, en el que se presentan las gráficas de las funciones: $y = \frac{1}{x}$, $y = x^3$, $y = -x^3$,

$y=-x^2$ y $y=-x$ (pregunta 5 del examen) el 86% logra identificar la gráfica que corresponde a la función cuadrática.

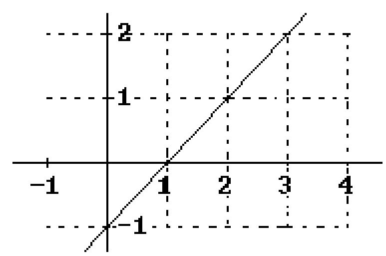
Posiblemente la diferencia en los resultados anteriores se deba a que la palabra lineal hace referencia a la forma de la gráfica, mientras que la palabra cuadrática, no la relacionan con la forma de la curva observada.

10.- Con los siguientes dos reactivos se pretende conocer si los estudiantes saben leer correctamente las coordenadas de puntos sobre la gráfica de una función:

i) Por medio del siguiente reactivo (pregunta 9 del examen), se detectó que tienen problemas con la lectura de coordenadas de puntos sobre la gráfica de una función, ya que sólo el 64% de encuestados lo respondió correctamente (inciso E).

En la siguiente gráfica, si $y=2$ el valor de x es:

A) 2
B) 1
C) 0
D) -1
E) No aparece el valor

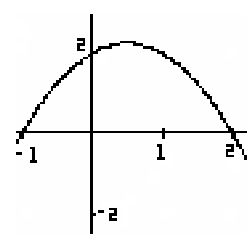


De los alumnos que responden incorrectamente, el 18% afirma que $x=1$ mientras que el 11% dicen que el valor es $x=-1$.

ii) También, con base en la pregunta siguiente (pregunta 10 del examen):

Dada la gráfica, una pareja de puntos que pertenece a ella es:

A) (-1, 0) y (1, 0)
B) (0, -1) y (2, 0)
C) (0, 2) y (0, -1)
D) (0, 2) y (-1, 0)
E) Ninguna pareja de puntos pertenece a la gráfica.



El 57% de los participantes responde correctamente (inciso D), sin embargo, el 21% afirma de manera incorrecta, que la respuesta corresponde al inciso C); al igual que otro 11% afirma que la respuesta corresponde al inciso B), el 11% restante eligió otros incisos.

Se concluye a partir de los resultados de los dos reactivos anteriores que aproximadamente el 40% de los participantes tienen problemas con la lectura de coordenadas de puntos sobre la gráfica de una función.

Se considera alto este porcentaje ya que los alumnos participantes estaban recursando la asignatura, además, todos ellos ya habían estudiado los cuatro primeros semestres del bachillerato.

11.- Los siguientes cuatro reactivos tienen como objetivo detectar si los estudiantes saben reconocer la solución de una ecuación lineal y de una cuadrática.

i) En primer lugar, se les propuso reconocer la solución de las ecuaciones $2x+3=7$ (pregunta 11 del examen) y $2x+5=3x+2$ (pregunta 12 del examen), los encuestados respondieron correctamente a estas cuestiones en un porcentaje del 96% y 86% respectivamente, con base en estos porcentajes, se considera que la mayoría de participantes sabe reconocer correctamente la solución de una ecuación lineal.

ii) Por otra parte, se considera que tienen problemas para reconocer las soluciones de una ecuación de segundo grado ya que cuando se les planteó el siguiente reactivo (pregunta 13 del examen):

Una solución de la ecuación $x^2-x-6=0$ es:

A) 2
B) -1
C) -6
D) 3
E) 0

El 64% de participantes contestó correctamente (inciso D). El 14% de los participantes contestó incorrectamente que la respuesta correspondía al inciso C) y un 22% eligió otros incisos.

iii) Se propuso otro reactivo (pregunta 15 del examen) con el mismo objetivo, esta vez se modificó la forma de la ecuación de segundo grado:

Una solución de la ecuación $(3x+4)^2 = 1$ es:

A) 3
B) 4
C) 2
D) -1
E) 1

El porcentaje de participantes que contestó correctamente (inciso D) fue 33%. Los resultados de las dos preguntas anteriores permiten afirmar que los participantes tienen problemas para reconocer la solución de una ecuación cuadrática, especialmente si esta se expresa diferente de la forma $x^2 + bx + c = 0$, esto queda reforzado por el tipo de respuestas dadas al siguiente reactivo.

iv).- Este reactivo corresponde a la pregunta 16 del examen:

Una solución de la ecuación $(x-1)(x+2) = 0$ es:

A) 2
B) -1
C) 1
D) 0
E) 3

El porcentaje de estudiantes que contestó correctamente (inciso C) fue 15%. El resto contestó incorrectamente otros incisos o no respondió.

Se considera, con base en los resultados de los problemas mencionados en los incisos ii), iii) y iv), correspondientes a las preguntas 13, 15 y 16 del examen, que los participantes no consideran el hecho que la posible solución de la ecuación propuesta está dada y que una sustitución de valores les podría conducir a la respuesta correcta.

A partir de lo anterior se infiere que la mayoría de encuestados no reconocen la solución de una ecuación de segundo grado, cuando esta se presenta en términos de factores lineales.

12.- Con el siguiente reactivo (pregunta 23 del examen) se pretende saber si el participante reconoce la expresión algebraica de una función lineal cuya raíz se da como dato.

$x=-1$, es la raíz de una función lineal cuya expresión algebraica es:

A) $y=x-1$

B) $y=-x+1$

C) $y=x+1$

D) $y=-1+x$

E) Ninguna de las funciones anteriores

Sólo el 22% de los participantes respondió correctamente (inciso C) este reactivo. Se deduce, a partir de las respuestas dadas a este reactivo que, en su mayoría, los participantes no reconocen la expresión algebraica de una función lineal cuya raíz se da como dato. Creo que es interesante contrastar este resultado con el obtenido en la pregunta 11-i) que corresponde al problema en el cual se solicita que el alumno reconozca la solución de una ecuación lineal dada, se observa que el participante está más familiarizado con el concepto solución de una ecuación lineal que con el concepto raíz de una función lineal.

13.- Con el siguiente reactivo (pregunta 21 del examen) se pretende averiguar si los participantes pueden relacionar el concepto raíz de una función cuadrática tanto en el registro algebraico como en el gráfico.

Las intersecciones de la gráfica de la función $y=(x+1)(x-2)$ con el eje x son:

A) x= 1 y x= 2

B) x= -1 y x= -2

C) x= -1 y x= 2

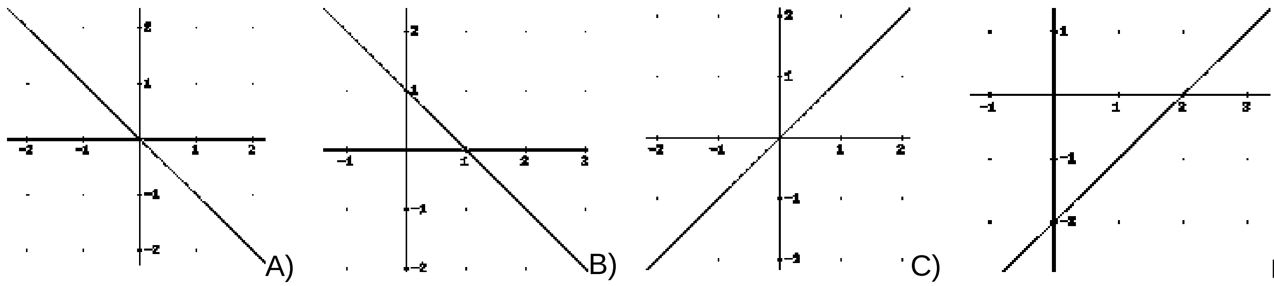
D) x= 1 y x= -2

E) La gráfica no se interseca con el eje x

El 61% de los participantes responde correctamente (inciso C), el 14% responde erróneamente que la respuesta corresponde al inciso D). Otro 25% contestó incorrectamente otros incisos. Se considera relativamente bajo el número de alumnos que pueden relacionar las representaciones algebraica y gráfica del concepto raíz real de una función cuadrática.

14.- Con el siguiente reactivo (pregunta 29 del examen) se intenta saber si el estudiante puede interpretar el signo de una función lineal en un registro gráfico.

Señala cuál de las siguientes gráficas tiene una ordenada positiva en el intervalo de 1 a 2



A) B) C) D)

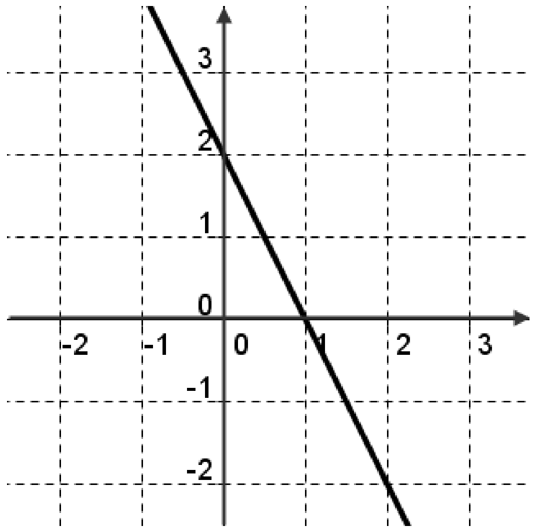
E) Ninguna gráfica cumple con la condición.

El 61% de los encuestados señala, de forma acertada, la gráfica correspondiente al inciso C); el 18% considera, erróneamente, que la respuesta corresponde al inciso B), mientras que el 21 % restante eligen otros incisos.

Con base en la respuesta anterior se concluye que, al igual que en la pregunta anterior, se considera relativamente bajo el porcentaje de participantes que interpretan correctamente el signo de una función en el registro gráfico.

15.- Por último, se propuso el siguiente problema (pregunta 30 del examen) de respuesta abierta.

A partir de la siguiente gráfica, que corresponde a una función lineal, responde



¿Cuánto vale f(0)? _______ ¿f(-0.5) es positivo o negativo?______

¿Cuánto vale f(1)?_______ ¿f(1.5) es positivo o negativo?_______

¿Para qué valor de x, f(x)=0?_____ ¿Para qué valor de x, f(x)=2? ____

¿Para qué valores de x, f(x)>0?____ ¿Para qué valores de x, f(x)<0? ___

¿Cuál es la raíz de la función? _____

El 62% de participantes no logra un solo acierto. A partir de las respuestas dadas al presente reactivo, se deduce que el alumno no extrae información de la representación gráfica de una función lineal y que no interpreta correctamente la notación $f(x)$ en el mismo registro.

3.3 ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LA EXPLORACIÓN DIAGNÓSTICA

A partir de los resultados de la exploración diagnóstica, se obtienen las siguientes conclusiones respecto a la mayoría de los estudiantes participantes:

1.- Reconocen una ecuación lineal, sin embargo, se les dificulta reconocer una ecuación cuadrática si ésta se plantea en forma diferente a la expresión general $ax^2+bx+c=0$.

2.- Reconocen la gráfica de una función lineal y de una función cuadrática.

3.- Saben reconocer la solución de una ecuación lineal, no obstante, tienen dificultad para reconocer la solución de una ecuación cuadrática; lo anterior permite afirmar que no se han apropiado del significado de la solución de una ecuación cuadrática.

4.- No interpretan correctamente la raíz de una función lineal o cuadrática en su representación geométrica.

5.- Presentan los siguientes problemas al extraer información de la representación gráfica de una función: lectura errónea de coordenadas de puntos sobre la gráfica e interpretación del signo de una función.

6.- No relacionan los ceros de una función lineal o cuadrática con los puntos de intersección de sus gráficas con el eje x. Es decir, no relacionan las representaciones algebraicas y gráficas del concepto raíz de una función polinomial lineal o cuadrática.

7.- No reconocen la raíz de una función lineal o cuadrática en una tabla, ni tampoco la expresión algebraica de una función lineal cuya raíz se da como dato.

8.- Tienen problemas con la interpretación del signo de una función lineal en su representación gráfica.

Con base en lo anterior, se considera que el alumno carece de un soporte conceptual que pueda sustentar la comprensión del tema raíces reales de funciones polinomiales. También, con base en estos resultados, se explica una de las causas del porqué el tema del método numérico para hallar raíces reales de funciones polinomiales de grado superior a dos (tema presente en el programa de estudios anterior) era considerado un tema de difícil enseñanza.

En la presente investigación se pretende hacer una propuesta que contribuya a la solución de la problemática detectada; en dicha propuesta se tomará en cuenta la recomendación del programa ajustado respecto a emplear como herramienta de apoyo la hoja electrónica de cálculo Excel para construir las graficas de las funciones [Programa de Estudio de Matemáticas, semestres I a IV, junio 2003, Pág. 75], para que el estudiante se pueda centrar en los conceptos, no únicamente en la manipulación algebraica o el simple cálculo numérico.

Además, se pretende incidir de forma indirecta en los siguientes objetivos del actual programa de estudios:

1. Comprender la notación funcional $f(x)$.
2. Relacionar las raíces de una función y las soluciones de su respectiva ecuación.
3. Relacionar las raíces de una función y los puntos de intersección de su gráfica con el eje de las abscisas.
4. Reconocer puntos donde $f(x)$ es positiva o negativa.
5. Bosquejar la gráfica de una función polinomial.

Otras recomendaciones del Programa de Estudio de Matemáticas (PEM) que se tomarán en cuenta son las que se refieren a:

a) Introducir el estudio de contenidos mediante el planteamiento de situaciones o problemas que no contemplen de inicio fuertes dificultades operatorias, de modo que la atención pueda centrarse en el concepto, el procedimiento o las características y propiedades que se van a estudiar (PEM, junio 2003, Pág. 6).

b) Propiciar sistemáticamente, el tránsito tanto entre distintas formas de representación matemática, como entre éstas y la expresión verbal (PEM, junio 2003, Pág. 7).

c) Enfatizar las conexiones entre diversos conceptos, procedimientos, métodos y ramas de la matemática (PEM, junio 2003, Pág. 7).

d) Fomentar el trabajo en equipos para la exploración de características, relaciones y propiedades tanto de conceptos como de procedimientos; la discusión razonada; la comunicación oral y escrita de las observaciones o resultados encontrados (PEM, junio 2003, Pág. 7).

Se pasa a explicar, en el siguiente apartado, el diseño y la elaboración del software Raíces.

3.4 DISEÑO DEL SOFTWARE RAÍCES.

Como se expuso en el apartado anterior, la mayoría de estudiantes no se han apropiado del concepto raíz real de una función polinomial. Se observa, a partir de los resultados del examen diagnóstico, que su nivel de comprensión del concepto queda sujeto, frecuentemente, al uso de formas particulares del registro de representación algebraico. Cuando se les planteó resolver problemas en donde intervenían otras representaciones del concepto, la mayoría de participantes fueron incapaces de encontrar la respuesta correcta.

Lo anterior se explica, de acuerdo con la teoría de Duval, de la cual algunos elementos pertinentes se expusieron en el capítulo II, porque la enseñanza del concepto raíz real de una función polinomial queda restringida a actividades de tratamiento en formas particulares del registro de representación algebraico, es decir, no existe conversión y mucho menos coordinación entre diferentes representaciones del concepto.

En esta sección se describe el diseño y la elaboración del software Raíces, *un recurso didáctico, desarrollado usando VBA (Visual Basic for Applications) en el entorno de Microsoft Excel*[4]*, que incorpora* la representación múltiple del concepto de raíz real de una función polinomial, que posibilita apoyar las actividades cognitivas de identificación, tratamiento y conversión del concepto mencionado.

Además se explica el diseño de las hojas de trabajo que contienen actividades que se pretende que el alumno realice apoyándose en el software Raíces. Se considera que las actividades serán un apoyo para que el estudiante pueda avanzar en la apropiación del concepto de raíz real de una función polinomial.

El software Raíces se diseñó considerando los registros de representación de un concepto matemático ya que, de acuerdo con el marco teórico expuesto, el empleo de varios registros de representación de un concepto es necesario para su aprensión conceptual; en el software se incorporan los registros: gráfico, tabular y, en menor medida, el algebraico.

[4] Se usó la versión Microsoft Excel 2003.

Las unidades significativas que se consideran para el diseño son las siguientes:

UNIDAD SIGNIFICATIVA	REGISTRO ALGEBRAICO	REGISTRO GRÁFICO	REGISTRO NUMÉRICO
La función es positiva	$P(x)>0$	Gráfica arriba del eje x	Valores en la columna o fila correspondiente a $P(x)$, **positivos**.
La función es negativa	$P(x)<0$	Gráfica abajo del eje x	Valores en la columna o fila correspondiente a $P(x)$, **negativos**.
La función se anula	$P(x)=0$	Gráfica sobre el eje x	Valores en la columna o fila correspondiente a $P(x)$, **nulos.**

Considero que la principal unidad significativa es el cambio de signo de la función, en el registro algebraico no es evidente, es decir, encuentro que esta característica de la función está encapsulada en este registro, por esta razón, pienso que éste registro es el menos indicado para iniciar el estudio del concepto raíz real de una función polinomial.

En el registro gráfico se puede observar si la gráfica de la función atraviesa, no atraviesa o toca al eje x en un determinado intervalo del dominio de la función. Considero que este registro es el más apropiado en una etapa de apropiación del concepto, para determinar si la función polinomial tiene o no raíz real, ya que exhibe si la gráfica de la función polinomial posee un cero en cierto intervalo.

En el registro tabular la unidad significativa se destaca por un cambio de signo en el valor de la función, lo cual implica la existencia de por lo menos una raíz real, sin embargo, cuando no se halla tal cambio de signo, con este procedimiento, nada se puede afirmar sobre la existencia de raíces reales.

El trabajo, con las unidades significativas antes mencionadas, se incorpora en el software Raíces a partir de las siguientes consideraciones.

El software presenta en general dos tipos de actividades

1.- La primera, que se puede considerar como una actividad inversa, consiste en que dadas las gráficas de las componentes lineales de una función polinomial, se solicita la gráfica y la ecuación del polinomio producto a través del método que se conoce como *composición de ordenadas*, Foerster, P. (2003, p. 189); este método consiste en que para cada valor de x, se leen los valores de las ordenadas a partir de las dos gráficas mostradas y se multiplican, para finalmente dibujar el producto como una tercera ordenada usando el mismo valor de la coordenada x. Esta es una actividad tanto de tratamiento en el registro gráfico como de conversión al registro algebraico.

Este enfoque permitirá al estudiante explorar la representación gráfica de una función lineal y su relación con su representación algebraica y numérica, permitiéndole profundizar en el análisis del papel que juegan los factores lineales en las gráficas de sus funciones polinomiales correspondientes, Moore-Russo, D. & Golzy, J. (2005).

La actividad anterior se realiza con la finalidad de dotar de significado al concepto de raíz real de una función polinomial; también se considera que como resultado del trabajo con este tipo de ejercicios, el estudiante pueda comprender afirmaciones como la siguiente: “todo polinomio puede factorizarse en términos de sus raíces”.

2.- Posteriormente se trabaja otra actividad que podría considerarse directa. En estas actividades se proporcionará la expresión algebraica de un polinomio y se solicita encontrar sus raíces reales por medio de un método numérico de aproximaciones sucesivas de tal manera que el alumno, una vez que ha avanzado en la apropiación del concepto de raíz real de una función polinomial, disponga de un método para encontrar las raíces reales de un polinomio dado, en este método se emplean los conceptos aprendidos en el primer tipo de actividades.

