



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

“ENTRECRUZAMIENTOS DE LOS SISTEMAS MATEMÁTICOS DE SIGNOS Y LOS
SISTEMAS QUÍMICOS DE SIGNOS. UN ESTUDIO SEMIÓTICO”

T E S I S

Que presenta

GRACIELA BEATRIZ SALINAS FERNÁNDEZ

Para obtener el grado de

MAESTRA EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Directora de la Tesis: DRA. AURORA GALLARDO CABELLO

Ciudad de México

MAYO, 2016

AGRADECIMIENTOS

Al CONACYT por el apoyo brindado para el desarrollo y culminación de la Maestría en Ciencias en Matemática Educativa.

Al CINVESTAV por el aporte en mi desarrollo profesional y por la invitación a incursionar en esta aventura de la investigación.

A mi asesora, la Dra. Aurora Gallardo por la enseñanza, su profesionalismo y confianza, y por su dedicación para la culminación de esta investigación.

A los Doctores Teresa Rojano y Ulises Xolocotzin por las aportaciones realizadas en esta Tesis.

A los Doctores Teresa Rojano, Mirela Rigo, Sonia Ursini, Marta Valdemoros, Ricardo Quintero, Simón Mochón y Ulises Xolocotzin.

Al Departamento de Matemática Educativa, en especial a Adriana Parra.

A la UNAM por el apoyo otorgado para el desarrollo del estudio.

Al profesor Ernesto Olivares Andrade por su colaboración y apoyo en la aplicación de los cuestionarios.

A los alumnos y docentes participantes en el estudio.

DEDICATORIAS:

Con cariño a mi madre,
la maestra Graciela Fernández García (†).

A mi padre, Rafael Salinas López.

A mis hijos Graciela y Eduardo.

A mi esposo Eduardo Mendoza.

A mis hermanos Rafael Ángel, Julio César,
Juan Carlos y Víctor Alfredo.

Resumen

La presente investigación constituye un estudio semiótico de los entrecruzamientos de los Sistemas Matemáticos de Signos y de los Sistemas Químicos de Signos. Se indaga en cómo influye el nivel de competencia Matemática en el nivel de competencia Química, las analogías y diferencias de ambos sistemas, y los entrecruzamientos de los modelos de enseñanza de la Matemática y de la Química para la construcción de conceptos en un Sistema Químico de Signos.

La investigación se realiza tomando como marco teórico los Modelos Teóricos Locales, que permiten diferenciar los usos de los signos en ambos sistemas. El estudio se realiza mediante el análisis de cuestionarios y una entrevista con enseñanza. Los sujetos de estudio son estudiantes de educación media superior, docentes de educación media básica y de educación media superior. La entrevista con enseñanza es aplicada a un docente de Telesecundaria.

Las producciones de los sujetos de estudio revelan que la competencia Matemática influye en la formación de conceptos químicos. Los sujetos competentes en ambas disciplinas conocen las analogías y diferencias del uso de los signos, y las aplican adecuadamente. Los sujetos que pueden realizar generalizaciones correctas en Matemáticas, efectúan generalizaciones correctas en Química.

Se manifiesta en la entrevista y en las resoluciones de los cuestionarios, una enseñanza basada en el uso de reglas sintácticas sin sentido en ambas disciplinas, llevando a los sujetos a generalizaciones erróneas. Aparece el uso de estructuras sintácticamente equivalentes en Matemáticas, no equivalentes en Química.

Se muestran los usos de la Recta Numérica y del modelo Chino para operar en Matemáticas y en Química. Se manifiesta que cada modelo es adecuado en función del sentido de uso que para el sujeto represente.

Concluimos que el tener una competencia matemática formal, en la cual se muestren diversos medios de organización y el advertir las analogías y diferencias entre los Sistemas Matemáticos de Signos y los Sistemas Químicos de Signos, mejora la competencia Química.

Abstract

This research constitutes a semiotic study of cross-linking in Mathematical Sign Systems and Chemical Sign Systems. It explores how the level of Mathematical competence influences the level of Chemistry competence, the similarities and differences of both systems, and the cross-linking in the teaching models of Mathematics and Chemistry for the construction of concepts in a Chemical Sign System.

The research is conducted using the Local Theoretical Models as the framework that differentiates the uses of signs in both systems. This study was conducted by analyzing questionnaires and an interview with instruction. The study subjects are students from high school education, and secondary and high school teachers. The interview with instruction is applied to a teacher from the Telesecundaria program.

The results from the study subjects reveal that Mathematics competence influences the formation of chemical concepts. Competent subjects in both disciplines know the similarities and differences in the use of signs, and apply them properly. Subjects who can make accurate generalizations in Mathematics, make correct generalizations in Chemistry.

Teaching based on the use of meaningless syntactic rules in both disciplines is manifested in the interview and in the resolutions of the questionnaires, leading to erroneous generalizations. The use of syntactically equivalent structures in Mathematics appears, not equivalent in Chemistry.

The uses of the Number Line and the Chinese Model are shown to perform in Mathematics and Chemistry. It states that each model is suitable depending on the direction of use represented by the subject.

It is concluded that having formal mathematical competence, in which various means of organization are displayed and by pointing out the similarities and differences between the Mathematical Sign Systems and the Chemical Sign Systems, improves the Chemical competence.

ÍNDICE

Resumen	1
Abstract	2
Índice de contenido	3
Introducción	6
Capítulo I. Antecedentes de la investigación	7
1.1 Consideraciones básicas	7
1.1.1 Definiciones en Matemáticas	7
1.1.1.1 Números enteros	7
1.1.1.2 Adición y sustracción de enteros	8
1.1.1.3 Sistemas Matemáticos de Signos	8
1.1.2 Definiciones en Química	8
1.1.2.1 Elemento	9
1.1.2.2 Átomo	9
1.1.2.3 Ión	9
1.1.2.4 Molécula	10
1.1.2.5 Valencia	10
1.1.2.6 Número de oxidación	10
1.1.2.7 Los números de oxidación en las reacciones de óxido-reducción	11
1.1.2.8 Sistemas Químicos de Signos	12
1.2 Investigaciones previas	14
1.2.1 Investigaciones en Matemáticas	15
1.2.2 Investigaciones en Química	16
1.2.3 Confrontación en Matemáticas y Química	17
Capítulo II. Descripción del contexto institucional en México	19
2.1 Currículo de educación básica	19
2.1.1 Currículo de Matemáticas I, II y III para primero, segundo y tercer grado de educación secundaria	19
2.1.2 Currículo de Ciencias III con énfasis en Química para tercer grado de educación secundaria	21
2.2 Currículo de educación media superior de la Escuela Nacional Preparatoria	21

2.2.1 Currículo de matemáticas para primer grado de preparatoria	21
2.2.2 Currículo de Química para segundo grado de preparatoria	23
Capítulo III. Planteamiento del problema de investigación	26
3.1 Justificación	27
3.2 Preguntas de investigación	28
3.3 Objetivos	28
3.4 Marco teórico	28
3.4.1 Un enfoque semiótico	28
3.4.2 Modelos Teóricos Locales	30
3.4.2.1 Modelos de enseñanza	31
3.4.2.2 Procesos cognitivos	33
3.4.2.2.1 Tendencias cognitivas	33
3.4.2.2.2 Sentidos intermedios	35
3.4.2.2.3 Sentidos de uso del cero	36
3.4.2.2.4 El signo igual	37
3.4.2.3 Competencia formal	37
3.4.2.4 Componente de comunicación	38
Capítulo IV. Aspectos metodológicos	39
4.1 Sujetos de estudio	40
4.1.1 Los estudiantes	40
4.1.2 Los docentes	40
4.2 El cuestionario	41
4.2.1 Contenido del cuestionario	42
4.3 La entrevista	47
4.3.1 Protocolo de entrevista	48
4.4 Escenario	51
Capítulo V. Resultados	52
5.1 Resultados de los cuestionarios de los alumnos	52
5.1.1 Resultados de los cuestionarios de los alumnos en Matemáticas	52
5.1.2 Resultados de los cuestionarios de los alumnos en Química	68
5.2 Resultados de los cuestionarios de los docentes	89

5.2 .1 Resultados de los cuestionarios de los docentes en Matemáticas	89
5.2 .2 Resultados de los cuestionarios de los docentes en Química	97
5.3 Resultados de la entrevista	112
5.3.1 Resultados de la entrevista en Matemáticas	112
5.3.2 Resultados de la entrevista en Química	126
Capítulo VI. Conclusiones finales	142
Referencias Bibliográficas	153
Apéndice A. Entrevista Matemáticas	159
Apéndice B. Entrevista Química	255
Anexo: Publicación derivada de este estudio	295

Introducción

La siguiente investigación tiene como objetivo indagar el entrecruzamiento de dos sistemas de signos: el Matemático y el Químico. En los sujetos de estudio se busca encontrar las dificultades que referidas a los sistemas matemáticos de signos, ocasionan errores conceptuales en Química.

Este estudio se piensa desde una práctica reflexiva de la enseñanza de las Matemáticas, específicamente de la adición y sustracción de los números enteros. Se puede afirmar que “algunos alumnos de tercer grado de educación secundaria presentan dificultades para operar con enteros” solo aplican reglas sintácticas que les fueron enseñadas ocasionando dificultades en el aprendizaje de algunos de los conceptos básicos en Química y que persisten en la educación media superior.

En la nomenclatura química y en las reacciones de óxido reducción se utiliza como herramienta básica el álgebra y dentro de ella las operaciones de adición y sustracción con los números enteros.

En los sujetos de estudio se analiza la competencia matemática y la competencia química con un cuestionario. Después se realiza un estudio de caso a partir de una entrevista para advertir si de forma natural aparece el entrecruzamiento de ambos sistemas.

El capítulo I contiene las definiciones necesarias que apoyan la comprensión de este estudio, relacionando lo Matemático con lo Químico en cuanto a los números enteros, así como investigaciones previas en Matemáticas, Química y las que confluyen en ambas.

En el segundo capítulo se realiza la descripción y un análisis del contexto institucional en México en Educación Básica y en Media Superior de los números Enteros en Matemáticas y en Química.

En el capítulo tres se plantea y se justifica el problema de investigación desde la perspectiva semiótica. Se incluye desde el marco teórico de los Modelos Teóricos Locales, utilizado para la Investigación en Matemática Educativa, extendiéndolo a la investigación en la Química, haciendo que converjan en este estudio.

En el capítulo IV se muestran los aspectos metodológicos utilizados en la investigación, definiendo el cuestionario, la entrevista y el escenario. Los resultados de la investigación de los cuestionarios aplicados a los alumnos y a los docentes, así como el análisis de resultados de la entrevista realizada a un docente se muestran en el capítulo V. Las conclusiones de esta investigación se presentan en el capítulo VI.

Capítulo I. Antecedentes de la investigación.

Este capítulo contiene algunos referentes básicos para el desarrollo y comprensión de los contenidos matemáticos y químicos abordados en esta tesis. Algunas investigaciones previas en Matemáticas, en Química e investigaciones que confrontan el lenguaje matemático y el lenguaje químico se describen a continuación.

1.1 Consideraciones básicas

Es necesario clarificar las concepciones tomadas como referente para esta investigación. Para ello, se abordan algunas definiciones referidas a las Matemáticas y a la Química.

1.1.1 Definiciones en Matemáticas

1.1.1.1 Números enteros

El conjunto de los números enteros es una extensión de los números naturales. Esto podemos observarlo en la solución de las ecuaciones de la forma $a = b + x$, las cuales no todas pertenecen al conjunto de los números naturales. Para evitar esa limitación en los naturales, se realiza dicha extensión a otro conjunto Z de los números enteros, como un conjunto isomorfo de los naturales (Bravo, A., Rincón, C. & Rincón, H., 2012).

El conjunto de los enteros está formado por los números naturales, sus negativos y el cero. Los números enteros negativos fueron considerados como números deudos o absurdos hasta la aceptación de los complejos (Barnet, 2000).

Los números negativos no tienen el mismo carácter concreto e intuitivo que los números naturales. Los matemáticos del siglo XIX se dieron cuenta de que la base lógica y filosófica esencial para operar en un dominio extendido de números, es formal. Fue la necesidad de una mayor libertad en los cálculos formales lo que ocasionó el uso de los números negativos. (Courant, 2014).

Los números negativos tienen su origen en las manipulaciones algebraicas, para la resolución de ecuaciones como: $x + 2 = 0$; $x^2 - 2 = 0$ (González, J., Iriarte, M., Jimeno, M., 1990). Por ello en este estudio los números enteros los consideramos como parte fundamental del Álgebra y no de la Aritmética, aunque algunos autores hablan de la Aritmética de los enteros omitiendo el origen de los mismos (Bofferding, 2014; Wheeler, 1996; Bishop, 2014). Simultáneamente y

análogamente, cuando un sujeto realiza la extensión de los Naturales a los Enteros está realizando la transición de la Aritmética al Álgebra.

En el conjunto de los números enteros se conservan todas las propiedades de los números naturales, y tienen una adicional: la existencia de lo opuesto (el simétrico) (Galdós, L. 2007).

En este estudio consideraremos a los números enteros como una herramienta necesaria para otros contenidos matemáticos posteriores, como un instrumento útil para el aprendizaje de la Química y para la vida (González, et al. 1990).

1.1.1.2 Adición y sustracción de enteros

De acuerdo con la definición de números enteros dada en el punto anterior, se considera a la adición y sustracción de enteros como operaciones del Álgebra y no de la Aritmética.

La sustracción se define a partir de la operación de la suma. Si a y b son números enteros, la operación $a - b = a + (-b)$, siendo " $-b$ " el simétrico de " b " en la suma (González, et al. 1990).

En consecuencia se dice que "sumar = restar" (Bruno, 1996). En esta definición podemos observar la necesidad de un simétrico.

Cualquier número entero tiene un opuesto que, sumado con él da cero. $a + (-a) = 0$. Esto permite restar números enteros, entendiéndolo como la suma de lo opuesto. $a + (-b) = a - b$ (Galdós, L. 2007).

1.1.1.3 Sistemas Matemáticos de Signos

El término de Sistema Matemático de Signos (SMS), es introducido por Filloy (1999) para analizar los textos elaborados por los estudiantes que constituyen procesos de producción de sentido. Estos "sentidos" se convertirán en significados vía una interpretación afortunada del estudiante, respecto a una situación problemática.

1.1.2 Definiciones en Química

Es necesario diferenciar los términos definidos en química como "valencia" y "número de oxidación" porque son utilizados por los docentes como sinónimos y aunque existe una relación entre ellos, estos son conceptos diferentes. Se define el número de oxidación porque a partir del mismo se observa el uso de los números enteros implícitos en las fórmulas químicas. Además, se

analizan las operaciones de adición y sustracción de enteros asociadas al cambio del número de oxidación de las especies químicas en las reacciones de óxido reducción.

1.1.2.1 Elemento

Un elemento es considerado como una sustancia que no se puede separar en otras más sencillas por medios químicos. La mayoría de ellos se encuentran de manera natural en la Tierra y los restantes han sido sintetizados mediante reacciones nucleares (Chang, 2013). Los elementos se encuentran clasificados y organizados en la tabla periódica (Scerri, 2013)

1.1.2.2 Átomo

John Dalton en 1808 y en 1810 presenta dos trabajos acerca de su teoría atómica. En los postulados de esta teoría se indica que la materia está compuesta de partículas muy pequeñas llamadas átomos, idénticos en sus propiedades e indivisibles (Cruz, D., Chamizo, J. y Garritz, A., 1986).

Con base en la teoría atómica de Dalton, un átomo se define como la unidad básica de un elemento que puede intervenir en una combinación química (Chang, 2013). Desde 1850 y hasta el siglo XX, las investigaciones mostraron que los átomos tienen una estructura interna y están formados por partículas más pequeñas, llamadas electrones, neutrones y protones.

Los electrones son partículas subatómicas a las que se les asigna una carga negativa y se encuentran fuera del núcleo atómico.

Los protones son partículas subatómicas cargadas positivamente situados en el núcleo atómico.

Los neutrones se encuentran en el interior del átomo y como su nombre lo indican son neutros.

Un átomo tiene el mismo número de protones y de electrones en estado basal, de forma que su carga neta es neutra. El número de protones del núcleo del átomo permanece constante durante una reacción química. Se pueden ceder o ganar electrones.

1.1.2.3IÓN

Un ión es un átomo o un agregado de átomos con carga neta positiva o negativa. Cuando un átomo gana electrones, queda cargado negativamente, entonces se le denomina anión. En el caso opuesto, cuando el átomo pierde electrones, queda cargado positivamente y se le llama catión (Chang, 2013).

1.1.2.4 Molécula

Una molécula es un agregado, formado de dos o más átomos, en una colocación definida unidos por fuerzas químicas llamadas enlaces químicos (Chang, 2013). Las moléculas pueden contener dos o más átomos del mismo elemento o átomos de diferentes elementos. El Hidrógeno (H) gaseoso es un elemento puro formado por dos átomos de Hidrógeno, considerado como una molécula diatómica (H_2). El Agua es un compuesto molecular formado por dos átomos de Hidrógeno y uno de Oxígeno (H_2O). Las moléculas son consideradas con carga eléctricamente neutra.

1.1.2.5 Valencia

El concepto original de valencia tiene el sentido dado por Edward Frankland (Cruz, 1986). En 1852 demostró que algunos átomos se combinan con otros en relaciones de 1:2, 1:3 ó 1:5. Frankland introduce el término de *poder de combinación* indicando la característica que tiene un átomo al combinarse con otro en una relación determinada.

Wichelhaus, C. W. en 1862 introduce el término de *valencia* en el sentido de Frankland como el poder de combinación de un átomo.

La definición de valencia dada por Lewis en 1923 es:

“... definimos la valencia de un átomo en una molécula, como el número de pares de electrones que puede compartir con otros átomos...”

1.1.2.6 Número de oxidación

En Pimentel y Spratley (1971) se define a los números de oxidación como cargas ficticias asignadas a los átomos en las moléculas (o iones) de acuerdo con un conjunto de reglas. No tienen significado físico y son útiles para clasificar los procesos de óxido-reducción.

Benson, S. (2012) muestra las reglas para asignar los números de oxidación:

- A los elementos libres se les asigna cero como número de oxidación.
- Cuando el Hidrógeno “H” se presenta en un compuesto, se le asignará el número de oxidación “+1” (en los hidruros será “-1”).
- La suma de todos los números de oxidación de los elementos presentes en un compuesto es cero.

- La suma de los números de oxidación de los elementos que forman un ión, debe ser igual a la carga del el ión.

1.1.2.7 Los números de oxidación en las reacciones de óxido-reducción.

Para comprender el proceso de óxido-reducción, se utilizan los números de oxidación en términos de ganancia y pérdida de electrones en los elementos presentes en la reacción.

En una reacción química, un elemento se oxida al aumentar su número de oxidación, es decir, cuando ha perdido electrones con referencia a su estado inicial y se reduce al disminuir su número de oxidación, es decir, cuando ha ganado electrones (Benson, S. 2012).

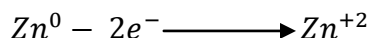
Por ejemplo, un metal como el zinc (Zn) al combinarse con el oxígeno (O₂) pierde dos electrones. Al “perder” electrones, queda cargado positivamente, aumentando su número de oxidación de “0” en estado libre a “+2”. Entonces se dice que se oxida.

Por el contrario, Benson (2012) menciona que un elemento se reduce al disminuir su número de oxidación, esto ocurre cuando “gana” electrones. El oxígeno disminuye su número de oxidación de “0” en estado libre a “-2” en el óxido de zinc (ZnO).

Este proceso se representa con la reacción: $Zn + O_2 \longrightarrow ZnO$

Para que este proceso sea comprendido por los estudiantes, se separa la reacción en dos partes llamadas semi-reacciones:

- La semi-reacción de oxidación:



El Zinc tiene un número de oxidación cero y al combinarse con el Oxígeno, pierde dos electrones quedando cargado positivamente. Los números de oxidación son anotados en el superíndice derecho del símbolo.

La representación matemática del cambio en el número de oxidación del Zinc es:

$$0 - (-2) = +2$$

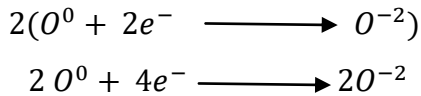
Esto quiere decir que cada átomo de zinc pierde dos electrones.

- La semi-reacción de reducción:

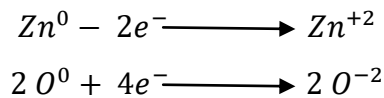


El Oxígeno tiene un número de oxidación cero, que al combinarse con el Zinc, gana los electrones que pierde el zinc quedando cargado negativamente. El cambio matemático en el número de oxidación del Oxígeno es: $0 + (-2) = -2$

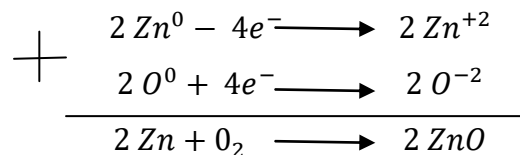
Esto indica que cada átomo de oxígeno gana dos electrones, pero el oxígeno se presenta en la naturaleza como una molécula diatómica¹, por ello la semi-reacción se puede representar como un múltiplo de ella misma:



- Al sumar las semi-reacciones se obtiene la reacción completa. En la primer semi-reacción, el número de electrones cedido “-2”, es diferente al número de electrones ganados “+4”, mostrando un desequilibrio en el balance de carga.



Como cada átomo de Zinc cede dos electrones, podemos duplicar su cantidad de átomos para que cedan cuatro electrones, duplicando todos los términos de la semi-reacción.



Benson, S. (2012) señala que la oxidación y la reducción siempre ocurren juntas y la regla en la cual todos los números de oxidación de un compuesto deben sumar cero, sí se cumple. Aquí encontramos el par dialéctico oxidación- reducción.

1.1.2.8 Sistemas Químicos de signos

Mounin, G. (1981) indica que el estudio sistemático de los códigos inventados por el hombre para comunicarse (diferente al de las lenguas naturales) es un campo esencial para estudiar las leyes de la comunicación. Entre esos sistemas, están los llamados símbolos de la química y sus reglas de combinación que constituyen una serie de códigos.

Renée Mestrallet citada en Mounin, G. (1981) realiza un estudio semiológico de los sistemas de signos de la química a los que llamó Sistemas Químicos de Signos (SQS). Ella distingue entre el discurso informal de la química (lenguaje natural, el de los nombres) y el discurso formal (el de los símbolos y el de las fórmulas).

¹ Molécula diatómica es una molécula formada por dos átomos.

El sistema al que nos referimos es el de la nomenclatura química. Un subsistema de notación química está fundamentado en las lenguas naturales hasta llegar al lenguaje formal propio de la química. La química presenta al menos cuatro tipos de nombres: nombres triviales, nombres semitriviales, nombres funcionales y nombres sistemáticos.

Los nombres triviales no tienen ningún sistema de organización y representan un nombre en la lengua natural o un neologismo de los alquimistas como agua, sal, agua fuerte, etc. Estos términos son arbitrarios y no dan ningún indicio sobre la composición.

Los nombres semitriviales son la combinación de un lexema trivial con un prefijo, un sufijo o un elemento de composición, por ejemplo el sufijo “eno” significa sustancia con doble enlace, sin embargo, en las palabras, benceno, eteno, acetileno, no se indica el número de átomos o su disposición.

Los nombres funcionales son los relacionados con su función química principal como ácido fosfórico, cloruro de plata, etc.


Los nombres sistemáticos describen la suma de los elementos que componen la especie y reconstituyen rigurosamente y sin ambigüedad posible la fórmula de la especie, por ejemplo la especie 2-metil-pentano. Esta nomenclatura corresponde a las reglas que rige la IUPAC (International Union of Pure and Applied Chemistry).

Para Renée Mestrallet citada en Mounin, G. (1981) los nombres triviales y semitriviales no corresponden a ningún sistema de organización. Sin embargo, parece ser que los nombres semitriviales sí tienen cierto nivel de sistematización y dan indicio de su significado. Los nombres funcionales y los nombres sistemáticos sí corresponden a sistemas de organización. Ella observa que coexisten los nombres triviales y semitriviales al lado de los nombres funcionales y sistemáticos por razones de economía, aunque debe considerarse también el aspecto de enseñanza. Los nombres de los compuestos utilizados en la química en cuanto a signos científicos, deben hacer coincidir el nombre con el concepto representado. El problema de nombrar al mismo compuesto de dos formas diferentes o de nombrar a dos compuestos diferentes con el mismo nombre, se corrige con los nombres sistemáticos. Sin embargo, el problema de nombrar o leer una representación simbólica conduce a utilizar fórmulas en lugar de nombres.

Las fórmulas están designadas por símbolos que son representaciones gráficas universales de los nombres de los elementos. Estos símbolos arbitrarios son abreviaturas codificadas a partir de Berzelius en 1819 (Chang, 2013). En general están formados por dos letras, la primera es la inicial de su nombre en latín (en letra mayúscula) y la segunda puede ser una vocal o la segunda consonante (en letra minúscula). A pesar de los esfuerzos de sistematizar los nombres, se le sigue poniendo el nombre del descubridor, o del lugar en donde fueron descubiertos dichos elementos, por ejemplo el Einstenio (Es) o el Berquelio (Bk).

Para este estudio, consideramos a un SQS como la representación de un átomo, un elemento, un compuesto, una molécula, un ión y en general una especie o un agregado químico. Estas representaciones pueden ser gráficas o formales.

En la siguiente tabla se muestran diferentes SQS para el alcohol etílico o etanol.

Fórmula condensada	Fórmula semidesarrollada	Fórmula desarrollada	Fórmula estructural
C_2H_6O	CH_3-CH_2-OH	$ \begin{array}{ccccccc} & & H & & H & & \\ & & & & & & \\ H & - & C & - & C & - & O - H \\ & & & & & & \\ & & H & & H & & \end{array} $	

Algunas unidades que construyen la representación de las relaciones entre elementos o átomos en la notación química son: los guiones, los corchetes, los paréntesis, las flechas, los subíndices, los superíndices, los signos de “+”, “-”, “=” y el cero, que juntos le dan un sentido sistemático a la especie química.

Se siguen descubriendo elementos (el 117 de la tabla periódica confirmado el 4 de mayo de 2014 llamado Ununseptio) y se han continuado sintetizando en el laboratorio nuevos compuestos orgánicos, por ello la notación química es considerada como sistema abierto.

1.2 Investigaciones previas

Se realizó una revisión bibliográfica de las dificultades enfrentadas por los alumnos en el aprendizaje de la química referidos a los sistemas matemáticos de signos SMS, presentados en la

enseñanza del álgebra y los acaecidos en matemáticas y en química. A continuación se muestran algunas de estas investigaciones.

1.2.1 Investigaciones en Matemáticas

Glaeser (1981), estudia el paso de los números negativos a los enteros, buscando los obstáculos presentados en la comprensión y el aprendizaje de los números negativos. Schubring (1986) realiza un estudio histórico en textos matemáticos de franceses y alemanes de los números negativos, categorizando los obstáculos existentes en la aceptación y formalización de los números negativos, conectando lo histórico con lo epistemológico en diferentes culturas. Lizcano (1993) confronta la matemática china con la griega analizando las causas de la aparición de la negatividad en la cultura china y su tardía aparición en la occidental. La existencia de los opuestos filosóficos del bien y el mal, y su armonía espiritual permite la existencia del cero como el equilibrio en la cultura china, admitiendo el uso de los números negativos. Mientras que en una visión occidental del “ser o no ser” los números sólo pueden considerarse positivos mostrando la imposibilidad de aceptar a los números negativos.

Gallardo, A., (1994) realizó un estudio histórico-crítico de los números negativos en el contexto de la resolución de ecuaciones algebraicas, mostrando el evitamiento de los mismos, examinando los distintos niveles de lenguaje así como el uso del Modelo Chino. Esta autora se percató que existen las mismas dificultades para la aceptación de los números negativos en sujetos del pasado y del presente cuando se trata de resolver ecuaciones algebraicas con problemas de enunciado verbal.

Macgregor, M. & Stacey, K. (1997) advierten en sus investigaciones que existen diferentes sistemas de signos usados en la escuela y en actividades cotidianas tan diversas como en la electrónica y es el punto de partida en el cual los estudiantes hacen analogías útiles o poco útiles con el álgebra. Para los alumnos, los sistemas de símbolos de la química² son semejantes a los de la notación algebraica, en el uso de corchetes para referirse a la agrupación y a ecuaciones que representan la combinación de cantidades. En este aspecto los estudiantes tienen que aprender los diferentes significados de las letras unidas en los dos sistemas (SMS y SQS), e.g. dos letras unidas en un SQS significa la adición en el sentido de la combinación química, mientras que en un SMS implica la multiplicación. La posición de numerales para indicar múltiplos de cantidades puede

² En este estudio nos referimos a los sistemas de símbolos de la química como sistemas químicos de signos.

ser semejante en ambos sistemas. Mencionan que “algunas características de los sistemas de signos son intuitivas y fácilmente comprendidas y otras no”.

El fenómeno de la polisemia en matemáticas se advierte en los estudiantes durante la transición de la aritmética al álgebra. Filloy, Rojano y Solares (2010) muestran la existencia de la polisemia³ de “x” en ecuaciones del tipo $x + \frac{x}{4} = 6 + \frac{x}{4}$ presentada en la lectura espontánea de estudiantes principiantes del álgebra. Se observa que “x” es vista como incógnita y en “ $\frac{x}{4}$ ” es considerada como número general. Dentro de una misma expresión algebraica estos estudiantes pueden visualizar a la “x” con dos significados diferentes.

1.2.2 Investigaciones en Química

Uno de los problemas presentados en la enseñanza de la química es aquel relacionado con la polivalencia⁴ semántica, en la que una misma palabra tiene diversos significados. Esta polivalencia está presente en el lenguaje químico así como en el lenguaje algebraico y en el lenguaje cotidiano o natural en palabras como fórmula, coeficiente, subíndice, factor, ecuación, enlace y exponente Córdova, J., (1995).

Chamizo J.A., Nieto, E. & Sosa, P. (2004) realizaron una investigación transversal con alumnos de estudios concluidos de primaria, secundaria, bachillerato y licenciatura acerca de las concepciones de los alumnos de mezcla, aire, vacío, compuesto, elemento, evaporación, átomo, protón, neutrón, electrón y fórmula química, obteniendo que sólo el 39% de los alumnos entienden el lenguaje químico y concluyen que los conceptos básicos de química mencionados, no llegan a ser plenamente comprendidos sino hasta el término de una carrera profesional del área de química. También indican que los conceptos de química se van construyendo en los diferentes niveles y cuando los alumnos aprenden “mal” un concepto es difícil revertir ese aprendizaje, sugiriendo a los docentes poner mayor énfasis en asegurarse que los conceptos básicos de la química sean bien aprendidos en los niveles preuniversitarios.

³ La palabra polisemia no solo está referida a las palabras, en este caso se presenta en los signos que se utilizan para representar a las variables o incógnitas.

⁴ La palabra polivalencia significa muchas valencias, sin embargo lo que el autor quiere decir es polisemia que significa multiplicidad en los significados de una misma palabra.

Los estudiantes de educación secundaria, universitarios incluso docentes presentan dificultades en el aprendizaje de la Química en temas como estequiometría, fórmulas, reacciones de oxidación-reducción, enlace químico, equilibrio químico, estado gaseoso y soluciones, siendo estos temas calificados como difíciles por los mismos estudiantes (Cárdenas, F. 2006).

1.2.3 Confrontación en Matemáticas y Química

Los alumnos y docentes de educación secundaria manifiestan confusión entre el lenguaje algebraico y el lenguaje químico⁵ dentro de contextos de la química.

En la enseñanza no está advertida la sintaxis y la semántica de cada lenguaje (Castillo L., 1992, 1992). Existe un predominio del lenguaje algebraico sobre el lenguaje químico mostrado en las Tabla 1 y 2 (Castillo L. y. Gallardo, A., 1996).

Lenguaje químico	Lenguaje algebraico
1. Se usan letras para representar a los elementos y se les conoce.	Se usan letras para representar números que son desconocidos.
2. Un símbolo químico representa a su vez propiedades químicas y físicas.	Una letra puede representar un número constante o variable, pero desconocido.
3. Los átomos de un elemento, pueden formar compuestos.	Los números primos forman números compuestos.
4. Los elementos, se combinan en proporciones definidas: Cl_2O , Cl_2O_3 , Cl_2O_5 , Cl_2O_7 (ley de las proporciones múltiples).	Números diferentes se relacionan entre sí, mediante operaciones aritméticas: XY , XY^2 , XY^3 , XY^4 .
5. En un compuesto, las masas atómicas se están sumando: NaCl : $23+35.5=58.5$	En una expresión los símbolos yuxtapuestos se están multiplicando: $XY^2=X \cdot Y^2$
6. Los subíndices en un símbolo representan el número de átomos: Br_2 , O_2 .	El subíndice en un número representa a otro número: X , X_1 , X_2 , ...
7. La valencia se representa con un índice superior en el símbolo: Ca^{2+} , N^{3-} .	El índice superior de un número es un exponente: X^3 , X^4 , $1/X^4$.
8. Un elemento se puede transformar en otro: $\text{S} \rightarrow \text{Au}$.	Un número X se puede transformar en Y , mediante una función.
9. La oxidación se representa con signo “+” (pérdida) y, reducción con signo “-” (ganancia).	El concepto de ganancia se representa como positiva, el de pérdida como negativa.

Tabla 1. La Pragmática del Lenguaje Químico y Algebraico. Parte 1.

⁵Castillo realiza su estudio utilizando las palabras “lenguaje químico” y en esta tesis se remarca una perspectiva de sistemas de signos.

