CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD DISTRITO FEDERAL

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO EN EL BACHILLERATO TECNOLÓGICO

Tesis que presenta

Jesús Salcedo Prado

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

en la Especialidad de

Matemática Educativa

Directora de Tesis:

Dra. Ana María Ojeda Salazar

México, Distrito Federal Noviembre, 2013

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo brindado al otorgarme la beca para la realización de mis estudios de maestría en el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN.

Becario: 261545

Agradezco a:

El CECyT No. 4 por todas las facilidades brindadas
para el desarrollo de la investigación.

A la Dra. Ana María Ojeda Salazar
por compartir todo su conocimiento,
así como su valiosa orientación y recomendaciones brindadas
durante la realización de esta investigación, su apoyo
paciencia y dedicación han sido inagotables;
al Profesor Ignacio Garnica Dovala,
que siempre me ha brindado todo su saber.

A mi familia;
mis Padres han estado siempre junto a mí
amándome y apoyándome
a pesar de la distancia;
a mi tío José, Alma y Fredy
por haberme abierto las puertas de su casa.

Al Mtro. Héctor Chávez y a
los Profesores Rogelio, Mario, Javier y Fausto del CECyT
por toda la disponibilidad brindada en
la aplicación de las actividades de investigación;
a mis amigos por todos sus consejos, su ayuda
y las experiencias compartidas.

Resumen

Esta investigación se realizó con el objetivo de caracterizar la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos en estudiantes del bachillerato tecnológico del Instituto Politécnico Nacional (IPN), se organizó en tres fases: primero, se analizó el contenido del plan de estudios de Probabilidad y Estadística (DEMS, 2009) y el libro de texto (Buendía y Gutiérrez, 2011) utilizado para el curso. Después, se recogieron datos de 188 estudiantes del bachillerato tecnológico, mediante: la experienciación (Maturana, 1995) de la enseñanza de probabilidad en el aula a través de una estrategia de enseñanza en sexto semestre y por medio de actividades extra-aula aplicadas en otros semestres, así como la aplicación de cinco cuestionarios a los estudiantes de los diferentes semestres. Finalmente, se realizaron tres entrevistas semiestructuradas (Zazkis y Hazzan, 1999) para profundizar en las respuestas de los estudiantes a los cuestionarios.

Los fundamentos teóricos se refieren a propuestas epistemológicas y cognitivas. La epistemológica consiste en diez ideas fundamentales estocásticos formuladas por Heitele (1975) para un currículum en espiral y de triángulo epistemológico de Steinbring (1991) para la constitución del conocimiento matemático. La cognitiva considera resultados de la investigación de Fischbein respecto al papel de la intuición en el pensamiento probabilístico (1975) y el uso de modelos generativos para resolver los problemas de probabilidad (1977).

El análisis de la propuesta institucional para la enseñanza de estocásticos mostró que el contenido del libro de texto es pertinente al contenido temático del plan de estudios, ninguno de ellos considera el enfoque frecuencial de la probabilidad y el diagrama de árbol es colocado al mismo nivel operativo que las técnicas de conteo. En general, no hubo evidencia de un sustrato favorable proporcionado por la educación básica para desarrollar el pensamiento probabilístico de los estudiantes de un nivel intuitivo al siguiente y así prepararlo en el bachillerato tecnológico para formalizar la probabilidad en la educación superior. Muchas de las respuestas de los estudiantes a los cuestionarios no mostraron un razonamiento probabilístico, ya que no relacionaron la parte con el todo al momento de determinar probabilidades, muchos expresaron la probabilidad desde un enfoque frecuencial, los estudiantes que adivirtieron la independencia entre dos eventos determinaron la probabilidad de su conjunción sumando, en vez de multiplicar sus probabilidades, esto revela sólo el uso de operaciones de primer orden y no de segundo, necesarias en probabilidad. Las entrevistas revelaron la influencia del enfoque determinista de la enseñanza de las matemáticas en el razonamiento probabilístico de los estudiantes.

Abstract

This research was carried out in order to characterize students' understanding of fundamental ideas of stochastics at the technical high school from the National Politechnic Institute (IPN). The study was organized into three phases: firstly, we examined the content of the syllabus for Statistics and Probability (DEMS, 2009) and the textbook (Buendia and Gutierrez, 2011) used for that course. Secondly, data were collected from 188 students at a technical high school, by: experiencing (Maturana, 1995) the probability teaching in the classroom through a teaching strategy for the sixth semester students, and through extra-classroom activities applied to students from the remaining semesters, as well as applying five questionnaires to the students at the different semesters. Thirdly, three semi-structured interviews were conducted (Zazkis and Hazzan, 1999) to deepen into students' answers to the questionnaires.

The theoretical foundations concern epistemological and cognitive proposals. The epistemological one consists of ten stochastic fundamental ideas formulated by Heitele (1975) for a spiral curriculum and of Steinbring's epistemological triangle (1991) for the constitution of the mathematical knowledge. The cognitive one considers Fischbein's research results regarding the role of intuition in the probabilistic thinking (1975) and the use of generative models to solve problems of probability (1977).

An analysis of the institutional proposal for stochastics noted that the textbook content is relevant to the syllabus thematic content, however none of them considered the frequential approach to probability and the tree diagram is awarded the same operational level as the counting techniques. From an overall view, there was almost no evidence of a favorable substratum provided from the basic education to develop students' probabilistic thinking from an intuitive level to the next one so to prepare it at the technical high school for the formalized probability at the higher education. Often students' answers to the questionnaires did not exhibit probabilistic reasoning as they did not relate the part to the whole when determining probabilities, many expressing the probability from a frequential approach, and the students who realized about the independence between two events, determined the probability of their conjunction by adding instead of multiplying their individual probabilities, so revealing just first order operations but not of the second order needed for probability. The interviews also revealed the prevailing influence of a deterministic focus in mathematics teaching on students' probabilistic reasoning.

Índice

Índice de figuras

Índice de tablas

Introducción

A partir de enero del 2011, el área de concentración para la investigación en Matemática Educativa *Ciencias de la cognición y Tecnología de la Información Aplicadas* (CCTIA), del Departamento de Matemática Educativa (DME) del Cinvestav del IPN, en conjunto con algunos Profesores de matemáticas del Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos (CECyT) No. 4 “Lázaro Cárdenas del Río”, comenzaron a realizar el análisis de la propuesta educativa para la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato tecnológico del IPN. La presente investigación corresponde al análisis de la enseñanza de Probabilidad y Estadística conforme lo establece el programa de estudios del CECyT y al estado de la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos de los estudiantes de bachillerato tecnológico en su tránsito por él.

La investigación fue cualitativa (Eisner, 1998) y *en curso*. Se fundamentó en los resultados de investigaciones de carácter *epistemológico*: La lista de diez ideas fundamentales de estocásticos, propuesta por Heitele (1975) para la enseñanza mediante un curriculum en espiral; el triángulo epistemológico que establece la relación entre concepto, objeto y signo, en la construcción del conocimiento matemático dentro de la interacción *social* del aula (Steinbring, 1991). De carácter *cognitivo* se consideraron el uso de modelos didácticos generativos en la solución de problemas probabilísticos estudiado por Fischbein (1977) y sus investigaciones de la importancia de la intuición en el desarrollo de las ideas de probabilidad (1975).

Participaron en la investigación 188 estudiantes del bachillerato tecnológico “Lázaro Cárdenas del Río” y tres de sus profesores titulares de matemáticas que permitieron el acceso a sus aulas.

Utilizamos como métodos la experienciación (Maturana, 1995) de la enseñanza, por la que el investigador somete al análisis su experiencia respecto al objeto que investiga, en los escenarios de aula y de extra-aula, prescritos por el programa de estudios respectivo. Se implementaron interrogatorios a los estudiantes mediante la aplicación en el aula de cuestionarios con preguntas abiertas, para su contestación individual manuscrita, así como por medio de entrevistas semiestructuradas (Zazkis y Hazzan, 1999) personalizadas realizadas en cámara Gesell. Más específicamente, el proceso de investigación distinguió tres etapas. En la primera analizamos la propuesta del CECyT para la enseñanza de probabilidad y estadística en conjunto con el contenido del libro de texto: Estadística y Probabilidad para ser competente (Buendía y Gutiérrez, 2011), utilizado durante el curso. En la segunda etapa realizamos la experienciación de la enseñanza dentro del aula con la implementación de la estrategia de enseñanza de probabilidad y la aplicación de cuestionarios. Fuera del aula desarrollamos actividades de enseñanza extra-aula para experienciar las ideas intuitivas de probabilidad de los estudiantes. En una tercera etapa entrevistamos, con formato semiestructurado, a tres estudiantes, para profundizar en sus respuestas a los cuestionarios.

En el Capítulo 1 presentamos el carácter de la investigación, sus antecedentes, su objetivo, las preguntas de investigación que nos planteamos y la justificación de la realización de la investigación.

En el Capítulo 2 se describen los referentes teóricos en los que se basa el planteamiento de la investigación y los criterios de análisis de los datos recopilados de la revisión de la propuesta institucional, de la experienciación y de la aplicación de cuestionarios y entrevistas.

El Capítulo 3 presenta la lógica de la investigación. Especifica sus escenarios, en particular el de extra-aula; describe a los participantes y la organización en etapas, los métodos empleados, la secuencia seguida, los objetivos y el contenido de los instrumentos aplicados, las características de las estrategias de enseñanza y de las entrevistas clínicas realizadas, así como los criterios de análisis y la temporalidad de la investigación.

En el Capítulo 4 se refiere a los resultados de la investigación de la propuesta institucional, integrada por el programa de estudios de la unidad de aprendizaje de Probabilidad y Estadística y el libro de texto *Estadística y Probabilidad para ser competente* (Buendía 2011) que utilizó el Profesor durante la enseñanza.

El Capítulo 5 concierne a los resultados de ideas intuitivas de estocásticos de estudiantes del bachillerato tecnológico en los distintos semestres. Esas ideas se identificaron mediante la aplicación de cinco cuestionarios, tres actividades extra-aula y dos entrevistas. La aplicación de estos diez instrumentos no estuvo ligada a la enseñanza de Probabilidad que se imparte en el sexto semestre, sino que nueve de ellos se administraron en las Unidades de Aprendizaje que no incluyen Probabilidad, si bien uno de los cuestionarios se aplicó a un grupo de sexto semestre —que se dedica a ella— a cuya enseñanza no se dio seguimiento.

En el Capítulo 6 se presentan los resultados de la experienciación de la enseñanza de uno de los temas de Probabilidad (correspondiente al Resultado de Aprendizaje Propuesto 2) que se impartió a un grupo de sexto semestre, según se le prescribe en el Programa de Estudios respectivo (DEMS, 2009), los resultados de los cuestionarios aplicados antes y después de esa enseñanza, de una actividad extra-aula realizada al final del curso y de una entrevista semiestructurada individual.

Finalmente, el Capítulo 7 presenta las conclusiones de la investigación.

Capítulo 1
Contextualización de la Investigación

La presente investigación, de carácter cualitativo, corresponde a la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975) de estudiantes del bachillerato tecnológico. En particular, se investigó esa comprensión derivada de la propuesta de enseñanza del Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos No. 4 del Instituto Politécnico Nacional.

1.1. Antecedentes: Acuerdo Académico Colegiado de Docencia-Investigación

Esta investigación se enmarca en el Acuerdo Académico Colegiado de Docencia-Investigación, iniciado en enero de 2011 entre la coordinación del área de concentración para la investigación en Matemática Educativa Ciencias de la cognición y Tecnología de la Información Aplicadas (CCTIA), del Departamento de Matemática Educativa (DME) del Cinvestav del IPN, y el CECyT No. 4 "Lázaro Cárdenas del Río" del IPN (véase en el Anexo 1). Las dos instancias acordaron abrir espacios conjuntos para la reflexión, el análisis y el desarrollo de investigación relativa a los procesos de la Enseñanza y del Aprendizaje de las matemáticas, para establecer un vínculo que motivara a la docencia de la segunda institución hacia su iniciación en la indagación de su propia práctica en el aula, e investigar, a su vez, ese proceso en desarrollo. Se conformó un Seminario de Vinculación para orientar, fundamentar teórica y metodológicamente y programar, el desarrollo de investigaciones del campo en Matemática Educativa concernientes al bachillerato tecnológico.

Este proyecto se incorporó al programa de investigación *Probabilidades y Estadística en Matemática Educativa*, que trata la problemática de la comprensión de ideas de estocásticos en el Sistema Educativo Nacional, específicamente para examinar lo concerniente a la modalidad de bachillerato tecnológico del nivel medio superior. Se realizaron exploraciones en las Unidades de Aprendizaje del "Álgebra" del primer semestre, "Geometría y Trigonometría" del segundo semestre, "Geometría Analítica" del tercer semestre, "Cálculo Diferencial" del cuarto semestre, "Cálculo Integral" del quinto semestre y, principalmente, se consideró del sexto semestre el estado de conocimiento de las ideas fundamentales de estocásticos de los estudiantes y la enseñanza de la unidad de aprendizaje de “Probabilidad y Estadística”, según se le propone en el plan y programa de estudios del CECyT (DEMS, 2009).

El desarrollo de la presente investigación fue posible, entonces, gracias al acuerdo académico colegiado de docencia e investigación. En agosto del 2011 el CECyT No. 4 la acogió y, a partir de ahí, se realizaron observaciones de las clases de matemáticas dentro del aula, se participó en la enseñanza misma del Resultado de Aprendizaje Propuesto número dos (RAP 2; véase en DEMS 2009, p. 10), en la segunda Unidad Didáctica de Probabilidad y Estadística, se aplicaron cuestionarios, entrevistas y se desarrollaron actividades fuera del aula (extra-aula; véase en p. 3, DEMS, 2009).

1.2. Objetivo y preguntas de investigación

El objetivo principal de esta investigación fue:

Caracterizar la enseñanza de estocásticos en el bachillerato tecnológico para fundamentar una propuesta orientada a la promoción del pensamiento probabilístico hacia una formación matemática integral.

Las preguntas que promovieron la lógica de la investigación implementada fueron:

- ¿De qué forma la propuesta institucional, mediante el programa de estudios en probabilidad y estadística, repercute en la comprensión de las ideas fundamentales de estocásticos en los estudiantes?
- ¿Qué ideas fundamentales en estocásticos desarrollan los estudiantes que se forman en el bachillerato tecnológico? ¿Qué sesgos tienen respecto a esas ideas?
- ¿De qué manera ponen en juego los estudiantes otros conceptos matemáticos frente a preguntas referidas a estocásticos?

1.3 Justificación de la investigación

Ante la falta de un estudio de la propuesta de enseñanza para el aprendizaje de estocásticos en el Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos, bachillerato tecnológico correspondiente al Instituto Politécnico Nacional, es relevante incursionar en él y realizar un análisis de su programa de estudios, de sus estrategias didácticas propuestas y del dominio conceptual de probabilidad de sus estudiantes. En la actualidad, en general la enseñanza de probabilidad y de estadística recibe poca importancia dentro de los planes y programas de estudio en comparación con la de otras áreas de las matemáticas, situación que se presenta en todos los niveles del sistema educativo mexicano (Ojeda, 1994; Flores Lara, 2002; Rivera, 2011; de León, 2002). Los estudiantes que ingresan al bachillerato manifiestan sesgos de razonamiento probabilístico causados por la ausencia de la enseñanza informada correspondiente en la educación básica (Carballo, 2004; Vázquez, 2004; Elizarrarás, 2004; López, 2006; Flores, 2009).

Partiendo de un enfoque epistemológico, la enseñanza de probabilidad y de estadística debe comenzar en los niveles básicos de una forma intuitiva y, conforme se va avanzando en el desarrollo curricular, las ideas van progresando hacia lo abstracto. Éste es el principio de la propuesta de ideas fundamentales de estocásticos avanzada por Heitele (1975) y fue el principal criterio que utilizamos para identificar los conocimientos y sesgos probabilísticos de los estudiantes.

1.4 Investigación en curso

Al inicio de esta investigación, con el fin de que el investigador se incorporara al escenario empírico y participara de él, se realizaron observaciones de las clases de matemáticas, posteriormente se aplicaron cuestionarios, entrevistas y se desarrollaron actividades extra-aula. Dada su naturaleza *en curso,* no se siguió un plan prediseñado de actividades; luego de aplicar cuestionarios y realizar entrevistas se regresaba al aula a continuar con la observación de la interacción durante la enseñanza. Después se aplicaron otros cuestionarios, y se realizaron las respectivas entrevistas, al tiempo que con los estudiantes también se llevaron a cabo diversas actividades extra-aula y se participó en la enseñanza en el aula. Los resultados que se iban obteniendo de las acciones implementadas influenciaban los objetivos específicos y la proyección de las acciones subsecuentes.

Durante la investigación, en curso, la estrategia incorporada se basó en la experienciación, que es la exposición de la consciencia al análisis de los fenómenos vividos. Este método, propuesto por Maturana (1995), supone que el investigador estudia su experiencia respecto a su objeto de investigación. Con la finalidad de obtener una mayor cantidad de referentes experienciales se trató de diversificar los cuestionarios aplicados, siendo diferentes para los distintos grupos; las entrevistas se basaron en los resultados de los cuestionarios. De la misma manera, las actividades extra-aula fueron distintas para cada grupo y la enseñanza se diseñó, por un lado, con base en la propuesta del programa de estudio del Politécnico para sus bachilleratos y, por otro, en los resultados de investigaciones de carácter cognitivo y epistemológico de diferentes investigadores.

Capítulo 2

Estocásticos en el curriculum: Factores epistemológicos y cognitivos

Se ha realizado la revisión de propuestas de orden epistemológico y cognitivo respecto al planteamiento institucional para los contenidos matemáticos respectivos en el bachillerato tecnológico.

2.1. Ideas Fundamentales de Estocásticos

A partir de las siguientes cuatro perspectivas, Heitele (1975) propone una lista de diez ideas fundamentales para la enseñanza de estocásticos:

- La idea de un curriculum en espiral.
- Resultados en investigaciones de psicología del desarrollo en relación a ideas de estocásticos.
- Los errores de los adultos ante situaciones inciertas.
- La historia de la probabilidad.

Desde un punto de vista epistemológico y pragmático, Bruner define como idea fundamental la que provee al individuo un modelo explicativo tan eficiente como sea posible en cada etapa de su desarrollo, que se distingue en cada nivel cognoscitivo en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración, pero no de manera estructural. Esta lista indica las ideas que deben regir la enseñanza de probabilidad y de estadística desde el nivel básico hasta el nivel superior: medida de probabilidad, espacio muestra, adición de probabilidades, independencia, equiprobabilidad, combinatoria, modelo de urna y simulación, variable aleatoria, ley de los grandes números y muestra.

Medida de probabilidad. Es fundamental la idea de normar nuestra medida de probabilidad dentro del intervalo cerrado [0,1] de los números reales. Establecer la escala de medición en la que a los eventos imposibles se les asigna la probabilidad cero, a los eventos seguros la probabilidad uno y las relaciones de "más probable que" o "menos probable que" se presenta entre las relaciones de los números reales "$\geq$" o "$\leq$".

Espacio muestra. Es fundamental la idea de establecer un espacio muestra de resultados observables de fenómenos aleatorios y un σ-campo de conjuntos del campo de eventos observables, idea que hizo posible la axiomatización de la probabilidad.

Adición de probabilidades. Al calcular la probabilidad de un evento compuesto por dos o más eventos mutuamente excluyentes pertenecientes al mismo espacio muestra el individuo realiza la adición de sus probabilidades, principio establecido en el tercer axioma de la probabilidad:

$P(A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$ donde $A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n = \emptyset$.

Independencia. La idea de independencia en el cálculo de probabilidades implica aquellos fenómenos aleatorios cuyos posibles resultados no se ven influenciados por la ocurrencia o no ocurrencia de algún otro evento. Se calcula la ocurrencia de un evento compuesto por dos o más eventos independientes mediante la regla del producto, de la que resulta:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$

donde $A_{1,}\ A_{2,}\ A_3\ \dots\ A_n$ son eventos independientes.

Aquí se presenta como fundamental el concepto de probabilidad condicional, es decir, la probabilidad de que ocurra cierto evento *A* dado que ha ocurrido el evento *B*, si éste no es imposible:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A), \qquad \text{donde } P(B) \neq 0.$$

Equiprobabilidad. Una idea que también se considera fundamental es la identificación de probabilidades iguales para eventos de un mismo fenómeno aleatorio, la cual se puede aceptar *a priori* de la forma en que la plantea la regla de Laplace, o se le puede comprobar *a posteriori* mediante la experimentación.

Combinatoria. Las operaciones combinatorias son más que sólo algoritmos estándar para calcular la cardinalidad de espacios muestra de fenómenos aleatorios (para los casos discretos). Esas operaciones, en conjunto con una representación gráfica como el diagrama de árbol, proporcionan una entrada sencilla, principalmente en su forma icónica y activa, a la estructura interior de fenómenos aleatorios. Una de las principales tesis de Piaget es que al camino a la comprensión de los conceptos de azar y de probabilidad le subyacen las operaciones combinatorias básicas (señalado por Heitele, 1975, p. 198). Destaca también la capacidad de la combinatoria para clasificar en cierto tipo estándar a los fenómenos aleatorios, desde los más simples hasta los más complejos, conforme a su composición: permutaciones, variaciones y combinaciones.

Modelo de urna y simulación. Asignar modelos de urnas a los fenómenos aleatorios que poseen un espacio muestra numerable permite probar *a posteriori* si una muestra es o no aleatoria. Se puede modelar un fenómeno aleatorio complejo mediante el empleo de hiper-urnas. Mediante un modelo de urnas se puede mostrar la simulación de fenómenos aleatorios.

Variable aleatoria. La variable aleatoria es la función que tiene como dominio el espacio muestra y como contradominio un subconjunto de los números reales. Esta idea es elemental en relación a tres puntos: la distribución de la variable, su esperanza y la composición de variables estocásticas para obtener otras nuevas. Es también fundamental en los juegos de azar y en una gran cantidad de fenómenos físicos, psicológicos, sociales y biológicos.

Ley de los grandes números. Existe una ley empírica de grandes números y una ley matemática de los grandes números. La primera es observable en la realidad. Filosóficamente, es interesante que se presente globalmente una regularidad inmanente al curso de la naturaleza, a la que Wagemann llamó *libertad individual bajo restricción colectiva* (como lo señala Heitele en su artículo) y que se refiere a la convergencia entre los valores de la frecuencia relativa de los eventos independientes realizados y su probabilidad *a priori* correspondiente. Este principio posee una correlación matemática interna con la ley de los grandes números que se deriva del modelo del campo de la probabilidad. Dos modelos inadecuados relacionados a este principio son: el modelo de la alternancia: "después de sol, águila es más probable que sol"; y el modelo de seriación: "si es una racha de buena suerte no la abandono". Estos sesgos han sido señalados por su recencia en la obra de Fischbein (1975).

Muestra. Esta idea resulta fundamental porque todos nuestros conocimientos y juicios se basan en muestras. Prejuzgar no es otra cosa más que juzgar a partir de la base de muestras no representativas. Ya que sólo es posible pensar, juzgar e inferir a base de muestras, se debe instruir al individuo para que, al igual que el experto en estadística, adquiera la capacidad de argumentar cuidadosa y críticamente, siendo consciente de las consecuencias y daños de tomar una decisión equivocada.

2.2. Mezcla aleatoria, un enfoque epistemológico genético

Piaget e Inhelder (1951) realizaron un estudio epistemológico genético de la idea de azar. De sus resultados concluyeron que el surgimiento de la idea de azar en el niño se origina en la etapa de las operaciones concretas (7-11 años de edad) y se completa durante el período de las operaciones formales. En sus investigaciones, Piaget estudió el desarrollo de la idea de azar junto con el concepto de mezcla aleatoria. Siguiendo el desarrollo ontogenético Piaget observó que en edades tempranas se reconocen las mezclas como reversibles, esto es cuando los hechos mentales son irreversibles, ejemplos de estos son la inteligencia infantil intuitiva, la motricidad elemental y la percepción; con el desarrollo del individuo la inteligencia y sus operaciones se tornan reversibles, es con la aparición de estas formas de pensar que el individuo puede construir los conceptos de azar y de lo irreversible (mezcla).

Los investigadores presentan al niño una caja rectangular con canicas de dos colores, inicialmente ordenadas por color, que conforme la caja se balancea se mezclan las ccanicas en su interior. Los niños en un nivel de pensamiento irreversible, carente de composición operatoria, después de dos balanceos consideran el regreso de las canicas a su posición inicial; entre los 7-8 años, que es la edad en la que se construyen los primeros agrupamientos lógicos, para el infante una mezcla creciente es el caso más probable y aún considera la posibilidad del regreso a la posición inicial, pero sólo como un caso muy poco probable. Alrededor de los 11-12 años logra analizar el mecanismo real de la mezcla al comprender el conjunto de trayectorias simultáneas de todas las canicas como un sistema de entrecruzamientos producidos por choques, que puede ser calculado mediante una secuencia de permutaciones.

Las concepciones probabilísticas se inician durante el período de las operaciones concretas al caracterizar los sistemas no componibles e irreversibles, en oposición a las primeras coordinaciones operatorias reversibles; y se completa hasta la etapa de las operaciones formales, en que se constituyen composiciones no aditivas y que no son asimilables mediante operaciones lógico-aritméticas o espacio-temporales, que pertenecen como sistemas totales a operaciones combinatorias, operaciones no ordenadas y de las que sólo algunas se realizan comúnmente en el conjunto de los casos posibles. Éstas se denominan operaciones de segundo orden.

De ahí la relación entre el origen de la idea de azar, como comprensión gradual de la irreversibilidad, con el desarrollo de las operaciones reversibles, sencillamente concretas en un inicio, después combinatorias y formales para abarcar todas las posibilidades.

2.3. El triángulo epistemológico del conocimiento probabilístico

Steinbring (1991) presenta una reflexión acerca del desarrollo histórico de los conceptos de probabilidad y azar, los puntos de vista de la forma en que se constituyen los conceptos, la circularidad de las definiciones de los conceptos probabilísticos y el caso del desarrollo de la ley de los grandes números y su explicación mediante el teorema de Bernoulli. De todo esto deriva su propuesta del triángulo epistemológico del conocimiento probabilístico. En la segunda parte de su artículo hace una crítica a las estrategias desarrolladas en la enseñanza de probabilidad y estadística.

2.3.1. La relación entre probabilidad y azar

En los inicios de la historia de la probabilidad, los juegos de azar proveían situaciones simples e ideales, en las cuales tanto una forma directa de azar como una estructuración concreta de los aspectos regulares se manifestaron en la simetría física de los dispositivos de azar y su uso. Lanzar una moneda es una forma original de azar y desorden para la cual las posibilidades de una modelación regular fueron, sin embargo, ofrecidas por la simetría física. Mientras se descuidaron las definiciones matemáticamente precisas, los juegos de azar constituyeron un concepto de probabilidad elementalmente concreto, como una predicción con respecto a la ocurrencia o no ocurrencia de ciertos eventos y hacia una certeza gradual decisiva.

La relación fundamental entre azar y regularidad, entre fenómeno aleatorio irregular por un lado y las ideas matemáticas de modelación y su descripción de una manera regular y formal por el otro, al inicio fue explicada plausiblemente mediante una representación intuitiva de la ley empírica de los grandes números. Esta ley establece que la estabilidad de la frecuencia relativa de eventos, que emerge de los resultados irregulares de la repetición de ensayos experimentales, proporciona un valor aproximado al valor ideal calculado de acuerdo con la teoría elemental.

La relación entre frecuencia relativa y probabilidad clásica dentro de la ley empírica de los grandes números, no obstante, es un hecho que también debe ser analizado matemáticamente y descrito por modelos y reglas. En la historia reciente de la teoría de la probabilidad, el teorema de Bernoulli es la primera formulación exacta.

Teorema de Bernoulli

Sea h_n la frecuencia relativa de 0 a n ensayos independientes con dos resultados 0 y 1, los cuales tienen la probabilidad $p \in [0,1]$ y $q = 1 - p$, entonces, dados dos números reales $\varepsilon > 0$ y $\eta > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall\, n \geq n_0$:

$$P(|h_n - p| < \varepsilon) \geq 1 - \eta.$$

En total se tienen tres cantidades variables: primero la precisión de la declaración considerada, la cual es medida por ε, luego la certeza con la que se sostiene la declaración, medida por η y, finalmente, el número de ensayos hechos, el cual está dado por n. Estos tres parámetros son mutuamente dependientes, es posible fijar dos y entonces estimar el tercero. La declaración acerca del teorema de Bernoulli, de que hay una gran probabilidad de que la frecuencia relativa y la probabilidad del experimento estocástico se aproximen si el número de ensayos se incrementa, es una expresión de la circularidad de la definición del concepto y de la complementariedad de las situaciones empíricas y la modelación matemática.

Esta circularidad, o autorreferencia, implica que se debe interpretar al conocimiento, en todos los estados de su desarrollo, como una estructura compleja que no se puede extender de una manera lineal o deductiva, sino que requiere un cambio cualitativo continuo en todos los conceptos de la teoría.

El problema de la justificación del estado epistemológico del conocimiento representa de otra manera esta perspectiva modificada de su desarrollo como un proceso retroalimentado, autoorganizado y autorreforzado: la teoría de la probabilidad no se puede construir deductivamente desde conceptos elementales básicos, por el contrario, es sólo el desarrollo de la teoría el que determina y especifica progresivamente los significados y aplicaciones de esos conceptos básicos. Esto implica que los conceptos básicos también se desarrollarán continuamente más y se enriquecerán si la teoría se aumenta y extiende.

Todos los intentos por definir el concepto de azar o aleatoriedad, sea por secuencias aleatorias independientes o por medio de información teórica, muestran que este concepto no puede ser comprendido a priori de una manera formal y definitiva. Si, por ejemplo, la secuencia 0001110111... (etc.) es o no es una secuencia aleatoria, nunca se puede decidir verdaderamente en un sentido estricto. En el marco de una fundamentación de la información teórica del concepto de azar, uno se confronta con el problema de la indecisión: Para casi todas las secuencias (de 0 y 1) (muy grandes o infinitas) no se puede probar si en verdad son secuencias aleatorias o no. Sólo hay descripciones relativas de aleatoriedad: así por ejemplo, decidir si una secuencia es aleatoria o no sólo se puede hacer según el desarrollo de pruebas estadísticas. La secuencia se debe analizar por medio de pruebas de aleatoriedad existentes para establecer si es aleatoria o no en relación con la prueba teórica.

La idea de que el conocimiento estocástico tiene un carácter de sistema complejo en cada nivel de desarrollo implica, entre otras cosas, que este conocimiento se crea como una forma relacional o un mecanismo de unión entre los aspectos de cálculo formales y los contextos interpretativos. Esta forma relacional de significado matemático se caracteriza por el triángulo epistemológico del conocimiento matemático:

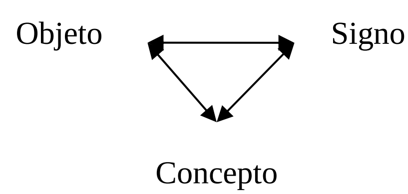


Figura 2.1 Triángulo epistemológico del conocimiento matemático (tomado de Steinbring, 1991, pág. 506)

El triángulo epistemológico representa un diagrama relacional en el cual el significado del conocimiento no se puede ser deducir desde uno de los vértices, el formal o el objetivo, sino que siempre requiere un balance entre todos los vértices del triángulo.

El desarrollo histórico del concepto de probabilidad permitió una creciente automatización de lo formal y el nivel del signo, como opuesto al nivel empírico.

Históricamente han habido intentos repetidos para dar definiciones que supuestamente hacen posible una fundamentación no ambigua de la teoría; son definiciones en el lado formal del signo: la Probabilidad Laplaciana, probabilidades lógicas, probabilidades comparativas; son definiciones en el lado del objeto: probabilidades como frecuencias, probabilidades operativas. Durante este proceso, sin embargo, hubo una creciente idea de que no puede haber una definición explícita de probabilidad, no ambigua y universal. Una importante conclusión de esto es que solamente puede haber, en última instancia, definiciones implícitas de conceptos, definiciones que representan la relación entre el nivel del signo y el nivel del objeto como una relación abierta y sujeta a desarrollo.

2.3.2. La formación del conocimiento de estocásticos en el aula

Hay una contradicción en la concepción del conocimiento estocástico, de acuerdo a la cual este conocimiento no se organiza deductivamente y sólo se le puede entender adecuadamente como un proceso autoorganizado con las condiciones de enseñanza y aprendizaje diarias dentro del aula de matemáticas. El proceso de enseñanza está supuestamente organizado paso a paso de la forma más simple posible. La estructura curricular de la teoría de la probabilidad, así como de las unidades de enseñanza y su interpretación, siempre tienden a construir este conocimiento de una forma lineal y consecutiva, la cual se asume simple para el estudiante. En el marco de tal interpretación del conocimiento, la implementación de la teoría de probabilidad dentro de la práctica de la enseñanza está sujeta a los siguientes dos principios metódicos centrales:

1. Los conceptos básicos de teoría de probabilidad son introducidos de una forma reducida. Esto significa que conceptos básicos limpios e indiscutibles se definen desde el principio mismo de la secuencia de enseñanza y que estos conceptos se ejercitan de una manera metódicamente formal y sin referencias potencialmente múltiples.
2. En conformidad, el concepto de probabilidad se considera como un cociente formal o fracción: ya sea como proporción relativa derivada de la así llamada probabilidad clásica, o como una relación empíricamente dada, es decir, como frecuencia relativa dentro del marco de representaciones metódicamente desarrolladas que conciernen a la ley de los grandes números.

En la secuencia de la enseñanza de probabilidad elemental hay una ruptura epistemológica: en la enseñanza elemental de estocásticos, los instrumentos simples de azar, como los dados, juegos de barajas o ruletas, etc., se elaboran metódicamente, de manera que parece que permiten una determinación inmediata de probabilidades y de posibilidades de combinación. Esta simplicidad inicial rápidamente reditúa en una nueva dificultad: con la separación inicial de símbolos y modelos, las situaciones aleatorias concretas respectivas, los medios estocásticos ya no le permiten a uno encontrar soluciones directas y significados estocásticos.

2.4. Enfoques de la probabilidad

Existen distintas formas de considerar la probabilidad (Konold, 1991). Según la *interpretación clásica*, a priori, que tiene cierto grado de subjetividad en lo verdadero de una proposición, la probabilidad de un evento es la razón del número de alternativas favorables a ese evento, en relación al total de alternativas, siempre y cuando éstas sean igualmente probables. Esta definición es imperfecta, ya que la definición es circular: la probabilidad se define en términos de alternativas igualmente probables.

Según la *interpretación frecuencial*, derivada de la empiria, la probabilidad de un evento es el límite de su frecuencia relativa de ocurrencia en un número infinito o casi infinito de ensayos. Aunque esta interpretación es considerada como objetiva, no está libre de subjetividad. Esta interpretación requiere de un observador que lleve el conteo de los eventos, en un orden y para acumular una suma de ocurrencias, ese observador debe considerar los eventos que son "del mismo tipo".

De acuerdo a las *interpretaciones subjetivistas*, la probabilidad es la medición de la creencia en la verdad de una proposición. En la formalización de las interpretaciones subjetivistas, los teóricos han adoptado varios mecanismos que conducen a la revisión de las probabilidades iniciales y que arrojan nueva información, según los resultados de los ensayos efectuados.

El significado del valor de la probabilidad en una interpretación subjetivista se puede concebir de diferentes maneras, como:

a) Descripción del valor de la probabilidad según la creencia que una persona tiene de lo que puede acontecer en una apuesta.
b) Consideración de todos los eventos a los cuales se les asigna una probabilidad como una colección.

2.5. Investigaciones sobre razonamiento probabilístico

En las investigaciones en Psicología y en Educación matemática sobre comprensión de la probabilidad condicional y el razonamiento condicional, realizadas por Díaz (2009) y Konold (1991), se describen diferentes errores y algunas de las razones a las que se deben, así como algunas variables que facilitan la resolución de los problemas sobre estos conceptos.

Distintas investigaciones muestran que el tema tiene una amplia variedad de matices y los alumnos lo asocian con la problemática de la causalidad y la temporalidad, y se les dificulta la identificación de los experimentos compuestos en el caso de situaciones sincrónicas. Se confunden independencia y exclusión, se cambian los términos de la probabilidad condicional, se confunde ésta con la conjunta y se asigna a la probabilidad conjunta un valor mayor que a la probabilidad simple, violando las reglas lógicas del cálculo de probabilidades (Díaz, 2009).

Los psicólogos cognitivos han identificado errores en el razonamiento de la gente ante situaciones inciertas. Las personas arriban a criterios probabilísticos mediante consideraciones cualitativamente diferentes a las realizadas en estadística. Debido a la habilidad limitada para procesar información, la gente utiliza criterios heurísticos que le permiten compactar grandes cantidades de datos rápidamente para tomar decisiones. Las estimaciones heurísticas se ven limitadas en el tipo y en la cantidad de información. Según la "heurística de representatividad", se estima la probabilidad de una muestra considerando el grado de similitud entre esa muestra y la población (Konold, 1991).

Algunos resultados de investigaciones con estudiantes de universidad indican que muchos de ellos realizan una interpretación no probabilística al reflexionar sobre la incertidumbre de un evento, como la de "aproximación al resultado". Cuando ésta rige al juicio del estudiante, el objetivo en situaciones inciertas no es determinar la probabilidad de ocurrencia de un determinado evento, sino más bien predecir el resultado en un solo ensayo del fenómeno aleatorio en cuestión (Konold, 1991).

2.6. Modelos Generativos

Fischbein (1977) establece la hipótesis de que los modelos didácticos, y específicamente los modelos intuitivos, deben tener una capacidad heurística, como sucede con los modelos científicos. La razón de esto es que los modelos, ya sean científicos o didácticos, deben constituir una componente viable para el pensamiento productivo.

Un buen modelo pictórico es, necesariamente, un modelo generativo. Un modelo es genuinamente útil en el pensamiento productivo si puede representar correctamente un número ilimitado de situaciones diferentes, usando un número limitado de elementos o reglas. El sistema de reglas que establece un modelo para expresar unívoca y estructuralmente al original constituye la sintaxis del modelo.

El valor de un modelo pictórico se expresa por su capacidad generativa natural.

El autor señala que los diagramas de árbol usados en combinatoria, que usan siempre las mismas convenciones, contribuyen a la obtención de la solución correcta para todas las posibles preguntas pertenecientes a la misma clase. El modelo es consistente internamente; expresa un principio, un método para construir los arreglos. El modelo es realmente activo como una herramienta intelectual: con él se resuelve el problema, y no sólo se describe la solución. Con un modelo tal aprendemos a pensar efectivamente y a comprender activamente.

Los diagramas de Venn también constituyen una técnica consistente para expresar operaciones con conjuntos. Es una técnica visual generativa, que usa una lógica figurativa; la solución se obtiene usando de una manera consistente solamente el lenguaje figurativo.

El uso de las gráficas, como presentación de relaciones entre clases o valores numéricos y valores (también numéricos), requiere la comprensión del papel que juega el *producto cartesiano*, que ha sido tema de investigaciones acerca del tratamiento que se le da a las gráficas en tareas de construcción e interpretación por estudiantes de bachillerato para el caso de los ejes cartesianos. Acuña (2006) observa que en la interpretación de una gráfica los estudiantes pueden considerar al marco de referencia como parte de la gráfica, el marco de referencia está conformado por los ejes y las marcas de distancia en ellos. Esta equivocación ocurre cuando la gráfica es interpretada como un dibujo y no se piensa como figura, cuando se trata la gráfica como un dibujo solo se observan las propiedades de la representación pictórica y al tratarla cómo figura se toman en cuenta las propiedades matemáticas correspondientes a la representación gráfica. Un aspecto relacionado con estos dos niveles de tratamiento de las gráficas es la interpretación visual, los estudiantes que consideran a las gráficas como dibujos tienden a construir una relación Gestalt particular, basada en una aprehensión global y en consideraciones propias que generan una buena Gestalt; en algunos casos los alumnos construyen e interpretan graficas que terminan cambiando por representaciones que les parecen más familiares.

Al construir y tratar con gráficas, los estudiantes no se dan cuenta de sus propiedades no ostensivas: la prolongación infinita de rectas, la colocación homogénea de las unidades sobre los ejes y la posibilidad de colocar marcas sobre los ejes.

2.7. Aproximación intuitiva a la probabilidad

A partir del análisis de los resultados de investigaciones, realizadas por varios psicólogos respecto a los conceptos de probabilidad, Fischbein (1975) describe el papel de la intuición en el desarrollo de las ideas de probabilidad y cómo ambas son influenciadas por la enseñanza. El autor considera la intuición como una componente de la cognición, a partir de lo que se manifiesta:

… - Las intuiciones son componente de la inteligencia en acción.
- Las intuiciones son adquisiciones estructurales.
- La inteligencia es cognición.
- Las intuiciones ejecutan la función de engranar el conocimiento a la acción.
- Las intuiciones constituyen procesos cognitivos autónomos con funciones únicas e importantes.
- La intuición es un programa de acción, parcialmente autónomo dentro de la cognición. Es una síntesis dentro de la experiencia individual en un dominio dado. Debido a su naturaleza global e inmediata es capaz de controlar la acción instantánea.

(Colín, Garnica, Ojeda, 1993)

El individuo utiliza dos tipos de intuiciones: la intuición de frecuencia relativa y la intuición de muestreo. La intuición de frecuencia relativa se pone en juego en la predicción basada en secuencias de eventos en las que el orden es importante, lo que se manifiesta al enfrentarse a sucesiones de eventos. En este caso hay tres posibles sesgos:

- De recencia positiva. Consiste en predecir el evento más frecuente de la última secuencia de eventos.
- De recencia negativa. Consiste en predecir el evento menos frecuente de la última secuencia de eventos.
- De alternancia. Lleva a predecir eventos según un patrón particular. Es una conducta reiterativa en niños menores de diez años.

En la intuición de muestreo el individuo tiende a aparear sus predicciones de la composición de una población con la proporción de sus elementos en una muestra dada.

En relación a los resultados de las investigaciones de Piaget respecto a la génesis de la idea de azar, Fischbein (1975) realizó los mismos experimentos y concluyó que antes de la etapa operacional el niño posee una intuición del azar y lleva a cabo estimaciones intuitivas del azar; conforme avanza la edad, en contraposición a lo declarado por Piaget, la estimación de probabilidades se empobrece. En situaciones con resultados equiprobables se tiene un porcentaje más alto de respuestas correctas con niños de preescolar, en comparación con niños de 12 a 13 años. Al avanzar la edad las respuestas se vuelven más erráticas e incorrectas. La justificación de estos resultados parece radicar en la enseñanza, pues en las escuelas predomina una enseñanza determinista que instruye al individuo a encontrar *una sola respuesta correcta* a las preguntas, por lo que es necesario incluir la enseñanza de la probabilidad desde preescolar para evitar sesgos el razonamiento estocástico.

Capítulo 3

Lógica de la investigación

En esta investigación, cualitativa y *en curso*, se aplicó el método de la *experienciación* de la enseñanza. Maturana (1995) lo propone como el sometimiento al análisis de la experiencia de lo que se investiga:

> … el fenómeno señalado socialmente con la palabra inteligencia sólo surge en las interacciones y no puede asumirse que sea la expresión de alguna propiedad individual vinculada a alguna estructura plástica particular del organismo, porque las estructuras plásticas de éste que participan en el fenómeno de acoplamiento estructural lo hacen sólo de modo contingente mientras participan constitutivamente en la dinámica estructural de su realización como sistema (autopoiético) viviente. El fenómeno de la inteligencia surge en las interacciones de los sistemas vivientes a través de su vivir en el proceso de vivir.
>
> (Maturana, 1995, p. 26)

Se complementó la experienciación de la enseñanza con interrogatorios mediante cuestionarios y entrevistas semiestructuradas individuales, así como con una investigación documental referente a la propuesta del bachillerato tecnológico para Probabilidad y Estadística.

3.1. Características de la investigación cualitativa

De acuerdo con Eisner, según lo refiere Rivera (2011), las investigaciones cualitativas se caracterizan por lo siguiente: están enfocadas en contextos específicos de espacio, tiempo y participantes: estudiantes y profesores de cierta institución, de tal grado, en un periodo dado. Estas investigaciones examinan hechos y objetos intactos y los investigadores dirigen la atención desde la posición en la que el *yo* actúa como instrumento de la investigación.

La naturaleza interpretativa de estas investigaciones en el análisis se justifica por todo aquello que se ha observado, desde el fenómeno en mira hasta lo que se deriva de él o que interviene en su desarrollo. Otro rasgo alude al uso del lenguaje, “incorporando los aspectos expresivos y connotativos al lenguaje proposicional, la presencia de la voz de quien habla en su lenguaje propio y la capacidad para captarlo” (p. 27).

La investigación cualitativa atiende a lo concreto, no está apremiada por la prisa de generalizaciones, sino por profundizar en el objeto de estudio que precisa mayor atención a la captación de los atributos. Se selecciona un caso para ser comprendido profundamente.

Finalmente, el diseño cualitativo se evalúa en términos de su aporte a la comprensión de los hechos, con base en su coherencia, intuición y utilidad instrumental, es decir, en qué tan aplicable es.

3.2. Los escenarios de la investigación

Fueron variados los espacios para la realización de la investigación. Los seminarios de investigación y de vinculación, la propuesta institucional, el aula de matemáticas del CECyT, los espacios extra-aula, la cámara Gesell (véase la Figura 3.1).

3.2.1. Seminarios

En el Seminario de Investigación se diseñaron y planearon las actividades de enseñanza, el diseño de instrumentos y el análisis de la propuesta institucional.

En el Seminario de Vinculación, de docencia-investigación, en el que participan cuatro Profesores de matemáticas del CECyT No 4, se planearon y gestionaron las actividades a realizar con los grupos de estudiantes y la aplicación de instrumentos de investigación.

3.2.2. Propuesta institucional

Incursionamos en lo propuesto por el programa de estudios del CECyT respecto a la enseñanza de probabilidad y estadística, en la que identificamos las ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975) contenidas en la propuesta, de la misma manera examinamos el libro que fue utilizado durante la enseñanza: *Estadística y probabilidad para ser competente* (Buendía y Gutiérrez, 2011).

3.2.3. Aula y extra-aula para la enseñanza

En el aula de matemáticas en el CECyT No 4 se observó la enseñanza, se le experienció al impartir el tema de probabilidad y se aplicaron los cuestionarios de investigación.

Para la asignatura de matemáticas en todos los semestres del bachillerato tecnológico, el programa de estudios destina una hora por semana para la enseñanza en espacios externos al aula (DEMS, 2009), por lo que definimos *Extra-aula* como: *Espacio externo al aula de matemáticas para un tratamiento adicional de sus temas o de otros relacionados*.

3.2.4. Cámara Gesell para la entrevista

En cámara Gesell, en Cinvestav, se realizaron tres entrevistas semiestructuradas individuales a estudiantes que proporcionaron respuestas de interés para la investigación en su contestación a cuestionarios aplicados en el aula. Las entrevistas se consideraron como actividades extra-aula para los estudiantes.

3.3 Métodos en la investigación

La investigación se realizó en tres fases. Inicialmente se realizó una investigación documental en la que se analizaron el programa de estudios del CECyT y el libro de texto utilizado en la enseñanza de probabilidad. En la segunda fase se realizó la experienciación (Maturana, 1995) de la enseñanza de probabilidad con la implementación de la estrategia de enseñanza, la aplicación de cuestionarios y el desarrollo de actividades extra-aula; todo ello con base en las ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975) que son objeto de enseñanza conforme a la propuesta institucional. En la tercera fase se profundizó en las contestaciones dadas por los estudiantes a tres de los cuestionarios aplicados con la realización de entrevistas.

3.3.1. La propuesta institucional

La investigación documental se basó en la célula de análisis de la enseñanza (Ojeda, 2006). Se examinó la propuesta del programa de estudios y el contenido del libro de texto *Estadística y probabilidad para ser competente* (Buendía y Gutiérrez, 2011), seleccionado por el Profesor titular de la asignatura para la enseñanza de la Unidad de Aprendizaje de Probabilidad y Estadística. La finalidad de la investigación documental fue mostrar las ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975) planteadas por el programa de estudios para la enseñanza de probabilidad y estadística y las contenidas en el libro de texto.

El análisis fue guiado en los seminarios de Investigación y de Vinculación (véase en la Figura 3.1).

3.3.2. La experienciación de la enseñanza de probabilidad

El proceso de experienciación constó de dos partes, la realizada dentro del aula con la aplicación de la estrategia de enseñanza y los cuestionarios y la que se realizó fuera del aula con el desarrollo de las actividades extra-aula (véase la Figura 3.1).

3.3.2.1. Aula. Se aplicó la estrategia de enseñanza correspondiente al RAP 2 de la segunda Unidad Didáctica Probabilidad (**SE-RAP2**) a un grupo de sexto semestre (6IM15) con 51 estudiantes, con una duración de ocho horas; fue conducida por este investigador y tuvo como objetivo que el estudiante pudiera calcular la probabilidad de eventos que cumplan con sus axiomas, en la solución de problemas.

En este escenario se realizaron también interrogatorios individuales escritos mediante la aplicación de cuestionarios (véase su especificación y nomenclatura en el apartado 3.4.2 y en la Tabla 3.1), para recopilar datos acerca de la puesta en juego o no del razonamiento probabilístico de los estudiantes del bachillerato tecnológico que cursaban distintas unidades de aprendizaje de matemáticas.

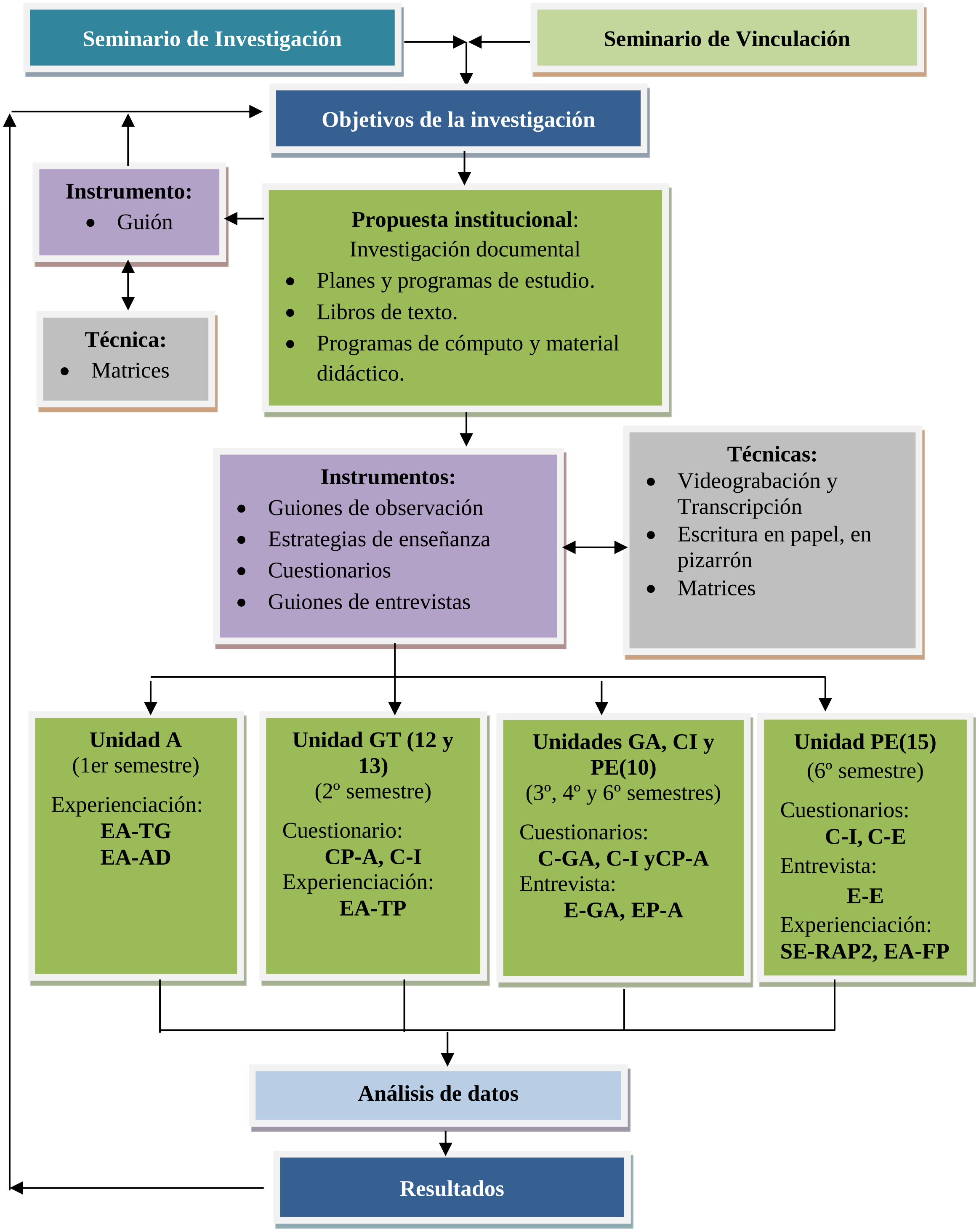


Figura 3.1. Organización de escenarios, instrumentos y técnicas respectivos. En las tercera y cuarta casillas de las Unidades de Aprendizaje se distingue entre PE(10) y PE(15); PE(10) corresponde al grupo (6IM10) de Probabilidad y Estadística al que se le aplicó el CP-A y PE(15) al grupo (6IM15) al que se dio el seguimiento de la estrategia de enseñanza SE-RAP2. En la segunda casilla C-PA y EA-TP se aplicaron a 2IV12 y C-I a 2IV13.