3.5 ELABORACIÓN DEL SOFTWARE RAÍCES

Se eligió la hoja de cálculo Microsoft Excel para el desarrollo del software Raíces ya que:

a) El programa de estudios vigente sugiere su uso para apoyar las clases de matemáticas en el Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH).

b) Se considera que el programa Microsoft Excel lo poseen prácticamente todos los estudiantes que tienen computadora, a diferencia de otro tipo de software como Derive, Sketchpad o Calc Visual que también tienen la capacidad de mostrar un concepto usando múltiples representaciones.

c) Es posible la automatización de actividades desarrolladas en Excel usando macros, esto es, una serie de comandos guardados con un nombre que Excel puede ejecutar.

d) Es posible mediante la programación –utilizando el lenguaje de automatización VBA- diseñar aplicaciones personalizadas usando el entorno Excel, en este sentido programas como Derive no permiten este nivel de caracterización.

e) Se pueden expandir las funciones de Excel ya que, por ejemplo, es posible la incorporación de la tecnología del Microsoft Agent, una extensión y mejora de la interfaz de una aplicación de Microsoft Office que incorpora a personajes animados.

f) Es posible acceder a otras aplicaciones desde el entorno de Excel, por ejemplo a la calculadora del sistema o bien complementar con actividades en Internet.

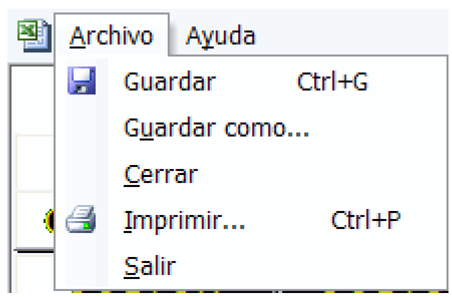
g) Permite de forma natural trabajar con tablas y gráficas.

Pasamos ahora a mostrar unas capturas de pantalla del software Raíces.

La primera ventana mostrada al iniciar el software es la siguiente (Gráfica 3.5 1):

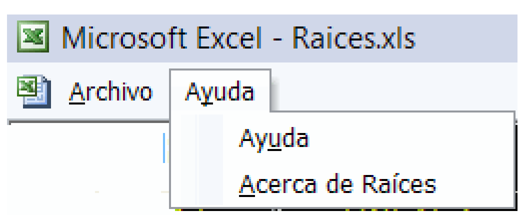
Gráfica 3.5 1

Como se puede observar (Gráfica 3.5 2), se muestra un menú personalizado, con dos opciones: Archivo y Ayuda. El menú Archivo contiene los comandos básicos en toda aplicación: Guardar, Guardar como…, Cerrar, Imprimir y Salir.



Gráfica 3.5 2

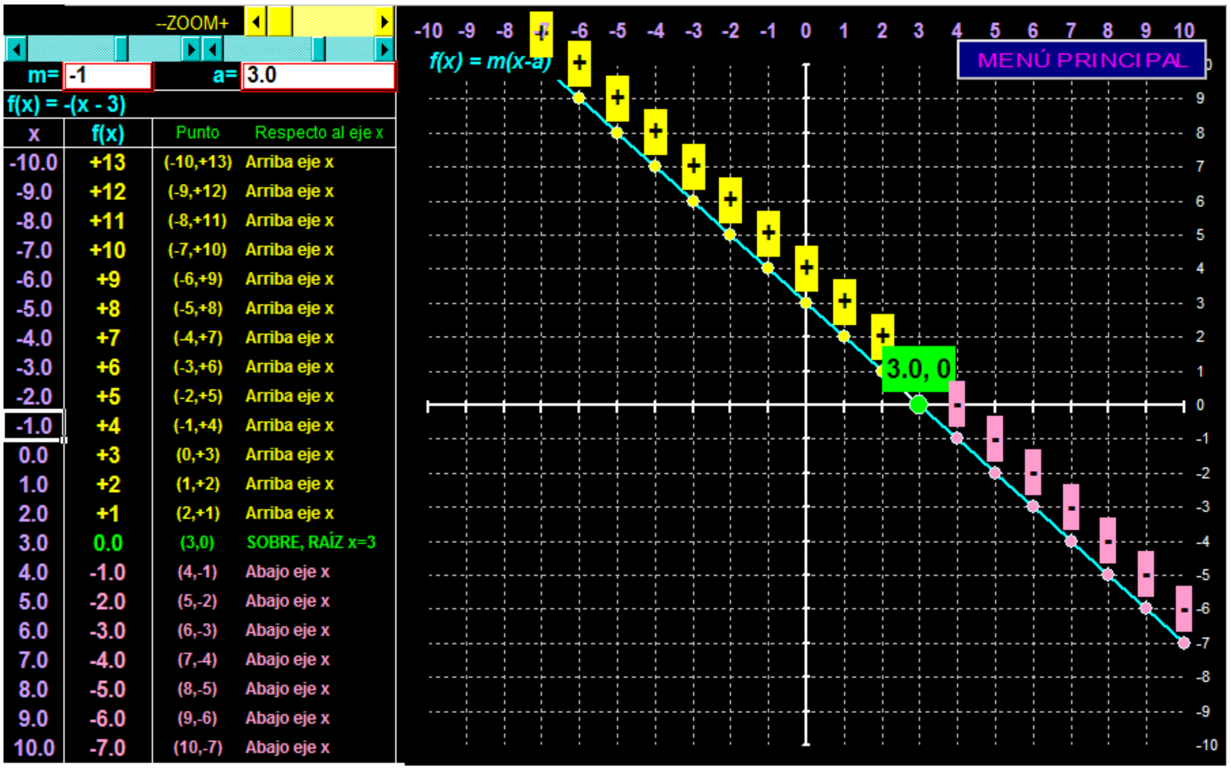
La ayuda para cada una de las actividades presentes en el software se invoca desde el menú correspondiente (Gráfica 3.5 3).



Gráfica 3.5 3

Se dispone de una serie de botones desde los que se accede a diversas actividades, comentamos brevemente algunas de ellas:

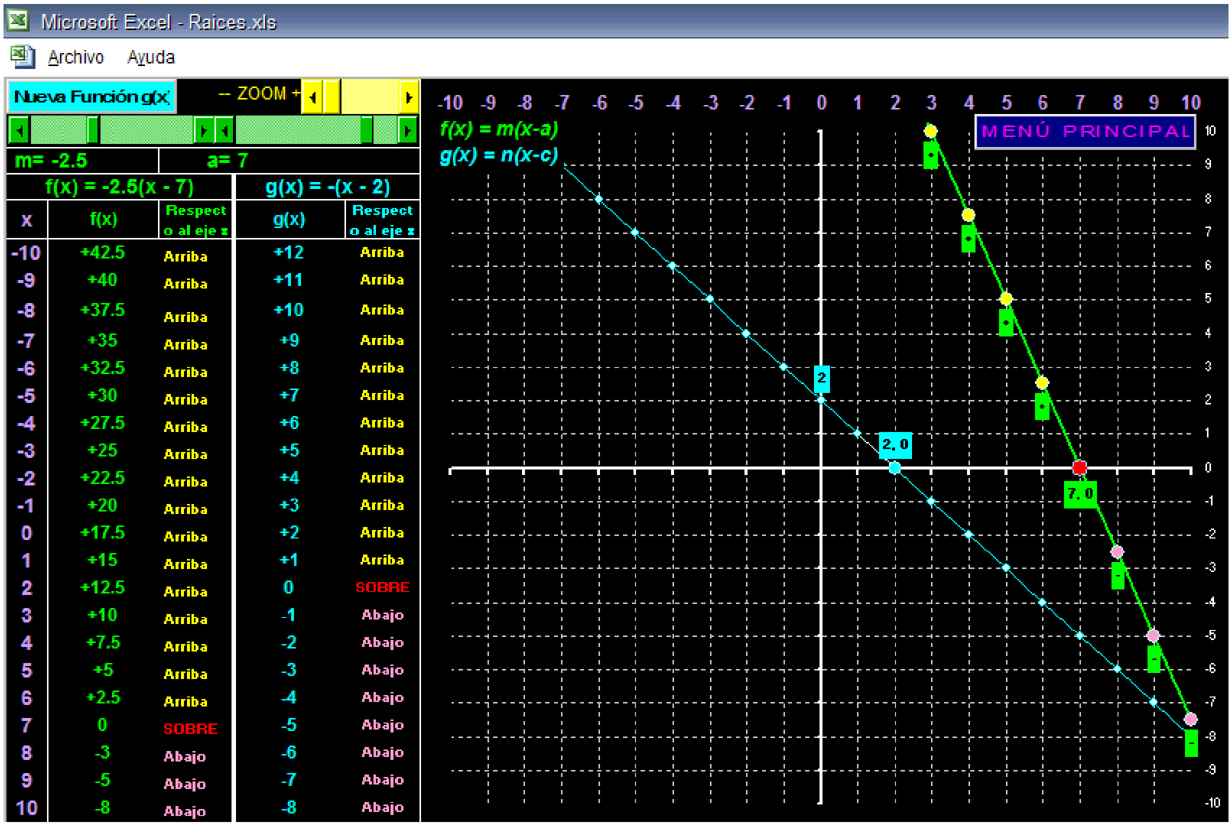
En la actividad “Lineal”, se trabaja con la variación de los parámetros m (pendiente) y a (raíz) en la función $f(x) = m(x-a)$, de tal manera que el alumno note el efecto que estos tienen sobre la gráfica de la función (Gráfica 3.5 4).



x	f(x)	Punto	Respecto al eje x
-10.0	+13	(-10,+13)	Arriba eje x
-9.0	+12	(-9,+12)	Arriba eje x
-8.0	+11	(-8,+11)	Arriba eje x
-7.0	+10	(-7,+10)	Arriba eje x
-6.0	+9	(-6,+9)	Arriba eje x
-5.0	+8	(-5,+8)	Arriba eje x
-4.0	+7	(-4,+7)	Arriba eje x
-3.0	+6	(-3,+6)	Arriba eje x
-2.0	+5	(-2,+5)	Arriba eje x
-1.0	+4	(-1,+4)	Arriba eje x
0.0	+3	(0,+3)	Arriba eje x
1.0	+2	(1,+2)	Arriba eje x
2.0	+1	(2,+1)	Arriba eje x
3.0	0.0	(3,0)	SOBRE, RAÍZ x=3
4.0	-1.0	(4,-1)	Abajo eje x
5.0	-2.0	(5,-2)	Abajo eje x
6.0	-3.0	(6,-3)	Abajo eje x
7.0	-4.0	(7,-4)	Abajo eje x
8.0	-5.0	(8,-5)	Abajo eje x
9.0	-6.0	(9,-6)	Abajo eje x
10.0	-7.0	(10,-7)	Abajo eje x

Gráfica 3.5 4

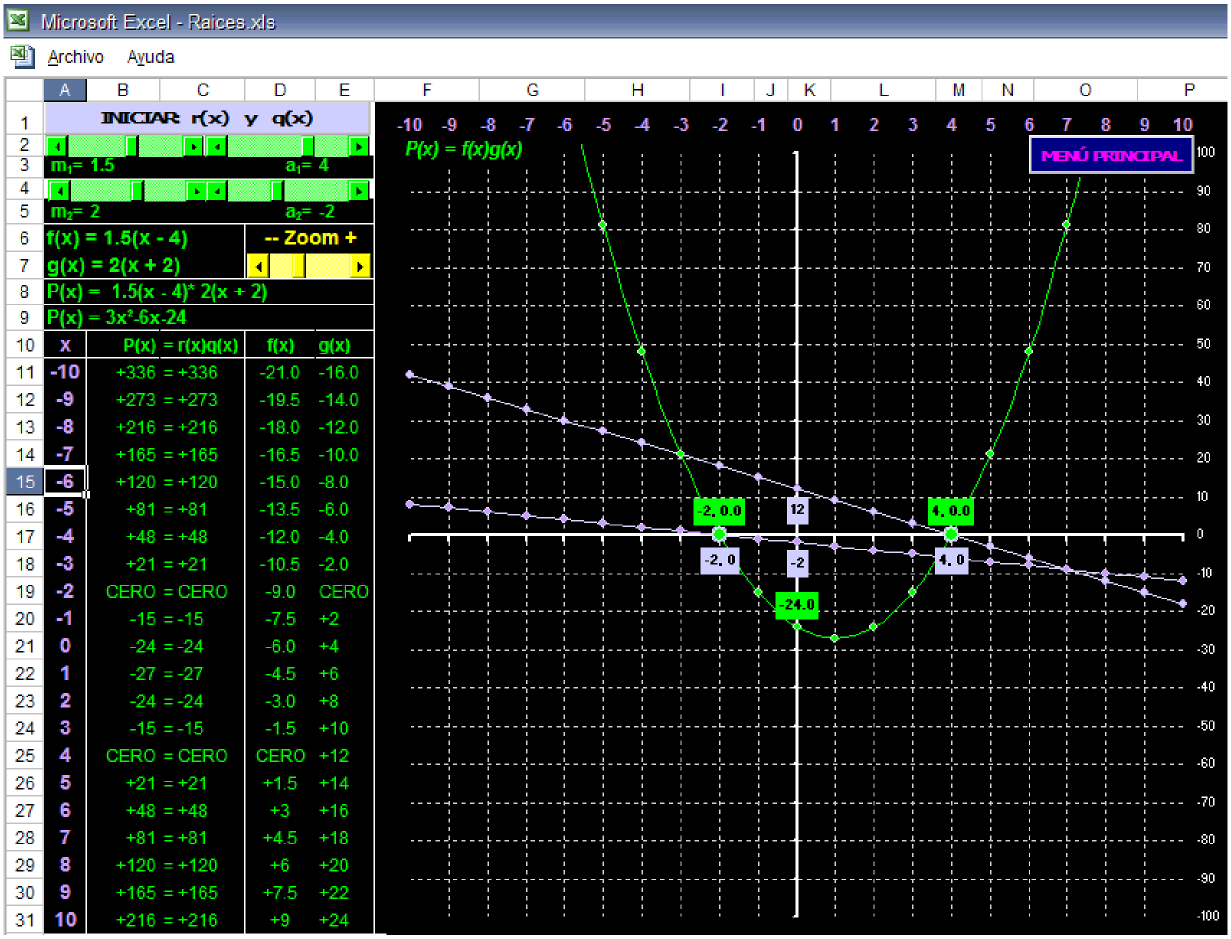
En la actividad “Lineal1”, el sistema propone la gráfica, la expresión algebraica y la tabla correspondiente a una función lineal *g(x)*, el alumno tiene que manipular la pendiente y la raíz de otra función *f(x)* de tal modo que coincida con la propuesta por el sistema (Gráfica 3.5 5).



Gráfica 3.5 5

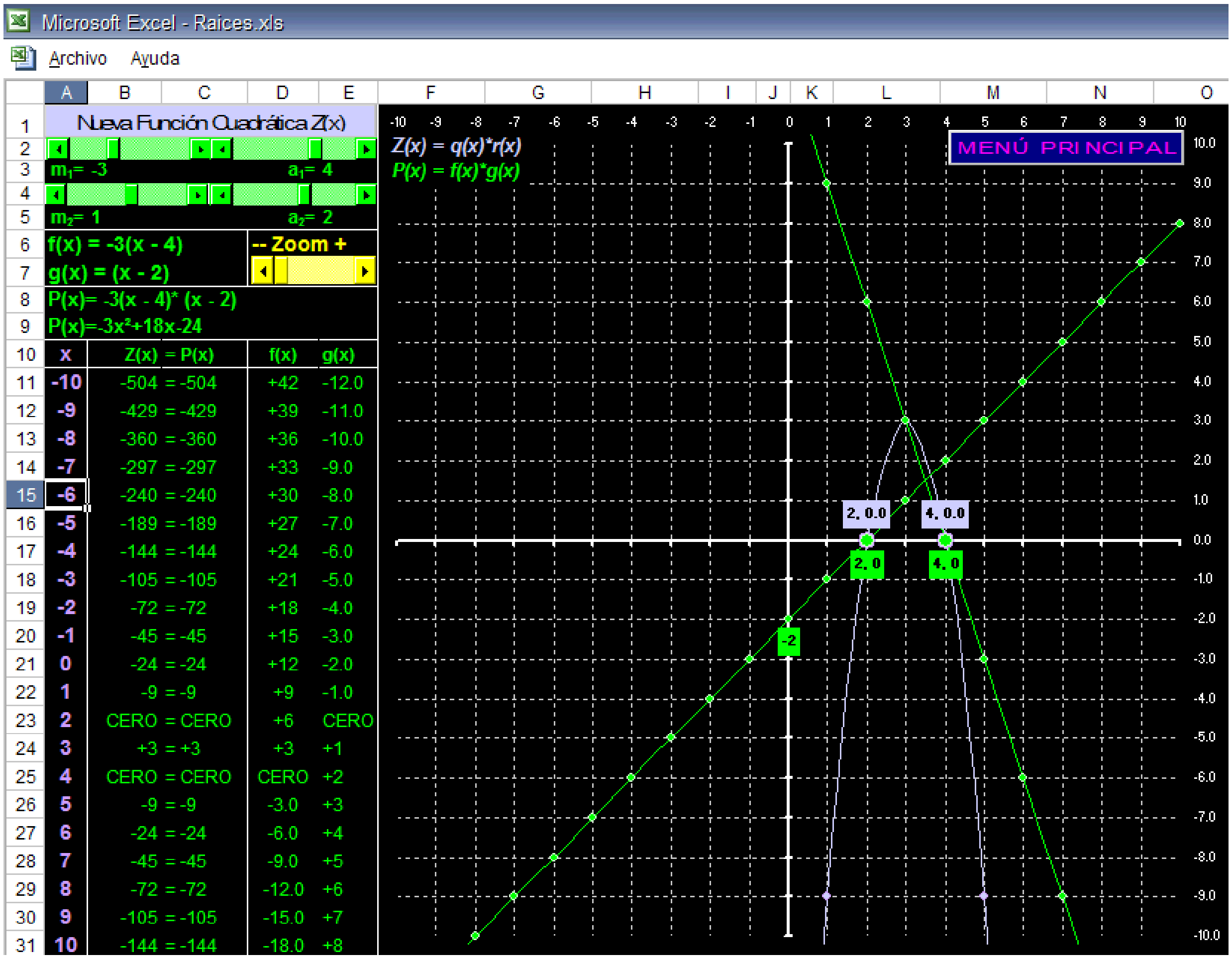
En la actividad “Cuadrática”, se muestra la gráfica de una función de segundo grado *P(x)* como producto de dos funciones lineales *f(x)* y *g(x)* con la finalidad de que el alumno observe que todos los puntos de una función de segundo grado (en particular las raíces) se determinan por la multiplicación, usando el método de la *composición de ordenadas*, de los puntos correspondientes de las funciones lineales. Este acercamiento permite reinterpretar la conexión entre las funciones lineales y las funciones polinomiales, Weinhold, M. (2008).

En la actividad “Cuadrática1”, el sistema propone las gráficas de dos funciones lineales *r(x)* y *q(x)*, el alumno tiene que hallar la gráfica de una función polinomial de segundo grado *P(x)* (manipulando las pendientes y raíces de sus funciones lineales componentes *f(x)* y *g(x)*) de tal manera que sea producto de las dos funciones lineales propuestas por el sistema (Gráfica 3.5 6).



Gráfica 3.5 6

En la actividad “Cuadrática2”, el alumno tiene que encontrar dos funciones lineales *f(x)* y *g(x)* que multiplicadas den como producto la gráfica de una función de segundo grado *Z(x)* propuesta por el sistema (Gráfica 3.5 7).