Lenguaje químico	Lenguaje algebraico
10. En el equilibrio químico, hay transformación de sustancias, es temporal y las reacciones pueden ser irreversibles.	En el equilibrio algebraico (ecuaciones) es estático, reversible.
11. Un número antes de una fórmula multiplica a la suma de las masas: 3HCl ($M_{\text{H}}+M_{\text{Cl}}$).	Un número antes de una expresión multiplica al producto de los componentes: $2\text{XY}=2\cdot\text{X}\cdot\text{Y}$
12. El curso de una reacción química se denota con flechas. Una flecha a la izquierda \leftarrow o una flecha a la derecha \rightarrow representa la igualdad de las masas y las energías (Gibbs), entre los reactivos y los productos.	El signo (=) es la representación de identidad en los números. El signo (=) representa equivalencia de expresiones algebraicas.
13. La carga afecta al símbolo, un coeficiente numeral da el número de veces de la carga. $\text{N}_2 \xrightarrow{\text{(se oxida)}} 2\text{N}^{3+}$ y se pierden 2×3 electrones.	El exponente solo afecta a la base y un coeficiente no afecta al exponente: $2x^3 \neq 6x$
14. Ley de la Conservación de la Materia: En $\text{CaSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ el número cinco del agua, no se puede cambiar de posición en la fórmula.	Es indiferente: en $\text{X} \cdot \text{Y} \cdot 5\text{Z} = 5 \cdot \text{X} \cdot \text{Y} \cdot \text{Z}$, no importa la posición del número 5.

Tabla 2. La Pragmática del Lenguaje Químico y Algebraico. Parte 2.

Capítulo II. Descripción del contexto institucional en México

En este capítulo se realiza un análisis del currículo concerniente a las asignaturas de matemáticas y de química, en los niveles de educación secundaria y preparatoria, para localizar los contenidos relevantes en nuestro estudio y la forma en la que son abordados.

2.1 Currículo de educación básica

En el acuerdo 592 publicado en el año 2011, se establece la articulación de la educación básica en México. En este documento, se especifican los propósitos, el enfoque, los estándares curriculares y los aprendizajes esperados relacionados con los contenidos para todas las asignaturas. El cuarto período escolar de educación básica corresponde a educación secundaria, en el cual, se encuentran localizadas las asignaturas de Matemáticas I, II y III, así como Ciencias III con énfasis en Química.

2.1.1 Currículo de Matemáticas I, II y III para primero, segundo y tercer grado de educación secundaria respectivamente

En el programa de estudio (SEP, Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Secundaria. Matemáticas., 2011), se hace notar que el logro de aprendizajes y los estándares curriculares favorecen el desarrollo de competencias centrado en los estudiantes. En cuanto a los propósitos de este nivel, dos de ellos son trascendentales para este estudio:

“... se espera que los alumnos:

- Utilicen el cálculo mental, la estimación de resultados o las operaciones escritas con números enteros, fraccionarios o decimales, para resolver problemas aditivos y multiplicativos.
- Modelen y resuelvan problemas que impliquen el uso de ecuaciones hasta de segundo grado, de funciones lineales o de expresiones generales que definen patrones. ...”

Estos dos propósitos están incluidos en el eje temático “Sentido numérico y pensamiento algebraico”. Los estándares curriculares para este eje temático correspondiente a los propósitos mencionados son: 1) que el alumno resuelva problemas aditivos que impliquen efectuar cálculos con expresiones algebraicas, 2) que el alumno resuelva problemas multiplicativos con expresiones algebraicas a excepción de la división entre polinomios, 3) que el alumno resuelva problemas que implican expresar y utilizar una regla general lineal o cuadrática de una sucesión y 4) que el alumno resuelva problemas que involucran el uso de ecuaciones lineales o cuadráticas.

Los contenidos en los que aparecen los números enteros en primer grado de educación secundaria son:

- Planteamiento y resolución de problemas que impliquen la utilización de números enteros, fraccionarios o decimales positivos y negativos.
- Resolución de problemas que implican el uso de sumas y restas de números enteros.

El reto del docente en este enfoque (SEP, Matemáticas, 2011), consiste en utilizar secuencias de situaciones problemáticas, analizar los procesos que siguen los alumnos para construir conocimientos y la aplicación de diferentes estrategias para la resolución de las situaciones problemáticas.

Las cuatro competencias matemáticas a desarrollar en los alumnos son: 1) *resolver problemas de manera autónoma*, que implica identificar, plantear y resolver problemas o situaciones; 2) *comunicar información matemática* para expresar, representar e interpretar información matemática, contenida en una situación o en un fenómeno; 3) *validar procedimientos y resultados* explicando y justificando los procedimientos y soluciones encontradas mediante argumentos direccionados a un razonamiento deductivo o demostraciones formales; y 4) *manejar técnicas eficientemente*, refiriéndose a éstas como el uso eficiente de procedimientos y formas de representación que hacen los alumnos al efectuar cálculos, recalcando que no se limita al uso mecánico de las operaciones, sino que principalmente al desarrollo de significado y uso de los números y las operaciones.

Para esta investigación, contemplamos de los contenidos matemáticos, problemas aditivos de números enteros, el significado de las operaciones, expresiones algebraicas abiertas y ecuaciones lineales.

Nos damos cuenta que en el programa 2011, se remarca *el desarrollo del significado y uso de los números y las operaciones*, sin embargo, en los contenidos no se enfatiza. Solo aparece para el caso de enteros el uso, sin indicar el significado de las operaciones como en la adición o sustracción. Por otro lado, tampoco aparecen explícitos los conceptos del simétrico, el valor absoluto, el orden, el inverso aditivo, la operatividad y algunas propiedades de los números que van completando el concepto del número entero. Además el caso de las ecuaciones, no aparecen problemas de una ecuación con dos incógnitas que aunque parece trivial, es una oportunidad de mostrar a los alumnos problemas con multiplicidad de soluciones.

2.1.2 Currículo de Ciencias III con énfasis en Química para tercer grado de educación secundaria

Los contenidos presentados en el currículo de Química (SEP, Ciencias, 2011) notables para este estudio se muestran a continuación:

En el bloque I los contenidos son las aportaciones de Lavoisier, específicamente la ley de la conservación de la materia⁶.

En el bloque II, los contenidos que nos interesan en este estudio son:

- Elementos y compuestos, en el cual los alumnos deben representar y diferenciar mezclas, compuestos y elementos con base en el modelo corpuscular⁷.
- El modelo atómico de Bohr (protones, neutrones y electrones).
- La valencia⁸, los electrones de valencia a partir de la estructura de Lewis y los modelos de enlace iónico (transferencia de electrones).
- Uno de los aprendizajes esperados de este bloque especifica que el alumno represente mediante simbología química elementos, moléculas, átomos, iones (aniones y cationes).

En el tercer bloque se explicitan las manifestaciones y representaciones de las reacciones químicas (ecuaciones químicas). Finalmente en el cuarto bloque, se presentan los contenidos relacionados a las características y representaciones de las reacciones redox⁹ y número de oxidación.

En esta investigación nos enfocamos en las representaciones de átomo, molécula, compuesto, enlace, reacción química, el significado de los coeficientes estequiométricos (ley de la conservación de la materia), significado de los subíndices en una fórmula química, identificación de especies que se reducen y se oxidan en una reacción química utilizando los números de oxidación. Las entidades como los subíndices son los que se confrontan en la investigación en ambos sistemas (SMS y SQS).

2.2 Currículo de educación media superior de la Escuela Nacional Preparatoria (ENP)

2.2.1 Currículo de matemáticas para primer grado de preparatoria

El enfoque de esta asignatura en la ENP (UNAM, Matemáticas, 1996) es por resolución de problemas. Por medio de los contenidos propuestos, el alumno conocerá, comprenderá y aplicará la simbología de teoría de conjuntos, las diferentes bases numéricas, las propiedades de los

⁶ En las reacciones químicas la materia no se crea ni se destruye solo se transforma.

⁷ En el modelo corpuscular la materia está formada por partículas representadas por esferas.

⁸ Definida en 1.1.2.5

⁹ Redox es la forma abreviada de nombrar a las reacciones de óxido-reducción.

números reales y las operaciones fundamentales con expresiones algebraicas, así como el planteamiento, la resolución y la interpretación de problemas de esta asignatura y otras disciplinas, principalmente de la Física, la Química, la Economía, que se resuelven en términos de una ecuación, una desigualdad, de un sistema de ecuaciones o un sistema de desigualdades.

En el programa de la asignatura se indica que el nivel de dificultad de los problemas planteados irán aumentando progresivamente en el tratamiento de un mismo tema; para cada problema el profesor establecerá mecanismos de análisis de los componentes conceptuales y operativos del problema en cuestión, a fin de que el alumno, en lo posible, lo racionalice, identifique sus elementos y las relaciones entre ellos, y finalmente, encuentre sus posibilidades de representación, de solución, y de interpretación, por lo que el método de este programa es constituirse en una etapa intermedia del desarrollo curricular de la enseñanza de las Matemáticas en el bachillerato y de tránsito progresivo de una enseñanza lineal y algorítmica a una enseñanza de construcción.

De acuerdo al enfoque de la asignatura, en el propósito principal predomina el conocimiento del álgebra, el uso de la misma en la solución de problemas de otras disciplinas afines, así como concebir a las matemáticas como un lenguaje y una herramienta.

El eje conductor desde el punto operativo es el álgebra. Esta asignatura está estructurada en tres bloques, a saber: en el primero se definen la simbología, el lenguaje algebraico, los sistemas de numeración y el campo de los números reales. El segundo es el operativo o instrumental en el que se reafirman las operaciones fundamentales con polinomios. En el tercero, se aplican los dos primeros, planteando un conjunto de problemas tipo procedentes de otras disciplinas; a fin de exponer el tema y modelar con los alumnos diversas aproximaciones de solución.

Los contenidos abordados en esta investigación relacionados con el plan de estudios de la asignatura se encuentran en las siguientes unidades. En la tercera unidad se analiza en el campo de los números reales la extensión de los naturales a los enteros y de los enteros hacia los racionales por medio del análisis de las propiedades de adición y multiplicación, y su operatividad. En esta unidad los alumnos deben localizar a los números enteros en la recta numérica, se establecen las propiedades de orden, las propiedades conmutativa, asociativa, la existencia del neutro y la existencia del inverso aditivo, enfatizando la no existencia del inverso multiplicativo requiriendo un sistema numérico más amplio, el de los racionales. Se hace necesario pasar de la

representación numérica a la representación simbólica para generalizar las reglas operativas de las matemáticas por medio de la resolución de problemas.

La operatividad de monomios y polinomios se encuentra en la cuarta unidad, cuyo objetivo es propiciar la mecanización de las operaciones fundamentales del álgebra. Se revisa la simplificación de términos semejantes, se opera con símbolos de agrupación. Se revisan y se aplican las leyes de los signos para la multiplicación y se enfatiza la propiedad distributiva.

En la séptima unidad se estudian las ecuaciones y desigualdades de primer y segundo grado así como sus métodos de solución, expresando situaciones problemáticas expresadas en una sola variable con una o más soluciones posibles. Finalmente en la octava unidad se estudian sistemas de ecuaciones y desigualdades lineales, se resuelven problemas que llevan a dos ecuaciones con dos variables, de tres ecuaciones con tres variables por los métodos de suma o resta, igualación, sustitución, gráficamente y por determinantes.

En este plan de estudios notamos la ausencia del significado de las operaciones en los números enteros por el uso de reglas operatorias. Adicionalmente encontramos la misma omisión que hay en el programa de secundaria, el de la solución de una ecuación con dos o más variables, considerándolo de importancia porque le permite visualizar al alumno a una ecuación como una relación funcional.

2.2.2 Currículo de Química para segundo grado de preparatoria

La asignatura de Química III se imparte en segundo grado de la ENP y es obligatoria. El enfoque disciplinario enfatiza el impacto de la ciencia y la tecnología en la vida actual, permitiendo promover en el alumno una ética de responsabilidad individual y social, poniendo en práctica sus conocimientos de química y su capacidad crítica.

Los propósitos generales (UNAM, Química, 1996) de este curso son que el alumno adquiera una cultura científica desarrollando su capacidad de analizar información de manera crítica, comunicándose de forma oral y escrita, así como propiciar investigaciones desarrollando en los alumnos y docentes la creatividad, generando líneas de investigación en el área de la química.

Los contenidos del curso propician la adquisición de los conocimientos esenciales de la química aún para aquellos que no seguirán una carrera relacionada con la química.

La finalidad del curso es que el alumno adquiera los conocimientos fundamentales y efectúe la integración entre ciencia, tecnología y sociedad, familiarizándose con la Química, adquiriendo una cultura básica.

Los conceptos básicos de la Química en este curso se repiten una y otra vez a lo largo de las diferentes unidades, así como el vocabulario, las habilidades de pensamiento y las técnicas de laboratorio.

Se consideran cursos antecedentes a esta asignatura la introducción a la Física y a la Química, Química I, Química II, Física I y Física II del nivel Básico¹⁰. Así también, Física III en el primer año de bachillerato. Los diferentes cursos de Matemáticas proporcionan las herramientas básicas para el manejo e interpretación de gráficas, ecuaciones y expresiones científicas.

El curso cuenta con cinco unidades. Los contenidos relacionados en este estudio presentes en la asignatura de Química III en la primera unidad “La energía, la materia y el cambio” son la composición de la materia: átomos y moléculas, partículas subatómicas (electrones, protones y neutrones así como sus cargas), la ley de la conservación de la materia, cambios químicos y las reacciones químicas y teoría atómica de Bohr.

De la segunda unidad “Aire, intangible pero vital” los contenidos relacionados en nuestro estudio son la reactividad de los componentes de aire específicamente el oxígeno y el dióxido de carbono, enlace químico, regla del octeto y símbolos de Lewis, reacciones de combustión y características del ozono y alotropía.

El agua, sus propiedades y su estructura molecular son estudiadas en la tercera unidad “Agua. ¿De dónde, para qué y de quién? De la cuarta unidad “Corteza terrestre, fuente de materiales” se desprenden los contenidos de enlaces metálicos e iónicos, el modelo cinético molecular y cálculos estequiométricos.

Hemos podido observar que los temas de este curso son muy extensos y por ello es posible que no se le dé la profundidad mínima a cada uno de ellos para que se cumpla la finalidad del mismo. Adicionalmente parece haber una discontinuidad entre los contenidos de educación básica de la

¹⁰ Estas asignaturas consideradas como antecedentes, ya no existen como tal en el plan actual 2011 de educación secundaria. En su lugar solo se imparten Física en un solo curso y Química en un solo curso, lo cual parece insuficiente.

asignatura de Química con la de la ENP. También apreciamos la importancia que se le da a los cursos de Matemáticas como antecedente de esta asignatura, sin embargo, solo las consideran necesarias para la interpretación de gráficas, ecuaciones y expresiones científicas, dejando a un lado el significado mismo de las operaciones necesarias para comprender los procesos de oxidoreducción (Salinas, G., Gallardo, A. y Mendoza, E., 2015).

Capítulo III. Planteamiento del problema de investigación

Existen algunos conceptos básicos en química como el átomo, la molécula, el compuesto, la reacción química y los procesos de óxido reducción, cuyo conocimiento es indispensable en la construcción de nuevos conceptos químicos y otros implícitos como son la nomenclatura, la valencia y el número de oxidación. Estos conceptos no están formalizados en docentes y en alumnos porque provienen de una enseñanza carente de significado y están intrínsecamente relacionados con la concepción de los números enteros.

Parece ser poca la preocupación presentada por parte de los docentes para que los alumnos aprendan correctamente estos conceptos básicos, y como ya dijimos, son la base para la adquisición de nuevos conocimientos y que deben construirse en los niveles de educación básica y preuniversitarios. El docente considera más importante cubrir un programa, que el aprendizaje de conceptos a profundidad, que dependen muchas veces de una formación matemática sólida.

La enseñanza de la química se apoya en modelos que históricamente fueron desarrollándose como representaciones, mediante las cuales el sujeto se acerca a la realidad. Los modelos que representan a esta realidad, están basados en constructos matemáticos tanto geométricos como algebraicos.

El tema a estudiar es cómo a partir de la estructura atómica por medio de modelos con representaciones, los alumnos pueden ir construyendo los conceptos de átomo, molécula, compuesto, reacción química, reacción de óxido reducción, valencia, número de oxidación y cómo son expresados simbólicamente, así como el significado de cada una de las partes que los componen. Para ello es indispensable el conocimiento de lenguaje algebraico en el que está inmersa la operatividad de los números enteros Gallardo (2002).

En química se maneja un lenguaje con un sistema de signos entrelazado con el lenguaje natural, el lenguaje algebraico y el lenguaje físico. Lo que se pretende investigar es cómo los sistemas matemáticos de signos (SMS) se entrecruzan en los sistemas químicos de signos (SQS).

3.1 Justificación

La necesidad de diferenciar los signos de los lenguajes algebraico y químico, se hace evidente por el diferente uso dado a un mismo signo en ambos lenguajes. Este hecho conlleva a recurrir a una perspectiva semiótica.

En el lenguaje químico el alumno debe dominar los conceptos utilizados en la física como los relacionados con la estructura de la materia, por ejemplo, el átomo, las partículas subatómicas y sus cualidades que sirven de andamiaje para la construcción de nuevos conceptos en química. Es importante mencionar que históricamente algunos descubrimientos realizados acerca de la materia fueron llevados a cabo por físicos y retomados para describir los procesos en Química. Por esta razón, es difícil clasificar a este tipo de conceptos dentro de la Física o de la Química y tomó muchos años a los científicos aceptar la Química separada de la Física.

Uno de los principales problemas a los que se enfrentan los alumnos y los docentes es el uso de nuevos signos y el de signos ya conocidos pero que son utilizados con otros significados.

Cuando los alumnos comienzan sus estudios en química, ya han aprendido el uso de signos como los paréntesis en álgebra y aunque su significado es el de agrupar, la sintaxis utilizada en álgebra es diferente a la utilizada en química. Este tipo de situaciones representa un obstáculo para el aprendizaje de la química.

Otro de los obstáculos del aprendizaje de la química surge de la polisemia de significados para una misma palabra al contrastarla en el lenguaje natural, el algebraico y el químico como se mencionó en la introducción de este texto. Adicionalmente puede existir polisemia de significados para una misma palabra dentro del mismo lenguaje químico, como la palabra sustancia (Furió-Mas, 2007) que puede referirse a un elemento o a un compuesto, esta diferencia en el significado genera confusión, que se aclara cuando el alumno conoce un modelo para representar átomos, compuestos y elementos.

Por otro lado, se ha observado el uso de la tabla periódica como material de consulta en la enseñanza de la Química por docentes de educación media básica y media superior. En estos materiales, los conceptos de valencia y número de oxidación son presentados como sinónimos

aunque no lo son. Es por ello pertinente, estudiar las concepciones de los docentes, apreciando la competencia Matemática y la competencia Química.

3.2 Preguntas de investigación

Con base en las apreciaciones anteriores, planteamos las siguientes preguntas de investigación:

- *¿Cómo influye el nivel de competencia en matemáticas en el nivel de competencia en química?*
- *¿Cuáles son las analogías y diferencias en un SMS y un SQS en alumnos de educación media superior, y en docentes de educación media superior y de educación media básica?*
- *¿Cómo se entrecruzan los modelos de enseñanza de la matemática y de la química para la construcción de conceptos en un SQS?*

3.3 Objetivos

Identificar si el nivel de competencia en matemáticas influye en el nivel de competencia en química.

Apreciar las analogías y diferencias entre un SMS y un SQS presentadas en alumnos de educación media superior.

Valorar las analogías y diferencias entre un SMS y un SQS presentadas en docentes de educación media básica y en docentes de educación media superior.

Determinar cómo se entrecruzan los modelos de enseñanza de SMS y de SQS en los contenidos mencionados con anterioridad.

3.4 Marco teórico

3.4.1 Un enfoque semiótico

El presente estudio tiene una perspectiva semiótica, desde la significación de los signos, cómo estos se entrecruzan en matemáticas y en química y cómo el lenguaje de los físicos se encuentra inmerso dentro de la química.

Peirce entiende a la semiótica como el estudio del signo en general, dividiéndolo en la gramática como estudio de los signos y sus conexiones mutuas, la dialéctica como la relación con los objetos y la retórica como las modificaciones que les infieren los usuarios (Peirce, 1974). Morris llama

sintaxis a las relaciones de los vehículos de signo entre sí, lo que para Peirce es la gramática; llama *semántica* a las relaciones de los signos con los significados, lo que para Peirce es la dialéctica y llama *pragmática* a las relaciones entre los vehículos de signo con los usuarios lo que para Peirce es la retórica (Morris, 1958).

Para Peirce existe una relación triádica entre el signo o representamen, una cosa u objeto y un intérprete (Beauchot, 2004). El signo para Peirce es considerado un objeto que representa a otro, dividiéndolo en índice, ícono y símbolo. El índice es el signo inmediato y es casi natural, es una representación directa, por ejemplo el humo representa al fuego. El ícono es un signo intermedio, contiene algo natural y algo artificial, basado en algo de la realidad pero impuesto por el hombre y puede contener alguna semejanza o analogía con la realidad como el emblema de la justicia. El símbolo es totalmente arbitrario, se refiere al objeto por asociación de ideas generales, es un Legisigno¹¹ (Peirce, 1974).

Barthes visualiza a la semiología como un estudio del signo en general más allá de la lingüística ya que considera al lenguaje como un subconjunto de los signos aunque sea el más complicado porque es el utilizado para estudiar otros sistemas. Este autor estudia el significado, cómo hacemos inteligible o significativo lo cotidiano, cómo hacemos significante lo insignificante y dice que la semiología tiene por objeto de estudio todos los sistemas de signos (Barthes, 1971).

Desde la perspectiva semiótica de la Química, Georges Mounin (1981) examina la importancia de los símbolos químicos y sus reglas de combinación que constituyen un código o una serie de códigos dentro de un sistema de comunicación. Renné Mestrallet (1980) citada en Mounin presenta el análisis de las unidades¹² utilizadas en los sistemas de notación química realizando un estudio de los sistemas de signos de la química. En él se indica que las fórmulas construidas a partir de los símbolos, para representar los productos¹³ cada vez más complejos de la química, constituyen en sí subsistemas semiológicos.

Otra de las consideraciones hechas por Suckling, (1978) es la de repensar a la química a través de los modelos como von Neumann lo hacía en la física, las matemáticas o en la informática como son los diagramas de flujo. La importancia de retomar la idea del uso de modelos la presenta

¹¹ Legisigno se refiere a un signo por ley, es decir, por convención.

¹² Cuando el autor se refiere a unidades, no se refiere a unidades de medida sino a entidades de la química.

¹³ Se refiere a compuestos.

Chamizo, (2006). Este autor identifica las ocho siguientes características de los modelos: son representaciones, son instrumentos, forman analogías con la realidad, son diferentes a la realidad, se construyen, se desarrollan de manera iterativa a lo largo de la historia, deben ser aceptados en la comunidad científica y pueden ser icónicos o conceptuales.

Chamizo (2006) manifiesta la necesidad de utilizar los modelos, no sólo como el modelo explicativo para la comprensión de un fenómeno ante la mirada de un científico, sino lo considera útil para la enseñanza, cuando los estudiantes comprendan que se trata de un modelo representando un objeto, un sistema o un proceso, que es un instrumento útil para responder las preguntas de la ciencia de algo que no se puede explicar por observación directa como los átomos, que guardan analogías con el objeto que representan sin ser completamente iguales, que son más sencillos de la realidad que representan por lo cual no son la realidad únicamente un acercamiento, que la construcción de un modelo es un compromiso entre las analogías y diferencias que tienen con los objetos que representan, por ello los modelos van desarrollándose al contrastarse con la evidencia empírica a través de la historia.

Dentro de los modelos que menciona Chamizo (2006), se encuentran los modelos icónicos como imágenes u objetos de tamaño diferente a lo que representan y los modelos conceptuales relacionados con el lenguaje a través de fórmulas matemáticas o de símbolos como el lenguaje químico.

3.4.2 Modelos Teóricos Locales

Para el presente estudio se utiliza como marco teórico a los modelos teóricos locales (MTL) que Filloy (1999), propone para la observación experimental en matemática educativa y que podemos extender para la Química. Los MTL tienen un carácter descriptivo, explicativo y predictivo. El término Sistema Matemático de Signos (SMS) Filloy (1999) lo introduce para analizar los textos elaborados por los estudiantes que constituyen procesos de producción de sentido. Estos “sentidos” se convertirán en significados por una interpretación afortunada del estudiante, respecto a una situación problemática planteada.

Desde la matemática Filloy, Puig y Rojano, (2008) reconocen la importancia de analizar las interrelaciones del lenguaje algebraico con el lenguaje natural y con el de la aritmética para conocer el pensamiento de los estudiantes que se inician en el álgebra. En el presente estudio como

se mencionó antes, se ve reflejada la necesidad de analizar las interrelaciones del lenguaje químico con el lenguaje natural y el lenguaje algebraico para identificar los procesos cognitivos de los estudiantes que se inician en el conocimiento de la química.

En los modelos teóricos locales Filloy (1999) propone cuatro componentes interrelacionados entre sí. Estos componentes son el de los modelos de enseñanza, el de los procesos cognitivos, el de competencia formal y el de comunicación.

3.4.2.1 Modelos de enseñanza

Son modelos que se utilizan para la enseñanza y se proponen en contextos más concretos, familiares para el alumno, para dotar de significados a las nuevas operaciones y a los nuevos objetos para construir los primeros elementos de sintaxis. Estos modelos de enseñanza están formados por una secuencia de textos matemáticos cuya elaboración y decodificación por el estudiante le permite interpretar todos esos textos en un SMS más abstracto. Un texto matemático es el producido por una concatenación mezclada de signos que proceden de distintos sistemas de códigos, incluido el lenguaje natural y los sistemas de signos personales de cada estudiante y que desaparecerán cuando estos sujetos realicen procesos de abstracción que los conduzcan a un SMS socialmente establecido. De igual forma al extender este componente en Química, podemos decir que un texto químico se produce por una concatenación mezclada de signos que proceden de sistemas de códigos, del lenguaje natural, de los sistemas de signos personales de cada estudiante y de SMS iniciales y cuando los estudiantes realizan procesos de abstracción, pueden llevarlos a SQS y a SMS a niveles de mayor abstracción que los sistemas iniciales de los que partieron.

Concerniente a los modelos utilizados en la enseñanza de la Química y sus SQS, Matus, Benarroch y Nappa, (2011) analizan libros de texto para identificar el modelo atómico que un estudiante requiere. Perales y Jiménez (2004) proponen una clasificación de las ilustraciones presentadas en los libros de texto. Galagovsky, L. (2004) emplea la clasificación de Perales y Jiménez (2004), profundizando sobre el tipo de lenguaje, diferenciando entre el lenguaje gráfico como aquellas representaciones concretas, por ejemplo la distribución espacial entre átomos en un compuesto químico y el lenguaje formal que implica el uso de símbolos con reglas semánticas preestablecidas. Para este estudio, utilizamos esta clasificación en términos semióticos, mostrada en la Tabla 3.


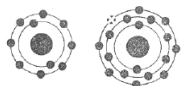
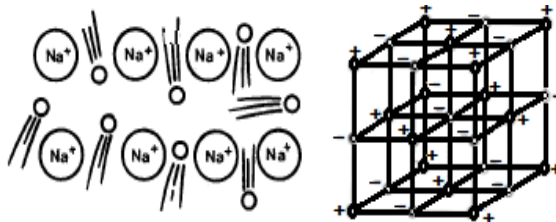
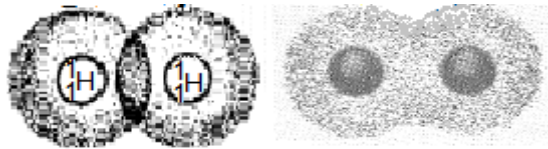
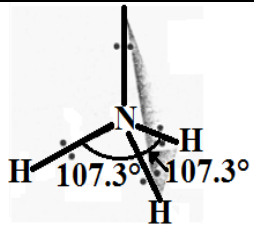
Grado de iconicidad	Representaciones concretas	SQS
Dibujo figurativo	<p>Bolas y varillas fusionado bolas</p> 	Gráfico
Dibujo figurativo más signos	<p>Niveles electrónicos</p> 	Formal
	<p>Otros</p> 	Gráfico
Dibujo esquemático más signos	<p>Orbitales moleculares</p> 	Gráfico y formal
		Gráfico y formal
Descripción en signos normalizados	<p>Lewis</p> $\text{Na}^+ \left[\begin{array}{c} \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \end{array} \text{Cl} \begin{array}{c} \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \end{array} \right]^-$	Formal
	<p>Diagramas de rayas</p> <p>H-H</p>	Formal
	<p>Molecular</p> <p>H₂O</p>	Formal

Tabla 3. Taxonomía de representaciones de los enlaces químicos en términos semióticos.

Los modelos de enseñanza encontrados en ambos sistemas para este estudio son el modelo de la Recta Numérica (González, et al. 1990), el Modelo Chino (Gallardo, 1994), el uso de los simétricos para operaciones con enteros y su relación con el modelo atómico con o sin constitución interna del átomo, modelos ondulatorios, modelo moleculares y su análisis cuando ocurren reacciones químicas, en términos de ganancia o pérdida de electrones.

3.4.2.2 Procesos cognitivos

Son los referidos a los procesos cognitivos que ponen en acción los estudiantes para llevar a cabo las formas del pensamiento matemático y su comunicación. Estas formas van perfeccionando cinco elementos complejos como los utilizados en la percepción, en el direccionamiento de la atención, en el uso intensivo de la memoria, en procesos de análisis y de síntesis, en las concepciones heurísticas para la resolución de situaciones problemáticas y en el aprendizaje de los procesos de generalización y abstracción que requiere el uso de los SMS y de los SQS. Surgen tendencias debido a las estructuras cognitivas del estudiante, manifestadas a través de la acción con “hechos” percibidos como distintos mecanismos de proceder, de diferentes formas de codificar y decodificar mensajes, cuando en una situación de enseñanza se está tratando de pasar de un estrato de lenguaje SMS y/o SQS más concreto a otro(s) más abstracto(s). A continuación se establecen estas tendencias cognitivas.

3.4.2.2.1 Tendencias cognitivas

Filloy (1999) identifica once tendencias cognitivas (TC), a saber:

- TC1. *“La presencia de un proceso de abreviación de los textos concretos para producir reglas sintácticas nuevas”*.
- TC2. *“La dotación de sentidos intermedios”*. Se produce porque aparecen estratos intermedios de lenguaje y cada estrato tiene diferentes significados para el sujeto.
- TC3. *“El retorno a situaciones más concretas, cuando se presenta una situación de análisis”*. Cuando un sujeto se enfrenta a una nueva situación problemática, tiende a utilizar un problema similar concreto para poder resolverlo.
- TC4. *“La imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse momentos antes”*. Se presenta cuando un sujeto pierde momentáneamente la habilidad de resolver una situación problemática, que momentos antes podía resolver.

- TC5. *“Lecturas hechas en estratos del lenguaje que no permitirán resolver la situación problemática”*. Este hecho ocurre cuando un estudiante realiza lecturas erróneas presentadas en la resolución de problemas algebraicos, geométricos, o de cualquier otra índole.
- TC6. *“La articulación de generalizaciones erróneas”*. Este hecho es ocasionado cuando un alumno usa incorrectamente un concepto u operación. Por ejemplo, como 2^2 es dos por dos, entonces, 2^3 es dos por tres, realizando una generalización errónea.
- TC7. *“La presencia de mecanismos apelativos que centran el desencadenamiento de procesos erróneos de resolución”*. El sujeto utiliza ensayo y refinamiento para resolver una ecuación, en vez de despejar algebraicamente.

En mi opinión, no necesariamente un mecanismo apelativo desencadena un proceso de resolución errónea, ya que algunos mecanismos apelativos como el de ensayo y refinamiento suelen ser aproximaciones correctas y en el caso de sistemas de ecuaciones no lineales, se puede recurrir a un método numérico para su resolución.

- TC8. *“La presencia de mecanismos inhibitorios”*. El sujeto se niega a resolver operaciones o problemas, indicando que “no se puede”, “no puede”, o “no sabe”.
- TC9. *“La presencia de obstrucciones provenientes de la semántica sobre la sintaxis y viceversa”*. Esta situación se puede presentar cuando hay una traducción de textos errónea en una situación concreta. Por ejemplo, en “Juan tenía 3 menos que Marcos”, algunos estudiantes lo traducen erróneamente como *“Juan tenía -3 menos que Marcos”* y a su vez en *“Juan tenía $-(-3)$ que Marcos”*.
- TC10. *“La generación de errores sintácticos debido a la producción de códigos personales intermedios, para dotar de sentidos a las acciones concretas intermedias”*. Esta tendencia es común cuando un sujeto utiliza la regla de los signos al multiplicar números enteros en una adición. Por ejemplo, cuando un sujeto tiene que realizar la operación “ $-3 + 10$ ”, muestra un resultado erróneo de “ -7 ”, realizando la multiplicación de los signos de los sumandos.
- TC11. *“La necesidad de dotar de sentidos a las redes de acciones cada vez más abstractas hasta convertirlas en operaciones”*.

3.4.2.2 Sentidos intermedios

En los estudios realizados por Gallardo (1994-2002), se ha identificado la triple naturaleza del signo menos, los diferentes niveles de aceptación de los números negativos y la triple naturaleza de la sustracción, que utilizaremos en el análisis de los resultados de nuestro estudio.

Para explicar los diferentes niveles de aceptación de los negativos, es necesario advertir la triple naturaleza del signo menos (Gallardo, A., 2002).

- Signo binario: es el signo que indica una operación entre dos números.
- Signo unario: es el signo que le corresponde a un número.
- Números simétricos: es el signo que indica cantidades o números opuestos.

En Gallardo, A. (2002), Gallardo y Basurto, (2009) se caracterizan diferentes niveles de aceptación de los números negativos en un estudio histórico-crítico, en el que alumnos resuelven situaciones problemáticas de textos históricos en el contexto de ecuaciones algebraicas. Estos niveles de aceptación corresponden a sentidos intermedios de los números negativos.

Estos niveles se explican a continuación.

- *Número sustractivo*: la noción de número está subordinada a la magnitud. Si $a, b \in N$, en la operación $a - b$ se debe cumplir que $a > b$. En este sentido, el signo menos únicamente tiene carácter de binario.
- *Número signado*: es el número natural al que se le asigna un signo más o un signo de menos. El signo más y el signo menos son utilizados como unarios.
- *Número relativo*: se presenta cuando se concibe la idea de cantidades opuestas o simétricas.
- *Número aislado*: el número negativo es aceptado como la solución de una operación, un problema o una ecuación.
- *Número negativo formal*: la noción matemática del número negativo, dentro de un amplio concepto de número, que abarca los enteros.