3.3.2.2. Extra-aula. Se realizaron cuatro actividades didácticas con el objetivo de investigar la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975) a un nivel intuitivo en los estudiantes del bachillerato tecnológico, tuvieron una duración total de diez horas, se realizaron en salas del Cinvestav, cuyo contenido, participantes y nomenclatura se especifica a continuación:

Probabilidades y el tablero de Galton (**EA-TG**), con seis estudiantes de la Unidad de Aprendizaje de Álgebra de un grupo de primer semestre (1IV13). El objetivo principal fue investigar acerca de las intuiciones de los estudiantes del bachillerato tecnológico respecto a la distribución binomial;

Cálculo de probabilidades con el triángulo de Pascal (**EA-TP**), en la que participaron tres estudiantes de un grupo de segundo semestre (2IV13) que cursaba la unidad de Geometría y Trigonometría. La actividad tenía como principal objetivo identificar cómo usaban los estudiantes el triángulo de Pascal para determinar el término, de una expresión binomial desarrollada, correspondiente a la probabilidad de un número dado de éxitos en una sucesión de ensayos independientes de Bernoulli. Esta actividad se desarrolló en un aula del Cinvestav;

Probabilidad y apuestas con dados (**EA-AD**), desarrollada con seis estudiantes de un grupo de primer semestre (1IV12) que cursaba la unidad de Álgebra. El objetivo fue investigar cuáles eran las nociones de la ley de los grandes números que tenían los estudiantes. La actividad consistió en un juego de apuestas con dados y se plantearon preguntas referentes a medida de probabilidad, espacio muestra y ley de los grandes números;

Frecuencias y probabilidad (**EA-FP**), realizada con diez estudiantes de un grupo de sexto semestre (6IM15) después de finalizada su enseñanza de probabilidad en el aula. La actividad desarrollada tuvo el objetivo de obtener datos de la comprensión de los estudiantes del enfoque frecuencial de la probabilidad después de haber recibido la enseñanza de probabilidad y estadística (véase la Figura 3.1).

3.3.3. La entrevista

Con formato semiestructurado (Zazkis y Hazzan, 1999), se realizaron tres entrevistas individuales (véase la Figura 3.1) con el objetivo de profundizar en la comprensión de los estudiantes de ideas fundamentales de estocásticos, identificada por las respuestas que proporcionaron en alguno de los cuestionarios:

Primera entrevista (**E-GA**): se entrevistó a un estudiante de tercer semestre del grupo 3IM9 por sus respuestas al cuestionario C-GA.

Segunda entrevista (**EP-A**): se aplicó a un estudiante de sexto semestre del grupo 6IM10 por sus contestaciones al cuestionario CP-A.

Tercera entrevista (**E-E**): se realizó con un estudiante, también de sexto semestre del grupo 6IM15, por sus respuestas al cuestionario C-E.

3.4. Instrumentos y técnicas

Los instrumentos utilizados en la investigación fueron: cuestionarios, estrategias de enseñanza, guiones de entrevista clínica semiestructurada (Zazkis y Hazzan, 1999) y guión de investigación documental. Las técnicas de registro de datos fueron: la videograbación, su transcripción, la escritura en papel y matrices.

3.4.1 Guión de investigación documental

El análisis del programa de estudios de Probabilidad y Estadística y del libro de texto *Estadística y probabilidad para ser competente* (Buendía y Gutiérrez, 2011) se realizó con base en el conjunto de diez ideas fundamentales de estocásticos propuesto por Heitele (1975), el uso de los modelos generativos didácticos de Fischbein (1977), la vinculación del tema de probabilidad con otros conceptos matemáticos y el uso de los términos empleados para referirse a estocásticos; todos ellos elementos de la célula de análisis de la enseñanza (Ojeda, 2006).

3.4.2. Cuestionarios

Se aplicó un Cuestionario de Investigación (C-I) previo a la enseñanza de matemáticas en tres semestres distintos: segundo, cuarto y sexto. El objetivo fue obtener datos del estado de conocimiento de las ideas fundamentales de estocásticos de los estudiantes en temporalidades distintas, desde que el alumno ingresó al bachillerato tecnológico hasta su finalización de estudios en esta modalidad educativa.

Después de la enseñanza de probabilidad prescrita en el RAP 2 de la Unidad didáctica 2 (DEMS, 2009) (véase el parágrafo §3.3.2.1), se aplicó el Cuestionario de Enseñanza (C-E), con el objetivo de analizar los conocimientos de los estudiantes respecto a las ideas fundamentales de estocásticos después de la enseñanza de probabilidad en el bachillerato tecnológico.

Para identificar si los estudiantes ponen en juego otros conceptos matemáticos enseñados en el bachillerato tecnológico, al solucionar problemas de probabilidad y estadística, aplicamos dos cuestionarios, cada uno en un contexto matemático distinto.

- *Combinatoria y Geometría Analítica* (**C-GA).** Planteó problemas de combinatoria en un marco de objetos de estudio de la geometría analítica, se aplicó a un grupo de tercer semestre con 32 estudiantes (3IM9) de la Unidad de Aprendizaje de Geometría Analítica.
- *Probabilidad y Álgebra* (**CP-A**). Propuso problemas de probabilidad referidos a situaciones algebraicas, se aplicó a un grupo de segundo semestre (2IV12) con 25 estudiantes, de la Unidad de Aprendizaje de Geometría y Trigonometría que, por cuestiones de tiempo, no se pudo aplicar cuando el grupo cursaba la Unidad de Aprendizaje de Álgebra, que es de primer semestre, por lo que se aplicó en el segundo semestre. Y a un grupo de sexto semestre (6IM10) con 29 estudiantes, de la Unidad de Aprendizaje de Probabilidad y Estadística.
- *Cuestionario de Investigación* (**C-I**). Tenía por objetivo obtener datos de estudiantes de tres semestres distintos previo a la enseñanza de probabilidad conforme a la propuesta del bachillerato tecnológico. Este cuestionario se aplicó a un grupo de segundo semestre con 27 estudiantes (2IV13) que cursaba Geometría y Trigonometría; a un grupo con nueve estudiantes (4IM15) de Cálculo Diferencial y a un grupo con 35 estudiantes de sexto semestre (6IM15) antes de la enseñanza de probabilidad.
- *Cuestionario de Enseñanza* (**C-E**) se aplicó posteriormente a la enseñanza de probabilidad al grupo 6IM15 con 50 estudiantes de sexto semestre (6IM15).

La Tabla 3.1 resume los cuestionarios que se aplicaron en cada Unidad de Aprendizaje.

Tabla 3.1. Ideas fundamentales implicadas en los cuestionarios aplicados en el bachillerato tecnológico.

		Cuestionario **C-GA**	Cuestionario **CP-A**	Cuestionario **C-I**, previo a la enseñanza	Cuestionario **C-E** de enseñanza
Semestres de los grupos a los que se aplicó		3º (Geometría Analítica)	1º (Álgebra) y 6º (Probabilidad y Estadística)	2º (Geometría y Trigonometría), 4º (Cálculo Diferencial) y 6º (Probabilidad y Estadística)	6º (Probabilidad y Estadística)
Ideas Fundamentales					
1	Medida de probabilidad	1 b), 1c), 1d), 2b)	1 a), 1 c), 1 d), 2 a), 2 b), 2 c), 2 e), de 2 g) a 2 k), 3 b), 3 d) i, 3 d) ii, 3 d) iii, 3 e), 3 f)	1, 2, 3, 4, 6, 7	1, 2, 3, 4, 5, 7
2	Espacio muestra	1 b), 1c), 1d), 2b)	1 a), 1 c), 1 d), 2 a), 2 g), 2 h), 2 i), 2 k), 3 b), 3 3 d) i, 3 d) ii, 3 d) iii	2, 3, 4, 6, 7	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
3	Adición de probabilidades	1d)	1 a), 1 d), 2 a), 2 h), 2 i), 3 b), 3 d) i, 3 d) ii, 3 d) iii		1, 2, 5, 6, 7
4	Regla del producto		3 b), 3 d) i, 3 d) ii, 3 d) iii	2, 4, 6	1, 6
5	Equiprobabilidad	1 c)	2 a), 2 h), 2 i), 3 b), 3 d) i, 3 d) ii, 3 d) iii	2, 4	6
6	Combinatoria	1 a), 2 a), 3, 4 a), 4 b), 4 c)		2, 5, 8	4,6
7	Ley de los grandes números				
8	Variable aleatoria		3 b), 3e), 3 f)		1, 6
9	Modelo de urnas y simulación			6	
10	Muestra		1 a), 1 c), 1 d)		

3.4.3 Guión de entrevista clínica

De acuerdo con diSessa (2007), una entrevista clínica es un encuentro de interacción social entre el entrevistador y el entrevistado, en la que el entrevistador es un investigador que ha diseñado un guión de entrevista para su entrevistado.

> … el entrevistador plantea problemas o temas para pensar, y anima al entrevistado a resolverlas de la mejor manera en la que pueda hacerlo; el tema central puede ser un problema a resolver, algo que explicar o simplemente algo en que pensar.
>
> (diSessa, 2007, p. 525)

"El objetivo de una entrevista clínica es permitir al entrevistado que exponga de manera natural su forma de pensar respecto a la situación que se está tratando" (p. 525). El entrevistador explora diferentes maneras de enmarcar la situación problemática. Puede introducir variaciones de los problemas, algunas veces suministra interpretaciones alternativas. Los cambios de interpretación entre los interlocutores son eventos críticos que merecen una atención especial. Las entrevistas deben ser videograbadas y transcritas para su análisis.

Zazkis y Hazzan (1999) clasifican los tipos de reactivos que se pueden plantear durante una entrevista clínica, después haber realizado varias investigaciones en educación matemática en las que se utilizó ese método, así como de un análisis de sus propias investigaciones. Los autores identificaron los siguientes tipos de preguntas:

Desempeño. Los investigadores plantean preguntas referidas a las estrategias, las aproximaciones y las concepciones que utilizan los estudiantes durante la solución al problema, más que a su respuesta.

Un inesperado ¿por qué? Estas preguntas son bastantes frecuentes, se plantean la mayoría de las veces con el objetivo de explicar o aclarar respuestas de los entrevistados. "Se plantean en momentos inesperados para el entrevistado, en los que se le pregunta por hechos o procedimientos que los estudiantes tienden a usar sin dar las razones para ello" (p. 432).

Giro. Este tipo de preguntas plantean una variación de una situación familiar. La ventaja es que ponen en evidencia conexiones, concepciones e ideas que pueden no aparecer cuando no se le da un giro a la pregunta.

Construcción de tareas. En estas tareas se invierten los roles tradicionales de lo que es dado y lo que debe encontrarse, por ejemplo, ya que en la escuela se enseña a los estudiantes a encontrar el promedio de un conjunto dado de números, durante la entrevista se pediría indicar el conjunto de números para el que se cumple el promedio dado.

"Da un ejemplo". "Durante una entrevista se puede requerir un ejemplo explícito de un objeto matemático o una propiedad matemática. Las tareas de *da un ejemplo* son una alternativa a las tareas de construcción" (p. 433). La generación de ejemplos por parte de los estudiantes puede revelar su comprensión de una situación.

Reflexión. En este tipo de preguntas no se pide dar una solución a un problema matemático directamente, sino que las plantean los investigadores presentando la solución dada a un problema por una tercera persona imaginaria, de manera que contribuyen a que el entrevistado se distancie de una actuación personal y responda sobre el procedimiento de otra persona. Estas preguntas cambian el enfoque hacia explicar las razones de la solución más que dar la solución propia. En ellas se pueden plantear tanto soluciones correctas como incorrectas.

Las entrevistas clínicas llevadas a cabo se realizaron después de la aplicación de los cuestionarios. No se realizaron entrevistas para cada cuestionario aplicado, sino solamente para aquéllos en los que se identificaron respuestas de interés para profundizar en el razonamiento utilizado por el estudiante, por lo que los entrevistados se eligieron con base en las respuestas que dieron a los reactivos de los cuestionarios.

Los guiones de entrevista se basaron en las preguntas planteadas en los cuestionarios de los que se identificaron contestaciones interesantes de los estudiantes, con el objetivo de profundizar más en ellas. Durante las entrevistas se plantearon preguntas de los tipos: de desempeño, del porqué inesperado, de construcción de tareas, y preguntas de reflexión.

Las entrevistas se videograbaron y transcribieron para su análisis, durante su desarrollo se usaron hojas de control y los estudiantes registraron sus respuestas en forma manuscrita.

3.4.4 Estrategia de enseñanza

La estrategia de enseñanza de probabilidad implementada consistió en presentar inicialmente los enfoques de la probabilidad. Incluyó ejemplos y después se expusieron algunos conceptos básicos: probabilidad, espacio muestra, eventos y tipos de eventos. Los conceptos fueron expuestos en el pizarrón frente al grupo y el investigador promovió la comunicación oral con los estudiantes a través del planteamiento de preguntas y la aclaración de sus dudas para la asimilación de los conceptos. Posterior a la presentación de conceptos fue necesario impartir los temas de álgebra de conjuntos y de combinatoria, ya que los estudiantes no los conocían, pues no se pudieron impartir en el tiempo correspondiente al RAP 1 debido a la aplicación de exámenes de evaluación externos a la institución. Cuando se terminó de presentar todo el contenido conceptual indicado en el programa de estudios se procedió a la solución de problemas que contenían los conceptos enseñados previamente: probabilidad, espacio muestra, eventos, combinatoria y conjuntos. Los problemas se plantearon en el pizarrón y los resolvieron grupalmente.

Para llevar a cabo la enseñanza correspondiente se procedió a realizar las notas para la clase, ya que no se utilizó el libro de texto *Estadística y probabilidad para ser competente* (Buendía y Gutiérrez, 2011) elegido inicialmente por el Profesor. Las razones fueron dos: primero, el libro contenía varios errores en uso de los términos y no incluía algunos de los temas considerados en la estrategia de enseñanza, como los enfoques de probabilidad; segundo, el libro consta de dos partes, una de estadística y otra de probabilidad. Los estudiantes compraron al inicio del curso la parte de estadística que no contenía ningún tema de probabilidad y, dado que se estaba en la parte final del semestre, el Profesor titular previó que los estudiantes no comprarían la segunda parte. Las notas y los ejercicios utilizados se basaron en el libro *Fundamentos de estadística descriptiva y probabilidad*, de Chávez Escalante (2001).

3.5 Criterios de análisis

A los datos recopilados mediante cuestionarios y guiones, registrados en papel, videograbaciones y transcripciones, aplicamos lo establecido en la célula de análisis de la enseñanza (Ojeda, 2006), constituida por: ideas fundamentales de estocásticos, otros conceptos matemáticos, recursos semióticos utilizados y términos empleados.

Ideas fundamentales de estocásticos: Son las propuestas por Heitele para la enseñanza de probabilidad y estadística en todos los niveles educativos (véase la sección 2.1).

Otros conceptos matemáticos: En todos los cuestionarios estaban implicados otros conceptos matemáticos, además de los de estocásticos: números naturales, números racionales, números reales, operaciones aritméticas, operaciones algebraicas, lugar geométrico, plano cartesiano, conjuntos, entre otros.

Recursos semióticos: Se analizó el tipo de recursos semióticos de los estudiantes al resolver los problemas planteados (véase la sección 2.6). Esos recursos pueden ser el figural, la lengua escrita, simbología matemática, figuras geométricas, gráficas, diagramas.

Términos empleados: Identificamos las palabras con las que nos referimos a los estocásticos, que pueden ir desde lo formal matemático hasta lo más coloquial. En ocasiones las primeras resultan más difíciles de comprender para los estudiantes que las segundas.

3.6 Temporalidad de la investigación

La investigación comenzó a realizarse el mes de agosto de 2011, con la incorporación gradual a la problemática de la enseñanza de las matemáticas en el CECyT. La recopilación de datos se desarrolló durante un año y diez meses, para finalizar en mayo del 2013. Los primeros cuatro meses se realizó el análisis de la propuesta institucional mediante la investigación documental y el año y medio restante se efectuó la experienciación en aula y extra-aula. En tanto fue posible, el análisis de los datos se fue realizando una vez que finalizaba la aplicación de cada instrumento y se fueron obteniendo resultados parciales de la investigación prácticamente por semestre, de cuatro de los cuales se informó en artículos de investigación presentados en tres tipos de foros académicos (uno nacional y tres internacionales). No obstante, hubo retrasos para efectuar el análisis de los datos correspondientes a la experienciación de la enseñanza, tanto en el aula como en extra-aula, debido en el primer caso a la imposibilidad de registro de ellos y, en los dos escenarios, a su complejidad y cantidad.

Finalmente, la estructuración y escritura de la tesis para informar del desarrollo y resultados de la investigación se realizó a partir de agosto de 2013.

Capítulo 4
La enseñanza de Probabilidad en el Bachillerato Tecnológico

El contenido temático del Plan y programa de estudios de matemáticas del CECyT (DEMS, 2009) y uno de los libros de texto: *Estadística y probabilidad para ser competente* (Buendía y Gutiérrez, 2011), utilizados en esta institución para la enseñanza de Probabilidad y de Estadística fueron analizados en la investigación documental mediante los criterios de análisis propuestos.

4.1 Generalidades

El actual Programa de estudios del CECyT No. 4 (DEMS, 2009) está vigente desde el primero de Enero del 2011. Para el desarrollo de la Unidad de Aprendizaje *Probabilidad y Estadística* asigna un total de 90 horas al semestre, durante 18 semanas, de las cuales 72 horas corresponden al aula y 18 horas a otros ambientes de aprendizaje. Esta Unidad pertenece a las áreas de formación científica, humanista y tecnológica básica, se ubica en el sexto nivel de complejidad del Plan de estudios y se imparte obligatoriamente durante el sexto y último semestre del bachillerato para los campos del conocimiento: Ciencias Físico-Matemáticas, Ciencias Sociales y Administrativas y Ciencias Médico Biológicas (DEMS, 2009).

El programa de estudios establece como principal objetivo:

> …preparar al estudiante para que desarrolle competencias en las que el proceso metodológico debe reflejar la aplicación de la estadística descriptiva, la probabilidad y las distribuciones probabilísticas; donde los resultados justifiquen la solución del problema relacionado con los ámbitos académico, social y global, según se indica en cada una de las unidades, atendiendo a las tres ramas del conocimiento. Lo anterior implica abordar concepciones analíticas para comprender su espacio y su hábitat, apoyando su formación propedéutica y tecnológica.
>
> (DEMS, 2009, p. 2)

El programa de estudios establece una relación directa de la unidad *Probabilidad y Estadística* con las Unidades de Aprendizaje de: *Álgebra*, *Geometría y Trigonometría*, y *Cálculo Integral* y una relación indirecta con: *Física*, *Química*, *Biología*, *Comunicación*

Oral y Escrita, Ciencias Sociales, Habilidades del Pensamiento. Señala además que contribuye a la formación integral del estudiante (DEMS, 2009).

4.2 Propuesta educativa del CECyT

El modelo educativo implementado en el CECyT se centra en el aprendizaje desde un enfoque por competencias, el cual se implementó a partir de la reforma de la educación media superior con la creación del sistema nacional de bachillerato (Székely, 2010). Conforme al listado de competencias genéricas y disciplinares que propone la SEP en su marco curricular común para todas las modalidades de la educación media superior (SEP, 2007), el programa de estudios del CECyT establece para la Unidad de Aprendizaje *Probabilidad y Estadística* que:

> ... las competencias disciplinares (general y particulares) implican como principales objetos de conocimiento: la estadística descriptiva, la probabilidad y las distribuciones probabilísticas, para movilizar diferentes capacidades humanas relacionadas con: analizar, organizar y sistematizar los conocimientos, razonar correctamente en forma deductiva e inductiva; representar, abstraer, relacionar, clasificar y aplicar conocimientos de la Probabilidad y Estadística para identificar y resolver problemas teóricos y reales utilizando los diferentes lenguajes de representación (verbal, gráfico y/o simbólico).
>
> (DEMS, 2009, p. 2)

El programa de estudios establece como competencia general para esta unidad de aprendizaje que el estudiante podrá resolver problemas de probabilidad y de estadística de su entorno. El curso está dividido en tres unidades didácticas, cada una con su respectiva competencia particular; cada unidad didáctica está integrada por dos o más *resultados de aprendizaje propuestos* (RAP). La Tabla 4.1 resume el contenido de competencias especificadas en el programa de estudios y las ideas fundamentales de estocásticos implicadas en cada RAP. Las competencias propuestas en el programa de estudios incluyen nueve de las diez ideas fundamentales de estocásticos. La Tabla 4.2 muestra la relación entre los contenidos de aprendizaje de cada RAP con las Ideas Fundamentales de Estocásticos.

Como ya se señaló, el plan de estudios de matemáticas en el CECyT está diseñado para que se imparta la enseñanza de probabilidad y de estadística en el sexto semestre, que es el último del bachillerato.

Tabla 4.1. Relación entre las competencias prescritas para la Unidad de aprendizaje y las Ideas Fundamentales de Estocásticos.

Competencia General: Resuelve problemas referentes a estadística descriptiva y probabilidad en su entorno.		**Ideas Fundamentales de Estocásticos Implicadas**									
		MP	EM	AP	I	E	C	VE	LGN	M	US
Competencia Particular 1: Emplea la estadística descriptiva en la solución de problemas que se presentan en su ámbito académico, social y global.	**RAP 1:** Elabora tablas de distribución de frecuencias y gráficas de datos, obtenidos de una muestra o población, para el planteamiento de problemas en el ámbito académico, social y global.										
	RAP 2: Calcula las medidas de tendencia central, de posición y de dispersión, en datos obtenidos de una muestra ó de una población en la resolución de problemas en el ámbito académico, social y global.										
Competencia Particular 2: Resuelve problemas referentes a teoría de conjuntos, técnicas de conteo y probabilidad, en su ámbito académico, social y global.	**RAP 1:** Utiliza la teoría de conjuntos y las técnicas de conteo en la resolución de problemas en el ámbito académico, social y global.										
	RAP 2: Obtiene la probabilidad de eventos que cumplan los axiomas de la probabilidad, en la resolución de problemas en el ámbito académico, social y global.										
	RAP 3: Calcula la probabilidad condicional de eventos independientes y dependientes, en la resolución de problemas inmersos en el ámbito académico, social y global.										
Competencia Particular 3: Emplea distribuciones de probabilidad en la solución de problemas en los ámbitos académico, social y global.	**RAP 1:** Construye la distribución de probabilidad de variables aleatorias discretas y continuas en la resolución de problemas en los ámbitos académico, social y global.										
	RAP 2: Utiliza las distribuciones Binomial y de Poisson, en la resolución de problemas en los ámbitos académico, social y global.										
	RAP 3: Utiliza la distribución Normal, en la resolución de problemas en los ámbitos académico, social y global.										

Tabla 4.2. Ideas Fundamentales de Estocásticos por contenidos de aprendizaje.

Unidad didáctica	RAP	Contenidos de Aprendizaje: Conceptuales	Contenidos de Aprendizaje: Procedimentales	Ideas Fundamentales de Estocásticos: MP	EM	AP	I	E	C	VE	LGN	M
Estadística descriptiva	1	Definición de: estadística, variables, muestra y población.	Elaboración de tablas de distribución de frecuencias. Representación gráfica de datos: histograma, polígono de frecuencia y ojivas. Manejo de las TIC.									
	2	Medidas de: • Tendencia central • Posición • Dispersión	Cálculo de los valores de las medidas de tendencia central, posición y dispersión. Manejo de las TIC									
Probabilidad	1	Teoría de conjuntos. Técnicas de conteo.	Realización de operaciones con conjuntos. Aplicación de técnicas de conteo. Manejo de las TIC									
	2	Espacios muestrales. Probabilidad clásica y axiomática. Eventos aleatorios.	Cálculo de probabilidades en eventos aleatorios. Manejo de las TIC.									
	3	Probabilidad condicional. Eventos dependientes e independientes. Teorema de Bayes	Obtención de la probabilidad en eventos dependientes e independientes. Cálculo de la probabilidad condicional.									
Distribuciones de probabilidad	1	Distribución de probabilidad de variable aleatoria. Función de densidad. Esperanza matemática y desviación estándar.	Construcción de distribuciones de probabilidad. Determinación de la esperanza matemática y de la desviación estándar.									
	2	-----	Aplicación de las distribuciones binomial y de Poisson. Manejo de las TIC									
	3	-----	Aplicación de la distribución Normal. Manejo de las TIC									

En el mejor de los casos, los estudiantes de esta modalidad educativa habrán recibido la enseñanza de estocásticos en secundaria, dos años y medio atrás. Es mucho tiempo transcurrido entre la enseñanza de estas disciplinas en el nivel básico y la enseñanza en el nivel medio. Se coarta la asunción en la propuesta de Heitele (1975) de una continuidad en la enseñanza de estocásticos.

La impartición de temas en el curso comienza con la enseñanza de estadística descriptiva. Inicialmente se instruye en el tratamiento y clasificación de datos para posteriormente calcular sus medidas de tendencia central y dispersión. La segunda unidad didáctica inicia con los temas de álgebra de conjuntos y combinatoria, la cual continúa con la enseñanza del concepto de probabilidad, desde los enfoques clásico y axiomático, para finalizar con probabilidad condicional. De acuerdo con lo propuesto por Fischbein respecto a las intuiciones del azar en el individuo (1975), su señalamiento de que la frecuencia relativa se interpreta intuitivamente como una medida de probabilidad, parece lógico iniciar la enseñanza con estadística descriptiva, para desarrollar a partir de ahí las ideas intuitivas hacia el acercamiento formal de la probabilidad, incluso pasando en ese proceso por las operaciones combinatorias, que son de segundo orden, según Piaget e Inhelder (1951), las cuales son necesarias para el reconocimiento de la idea de azar. Sin embargo, en la propuesta del CECyT no se consolida la secuencia del desarrollo de ideas probabilísticas desde lo intuitivo a lo formal ya que no se plantea el seguimiento del concepto de frecuencia relativa inicial, que después pasaría a interpretarse como probabilidad. Ni siquiera se plantea la enseñanza del enfoque frecuencial de probabilidad, así fuera de forma desligada de la intuición.

El programa de estudio propone el uso del diagrama de árbol, pero lo plantea como si fuera una técnica de conteo, al mismo nivel que las combinaciones, permutaciones y el principio fundamental del conteo. De acuerdo con Fischbein (1977) el diagrama de árbol es un modelo generativo, útil en didáctica, que si bien resulta práctico en la representación gráfica del espacio muestra resultante de unas pocas repeticiones de un fenómeno aleatorio, no está al nivel de las herramientas matemáticas aplicadas en combinatoria.

En cuanto al uso de términos para referirse a otros conceptos El programa de estudios se refiere al principio fundamental del conteo como *regla de la multiplicación*, también es redundante al expresar el término *eventos probabilísticos,* usa el término *espacios muestrales*, y las expresiones *probablidad clásica* y *probabilidad axiomática*.

No hace ninguna referencia a ningún otro concepto matemático fuera del campo de la probabilidad y la estadística.

4.3. El libro de texto

En el CECyT el profesor titular de la asignatura decide qué libro de texto se utilizará para la enseñanza de la Unidad de Aprendizaje. En lo siguiente haremos una revisión del libro de texto (Buendía y Gutiérrez, 2011) seleccionado por el Profesor para el curso de Probabilidad y Estadística en el que se realizó la investigación.

El libro de texto está dividido en dos partes, la primera, con los contenidos de estadística descriptiva llamada *La llave del éxito en estadística* (Buendía, 2011, pp. 9-212) y la segunda con los temas de probabilidad y estadística inferencial titulado *Estadística y probabilidad para ser competente* (Buendía y Gutiérrez, 2011, pp. 213-530) ambos libros editados en 2011.

El primer libro de Buendía contiene seis capítulos titulados: Introducción, Distribución de Frecuencias, Figuras Estadísticas, Medidas de Tendencia Central, Medidas de Dispersión o Variabilidad y Coeficientes de Regresión Lineal. Este libro contiene sólo temas de Estadística Descriptiva donde están incluidas dos Ideas Fundamentales: Variable Estocástica y Muestra.

La Tabla 4.3 resume la identificación de las ideas fundamentales implicadas en los temas de probabilidad tratados en la obra de Buendía y Gutiérrez (2011).

Los contenidos del libro de texto propuesto y del programa de estudios son concordantes: el libro de texto contiene los temas indicados por el programa de estudios y además presenta un capítulo de Estadística Inferencial que no está planteada para la enseñanza en el CECyT. Para el concepto de probabilidad, el libro es completamente acorde con lo propuesto en el programa, la probabilidad se presenta desde su enfoque clásico y se indican los axiomas de la probabilidad, se caracterizan los diferentes tipos de eventos y nunca hace referencia al enfoque frecuencial (véase la Figura 4.1).

Señalamos que para la identificación del espacio muestra es inconsistente que el libro de texto presente el diagrama de árbol al mismo nivel matemático que las permutaciones y combinaciones. Si bien el diagrama de árbol es un modelo generativo auxiliar que puede ser aplicado en ciertos fenómenos aleatorios, no es una herramienta matemática y sólo resulta ser práctico para experimentos aleatorios que se repitan pocas

Tabla 4.3. Ideas Fundamentales de Estocásticos (IFE) contenidas en cada capítulo del libro de texto

Capítulo	**Objetivo**	**IFE**
Conjuntos	Al final el escolar estará capacitado para realizar cualesquier operación con conjuntos que le soliciten, interpretará y construirá diagramas de Venn, analizará con fluidez subconjuntos, a conjuntos complementarios y el conjunto universal, así como determinar con habilidad la cardinalidad de un conjunto y asociar con fluidez sus conocimientos a la teoría de funciones y probabilidad.	-------
Bases de la Probabilidad	El educando después de seguir la secuencia lógica de este capítulo estará avezado a entender y aplicar los conceptos de probabilidad clásica moderna, razonará con fluidez los espacios de muestra asociándolos con diagramas de árbol, permutaciones, combinaciones y además evaluará la probabilidad de eventos: mutuamente exclusivos o no mutuamente exclusivos, complementarios y condicionales.	Medida de Probabilidad, Espacio Muestra, Adición de Probabilidad, Equiprobabilidad, Combinatoria
Probabilidad Condicional	Al finalizar el alumno será capaz de definir los conceptos de probabilidad condicional y eventos dependientes. Aplicará los diagramas de árbol y la regla de multipicación de probabilidades para resolver problemas de eventos dependientes. Aplicará los conceptos de dependencia e independencia para la solución de problemas. Resolverá problemas relacionados con los Teoremas de la Probabilidad total y el de Bayes.	Medida de Probabilidad, Espacio Muestra, Adición de Probabilidad, Regla del Producto e Independencia.
Variables Aleatorias	Al finalizar el alumno explicará el significado de una Variable A. Distinguirá entre variables aleatorias continuas y discretas. Explicará en que situaciones se debe emplear una variable aleatoria discreta (conteos) y en cuales una continua (mediciones). Definirá a la función de densidad de una variable aleatoria y calculará probabilidades por medio de sumatorias (discretas) e integrales (continuas). Definirá y explicará los conceptos de valor esperado y variancia de una variable aleatoria. Resolverá problemas relacionados con el valor esperado y la variancia de una variable aleatoria discreta.	Medida de Probabilidad, Variable Aleatoria.
Modelos Binomial y de Poisson	Al finalizar el alumno definirá y explicará los modelos binomiales y de Poisson. Resolverá problemas relacionados con muestreos con reemplazo en donde se conserva la independencia de los sucesos. Resolverá problemas que se relacionan con sucesos independientes que ocurran en intervalos, esto es aplicará el modelo de Poisson. Utilizará las tablas estadísticas de los modelos binomial y de Poisson.	Medida de Probabilidad, Variable Aleatoria, Muestra.
Modelo Normal	Al finalizar el alumno entenderá la importancia de la estandarización y el uso de tablas para el cálculo de probabilidades, además del uso de las tablas porcentuales de la distribución normal.	Medida de Probabilidad, Variable Aleatoria.
Inferencia Estadística	Al finalizar el alumno identificará a los estimadores de la media de la variancia y de la diferencia de medias. Encontrará los intervalos de confianza para la media y diferencia de medias de datos con distribución normal. Entenderá el significado del rechazo de una hipótesis estadística. Probará la hipótesis para la media y diferencia de medias de datos con distribución normal.	Medida de Probabilidad, Variable Aleatoria, Muestra.

veces. Como vimos anteriormente esta misma equiparación entre el modelo generativo y las herramientas matemáticas ocurre en el programa de estudios.

$$P = \frac{\text{número de posibilidades para que el evento pueda ocurrir}}{\text{número de resultados posibles}}$$

••) ¿ Cuál es la probabilidad para que se saque una carta roja en el juego de pocker ?

Como existen cincuenta y dos cartas en este juego, siendo la mitad rojas y la mitad negras, se tiene que:

$$P = \frac{\text{número de posibilidades para que el evento pueda ocurrir}}{\text{número de resultados posibles}} = 26/52 = 1/2$$

1) La probabilidad de que ocurra un evento cualesquiera " E_1 " es mayor o igual a cero. Esto es:

$$0 \leq P(E_1)$$

2) La probabilidad de que ocurra el mismísimo evento " E " es igual a la unidad. Es decir:

$$P(E) = 1$$

3) Si G y H son eventos mutuamente exclusivos, la probabilidad de que ocurra la unión de ellos es igual a la suma de las probabilidades respectivas. Esto es:

$$P(G \cup H) = P(G) + P(H)$$

Figura 4.1. Arriba, la definición de probabilidad en el libro de texto (Buendía y Gutiérrez, 2011), abajo, los axiomas de la probabilidad.

Además del diagrama de árbol en el libro de texto, también se recurre al uso del diagrama de Venn y de gráficas, para identificar el espacio muestra de diferentes fenómenos aleatorios (véase la Figura 4.2).

El contenido de otros conceptos matemáticos en el libro de texto se remite al uso de los números enteros; la definición del factorial de un número (véase figura 4.3), concepto necesario al momento de calcular las combinaciones y permutaciones; en el capítulo de variable aleatoria se define lo que es una función y se utilizan integrales para solucionar problemas de variables aleatorias continuas.

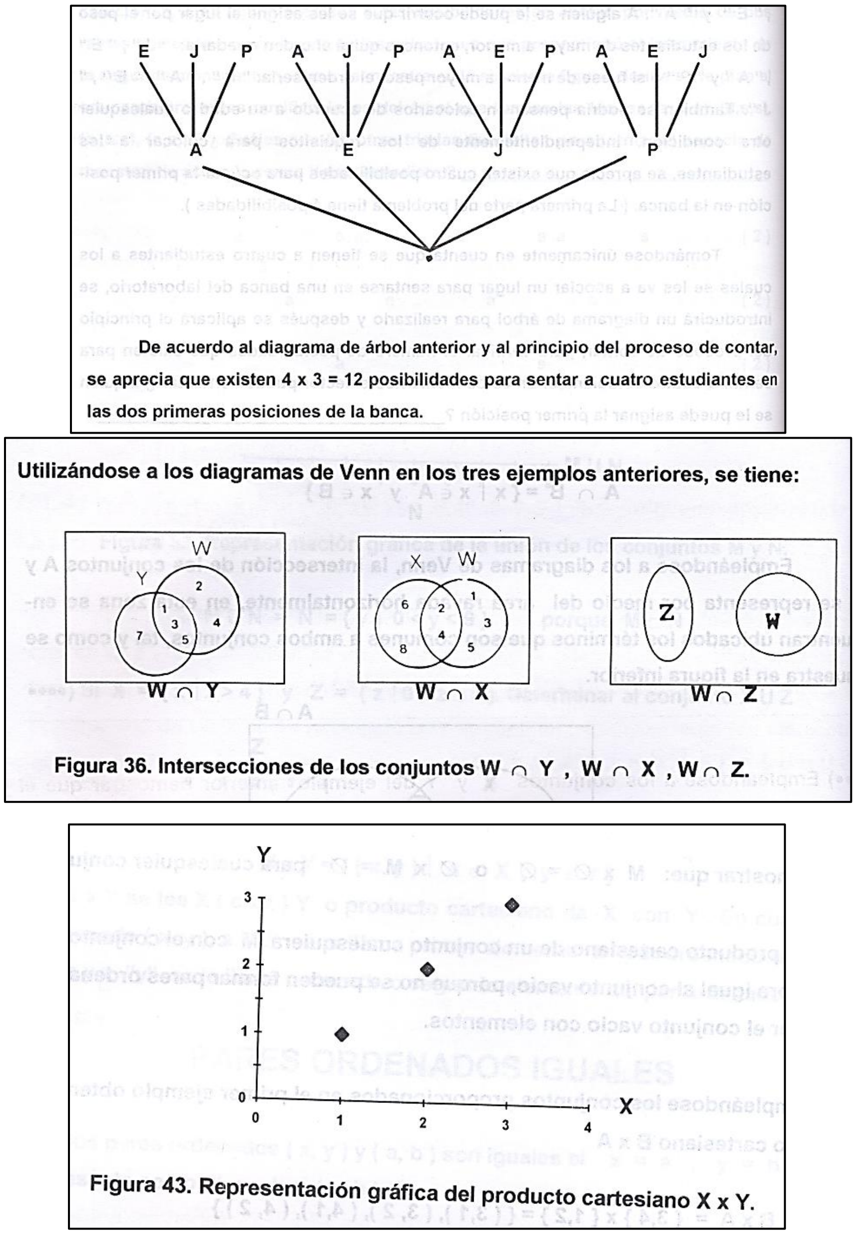


Figura 4.2. Modelos didácticos generativos presentados en el libro de texto.

En cuanto al uso de términos para referirse a estocásticos el libro de texto usa los términos *fenómenos inciertos* y *fenómenos al azar* para referirse a los fenómenos aleatorios;

al espacio muestra se refiere como *espacio de muestra* y *espacio de muestras*, usa ambos indistintamente; el principio fundamental del conteo es referido como *principio del proceso de contar* y *principio fundamental del proceso de contar* (véase el texto que acompaña al diagrama de árbol en la figura 4.2).

FACTORIAL

Al producto 4 x 3 x 2 x 1 se le denota como 4 ! y se lee " cuatro factorial ", es decir:

4 ! = 4 x 3 x 2 x 1 = 24

Similarmente, si se tiene a tres factorial, que será igual a: 3! = 3 x 2 x 1 = 6

Siete factorial es igual a: 7 ! = 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 =

Figura 4.3. Definición del factorial de un número en el libro de texto.

Capítulo 5

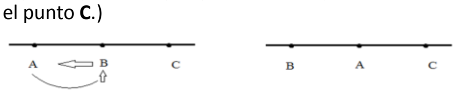
Propuesta institucional y comprensión de estocásticos

En la estrategia de la investigación nos propusimos incursionar en las otras Unidades de Aprendizaje de Matemáticas del Bachillerato Tecnológico —que no se refirieran a Probabilidad y a Estadística— en cuanto a la interrelación entre otros conceptos matemáticos y las ideas fundamentales de estocásticos, para lo que se aplicaron tres cuestionarios: uno de combinatoria en un contexto geométrico, al grupo de Geometría Analítica (tercer semestre); otro que planteó problemas probabilísticos y geométricos, así como el de investigación previo a la enseñanza de probabilidad (véase en el apartado 3.3.2), a los grupos de Geometría y Trigonometría (segundo semestre) y Cálculo Diferencial (cuarto semestre). Los cuestionarios plantearon preguntas abiertas y se solicitó responderlas individualmente y por escrito, en el aula de matemáticas a la hora habitual de la clase.

5.1. Combinatoria en un contexto geométrico

A un grupo de 32 estudiantes que cursaban la Unidad de Geometría Analítica (tercer semestre) se les aplicó un cuestionario de combinatoria, **C-GA**, que implicó conceptos geométricos. La Figura 5.1 muestra el cuestionario C-GA aplicado.

1. Dado que dos puntos determinan una recta,
   a) ¿cuántas rectas se pueden trazar en un plano donde hay seis puntos (**A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**) y nunca hay tres de ellos alineados?
   b) Si se selecciona una de esas rectas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que pase por el punto **C**?
   c) ¿La probabilidad de que pase por el punto **C** es la misma que la de que pase por el punto **E**?
   d) ¿Cómo se ubicarían los puntos en el plano para que sea más probable que una recta que tomemos al azar pase por alguno de los seis puntos?
2. Los puntos **A**, **B** y **C** son colineales y están incluidos en la recta **R.** Los tres puntos se pueden mover a lo largo de la recta (como en la figura, en la que cambiamos de lugar los puntos **A** y **B**, pero también podemos mover el punto **C**.)



   a) ¿De cuántas maneras distintas se pueden ordenar los tres puntos en la recta?
   b) Si los tres puntos se acomodan al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el punto **C** quede entre los puntos **A** y **B**?
3. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar los cuatro puntos **E, F**, **G** y **H** alrededor de un cuadrado, si sólo puede haber uno por cada lado del cuadrado?
4. Si en el plano cartesiano hay 13 puntos en el primer cuadrante y 7 en el segundo cuadrante:
   a) ¿De cuántas maneras se puede formar un conjunto de 2 puntos del primer cuadrante y 3 puntos del segundo cuadrante?
   b) Si no importa la ubicación de los puntos en los cuadrantes, ¿de cuántas maneras se puede formar el conjunto de 5 puntos?
   c) Si los 5 puntos del conjunto deben ubicarse en el mismo cuadrante, ¿cuántas maneras de integrar el conjunto hay?

Figura 5.1. Reactivos del cuestionario C-GA.

5.1.1. Cuestionario C-GA

Las ideas fundamentales implicadas en este cuestionario se especifican en la Tabla 5.1. Dado que el diseño del instrumento implica la relación de cardinalidad del evento en cuestión con la del espacio muestra respectivo como la probabilidad de ese evento, las respuestas correctas de los estudiantes exhibirían su comprensión de esa relación en distintos grados de precisión, según la forma de la expresión numérica asentada.

Tabla 5.1. Ideas implicadas en el cuestionario.

Reactivos	Medida de Probabilidad	Espacio muestra	Adición de probabilidades	Combinatoria	Equiprobabilidad
1 a)					
1 b)					
1 c)					
1 d)					
2 a)					
2 b)					
3					
4 a)					
4 b)					
4 c)					

La Figura 5.2 muestra la distribución por reactivo de los tipos de respuestas obtenidas.

Las respuestas de los estudiantes se clasificaron de acuerdo a la formalidad con que fueron expresadas; una respuesta correcta es aquélla que lo estuvo en forma y precisión; una respuesta imprecisa expresa la relación entre cantidad de éxitos y cardinalidad del espacio muestra, pero no formalmente; una respuesta vaga sólo manifiesta la cantidad de eventos favorables y no toma en cuenta al espacio muestra; una respuesta incorrecta lo fue del todo, aún si se le escribió de forma apropiada.

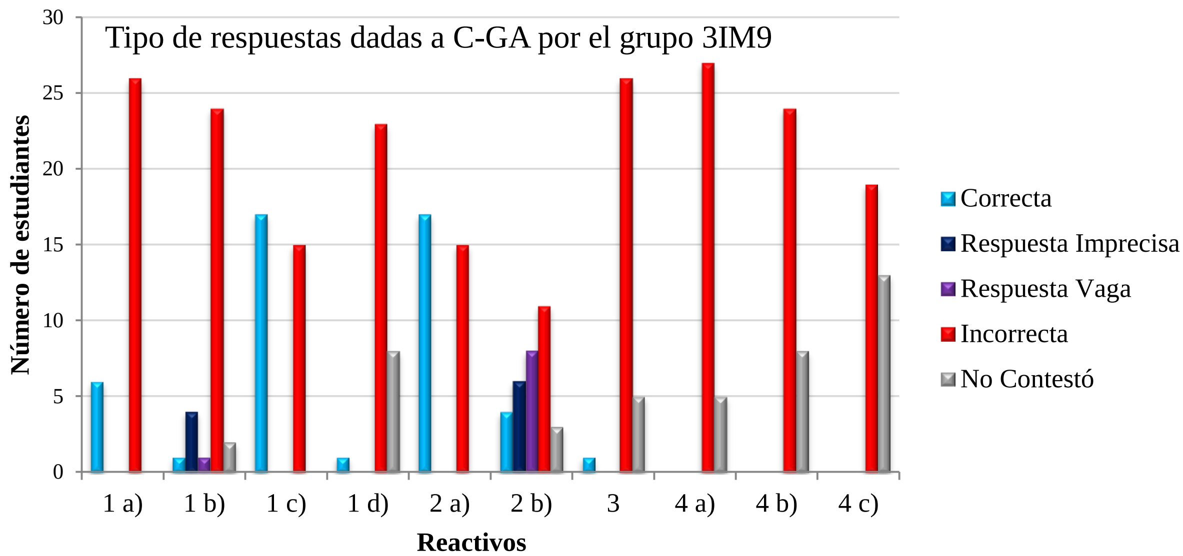


Figura 5.2. Distribución de los tipos de respuestas dadas a C-GA.

El cuestionario C-GA fue difícil para los estudiantes. No obstante, trataron de contestar a las preguntas planteadas y el último reactivo, el 4c), fue para el que más respuestas se omitieron. La Figura 5.3 muestra una respuesta del tipo "imprecisa" al reactivo 2b). Una respuesta "vaga" es la de la Figura 5.4, dada al reactivo 1b).

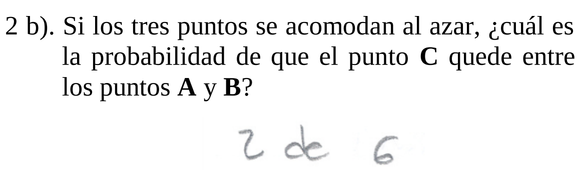


Figura 5.3. Tipo de respuesta imprecisa.

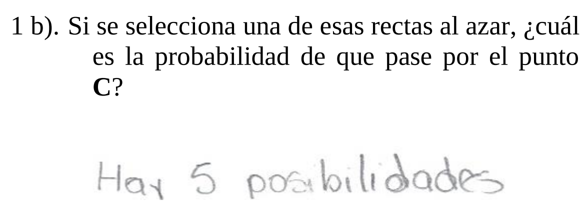


Figura 5.4. Tipo de respuesta vaga.

5.1.1.1. Medida de probabilidad. 68% de los jóvenes no asignaron correctamente la probabilidad a los eventos indicados en los reactivos 1b) y 2b). Este porcentaje incluye a las respuestas incorrectas (55%) y las vagas (13%). Estas últimas fueron de la forma: "2 veces" o "Hay 5 posibilidades"; expresan sólo la cardinalidad del evento, pero no la relacionan con la cardinalidad del espacio muestra. Sólo 8% de las respuestas (cinco estudiantes) fueron correctas, de las cuales cuatro evocaron al enfoque frecuencial y una el clásico. 16% de las respuestas fueron imprecisas, pues aunque relacionaron lo favorable con el total de posibles resultados, parecieron considerar sólo el espacio muestra y no una asignación numérica declarada como probabilidad: “1 de 3” o “5 entre 15”, si bien dejaron entrever la noción de relación y proporción, característica de las magnitudes probabilísticas.

5.1.1.2. Espacio muestra. 19% de los estudiantes omitieron en sus expresiones de probabilidad al espacio muestra, lo que exhibió su desconocimiento de él y de evento. 40% de los estudiantes alteraron la cardinalidad del espacio muestra al tratar la expresión de probabilidad como una fracción “simplificándola”.

5.1.1.3. Adición de probabilidades. Dado que para el reactivo 1d) (véase la Figura 5.1) sólo se obtuvo una respuesta correcta, se podría afirmar que los estudiantes desconocían la adición de probabilidades. No obstante, la pregunta se puede interpretar como si se refiriera a un acomodo lineal de puntos, más que a un acomodo al azar, pues se pueden alinear los seis puntos y sólo se generaría una línea recta, teniéndola como única posibilidad. Esta respuesta fue dada por 22% de los estudiantes.

5.1.1.4. Combinatoria. No se obtuvo evidencia de que los estudiantes conocieran el principio fundamental del conteo, implicado en seis de los diez reactivos. Basaron sus respuestas en dibujos de la situación planteada y en el conteo uno a uno de los diferentes acomodos posibles, tanto para combinaciones como para permutaciones.

5.1.1.5. Equiprobabilidad. Ya que el reactivo 1c) (véase la Figura 5.1.) se puede contestar afirmativa o negativamente y no solicita justificar la respuesta, fue el que obtuvo mayor número (17) de respuestas correctas. Sólo se dio una explicación de lo igualmente probable para el reactivo 1d): “Se puede poner de cualquier manera porque una recta son [se determina por] dos puntos, entonces cualquiera pasará por uno de los seis puntos”; la estudiante primeramente aclaró que no importaba el orden en que se acomodaran, pues dos puntos determinaban una recta y, con la última frase, pareció expresar que si tomáramos una de ellas al azar sería igualmente probable que pasara por cualquiera de los seis puntos.

5.1.1.6. Expresiones figurales. Los estudiantes recurrieron al trazo de planos cartesianos, rectas y puntos para contestar a las preguntas en que estaban implicados estos conceptos (conjunto de reactivos 1 y 4). En sus dibujos no pusieron de manifiesto algún indicio de las propiedades no ostensivas de estos objetos, como son: la prolongación infinita de las rectas y los ejes coordenados, o la disposición homogénea de las unidades marcadas sobre los ejes.

5.1.2. Entrevista GA

Nueve días después de la aplicación del cuestionario se entrevistó a un estudiante que se mantuvo en la tendencia general en cuanto al tipo y cantidad de respuestas que dio al instrumento, se le interrogó sobre los principios de conteo e ideas de probabilidad implicados en los reactivos. Fue una entrevista semiestructurada, se le videograbó y el estudiante registró sus procedimientos y respuestas en hojas de papel. De sus respuestas durante el interrogatorio señalamos lo siguiente: Indicó las rectas como segmentos de recta, sin prolongar sus líneas más allá de los puntos extremos. Contó una por una las líneas para responder a la pregunta de cuántas rectas se podían trazar en arreglos de 4, 5 y 6 puntos en el plano, lo que indicó su desconocimiento de técnicas de conteo (combinaciones). Ubicó los puntos simétricamente y no en una configuración que pareciera al azar (véase la Figura 5.5).

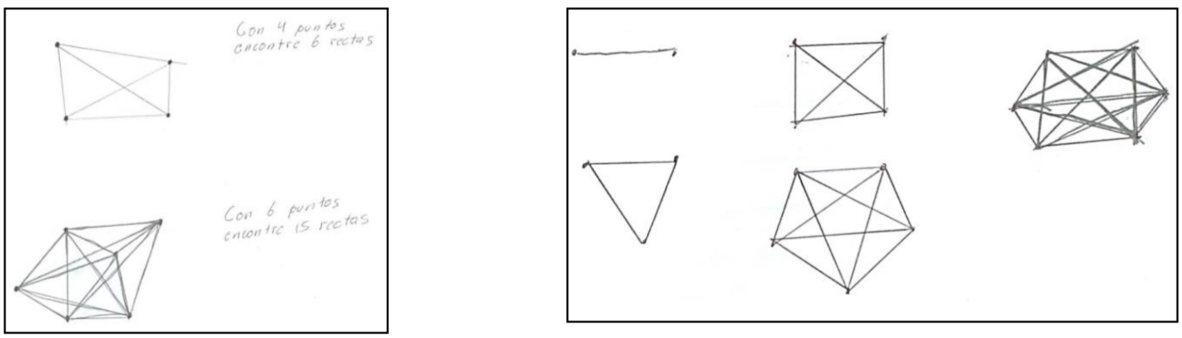


Figura 5.5. A la izquierda el estudiante trazó el total de rectas que se pueden formar en una configuración de cuatro y seis puntos dispuestos al azar en el plano. A la derecha se le pidió que indicara el número de rectas posibles para las cantidades de dos, tres, cuatro, cinco y seis puntos en el plano: acomodó los puntos de forma simétrica, como vértices de figuras geométricas regulares.

El estudiante expresó el enfoque clásico de probabilidad, pero a la pregunta acerca de la diferencia entre las expresiones "uno de tres" y "una entre tres" contestó que con esta última llegaba a la interpretación frecuencial de probabilidad. Entendió la expresión "una entre tres" como dividir un segmento de recta en tres partes iguales y tomar una de esas secciones, que es una idea distinta a la que se hubiera esperado por la expresada previamente, que era tomar una recta de entre tres Al inicio expresó la probabilidad como 1-3; después afirmó que podría expresarla como una división. Posteriormente afirmó que la probabilidad era de un tercio, a partir de su expresión como una división. El entrevistado dijo que la probabilidad también se podía tomar como una parte de un pastel dividido en varias partes, asentando la idea de su expresión inicial “una de tres” (véase la Figura 5.6).

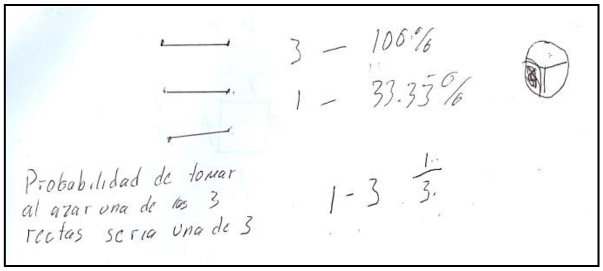
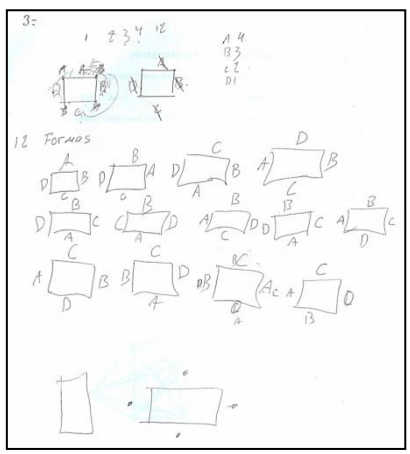


Figura 5.6. Imágenes de las respuestas que dio a la pregunta de ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar al azar una de tres rectas?