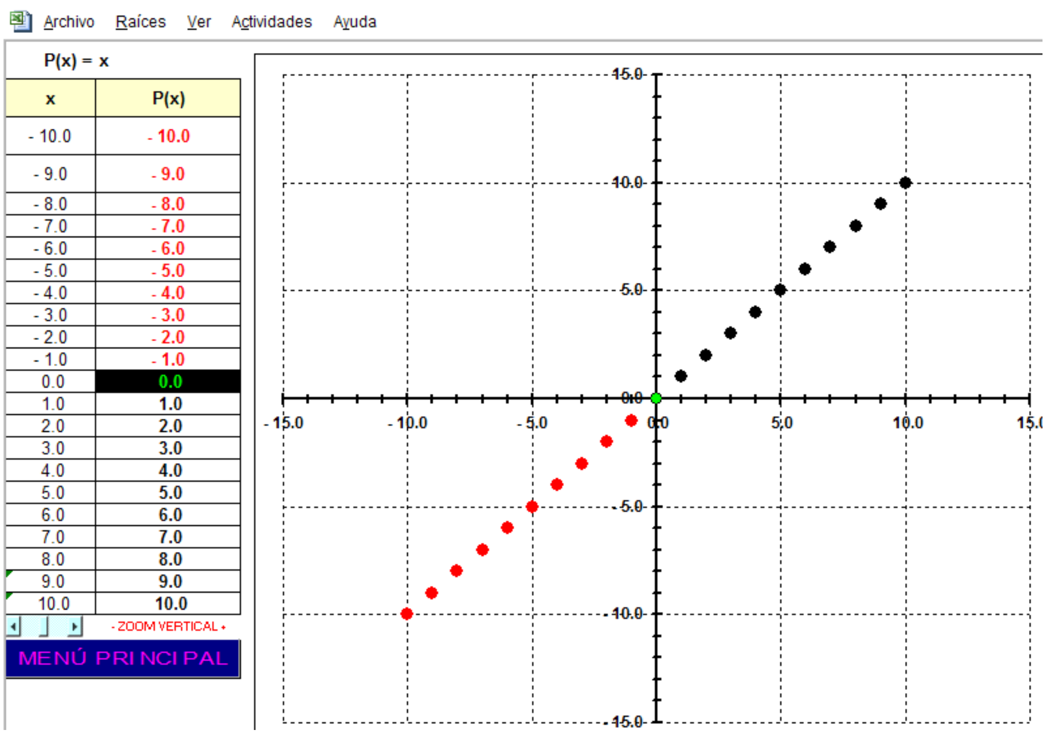
Gráfica 3.5 7

En la actividad "Cúbica", el alumno manipula los parámetros pendiente y raíz de tres funciones lineales *f(x)*, *g(x)* y *h(x)* y el sistema muestra la gráfica del producto de las tres funciones lineales, así como la expresión polinomial correspondiente al producto *P(x)* y una tabulación asociada.

En la actividad "Cubica1", el sistema propone las gráficas de tres funciones lineales *k(x)*, *g(x)* y *h(x)*, el alumno tiene que hallar la gráfica de una función polinomial de tercer grado *P(x)* (manipulando las pendientes y raíces de sus funciones lineales componentes *q(x)*, *r(x)*, *s(x)*) de tal manera que sea producto de las tres funciones lineales propuestas por el sistema.

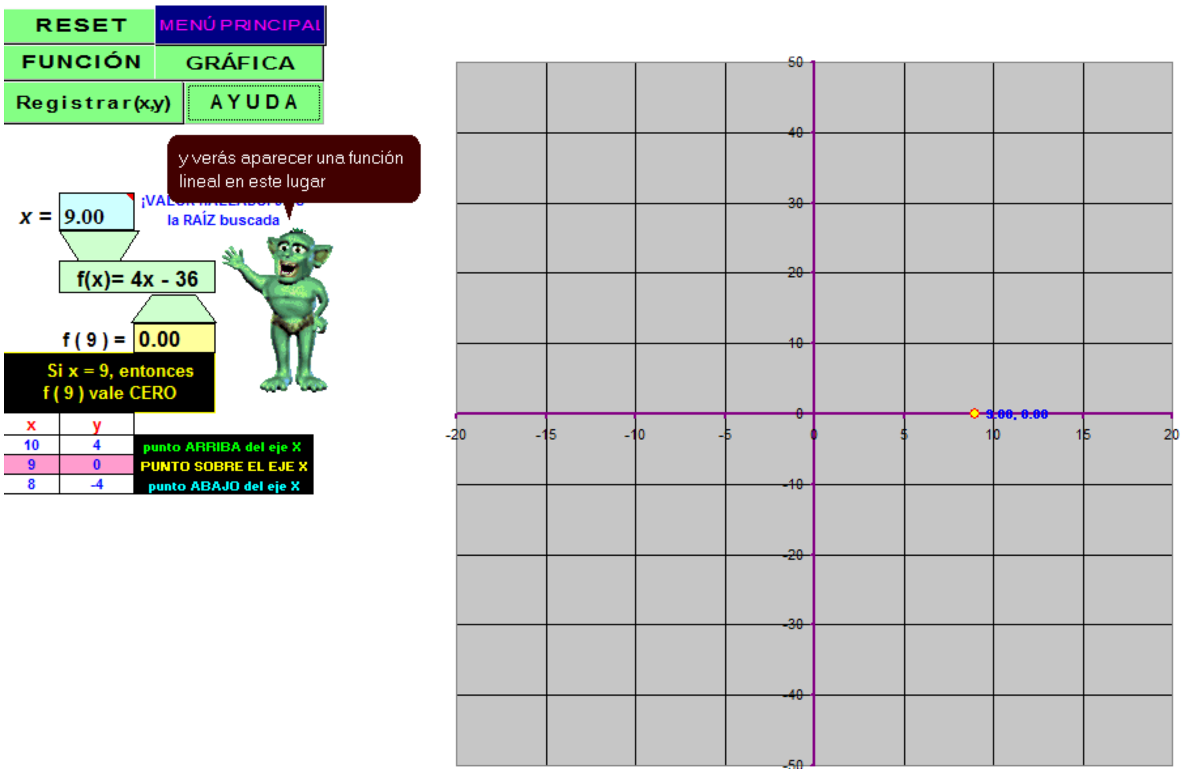
En la actividad "Cubica2", el alumno tiene que encontrar tres funciones lineales *f(x)*, *g(x)* y *h(x)* que multiplicadas den como producto la gráfica de una función polinomial de tercer grado *Z(x)* propuesta por el sistema.

La actividad “Raíz” permite encontrar la raíz de una función polinomial por medio de un método numérico de aproximación, se dispone de un menú (Raíces) a través del cual es posible introducir la expresión algebraica de un polinomio (en formato Excel), se propone un valor inicial y un incremento con la finalidad de indagar si en ese intervalo se encuentra una raíz del polinomio propuesto, se obtiene la tabulación y la gráfica asociada al intervalo. Es posible ir acotando el intervalo, hasta encontrar la raíz del polinomio o una aproximación a ella (Gráfica 3.5 8).



Gráfica 3.5 8

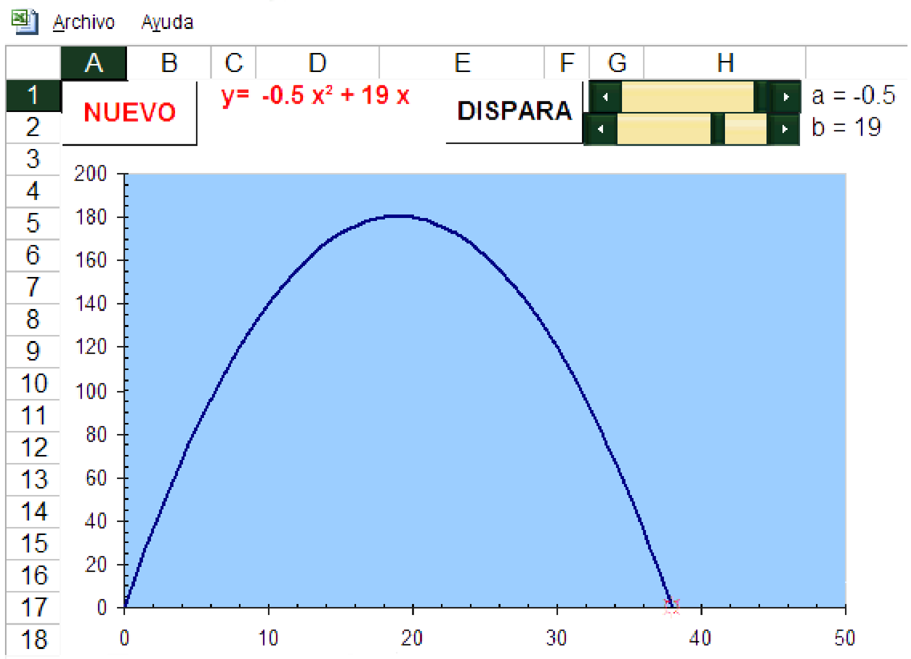
En la actividad “Adivina”, el sistema propone al azar una función polinomial de primer grado, el alumno sugiere un número como posible raíz de la función lineal, el sistema indica si el número propuesto es la raíz de la función lineal o si la función evaluada en ese número es positiva o negativa (Gráfica 3.5 9).



Gráfica 3.5 9

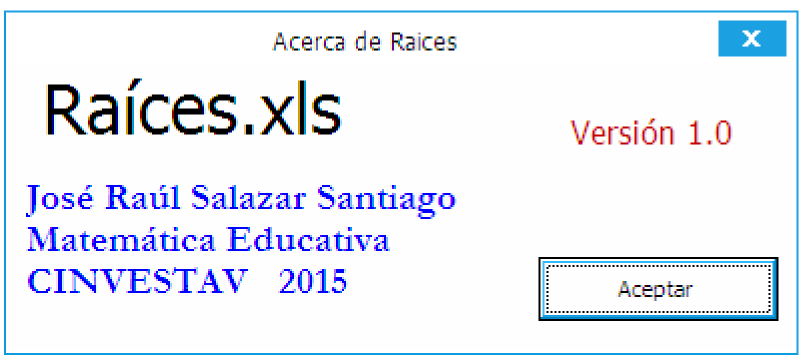
Es posible Registrar las coordenadas de los puntos y el sistema indica si el punto está ubicado arriba, abajo o sobre el eje *x*, se dispone también de la Gráfica del punto en el plano cartesiano. Un personaje animado sirve como ayuda para esta actividad.

En la actividad "Tiro", el alumno debe atinarle a un objetivo propuesto por el sistema en el eje x, para esto debe hallar el valor correcto de los parámetros a y b en la función $y = ax^2 + bx$ (ver Gráfica 3.5 10).



Gráfica 3.5 10

Finalmente, los créditos:



3.6 HOJAS DE TRABAJO

Las actividades que a continuación se describen pretenden obtener elementos que permitan establecer que la conexión entre funciones polinomiales de diferente grado, se puede sustentar a partir de la gráfica de los factores lineales de estas funciones y del trabajo numérico asociado con las coordenadas de ciertos puntos. Cuando se hace énfasis en los factores lineales de cada polinomio, la interpretación de las intersecciones con el eje x de la gráfica del polinomio, como las raíces del polinomio $f(x)$, llega a ser más evidente.

Las hojas de trabajo orientan el uso de Raíces, sin embargo, es posible usar como apoyo cualquier otro software que permita ilustrar el uso de los factores lineales en la construcción de las funciones cuadráticas así como ver las representaciones algebraica y gráfica de las funciones.

Se sugiere que los alumnos trabajen en equipos de dos personas con el fin de lograr la discusión de los resultados obtenidos.

Parte 1: De los componentes lineales a la función polinomial (ACTIVIDAD 1 y ACTIVIDAD 2 (Anexo C)).

Los estudiantes empiezan identificando una función lineal y arreglando la ecuación en la forma pendiente abscisa al origen $y = m(x-a)$, donde a es la intersección con el eje x. Esta representación algebraica de la función lineal sirve como conector con una función polinomial de segundo grado o mayor, además induce a los estudiantes a enfocarse en la raíz del polinomio: la intersección con el eje x de la gráfica.

Posteriormente escogen otra función en la forma $y = m(x-a)$ y la grafican en el mismo plano cartesiano. Los estudiantes conjeturan como se verá gráficamente una nueva función, formada con el producto de las dos expresiones lineales. Después de hacer su predicción, ellos grafican la función cuadrática resultante y comparan esa función con su predicción. Después de hacer la predicción se puede usar el software Raíces para comprobar la función formada tomando el producto de los factores lineales.

Se enfatiza el hecho que la función cuadrática tiene la misma intersección con el eje x que las funciones lineales componentes, y que la intersección con el eje y de la función cuadrática es el producto de las intersecciones con el eje y de las funciones lineales componentes. De hecho, la coordenada y de la función cuadrática para un valor dado de x es siempre el producto de las coordenadas y de los factores lineales componentes para ese valor de x, sin embargo esta relación es más fácil de observar cuando $x=0$.

Se considera importante recalcar que lo expresado en el párrafo anterior ilumina afirmaciones que se realizan en clase, por ejemplo: “las posibles raíces enteras de la función $f(x)=x^2+bx+c$ son los factores del término independiente c”, esto se puede explicar en términos algebraicos, sin embargo, si se recurre al registro gráfico, de acuerdo con el marco teórico, se considera que se puede lograr la comprensión del tema.

Es importante que el estudiante se percate que el signo de la coordenada y para cualquier punto en la gráfica de la función cuadrática puede ser determinado observando el signo de las coordenadas y de los factores lineales para ese intervalo del dominio. Por ejemplo, si las gráficas de las funciones lineales en un determinado intervalo, determinado por las intersecciones de las funciones lineales con el eje x, están arriba del eje x, entonces la gráfica de la función cuadrática estará arriba del eje x, ya que $(+)*(+)=(+)$. Si la gráfica de una función lineal en un intervalo del eje x esta arriba del eje x y la gráfica de la otra función lineal, en ese mismo intervalo, está abajo del eje x, entonces la gráfica de la función cuadrática estará abajo del eje x, ya que, $(+)*(-)=(-)$. Este resultado se corresponde con el signo que los estudiantes observan en la tabla que usan como ayuda para graficar una función cuadrática.

Parte 2: De la función polinomial a sus componentes lineales (ACTIVIDAD 3)

La segunda parte de esta actividad requiere que los estudiantes trabajen en la dirección opuesta, esto es, a partir de la gráfica de una función cuadrática obtener sus componentes lineales. Es común en el salón de clase, solicitar se factoricen expresiones cuadráticas en factores lineales. La contraparte gráfica de este proceso, consiste en descomponer la gráfica de una función cuadrática en sus componentes lineales, de este modo *se enfatiza la factorización visualmente*. Es conveniente advertir a los estudiantes que una gráfica que parece corresponder a una función de segundo grado no siempre lo es, podría ser la gráfica de una función polinomial de grado 4 o de una función polinomial de grado par aún mayor.

Es conveniente que los estudiantes adviertan que no sólo es importante considerar la intersección con el eje x de la parábola, sino que es importante también su intersección con el eje y. Además, se recomienda que ratifiquen que el signo y el valor de la coordenada y de la parábola antes y después de las intersecciones con el eje x se correspondan con el signo y el valor del producto de las coordenadas y de las componentes lineales en esta sección.

Es importante mencionar a los estudiantes que observen que los componentes lineales no son únicos. Es decir, que dada una función de segundo grado, esta puede ser producto de una infinidad de funciones lineales.

En la última parte de esta sección se les propone a los estudiantes un ejercicio donde se muestra la gráfica de una función cuadrática que no toca al eje x, y se les solicita hallar sus componentes lineales. Considero que esta actividad puede contribuir a esclarecer el hecho de que algunas funciones de segundo grado no tienen raíces reales, esto es, que algunas ecuaciones cuadráticas no se pueden factorizar en expresiones lineales sobre los números reales.

Parte 3: Polinomios de grado tres (ACTIVIDAD 4)

Finalmente se propone la realización de las mismas actividades ya mencionadas (Actividades 1, 2 y 3), pero con polinomios de grado tres. Estas actividades, además, permiten que los estudiantes perciban que la gráfica de una función polinomial de grado cinco o grado impar mayor, en ocasiones es parecida a la gráfica de una función polinomial de grado tres.

Parte 4: Hallando las raíces de funciones polinomiales (ACTIVIDAD 5)

Con esta actividad se pretende que el estudiante, una vez que trabajó con las actividades 1 a 4 y que se considera que ha avanzado en la comprensión del concepto raíz real de una función polinomial, disponga de un método numérico que le permita hallar las raíces, enteras o no, de funciones polinomiales.

Se considera que este enfoque para el estudio de la raíz real de una función polinomial le permite al estudiante apropiarse del concepto ya que estas actividades, hacen evidente la conexión entre las raíces de una función polinomial y los factores del polinomio, al establecer actividades de conversión entre los valores numéricos de las funciones componentes, las gráficas y sus expresiones algebraicas. Las actividades establecen el proceso inverso entre los factores del polinomio y la expresión algebraica desarrollada. El software desarrollado para este propósito, Raíces, se considera de gran ayuda al propiciar la relación entre la expresión algebraica y la gráfica.

Actividades cognitivas que el software Raíces propicia:

ACTIVIDAD 1

PREGUNTA	ACTIVIDAD
2	La pregunta número dos se refiere a identificación de unidades significativas y tratamiento en el registro algebraico.
3	Tratamiento en el registro gráfico e identificación de unidades significativas.
4	Identificación de unidades significativas a partir de la conversión de registros.
5	Conversión del registro gráfico al tabular.
6	Conversión del registro numérico al gráfico.
8	Tratamiento algebraico y conversión del registro algebraico al tabular.
9	Conversión del registro tabular al gráfico.
11	Tratamiento en el registro gráfico.
12-14	Tratamiento en el registro algebraico.
14	Conversión del registro algebraico al gráfico.
15	Tratamiento en el registro algebraico.

ACTIVIDAD 2

PREGUNTA	ACTIVIDAD
1-2	Tratamiento en el registro gráfico.
3	Conversión del registro gráfico al algebraico.
5	Conversión del registro gráfico al algebraico[5].
6	Tratamiento en el registro gráfico.
7	Tratamiento en el registro gráfico e identificación.

ACTIVIDAD 3

PREGUNTA	ACTIVIDAD
1	Tratamiento en el registro gráfico.
2	Conversión del registro gráfico al algebraico
3	Conversión del registro gráfico al numérico.
4	Tratamiento en el registro numérico.
5	Conversión del registro tabular al algebraico.
6	Tratamiento en el registro algebraico.
7	Tratamiento en el registro gráfico.
8	Conversión del registro gráfico al algebraico.
9	Tratamiento en el registro algebraico.

[5] Es la importancia de trabajar con el software: puede propiciar "acercamientos" al registro algebraico sin hacer mucho énfasis en la manipulación simbólica, ya que se puede ir trabajando con el concepto en el registro gráfico y finalmente expresar el resultado en el registro algebraico.

3.7 CONCLUSIÓN

Una sugerencia para evaluar el aprendizaje de los conceptos trabajados en las actividades anteriores es que los estudiantes puedan resumir la actividad escribiendo acerca de lo que hayan aprendido y discutido acerca de su entendimiento de las relaciones entre raíces, factores lineales, funciones polinomiales, y las gráficas de estas funciones.

Un examen podría consistir en proponer a los estudiantes que tracen las gráficas de dos funciones lineales y después esbocen la gráfica de la función cuadrática que represente su producto. Se debe asegurar que los estudiantes expliquen su razonamiento.

De manera inversa, se les puede proponer la gráfica de una función cuadrática, y solicitarles que esbocen y encuentren las ecuaciones de dos posibles funciones lineales componentes de ésa función de segundo grado.

CAPÍTULO 4: EXPERIMENTACIÓN

4.1 METODOLOGÍA

En este apartado se presenta la metodología empleada con la finalidad de validar el software *Raíces* como un componente en la apropiación del concepto de raíz real de una función polinomial; con este propósito se realizó lo que podemos llamar una experiencia de enseñanza (Monzoy, 2002, p. 72). Se consideró una experiencia de enseñanza dado que se desarrolló con un pequeño número de alumnos y con el propósito de indagar si, utilizando el software *Raíces* apoyado en hojas de trabajo, el estudiante puede avanzar en la apropiación del concepto de raíz real de una función polinomial.

Es importante mencionar que se desarrolló un estudio piloto que permitió adaptar el contenido del examen diagnóstico para el estudio del tema raíz real de una función polinomial, y ayudó al diseño del examen de contraste, que fue el examen empleado para comparar el grado de conocimientos que sobre el tema de raíz real de una función polinomial tenían los participantes antes y después de la experiencia de enseñanza.

Dicho estudio también permitió ajustar el contenido de las actividades presentes en las hojas de trabajo de acuerdo a las características del software. Se realizaron algunos estudios piloto que no llegaron a terminarse ya que, al no estar impartiendo la materia, se carecía de alumnos a los cuales se les pudiera involucrar en la investigación y se les estimulara por medio de una calificación, en consecuencia abandonaban el trabajo por no estar motivados y no sentirse comprometidos con el proyecto.