En cuanto a la triple naturaleza (Gallardo, A., 1994, 2002) de la sustracción tenemos:

- La sustracción como Quitar: en la operación " $a - b$ ", es extraer " b " de " a ".
- La sustracción como Completar: en la operación " $a - b$ ", es cuánto le falta a " b " para " a ".

- La sustracción como Diferencia: en la operación " $a - b$ ", es comparar " b " con " a ".

3.4.2.2.3 Sentidos de uso del cero

Gallardo y Hernández (2006) encontraron cinco sentidos de uso de cero, que junto con los números negativos, se convierten en fundamentales para lograr la extensión de los números naturales a los enteros en el lenguaje algebraico.

Estos sentidos de uso fueron identificados durante las entrevistas realizadas a estudiantes de secundaria al resolver tareas aritmético-algebraicas y fueron interpretados como:

- *Cero nulo*: es aquel que “no tiene valor”, y convive como el número negativo como sustraendo.
- *Cero implícito*: es aquel que no aparece escrito, pero que es utilizado durante el proceso de resolución de una tarea. El cero implícito convive con el número relativo.
- *Cero total*: es aquel que está formado por números opuestos ($+n$, $-n$ con $n \in \mathbb{N}$). Éste convive con el número relativo.
- *Cero aritmético*: es aquel que surge como resultado de una operación aritmética y se relaciona con el número negativo como sustraendo.
- *Cero algebraico*: es aquel que surge como resultado de una operación algebraica o es la solución de una ecuación. Aparece como número signado, número relativo y número negativo aislado.

En otra investigación, Méndez, Gallardo y Bruno, (2014) incluyen nuevos sentidos de uso del cero como:

- *Cero “Griego”*: es aquel cero que no tiene una representación y se asocia a la nada. Aunque pareciera que este *cero Griego* es equivalente al *cero nulo* del estudio anterior de Gallardo y Hernández (2006), no es el mismo, ya que históricamente los griegos no aceptaban este cero empero tenían una idea de la nada como “la ausencia de”.
- *Cero Chino*: es aquel cero asociado a la idea de equilibrio, del par dialéctico positivo-negativo, producto de toda una filosofía oriental antigua. Es equivalente al cero total en el estudio de Gallardo y Hernández (2006).

- *Cero de Stevin*: es aquel cero que se utiliza como punto de referencia para concebir a los números negativos como menores que cero.

3.4.2.2.4 El signo igual

El significado del símbolo “igual” es importante en nuestro estudio porque además de ayudar a comprender expresiones aritméticas y algebraicas, es utilizado en los SQS como un equivalente de la flecha en las reacciones químicas sean o no reversibles.

En Ramírez y Rodríguez (2011) se indica que los estudiantes de primaria y de secundaria presentan dificultades en el significado del símbolo de igual. Molina, M. (2006) concluye que hay tres niveles de comprensión del signo igual, a saber:

- *Nivel de comprensión operacional*: el signo igual se interpreta como una instrucción para realizar una operación aritmética anotada a la izquierda del signo igual y la respuesta se anota a la derecha del signo igual. El signo se lee únicamente de izquierda a derecha por lo que es unidireccional. Por ejemplo: $5+3=_$ (lectura de izquierda a derecha).
- *Nivel no estable*: en algunas situaciones empieza a aparecer el significado de equivalencia numérica. Por ejemplo: $6+3=8-;$; $4+_=9-3$
- *Nivel de comprensión avanzado*: en este nivel el signo igual significa equivalencia numérica y hay bidireccionalidad. Por ejemplo: $8+4=_+5;$ $_ =25-12;$ $14+_=13+4;$ $12+7=7+_$

3.4.2.3 Competencia formal

Simula la actuación competente de un usuario ideal de un SMS y de un SQS. Entonces puede postularse como resolutor ideal aquél cuya competencia es la que da el método y cuya conducta está predicha, explicada y descrita por los pasos del método. Este componente explica y predice la conducta del sujeto ideal, que conoce el conjunto de las matemáticas y la química socialmente establecidas en un momento histórico. Mestrallet, R. (1980) indica que en el sistema químico de signos existen cuatro tipos de nombres diferentes, el trivial, el semitrivial, el funcional y el sistemático, marcando únicamente como formal a la notación sistemática de acuerdo a la IUPAC¹⁴, ya que representa y describe a su significante la suma de los elementos que componen el

¹⁴ IUPAC. International Union of Pure and Applied Chemistry. Es un sistema de nomenclatura de compuestos químicos y de descripción de la química.

cuerpo y permiten reconstituir la fórmula sin ambigüedad, en otras palabras, hacer coincidir de la manera más perfecta el significado del nombre con el concepto que representa.

Se han realizado numerosos estudios con respecto a las concepciones alternativas que mantienen los estudiantes en el área de la química acerca de la estructura de la materia (Pozo, Gómez, Limón y Sanz, 1991; Barker, 2000; Gallegos, 2002). Estos autores señalan que los estudiantes mantienen sus concepciones alternativas sobre la estructura de la materia, aún después de realizar estudios formales de química, manteniendo sus representaciones macroscópicas porque conciben a la materia como continua, estática y sin espacios vacíos entre sus partes. Esto representa un obstáculo para que un sujeto sea competente ya que en el pensamiento científico la materia se concibe como discreta, dinámica y con espacios vacíos entre sus partes.

3.4.2.4 Componente de comunicación

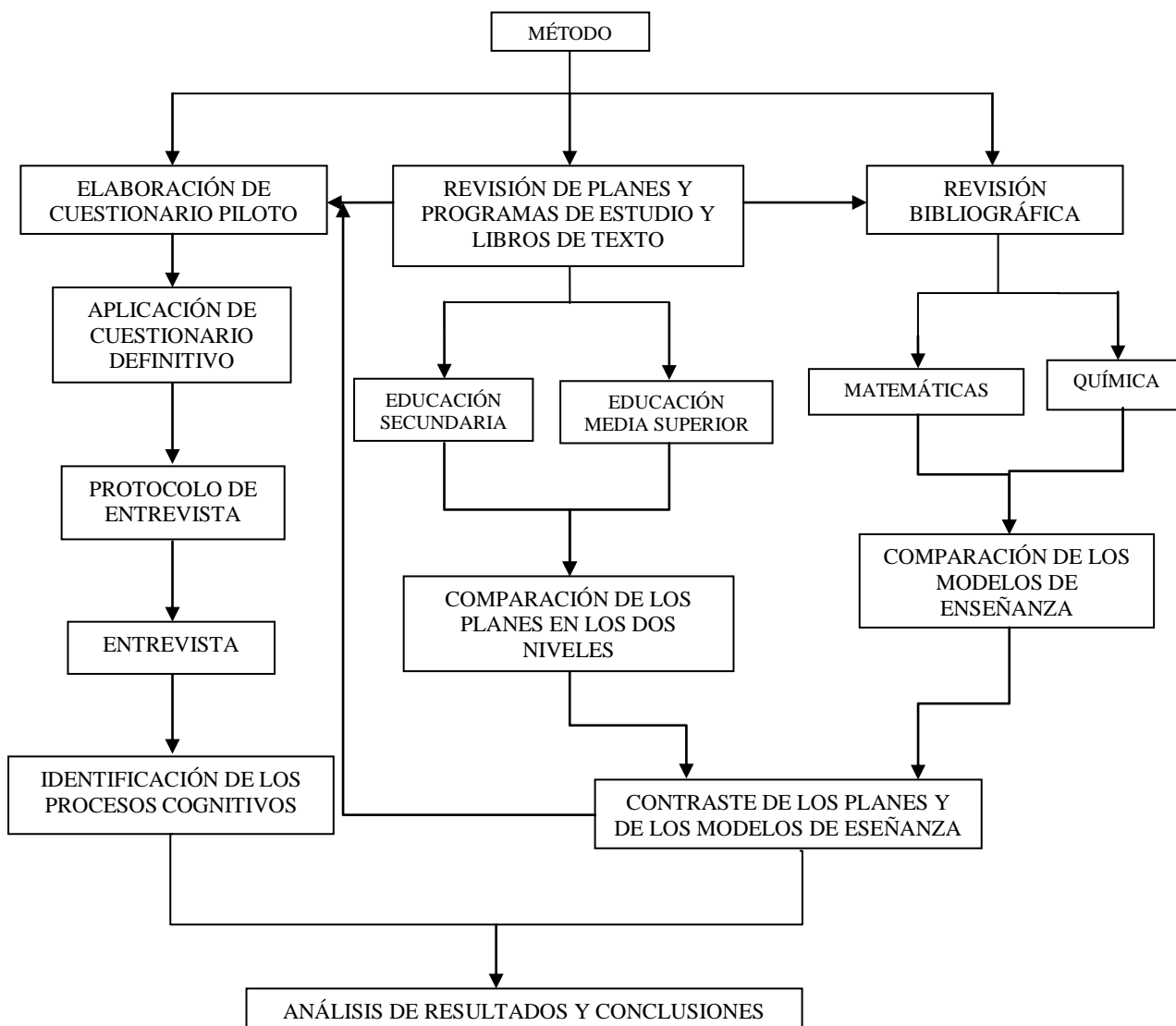
Describe las reglas de competencia comunicativa, formación y decodificación de textos, para eliminar la ambigüedad¹⁵ contextual circunstancial (entender una cosa por otra cuando se está hablando de lo mismo). En éste se analiza el intercambio de mensajes de sujetos que poseen distintos grados de competencia en el uso de SMS diferentes. Como el conocimiento químico es producido y comunicado a través de modelos (Justi, 2002), es vía los modelos y las representaciones como se establecerá la comunicación entre el investigador y los sujetos de estudio.

Cabe resaltar que este marco teórico es ex profeso para este tipo de estudio, porque considera los componentes indispensables para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas con una visión científica.

¹⁵ Cuando una palabra u oración se puede interpretar con diferentes significados.

Capítulo IV. Aspectos metodológicos

La investigación en este estudio es de tipo cualitativa. Es una investigación subjetiva e interpretativa, en la que prepondera lo individual, es decir, no se pretenden establecer leyes generales, sino analizar acerca de los procesos cognitivos de los estudiantes como un primer acercamiento y posteriormente de los docentes por medio de cuestionarios. Para triangular los resultados se consideró la entrevista en un docente, en ella aparecieron las mismas tendencias presentadas en los cuestionarios de los alumnos y los docentes. Esta es una investigación descriptiva porque se limita a observar, a describir y a explicar las tendencias cognitivas de los estudiantes y docentes, sin manipular variables y el investigador es el instrumento de medida (Bisquerra, 1989). Para contestar las preguntas de investigación se diseñó un cuestionario y se aplicó una entrevista con enseñanza con base en el siguiente esquema:



4.1 Sujetos de estudio

4.1.1 Los estudiantes

La selección de los sujetos de estudio está basada en un análisis de los planes y programas de estudio de educación media básica y media superior. Los estudiantes de secundaria tienen poca oportunidad de mostrar la competencia Química porque la enseñanza es incipiente, tienen un curso básico con grandes expectativas que no alcanzan a ser cubiertas satisfactoriamente. Por ello se eligió a los alumnos de segundo grado de nivel bachillerato, que ya habían cursado las asignaturas de Química III, cuyos contenidos presentan mayor nivel y profundidad; así como Matemáticas IV y V, porque se parte del supuesto que los alumnos tienen mayor competencia Matemática, específicamente en la formalización de los Enteros.

Inicialmente este estudio estaba enfocado en la enseñanza y en el aprendizaje de Química en alumnos de nivel bachillerato de la Escuela Nacional Preparatoria (ENP) de la Universidad Nacional Autónoma de México. Posteriormente se extendió el estudio a cuatro docentes debido a que los alumnos mostraron en la resolución del cuestionario muchas dificultades.

El cuestionario se aplicó a 59 alumnos de segundo grado de la ENP, a dos docentes pertenecientes a la ENP de diferentes planteles y a dos docentes de educación secundaria. Los docentes de secundaria se incluyen en el estudio porque 1) aunque los planes de estudio de secundaria cambiaron en el año 2011, los docentes son los mismos y se espera que su competencia Matemática y Química sea formal, y 2) porque las dificultades que presentan los alumnos de preparatoria pueden ser producto de la primera enseñanza en Química y ésta se da en secundaria.

4.1.2 Los docentes

Una de las docentes de la ENP cuenta con diez años de experiencia en la enseñanza de la Química, habiendo obtenido una licenciatura en Química. El segundo profesor de la ENP cuenta con más de quince años de experiencia en la enseñanza de la Química y ha enseñado las asignaturas de Física, Química y Matemáticas en los niveles de secundaria y preparatoria, así como Química en la licenciatura en la asignatura de Química General, y obtuvo una licenciatura en Ingeniería Química.

Otro de los docentes que contestaron el cuestionario, es un maestro normalista de educación secundaria de la asignatura de Química, éste cuenta con seis años de experiencia residente en México, D. F. El cuarto docente es de telesecundaria, con ocho años ensañando en todas las asignaturas, incluyendo Matemáticas y Química, es normalista y reside en Xalapa, Veracruz.

Al analizar las respuestas del cuestionario de los alumnos y de los docentes, se observa que algunas de las dificultades de los alumnos y de los docentes coincidían, por ello se analizan detalladamente los cuestionarios de los docentes y se realiza una entrevista a uno de ellos.

4.2 El cuestionario

Se diseñó un cuestionario piloto con los contenidos incluidos en el plan 2011 de secundaria y de preparatoria de la Escuela Nacional Preparatoria (ENP) perteneciente a la UNAM. Fue aplicado a los alumnos al finalizar el ciclo escolar, con la intención de haber cursado el ciclo completo y pudieran mostrar las tendencias cognitivas y el entrecruzamiento de los SMS y los SQS.

El cuestionario fue desarrollado en dos partes. La primera parte consta de ejercicios y problemas referidos a la operatividad de números enteros y al lenguaje algebraico, y es utilizada para valorar la competencia Matemática. La segunda parte corresponde a ítems de las diferentes representaciones y sus significaciones de entidades como átomos, molécula, compuesto, reacción así como los diversos significados en las letras, números y subíndices en una fórmula química, el uso del paréntesis en las fórmulas químicas, coeficientes en las fórmulas y en las reacciones, así como los significados de la flecha en una reacción química. Esta parte nos proporciona la observancia de la competencia Química. Ambas partes del cuestionario nos permiten establecer el entrecruzamiento de los SMS y de los SQS.

Se aplica un pilotaje del cuestionario a un alumno de licenciatura en Ingeniería que había cursado Química en la ENP. Se prueba con este sujeto, porque se conceptuaba con competencia formal Matemática y competencia formal Química, siendo un referente para identificar la dificultad del cuestionario. Posteriormente se utiliza el instrumento en alumnos del turno vespertino en un plantel de la ENP. Los resultados del pilotaje nos dieron la pauta para considerar este instrumento válido, por las dificultades que representó para su resolución en los casos ya aplicados.

Finalmente el cuestionario validado se aplica a un grupo de alumnos del turno matutino de la misma escuela y a cuatro docentes para el análisis de las respuestas.

4.2.1 Contenido del cuestionario

Los reactivos del cuestionario los diseñé con la intención de valorar la competencia Matemática y la competencia Química por medio de las tendencias cognitivas, así como observar los entrecruzamientos de ambos sistemas.

Parte 1. Por medio de este instrumento, se pretende indagar acerca de los procesos cognitivos que los alumnos utilizan al resolver ejercicios y problemas relacionados con el lenguaje algebraico y la operatividad de los números enteros, indispensables para el aprendizaje de la nomenclatura en química. Cada una de las preguntas del cuestionario referidas a la primera parte que corresponde a Matemáticas le nombramos con la nomenclatura PM, seguido del número de pregunta y de inciso.

PM1.- Esta pregunta consta de ocho operaciones de suma y resta de números enteros. Con este ejercicio podemos identificar si los sujetos realizan correctamente las operaciones de suma y resta de números enteros cuando se encuentran expresados en notación completa¹⁶.

1.- Resuelve:

- A) $(+3) + (+8) =$
- B) $(+3) + (- 8) =$
- C) $(- 3) + (+8) =$
- D) $(- 3) + (- 8) =$
- E) $(+3) - (+8) =$
- F) $(+3) - (- 8) =$
- G) $(- 3) - (+8) =$
- H) $(- 3) - (- 8) =$

PM2.- Este inciso consta de dos operaciones expresadas en forma algebraica. Los estudiantes y docentes, deben analizar los diferentes casos planteados para cada una de ellas y expresar sus conclusiones. En este ejercicio se pretende que los sujetos indiquen en lenguaje algebraico los diferentes casos posibles en la adición y sustracción para que la suma o la diferencia sea mayor que, menor que o igual a cero, realizando una generalización. Este ejercicio permite visualizar los

¹⁶ (Cid & Bolea, 2007)

diferentes niveles de SMS utilizados por los sujetos para representar diferentes situaciones, así como los diferentes niveles de análisis mostrados por los mismos.

2.- Análisis de los diferentes casos:

A) $a + b = c$

¿Cómo deben ser los sumandos a y b para que $c > 0$?

¿Cómo deben ser los sumandos a y b para que $c < 0$?

¿Cómo deben ser los sumandos a y b para que $c = 0$?

B) $a - b = c$

¿Cómo debe ser el minuendo “ a ” con respecto al sustraendo “ b ”, para que la diferencia “ c ”, sea mayor que cero?

¿Pueden el minuendo “ a ” y el sustraendo “ b ” ser negativos, y su diferencia $c > 0$?

¿Cómo debe ser el minuendo “ a ” con respecto al sustraendo “ b ”, para que la diferencia “ c ”, sea menor que cero?

¿Puede el minuendo “ a ” y el sustraendo “ b ” ser negativos y su diferencia $c < 0$?

¿Cómo debe ser el minuendo “ a ” y el sustraendo “ b ”, para que la diferencia “ c ”, se igual a cero?

PM3.- Consta de cuatro ejercicios, cada uno de los cuales permite observar si los sujetos logran identificar las diversas soluciones que pueden tener cada una de las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas presentadas. A su vez permite identificar el campo numérico utilizado por los sujetos, así como visualizar sus diversas producciones.

3.- Resuelve

A) $a + b = 10$

B) $-a + b = 10$

C) $a - b = 10$

D) $-a - b = 10$

PM4.- Consta de resolver cuatro problemas de enunciado verbal. Con estos problemas se pretende identificar cómo los sujetos resuelven problemas de enunciado verbal de adición y sustracción de números enteros con ayuda de la recta numérica.

4.- Identifica las operaciones que representan los problemas, represéntalos en la recta numérica y resuélvelos:

A) La diferencia de temperaturas entre la Ciudad de Toronto Canadá y la ciudad de México Distrito Federal a las 6:00 am es de -44°C . ¿Cuál es la temperatura de Toronto en ese momento si la temperatura de la ciudad de México es de 12°C ?

B) El domingo tu papá te da 150 pesos. Vas a la feria y gastas 30 pesos en los cochecitos y 20 pesos en los dardos donde recuperas 10 pesos; en los globos gastas 15 pesos y recuperas 7 pesos. ¿Cuánto dinero te queda al terminar el día?

C) La temperatura máxima de la ciudad de México en promedio durante el mes de Diciembre es de 17°C y la mínima de -2°C ; la temperatura máxima ese mismo mes en Ottawa en promedio es de -5°C y la mínima de -22°C . ¿Cuál de las ciudades tuvo mayor variación de temperatura?

D) En una reacción química la suma de los productos es igual a la suma de los reactivos, entonces si los productos están representados por “k” y “m” y los reactivos son “e” y “f”. ¿cuál es la ecuación que representa esta situación?

PM5.- Este ejercicio consta de cuatro ítems para indagar las ideas que los sujetos tienen de los números simétricos con ayuda de la recta numérica.

5.- Representa el simétrico en la recta numérica para cada una de las cantidades:

- A) -5
- B) $-(-10)$
- C) $-(-(-3))$
- D) -a

PM6.- Consta de tres incisos para evaluar una expresión algebraica propuesta. Se pretende examinar si los sujetos logran realizar las operaciones sustituyendo los números enteros para cada expresión algebraica, localizando las dificultades presentadas por los alumnos.

6.- Representa las siguientes situaciones con una operación y resuélvelas (calcula el valor numérico)

- A) Si $x=11$ y $z=-9$, ¿Cuánto es $x(-z)$?
- B) Si $a=3$, $b=-16$ y $c=-12$ ¿Cuánto es $(a+b)(a-c)$?
- C) Si $f=-2$, $g=-6$ y $h=-5$ ¿Cuánto es $\frac{f-g}{g-h}$?

PM7.- Consta de tres ejercicios en los que se pretende identificar dificultades en la multiplicación y en las potencias de números enteros.

7.- Resuelve:

- A) $m(-m) =$
- B) $(-g)^2 =$
- C) $-(-h)^3 =$

PM8.- En este ejercicio se incluyen cuatro expresiones algebraicas abiertas y dos ecuaciones para resolver. Se pretende examinar si los sujetos manipulan expresiones abiertas. En la solución de ecuaciones se puede observar el método de solución y la aceptación de soluciones negativas.

8.- Resuelve:

- A) $a + b - c =$
- B) $2a + 3b - 10a - 5b =$
- C) $-(a - b) =$
- D) $-5(-8x + 3y) =$
- E) $9x + 3 = -15$
- F) $10x + 4 = 15x + 9$

Parte 2. En esta segunda parte del cuestionario se espera encontrar las dificultades presentadas en el dominio de conceptos básicos en Química por medio de sus representaciones y de sus significados. Cada una de las preguntas del cuestionario referidas a la segunda parte le nombramos con la nomenclatura PQ, seguido del número de pregunta.

PQ1. Identificar el uso de los diferentes modelos y de los SQS para representar a un átomo, así como de partículas subatómicas como el electrón, el neutrón y el protón.

1. Representa de tres maneras diferentes al átomo de Hidrógeno.

PQ2. Identificar el uso de modelos y de SQS para representar a una molécula, así como el uso de la estructura atómica. Con esta pregunta se puede observar las diferencias entre los conceptos de átomo y molécula.

2. Representa de tres maneras diferentes a la molécula de Hidrógeno.

PQ3. Identificar las diferentes representaciones para expresar un compuesto específico y las concepciones de los sujetos de la estructura microscópica de un compuesto.

3. Representa de tres maneras diferentes una molécula de Cloruro de sodio.

PQ4. El objetivo de esta pregunta es el de examinar si pueden generalizar la fórmula química de un compuesto utilizando SMS.

4. ¿Cómo representas un compuesto?

PQ5. Identificar si conocen el significado de los subíndices en una fórmula química.

5. ¿Qué indican los subíndices 2, 2 y 7 en la fórmula $K_2Cr_2O_7$?

PQ6. Identificar si conocen el significado de un coeficiente y cómo afecta éste al número de átomos que forman un compuesto.

6. ¿Qué indican el número 5 en el compuesto $5KCl$?

PQ7. Identificar si reconocen la sintaxis de los subíndices en una fórmula química y la forma en la que operan conjuntamente con los coeficientes.

7. ¿Cuántos átomos de cobre, de azufre y de oxígeno hay en $6CuSO_4$?

PQ8. Esta pregunta nos permite identificar si han diferenciado el uso del paréntesis en química con un mismo significado pero con diferente sintaxis que en álgebra.

8. ¿Cuántos átomos de oxígeno hay en $Al(OH)_3$?

PQ9. Identificar si logran operar conjuntamente los subíndices con los coeficientes y el uso del paréntesis para identificar el tipo de especies químicas presentes en un determinado compuesto.

9. ¿Cuántos átomos de calcio, de fósforo y de oxígeno hay en $7Ca_3(PO_4)_2$?

PQ10. Identificar las diferentes representaciones utilizadas para un enlace químico, así como el de modelos atómicos y sus significados.

10. ¿Cómo representas un enlace químico?

PQ11. Identificar si pueden generalizar una reacción química utilizando SMS, el tipo de reacciones presentadas y los signos utilizados son indicadores de los conocimientos de los estudiantes.

11. ¿Cómo representas una reacción química?

PQ12. Indagar acerca de las ideas de los estudiantes sobre el significado de la flecha en una reacción química relacionada con el equilibrio químico y la estabilidad de los productos y de los reactivos.

12. ¿Qué indica la flecha en una reacción química?

PQ13. Identificar el principio de conservación de la materia a través de los coeficientes estequiométricos en una reacción. Estos coeficientes hacen que la reacción se encuentre balanceada.

13. En la ecuación $\alpha A + \beta B \longrightarrow \kappa C + \delta D$, ¿Qué representan los coeficientes α , β , κ , δ ?

PQ14. Identificar si los sujetos reconocen las especies presentes en la reacción, si descodifican un SQS con la nomenclatura de las fórmulas químicas, así como identificar el estado de agregación de los reactivos y los productos.

14. En la reacción química de doble sustitución $\text{AgNO}_{3(\text{ac})} + \text{NaCl}_{(\text{ac})} \longrightarrow \text{AgCl}_{(\text{s})} + \text{NaNO}_{3(\text{ac})}$ reconoce a las moléculas y anota el nombre de cada uno de los reactivos y de los productos

PQ15. Identificar las ideas sobre de un proceso de óxido-reducción, el uso de la recta numérica como apoyo para identificar las especies que se oxidan y las que se reducen, así como identificar cualquier otro modelo matemático para la conceptualización de la ganancia o pérdida de electrones en este tipo de procesos.

15. En la reacción química de óxido reducción $\text{C} + \text{O}_2 \longrightarrow \text{CO}_2$ identifica la especie que se reduce y la especie que se oxida, representa las semi-reacciones con los números de oxidación y represéntalas en la recta numérica.

4.3 La entrevista

Se llevó a cabo una entrevista al profesor de telesecundaria que imparte las asignaturas de Matemáticas y Química. Se eligió a este docente porque en las respuestas del cuestionario deja ver algunas tendencias cognitivas que mostraron los alumnos y los docentes en las resolución del cuestionario, tanto en la parte de Matemáticas como en la de Química y como imparte ambas asignaturas puede mostrar los modelos de enseñanza que se entrecruzan en ellas, así como enmarcar las analogías y diferencias que están presentes en los SMS y los SQS.

La entrevista se diseñó advirtiendo las dificultades que los alumnos mostraron en la solución del cuestionario, también fueron tomadas en cuenta aquellas preguntas que aunque fueron bien contestadas, se requería indagar el proceso por el cual fueron resueltas. Adicionalmente se pregunta acerca de las semejanzas y diferencias entre los significados que tienen los coeficientes, los subíndices, los superíndices y las literales en los SMS y los SQS.

Esta entrevista es considerada como una entrevista con enseñanza, ya que a través del diálogo entre el docente y el investigador, el docente elabora sus propias conjeturas y en algunos

momentos de la entrevista se logra el aprendizaje. Cabe resaltar que el investigador durante la entrevista hace el uso de algunos recursos matemáticos logrando que se dé el aprendizaje del docente.

4.3.1 Protocolo de entrevista

Se diseñó un protocolo de entrevista para ser aplicado al docente de telesecundaria, la entrevista se considera del tipo flexible para que el investigador pueda realizar nuevas preguntas con base en las respuestas del entrevistado.

Para el diseño del protocolo se consideró como base el cuestionario, con la finalidad de indagar a profundidad los procedimientos de resolución que no pueden ser observados en el cuestionario.

El protocolo de entrevista utilizado con el sujeto investigado consta de dos partes presentadas a continuación:

Parte 1 Matemáticas:

Se pide al sujeto de estudio que explique a detalle, cómo resuelve cada una de las operaciones de cada numeral.

EM1.- Resuelve las operaciones:

P1A) $(+3) - (+8) =$

P1B) $(+3) - (-8) =$

P1C) $(-3) - (+8) =$

P1D) $(-3) - (-8) =$

P1E) $2(+1) + \square + 4(-2) = 0$

P1F) $\square + 4(-2) = -1$

P1G) $(+6) + 4(\square) = -2$

EM2.- Analiza los diferentes casos:

2A) $m + n = p$

P2A1 ¿Cómo deben ser los sumandos m y n para que $p > 0$?

P2A2 ¿Cómo deben ser los sumandos m y n para que $p < 0$?

P2A3 ¿Cómo deben ser los sumandos m y n para que $p = 0$?

2B) $e - f = g$

P2B1 ¿Cómo debe ser el minuendo “ e ” con respecto al sustraendo “ f ”, para que la diferencia “ g ”, sea mayor que cero?

P2B2 ¿Pueden el minuendo “ e ” y el sustraendo “ f ” ser negativos, y su diferencia $g > 0$?

P2B3 ¿Cómo debe ser el minuendo “e” con respecto al sustraendo “f”, para que la diferencia “g”, sea menor que cero?

P2B4 ¿Puede el minuendo “e” y el sustraendo “f” ser negativos y su diferencia $g < 0$?

P2B5 ¿Cómo debe ser el minuendo “e” y el sustraendo “f” para que la diferencia “g”, se igual a cero?

EM3.- Se pide al docente que resuelva cada una de las ecuaciones. Una vez que las ha resuelto, se le pide represente cada una de las ecuaciones en el plano cartesiano e interprete las soluciones.

P3A) $x + y = 10$

P3B) $-x + y = 10$

P3C) $x - y = 10$

P3D) $-x - y = 10$

EM4.- El docente debe identificar las operaciones que representan los problemas, representarlos en la recta numérica y resolverlos:

P4A) La diferencia de temperaturas entre la Ciudad de Toronto Canadá y la ciudad de México Distrito Federal a las 6:00 am es de -44°C . ¿Cuál es la temperatura de Toronto en ese momento si la temperatura de la ciudad de México es de 12°C ?

P4B) La temperatura máxima de la ciudad de México en promedio durante el mes de Diciembre es de 17°C y la mínima de -2°C ; la temperatura máxima ese mismo mes en Ottawa en promedio es de -5°C y la mínima de -22°C . ¿Cuál de las ciudades tuvo mayor variación de temperatura?

EM5.- Representa el simétrico en la recta numérica para cada una de las cantidades:

P5A) $-(-(-3))$

P5B) $-a$

(Se pide al docente que representen el simétrico de $-a$ cuando $a > 0$ y cuando $a < 0$)

EM6.- Representa las siguientes situaciones con una operación y resuélvelas

P6A) Si $x = 11$ y $z = -9$, ¿Cuánto es $x(-z)$?

P6B) Si $a = 3$, $b = -16$ y $c = -12$ ¿Cuánto es $(a + b)(a - c)$?

P6C) Si $f = -2$, $g = -6$ y $h = -5$ ¿Cuánto es $\frac{f-g}{g-h}$?

EM7.- Resuelve y explica:

P7A) $m(-m)$

P7B) $(-g)^2 =$

P7C) $-(-h)^3 =$

EM8.- Resuelve:

P8A) $a + b - c =$

P8B) $-(a - b) =$

P8C) $9x + 3 = -15$

P8D) $10x + 4 = 15x + 9$

Parte 2 Química:

EQ1. Representa de tres maneras diferentes al átomo de Hidrógeno, de Sodio y de Carbono.

EQ2. Representa de tres maneras diferentes a la molécula de Hidrógeno, de Oxígeno y de Cloro.

EQ3. Representa de tres maneras diferentes una molécula de Cloruro de sodio.

EQ4. ¿Cómo representas un compuesto?

EQ5. ¿Qué indican los subíndices 2, 2 y 7 en la fórmula $K_2Cr_2O_7$?

EQ6. ¿Cuántos átomos de Calcio, de Fósforo y de Oxígeno hay en $7Ca_3(PO_4)_2$?

EQ7. ¿Cuántos átomos de Aluminio, Azufre y Oxígeno hay en $9Al_2(SO_4)_3$?

EQ8. ¿Cuántos átomos de Oxígeno hay en $CuSO_4 \cdot 5H_2O$?

EQ9. ¿Cómo representas un enlace químico?

EQ10. ¿Cómo representas una reacción química?

EQ11. ¿Qué indica la flecha en una reacción química?

EQ12. En la ecuación $\alpha A + \beta B \longrightarrow \kappa C + \delta D$, ¿Qué representan los coeficientes α , β , κ , δ ?

EQ13. En la reacción química $AgNO_{3(ac)} + NaCl_{(ac)} \longrightarrow AgCl_{(s)} + NaNO_{3(ac)}$ reconoce a cada una moléculas y anota el nombre de cada uno de los reactivos y de los productos.

EQ14. Identifica el número de oxidación del Cloro en los iones ClO^{-1} , ClO_2^{-1} , ClO_3^{-1} , ClO_4^{-1} ?

EQ15. ¿Cómo son los números de oxidación del Cromo en los siguientes iones $Cr_2O_7^{-2}$, $Cr_2O_4^{-2}$?

EQ16. ¿Cuáles son los números de oxidación en los siguientes compuestos CrO , Cr_2O_3 , CrO_2 y CrO_3 ?

EQ17. En la reacción química de óxido reducción $C + O_2 \longrightarrow CO_2$ identifica la especie que se reduce y la especie que se oxida, representa las semi-reacciones con los números de oxidación y representálas en la recta numérica.

EQ18. La reacción química $FeO + CO \longrightarrow Fe + CO_2$ ¿es una reacción de óxido-reducción?

(Se pide al docente que identifique la especie que se reduce y la especie que se oxida, indicando las semi-reacciones con los números de oxidación y las represente en la recta numérica)

EQ19. La reacción química $\text{Sn} + \text{HNO}_3 \longrightarrow \text{SnO}_2 + \text{NO}_2 + \text{H}_2\text{O}$ ¿es una reacción de óxido-reducción?

(Se pide al docente que identifique la especie que se reduce y la especie que se oxida, presentando las semi-reacciones con los números de oxidación y las represente en la recta numérica)

4.4 Escenario

El cuestionario se aplicó el último día de clases del ciclo escolar 2012-2013 en la ENP. Se indicó a los alumnos que los resultados del cuestionario no influirían en su evaluación, sin embargo, era crucial que se contestara de acuerdo a lo aprendido, porque sus respuestas serían utilizadas en una investigación para mejorar la enseñanza de las matemáticas y de la química. La resolución del cuestionario tuvo una duración de dos horas. Se realizó estando presente la profesora titular de grupo, misma que contestó el cuestionario. La aplicación del cuestionario para los otros tres docentes fue realizada en sus respectivas escuelas.