Para que indicara la cantidad de arreglos diferentes de cuatro puntos, uno por cada lado de un cuadrado (reactivo 3; véase la Figura 5.1), inicialmente no identificó que las opciones de acomodo disminuyen de uno en uno para los sucesivos elementos a ordenar; con una pregunta posterior el estudiante advirtió el decremento de uno en uno en esas ordenaciones sucesivas, pero no se percató de que el primer punto que se acomoda en el cuadrado es referencial y no se le considera para el cálculo. No distinguió acomodos iguales sólo porque estaban rotados de manera distinta, pero al final cambió esta consideración (véase la Figura 5.7).

Figura 5.7. Trazos del estudiante para responder a la pregunta de los posibles arreglos de cuatro puntos, uno por cada lado de un cuadrado.



5.2. Álgebra y probabilidad

El objetivo del cuestionario CP-A (véase en el Apéndice B) fue identificar sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes antes de la enseñanza de probabilidad. Se le aplicó primero a un grupo de estudiantes de segundo semestre que acababan de cursar la Unidad de Aprendizaje de Geometría y Trigonometría, y después a un grupo que estaba recibiendo la enseñanza de Probabilidad en el sexto semestre (véase Capítulo 6, sección 6.2). Posteriormente a la aplicación del cuestionario se seleccionó a un estudiante del grupo de Probabilidad para ahondar en sus respuestas a las preguntas en el instrumento.

La Figura 5.8 presenta los reactivos del cuestionario. Las ideas de fundamentales de estocásticos a las que se refirió el cuestionario CP-A se especifican en la Tabla 3.1.

1. El volumen de un cilindro con altura *h* y base con radio *r* es:
   $V = \pi r^2 h$
   La fabricación de contenedores cilíndricos se realiza cortando láminas de metal en forma rectangular y circular con los tamaños apropiados para soldarlas y formar el cilindro. Durante una jornada de trabajo se tuvieron problemas técnicos con las máquinas de corte, por lo que las piezas fueron mal cortadas y quedaron con las siguientes medidas y en las proporciones indicadas en las tablas. La cantidad de círculos y rectángulos cortados es la misma:

Perímetro de los círculos (m)	Porcentaje del total de piezas cortadas
1.77	25%
1.80	30%
1.82	27%
1.85	18%

Lado A del rectángulo (m)	Lado B del rectángulo (m)	Porcentaje del total de piezas cortadas
1.80	1.70	45%
1.75	1.71	24%
1.87	1.77	31%

Nota: $P = 2\pi r$, donde *P* denota al perímetro y *r* al radio.

   a. Del total de las piezas cortadas, ¿qué porcentaje podrá ser soldado para formar un cilindro?
   b. ¿Qué volumen tiene la mayoría de los contenedores armados?
   c. Si para control de calidad se selecciona al azar uno de los contenedores armados, ¿cuál es la probabilidad de que se inspeccione uno de los que tienen mayor volumen?
   d. ¿Qué porcentaje de piezas es de sobrantes?

2. La generación de segundo semestre de bachillerato organiza la rifa de una Tablet. Se entrega la cantidad de *x* boletos a cada uno de los 250 estudiantes para que todos los boletos se vendan.
   a. Si María decide quedarse con la mitad de los boletos que debe vender, ¿cuál es la probabilidad de que gane la tablet?
   b. ¿Con cuántos boletos tendría una probabilidad de 1.5 de ganar?
   c. ¿Con cuántos boletos tendría una probabilidad de – 0.5 de ganar?
   d. Si la tablet costó $7,500.00 y el precio de cada boleto fue de $50.00, ¿cuántos boletos debe vender cada estudiante para que la ganancia sea de $80,000.00?
   e. En este caso, ¿cuántos boletos debe poseer María para que la probabilidad de que gane la tablet

sea del 0.1?

f. ¿Cuánto dinero debe gastar para conseguir los boletos que necesita?
g. ¿Le conviene invertir en esa cantidad de boletos? ¿Por qué?
h. ¿Cuántos estudiantes tendría que haber en la generación para que ella, al quedarse con la mitad de sus boletos, tuviera una probabilidad de 0.01 de ganar?
i. Si fuera el caso, ¿cuál sería su probabilidad de perder?
j. ¿Cuánto vale la suma de la probabilidad de ganar y la probabilidad de perder? ¿Por qué?
k. ¿Cuántos boletos debe poseer María para que sea imposible que gane la tablet?

3. *A* y *B* empiezan a jugar con $80 cada uno.

a. ¿Cuánto ha perdido *A* si *B* tiene ahora el triple de lo que tiene *A*?
b. El juego consiste en lanzar un dado ordinario: *A* gana si salen los números tres o cinco y *B* si sale alguno de los restantes. Se ha lanzado seis veces el dado y cada vez la apuesta fue la misma. ¿Cuántas veces ha ganado cada quién?
c. ¿De cuánto fue la apuesta en cada lanzamiento?
d. En el siguiente lanzamiento que se haga:
   i. ¿cuál es la probabilidad de que gane *A*?
   ii. ¿cuál es la probabilidad de que gane *B*?
   iii. ¿Por qué?
e. ¿Es justo el juego? ¿Por qué?
f. Si crees que no, ¿cómo debería ser la apuesta para que fuera justo?

Figura 5.8. Cuestionario CP-A aplicado a estudiantes del curso de Geometría y Trigonometría (2do semestre) y Probabilidad y Estadística (6to semestre).

5.2.1. Respuestas de los estudiantes después de la enseñanza de álgebra

De los 25 estudiantes que acababan de recibir la enseñanza de álgebra, la frecuencia de los tipos de respuestas proporcionadas al cuestionario se muestran en la Figura 5.9.

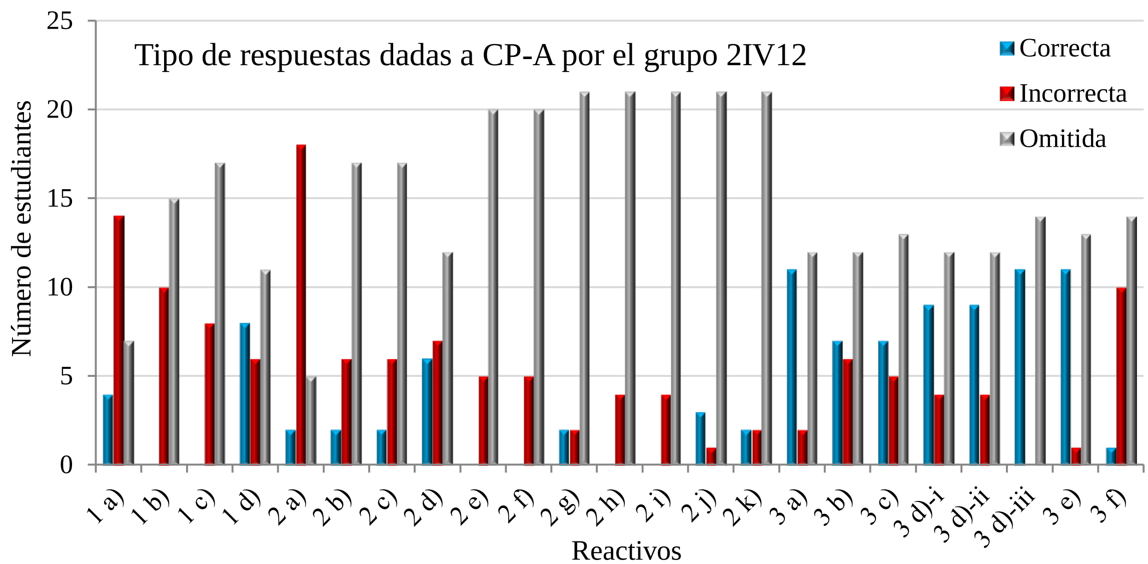
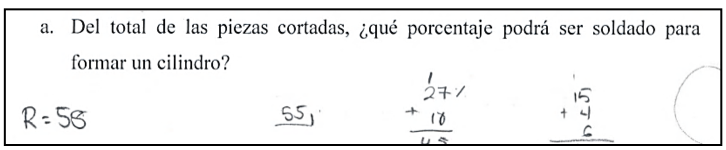


Figura 5.9. Frecuencia de tipo de respuestas dadas a CP-A, por estudiantes del curso de álgebra.

El 17% de los reactivos fue contestado correctamente, 23% incorrectamente y el 60% no fueron contestados. De los cuestionarios aplicados hasta ese momento, éste fue el que tuvo el índice más alto de abstencionismo.

5.2.1.1. Medida de Probabilidad. Tres de los cuatro incisos del reactivo 1 se refirieron a la idea de medida de probabilidad. Para 1a), 12% de los estudiantes contestaron correctamente; todas las respuestas dadas a 1c) fueron incorrectas y a 1d) el 32% de los jóvenes dio una respuesta acertada. El inciso 1a) pide indicar el porcentaje de piezas que se podrán soldar para formar un cilindro. Tres estudiantes contestaron de manera correcta 55%; un estudiante contestó incorrectamente 55 (véase la Figura 5.10), pues omitió el signo %. En 1d) se preguntaba por la parte complementaria, o sea por el porcentaje de piezas que no se podrían soldar; aquí sorprendió que ocho estudiantes indicaron correctamente que se trataba del 45%; como era de esperarse, los tres estudiantes que contestaron correctamente en 1a) lo hicieron también a 1d), pero además el estudiante que omitió el signo % en 1a), y también en 1c), contestó correctamente e incluso escribió lo que muestra la Figura 5.10.



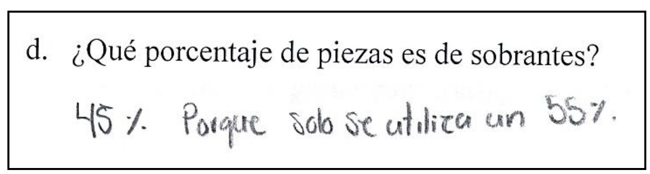


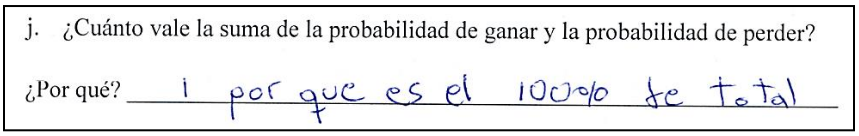
Figura 5.10. Respuesta de un estudiante donde omite inicialmente el signo % en 1 a) y en d) se refiere correctamente a la probabilidad del evento y su complementario.

Para 1c) ninguna respuesta fue correcta; seis de las dadas se expresaron en forma porcentual, una en forma fraccionaria y la del estudiante que omitió el signo %.

El reactivo 2a) (véase en la Figura 5.8) pidió estimar la probabilidad de un evento conociendo el número de particiones equiprobables del espacio muestra; sólo dos estudiantes (8%) respondieron a esta pregunta, ambos de forma porcentual. Los incisos b) y c) preguntaban por casos particulares del problema en los que la medida de probabilidad era mayor a uno y menor a cero, respectivamente; sólo dos estudiantes respondieron en ambos incisos que tales probabilidades no existían. El reactivo 2e) pidió determinar cuántos boletos era necesario poseer para tener cierta probabilidad de ganarse el premio sorteado, si se conocía el número total de boletos participantes; ningún estudiante contestó correctamente. El inciso j) preguntó por el valor de la suma de la probabilidad de ganar y la probabilidad de perder, a lo que tres estudiantes (12%) contestaron correctamente, desde un enfoque frecuencial:

probabilidad de perder 60 y ganar 40 la suma 100% que es el total de boletos

100% todo es basado en el valor total


j. ¿Cuánto vale la suma de la probabilidad de ganar y la probabilidad de perder?

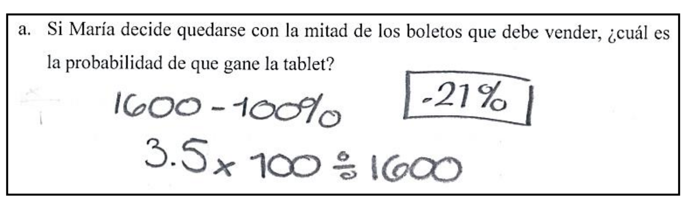
¿Por qué? 1 por que es el 100% de total

Figura 5.11. Respuesta de un estudiante que evidencia un enfoque frecuencial de probabilidad.

El inciso k) del reactivo 2 pidió que se expresara la cantidad de boletos que se debían poseer para que fuera imposible ganarse la rifa; sólo cuatro estudiantes (16%) contestaron, dos correctamente dijeron ninguno y los otros dos respondieron 80% y 9.

5.2.1.2. Espacio muestra. Para contestar al reactivo 2a) había que identificar el espacio muestra, se daba el número de estudiantes que venderían boletos aunque no se indicaba el total de boletos por vender. La falta de este dato complicó la solución de los estudiantes al problema; todos venderían la misma cantidad de boletos, independientemente de cuántos vendería cada estudiante. Dos estudiantes contestaron correctamente, podemos considerar que identificaron correctamente el espacio muestra, aunque no hay evidencia flagrante respecto a ello, pues su respuesta fue en forma porcentual. Ninguno de los estudiantes que contestaron incorrectamente consideró el espacio muestra en sus respuestas (véase la Figura 5.12).

Figura 5.12. Un estudiante soluciona el reactivo 2 a) con una regla de tres.


a. Si María decide quedarse con la mitad de los boletos que debe vender, ¿cuál es la probabilidad de que gane la tablet?

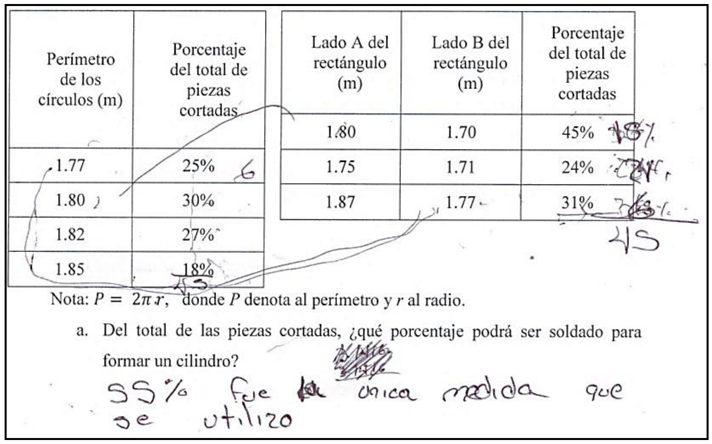
1600 - 100% $\boxed{-21\%}$

3.5 x 100 ÷ 1600

5.2.1.3. Adición de probabilidades. A esta idea fundamental se refirieron los incisos 1a) y 1d) (véase en la Figura 5.8), para los que había que relacionar las medidas de las láminas cortadas que se pudieran ensamblar para formar un cilindro. Tres estudiantes sumaron correctamente las partes que se podían soldar para 1a) (véase la Figura 5.13) y también lo hicieron para el inciso 1b), que se refería a las que no se podían soldar, más otros cinco estudiantes que no sumaron lo correspondiente al inciso 1a).

Para el inciso 2j), tres estudiantes indicaron la suma de las partes, pero sólo uno de ellos contestó correctamente a 1a) y a 1b).

Figura 5.13. Un estudiante suma los porcentajes de piezas cortadas, indicados en las tablas del problema uno y después contesta correctamente en 1 a).



Perímetro de los círculos (m)	Porcentaje del total de piezas cortadas
1.77	25% 6
1.80	30%
1.82	27%
1.85	18%

Lado A del rectángulo (m)	Lado B del rectángulo (m)	Porcentaje del total de piezas cortadas
1.80	1.70	45%
1.75	1.71	24%
1.87	1.77	31%

45

Nota: $P = 2\pi r$, donde P denota al perímetro y r al radio.

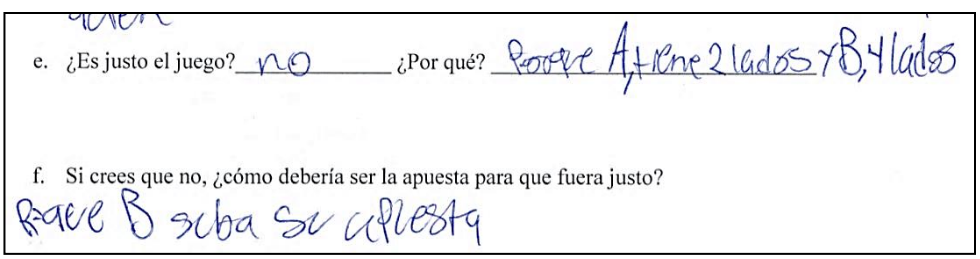
a. Del total de las piezas cortadas, ¿qué porcentaje podrá ser soldado para formar un cilindro?

55% fue unica medida que se utilizo

5.2.1.4. Variable aleatoria. En el reactivo 3f) está implicada la idea de variable aleatoria; se pregunta cómo se podría equilibrar una apuesta que no es justa (véase la Figura 5.8). Lo más cercano a una respuesta correcta la dio un estudiante:

Que B suba su apuesta

Esta respuesta (véase la Figura 5.14) no da evidencia de que el estudiante haya considerado los valores de la variable aleatoria ni el balance de pérdida y ganancia según lo apostado. Todas las demás respuestas se limitaron a proponer que cada apostador ganara con tres caras del dado.



e. ¿Es justo el juego? no ¿Por qué? Porque A tiene 2 lados y B, 4 lados

f. Si crees que no, ¿cómo debería ser la apuesta para que fuera justo?

Porque B suba su apuesta

Figura 5.14. Un estudiante indica que la apuesta no es justa y que B debería aumentar su apuesta.

5.2.1.5. Modelos generativos. Tres estudiantes recurrieron a la expresión figural al tratar los incisos del reactivo inicial: dibujaron cilindros en los que dos de ellos resaltaban sus propiedades (radio y altura) y uno más lo usó para figurar cómo se podía construir uno a partir de un rectángulo y un círculo (véase la Figura 5.15). Pero este soporte gráfico no contribuyó a que contestaran correctamente alguno de este conjunto de reactivos.

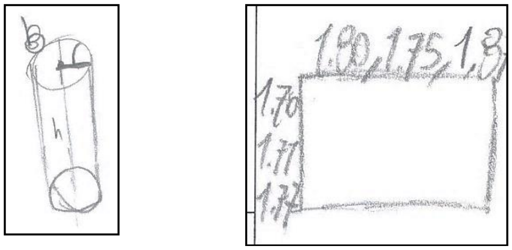


Figura 5.15. Recursos pictóricos utilizados por dos estudiantes para solucionar el conjunto de reactivos uno.

5.2.1.6. Otros conceptos matemáticos. Ninguno de los estudiantes calculó el volumen de los cilindros (véase la Figura 5.16), tuvieron dificultades para identificar las magnitudes correspondientes a la expresión del volumen y para realizar las operaciones respectivas sin la calculadora.

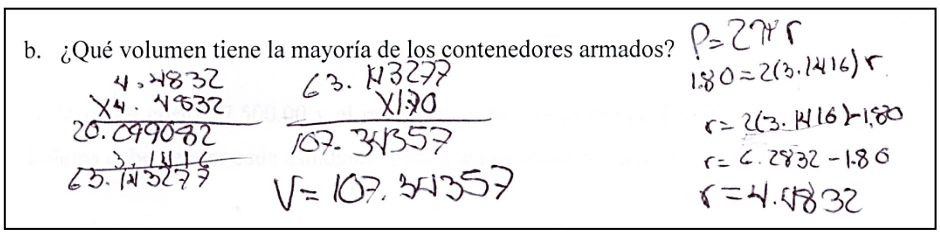


Figura 5.16. Operaciones realizadas por un estudiante en su intento de solucionar el problema 1 b).

5.2.2. Respuestas de los estudiantes de la unidad de aprendizaje de probabilidad

La Figura 5.17 resume las frecuencias de los tipos de respuestas de los 29 estudiantes que acababan de recibir la enseñanza de probabilidad impartida por su profesor titular y estaban estudiando probabilidad condicional cuando se les aplicó el cuestionario CP-A.

El cuestionario CP-A (véase la Figura 5.8) fue el instrumento que obtuvo la menor cantidad de reactivos contestados. Durante su aplicación al grupo de segundo semestre, los estudiantes invirtieron mucho tiempo en solucionar el problema de los contenedores, por lo que les quedó muy poco tiempo para contestar al resto de los reactivos. Se cambió el orden de los reactivos 1 y 2 para aplicarlo al grupo de sexto semestre y obtener así un mayor número de respuestas, lo cual funcionó, además de que estos estudiantes ya habían recibido la enseñanza de probabilidad, por lo que la omisión de respuestas disminuyó a 31%.

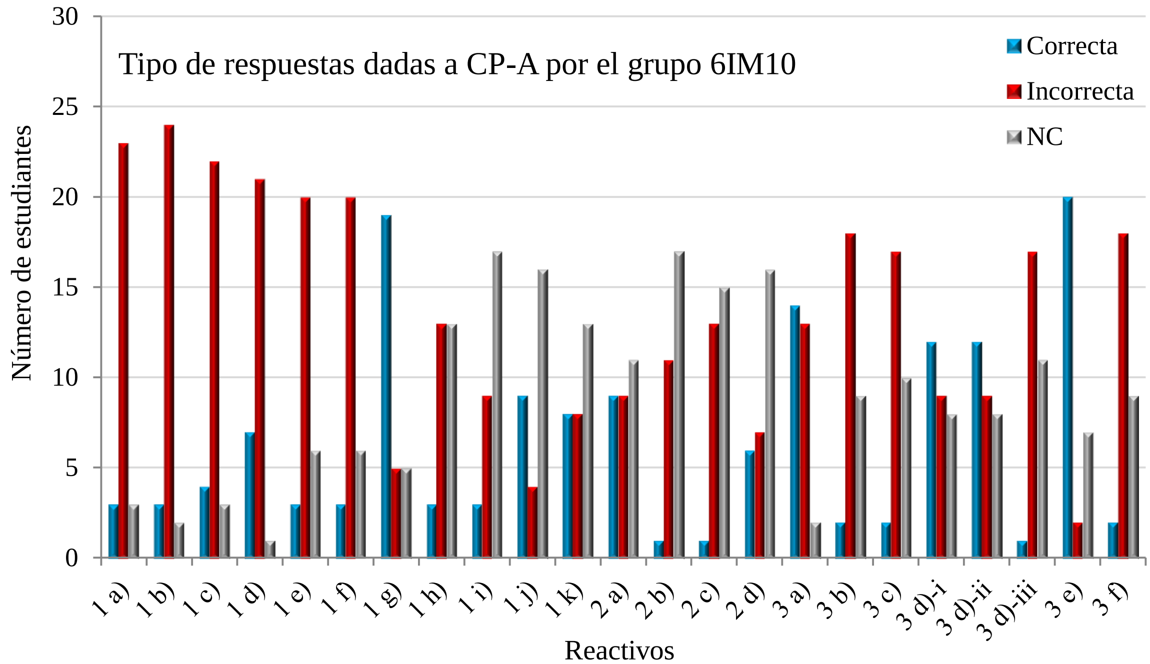
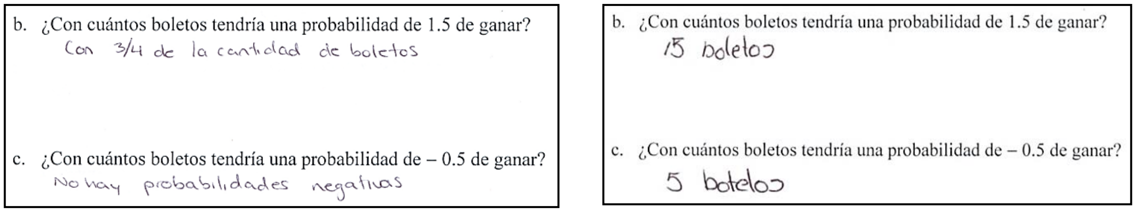


Figura 5.17. Frecuencia de los tipos de respuestas al cuestionario CP-A por estudiantes de probabilidad (sexto semestre).

5.2.2.1. Medida de probabilidad. Al reactivo 2a) contestaron correctamente nueve de los estudiantes (31%), para 2c) sólo una respuesta fue correcta y para 2d) sólo seis de los jóvenes (21%) respondieron acertadamente y también lo hicieron a 2a); sorprendieron los tres estudiantes que no determinaron la probabilidad del evento complementario, lo cual ocurrió a la inversa con los estudiantes de segundo semestre que no pudieron determinar la probabilidad del evento dado pero sí la del complementario.

Sólo tres estudiantes (10%) solucionaron el reactivo 1a), de los cuales dos respondieron en forma fraccionaria y uno en la porcentual. Los incisos b) y c) plantearon medidas de probabilidad mayor a uno y menor a cero, respectivamente; tres estudiantes indicaron que no había probabilidades mayores a uno en el inciso b), en el inciso c) dos de estos estudiantes argumentaron que no existían probabilidades negativas, junto con otros dos estudiantes que habían contestado incorrectamente a b); el tercer estudiante que contestó bien a b) no lo hizo a c) (véase una de estas respuestas en la Figura 5.18).



b. ¿Con cuántos boletos tendría una probabilidad de 1.5 de ganar?
Con 3/4 de la cantidad de boletos

c. ¿Con cuántos boletos tendría una probabilidad de – 0.5 de ganar?
No hay probabilidades negativas

b. ¿Con cuántos boletos tendría una probabilidad de 1.5 de ganar?
15 boletos

c. ¿Con cuántos boletos tendría una probabilidad de – 0.5 de ganar?
5 boletos

Figura 5.18. Respuestas de dos estudiantes a los reactivos 1 b) y 1 c).

El reactivo 1e) fue contestado correctamente por tres estudiantes (10%). Al inciso j) nueve estudiantes (31%) contestaron correctamente, cuatro desde un enfoque frecuencial, cuatro desde un enfoque clásico y un estudiante expresó ambos:

100 es el porcentaje total de todos los boletos y probabilidades

Vale 1 porque es mitad y mitad

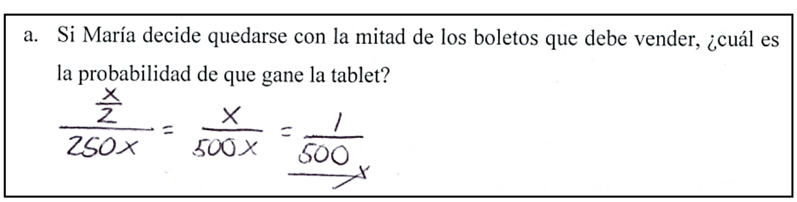
100% o 1, se complementan los dos

Al inciso 2 k) ocho estudiantes contestaron correctamente (28%) y otros ocho respondieron incorrectamente, de quienes siete expresaron alguna cantidad y el octavo anotó:

Ninguna, siempre está la posibilidad

Para este estudiante pasó desapercibido el evento imposible, pues consideró que siempre sería posible la realización de un suceso.

5.2.2.2. Espacio muestra. Al reactivo 1a) tres estudiantes contestaron correctamente, dos de ellos evidenciaron su interpretación correcta de la cardinalidad del espacio muestra, el otro estudiante contestó en una forma porcentual. De entre los estudiantes que contestaron incorrectamente, siete de ellos (24%) dieron evidencia de considerar el espacio muestra para contestar (véase la Figura 5.19).

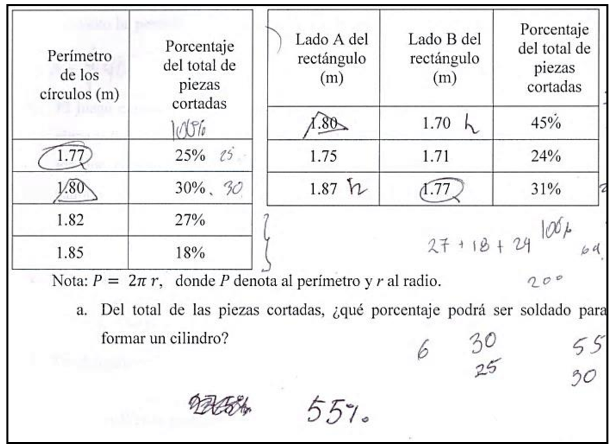


a. Si María decide quedarse con la mitad de los boletos que debe vender, ¿cuál es la probabilidad de que gane la tablet?

$$\frac{\frac{x}{2}}{250x} = \frac{x}{500x} = \frac{1}{500}$$

Figura 5.19. Respuesta que plantea una relación para 1 a).

5.2.2.3. Adición de probabilidades. Esta idea fundamental estaba incluida en las reactivos 2a) y 2d) (véase la Tabla 3.1), que requerían relacionar las medidas de las láminas cortadas para formar un cilindro. Nueve estudiantes (31%) sumaron correctamente las partes que se podían soldar en 2a), aunque sólo seis de ellos también lo hicieron en 2b) que se refería a las que no se podían soldar; dos de los tres estudiantes que contestaron correctamente a 2a) se equivocaron al responder 90%, y el tercero no contestó este reactivo.



Perímetro de los círculos (m)	Porcentaje del total de piezas cortadas
	100%
1.77	25% 25
1.80	30% 30
1.82	27%
1.85	18%

Lado A del rectángulo (m)	Lado B del rectángulo (m)	Porcentaje del total de piezas cortadas
1.80	1.70	45%
1.75	1.71	24%
1.87	1.77	31%

27 + 18 + 24 100%

Nota: $P = 2\pi r$, donde P denota al perímetro y r al radio.

a. Del total de las piezas cortadas, ¿qué porcentaje podrá ser soldado para formar un cilindro?

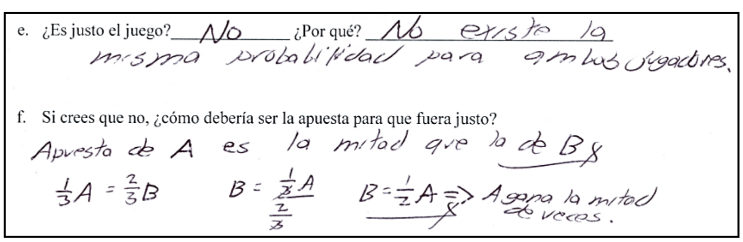
6 30 25 55 30

55%

Figura 5.20. Un estudiante suma los porcentajes de piezas cortadas y contesta correctamente en 1 a).

Para el reactivo 1j) nueve estudiantes indicaron la suma de las partes, de quienes sólo cinco contestaron correctamente a 2a) y a 2b), uno sólo a 2a) y tres estudiantes no contestaron ni 2a) ni 2b).

5.2.2.4. Variable aleatoria. Al reactivo 3f) un estudiante contestó correctamente, consideró el balance de pérdidas y ganancias para cada valor de la variable aleatoria y dio la respuesta que se ilustra en la Figura 5.21.



e. ¿Es justo el juego? No ¿Por qué? No existe la misma probabilidad para ambos jugadores.

f. Si crees que no, ¿cómo debería ser la apuesta para que fuera justo?

Apuesta de A es la mitad que la de B

$\frac{1}{3}A = \frac{2}{3}B$ $B = \frac{\frac{1}{3}A}{\frac{2}{3}}$ $B = \frac{1}{2}A \Rightarrow$ A gana la mitad de veces.

Figura 5.21. Un estudiante indica cómo se haría justa la apuesta en el problema 3.

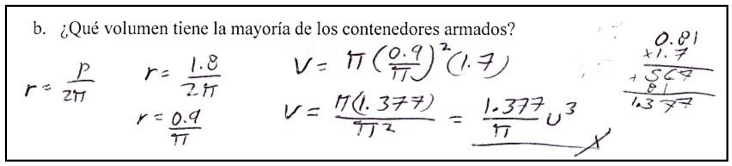
Otro estudiante también dio una respuesta correcta pero incompleta, al expresar que el jugador B tendría que aumentar la cantidad que apostaba, pero no indicó en cuánto y anotó como una segunda opción que cada estudiante ganara con tres caras del dado, respuesta que también dieron todos los estudiantes que contestaron incorrectamente:

Que B tenga que apostar más ó que A sean pares y B impares y múltiplos de 3,6

5.2.2.5. Modelos generativos. De este grupo ningún estudiante empleó algún recurso gráfico para contestar los reactivos del cuestionario CP-A.

5.2.2.6. Otros conceptos matemáticos. Sólo un estudiante calculó el volumen de los cilindros (reactivo 2b), véase la Figura 5.22), los demás tuvieron dificultades para identificar las magnitudes en los datos del problema y sus correspondientes en la fórmula del volumen, al igual que a los estudiantes de primer semestre se les dificultó realizar sin la calculadora las operaciones prescritas por la fórmula.

Figura 5.22. Un estudiante calculó el volumen de la mayoría de los cilindros armados.


b. ¿Qué volumen tiene la mayoría de los contenedores armados?

$r = \frac{p}{2\pi}$ $\quad r = \frac{1.8}{2\pi}$ $\quad r = \frac{0.9}{\pi}$

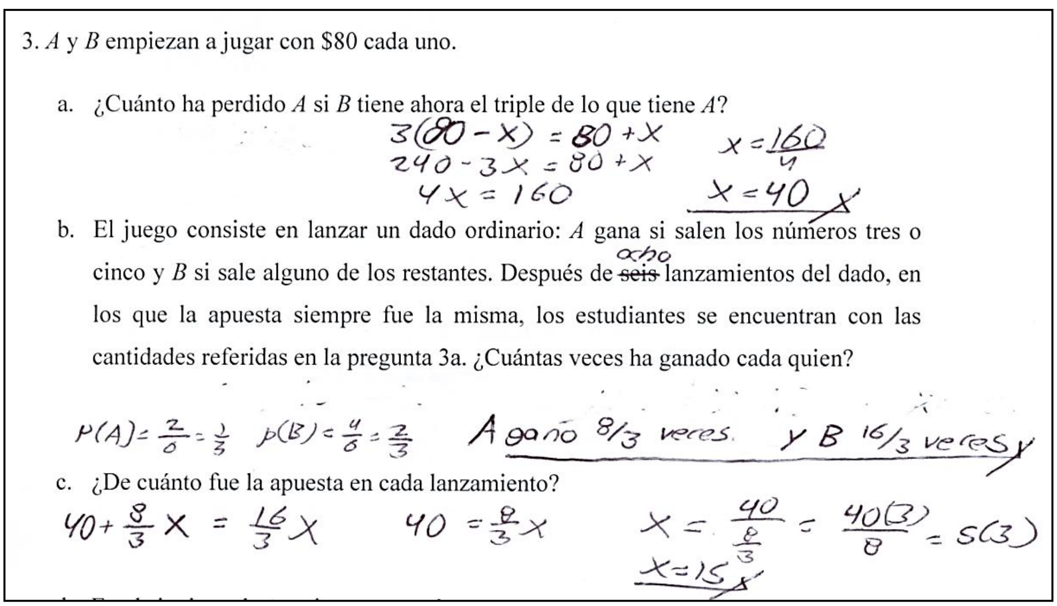
$V = \pi\left(\frac{0.9}{\pi}\right)^2(1.7)$

$V = \frac{\pi(1.377)}{\pi^2} = \frac{1.377}{\pi}u^3$

$0.81 \times 1.7 = 1.377$

5.2.3. Entrevista a un estudiante de probabilidad

Del grupo de sexto semestre se seleccionó a un estudiante para entrevista, debido a que había mostrado dominio de los conceptos de matemáticas tanto en CP-A como en las evaluaciones que se le aplicaban en el CECyT, sólo que en CP-A no logró plantear una respuesta que considerara la intervención del azar en el reactivo 3 (véase la Figura 5.23).


3. *A* y *B* empiezan a jugar con $80 cada uno.

a. ¿Cuánto ha perdido *A* si *B* tiene ahora el triple de lo que tiene *A*?

$3(80 - x) = 80 + x$

$240 - 3x = 80 + x$

$4x = 160$

$x = \frac{160}{4}$

$x = 40$

b. El juego consiste en lanzar un dado ordinario: *A* gana si salen los números tres o cinco y *B* si sale alguno de los restantes. Después de ~~seis~~ ocho lanzamientos del dado, en los que la apuesta siempre fue la misma, los estudiantes se encuentran con las cantidades referidas en la pregunta 3a. ¿Cuántas veces ha ganado cada quien?

$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $\quad p(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ A ganó 8/3 veces. y B 16/3 veces

c. ¿De cuánto fue la apuesta en cada lanzamiento?

$40 + \frac{8}{3}x = \frac{16}{3}x$ $\quad 40 = \frac{8}{3}x$ $\quad x = \frac{40}{\frac{8}{3}} = \frac{40(3)}{8} = 5(3)$

$x = 15$

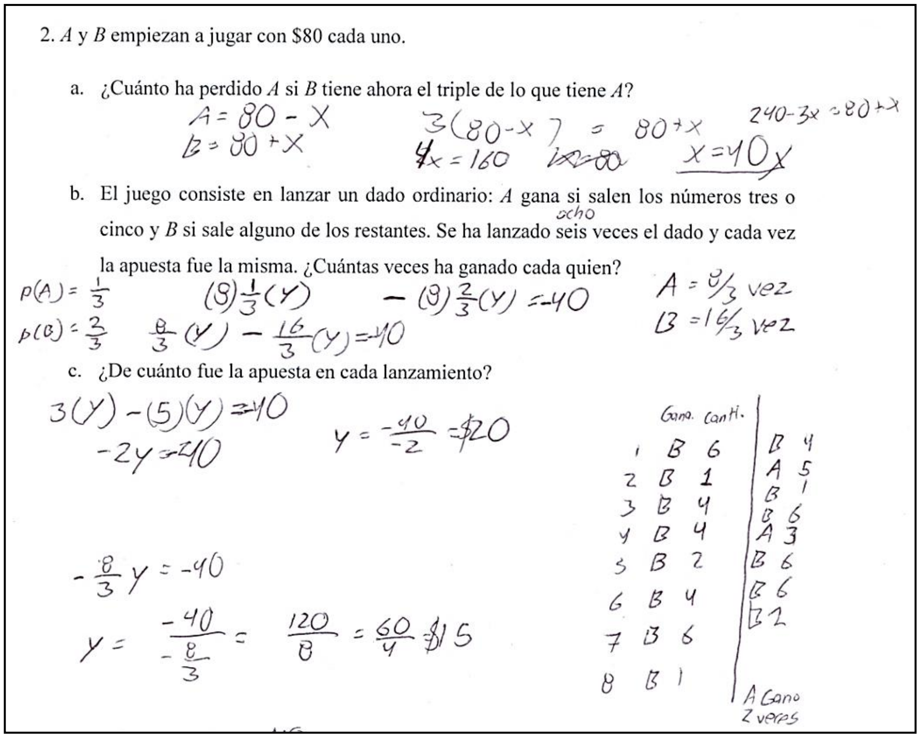
Figura 5.23. Respuestas incorrectas del estudiante seleccionado a 3 b) y 3 c) de CP-A.

Durante la aplicación de CP-A se le indicó al estudiante que analizara su respuesta, pero insistió en que era correcta, por lo que se le preguntó si era posible en la realidad obtener

8/3 y 16/3 de lanzamientos de dados. Reflexionó y continuó su análisis, para después indicar que no se podían tener en la realidad, pero que había obtenido la respuesta de la relación matemática que había planteado y por tanto había decidido mantenerla. Con este antecedente, la entrevista se basó en los reactivos 3 b) y 3 c) de CP-A. La sesión se videograbó y se utilizaron hojas de control para el registro manuscrito de las respuestas (véanse en la Figura 5.24).

Durante el interrogatorio, el estudiante repitió su procedimiento anterior, por lo que se continuó con el diálogo iniciado durante la aplicación del cuestionario. Él argumentó que aunque las veces fraccionarias no pueden ocurrir en la realidad, conforme se repitiera el fenómeno los resultados tenderían a esos valores en promedio. Al insistir en que expresara una situación que cumpliera con el balance de pérdida y ganancia indicado en el problema, contestó que tres veces había ganado A y cinco B, porque eran los números que más se aproximaban a sus valores promedios calculados y que la apuesta había sido de $20.

Posteriormente se procedió a simular la situación planteada, por lo que se lanzó un dado ocho veces, en el primer caso B ganaba la apuesta en los ocho resultados obtenidos y en segundo caso A ganaba dos apuestas mientras que B ganaba seis. Al preguntarle por estos resultados en relación a lo que había dicho, el estudiante dijo que podían darse todos los resultados en los que A o B podían ganar, desde ninguno, hasta los ocho volados, pero que en la tendencia de los resultados se repetiría con mayor la frecuencia tres y cinco porque era la que más se aproximaba a sus valores medios calculados.



2. *A* y *B* empiezan a jugar con $80 cada uno.

a. ¿Cuánto ha perdido *A* si *B* tiene ahora el triple de lo que tiene *A*?

$A = 80 - X$ $\quad 3(80-x) = 80+x \quad 240-3x = 80+x$

$B = 80 + X$ $\quad 4x = 160 \quad \cancel{x=80} \quad x = 40$

b. El juego consiste en lanzar un dado ordinario: *A* gana si salen los números tres o cinco y *B* si sale alguno de los restantes. Se ha lanzado ~~seis~~ ocho veces el dado y cada vez la apuesta fue la misma. ¿Cuántas veces ha ganado cada quien?

$p(A) = \frac{1}{3} \quad (8)\frac{1}{3}(Y) - (8)\frac{2}{3}(Y) = -40 \quad A = 8/3$ vez

$p(B) = \frac{2}{3} \quad \frac{8}{3}(Y) - \frac{16}{3}(Y) = -40 \quad B = 16/3$ vez

c. ¿De cuánto fue la apuesta en cada lanzamiento?

$3(Y) - (5)(Y) = -40 \quad Y = \frac{-40}{-2} = \$20$

$-2Y = -40$

$-\frac{8}{3}Y = -40$

$Y = \frac{-40}{-\frac{8}{3}} = \frac{120}{8} = \frac{60}{4} \; \$15$

Gana. Cant.

1 B 6 | B 4
2 B 1 | A 5
3 B 4 | B 1
4 B 4 | B 6
5 B 2 | A 3
6 B 4 | B 6
7 B 6 | B 6
8 B 1 | B 2

A Gano 2 veces

Figura 5.24. Respuesta del estudiante durante la entrevista.

5.3. Cuestionario C-I en los semestres segundo y cuarto

El cuestionario C-I (véase en la Figura 5.25) se aplicó a tres grupos distintos (véase en la Tabla 3.1): inicialmente a un grupo del sexto semestre (véase en el capítulo 6, sección 6.1), unas semanas antes de recibir la enseñanza de probabilidad; a un grupo de segundo semestre y a diez estudiantes de cuarto semestre. El objetivo fue recopilar las respuestas dadas por estos tres grupos de estudiantes, en tres temporalidades distintas del programa de estudios del bachillerato respecto a su último antecedente de enseñanza de probabilidad en la escuela secundaria: un año después (segundo semestre), dos años después (cuarto semestre) y tres años después (sexto semestre). La Figura 5.25 muestra los reactivos del cuestionario C-I e indica sus fuentes, así como el enfoque de probabilidad que implica.

1. Se anuncia que la probabilidad de que llueva mañana es 70%. ¿Qué significa este pronóstico?
(Truxal, 1989, p. 2) Enfoque: frecuencial

2. De los dos eventos siguientes, ¿cuál es más probable y por qué?
a) Que caiga doble seis en dos

4. ¿Qué es más probable, que al lanzar dos dados al mismo tiempo caiga el mismo número en los dos o que la suma de los dos números sea siete? ____ ¿Por qué?
(Tradicional) Enfoque: clásico

5. Una trayectoria en una configuración, como A o B, se forma conectando un elemento del renglón superior con un elemento del reglón inferior, y toca uno y sólo

lanzamientos de un dado común.

b) Que caigan dos águilas en dos volados.

(Tradicional) Enfoque: clásico

3. En una encuesta, a 500 estudiantes de bachillerato se les pidió que anotaran en una papeleta su deporte favorito y el semestre que cursaban:

Estudiantes	**Deportes** Fútbol	Bás-quetbol	Natación	Otros	**Total**
1er Semestre	118	84	39	34	275
3er Semestre	54	39	18	16	127
5° Semestre	30	26	22	20	98
Total	202	149	79	70	500

Se depositan todas las papeletas en una urna, se mezclan y se saca una papeleta al azar. ¿Cuál es la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos?:

a) Es de 5° semestre. _____

b) El deporte es básquetbol. ______

c) Es de tercer semestre y tiene anotado fútbol. _____

d) Si ya se sabe que se anotó natación, que sea de primer semestre. _____

e) ¿Cuál deporte tiene mayor probabilidad de salir? ___¿Cuál es su probabilidad?

(Chávez, 2001, p. 299). Enfoque: clásico

un elemento de cada renglón intermedio.

A	B
× × × × × × × ×	× ×
× × × × × × × ×	× ×
× × × × × × × ×	× ×
	× ×
	× ×
	× ×
	× ×
	× ×
	× ×

a) ¿Cuál configuración, A o B, permite más trayectorias?

b) ¿Por qué?

c) ¿Cuántas trayectorias son?

(Shaughnessy,1977, p. 312). Enfoque: clásico

6. Dos urnas α y β contienen bolas de igual tamaño, azules, rojas y verdes, en las cantidades indicadas en la tabla.

	Urna α	Urna β
Rojas	2	2
Verdes	3	2
Azules	4	3

Se selecciona al azar una urna y se extrae al azar una bola.

a) ¿De cuál urna es más probable extraer una bola azul?

b) Si se extrajo una bola roja, ¿de cuál urna es más probable que se haya extraído?

(SEP, 1994, pp. 152-153). Enfoque: clásico

7. De la producción de motores de automóvil de una planta *X*, el 15% son defectuosos. Si cuesta $50,000 producir un motor y $30,000 adicionales reparar uno defectuoso,

a) ¿Cuál es el costo promedio de un motor producido por esa planta? _____

b) ¿Es bajo o es alto el costo de los motores defectuosos? _______ ¿Por qué?

c) ¿Comprarías un automóvil de esa marca? ¿Por qué?

(Truxal, 1989, p. 4). Enfoque: frecuencial

8. Se desea formar un comité integrado por 3 personas: 1 directivo, 1 maestro y 1 alumno. Hay 2 candidatos de la dirección, 3 de los maestros y 4 de los alumnos. ¿Cuántos comités pueden formarse? ¿Por qué?

(Chavez, 2001, p.341). Enfoque: clásico

Figura 5.25. Reactivos del Cuestionario C-I.

En esta sección analizaremos las respuestas dadas por 27 estudiantes de segundo y nueve de cuarto semestres, que en la fecha de la aplicación cursaban las Unidades de Aprendizaje de Geometría y Trigonometría y de Cálculo Diferencial, respectivamente. Los resultados del análisis de las respuestas de los estudiantes del sexto semestre se analizan en la sección 6.1 del capítulo 6, porque forman parte del grupo al que este investigador le impartió la enseñanza descrita en 6.2.

5.3.1. El caso de los estudiantes de segundo semestre

La Figura 5.26 presenta la frecuencia de respuestas correctas, incorrectas y omitidas al cuestionario C-I por los 27 estudiantes que cursaban Geometría y Trigonometría.

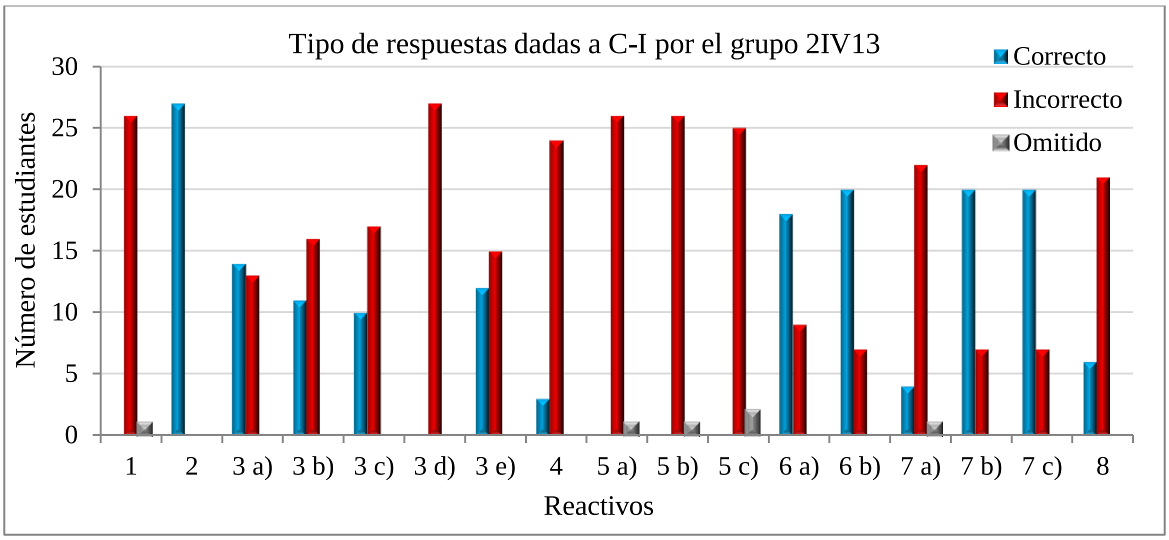


Figura 5.26. Distribución de los tipos de respuestas dadas al cuestionario.

El 63% de las respuestas fueron incorrectas, seguidas por un 36% de respuestas correctas y sólo un 1% de los casos los estudiantes no contestaron. De lo anterior se deduce una gran disponibilidad de los jóvenes para contestar el cuestionario, a pesar de referirse a una temática ajena a la que en su momento estudiaban en el CECyT.

5.3.1.1. Medida de Probabilidad. El primer reactivo (véase en la Figura 5.25) no tuvo una sola respuesta correcta; 26 estudiantes contestaron incorrectamente, dos de ellos expresaron que estaría nublado y uno contestó que el 70% del tiempo del día estaría lloviendo (véase Figura 5.27):

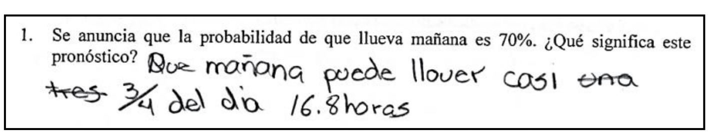

1. Se anuncia que la probabilidad de que llueva mañana es 70%. ¿Qué significa este pronóstico? Que mañana puede llover casi ~~una~~ ~~tres~~ 3/4 del dia 16.8 horas

Figura 5.27. Significado de un pronóstico de lluvia para un estudiante.

Los restantes parafrasearon el pronóstico, pero con tres tipos de justificaciones: tres estudiantes se refirieron al evento complementario de que no lloviera, cuya probabilidad era 30%; cinco estudiantes indicaron que llovería porque el pronóstico era mayor al 50%, valor para los eventos equiprobables; siete jóvenes hicieron hincapié en el 70% del evento indicado o en la relación 7/10. El resto de los estudiantes parafrasearon el enunciado sin hacer referencia al evento "lloverá mañana" y a su complementario "no lloverá mañana".

En el reactivo 3, 21 estudiantes (78%) contestaron a la medida de probabilidad en forma porcentual; tres solamente indicaron la cardinalidad del evento exitoso sin hacer referencia a la cardinalidad del al espacio muestra (véase la Figura 5.28); tres estudiantes contestaron con números racionales, incluso uno de ellos especificó también el valor en forma decimal; finalmente un estudiante contestó con las expresiones "más probable" o "menos probable", o con alguna de las categorías de los subconjuntos del espacio muestra, y fue sólo hasta el último reactivo que expresó una probabilidad en forma porcentual.

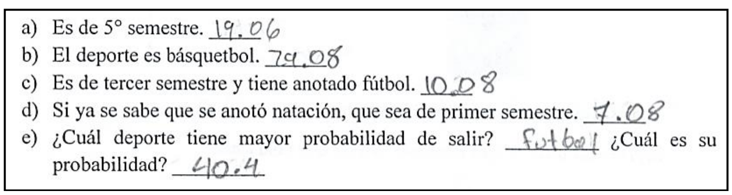

a) Es de 5° semestre. 19.06
b) El deporte es básquetbol. 79.08
c) Es de tercer semestre y tiene anotado fútbol. 10.08
d) Si ya se sabe que se anotó natación, que sea de primer semestre. 7.08
e) ¿Cuál deporte tiene mayor probabilidad de salir? futbol ¿Cuál es su probabilidad? 40.4

Figura 5.28. Un estudiante estima una probabilidad refiriéndose a la cardinalidad del evento exitoso.

Al inciso a) del reactivo 6 (véase en la Figura 5.29) contestaron correctamente 66% de los estudiantes, pero sólo dos de ellos justificaron que era más probable extraer una bola azul porque: "había más bolas azules"; el 33% de los estudiantes contestó incorrectamente y dos de ellos argumentaron que la probabilidad era la misma para ambas urnas.

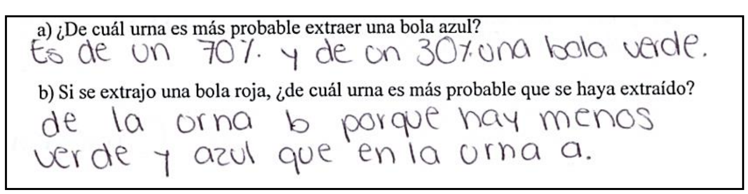
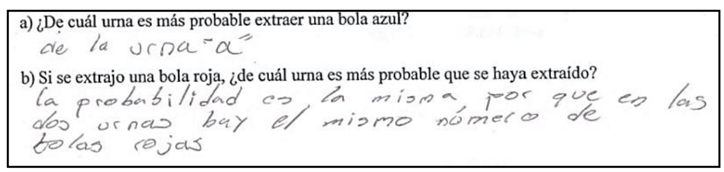

a) ¿De cuál urna es más probable extraer una bola azul?
Es de un 70% y de un 30% una bola verde.
b) Si se extrajo una bola roja, ¿de cuál urna es más probable que se haya extraído?
de la orna b porque hay menos verde y azul que en la orna a.