Para la realización de la experiencia de enseñanza se contó con un grupo de estudiantes que cursaban la asignatura de Matemáticas IV en un programa remedial para apoyar a alumnos que no han acreditado algunas materias en el curso normal; en ésta investigación participaron 27 alumnos cuyas edades variaban entre 16 y 18 años, para muchos de ellos este era su cuarto año en el colegio, es decir que, por lo menos en teoría, ya habían estudiado el tema en un curso normal.

Se llevaron a cabo cuatro sesiones de dos horas cada una, durante la primera sesión se enseñó el manejo del software, dejando las posteriores sesiones para el desarrollo de las actividades presentes en las hojas de trabajo.

4.2 DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

Como se comentó en el capítulo 1, el problema a resolver se detectó al realizar un examen de conocimientos previos al estudio de un método numérico para resolver ecuaciones de grado superior a dos, tema presente en el plan de estudios 1996-2003 del CCH y que era evadido en parte por su complejidad numérica, detecté que el concepto de raíz real de funciones polinomiales de primero y segundo grado no era comprendido. Éste examen derivó en un examen diagnóstico (Anexo A) del tema raíz real de una función polinomial, con este examen se pretendió investigar si los participantes estaban familiarizados con el concepto raíz de una función polinomial de primero y segundo grado en los registros de representación: algebraico, gráfico y numérico. Los resultados de este examen fueron comentados en el apartado *exploración diagnóstica* del capítulo 3 del presente trabajo.

Lo anterior constituye un marco de referencia en el cual se desarrolló la experimentación cuyas etapas expongo a continuación:

1) Aplicación del Examen de Contraste (Anexo B). En esta etapa (Pre-examen) se aplicó el Examen de Contraste donde se realizan preguntas –y ésta es una diferencia con el examen de diagnóstico- que requieren de parte del alumno realizar actividades de *conversión* entre diferentes registros de representación del concepto y, de ser posible, que el estudiante realice la *coordinación* del concepto de raíz real de una función polinomial.

2) Etapa de adiestramiento en el manejo del software *Raíces. S*e instalaron algunos archivos necesarios para el correcto funcionamiento de la aplicación Raíces, se copió éste archivo a cada equipo de cómputo en el laboratorio de Matemáticas de mi centro de trabajo. Posteriormente, en una sesión de dos horas, se explicó el uso del software, se mostraron algunas actividades presentes en él y mediante la resolución de algunos ejemplos se mostró su operación. Cabe mencionar que el software, en la versión 1.0, no es suficientemente robusto y es necesaria una explicación sobre su uso.

3) Etapa de trabajo con el software Raíces. En esta etapa los participantes trabajaron con el software Raíces y las hojas de trabajo. Se emplearon 3 sesiones de dos horas para trabajar con esta actividad.

4) Etapa de aplicación del Examen de Contraste (post-examen). Se aplicó nuevamente el Examen de Contraste a los participantes. Durante esta etapa se les dejó en libertad de elegir responder el examen apoyándose en el software o no.

Finalmente se analizó la justificación que daban a sus respuestas.

4.3 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DEL EXAMEN DE CONTRASTE:

El examen de contraste (Anexo B) consta de 25 preguntas y se aplicó a 27 alumnos de sexto semestre que participaban en el Programa de Apoyo al Egreso (PAE) en la asignatura de Matemáticas IV.

En la siguiente etapa, se procedió a trabajar con el software *Raíces* apoyándose en las actividades propuestas en las hojas de trabajo y finalmente se volvió a aplicar el mismo examen de contraste para detectar si hubo mejoras en cuanto al número de respuestas correctas así como para analizar los argumentos que empleaban para la resolución de los mismos.

1. **Examen de contraste:** En la siguiente tabla se muestran las calificaciones que obtuvieron los estudiantes tanto la primera como la segunda vez que realizaron el examen de contraste, así como el avance personal relativo que lograron.

Estudiante	Primera Calificación	Segunda Calificación	Avance personal relativo
1-ATN	3.2	4.8	50%
2-CMR	9.2	10	8.7%
3-ECM	4	3.6	-10%
4-FHL	4	6.4	60%
5-MAA	7.6	7.6	0%
6-MCN	2.4	6	150%
7-MLCR	6.4	9.6	50%
8-MMG	4.4	7.6	72.7%
9-MVA	5.6	6.8	21.4%
10-NBD	2	9.2	360%
11-NBL	2.4	4.8	100%
12-NFG	5.2	7.6	46.2%
13-NMS	4	8	100%
14-OVC	6	7.6	26.7%
15-OCM	8.4	7.6	-9.5%
16-OGD	4.4	9.6	118.2%
17-PMN	8.4	8	-4.8%
18-PHJ	2.8	7.2	157.1%
19-PTJ	5.6	9.6	71.4%
20-PAF	3.2	6.4	100%
21-PSG	2.8	7.2	157.1%
22-PGJ	3.2	8	150%
23-PNA	4.4	7.6	72.7%
24-RSA	3.6	6	66.7%
25-RCL	4	2.4	-40%
26-SIA	4	8.8	120%
27-VRG	3.6	6.8	88.9%

Durante la primera aplicación del examen de contraste se obtuvieron los siguientes resultados: De los 27 participantes en este examen el 78% obtuvo una calificación menor que 6 y el 22% obtuvo una calificación mayor que o igual a 6. El promedio grupal fue de 4.6 y la desviación promedio de 1.54

Durante la segunda experiencia con el examen de contraste se obtuvieron los siguientes resultados: De los 27 participantes en este examen el 15% obtuvo una calificación menor que 6 y el 85% obtuvo una calificación mayor que o igual a 6. El promedio grupal fue de 7.2 y la desviación promedio de 1.35

Se comentarán las respuestas dadas a algunos problemas que se considera implican, para su resolución, una coordinación de representaciones del concepto raíz real de una función polinomial:

1. Analicemos la pregunta 24 del examen de contraste: La gráfica de una función polinomial de primer grado pasa por los puntos P(1,3) y Q(-3,-1). La raíz de la función polinomial es:

a) $x = -3$ b) $x = -2$ c) $x = 0$ d) $x = -1$

La primera vez que los participantes resuelven este ejercicio, 10 de ellos (el 37%) lo resuelven correctamente (inciso b). De los que responden erróneamente, 8 alumnos (el 30%) afirman que la respuesta correcta corresponde al inciso c).

Los argumentos de los participantes que responden erróneamente son:

- El estudiante ATN comentó: “porque la raíz toca al eje x”.

- Para el estudiante PSG la razón es: “la raíz siempre toca al eje x y deduzco que es en cero”.

- Finalmente el estudiante PGJ reflexionó: “porque la gráfica muestra que es partida en cero (dibujó la gráfica de una recta que pasa por el origen)”.

Notamos que expresan sus comentarios usando términos como eje x y cero, lo que a mi juicio, indica un aprendizaje memorístico.

Los argumentos de los participantes que responden correctamente son:

- Para el estudiante OGD la razón es: “porque al graficar los puntos anteriores es donde se corta al eje x”.

- El estudiante PNA escribió: “es aquí en este punto donde corta, es decir aquí es la raíz (dibujó una recta que *pasa por los puntos dados y atraviesa al eje* x *en* $x=-2$*)”.*

La segunda vez que se aplicó el examen, 20 alumnos (el 74%) resolvieron correctamente el reactivo.

Los argumentos de los participantes que responden erróneamente son:

- Para el estudiante ATN: “Porque todas las raíces se igualan a cero”.

- Para el estudiante PSG: “Porque toda raíz tiene que ser cero”.

Notamos que persisten para estos estudiantes algunas concepciones erróneas sobre el concepto de raíz real de una función polinomial de primero o segundo grado.

El razonamiento de los participantes que responden correctamente es:

- El estudiante OGD comentó simplemente lo siguiente: “porque al graficar los puntos indicados se intersecta al eje de las x en $x=-2$”, durante el primer intento este participante respondió correctamente dando un argumento similar.

- El procedimiento que utilizó el estudiante CMR es encontrar la ecuación de la función lineal usando la forma $y-y_1=m(x-x_1)$, después despejó la variable y y dedujo que la raíz es $x=-2$ (considero que en este caso el participante demuestra saber lo que se pide, es decir sabe el significado del concepto raíz de la función), en el primer intento este participante respondió erróneamente (eligió el inciso c) y no realizó ningún procedimiento, considero que porque para él no significaba nada el concepto raíz.

- El procedimiento que usó el estudiante MLCR es trazar el segmento de recta que une los puntos dados y señaló el punto que corresponde a $x = -2$. En el primer intento este participante eligió erróneamente el inciso c) y no escribió procedimiento alguno.

- El estudiante OCM comentó: "La recta corta el eje x en -2 según el software", en esta respuesta el participante no se apoya en ningún procedimiento algebraico para sustentar su respuesta, sin embargo, se basa en el software Raíces y responde correctamente, considero que al dar esta respuesta el encuestado avanzó en la comprensión del concepto de raíz real.

- De manera similar, el estudiante PMN afirmó: "Grafiqué y la recta corta al eje x en -2", durante el primer intento este participante respondió erróneamente (inciso A) y no presentó ningún argumento.

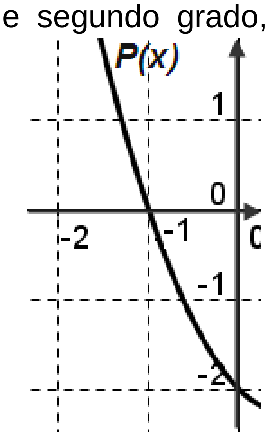
- El estudiante PHJ afirmó: "Me apoyé en el programa Raíces", durante el primer intento el participante respondió incorrectamente (inciso c) este reactivo.

- Mientras que el estudiante PTJC comentó que: "Al graficar la función, cruza en $x = -2$". Durante el primer intento respondió correctamente la pregunta dando un argumento similar.

- El participante PGJ: Dibujó el segmento de recta que une los dos puntos dados y señaló que "parte a x en -2". Durante el primer intento respondió incorrectamente la pregunta señalando a $x = 0$ como raíz.

2.- Pasemos ahora al análisis de algunas respuestas dadas al problema 25: En la siguiente gráfica, que corresponde a una función polinomial de segundo grado, se muestra una raíz.

La otra raíz es:
a) 4
b) 2
c) -4
d) 3



En el primer intento, la contestaron 23 alumnos correctamente (inciso b), la segunda ocasión 24. Considero que este no es un buen reactivo ya que la ordenada al origen es -2 y esto puede influir para que consideren que la otra raíz es 2, pienso que las opciones posibles debieron ser, por ejemplo: 1, 1.5, 2, 2.5 y que la gráfica no debe cruzar por el punto $(0,-2)$.

- La mayoría de participantes no escribe razón alguna, el estudiante CMRA escribe el siguiente procedimiento, tanto la primera como la segunda vez que realiza el examen:

$$\begin{aligned}
p(0) &= -2 \\
(x+1)(x+?) &= -2 \\
(0+1)(0+?) &= -2 \\
1(?) &= -2 \\
? &= \frac{-2}{1} \\
? &= -2 \\
p(x) &= (x+1)(x-2)
\end{aligned}$$

- En el primer intento el estudiante MMG responde correctamente y argumenta: "si se continúa la gráfica aproximadamente es donde se corta", sin embargo, la segunda ocasión que resuelve el examen no responde el reactivo, y argumenta: "No puedo sacar la otra raíz, puesto que no me muestra la ecuación, ni la gráfica completa, tampoco los factores", el participante considera que para encontrar los ceros de la función, tiene que tener la expresión algebraica de la función, o la "gráfica completa" o los factores de la función polinomial.

- Durante el primer intento el estudiante OGD responde erróneamente el reactivo al elegir la opción d) y argumenta: "porque subiendo la gráfica corresponde en el 3"; la segunda ocasión responde correctamente y argumenta: "porque utilicé el software Raíces, le indiqué una raíz que es -1 y desplacé la otra hasta que pasara en $x=0$ y $y=-2$", para responder esta pregunta, el participante usó el software *Raíces* (la actividad cuadrática) fijó una raíz y empezó a mover la otra raíz de tal forma que la parábola pasara por el punto (0,-2), es decir manipulando la gráfica como un objeto logró dar la respuesta correcta.

- La primera vez, el estudiante PHJ, no responde el reactivo, la segunda responde correctamente y sólo menciona: “me apoyé en el software” pero no da más detalles.

- Durante el primer intento, la participante PTJC responde erróneamente el reactivo, al elegir el inciso d) y argumenta: “me imaginé la gráfica pero no estoy seguro”, la segunda ocasión dice: “Apoyado en el software Raíces, la gráfica completa saca la segunda raíz en $x = 2$”.

- El estudiante PNA responde correctamente la primera ocasión, diciendo: “es este punto (refiriéndose al inciso b) ya que es ahí donde corta de nuevo”, la segunda ocasión no responde el reactivo ya que argumenta: “no se puede sacar la raíz ya que no se muestra toda la gráfica completa”.

Considero que la primera vez que los alumnos respondieron correctamente este reactivo lo hicieron apoyándose en su intuición, suponían que la gráfica debería cortar nuevamente al eje x en $x = 2$. Durante la segunda oportunidad emplean argumentos más sólidos y algunos, que respondieron correctamente la primera vez, dudan de su intuición.

3.- Pasemos ahora al análisis de algunas respuestas dadas al problema 23:

La gráfica mostrada corresponde a una función polinomial de tercer grado.

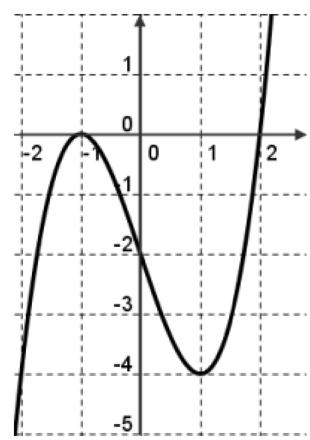
¿Cuánto vale P(3)?

a) 200

b) 16

c) 972

d) -8



La primera vez que los participantes resuelven este ejercicio, 18 de ellos (el 67%) lo resuelven correctamente (inciso b). La segunda vez lo resuelven correctamente 22 de ellos (el 82%).

- Durante el primer intento, el estudiante ATNE responde correctamente el reactivo (inciso b) sin embargo no da ningún argumento, la segunda ocasión resuelve el problema correctamente y argumenta lo siguiente: "*y además comprobé con el software, al hacer la multiplicación de* $f(x) \bullet g(x) = p(x)$", se refiere a la actividad *cúbica* presente en el software *Raíces*, que permite variar los parámetros que corresponden a las pendientes y raíces de las funciones lineales componentes de una función polinomial de tercer grado y que presenta una tabla donde se muestran los valores de esas tres funciones lineales componentes y de la función polinomial cúbica producto.

- El participante CMRA responde correctamente las dos ocasiones. Escribe un procedimiento algebraico: $P(x) = (x+1)^2(x-2)$ (*reconoce las raíces múltiples*), después continúa:

$$P(3) = (3+1)^2(3-2)$$
$$P(3) = (16)(1)$$
$$P(3) = 16$$

Durante el segundo intento comenta: "*sí usé el software, porque me sirvió para comprobar mis respuestas*".

- El estudiante MMG durante el primer intento comenta: "*No entiendo la pregunta y por esa razón no puedo saber la respuesta*". La segunda ocasión responde correctamente y razona: "*sacamos las raíces para sacar las funciones lineales y sustituimos a 3 en* x *y su multiplicación es* $p(3)$" y continúa:

$$(x+1)^2(x-2)$$
$$(3+1)^2(3-2)$$
$$(4)^2(1)$$
$$16 \bullet 1 = 16$$
$$f(x)\cdot g(x)\cdot h(x) = p(x)$$
$$f(3)\cdot g(3)\cdot h(3) = p(3)$$

- El estudiante PNA no responde la primera vez, la segunda ocasión da un razonamiento muy similar al dado por el estudiante MMG.

- El participante OVCA responde correctamente la primera ocasión, pero su “argumento” es el siguiente:

$$R(3) = 0$$
$$x = -3$$
$$P(x) = Q(x) + S(x) + R(x)$$
$$\text{Si } x = 1 \text{ y } y = 4$$
$$x = 3 \ y = 16$$

Parece, por lo que escribe, que quizá está recordando algo acerca del teorema del factor y del residuo.

La segunda ocasión vuelve a contestar correctamente, pero esta vez su argumento es el siguiente: “*Sus raíces son* $x = -1$ *con multiplicidad de 2 y* $x = 2$” y continúa:

$$p(3) = (x+1)(x+1)(x-2)$$
$$p(3) = (3+1)(3+1)(3-2)$$
$$p(3) = 16$$

Creo que es notable la diferencia en cuanto a la consistencia del argumento.

- El estudiante OCM responde correctamente, durante el primer intento, sin embargo no escribe ningún argumento; la segunda ocasión, responde bien el reactivo, pero esta vez argumenta: *Utilizando el sistema*

$$x = -1 \quad x = 2$$

raíces

$$= (x+1)^2 (x-2)$$

La función

$$x^3 - 3x - 2$$

$$(3)^3 - 3(3) - 2 = y$$

$$27 - 9 - 2 = y$$

$$16 = y$$

Se considera que el estudiante comprendió el concepto ya que durante la segunda oportunidad argumenta su respuesta.

- Estudiante OGD: La primera ocasión resuelve el ejercicio correctamente, su argumento es el siguiente: "*porque es un valor considerable (refiriéndose al valor de 16) para que* $x = 3$ *ya que los otros son muy altos*" usa la intuición para responder la pregunta. La segunda ocasión vuelve a responder correctamente, pero su argumento es el siguiente: "$P(x) = -(x+1) \cdot -(x+1)(x-2)$ *al sustituir* $x = 3$ *el resultado es 16*".

- El participante PMNA responde correctamente, la primera vez, sin dar ningún argumento que respalde su respuesta; la segunda ocasión argumenta: según el software $x = -1$ y $x = 2$ *raíces, factores:* $(x+1)^2 (x-2)$

La función es:

$$x^3 - 3x - 2$$

$$(3)^3 - 3(3) - 2 = y$$

$$27 - 9 - 2 = y$$

$$16 = y$$

- Estudiante PGJA: Responde correctamente la pregunta en ambos exámenes, en el primero dice que la respuesta es 16 y da un "argumento" confuso: "*porque la raíz cuadrada de 16 es 4 y es un punto de la gráfica*". La segunda ocasión comenta: "*en el software hice ésta gráfica* (refiriéndose a la gráfica mostrada en el problema) *y observé la tabla que muestra el valor de* $p(3)$ *y es 16*" al dar esta respuesta considero que es capaz de extraer información del registro numérico y que tiene sentido la pregunta que se le plantea.

4.- Continuemos ahora con el análisis de algunas respuestas dadas al problema 22: La tabla mostrada corresponde a una función polinomial de tercer grado:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P(x)$	-12	0	0	-6	-12	-12	0

$P(-5) =$ ______

a) -96 b) 84 c) 30 d) -42

La primera vez que los participantes resuelven este ejercicio, 1 de ellos (el 4%) lo resuelve correctamente (inciso a). La segunda vez lo resuelven correctamente 16 de ellos (el 59%).

El participante que lo resuelve correctamente es CMR que escribe la expresión: $(x+2)(x+1)(x-3)=0$, y supongo (pues no escribe nada más) que sustituye el valor de -5 en la expresión algebraica que propone y encuentra el valor -96. La segunda ocasión que este participante responde el examen escribe lo siguiente: *Sus raíces son:* $x=-2$, $x=-1$, $x=3$, *entonces la función es:*

$$P(x)=(x+2)(x+1)(x-3)$$
$$P(-5)=(-5+2)(-5+1)(-5-3)$$
$$P(-5)=(-3)(-4)(-8)$$
$$P(-5)=-96$$

Notamos que está utilizando el concepto raíz para encontrar la función polinomial correspondiente lo que le permite encontrar su valor en $x=-5$.