La entrevista fue realizada al docente de telesecundaria en las instalaciones de CINVESTAV, Zacatenco. La duración de la entrevista es aproximadamente de diez horas y se llevó a cabo en el transcurso de tres días. La entrevista fue video-grabada y transcrita para su análisis.

Capítulo V. Resultados

En este capítulo se presentan los resultados representativos del cuestionario mostrados por los alumnos y los docentes, así como el análisis de la entrevista.

5.1 Resultados de los cuestionarios de los alumnos

5.1.1 Resultados de los cuestionarios de los alumnos en Matemáticas

Cada una de las preguntas del cuestionario referidas a la parte de Matemáticas le nombramos con la nomenclatura PM, seguido del número de pregunta y de inciso.

PMI. En esta pregunta se les pide a los alumnos que resuelvan ocho tipos de sumas y restas de números enteros, en los cuales los sumandos, el minuendo o el sustraendo pueden ser positivos o negativos. En la tabla 4 se muestra el tipo de resultados expuestos por los alumnos.

Pregunta	Operación	Respuestas	Frecuencia	Resuelto	Observaciones
PM1A	$(+3)+(+8)=$	+11	7	Correcto	Necesidad de signar el número positivo.
		11	52	Correcto	-
PM1B	$(+3)+(-8)=$	-5	59	Correcto	-
PM1C	$(-3)+(+8)=$	+5	8	Correcto	Necesidad de signar el número positivo.
		5	51	Correcto	-
PM1D	$(-3)+(-8)=$	-11	58	Correcto	-
		11	1	Incorrecto	Evitamiento de los negativos.
PM1E	$(+3)-(+8)=$	-5	53	Correcto	-
		5	5	Incorrecto	Evitamiento de los negativos.
		-11	1	Incorrecto	Suma el minuendo con el sustraendo, predominio del negativo, sin resolver la sustracción.
PM1F	$(+3)-(-8)=$	+11	9	Correcto	Necesidad de signar el número positivo.
		11	49	Correcto	-
		-5	1	Incorrecto	Omite el signo del sustraendo, resolviendo $(+3)-(+8)$.
PM1G	$(-3)-(+8)=$	-11	55	Correcto	-
		5	2	Incorrecto	Resuelve una expresión equivalente a $(-3)+(+8)$, omitiendo el signo binario de la sustracción.
		-1	1	Incorrecto	Considera que el resultado es negativo, sin realizar la operación correctamente.
		-13	1	Incorrecto	Considera que el resultado es negativo, sin realizar la operación correctamente.
PM1H	$(-3)-(-8)=$	+5	10	Correcto	Necesidad de signar el número positivo.
		5	45	Correcto	-
		-8	1	Incorrecto	Ignora el minuendo y la sustracción.
		-5	2	Incorrecto	Predominio de la negatividad.
		-11	1	Incorrecto	Suma el minuendo y el sustraendo, y predominio de la negatividad.

Tabla 4. Resultados de PM1 de los alumnos de la ENP.

En la tabla 4 se observa que los alumnos tuvieron mayor dificultad al resolver las sustracciones con enteros, siendo la de mayor dificultad la pregunta PM1E que es una sustracción de dos positivos, cuando el minuendo es menor que el sustraendo, es decir:

$$a - b, \quad \text{dónde } a, b \in N, \quad a < b$$

Encontramos las siguientes tendencias cognitivas:

- Le necesidad de signar el número cuando el resultado es positivo.
- El evitamiento de los negativos reportado por Gallardo.
- Predominio de la negatividad:
 - Cuando aparece el signo binario en la sustracción, sumando el minuendo con el sustraendo positivos, dando como resultado un negativo.
 - En la sustracción de dos negativos, sumando el minuendo con el sustraendo, dando un resultado negativo incorrecto, ya que la sustracción de dos negativos no siempre es un negativo.
- Omisión del signo negativo, tanto el signo unario como el signo binario. En el caso del signo binario, los alumnos lo omiten realizando sumas.

PM2. En esta pregunta, los alumnos deben analizar los diferentes casos para la adición y la sustracción con enteros.

En la tabla 5 se concentran las respuestas proporcionadas por los alumnos.

Los resultados correctos son representados con la letra C y los Incorrectos con I. Todas las respuestas incompletas, es decir aquellas que no expresan todo el conjunto solución son consideradas incorrectas.

Las respuestas del mismo tipo fueron agrupadas en:

- Las que evitan a los negativos
- Las que incluyen al cero
- Las que toman como referencia al número 1
- En las que predomina la negatividad
- Las que utilizan relaciones de orden
- Las que utilizan relaciones de orden y al cero como referencia
- Otras que no son contestadas o son estructuras sintácticamente equivalentes

PM2A. En $a + b = c$, ¿cómo deben ser los sumandos a y b para que $c > 0$?			
Tipo de respuesta	Respuestas	Resuelto	Frecuencia
Evitan a los negativos	Positivos ⁽³⁰⁾	I	39
	Los sumandos deberán ser mayores que cero ⁽⁴⁾		
	(+) ⁽¹⁾		
	Los dos positivos o uno de ellos positivo con mayor valor ⁽⁴⁾		
Incluyen al cero	$a > 0$ y $b \geq 0$ ⁽¹⁾	I	2
	Deben valer cero ⁽¹⁾		
Toman como referencia al número 1	Positivos y mayores a 1 ⁽²⁾	I	3
	$a > 1$ y $b > 1$ ó $a = 1$ y $b = 1$ ⁽¹⁾		
Predomina la negatividad	Negativos ⁽¹⁾	I	1
Utilizan relaciones de orden	$a > b$ ⁽²⁾	I	4
	Uno menor que otro ⁽¹⁾		
	De diferente signo, a negativa y menor que b ⁽¹⁾		
	El sumando a debe ser mayor en valor absoluto y positivo si b es negativo. El sumando b debe ser mayor en valor absoluto y positivo, si a es negativo. Ó ambos positivos ⁽³⁾	C	3
Utilizan relaciones de orden y al cero como referencia	Ambos mayores a 0, o en su caso $a > 0$ y $b \leq 0$ pero menor que a . ⁽¹⁾	I	3
	$a > b$ y $b < 0$ ⁽¹⁾		
	Deben de ser números positivos, mayores que cero. En algunos casos sólo uno de los números puede ser positivo y el otro negativo y el resultado es >0 , siempre y cuando el número positivo sea mayor que el otro ⁽¹⁾		
Otras	$a + b = c$ ⁽¹⁾	I	4
	$a - (-b) = c$ ⁽¹⁾		
	Diferentes ⁽²⁾		

Tabla 5. Resultados de PM2 de los alumnos de la ENP. El subíndice entre paréntesis indica la frecuencia.

En la tabla 5, se observa que la respuesta con mayor frecuencia fue el evitamiento de los negativos, en otros casos se presenta la tendencia a utilizar como puntos de referencia los números cero y el uno.

Tendencias cognitivas encontradas:

- Evitamiento de los negativos
- Los alumnos no contemplan todo el conjunto solución para $a + b > 0$

- En las respuestas toman como referencia los números cero y uno.
- Para dar las respuestas, los alumnos comunican la información en diferentes SMS, algunos alumnos aunque utilizan un SMS en lenguaje natural la solución es correcta, mientras que otros que utilizan un SMS algebraico o un SMS mezclando en lenguaje natural con algebraico, sus respuestas son incorrectas.

Observación: Llama la atención que los alumnos hayan podido dar una respuesta correcta sin atreverse a utilizar un SMS formal.

Las preguntas que incluyen este inciso y el de la sustracción proyectan el mismo tipo de repuestas, por ello se consideran representadas en el análisis anterior.

PM3. En estas preguntas, se pide a los alumnos que resuelvan para cada inciso una ecuación con dos incógnitas del tipo “ $a + b = 10$ ”.

Las producciones de los alumnos de la pregunta PM3A se muestran en la tabla 6. Las respuestas del mismo tipo fueron clasificadas como:

- Soluciones aritméticas
- Soluciones algebraicas
- Solución aritmético-algebraicas

Observaciones:

1) De las respuestas aritméticas, 35 de los 59 alumnos contestaron con una solución, mientras que 7 dan multiplicidad de soluciones. En total 42 de 59 alumnos contestaron la pregunta utilizando números naturales y el cero. Se consideró la respuesta incorrecta porque no utilizaron números enteros, fraccionarios o reales y no muestran el conjunto solución.

2) De las respuestas algebraicas podemos observar a 11 alumnos que despejan correctamente las incógnitas “ a ” y “ b ”, sin embargo se les consideró como incorrecto porque no manifiestan cuál es el conjunto solución. También se muestran 3 alumnos que despejan correctamente a las incógnitas pero no pueden dar solución a la ecuación y otro que despeja incorrectamente utilizando propiedades de la multiplicación en lugar de las aditivas.

3) En la respuesta numérico-algebraica se observa que un alumno que pasa de un SMS algebraico con resolución incorrecta a un SMS aritmético con resolución correcta y finalmente regresa a un SMS algebraico con despeje correcto.

PM3A. Resuelve: $a + b = 10$			
Tipo de respuesta	Respuestas	Resuelto	Frecuencia
Soluciones aritméticas	$5 + 5 = 10$ ₍₂₈₎	I	42
	$10 + 0 = 10$ ₍₇₎		
	Diversas soluciones con naturales. ₍₇₎		
	$5 + 5 = 10$		
	$2 + 8 = 10$		
Soluciones algebraicas	$1 + 9 = 10$	I	15
	$a = 10 - b$		
	$b = 10 - a$ ₍₁₁₎		
	$a = \frac{10}{b}$ ₍₁₎		
	$a + b - 10 = 0$		
Solución numérico-algebraica	$a - 10 = b$ ₍₁₎	C	1
	$b = 10 - a$		
Solución numérico-algebraica	$a + (10 - a) = 10$	I	1
	$a + 10 - a = 10$		
	$10 \equiv 10$ ₍₂₎		
	En este problema se podría asignar infinita cantidad de valores reales a “a” y “b”, tal que su resultado sea correcto, ya que cuenta con dos incógnitas ₍₁₎		
	$a = \frac{10}{b}$		
Solución numérico-algebraica	sustituyo	I	1
	$\frac{10}{b}, b = 10$		
	Puede ser:		
	$8 + 2 = 10$		
	$7 + 3 = 10$		
Solución numérico-algebraica	ó $a = 10 - b$	I	1
	$b = 10 - a$ ₍₁₎		

Tabla 6. Resultados de PM3A de los alumnos de la ENP. El subíndice entre paréntesis indica la frecuencia.

4) Un alumno utiliza un SMS en lenguaje natural para expresar correctamente que existe una infinidad de números reales que son solución de una ecuación con dos incógnitas.

5) Dos alumnos utilizan el método de sustitución para resolver un sistema de ecuaciones, sin embargo, en este ejercicio solo hay una ecuación con dos incógnitas, por ello tiene un grado de libertad (Número de incógnitas–Número de ecuaciones), esto nos indica que se puede proponer el valor de una incógnita y la segunda incógnita dependerá del valor asignado a la primera.

Encontramos las siguientes tendencias cognitivas:

- El uso de los números 5 y 0.

- El evitamiento de los negativos permaneciendo en los naturales (en 42 de 59 alumnos)
- El evitamiento de SMS algebraicos.
- La tendencia a despejar y sustituir sin sentido.

Otro de los ejercicios de esta pregunta es el PM3D, en las resoluciones de los alumnos, fueron consideradas incorrectas las respuestas incompletas, es decir aquellas que no muestran un conjunto solución, aunque la operatividad sea correcta. Los resultados se exponen en la tabla 7.

Se observó que los alumnos utilizaron números enteros negativos, parece ser que cuando visualizan una expresión como “ $-a$ ” piensan en un número negativo.

Las respuestas fueron clasificadas con base al tipo de respuesta como:

- Con sustitución directa. En este caso los alumnos sustituyen un valor numérico directamente en la expresión algebraica dando sola una solución. En ella se presentan los sujetos que operan correctamente y aquellos que tienen dificultades operatorias.
- Sin sustitución directa en a y b . Los alumnos muestran como solución algún valor de a y b ó $-a$ y $-b$, sin sustituirlo en $-a - b = 10$.
- Manipulación de incógnitas. Los alumnos despejan a y b , $-a$ y $-b$ ó despejan y sustituyen sin considerar valores numéricos.
- Manipulación de incógnitas con sustitución. Los estudiantes proponen un valor numérico, los sustituyen en la ecuación y despejan el valor de la segunda incógnita.
- Explican en lenguaje natural.
- Otras de carácter inhibitorias. Por ejemplo agregarle el signo “-” al resultado par que sea -10 de otra forma, no se puede; ó decir que no se puede porque dos números negativos dan como resultado un número negativo, sin considerar la operación.

Las tendencias cognitivas encontradas son:

- Utilizar los números cero y cinco
- En las dificultades operatorias aparecen errores sintácticos, como el igualar -10 al valor absoluto para convertirlo en positivo. Otro error sintáctico es aparece en la operación: $-(-5)(-)(-5) = 10$, en donde el sujeto convierte una sustracción en multiplicación, utilizando sus propias reglas.
- Despejar una incógnita sin sentido.

- Tendencias inhibitorias provenientes de generalizaciones erróneas, como dice un estudiante “No es posible, dos números negativos dan como resultado un número negativo” sin indicar la operación en la que ocurriría esto.

PM3D. Resuelve: $-a - b = 10$				
Tipo de respuesta	Respuestas	Resuelto	Frecuencia	
Con sustitución directa	$-(-5) - (-5) = 10$	Operan correctamente	I	16
	$-5 - (-15) = 10$			
	$(-3) - (-13) = 10$			
	$-3 - 7 = -10$	Dificultades operatorias	I	7
	$-(-5)(-)(-5) = 10$			
	$-5 - 5 = -10 = -10 = 10$			
	$(-5) - (-5) = 10$			
	$(-2) - (+12) = 10$			
$-20 - (-10) = 10$				
Sin sustitución en a y b	$-a = 0 \quad -b = 10 \quad (1)$	Involucran al cero en la solución	I	5
	$-a = 0 \quad -b = 10$			
	$-a = -10 \quad -b = 0 \quad (1)$	Involucra al 5 o un múltiplo		
	$a = 5 \quad b = 5 \quad (1)$			
	$a = -(-5) \quad b = -(-5) \quad (1)$			
$a = (-15) \quad b = -5 \quad (1)$				
Manipulación de incógnitas	$-a = 10 + b \quad (1)$	Despejan $-a$ ó $-a$ y $-b$	I	18
	$-a = 10 + b \quad -b = 10 + a \quad (3)$			
	$-a = 10 + b$ $(10 + b) - b = 10$ $10 \equiv 10 \quad (2)$			
	$a = \frac{10+b}{-1} \quad b = \frac{10+a}{-1} \quad (2)$	Despejan a y b		
	$a = -10 - b \quad b = -10 - a \quad (10)$			
Manipulación de incógnitas con sustitución	$Si \ a = -7 \quad -7 - (-17) = 10$ $-7 - b = 10 \quad -7 + 17 = 10$ $-b = 10 + 7 \quad 10 = 10$ $b = -17 \quad (1)$	Sustitución de $a = -7$ en la ecuación despejando b . Sustitución incorrecta	I	2
	$-1 - b = 10$ $-b = 10 + 1$ $-b = 11$ $b = -11 \quad (1)$	Asigna un valor de a sustituyéndolo directamente y despejando b		
Lenguaje natural	Forzosamente b deberá ser negativo para que pase positivo y mayor que $a \quad (1)$	I		1
	Se podría asignar infinita cantidad de valores reales a “ a ” y “ b ”, tal que su resultado sea correcto, ya que cuenta con dos incógnitas (1)	C		1
Otras inhibitorias	No es posible (2) No, no pude (1) No se puede (2) Sin contestar (2)	I		9
	No se puede (agrega el signo negativo a 10) $-a - b = -10 \quad (1)$			
	No es posible, dos números negativos dan como resultado un número negativo. (1)			

Tabla 7. Resultados de PM3D de los alumnos de la ENP. El subíndice entre paréntesis indica la frecuencia.

PM4. En estos problemas, se les pide a los alumnos que representen diferentes situaciones en la recta numérica y los resuelvan. Se presentan los resultados de PM4C en la tabla 8.

PM4C. La temperatura máxima de la ciudad de México en promedio durante el mes de Diciembre es de 17°C y la mínima de -2°C; la temperatura máxima ese mismo mes en Ottawa en promedio es de -5°C y la mínima de -22°C. ¿Cuál de las ciudades tuvo mayor variación de temperatura?			
Tipos de respuesta	Frecuencia	Resuelto	Observaciones
México	34	C	Es correcto pero no se muestran los procedimientos, se limitan a realizar operaciones mentales
Ottawa	21	I	Es incorrecto ya que la diferencia de temperaturas en México es de 19°C y la diferencia en Ottawa es de 17°C
Ottawa con un cambio de 17 grados	1	I	Encuentra correctamente la diferencia de temperaturas para Ottawa pero no muestra para la ciudad de México
Me revuelvo al hacer la operación	1	I	No muestra si puede traducir el texto en lenguaje natural a otro SMS ó si tiene dificultades operatorias
Sin contestar	2	I	Muestran una tendencia inhibitoria

Tabla 8. Resultados de PM4C de los alumnos de la ENP.

En esta pregunta observamos tendencias inhibitorias, dificultades para transitar de un SMS a otro con mayor abstracción, dificultades en la comparación de números y en la operatividad. Los estudiantes no usan un medio de representación como la recta numérica para comparar.

Los resultados de la pregunta PM4D se muestran en la tabla 9, donde se presentan entrecruzamientos entre los SMS y los SQS.

PM4D. En una reacción química la suma de los productos es igual a la suma de los reactivos, entonces si los productos están representados por “k” y “m” y los reactivos son “e” y “f”. ¿Cuál es la ecuación que representa esta situación?		
Tipos de respuesta	Frecuencia	Observaciones
$e+f=k+m$	6	Matemáticamente correcto y Químicamente correcto
$e+f \rightarrow k+m$	4	Químicamente correcto aunque Matemáticamente eso no es una ecuación
$k+m=e+f$	37	Matemáticamente correcto aunque Químicamente es incorrecto porque los productos se representan en el segundo miembro de la igualdad y el signo igual tiene carácter unidireccional, a menos que la reacción sea reversible
$k+m \rightarrow e+f$	4	Químicamente incorrecto porque los productos se representan después de la flecha
$k+m-e-f=0$	1	Matemáticamente correcto y Químicamente incorrecto
$k+m=e(f)$	1	
$e+f=km$	2	
$k+m+y=e+f$	1	Se observan dificultades en la traducción del texto al SMS y al SQS, porque consideran a “y” como un producto ó un reactivo y no como un conector
$k+f=e+y$	1	
Sin contestar	2	Tendencia inhibitoria

Tabla 9. Resultados de PM4D de los alumnos de la ENP.

Observamos que un SQS no es un SMS, mostrándose en el significado de una ecuación química, con la bidireccionalidad o unidireccionalidad del signo igual.

Por ejemplo: en $c=a+b$, matemáticamente el signo igual tiene un carácter bidireccional mientras que en una ecuación química, representa una reacción de descomposición en la que un compuesto c , se descompone en dos elementos o compuestos con diferentes propiedades; y si se representa $a+b=c$ es una reacción de síntesis mediante la cual a partir de dos o más elementos se conforma un solo producto.

Algunos alumnos al sumar los productos o los reactivos, los representan como una multiplicación. Esto puede provenir de dos fuentes:

- En Matemáticas cuando los alumnos aprenden la adición de enteros, se les enseña con la regla de los signos de modo que multiplican un signo binario con otro unario en lugar de sumar números.
- Por la simbolización de un producto en un SQS. Por ejemplo, una generalización de una reacción de síntesis es: $a+b=ab$, como lo es: $C+O_2 \longrightarrow CO_2$.

PM5. En esta pregunta se pide a los alumnos que representen el simétrico de algunos números en la recta numérica. En la tabla 10 se presentan los resultados de la pregunta PM5.

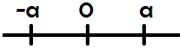
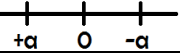
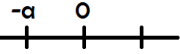
Pregunta	Representa el simétrico de:	Tipos de respuesta	Frecuencia	Resuelto	Observaciones
PM5A	-5	5	43	C	-
		-5	16	I	No identifican al simétrico
PM5B	-(-10)	-10	38	C	-
		10	21	I	No identifican al simétrico
PM5C	-(-(-3))	+3	39	C	Necesidad de signar al positivo
		3	4	C	-
		-3	16	I	No identifican al simétrico
PM5D	-a		36	C	Es correcto, si $a \in Z^+$
			1	C	Es correcto, si $a \in Z^-$
		a	5	C	Sin representación en la recta
		+a	1	C	Necesidad de signar al positivo sin representación en la recta numérica
			14	I	No identifican al simétrico
		Sin contestar	1	I	Tendencias inhibitorias
		No entendí	1	I	

Tabla 10. Resultados de PM5 de los alumnos de la ENP.

En la tabla 10 podemos observar a 16 estudiantes con dificultades para representar el simétrico de un número, ya sea con ó sin el uso de la recta numérica. La pregunta PM5D nos muestra a 36 estudiantes concibiendo el valor numérico de a como un entero positivo, mientras que un solo estudiante piensa el valor de a como un entero negativo. Seis estudiantes no exhiben el uso de la recta numérica y ello nos impide indagar en como visualizan a los números.

PM6. En estos ejercicios, los alumnos deben calcular el valor numérico de tres expresiones algebraicas, dados los valores numéricos. En la tabla 11 se presentan los resultados de la PM6.

Pregunta	Calcula el valor numérico	Tipos de respuesta	Frecuencia	Resuelto	Observaciones
PM6A	Si $x = 11$ y $z = -9$, ¿Cuánto es $x(-z)$?	99	45	C	Sustituyen y resuelven correctamente
		+99	1	C	Necesidad de signar al positivo
		-99	5	I	Sustituyen z en lugar de $-z$
		20	7	I	Suman $11+9$ en lugar de multiplicar
		19	1	I	Suma $11+9$ incorrectamente
PM6B	Si $a = 3$, $b = -16$ y $c = -12$ ¿Cuánto es $(a+b)(a-c)$?	-195	37	C	-
		195	6	I	Evitamiento del negativo
		-185	1	I	Error al multiplicar
		185	1	I	Error al multiplicar y evitamiento del negativo
		117	3	I	Resuelven $(a+b)(a+c)$
		285	4	I	Sustituye $-b$ en b resolviendo $(a-b)(a-c)$
		2	3	I	Resuelve $(a+b)+(a-c)$
		$[3+(-16)][3-(-12)]$	1	I	Sustituye sin resolver
37, -235, -196	3	I	Parecen errores operatorios		
PM6C	Si $f = -2$, $g = -6$ y $h = -5$ ¿Cuánto es $\frac{f-g}{g-h}$?	-4	52	C	-
		$\frac{4}{-1}$	1	C	No termina de realizar la operación
		4	1	I	Evitamiento del negativo
		$\frac{-8}{-11}$	1	I	Suma en el numerador " $f + g$ " y en el denominador " $g + h$ ", en lugar de restarlos
		-88	1	I	Resuelve $(f + g)(g + h)$ con predominio del negativo
		$\frac{4}{10}$	1	I	Resuelve correctamente el numerador e incorrectamente el denominador
		$\frac{[(-2) - (-6)]}{[(-6) - (-5)]}$	1	I	Sustituye correctamente sin resolver las operaciones
		Sin contestar	1	I	Tendencia inhibitoria

Tabla 11. Resultados de PM6 de los alumnos de la ENP.

Aparecieron las siguientes tendencias cognitivas:

- Necesidad de signar al positivo.
- Sustituyen erróneamente como si fueran números naturales, al sustituir $z = -9$ como $-z = -9$, visualizando al número como signado y no como entero.
- Evitamiento del negativo.
- Resuelven multiplicaciones en lugar de sumas y viceversa, presentando confusión en la operatividad.
- Multiplican en lugar de dividir.
- En algunos casos se presenta el predominio de la negatividad.
- Sustituyen dejando expresadas las operaciones sin resolver.
- Dejan sin contestar el ejercicio presentando una tendencia inhibitoria.

PM7. Este ítem consta de tres ejercicios en los que se pretende identificar dificultades en la multiplicación y en las potencias de enteros. Los resultados se muestran en las tablas 12 y 13.

PM7A. Resuelve: $m(-m) =$			
Tipos de respuesta	Frecuencia	Resuelto	Observaciones
$-m^2$	46	C	-
m^2	1	I	Evitamiento del negativo
$-m$	7	I	m por m es $-m$, como: $1(-1) = -1$
$-2m$	2	I	Suma $m+m$ en lugar de multiplicarlos, con predominio del negativo
$-m^2 = m^2$	1	I	Omisión del signo negativo
$m = \frac{1}{-m}$	1	I	Cierra la expresión igualándola a 1: $m(-m) = 1$, y propone una estructura equivalente despejando el primer factor
$m = 5$ $5(-5) = -25$	1	I	El sujeto está anclado en lo numérico

Tabla 12. Resultados de PM7A de los alumnos de la ENP.

Las tendencias cognitivas que aparecen en las producciones de las preguntas PM7A, B y C son:

- Evitamiento del negativo y omisión del signo menos
- Necesidad de signar al positivo
- Predominio del negativo
- Proponer estructuras equivalentes correctas o incorrectas
- Anclarse a lo numérico

- Cerrar expresiones abiertas igualándolas a 1
- Trabajar a las variables como si tomaran el valor de 1
- Sumar en lugar de multiplicar, confundiendo la potencia con el coeficiente
- Dejar expresadas las operaciones sin resolverlas
- No respetar la jerarquía de la potencia sobre la multiplicación

PM7B. Resuelve: $(-g)^2 =$			
Tipos de respuesta	Frecuencia	Resuelto	Observaciones
g^2	47	C	-
$+g^2$	1	C	Necesidad de signar al positivo
$(g)(-g)$	2	I	Omite el signo negativo en el primer factor, intentando dar una estructura equivalente
$2g$	1	I	Suma $g + g$ omitiendo el signo negativo
$2-g$	1	I	El exponente lo utiliza como un sumando
g	5	I	Realiza $(-)(-) = +$, dejando la g como si tomara el valor de 1
$+g$	1	I	Necesidad de signar al positivo
$g = 4$ $(-4)^2 = 16$	1	I	El sujeto está anclado en lo numérico
PM7C. Resuelve: $-(-h)^3 =$			
Tipos de respuesta	Frecuencia	Resuelto	Observaciones
h^3	33	C	-
$+h^3$	9	C	Necesidad de signar al positivo
$-h^3$	4	I	Predominio del negativo
$(-h)^3$	1	I	Omisión del signo negativo
$-(-h)^2(h)$	1	I	Intenta obtener una estructura equivalente
$-[-h * -h * -h]$	1	I	Expresa las operaciones a realizar
$h(h)(h)$	1	I	Multiplica $-(-) = +$ y desarrolla la potencia, sin respetar la jerarquía de las operaciones
$3h$	1	I	Confunde la potencia con el coeficiente
$-3h$	1	I	Confunde la potencia con el coeficiente predominando el negativo
h	5	I	Multiplica $-(-) = +$ y desarrolla la potencia como $h = 1$, permaneciendo h
$-h$	1	I	Predomina el negativo y desarrolla la potencia como $h = 1$, permaneciendo h
$h=3,$ $-(-3)^3 = 27$	1	I	El sujeto está anclado en lo numérico

Tabla 13. Resultados de PM7B y PM7C de los alumnos de la ENP.

PM8. Los ejercicios PM8A al PM8D son expresiones abiertas, y los PM8E y PM8F son ecuaciones a resolver. Las tablas 14, 15 y 16 muestran las producciones representativas de los ejercicios con expresiones abiertas. Para mostrar los diferentes tipos de respuestas, éstas se clasificaron con base en el tratamiento que los alumnos las concibieron:

- Expresiones abiertas. Los alumnos proponen una estructura equivalente con o sin evitamiento de la sustracción y en las que multiplican los sumandos.
- Expresiones cerradas, igualándolas a un número con y sin despeje de variable.
- Expresiones cerradas con soluciones numéricas con y sin sustitución directa.
- Tendencias inhibitorias.

PM8A. Resuelve: $a + b - c =$				
Tipo de respuesta		Respuestas	Resuelto	Frecuencia
Expresiones abiertas	Estructuras sintácticamente equivalente sin y con evitamiento de la sustracción	$a + b - c$ ⁽²³⁾	C	24
		$(a) + (b) + (-c)$ ⁽¹⁾		
	Multiplican los sumandos, hay confusión entre la multiplicación y la adición	abc ⁽¹⁾ ab ⁽¹⁾ $ab - c$ ⁽⁴⁾	I	6
Expresiones cerradas sin soluciones numéricas	Necesidad de cerrar una expresión abierta a 1, 0 ó d	$a + b - c = 1$ ⁽¹⁾	I	20
		$a + b - c = d$ ⁽²⁾		
		$a + b - c = 0$ ⁽⁴⁾		
	Necesidad de cerrar la expresión a cero y despejar	$c = a + b$ ⁽²⁾ ; $a + b = c$ ⁽⁶⁾		
		$+c - a - b$ ⁽¹⁾ $-a - b + c$ ⁽¹⁾		
	Igualan a cero y despejan a, b y c	$a = -b + c$ $c = +a + b$ $b = c - a$ ⁽¹⁾		
$a = -c - b$ $c = a + b$ $b = c - a$ ⁽²⁾				
Expresiones cerradas con soluciones numéricas	Con sustitución directa	$1 + 2 - 3 = 0$ ⁽¹⁾	I	5
		$6 + 3 - 4 = 5$ ⁽¹⁾		
	Sin sustitución directa	$a = 5, b = 4, c = 3$ $5 + 4 - 3 = 6$ ⁽¹⁾		
		$a = 2, b = 6, c = 5$ $a + b - c = 3$ ⁽¹⁾ $a = 2, b = 3, c = 1$ $a + b - c = 4$ ⁽¹⁾		
Tendencias inhibitorias	No entiendo ⁽¹⁾	I	4	
	Sin contestar ⁽³⁾			

Tabla 14. Resultados de PM8A de los alumnos de la ENP. El subíndice entre paréntesis indica la frecuencia.

PM8B. Resuelve: $2a + 3b - 10a - 5b =$				
Tipo de respuesta		Respuestas	Resuelto	Frecuencia
Expresión abierta	Reducen términos semejantes	$-8a - 2b$ ₍₄₀₎	C	41
	Factoriza términos semejantes	$2a(1 - 5) + b(3 - 5)$ ₍₁₎		
	Aparece error en la sustracción de $2a - 10a$	$8a - 2b$ ₍₂₎	I	5
	Aparece error en la sustracción de $3b - 5b$	$12a - 2b$ ₍₂₎		
Expresión cerrada sin soluciones numéricas	Reducen términos semejantes e igualan a cero	$-8a - 2b = 0$ ₍₁₎	I	8
		$8a - 2b = 0$ ₍₂₎		
	Reducen términos semejantes, igualan a cero y separan las variables en cada miembro de la igualdad	$-8a = 2b$ ₍₁₎		
		$2a - 10a = 3b - 5b$ ₍₁₎		
		$b = 4a; a = -b/4$ ₍₁₎		
	$a = b/6$ ₍₁₎			
Expresión cerrada con soluciones numéricas	Procedimientos personales erróneos	$a + b = +4$ ₍₁₎	I	4
	Sin sustitución directa con naturales aunque el resultado sea un negativo	$a = 2, b = 3$ $2a + 3b - 10a - 5b = -22$ ₍₁₎		
		$a = 1, b = 2$ $2a + 3b - 10a - 5b = -12$ ₍₁₎		
		$a = 2, b = 6, c = 5;$ $2a + 3b - 10a - 5b = -28$ ₍₁₎		
Sin sustitución directa con enteros	$a = 3, b = -16$ $2a + 3b - 10a - 5b = 8$ ₍₁₎			
Tendencias inhibitorias		Sin contestar ₍₁₎	I	1

Tabla 15. Resultados de PM8B de los alumnos de la ENP. El subíndice entre paréntesis indica la frecuencia.

PM8C. Resuelve: $-(a - b) =$				
Tipo de respuesta		Respuestas	Resuelto	Frecuencia
Expresión abierta	Estructuras sintácticas equivalentes	$-a + b$ ₍₄₄₎	C	46
		$(-a + b)$ ₍₂₎		
	Sin operar	$-(a - b)$ ₍₁₎	I	6
	Evitamiento del negativo	$a + b$ ₍₁₎		
	Predominio del negativo	$-a - b$ ₍₂₎		
	Omisión del negativo	$a - b$ ₍₁₎		
Multiplican los sumandos como: $(-a)(-b)$	$+ab$ ₍₁₎			
Expresión cerrada	Necesidad de igualar a cero	$-a + b = 0$ ₍₁₎	I	3
	Necesidad de igualar a cero y despejar una variable	$b = a$ ₍₁₎		
		$b = a, a = b$ ₍₁₎		
Expresión cerrada con soluciones numéricas	Con sustitución directa	$-5 + 6 = 1$ ₍₁₎	I	4
	Sustituyen valores para a y b , sin indicar cuáles son y arrojan un resultado numérico	$-(a - b) = 1$ ₍₁₎		
		$-(a - b) = 4$ ₍₁₎		
		$-(a - b) = -19$ ₍₁₎		

Tabla 16. Resultados de PM8C de los alumnos de la ENP. El subíndice entre paréntesis indica la frecuencia.

Las respuestas de la pregunta PM8D son del mismo tipo que las presentadas en las en las tablas 14, 15 y 16.

Las tendencias cognitivas que aparecen en las producciones de los alumnos en las expresiones abiertas correspondientes a las preguntas PM8A, B, C y D son:

- Aceptan las expresiones abiertas proponiendo estructuras sintácticamente equivalentes con evitamiento de la sustracción con y sin el uso de paréntesis.
- Aceptan la expresión abierta proponiendo estructuras sintácticamente no equivalentes cuya fuente de error proviene de:
 - Multiplicar los sumandos
 - Omitir el negativo o el predominio del negativo
 - Dificultades operatorias al reducir términos semejantes
- Necesidad de cerrar una expresión algebraica abierta igualándola a 1, 0 ó a un número general como d . Esta tendencia se presenta incluso al reducir términos semejantes.
- Necesidad de cerrar una expresión algebraica abierta igualándola a 0 para despejar alguna o todas las variables sin sentido, presentándose también al reducir términos semejantes.
- Necesidad de cerrar una expresión algebraica abierta proponiendo una solución numérica, asignando valores a cada una de las variables para obtener un resultado numérico porque aún no aceptan una solución algebraica.