Figura 5.29. Respuestas de un estudiante a los reactivos 6.

Al inciso b), que pedía comparar 2/9 contra 2/7, el 74% de los estudiantes contestó correctamente y 26% incorrectamente. En seis de las 20 respuestas correctas los estudiantes justificaron con la anotación de que la primera urna era más probable, ya que la cantidad contenida de bolas de los otros dos colores era menor, es decir, era mayor la proporción de bolas rojas con respecto al total; las siete respuestas incorrectas indicaron que la probabilidad era la misma para ambas urnas, lo cual los estudiantes justificaron con que la cantidad de bolas rojas contenidas en las dos urnas era la misma.

5.3.1.2. Espacio muestra. Para el caso del reactivo 6b) (véase en la Figura 5.30), sólo seis estudiantes (22%) dieron evidencia de tomar en cuenta el total de posibilidades, al considerar la cantidad de bolas de otros colores dentro de la urna y, por el contrario, el 26% de estudiantes que contestó incorrectamente lo omitió y sólo consideraron la cardinalidad del evento sin relacionarla con la cardinalidad del espacio muestra. En el reactivo 6a) dos estudiantes (7%) aclararon su consideración del caso más probable con base en la comparación de la cardinalidad del evento exitoso en ambas urnas, eligieron el caso con cardinalidad mayor, por lo que no consideraron la cardinalidad del espacio muestra; sobresalió que estos dos estudiantes fueron de los seis que en el inciso 6b) relacionaron la parte (cardinalidad del evento) con el todo (cardinalidad del espacio muestra).

Figura 5.30. En 6 b) un estudiante desconoció la cantidad de bolas de otros colores al calcular la probabilidad de extraer una roja.


a) ¿De cuál urna es más probable extraer una bola azul?
de la urna-a
b) Si se extrajo una bola roja, ¿de cuál urna es más probable que se haya extraído?
la probabilidad es la misma por que en las dos urnas hay el mismo número de bolas rojas

Para el reactivo 2, que solicitó comparar las probabilidades de doble seis al lanzar dos veces un dado y doble águila en dos volados (véase la Figura 5.31), 70% de las justificaciones de las respuestas se basaron en comparaciones de la cantidad de resultados posibles, pero sólo para el fenómeno aleatorio simple, no para el fenómeno aleatorio compuesto planteado.

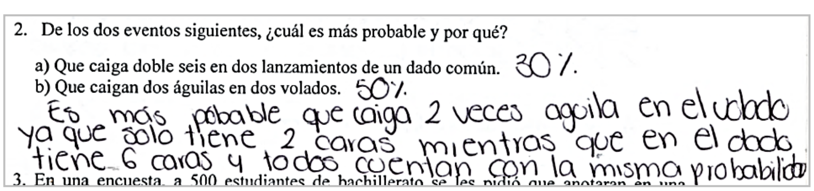
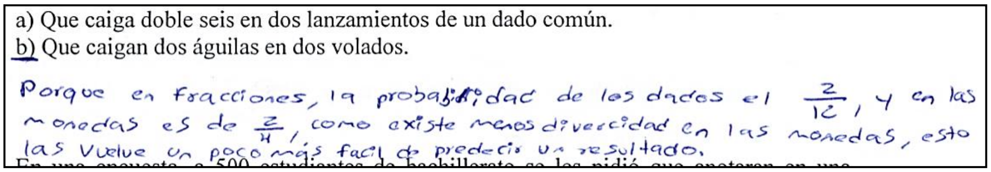

2. De los dos eventos siguientes, ¿cuál es más probable y por qué?
a) Que caiga doble seis en dos lanzamientos de un dado común. 30%
b) Que caigan dos águilas en dos volados. 50%
Es más probable que caiga 2 veces agila en el volado ya que sólo tiene 2 caras mientras que en el dado tiene 6 caras y todos cuentan con la misma probabilidad
3. En una encuesta a 500 estudiantes de bachillerato se les pidió que anotaran en una

Figura 5.31. Respuesta de un estudiante al reactivo 2.

5.3.1.3. Regla del producto e independencia. En el reactivo 2, 19 de los estudiantes (70%) no reconocieron la independencia en la doble repetición de lanzamiento de dados y de volados, sino que se limitaron a referirse y a comparar los eventos elementales. Sólo un estudiante se percató de la independencia de los ensayos, pero calculó la probabilidad del evento compuesto sumando las probabilidades de los eventos simples; se ancló a un razonamiento aditivo (véase la Figura 5.32):

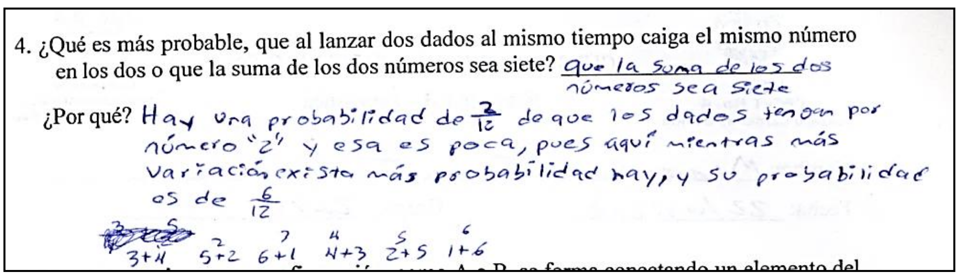


a) Que caiga doble seis en dos lanzamientos de un dado común.
b) Que caigan dos águilas en dos volados.

Porque en fracciones, la probabilidad de los dados el $\frac{2}{12}$, y en las monedas es de $\frac{2}{4}$, como existe menos diversidad en las monedas, esto las vuelve un poco más facil de predecir un resultado.

Figura 5.32. Razonamiento aditivo en el cálculo de la probabilidad de dos eventos independientes.

Para el reactivo 4 (véase la Figura 5.33), dos de los cinco estudiantes (40%) que se percataron de que el resultado del lanzamiento de uno de los dados era independiente del del otro, también estimaron la probabilidad mediante un razonamiento aditivo (véase la Figura 5.33):



4. ¿Qué es más probable, que al lanzar dos dados al mismo tiempo caiga el mismo número en los dos o que la suma de los dos números sea siete? que la suma de los dos números sea siete

¿Por qué? Hay una probabilidad de $\frac{2}{12}$ de que los dados tengan por número "2" y esa es poca, pues aquí mientras más variación exista más probabilidad hay, y su probabilidad es de $\frac{6}{12}$

3+4 5+2 6+1 4+3 2+5 1+6

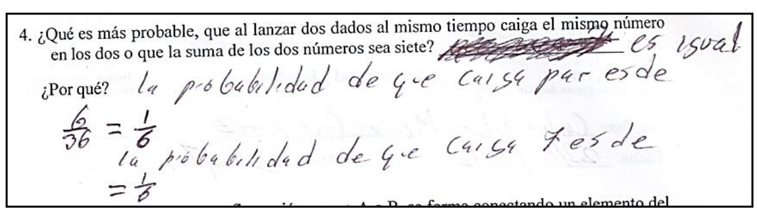
Figura 5.33. Cálculo de un estudiante de la probabilidad de los eventos en el reactivo 4.

Otros tres estudiantes manifestaron un razonamiento multiplicativo, pero sólo uno de ellos estimó correctamente la probabilidad del evento (véase Figura 5.34):

Mismo número: para que salgan dos iguales hay una probabilidad de 1/36 y en el otro es menor

Dos de 36 combinaciones: una cara hace combinación con cada cara del otro lado. La probabilidad es escasa

Figura 5.34. La única estimación correcta de la probabilidad en el reactivo 4.



4. ¿Qué es más probable, que al lanzar dos dados al mismo tiempo caiga el mismo número en los dos o que la suma de los dos números sea siete? es igual

¿Por qué? la probabilidad de que caiga par es de $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ la probabilidad de que caiga 7 es de $= \frac{1}{6}$

5.3.1.4. Equiprobabilidad. Para el reactivo 4 (véase en la Figura 5.25) sólo se obtuvieron 11% de respuestas correctas. Ciertamente la comparación no era entre eventos simples, sino entre eventos compuestos resultantes de la repetición del fenómeno aleatorio. Los resultados de este reactivo no manifiestan un razonamiento probabilístico; para 59% de los estudiantes (17), el evento más probable era obtener la suma de siete puntos al lanzar los dados, de quienes cinco justificaron su respuesta mediante el análisis de las puntuaciones de las caras del dado:

suma 7: las caras del dado se numeran con 1, 2, 3, 4, 5, 6 por lo que hay menos probabilidad de caer en los 2 dados iguales; y así se puede decir que una suma de los resultados es más probable que den 7

suma 7: hay más probabilidad de que caiga 6+1, 4+3, 5+2, y es menos probable de que sea el mismo número

Otro estudiante argumentó:

La suma de los dos: porque es más probable que atinarle dos veces a un mismo número con seis caras

Esta respuesta parece manifestar una recencia negativa (Fischbein, 1975) también conocida como la falacia del jugador: un evento tiene menos probabilidad de ocurrir si ya ocurrió recientemente. De alguna manera el principio de este razonamiento está presente en las respuestas de los cinco estudiantes citados arriba que se decantaron por una suma en lugar de la repetición de la misma puntuación en ambos dados. Acentúa esta observación que sólo dos estudiantes (7%) anotaron que era más probable obtener el mismo número en ambos dados, lo que uno de ellos justificó así:

Es más probable dobles: tiene seis posibilidades de que caiga dobles y sólo hay tres posibilidades que al sumar te de [sic] *7*

Su justificación es contraria a las mostradas anteriormente; cuantificó correctamente los componentes del evento: cae la misma cara; pero contó incorrectamente las posibilidades de los eventos en que la suma es siete por la conmutatividad de la operación, consideró como el mismo evento a las sumas 6 + 1 y 1 + 6, y así para las demás. Comparó entonces las cardinalidades de los subconjuntos respectivos, uno con seis elementos y otro con tres, por lo que eligió el de cardinalidad mayor.

5.3.1.5. Combinatoria. El reactivo 8 implica al principio fundamental del conteo (véase la Figura 5.25). El 22% de los estudiantes dio una respuesta correcta al problema, mientras que 78% se limitó a organizar el número de comités conforme a la menor cantidad de candidatos para un puesto (véase la Figura 5.35).

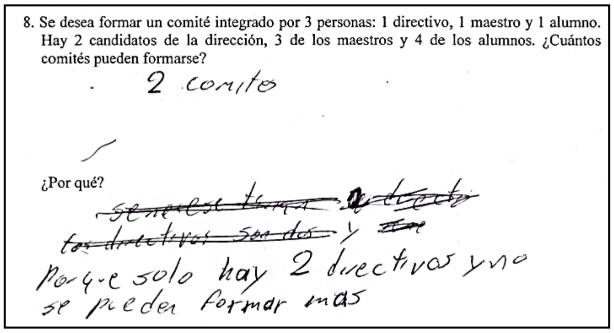


Figura 5.35. El 78% de los estudiantes expresaron que sólo se podían formar dos comités dada las cantidades de los candidatos a los puestos.

Ningún estudiante contestó correctamente alguno de los incisos del reactivo 5 (véase en la Figura 5.36), entre las respuestas no se exhibió algún elemento de análisis combinatorio.

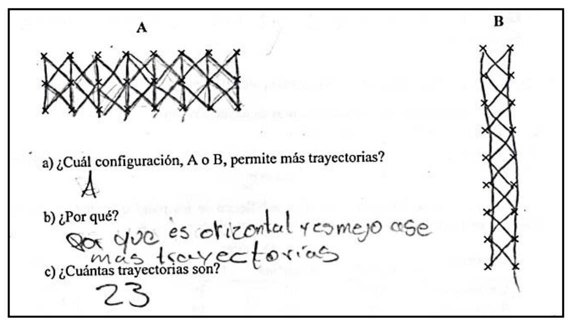


Figura 5.36. Respuesta de un estudiante a los incisos del reactivo 5.

5.3.1.6. Modelos generativos. 37% de los estudiantes (diez) trazaron una figura y cinco de ellos contestaron correctamente al reactivo 8 (véase en la Figura 5.25). Las figuras fueron diagramas de árbol, por cinco estudiantes; una tabla por uno y dos representaron a los candidatos mediante letras y dos trazaron gráficos poco claros (véase la Figura 5.37).

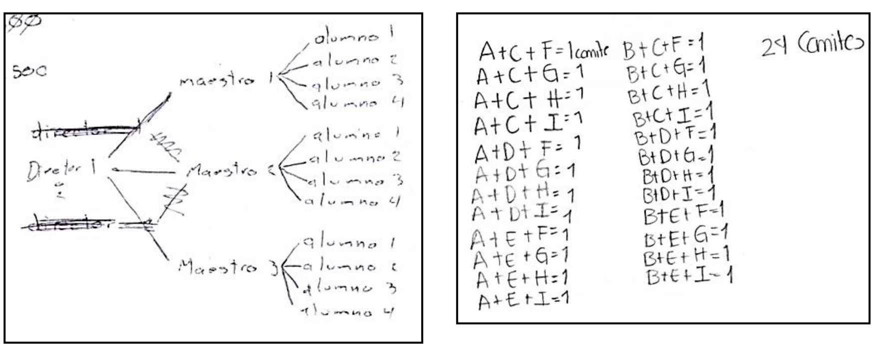


Figura 5.37. Recursos utilizados por los estudiantes para el reactivo 8.

En su respuesta al reactivo 4, un estudiante trazó una figura, indicó correctamente que ambos eventos eran equiprobables, aunque su justificación fue errónea y poco clara (véase la Figura 5.38).

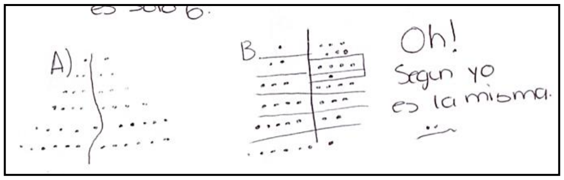
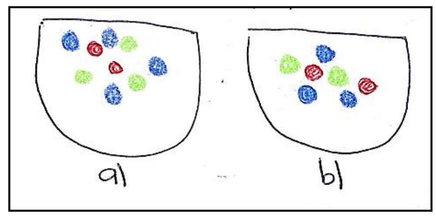


Figura 5.38. Un estudiante estimó las probabilidades del reactivo 4 mediante estos dibujos.

Un estudiante trazó figuras de las urnas y sus contenidos del reactivo 6. Contestó 6a) incorrectamente y 6b) correctamente (véase la Figura 5.39).

Figura 5.39. Un estudiante representó mediante un dibujo las urnas del problema 6, contestó correctamente a 6 b), en 6 a) se equivocó.



5.3.2. El caso de los estudiantes de cuarto semestre

La Figura 5.40 presenta la frecuencia de respuestas correctas, incorrectas y omitidas dadas al cuestionario C-I por nueve estudiantes que cursaban Cálculo Diferencial.

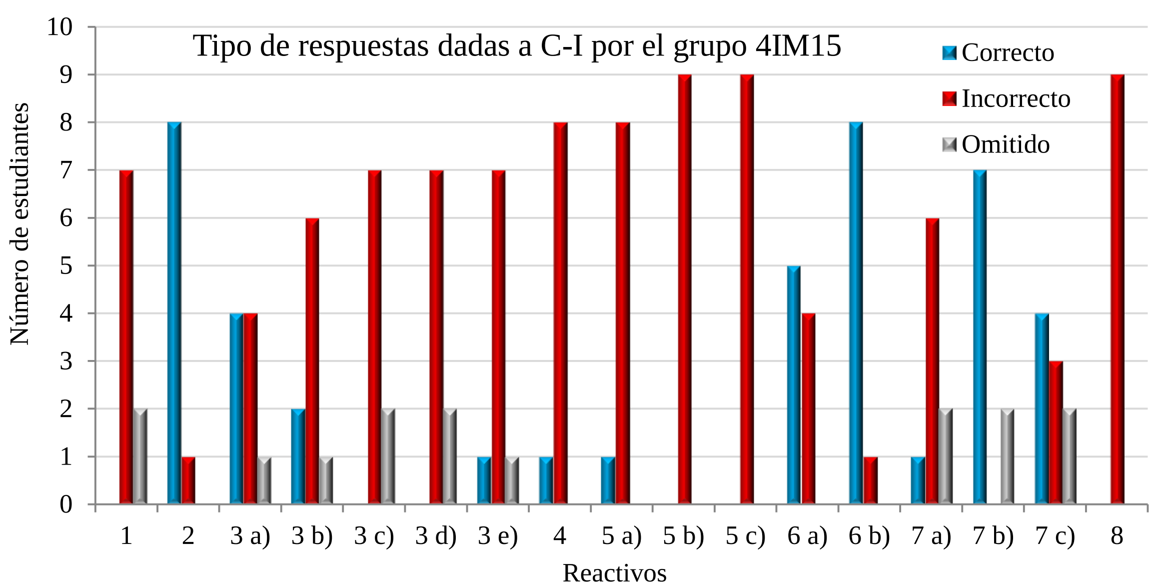


Figura 5.40. Distribución de los tipos de respuestas dadas al cuestionario C-I.

Este grupo de estudiantes proporcionó 27% de respuestas correctas, 63% de respuestas incorrectas y omitió 10% de contestaciones. En comparación con los estudiantes de segundo semestre, a pesar de tener el mismo porcentaje de respuestas incorrectas, los estudiantes más jóvenes tuvieron un mayor porcentaje de respuestas correctas (36%). Esta comparación, si bien no es estadísticamente significativa, sí apunta a la observación de otros investigadores (Fischbein, 1975; Ojeda, 1994) de que son mejores los resultados obtenidos por estudiantes que han pasado menos tiempo en el sistema escolar con énfasis en el determinismo. Era más reciente el último antecedente de enseñanza de probabilidad en los estudiantes más jóvenes, tan sólo un año atrás, contra dos de los de cuarto semestre.

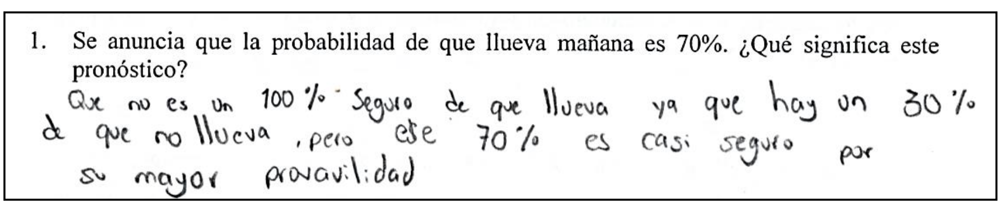
5.3.2.1. Medida de Probabilidad. Ningún estudiante contestó correctamente a la pregunta inicial (véase la Figura 5.25). 33% de los estudiantes basaron sus respuestas en su experiencia con el fenómeno aleatorio en cuestión:

Que mañana lo más seguro que llueva a que este bien el día

Que mañana es muy seguro que llueva

44% de los estudiantes que contestaron incorrectamente pusieron en juego un razonamiento probabilístico: consideraron el evento, su complementario y el espacio muestra (véase la Figura 5.41):

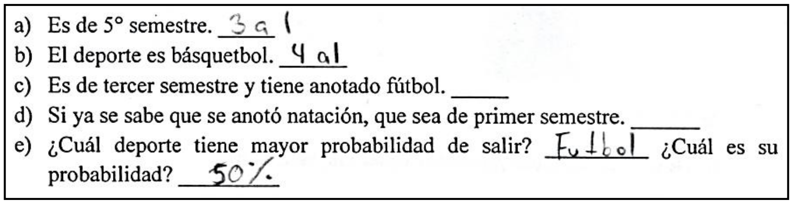
Que lo más probable es que el día de mañana llueva porque 70% indica que si 30% que no


1. Se anuncia que la probabilidad de que llueva mañana es 70%. ¿Qué significa este pronóstico?

Que no es un 100 % Seguro de que llueva ya que hay un 30 % de que no llueva, pero ese 70 % es casi seguro por su mayor provavilidad

Figura 5.41. Expresión de un estudiante sobre su interpretación de un pronóstico de lluvia.

En los incisos del reactivo 3, cinco estudiantes fueron consistentes al expresar todas sus medidas de probabilidad en forma porcentual. Un estudiante consideró la cardinalidad del evento exitoso como su probabilidad; dos, inconsistentes, contestaron tanto en lengua natural y porcentual, como fraccionaria y en lengua natural (véase la Figura 5.42).

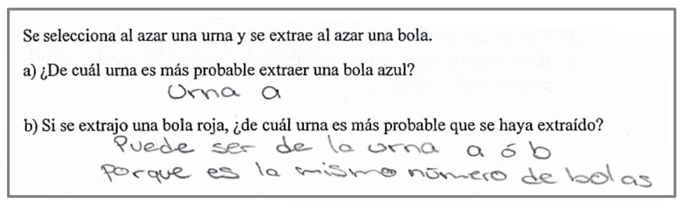


a) Es de 5° semestre. 3 a 1
b) El deporte es básquetbol. 4 a1
c) Es de tercer semestre y tiene anotado fútbol. _____
d) Si ya se sabe que se anotó natación, que sea de primer semestre. ______
e) ¿Cuál deporte tiene mayor probabilidad de salir? Futbol ¿Cuál es su probabilidad? 50%

Figura 5.42. Un estudiante expresa en lengua natural y porcentualmente la probabilidad.

En el reactivo 6a) (véase en la Figura 5.25) cinco estudiantes eligieron la urna correctamente; de los cuatro que se equivocaron, dos indicaron la urna incorrecta y los otros dos argumentaron que la probabilidad era la misma de ambas urnas. En el inciso b), ocho de los estudiantes contestaron correctamente y sólo uno, que había contestado correctamente al inciso a), indicó que la probabilidad era igual en las dos urnas porque tenían el mismo número de bolas rojas (véase la Figura 5.43).

Figura 5.43. En 6 b) un estudiante estima la probabilidad como la cardinalidad del evento exitoso, sin considerar la del espacio muestra.



Se selecciona al azar una urna y se extrae al azar una bola.
a) ¿De cuál urna es más probable extraer una bola azul?
Urna a
b) Si se extrajo una bola roja, ¿de cuál urna es más probable que se haya extraído?
Puede ser de la urna a ó b
porque es la mismo número de bolas

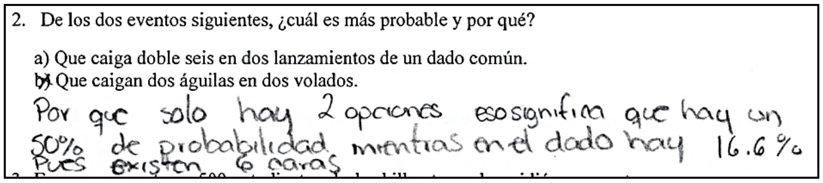
5.3.2.2. Espacio muestra. Para el reactivo 6 sólo se obtuvo la evidencia de que el estudiante que contestó incorrectamente al inciso b) omitió el espacio muestra al considerar la probabilidad de extraer una bola roja de entre las dos urnas.

En el reactivo 2 (véase en la Figura 5.25), ocho de los nueve estudiantes justificaron la consideración del evento más probable con base en el espacio muestra de los fenómenos aleatorios comparados.

b) ya que un dado cuenta 6 lados con diferentes números y en un volado la moneda tiene 2 caras y es más fácil que caigan dos águilas

5.3.2.3. Regla del producto e independencia. Para el reactivo 2, 88% de los estudiantes eligieron correctamente al evento más probable pero ninguno se advirtió la independencia del segundo lanzamiento respecto del primero. Se limitaron a comparar entre el número de posibilidades del fenómeno aleatorio, un estudiante comparó la probabilidad de ver una cara del dado y de la moneda:

b) porque sólo hay dos opciones eso significa que hay un 50% de probabilidad mientras en el dado hay 16.6 % pues existen seis caras



2. De los dos eventos siguientes, ¿cuál es más probable y por qué?

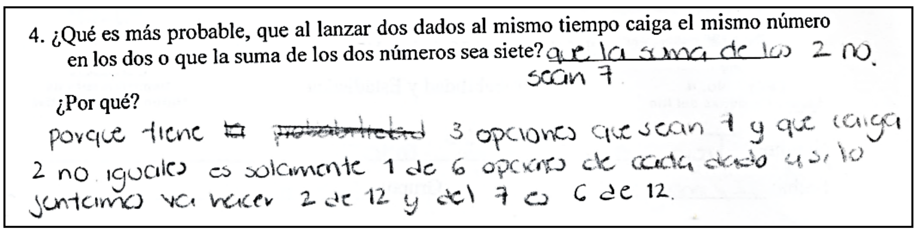
a) Que caiga doble seis en dos lanzamientos de un dado común.
b) Que caigan dos águilas en dos volados.

Por que solo hay 2 opciones eso significa que hay un 50% de probabilidad mientras en el dado hay 16.6 % Pues existen 6 caras

Figura 5.44. Respuesta de un estudiante al reactivo 2.

En el reactivo 4 sólo dos estudiantes (22%) consideraron que la probabilidad para la segunda repetición del fenómeno cambiaría respecto a la primera, aunque para calcularla usaron un razonamiento aditivo (véase la Figura 5.43):

Mismo número: los dados tienen seis caras, tenemos dos dados y la probabilidad de que caigan iguales es de 6/12 a que sumados sean siete, sería 5 y 2, 6 y 1, 3 y 4



4. ¿Qué es más probable, que al lanzar dos dados al mismo tiempo caiga el mismo número en los dos o que la suma de los dos números sea siete? que la suma de los 2 no. sean 7.

¿Por qué?

porque tiene ~~probabilidad~~ 3 opciones que sean 7 y que caiga 2 no iguales es solamente 1 de 6 opciones de cada dado y si lo juntamos va hacer 2 de 12 y del 7 es 6 de 12.

Figura 5.45. Razonamiento aditivo de un estudiante al solucionar un problema de independencia de probabilidades.

5.3.2.4. Equiprobabilidad. A la única respuesta correcta al reactivo 4 se la justificó correctamente con el número de posibilidades para ambos eventos, pero sin expresar su probabilidad:

Igual: Para ambos existen seis combinaciones o posibilidades

Al igual que como señalamos en el parágrafo § 5.3.1.4, el 55% de los estudiantes seleccionó la opción de la suma siete, aunque no hubo un tipo de justificación. Los tres tipos de respuestas fueron:

Suman siete: hay más probabilidad de que al caer los dados tengas números diferentes y la suma de ellos sea siete

suma 7: porque uno siempre va a girar más por su fuerza y no siempre caen los mismos sino diferentes

siete: la mayor variación de suma de los dados es siete

Sólo un estudiante anotó que era más probable ver números iguales y argumentó de forma similar al estudiante referenciado en § 5.3.1.4, que también eligió este evento:

mismo número: los dados tienen seis caras, tenemos dos dados y la probabilidad de que caigan iguales es de 6/12 a que sumados sean siete, sería 5 y 2, 6 y 1, 3 y 4

En cuanto a esta idea de equiprobabilidad, los estudiantes de sexto semestre contestaron de forma similar a como lo hicieron los de segundo y de cuarto semestres.

5.3.2.5. Combinatoria. Al problema del comité en el reactivo 8 (véase en la Figura 5.25), ningún estudiante contestó correctamente, no exhibieron la idea de combinación. 66% de ellos contestaron que el número total de comités que se podían formar era dos, que es el menor número de candidatos para un puesto; no combinaron los posibles candidatos para cada puesto. Una respuesta de este tipo fue:

Dos: sólo me dan dos candidatos y cada comité está integrado por un directivo, un maestro y un alumno y sólo pueden formarse dos y sobra un maestro y dos alumnos

El resto de los estudiantes tampoco exhibió un razonamiento combinatorio. Dos coincidieron en que se podían formar tres comités, siempre y cuando se organizaran en otro más los candidatos sobrantes:

3: los dos primeros se forman por un directivo, un maestro, y un alumno pero el último será de un maestro y dos alumnos ya que se requieren tres personas para formarlo

Al reactivo 5 (véase en la Figura 5.25) sólo un estudiante contestó correctamente al inciso a), pero en los posteriores no justificó sus respuestas. Para este conjunto de preguntas los estudiantes tampoco exhibieron un análisis combinatorio (véase la Figura 5.46).

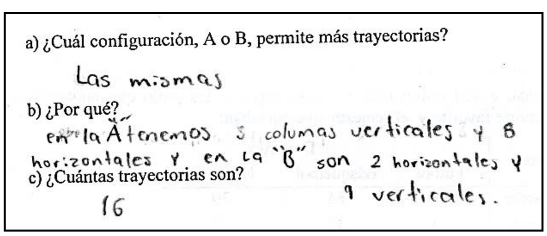

a) ¿Cuál configuración, A o B, permite más trayectorias?
Las mismas
b) ¿Por qué?
en la A tenemos 3 columnas verticales y 8 horizontales y en la "B" son 2 horizontales y 9 verticales.
c) ¿Cuántas trayectorias son?
16

Figura 5.46. Ningún estudiante pudo resolver al problema 5, no exhibieron comprender su naturaleza combinatoria.

5.3.2.6. Modelos generativos. En este grupo de estudiantes sobresale que ninguno de ellos recurrió a algún soporte pictórico para responder a los reactivos presentados.

5.4. Experienciaciones Extra-aula

Como parte de la experienciación dentro de otras unidades didácticas en el CECyT No 4, se realizaron actividades extra-aula con estudiantes de Álgebra (1^{er} semestre), Geometría y Trigonometría (2^{o} semestre), y Geometría Analítica (3^{er} semestre) (véase la Figura 3.1). Los escenarios fueron las aulas del Cinvestav y del CECyT. Las sesiones se videograbaron para su análisis y se utilizaron hojas de control (véanse en el Apéndice E) para guiar el desarrollo de la actividad y para el registro manuscrito de las respuestas de los estudiantes.

5.4.1. Intuiciones de la ley de los grandes números en un juego de apuestas

La actividad consistió en un juego de apuestas con dados (véase § 3.3.2.2) y se plantearon preguntas referentes a medida de probabilidad, espacio muestra y ley de los grandes números; el objetivo fue observar las nociones intuitivas de los estudiantes de la ley de los grandes números.

Esta actividad se realizó con seis estudiantes, que denominaremos E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 y E_6. Estaban a punto de finalizar la enseñanza del primer semestre en el bachillerato tecnológico, correspondiente a la Unidad de Aprendizaje de Álgebra, y habían pasado más de seis meses desde la última vez que E_1, E_2, E_3 y E_4 recibieron la enseñanza de probabilidad y de estadística en la escuela secundaria y más de año y medio para E_5 y E_6. La actividad se desarrolló en un aula del CECyT. Los estudiantes eran del turno vespertino y fueron seleccionados de su grupo por su buena disposición para trabajar. La sesión tuvo una duración de una hora, se videograbó y transcribió, y se utilizaron hojas de control en las cuales los estudiantes registraron sus respuestas.

Los materiales utilizados para el desarrollo de la actividad fueron:

- Dos dados comunes no cargados del mismo tamaño, uno color azul y otro color blanco.
- Billetes de juguete con valores de $5, $10 y $20.
- Un vaso de unicel.

La actividad se realizó de la siguiente manera:

Se entregaron un total de $40 en billetes de juguete a los estudiantes, se les cobró $10 por cada tiro realizado, si al lanzar los dados obtenían una suma de siete puntos se les pagaba $20, si el resultado era la misma puntuación en ambos dados se les pagaban $30. Un estudiante al perder todo su capital se quedaba sin opciones de seguir apostando.

5.4.1.1. Desarrollo. Para lanzar los dos dados se les introdujo en el vaso, el tirador lo agitaba, de manera que el resultado del tiro fuera al azar, al igual que en el juego del cubilete. Después de llevar a cabo el juego de apuestas indicado se procedió a realizar lanzamientos con un solo dado, con tres propósitos: reincorporar a los estudiantes que habían perdido la opción de seguir apostando, corroborar que el dado no estuviera cargado (sospecha expresada por los estudiantes) e identificar intuiciones de los estudiantes respecto al fenómeno que presenciaron.

Las ideas fundamentales de estocásticos implicadas en la actividad fueron: Medida de probabilidad, Espacio muestra, Regla del producto e Independencia, Equiprobabilidad y simetría, Ley de los grandes números, Variable aleatoria. Sin embargo, durante la sesión se observó que los estudiantes no tenían nociones de probabilidad, por lo que se les plantearon preguntas referentes sólo a las ideas fundamentales de medida de probabilidad y de espacio muestra, pues sólo se dispuso de una hora para el desarrollo de la actividad.

El guión de preguntas fue el siguiente:

- *¿Cuál es la tendencia en los resultados de los dados?*
- *¿Cuántos posibles resultados hay?*
- *¿Cuál es la probabilidad de que ganes al realizar un lanzamiento?*
- *¿Cómo es una medida de probabilidad?*
- *¿Cuáles serían los posibles resultados después de lanzar mil veces uno de los dados?*
- *¿Es justo el juego?*

Se realizaron 46 lanzamientos, al final de los cuales sólo dos estudiantes tenían capital para seguir apostando. La Tabla 5.2 indica los pares de puntos resultantes en cada lanzamiento de dados realizado por los estudiantes.

Para explorar las intuiciones de los estudiantes de la ley de los grandes números después de realizadas cuatro rondas de lanzamientos y a lo largo del desarrollo del juego, se planteó la pregunta: *¿Cuál es la tendencia en los resultados de los dados?* Para la que se dieron respuestas del tipo:

E_1: Lo*s dados están cargados.*

E_1: *Los dados están endemoniados.*

Las respuestas no se justificaron; la primera fue expresada antes del quinto lanzamiento. Luego se realizaron tiros individuales para comprobar la validez del dado. La segunda respuesta se dio después haber visto los resultados de un dado en una serie de lanzamientos, con el que se obtuvieron consecutivamente cinco, cuatro y tres puntos, lo que llamó mucho la atención de los estudiantes.

Tabla 5.2. Par de puntos ordenado, obtenidos por los estudiantes en cada lanzamiento de los dados, según su color (azul, blanco).

Estudiante / Tiro	**E_1**	**E_2**	**E_3**	**E_4**	**E_5**	**E_6**
1	(6,3)	(1,3)	(3,6)	(5,1)	(2,6)	(5,5)
2	(1,6)	(6,1)	(3,6)	(3,3)	(4,6)	(1,5)
3	(1,5)	(2,3)	(1,4)	(5,6)	(6,5)	(3,5)
4	(1,6)	(4,5)	(3,6)	(5,1)	(6,6)	(3,2)
5	(4,6)	(4,3)	x	(1,2)	(6,2)	(2,2)
6	(1,6)	(3,1)	x	(5,2)	(1,2)	(5,5)
7	(2,3)	(6,3)	x	(2,6)	(1,2)	(3,2)
8	(6,2)	(1,3)	x	(1,2)	x	(5,1)
9	(1,3)	x	x	(1,5)	x	(4,3)

Al no tener éxito con esta primera pregunta posteriormente se formularon otras con el objetivo de que los estudiantes analizaran los resultados de los lanzamientos:

I: *A ver ¿qué es más probable? ¿qué ganen o que pierdan?*
E_5: *Que perdamos ¡porque no es seguro que salga lo mismo en la dado blanco y azul! Es un juego de azar.*
E_1: *No es seguro que te salga un tiro que sea siete o los dos iguales.*

La pregunta anterior se realizó haciendo énfasis en los resultados obtenidos hasta ese momento, pero las respuestas dadas se refirieron al azar.

I: *¿Por qué les salen las mismas combinaciones?*
E_5: *Por* [hace una seña de la forma en que se agitan los dados en el vaso] ... *no sé.*
E_1: *Por los dados ... ¿no?*
E_6: *Por los dados que no se ...*
E_5: *Por el tiempo que lo giras* [repite la misma seña].
E_6: *No, yo digo que es por los puntitos que tienen, si hubiera diferentes combinaciones, si hubiera más puntitos, pero no, es por los mismos que hay, como no cambian ... los números ...*
E_1: *Porque se repite un patrón ... ¿no?*

Cuando se planteó esta pregunta la mayoría de los estudiantes habían obtenido pares de puntos iguales, en los dados respectivos, de un lanzamiento a otro. Es interesante que dos estudiantes se hayan referido a un determinismo, E_4 a la forma y tiempo de agitar el vaso y E_1 a un patrón, que no aclaró. E_5 pareció hacer referencia al tamaño del espacio muestra cuando indicó que no era lo suficientemente grande para obtener una mayor variedad de resultados.

En el mismo sentido de las preguntas anteriores, se realizó el lanzamiento de un dado, al que antecedió la pregunta: *Si tuvieran que apostarle a un número de este dado, ¿a cuál le apostarían?* En ese momento los estudiantes ya habían observado los resultados obtenidos; sus respuestas se presentan en la Figura 5.47.

E_1
E_2
E_3
E_4
E_5
E_6

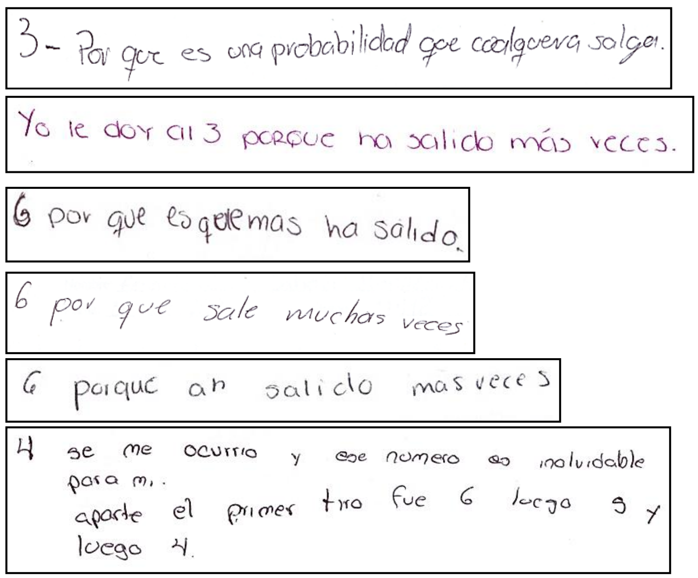


Figura 5.47. Números elegidos como ganadores en el lanzamiento de un dado por cada uno de los estudiantes y la justificación de su elección.

Cuatro justificaron su estimación del resultado con base en la frecuencia de los resultados previos y eligieron el que más se había repetido. E_1 pareció escoger indistintamente, insinuando que todos tenían la misma probabilidad. E_4 argumentó que en los lances anteriores habían salido seis y cinco, por lo que seguía el cuatro, además de ser un número importante para él. El resultado del lanzamiento fue cuatro.

Después de la referencia de uno de los jóvenes a la cantidad de resultados se preguntó: *¿Cuántos posibles resultados hay?*:

E_1: *Seis, seis de seis.*
I: *¿Seis de seis?... ¿cuántas combinaciones posibles puede haber? En total, ¿cuántas?*
E_2: *36.*
E_5: *36.*

I: *¿36?*
E_6: *¡No!*
E_1: *¡No!*
E_6: *¡No!, porque nada más puedes ganar con ... no, sí.*
E_1: *Sí, seis y seis, doce... ¿no?... Según yo, doce.*
E_6: *Seis, siete.*
I: *Pero no las combinaciones con las que ganan, sino cuántas combinaciones pueden ser posibles.*
E_1: *Lanzar dos dados, seis por dos, doce.*
I: *¿Hay doce combinaciones? Tú dices doce* [E_1], *tú dices 36* [E_2]... *doce* [E_3].
E_4: *Pues sí son doce.*
I: *¿Doce?... 36 combinaciones* [E_5]... *y doce* [E_6].
E_1: *O sea, un dado tiene cuatro... ¡no!*
E_6: *Cinco caras.*
E_1: *¡Cinco caras!*
I: *A ver, vamos a ver, mmm ... tú dices doce combinaciones posibles ... podemos tener uno y uno, podemos tener ... uno y dos, podemos tener uno y tres ...*

En las respuestas dadas, en las de E_1 predomina un razonamiento aditivo sobre uno multiplicativo; calculó la cardinalidad del espacio muestra sumando la cantidad de caras de ambos dados. E_3, E_4 y E_6 estuvieron de acuerdo con él. E_2 y E_5 contestaron correctamente.

Al plantearles la pregunta: *¿Cuál es la probabilidad de que ganes al realizar un lanzamiento?*, se presentaron respuestas del tipo:

E_1: *36.*
E_6: *Uno de 36.*
I: *¿Uno de 36?*
E_6: *Sí, ¿no?*
I: *¿Por qué sería uno de 36?*
E_6: *¡Ah, no! Sería uno de 35.*
E_2: *No, dos.*
I: *¿Cuánto? ¿Dos de 36?*
E_2: *Sí, porque sólo hay dos.*
E_4: *Sí, pero hay diferentes combinaciones.*
E_1: *Hay diferentes combinaciones que te den siete.*

Estas primeras respuestas son poco claras; inicialmente E_1 se refirió al tamaño del espacio muestra, E_6 respondió poniendo en relación una posibilidad con respecto al tamaño del espacio muestra y E_2 relacionó la cantidad de eventos distintos con los que se podía ganar (dos) respecto a la cardinalidad del espacio muestra. Después de obtener este tipo de respuestas se preguntó: *¿Cómo es una medida de probabilidad?* Surgió esta interacción:

E_1: *Este ... como una fracción, ¿no es como una fracción?*
I: *¿Cómo una fracción? Explícame cómo.*

E_1: *Pues de una moneda, ¿no?, que tienes una de dos posibilidades de que te salga ... de que te salga ... No sé, si tú eliges águila y otro sol, pues tú tienes una de dos probabilidades de que te salga el que tú elegiste.*

I: *Entonces lo representas … ¿cómo?*

E_6: *Un medio.*

E_1: *¡Ajá!*

I: *Entonces la medida es … ¿cómo? ¿De qué manera?*

E_1: *Fraccionaria.*

E_2: *Fraccionaria.*

I: *A ver, y ¿por qué como fracción?*

E_1: *Porque era uno de dos, tienes un chance de ganar de dos posibilidades que caigan, porque dos caras tiene la moneda.*

E_6: *Entonces aquí es uno de 36.*

I: *Y ¿entonces?... La fracción tiene un numerador y un denominador ... Con respecto a lo que me has dicho, ¿qué partes de la fracción son de las que ...*

E_1: *El numerador es el chance que tienes de ganar ... de la probabilidad, ¿no? Que puedas ganar y el ...*

E_1: *El denominador es … este ... el ... las caras que tiene la moneda ... o el … ¿cómo se dice?*

E_1: *Tenemos la probabilidad y las opciones* [murmullos].

I: *Ya quedamos en que la probabilidad se indica ¿en forma de?*

E_1: *Numerador ... a … ¿de qué?*

I: *En forma ¿de?*

E_1: *De fracción.*

I: *A ver … y ahora veamos porqué en forma de fracción ... Como decíamos, la fracción tiene dos partes ... y ¿por qué registramos probabilidades como una fracción?... ¿Qué me estabas diciendo?*

E_6: *Porque ganas o pierdes.*

E_1: *Bueno, la mínima, pues es que la mínima que puedas sacar es una de dos.*

I: *¿La mínima que puedas sacar es una?*

E_1: *La mínima probabilidad una de dos.*

I: *¿En el volado?*

E_1: *Sí, ¡ajá!*

E_6: *O en todos lados.*

E_1: *Porque de uno no puedes sacar probabilidad, ¿no? O sea, si nada más tienes una opción... pues te quedas con esa opción.*

E_6: *Probablemente es ésa.*

I: *¿Y el dos?*

E_1: *Si tienes dos puedes sacar una o la otra, depende.*

I: *Entonces el numerador, así en general, no solamente en el caso del volado, ¿a qué se refiere el numerador?*

E_4: *A las posibilidades que tienes para ganar.*

I: *Y si el numerador fueran las posibilidades que tienes de ganar, ¿el denominador qué sería?*

E_4: *Todas las opciones.*

E_1: *¡Ajá! Las opciones que tienes de ganar.*

E_4: *No, todas las opciones, combinaciones.*

I: *Todas las combinaciones, todas las posibilidades ... a ver ... ¿estás segura o no estás segura?*

E_4: *Sí, arriba son las posibilidades para ganar ... sí, las opciones que tienes para ganar; y abajo serían todas las posibilidades.*

Con las respuestas se nota que los estudiantes no tenían claras las características de una medida de probabilidad. Inicialmente E_1 se refirió dubitativamente a la probabilidad de ganar un volado, con lo que reafirmó su propuesta inicial, aunque no pudo precisar el significado de la forma fraccionaria; en su intento por darle sentido pareció encontrarse con el concepto del evento seguro. Fue E_4 quien pudo esbozar los elementos puestos en juego. Al puntualizar la expresión de una medida de probabilidad se reconsideró la pregunta: *¿Cuál es la probabilidad de que ganes al realizar un lanzamiento?*:

E_2: *Doce.*
E_4: *Dos doceavos.*
E_1: *Dos treintaiseisavos.*
E_2: *Doce de 36.*

Después de este intercambio se pidió a los estudiantes que escribieran su respuesta justificada en la hoja de control. La Figura 5.48 muestra sus respuestas.

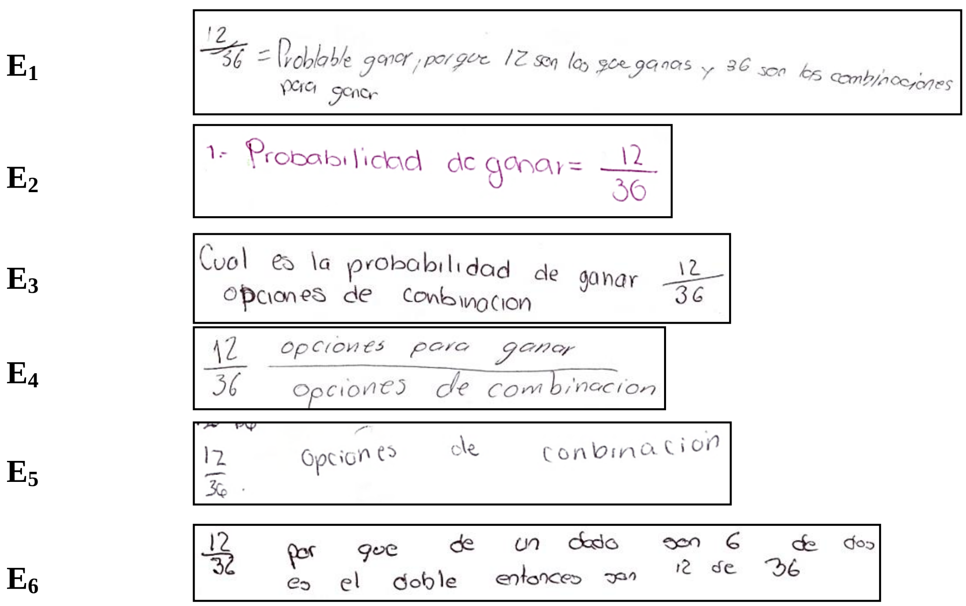


Figura 5.48. Respuestas y justificación de los estudiantes a la pregunta de ¿cuál es la probabilidad de que ganes al realizar un lanzamiento?

Las respuestas escritas de E_1 y de E_4 aclaran la relación entre las partes de la fracción y los elementos correspondientes del fenómeno aleatorio en cuestión. Para E_3 y E_5 no quedó en clara la expresión de la probabilidad, porque la acompañan de la leyenda "opciones de combinación" que aparenta referirse al espacio muestra. E_6 no identificó los eventos exitosos y manifestó su razonamiento aditivo en el cálculo de posibilidades.

Después de varios lanzamientos realizados para indagar acerca de las intuiciones de los sujetos de la ley de los grandes números, se les preguntó: *¿Cuáles serían los posibles resultados después de lanzar mil veces uno de los dados?:*

E_1: *Mil entre seis.*
I: *¿Mil entre seis?*
E_6: *¡No!*
I: *¿Cuáles podrían ser los resultados?*
E_6: *¿36 de mil?*
I: *¿Cómo es eso de 36 de mil?*
E_2: *¡No!*
E_6: *Todo por copiarte* [Se lo dice a E_1].
I: *Creo que no me están entendiendo, no estamos midiendo probabilidad. De esos mil lanzamientos, ¿qué resultados pudimos haber tenido? Por ejemplo, cien veces el cinco, doscientas veces el tres. ¿Cuáles podrían ser los resultados que tuviéramos?*
E_1: *Si salió diez veces el uno, por lo menos cien veces el uno.*
I: *¿De mil lanzamientos?*
E_6: *Son digamos de 76 ... jejeje ... empieza* [se lo dice a E_1].
I: *Ya hicimos muchos lanzamientos, ya experimentamos muchas veces.*
E_1: *Es que el uno se repite mucho.*
E_5: *Ya córtale.*
I: *Para terminar.*
…………..
I: *De esos mil lanzamientos, apunte cada quien, cuáles creen que pudieron haber sido los resultados. O sea, trescientas veces éste, cinco veces éste, una vez éste ….* [Los estudiantes comienzan a escribir] *¿Por qué en tus tiros sale más el seis que el uno?* [Pregunta para E_6].
E_6: *Por lo mismo igual, porque se me ocurrió.*
I: *¿Por qué se te ocurrió?*
E_6: *¡Ajá!*
E_1: *También en el mío hay más del seis que del uno.*
I: *Para el cuatro, ¿cuántas veces salió el cuatro?... ¿Cuál es la probabilidad de que salga el cuatro en el lanzamiento de un dado? Pero primero díganme: ¿cuántas veces salió el 4?*
E_6: *Cinco.*
I: *Cinco veces salió el cuatro en los 46 lanzamientos... ¿Cuál es la probabilidad de que lancemos un dado y caiga un cuatro?*
E_1: *Una de seis.*
I: *¿Sería…?*
E_1: *Un sexto.*
I: *Tienen cierto parecido un sexto y cuatro cuarentaiseisavos. ¿Se podría decir que se podría dividir en eso?*
…………………
I: *De 46, ¿una sexta parte es cuatro?*
E_6: *No.*
I: *¿No se les ocurre nada con eso?*
E_5: *No.*
I: *¿Es parecido un sexto a cinco cuarentaiseisavos?*
I: *Cuando predijiste* [para] *esas mil veces, el cuatro ¿cuántas veces salió?*
E_5: *Doscientos.*

I: *¿Que parte de mil es doscientos?*
E_2: *La quinta parte.*

Al plantear la pregunta que dio lugar al episodio anterior se esperaba que los estudiantes bosquejaran alguna idea respecto a la ley de los grandes números, lo cual no pareció ocurrir. La primera respuesta, dada por E_1, parecía ser un indicio de ella, pero no profundizó y al parecer respondió trivialmente. Después se les pidió que escribieran los posibles resultados, que se presentan en la Figura 5.49, de los que dijeron que sólo se les habían ocurrido. Esta pregunta se planteó al final de la actividad y los estudiantes ya estaban cansados.

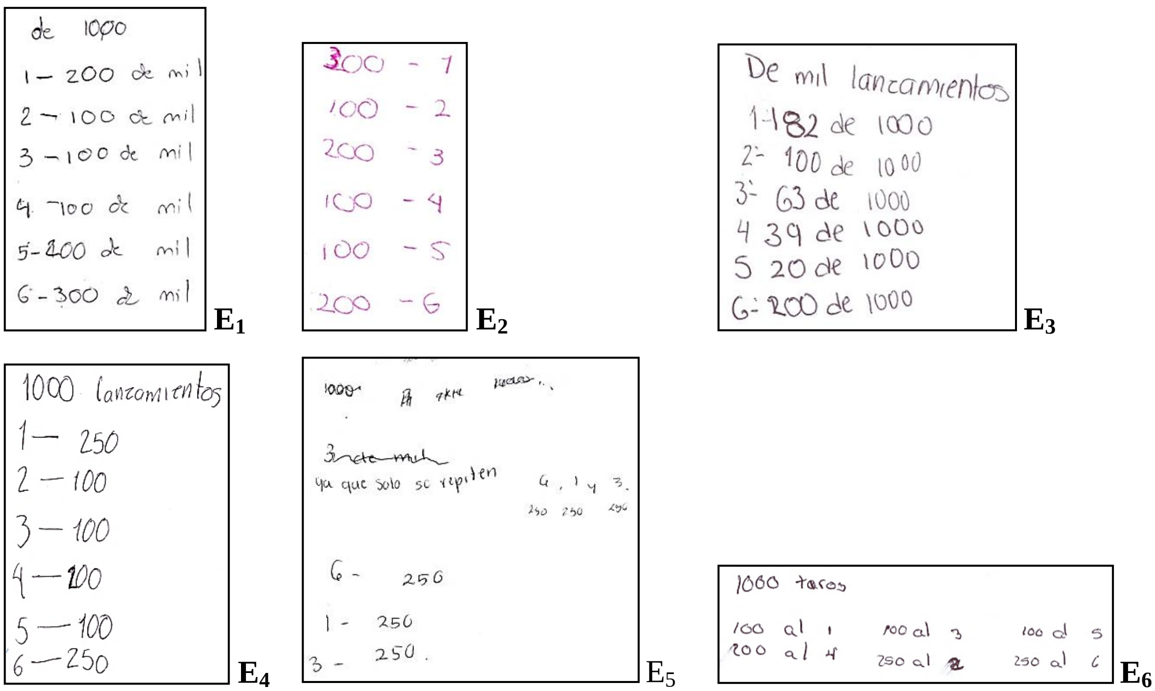


Figura 5.49. Estimaciones de los estudiantes en los posibles resultados en mil lanzamientos de un dado.