- El estudiante MLCR no responde el reactivo durante el primer examen, en la segunda oportunidad escribe lo siguiente:

$$(x+2)(x-3)(x+1)$$
$$x^3-7x-6=0$$
$$(-5)^3-7(-5)-6=$$
$$-125+35-6=-96$$

Se nota que sabe encontrar la ecuación polinomial asociada a partir de sus raíces, sustituye en ella y encuentra el valor de la función polinomial asociada en $x=-5$, considero que confunde la notación para ecuación y función, sin embargo, creo que hubo un avance en el proceso de apropiación del concepto raíz real de una función polinomial.

- Estudiante MVA: En el primer intento no responde la pregunta. La segunda ocasión escribe:

$$x=-2$$
$$x=-1$$
$$x=3$$

funciones

$$P(x)=(x+2)(x+1)(x-3)$$
$$P(-5)=(-5+2)(-5+1)(-5-3)$$
$$p(-5)=(-3)(-4)(-8)$$
$$p(-5)=-96$$

Considero que el participante se ha apropiado del concepto raíz real de una función polinomial y este concepto le ha ayudado a resolver el problema.

5.- Pasemos ahora al análisis de algunas respuestas dadas al problema 21: Dado el polinomio $P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$, la tabla que le corresponde es:

a)

x	3	2	4	1	0	5
P(x)	0	0	6	0	-6	24

b)

x	-3	-2	2	1	7	0
P(x)	0	12	0	0	300	6

c)

x	-3	-8	-2	1	0	-5
P(x)	0	-450	0	0	6	-84

d)

x	-3	-1	-4	2	0	3
P(x)	0	0	-30	0	-6	12

La primera vez que los participantes resuelven este ejercicio, 21 de ellos (el 78%) lo resuelven correctamente (inciso a). La segunda vez lo resuelven correctamente 24 de ellos (el 89%).

La mayoría de participantes responden correctamente este reactivo la primera vez que realizan el examen pero no fundamentan su respuesta.

- El estudiante CMRA resuelve el problema correctamente la primera ocasión, pero no escribe argumento alguno.

- El estudiante ATN, en el primer examen responde “porque se cambian los signos y se anula la función”.

Los argumentos de algunos participantes en la segunda ocasión que resolvieron el examen fueron:

- El estudiante CMRA escribe el siguiente procedimiento:

$$\begin{aligned} (x-1) &= 0 \\ x &= 1 \\ (x-2) &= 0 \\ x &= 2 \\ (x-3) &= 0 \\ x &= 3 \\ \text{Los valores de } x \text{ son los que hacen que } P(x) &= 0 \end{aligned}$$

- El estudiante FHR escribe algo semejante al estudiante CMRA:

$$\begin{aligned} x-1=0 &\Rightarrow x=1 \\ x-2=0 &\Rightarrow x=2 \\ x-3=0 &\Rightarrow x=3 \end{aligned}$$

- El participante MAA escribe: *Porque en esa tabla las raíces son:*

$$\begin{aligned} 3&=0 \\ 2&=0 \\ 1&=0 \end{aligned}$$

Creo que entiende el concepto pero tiene problemas para expresarlo.

- El estudiante MCN expresa: “Por que sus raíces son: 3, 2 y 1”

- El estudiante MLCR comenta: "*Se sustituyen los valores de x*" (los mostrados en la tabla) *en los factores,* se refiere a $P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$, *y así obtenemos la tabla con los valores correspondientes*."

- El estudiante MMG argumenta: *Cuando* $x=1$, $x=2$, $x=3$ $P(x)=0$ *quiere decir que toca al eje* x*, y esas son sus raíces.*

$x=1$, $x=2$ y $x=3$ raíces del polinomio.

- El estudiante OGD escribe: "Porque *la función indica que tiene tres raíces que son 1, 2 y 3*".

- El estudiante PMN: Anota: "*Coloqué las raíces en la computadora y comparé la gráfica*" (se refiere a la actividad cúbica del software Raíces)

- El estudiante PHJ dice: "*Me apoyé en el software Raíces*".

- El estudiante PGJA comenta: "*Por que 3, 2, 1 son las raíces por lo tanto sus respectivas funciones son* $(x-3)$ $(x-2)$ $(x-1)$*".*

4.4 COMENTARIOS DE LOS PARTICIPANTES

Los comentarios de los participantes que usaron el software fueron:

ECM: *Me parece una buena idea trabajar con el software "raíces", el problema está en que no estamos acoplados a este tipo de enseñanza.*

MCN expresó: *El software raíces me parece buena idea porque así le pones más atención a las graficas por los colores.*

MLCR: *Me apoyé en el software porque tenía algunas dudas y así pude resolverlas con la ayuda del mismo*.

MVA: *En algunos casos si utilicé el software en otros no fue necesario.*

NBLI: *Con el software se me hizo más fácil*.

NMS: *Si usé el software, creo que este programa es muy práctico y podemos confirmar si estamos bien o no en nuestros resultados*.

OVCA: *Si usé la computadora, se me hizo muy útil*.

OCM: *Si utilicé el software pues ayuda a contestar con mayor facilidad algunos ejercicios*.

OGD: *Utilicé el software Raíces porque hubo casos que me pareció estar erróneo en algunos incisos y me respaldé en él para confirmar mis resultados*.

PMN: *La mayoría de las preguntas las contesté con base en el software, considero que está bien elaborado y me sirvió para entender mejor los temas, es más fácil con el programa*.

PHJ: *Si utilicé el software Raíces, porque se me facilitaba encontrar lo que se pedía*.

PTJ: *Utilicé el software Raíces pues veo que ahí se puede graficar y al mismo tiempo sale la ecuación y me ayudó mucho.*

PAF: Yo *si usé el software porque sólo así le entiendo un poco más.*

PSG: *Si utilicé el software porque con eso considero que se me hace más fácil*.

PGJ: *Si usé el software porque considero que es más fácil aprender con un programa de computadora*.

PNA: *Si usé el software porque me facilitó resolver el examen en algunas preguntas*.

RCL: *Si usé el programa porque se me hace fácil*.

VRG: *Si usé la computadora.*

4.5 CONCLUSIÓN

Se puede observar en la tabla con calificaciones que existen cinco participantes que presentan un “avance” negativo, como éste es pequeño (a excepción de uno), considero que prácticamente obtuvieron la misma calificación durante las dos experiencias, considero que para ellos fue irrelevante el acercamiento al concepto raíz de una función polinomial usando el software Raíces y las hojas de trabajo.

El promedio de avance para el grupo fue del 56.5% por lo cual considero que el uso del software Raíces junto con las hojas de trabajo fortalece la apropiación del concepto raíz real de una función polinomial.

La primera vez que se les aplicó el examen de contraste, la mayor parte de los participantes no respondió correctamente la mayoría de las preguntas y cuando lo hicieron no justificaron su respuesta o bien proporcionaban argumentos basados en su intuición, por ejemplo en el problema 22 (donde se muestra una tabulación correspondiente a una función polinomial de tercer grado), ocho participantes afirman que la respuesta correcta es -42 porque consideran que ese es el valor que sigue en la secuencia de la variable dependiente o bien porque es la suma de los valores de la variable dependiente mostrados en la tabla, la segunda ocasión que resuelven el problema se nota que hacen uso de los conceptos raíz o factor de un polinomio, además 20 participantes mencionan que hicieron uso del software al graficar el polinomio con ayuda de la actividad “cúbica” del software Raíces

Se considera, a partir de lo expresado en las respuestas, que los participantes avanzaron en el proceso de asimilación del concepto de raíz real de una función polinomial. Ahora, se observa una mayor sustentación de sus respuestas con argumentos basados en el concepto matemático, aunque en ocasiones no expresan correctamente sus ideas, sin embargo, creo que lo importante en esta etapa es tratar de darle un sentido al concepto.

Con base en los resultados obtenidos en las hojas de trabajo y en los comentarios expresados por los participantes, concluyo que el uso del software Raíces, junto con las hojas de trabajo, ayuda a avanzar en la aprensión del concepto raíz real de una función polinomial.

CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES GENERALES

Podemos concluir la presente investigación, haciendo las siguientes observaciones y recomendaciones producto de la experiencia de enseñanza llevada a cabo.

Se ha privilegiado, en la enseñanza tradicional, el registro de representación algebraico, descuidándose el verbal, el numérico y el gráfico, debido a esto considero que se tiene un acercamiento parcial al concepto raíz real de una función polinomial.

Se pudo inferir, a partir de las respuestas dadas a algunos reactivos del examen de conocimientos previos, que el concepto raíz de una función polinomial carece de significado para la mayoría de participantes. Esto confirmó los resultados de otras investigaciones, Torres, J. C. (2010, p. 7).

Se detectó a partir del análisis de conocimientos previos que el “aprendizaje” del estudiante queda sujeto al empleo del registro de representación algebraico y, dentro de este mismo registro, a una forma particular de expresar los conceptos, por ejemplo la mayoría de estudiantes reconocieron una ecuación cuadrática cuando esta se expresó en la forma $ax^2+bx+c=0$, pero tuvieron problemas para reconocerla cuando la ecuación se expresó en forma factorizada.

Se puede concluir que el proceso de enseñanza recurre, con mucha frecuencia, a procesos de memorización de procedimientos por parte del alumno; ésta forma de enseñanza-aprendizaje no permite la apropiación de conceptos por parte del estudiante; lo anterior se manifiesta cuando el alumno se ve involucrado en la resolución de un problema, que demanda la aplicación de un concepto supuestamente ya adquirido usando solamente una forma particular de un registro de representación.

Con respecto al programa de estudios se observa que es un instrumento que orienta, para bien o para mal, toda la actividad docente que se desarrolla en mi centro de trabajo. En este instrumento se observan diferentes interpretaciones de la Matemática. No se trata el tema de raíz de una función lineal y se observan inconsistencias en las estrategias sugeridas para algunos temas.

Se sugiere que cuando se estudie la función lineal, además de expresarse en la forma $y = mx + b$, se use la expresión $y = m(x - a)$ ya que esta representación enfatiza la pendiente y la abscisa al origen (es decir la raíz) de la función lineal.

Se infiere la necesidad, en el proceso de enseñanza, de relacionar el signo de una función lineal con el hecho de que la gráfica de la función puede estar localizada arriba del eje x, abajo el eje x o sobre el eje x.

El software Raíces, junto con las hojas de trabajo, se considera que ayuda a avanzar en la apropiación del concepto de raíz real de una función polinomial ya que propicia la articulación de los diferentes registros de representación del concepto, por otra parte, apoya a lograr algunos objetivos presentes en el programa de estudios, por ejemplo el objetivo presente en la unidad 1 de Matemáticas IV que dice: “empleará métodos de exploración para obtener los ceros en funciones polinomiales factorizables de grado 3 y 4”.

Considero, a partir del análisis de los resultados, que los estudiantes avanzaron en la apropiación del concepto raíz real de una función polinomial, no obstante se observa cierta dificultad en varios participantes para expresar correctamente sus ideas por escrito.

Queda pendiente aclarar algunos conceptos relacionados con el concepto de raíz real de una función polinomial, por ejemplo, varios participantes tuvieron problemas para discernir entre raíces y factores.

Considero que, en general, es de mucha utilidad programar “módulos” informáticos con fines educativos empleando lenguajes de programación como VBA[6], acompañados de sus respectivas hojas de trabajo, que hagan énfasis en ciertos conceptos de la matemática.

[6] Actualmente (2014) se puede usar Visual Studio Tools for Office.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barrera, S. (2007). “*Material didáctico para el subprograma de mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas”*. Secretaria de programas institucionales. CCH. *UNAM. México.*

Cuevas, A. & Pluvinage, F. *(2006). Un acercamiento didáctico a la noción de función, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.*

Cuevas, A. Moreno, S. & Pluvinage, F. *(2005). Una experiencia de enseñanza del objeto función. Annales de didactique et sciences cognitives, volumen 10, p. 177-208. IREM de STRASBOURG.*

Duval, R. *(1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales, U*niversidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, Cali Colombia.

Foerster, P. (2003). Precalculus with Trigonometry. USA: Key Curriculum Press.

García, M. (2000). Construcción *de relaciones entre variables visuales y algebraicas de funciones cuadráticas utilizando la calculadora graficadora.* Tesis de *maestría, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.*

Hernández, S. Jiménez, F. Álvarez, G. Rivera, V. Márquez, R. *(2004). Matemáticas I, UNAM-CCH Naucalpan, México.*

Mejía, H. and Monzoy, J. *(2002). Simulation of an actual context and its algebraic representation, Procedings of the 2ah PME-NA.*

Mejía, H. *(1996). Un sistema interactivo guiado para la enseñanza de las matemáticas: CuadratX. Tesis de doctorado, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.*

Monzoy, J. *(2002). Una situación real como registro de representación en un entorno computacional. Un sustento cognitivo para promover la aprehensión conceptual. Tesis de doctorado, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN*, México.

Moore-Russo, D. & Golzy, J. (2005, Oct.). *Helping Students-Connect Functions and Their Representations*. Mathematics Teacher Vol. 99, pp. 156-160.

Programa de estudios de Matemáticas, semestres I a IV (PEM). (2003), Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH). UNAM. México.

Salcedo, S. *Tamayo,* J. Terrazas, J. y Vera F. Matemáticas IV: Funciones, UNAM-CCH Naucalpan, México.

Torres, J.C. (2010). *Una experiencia didáctica sobre el concepto de raíz real de una función real bajo un entorno de tecnologías digitales*. Tesis de *maestría, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.*

Weinhold, M. (2008, Aug.). *Designer Functions: Power Tools. Mathematics Teacher* Vol. 102, pp. 28-33.

SOFTWARE REVISADO

Hohenwarter, M. (2009). Geogebra (Versión 3.2) [Programa de computación]. USA: Geogebra Inc.

Jackiw, N. (2006). Geometer's Sketchpad (Versión 4.07) [Programa de computación]. : KCP Technologies.

Mejía, H. (2000). Calc Visual (Versión 15.0.0.573) [Programa de computación]. México: Oxford University Press.

Microsoft Excel (Versión 11.5612) [Programa de computación]. : Microsoft Corp.

Derive (Versión 6.1) [Programa de computación]. : Texas Instruments.

ANEXO A: EXAMEN DIAGNÓSTICO

1) Una ecuación lineal es:

A) $x^2 = 0$

B) $x^2 + 3 = 0$

C) $x^2 + 5x - 2 = 0$

D) $x^5 - 2 = 0$

E) $5x - 2 = 0$

2) Una ecuación cuadrática es:

A) $x^3 = 0$

B) $(x-2)(x-3) = 0$

C) $x^4 + 5x - 2 = 0$

D) $2x - 2 = 0$

E) No aparece ninguna ecuación cuadrática

3) Una ecuación cuadrática es:

A) $x^3 - 2x^2 + 5x - 1 = 0$

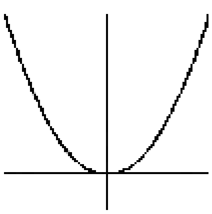
B) $x^2 - 5x + 6 = 0$

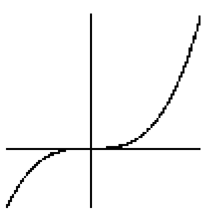
C) $x^4 + 5x - 2 = 0$

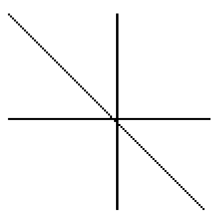
D) $2x - 5 = 0$

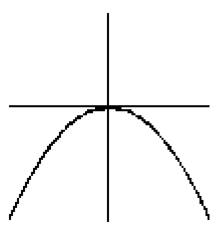
E) No aparece ninguna ecuación cuadrática

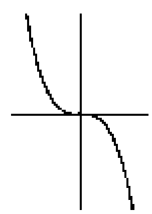
4) La gráfica de una función lineal es:


A)

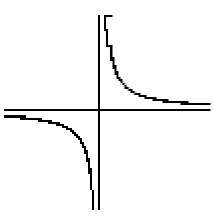

B)

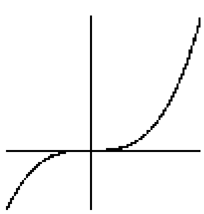

C)

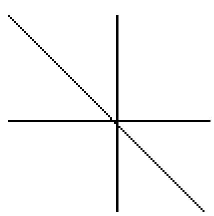

D)

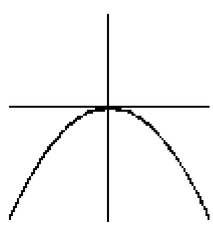

E)

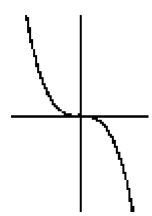
5) La gráfica de una función cuadrática es:


A)


B)


C)


D)


E)

6) Sea $f(x) = x - 5$, cuanto vale $f(1)$

A) -5
B) 0
C) 4
D) -4
E) No aparece el valor

7) Sea $f(x) = x^2$, cuanto vale $f(-2)$

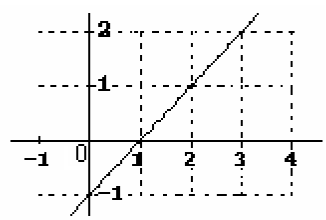
A) 2
B) -2
C) 4
D) -4
E) No aparece el valor

8) Sea $y = x^2$, un valor de *x* para que $y = 4$ es:

A) 1
B) 2
C) 0
D) -4
E) 4

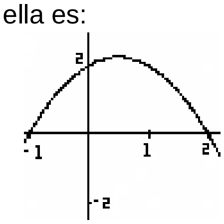
9) En la siguiente gráfica, si $y = 2$ el valor de x es:

A) 2
B) 1
C) 0
D) -1
E) No aparece el valor



10) Dada la siguiente gráfica, una pareja de puntos que pertenece a ella es:

A) (-1, 0) y (1, 0)
B) (0, -1) y (2, 0)
C) (0, 2) y (0, -1)
D) (0, 2) y (-1, 0)
E) Ningún punto pertenece a la gráfica.



11) La solución de la ecuación $2x + 3 = 7$ es:
A) 2
B) 3
C) 7
D) -3
E) -2

12) La solución de la ecuación $2x + 5 = 3x + 2$ es:
A) 2
B) 5
C) 3
D) -5
E) -2

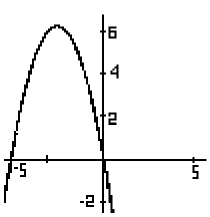
13) Una solución de la ecuación $x^2 - x - 6 = 0$ es:
A) 2
B) -1
C) -6
D) 3
E) 0

14) Una solución de la ecuación $x^2 + 6 = 15$ es:
A) 2
B) 6
C) 15
D) 3
E) 1

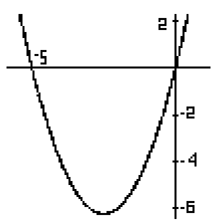
15) Una solución de la ecuación $(3x+4)^2 = 1$ es:
A) 3
B) 4
C) 2
D) -1
E) 1

16) Una solución de la ecuación $(x-1)(x+2) = 0$ es:
A) 2
B) -1
C) 1
D) 0
E) 3

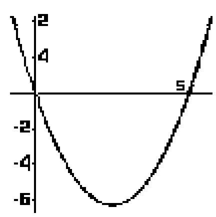
17) La gráfica correspondiente a $y = x(x+5)$ es:



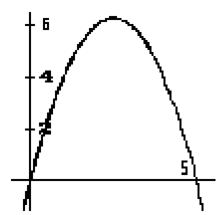
A)



B)



C)



D)

E) No aparece la gráfica.

18) Una función lineal o de primer grado:
A) Tiene cero raíces.
B) Tiene una raíz.
C) Tiene dos raíces.
D) Tiene tres raíces.
E) No tiene raíces.

19) Una función cuadrática o de segundo grado:
A) Tiene cero raíces.
B) Tiene una raíz.
C) Tiene dos raíces.
D) Tiene tres raíces.
E) No tiene raíces.

20) La intersección de la gráfica de la función $y = x - 2$ con el eje x es:

A) 0
B) 2
C) -2
D) 1
E) No existe intersección con el eje x.