- En algunos alumnos se presentan tendencias inhibitorias.

Las producciones de los alumnos para las preguntas PM8E y PM8F referidas a la resolución de ecuaciones, se presentan en las tablas 17 y 18.

Las soluciones fueron clasificadas en:

- Soluciones de la forma $x=a$
- Soluciones de la forma $ax+b=0$
- Los que presentan tendencias inhibitorias

En estas tablas se observan las siguientes tendencias cognitivas:

- La aceptación del negativo como solución de una ecuación. Aceptación del negativo como número aislado.
- La no aceptación del negativo como aislado, omitiendo el signo negativo.
- La aparición de errores procedimentales en la trasposición de términos que involucran a la adición con la multiplicación.
- Presentar la solución de una ecuación como una ecuación equivalente igualada a cero o a una constante empleando las formas $ax+b=0$ ó $ax=b$.
- La no aceptación de una ecuación de la forma $ax+b=cx+d$, al decir que “no es una ecuación bien redactada”.

PM8E. Resuelve: $9x + 3 = -15$					
Tipo de respuesta		Respuestas		Resuelto	Frecuencia
Soluciones de la forma $x=a$	Aceptación del negativo	$x = -2$ (48)		C	48
	Omisión del signo negativo	$x = 2$ (1)		I	1
	Error en la trasposición de términos, pasan el sumando 3 del primer miembro de la ecuación como sumando al segundo miembro	$9x+3=-15$ $9x=-15+3$ $9x=-12$ $x=-\frac{12}{9}$ (2)	$9x+3=-15$ $9x=-15+3$ $9x=-12$ $x=-\frac{12}{9}$ $x=-\frac{4}{3}$ (4)	I	6
	Error en la trasposición de términos, pasa el sumando 3 del primer miembro de la ecuación como divisor al segundo miembro	$9x+3=-15$ $9x=-\frac{15}{3}$ $9x=-5$ $x=-\frac{5}{9}$ (1)		I	1
Soluciones de la forma $ax+b=0$		$x+2=0$ (1)		I	3
		$9x+18=0$ (2)			

Tabla 17. Resultados de PM8E de los alumnos de la ENP. El subíndice entre paréntesis indica la frecuencia.

PM8F. Resuelve: $10x + 4 = 15x + 9$					
Tipo de respuesta		Respuestas		Resuelto	Frecuencia
Presentan la solución como $x=a$	-	$x=-1$ (37)		C	37
	Omisión del signo negativo	$x=1$ (7)		I	7
	Presentan dificultades en la trasposición de términos ó ignoran alguno de los términos	$10x+4=15x+9$ $10x-15x+4+9=0$ $10x-15x=-13$ $5x=-13$ $x=\frac{-13}{5}$ (1)	$10x+4=15x+9$ $10x-15x=9+4$ $-5x=13$ $x=\frac{13}{-5}$ (1)	I	4
		$10x+4=15x+9$ $10x-15x=9-4$ $-5x=5$ $x=5-5$ $x=0$ (1)	$10x+4=15x+9$ $10x-15x=9-4$ $15x=5$ $x=\frac{5}{15}$ (1)		
Presentan como solución una ecuación equivalente o no	De la forma $ax+b=0$	$-5x-5=0$ (3)		I	6
		$-x-1=0$ (1)			
		$-5x+13=0$ (1)			
	De la forma $ax=b$	$-5x=5$ (1)			
Tendencias inhibitorias	No es una ecuación bien redactada		I	5	
	(1)				
	Sin contestar (4)				

Tabla 18. Resultados de PM8F de los alumnos de la ENP. El subíndice entre paréntesis indica la frecuencia.

5.1.2 Resultados de los cuestionarios de los alumnos en Química

Para presentar las producciones en las respuestas de Química, en algunos casos se utilizó la taxonomía de presentada en la tabla 2.

PQI. En la tabla 19, se muestran las producciones de los alumnos para representar a un átomo de hidrógeno. Se encontraron 40 formas diferentes correctas e incorrectas.

En las producciones de los alumnos, aparecieron representaciones que involucran a los números enteros involucrando a los números de oxidación., los signos “+”, “-”, “.” y “×”.

En el superíndice y en el subíndice se aprecia la polisemia de significados en química. El superíndice puede significar el número de oxidación o el número atómico, mientras que el subíndice puede significar el número de masa o el número de átomos.

Se encontraron equivalencias sintácticas en las cuales el superíndice indica el número de oxidación como en el catión H^{1+} , H^+ , H^{+1} y en el anión H^{-1} , H^- , H^{1-} .


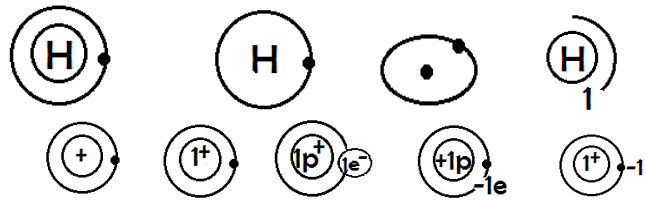

PQ1. Representa de tres maneras diferentes al átomo de Hidrógeno.			
Tipos de respuesta	Respuestas representativas	Resueltas	
Lenguaje natural	Hidrógeno	C Semántico	
Dibujo Figurativo	Bolas Esferas 	C Gráfico	
Dibujo Figurativo más signos	No aparecieron	- Gráfico	
Dibujo Figurativo más signos	Niveles electrónicos 	C Formal	
	Niveles electrónicos 	I Formal	
Dibujo esquemático más signos	No aparecieron en el estudio	No aparecieron (gráfico y formal)	
Descripción en signos normalizados	Símbolo	H, H ¹ , 1H, H ₁ ¹ , ¹ H ¹ , H ₁	C Formal
	Número de oxidación	H ⁰	
	Lewis	H [•] , H [×]	
	Configuración electrónica	1s ¹	I Formal
	Diagramas de rayas	H-H	
	Molecular	HOH, H ₂ O, H ₂	
	Número de oxidación	H ⁺¹ , H ⁺ , H ¹⁺ , H ⁻ , H ¹⁻ , H ¹⁻	
	Lewis	H ^{••}	
	Reacción	H+ O ₂ → H ₂ O	
Inhibitorias	No sé No se me ocurre Sin contestar	I	

Tabla 19. Resultados de PQ1 de los alumnos de la ENP.

El cero como número de oxidación representa la neutralidad en la cual un átomo no ha ganado ni ha perdido electrones, es decir, el equilibrio entre la misma cantidad de cargas positivas y cargas negativas.

Los electrones en el modelo de Lewis, son representados como puntos o cruces así como en matemáticas los mismos signos representan a la multiplicación.

Uno de los hallazgos encontrados en el estudio es la representación de un átomo con su configuración electrónica 1s¹, que es una descripción de signos normalizados formal.

PQ2. Con esta pregunta se pueden observar las diferencias entre los conceptos de átomo y molécula, por medio de sus representaciones.






PQ2. Representa de tres maneras diferentes a la molécula de Hidrógeno.		
Tipos de respuesta	Respuestas representativas	Resueltas
Lenguaje natural	Hidrógeno	I Semántico
Dibujo Figurativo	Bolas y varillas  Bolas 	C Gráfico
		I Gráfico
Dibujo Figurativo más signos	 (incorrecto como hidrógeno molecular)	I Gráfico
Dibujo Figurativo más signos	Niveles electrónicos 	C Formal
Dibujo esquemático más signos	No aparecieron	No aparecieron (gráfico y formal)
Descripción en signos normalizados	Molecular H_2	C Formal
	Diagramas de rayas H-H	
	Lewis $H:H, H\cdot H$	
	Símbolo H, 1H	I Formal
	Molecular $H_2O, H_3, H_4, H^2, HCl, NaOH$	
	Número de oxidación $H^{+1}, H^+, H^{1+}, H^-, H^{-1}, H^{-}$	
	Lewis H^\bullet	
Inhibitorias	No entiendo No capto No puede existir una molécula de hidrógeno, ya que una molécula se forma a partir de dos elementos Sin contestar El hidrógeno es un elemento no una molécula Pensé que era un elemento No me acuerdo No sé	I

Tabla 20. Resultados de PQ de los alumnos de la ENP.

En las tablas 19 y 20 se observa la confusión en los conceptos de átomo, molécula y elemento. Una molécula de Hidrógeno está formada por dos átomos de hidrógeno, la representación matemática es: $H+H = 2H$ y cuando se enlazan los $2H$ se forma un H_2 que es una molécula de hidrógeno, entonces $H+H=2H=H_2$, aquí encontramos otro entrecruzamiento de los SMS y los

SQS. Entonces en química 2 átomos de Hidrógeno forman una molécula de Hidrógeno (H_2), el coeficiente de 2 en $2H$ se anota en el subíndice H_2 , esto no aplica en matemáticas.

Aparece un error conceptual, derivado de la polisemia de la palabra Hidrógeno ya que se puede estar refiriendo a Hidrógeno como átomo, como elemento y como molécula cuyas propiedades son distintas. El átomo de Hidrógeno está formado por un protón y un electrón, y su carga total es cero. El Hidrógeno molecular está formado por dos átomos de Hidrógeno enlazados y es más estable que el átomo de hidrógeno. Un elemento es una sustancia formada por el mismo tipo de átomos, por ello, tanto el Hidrógeno molecular como el atómico definen al elemento.

Adicionalmente aparece otra confusión en los alumnos, anotan el número de átomos en el superíndice (H^2) en lugar de anotarlo en el subíndice (H_2).

PQ3. En esta pregunta se identifican las diferentes representaciones del cloruro de sodio y las concepciones de los sujetos de la estructura microscópica de un compuesto. En la tabla 21 se muestran las producciones de los alumnos.

Se observa que representan al cloruro de sodio en SQS semiótico, con dibujos figurativos utilizando bolas y varillas correctamente e incorrectamente, con dibujos figurativos más signos incorrectamente, con dibujos figurativos más signos utilizando niveles electrónicos correctamente. En la descripción de signos normalizados podemos identificar que la raya horizontal “-” representa un enlace mientras que en matemáticas representa una operación (sustracción) o el signo de un número negativo. Los signos “·”, “×” ó “Δ” significan electrones y en matemáticas los dos primeros son signos de multiplicación y el tercero una diferencia (delta). El signo +1 significa que un átomo perdió un electrón, mientras que en matemáticas es un número positivo.

Se observan también concepciones erróneas en química como $Na \rightleftharpoons Cl$, la doble flecha indica reversibilidad y un átomo de sodio (Na) no puede convertirse en un átomo de cloro (Cl). Otro de los errores observados en los SQS es el expresar al cloruro de sodio como ClNa, ya que la forma correcta es NaCl porque primero se anota el símbolo del elemento que tiende a perder sus electrones (al catión Na^+) y posteriormente al anión (Cl^-). La lectura de los compuestos se realiza nombrando primero al anión y posteriormente al catión.

Otros errores presentados son el confundir el símbolo del sodio (Na) con el del potasio (K) ó el no considerar las propiedades de los elementos que forman un compuesto, porque las características que tienen los elementos como los números de oxidación, determinan la fórmula química. Por ejemplo: en la respuesta $\text{Cl}_2 + \text{Na} = \text{Na}_2\text{Cl}$, el compuesto Na_2Cl no existe y sí el NaCl .

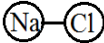



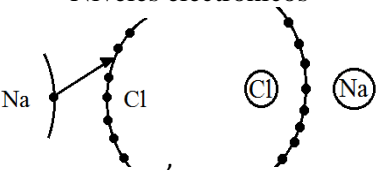


PQ3. Representa de tres maneras diferentes una “molécula” de Cloruro de sodio.			
Tipos de respuesta	Respuestas representativas	Resueltas	
Lenguaje natural	Sal de mesa	C Semántico no formal	
Dibujo Figurativo	Bolas y varillas 	Bolas 	C Gráfico
		I Gráfico	
Dibujo Figurativo más signos		I Gráfico	
Dibujo Figurativo más signos	Niveles electrónicos 	C Formal	
Dibujo esquemático más signos	No aparecieron	No aparecieron (gráfico y formal)	
Descripción en signos normalizados	Molecular NaCl	C Formal	
	Diagramas de rayas Na-Cl		
	Lewis 		
	Reacción $\text{Na} + \text{Cl} \rightarrow \text{NaCl}$, $\text{Na}^1 + \text{Cl}$, $\text{Na} + \text{Cl}$,		
	Diagrama de rayas $\text{Na} = \text{Cl}$	I Formal	
	Molecular NaCl_2 , $3(\text{Na})\text{Cl}$, $3(\text{NaCl})$, Na_2Cl , $(\text{NaCl})_3$, ClNa , $(\text{Na})(\text{Cl})$, KCl		
	Número de oxidación Cl^- , Na^+		
	Lewis 		
Reacción $\text{K} + \text{Cl} \rightarrow \text{KCl}$, $\text{Na} \rightleftharpoons \text{Cl}$, $\text{Na} + \text{Cl} = \text{NaCl}$, $\text{Cl}_2 + \text{Na} = \text{Na}_2\text{Cl}$			
Inhibitorias	No entiendo, No capto, Sin contestar No puede existir una molécula de hidrógeno, ya que una molécula se forma a partir de dos elementos El hidrógeno es un elemento no una molécula Pensé que era un elemento No me acuerdo No sé	I	

Tabla 21. Resultados de PQ3 de los alumnos de la ENP.

En química $a+b=ab$ como se muestra en $Na+Cl=NaCl$ en donde un átomo de sodio reacciona con un átomo de cloro para formar un compuesto llamado cloruro de sodio y en matemáticas $a+b=a+b$ ó $a+b=c$.

No aceptan que pueda existir una molécula de hidrógeno, ya que para ellos “una molécula se forma a partir de dos elementos”. Esta concepción es errónea porque un compuesto está formado por dos ó más átomos del mismo o de diferente elemento.

No admitir diferentes significados para un elemento, ya que lo consideran elemento o molécula. Esto ocurre muy frecuentemente en matemáticas con la polisemia de significados.

PQ4. El objetivo de esta pregunta es examinar si los alumnos pueden generalizar la fórmula química de un compuesto utilizando SMS. En las tablas 22 y 23 se muestran sus producciones.


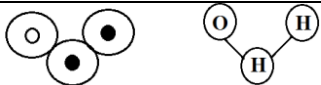
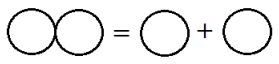
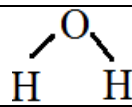
PQ4. ¿Cómo representas un compuesto?		
Tipos de respuesta	Respuestas representativas	Resueltas
Lenguaje natural	Mediante su fórmula química o con su nombre químico	C Semántico
	Usando los elementos que contiene y los juntas con base en la nomenclatura	I Semántico
	Primero el anión y luego el catión	
	Con los elementos, el número de átomos, el número de moléculas. Como una fórmula	
	Con su fórmula, con un diagrama	
	Con los símbolos de los elementos que forman el compuesto	
	Mezclando sus fórmulas de los elementos del compuesto	
	A través de una ecuación química	
	Con sus siglas de sus elementos	
	Por medio de su abreviatura de la tabla periódica	
Variando los elementos		
Dibujo Figurativo		C Gráfico
		I Gráfico
Dibujo Figurativo más signos	$1+1=2$ 	C Gráfico Entrecruzamiento
Dibujo esquemático		C Gráfico y formal

Tabla 22. Resultados de PQ4 de los alumnos de la ENP.

PQ4. ¿Cómo representas un compuesto?		
Tipos de respuesta	Respuestas representativas	Resueltas
Descripción en signos normalizados	Molecular: Con su fórmula, H ₂ O	C Semántico-sintáctico Formal
	Molecular: X _a Y _b Z _c ...X _m Y _n Z _o ...	C Sintáctico formal Entrecruzamiento
	Molecular: H ₂ SO ₄ , H ₂ O	C Sintáctico normal
	Diagrama a rayas: Con la estructura de Lewis <u>O=H=O</u>	El diagrama a rayas es correcto pero no es una estructura de Lewis es un diagrama de rayas I Formal
	Reacción: Por su fórmula; <u>los productos y la reacción</u> Na + Cl → _ NaCl	I Semántico-sintáctico Formal
	Reacción: Con la unión de dos elementos o más, NaCl	I Semántico C Formal
	Reacción: Se combinan dos elementos, H ₂ O	
	Reacción: SMS “=” Es la unión de dos elementos: Cl + Na = _ NaCl	I Semántico-sintáctico Entrecruzamiento
	Reacción: a + b → c /reactivo + reactivo = compuesto Elemento + elemento = compuesto	I Semántico-sintáctico Entrecruzamiento
Reacción con números de oxidación: H ⁺¹ + O ⁻² → H ₂ O	I Sintácticos Formal	
Reacción con energía: NaCl + Cl_ $\xrightarrow{\Delta}$ _ NaCl		
Inhibitorias	No sé No recuerdo	I

Tabla 23. Resultados de PQ4 de los alumnos de la ENP.

De las tablas 22 y 23 podemos concluir que un sujeto expresa correctamente mediante el lenguaje natural la forma de representar un compuesto al mencionar la fórmula química o el nombre del compuesto, ya que en ambas está involucrado el número y tipo de átomos que forman al compuesto, otros estudiantes no precisan el concepto, mencionan la combinación de átomos ó la unión de dos elementos, pero pueden ser dos o más y falta decir que están unidos en proporciones constantes y con números enteros positivos.

Se observan alumnos que aun no están introducidos en la nomenclatura química, anotando en la fórmula química primero al anión y después al catión derivado de la lectura del nombre en lenguaje natural, ya que en este lenguaje primero se dice el anión y después al catión.

En el dibujo figurativo más signos se advierte el uso del signo igual como bidireccional.

Se perciben entrecruzamientos en el uso de los signos “=”, en la representación de un compuesto con la letra c, en el uso de los números de oxidación, y en la representación algebraica de un compuesto como X_aY_bZ_c...X_mY_nZ_o...

PQ5. En este reactivo se identifica si los alumnos conocen el significado de los subíndices en una fórmula química.

Para presentar los resultados, las respuestas se clasificaron con base en el concepto que los alumnos utilizaron para explicarlas. En la tabla 24 se presentan los resultados de los alumnos, en ellos se vislumbra confusión entre los significados de átomo, valencia, molécula, número de electrones, número de elementos y número de oxidación al relacionarlos con el subíndice en la fórmula de un compuesto. Podemos apreciar el uso de una regla sintáctica que ocasiona dificultades para concebir los subíndices al indicar que: “los subíndices son las valencias cruzadas de los elementos del compuesto”.

Los subíndices solo están relacionados con el número de átomos de cada elemento que conforman un compuesto. Solo 9 alumnos de los 59 contestaron correctamente este reactivo y es un concepto fundamental en el aprendizaje de la química.

PQ5. ¿Qué indican los subíndices 2, 2 y 7 en la fórmula $K_2Cr_2O_7$?			
Tipos de respuesta	Respuestas representativas	Resueltas	Frecuencia
Átomos	Cantidad de átomos de cada elemento que hay en cada molécula de ese compuesto (respuesta genérica)	C	9
	Que en la molécula de dicromato de potasio hay 2 átomos de potasio, 2 átomos de cromo y 7 átomos de oxígeno (respuesta específica)		
	Número de átomos de esa sustancia Número de átomos del elemento Número de veces que aparece el átomo	I	23
Valencia	Valencia Las valencias cruzadas de los elementos del compuesto	I	7
Moléculas	Número de moléculas en la fórmula 2 moléculas de potasio, 2 moléculas de cromo y 7 moléculas de oxígeno Número de moléculas de cada elemento Número de moléculas en el compuesto	I	10
Electrones	Número de electrones Son los electrones que comparten entre sí, al formar el compuesto El número de electrones que se encuentran en la última órbita	I	5
Elementos	Número de elementos que hay en ese elemento El número que están representados los elementos	I	2
No. de oxidación	Número de oxidación Representan los números de oxidación cruzados	I	2
Inhibitorias	Sin contestar	I	1

Tabla 24. Resultados de PQ5 de los alumnos de la ENP.

PQ6. En este reactivo se reconocen las concepciones del coeficiente y cómo afecta éste al número de átomos que forman un compuesto. En la tabla 25 se exponen las producciones de los alumnos cuyas repuestas fueron clasificadas para su presentación en:

- Las relacionadas con el modelo microscópico
- Las relacionadas con el modelo macroscópico
- Las relacionadas a los modelos macro y microscópico
- Entrecruzamientos de un SMS y SQS

Las respuestas resueltas se catalogaron en semánticas como aquellas en las que solo se utiliza lenguaje natural y en formales aquellas que aunque utilizaron lenguaje natural, requirieron en sus explicaciones símbolos formales de los compuestos o elementos.

PQ6. ¿Qué indica el número 5 en el compuesto 5KCl?				
Tipos de respuesta		Respuestas representativas	Resueltas	Frecuencia
Modelo microscópico	Moléculas	Número de moléculas del compuesto (respuesta genérica)	C Semántico	10
		5 moléculas de KCl (respuesta específica)	C Formal	11
		El número de moléculas que tienen los átomos cada uno	I Semántico	1
		Que hay 5 moléculas de K	I Formal	2
	Átomos	5 átomos de potasio y 5 átomos de cloro	C Semántico	3
		La cantidad de átomos El número de átomos de cada elemento Todo el compuesto tiene 5 átomos Que son 5 átomos del compuesto Número de átomos que tiene	I Semántico	6
		5 átomos de KCl	I Formal	3
Modelo macroscópico		Número de moles en el compuesto Que hay 5 moles en ese compuesto	C Semántico	10
Modelo micro/macrocópico		5 moléculas de KCl o bien que Hay 5 moles de KCl	C Formal	1
Entrecruzamientos de SMS y SQS		El coeficiente	C Semántico	3
		Las veces que se multiplica el subíndice de dicho elemento El número de veces que se van a multiplicar los elementos del compuesto Que se tiene 5 veces ese compuesto Que se multiplica por 5	C Semántico	6
		El balance del compuesto	I Semántico	2
Inhibitorias		No sé	I Semántico	1

Tabla 25. Resultados de PQ6 de los alumnos de la ENP.

El 5 en 5KCl tiene diversos significados, el microscópico como moléculas y número de átomos, y el macroscópico como número de moles. Por otra parte se distinguió un tipo de respuestas relacionadas con operaciones matemáticas más que con un concepto químico, como coeficiente o como un factor que multiplica al subíndice de cada elemento, o como el número de veces de ese compuesto. Este tipo de respuestas muestra entrecruzamientos entre los SMS y los SQS.

PQ7. En esta pregunta se equipara la sintaxis de los subíndices en una fórmula química y la forma en la que operan conjuntamente con los coeficientes. En la tabla 26 se muestran los resultados de los alumnos.

PQ7. ¿Cuántos átomos de cobre, de azufre y de oxígeno hay en 6CuSO_4 ?		
Tipo de respuesta	Resuelto	Observaciones
$\text{Cu}=6, \text{S}=6, \text{O}=24$	C	El coeficiente 6, se multiplica por cada uno de los subíndices para cada elemento; para el Cobre (Cu) es 6(1), en el Azufre (S) es 6(1) y en el Oxígeno (O) es 6(4)
$\text{Cu}=6, \text{S}=6, \text{O}=4$	I	En el O el coeficiente 6 no es multiplicado por el subíndice 4
$\text{Cu}=6, \text{S}=1, \text{O}=1$	I	El coeficiente 6 solo opera para el Cu, sin considerarlo para el S y el O, y omite el subíndice del oxígeno
$\text{Cu}=6, \text{S}=1, \text{O}=4$	I	El coeficiente 6 solo opera para el Cu, sin considerarlo para el S y el Oxígeno
$\text{Cu}=6, \text{S}=1, \text{K}=1$	I	El coeficiente 6 solo opera para el Cu, sin considerarlo para el S y cambia al Oxígeno (O) por el Potasio (K) como si se tratase de una generalización de un número
$\text{Cu}=6, \text{S}=16, \text{O}=24$	I	Para obtener el número de átomos de azufre, suma los 6 átomos de Cu, con 6 de S y 4 del O
$\text{Cu}=1, \text{S}=1, \text{O}=4$	I	No consideran el coeficiente de 6 como en
$\text{Cu}=6, \text{SO}=1$	I	El coeficiente 6 solo opera para el Cu, considerando a SO como una sola entidad (un anión), omitiendo el subíndice del Oxígeno (4)
Sin contestar	I	Tendencia inhibitoria

Tabla 26. Resultados de PQ7 de los alumnos de la ENP.

En las producciones de los alumnos se observa el uso del signo “=”, como una equivalencia cuando no lo es, ya que Cu no es igual a 6, en su lugar puede usarse una estructura específica como “ $\text{N}_{\text{Cu}}=6$ ” en un SQS y en un SMS expresando una cantidad.

El coeficiente debe ser multiplicado por cada uno de los subíndices de los elementos que conformar al compuesto. Sin embargo, se observa que los alumnos omiten el subíndice del oxígeno considerándolo como 1, el coeficiente 6 solo opera para el Cu y no para el azufre o el oxígeno como en expresiones matemáticas $[-(a - b) = -a - b]$ y utilizan cualquier letra K para representar un elemento como si fuera una generalización en lugar de utilizar el símbolo del oxígeno (O).

PQ8. Esta pregunta nos permite identificar si los alumnos han diferenciado el uso del paréntesis en química con un mismo significado pero con diferente sintaxis que en álgebra. En la tabla 27 se exhiben las producciones de los alumnos.

PQ8. ¿Cuántos átomos de oxígeno hay en $Al(OH)_3$?		
Tipo de respuesta	Resuelto	Observaciones
O=3	C	El número de átomos del Oxígeno (O) corresponde al producto del subíndice 3 fuera del paréntesis por el subíndice 1 dentro del paréntesis
O=1	I	El subíndice 3 fuera del paréntesis es ignorado y solo se considera un átomo que aparece dentro del paréntesis
O=16, Al= 27, H=1	I	Confunde el concepto del número de masa ¹⁷ con el números de átomos

Tabla 27. Resultados de PQ8 de los alumnos de la ENP.

Se advierte el uso del signo “=” como una equivalencia erróneamente como en la PQ7. El paréntesis es ignorado cuando de usa pasa asociar especies y multiplicarlas. El número de átomos es confundido por el número de masa.

PQ9. En este reactivo se identifica si los alumnos logran relacionar conjuntamente los subíndices, los coeficientes y el uso de las especies químicas presentes en un determinado compuesto.

En la tabla 28 se muestran diez diferentes tipos de respuestas representativas de las 16 que exhibieron los alumnos.

El paréntesis es usado para asociar especies químicas y matemáticamente tiene un carácter multiplicativo, el subíndice del paréntesis indica el número de veces que el anión o catión está presente en el compuesto.

Las tendencias cognitivas presentadas son:

- Omisión del coeficiente
- El coeficiente solo opera para el primer elemento presente en el compuesto
- Omisión de los subíndices
- Omisión de los subíndices con paréntesis
- Sumar y multiplicar coeficiente con subíndices sin sentido
- Operar indiscriminadamente

¹⁷ El número de masa es la masa atómica redondeada a enteros.

PQ9. ¿Cuántos átomos de calcio, de fósforo y de oxígeno hay en $7\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$?		
Tipo de respuesta	Resuelto	Observaciones
Ca=21, P=14, O=56	C	El número de átomos del Calcio (Ca) corresponde al producto del coeficiente 7 su subíndice 3, el del Fósforo (P) corresponde al producto del coeficiente 7 por su subíndice 2 fuera del paréntesis por su subíndice 1 dentro del paréntesis y el del Oxígeno es el producto del coeficiente 7 por el subíndice 2 fuera del paréntesis por su índice 4 dentro del paréntesis
Ca=3, P=2, O=8	I	Se omite el coeficiente 7, que indica que hay 7 moléculas de $\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$
Ca=21, P=2, O=8	I	El coeficiente solo opera para el Ca, sin considerarlo para el P y el O
Ca=7, P=7, O=7	I	El coeficiente opera para Ca, P y el O, omitiendo los subíndices pertenecientes a cada especie así como el subíndice fuera del paréntesis
Ca=21, P=8, O=8	I	El coeficiente 7 solo opera para el Ca multiplicándolo por su subíndice, el subíndice del O también se lo asigna al P multiplicándolos ambos por el subíndice fuera del paréntesis
Ca=21, P=2, O=2	I	Para el P ignora el coeficiente 7, para el O ignora el subíndice 4 dentro del paréntesis y el coeficiente 7
Ca=7, P=2, O=2	I	Para el Ca ignora el subíndice 3, para el P ignora el coeficiente 7 y para el O ignora el coeficiente 7 y el subíndice 4 dentro del paréntesis
Ca=27, P=14, O=56	I	Para el Ca suma el coeficiente 7 con el subíndice 2 fuera del paréntesis y lo multiplica por 3
Ca=21, P=4, O=8	I	Al P le asigna el subíndice del O ignorando el coeficiente 7 y el subíndice fuera del paréntesis 2 y para el O ignora el coeficiente 7
Sin contestar	I	Tendencia Inhibitoria

Tabla 28. Resultados de PQ9 de los alumnos de la ENP.

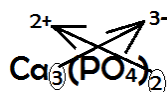
En las respuestas se observa que los alumnos no conocen el arreglo de los átomos de este compuesto. Es posible que realizando un análisis mediante la fórmula, se pueda obtener una estructura que le brinde al alumno la idea del uso de los subíndices con y sin paréntesis.

Por ejemplo: en la fórmula $\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$, el paréntesis está asociando un agregado químico formado por un átomo de fósforo (P) y cuatro átomos de oxígeno (O) para formar un ión llamado fosfato.

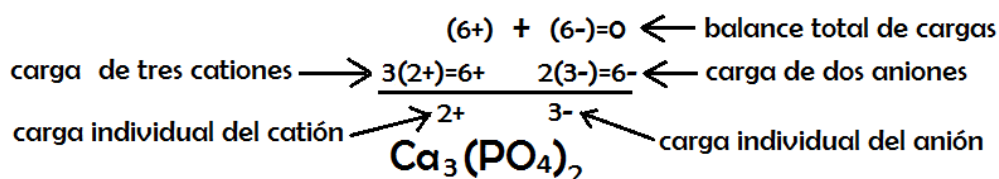
El calcio tiene un número de oxidación de $2+$ representado como Ca^{2+} y el anión fosfato tiene un número de oxidación $3-$ expresado como $(\text{PO}_4)^{3-}$. Se observa que los números de oxidación se representan en el superíndice derecho.

La determinación de los números de oxidación $2+$ y $3-$ se puede obtener mediante la fórmula. El subíndice 3 del calcio corresponde al número de oxidación del fosfato y es negativo porque por convención en las fórmulas de los compuestos, al agregado que está del lado derecho en una fórmula se le llama anión.

Por otro lado, el subíndice 2 del fosfato corresponde al número de oxidación del calcio y es positivo porque en la fórmula se encuentran en el lado izquierdo los cationes.

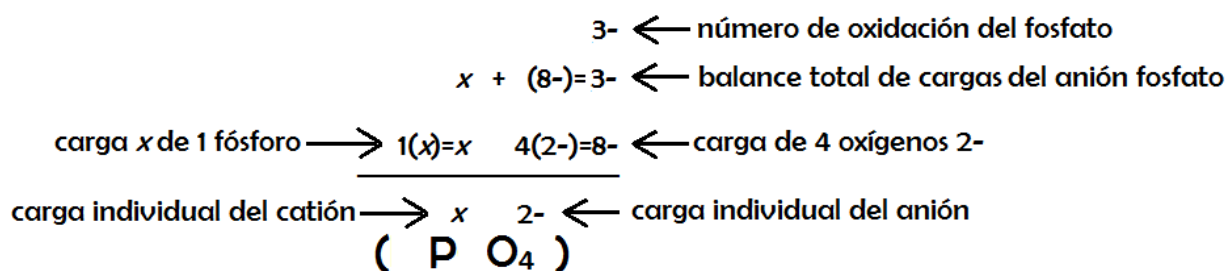


El número de oxidación total del compuesto es cero. Para que esta condición se cumpla debe existir un balance de cargas, es decir, la suma de las cargas totales del anión y las cargas totales del catión debe ser cero.



Determinada la carga del anión, una forma de plantear un posible arreglo de los átomos, es a través de la determinación de los números de oxidación de cada elemento que conforma al anión. El número de oxidación del anión fosfato es 3-; una propiedad química del oxígeno es aceptar dos electrones, quedando cargado negativamente como 2-.

En el siguiente esquema se observa el planteamiento para determinar el número de oxidación del fósforo. La lectura del esquema se realiza de abajo hacia arriba, se parte de la fórmula del anión hasta plantear el balance de cargas del anión fosfato con la ecuación $x + (8-) = 3-$.

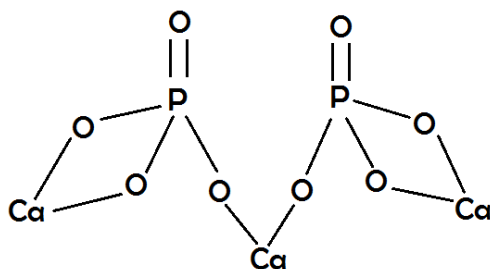


La ecuación matemática es $x + (-8) = -3$, cuya solución es $x = 5$, que se lee en un SQS como cinco positivo y se escribe como $5+$ ¹⁸. Este $5+$ representa el número de oxidación del fósforo, que está relacionado con otro concepto químico llamado valencia, que nos indica la capacidad de

¹⁸ En libros de Química para universitarios, se ha encontrado las notaciones para representar a los números de oxidación como: +5 ó 5+, -3 ó 3-.

combinación asociado al número de enlaces que puede formar. Así el fósforo puede formar 5 enlaces, el oxígeno 2 y el calcio 2.