La Tabla 5.3 muestra las pérdidas y ganancias por estudiante durante el juego. La esperanza matemática de la variable aleatoria implicada es:

$$E(X) = \frac{6}{36}(\$20) + \frac{6}{36}(\$10) - \frac{24}{36}(\$10) = -\$\frac{60}{36}$$

El valor esperado de la variable se hizo evidente en los resultados en la Tabla 5.3; para los estudiantes fue mayor la pérdida que la ganancia a lo largo del juego. Se les planteó la pregunta: *¿Es justo el juego?* Dos estudiantes contestaron:

E$_6$: *Sí, porque no puedes decir que es injusto si tú te estás atreviendo a hacerlo, es como tu decisión, si tú lo haces es porque piensas que es bueno.*

E$_4$: *No, porque no tenemos las mismas probabilidades, no son muchas probabilidades de que ganemos.*

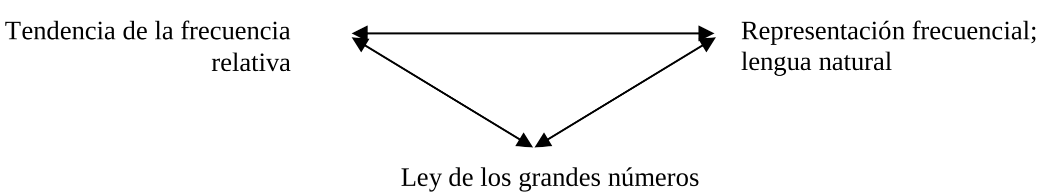
En su respuesta, E$_6$ no tomó en cuenta la probabilidad de los eventos implicados ni los valores de las apuestas, es una respuesta subjetiva con base en la responsabilidad que se tiene hacia la toma de decisiones. Por el contrario, E$_4$ consideró las posibilidades de ganar y perder en el fenómeno aleatorio, advirtió que era mayor la cantidad de posibilidades de perder que las de ganar, aun si en su respuesta confundió posibilidades con probabilidades.

Tabla 5.3. Balance de pérdidas y ganancias de cada jugador en cada lanzamiento de dados.

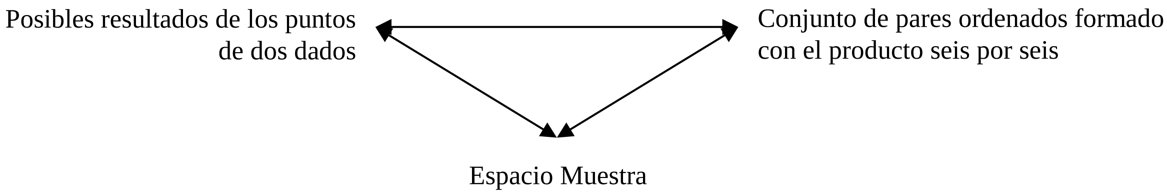
Estudiante / Tiro	E$_1$	E$_2$	E$_3$	E$_4$	E$_5$	E$_6$
1	- $10	- $10	- $10	- $10	- $10	+ $20
2	+ $20*	+ $10	- $10	+ $20	- $10	- $10
3	- $10	- $10	- $10	- $10	- $10	- $10
4	+ $10	- $10	- $10	- $10	+ $20	- $10
5	- $10	+ $10	x	- $10	- $10	+ $20
6	+ $10	- $10	x	+ $10	- $10	+ $20
7	- $10	- $10	x	- $10	- $10	- $10
8	- $10	- $10	x	- $10	x	- $10
9	- $10	x	x	- $10	x	+ $10
Total	$20	$0	$0	$0	$0	$60

* En el segundo lanzamiento de E$_1$ la casa omitió cobrar los $10 del costo del tiro, por lo que los $20 que se le pagaron a E$_1$ fueron de ganancia neta.

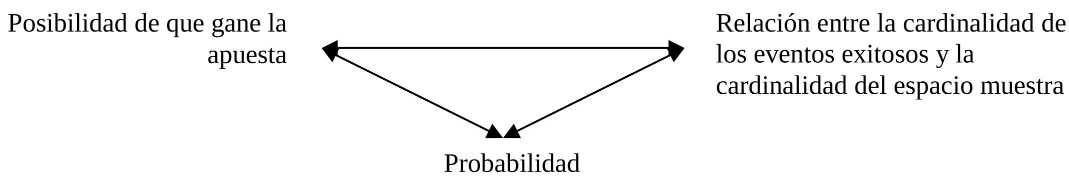
La actividad implicó las ideas de medida de probabilidad, espacio muestra y ley de los grandes números, mediante un juego de apuestas. La especificamos mediante los triángulos epistemológicos siguientes, aunque los estudiantes no los consolidaron:



De igual manera se presenta la siguiente relación para el espacio muestra asociado al fenómeno aleatorio de los posibles resultados al lanzar dos dados ordinarios.



También establecemos la interrelación respectiva para la idea de medida de probabilidad:



5.4.2. Cálculo de probabilidades de ensayos de Bernoulli con el triángulo de Pascal

Esta actividad (véase en § 3.3.2.2) tuvo como objetivo usar el triángulo de Pascal para encontrar el término de una expresión binomial desarrollada que permita calcular probabilidades en casos de ensayos de Bernoulli independientes.

La actividad se realizó con tres estudiantes del CECyT No 4, E_1, E_2 y E_3, en un aula de cómputo del Cinvestav. Los estudiantes habían terminado el segundo semestre de bachillerato, por lo que aún no habían recibido la enseñanza de Probabilidad y Estadística, sólo contaban con los antecedentes de la educación secundaria.

Durante la actividad se presentaron los conceptos de fenómeno aleatorio, fenómeno determinista y probabilidad condicional. Se utilizó el diagrama de árbol para identificar espacios muestra y se presentó una simulación con un tablero de Galton virtual.

La sesión se realizó en el siguiente orden:

1. *Se planteó la situación: Calcula la probabilidad de lanzar tres volados y obtener dos águilas.*
   - *Dejar que los estudiantes den ideas a cómo resolver la situación.*
   - *Dibujar las primeras líneas de un tablero de Galton e indicar que por cada lanzamiento de la moneda, en el dibujo nos movemos a la izquierda cuando cae águila y a la derecha cuando cae sol (por ejemplo).*
   - *Exponer los conceptos y brindar ejemplos de fenómeno aleatorio, fenómeno determinista, probabilidad condicional y el desarrollo binomial.*
   - *Resolver la situación planteada.*

- *Presentar el desarrollo binomial e incitar a los estudiantes a identificar a los coeficientes binomiales en el triángulo de Pascal.*

2. *Se pidió a los estudiantes que dibujaran un triángulo de Pascal.*
3. *Con el uso del triángulo de Pascal se calculó la probabilidad de obtener dos águilas en el lanzamiento de siete y nueve volados, respectivamente. El método usado para calcularlo fue identificando el término de la expresión del binomial desarrollada que es igual a las proporciones de dos éxitos y los restantes fracasos para siete y nueve ensayos; posteriormente se operó en el término sustituyendo los valores de probabilidad de éxito y fracaso.*
4. *Para el lanzamiento de nueve volados, se comparó la probabilidad a priori con la frecuencia relativa que se obtiene en 1000 repeticiones del fenómeno aleatorio. Se realizó la simulación de los 1000 volados con un tablero de Galton virtual (http://www.subtangent.com/maths/ig-quincunx.php).*

La sesión de enseñanza se videograbó y se utilizó una hoja de control (véase en el Apéndice E) en la que se presentaron los ejercicios. A los estudiantes no se les permitió usar calculadora para responder a los reactivos.

Inicialmente los estudiantes no pudieron contestar acertadamente al reactivo número uno, que pide calcular la probabilidad de obtener dos águilas al lanzar tres volados. Respondieron:

- *2/6, porque una moneda tiene dos caras y se lanza tres veces, entonces seis sería el 100% y hay que acertar a dos águilas.*
- *66.66%, al parecer porque hay que acertar a dos de tres volados.*

Fue hasta que el investigador propuso representar el espacio muestra correspondiente mediante un diagrama de árbol, cuando los estudiantes pudieron contar los posibles resultados favorables al evento de interés.

Los estudiantes mostraron facilidad para construir el triángulo de Pascal. Después de ver su configuración se les presentó la forma desarrollada que toman los binomios elevados a alguna potencia: se comenzó con el cuadrado, el cubo y ya para la cuarta potencia se dieron cuenta de la similitud de los coeficientes binomiales con las filas del triángulo de Pascal.

Posteriormente a la indicación de cómo identificar y operar el término de la expansión binomial de interés, los estudiantes no mostraron dificultades para operarlo, sino para identificarlo. Esto ocurrió con el primer ejercicio, de obtener dos águilas en siete volados; pero para el segundo, de obtener dos águilas en nueve volados, ya identificaron el término correcto.

Luego de calcular la probabilidad de obtener siete águilas en el lanzamiento de nueve volados se les pidió que indicaran la cantidad de veces que esperarían conseguir siete águilas de nueve lanzamientos, en 1000 repeticiones del ejercicio de lanzar nueve volados. La pregunta se hizo antes de realizar la simulación con el tablero de Galton, pero los estudiantes no realizaron pronóstico alguno, lo que pudo deberse a que no le dieron sentido a la probabilidad ya calculada, o bien a que no hayan comprendido la pregunta. La simulación se detuvo cuando iba a la mitad de los ensayos y se les volvió a plantear la pregunta, en ese momento emitieron un pronóstico. La respuesta de dos de los estudiantes parece haber sido influenciada por los resultados que se habían obtenido en el simulador y no tomaron en cuenta la probabilidad a priori. Sus respuestas fueron:

$$E_1 = 78,\; E_2 = 78,\; E_3 = 67.$$

Cuando en el simulador se habían efectuado 500 series de nueve volados, en 39 ocasiones resultaron siete águilas y dos soles. E_1 y E_2 duplicaron el valor observado sin tomar en cuenta la probabilidad a priori, antes calculada. De esta observación interpretamos que los estudiantes no le dieron sentido al valor de probabilidad al realizar una predicción. Ahondando en lo anterior E_1 expresó en sus conclusiones del ejercicio:

Yo pienso que en ciertos momentos parecería como si la probabilidad se doblara, como si fuera más fácil para predecir; aunque parece algo irrazonable.

En la primera parte de la frase, el estudiante pareció hacer evidente que duplicó el valor observado en el resultado a la mitad del desarrollo del fenómeno aleatorio. Posteriormente, al resaltar que era más fácil predecir el resultado cuando la *probabilidad se dobla* (su valor) estaba justificando un razonamiento heurístico: si a la mitad del número de repeticiones del fenómeno aleatorio tenemos x éxitos, cuando terminemos tendremos $2x$ éxitos. Finalizó diciendo que le parecía algo irrazonable, es decir, que lo anteriormente expresado no siempre se podría cumplir por la intervención del azar, y lo pudo constatar, porque al finalizar el experimento su predicción no se cumplió.

5.4.3 Distribución binomial en el quincunx de Galton

Esta actividad (véase en § 3.3.2.2) se realizó como un taller durante la 5ª edición de Cinvesniñ@s. Participaron separadamente seis estudiantes de primer semestre correspondiente a la Unidad de Aprendizaje de Álgebra. Tuvo por objetivo principal recopilar datos de las nociones de los estudiantes de variable aleatoria, mediante un experimento aleatorio con el quincunx de Galton. Las dos sesiones se videograbaron y se utilizaron hojas de control para registrar las respuestas de los estudiantes.

Inicialmente se pidió a los estudiantes que dibujaran en las hojas de control sus predicciones del posible resultado de liberar desde el embudo de alimentación las 150 canicas en un tablero de Galton para luego confrontar sus predicciones con los resultados. Después se repitió todo el proceso para hacer una reflexión final respecto al experimento aleatorio. La sesión finalizaba con la explicación de la distribución binomial y la tendencia de la masa de canicas a formar la campana de Gauss en el quincunx de Galton.

La Figura 5.50 muestra los pronósticos de un estudiante para la posible distribución de las canicas en las casillas del tablero de Galton acompañada con la distribución final al realizar el experimento. De las imágenes podemos ver que para el primer experimento el estudiante realiza la predicción de la distribución arbitrariamente, pero al ver los resultados obtenidos en el experimento inicial ajusta sus predicciones del segundo experimento conforme lo observado.

Al preguntar a los estudiantes por el comportamiento de las canicas para distribuirse de cierta forma en las casillas, no dieron más justificación que atribuirlo al azar. Cuando el investigador presentó a los estudiantes el funcionamiento del quincunx de Galton, mediante la distribución binomial, ellos interpretaron que las canicas iban más a la casillas centrales porque tenían “más caminos” para llegar a ellas. Esto lo comprendieron cuando observaron la mayor cantidad de combinaciones para números similares de éxitos y fracasos.

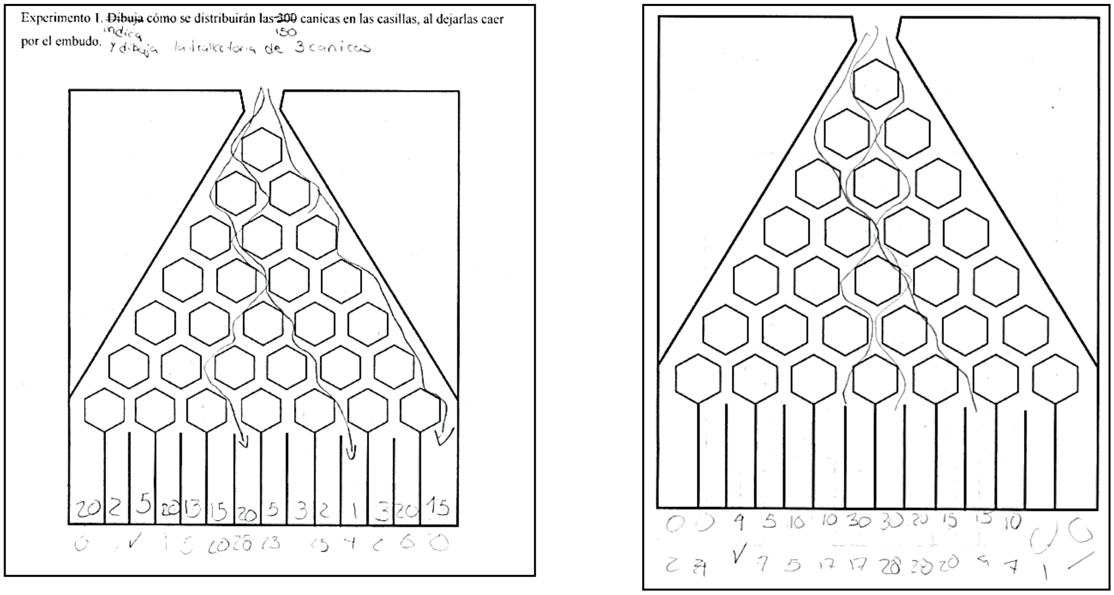


Figura 5.50. Predicciones de un estudiante para la posible distribución de las canicas en el quincunx de Galton, para el primer experimento a la izquierda y para el segundo a la derecha.

5.4.4 Resultado de la experienciación extra-aula

Las tres actividades extra-aula tuvieron un enfoque frecuencial, intuitivo. Durante su desarrollo los estudiantes no mostraron dominio de los conceptos de probabilidad, la expresaban en lengua natural, como porcentaje; trataban de operarla de formas incorrectas (sumar probabilidades de eventos independientes), dieron indicios de animismo, atribuyeron un comportamiento caprichoso a los objetos productores de aleatoriedad y utilizaron razonamientos deterministas al estimar probabilidades. En general, no mostraron un sustrato intuitivo favorable a una introducción de las ideas de estocásticos que prepare el nivel de formalización esperado en la educación superior.

Capítulo 6
Sesgos del razonamiento probabilístico en el bachillerato tecnológico

Este capítulo presenta los resultados obtenidos de la aplicación de cuestionarios, entrevistas, la estrategia de enseñanza de probabilidad y una actividad extra-aula en la unidad de aprendizaje de Probabilidad y Estadística. Todos los datos aquí presentados fueron recolectados del mismo grupo (6IM15), de 51 estudiantes del sexto semestre del CECyT.

6.1. Razonamiento probabilístico previo a la enseñanza de probabilidad

Con el propósito de identificar el estado de conocimiento de ideas fundamentales de estocásticos del grupo de estudiantes que recibirían la enseñanza de probabilidad, conforme a lo establecido en el Plan y Programa de estudios del CECyT (DEMS, 2009), aplicamos el cuestionario C-I de investigación previo a la enseñanza, el cual se refirió a las ideas fundamentales de estocásticos indicadas en la Tabla 6.1

Tabla 6.1. Ideas fundamentales de estocásticos en el cuestionario C-I y enfoque de probabilidad.

Reactivo y fuente	Medida de Probabilidad	Espacio Muestra	Modelo de urnas	Regla del producto e Independencia	Equiprobabilidad	Combinatoria
1 (Truxal, 1989, p. 2)	Frecuencial					
2 (Tradicional)	Clásico					
3 (Chávez, 2009, p. 299)	Clásico					
4 (Tradicional)	Clásico					
5 (Shaughnessy,1977, p. 312)						
6 (SEP, 1994, pp. 152-153)	Clásico					
7 (Truxal, 1989, p. 4)	Frecuencial					
8 (Chávez, 2009, p. 341)						

La Figura 6.1 resume las frecuencias de los tipos de contestaciones por reactivo, de 35 estudiantes a los que se aplicó el cuestionario C-I que, en una primera instancia, se clasificaron como correctas, incorrectas y omitidas. Del total de respuestas esperadas a los reactivos planteados en este cuestionario, 31% fueron correctas, 61% incorrectas y 8% fueron omitidas.

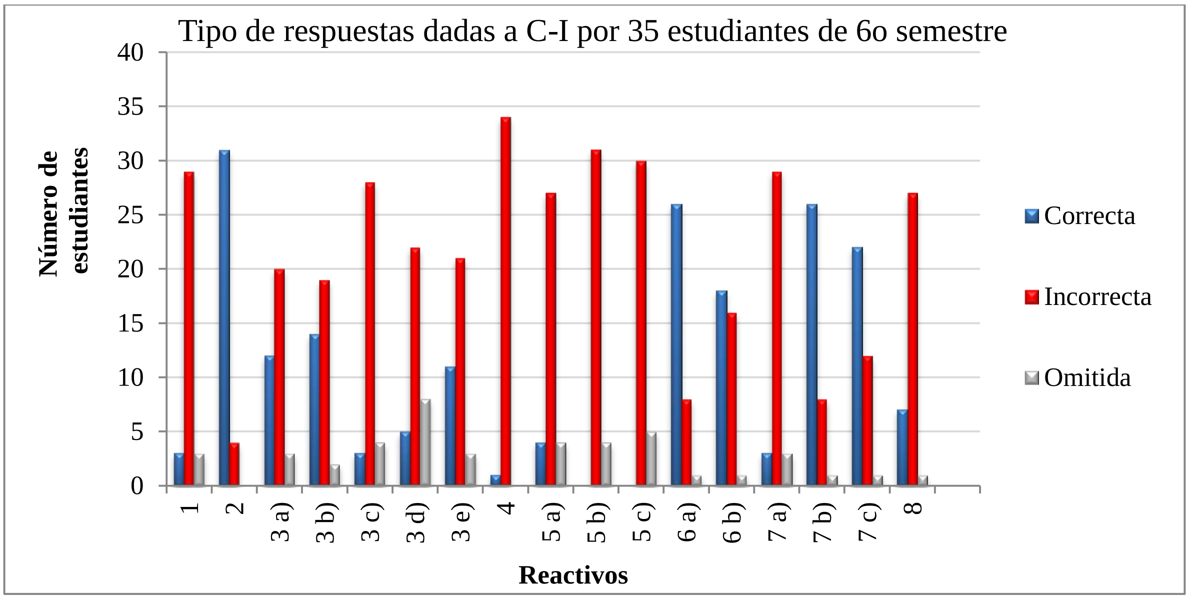
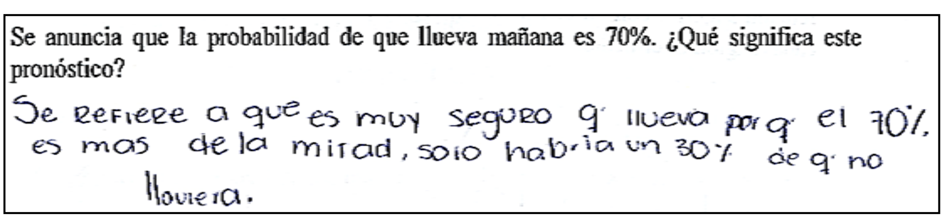


Figura 6.1. Distribución de los tipos de respuestas dadas al cuestionario.

6.1.1 Medida de probabilidad

Seis de los ocho reactivos se refirieron a medida de probabilidad. El reactivo 1 pide expresar el significado de un pronóstico de lluvia (véase la Figura 6.2). Las respuestas dadas por los estudiantes a esta pregunta se pueden clasificar como: deterministas, parafraseadas, basadas en la experiencia, de un enfoque frecuencial y de un razonamiento probabilístico.


Se anuncia que la probabilidad de que llueva mañana es 70%. ¿Qué significa este pronóstico?

Se refiere a que es muy seguro q' llueva por q' el 70% es mas de la mitad, solo habria un 30% de q' no lloviera.

Figura 6.2. Parafraseo a la pregunta 1 de un pronóstico de lluvia.

Las respuestas deterministas expresan que es segura la ocurrencia del fenómeno aleatorio, en este caso la lluvia. Cuatro estudiantes (11%) respondieron de esta forma. Dos de tales respuestas fueron:

De que es verdad que mañana llueva.; Esto dice que lloverá.

9% de los estudiantes respondieron de manera que pusieron en juego su experiencia previa respecto al fenómeno aleatorio. Este tipo de respuesta ya no es determinista, en él predomina la descripción de las posibles condiciones meteorológicas, incluso un estudiante hace explícitas las precauciones a tomar por si llueve:

Que puede que esté nublado, por las condiciones del clima.

Las respuestas dadas con un enfoque frecuencial de la probabilidad parecerían ser las más naturales para la pregunta planteada. En este tipo de respuestas el principal argumento de los estudiantes fue describir la medida de 70%. Doce (34%) de los estudiantes contestaron de manera similar a la siguiente respuesta:

Que es más probable que llueva a que esté soleado o de que de c/100 opciones climatológicas 70 dicen que va a llover.

En el razonamiento probabilista se concibe la idea de espacio muestra, se identifican los diferentes tipos de eventos, se aplican las ideas de adición de probabilidades para eventos mutuamente excluyentes y la regla del producto para los eventos independientes; se reconoce la condicionalidad o independencia entre eventos de un fenómeno aleatorio.

23% se los estudiantes exhibieron en sus respuestas un razonamiento probabilístico, ellos expresaron la idea de espacio muestra e identificaron eventos complementarios, como se ejemplifica con la siguiente respuesta:

Que un 70% es más probable que llueva y en 30% de que sea un día soleado. Por lo tanto es más probable que llueva.

11% de los estudiantes sólo parafrasearon el enunciado de la pregunta. Una respuesta de este tipo fue:

Que hay más posibilidades de que llueva y menos posibilidades que no, por lo tanto lo más seguro es que llueva.

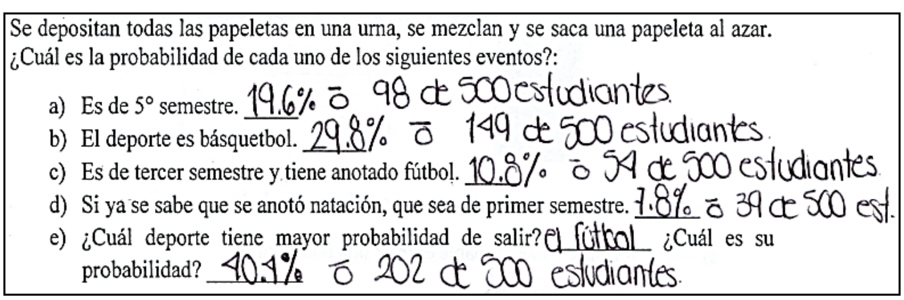
9% de los estudiantes no contestaron a la pregunta.

El reactivo 3 pedía calcular probabilidades de eventos simples en cuatro de sus incisos y el inciso d) pidió el cálculo de una probabilidad condicional. Por inciso, la Tabla 6.2 resume la cantidad de respuestas correctas, incorrectas, omitidas (NC) y por enfoque de probabilidad evocado en ellas.

Tabla 6.2. Respuestas dadas al conjunto de incisos del reactivo 3.

Inciso del reactivo	**Correcto**	**Enfoque Clásico**	**Enfoque Frecuencial**	**Ambos**	**Incorrecto**	**Enfoque Clásico**	**Enfoque Frecuencial**	**Ambos**	**Descontex-tualizadas**	**NC**
3 a)	12	2	8	2	20	1	11	0	8	3
3 b)	14	2	11	1	19	2	9	0	8	2
3 c)	3	1	1	1	28	9	16	0	3	4
3 d)	5	2	3	0	22	3	14	1	4	8
3 e)	11	4	6	1	21	2	16	0	3	3

El 26 % de las respuestas fueron correctas; el 63% incorrectas, de las que el 24% fueron también incorrectas en forma, sólo se referían a la cardinalidad del evento exitoso o sólo expresaban el nombre de alguno de los deportes; de las 175 respuestas esperadas para este reactivo se omitió el 11%.


Se depositan todas las papeletas en una urna, se mezclan y se saca una papeleta al azar.
¿Cuál es la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos?:

a) Es de 5° semestre. 19.6% ó 98 de 500 estudiantes.
b) El deporte es básquetbol. 29.8% ó 149 de 500 estudiantes.
c) Es de tercer semestre y tiene anotado fútbol. 10.8% ó 54 de 500 estudiantes.
d) Si ya se sabe que se anotó natación, que sea de primer semestre. 7.8% ó 39 de 500 est.
e) ¿Cuál deporte tiene mayor probabilidad de salir? el fútbol ¿Cuál es su probabilidad? 40.4% ó 202 de 500 estudiantes.

Figura 6.3. Expresión de probabilidad desde los enfoques clásico y frecuencial dado como respuesta a la pregunta 3.

Las preguntas están planteadas desde un enfoque clásico de la probabilidad. Sin embargo, en concordancia con investigaciones previas respecto a este mismo nivel educativo (Ojeda, 1994), hubo una tendencia a responder según el enfoque frecuencial, utilizando porcentajes; todas las respuestas según el enfoque clásico fueron del tipo: “54 de 500”. Un estudiante expresó sus respuestas tanto con el enfoque frecuencial como con el clásico, por lo que se les contabilizó en la Tabla 6.2 en ambas columnas (véase la Figura 6.3); otro estudiante, reiterativo al contestar 30% de 100%, pareció no entender el significado del signo “%”.

Dadas las composiciones de los contenidos de dos urnas, bolas de tres colores (azul, verde y rojo), el reactivo 6 (adaptado de la situación propuesta en un libro de texto de cuarto grado de primaria, SEP, 1994) pide comparar la probabilidad de extraer, al azar, una bola de cierto color. Para el inciso a) se obtuvo 74% de respuestas correctas, 23% de incorrectas y 3% de omisiones; para el inciso b) los resultados fueron 51% de aciertos, 46% de errores y el 3% de omisiones. Decreció el número de aciertos del inciso a) al b), lo cual se debió a las composiciones propuestas: en el a) las probabilidades comparadas fueron 4/9 y 3/7 para las urnas uno y dos, respectivamente, mientras que en el b) fueron 2/9 contra 2/7. En el inciso a) es más probable extraer la bola de interés de la urna uno y la cardinalidad de éxito en ella también es mayor, en comparación con la urna dos; para el inciso b) la cardinalidad de éxito es la misma en ambos casos y la probabilidad de ocurrencia de ese evento es mayor para la urna dos; todos los estudiantes que respondieron incorrectamente al inciso b) (54%) argumentaron que la probabilidad de extraer la bola en ambas urnas era la misma, lo cual muestra la ausencia de razonamiento probabilístico, pues no relacionaron la parte favorable con el total respectivo para cada contenido.

El reactivo 7 se compuso de tres incisos. El a) pedía calcular el costo promedio de la producción de un motor tomando en cuenta la frecuencia de motores defectuosos producidos y los costos de producción y reparación de los motores. 82% de las respuestas dadas por los estudiantes fueron incorrectas, de ellas el 24% expresaron el promedio como la suma del costo de producción y el costo de reparación sin tomar en cuenta la cantidad de motores defectuosos producidos; uno de estos casos aclaró:

> *80 000. Debido a que son 50 000 de su producción y 30 000 de su reparación, y sumando estas cantidades nos da 80 000*.

17% de las respuestas incorrectas señalaron que el costo promedio era 50 000; estos estudiantes no dieron sentido al dato de la frecuencia de motores defectuosos producidos, incluso una respuesta aclaró:

> *50 000. Ya que es lo que cuesta para ser producido uno solo y no importa si esté bien o defectuoso.*

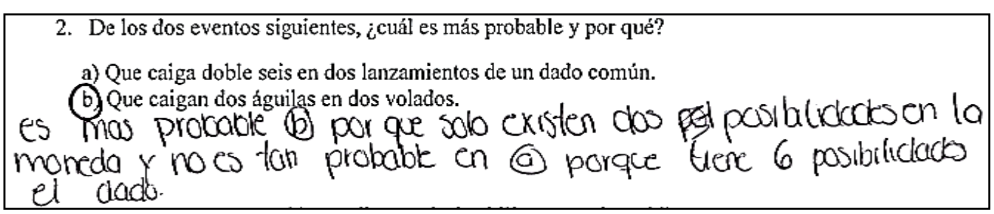
En el inciso c) se preguntó al estudiante si compraría un automóvil de esa marca: 37% contestaron que sí, 3% no contestó y 59 % contestó que no:

> *Dado el alto índice de motores defectuosos lo más recomendable sería no comprar un automóvil de esa marca.*

6.1.2 Espacio muestra

La tendencia general de las respuestas de los estudiantes fue desconocer todos los posibles resultados del fenómeno aleatorio de que se trataba.

Para los incisos del reactivo 3 se obtuvieron 25% de respuestas correctas, en 24% de ellas quedó de manifiesto que el estudiante identificó el espacio muestra implicado, al expresarlo de la forma: "54 de 500"; de entre las respuestas incorrectas un estudiante identificó la cardinalidad del espacio muestra pero no la de eventos exitosos. Para el reactivo 2, 77% de las justificaciones a las respuestas se basaron en comparaciones de la cantidad de resultados posibles, pero sólo para el fenómeno aleatorio simple, no para el fenómeno aleatorio compuesto planteado (véase la Figura 6.4).


2. De los dos eventos siguientes, ¿cuál es más probable y por qué?

a) Que caiga doble seis en dos lanzamientos de un dado común.
b) Que caigan dos águilas en dos volados.

es mas probable b por que solo existen dos ~~pel~~ posibilidades en la moneda y no es tan probable en a porque tiene 6 posibilidades el dado.

Figura 6.4. Un estudiante justifica su respuesta comparando la cantidad de posibilidades en resultado del lanzamiento de un volado y en el de un dado.

6.1.3 Reglas del producto e independencia

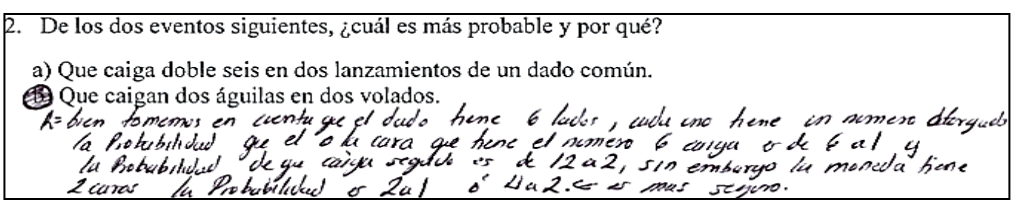
Para el reactivo 2, que solicitó comparar las probabilidades de doble seis al lanzar dos veces un dado y doble águila en dos volados (véase la Figura 6.4), no se tuvieron indicios de que los estudiantes identificaran la independencia de las repeticiones de los fenómenos aleatorios propuestos, pues sólo compararon las posibilidades de un volado y las del lanzamiento de un dado:

> *En los volados hay menos opciones, o sea cae águila o sol y en el dado hay más de dos, por ello es más probable que caigan las dos águilas*

Aunque sólo un estudiante advirtió la composición de eventos en dos repeticiones del fenómeno, su respuesta exhibió la prevalencia de un razonamiento aditivo sobre el multiplicativo, este último requerido para considerar dos variables a la vez:

> *Tomemos en cuenta que el dado tiene 6 lados, cada uno tiene un número* [ilegible] *la probabilidad que el o la cara que tiene el número 6 caiga es de 6 a 1 y la probabilidad de que caiga seguido es de 12 a 2, sin embargo la moneda tiene 2 caras, la probabilidad es 2 a 1 ó 4 a 2. Es más seguro*

El estudiante se dio cuenta de que el valor de la probabilidad del evento simple no es el mismo que el del evento compuesto, que cambia con la repetición del fenómeno, aunque no advirtió que es el producto de las probabilidades de los eventos simples el que determina la probabilidad del compuesto (véase la Figura 6.5).


2. De los dos eventos siguientes, ¿cuál es más probable y por qué?

a) Que caiga doble seis en dos lanzamientos de un dado común.
b) Que caigan dos águilas en dos volados.

R= bien tomemos en cuenta que el dado tiene 6 lados, cada uno tiene un numero [illegible] la Probabilidad que el o la cara que tiene el numero 6 caiga es de 6 a 1 y la Probabilidad de que caiga seguido es de 12 a 2, sin embargo la moneda tiene 2 caras la Probabilidad es 2 a 1 ó 4 a 2. es mas seguro.

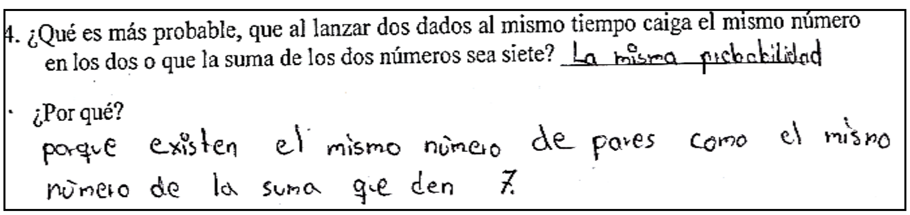
Figura 6.5. Un estudiante realiza una suma de probabilidades para calcular la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes.

Para el reactivo 4 (véase la Figura 6.6) sucedió lo mismo, pues los estudiantes no advirtieron la independencia en la probabilidad de obtener cierta puntuación en un dado respecto al otro, sólo describieron las posibilidades de que fuera siete la suma de los puntos en el lanzamiento de dos dados y de que cayera el mismo número en ambos lanzamientos.

6.1.4 Equiprobabilidad

El reactivo 4, que pide identificar la equiprobabilidad entre dos eventos (véase la Figura 6.6), sólo obtuvo una respuesta correcta (3% de los estudiantes). 24 estudiantes (69%) contestaron que era más probable obtener la suma siete que dos números iguales al lanzar dos dados. El reactivo 2, que requiere elegir al evento más probable entre doble seis al lanzar dos dados o dos águilas en dos volados (véase la Figura 6.4), fue fácil para los estudiantes: 89% lo contestó acertadamente. No obstante, la justificación más común entre las respuestas correctas no fue de tipo probabilístico, sino cardinal:

porque una moneda solamente tiene 2 caras, en cambio un dado tiene 6

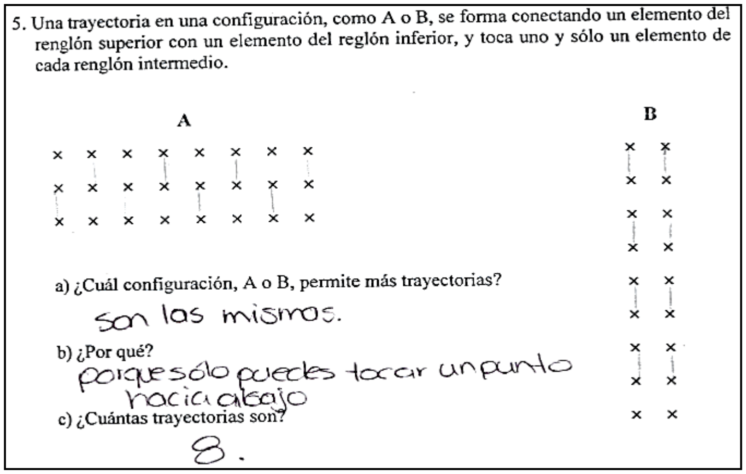

4. ¿Qué es más probable, que al lanzar dos dados al mismo tiempo caiga el mismo número en los dos o que la suma de los dos números sea siete? La misma probabilidad

¿Por qué?
porque existen el mismo número de pares como el mismo número de la suma que den 7.

Figura 6.6. Identificación correcta de equiprobabilidad.

6.1.5 Combinatoria

El reactivo 5 pide encontrar la cantidad de trayectorias que se forman al unir de manera vertical los elementos de un arreglo A y compararlo con las posibles trayectorias de un arreglo B (véase la Figura 6.7); ambos tienen la misma cantidad de posibilidades (Shaughnessy, 1977). De las cuatro respuestas correctas (11%) al inciso a), ninguna dio evidencia de que el estudiante comprendiera el principio fundamental del conteo, sólo planteó una comparación entre las posibles trayectorias de dos arreglos distintos de puntos. El inciso b), que pide la justificación a la respuesta previa, no obtuvo una sola respuesta correcta. Por último, la pregunta del número de trayectorias que se forman tampoco obtuvo respuestas acertadas, sino que la más común (40% de los casos) fue 8, que es el número de líneas verticales del arreglo A.



5. Una trayectoria en una configuración, como A o B, se forma conectando un elemento del renglón superior con un elemento del reglón inferior, y toca uno y sólo un elemento de cada renglón intermedio.

A

B

a) ¿Cuál configuración, A o B, permite más trayectorias?

son los mismos.

b) ¿Por qué?

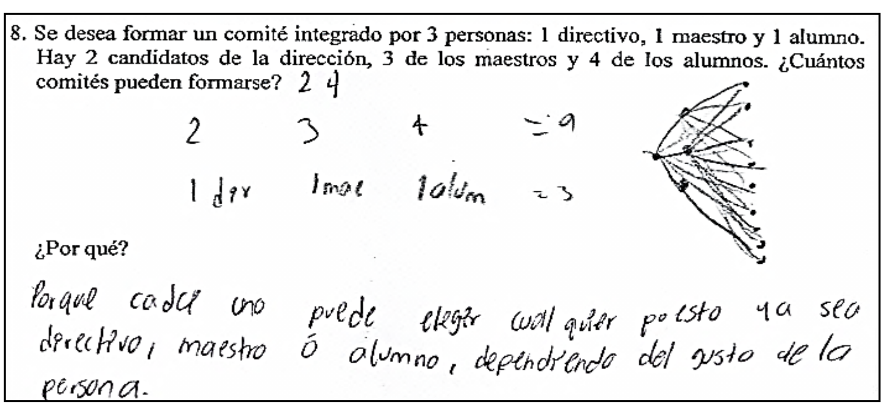
porque sólo puedes tocar un punto hacia abajo

c) ¿Cuántas trayectorias son?

8.

Figura 6.7. En la tercera imagen, respuesta de un estudiante al problema 5.

Para el reactivo 8, que pedía determinar el número de comités posibles con un directivo, un maestro y un alumno, si había dos candidatos de la dirección, tres de los maestros y cuatro de los alumnos (véase la Figura 6.8), se obtuvo 20% de respuestas correctas (7 estudiantes): dos trataron de trazar un diagrama de árbol, tres agruparon y ordenaron por letras para contar las combinaciones y dos no mostraron estrategia alguna, simplemente enunciaron la respuesta. De entre las contestaciones incorrectas, la más común (en 23 ocasiones, 66% del grupo) fue “dos”: los estudiantes no advirtieron que se podían combinar todos los elementos e interpretaron que solamente se podía tomar uno a la vez.



8. Se desea formar un comité integrado por 3 personas: 1 directivo, 1 maestro y 1 alumno. Hay 2 candidatos de la dirección, 3 de los maestros y 4 de los alumnos. ¿Cuántos comités pueden formarse? 24

2 3 4 = 9

1 dir 1 mae 1 alum = 3

¿Por qué?

Porque cada uno puede elegir cual quier puesto ya sea directivo, maestro ó alumno, dependiendo del gusto de la persona.

Figura 6.8. Trazo a manera de diagrama de árbol.

6.1.7 Modelos generativos

Sólo dos estudiantes pretendieron trazar un diagrama de árbol para contestar al reactivo 8, pero de manera inconsistente y poco clara (véase la Figura 6.8); a pesar de ello sus respuestas fueron acertadas. Más claramente, en sus contestaciones tres estudiantes agruparon y representaron las combinaciones posibles, obteniendo la cantidad correcta. Por otro lado, de los dos estudiantes (6%) que utilizaron otro tipo de soporte gráfico, uno trazó figuras de individuos de acuerdo al enunciado del reactivo y el otro organizó las categorías propuestas, a modo de un cuadro sinóptico; sin embargo, sus respuestas fueron incorrectas.

6.1.8 Resultados de C-I en los tres distintos semestres

Después de aplicar C-I a los grupos de segundo, cuarto (véase la sección 5.3) y sexto semestres —este último antes de la enseñanza de probabilidad— se observó que no hubo diferencias significativas entre el tipo de respuestas dadas por los estudiantes. La Tabla 6.3 resume los porcentajes de respuestas correctas, incorrectas y omitidas por cada uno de los grupos.

Tabla 6.3. Porcentajes de tipos de respuestas a C-I de los estudiantes de distintos semestres.

	Semestre		
Tipo de respuesta	**Segundo**	**Cuarto**	**Sexto**
Correcta	36%	27%	31%
Incorrecta	63%	63%	61%
Omitida	1%	10%	8%

De la tabla observamos que los estudiantes de segundo semestre tuvieron el mayor índice de respuestas contestadas y el menor porcentaje de respuestas omitidas; en cuarto semestre se presentó el menor porcentaje de respuestas correctas para tomar un valor intermedio, respecto a los dos anteriores, en el sexto semestre; la menor proporción de respuestas incorrectas la tuvieron los estudiantes de sexto semestre (aunque la diferencia no es significativa) y el mayor índice de reactivos no contestados se presentó en el grupo de cuarto semestre.

6.2 Enseñanza

La enseñanza de Probabilidad, correspondiente al RAP 2 de la segunda Unidad Didáctica: Probabilidad (DEMS, 2009), se impartió al grupo de 51 estudiantes al que se aplicaron los cuestionarios de investigación C-I y de enseñanza C-E (véase la Figura 3.1).

Al contenido indicado en el Programa de estudios (véase DEMS, 2009, p. 10) se agregó el de los enfoques frecuencial y subjetivo de probabilidad, más aparte se dedicó una hora a la representación gráfica de los espacios muestra, mediante el uso de modelos generativos didácticos, que no incluye el programa de estudios. La finalidad de esa incorporación fue completar la enseñanza con todos los enfoques de la probabilidad e incluir el uso de modelos generativos como auxiliares en la idea de espacio muestra.

6.2.1. El contenido y las limitaciones

La secuencia de temas se presentó de la siguiente manera:

- *Introducción a los temas de probabilidad, mediante ejemplos de la vida cotidiana.*
- *Enfoques de la probabilidad: subjetivo, frecuencial y clásico.*
- *Presentación de los conceptos de:*
  - *Espacio muestra.*
  - *Evento.*
  - *Tipos de eventos: imposible, seguro, simple, compuesto, mutuamente excluyentes, no excluyentes, complementarios, independientes, dependientes, equiprobables.*
- *Combinatoria.*
- *Álgebra de conjuntos.*
- *Axiomas de la probabilidad.*
- *Propiedades de los axiomas.*
- *Representación gráfica de espacios muestra.*

Las ideas fundamentales de probabilidad que se trataron en la enseñanza impartida a los estudiantes fueron: medida de probabilidad, espacio muestra, adición de probabilidades, combinatoria, equiprobabilidad y simetría.

La idea de Independencia se presentó en menor medida, ya que no se incluye en el RAP 2 del programa (véase DEMS, 2009, p. 10). Al iniciar la enseñanza de probabilidad los estudiantes aún no habían cubierto los temas del RAP 1 (álgebra de conjuntos y combinatoria), necesarios para la enseñanza del RAP 2, por lo que fue necesario realizar la enseñanza de estos temas durante una sesión de clase, misma que se tomó de las correspondientes al RAP 2.

Conforme a las políticas institucionales de aquel momento, coincidente con el tiempo de la enseñanza, no se permitió videograbar ni tomar fotografías de las sesiones dentro del aula, situación que limitó la recopilación de datos; no obstante, de la experienciación de la enseñanza impartida se obtuvieron los siguientes resultados.

6.2.1.1 Medida de Probabilidad. La mayoría de los estudiantes dijeron no recordar lo que era la probabilidad. Conforme a lo predicho por Fischbein, los estudiantes adoptaron un enfoque frecuencial y expresaron la medida de probabilidad en forma porcentual. Al preguntarles sobre otras formas de representarla, dos estudiantes contestaron que también se hacía en forma fraccionaria y ninguno respondió que podía representarse en forma decimal. Además de lo concerniente a la expresión del valor de la probabilidad, los estudiantes dijeron que en general no recordaban más de la enseñanza que recibieron de probabilidad en secundaria.

6.2.1.2. Espacio muestra. Para los estudiantes inicialmente resultó un reto comprender la idea de espacio muestra, pero después de hacer uso del diagrama de árbol, para identificarlo y calcular su cardinalidad, los estudiantes pudieron expresarlo matemáticamente mediante notación de conjuntos, aunque en C-E sólo lo hizo un estudiante (véase Figura 6.11), muchos se anclaron a la representación pictórica sin avanzar a la expresión matemática (véase la Figura 6.12).

6.2.1.3. Adición de probabilidades. La enseñanza del tercer axioma de la probabilidad en un inicio resultó obvia para los estudiantes; la dificultad se reveló cuando tuvieron que aplicar el axioma en la solución de problemas. El conflicto que enfrentaron fue identificar los eventos mutuamente excluyentes. Al igual que para la idea de espacio muestra con el diagrama de árbol, el uso del diagrama de Venn facilitó la comprensión de la idea de adición de probabilidades, por ilustrar el espacio muestra y sus particiones.

6.2.1.4. Equiprobabilidad y simetría. De las ideas incluidas en la enseñanza, la que los estudiantes mostraron intuitivamente correcta fue la de la equiprobabilidad, pues resultaba evidente para ellos que un productor de aleatoriedad, simétrico físicamente, entregara posibles resultados igualmente probables. Esto se puso en evidencia en los ejemplos de lanzamientos de dados y monedas. La idea se mantuvo correctamente interpretada por los jóvenes a lo largo de la enseñanza.

6.2.1.5. Combinatoria. Las técnicas de conteo fue lo más complicado durante la enseñanza. Como ya se indicó, esta idea correspondía al RAP 1 anterior, pero por cuestiones de tiempo el Profesor titular no alcanzó a impartirla. En media sesión de las disponibles para el RAP 2 se le impartió, pero a pesar de que los estudiantes atendieron a las situaciones generales en las que deriva, no parecieron comprenderla, pues presentaron confusión entre combinaciones y permutaciones, y hubo una tendencia a la aplicación mecánica de las fórmulas.

6.2.1.6. Independencia y regla del producto. Durante la enseñanza, al solucionar, con la participación de todo el grupo, un problema en el que se calculaba la probabilidad de ocurrencia de dos eventos, una estudiante manifestó que sabía, que se debía operar con las probabilidades, pero no estaba segura si se debían sumar o multiplicar.

6.3 El razonamiento probabilístico después de la enseñanza

Una semana después de terminada la enseñanza se aplicó el cuestionario C-E (véase la Figura 3.1, la Tabla 3.1 y el apartado 3.4.2) a los estudiantes (ese día asistieron 50) para obtener datos de su comprensión de las ideas implicadas en esa enseñanza. C-E se refirió a las ideas fundamentales de estocásticos indicadas en la Tabla 6.4.

6.3.1. Resultados

Las frecuencias de los tipos de respuestas de los estudiantes a los reactivos de C-E se muestran en la Figura 6.9. Se clasifican como correctas, incorrectas y omitidas. En los primeros reactivos fue mayor el porcentaje de respuestas correctas, en los reactivos intermedios la tendencia fue contestar incorrectamente y aumentó la proporción de respuestas omitidas; para los reactivos finales predominó la omisión y las respuestas dadas son incorrectas en su mayoría.

Tabla 6.4. Ideas fundamentales de estocásticos implicadas en C-E.

IF / Reactivo	Medida de Probabilidad	Espacio Muestra	Adición de Probabilidades	Independencia	Equiprobabilidad	Combinatoria	Variable Aleatoria
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

6.3.1.1. Medida de Probabilidad. A lo largo del cuestionario C-E, las respuestas de los estudiantes infringieron las normas del uso de signos matemáticos.

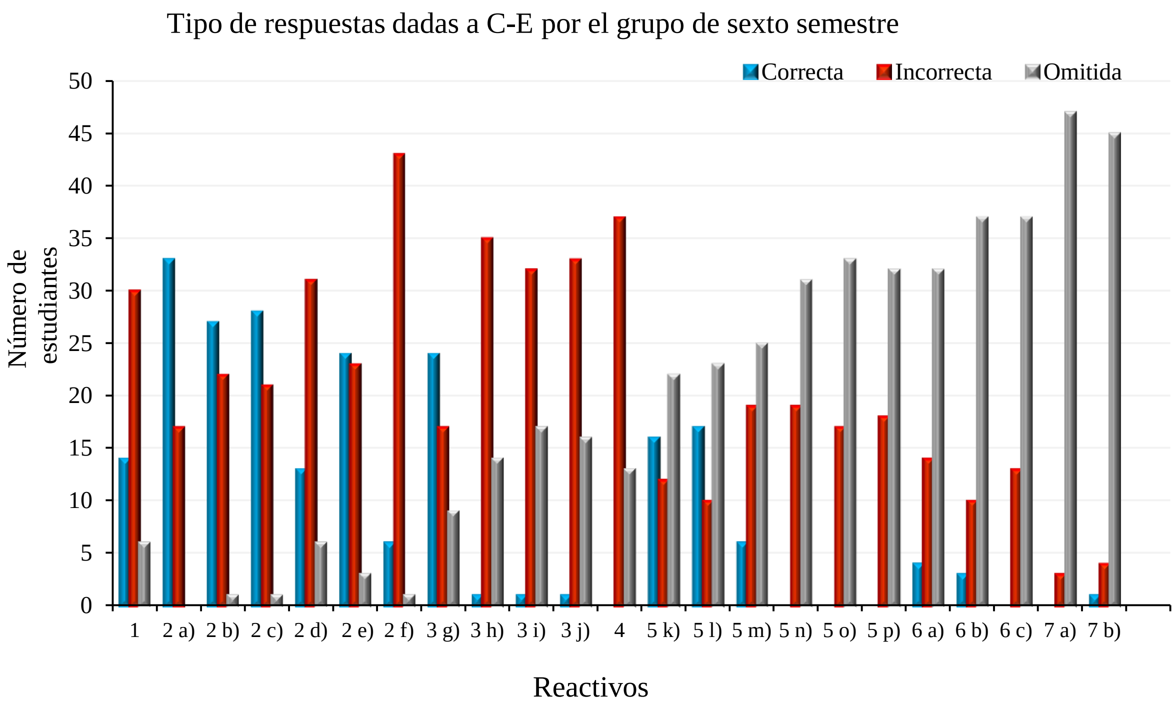
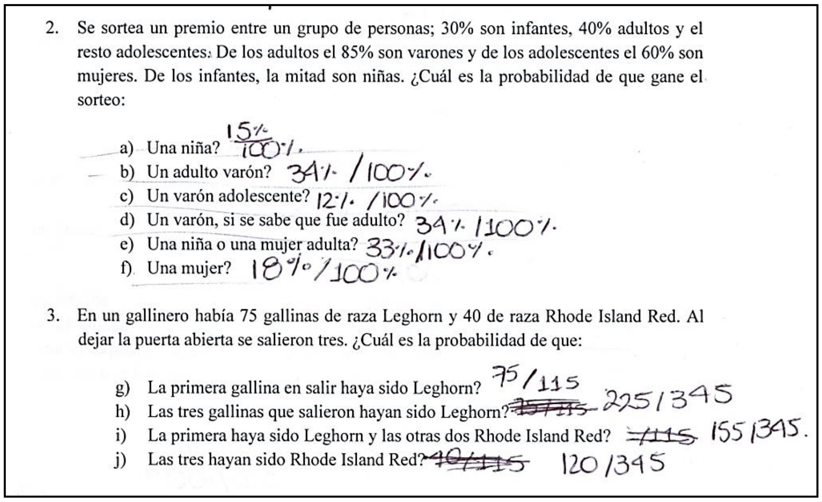


Figura 6.9. Distribución de los tipos de respuestas dadas al cuestionario C-E.

La medida de probabilidad pone en relación la parte con el todo. Durante la enseñanza se hizo énfasis en esto, pero los resultados indican que 12% de los estudiantes no comprendieron el principio y mantuvieron su enfoque intuitivo de considerar la medida de probabilidad como una frecuencia relativa (véase la Figura 6.10).