21) Las intersecciones de la gráfica de la función $y = (x+1)(x-2)$ con el eje x son:

A) 1 y 2
B) -1 y -2
C) -1 y 2
D) 1 y -2
E) La gráfica no se interfecta con el eje x

22) La siguiente tabla corresponde a valores de una función lineal. La raíz es:

A) -1
B) -2
C) 0
D) 1
E) 2

x	y
-2	-3
0	-1
1	0
2	1

23) $x = -1$, es raíz de una función lineal cuya expresión algebraica es:

A) $y = x - 1$
B) $y = -x + 1$
C) $y = x + 1$
D) $y = -1 + x$
E) Ninguna de las funciones anteriores.

24) La siguiente es una función de segundo grado $y = 2x^2 - 2$. Una de sus raíces es:

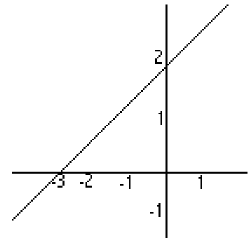
A) 2
B) 1
C) 0
D) -2
E) No tiene raíces.

25) La siguiente tabla corresponde a valores de una función cuadrática
Una raíz es:

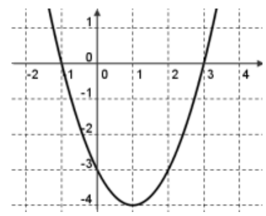
A) -2
B) 6
C) -1
D) 0
E) 2

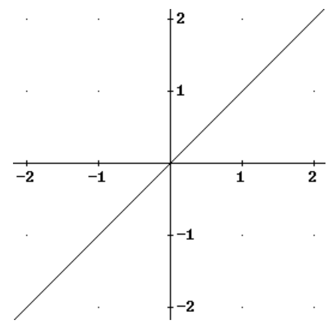
x	y
-2	6
-1	0
0	-2
1	0
2	6

26) La raíz de la función lineal, cuya gráfica se muestra, es
A) 2
B) -3
C) 0
D) 0.5
E) No tiene raíz



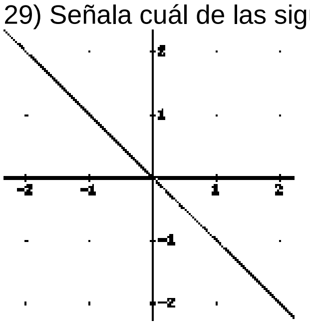
27) Con la información dada en la siguiente gráfica se deduce que una raíz es:
A) –2.5
B) -1
C) 2
D) 0
E) No tiene raíces.



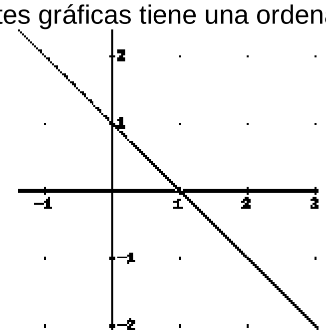


28) Con la información dada en la siguiente gráfica se deduce que, en el intervalo de -2 a -1, la función es:
A) Positiva
B) Negativa
C) Cero
D) Positiva y Negativa
E) No se puede saber a partir de la gráfica

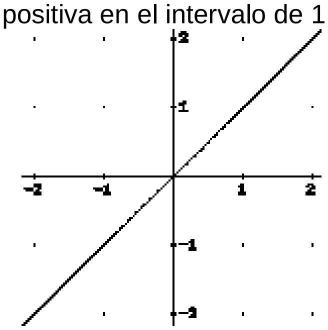
29) Señala cuál de las siguientes gráficas tiene una ordenada positiva en el intervalo de 1 a 2



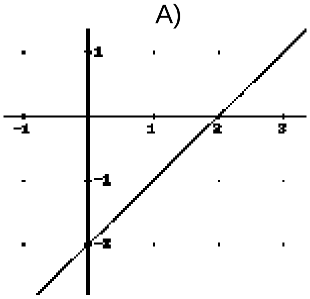
A)



B)



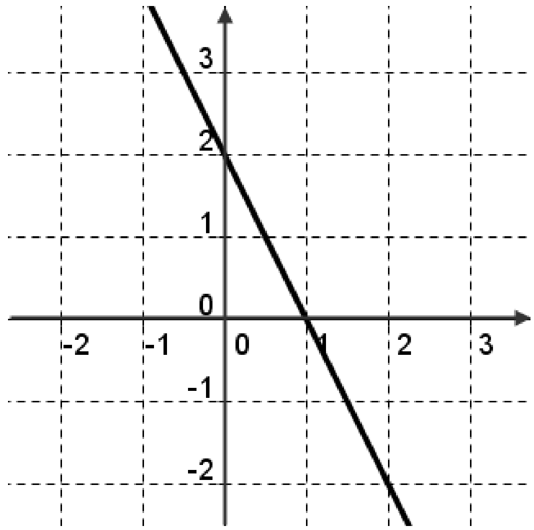
C)



D)

Ninguna gráfica cumple con la condición.
E)

30) A partir de la siguiente gráfica, que corresponde a una función lineal, responde



¿Cuánto vale f(0)? _______________ ¿f(-0.5) es positivo o negativo?______________

¿Cuánto vale f(1)?_______________ ¿f(1.5) es positivo o negativo?_______________

¿Para que valor de x, f(x)=0?__________ ¿Para que valor de x, f(x)=2? ________________

¿Para que valores de x, f(x)>0?_________ ¿Para que valores de x, f(x)<0? ______________

¿Cuál es la raíz de la función? _______________

¿Qué entiendes por raíz de una función? ____

HOJA DE RESPUESTAS PARA EL EXAMEN DIAGNÓSTICO

PREGUNTA	RESPUESTA	PREGUNTA	RESPUESTA
1	E	**16**	C
2	B	**17**	B
3	B	**18**	B
4	C	**19**	C
5	D	**20**	B
6	D	**21**	C
7	C	**22**	D
8	B	**23**	C
9	E	**24**	B
10	D	**25**	C
11	A	**26**	B
12	C	**27**	B
13	D	**28**	B
14	D	**29**	C
15	D	**30**	2, +,0,-,x=1,x=0,x < 1,x >1,x=1.

ANEXO B: EXAMEN DE CONTRASTE

1. El grado del polinomio P(x) = $4x^{15}-9x$ es:

a) 4 b) -9 c) 1 d) 15

2. El polinomio P(x) = $x^3 - 2x^2 - x + 2$ tiene:

a) 3 raíces b) 1 raíces c) 2 raíces d) 0 raíces

3. De los siguientes números, diga cuál es una raíz de P(x) = $x^2 - 3x - 10$

a) $x = 2$ b) $x = 3$ c) $x = -2$ d) $x = -10$

4. Una raíz del polinomio P(x)=(x^2+1)(x-1) es:

a) $x = 2$ b) $x = 0$ c) $x = -1$ d) $x = 1$

5. Sea P(x) = $x^3 - x^2 + x - 1$. Si P(1) = 0, entonces un factor de P(x) es:

a) (x - 1) b) (x +1) c) (x - 0) d) (x - 3)

6. Una raíz del polinomio P(x) = $x^3 - 7x + 6$ es $x = 1$. La factorización del polinomio es:

a) P(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 3) b) P(x) = (x - 1)(x + 2)(x + 3)

c) P(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 3) d) P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)

7. Un polinomio cuya gráfica corta al eje x en 1 y -2, es:

a) P(x) = (x - 1) (x + 2) b) P(x) = (x - 1) (x - 2)

c) P(x) = (x + 1) (x - 2) d) P(x) = (x + 1) (x + 2)

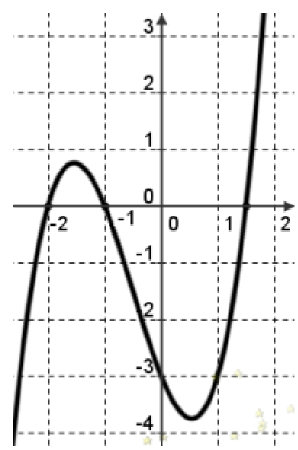
8. Con base en la información mostrada en la gráfica, la cual corresponde a una función polinomial de tercer grado, se deduce que una raíz de la función polinomial es:

a) $x = 2$

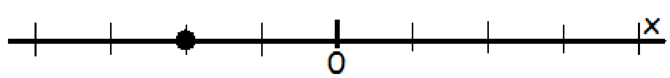
b) $x = -3$

c) $x = 1$

d) $x = \frac{3}{2}$



9. En la siguiente figura se muestra un punto cuya abscisa corresponde a la raíz de un polinomio. Cada marca representa dos unidades.



Un polinomio que tiene la raíz mostrada es:

a) P(x) = x +4 b) P(x) = x -2

c) P(x) = x – 4 d) P(x) = x + 2

10. La siguiente tabla corresponde a una función polinomial lineal

X	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
P(*x*)	-5.5	-4.5	-3.5	-2.5	-1.5	-0.5	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5

A partir de la información mostrada, se concluye que:

a) La raíz es x = -0.5 b) La raíz se ubica entre x = -1 y x = 0

c) La raíz es x = 0 d) La raíz se ubica entre x = 0 y x = 1

11. La siguiente tabla muestra información de una función polinomial lineal.

x	-3	-2	-1	0	1
P(*x*)	-11	-6	-1	4	9

¿Cuál de las siguientes tablas limita con mayor precisión la raíz de la función?

a)

x	-3	-2.8	-2.6	-2.4	-2.2	-2
P*(x)*	-11	-10	-9	-8	-7	-6

b)

x	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
P(x)	-11	-8.5	-6	-3.5	-1	1.5	4	6.5	9	11.5	14

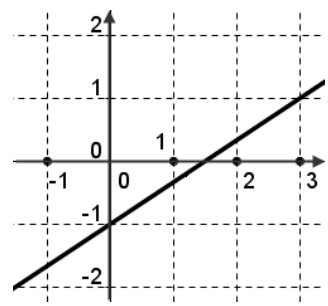
c)

x	0	-1.8	-1.6	-1.4	-1.2	-1
P(x)	4	-5	-4	-3	-2	-1

d)

x	-1.1	-0.9	-0.7	-0.5	-0.3	-0.1	0.1
P(x)	-1.5	-0.5	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5

12. A partir de la información dada en la gráfica, la cual corresponde a una función polinomial lineal, se concluye que:



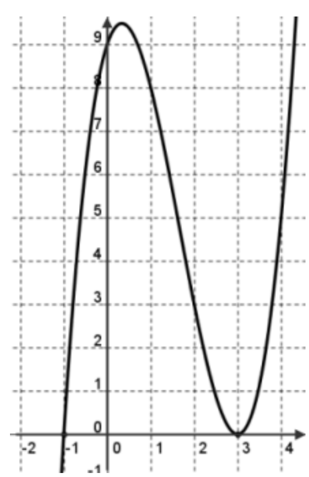
a) La raíz del polinomio está entre x= 1 y x = 2

b) La raíz del polinomio es x = -1

c) La raíz del polinomio está entre x = 0 y x = -2

d) El polinomio no tiene raíz

13. La siguiente gráfica corresponde a un polinomio de tercer grado. Con base en la información mostrada, se deduce que la expresión algebraica del polinomio es:



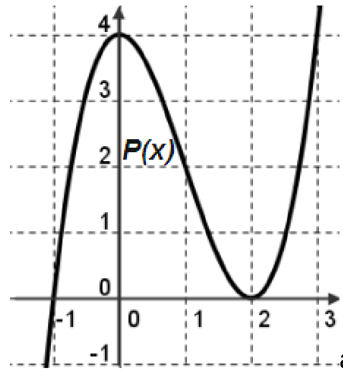
a) P(x) = (x + 1) (x - 3)

b) P(x) = $(x + 1)^2$ (x - 3)

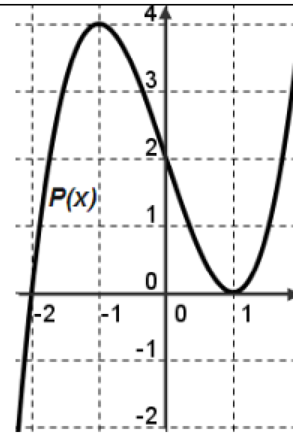
c) P(x) = (x + 1) $(x - 3)^2$

d) P(x) = (x - 1) $(x + 3)^2$

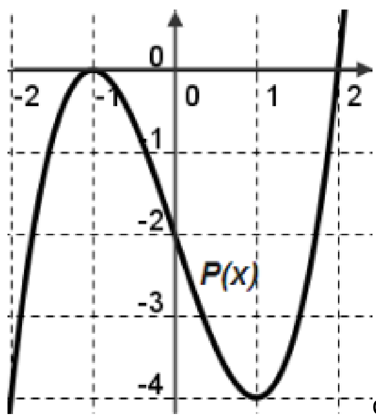
14. Dado el siguiente polinomio P(x) = (x - 1) (x + 2)^2, se concluye que su gráfica es:



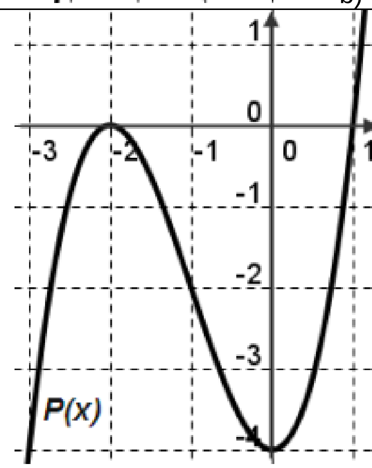
a)



b)



c)



d)

15. Con base en el polinomio P(x) = (x + 1)^2 (x - 2), se concluye lo siguiente:

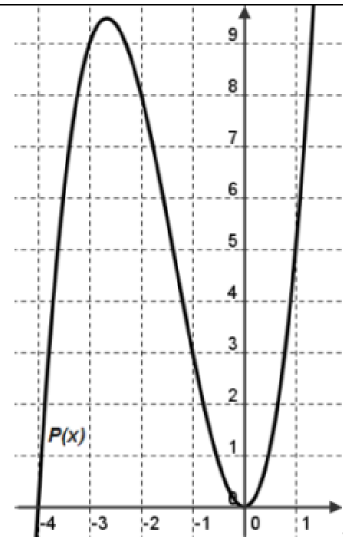
a) El polinomio tiene 3 raíces, x = 1 de multiplicidad 2 y x = -2 de multiplicidad 1

b) El polinomio tiene 3 raíces, x = -1 de multiplicidad 2 y x = 2 de multiplicidad 1

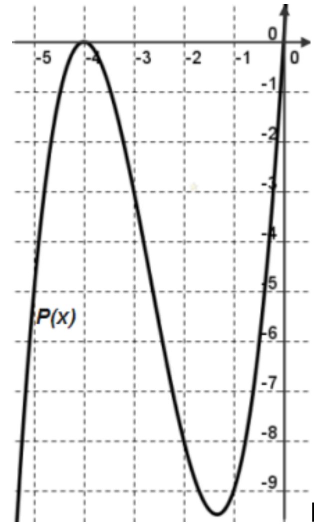
c) El polinomio tiene 3 raíces, x = 1 de multiplicidad 1 y x = -2 de multiplicidad 2

d) El polinomio tiene 3 raíces, x = -1 de multiplicidad 1 y x = 2 de multiplicidad 2

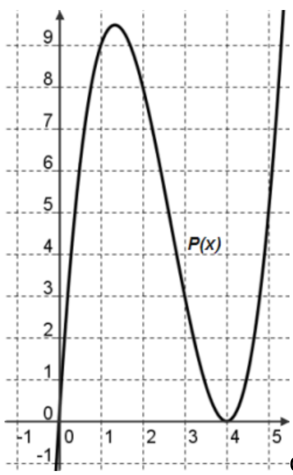
16. El polinomio que tiene la raíz $x = 0$ de multiplicidad 1 y $x = 4$ de multiplicidad 2, tiene por gráfica:



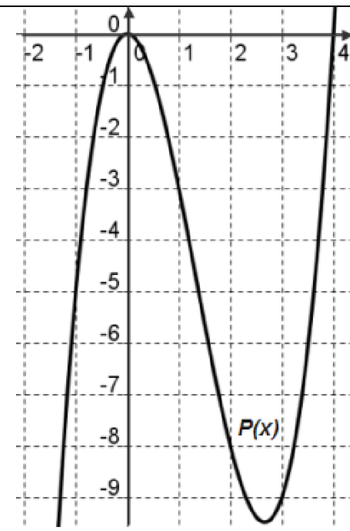
a)



b)



c)



d)

17. El polinomio que tiene la raíz $x = -5$ de multiplicidad 1 y $x = 7$ de multiplicidad 2 es:

a) $P(x) = (x - 5)^2 (x + 7)$ b) $P(x) = (x - 5) (x - 7)^2$

c) $P(x) = (x + 5) (x - 7)^2$ d) $P(x) = (x + 5)^2 (x + 7)$

18. La tabla muestra algunos valores de una función polinomial de segundo grado.

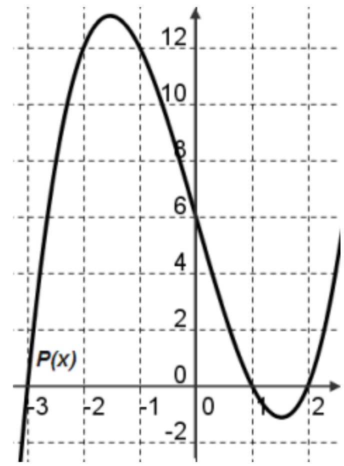
X	-3	-2	-1	0	1	2
P(*x*)	4	0	-2	-2	0	4

Con base en la información mostrada, se concluye que el polinomio que le corresponde es:

a) $P(x) = (x - 2) (x - 1)$ b) $P(x) = (x + 2) (x - 1)$

c) $P(x) = (x - 2) (x + 1)$ d) $P(x) = (x + 2) (x + 1)$

19. De acuerdo a la gráfica mostrada, la cual corresponde a un polinomio de tercer grado, la tabla que le corresponde es:



a)

X	3	2	2.1	1	0	5
P(*x*)	0	0	0.561	0	6	96

b)

X	-3	-2.5	-2	1	0	-0.55
P(*x*)	0	7.875	0	0	6	9.375

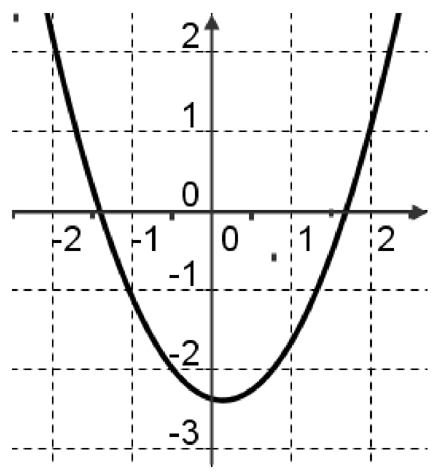
c)

X	-3	-1	1.1	2	0	0.5
P(*x*)	0	0	-0.369	0	6	2.625

d)

X	-3	-2	2	1	1.5	0
P(*x*)	0	12	0	0	-1.125	6

20. De acuerdo a la gráfica mostrada, la cual corresponde a una función polinomial de segundo grado, la tabla que le corresponde es:



a)

X	1.7	0	2.5	-1.4
P(*x*)	0	-2.4	3	0

b)

X	-1.5	0	-2.4	2
P(*x*)	0	-2.45	0	1

c)

X	-1.5	0	1.5	-4
P(*x*)	0	-2.2	0	11

d)

X	-1.6	0	1.5	2
P(*x*)	0	-2.4	0	1

21. Dado el polinomio P(*x*) = (*x* - 1) (*x* - 2) (*x* - 3), la tabla que le corresponde es:

a)

X	3	2	4	1	0	5
P(x)	0	0	6	0	-6	24

b)

X	-3	-2	2	1	7	0
P(x)	0	12	0	0	300	6

c)

X	-3	-8	-2	1	0	-5
P(x)	0	-450	0	0	6	-84

d)

x	-3	-1	-4	2	0	3
P(x)	0	0	-30	0	-6	12

22. La tabla mostrada corresponde a una función polinomial de tercer grado.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
P(x)	-12	0	0	-6	-12	-12	0

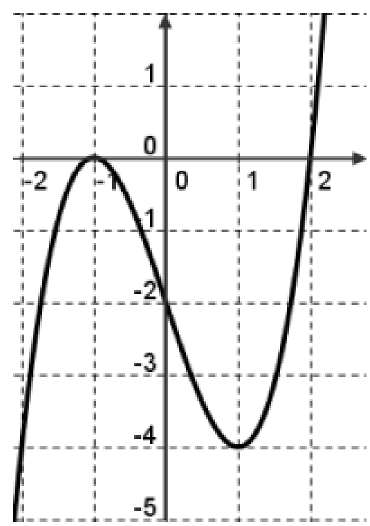
P(-5) = ________

a) -96 b) 84 c) 30 d) -42

23. La gráfica mostrada corresponde a una función polinomial de tercer grado.

¿Cuánto vale P(3)?