Cada “molécula” de $\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$ ¹⁹, tiene tres átomos de Calcio con dos enlaces cada uno, dos átomos de fósforo con cinco enlaces cada uno y ocho átomos de oxígeno con dos enlaces cada uno. En la siguiente figura se presenta una propuesta de un modelo del arreglo de los átomos de ese compuesto²⁰, recordando que un modelo es una forma en la que los estudiantes se acercan a la realidad, sin ser la realidad misma.



Entonces si se tienen 7 $\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$, este coeficiente representa siete “moléculas” (agregados), por lo cual aplica su carácter multiplicativo de veces $\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$ igual que en matemáticas $7x$, en donde x representa al fosfato de calcio.

En este análisis destaca el uso del paréntesis para asociar dos o más elementos que forman un anión. Por otro lado también se observa que hay entrecruzamientos entre los SMS y los SQS, en los que está implícita la matemática y los conceptos químicos están relacionados.

PQ10. En este reactivo se identifican las diferentes representaciones utilizadas para un enlace químico, así como el de modelos atómicos y sus significados. Las producciones de los alumnos se muestran en las tabla 29.

Se encontraron respuestas semánticas correctas e incorrectas, en las que se identifica a un enlace químico con una raya, con dos electrones usando el modelo de Lewis. En los dibujos figurativos, representan a los enlaces con rayas o varillas. En el dibujo figurativo más signos los representan con la pérdida de un electrón en un átomo hacia otro que lo gana. Aparece una concepción incorrecta indicando que: “el átomo de oxígeno cede electrones”.

¹⁹ El fosfato de calcio $\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$ es un componente de los huesos y de los dientes.

²⁰ Cada enlace está representado mediante una barra o una línea.

Se observa la aparición de dibujos esquemáticos no considerados en la clasificación de Galagovsky (2004). En la descripción de signos normalizados surge la generalización en forma molecular como un entrecruzamiento de los SQS y SMS. En los diagramas de rayas emergen el enlace como grupo funcional, las notaciones desarrolladas y las semi-desarrolladas.


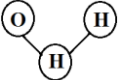
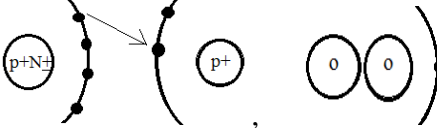



PQ10. ¿Cómo representas un enlace químico?					
Tipos de respuesta	Respuestas representativas	Resueltas			
Lenguaje natural	Con una línea o poniendo dos electrones de los átomos juntos en un modelo de Lewis	C Semántico			
	Por la unión de átomos (esquemas)	I Semántico			
	Con dos compuestos				
	Usando diferentes símbolos				
	Con las reacciones				
Dibujo figurativo		C Gráfico			
		I Gráfico			
Dibujo figurativo más signos	<p>Niveles electrónicos</p>  <p>El oxígeno puede formar un enlace iónico porque cede un electrón</p>	I Gráfico			
Dibujo esquemático		C Gráfico			
Dibujo esquemático más signos		I Gráfico y formal			
Descripción en signos normalizados	Con guiones (-), Con una línea C-H	C Semántico Formal			
	Con líneas: <u>O-H-O</u>	I Semántico Formal			
	$X_a Y_b Z_c \dots X_m Y_n Z_o \dots$	C Sintáctico Formal SMS/SQS			
	Diagrama de rayas:	C Sintáctico Formal			
	<table border="1" data-bbox="500 1480 993 1690"> <tr> <td>H—O—H</td> <td>CH₃—CH₂—CH₃ (Notación semidesarrollada)</td> </tr> <tr> <td> $\begin{array}{c} \text{H} \\ \parallel \\ \text{---C---} \\ \text{(Doble enlace)} \end{array}$ </td> <td> $\begin{array}{c} \text{H} \\ \\ \text{H---C---H} \\ \\ \text{H} \\ \text{(Notación desarrollada)} \end{array}$ </td> </tr> </table>		H—O—H	CH ₃ —CH ₂ —CH ₃ (Notación semidesarrollada)	$\begin{array}{c} \text{H} \\ \parallel \\ \text{---C---} \\ \text{(Doble enlace)} \end{array}$
	H—O—H	CH ₃ —CH ₂ —CH ₃ (Notación semidesarrollada)			
$\begin{array}{c} \text{H} \\ \parallel \\ \text{---C---} \\ \text{(Doble enlace)} \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{H} \\ \\ \text{H---C---H} \\ \\ \text{H} \\ \text{(Notación desarrollada)} \end{array}$				
Lewis:		C Formal			
Reacción:	Na + Cl ₂ → NaCl	I Formal			
Inhibitorias	No sé, Sin contestar	I			

Tabla 29. Resultados de PQ10 de los alumnos de la ENP.

PQ11. En esta pregunta se identifica si los alumnos pueden generalizar una reacción química utilizando un SMS, el tipo de reacciones presentadas y si los signos utilizados son indicadores de los conocimientos de los estudiantes.

En la tabla 30 se encuentran los resultados de esta pregunta. Se encontraron respuestas equivalentes en diferentes tipos de sistemas, las semánticas explicando en lenguaje natural, las semánticas-sintácticas incluyendo palabras y signos, y las sintácticas expresadas con signos y símbolos.

PQ11. ¿Cómo representas una reacción química?			
Tipo de respuesta			
Semánticas	Semánticas-sintácticas	Sintácticas	
		Generales	Particulares
Poniendo los reactivos, una flecha y los productos	elemento + elemento \rightarrow producto reactivos \rightarrow producto	a+b \rightarrow c A+B \rightarrow AB A+B \rightarrow C+D	C+O ₂ \rightarrow CO ₂ Na+Cl \rightarrow NaCl $\wedge + \wedge \xrightarrow{\Delta} \wedge\wedge$
Con dos compuestos y una flecha que lleve al resultado	elemento + elemento \rightarrow resultado		
Mediante una ecuación balanceada donde el signo igual es una flecha	Elemento + elemento = compuesto	aA+bB \rightarrow kC+dD a+b=c+d	Na+Cl = NaCl H ₂ +O ₂ = H ₂ O

Tabla 30. Resultados de PQ11 de los alumnos de la ENP.

En la tabla 29 se observan los entrecruzamientos de los SMS y los SQS en las producciones sintácticas tanto en las generalizaciones como en las particulares. El signo “=” es representado como una flecha o viceversa. Los elementos ó compuestos son representados por letras mayúsculas o minúsculas como los números en matemáticas. Las letras minúsculas pueden representar los coeficientes estequiométricos que hacen que una reacción se encuentre balanceada. Se presenta el uso de la fórmula estructural de un compuesto $\wedge + \wedge \xrightarrow{\Delta} \wedge\wedge$. Las reacciones que se muestran son reacciones de composición y específicamente una de polimerización.

PQ12. En esta pregunta se indaga acerca de las ideas de los estudiantes sobre el significado de la flecha en una reacción química relacionada con el equilibrio químico, la estabilidad de los productos y de los reactivos, y la irreversibilidad. En la tabla 31 se muestran las producciones de los alumnos.



PQ12. ¿Qué indica la flecha en una reacción química?			
Tipo de respuesta	Respuestas representativas	Resuelto	Observaciones
Reacción	Reacción... Podría ser una síntesis... → Da como producto... Reacciona como...	C Semántico	Los estudiantes ven a la flecha como un cambio, un proceso y se infiere la unidireccionalidad de la misma
	Tipo de reacción... Que da lugar a... El cambio de la molécula, el producto Que reacciona con otro compuesto... Representa el resultado... Indica la continuación de la reacción... Que al mezclar unas sustancias se transforman en otras... Indica la nueva forma que adoptan los compuestos al hacer reacción...	I Semántico	Los estudiantes tienen idea de cambio y de reacción, pero no pueden precisar este hecho mediante el lenguaje químico adecuado debido a la falta de conceptos químicos básicos
Dirección	Dirección... Dirección del proceso... La dirección en la que van los reactivos formando productos De dónde se dirige o a qué pasa El paso o proceso del reactivo al producto	C Semántico	Los sujetos manifiestan la idea de equilibrio químico, la flecha e entonces es unidireccional, lo ven como un proceso que va de los reactivos del lado izquierdo a los productos del lado derecho de la flecha
Bidireccionalidad	No aparece en este reactivo pero sí aparece incorrectamente en la tabla 21 como $\text{Na} \rightleftharpoons \text{Cl}$	No se presenta	No se menciona la flecha con dos puntas o bien la doble flecha, que indicaría que el sujeto entiende que una reacción química está en equilibrio entre reactivos y productos, y que existe además de la espontaneidad, la probabilidad de reversibilidad
Equivalencia	Resultado Reacción resultante Equivalencia El resultado que se obtendrá, es como la función de “igual” en matemáticas	C Semántico	La flecha en química también significa equivalencia, con sentido bidireccional, los estudiantes entrecruzan los SMS con los SQS al verla como una resultado, equivalencia o igualdad matemática pero solo con sentido unidireccional
Energía	El resultado de la reacción, cuando existe calor éste se representa sobre la flecha	C Semántico	Es común en el SQS hablar de la energía involucrada en una reacción, se representa con un triángulo sobre la flecha, pero no todas las reacciones liberan energía, muchas de ellas la absorben del medio
	Que la reacción química libera energía	I Semántico	
Otras	Dibujo figurativo más signos:  El resultado de la reacción que resulta con la unión de los reactivos reaccionando a través de la flecha	I	El sujeto tiene idea de que la flecha representa cambio, reacción pero no precisa el concepto, en su lugar utiliza lenguaje común y un dibujo figurativo para representar que “algo” se convierte en otro “algo”
	Inhibitoria: 	I	Se desconoce el origen de la tendencia inhibitoria y sólo dice que la flecha simplemente representa una flecha

Tabla 31. Resultados de PQ12 de los alumnos de la ENP.

Los entrecruzamientos encontrados entre los SQS y los SMS para el significado de la flecha en una reacción química son:

- La flecha significa “da como producto” en matemáticas un producto es el resultado de una multiplicación, en química es el resultado de una reacción.
- La flecha sugiere la dirección en la que van los reactivos formando productos, esto representa la unidireccionalidad que en matemáticas se representa con el signo “=” cuando los alumnos están realizando la extensión de los naturales a los enteros, transitando de la aritmética al álgebra.
- La flecha indica el resultado “como la función del signo igual” en matemáticas.
- Algunos alumnos mencionan la palabra “equivalencia” que representa un concepto matemático en ecuaciones algebraicas.

PQ13. En este reactivo se identifica el principio de conservación de la materia a través de los coeficientes estequiométricos en una reacción (Tabla 32). Estos coeficientes hacen que la reacción se encuentre balanceada, matemáticamente tiene que ver con el concepto de equivalencia.

PQ13. En la ecuación $\alpha A + \beta B \rightarrow \gamma C + \delta D$, ¿Qué representan los coeficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$?		
Respuestas	Resuelto	Observaciones
Número de moléculas	I	A, B, C y D no sólo pueden ser moléculas, sino también átomos, visto desde el punto de vista microscópico (el sujeto no advierte esta diferencia)
Número de moles... Los moles de su respectiva sustancia...	C	En el sentido macroscópico los coeficientes estequiométricos representan el número de moles de cada sustancia A, B, C y D, cuando se está hablando de la estequiometría de una reacción Los estudiantes ven a la química como una ciencia experimental donde manipulan sustancias
La cantidad en mol de cada compuesto o elemento	C	A,B,C y D son vistos como compuestos o elementos
Un procedimiento de balanceo	C	Los coeficientes estequiométricos se obtienen a partir de un procedimiento para establecer la conservación de la materia.
No entiendo, podría ser el elemento o la valencia, el número de átomos.	I Inhibitorio	Se presenta la confusión entre elemento, valencia y número de átomos con los coeficiente estequiométricos
Nunca lo había visto escrito así	I Inhibitorio	Este comentario obedece a la falta de generalización en la enseñanza de la química, sólo se atienden casos específicos en las reacciones balanceadas
No sé	I Inhibitorio	Podría ser resultado de la falta de conexión del sujeto entre el lenguaje matemático y el contexto químico

Tabla 32. Resultados de PQ13 de los alumnos de la ENP.

Los entrecruzamientos de los SQS y de los SMS que aparecen en la tabla 32 son:

- Las letras A, B, C y D son generalizaciones de moléculas, compuestos, elementos y sustancias en química, así como en matemáticas representan números o cantidades.
- Los coeficientes estequiométricos α , β , γ , δ tienen el mismo significado que los coeficientes en una expresión algebraica.

Se presentan las siguientes tendencias cognitivas:

- La generalización incorrecta al considerar uno solo de los significados que puede representar una letra.
- La falta de generalización de los sujetos en la enseñanza y en el aprendizaje de la química.
- Confundir elemento, valencia y número de átomos.

PQ14. Identificar si los sujetos reconocen las especies presentes en la reacción, si descodifican un SQS con la nomenclatura de las fórmulas químicas, así como identificar el estado de agregación de los reactivos y los productos (Tabla 33).

Para presentar las producciones de los alumnos, las respuestas se clasificaron en:

- Las referidas a elementos correcta e incorrectamente
- Aquellas relacionadas a elementos y compuestos
- Las presentadas con compuestos sin nombrarlos y las que identifican los compuestos y los nombran correcta e incorrectamente
- Las que presentan tendencias inhibitorias

En las producciones se observa nuevamente confusión entre molécula, átomo y elemento. Los alumnos no conocen la nomenclatura química inorgánica, ya que no relacionan al elemento con su símbolo confundiéndolos como en el caso del Oro (Au) con la Plata (Ag).

Los entrecruzamientos que se observan son:

- El uso del signo igual como una equivalencia entre el símbolo de un elemento o la fórmula de un compuesto con su nombre. Por ejemplo: Ag=Plata, NaCl= Cloruro de sodio.
- El uso del signo igual en una reacción.

PQ14. En la reacción química de doble sustitución $\text{AgNO}_{3(\text{ac})} + \text{NaCl}_{(\text{ac})} \longrightarrow \text{AgCl}_{(\text{s})} + \text{NaNO}_{3(\text{ac})}$ reconoce a las moléculas y anota el nombre de cada uno de los reactivos y de los productos					
Tipo de respuesta	Respuestas representativas				Resuelto
Elementos	Ag=Plata, N=Nitrógeno, O=Oxígeno, Na=sodio, Cl=cloro				I
Elementos y compuestos	Ag=Plata, N=Nitrógeno, O=Oxígeno, Na=sodio, Cl=cloro, NO= óxido de nitrógeno				I
	Ag=Plata, N=Nitrógeno, O=Oxígeno, Na=sodio, Cl=cloro, NO=óxido de nitrógeno, NaCl= Ácido clorhídrico, NaNO ₃ =Nitrato de sodio, AgCl=Clorato de plata				I
	Ag=Oro, Na=sodio, Cl=cloro , NaCl=Cloruro de sodio, AgCl=Cloruro de plata				I
Identifican compuestos	AgNO ₃	NaCl	AgCl	NaNO ₃	I
	Óxido de plata	Cloruro de sodio	Cloruro de plata	Óxido nítrico de sodio	I
	Óxido de plata	Clorcito de sodio	Clorito de plata	Óxido de sodio	I
	Nitrato de plata	Cloruro de sodio	Cloruro de plata	Nitrato de sodio	C
	Nitrito de plata + Cloruro de sodio = Cloruro de plata + Nitrito de sodio				I
	Óxido nitroso de plata + Cloruro de sodio → Cloruro de plata + Óxido nitroso de sodio				I
	No lo recuerdo	Cloruro de sodio	Cloruro de plata	No lo recuerdo	I
	Nitróxido de plata	Cloruro de sodio	Cloruro de plata	Nitróxido de sodio	I
Nitrato de plata	Cloruro de sodio	Cloruro de cloro	Nitrato de sodio	I	
Inhibitorias	No entiendo... No sé... Sin contestar...				I

Tabla 33. Resultados de PQ14 de los alumnos de la ENP.

PQ15. En esta pregunta los sujetos deben mostrar las ideas sobre de un proceso de óxido-reducción, el uso de la recta numérica como apoyo para identificar las especies que se oxidan y las que se reducen, así como modelos matemáticos para la conceptualización de la ganancia o pérdida de electrones en este tipo de procesos. Se eligió una reacción que requiere del análisis de los números de oxidación de las especies que participan en la reacción. Los resultados de las producciones se muestran en la tabla 34.

En las producciones de los alumnos, se observa la recta numérica solo un como modelo mental y no le representa apoyo para identificar a las especies que se oxidan o las que se reducen porque no realiza un análisis de los números de oxidación de todos los elementos que participan en la reacción.

Los alumnos no lograron identificar a las especies que cambian su número de oxidación en la reacción, no representaron con el lenguaje formal a las semi-reacciones.

PQ15. En la reacción química de óxido reducción $C+O_2 \longrightarrow CO_2$ identifica la especie que se reduce y la especie que se oxida, representa las semi-reacciones con los números de oxidación y represéntalas en la recta numérica.

Tipo de respuesta	Respuestas representativas	Resuelto	Observaciones
Lenguaje natural	Oxidación = Carbón Reducción = Oxígeno	C	Responde correctamente pero no explicita el proceso de pérdida o ganancia de electrones ni lo representa en la recta numérica. Utiliza el signo de igual como equivalencia cuando no lo es
	El oxígeno se reduce, el carbono se oxida y se produce óxido de carbono CO_2	C	Utiliza el par dialéctico, si uno se reduce el otro se oxida para producir un compuesto, no expresa las semi-reacciones ni las operaciones con los enteros
	El oxígeno se oxida y el carbono se reduce	I	Relaciona incorrectamente el concepto de oxidación con el oxígeno, el cual oxida ya que es un agente oxidante por lo tanto, se reduce
	El que gana electrones es el que se reduce	I	Relaciona correctamente el proceso de reducción con la ganancia de electrones, sin embargo, no puede identificar cual es el elemento que se oxida o el que se reduce
	No se oxida	I	Los sujetos no identifican las sustancias que se oxidan ó que se reducen, ya que lo ven como una unión simple y no una unión química
	No es una reacción de óxido reducción	I	
	No se oxidan ni se reducen	I	
	No hay oxidación ni reducción ya que se conservan los valores	I	Como los coeficientes en la reacción balanceada son 1, los alumnos no identifican el cambio químico
	Permanecen igual, no cambian	I	
No cambian en la recta	I	Utiliza a la recta numérica como modelo mental, ya que no realiza el trazo de la recta, y como no analiza los números de oxidación, la recta numérica no le ayuda	
Inhibitorias	No entendí... No sé... Sin contestar...	I	Se desconoce el origen de las tendencias inhibitorias

Tabla 34. Resultados de PQ15 de los alumnos de la ENP.

Las tendencias cognitivas presentadas son:

- Se observa la presencia de obstrucciones provenientes de la semántica sobre la sintaxis.
- Los alumnos no aceptan que la reacción $C+O_2 \longrightarrow CO_2$ es de óxido-reducción.
- La presencia de mecanismos inhibitorios.

Los entrecruzamientos entre los SQS y los SMS expuestos son:

- Se utiliza el signo igual como equivalencia cuando indican “Oxidación = Carbón”.
- Se presenta el par dialéctico oxidación-reducción.
- Se observa el par dialéctico ganancia- pérdida de electrones.

El procedimiento de balanceo de ecuaciones químicas por el método de óxido-reducción involucra la conjunción de conocimientos básicos y sólidos de la química, los cuales no son logrados por los estudiantes, al mostrar respuestas que denotan la falta de competencia química para llevar a cabo su resolución.

5.2 Resultados de los cuestionarios de los docentes

5.2 .1 Resultados de los cuestionarios de los docentes en Matemáticas

Los resultados de los cuestionarios de los cuatro docentes, se presentan en las siguientes tablas comparativas. Estas tablas nos permiten realizar el análisis por pregunta.

A la docente que imparte la asignatura de Química en la ENP le nombraremos DP1, al profesor que imparte la asignatura de Química y adicionalmente ha impartido Matemáticas en la ENP le designaremos DP2. Al docente que imparte la asignatura de Química en educación secundaria lo distinguiremos como DS y al maestro que imparte todas las asignaturas en Telesecundaria le denominaremos DTS.

PM1. De los ocho ejercicios de la pregunta uno, se seleccionó un reactivo que involucra a la sustracción de enteros por presentar información relevante como lo muestra la tabla 35.

DP1	DP2	DS	DTS
PM1F. Ejercicio a resolver: Operaciones de suma y resta de enteros			
$(-3) - (-8) = -3 + 8 = 5$	$(-3) - (-8) = 5$	$(-3) - (-8) = -3 + 8 = 5$	$(-3) - (-8) = +5$

Tabla 35. Resultados de PM1F de los docentes.

Los docentes DP1 y DS resuelven correctamente los ejercicios, ellos muestran el uso de una estructura equivalente, evitando la sustracción. Los docentes DP2 y DTS solucionan correctamente sin mostrar el proceso, únicamente el resultado. El docente DTS muestra la tendencia de signar al número positivo.

PM2. En la pregunta dos, los incisos son de análisis, en los cuales, las soluciones pueden ser representadas con los símbolos de orden o con un gráfico, como lo muestra el docente DP2.

La docente DP1 (tabla 36) resuelve incorrectamente la pregunta, mostrando un SMS básico en lenguaje natural. Aparece el número como sustractivo en donde el minuendo siempre será mayor que el sustraendo, no realizando la extensión a los enteros negativos. El docente DP2 resuelve

correctamente el ejercicio de análisis, es sintáctico, empleando para la comunicación un SMS formal para representar su respuesta. Tiene sentido para el sujeto el uso del plano cartesiano en la sustracción.

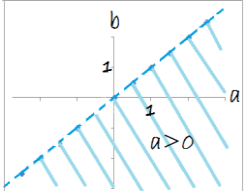
DP1	DP2	DS	DTS
PM2B. Ejercicio a resolver: En " $a - b = c$ ", ¿cómo debe ser el minuendo " a " con respecto al sustraendo " b ", para que la diferencia " c " sea mayor que cero?			
Positivo y mayor valor que b .	<p>Si $a - b > 0 \iff a > b$,</p> 	Número positivo mayor a 5 y " b " número menor que 5.	Debe ser un número positivo, donde " a " debe ser por lo menos una unidad mayor que " b ".

Tabla 36. Resultados de PM2B de los docentes.

El docente DS resuelve incorrectamente las preguntas de análisis empleando un SMS en lenguaje natural, mostrando solo una parte de la solución, con la tendencia a utilizar el número 5 como referencia. El docente DTS resuelve incorrectamente presentando un SMS en lenguaje natural, en donde el minuendo debe ser positivo, sin considerar que el minuendo puede ser negativo y su diferencia positiva. Se observa también que está contemplando en su solución únicamente a los enteros cuando indica " a debe ser por lo menos una unidad mayor que b ".

PM3. En la pregunta tres se presentan cuatro reactivos que involucran una ecuación con dos incógnitas en cada uno de ellos, de los cuáles presentamos dos casos en las tablas 37 y 38.

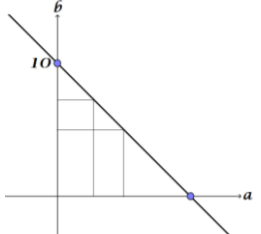
DP1	DP2	DS	DTS
PM3A. Ejercicio a resolver: resuelve $a + b = 10$			
$a = 5$ $5 + 5 = 10$ $b = 5$	$a + b = 10$ $b = 10 - a$  Todos los puntos de la recta son solución.	$3 + 7$	Existe una infinidad de valores que hacen posible que la adición de $a + b$ dé cómo resultado 10. La infinidad de valores implica el uso tanto de números positivos como negativos.

Tabla 37. Resultados de PM3A de los docentes.

Los docentes DP1 y DS muestran una solución particular del conjunto solución, como si fuera única. Sin embargo, en una ecuación con dos incógnitas hay un conjunto solución que la satisface, por ello, consideramos que la solución es incorrecta. Ambos docentes utilizan para su solución números naturales.

El docente DTS muestra un SMS en lenguaje natural, porque da una explicación semiótica, en donde indica la existencia de un conjunto solución, sin mencionar cuál es este conjunto.

El docente DP2 encuentra el conjunto solución con una representación gráfica, utilizando a la recta como un medio de organización. Expresa la solución de “b” en términos de “a” como una relación funcional, utilizando un SMS formal.

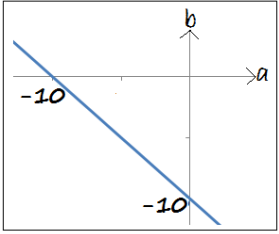
DP1	DP2	DS	DTS
PM3D. Ejercicio a resolver: resuelve $-a - b = 10$			
$a = -5$ $b = -15$ $-5 - (-15) = 10$ $-5 + 15 = 10$	$a - b = 10$ $b = -a - 10$  Todos los puntos de la recta son solución.	$-4 - 14 =$ $-4 + 14 = 10$	“a” y “b” adquieren varios valores, donde si “a” es negativo, “b” puede ser positivo o negativo según el valor de “a”.

Tabla 38. Resultados de PM3D de los docentes.

Los docentes DP1 y DS (tabla 38) cuando resuelven una sustracción, utilizan números negativos para encontrar la solución, esto nos indica que hay un predominio de la negatividad relacionada a la sustracción. Ambos docentes utilizan una estructura equivalente al resolver la sustracción como adición, evitando la sustracción de un número negativo.

La docente DP1 resuelve incorrectamente. Muestra dificultades al realizar la sustitución numérica de un número negativo para “ $-a$ ”. Asigna solo una pareja de valores para dar solución. Sus valores no satisfacen la igualdad y presenta dificultad para conceptualizar al número relativo. En tanto el docente DS resuelve numéricamente dando una solución, sin dar el conjunto solución.

El docente DTS utiliza un SMS en lenguaje natural, expresa tener idea de la solución sin llegar a concretarla; mientras que el docente DP2 muestra el conjunto solución como una expresión algebraica y gráficamente como una recta, empleando un SMS formal.

PM4. En la pregunta cuatro, se pide identificar las operaciones que resuelven los problemas, representarlos en la recta numérica y resolverlos. A continuación se presentan dos de los tres problemas.

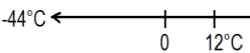
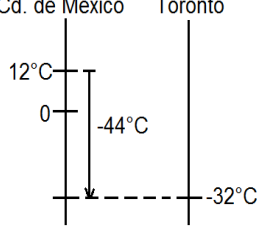
DP1	DP2	DS	DTS
PM4A. Problema a resolver: la diferencia de temperaturas entre la ciudad de Toronto Canadá y la ciudad de México es de -44°C . ¿Cuál es la temperatura de Toronto en ese momento, si la temperatura en la ciudad de México es de 12°C ?			
$a - b = -44$ $a - 12 = -44$ $a = -44 + (-12)$ $a = -44 - 12$ $a = -56$ $T = -56^{\circ}\text{C}$ 	 $\Delta T = 12^{\circ}\text{C} - 44^{\circ}\text{C}$ $\Delta T = -32^{\circ}\text{C}$	-32°C	$12^{\circ}\text{C} + (-44^{\circ}\text{C}) = -32^{\circ}\text{C}$

Tabla 39. Resultados de PM4A de los docentes.

En PM4A (tabla 39), la docente DP1 plantea correctamente la ecuación, resolviéndola incorrectamente. Muestra confusión con los signos binario y unario al realizar la trasposición de términos. Traza la recta numérica y ésta no le ayuda a resolver el problema, sumando “44+12” y signándolo negativamente. El docente DS resuelve correctamente sin mostrar su procedimiento. El docente TS plantea la solución del problema como una suma, utilizando una expresión equivalente y evitando la sustracción resolviéndola correctamente.

El maestro DP2 resuelve correctamente el problema, utilizando la recta numérica vertical en el contexto de temperatura, visualizando a la sustracción como una diferencia aplicando el concepto de “delta T (ΔT)”.

En PM4C (tabla 40), el docente DS no muestra información, solo la respuesta correcta sin justificarla. La docente DP1 muestra dificultades al calcular la diferencia de números negativos para la ciudad de Ottawa, sumando el minuendo y el sustraendo como números positivos resolviendo incorrectamente.

El docente DTS no explica el procedimiento, sin embargo, cuando calcula la diferencia de la ciudad de México, parece que la operación que realiza es " $T_{mín} - T_{máx}$ " obteniendo $-19^{\circ}C$, de la misma forma al calcular la diferencia de Ottawa obtendría $-17^{\circ}C$ que llevaría a una solución incorrecta, ya que $-17^{\circ}C$ es mayor que $-19^{\circ}C$. En este caso, lo que se está comparando son las variaciones de temperatura máxima con la mínima y el concepto de valor absoluto resuelve esta situación.

El docente DP2 establece matemáticamente la diferencia de temperaturas entre la máxima y la mínima con una expresión. Utiliza la recta numérica vertical para cada ciudad obteniendo la diferencia y posteriormente la calcula numéricamente utilizando su expresión matemática. Realiza la comparación de las ΔT 's, identificando la de mayor variación.

DP1	DP2	DS	DTS
PM4C. Problema a resolver: la temperatura máxima de la Ciudad de México en promedio durante el mes de diciembre es de $17^{\circ}C$ y la mínima es de $-2^{\circ}C$; la temperatura máxima en ese mismo mes en Ottawa en promedio es de $-5^{\circ}C$ y la mínima es de $-22^{\circ}C$. ¿Cuál de las ciudades tuvo mayor variación de temperatura?			
Cd. México $-2^{\circ}C \text{ — } 17^{\circ}C = 19$ Ottawa $-22^{\circ}C \text{ — } -5^{\circ}C = 27$ En Ottawa	$\Delta T = T_{máx} - T_{mín}$ <p style="text-align: center;">Cd. México</p> $\Delta T = 17 - (-2) = 19$ <p style="text-align: center;">Ottawa</p> $\Delta T = -5 - (-22) = 17$ <p>La ciudad de México tuvo mayor diferencia.</p>	En la Ciudad de	La ciudad que tuvo mayor variación fue México con $-19^{\circ}C$.

Tabla 40. Resultados de PM4C de los docentes.

PM5. En la pregunta cinco, se presentan cuatro reactivos que involucran al número como relativo, es decir, la conceptualización del número como simétrico. A continuación se presentan dos casos en las tablas 41 y 42.

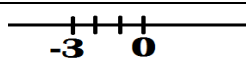
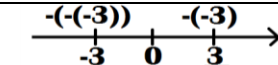
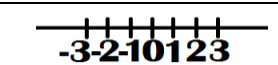
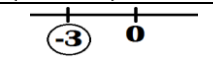
DP1	DP2	DS	DTS
PM5C. Situación a resolver: representa en la recta numérica el simétrico de $-(-3)$:			
 <i>Resuelto incorrectamente</i>	 <i>Resuelto correctamente</i>	 <i>Resuelto correctamente</i>	 <i>Resuelto incorrectamente</i>

Tabla 41. Resultados de PM5C de los docentes.

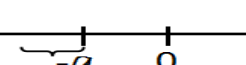
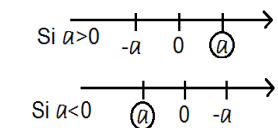
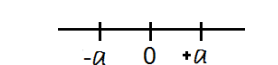
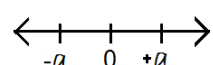
DP1	DP2	DS	DTS
PM5D. Situación a resolver: representa en la recta numérica el simétrico de $-a$			
 <i>Resuelto incorrectamente</i>	 <i>Resuelto correctamente</i>	 <i>Resuelto correctamente en N</i>	 <i>Resuelto correctamente en N</i>

Tabla 42. Resultados de PM5D de los docentes.

La docente DP1 (tablas 41 y 42) en ambos casos muestra tener dificultades en el número como relativo, resolviéndolos incorrectamente. El uso de la recta numérica no le apoya para representar a los números simétricos. En la pregunta PM5D se observa que para ella el simétrico siempre va a estar a la izquierda del cero, al señalarlo con la llave.

Los docentes DS y DTS localizan a " $-a$ " del lado izquierdo del cero, esto nos indica que el valor de " a " se encuentra en los números naturales o en los positivos. Adicionalmente el docente DTS indica doble flecha en la recta numérica, esto nos muestra que DTS no asocia el orden de los números con la punta de la flecha.

El docente DP2 en PM5D presenta dos casos en los cuales " a " puede ser mayor o menor que cero, utilizando al cero de Stevin. Muestra el número " a " como número entero formalizado positivo y negativo.

PM6. La pregunta seis fue diseñada con tres incisos, de los cuales se muestra solo el caso en el que aparecen dificultades en su resolución.

DP1	DP2	DS	DTS
PM6A. Ejercicio a resolver: si " $x = 11$ ", y " $z = -9$ ", ¿cuánto es " $x(-z)$ "?			
$11(-(-9)) = 11 + 9 = 20$ <i>Resuelto incorrectamente</i>	$11(-(-9)) = +99$ <i>Resuelto correctamente</i>	$11(-9) = -99$ <i>Resuelto incorrectamente</i>	$11(-(-9)) = (11)(+9) = 99$ <i>Resuelto correctamente</i>

Tabla 43. Resultados de PM6A de los docentes.

La docente DP1 (tabla 43) presenta dificultades con el uso del paréntesis y predomina la adición cuando hay multiplicación. El docente DS realiza la sustitución numérica incorrectamente en “- z”, al reemplazar “z” en lugar de “- z”.

Los docentes DP2 y DTS resuelven correctamente el ejercicio aunque no muestran el procedimiento, ya que no sabemos si están multiplicando los signos o utilizan el simétrico para resolverlo. Es por esto que observamos la necesidad de realizar una entrevista.

PM7. La pregunta siete fue diseñada para observar las dificultades de la multiplicación y la potenciación. De los tres ejercicios se muestra uno representativo.

DP1	DP2	DS	DTS
PM7C. Resuelve: $-(-h)^3 =$			
h^3 <i>Resuelto correctamente</i>	$+h^3$ <i>Resuelto correctamente</i>	$(-h)(-h)(-h)(-)(-h^3)$ $= h^3$ <i>Resuelto correctamente</i>	$-(-h^3) = h^3$ <i>Resuelto correctamente</i>

Tabla 44. Resultados de PM7C de los docentes.