2. Se sortea un premio entre un grupo de personas; 30% son infantes, 40% adultos y el resto adolescentes. De los adultos el 85% son varones y de los adolescentes el 60% son mujeres. De los infantes, la mitad son niñas. ¿Cuál es la probabilidad de que gane el sorteo:

a) Una niña? 15%/100%.
b) Un adulto varón? 34%/100%.
c) Un varón adolescente? 12%/100%.
d) Un varón, si se sabe que fue adulto? 34%/100%.
e) Una niña o una mujer adulta? 33%/100%.
f) Una mujer? 18%/100%

3. En un gallinero había 75 gallinas de raza Leghorn y 40 de raza Rhode Island Red. Al dejar la puerta abierta se salieron tres. ¿Cuál es la probabilidad de que:

g) La primera gallina en salir haya sido Leghorn? 75/115
h) Las tres gallinas que salieron hayan sido Leghorn? ~~15/115~~ 225/345
i) La primera haya sido Leghorn y las otras dos Rhode Island Red? ~~=/115~~ 155/345.
j) Las tres hayan sido Rhode Island Red? ~~40/115~~ 120/345

Figura 6.10. Expresión de un estudiante de la medida de probabilidad como relación de porcentajes y de las cardinalidades del evento y espacio muestra.

10% de los estudiantes contestaron con esta forma todos los incisos del reactivo 2, aunque para los reactivos posteriores contestaron en forma fraccionaria. Ninguno de los estudiantes que contestó así expresó correctamente la magnitud de la medida de probabilidad en este reactivo sino hasta los siguientes, en los que corrigieron la forma.

La Tabla 6.5 resume la frecuencia de tipo de respuestas a los reactivos relativos a la idea de medida de probabilidad en el cuestionario CE (véase la Tabla 6.4). El promedio general de respuestas correctas fue muy bajo.

6.3.1.2. Espacio muestra. Durante la enseñanza se hizo énfasis en la identificación del espacio muestra asociado a un fenómeno aleatorio. 8% de los estudiantes lo representaron con 100%, pues representaba todos los posibles eventos del fenómeno aleatorio. En el grupo de reactivos 6 se planteaba lo siguiente:

6. Se lanzan 360 veces dos dados ordinarios.

a) Especifica el espacio muestra implicado.

b) Identifica el evento "la suma de los puntos en las caras superiores es a lo más 4".

c) ¿Cuántas veces esperarías que la suma de los puntos en las caras superiores fuera a lo más 4?

Tabla 6. 5. Porcentaje de los tipos de contestaciones para cada uno de los reactivos que contenían la idea de medida de probabilidad.

Reactivo	**Correctas**	**Incorrectas**	**No contestadas**
1	28%	60%	12%
2	43.66%	52.33%	4%
3	13.5%	58.5%	28%
4	0%	74%	26%
5	13%	31.66%	55.33%
7	0%	6%	94%
Total	16%	47%	37%

El reactivo 6a), que pide especificar el espacio muestra asociado al lanzamiento de dos dados, sólo un estudiante lo contestó correctamente (véase la Figura 6.11); otros tres estudiantes identificaron el espacio muestra recurriendo a un producto cartesiano, pero sólo proporcionaron la representación pictórica sin especificarlo (véase la Figura 6.12).

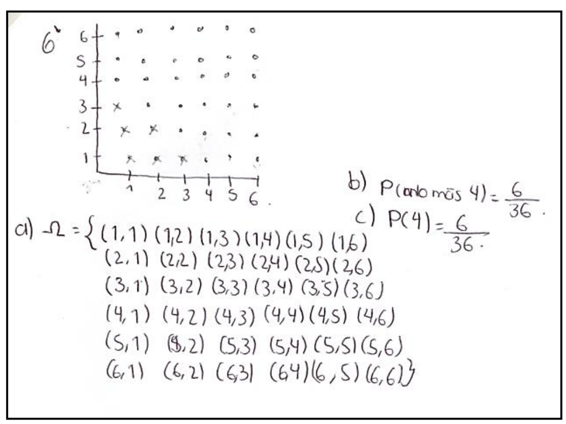


Figura 6.11. Identificación del espacio muestra por un estudiante.

14 estudiantes (28%) contestaron incorrectamente, cuatro de ellos (8%) hicieron uso del producto cartesiano para indicar el espacio muestra, uno no lo completó, otro no especificó cuáles eran los componentes de los ejes y dos más lo completaron y lo especificaron correctamente, pero después de calcular su cardinalidad multiplicaron por el número de repeticiones del fenómeno aleatorio, con lo que llegaron a una respuesta incorrecta (véase la Figura 6.12).

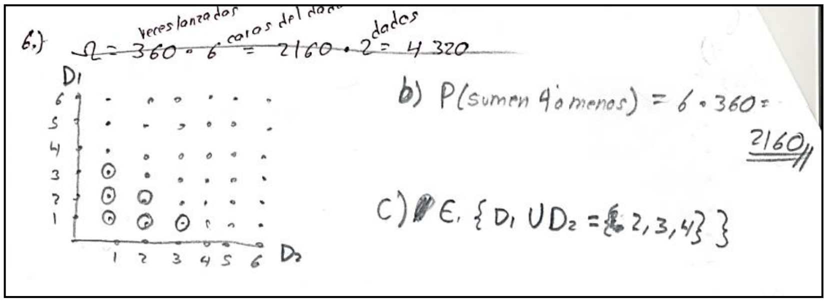


Figura 6.12. Respuesta de un estudiante al reactivo 6.

Para el reactivo 6 b), que pide identificar a los eventos elementales componentes del evento de interés y su cardinalidad, se dieron tres respuestas correctas (6%), diez incorrectas (20%) y 37 estudiantes no contestaron. Los tres estudiantes que contestaron correctamente se basaron en su representación del espacio muestra para identificar los eventos elementales que componían al evento pedido y así indicar su probabilidad.

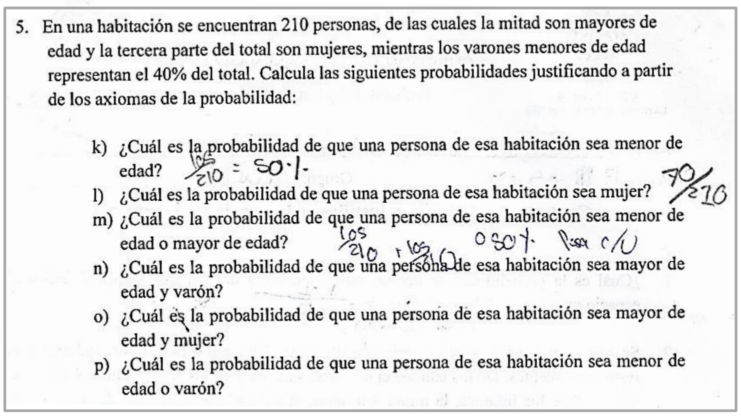
En el reactivo 1 se planteaba la siguiente pregunta:

3. *¿Cuál es la probabilidad de acertar por lo menos a uno de tres volados? Indica el espacio muestra.*

90% de los estudiantes (45) trazaron un diagrama de árbol para calcular el espacio muestra, de los cuales 24 contestaron correctamente a la pregunta; del 8% que no lo utilizó, sólo uno contestó correctamente. Un estudiante más que contestó correctamente usó un producto cartesiano.

6.3.1.3. Adición de Probabilidades. Esta idea, junto a las dos primeras, están incluidas en los tres axiomas de la probabilidad. Estaba contenida en los reactivos 2e, 5m y 5p (véase la Tabla 3.1). El reactivo 2e (véase en la Figura 6.10) fue contestado correctamente por el 48% de los estudiantes. Para el reactivo 5m (véase en la Figura 6.13)

12% de los estudiantes contestaron correctamente, pero ningún estudiante acertó en el reactivo 5p. Los seis estudiantes que mostraron la comprensión de la idea en el reactivo 5m lo hicieron también en el reactivo 2e. El reactivo 5m tenía la peculiaridad de que la suma resultante de las cardinalidades de los eventos indicados daba como resultado la del espacio muestra, en los otros dos casos el resultado es un subconjunto del espacio muestra y las preguntas son muy similares (véanse 2e y 5p las figuras 6.10 y 6.13). El único factor que parece marcar la diferencia en los tipos de respuestas dadas a los reactivos es su ubicación en el cuestionario; los reactivos 5m y 5p están en la segunda página y al ritmo que contestaron los estudiantes el cuestionario, algunos no llegaron a ellos.



5. En una habitación se encuentran 210 personas, de las cuales la mitad son mayores de edad y la tercera parte del total son mujeres, mientras los varones menores de edad representan el 40% del total. Calcula las siguientes probabilidades justificando a partir de los axiomas de la probabilidad:

k) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de esa habitación sea menor de edad? 105/210 = 50%
l) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de esa habitación sea mujer? 70/210
m) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de esa habitación sea menor de edad o mayor de edad? 105/210 + 105/210 o 50% para c/u
n) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de esa habitación sea mayor de edad y varón?
o) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de esa habitación sea mayor de edad y mujer?
p) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de esa habitación sea menor de edad o varón?

Figura 6.13. Un estudiante contesta al reactivo 5 m): *105/210 + 105/210, o 50% para c/u*.

6.3.1.4. Equiprobabilidad. Los incisos de los reactivos 1 y 6 implicaban lanzamientos de dados y de monedas ordinarios. Los estudiantes asignaron correctamente las probabilidades de obtener alguna de las caras de los objetos.

6.3.1.5. Combinatoria. El reactivo 4 plantea una pregunta de combinaciones y calcular la probabilidad de ganar un sorteo al azar. 26% de los estudiantes contestaron incorrectamente y el restante 74% no contestó. Sólo un estudiante se percató de que el problema era de naturaleza combinatoria y lo hubiera resuelto correctamente si hubiera recordado "la fórmula", como él refirió luego durante una entrevista (véase en el apartado 6.4.3), el estudiante correctamente expresó que la probabilidad de ganar sería una de entre todas las posibilidades resultantes de la operación combinatoria.

La contestación incorrecta más frecuente fue 6/42, dada por 15 estudiantes (30%), quienes simplificaron el problema atribuyendo la cardinalidad del espacio muestra al número de elementos a combinar y considerando como el evento exitoso al conformado por los seis números a elegir. Esta respuesta exhibe un razonamiento aditivo, se sumaron las partes para identificar un evento y el espacio muestra, no se dio un razonamiento multiplicativo, que es la base en el cálculo de combinaciones.

6.3.1.6. Ley de los grandes números. El inciso c) del reactivo 6 (véase en la sección 6.3.1.2) plantea una pregunta que exige una aproximación a la idea de la ley de los grandes números; esta idea no estaba prescrita en el RAP enseñado, fue incluido para obtener datos de las intuiciones que tienen los estudiantes respecto a la ley de los grandes números.

Se propusieron 360 lanzamientos para que el estudiante relacionara fácilmente esta cantidad con la cardinalidad del espacio muestra (36) y la relación entre la probabilidad del evento y el posible número de veces que ocurre fuera evidente al estudiante. Para el reactivo 6 c) no se tuvieron respuestas correctas, sólo 13 incorrectas (26%) y 74% de los estudiantes no contestaron. Ningún estudiante dio evidencia de comprender intuitivamente la ley de los grandes números, ni siquiera quienes identificaron al evento en cuestión.

6.4 Una actividad extra-aula

Tres semanas después de haber recibido la enseñanza de probabilidad y dos semanas después de haber sido evaluados, se realizó en Cinvestav una sesión extra-aula (véase en el Capítulo 3, p. 37) con diez estudiantes del grupo, seleccionados por su mayor disposición a participar durante la enseñanza. Dentro de este grupo de estudiantes variaba el nivel de dominio conceptual de probabilidad.

La actividad desarrollada, *Frecuencias y probabilidad* (**EA-FP**) (véase en la Figura 3.1 y en §3.3.2.2) tuvo el objetivo de obtener datos de la comprensión de los estudiantes del enfoque frecuencial de la probabilidad después de haber recibido la enseñanza de probabilidad y estadística según el programa de estudios del bachillerato tecnológico (DEMS, 2009). Cabe destacar que esta actividad experimental se diseñó para estudiantes de segundo grado de secundaria, alumnos de entre 13 y 14 años de edad.

La actividad consistió en realizar experimentos aleatorios para analizar los resultados desde el enfoque de probabilidad frecuencial. Se utilizaron hojas de control para guiar la actividad y registrar las respuestas de los estudiantes; no se permitió el uso de calculadora y la sesión se videograbó. La actividad consta de cuatro secciones y se desarrolló en dos tiempos, con un receso de 40 minutos, como se indica en la Tabla 6.6.

La primera sección de la actividad se desarrollaba de manera individual y pedía lanzar 25 ternas de volados, para las cuales había que indicar los valores que toma la variable aleatoria, registrar la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa para cada uno de ellos, y finalmente comparar estas frecuencias con las de águila en todos los lanzamientos.

Tabla 6.6. Correspondencia entre las secciones de la actividad y su duración.

	Tiempo	**Secciones**
1. Frecuencia relativa en ternas de volados	(1 hr, 45 min).	I, II y III
2. Simulación del sexo de cuatro hijos	(1 hr.).	IV

En la segunda sección los estudiantes formaron equipos para comparar sus resultados individuales y conjuntar sus datos, para comparar las frecuencias relativas entre grupos de datos de distinto tamaño y, finalmente, observar el comportamiento de las frecuencias relativas de ambos conjuntos de datos respecto a la probabilidad. Los diez estudiantes E_i ($i = 1, 2, \ldots, 10$) formaron tres equipos T_j ($j = 1, 2, 3$) para el desarrollo de la actividad: T_1 {E_1, E_2, E_3, E_4}, T_2 { E_5, E_6 y E_7}y T_3 { E_8, E_9, E_{10}}.

En la tercera sección se procedió a graficar los valores de las frecuencias relativas de los dos grupos de datos de diferente tamaño y el valor a priori de la probabilidad para cada uno de los valores de la variable aleatoria; también calcularon el promedio del número de águilas obtenidas en las ternas de volados para ambos grupos de datos para, posteriormente, compararlo con la esperanza matemática de la variable aleatoria.

En la cuarta sección los estudiantes simularon el sexo de cuatro bebés mediante volados; se les pidió calcular el espacio muestra correspondiente con ayuda de un diagrama de árbol, indicar valores que toma la variable aleatoria y su respectiva probabilidad, así como identificar esta relación en el diagrama de árbol, calcular la esperanza matemática y estimar el resultado más probable para una combinación dada en un mayor número de repeticiones. La Tabla 6.7 muestra el contenido de ideas fundamentales de estocásticos por sección.

Al final de la actividad experimental obtuvimos las repuestas que los estudiantes dieron a los reactivos en las hojas de control y la videograbación de sus intervenciones durante el desarrollo de la actividad.

Tabla 6.7. Ideas fundamentes de estocásticos implicadas en cada sección.

	Ideas fundamentales						
Sección	Medida de Probabilidad	Espacio muestra	Regla del Producto	Equiprobabilidad y Simetría	Combinatoria	Variable Aleatoria	Ley de los grandes números
I.							
II.							
III.							
IV.							

6.4.1. La interacción social

Inicialmente los estudiantes no contestaron correctamente todas las preguntas, por lo que el investigador guió sus reflexiones hasta que dieran la respuesta correcta. Este proceso siempre se realizó en equipo o por todo el grupo en general. Durante esta reflexión guiada y el proceso de contestación a los reactivos, se observó que en dos de los tres equipos había un estudiante que fungía como "líder conceptual"; este estudiante era reconocido por sus compañeros como poseedor del conocimiento suficiente para solucionar los problemas presentados y su opinión prevalecía cuando los integrantes del equipo discutían cómo responder a las preguntas. En el proceso de interacción, el "líder conceptual" no trataba de convencer a los demás con sus argumentos. Este fenómeno se debió a que estos estudiantes tenían casi tres años de ser compañeros de aula y reconocían mutuamente sus niveles de dominios conceptuales; en los resultados obtenidos de la aplicación de C-E, E_1 contestó a 11 reactivos correctamente, a ocho de manera incorrecta y no contestó a cuatro, por su parte E_8 contestó a nueve de manera correcta, a cuatro de forma incorrecta y diez no los contestó; ellos fueron los dos estudiantes con el mayor número de respuestas correcta; en el equipo T_1, E_1 fungió como líder conceptual, mientras que en T_3 lo fue E_8; en las discusiones en T_2 ninguno de sus integrantes dominó. El hecho relevante de este fenómeno es que sólo las ideas de un estudiante prevalecían en el equipo y los demás contestaban de la manera en que él proponía; hubo una subordinación de ideas que limitó la expresión del pensamiento del resto de los estudiantes.

El concepto de frecuencia relativa resultó difícil para los estudiantes, a pesar de que fue objeto de la enseñanza en el curso. Inicialmente E_6 aclaró para todo el grupo la diferencia entre frecuencia absoluta y frecuencia relativa, pero durante el desarrollo de la actividad los estudiantes se mostraron dubitativos respecto al concepto; incluso una estudiante no reparó en su confusión y terminó contestando con una frecuencia relativa al reactivo g) que preguntaba por la frecuencia absoluta (véase la Figura 6.16). Para el concepto de frecuencia relativa podemos establecer el siguiente triángulo epistemológico:

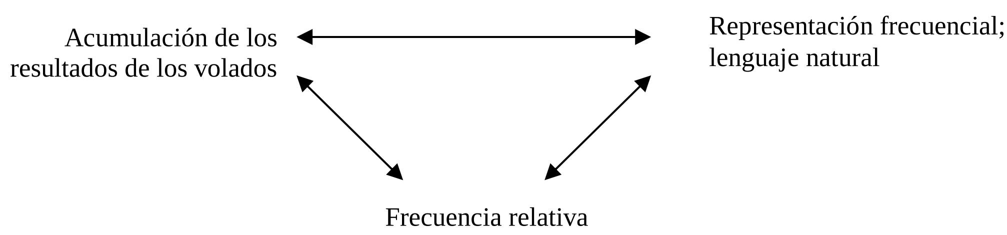


Figura 6.14. Triángulo epistemológico para el concepto de la frecuencia relativa en el lanzamiento de volados.

6.4.2. Contestaciones a los reactivos

La Figura 6.15 presenta las frecuencias de contestaciones por reactivo, clasificadas como correctas, incorrectas u omitidas. La Sección I corresponde a los reactivos a-h, los precedidos por la letra A son de la sección II, por la letra B de la III y por la C de la IV.

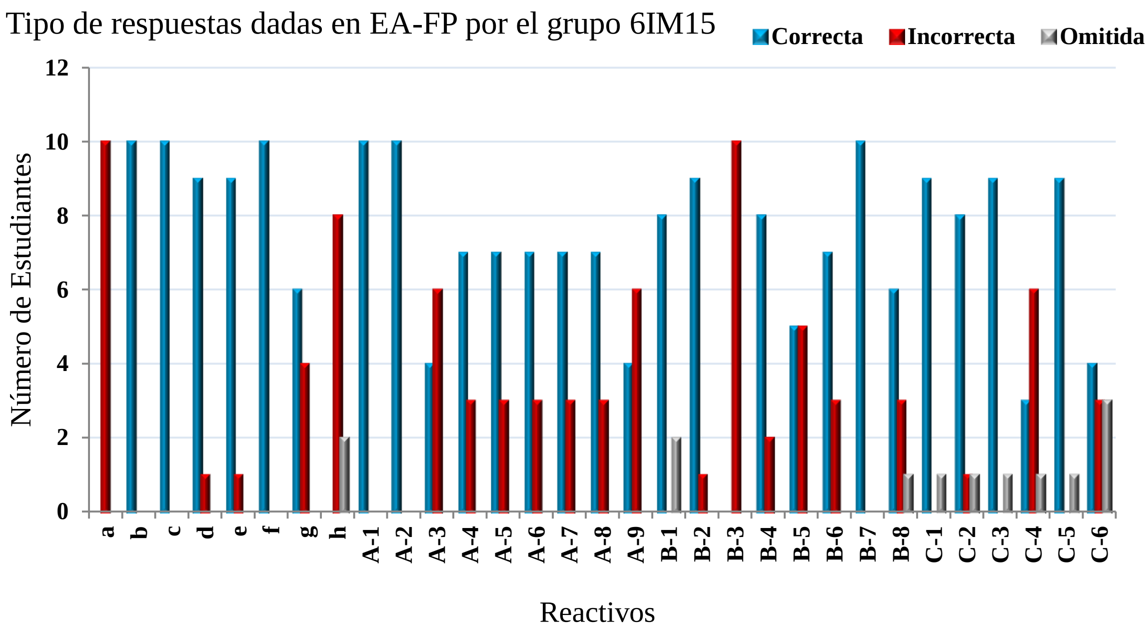
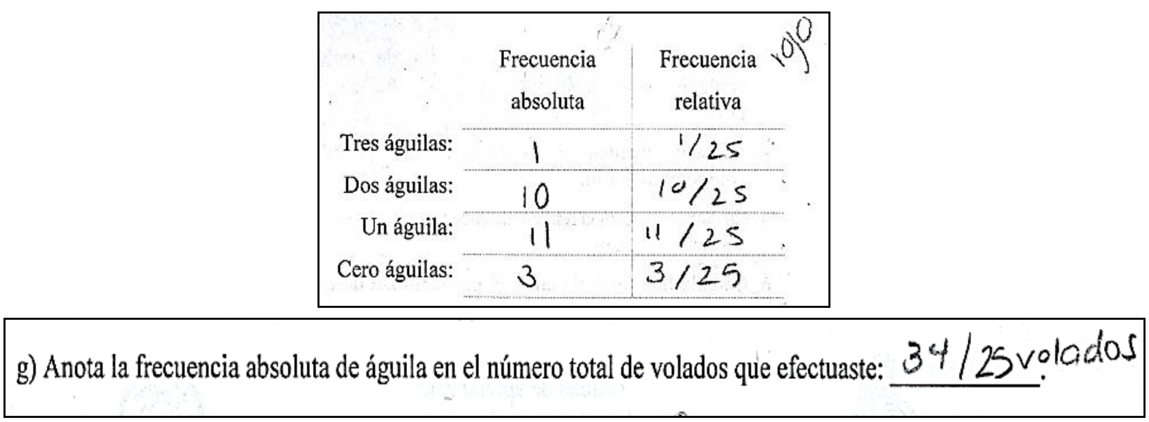


Figura 6.15. Clasificación de las respuestas por cada reactivo.

6.4.2.1. Sección I. El 68% de las respuestas fueron correctas. Todos los estudiantes confundieron el espacio muestra con el conjunto de valores que toma la variable aleatoria, aunque todos indicaron correctamente el espacio muestra correspondiente; para identificar el espacio muestra, sólo E_1 no recurrió al diagrama de árbol.



	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Tres águilas:	1	1/25
Dos águilas:	10	10/25
Un águila:	11	11/25
Cero águilas:	3	3/25

g) Anota la frecuencia absoluta de águila en el número total de volados que efectuaste: 34/25 volados

Figura 6.16. Inicialmente E_2 identifica frecuencia absoluta y frecuencia relativa para cada uno de los valores de la variable aleatoria, pero al romper la agrupación por ternas no puede expresar el valor de la frecuencia absoluta de águilas en el total de volados.

Todos los estudiantes calcularon correctamente las frecuencias absoluta y relativa con que obtuvieron los valores de la variable aleatoria, pero sólo seis pudieron expresar la frecuencia absoluta de águilas obtenidas en el total de volados. La Figura 6.16 muestra uno de estos casos.

6.4.2.2. Sección II. 70% de las respuestas para esta sección fueron correctas. Ante la petición de comparar la desviación entre el valor teórico de la probabilidad y el valor de la frecuencia relativa de dos grupos de datos de diferente tamaño, el estudiante E_1 señaló que a más repeticiones del fenómeno aleatorio la frecuencia relativa se acercaba a la probabilidad (véase la Figura 6.17).

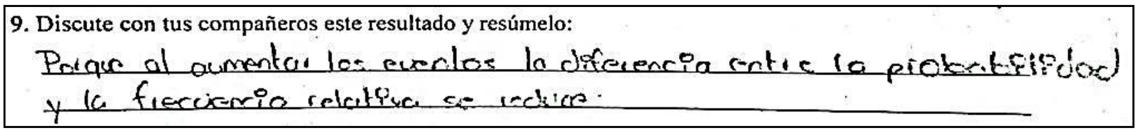

9. Discute con tus compañeros este resultado y resúmelo:
Porque al aumentar los ciclos la diferencia entre la probabilidad y la frecuencia relativa se reduce.

Figura 6.17. Respuesta dada por E_1 la que fue apropiada por todo el T_1.

Después de un consenso, el equipo T_2 dio una conclusión similar (véase la Figura 6.18). La respuesta que dieron estos tres estudiantes, en las que expresan de una manera intuitiva la ley de los grandes números, resultó de una reflexión guiada por el investigador, en la que se hizo énfasis en observar la tendencia de la frecuencia relativa para un valor de la variable aleatoria al aumentar los ensayos; inicialmente este hecho les pasó desapercibido.

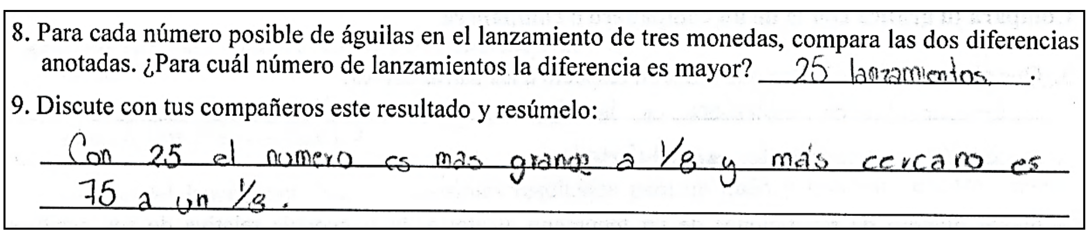

8. Para cada número posible de águilas en el lanzamiento de tres monedas, compara las dos diferencias anotadas. ¿Para cuál número de lanzamientos la diferencia es mayor? 25 lanzamientos.
9. Discute con tus compañeros este resultado y resúmelo:
Con 25 el numero es mas grande a 1/8 y más cercano es 75 a un 1/8.

Figura 6.18. Respuesta dada por T_2, con el consenso de sus tres integrantes.

6.4.2.3. Sección III. El 68% de las respuestas fueron correctas. Al trazar una gráfica de barras, solicitada para comparar los valores de las frecuencias relativas y de la probabilidad, los estudiantes no avanzaron hacia la idea de la ley de los grandes números porque no se percataron de que las alturas de las barras de las frecuencias relativas del grupo con más datos son más próximas a la altura de la barra de la probabilidad; hecho que algunos ya habían expresado en lengua natural. E_3 dio una respuesta de naturaleza subjetiva, pues expresó que era grande la diferencia entre la representación gráfica de la probabilidad a priori y la frecuencia relativa de los valores de la variable aleatoria en 25 lanzamientos, pero no hizo referencia alguna a la frecuencia relativa en 100 lanzamientos. Con su respuesta se puede interpretar que E_3 comprende y omite, porque le resulta obvio, que la diferencia de la frecuencia relativa de este segundo grupo de valores respecto a la probabilidad es menor que la diferencia entre la frecuencia relativa del primer grupo de valores y el valor de la probabilidad (véase la Figura 6.19).

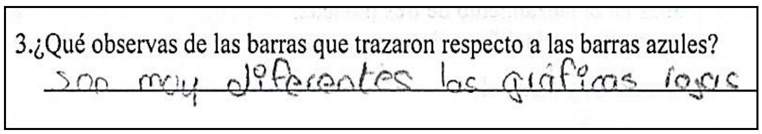
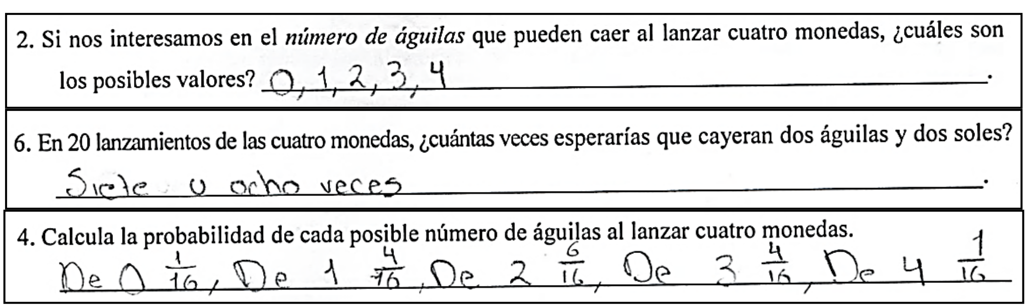

3.¿Qué observas de las barras que trazaron respecto a las barras azules?
Son muy diferentes los gráficos logis

Figura 6.19. Respuesta de E_3 a la comparación gráfica de la frecuencia relativa de los dos grupos de datos.

6.3.2.4. Sección IV. En la última sección los estudiantes contestaron correctamente el 78% de los reactivos. Al igual que en el reactivo inicial, E_1 no utilizó un diagrama de árbol para calcular la cardinalidad del espacio muestra, tampoco E_7 lo utilizó, pero no hubo evidencia de su cálculo en ambos casos. Ocho estudiantes ahora sí pudieron identificar los valores de la variable aleatoria, aunque sólo tres indicaron su probabilidad y cuatro respondieron correctamente al resultado más probable para la combinación de dos águilas y dos soles en 20 lanzamientos de cuatro monedas.


2. Si nos interesamos en el *número de águilas* que pueden caer al lanzar cuatro monedas, ¿cuáles son los posibles valores? 0, 1, 2, 3, 4.

6. En 20 lanzamientos de las cuatro monedas, ¿cuántas veces esperarías que cayeran dos águilas y dos soles?
Siete u ocho veces.

4. Calcula la probabilidad de cada posible número de águilas al lanzar cuatro monedas.
De 0 $\frac{1}{16}$, De 1 $\frac{4}{16}$, De 2 $\frac{6}{16}$, De 3 $\frac{4}{16}$, De 4 $\frac{1}{16}$

Figura 6.20. Respuestas correctas de un estudiante a reactivos de la sección IV.

6.4.3. Entrevista a un líder conceptual

Se entrevistó a $E_{1,}$ que fungió como líder conceptual durante el desarrollo de la actividad extra-aula, con base en sus respuestas incorrectas a C-E y C-I. E_1 fue el estudiante que tuvo el mayor número de respuestas correctas, por lo que el propósito de la entrevista fue analizar las dificultades que enfrentó al intentar resolver los reactivos en los que se equivocó. La entrevista se videograbó y se utilizaron hojas de control en las que el estudiante respondió a las preguntas en forma manuscrita; no se utilizó calculadora.

El hecho de que E_1 fuera el estudiante con la mayor cantidad de aciertos en C-E resultó sorpresivo, ya que durante la enseñanza fue un estudiante poco participativo, que no conversaba mucho en las clases y no asistió el día que se aplicó el C-I. Por el contrario, el otro líder conceptual, E_8, se había manifestado participativo, por lo general contestaba correctamente a las preguntas planteadas en clase; E_8 fue el estudiante con el segundo mejor desempeño en C-E. La tendencia de E_1 de ser poco expresivo verbalmente se conservó durante la entrevista, por lo general pensaba la situación antes de dar una respuesta.

La entrevista comenzó con la pregunta:

Una persona compra un boleto sencillo (con seis números) del concurso "Melate", en el que se debe acertar a seis números de un total de 42. ¿Cuál es la probabilidad de que gane?

Esta pregunta se planteó en C-E; el estudiante intentó contestarla aplicando la fórmula para las permutaciones, pero la citó incorrectamente. Al inicio de la entrevista se revisaron las fórmulas de combinatoria y posteriormente el estudiante reconoció que no entendía la de permutaciones, que simplemente intentó aplicarla porque se había acordado de ella:

I: *En el cuestionario pusiste permutaciones n de r, las permutaciones de seis de cuarenta y dos, no recuerdo ahora cómo lo hiciste, pero hiciste algo como esto* [señala la fórmula de permutaciones].

E: *Sí, es que nos dio dos fórmulas, una para combinaciones y otra para permutaciones*.

I: ¿*Cuando lo hiciste te acordaste de la fórmula?*

E: *Sí, porque ya las había estudiado.*

I: *Por eso las recordaste.*

E: *Sí, pero en sí, en sí …. Ahorita ya comprendí la fórmula, porque es ene factorial* [n!], *o sea, se podría decir...*

I: *Antes no la entendías; ya… digamos que le das más sentido a la fórmula.*

E: *Sí, exacto. O sea, porque dice … para combinaciones es ésta y para permutaciones es ésta* [señala a las expresiones respectivas].

I: *Pero sólo ves ahí expresiones.*

E: ¡*Ajá! Entonces en el examen veía... esto. ¡Ah!, pues es permutación, ¡ah!, pues no importa, aplico esta fórmula, pero en sí, en sí … o sea, antes no sabía qué era, por ejemplo, esto de factorial, o las fórmulas de física que te dicen: para calcular esto es esto. Entonces te preguntan esto, pues lógicamente nada más haz la fórmula o despejas y ya tienes la otra.*

I: *Que le des sentido a qué significa ese símbolo.*

E: ¡*Que tú te lo imagines!, pues es una masa acelerándose, pues qué la acelera o algo así ... es lo que a mí me gusta, aunque me tarde más.*

I: *Sí, eso está muy bien. Entonces, por lo menos le encuentras un poco más de sentido a esto.*

E: *Sí, a lo de aquí arriba sí, lo de ene factorial* [n!] *y aquí ya más o menos me acuerdo de lo de…*

I: *Recuerdas más o menos bien, pero no es ésta exactamente la expresión, es erre factorial* [r!] *por erre menos ene factorial* [(r − n)!], *divides el total de cuarenta y dos factorial* [42!] *sobre la separación de seis factorial* [6!] *menos el resto, aquí serían cuarenta y dos factorial* [42!] *sobre seis factorial* [6!] *por treinta y seis factorial* [36!] *y te da* [este último producto] *un número grande a pesar de las cantidades; de hecho, la cantidad* [resultante del cociente] *es muy pequeña: ¡uno de cinco millones y medio! ¡La probabilidad de que con un boleto ganes es muy pequeña! Entonces durante el cuestionario te acordaste de la fórmula, pero no le dabas sentido.*

I: *Sí, es lo que a muchos nos pasa, ¡a muchos!*

La segunda pregunta de la entrevista implicó a la idea de independencia, de la que no se preguntó explícitamente en C-E. El reactivo respectivo se ilustra en la Figura 6.21, junto con el planteamiento de la situación por parte del estudiante.

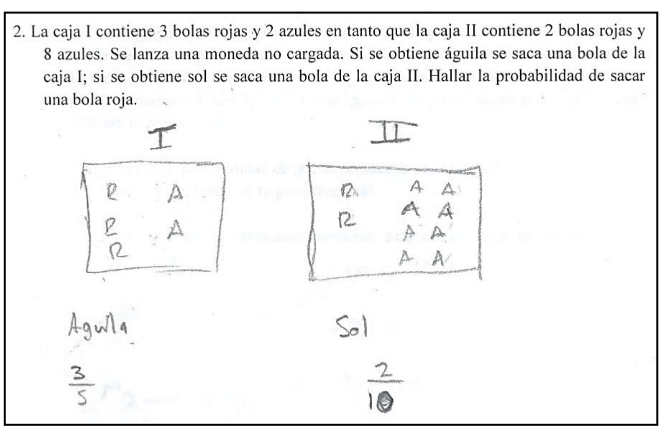


Figura 6.21. Pregunta de la entrevista que implica la idea de independencia y la expresión figural dada por el estudiante al problema.

Al solucionar el problema, al inicio el estudiante dijo que lo primero que necesitaba era imaginar las cajas y trazó los dibujos que vemos en la Figura 6.21, después manifestó no saber si tenía que multiplicar o sumar las probabilidades de los eventos independientes.

E: *... Es que no me acuerdo si aquí se suman las probabilidades... o se multiplican, pero ... o sea, es lo mismo, me acuerdo que se hacía pero no sé porqué.*

I: *Te acuerdas que se hacía pero no sabes porqué se hace.*

E: *No, en esos momentos me acordaba más o menos qué se hacía, que era multiplicar o sumar, algo así, pero no porqué.*

I: *Entonces si te pregunto: ¿por qué multiplicabas o sumabas?*

E: ¡*Ah! ¿Qué se hace?, multiplicas, ¿por qué?... quién sabe, así.*

I: *Pero ¿cómo sabes que tienes que multiplicar?*

E: ¡*Ah! Porque explicó así en el pizarrón.*

I: *¿Y recuerdas eso?*

E: ¡*Ajá! Y luego, al hacer la comprobación sí salía, pero porqué se multiplica, no sé.*

I: *No sabes la razón de porqué se multiplicaba*.

Esta confusión entre sumar o multiplicar para calcular la probabilidad de dos eventos independientes fue manifiesta en los resultados de C-I. En los estudiantes predominó un razonamiento aditivo sobre un razonamiento multiplicativo. Después el estudiante trazó los diagramas de árbol que muestra la Figura 6.22 (primera imagen), en los que de manera intuitiva relacionó probabilidades entre los eventos independientes, como es utilizado el diagrama de árbol como modelo didáctico en la enseñanza de probabilidad condicional, aunque este grupo de estudiantes no había recibido esa enseñanza. Con los diagramas que trazó el estudiante la entrevista continuó:

I: *¿Cómo llamamos a esta relación (señalando los eventos independientes en el diagrama de árbol) en probabilidad? ¿Cómo llamamos a la situación de cuando un resultado no afecta al otro?*

E: *Este... que eran independientes.*

I: *Independientes, pero los ¿qué?*

E: *Eventos.*

I: *¿Qué era el evento?*

E: ¡*He! el evento... este... es... no me acuerdo, jejeje.*

I: *¿No te acuerdas lo que es un evento?*

E: *Es que era evento y otro era fenómeno...*

I: *Fenómeno…*

E: *Creo que el conjunto de fenómenos hacían el número de eventos, no sé... así decía en las hojas.*

I: *¿Y cómo decía?...*

E: *Este … no me acuerdo; pero hay de muchos que yo nada más tomo uno.*

I: *¿Cómo se le llama a estos muchos y como se le llama a este uno?*

E: *Elementos.*

I: *¿Y a todos?*

E: *Conjunto.*

I: *¿Y en probabilidad como le llamábamos a esos elementos y a ese conjunto?*

E: *Este... es el fenómeno y los eventos.*

I: *El fenómeno origina todo esto.*

E: *¡Ah!*

I: *¿Y esto cómo se llama? Ya me dijiste hace un rato.*

E: *Éste es un evento.*

I: *Ése es un evento.*

E: *¡Ajá! y el conjunto de eventos... mmm... no me acuerdo.*

I: *Tiene una relación con un símbolo de física.*

E: *Espacio muestra... ¡ajá! el espacio muestra es el conjunto de eventos.*

I: *¿Pero de qué eventos?*

E: *Eventos de...*

I: *El espacio muestra es el conjunto de...*

E: *De eventos.*

I: *Estamos de acuerdo, ¿a cuántos eventos incluye?*

E: *A los realizados.*

I: *¿A los realizados?... a todos...*

E: *¡Ajá!, sí. Bueno, se supone que es... creo que si se divide es igual a uno, ¿no? Ése era un axioma.*

I: *¿Uno de los axiomas era qué?*

E: *Si yo saco todos de mi total, el cociente es uno.*

I: *¿Si sacas todos de tu total el cociente es uno? O sea, la suma de...*

E: *¡Ajá! Si son 25 y yo saco 25 de todos, de 25 de todos.*

I: *Sí, el espacio muestra es el conjunto total de eventos posibles de un fenómeno aleatorio...entonces, esto quedamos ¿que era un …?*

E: *Un evento.*

I: *¿Éste es ….?*

E: *Otro evento.*

I: *¿Entonces, cómo calculábamos la probabilidad de eventos independientes?*

E: *Si son independientes no importa si los sumo o los multiplico.*

I: *¿No importa?*

E: *Porque uno no afecta al otro.*

I: *¿Uno no afecta al otro? Exacto, estamos de acuerdo. Y la probabilidad de que ocurran los dos, ¿cuál sería?... Porque aquí queremos que ocurran estos dos y sabemos el valor de sus probabilidades. ¿Cómo le hacemos?*

E: *Entonces...*

I: *Me diste dos opciones hace un rato, ¿cuáles eran?*

E: *Sumar o multiplicar.*

I: *¿Cuándo sumábamos y cuándo multiplicábamos?*

E: *Sumar no se puede porque son independientes... es como si quieres sumar equis cuadrada más equis, algo así ... Bueno, aquí yo me lo imagino, porque se supone que aquí tengo otro fenómeno, pero aquí* [se refiere a ………..] *ya van a ser diferentes y por lo tanto, aquí tendría águila y sol, aquí mis eventos serían rojo y azul, entonces no puedo sumar águilas con rojos.*

I: *Pero... estamos hablando de valores de probabilidad, no en sí de los objetos... pero tienes razón en que no se suman.*

E: *Entonces se multiplican, Pero es a lo que voy, se multiplican, o sea, ya me lo aprendí y ya sé resolver ejercicios como éste, pero … o sea, porque multiplicar es lo que no….*

I: *¿Y no recuerdas por qué se multiplica?*

E: *No.*

I: *La probabilidad de intersección de dos eventos independientes es igual al producto de sus probabilidades. Entonces ¿qué harías ahí?*

E: *Se multiplican* [el estudiante soluciona el problema].

En este episodio, el estudiante reflexionó sobre las características de los objetos a los que se referían los eventos independientes que estaba relacionando, dijo que no se podían sumar águilas (posible evento en el lanzamiento de un volado) con bolas rojas (posible evento al extraer al azar una bola de una caja), por lo tanto las probabilidades se multiplicaban; este razonamiento lo fundamentó en su experiencia del aprendizaje de álgebra al decir que era una situación similar al intentar sumar una equis con una equis cuadrada, que en este caso sólo se podrían multiplicar. Debido al tiempo limitado de la entrevista, ya no se le planteó una situación en la que los eventos independientes provinieran del mismo productor de aleatoriedades, que ambos fueran volados, dados o bolas de colores extraídas de una urna, por ejemplo.

Dado que el estudiante no asistió cuando se aplicó C-I, se le planteó en la entrevista una de las preguntas que ningún estudiante contestó correctamente (véase en la Figura 6.23). Cuando lo leyó, dijo que era un problema como el del *Melate*, identificó su naturaleza combinatoria y aplicó correctamente el principio fundamental del conteo para solucionarlo.

En sus respuestas el estudiante fue muy analítico de las situaciones, siempre dijo que primero trataba de entender el problema antes de intentar solucionarlo. En este proceso de comprensión utilizó el diagrama de árbol en tres de los cuatro problemas, y trazó un diagrama de Venn incompleto para el segundo problema (véanse las Figuras 6.22 y 6.23).

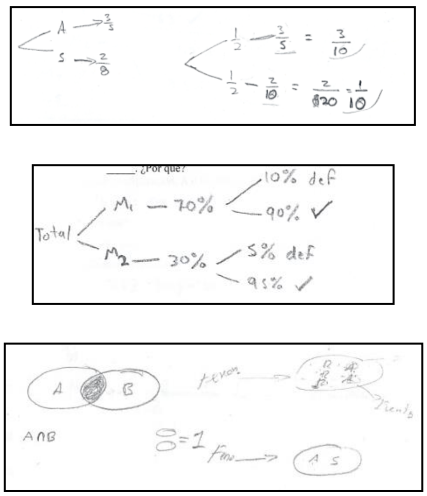
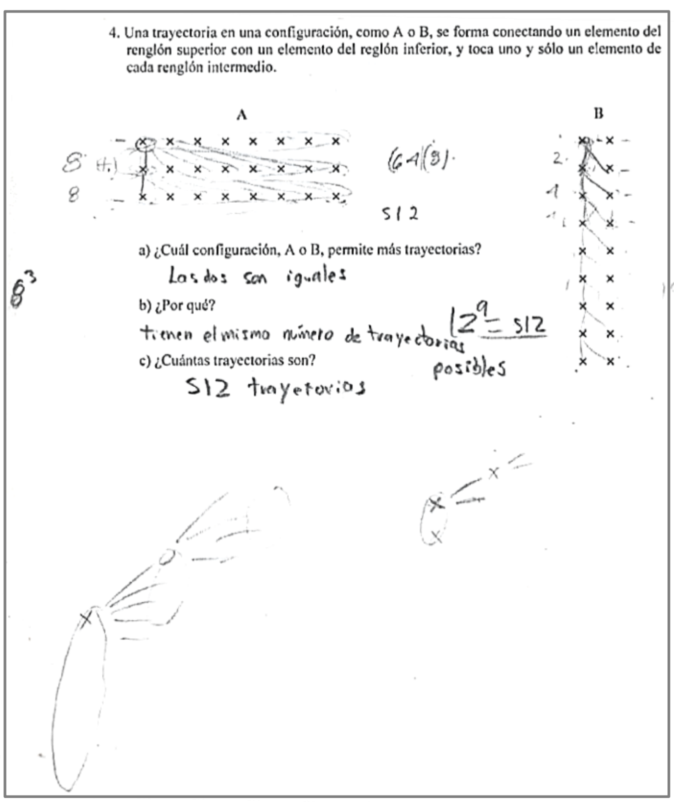


Figura 6.22. Diagramas utilizados por el estudiante durante la entrevista. En la primera imagen, diagrama de árbol utilizado en el problema dos; en la central, un diagrama de árbol que relaciona las probabilidades del problema tres; en la tercera imagen, diagramas de Venn incompletos para el espacio muestra del problema dos.



4. Una trayectoria en una configuración, como A o B, se forma conectando un elemento del renglón superior con un elemento del reglón inferior, y toca uno y sólo un elemento de cada renglón intermedio.

A B

a) ¿Cuál configuración, A o B, permite más trayectorias?

Los dos son iguales

b) ¿Por qué?

tienen el mismo número de trayectorias posibles $12^9 = 512$

c) ¿Cuántas trayectorias son?

512 trayectorias

Figura 6.23. Solución del estudiante a un reactivo de C-I que ningún estudiante de los tres semestres en que se aplicó contestó correctamente.

6.5. Resultado de la enseñanza

Los resultados obtenidos de C-E respecto a C-I indican un aumento del número de reactivos sin respuesta y el porcentaje de respuestas correctas disminuyó (véase la Tabla 6.8).

Tabla 6.8. Porcentajes de los tipos de respuestas dadas por los estudiantes a C-I y a C-E.

Tipo de respuesta	**C-I**	**C-E**
Correcta	31%	19%
Incorrecta	61%	42%
Omitida	8%	39%

El distinto enfoque en los reactivos de los dos cuestionarios, predominantemente intuitivo en C-I y más formal en C-E, planteó una diferencia en la dificultad, además de la del número de reactivos en uno y otro, lo cual provocó mayor porcentaje de omisión de respuesta para C-E.

Para los reactivos referidos a medida de probabilidad en C-I predominaron las respuestas intuitivas (Fischbein, 1975) y la probabilidad fue expresada como porcentaje; en C-E, 12% de los estudiantes se mantuvieron anclados a su modelo intuitivo mezclándolo con la expresión fraccionaria; esto también se manifestó para los reactivos referidos a espacio muestra, al que los estudiantes atribuyeron el 100%. Después de la enseñanza, los estudiantes usaron preferentemente el diagrama de árbol para determinar el espacio muestra, nueve de los diez que desarrollaron la actividad lo utilizaron durante la sesión extra-aula. En C-E, cinco estudiantes (10%) se percataron de la independencia entre los dos eventos en el reactivo 6, en comparación con tan sólo uno (3%) de los que contestaron C-I; cuatro estudiantes (8%) en C-E y uno (3%) en C-I exhibieron un razonamiento aditivo al calcular la probabilidad resultante, sólo el 2% en C-E (el estudiante E_1, uno de los líderes conceptuales) calculó correctamente la probabilidad resultante aplicando la regla del producto.

De los resultados obtenidos en C-E respecto a los de C-I, se observa que después de la enseñanza no hubo un progreso en el dominio de las ideas fundamentales de probabilidad enseñadas, sólo en el caso de los dos líderes conceptuales hay un dominio de la mayoría de las ideas fundamentales enseñadas, en el resto de los estudiantes se observó que contestaban correctamente para una o dos y en las restantes se equivocaron.

Capítulo 7
Conclusiones

De los resultados obtenidos con la aplicación de los cuestionarios, la realización de las entrevistas y la enseñanza dentro del aula, en general se observó que los estudiantes no mostraron tener el dominio de los conceptos de probabilidad, sino que evidenciaron sesgos señalados por otros investigadores como difíciles de erradicar y la persistencia en un pensamiento determinista.

7.1. La enseñanza de probabilidad y estadística en el bachillerato tecnológico

En el bachillerato tecnológico, la desvinculación entre las unidades de aprendizaje de matemáticas, implícita incluso en los tiempos asignados a cada RAP particular prescrito en los programas de estudio, no permite la integración de temas entre módulos, lo cual impacta en la enseñanza de estocásticos, que está relegada al semestre final, a más de dos años y medio de su antecedente más próximo en la secundaria. En un semestre se pretende enseñar los temas de estadística descriptiva, probabilidad y distribución de probabilidades, tiempo que en la práctica resulta insuficiente, porque los conocimientos previos de los estudiantes necesarios para el estudio de los temas son deficientes, si no es que ya los han olvidado, y se requiere un periodo más largo que el propuesto, para actualizarlos y enseñar los correspondientes mediante estrategias que consideren ese estado inicial de conocimiento.

Si bien el programa de estudios del CECyT inicia con Estadística Descriptiva, no incluye explícitamente al enfoque frecuencial de la probabilidad, sino que se limita al enfoque clásico acompañado de los axiomas de la probabilidad. Conforme a los resultados de las investigaciones de Fischbein (1975) de que los estudiantes interpretan intuitivamente a la frecuencia relativa como una medida de probabilidad, la enseñanza de probabilidad podría introducirse a partir del tratamiento de datos en Estadística, calculando la frecuencia relativa para distintos tamaños de muestras, examinando su comportamiento según crece el tamaño para de ahí desarrollar la idea de medida de probabilidad. Posteriormente, con el análisis apropiado se puede derivar el enfoque clásico y arribar a las ideas de espacio muestra y adición de probabilidades para presentar los axiomas de la probabilidad y dar paso a la idea de la regla del producto e independencia.

Este recorrido desde las ideas intuitivas hasta los conceptos formales sería posible si se iniciara la enseñanza de la probabilidad desde un enfoque frecuencial. Las limitaciones de la propuesta de enseñanza del CECyT radica en que se basa en esos aspectos señalados por Steinbring (1991): presenta desde un inicio a los estudiantes los conceptos limpios e indiscutibles con los que se opera formal y metódicamente sin ninguna referencia experiencial.

El libro de texto (Buendía y Gutiérrez, 2011) propuesto por el docente del curso se adecua a lo establecido por el programa de estudios (DEMS, 2009). Su contenido temático está organizado según la secuencia temática del plan de estudios y no se refiere al enfoque frecuencial de la probabilidad. La única diferencia de contenido entre programa de estudio y libro de texto estriba en que este último presenta una unidad introductoria al tema de estadística inferencial, la cual no está prescrita en el plan de estudios

7.2. Ideas fundamentales de estocásticos de estudiantes del bachillerato tecnológico

Los resultados obtenidos de la aplicación del cuestionario C-I (véanse las secciones 5.3 y 6.1), tanto al grupo del sexto semestre previamente a la impartición de la enseñanza como a los grupos de segundo y cuarto semestres (véase la Figura 3.1), señalaron la amplia tendencia de los estudiantes a expresar probabilidades desde un enfoque frecuencial, porcentualmente; la expresión de la probabilidad en forma de fracción, a la cual se refirieron en lengua escrita como “*x* de *y*”, fue poco frecuente. Este resultado concuerda con el de Fischbein (1975) de que la intuición de frecuencia favorece al pensamiento probabilístico.

Los estudiantes no lograron identificar el espacio muestra de un fenómeno aleatorio compuesto, atribuyéndole el del fenómeno aleatorio simple relacionado. Confundieron la cantidad de posibilidades de éxitos con la medida de probabilidad del evento. En general, no se obtuvieron evidencias de que los estudiantes hubieran identificado las ideas de equiprobabilidad ni de independencia.

En su contestación al cuestionario de enseñanza (C-E; véanse la sección 6.3 y la

Figura 3.1), los estudiantes de sexto semestre utilizaron el diagrama de árbol para indicar el espacio muestra, pero sin avanzar a la expresión matemática. Sobresalió que los estudiantes utilizaran el símbolo % en numerador y denominador de cocientes de probabilidad (véase la Figura 6.6).

En los reactivos del cuestionario C-GA (de Combinatoria y Geometría Analítica; véanse el apartado 5.1.1 y la Figura 3.1), los estudiantes de tercer semestre mostraron una subvaloración del número de arreglos y de combinaciones solicitados, en acuerdo con lo que indica Fischbein (1975) que ocurre en ausencia de una enseñanza de técnicas de conteo. No obstante, sorprende la ausencia del principio multiplicativo elemental, supuestamente enseñado en la secundaria (DGDC, 2006).

Durante el desarrollo de la actividad *Apuestas con dados* (véase en el apartado 5.4.1), inicialmente los estudiantes de primer semestre no se acordaron en qué consistía, ni cómo expresar una medida de probabilidad; al recordarlo y esbozar su relación con los elementos del fenómeno aleatorio, dos de ellos confundieron las posibilidades totales con las posibilidades de éxito. Se hizo evidente el predominio de un razonamiento aditivo sobre uno multiplicativo, que es de segundo orden, cuando dos estudiantes lo dejaron de manifiesto al intentar calcular la cardinalidad del espacio muestra (véase en pp. 89 y 90 del cap. 5). Fue recurrente el uso indistinto de los términos probabilidad y posibilidad. Después de los más de seis meses que habían transcurrido desde la última vez que recibieron la enseñanza de probabilidad en la secundaria, los estudiantes habían olvidado en qué consistía, y dos estudiantes precisaron que había pasado más de un año y medio desde entonces. En algunos casos se manifestaron ideas deterministas respecto a los resultados obtenidos de los lanzamientos de los dados; hubo referencias a la influencia en la manera y el tiempo de agitar los dados dentro del vaso antes de lanzarlos, se argumentó la tendencia de secuencias lógicas en los resultados del dado y comentarios como que los dados estaban "endemoniados". Los estudiantes que participaron en esta actividad no mostraron intuiciones favorables a la ley de los grandes números; para estimar la frecuencia relativa de los posibles resultados en una gran cantidad de repeticiones del fenómeno aleatorio no tomaron en cuenta las probabilidades a priori, aunque consideraron las frecuencias relativas obtenidas en un experimento previo, las cuales no extrapolaron a un conjunto mayor de datos. Un factor a tomar en cuenta en la parte final de la actividad, en la que se realizaron estas preguntas, fue el cansancio que pudo influir en las respuestas dadas; quizá en otras condiciones hubieran proporcionado respuestas más estructuradas.