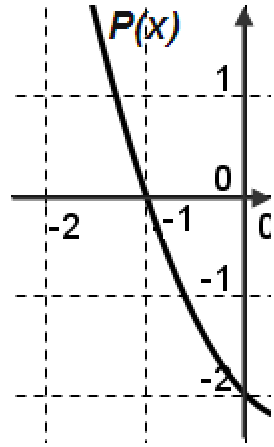
a) 200
b) 16
c) 972
d) -8



24. La gráfica de una función polinomial de primer grado pasa por los puntos P(1,3) y Q(-3,-1). La raíz de la función polinomial es:

a) *x* = -3 b) *x* = -2 c) *x* = 0 d) *x* = -1

25. En la siguiente gráfica, que corresponde a una función polinomial de segundo grado, se muestra una raíz.



La otra raíz es:

a) 4
b) 2
c) -4
d) 3

HOJA DE RESPUESTAS PARA EL EXAMEN DE CONTRASTE.

PREGUNTA	RESPUESTA	PREGUNTA	RESPUESTA
1	D	**14**	D
2	A	**15**	B
3	C	**16**	C
4	D	**17**	C
5	A	**18**	B
6	C	**19**	D
7	A	**20**	A
8	D	**21**	A
9	A	**22**	A
10	D	**23**	B
11	D	**24**	B
12	A	**25**	B
13	C		

ANEXO C: HOJAS DE TRABAJO

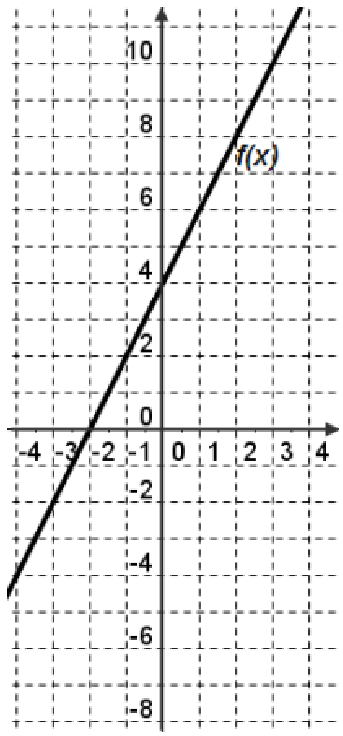
ACTIVIDAD 1: LAS COMPONENTES LINEALES DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

(Para esta tarea puedes apoyarte en la actividad llamada **Cuadrática**, del software **Raíces**)

1.- La expresión algebraica de la siguiente gráfica que corresponde a una función lineal es

$f(x) =$ _______________

(Escribe la expresión en la forma **pendiente-ordenada** al origen $f(x) = mx + b$).



2.- Escribe la expresión algebraica de la pregunta anterior, en la forma **pendiente-raíz** ***f(x) = m* (*x* - *a*)**, donde la raíz es: $a = -\frac{b}{m}$. $f(x) =$ ______________ La raíz de la función es: _______

NOTA: Gráficamente las **raíces reales** de una función $f(x)$ se identifican como la abscisa (valor de x) de los puntos donde la gráfica toca o corta el eje x. Por ejemplo, la gráfica mostrada en la pregunta 1 corta al eje x en el punto de coordenadas $(-2, 0)$, por tanto la **raíz** de la función lineal es $x = -2$.

3.- Grafica, **usando un color diferente**, otra función lineal, en el plano cartesiano mostrado en la pregunta 1, que pase por los puntos $(2, 0)$ y $(0, -2)$.

Escribe la función en la forma $g(x) = m(x - a)$

$g(x)$ = ________________________ La raíz de la función es: _________________________________

4.- Para cada función lineal $f(x)$ y $g(x)$, ¿Qué representa el parámetro a gráficamente?, es decir, ¿que conexión existe entre el valor de a y la gráfica? ____

5.- Observa las gráficas de las funciones lineales $f(x)$ y $g(x)$. Completa la siguiente tabla.

$x=$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=$						8	
$g(x)=$		-4					
$f(x)g(x)=$				-8			

6.- Grafica, **usando un color diferente,** las parejas $(x, f(x)g(x))$ en el plano cartesiano de la pregunta 1, es decir, grafica los puntos de coordenadas (-3,10), (-2,0), etc.

7.- Describe el tipo de gráfica resultante. ____

8.- Al multiplicar las dos funciones lineales $f(x)$ y $g(x)$ se obtiene la siguiente expresión algebraica:

$P(x)= f(x)g(x)=$ ________________________________

Cuya tabulación es la siguiente:

$x=$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P(x)=$							

9.- Grafica los puntos $(x, P(x))$ en el plano cartesiano de la pregunta 1.

10.- ¿Se corresponde con la función que habías previamente esbozado? Explica.

____

LA FUNCIÓN RESULTANTE: $P(x)= f(x)g(x)$, ES UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

11.- Describe que relación existe entre las intersecciones con el eje x de las funciones lineales y las intersecciones con el eje x de la función cuadrática. ____

12.- Completa los espacios. Si $x=0$, entonces $f(0)=$ ____, $g(0)=$ ____ y $P(0)=$ ______

¿Notas alguna relación entre estos valores? (relaciona el producto de $f(0)$ y $g(0)$ con $P(0)$) ______

13.- ¿Se mantiene esta relación para cualquier otro valor de x? Si la respuesta es afirmativa, propón otro ejemplo. ____

14.- Observa las gráficas de las funciones. Completa la siguiente tabla, escribiendo las palabras **positiva** o **negativa**, de acuerdo al signo de cada función en los intervalos señalados.

NOTA: Recuerda que una función es positiva para un valor de x, si $f\left(x\right)>0$ lo que implica que el punto $\left(x, f\left(x\right)\right)$ está ubicado **arriba** del eje x y es negativa para un valor de x, si $f\left(x\right)<0$ lo que implica que el punto $\left(x, f\left(x\right)\right)$ está ubicado **abajo** del eje x.

	A la izquierda de la primera raíz	Entre las dos raíces	A la derecha de la segunda raíz
f(x)			Positiva
g(x)		Negativa	
P(x)	Positiva		

15.- ¿Qué relación existe entre el signo de las funciones lineales y el signo de la función cuadrática en cada uno de los intervalos analizados? ____

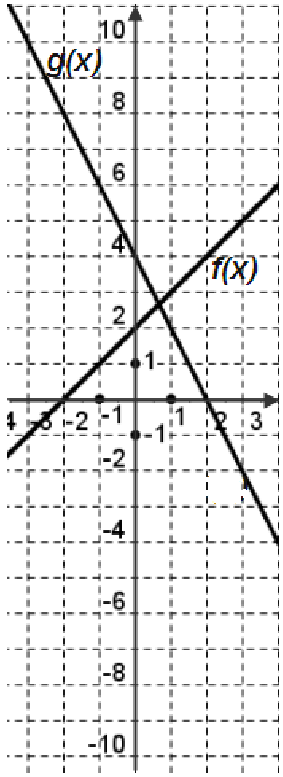
NOTA: En caso de que no veas ninguna relación, considera la multiplicación de los signos de la función $f\left(x\right)$ y $g\left(x\right)$ en cada uno de los intervalos analizados y compara el resultado con el signo de la función *P(x)*.

16. Anota tus conclusiones de esta actividad ____

____

ACTIVIDAD 2: LAS COMPONENTES LINEALES DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

1.- Esboza la gráfica de la función $P(x) = f(x)g(x)$. Puedes usar la actividad **Cuadrática** del software **Raíces**



EJEMPLO: De acuerdo a la gráfica, $f(-3) = -1$, $g(-3) = 10$ y $f(-3)g(-3) = (-1)(10) = -10$, por tanto se gráfica el punto de coordenadas $(-3, -10)$.

2.- Describe que relación existe entre la raíz de cada función lineal y las raíces de la función cuadrática.

___

3.- De acuerdo a la gráfica, si $x = 0$ entonces $f(0) =$ ____, $g(0) =$ ____ y $P(0) =$ ____

¿Notas alguna relación entre estos valores? (relaciona el producto de $f(0)$ y $g(0)$ con $P(0)$).

___

4.- ¿Se mantiene esta relación para cualquier otro valor de x? Propón otro ejemplo. ________________

5.- Observa las gráficas de las funciones. Completa la siguiente tabla de acuerdo al signo de cada función en los intervalos señalados.

	A la izquierda de la primera raíz (A la izquierda de $x = -2$)	Entre las dos raíces (Entre $x = -2$ y $x = 2$)	A la derecha de la segunda raíz (A la derecha de $x = 2$)
$f(x)$			Positiva
$g(x)$		Positiva	
$P(x)$	Negativa		

6.- ¿Qué puedes concluir acerca de la relación entre el signo de cada función lineal y el signo de la función cuadrática en cada uno de los intervalos analizados? ___________________________________

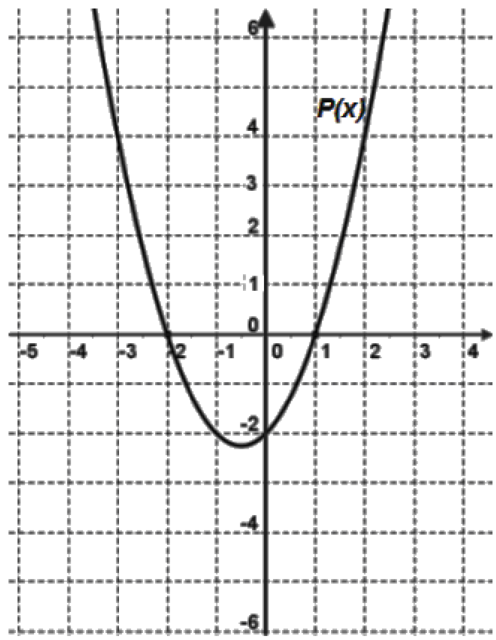
7.- ¿Qué características de las funciones lineales causan que la gráfica de la función cuadrática abra hacia abajo? ____

NOTA: Considera la pendiente de las funciones lineales.

ACTIVIDAD 3: LOS FACTORES DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA SON DOS FUNCIONES LINEALES.

3.1 RAÍCES REALES DIFERENTES.

1.- Dada la siguiente gráfica de una función cuadrática *P(x)*, esboza las gráficas de sus componentes lineales. Indica en la gráfica una función lineal con f(x) y la otra con g(x). **Usa colores diferentes.**



2.- Encuentra las ecuaciones de *f(x)* y *g(x)* escríbelas en la forma ***f(x) = m*** **(*x* - *a*)**

$f(x) =$ __________________ $g(x) =$ ___________________

(Puedes apoyarte en la actividad **Cuadrática** del software **Raíces)**

3.- Completa la siguiente tabla.

f(0)=	*f(-2)=*	*f(1)=*
g(0)=	*g(-2)=*	*g(1)=*
P(0)=	*P(-2)=*	*P(1)=*

4.- Observa cada una de las columnas de la tabla anterior. ¿Notas alguna relación entre los valores de f(x) y g(x) con P(x) para cada valor de x mostrado? Explica ______________________________________

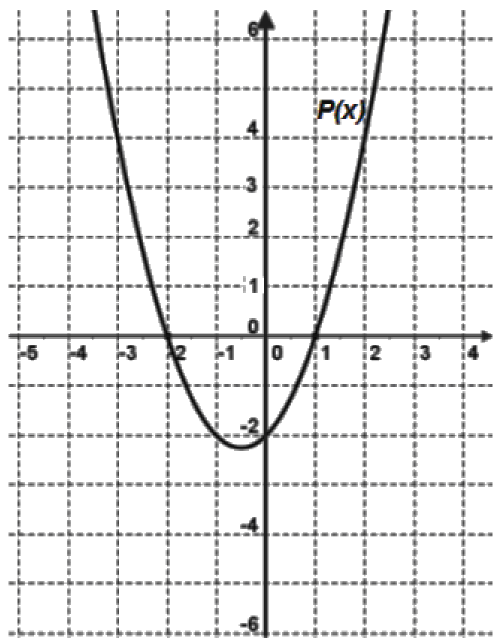
NOTA: En caso de que no veas ninguna relación, considera la multiplicación de la función f(x) con g(x) y compara el resultado con el valor de P(x) en cada valor de x analizado.

5.- ¿Cómo expresarías esa relación en general? ____

6.- Al multiplicar las ecuaciones de las funciones lineales se obtiene una función cuadrática cuya ecuación es: *P(x) = f(x)g(x) =* ____

7.- ¿Es posible encontrar otro par de funciones lineales que tengan como producto la misma gráfica? ___

En caso afirmativo, **usando colores diferentes,** dibuja la gráfica de ambas funciones lineales en el siguiente plano cartesiano. Llámale a una función *r(x)* y a la otra *s(x)*.



8.- Escribe las ecuaciones de estas nuevas funciones lineales, usa la forma
f(x) = m (x - a)
r(x) = __________________________ s(x) = _______________________________

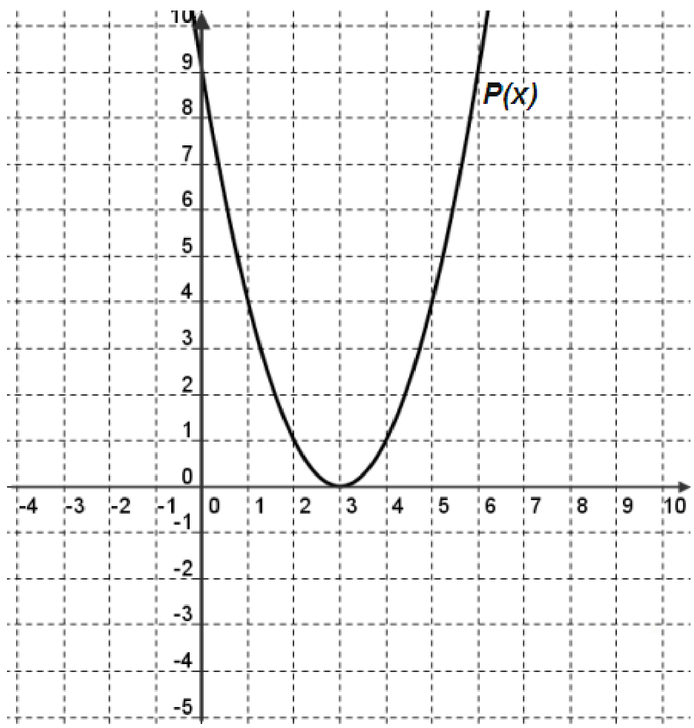
(Puedes apoyarte en la actividad **Cuadrática** del software **Raíces**)

9.- Al multiplicar estas ecuaciones lineales, la ecuación de la función cuadrática es:
Q(x) = r(x)s(x) = _______________________________

10.- Compara *P(x)* con *Q(x)*. Escribe tus observaciones._________________________________

3.2 RAÍCES REALES IGUALES (MÚLTIPLES).

1.- La gráfica de la función cuadrática mostrada tiene sólo una raíz, x = _____. **Usando un color diferente,** esboza las gráficas de las funciones lineales que representan sus componentes o factores lineales. Denota una función con f(x) y la otra con g(x). Usa colores diferentes. (Puedes apoyarte en la actividad **Cuadrática** del software **Raíces**)



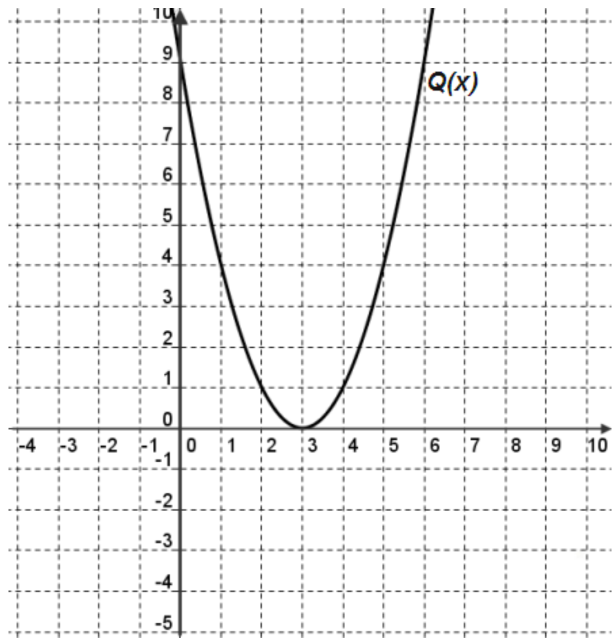
2.- Encuentra las ecuaciones de *f(x)* y de *g(x)*, escríbelas en la forma ***f(x) = m* (*x* - *a*)**

f(x) = ______________________________ g*(x)* = _______________________________

3.- Al multiplicar las funciones lineales se obtiene una función cuadrática cuya ecuación es:

P(x) = *f(x)g(x)* = ________________. Escribe la ecuación en la forma $P(x) = (x - a)^{n}$

4.- ¿Es posible encontrar otro par de funciones lineales que tengan como producto la misma gráfica? ____________. En caso afirmativo, dibuja la gráfica de ambas funciones lineales en el siguiente plano cartesiano. Llámale a una función *r(x)* y a la otra *s(x)*. **Usa colores diferentes**.



5.- Escribe las ecuaciones de estas nuevas funciones lineales, usa la forma $f(x) = m\,(x - a)$

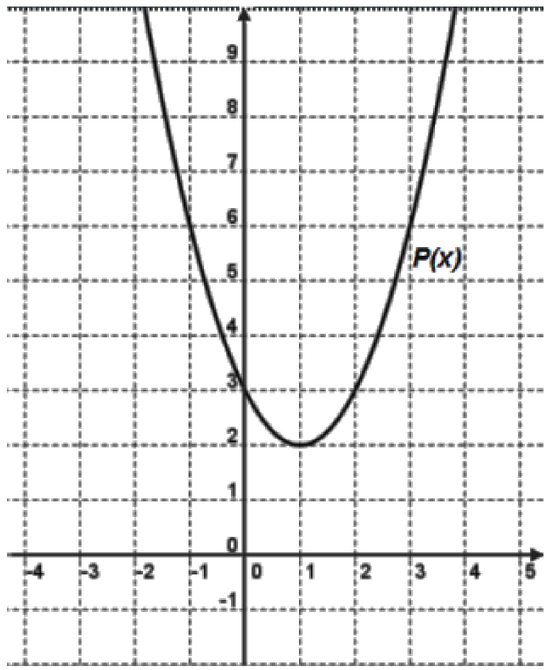
$r(x) =$ _____________________ $s(x) =$ _______________________

6.- Al multiplicar estas ecuaciones lineales, la ecuación de la función cuadrática es:

$Q(x) = r(x)s(x) =$ ____________________. Escribe la ecuación en la forma $P(x)=(x-a)^n$

7.- Compara *P(x)* con *Q(x)*. Escribe tus observaciones. ____

3.3 RAÍCES COMPLEJAS.



1.- Trata de esbozar las gráficas de las funciones lineales que sean componentes de la función cuadrática cuya gráfica se muestra.