Los cuatro docentes resolvieron correctamente este tipo de ejercicios, con algunas diferencias (tabla 44). El docente DP2 muestra la necesidad de signar el resultado positivo posiblemente por la aplicación de una regla sintáctica de la multiplicación. El docente DS resuelve correctamente, sin embargo, en su procedimiento escrito omite el signo menos al inicio de su planteamiento, y omite también el signo igual que debería estar presente para que las expresiones mostradas sean equivalentes como se exhibe a continuación “ $\underset{\uparrow}{-}(-h)(-h)(-h) \underset{\uparrow}{=} (-)(-h^3) = h^3$ ”

Este ejercicio se analiza posteriormente con mayor detalle en la entrevista realizada al docente DTS.

PM8. Esta pregunta consta de cuatro expresiones abiertas a resolver (PM8A-PM8D) y dos ecuaciones a resolver (PM8E y PM8F). Las respuestas representativas son PM8A, PM8B, PM8C Y PM8F.

En PM8A (tabla 45) los docentes DP2 y DS presentan expresiones algebraicas equivalentes correctas. El docente DTS tiene la idea utilizando un SMS básico para expresar su idea anclada a la sustitución de valores numéricos y no como una representación algebraica. La docente DP1

resuelve incorrectamente el ejercicio, no representa una expresión equivalente cerrando la expresión al igualarla a “c”.

En PM8B, DP1 resuelve incorrectamente la adición de “2a” con “-10a” ignorando el signo de “-10a” considerándola una cantidad positiva. Cierra la expresión “12a - 2b”, relacionando “a” en términos de “b”; posteriormente en P8C nuevamente cierra la expresión “-a + b” igualándola a cero incorrectamente y relacionando “a” con “b”. Al parecer no acepta los resultados en los cuales aparecen dos términos con diferente variable y tiende a relacionarlos.

El docente DTS en la P8C presenta el resultado como una adición incorrectamente utilizando al parecer presenta dificultades con los signos unario y binario.

DP1	DP2	DS	DTS
PM8A. Resuelve: $a + b - c =$			
$a + b = c$ <i>Resuelto incorrectamente</i>	$a + b - c$ <i>Resuelto correctamente</i>	$(a + b) - c$ <i>Resuelto correctamente</i>	Puede ser cualquier resultado dependiendo de los valores de a, b y c. <i>Resuelto incorrectamente</i>
PM8B. Resuelve: $2a + 3b - 10a - 5b =$			
$2a + (-10a) = 12a$ $3b - 5b = -2b$ $12a - 2b = 12a = 2b$ $a = \frac{b}{6}$ <i>Resuelto incorrectamente</i>	$-8a - 2b$ <i>Resuelto correctamente</i>	$+2a - 10a$ $+3b - 5b$ $-8a - 2b$ <i>Resuelto correctamente</i>	$-8a - 2b$ <i>Resuelto correctamente</i>
PM8C. Resuelve: $-(a - b) =$			
$-a + b = 0$ $b = a$ <i>Resuelto incorrectamente</i>	$-a + b$ <i>Resuelto correctamente</i>	$-a + b$ <i>Resuelto correctamente</i>	$(-a) + (-b)$ <i>Resuelto incorrectamente</i>

Tabla 45. Resultados de PM8A, PM8B y PM8C de los docentes.

En la PM8F (tabla 46) todos los docentes resuelven correctamente con diferentes procedimientos. El docente DTS resuelve la ecuación utilizando el procedimiento Euleriano, mientras que los otros tres docentes utilizan el modo Viético. La docente DP1 resuelve la ecuación en forma horizontal. El docente DP2 resuelve la ecuación en forma vertical, despejando la incógnita en el segundo

miembro de la ecuación, visualizándola como una equivalencia, ya que manipula a la incógnita en cualquiera de los dos miembros de la igualdad.

DP1	DP2	DS	DTS
PM8F. Resuelve: $10x + 4 = 15x + 9$			
$10x + 4 = 15x + 9$ $10x - 15x = +9 - 4$ $-5x = 5; x = \frac{5}{-5};$ $x = -1$ <p style="text-align: center;"><i>Resuelto correctamente</i></p>	$10x + 4 = 15x + 9$ $4 - 9 = 15x - 10x$ $-5 = 5x$ $\frac{-5}{5} = x$ $x = -1$ <p style="text-align: center;"><i>Resuelto correctamente</i></p>	$10x + 4 = 15x + 9$ $10x - 15x = 9 - 4$ $-5x = 5$ $x = 5 \div -5$ $x = -1$ <p style="text-align: center;"><i>Resuelto correctamente</i></p>	$10x + 4 = 15x + 9$ $10x - 15x + 4 - 4 = 15x - 15x + 9 - 4$ $-5x = 5$ $\frac{-5}{-5} x = \frac{5}{-5}$ $x = -1$ <p style="text-align: center;"><i>Resuelto correctamente</i></p>

Tabla 46. Resultados de PM8F de los docentes.

5.2.2 Resultados de los cuestionarios de los docentes en Química

PQ1. En la tabla 47 se muestran las producciones de los docentes para la representación de un átomo de Hidrógeno. Los SQS utilizados por los docentes son formales y con dibujos figurativos. Aparece un SQS con descripción en signos normalizados formal, el de la configuración electrónica $1s^1$.

PQ1. Representa de tres maneras diferentes al átomo de hidrógeno		
Docente	Respuestas	Observaciones
DP1		<p><i>Resuelto Incorrectamente:</i> En el tercer SQS presenta a un átomo de hidrógeno como un catión H^{+1}</p>
DP2		<p><i>Resuelto correctamente:</i> Los SQS presentados son el formal molecular, el de bolas y el de niveles electrónicos</p>
DS		<p><i>Resuelto correctamente:</i> Los tres SQS mostrados son formales, el de Lewis, el de configuración electrónica y el de niveles electrónicos</p>
DTS		<p><i>Resuelto incorrectamente:</i> Representa al átomo de hidrógeno con dos SQS formales correctamente (el de Lewis y el de niveles electrónicos) y uno gráfico figurativo fusionado incorrecto, representando a un electrón como si fuera un átomo (modelo propio incorrecto)</p>

Tabla 47. Resultados de PQ1 de los docentes.

En estas producciones se observan los siguientes entrecruzamientos:

- El uso de letras específicas para representar a un átomo.
- El uso del punto, la cruz y un círculo para representar a un electrón.
- El uso del signo “+” para representar a un protón y el signo “-” para representar a un electrón y el de los signos “±” para representar la “neutralidad” del neutrón.
- El núcleo del átomo es representado con círculos.
- Los niveles electrónicos u órbitas son representados con círculos y arcos.
- En ocasiones se omite el número 1, por ello “+1” es representado como “+”, así como “-1 por “-”.
- En el SQS $1s^1$, el coeficiente 1 indica el nivel cuántico principal²¹, la letra “s” significa el tipo de orbital²² y en el superíndice se advierte que este orbital contiene un electrón.
- La letra “e” ó “e⁻” representa a un electrón. La letra “p” ó “p⁺” representa a un protón. La letra “n±” representa a un neutrón.

PQ2. Las producciones de los docentes para representar a una molécula de hidrógeno se presentan en la tabla 48. En estas, se observan SQS formales y gráficos.


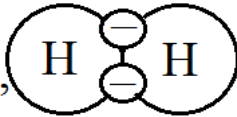

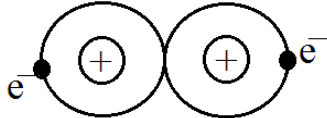

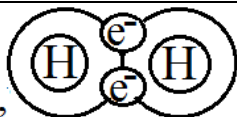
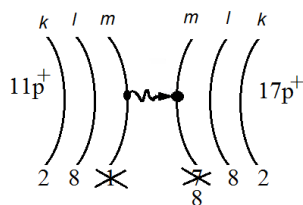
PQ2. Representa de tres maneras diferentes a la molécula de hidrógeno.		
Docente	Respuestas	Observaciones
DP1	H_2 ,  , 	<i>Resuelto correctamente:</i> Exhibe dos SQS formales (molecular y el de niveles electrónicos) y uno figurativo gráfico (bolas)
DP2	H_2 ,  , 	<i>Resuelto correctamente:</i> Presenta dos SQS formales (molecular y de niveles electrónicos) y uno figurativo gráfico (bolas)
DS	H_2 , $H-H$, 	<i>Resuelto correctamente:</i> El docente presenta dos SQS formales (molecular y diagrama de rayas) y uno figurativo (de bolas y varillas)
DT	$H \times H$, 	<i>Resuelto incompleto:</i> Muestra dos SQS formales, con estructura de Lewis y con niveles electrónicos (Böhr)

Tabla 48. Resultados de PQ2 de los docentes.

²¹ El nivel cuántico principal indica el número de niveles electrónicos que tiene un átomo, son 7 los niveles.

²² Un orbital es la región más probable del espacio donde se encuentra el electrón.



- En la reacción de disociación del NaCl en $\text{Na}^+ + \text{Cl}^-$, los signos “+” y “-” de los superíndices representan la formación de iones, el ión sodio y el ión cloruro.
- El coeficiente 11 en 11p^+ indica el número de protones.

En ambos casos observamos en los SQS puntos negros o bolitas que representan electrones como en el modelo Chino.

PQ4. En la tabla 50 se exhiben las producciones de los docentes para representar a un compuesto químico. Los docentes muestran SQS semánticos y sintácticos correctos e incorrectos.

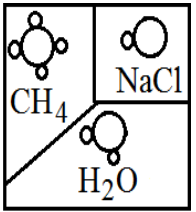
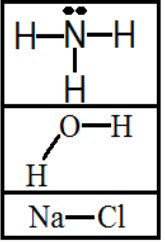
PQ4. ¿Cómo representas un compuesto químico?		
Docente	Respuestas	Observaciones
DP1	Mediante su fórmula química o con su nombre químico	<i>Resuelto incompleto:</i> Menciona un SQS formal molecular pero no lo presenta y otro lingüístico.
DP2	Por su fórmula química: NaCl NaOH H ₂ SO ₄ H ₂ O Con el modelo de esferas:  Fórmula desarrollada: 	<i>Resuelto correctamente:</i> Menciona tres SQS diferentes: formal molecular, gráfico-esquemático de bolas y formal diagrama esquemático con de rayas- Lewis.
DS	Al momento de descomponer por métodos químicos, presenta dos o más elementos	<i>Resuelto incorrectamente:</i> El docente exterioriza una concepción de compuesto, sin mostrar un SQS
DTS	$a + b \rightarrow ab$	<i>Resuelto correctamente:</i> Representa una generalización de la formación de un compuesto “ab”

Tabla 50. Resultados de PQ4 de los docentes.

Los entrecruzamientos presentados son:

- Representar un compuesto por medio de una fórmula química con letras y subíndices.
- Generalizar a un compuesto como ab, aunque sólo representa una síntesis.

- Utilizar SQS en descripción de signos formalizados como la fórmula condensada y la desarrollada.

PQ5. En la tabla 51 se presentan las producciones de docentes ejemplificando los diferentes significados de los subíndices en una fórmula química. Tres de los cuatro docentes muestran una concepción parcial de los significados de los subíndices en una fórmula química.

PQ5. ¿Qué indican los subíndices 2,2 y 7 en la fórmula $K_2Cr_2O_7$?				
Docente	Respuestas			Observaciones
DP1	Que en la molécula de Dicromato de Potasio hay 2 átomos de Potasio, 2 átomos de Cromo y 7 átomos de oxígeno			<i>Resuelto incompleto:</i> Nombra el compuesto correctamente y sólo presenta el significado microscópico de los subíndices en un SQS formal-molecular
DP2	Desde el punto de vista microscópico: 2 átomos de K, 2 de Cr, 7 de O	Desde el punto de vista macroscópico: 2 moles de átomos de K, 2 moles de átomos de Cr y 7 moles de átomos de O	También indican la relación de átomos que participan en la fórmula	<i>Resuelto correctamente:</i> Presenta tres significados de los subíndices en una fórmula química, el “microscópico”, el macroscópico y el relacionado con la ley de las proporciones múltiples
DS	Presenta el número de átomos que hay presente en una molécula			<i>Resuelto incompleto:</i> Solo muestra el significado microscópico de los subíndices
DTS	El número de átomos de un compuesto en cada elemento			<i>Resuelto incompleto:</i> Presenta el significado microscópico de los subíndices

Tabla 51. Resultados de PQ5 de los docentes.

Los tres usos de los subíndices encontrados de son:

- En el punto de vista microscópico, el número de átomos.
- El número de moles de átomos desde el punto de vista macroscópico.
- Indica la proporción que hay entre los átomos participantes en un agregado. La ley de las proporciones múltiples señala que los elementos se combinan en proporciones definidas con números enteros pequeños.

PQ6. En la tabla 52 se presentan las producciones de los docentes indicando los significados del coeficiente en un agregado. En estas se puede observar una visión parcial de dos docentes, exhibiendo uno solo de los significados.

Los dos usos surgidos del coeficiente en un agregado son:

- El coeficiente como número de moles²⁴. Mismo significado que en matemáticas.
- El coeficiente indica el número de moléculas de una sustancia. Coeficiente algebraico.

PQ6. ¿Qué indica el número 5 en el compuesto 5KCl?		
Docente	Respuestas	Observaciones
DP1	Que son 5 mol de Cloruro de Potasio, o de otra forma 5 moléculas del compuesto	<i>Resuelto correctamente:</i> Ejemplifica dos usos del coeficiente, el número de moles y el número de moléculas.
DP2	Que existen 5 “moléculas” de KCl o bien que hay 5 moles de Cloruro de potasio	<i>Resuelto correctamente:</i> Muestra dos usos del coeficiente, el número de moles y el número de moléculas.
DS	Es un coeficiente que presenta el número de moléculas que hay en la reacción	<i>Resuelto incompleto:</i> Indica que se llama coeficiente y solo uno de los significados, el de número de moléculas.
DTS	El número de moléculas del compuesto cloruro de potasio	<i>Resuelto incompleto:</i> Solo exhibe uno de los significados, el de número de moléculas.

Tabla 52. Resultados de PQ6 de los docentes.

PQ7. En la tabla 53 se observa en los docentes DS y DTS la ausencia de unidades que no permite identificar los diferentes usos del coeficiente cuando en una fórmula química aparecen diferentes subíndices. Operatoriamente los cuatro docentes obtienen correctamente el número de átomos.

PQ7. ¿Cuántos átomos de cobre, de azufre y de oxígeno hay en 6CuSO ₄ ?		
Docente	Respuestas	Observaciones
DP1	6 átomos de Cobre 6 átomos de Azufre y 24 átomos de oxígeno	<i>Resuelto incompleto:</i> Presenta una concepción parcial, la microscópica
DP2	Cu: 6 átomos en 6 moléculas S: 6 átomos en 6 moléculas O: 24 átomos en 6 moléculas Cu: 6 moles de átomos en 6 moles de sulfato cúprico S: 6 moles de átomos en 6 moles de sulfato cúprico O: 24 moles de átomos en 6 moles de sulfato cúprico	<i>Resuelto correctamente:</i> Presenta las concepciones microscópica y macroscópica del número de átomos
DS	Cu=6 S=6 O=24	<i>Resuelto incompleto:</i> Se presenta un entrecruzamiento con el signo igual, cuando no hay equivalencia, ya que Cu representa al cobre y no es igual a 6
DTS	Cu=6 S=6 O=24	<i>Resuelto incompleto:</i> Se presenta un entrecruzamiento con el signo igual, cuando no hay equivalencia, ya que Cu representa al cobre y no es igual a 6

Tabla 53. Resultados de PQ7 de los docentes.

²⁴ El mol, es la masa molecular expresada en gramos y es la unidad con la que se mide la cantidad de sustancia. 1mol contiene 6.022×10^{23} partículas, átomos ó moléculas según corresponda el caso del que se hable.

Uno de los entrecruzamientos manifestados por los docentes DS y DTS, es el uso incorrecto del signo igual, con este tipo de expresiones “Cu=6” tratando de indicar que el número de átomos del cobre (Cu) presentes en 6CuSO_4 , es de 6. En este mismo aspecto, el docente DP2 utiliza los “:”. Otro de los entrecruzamientos implícito es el utilizado para obtener el número de átomos en donde se multiplica el coeficiente por los subíndices.

PQ8. El uso del paréntesis se presenta en fórmulas químicas para agrupar elementos que forman un compuesto. Las producciones docentes para la obtención del número de átomos cuando existe un paréntesis en la fórmula se presentan en la tabla 54.

PQ8. ¿Cuántos átomos de oxígeno hay en $\text{Al}(\text{OH})_3$?		
Docente	Respuestas	Observaciones
DP1	3	<i>Resuelto incompleto:</i> Aplica correctamente la operatividad cuando se presente un paréntesis en la fórmula.
DP2	3 átomos en la fórmula y 3 moles de oxígeno en una mol de hidróxido de Aluminio	<i>Resuelto correctamente:</i> Aplica correctamente la operatividad cuando se presente un paréntesis en la fórmula, presentando dos usos de los subíndices al relacionarlos con el coeficiente de 1.
DS	3	<i>Resuelto incompleto:</i> Aplica correctamente la operatividad cuando se presente un paréntesis en la fórmula.
DTS	O=3 Hay tres átomos de oxígeno	<i>Resuelto incompleto:</i> Aplica correctamente la operatividad cuando se presenta un paréntesis en la fórmula, representándolo incorrectamente con el signo de “=”.

Tabla 54. Resultados de PQ8 de los docentes.

Los entrecruzamientos de los SMS y SQS que aparecen en esta cuestión son los siguientes:

- Existe un entrecruzamiento cuando el docente DP2 dice que hay cierta cantidad de átomos de cada elemento en un mol de hidróxido de aluminio, pues aunque no aparece el coeficiente 1 escrito en la fórmula química está consciente de él con un significado algebraico.
- Otro entrecruzamiento ocurre con el docente DTS al colocar incorrectamente el signo “igual” para expresar el número de átomos de oxígeno que hay en una molécula de $\text{Al}(\text{OH})_3$.
- No aparece el entrecruzamiento del uso del signo igual de manera correcta, ya que puede expresarse como No. de átomos de oxígeno= 3 o bien $N_{\text{O}_2}= 3$.

PQ9. En esta pregunta se relaciona el coeficiente, el subíndice con y sin paréntesis en una fórmula química.

PQ9. ¿Cuántos átomo de calcio, de fósforo y de oxígeno hay en $7\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$?			
Docente	Respuestas		Observaciones
DP1	21 átomos de Calcio 14 átomos de fósforo 56 átomos de oxígeno		<i>Resuelto incompleto:</i> Calcula correctamente el número de átomos
DP2	Ca: 21 átomos en 7 moléculas P: 14 átomos en 7 moléculas O: 56 átomos en 7 moléculas	Ca: 21 moles de átomos en 7 moles de Fosfato de Calcio P: 14 moles de átomos en 7 moles de Fosfato de Calcio O: 56 moles de átomos en 7 moles de Fosfato de Calcio	<i>Resuelto correctamente:</i> Calcula correctamente el número de átomos, presentando dos concepciones en las que se involucra al coeficiente
DS	Ca=21 P=14 O=56		<i>Resuelto incompleto:</i> Calcula correctamente el número de átomos, representándolo incorrectamente con un SMS
DTS	Hay: Ca= 21 P=14 O=56		<i>Resuelto incompleto:</i> Calcula correctamente el número de átomos, representándolo incorrectamente con un SMS

Tabla 55. Resultados de PQ9 de los docentes.

En la tabla 55 se observa que todos los docentes operan correctamente al multiplicar el coeficiente con el subíndice con y sin paréntesis. Los docentes presentan la misma forma de expresar sus repuestas que en PQ7 (Tabla 53) y el mismo tipo de respuestas que en PQ8 (Tabla 54).

PQ10. Los docentes muestran SQS formales en sus representaciones del enlace químico (Tabla 56). Los SQS presentados son: la fórmula molecular, de Lewis, el diagrama de rayas y el iónico.

PQ10. ¿Cómo representas un enlace químico?				
Docente	Respuestas			Observaciones
DP1	Na + Cl ₂ → NaCl			<i>Resuelto correctamente:</i> Revela un SQS formal, el de la fórmula molecular NaCl y el cloro molecular Cl ₂
DP2	Con puntos que representan electrones compartidos $\text{H}\overset{\bullet}{\times}\text{H}$	Con una raya que representa e ⁻ compartidos $\text{H}-\text{H}$	Con el símbolo y con sus cargas en un enlace iónico Na^+Cl^-	<i>Resuelto correctamente:</i> Presenta tres SQS formales, el de Lewis, el de diagrama de rayas y el de fórmula iónica.
DS	$\text{H}\bullet\times\times\overset{\times\times}{\underset{\times\times}{\text{F}}}\times\times$			<i>Resuelto correctamente:</i> Muestra un SQS formal, el de Lewis.
DTS	Con una rayita $\text{H}-\text{H}$	Lewis $\text{H}\overset{\bullet}{\times}\text{H}$		<i>Resuelto correctamente:</i> Exhibe dos SQS formales, el de diagrama de rayas y el de Lewis.

Tabla 56. Resultados de PQ10 de los docentes.

Los entrecruzamientos surgidos en la tabla 56, coinciden con los presentados en las preguntas PQ1 (tabla 47), PQ2 (tabla 48) y PQ3 (tabla 49).

PQ11. En la tabla 57 se muestran producciones de los docentes para las representaciones de una reacción química.

Los entrecruzamientos exhibidos por los docentes para la reacción química son:

- El uso de generalizaciones del tipo:
 - *Reactivos* → *Productos* (muy general)
 - Reacciones de síntesis $A + B \rightarrow AB$
 - Reacciones de óxido reducción o de doble sustitución $A + B \rightarrow C + D$
- Nombrar a las reacciones químicas como ecuaciones químicas.

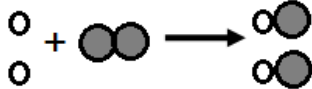
PQ11. ¿Cómo representas una reacción química?		
Docente	Respuestas	Observaciones
DP1	$A + B \rightarrow AB$ <i>Reactivos</i> → <i>Productos</i>	<i>Resuelto correctamente:</i> Utiliza literales para representar reactivos y productos. A+B es igual a AB
DP2	<ul style="list-style-type: none"> • Con símbolos de elementos, signos, subíndices y coeficientes. $2Na_{(s)} + Cl_{2(g)} \rightarrow 2NaCl_{(s)}$ • Con modelos de esferas 	<i>Resuelto correctamente:</i> Exhibe dos SQS para una misma reacción con balance de materia: el formal-molecular y el de bolas o esferas. En el segundo se visualizan a los cambios químicos como reorganización de átomos y se distingue entre elementos y compuestos.
DS	$A + B \rightarrow C + D$	<i>Resuelto correctamente:</i> Aparece la generalización de una reacción
DTS	Con una ecuación química $Na + Cl \rightarrow NaCl$	<i>Resuelto incorrectamente:</i> El docente no presenta la reacción balanceada. El Cl no se puede presentar como monoatómico ya que es una molécula diatómica.

Tabla 57. Resultados de PQ11 de los docentes.

Las concepciones de las reacciones químicas reveladas son:

- En $A + B \rightarrow AB$ se visualiza como una unión de átomos.
- Como reorganización de átomos con el uso de un SQS figurativo de bolas, se diferencia entre elementos, átomos y compuestos.

En las concepciones mostradas por los docentes, no se observa que los electrones sean los responsables de los enlaces en una reacción química. Tampoco aparecen reacciones químicas con un iónico.

PQ12. Los docentes presentan diversos usos para la flecha en una reacción química (Tabla 58).

PQ12. ¿Qué indica la flecha en una reacción química?		
Docente	Respuestas	Observaciones
DP1	La dirección del proceso	<i>Resuelto correctamente:</i> La flecha representa un proceso unidireccional
DP2	La flecha indica la dirección de la reacción, es decir, quienes son los reactivos y hacia donde se desplaza el equilibrio para formar los productos	<i>Resuelto correctamente:</i> La flecha como unidireccional hacia donde se desplaza el equilibrio.
DS	La reacción se presenta en un sola dirección es irreversible	<i>Resuelto correctamente:</i> La flecha como unidireccional, aparece el concepto de irreversibilidad.
DTS	Se interpreta como “da como resultado” e indica el sentido de la reacción	<i>Resuelto correctamente:</i> Interpretación matemática de la flecha como resultado.

Tabla 58. Resultados de PQ12 de los docentes.

Los conceptos relacionados con la flecha, surgidos en las producciones docentes son:

- La dirección del proceso, unidireccional.
- Hacia donde se desplaza el equilibrio químico.
- Irreversible, con una sola dirección.
- Como resultado de un proceso.

Los entrecruzamientos emanados para la flecha son:

- Unidireccional como el signo “=” en aritmética.
- Representa el resultado de un proceso, como el signo “=” en aritmética.
- No aparece la visión de la flecha con doble punta para representar la reversibilidad de una reacción química pero sí aparece el concepto de desplazamiento hacia el equilibrio químico.
- No aparece tampoco la doble flecha asociada a la bidireccionalidad del signo igual “=”.

PQ13. En este reactivo se identifica el significado para los docentes de los coeficientes estequiométricos en una reacción química (tabla 59).

PQ13. En la ecuación $\alpha A + \beta B \rightarrow \kappa C + \delta D$, ¿qué representan los coeficientes $\alpha, \beta, \kappa, \delta$?		
Docente	Respuestas	Observaciones
DP1	La cantidad en mol de cada compuesto o elemento que participa en la reacción química	<i>Resuelto incompleto:</i> Presenta una concepción parcial de los coeficientes estequiométricos.
DP2	Se llaman coeficientes estequiométricos y representan el número de moléculas o moles en las que están relacionados los reactivos y productos para mantener el balance de materia	<i>Resuelto correctamente:</i> Les llama por su nombre, coeficientes estequiométricos, presenta dos concepciones de estos e indica que mantienen el balance de materia.
DS	(Sin contestar)	<i>Resuelto incorrectamente:</i> Es posible que el docente no pueda relacionar la generalización en la reacción.
DTS	La cantidad de moléculas de cada uno de los reactivos y de los productos	<i>Resuelto incompleto:</i> Presenta una concepción parcial de los coeficientes estequiométricos.

Tabla 59. Resultados de PQ13 de los docentes.

Los entrecruzamientos vislumbrados en las producciones de los docentes son:

- Los coeficientes estequiométricos en una reacción tienen el mismo carácter de un coeficiente en una expresión algebraica.
- Se conserva la cantidad de materia, antes y después de la reacción como en una ecuación algebraica en el sentido de la equivalencia.

Una tendencia cognitiva presentada por el docente DS, es el no poder leer una generalización de una reacción química con un lenguaje matemático, es decir no puede pasar de un SMQS²⁵ a un SQS.

Los coeficientes estequiométricos son vistos por los docentes como:

- Cantidad de moles
- Cantidad de moléculas
- Mantienen la cantidad de materia constante (Ley de la conservación de la materia)

PQ14. En esta pregunta los docentes identifican a las especies químicas que participan en una reacción, pasando de lo sintáctico a lo semántico correctamente (tabla 60).

²⁵ SMQS, se refiere a un Sistema híbrido Matemático-Químico, ya que no es completamente Matemático, pero tampoco es completamente Químico.

PQ14. En la reacción química de doble sustitución $\text{AgNO}_{3(\text{ac})} + \text{NaCl}_{(\text{ac})} \rightarrow \text{AgCl}_{(\text{s})} + \text{NaNO}_{3(\text{ac})}$, reconoce a los compuestos y anota el nombre de cada uno de los reactivos y de los productos.			
Docente	Respuestas		Observaciones
DP1	Nitrato de plata (medio acuoso) Cloruro de sodio (medio acuoso) Cloruro de plata(sólido) Nitrato de sodio (medio acuoso)		<i>Resuelto correctamente:</i> La docente enlaza las fórmulas moleculares con los nombres lingüísticos.
DP2	Reactivos AgNO_3 Nitrato de Plata NaCl Cloruro de Sodio	Productos AgCl Cloruro de Plata NaNO_3 Nitrato de Sodio	<i>Resuelto correctamente:</i> Relaciona las fórmulas moleculares con su nombre lingüísticamente.
DS	$\begin{array}{ccc} \text{Nitrato de Plata} & + & \text{Cloruro de Sodio} \\ \text{"solución acuosa"} & & \text{"solución acuosa"} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} \text{Cloruro de Plata} & + & \text{Nitrato de Sodio} \\ \text{"sólido"} & & \text{"medio acuoso"} \end{array}$		<i>Resuelto correctamente:</i> Además de identificar a las especies y nombrarlas, expresa la reacción usando los signos "+" y la flecha.
DTS	Reactivos $\text{AgNO}_{3(\text{ac})}$ = Nitrato de plata $\text{NaCl}_{(\text{ac})}$ = Cloruro de sodio	Productos $\text{AgCl}_{(\text{s})}$ = Cloruro de plata $\text{NaNO}_{3(\text{ac})}$ = Nitrato de sodio	<i>Resuelto correctamente:</i> Identifica a los compuestos y para nombrarlos utiliza el signo igual correctamente.

Tabla 60. Resultados de PQ14 de los docentes.

Un entrecruzamiento presentado por el docente DTS es el uso de signo igual, que en este caso lo utiliza correctamente, ya que lo representado en el primer miembro de la igualdad, la fórmula molecular sí es equivalente a su nombre lingüístico.

PQ15. En esta pregunta los docentes muestran mediante una reacción química entrecruzamientos entre los SMS y los SQS (tabla 61).

Se observa en los docentes DP1, DP2 y DTS pasar de un SQS con la reacción química a un SMS cuando escriben los números de oxidación en los superíndices. Los docentes DP1 y DTS tienen dificultades al indicar correctamente los números de oxidación para el Carbono (C) y para la molécula de oxígeno (O_2) en los reactivos, esto impide que puedan conceptualizar a la reacción de óxido-reducción como intercambio electrónico. Los docentes DP2 y DS anotan correctamente el número de oxidación de las especies químicas en los reactivos y en los productos.

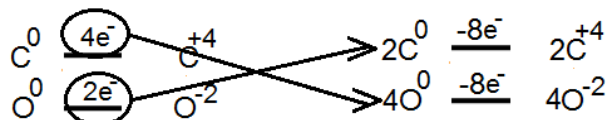
El docente DS pasa de un SMS con el uso de la recta numérica a un SQS al dibujar la recta numérica para identificar la especie que se reduce y la que se oxida.

Los cuatro docentes muestran a la recta numérica, como un referente para indicar cuando una especie se oxida o se reduce. Sin embargo, el docente DTS presenta un error conceptual que se visualiza en la recta numérica, ya que una especie que se oxida pierde electrones y al perderlos, queda cargado positivamente, aumentando su número de oxidación.

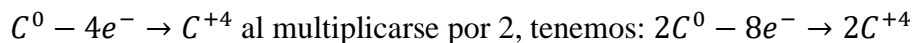
Los docentes DP1, DP2 y DS expresan correctamente la sustancia que se oxida y la que se reduce. El docente DTS no presenta las semi-reacciones. Los docentes DP1 y DS no pueden expresar correctamente las semi-reacciones, no revelan si se suman o se restan los electrones, anotando inconsistencias procedentes de la adición y sustracción de enteros.

Por ejemplo: En la respuesta del docente DS “ $4O^0 \xrightarrow{-8e^-} 4O^{-2}$ ”, si a 4 oxígenos con número de oxidación cero cediera 8 electrones, resultarían 4 oxígenos con un número de oxidación +2. Expresado en un SMS, el docente indica incorrectamente que: $4(0) - 8(-1) = 4(-2)$ exhibiendo una dificultad en la operatividad de números enteros, ya que no hay equivalencia en esa supuesta igualdad. Debería de decir $4(0) - 8(-1) = 4(+2)$. Regresando al SQS su representación quedaría indicada como: “ $4O^0 \xrightarrow{-8e^-} 4O^{+2}$ ”. Esta situación es matemáticamente posible y químicamente imposible, porque el oxígeno tiene la propiedad de ganar electrones, no de cederlos.

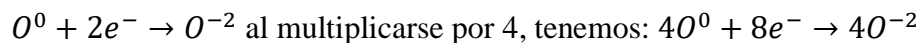
Los entrecruzamientos se visualizan en la producción del docente DS cuando pasa de las semi-reacciones sin coeficientes a las semi-reacciones con coeficientes.



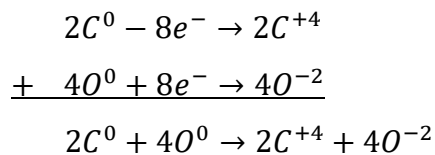
Las semi-reacciones pueden multiplicarse por un número, así como las ecuaciones algebraicas, conservando tanto la igualdad, como el balance de materia; por ejemplo la primer semi-reacción:



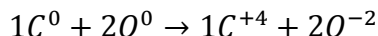
Las semi-reacciones deben presentar el mismo número de electrones cedidos y ganados, por ello, la segunda semi-reacción se multiplica por 4:



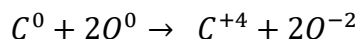
Ahora, las semi-reacciones se suman como las ecuaciones algebraicas:



Esta expresión se puede simplificar como una ecuación algebraica:

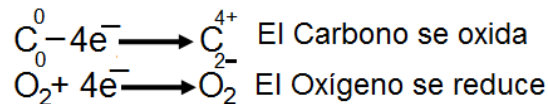


Cuando los coeficientes son “1” no se anotan, permaneciendo implícitos como en álgebra:



Este es el procedimiento completo del docente DS que no completó, por el error operatorio de los enteros.

El docente DP2 presenta las siguientes semi-reacciones observándose entrecruzamientos entre los SQS y los SMS. En esta forma de presentarlas, se observa que los subíndices son multiplicados por el número de oxidación, para encontrar el estado de oxidación total.



El docente DP2 en lugar de exhibir como +4 y -2 a los números de oxidación, lo hace como: 4+ y 2- (cuatro positivo y dos negativo), es decir signándolos después del número. Esta práctica es común en la enseñanza de la Química, incluso los libros de texto universitarios presentan ambas formas y parte posiblemente del lenguaje de los SQS.

5.3 Resultados de la entrevista

La entrevista está organizada en episodios. Sólo se presentan los episodios que muestran relevancia en nuestro estudio. El nombre de cada episodio está relacionado con el contenido que trata. Los resultados de la entrevista son presentados en dos partes, la de Matemáticas y la de Química.