El desarrollo de la actividad *Cálculo de probabilidades de ensayos de Bernoulli con el triángulo de Pascal* (véanse el apartado 5.4.2 y la Figura 3.1) exhibió la utilidad del triángulo de Pascal para el cálculo de los coeficientes binomiales, lo cual lograron fácilmente los estudiantes de segundo semestre. Al inicio de la actividad los jóvenes tendieron a proponer probabilidades con un enfoque frecuencial, al expresar la medida de 66.66%, o a seis es el 100%; incluso otro dijo que la probabilidad de obtener águila o sol al lanzar una moneda era de 50 - 50; explicó su respuesta así: “de un 100%, 50 es la mitad y el otro 50 es la otra mitad, porque son dos caras y se divide el 100% entre las dos”. El diagrama de árbol resultó ser muy útil para que los estudiantes identificaran el espacio muestra.

Los estudiantes de segundo semestre, del grupo 2IV13 (véase la sección 5.4.2), calcularon la probabilidad de obtener siete águilas en nueve volados, lo hicieron correctamente con el uso del triángulo de Pascal. Partiendo de este resultado se pidió a los estudiantes que pronosticaran en 1000 volados cuántas veces se obtendrían siete águilas. Con el uso de un quincunx virtual se simuló el fenómeno, pero los estudiantes no dotaron de sentido a los cálculos realizados previamente, pues no lograron predecir los resultados en las 1000 repeticiones, sino que requirieron ver el comportamiento de la frecuencia de los resultados del fenómeno, en las 500 repeticiones, para emitir un pronóstico.

7.3. La influencia de la enseñanza de las otras unidades de aprendizaje de matemáticas en el razonamiento probabilístico

Con la aplicación del cuestionario C-GA (véanse el apartado 5.1.1 y la Figura 3.1) se exploraron problemas de combinatoria en un contexto geométrico. Con los resultados obtenidos corroboramos lo señalado por Acuña (2006) respecto a las gráficas, rectas y puntos, pues en las respuestas proporcionadas se manifestó la incomprensión de los estudiantes de los contenidos implicados en las competencias disciplinares indicadas en el programa de estudios de Geometría Analítica (DEMS, 2009, p. 5), exhibida mediante problemas combinatorios y probabilísticos.

De la entrevista realizada con base en las respuestas al cuestionario C-GA, a la petición de distribuir puntos en el plano para calcular el número de rectas que se podían trazar a través de dos de ellos, el estudiante mostraba una preferencia por acomodos simétricos que por un acomodo al azar, argumentando que para él era más fácil trazar y contar las rectas en un acomodo que daba por resultado una figura geométrica regular. Este resultado es concordante con los datos obtenidos previamente por otros investigadores (de León, 2002), de que ante una situación al azar prevalece la idea de equiprobabilidad debido al predominio de la idea de simetría física. Nos preguntamos qué respuestas se habrían obtenido aplicando el instrumento a estudiantes que cursaran la unidad de aprendizaje de Probabilidad y Estadística, del sexto semestre.

Los resultados obtenidos de la aplicación del cuestionario CP-A (véanse la sección 5.2 y la Figura 3.1) de álgebra y probabilidad, mostraron las dificultades de los estudiantes para identificar las partes y las relaciones analíticas para el volumen de un cilindro. El hecho de que un estudiante, identificado como el mejor del grupo, tuviera dificultades para plantear una situación posible de reparto de ganancias y pérdidas entre dos jugadores después de realizar cierto número de apuestas, muestra cómo influye la enseñanza determinista en otras áreas de las matemáticas en la comprensión probabilística de los estudiantes. El estudiante solucionó el problema mediante el planteamiento de una ecuación algebraica propuesta por él mismo, de igual manera en que calcularía la esperanza matemática y arribara a una respuesta imposible en la realidad: su contestación de que cada uno de los jugadores ganaba una cantidad fraccionaria de apuestas, imposible en la realidad, al pedirle que reconsiderara su respuesta afirmó que estaba en lo correcto, incluso en tres ocasiones; posteriormente, durante la entrevista corrigió su respuesta.

7.4. Respecto al objetivo general

El contenido temático estipulado en el programa de estudios (DEMS, 2009) para la enseñanza de probabilidad en el bachillerato tecnológico contiene nueve de las diez ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975), (véase Tabla 4.1) distribuidas en las tres unidades didácticas. De la experienciación y de los instrumentos aplicados, ambos antes de la enseñanza, obtuvimos como resultados el desconocimiento general de los estudiantes hacía los conceptos de probabilidad y la abundancia de sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes. Estas son con las condiciones reales con las que los estudiantes arriban a la enseñanza de probabilidad y que no son consideradas. También debemos de considerar que la enseñanza de probabilidad se programa hasta el sexto semestre, después de que los estudiantes han pasado cinco semestres recibiendo la enseñanza determinista de las demás ramas de las matemáticas y ya han pasado por lo menos más de dos años y medio de su último antecedente de enseñanza, por lo que muchos estudiantes han olvidado los conceptos básicos de la probabilidad y predomina su razonamiento determinista.

Durante la enseñanza se presentan a los estudiantes los conceptos probabilísticos en forma reducida (Steinbring, 1991) y casi dogmática, en el sentido de que surgen esporádicamente como leyes inapelables durante el desarrollo del curso de enseñanza, los cuales posteriormente se dedican a ejercitar mediante la resolución de problemas. En este modelo se coarta el recorrido de lo empírico a lo formal y, como consecuencia, al final del curso los estudiantes tienen un cúmulo de conceptos que la mayoría no comprende y algunos los asocian a los objetos productores de aleatoriedad. Por otra parte el tiempo para la enseñanza resulta ser insuficiente, ya que en ocasiones el Profesor de matemáticas debe invertir tiempo en repasar o corregir algunos conceptos básicos que se supone ya conocen los estudiantes.

Considerando todo lo anterior proponemos la enseñanza de las ideas fundamentales de estocásticos conforme la formula Heitele (1975), a partir de las ideas intuitivas de los estudiantes y siguiendo un modelo curricular en espiral para arribar a las ideas formales. Esto precisaría de la enseñanza de probabilidad desde los semestres iniciales en el bachillerato tecnológico, en los que se podrían realizar actividades que implicaran el desarrollo de experimentos aleatorios para recolectar datos, organizarlos y calcular frecuencias relativas, para las cuales Fiscbein (1975) demostró que los estudiantes las comprenden intuitivamente como probabilidades. Con el transcurso del tiempo los experimentos aleatorios se pueden ir acompañando de preguntas y problemas que paulatinamente exijan a los estudiantes la formalización de sus ideas.

Para que se realizara lo propuesto, el programa de estudios del bachillerato tecnológico debería plantear un enfoque educativo integral de las matemáticas. En la práctica de la enseñanza, no parece haber vinculación entre los contenidos de las unidades de aprendizaje de matemáticas, aunque es lógica la secuencia en que están dispuestas en los primeros cinco semestres, que parte del Álgebra y la Geometría y culmina en Cálculo y hasta el sexto semestre la unidad de Probabilidad y Estadística parece sólo estar agregada. Nuestra propuesta del tratamiento integral de la enseñanza de las matemáticas sería viable si se aprovechara la posibilidad de vincular problemas propios de las primeras cinco unidades de aprendizaje de matemáticas con problemas probabilísticos. Aún más, el enfoque de enseñanza por competencias hace énfasis en la solución de problemas en el ámbito académico, social y global (DEMS, 2009), por lo que podrían aprovecharse las 18 horas de aprendizaje en otros ambientes (extra-aula) para desarrollar actividades de enseñanza vinculantes entre probabilidad y los otros temas de matemáticas. Otro cambio que requeriría la propuesta sería poner más énfasis en combinatoria y la inclusión de la enseñanza de probabilidad desde un enfoque frecuencial, que permitiría iniciar con las ideas intuitivas de estocásticos de los estudiantes hasta introducir las ideas formales de probabilidad y de estadística.

Apéndice A

Cuestionario de Combinatoria y Geometría Analítica (**C-GA**)

CUESTIONARIO DE COMBINATORIA

Nombre: ____

Fecha: ____________________ Grupo:________________________________

I. Lee atentamente cada una de las preguntas y contesta lo que se te pide.

1. Dado que dos puntos determinan una recta,
   a) ¿cuántas rectas se pueden trazar en un plano donde hay seis puntos (**A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**) y nunca hay tres de ellos alineados?
   b) Si se selecciona una de esas rectas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que pase por el punto **C**?
   c) ¿La probabilidad de que pase por el punto **C** es la misma que la de que pase por el punto **E**?
   d) ¿Cómo se ubicarían los puntos en el plano para que sea más probable que una recta que tomemos al azar pase por alguno de los seis puntos?

2. Los puntos **A**, **B** y **C** son colineales y están incluidos en la recta **R.** Los tres puntos se pueden mover a lo largo de la recta (como en la figura, en la que cambiamos de lugar los puntos **A** y **B**, pero también podemos mover el punto **C**).

   a) ¿De cuántas maneras distintas se pueden ordenar los tres puntos en la recta?
   b) Si los tres puntos se acomodan al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el punto **C** quede entre los puntos **A** y **B**?

3. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar los cuatro puntos **E**, **F, G** y **H** alrededor de un cuadrado, si sólo puede haber uno por cada lado del cuadrado?

4. Si en el plano cartesiano hay 13 puntos en el primer cuadrante y 7 en el segundo cuadrante:

a) ¿De cuántas maneras se puede formar un conjunto de 2 puntos del primer cuadrante y 3 puntos del segundo cuadrante?
b) Si no importa la ubicación de los puntos en los cuadrantes, ¿de cuántas maneras se puede formar el conjunto de 5 puntos?
c) Si los 5 puntos del conjunto deben ubicarse en el mismo cuadrante, ¿cuántas maneras de integrar el conjunto hay?

Apéndice B

Cuestionario de Probabilidad y Álgebra (**CP-A**)

Nombre: ____
Fecha: ____________________ Grupo: ______________________

Contesta a cada inciso y justifica cada una de tus respuestas.

2. El volumen de un cilindro con altura h y base con radio r es:

$$V = \pi r^2 h$$

La fabricación de contenedores cilíndricos se realiza cortando láminas de metal en forma rectangular y circular con los tamaños apropiados para soldarlas y formar el cilindro. Durante una jornada de trabajo se tuvieron problemas técnicos con las máquinas de corte, por lo que las piezas fueron mal cortadas y quedaron con las siguientes medidas y en las proporciones indicadas en las tablas. La cantidad de círculos y rectángulos cortados es la misma:

Perímetro de los círculos (m)	Porcentaje del total de piezas cortadas
1.77	25%
1.80	30%
1.82	27%
1.85	18%

Lado A del rectángulo (m)	Lado B del rectángulo (m)	Porcentaje del total de piezas cortadas
1.80	1.70	45%
1.75	1.71	24%
1.87	1.77	31%

Nota: $P = 2\pi r$, donde P denota al perímetro y r al radio.

e. Del total de las piezas cortadas, ¿qué porcentaje podrá ser soldado para formar un cilindro?

f. ¿Qué volumen tiene la mayoría de los contenedores armados?

g. Si para control de calidad se selecciona al azar uno de los contenedores armados, ¿cuál es la probabilidad de que se inspeccione uno de los que tienen mayor volumen?
h. ¿Qué porcentaje de piezas es de sobrantes?

2. La generación de segundo semestre de bachillerato organiza la rifa de una Tablet. Se entrega la cantidad de x boletos a cada uno de los 250 estudiantes para que todos los boletos se vendan.
   l. Si María decide quedarse con la mitad de los boletos que debe vender, ¿cuál es la probabilidad de que gane la tablet?
   m. ¿Con cuántos boletos tendría una probabilidad de 1.5 de ganar?
   n. ¿Con cuántos boletos tendría una probabilidad de – 0.5 de ganar?
   o. Si la tablet costó $7,500.00 y el precio de cada boleto fue de $50.00, ¿cuántos boletos debe vender cada estudiante para que la ganancia sea de $80,000.00?
   p. En este caso, ¿cuántos boletos debe poseer María para que la probabilidad de que gane la tablet sea del 0.1?
   q. ¿Cuánto dinero debe gastar para conseguir los boletos que necesita?
   r. ¿Le conviene invertir en esa cantidad de boletos? _____ ¿Por qué?
   s. ¿Cuántos estudiantes tendría que haber en la generación para que ella, al quedarse con la mitad de sus boletos, tuviera una probabilidad de 0.01 de ganar?
   t. Si fuera el caso, ¿cuál sería su probabilidad de perder?
   u. ¿Cuánto vale la suma de la probabilidad de ganar y la probabilidad de perder?

   ¿Por qué? ____
   k. ¿Cuántos boletos debe poseer María para que sea imposible que gane la tablet?

3. *A* y *B* empiezan a jugar con $80 cada uno.
   g. ¿Cuánto ha perdido *A* si *B* tiene ahora el triple de lo que tiene *A*?
   h. El juego consiste en lanzar un dado ordinario: *A* gana si salen los números tres o cinco y *B* si sale alguno de los restantes. Se ha lanzado seis veces el dado y cada vez la apuesta fue la misma. ¿Cuántas veces ha ganado cada quien?
   i. ¿De cuánto fue la apuesta en cada lanzamiento?
   j. En el siguiente lanzamiento que se haga:

i. ¿cuál es la probabilidad de que gane A?

ii. ¿cuál es la probabilidad de que gane B?

iii. ¿Por qué?

k. ¿Es justo el juego?_______________ ¿Por qué? ________________________________

l. Si crees que no, ¿cómo debería ser la apuesta para que fuera justo?

Apéndice C

Cuestionario de Investigación (**C-I**)

IPN
CECyT No. 4
Lázaro Cárdenas del Río

CUESTIONARIO DE INVESTIGACIÓN

Probabilidad y Estadística

Cinvestav
Departamento de Matemática Educativa

Nombre: ____

Fecha: ____________________ Grupo: ______________________

Contesta a cada inciso y justifica cada una de tus respuestas.

4. Se anuncia que la probabilidad de que llueva mañana es 70%. ¿Qué significa este pronóstico?

5. De los dos eventos siguientes, ¿cuál es más probable y por qué?

   a) Que caiga doble seis en dos lanzamientos de un dado común.
   b) Que caigan dos águilas en dos volados.

3. En una encuesta, a 500 estudiantes de bachillerato se les pidió que anotaran en una papeleta su deporte favorito y el semestre que cursaban:

Estudiantes	Deportes				Total
	Fútbol	Básquetbol	Natación	Otros	
1er Semestre	118	84	39	34	275
3er Semestre	54	39	18	16	127
5° Semestre	30	26	22	20	98
Total	202	149	79	70	500

Se depositan todas las papeletas en una urna, se mezclan y se saca una papeleta al azar. ¿Cuál es la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos?:

f) Es de 5° semestre. _____
g) El deporte es básquetbol. ______
h) Es de tercer semestre y tiene anotado fútbol. _____
i) Si ya se sabe que se anotó natación, que sea de primer semestre. ______
j) ¿Cuál deporte tiene mayor probabilidad de salir? _________ ¿Cuál es su probabilidad? _________

4. ¿Qué es más probable, que al lanzar dos dados al mismo tiempo caiga el mismo número en los dos o que la suma de los dos números sea siete? ______________________
¿Por qué?

5. Una trayectoria en una configuración, como A o B, se forma conectando un elemento del renglón superior con un elemento del reglón inferior, y toca uno y sólo un elemento de cada renglón intermedio.

A

× × × × × × × ×

× × × × × × × ×

× × × × × × × ×

B

× ×

× ×

× ×

× ×

× ×

× ×

× ×

× ×

× ×

a) ¿Cuál configuración, A o B, permite más trayectorias?

b) ¿Por qué?

c) ¿Cuántas trayectorias son?

6. Dos urnas α y β contienen bolas de igual tamaño, azules, rojas y verdes, en las cantidades indicadas en la tabla.

	Urna α	Urna β
Rojas	2	2
Verdes	3	2
Azules	4	3

Se selecciona al azar una urna y se extrae al azar una bola.

a) ¿De cuál urna es más probable extraer una bola azul?

b) Si se extrajo una bola roja, ¿de cuál urna es más probable que se haya extraído?

7. De la producción de motores de automóvil de una planta *X*, el 15% son defectuosos. Si cuesta $50,000 producir un motor y $30,000 adicionales reparar uno defectuoso,

a) ¿Cuál es el costo promedio de un motor producido por esa planta? __________

b) ¿Es bajo o es alto el costo de los motores defectuosos? _________ ¿Por qué?

c) ¿Comprarías un automóvil de esa marca? ____________ ¿Por qué?

8. Se desea formar un comité integrado por 3 personas: 1 directivo, 1 maestro y 1 alumno. Hay 2 candidatos de la dirección, 3 de los maestros y 4 de los alumnos. ¿Cuántos comités pueden formarse?

¿Por qué?

Apéndice D

Cuestionario de Enseñanza (**C-E**)

IPN
CECyT No. 4
Lázaro Cárdenas del Río

CUESTIONARIO DE ENSEÑANZA

Probabilidad y Estadística

Cinvestav
Departamento de Matemática Educativa

Nombre: ____

Fecha: ____________________ Grupo: ________________________________

Contesta a cada inciso y justifica cada una de tus respuestas.

1. ¿Cuál es la probabilidad de acertar por lo menos a uno de tres volados? Indica el espacio muestra.

2. Se sortea un premio entre un grupo de personas; 30% son infantes, 40% adultos y el resto adolescentes. De los adultos el 85% son varones y de los adolescentes el 60% son mujeres. De los infantes, la mitad son niñas. ¿Cuál es la probabilidad de que gane el sorteo:

   a. Una niña?
   b. Un adulto varón?
   c. Un varón adolescente?
   d. Un varón, si se sabe que fue adulto?
   e. Una niña o una mujer adulta?
   f. Una mujer?

3. En un gallinero había 75 gallinas de raza Leghorn y 40 de raza Rhode Island Red. Al dejar la puerta abierta se salieron tres. ¿Cuál es la probabilidad de que:

   g. La primera gallina en salir haya sido Leghorn?
   h. Las tres gallinas que salieron hayan sido Leghorn?
   i. La primera haya sido Leghorn y las otras dos Rhode Island Red?
   j. Las tres hayan sido Rhode Island Red?

4. Una persona compra un boleto sencillo (con 6 números) del concurso “Melate”, en el que se debe acertar a seis números de un total de 42. ¿Cuál es la probabilidad de que gane?

5. En una habitación se encuentran 210 personas, de las cuales la mitad son mayores de edad y la tercera parte del total son mujeres, mientras los varones menores de edad representan el 40% del total. Calcula las siguientes probabilidades justificando a partir de los axiomas de la probabilidad:

   k. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de esa habitación sea menor de edad?
   l. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de esa habitación sea mujer?
   m. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de esa habitación sea menor de edad o mayor de edad?
   n. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de esa habitación sea mayor de edad y varón?
   o. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de esa habitación sea mayor de edad y mujer?
   p. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de esa habitación sea menor de edad o varón?

6. Se lanzan 360 veces dos dados ordinarios.

   a) Especifica el espacio muestra implicado.
   b) Identifica el evento “la suma de los puntos en las caras superiores fuera a lo más 4”.
   c) ¿Cuántas veces esperarías que la suma de los puntos en las caras superiores fuera a lo más 4?

7. Las dos máquinas M_1 y M_2 de una fábrica de hélices producen el 70% y el 30% del total de hélices, respectivamente. El 10% de la producción de la máquina M_1 es defectuosa y el 5% de la producción de M_2 también es defectuosa. Un inspector toma al azar una muestra de tres hélices producidas ahí: si por lo menos una es defectuosa, se rechaza la producción.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que se rechace la producción?
   Justifica cada paso de tu procedimiento**.**

   b) ¿Le conviene al fabricante mantener esas condiciones de la maquinaria?
   _____. ¿Por qué?

Apéndice E

Hojas de control de las actividades extra-aula

IPN
CECyT No. 4
Lázaro Cárdenas del Río

Unidad de aprendizaje:
Probabilidad y Estadística

Sesión Extra-Aula

Frecuencias y probabilidad

Cinvestav
Departamento de Matemática Educativa

Nombre:____
Fecha: 30 de mayo de 2012. Grupo:________________________________

Sobre el contenido:

Las repeticiones de los fenómenos aleatorios nos informan acerca de sus posibles resultados. Las frecuencias relativas de los eventos de un fenómeno aleatorio que se repite muchas veces nos permiten estimar sus probabilidades.

Conocimientos previos

De manera individual, sigue las instrucciones y contesta las preguntas.

a) Si se lanzan tres volados y nos interesa el *número de águilas* que caen, ¿cuáles son los posibles resultados? ____.

b) Lanza tres monedas al aire 25 veces. Anota el *número de águilas* que obtuviste en cada lanzamiento de las tres monedas: usa **A** para "águila" y **S** para "sol".

1.	14.
2.	15.
3.	16.
4.	17.
5.	18.
6.	19.
7.	20.
8.	21.
9.	22.
10.	23.
11.	24.
12.	25.
13.	

c) Anota la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa de cada posible resultado en los 25 lanzamientos:

	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Tres águilas:		
Dos águilas:		
Un águila:		
Cero águilas:		

d) ¿Cuál fue el número de águilas más frecuente en los 25 volados con las tres monedas? __________________.

e) ¿Cuál fue el número de águilas menos frecuente? _______________________________.

f) En total, ¿cuántos volados realizaste? ____________________.

g) Anota la frecuencia absoluta de águila en el número total de volados que efectuaste: ____________.

h) Compara tus respuestas a los incisos c) y g). ¿Concuerdan? ______________________.

Situación de problema

¿De qué manera se puede predecir el comportamiento de los datos que se obtienen en repeticiones de un fenómeno aleatorio, como el del número de águilas al lanzar tres monedas?

Reúnete con dos compañeras o compañeros y contesten lo siguiente:

1. Compara tus datos anotados en el inciso c) con los de tus compañeros. ¿Se parecen a los de ellos o son muy diferentes? _______. ¿Por qué? _____________________________.

2. Durante las clases identificaste los ocho posibles resultados al lanzar tres volados. Completa la primera columna de la tabla siguiente con la fracción, o **probabilidad**, de posibilidades correspondiente a cada número posible de águilas en los tres volados.

	Probabilidad	Frecuencia relativa en ___ lanzamientos	Diferencia en ____ lanzamientos	Diferencia en 25 lanzamientos
Tres águilas:	1/8			
Dos águilas:				
Un águila:				
Cero águilas:				

3. Al reunir sus datos, el número total de lanzamientos de tres monedas que efectuaron tú y tus compañeros de equipo es _________. Anótalo en los encabezados de las columnas centrales de la tabla.

4. Suma las frecuencias absolutas de cada posible número de águilas que todos los integrantes del equipo obtuvieron.

5. Calcula la frecuencia relativa de cada posible número de águilas en el total de lanzamientos de las tres monedas y anótala en la tabla.

6. Calcula la diferencia entre la probabilidad de cada número posible de águilas en el lanzamiento de tres monedas y la frecuencia relativa respectiva en el total de lanzamientos y anótala en la tercera columna.

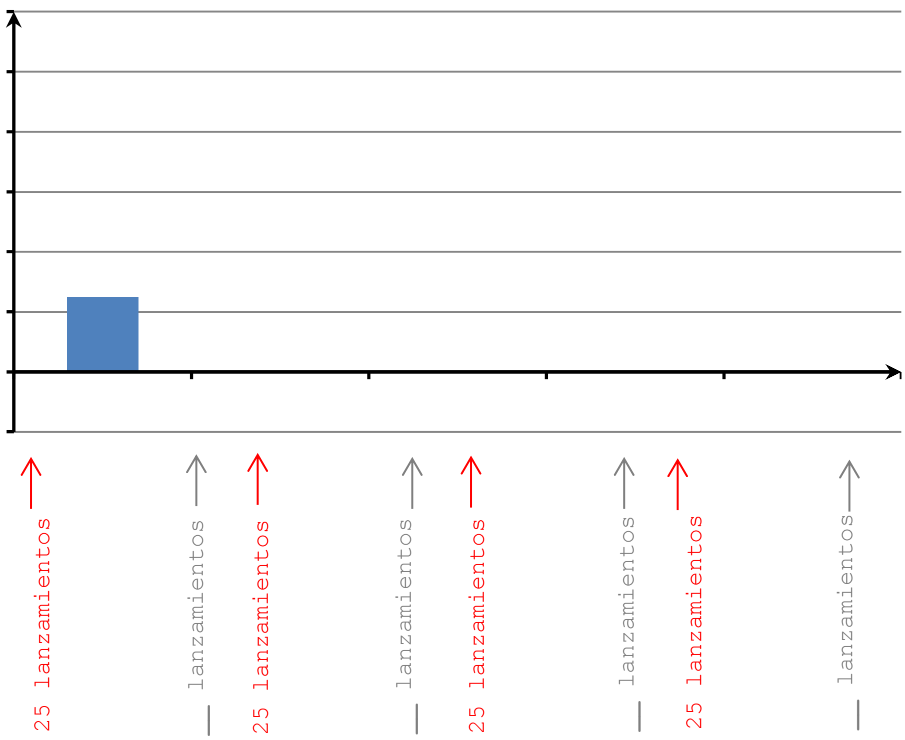
7. Anota en la cuarta columna la diferencia entre la probabilidad de cada número posible de águilas y la frecuencia relativa respectiva que anotaste en la tabla del inciso c).

8. Para cada número posible de águilas en el lanzamiento de tres monedas, compara las dos diferencias anotadas. ¿Para cuál número de lanzamientos la diferencia es mayor?

9. Discute con tus compañeros este resultado y resúmelo:

Para comprender

1. Completa la gráfica de barras siguiente de la distribución de probabilidad entre los números posibles de águilas en un lanzamiento de tres monedas. ¿La gráfica es simétrica? ______. ¿Por qué? _______. Anota los valores correspondientes en las escalas de los ejes y el nombre de cada eje.



2. En la gráfica, para cada número posible de águilas, a la izquierda de cada barra que trazaste en el inciso anterior, traza con color rojo otra barra correspondiente a la frecuencia relativa del número de águilas respectivo que obtuviste en 25 lanzamientos de tres monedas; y, a la derecha, traza con gris la barra que corresponda a la frecuencia relativa obtenida con la reunión de datos con tus compañeros de equipo.

Compara tu gráfica con la de un compañero o compañera.

3.¿Qué observas de las barras que trazaron respecto a las barras azules?
____
____
_________________.

A mayor número de repeticiones de un fenómeno aleatorio, la frecuencia relativa de sus posibles resultados se aproxima a la probabilidad de éstos.

4. Completa la expresión siguiente y calcula la media aritmética (o promedio) del *número de águilas* por lanzamiento de las tres monedas, es decir, suma los productos de cada

número posible de águilas por su frecuencia absoluta en los 25 lanzamientos de las tres monedas y divídela entre 25:

$$\frac{(3\times \_\_\_)+(2\times \_\_\_)+(1\times \_\_\_)+(0\times \_\_\_)}{25} = \left(3\times \frac{}{25}\right)+\left(2\times \frac{}{25}\right)+\left(1\times \frac{}{25}\right)+\left(0\times \frac{}{25}\right) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

Compara tu resultado con el de un compañero o compañera.

5. ¿Cuál es la media aritmética del número de soles en los 25 lanzamientos de las tres monedas? _____. ¿Éste es un posible valor al lanzar tres monedas al aire? ________________________________.

6. Completa la expresión siguiente y calcula la media aritmética del *número de águilas* por lanzamiento de las tres monedas, en el total de lanzamientos reunidos con tus compañeros de equipo en la sección anterior:

$$\frac{(3\times \_\_\_)+(2\times \_\_\_)+(1\times \_\_\_)+(0\times \_\_\_)}{\_\_\_} = \left(3\times -\right)+\left(2\times -\right)+\left(1\times -\right)+\left(0\times -\right) = \_\_\_\_\_\_\_\_.$$

   ¿Difiere tu respuesta de la que diste en el inciso 4? __________________________________.

7. Ahora calcula la **media** (o **valor esperado**) del *número de águilas* por lanzamiento de las tres monedas, utilizando en la expresión anterior la probabilidad de cada posible resultado en lugar de su frecuencia relativa:

$$\left(3\times \frac{1}{8}\right)+\left(2\times \frac{3}{8}\right)+\left(1\times \frac{3}{8}\right)+\left(0\times \frac{1}{8}\right) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

8. ¿Cuál de tus resultados en los incisos 4 y 6 se aproxima más al resultado del inciso 7?

A mayor número de repeticiones de un fenómeno aleatorio, la media aritmética (o promedio) de los valores obtenidos se aproxima a la media (o valor esperado).

Para integrar

Reúnete con dos compañeros o compañeras, sigue las instrucciones, discute cada pregunta y contéstala.

I. Se lanzan dos dados ordinarios.

1. Ya que del lanzamiento hay seis posibles resultados para un dado y seis para el otro, ¿cuántos posibles resultados hay en total? ______________________________. ¿Por qué? ____.
2. ¿Hay alguno de esos posibles resultados que sea más probable que los otros? ____. ¿Por qué? ____.
3. ¿Cuál es la probabilidad de cada uno de esos posibles resultados? ____.
4. Se suman los números de puntos que muestran las dos caras de los dados que quedan hacia arriba. ¿Cuáles son las sumas posibles?

____
____.

5. ¿Alguna de las sumas posibles es más fácil de obtener que las otras? ______. Si así es, ¿cuál suma es? ____.

6. Para cada suma posible, identifica todas las maneras de obtenerla al lanzar dos dados. Anótalas como parejas ordenadas, con la abscisa para uno de los dados y la ordenada para el otro, en la columna arriba de la suma respectiva, en la gráfica en la página siguiente.

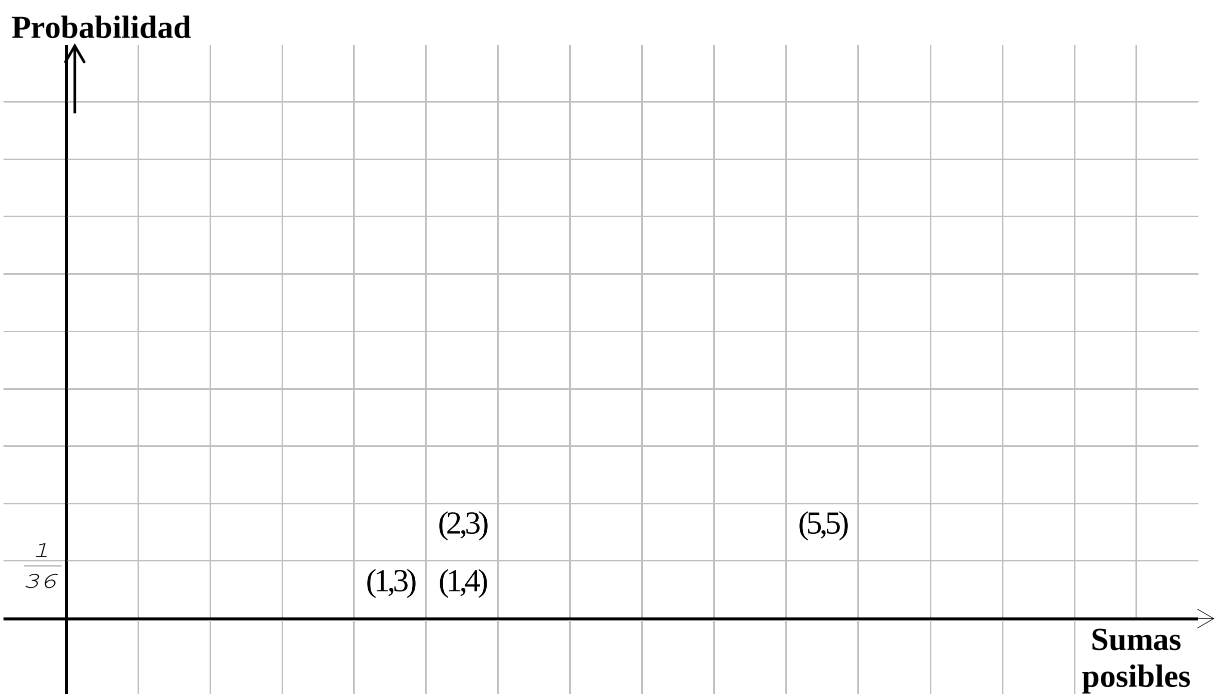
7. Completa con las probabilidades respectivas la escala del eje vertical.

8. ¿Es simétrica la distribución de las posibilidades de las sumas distintas? ______. Si es así, ¿cuál es el eje de simetría?____________________________________.

9. Completa toda la operación siguiente para calcular la **media** (o valor esperado) de la suma obtenida al lanzar dos dados:

$$\left(2 \times \frac{1}{36}\right) + \left(3 \times \frac{2}{36}\right) + \left(4 \times \frac{3}{36}\right) + \left(5 \times \frac{}{}\right) + \quad \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_.$$

10. En 90 lanzamientos de los dos dados, ¿cuántas veces esperarías obtener la suma 7? ________. ¿Por qué? ____________________________________.



11. Lanza dos dados 30 veces. Cada vez, anota en tu cuaderno la suma de los puntos de las caras hacia arriba. Obtén la frecuencia absoluta de cada suma. ¿Cuántas veces obtuviste la suma 7? _______. Compara con tu respuesta al inciso anterior.

12. Calcula la media aritmética de las sumas obtenidas en 30 lanzamientos de dos dados. ___________. Compara tu resultado con la media que obtuviste en el inciso 9.

Reúne tus datos con los datos de tus compañeros de equipo.

13. Ahora considera los 90 lanzamientos de los dos dados. Suma las frecuencias absolutas que obtuvieron para cada suma y anótalas en tu cuaderno. ¿Cuántas veces en total se obtuvo la suma 7?

    ______________. Compara con tu respuesta al inciso 10.

14. Calcula la frecuencia relativa de cada suma en 90 lanzamientos y anótala en tu cuaderno. Para cada suma posible, traza una barra de altura igual a su frecuencia relativa, en la gráfica de la distribución de probabilidades de las sumas al lanzar dos dados.

Discute con tus compañeros las características de la gráfica obtenida y compárala con la distribución de probabilidades.

15. Resume los resultados de esa comparación: _________________________________ ____.

Para aplicar

Individualmente, para la siguiente situación contesta las preguntas.

Una pareja sin hijos/as se ilusiona con llegar a tener cuatro. Al futuro padre le gustaría que fuesen dos niños y dos niñas, mientras que la madre preferiría mayoría de niñas. ¿Quién de los dos tiene mayor probabilidad de que se cumpla su deseo?
Para *simular* la situación, la pareja lanza cuatro monedas. Cada vez que caiga águila, supondrán que es una niña, y si cae sol, un niño.

1. En tu cuaderno, traza un diagrama de árbol para determinar el número de posibles resultados que se tienen al lanzar cuatro monedas. ¿Cuántos posibles resultados hay? _______________________.
2. Si nos interesamos en el *número de águilas* que pueden caer al lanzar cuatro monedas, ¿cuáles son los posibles valores? _______________________________________.
3. ¿Para cuál de esos posibles números de águilas hay más ramas en el diagrama que trazaste? ____.
4. Calcula la probabilidad de cada posible número de águilas al lanzar cuatro monedas. ____ ____
5. Calcula la **media** del número de águilas al lanzar cuatro monedas. ____ ____.
6. En 20 lanzamientos de las cuatro monedas, ¿cuántas veces esperarías que cayeran dos águilas y dos soles? ____.

Aplicar las TIC´s

Ingresa al sitio:
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/azar_monedas4.htm

1. Activa la simulación de 20 lanzamientos. Compara los resultados con tu respuesta a la pregunta 5.

2. Activa la opción "Ver probabilidades teóricas" y la simulación de 100 lanzamientos. Resume lo que observas: ____.

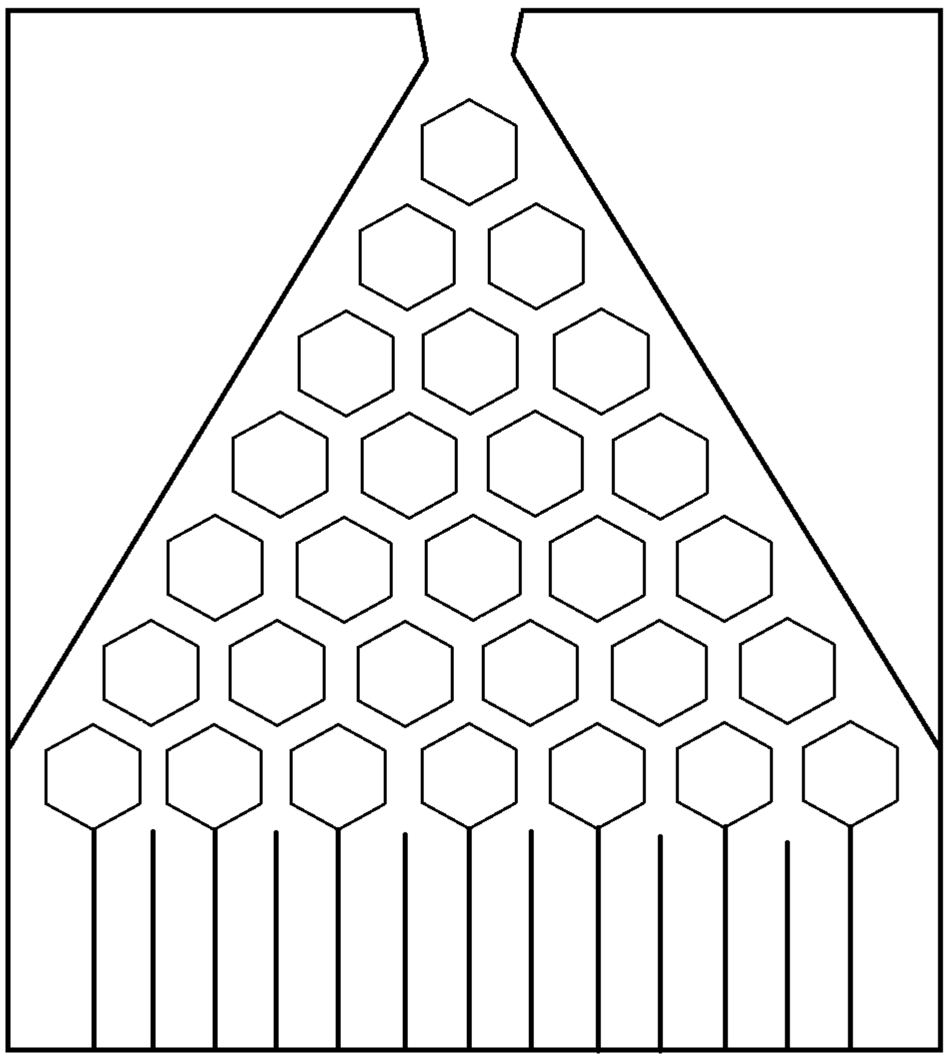
TALLER CINVESNIÑ@S 2011:
LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL CON EL TABLERO DE GALTON

Nombre: ____

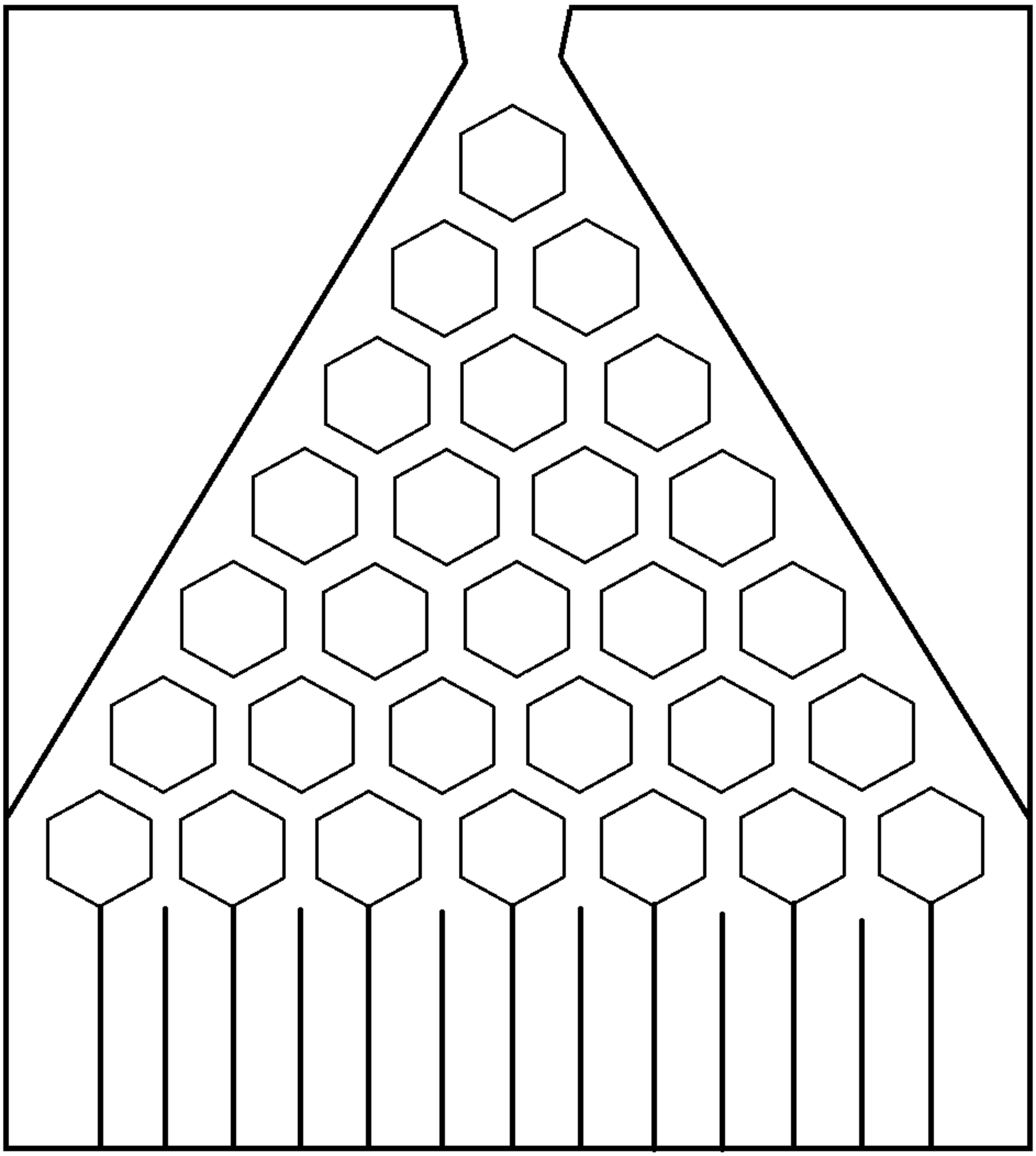
Grupo:______________________ Escuela: ____________________

Fecha: 7 de Octubre del 2011 Lugar: DME Cinvestav

Experimento 1. Indica cómo se distribuirán las 150 canicas en las casillas, al dejarlas caer por el embudo y dibuja la trayectoria de tres canicas.



Experimento 2. Indica cómo se distribuirán las 150 canicas en las casillas, al dejarlas caer por el embudo y dibuja la trayectoria de tres canicas. (En la segunda sesión se cambio la instrucción de dibujar la trayectoria de tres canicas por la de dibujar la trayectoria típica de una canica)



IPN
CECyT No. 4
Lázaro Cárdenas del Río

MODELOS TEORICOS

Uso del Triángulo de Pascal para el Cálculo de Probabilidades.

Cinvestav
Departamento de Matemática Educativa

Nombre: ____

Fecha: ____________________ Grupo: ________________________________

Contesta a cada inciso.

1. Calcula la probabilidad de lanzar tres volados y obtener dos águilas.

2. Dibuja el Triángulo de Pascal.

3. Con ayuda del Triángulo de Pascal calcula la probabilidad de obtener dos águilas en el lanzamiento de siete volados.

4. a) Calcula la probabilidad de obtener siete águilas al lanzar diez volados.

   b) Compara el resultado, de la probabilidad a priori, que calculaste anteriormente con la frecuencia relativa que se obtiene al lanzar 1000 veces diez volados.

   c) ¿Qué puedes decir acerca de estos dos posibles resultados?

Apéndice F

Artículos derivados de la investigación

IDEAS DE PROBABILIDAD EN LUGARES GEOMÉTRICOS SIMPLES: EXPLORACIÓN CON ESTUDIANTES DE BACHILLERATO TECNOLÓGICO

Jesús Salcedo Prado, Ana María Ojeda Salazar
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. (México)
jsalcedo@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx
Pensamiento relacionado con probabilidad, estadística; Nivel Medio.
Palabras clave: Combinatoria, Probabilidad, Geometría Analítica.
Key words: Combinatory, Probability, Analytical Geometry.

Resumen:
Durante un curso de Geometría Analítica se exploraron, mediante la aplicación de un cuestionario a 32 estudiantes de bachillerato tecnológico, ideas de combinatoria y de probabilidad planteadas en situaciones simples de lugar geométrico y se entrevistó a un estudiante por sus respuestas al instrumento. Los estudiantes desconocían técnicas de conteo y no emplearon de forma consistente algún recurso figurativo para determinar el número total de posibilidades; predominó en sus respuestas el enfoque clásico de la probabilidad sobre el frecuencial; confundieron segmento de recta y recta y prevaleció la idea de simetría al ubicar al azar puntos en el plano y trazar las rectas que ellos determinan.

Abstract:
During a course of Analytical Geometry a questionnaire was applied to a group of technological high school students, involving ideas of combinatorics and probability in situations of simple locus. One student was interviewed about his answers given to the questionnaire. The students were unaware of counting techniques; the appeal to frequency probability prevailed in their answers instead of the classical view. In addition, they did not distinguish between a straight line segment and a straight line, the idea of symmetry interfered to locate points at random in the plane and to draw the lines that those points determined.

1. Introducción. La reducción de la práctica de los estudiantes a la unidad de aprendizaje que estén cursando, sin interrelacionar las distintas unidades, ha sido uno de los motivos de la reforma del nivel medio superior. Este reporte recoge los primeros resultados obtenidos en una investigación cuyo objetivo es conocer el estado de conocimientos respecto a las ideas fundamentales de estocásticos que tienen los estudiantes de un Bachillerato tecnológico, mediante su identificación o no de esas ideas de entre las implicadas en los cursos de matemáticas a los que asisten. Por un lado, este informe es previo a la enseñanza de estocásticos en el bachillerato, que se ubica en el sexto semestre; y, por otro, toda la investigación la incluye y vincula las distintas unidades de aprendizaje. En lo que corresponde a este reporte, aplicamos un cuestionario a estudiantes de Geometría Analítica del tercer semestre, que planteó preguntas referidas a conteo y probabilidad mediante la presentación de situaciones sencillas de lugar geométrico; por sus respuestas, se seleccionó a un estudiante y se le entrevistó.

2. Referencias teóricas

La presente investigación está fundamentada en el planteamiento de investigadores en los campos epistemológico y cognitivo para la educación en probabilidad y en estadística.

2.1. Ideas Fundamentales de Estocásticos. Desde un punto de vista epistemológico y pragmático, en el sentido de Bruner, Heitele (1975) ha propuesto ideas fundamentales de estocásticos para la enseñanza de probabilidad y de estadística en todos los niveles siguiendo un curriculum en espiral. Considera las ideas fundamentales como:

…aquéllas que proporcionan al individuo modelos explicativos en cada etapa de su desarrollo, tan eficientes como sea posible y que se distingan en los distintos niveles cognoscitivos, no de manera estructural sino sólo en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración.

(Heitele, 1975, p. 188)

Su propuesta considera cuatro puntos de vista:

- El marco de la concepción de Bruner:
  - El principio decisivo de la instrucción en un tópico es la transmisión de ideas fundamentales.
  - Las ideas fundamentales son necesarias como una guía desde la educación preescolar hasta la universitaria para garantizar cierta continuidad.
  - Las ideas fundamentales y los conceptos se abordan en los distintos niveles cognoscitivos y lingüísticos a lo largo de un curriculum en espiral.
  - La transición a un nivel cognoscitivo más alto se facilita si durante las primeras etapas cognoscitivas se ha diseñado una presentación apropiada del tópico principal.
- Los resultados de la psicología del desarrollo con respecto a las ideas estocásticas.
- Las diversas fallas de los adultos en situaciones estocásticas.
- La historia de la probabilidad.

En esta perspectiva, el autor propone como ideas fundamentales: Medida de probabilidad, espacio muestra, adición de probabilidades, regla del producto e independencia, equiprobabilidad y simetría, combinatoria, variable estocástica, modelo de urnas y simulación, ley de los grandes números y muestra. Este listado es un modelo para construir un curriculum coherente en estocásticos, más que para resolver problemas. La utilidad de este modelo se muestra al aplicarse en la enseñanza a todos los niveles. Heitele propone integrar en la educación básica, lo más temprano posible, actividades de estocásticos a las de aritmética y geometría, para desarrollar conexiones significativas con la realidad y prevenir sesgos del pensamiento. Para ello, señala, es necesario que los profesores sepan lo que es realmente fundamental en estocásticos.

2.2. **Modelos intuitivos y enseñanza.** Desde un punto de vista cognitivo, Fischbein (1977) establece la hipótesis de que los modelos didácticos, específicamente los modelos intuitivos, deben tener una capacidad heurística, como sucede con los modelos científicos, porque los modelos, científicos o didácticos, deben constituir una componente viable para el pensamiento productivo. Esto lo plantea igualmente para los modelos pictóricos:

…un buen modelo es, necesariamente, generativo. Un modelo es genuinamente útil al pensamiento productivo si puede representar correctamente un número ilimitado de situaciones diferentes, usando un número limitado de elementos o reglas. El sistema de reglas que establece un modelo para expresar unívoca y estructuralmente al original, constituye la sintaxis del modelo.

(Fischbein, 1977, p. 155)

Heitele (1975) señaló también la pertinencia de los modelos pictóricos en la enseñanza básica de estocásticos. La importancia de las operaciones combinatorias es clara en el caso discreto, pues al asignar probabilidades es relevante la tendencia a subestimar la cardinalidad de los eventos (Fischbein, 1975). Con el uso de los diagramas de árbol, basado siempre en las mismas convenciones, se obtiene respuesta a las posibles preguntas referentes a combinatoria y pertenecientes a la misma clase, donde se pide la cantidad de arreglos posibles en la ordenación de objetos. El modelo es consistente internamente; expresa un principio, un método para construir los arreglos. El modelo es una herramienta intelectual: con él se resuelve el problema y no sólo se describe la solución. Con un modelo tal se aprende a pensar efectivamente y a comprender activamente. Los diagramas de Venn también constituyen una técnica consistente para expresar operaciones con conjuntos. Es una técnica visual generativa, que usa una lógica figurativa; la solución a las operaciones con conjuntos, qué representan, se puede obtener usando consistentemente el lenguaje figurativo.

En relación a las gráficas, la comprensión del *producto cartesiano* ha sido tema de varias investigaciones. Por ejemplo, Acuña (2006) indica que:

> Durante la construcción y tratamiento de las gráficas, los estudiantes no se percatan de sus propiedades no ostensivas, como la disposición homogénea de las unidades marcadas sobre los ejes, la prolongación infinita de las rectas o la posibilidad de reconstruir marcas sobre los ejes. (p. 233).

En el tratamiento de la gráfica como dibujo y no como figura interviene la interpretación visual o la construcción de una relación gestalt particular.

2.3. **Enfoques de la probabilidad.** Se han adoptado varios enfoques para clarificar la asignación de probabilidades a eventos. En la enseñanza de probabilidad es particularmente importante el enfoque que se elija. Konold (1991), refiriéndose a las interpretaciones clásica, frecuencial y subjetiva, argumenta que según la primera, *a priori*, la probabilidad de un evento es la razón del número de alternativas favorables a ese evento, en relación al total de alternativas, siempre y cuando éstas sean igualmente probables. Esta definición es circular: la probabilidad se define en términos de alternativas igualmente probables. Según la interpretación frecuencial, derivada de la empiria, la probabilidad de un evento es el límite de su frecuencia relativa de ocurrencia en un número infinito de ensayos. De acuerdo a las interpretaciones subjetivistas, la probabilidad es la medición de la creencia en la verdad de una proposición. El significado del valor de la probabilidad en una interpretación subjetivista se puede concebir como: a) descripción de ese valor según la creencia que una persona tiene de lo que puede acontecer en una apuesta; b) consideración de todos los eventos a los cuales se les asigna una probabilidad como una colección (Konold, 1991).