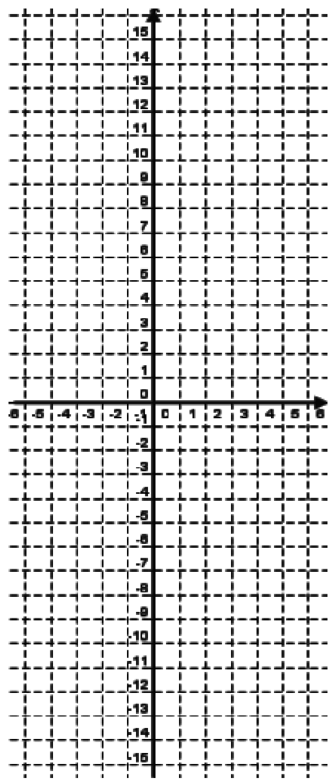
2.- ¿Qué encontraste? ____

3.- Explica la razón de lo que hallaste. ____

ACTIVIDAD 4

ACTIVIDAD 4.1 De los componentes lineales a la función polinomial de grado tres.

1.- **Usando colores diferentes,** esboza las gráficas de tres funciones lineales, *f(x)*, *g(x)* y *h(x)*, que cumplan lo siguiente: *f(x)* pasa por los puntos (0,0) y (-2,2), *g(x)* pasa por (-2,0) y (0,2) y *h(x)* pasa por (2,0) y (0,2). (Puedes apoyarte en la actividad **Cúbica** del software **Raíces**)



2.- Escribe las ecuaciones de las tres funciones lineales, escríbelas en la forma f(x) = m (x - a).

f(x) = ________________ g(x) = _______________ h(x) = ______________

3.- Multiplica las ecuaciones de las tres funciones lineales, la expresión que obtienes, es:

P(x) = f(x)g(x)h(x) = ____

4.- Llena la siguiente tabla con los valores de cada función en el valor de *x* dado.

x = -3	x = -2	x = -1	x = 0	x = 1	x = 2	X = 3
f(-3)=	f(-2)=	f(-1)=	f(0)=	f(1)=	f(2)=	f(3)=
g(-3)=	g(-2)=	g(-1)=	g(0)=	g(1)=	g(2)=	g(3)=
h(-3)=	h(-2)=	h(-1)=	h(0)=	h(1)=	h(2)=	h(3)=
P(-3)=	**P(-2)**=	**P(-1)**=	**P(0)**=	**P(1)**=	**P(2)**=	**P(3)**=

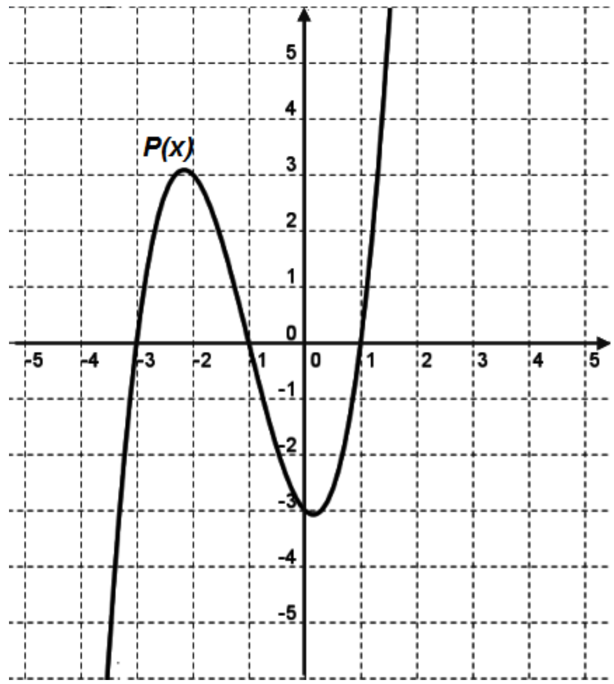
5.- Observa cada una de las columnas de la tabla anterior. ¿Notas alguna relación, para cada valor de x, entre *f(x)*, *g(x)* y *h(x)* con *P(x)*? Explica. __________________________

6.- ¿Cómo expresarías esa relación en general? _________________________________

7.- Grafica *P(x)* en el mismo plano cartesiano mostrado en la pregunta 1.

ACTIVIDAD 4.2 Los factores de una función cúbica son tres funciones lineales (raíces reales diferentes).

1.- Dada la siguiente gráfica de una función cúbica *P(x)*, esboza, **usando diferente colores,** las gráficas de sus **componentes lineales**. Denota estas funciones lineales con *f(x),g(x)* y *h(x)*.



2.- Encuentra las ecuaciones de *f(x)*, *g(x)* y *h(x)* escríbelas en la forma *f(x) = m (x - a)*.

f(x)= ____________________ *g(x)*= ____________________ *h(x)*= _______________

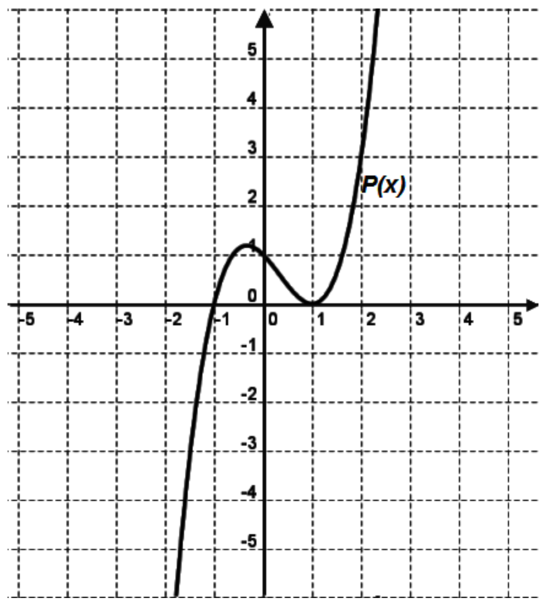
3.- Al multiplicar las funciones lineales se obtiene una función cúbica cuya ecuación es:

P(x) = f(x)g(x)h(x) = ____

(Comprueba tus resultados usando la actividad **cúbica** del software **Raíces**)

ACTIVIDAD 4.3 Los factores de una función cúbica son tres funciones lineales (raíces reales múltiples).

1.- Dada la siguiente gráfica de una función cúbica *P(x)*, esboza, **usando colores diferentes,** las gráficas de sus componentes lineales. Denota estas funciones lineales con *f(x)*, *g(x)* y *h(x)*.
(Puedes apoyarte en la actividad **cúbica** del software **Raíces**).



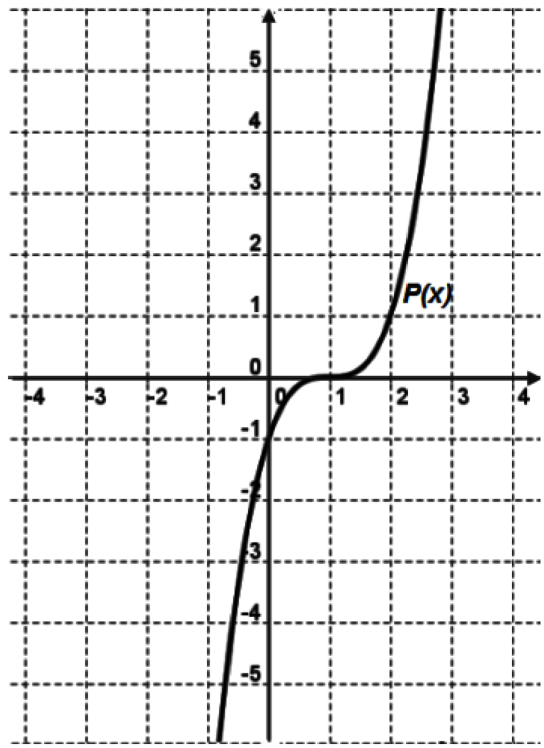
2.- Encuentra las ecuaciones de *f(x)*, *g(x)* y *h(x)*, escríbelas en la forma *f(x) = m (x - a)*
f(x)= ____________________ *g(x)*= ____________________ *h(x)*= _______________

3.- Al multiplicar las funciones lineales se obtiene una función cúbica cuya ecuación es:
P(x) = f(x)g(x)h(x) = ____

4.- Escribe tus observaciones ____

ACTIVIDAD 4.4 Los factores de una función cúbica son tres funciones lineales (raíces reales múltiples).

1.- Dada la siguiente gráfica de una función cúbica *P(x)*, esboza las gráficas de sus componentes lineales. Denota estas funciones lineales con *f(x), g(x)* y *h(x)*. Usa **colores diferentes**.
(Puedes apoyarte en la actividad **cúbica** del software **Raíces**).



2.- Encuentra las ecuaciones de *f(x), g(x)* y *h(x),* escríbelas en la forma ***f(x) = m (x - a)***

f(x)= ____________________ *g(x)*= ____________________ *h(x)*= _______________

3.- Al multiplicar las funciones lineales se obtiene una función cúbica cuya ecuación es:

P(x) = f(x)g(x)h(x) = ____

4.- Explica la razón de lo que hallaste. ____

ACTIVIDAD 5: HALLANDO LAS RAÍCES DE UNA FUNCIÓN POLINOMIAL

Halla las raíces de la función polinomial de tercer grado $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$

Solución:

1.- ¿Cuál es el máximo número posible de raíces de esta función polinomial? ________________

PRIMER MÉTODO: POR MEDIO DE UNA EVALUACIÓN PUNTUAL DE LA FUNCIÓN

Intenta localizar las raíces de la función polinomial *P(x)* mediante evaluaciones puntuales, es decir se trata de proponer valores para la variable *x* de tal modo que *P(x) = 0*.

Propongamos para la variable *x* el valor de tres, es decir *x = 3*, ¿Cuánto vale *P (3)*?

2.- Completa: P(3) = 3^3 - ____ - 3 + 1 = ____ – 18 – 3 + 1 = ____

Como P(3) = 7 $\neq$ 0, se concluye que x = 3 no es raíz de la función polinomial.

3.- Ahora intenta con *x* = 0. Como P(0) = ___ $\neq$ 0, se concluye que *x* = 0 no es raíz de la función polinomial.

4.- Propón un valor para x que consideres sea la raíz de la función $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$

x = ______ evalúa *P(x)* = ______ ¿es raíz? ______ ¿Por qué? ______________________________

Se podría continuar con este proceso, sin embargo, no es un método práctico ya que es poco probable adivinar una raíz de la función polinomial.

SEGUNDO MÉTODO: POR MEDIO DE APROXIMACIONES SUCESIVAS

Procede a tabular la función, para valores desde x = -10 con un incremento de 1. Apoyate en la actividad **Raíz** del software **Raíces**

5.- Completa la tabla escribiendo los valores de la función. Escribe con <u>rojo</u> los valores negativos de la función y con <u>negro</u> los valores positivos.

x	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(X)																					

Se nota que la función cambia de signo entre *x* = -1 y *x* = 0, ya que en *x* = -1 la función es negativa y su valor es ____, mientras que en *x* = 0 la función es positiva y su valor es ____.

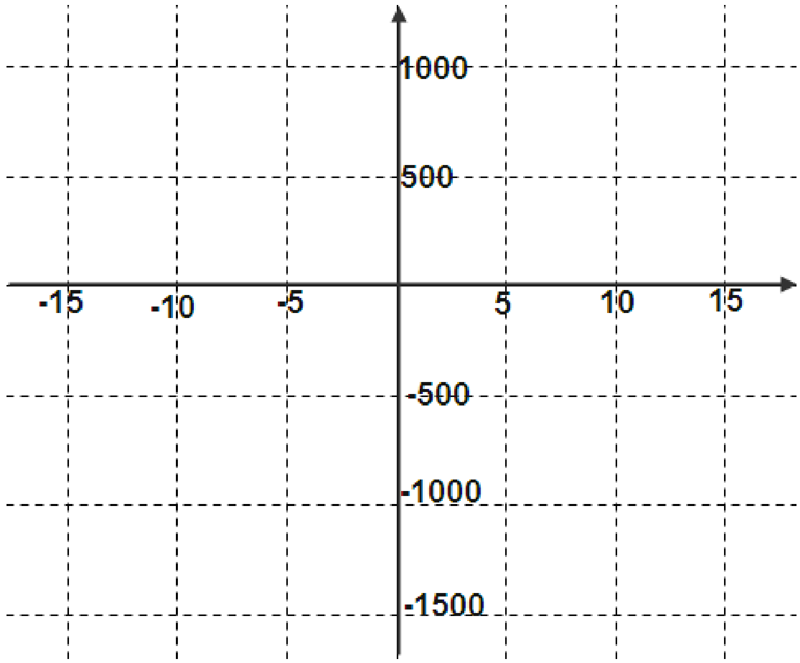
De acuerdo a la tabla:

6.- ¿Cuántos cambios de signo observas? _____________________________________

7.- ¿Cuántas raíces existen en el intervalo de *x* = -10 a *x* = 10? ____________________

8.- Entre que valores de *x* se halla la primera raíz _______________________________

9.- Grafica de forma aproximada los puntos tabulados, en el siguiente plano cartesiano.



10.- De acuerdo a la gráfica, ¿consideras que pueda existir una raíz entre *x* = -10 y *x* = -5? _____ Explica

11.- De acuerdo a los puntos trazados, ¿en qué intervalos consideras que se puedan localizar las raíces?

____

¿Explica tu respuesta? ____

12.- La primera raíz se ubica en el intervalo *x* = -1 y *x* = 0, ya que en este intervalo la función **cambia de signo** pasa de *P(-1)* = ______ a *P(0)* = ______

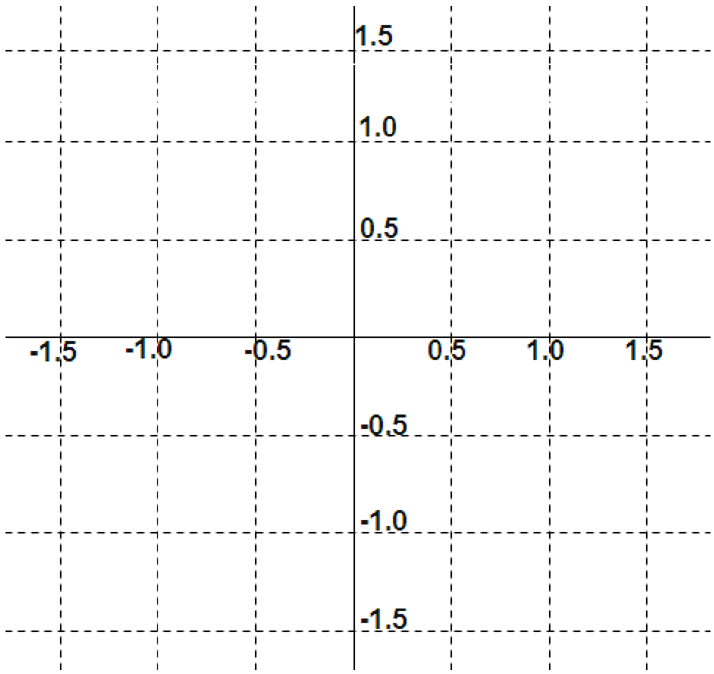
Vamos a aproximarnos a la raíz de la función que se localiza entre -1 y 0, para esto realiza una nueva tabla, el primer valor de *x* ahora será -1 y el incremento será de 0.1. Continúa apoyándote en la actividad **Raíz** del software **Raíces**

13.- Completa la tabla escribiendo los valores de la función para cada valor de *x*. Escribe con rojo los valores negativos de la función y con negro los valores positivos.

x	-1	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0
P(*x*)											

14.- La raíz se encuentra entre x_1 = _______ y x_2 = _______ ya que la función **cambia de signo**, pasa de $P(x_1)$ = _______ a $P(x_2)$ =_______

15.- Grafica de forma aproximada los puntos tabulados, en el siguiente plano cartesiano. Señala el punto que más se acerque a la raíz de la función polinomial y escribe sus coordenadas.



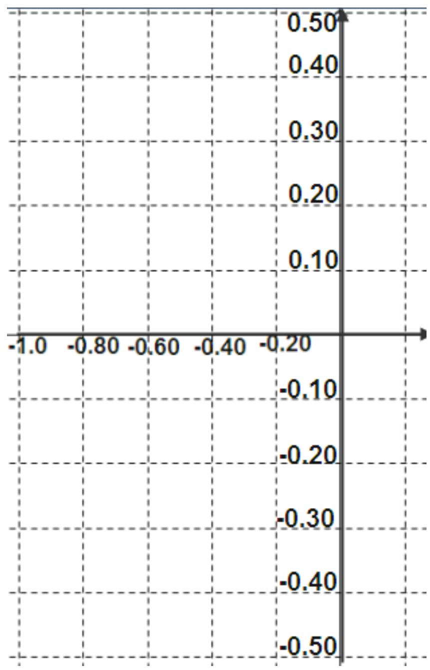
Vamos a aproximarnos aun más a la raíz de la función que se localiza entre -0.9 y -0.8, para esto construye una nueva tabla, el primer valor de *x* ahora será -0.9 y el incremento será de 0.01

16.- Completa la tabla escribiendo los valores de la función para cada valor de *x* mostrado. Escribe con <u>rojo</u> los valores negativos de la función y con <u>negro</u> los valores positivos.

x	-0.90	-0.89	-0.88	-0.87	-0.86	-0.85	-0.84	-0.83	-0.82	-0.81	-0.80
P(*x*)											

17.- ¿Entre que valores de *x* se halla la raíz? ____

18.- Grafica de forma aproximada los puntos tabulados, en el siguiente plano cartesiano. Señala el punto que más se acerque a la raíz de la función polinomial y escribe sus coordenadas.



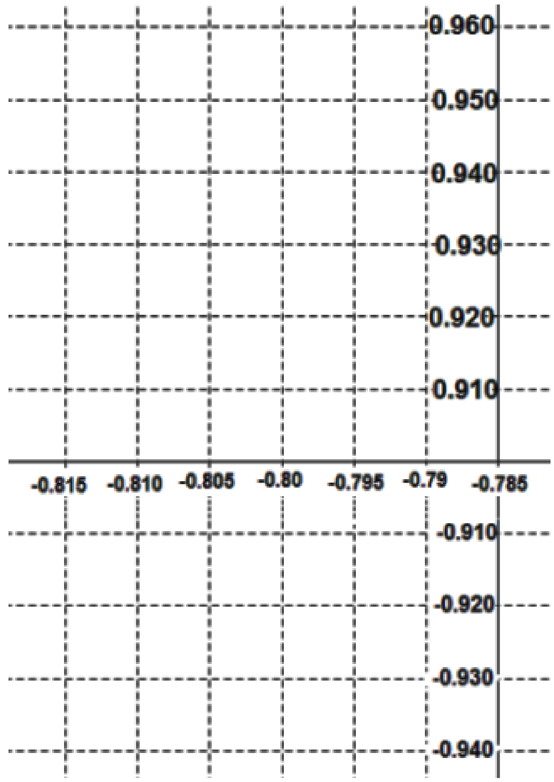
Realicemos una ultima aproximación a la raíz de la función que se localiza entre -0.810 y -0.800, para esto realiza una nueva tabla, el primer valor de *x* ahora será -0.810 y el incremento será de 0.001

19.- Completa la tabla escribiendo los valores de la función para cada valor de *x* mostrado. Escribe con rojo los valores negativos de la función y con negro los valores positivos.

x	-0.810	-0.809	-0.808	-0.807	-0.806	-0.805	-0.804	-0.803	-0.802	-0.801	-0.80
P(*x*)											

20.- ¿Entre que valores de *x* se halla la raíz? ___________________________________

21.- Grafica de forma aproximada los puntos tabulados, en el siguiente plano cartesiano. Señala el punto que más se aproxime a la raíz de la función polinomial y escribe sus coordenadas.



Se podría continuar con este proceso de ***aproximación de la raíz*** de la función polinomial, sin embargo, se considera que para nuestros propósitos es suficiente. Se elige como raíz de la función polinomial el valor de $x = -0.802$, ya que $P\ (-0.802) = -0.00026 \cong 0$

Ejercicio:

Calcula las dos raíces faltantes, recuerda que una de ellas se encuentra entre $x = 0$ y $x = 1$ y la otra entre $x = 2$ y $x = 3$.