3. Propuesta institucional

En el bachillerato tecnológico, la unidad de aprendizaje de Probabilidad y Estadística se imparte en el sexto semestre, la de Geometría Analítica en el cuarto semestre. El programa de estudios respectivo propone, para la primera, el siguiente objetivo principal:

> …preparar al estudiante para que desarrolle competencias en las que el proceso metodológico debe reflejar la aplicación de la estadística descriptiva, la probabilidad y las distribuciones probabilísticas; donde los resultados justifiquen la solución del problema relacionado con los ámbitos académico, social y global, según se indica en cada una de las unidades, atendiendo a las tres ramas del conocimiento. Lo anterior implica abordar concepciones analíticas para comprender su espacio y su hábitat, apoyando su formación propedéutica y tecnológica. (DEMS, 2009, p. 2)

El programa de estudios señala una relación entre la unidad de aprendizaje de Probabilidad y Estadística con otras unidades de aprendizaje de matemáticas y con otras disciplinas:

> ...la Probabilidad y Estadística está directamente relacionada con las siguientes unidades de aprendizaje: Álgebra, Geometría y Trigonometría, y Cálculo Integral e indirectamente con Física, Química, Biología, Comunicación Oral y Escrita, Ciencias Sociales, Habilidades del Pensamiento, entre las principales; además de apoyar la formación integral del estudiante. (DEMS, 2009, p. 2)

Sin embargo, el programa de estudios no considera una relación directa entre Geometría Analítica y Probabilidad y Estadística. Los resultados de aprendizaje propuestos (RAP) para la unidad didáctica de Geometría Analítica y las competencias pretendidas son:

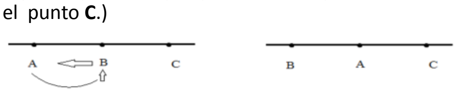
...las competencias disciplinares (general y particulares) implican como principales objetos de conocimiento: lugares geométricos, línea recta, cónicas, coordenadas polares y ecuaciones paramétricas, para movilizar diferentes capacidades humanas relacionadas con: analizar, organizar y sistematizar los conocimientos espaciales; razonar correctamente en forma deductiva e intuitiva; representar, abstraer, relacionar, clasificar y aplicar conocimientos de la Geometría Analítica que permita identificar y resolver problemas teóricos y reales, utilizando los diferentes lenguajes de representación (verbal, gráfico y/o simbólico).

(DEMS, 2009, p. 2)

4. Métodos e instrumentos

Participaron en la investigación 32 estudiantes de la unidad de aprendizaje de Geometría Analítica del tercer semestre de un bachillerato tecnológico, público bivalente. Se les aplicó un cuestionario impreso, para su contestación individual en a lo más 50 min., que se refirió a situaciones geométricas simples, que incluyeron puntos en el plano, colinealidad, recta, plano cartesiano y sus cuadrantes, para plantear, respecto a cuatro situaciones distintas, preguntas abiertas referidas a ideas fundamentales de probabilidad (véase la Figura 1).

1. Dado que dos puntos determinan una recta,
   a) ¿cuántas rectas se pueden trazar en un plano donde hay seis puntos (**A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**) y nunca hay tres de ellos alineados?
   b) Si se selecciona una de esas rectas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que pase por el punto **C**?
   c) ¿La probabilidad de que pase por el punto **C** es la misma que la de que pase por el punto **E**?
   d) ¿Cómo se ubicarían los puntos en el plano para que sea más probable que una recta que tomemos al azar pase por alguno de los seis puntos?
2. Los puntos **A**, **B** y **C** son colineales y están incluidos en la recta **R.** Los tres puntos se pueden mover a lo largo de la recta (como en la figura, en la que cambiamos de lugar los puntos **A** y **B**, pero también podemos mover el punto **C**.)



   a) ¿De cuántas maneras distintas se pueden ordenar los tres puntos en la recta?
   b) Si los tres puntos se acomodan al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el punto **C** quede entre los puntos **A** y **B**?
3. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar los cuatro puntos **E, F**, **G** y **H** alrededor de un cuadrado, si sólo puede haber uno por cada lado del cuadrado?
4. Si en el plano cartesiano hay 13 puntos en el primer cuadrante y 7 en el segundo cuadrante:
   a) ¿De cuántas maneras se puede formar un conjunto de 2 puntos del primer cuadrante y 3 puntos del segundo cuadrante?
   b) Si no importa la ubicación de los puntos en los cuadrantes, ¿de cuántas maneras se puede formar el conjunto de 5 puntos?
   c) Si los 5 puntos del conjunto deben ubicarse en el mismo cuadrante, ¿cuántas maneras de integrar el conjunto hay?

Figura 1. Presentación de reactivos en el cuestionario.

La Tabla 1 resume la caracterización del cuestionario.

Tabla 1. Ideas fundamentales implicadas en el cuestionario.

Reactivos	Medida de Probabilidad	Espacio muestra	Adición de probabilidades	Combinatoria	Equiprobabilidad
1 a)					
1 b)					
1 c)					
1 d)					
2 a)					
2 b)					
3					
4 a)					
4 b)					
4 c)					

Posteriormente, a un estudiante que se mantuvo en la tendencia general en cuanto al tipo y cantidad de respuestas que dio al instrumento, se le interrogó sobre los principios de conteo e ideas de probabilidad implicados en los reactivos. Fue una entrevista semiestructurada, se le videograbó y el estudiante registró sus procedimientos y respuestas en hojas de papel.

5. Resultados

Las respuestas de los estudiantes se clasificaron de acuerdo a la formalidad con que fueron expresadas; una respuesta correcta es aquélla que lo estuvo en forma y precisión; una respuesta imprecisa expresa la relación entre cantidad de éxitos y cardinalidad del espacio muestra, pero no formalmente; una respuesta vaga sólo manifiesta la cantidad de eventos favorables y no toma en cuenta al espacio muestra; una respuesta incorrecta lo fue del todo, aún si se le escribió correctamente. Dado que el diseño del cuestionario implica la relación de cardinalidades (o tamaño) de posibilidades favorables al evento en cuestión con las (o el) del total del espacio muestra como la probabilidad de ese evento, las respuestas correctas de los estudiantes exhibirían su comprensión de esa relación en distintos grados de precisión, según la forma de la expresión numérica asentada. Si bien el instrumento no incluyó preguntas referidas al enfoque frecuencial, las respuestas expresadas mediante porcentajes equivalentes a la correcta así se consideraron, pues exhibieron un acercamiento intuitivo, salvo cuando no se pudo asegurar que el uso del signo % implicara la identificación del espacio muestra y la del evento complementario.

5.1. Cuestionario. La Figura 2 muestra la distribución de los tipos de respuestas obtenidas.

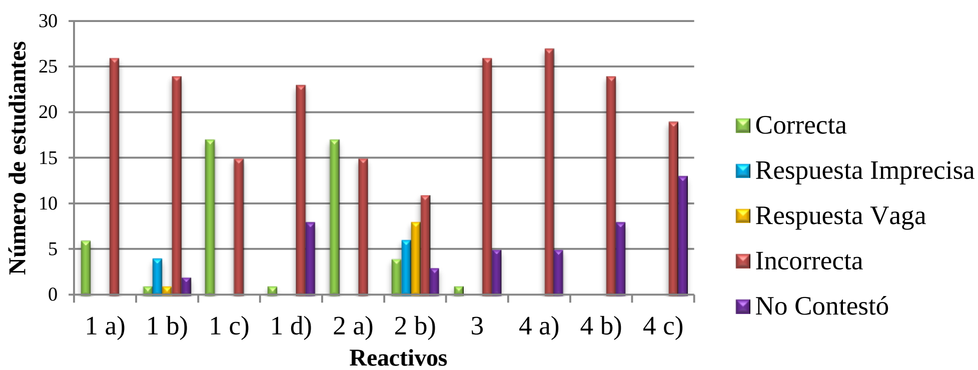


Figura 2. Distribución de los tipos de respuestas dadas al cuestionario.

El cuestionario fue difícil para los estudiantes. No obstante, trataron de contestar a las preguntas planteadas y el último reactivo, el 4c), fue para el que más respuestas se omitieron. La Figura 3 muestra una respuesta del tipo “imprecisa” al reactivo 2b). Una respuesta “vaga” es la de la Figura 4, dada al reactivo 1b).

2 b). Si los tres puntos se acomodan al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el punto **C** quede entre los puntos **A** y **B**?

Figura 3. Tipo de respuesta imprecisa.

1 b). Si se selecciona una de esas rectas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que pase por el punto **C**?

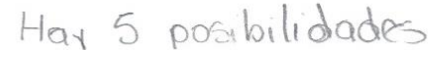


Figura 4. Tipo de respuesta vaga.

Medida de probabilidad. 68% de los jóvenes no asignaron correctamente la probabilidad a los eventos indicados en los reactivos 1b) y 2b). Dentro de este porcentaje se consideran las respuestas incorrectas (55%) y las vagas (13%). Estas últimas son de la forma: “2 veces” o

“Hay 5 posibilidades”; expresan sólo la cardinalidad del evento, pero no la relacionan con la cardinalidad del espacio muestra. Sólo 8% de las respuestas (cinco estudiantes) fueron correctas, de las cuales cuatro evocaron al enfoque frecuencial y una el clásico. 16% de las respuestas fueron imprecisas, pues aunque relacionaron lo favorable con el total de posibles resultados, parecieron permanecer en el espacio muestra y no en una asignación numérica declarada como probabilidad: “1 de 3” o “5 entre 15”, si bien dejaron entrever la noción de relación y proporción, características de las magnitudes probabilísticas.

Espacio muestra. 19% de los estudiantes omitieron en sus expresiones de probabilidad al espacio muestra, lo que exhibe su desconocimiento de los conceptos de espacio muestra y de evento. 40% de los estudiantes alteraron la cardinalidad del espacio muestra al tratar la expresión de probabilidad como una fracción, “simplificándola”.

Adición de probabilidades. Dado que para el reactivo 1d) (véase la Figura 1) sólo se obtuvo una respuesta correcta, se podría afirmar que los estudiantes desconocen la adición de probabilidades. No obstante, la pregunta se interpretó por 22% de los estudiantes como si se refiriera a un acomodo lineal de puntos, más que un acomodo al azar, ya que al alinear los seis puntos se generaría sólo una línea recta, como única posibilidad.

Combinatoria. No se obtuvo evidencia de que los estudiantes conocieran el principio fundamental del conteo, implicado en seis de los diez reactivos presentados (véase la Tabla 1). Basaron sus respuestas en dibujos de la situación planteada y en el conteo uno a uno de los diferentes acomodos posibles, tanto para combinaciones como para permutaciones.

Equiprobabilidad. Ya que el reactivo 1c) (véase la Figura 1) se puede contestar afirmativa o negativamente y no solicita justificar la respuesta, fue el que obtuvo mayor número (17) de respuestas correctas. Sólo se dio una explicación de lo igualmente probable para el reactivo 1d): “Se puede poner de cualquier manera porque una recta son [se determina por] dos puntos, entonces cualquiera pasará por uno de los seis puntos”; la estudiante primeramente aclaró que no importa el orden en que se acomoden, pues dos puntos determinan una recta y, con la última frase, pareció expresar que si tomamos una de ellas al azar es igualmente probable que pase por cualquiera de los seis puntos.

Expresiones figurales. Los estudiantes se ayudaron con el trazo de planos cartesianos, rectas y puntos para contestar a las preguntas en que estaban implicados estos conceptos (conjunto de reactivos 1 y 4), pero en sus dibujos no pusieron de manifiesto la propiedades no ostensivas de estos objetos, como la prolongación infinita de las rectas y los ejes coordenados, o la disposición homogénea de las unidades marcadas sobre los ejes.

5.2. Entrevista. Nueve días después de la aplicación del cuestionario se entrevistó al estudiante seleccionado. De sus respuestas durante el interrogatorio señalamos lo siguiente: Indicó las rectas como segmentos de recta, sin prolongar sus líneas más allá de los puntos extremos. Contó una por una las líneas, ante la pregunta de cuántas rectas se pueden trazar en arreglos de 4, 5 y 6 puntos en el plano, lo que indica su desconocimiento de técnicas de conteo (combinaciones). Ubicó los puntos simétricamente y no en una configuración que pareciera al azar. Expresó el enfoque clásico de probabilidad. A la pregunta acerca de la diferencia entre las expresiones “uno de tres” y “una entre tres”, contestó que con esta última llegaba a la interpretación frecuencial de probabilidad. Entendió la expresión “una entre tres” como dividir un segmento de recta en tres partes iguales y tomar una de esas secciones, que es una idea distinta a la que se hubiera esperado por las ideas previas expresadas, que es tomar una recta de entre tres. Inicialmente expresó la probabilidad como 1-3. Después afirmó que la podría expresar como una división. Posteriormente afirmó que la probabilidad era de un tercio, a partir de su expresión como una división. El entrevistado dijo que la probabilidad también se podía tomar como una parte de un pastel dividido en varias partes, asentando la idea de su expresión inicial "una de tres". Para que indicara la cantidad de arreglos diferentes de cuatro puntos, uno por cada lado de un cuadrado (reactivo 3; véase la Figura 1), inicialmente no identificó que las opciones de acomodo disminuyen de uno en uno para los sucesivos elementos a ordenar; con una pregunta posterior el estudiante advirtió el decremento de uno en uno en esas ordenaciones sucesivas, pero no se percató de que el primer punto que se acomoda en el cuadrado es referencial y no se le considera para el cálculo. No distinguió acomodos iguales sólo porque estaban rotados de manera distinta, pero al final cambió esta consideración.

6. Conclusiones y comentarios

Los resultados muestran desconocimiento de los estudiantes de las ideas fundamentales implicadas en el cuestionario; para la solución de los problemas de conteo no utilizaron los métodos matemáticos correspondientes, expresaron medidas de probabilidad de un enfoque clásico mediante porcentajes, en su mayoría incorrectamente. Esto y los errores restantes implican que la enseñanza de estocásticos en la educación básica ha sido deficiente dando lugar a una serie de imprecisiones en las interpretaciones conceptuales y la solución de problemas por parte de los sujetos, por lo que, en acuerdo con Heitele (1975), proponemos la implementación del modelo de ideas fundamentales de estocásticos a lo largo de los distintos niveles de enseñanza como método para revertir las deficiencias de aprendizaje observadas. En corroboración de lo señalado por Acuña (2006) respecto a las gráficas, rectas y puntos, en los resultados se manifestó la incomprensión de los estudiantes de los objetos de conocimiento implicados en las competencias disciplinares indicadas por el programa de estudios de Geometría Analítica, exhibida mediante problemas combinatorios y probabilísticos; en los reactivos de combinatoria los estudiantes mostraron una subvaloración del número de arreglos y de combinaciones solicitados (en acuerdo con Fischbein, 1975). De nuestra entrevista derivaría también el resultado, ya avanzado por otros investigadores (de León, 2002), de que ante la idea de azar prevalece lo equiprobable debido al predominio de la idea de simetría física. Nos preguntamos qué respuestas se obtendrían aplicando el instrumento a estudiantes que cursaran la unidad de aprendizaje de Probabilidad y Estadística, del sexto semestre.

Referencias

Acuña, C. (2006). Tratamientos como dibujo y como figura de la gráfica en tareas de construcción e interpretación por estudiantes de bachillerato, el caso de los ejes cartesianos. En E. Filloy (Ed). *Matemática educativa, treinta años* (pp. 215-236). México: Santillana.

de León, J. (2002). *Comprensión de la Ley de los Grandes Números de estudiantes de Ciencias Sociales*. Tesis de doctorado no publicada. México: Cinvestav.

Dirección de Educación Media Superior (DEMS). (2009). *Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje: Geometría Analítica*. México, D. F.: IPN.

Dirección de Educación Media Superior (DEMS). (2009). *Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje: Probabilidad y Estadística*. México, D. F.: IPN.

Fischbein, E. (1975). *Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Netherlands: Reidel.

Fischbein, E. (1977). Image and concept in learning mathematics. *Educational Studies of Mathematics*, **8**, 153-165.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics* **6**(2), 187-205.

Konold, C. (1991). Understanding Students' Beliefs About Probability. En E. von Glasersfeld (Ed). *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 139-156). Netherlands: Kluwer.

PROBABILIDAD EN EL BACHILLERATO TECNOLÓGICO: COMPRENSIÓN ANTECEDENTE A SU ENSEÑANZA

Jesús Salcedo Prado; Ana María Ojeda Salazar
jsalcedo@cinvestav.mx; amojeda@cinvestav.mx
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. (México)
Reporte de Investigación
Didáctica de la Estadística y la Probabilidad
Medio Superior

Resumen

En esta investigación, de orden cualitativo, se aplicó un cuestionario a un grupo de sexto semestre de un bachillerato tecnológico, que cursaba la unidad de aprendizaje de Probabilidad y Estadística, previo a la enseñanza de combinatoria y probabilidad, para conocer su comprensión de ideas fundamentales de estocásticos. Los resultados obtenidos revelan una confusión de los estudiantes entre la cantidad de posibilidades de éxito y la medida de probabilidad de un evento, la mayoría expresa medida de probabilidad desde el enfoque frecuencial, no identifican la independencia entre eventos, ni la equiprobabilidad y tampoco han consolidado el uso de modelos generativos intuitivos para responder a preguntas de combinatoria. Esos temas se incluyen desde la educación secundaria.

Palabras Clave

Estocásticos, comprensión, bachillerato tecnológico.

1. Introducción

Los planes y programas de estudio del bachillerato tecnológico (DEMS, 2009) ubican la unidad de aprendizaje Probabilidad y Estadística en el sexto semestre, el último módulo de enseñanza matemática que se imparte en esta modalidad educativa.
Esta investigación, de orden cualitativo, es parte de un proyecto más amplio. Se realizó al término de la enseñanza de estadística descriptiva, previa a la de técnicas de conteo, teoría de conjuntos y de los temas de probabilidad, impartida a un grupo de estudiantes de bachillerato. Se recopilaron datos mediante un cuestionario, con el objetivo de conocer las condiciones del conocimiento de ideas fundamentales de estocásticos en que arriban los estudiantes de bachillerato a la enseñanza de probabilidad. Preceden al contenido impartido en este semestre el de las unidades de aprendizaje de Geometría y Trigonometría, Álgebra, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial y Cálculo Integral. El antecedente más próximo a la enseñanza de probabilidad y combinatoria es el de la educación secundaria, a más de dos años y medio de la propuesta para el bachillerato. Los resultados obtenidos de esta investigación son relevantes para el Profesor de Probabilidad y Estadística, porque informan del estado inicial del conocimiento de probabilidad de los estudiantes para diseñar la estrategia de enseñanza que permita el resultado de aprendizaje esperado (RAP), señalado en el programa de estudio respectivo (DEMS, 2009).

2. Referencias Teóricas

Algunas propuestas en los órdenes epistemológico y cognitivo para la educación en probabilidad y en estadística fundamentan la presente investigación.
2.1. Ideas Fundamentales de Estocásticos. Desde un punto de vista epistemológico y pragmático en el sentido de Bruner, Heitele considera las ideas fundamentales como

…aquéllas que proporcionan al individuo modelos explicativos en cada etapa de su desarrollo, tan eficientes como sea posible y que se distingan en los distintos niveles cognoscitivos, no de manera estructural sino sólo en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración.

(Heitele, 1975, p. 188)

En esta perspectiva, el autor propone diez ideas fundamentales para un curriculum en espiral en probabilidad y estadística: Medida de probabilidad, espacio muestra, adición de probabilidades, regla del producto e independencia, equiprobabilidad y simetría, combinatoria, variable estocástica, modelo de urnas y simulación, ley de los grandes números y muestra.

Heitele propuso su lista de ideas fundamentales a partir de cuatro puntos de vista:

- El marco de la concepción de Bruner, según el cual el principio decisivo de la enseñanza de un tópico es transmitir ideas fundamentales, las cuales son necesarias como una guía desde la educación prescolar hasta la universitaria para garantizar cierta continuidad en un curriculum en espiral, en el que las ideas fundamentales y los conceptos se tratan en los diferentes niveles cognoscitivos y lingüísticos. La transición a un nivel cognoscitivo más alto se facilita si en las primeras etapas cognoscitivas se ha diseñado una presentación apropiada del tópico principal.
- Los resultados de la psicología del desarrollo con respecto a las ideas estocásticas.
- Las diversas fallas de los adultos en situaciones estocásticas.
- La historia de la probabilidad.

Las ideas fundamentales que propuso Heitele están dirigidas a lo que se debe enseñar en estocásticos a lo largo del curriculum escolar, desde la enseñanza básica hasta la superior. Afirma que se deben ofrecer actividades de estocásticos a los niños desde las etapas pre-operacionales y de operaciones concretas, para que las desarrollen en intuiciones auxiliares (Fischbein, 1975), que permitan una enseñanza en estocásticos más analítica en grados escolares posteriores.

2.2. **Enfoques de la probabilidad.** En la enseñanza de probabilidad es particularmente importante el punto de vista objetivista o subjetivista que se elija. Varios autores se refieren a las interpretaciones de la probabilidad, por ejemplo, Konold (1991), quien argumenta sobre las interpretaciones clásica, frecuencial y subjetiva.

Según la interpretación clásica, *a priori*, que tiene cierto grado de subjetividad en lo verdadero de una proposición, la probabilidad de un evento es la razón del número de alternativas favorables a ese evento, en relación al total de alternativas, siempre y cuando éstas sean igualmente probables. Esta definición es imperfecta, ya que la definición es circular: la probabilidad se define en términos de alternativas igualmente probables.

Según la interpretación frecuencial, derivada de la empiria, la probabilidad de un evento es el límite de su frecuencia relativa de ocurrencia en un número infinito de ensayos. Aunque esta interpretación es considerada como objetiva, no está libre de subjetividad. Esta interpretación requiere de un observador que lleve el conteo de los eventos, en un orden y, para acumular una suma de ocurrencias, ese observador debe considerar los eventos que son “del mismo tipo”.

De acuerdo a las interpretaciones subjetivistas, la probabilidad es la medición de la creencia en la verdad de una proposición. En la formalización de las interpretaciones subjetivistas, los teóricos han adoptado varios mecanismos que conducen a la revisión de las probabilidades iniciales y que arrojan nueva información, según los resultados de los ensayos efectuados.

El significado del valor de la probabilidad en una interpretación subjetivista se puede concebir de diferentes maneras, como: a) Descripción del valor de la probabilidad según la creencia que una persona tiene de lo que puede acontecer en una apuesta. b) Consideración de todos los eventos a los cuales se les asigna una probabilidad como una colección (Konold, 1991).

2.3. **Didáctica de modelos intuitivos.** En la enseñanza, los profesores reiteradamente utilizan modelos intuitivos para facilitar la comprensión de conceptos de sus alumnos. A este respecto, Heitele cita a Bruner para referirse a las funciones de estos modelos:

> … a) Como modelos burdos en una etapa primaria, tienen un valor explicativo autónomo y ayudan al niño a entender su entorno por sus propios medios, mucho antes que pueda entender la complejidad lingüística y la sofisticación de los modelos matemáticos subyacentes en sus formas analíticas.
>
> b) De esta manera, están sentando bases para el conocimiento analítico posterior de manera tal que el maestro de grados superiores pueda presuponer un dominio intuitivo favorable al abordar operaciones combinatorias.
>
> (Heitele, 1975, p. 189)

Desde un punto de vista cognitivo, Fischbein (1977) establece la hipótesis de que en la enseñanza los modelos intuitivos deben tener una capacidad heurística, como la de los modelos científicos. La razón es que los modelos deben constituir una componente viable para el pensamiento productivo. Esto lo plantea igualmente para los modelos pictóricos:

> … un buen modelo es, necesariamente, generativo. Un modelo es genuinamente útil al pensamiento productivo si puede representar correctamente un número ilimitado de situaciones diferentes, usando un número limitado de elementos o reglas. El sistema de reglas que establece un modelo para expresar unívoca y estructuralmente al original, constituye la sintaxis del modelo.
>
> (Fischbein, 1977, p. 155)

Con el uso de los diagramas de árbol, basado siempre en las mismas convenciones, se obtiene respuesta a las posibles preguntas referentes a combinatoria y pertenecientes a la misma clase, donde se pide la cantidad de arreglos posibles en la ordenación de objetos. El modelo es consistente internamente; expresa un principio, un método para construir los arreglos. El modelo es una herramienta intelectual: con él se resuelve el problema y no sólo se describe la solución. Con un modelo tal se aprende a pensar efectivamente y a comprender activamente.

Los diagramas de Venn constituyen una técnica consistente para expresar operaciones con conjuntos. Es una técnica visual generativa, que usa una lógica figurativa; la solución a las operaciones con conjuntos, qué representan, se obtiene usando de una manera consistente solamente el lenguaje figurativo.

3. Propuesta Institucional

El programa de estudios del bachillerato tecnológico propone para la unidad de aprendizaje de Probabilidad y Estadística (2009) el siguiente objetivo principal:

> …preparar al estudiante para que desarrolle competencias en las que el proceso metodológico debe reflejar la aplicación de la estadística descriptiva, la probabilidad y las distribuciones probabilísticas; donde los resultados justifiquen la solución del problema relacionado con los ámbitos académico, social y global, según se indica en cada una de las unidades, atendiendo a las tres ramas del conocimiento. Lo anterior implica abordar concepciones analíticas para comprender su espacio y su hábitat, apoyando su formación propedéutica y tecnológica.
>
> (DEMS, 2009, p. 2)

Las respectivas competencias que se ponen en juego y los resultados de aprendizaje propuestos (RAP) para la unidad de Probabilidad, se plantean de la siguiente manera:

Unidad Didáctica No. 2 Probabilidad

Competencia particular: Resuelve problemas referentes a teoría de conjuntos, técnicas de conteo y probabilidad, en su ámbito académico, social y global.

RAP 1. Utiliza la teoría de conjuntos y las técnicas de conteo en la resolución de problemas en el ámbito académico, social y global.

RAP 2. Obtiene la probabilidad de eventos que cumplan con sus axiomas, en la resolución de problemas en el ámbito académico, social y global.

RAP 3. Calcula la probabilidad condicional de eventos independientes y dependientes, en la resolución de problemas inmersos en el ámbito académico, social y global.

(DEMS, 2009, p. 5)

El objetivo de la enseñanza de matemáticas en el plan de estudios de secundaria (DGDC, 2006), aplicado a la generación de los estudiantes participantes en esta investigación, es: "… lograr que los alumnos aprendan a plantear y resolver problemas en distintos contextos, así como a justificar la validez de los procedimientos y resultados y a utilizar adecuadamente el lenguaje matemático para comunicarlos" (p. 34). Los objetivos particulares relativos a estocásticos establecen que los alumnos:

- Resuelvan problemas que requieren el análisis, la organización, la representación y la interpretación de datos provenientes de diversas fuentes.
- Identifiquen y evalúen experimentos aleatorios con base en la medida de la probabilidad.
- Utilicen de manera eficiente diversas técnicas aritméticas, algebraicas o geométricas, con o sin el apoyo de tecnología, al resolver problemas.

(DGDC, 2006, p. 34)

4. Método

Se diseñó un cuestionario cuyo objetivo fue informar acerca del estado de conocimiento de ideas fundamentales de estocásticos de los estudiantes, previo a la enseñanza de la segunda Unidad Didáctica de Probabilidad. Impreso para su contestación individual con lápiz, el instrumento planteó ocho reactivos con preguntas abiertas a un grupo de 35 estudiantes de bachillerato tecnológico y se le aplicó en una sesión ordinaria de la clase de 50 min. El cuestionario se refirió a contenidos supuestamente adquiridos en la escuela secundaria (DGDC, 2006), como cálculo de probabilidades según el enfoque clásico y técnicas de conteo. La Tabla 1 caracteriza el contenido de estocásticos del cuestionario.

Tabla 1. Ideas fundamentales de estocásticos en el cuestionario y enfoque de probabilidad.

Reactivo y fuente	Medida de Probabilidad	Espacio Muestra	Modelo de urnas	Regla del producto e Independencia	Equiprobabilidad	Combinatoria
1 (Truxal, 1989, p. 2)	Frecuencial					
2 (tradicional)	Clásico					
3 (Chávez, 2009, p. 299)	Clásico					
4 (tradicional)	Clásico					
5 (Shaughnessy,1977, p. 312)						
6 (SEP, 1994, pp. 152-153)	Clásico					
7 (Truxal, 1989, p. 4)	Frecuencial					
8 (Chávez, 2009, p. 341)						

Los criterios de análisis de los datos recopilados con el cuestionario fueron: ideas fundamentales de estocásticos, enfoques de probabilidad y recursos semióticos empleados (figurales, diagramas, simbología matemática, lengua escrita).

5. Resultados y análisis

La Figura 1 resume los tres tipos inmediatos de contestaciones al cuestionario aplicado.

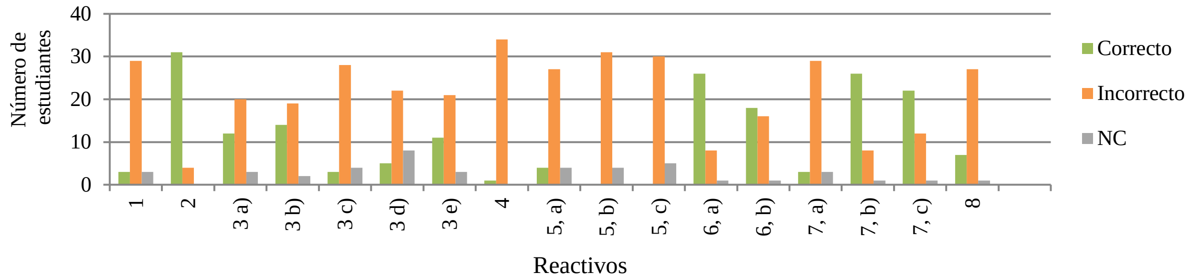


Figura 1. Distribución de los tipos de respuestas dadas al cuestionario.

Aunque el porcentaje de respuestas omitidas (NC) fue bajo, los resultados fueron desfavorables.

5.1. Medida de probabilidad. El reactivo 1 pide expresar el significado de un pronóstico de lluvia (véase la Figura 2, izq). Todas las respuestas incorrectas (82%) sólo parafrasearon la expresión de probabilidad de lluvia.

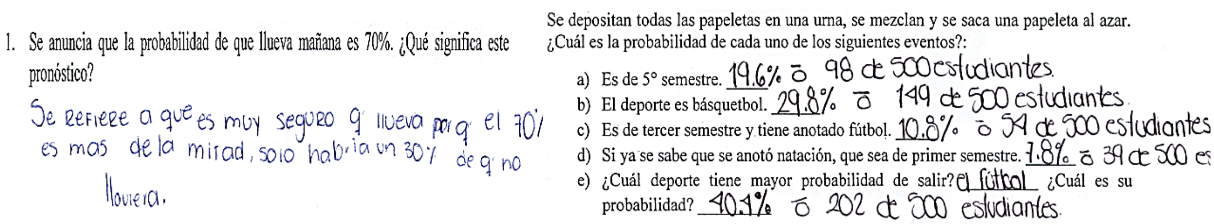


Figura 2. A la izquierda, parafraseo a la pregunta de un pronóstico de lluvia; a la derecha, una expresión de probabilidad desde los enfoques clásico y frecuencial para el reactivo 3.

El reactivo 7 se compuso de tres incisos. El a) pedía calcular el costo promedio de la producción de un motor tomando en cuenta la frecuencia de motores defectuosos producidos y los costos de producción y reparación de los motores. Del 82% de respuestas incorrectas, 24% expresaron el promedio como la suma del costo de producción y el costo de reparación sin tomar en cuenta la cantidad de motores defectuosos producidos; uno de estos casos aclaró: *80 000. Debido a que son 50 000 de su producción y 30 000 de su reparación, y sumando estas cantidades nos da 80 000*. 17% de las respuestas incorrectas señalaron que el costo promedio era 50 000; estos estudiantes no dieron sentido al dato de la frecuencia de motores defectuosos producidos, incluso una respuesta aclaró: *50 000. Ya que es lo que cuesta para ser producido uno solo y no importa si esté bien o defectuoso*. En el inciso c) se preguntó al estudiante si compraría un automóvil de esa marca: 59 % contestó que no (*dado el alto índice de motores defectuosos lo más recomendable sería no comprar un automóvil de esa marca*), 37% contestaron que sí y 3% no contestó.
El reactivo 3 (véase la Figura 2, der.) pedía calcular probabilidades de eventos simples en cuatro de sus incisos y el inciso d) pidió una probabilidad condicional. Por inciso, la Tabla 2 resume la cantidad de respuestas correctas, incorrectas, no contestadas (NC) y por enfoque de probabilidad.

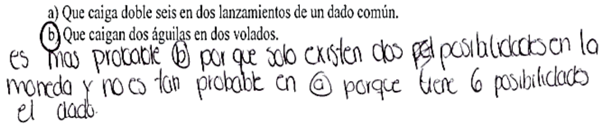
Tabla 2. Respuestas dadas al conjunto de incisos del reactivo 3.

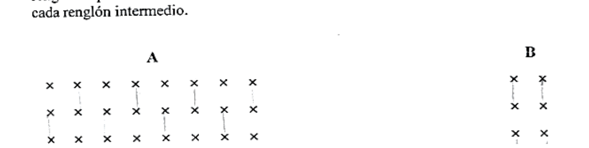
Inciso del reactivo	*Correcto*	*Enfoque Clásico*	*Enfoque Frecuencial*	*Ambos*	*Incorrecto*	*Enfoque Clásico*	*Enfoque Frecuencial*	*Ambos*	*Sin Sentido*	*NC*
3 a)	12	2	8	2	20	1	11	0	8	3
3 b)	14	2	11	1	19	2	9	0	8	2
3 c)	3	1	1	1	28	9	16	0	3	4
3 d)	5	2	3	0	22	3	14	1	4	8
3 e)	11	4	6	1	21	2	16	0	3	3

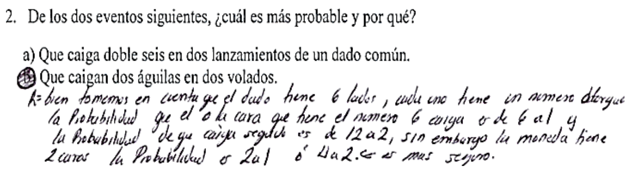
Un estudiante expresó sus respuestas tanto con el enfoque frecuencial como con el clásico, por lo que se les contabilizó en la tabla en ambas columnas. En concordancia con investigaciones previas respecto a este mismo nivel educativo (Ojeda, 1994), hubo una tendencia a responder según el enfoque frecuencial, utilizando porcentajes; todas las respuestas según el enfoque clásico fueron del tipo: “54 de 500”.

Dadas las composiciones de los contenidos de dos urnas, bolas de tres colores (azul, verde y rojo), el reactivo 6 (adaptado de la situación propuesta en un libro de texto de cuarto grado de primaria, SEP, 1994) pide comparar la probabilidad de extraer, al azar, una bola de cierto color. Para el inciso a) se obtuvo 74% de respuesta correctas, 23% de incorrectas y 3% no contestó; para el inciso b) los resultados fueron 51% de aciertos, 46% de errores y el 3% no contestó. Decreció el número de aciertos del inciso a) al b), lo cual se debió a las composiciones propuestas: en el a) las probabilidades comparadas fueron 4/9 y 3/7 para las urnas uno y dos, respectivamente, en el b) 2/9 contra 2/7. En el inciso a) es más probable extraer la bola de interés de la urna uno y la cardinalidad de éxito en ella también es mayor, en comparación con la urna dos; para el inciso b) la cardinalidad de éxito es la misma en ambos casos y la probabilidad de ocurrencia de ese evento es mayor para la urna dos; todos los estudiantes que respondieron incorrectamente al inciso b) (54%) argumentaron que la probabilidad de extraer la bola en ambas urnas era la misma, lo cual muestra la ausencia de razonamiento probabilístico, pues no relacionaron la parte favorable con el total respectivo para cada contenido.

5.2. Espacio muestra. La tendencia general de las respuestas de los estudiantes fue desconocer todos los posibles resultados del fenómeno aleatorio de que se trataba. En los incisos del reactivo 3 se obtuvo 25% de respuestas correctas, en 24% de ellas quedó de manifiesto que el estudiante identificó el espacio muestra implicado, al expresarlo de la forma: “54 de 500”; de entre las respuestas incorrectas un estudiante identificó la cardinalidad del espacio muestra pero no la de eventos exitosos. En el reactivo 2, 77% de las justificaciones a las respuestas se basaron en comparaciones de la cantidad de resultados posibles, pero sólo para el fenómeno aleatorio simple, no para el fenómeno aleatorio compuesto planteado (véase la Figura 3, izq. sup.).






2. De los dos eventos siguientes, ¿cuál es más probable y por qué?

a) Que caiga doble seis en dos lanzamientos de un dado común.

b) Que caigan dos águilas en dos volados.

Figura 3. Dos respuestas al reactivo 2, arriba respecto al fenómeno aleatorio simple y abajo respecto al evento compuesto. A la derecha, la expresión de probabilidad de un estudiante.

5.3. Regla del producto e independencia. Para el reactivo 2, que solicitó comparar las probabilidades de doble seis al lanzar dos veces un dado y doble águila en dos volados (véase la Figura 3, izq.), no se tuvieron indicios de que los estudiantes identificaran la independencia de las repeticiones de los fenómenos aleatorios propuestos, pues sólo compararon las posibilidades de un volado y las del lanzamiento de un dado:

> *En los volados hay menos opciones, o sea cae águila o sol y en el dado hay más de dos, por ello es más probable que caigan las dos águilas*.

Aunque sólo un estudiante advirtió la composición de eventos en dos repeticiones del fenómeno, su respuesta exhibió la prevalencia de un razonamiento aditivo sobre el multiplicativo, este último requerido para considerar dos variables a la vez:

> *Tomemos en cuenta que el dado tiene 6 lados, cada uno tiene un número* [ilegible] *la probabilidad que el o la cara que tiene el número 6 caiga es de 6 a 1 y la probabilidad de que caiga seguido es de 12 a 2, sin embargo la moneda tiene 2 caras, la probabilidad es 2 a 1 ó 4 a 2. Es más seguro.*

El estudiante se dio cuenta de que el valor de la probabilidad del evento simple no es el mismo que el del evento compuesto, que cambia con la repetición del fenómeno, aunque no advirtió que es el producto de las probabilidades de los eventos simples el que determina la probabilidad del compuesto (véase la Figura 3, izq. inf.). Para el reactivo 4 (véase la Figura 4, izq.) sucedió lo mismo, pues los estudiantes no advirtieron la independencia, sólo describieron las posibilidades de que fuera siete la suma de los puntos en el lanzamiento de dos dados y de que cayera el mismo número en ambos lanzamientos.

5.4. Equiprobabilidad. El reactivo 4, que pide identificar la equiprobabilidad entre dos eventos (véase la Figura 4, izq.), sólo obtuvo una respuesta correcta (3%). 24 estudiantes (69%) contestaron que era más probable obtener la suma siete que dos números iguales al lanzar dos dados. El reactivo 2, que requiere elegir al evento más probable entre doble seis al lanzar dos dados o dos águilas en dos volados (véase la Figura 3, izq. sup.), fue fácil para los estudiantes: 89% lo contestó acertadamente. No obstante, la justificación más común entre las respuestas correctas no fue de tipo probabilístico, sino cardinal: *porque una moneda solamente tiene 2 caras, en cambio un dado tiene 6*.

5.5. Combinatoria. El reactivo 5 pide encontrar la cantidad de trayectorias que se forman al unir de manera vertical los elementos de un arreglo A y compararlo con las posibles trayectorias de un arreglo B (véase la Figura 3, der.); ambos tienen la misma cantidad de posibilidades (Shaughnessy, 1977). De las cuatro respuestas correctas (11%) al inciso a), ninguna dio evidencia de que el estudiante comprendiera el principio fundamental del conteo, sólo planteó una comparación entre las posibles trayectorias de dos arreglos distintos de puntos. El inciso b), que pide la justificación a la respuesta previa, no obtuvo una sola respuesta correcta. Por último, la pregunta del número de trayectorias que se forman tampoco obtuvo respuestas acertadas, sino que la más común (40% de los casos) fue 8, que es el número de líneas verticales del arreglo A.

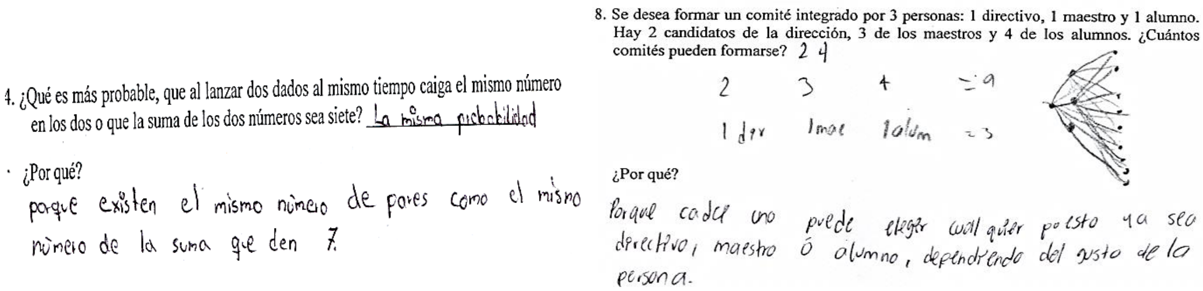


Figura 4. Identificación correcta de equiprobabilidad (izq.) y trazo a manera de diagrama de árbol (der.).

Para el reactivo 8, que pedía determinar el número de comités posibles con un directivo, un maestro y un alumno, si había dos candidatos de la dirección, tres de los maestros y cuatro de los alumnos (véase la Figura 4, der.), se obtuvo 20% de respuestas correctas (7 estudiantes): dos trataron de trazar un diagrama de árbol, tres agruparon y ordenaron por letras para contar las combinaciones y dos no mostraron estrategia alguna, simplemente enunciaron la respuesta. De entre las contestaciones incorrectas, la más común (en 23 ocasiones, 66% del grupo) fue dos: los estudiantes no advirtieron que se podían combinar todos los elementos e interpretaron que solamente se podía seleccionar uno a la vez.

5.6. Modelos generativos. Sólo dos estudiantes pretendieron trazar un diagrama de árbol para contestar al reactivo 8, pero de manera inconsistente y poco clara (véase la Figura 4, der.); a pesar de ello sus respuestas fueron acertadas. Más claramente, en sus contestaciones tres estudiantes agruparon y representaron las combinaciones posibles, obteniendo la cantidad correcta. Por otro lado, de los dos estudiantes (6%) que utilizaron otro tipo de soporte gráfico, uno trazó figuras de individuos de acuerdo al enunciado del reactivo y el otro organizó las categorías propuestas, a modo de un cuadro sinóptico; sin embargo, sus respuestas fueron incorrectas.

6. Conclusiones

Los estudiantes manifestaron una amplia tendencia a expresar probabilidades desde un enfoque frecuencial, porcentualmente; fue poco frecuente la expresión de la probabilidad en forma de fracción, la cual sustituyen en lengua escrita por "x de y". No pudieron identificar el espacio muestra de un fenómeno aleatorio compuesto, atribuyéndole el del fenómeno aleatorio simple relacionado. Confundieron la cantidad de posibilidades de éxitos con la medida de probabilidad del evento. En general, no se obtuvieron evidencias de que los estudiantes hubieran identificado las ideas de equiprobabilidad e independencia. Igualmente, sorprende la ausencia del elemental principio multiplicativo para el conteo, supuestamente enseñado en la secundaria (DGDC, 2006).

En el bachillerato tecnológico, la desvinculación entre las unidades de aprendizaje de matemáticas no permite la integración de temas entre módulos, lo cual impacta en la enseñanza de estocásticos, que está relegada al semestre final, a más de dos años y medio de su antecedente más próximo en la secundaria. En un semestre se pretende enseñar los temas de estadística descriptiva, probabilidad y distribución de probabilidades, tiempo que en la práctica resulta insuficiente, porque los conocimientos previos de los estudiantes en los temas son deficientes y se requiere un periodo más largo que el propuesto, para actualizarlos y enseñar los correspondientes mediante estrategias que consideren ese estado inicial de conocimiento.

Referencias

Chávez, M. (2001). Fundamentos de estadística descriptiva y probabilidad. México: DGETA.

Dirección de Educación Media Superior (DEMS). (2009). *Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje: Probabilidad y Estadística*. México, D. F.: IPN

Dirección General de Desarrollo Curricular (DGDC) de la Subsecretaría de Educación Básica de la SEP. (2006). *Educación Básica Secundaria Plan de Estudios 2006*. México, D. F. SEP.

Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Holanda: Reidel.

Fischbein, E. (1977). Image and concept in learning mathematics. *Educational Studies of Mathematics*, **8**, 153-165.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies of Mathematics*, **6**, 187-205.

Konold, C. (1991). Understanding Students' Beliefs About Probability. *Radical Constructivism in Mathematics Education* (von Glasersfeld, E. (Ed.)), pp. 139-156. Holanda: Kluwer.

Ojeda, A. M. (1994). *Understanding Fundamental Ideas of Probability at Pre-university Levels*. Tesis de doctorado no publicada. King´s College London, UK.

Secretaría de Educación Pública. (1994). Matemáticas Cuarto Grado. Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos. México: SEP.

Shaughnessy, J. M. (1977). Misconceptions of probabilty: an experiment with a small-group, activity-based, model building approach to introductory probability at the college level. *Educational Studies of Mathematics*, **8** No. 3, 295-316.

Truxal, J. (1989). *Probability Examples*. New York: RFSU of New York.

Referencias

Acuña, C. (2006). Tratamientos como dibujo y como figura de la gráfica en tareas de construcción e interpretación por estudiantes de bachillerato, el caso de los ejes cartesianos. En E. Filloy (Ed). *Matemática educativa, treinta años* (pp. 215-236). México: Santillana.

Buendía, E. J. y Gutiérrez, E. (2011). *Estadística y probabilidad para ser competente.* México: Libudi.

Colín, J., Garnica, I. y Ojeda, A. M. (1993). *Cuadernos de Investigación No. 26: Intuición y probabilidad desde el punto de vista de Fischbein.* México, D. F.: DME, Cinvestav IPN.

Carballo, M. T. (2004). *Estocásticos en el segundo ciclo de educación primaria. Determinismo y azar.* Tesis de maestría en ciencias no publicada. DME, Cinvestav IPN. México.

Chávez, M. (2001). *Fundamentos de estadística descriptiva y probabilidad*. México: DGETA.

de León, J. (2002). *Comprensión de la Ley de los Grandes Números de estudiantes de Ciencias Sociales*. Tesis de doctorado no publicada. DME, Cinvestav IPN. México.

Di Sessa A. (2007). An interactional Analysis of clinical interviewing. *Cognition and instruction*, **25**(4), 523-565.

Díaz, M. C. (2009). Probabilidad condicional: sesgos e implicaciones para la enseñanza de la estadístuica. En L. Serrano (Ed). *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica* (pp. 35-54). Málaga: San Pancracio.

Dirección de Educación Media Superior (DEMS). (2009). *Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje: Geometría Analítica*. México, D. F.: IPN.

Dirección de Educación Media Superior (DEMS). (2009). *Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje: Probabilidad y Estadística*. México, D. F.: IPN.

Dirección General de Desarrollo Curricular (DGDC) de la Subsecretaría de Educación Básica de la SEP. (2006). *Educación Básica Secundaria Plan de Estudios 2006*. México, D. F. SEP.

Elizarrarás, S. (2004). *Enseñanza y comprensión del enfoque frecuancial de la probabilidad* *en Segundo grado de secundaria.* Tesis de maestría en ciencias no publicada. DME, Cinvestav IPN. México.

Fischbein, E. (1975). *Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Netherlands: Reidel.

Fischbein, E. (1977). Image and concept in learning mathematics. *Educational Studies of Mathematics*, **8**, 153-165.

Flores, P. (2009). *Medios y enseñanza de estocásticos en el tercer ciclo de educación primaria.* Tesis de maestría en ciencias no publicada. DME, Cinvestav IPN. México.

Hazzan, O. y Zazkis, R. (1999). Interviewing in mathematics education research: choosing the questions. *Journal of mathematical behavior*, **17**(4), 429-439.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics* **6**(2), 187-205.

Konold, C. (1991). Understanding Students' Beliefs About Probability. En E. von Glasersfeld (Ed). *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 139-156). Netherlands: Kluwer

López J.M. (2006). *Comprensión de la ley de los grandes números en el tercer grado de secundaria.* Tesis de maestría en ciencias no publicada. DME, Cinvestav IPN. México.

Maturana, H. (1995). *Desde la biología a la psicología.* Santiago de Chile: Lumen.

Ojeda, A. M. (1994). *Understanding Fundamental Ideas of Probability at Pre-university Levels*. Tesis de doctorado no publicada. King´s College London, UK.

Ojeda, A. M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: *Un ensayo en la enseñanza de estocásticos. Matemática educativa, treinta años: una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual.* Santillana; Cinvestav del IPN. México, pp. 195-214.

Piaget, J. (1951). *Introducción a la epistemología genética: el pensamiento físico.* París: Presses Universitaires.

Rivera, M. S. (2011). *Comprensión de ideas fundamentales de estocásticos en el bachillerato universitario.* Tesis de maestría en ciencias no publicada. DME, Cinvestav IPN. México.

Secretaría de Educación Pública. (1994). Matemáticas Cuarto Grado. Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2007). *Reforma Integral de la Educación Media Superior*. *La creación de un sistema nacional de bachillerato en un marco de diversidad*. México, Secretaría de Educación Pública, en <*http://www.sems.udg.mx/principal/anexos_bgc_may0807/BGC_SEMSSEP/RIEMS_Creacion_Sistema_Nacional_de_Bachillerato.pdf*>.

Shaughnessy, J. M. (1977). Misconceptions of probabilty: an experiment with a small-group, activity-based, model building approach to introductory probability at the college level. *Educational Studies of Mathematics*, **8** No. 3, 295-316.

Steinbring, H. (1991). The Concept of Chance in Everyday Teaching: Aspects of a Social Epistemology of Mathematical Knowledge. *Educational Studies of Mathematics*, 22, 503-522.

Székely, M. (2010). Avances y transformaciones de la educación media superior. En Arnaut, A. y Giorguli, S. (Ed). *Los grandes problemas de méxico, vii: educación* (pp. 313-336). México D. F.: Colmex.

Truxal, J. (1989). *Probability Examples*. New York: RFSU of New York.

Anexo 1

Acuerdo Académico Colegiado de Docencia-Investigación

CECyT 4 "Lazaro Cárdenas"

Instituto Politécnico Nacional

Departamento de Matemática Educativa

Área *Ciencias de la Cognición y Tecnología de la Información Aplicadas*

Acuerdo Académico Colegiado para el Desarrollo del Seminario

Docencia-Investigación de Matemática Educativa en el Bachillerato Tecnológico: CECyT #4 "Lázaro Cárdenas" del IPN

ACUERDO ACADÉMICO COLEGIADO PARA

EL DESARROLLO DEL SEMINARIO

Docencia-Investigación de Matemática Educativa en el Bachillerato Tecnológico: Cecyt # 4 "Lázaro Cárdenas"

La coordinación del área de concentración para la investigación en Matemática Educativa "*Ciencias de la Cognición y Tecnología de la Información Aplicadas*" del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav del IPN y el CECyT 4 "Lázaro Cárdenas" del IPN, acuerdan abrir espacios conjuntos para la reflexión, el análisis y el desarrollo de investigación relativa a los procesos de la Enseñanza y del Aprendizaje de las matemáticas. Por ello, ambas instituciones manifiestan su interés en conformar un Seminario de Vinculación para apoyar el desarrollo de investigaciones del campo de Matemática Educativa.

Nombre del Seminario de Vinculación:

Docencia-Investigación de Matemática Educativa en el Bachillerato Tecnológico: Cecyt # 4 "Lázaro Cárdenas"

Objetivo General del Seminario:

Indagar y analizar problemas relativos a los proceso de la Enseñanza y del Aprendizaje de las matemáticas, identificados por profesores del CECyT 4 "Lázaro Cárdenas", mediante el desarrollo de proyectos de investigación de Matemática Educativa *en curso*.

Compromisos de las instancias académicas:

1. Apoyar la creación y el desarrollo del Seminario de investigación para orientar investigaciones *en curso* relacionadas con matemática educativa en el CECyT 4 "Lázaro Cárdenas".
2. Reconocer que los integrantes del Seminario serán Docentes e Investigadores de ambas instancias académicas bajo el compromiso expreso de participación en las actividades propias de él.

3. Elaborar de manera conjunta un Reporte Técnico *anual* del desarrollo del Seminario.

4. Apoyar la realización de las actividades del Seminario:

- Reconociendo el quehacer de sus miembros como parte integrante de sus labores institucionales;
- Proporcionando los requerimientos académicos para dar seguimiento al desarrollo de *indagaciones y de investigaciones en curso;*
- Permitiendo administrativamente el desarrollo de las tareas del Seminario de cada instancia, sin que ello implique necesariamente generar partidas especiales;
- Proporcionando vías expeditas para el intercambio de fuentes de información pertinentes a la realización de las actividades del Seminario;
- Admitiendo el compromiso declarado de sus miembros a reportar los resultados de indagaciones y/o de investigaciones realizadas por ellos de manera conjunta en artículos, que se presentarán en foros nacionales o internacionales relativos a las temáticas estudiadas en el seminario;
- Utilizando los logos institucionales para la presentación y el desarrollo de las actividades del seminario;

En la Ciudad de México, Distrito Federal, el día 18 de mayo de 2011.

Firman el acuerdo las partes responsables de cada Institución:

S.E.P. I.P.N.
CENTRO DE ESTUDIOS CIENTÍFICOS Y TECNOLÓGICOS No. 4

ING. ARQ. LEOPOLDO GONZÁLEZ GARCÍA
Director del CECyT 4 "Lázaro Cárdenas" del Instituto Politécnico Nacional

M. en C. Ignacio Garnica Dovala
Coordinador de Área Ciencias de la Cognición y Tecnología de la Información Aplicadas

M. en C. LILIANA FLORES JIMÉNEZ
Jefa del Departamento de Investigación y Desarrollo Tecnológico

Cantoral U.

Vo. Bo. **Dr. Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza**
Jefe del Departamento de Matemática Educativa