Por ser una entrevista con enseñanza es necesario leer los episodios en orden progresivo para observar cómo van cambiando las concepciones del docente. En los diálogos de la entrevista, se le denomina “E” a las intervenciones del entrevistador y “D” a las del docente de telesecundaria.

5.3.1 Resultados de la entrevista en Matemáticas

En los anexos se presentan los XVI episodios de Matemáticas. En cada uno de los comentarios, aparece entre paréntesis el número de línea al cual se refiere esa característica durante el episodio.

En el episodio I “*¡Los veo como naturales!*”, se observa cómo el docente realiza la operación “ $(+3) - (+8)$ ”, la forma en que visualiza a los números, los modelos en los que se apoya para realizar la operación y las dificultades que se le presentan. A continuación se muestran las tendencias cognitivas del episodio.

- Considera los números signados cuando visualiza la notación completa (2D).
- Predominio del sentido de quitar en la operación de sustracción (4D, 19D).
- A los números +3 y +8 los considera Naturales (4D).
- Apela a la ley de los signos de la multiplicación de menos por más cuando sustrae (7D).
- Asigna el signo binario al unario para operar (9D).
- Recurre a los modelos de enseñanza de la Recta Numérica (9D) y el Modelo Chino (17D).
- Utiliza el cero de Stevin como punto de referencia (11D).
- Utiliza el conteo de unidad en unidad al utilizar la Recta Numérica (12D).
- Al localizar los números en la Recta numérica, se observan magnitudes dirigidas (González 1990) (12D y 13D).

En el episodio II se observa “*La triple naturaleza de la sustracción*”. El docente para resolver la operación “ $(+3) - (-8)$ ” requirió intervención del investigador en diversas ocasiones al

presentarse la triple naturaleza de la sustracción. Las tendencias cognitivas observadas en este episodio son:

- Aplica la ley de los signos de la multiplicación para resolver la sustracción, evitando la sustracción, cambiándola por una forma sintáctica equivalente (1D, 3D, 81D).
- Aplica la regla aditiva de signos iguales se suman (4D).
- Recurre a la Recta Numérica (6D).
- Considera al cero como punto de referencia para localizar a los números en la Recta Numérica (6D).
- Las lecturas que realiza para los números, son como signados. Para el tres positivo, en ocasiones les llama más tres (6D).
- Al localizar a los números en la Recta Numérica los considera como magnitudes dirigidas (7D, 10D, 11D, 12D).
- El signo binario menos lo considera como desplazamientos a la izquierda en la Recta Numérica (10D) y el signo unario negativo le cambia la dirección a los desplazamientos en la Recta Numérica (11D).
- Exterioriza que el cambio de dirección no tiene sentido y puede generar confusión (86D).
- Manifiesta dificultades en el uso del Modelo Chino para representar una sustracción con minuendo negativo (15D), predominando el uso de “quitar” en la sustracción (21D).
- Aparece el sentido de completar en la sustracción cuando el docente trabaja con números naturales (42D), para posteriormente resolver la sustracción de enteros como “completar” (52D).
- Realiza una comparación entre dos puntos en la recta numérica, apareciendo el sentido de la sustracción como “diferencia” (53D).
- Considera la existencia de números enteros negativos (56D).
- Muestra lecturas incorrectas refiriéndose al “-8” como valor negativo de menos ocho (56D).
- Muestra lecturas correctas refiriéndose al “-8” como “ocho negativos”, sin embargo, está leyendo cantidades y no un número porque lo indica en plural (67D).
- No sabe qué hace cuando apela a la regla de los signos de la multiplicación al sustraer (62D), no le hace sentido pero le es suficiente (82D).

- Pasa de lo abstracto a lo concreto y de lo concreto no regresa a lo abstracto (62D).
- En el Modelo Chino manifiesta tener dificultades para poder quitar cantidades negativas de las positivas (67D).
- Únicamente con el Modelo Chino tiene sentido quitarle una cantidad negativa a una positiva (70D).
- Aparece la palabra neutralizar como el resultado de un positivo con un negativo (72D) (Entrecruzamiento de un SMS y un SQS).
- Considera a los signos aislados de los números (77D).
- Tiene sentido completar en la Recta Numérica o agregar ceros en el Modelo Chino para quitar cantidades negativas (89D).
- Para poder dar sentido a " $-(-8)$ ", utiliza una forma sintáctica equivalente " $0 - (-8)$ " (97D).
- No relaciona " $-(-8)$ " con el simétrico de " -8 " (98D).
- Para justificar la regla multiplicativa, introduce el coeficiente de "1" para resolver " $-(-8)$ " como " $-1(-8)$ " pasando de un SMS a otro (102D).

En el episodio III "*¿Quitarle un positivo a un negativo? Hacia la derecha o hacia la izquierda*", al resolver la operación $(-3) - (+8)$ se manifiesta en el docente dificultad de usar la Recta Numérica, por la dirección que toma la flecha hacia la derecha o hacia la izquierda. Las tendencias cognitivas encontradas son:

- Se presenta el sentido de uso del sustractivo en la lectura " -3 " como menos tres (1D).
- Aparece el sentido binario al realizar la lectura como "más ocho" en $(-3) - (+8)$ (1D).
- Se refiere a " -8 " como ocho negativo (3D). [Ha cambiado de menos ocho u ocho negativos a ocho negativo]
- Visualiza a " $(-3) - (+8)$ " como " $(-3) - 8$ " y resuelve mentalmente " $-8 + (-3)$ " (7D).
- Traslada el ejercicio a una forma semántica en un contexto de deudas (13D).
- Analiza el significado de la dirección en la Recta Numérica (23D), apareciendo dificultades en la dirección de la flecha cuando quiere quitar cantidades positivas con un minuendo negativo (30D, 47D). El docente requiere de intervención.
- Aparecen dificultades al pasar de un SMS concreto a otro diferente (24D).

- Cuando aparecen dificultades en la Recta Numérica para restar un negativo el docente regresa a lo que ya conoce antes de la entrevista (38D).
- El docente realiza lecturas incorrectas en “ $(-1) - (+1)$ ” dice “tengo menos uno y debo quitar menos uno” (59D).
- El investigador recurre a ejercicios alternos con los naturales, para que el docente los analice y posteriormente los pueda aplicar a los enteros. Después de recurrir a los naturales, el docente puede resolver la sustracción como quitar en la Recta Numérica (64D).

El docente presenta la tendencia cognitiva de apelar a la multiplicación cuando realiza la adición y sustracción con números enteros. Menciona que *aunque es fácil operar con la ley de los signos, este procedimiento no le da sentido* como cuando realiza la sustracción con la concepción de quitar o completar.

En el episodio IV “*¿Cuántos ceros son necesarios y suficientes?*”, se analiza la operación “ $(-3) - (+8)$ ” con el Modelo Chino. Las características encontradas en este episodio son:

- Con este modelo se visualiza la resta como quitar cantidades (3D).
- Para quitar cantidades positivas cuando no hay suficientes se agregan ceros chinos (3D).
- El docente reconoce el límite inferior de ceros que debe agregar en el Modelo Chino para poder quitar cantidades positivas a negativas (12E).
- Posteriormente indica que no importa el número de ceros que está agregando, olvidando que hay un límite inferior (23D).
- Para el docente son sinónimos de restar el eliminar, quitar y tomar (23D).
- Aparece el elemento neutro aditivo (23D).
- Para el docente, necesarios y suficientes son sinónimos (30D).
- Opera con el cero (23D).
- Escribe formas sintácticas equivalentes emanadas del Modelo Chino, expresando la operación $-11 + 0 = -11$ como $-11 + 1 - 1 = -11$ (39D). Posteriormente generaliza como $-11 + a - a = -11$ (41D).
- El agregar ceros para el docente es “ $a - a$ ” y no “ $a + (-a)$ ” (43D).
- Piensa en “ a ” como un número natural (45D).

- Para el docente “ $(-3) - (-3)$ ” significa neutralizar, eliminar y equilibrio (52D). posteriormente piensa en “ a ” como un número signado.
- Designa recíprocos incorrectamente cuando se refiere a simétricos (55D).
- Aparece el concepto de inverso aditivo (59D).
- En sus modelos predomina el de la Recta Numérica (64D).
- Reconoce que la suma de un número con su inverso aditivo es cero (65D).

En el episodio V “*Quitar ocho negativo, menos por menos*”, el docente resuelve la operación “ $(-3) - (-8)$ ” utilizando la regla multiplicativa de menos por menos evitando la sustracción de dos negativos. Las tendencias cognitivas presentadas son:

- Nombra a los negativos como tres negativo y ocho negativo (2D).
- Dice que aplica reglas sintácticas de la multiplicación confundiéndolas con leyes de los exponentes (4D).
- Nombra a “ -3 ” como menos tres (6D).
- Aplica la regla de los signos de la multiplicación evitando la sustracción de negativos (6D).
- Manifiesta que en la adición y sustracción, signos diferentes se restan. Su generalización es incorrecta para la sustracción (14D).
- Cuando nombra una regla habla de signos, no de números o cantidades (14D).
- Aplica la propiedad conmutativa de la suma al resolver $-3 + 8$, conmutando 8 y -3 omitiendo el signo binario de la adición (16D).
- Muestra tendencias inhibitorias cuando indica “no sé” (26D), “no me viene a la mente...” (28D), “debe haber una explicación” (35D).
- Explica la regla multiplicativa de menos por más, utilizando la propiedad conmutativa semánticamente cuando dice “estamos duplicando algo que es negativo”, ya que en este caso sería positivo por negativo (31D).
- Al explicar semánticamente la regla de menos por más, indica “deber tres veces dos es menos seis”, no sabemos a cuál de las dos estructuras se refiere: $-3(2)$ ó $3(-2)$ (31D).
- El docente pasa de lo sintáctico a lo semántico tratando de explicar por qué menos por menos es más, indicando que “si no paga cuatro veces una deuda de 20, entonces tiene o tenía 80”. Esto es incorrecto ya que el no pagar una deuda implica seguir debiendo, sin

embargo, una situación como dejar de deber o eliminar una deuda podría ser un ejemplo que explique esa regla sintáctica (33D).

En el episodio VI “*A la suma de dos más algo, le quito menos ocho, $+2 + x - 8 = 0$* ”, el docente encuentra el valor numérico de una incógnita representada por un cuadro en la expresión “ $2(+1) + \square + 4(-2) = 0$ ”. A continuación se muestran algunas tendencias cognitivas y características presentadas en este episodio:

- El docente ve una ecuación cuando se le presenta una expresión del tipo:
 $2(+1) + \square + 4(-2) = 0$ (3D).
- Indica que para encontrar el valor faltante va a buscar valores (4D). Posteriormente dice que va a despejar el cuadrado y que lo trabajará como incógnita (5D), aunque nunca despeja el cuadrado.
- El paréntesis lo visualiza como una multiplicación cuando no hay un signo entre el paréntesis y el número (8D).
- Señala otras formas de representar a la multiplicación con un punto o un asterisco (10D).
- Expresa la regla de los signos de la multiplicación como signos iguales da más (13D).
- El signo “+” en $+4(-2)$ puede considerarse como binario ó unario (15D).
- El docente al multiplicar disocia los signos de los números, operando primero los signos y después a los números como naturales (16D, 39D).
- Indica que realizará la trasposición de términos, sin realizarlo (23D).
- Al referirse a “ -8 ” en “ $+2 + \square - 8 = 0$ ” lee incorrectamente “le quito menos ocho” (26D) ó “menos ocho negativo” (27D). Posteriormente corrige como “ocho negativo” asignándole el signo binario al número.
- El docente lee la expresión “ $+2 + \square - 8 = 0$ ” como pregunta “¿qué número necesita para que sumado a dos y restado a ocho le de cero?” (27D). Encuentra el valor del cuadrado utilizando el inverso aditivo de “ -8 ” y no con la trasposición de términos o despejándolo (33D).
- El cuadro representa un valor faltante (3D), algo que vale (35D).
- El docente pasa de un SMS “ $2(+1) + \square + 4(-2) = 0$ ” a otro más abstracto “ $2(+1) + x + 4(-2) = 0$ ” (37D).

- Nuevamente realiza una lectura incorrecta cuando realiza la operación $+2 - 8$, mencionando que a dos positivo le **quita ocho negativo** (26D, 27D, 40D).
- Cuando el docente por petición del entrevistador escribe las lecturas incorrectas que realiza, se percata del error. Por ejemplo en la operación " $+2 - 8$ " al escribir su lectura, anota " $+2 - (-8)$ " y se da cuenta que está interpretando mal (42D y 43D).
- Encuentra un resultado incorrecto para " $+2 - (+8) = 6$ " (49D).
- Cuando recurre a estructuras sintácticamente equivalentes, no se percata que el resultado debe ser igual (61D). El docente tiene dos estructuras sintácticas equivalentes con diferente resultado (65D) " $+2 + (-8) = -6$ " y " $+2 - (+8) = +6$ ".
- **Al docente ya no le convence utilizar la regla de los signos de la multiplicación cuando sustrae enteros** (72D).
- Para superar la dificultad en la que se encuentra el docente, el entrevistador le pide comparar las operaciones " $+2 + (-8) = -6$ " y " $+2 - (+8) = +6$ " utilizando el Modelo Chino. El docente se percata que la segunda operación es incorrecta (90D).
- Indica que los inversos aditivos se cancelan, entonces cancelar quiere decir que al sumar dan cero (94D).

En el episodio VII "**El cero y el agua. Resultados de una neutralización.**", el docente analiza cómo deben ser los sumandos " m " y " n " para que su suma " p " sea mayor que cero. De forma natural el docente hace una comparación de la neutralización en los SMS y los SQS. Las tendencias encontradas en este episodio son:

- Inicialmente el docente piensa en sumandos como naturales para que la suma sea mayor que cero (5D).
- El entrevistador solicita que represente las regiones en el plano cartesiano y el docente sólo señala el primer cuadrante en donde ambos sumandos son positivos (15D). posteriormente considera el cero para uno de los sumandos (20D, 21D).
- El docente indica que los simétricos son inversos aditivos (44D), llama a $+1$ y -1 opuestos (190D) e inversos aditivos (186D).
- Con la intervención del entrevistador, el docente va generando la recta " $m = -n$ " para determinar cuándo " $m+n$ " es mayor, menor o igual a cero, primero en el segundo

cuadrante (99D, 105D, 107D, 119D) y posteriormente en el cuarto cuadrante (136D, 138D, 140D).

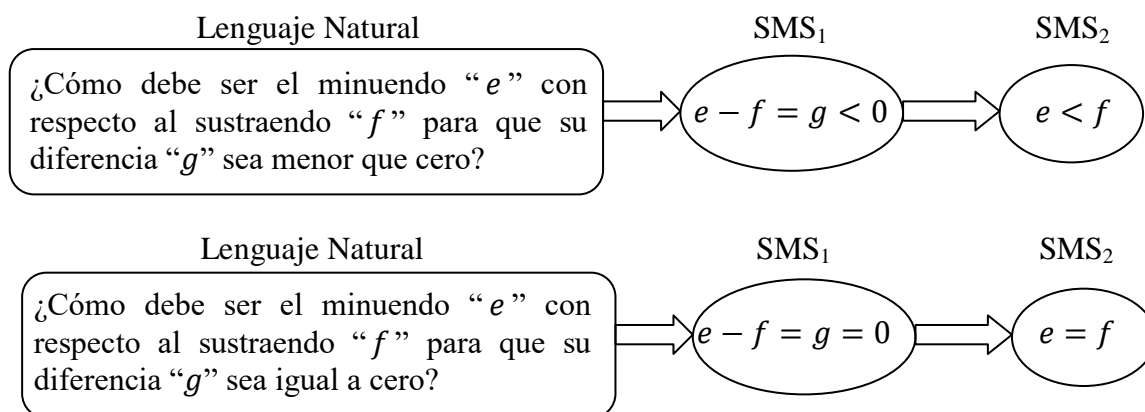
- Existe una tendencia del docente de evitar pensar en los negativos (35D, 107D).
- Aparece la concepción espontánea del “límite” (118D).
- Localiza la región cuando $m + n > 0$ (142D).
- El docente pasa de lenguaje natural a un SMS cuando representa algebraicamente $m = -n$ mostrándose sorprendido (152D), así mismo cuando escribe $m > -n$ en la región del plano donde se cumple que $m + n > 0$ (156D).
- Caracteriza a los opuestos como números con el mismo valor absoluto y con diferente signo (192D).
- Aparece el significado de: neutralizar o cancelar es sumar con resultado cero (192D).
- El docente realiza una analogía de una reacción ácido-base, en donde hay una neutralización de lo positivo con lo negativo, en un contexto químico (194D).
- Uno de los resultados (productos) de una reacción ácido-base es el agua cuyo pH es neutro.
- El docente indica que el resultado de una neutralización en Matemáticas es cero y en Química es sal más agua (200D).
- El docente utiliza 3 SQS en la representación de una reacción: $A+B \rightarrow \text{Sal}+H_2O$. Con las letras mayúsculas “A” y “B” representa un compuesto realizando una generalización, como etiquetas en Matemáticas para representar números. Utiliza lenguaje natural para representar una “sal”. Finalmente utiliza la fórmula química para representar al agua “ H_2O ” (204D).

Al inicio de este episodio, el docente solo pensaba en números positivos para m y n . El entrevistador lleva al docente a considerar números negativos mediante el diálogo, utilizando una gráfica en el plano cartesiano como medio de organización (Freudenthal, 1983).

En el episodio VIII “ $(-e)$ ó $e < 0$ ”, el docente analiza cómo debe ser el minuendo “ e ” y el sustraendo “ f ” para que su diferencia “ g ” sea mayor, menor ó igual a cero. Las tendencias cognitivas y algunas características que se encontraron en el episodio son:

- El docente pasa de lenguaje natural a un SMS más abstracto al anotar $g > 0$ (2D).

- El docente realiza una generalización correcta, que el minuendo sea mayor que el sustraendo, utilizando números naturales (5D).
- El entrevistador induce al docente a usar negativos (9E).
- El docente realiza una generalización incorrecta, exponiendo que “un número es mayor que otro, cuando está más cerca del cero” al comparar dos negativos. Esta generalización es incorrecta ya que sólo aplica a los negativos, poniendo a los negativos con características opuestas a los positivos, sin considerar a los enteros como un solo conjunto (12D).
- El docente presenta dificultades para corroborar su afirmación “que el minuendo sea mayor que el sustraendo” (221D). El entrevistador recurre a la reducción a lo absurdo para que el docente corrobore su afirmación inicial (21E).
- Para representar a un número negativo, el docente pasa de un SMS en “ $(-e)$ ” a otro más abstracto “ $e < 0$ ”, de los naturales a los enteros (37D, 42D).
- Se observa que el docente pasa de lenguaje natural a SMS más abstractos en:

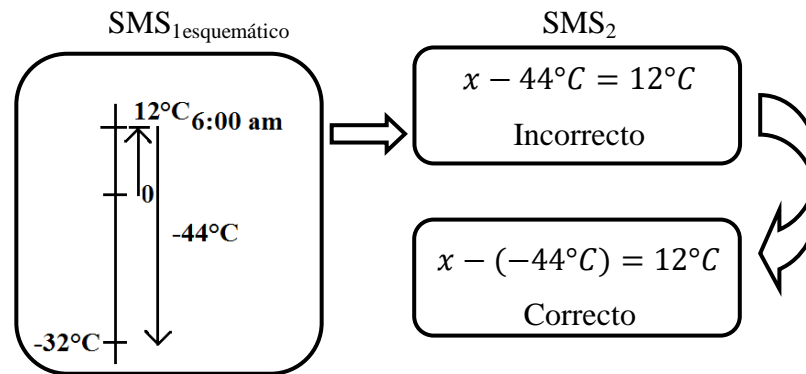


En el episodio IX “*Estoy comparando espacios, parámetros o valor absoluto*”, el docente realiza comparaciones de Temperaturas en dos problemas contextualizados, utilizando la Recta Numérica Vertical, compara espacios. Las observaciones realizadas en este episodio son:

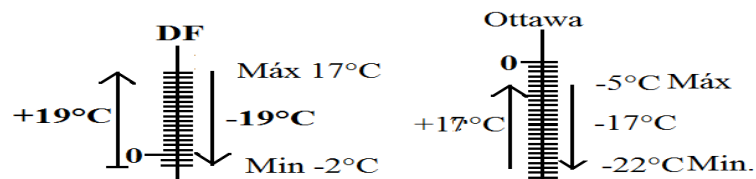
- El docente traza magnitudes dirigidas cuando localiza números en la Recta Numérica (2D, 10D, 73D y 75D) tomando el cero como referencia (Cero de Stevin).
- El docente realiza traducciones incorrectas, el enunciado dice “La diferencia de temperaturas entre la Ciudad de Toronto y la Ciudad de México es...” y el docente lee la diferencia entre la ciudad de México y la de Toronto es...”.

No advierte que: $T_{\text{Toronto}} - T_{\text{México}}$ no es igual a $T_{\text{México}} - T_{\text{Toronto}}$. (4D).

- El docente resuelve el primer problema con ayuda de la Recta Numérica vertical correctamente (10D).
- El entrevistador pide al docente representar esa situación con una operación (18D). El docente escribe una ecuación incorrecta y posteriormente pasa a otro SMS correcto (de 10D a 18D y de 18D a 22D).



- Utiliza las letras “x”, “y” para representar a las temperaturas (28D).
- Pasa de un contexto de Temperaturas a otro de Deudas (39D).
- Asocia un número negativo a una diferencia (45D).
- La Recta Numérica vertical representa un Termómetro (65D).
- En el segundo problema realiza la comparación de temperaturas con dos esquemas (86D).



- No se apoya en estructuras sintácticas para solventar las dificultades presentadas en los signos con el uso de la Recta Numérica (86D).
- Cuando realiza las comparaciones, contrasta los espacios que hay entre las temperaturas máximas y mínimas de las dos ciudades, en lugar de comparar números (104D).
- A las diferencias numéricas les denomina espacios ó parámetros (108D y 110D).
- Es docente se percata que debe comparar los valores absolutos de las diferencias (116D).
- Caracteriza el valor absoluto como lo que representa a la cantidad por sí sola sin ningún signo (118D).

En el episodio X *“No es una expresión coloquial, por eso no me hace sentido”*, el docente representa el simétrico de $-(-(-3))$ y el de $-a$ en la recta numérica. En la entrevista se presentan las siguientes situaciones:

- Para el docente no tiene sentido la expresión $-(-(-3))$ (6D).
- El docente visualiza al simétrico de $+3$ como -3 , a su vez el de $-(-3)$ como $+3$ (15D).
- Concibe a los números como: un signo y un número natural, no como enteros (27D).
- El docente explica la regla de los signos de la multiplicación con el simétrico (29D).
- Posteriormente la expresión $-(-(-3))$ solo tiene sentido vista desde los simétricos (38D).
- El docente inicialmente considera el valor de a como positivo, representándolo en el lado derecho del cero en la Recta Numérica (49D). Cuando se le refiere a un valor negativo de a , se percata que si $a < 0$, su simétrico $-a > 0$ (59D).
- El docente está anclado a lo numérico y presenta dificultades al realizar una generalización (65D).

En el episodio XI *“Si opero me va a dar su simétrico”*, el docente calcula el valor numérico de $x(-z)$ cuando $x = 11$ y $z = -9$. Aunque el docente contesta correctamente, en sus lecturas se pueden apreciar dificultades presentadas a continuación.

- Traduce $x(-z)$ como “equis menos zeta igual” omitiendo el paréntesis (2D).
- Aparece el uso del signo igual para obtener un resultado, es decir, unidireccional (4D).
- Al sustituir los valores numéricos, uso el paréntesis como operador (5D).
- Aplica el uso del simétrico como en el episodio X (7D).
- Realiza una lectura incorrecta en $11(+9)$ como “once más nueve” omitiendo nuevamente el paréntesis (11D), aunque realiza la operación correctamente.
- Aplica la regla de los signos de la multiplicación en $(-(-9))$ regresando a su esquema tradicional de cálculo (13D), podemos decir que el docente está anclado al uso de la regla sintáctica (19D).
- El docente acepta no haber visualizado a $(-(9))$ como el simétrico de nueve negativo, hasta antes de la entrevista (15D).

- La lectura de " $-1(-3)$ " la realiza de derecha a izquierda como "menos por menos, más y tres por una tres" (21D).
- Justifica la regla de "menos por menos es más", utilizando el concepto de simétrico (26D).

En el episodio XII "*Entre lo algebraico y lo numérico. $-(-h)^3 = \pm h^3$* ", el docente resuelve la operación " $-(-h)^3$ " correctamente y cuando se le solicita comprobarlo, se ancla en lo numérico cambiando su resultado de $+h^3$ a $\pm h^3$. A continuación se muestran detalles presentados en este episodio:

- El signo menos significa el inverso de (7D).
- El docente piensa más en la regla que en el significado de la operación (9D).
- Al solicitar al docente que corrobore su resultado numéricamente cambia su respuesta de " $+h^3$ " a " $\pm h^3$ ", anclándose en lo numérico (13D).
- Para el docente " $(-2)(-2)$ " significa dos veces el inverso de menos dos (16D).
- Al operar " $+4(-2)$ " el docente multiplica dos veces el inverso de cuatro (17D), leyendo de derecha a izquierda.
- El docente lee " $-(-2)$ " como el inverso de menos dos leyendo al número como signado (20D).
- Para el docente las expresiones " $-(-h)^3$ " y " $-h^3$ " son iguales (34D).

El docente no se percató que en el resultado de " $-(-h)^3 = +h^3$ " es correcto. Se ancla en lo numérico porque cuando sustituye $h = 2$, el resultado es positivo y para $h = -2$ el resultado es negativo, cambiándole el signo al resultado de " $+h^3$ " a " $\pm h^3$ ". Aparece un corte didáctico.

En el episodio XIII "*Esto " $a + b - c =$ " ¡Me sorprendió!*", el docente se sorprende cuando ve la expresión " $a + b - c =$ ". A continuación se muestran algunas de las observaciones realizadas durante la entrevista.

- El docente supone una infinidad de soluciones numéricas (5D), pasando de la nada a una infinidad de valores.
- El docente quiere despejar alguno de los valores, sin percatarse que no es una ecuación (7D), poniendo a una variable en función de otras.

- El docente iguala la expresión implícitamente y la manipula como si fuera una ecuación (12D). Aparece el cero implícito algebraico (12D).
- No discierne entre una ecuación y una expresión abierta, así como incógnita con variable (18D, 32D).
- No acepta una expresión abierta. Para darle sentido pasa de la expresión abierta " $a + b - c =$ " a la expresión cerrada " $a + b - c = 0$ " (18D).
- Pasa de igualar a cero a igualar a cualquier otro resultado (22D).
- Al contrastar la ecuación " $9x + 3 = -15$ " con " $a + b - c =$ ", el docente comienza a diferenciarlas (40D), pero continua pensando que " $a + b - c =$ " es una ecuación (44D) y la denomina ecuación abierta (46D).
- Caracteriza al cero como una infinidad de valores (56D).
- Para el docente "Solo en el mundo de las ecuaciones $a + b - c = a + b - c$ " (64D).
- El docente indica que $a + b - c = a + b - c$ es una ecuación porque es igualdad (68D) incorrectamente porque no todas las igualdades son ecuaciones. Para él una igualdad y una ecuación son sinónimos (78D).
- Duda que " $1 + 2 - 3 = 1 + 2 - 3$ " sea una igualdad, hasta que realiza las operaciones y obtiene cero en ambos miembros de la igualdad (82D).
- Indica que " $1 + 2 - 3 = 1 + 2 - 3$ " es una igualdad y " $a + b - c = a + b - c$ " es una ecuación (82D).
- Identifica al signo igual como equivalencia (98D).
- Aprecia que a, b y c son números generales y no incógnitas (107D).

En el episodio XIV "***Otra expresión medio rara: $-(a - b)$*** ", el docente realiza la operación " $-(a - b)$ " como en el episodio XIII. El docente:

- Realiza una traducción incorrecta de la expresión " $-(a - b)$ " como "*menos el inverso de la sustracción de a menos b*" (2D).
- Acepta que no es una expresión cerrada después del episodio XIII (3D).
- Está anclado en la naturaleza numérica de una expresión algebraica, realizando afirmaciones no válidas (3D).

- Aplica lo aprendido en el episodio XIII y presenta como resultado $-(a - b) = -(a - b)$ (5D).
- Propone como equivalente la expresión $-(a - b) = +(a - b)$ incorrectamente (9D).
- Aplica el inverso aditivo a cada término como resultado de la entrevista (21D), sin aplicar la regla de los signos para multiplicar.
- No acepta las expresiones abiertas sin contexto (30D).
- Escribe tres estructuras sintácticas equivalentes (32D)

$$-(a - b) = -a - (-b) = -a + b$$

En el episodio XV ***“Mi mente vino a pensarlo de adentro hacia afuera”***, el docente resuelve la ecuación $9x + 3 = -15$ correctamente. A continuación se presentan algunas observaciones representativas del episodio.

- El docente no asegura que sea una ecuación (1D).
- Acepta la expresión $9x + 3 = -15$ como el resultado de un problema (11D) y no acepta la expresión $-(a - b)$ en el episodio XIV.
- El docente traduce $9x + 3 = -15$ a un problema tipo ábaco (13D).
- El docente utiliza la metáfora del equilibrio para resolver la ecuación (17D).
- Al resolver la operación $9(-2)$ realiza la lectura de derecha a izquierda como “dos veces el inverso de nueve” (31D).
- Confunde variable con incógnita (39D).

En el episodio XVI ***“Dos incógnitas que representan el mismo valor. $10x + 4 = 15x + 9$ ”***, el docente resuelve la ecuación correctamente. Sin embargo presenta nuevamente dificultades para diferenciar entre igualdad y ecuación (3D), identificando a la incógnita en ambos miembros de la ecuación. Realiza la lectura de $10x$ como un valor por diez. Manipula la incógnita, para que los términos que la contienen se encuentren en el primer miembro de la igualdad (7D) y resuelve correctamente (11D). El docente manifiesta que tiene ***“dos incógnitas que representan el mismo valor”*** (13D), al cuestionársele si son dos incógnitas, no le da importancia y dice que es una. Posteriormente indica que ***“agrupa las incógnitas del lado izquierdo”*** refiriéndose a la incógnita en plural (15D), considerando sinónimos a las palabras *variable* e *incógnita* (15D).

5.3.2 Resultados de la entrevista en Química

En el apéndice B se presentan los XIV episodios de la entrevista de Química.

En el episodio I de Química “*Nada más con un chipote*”, el docente representa de diferentes forma al átomo de Hidrógeno (H) y al átomo de Sodio (Na). Utiliza las representaciones de Lewis, un modelo formal con signos, el modelo de Böhr y un modelo personal nominado como “el del chipote” (Tabla 62).

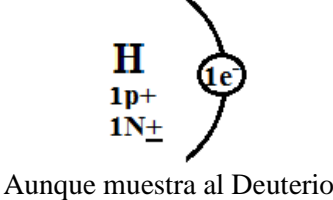
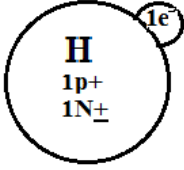
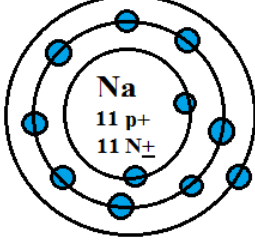
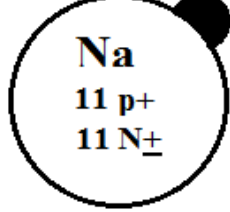
Modelos Tipo de Representaciones	Modelo de Lewis:	Modelo de Böhr:	Modelo del Chipote:
Grado de iconicidad	Signos normalizados	Figurativo más signos	Combinación de un dibujo figurativo con esquemática
Representaciones concretas para el átomo de Hidrógeno	H^{\times}		
Representaciones concretas para el átomo de Sodio	Na^{\bullet}		
SQS	Formal	Formal	Formal
Correcto/Incorrecto	Correcto	Incorrecto	Incorrecto Producción de códigos personales

Tabla 62. Representaciones para el átomo de Hidrógeno del docente en la entrevista.

El docente reconoce que los enlaces se establecen a través de los electrones, representados con una "×" o un "•". Los elementos se representan con símbolos normalizados “H” y “Na”. Los átomos se representan utilizando sus características, como en el modelo de Böhr se identifica al electrón como “1e⁻”, al protón como “1p⁺” y al neutrón como “1N[±]”, utilizando para ello el coeficiente, las letras “e”, “p” y “N”, y en el superíndice la carga de las partículas subatómicas.

Para el neutrón, el docente reconoce la neutralidad como un balance de cargas apareciendo la equilibración como en el Modelo Chino. Propone un Modelo personal incorrecto al representar a

un electrón con un chipote. El docente usa como sinónimos “carga” y “electrones” incorrectamente, ya que la carga es una propiedad de la materia y puede ser positiva o negativa y los electrones son partículas que tienen carga negativa.

Para el átomo de Sodio el docente utiliza a la tabla periódica como un medio de organización para obtener información del átomo en cuestión. Con ayuda de la tabla periódica el docente calcula el número de electrones del átomo de sodio. En el modelo de Böhr, los electrones están representados con bolitas, como en el modelo Chino las cantidades negativas. (Menciona la regla del octeto de Lewis, la regla de la construcción progresiva de Aufbau).

En el episodio II “*Compartiendo electrones*”, el docente representa de tres formas diferentes a la molécula de Hidrógeno (H_2) y de Oxígeno (O_2). La tabla 63 muestra las producciones del docente.

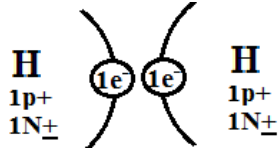
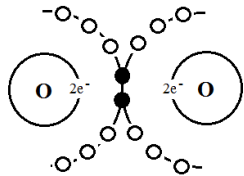
Modelos Tipo de Representaciones	Fórmula molecular	Modelo de Böhr:	Diagrama de rayas o de Lewis
Grado de iconicidad	Signos normalizados	Figurativo más signos	Signos normalizados
Representaciones concretas para la molécula de Hidrógeno	H_2		$H-H$ $H \times H$
Representaciones concretas para la molécula de Oxígeno	O_2		$O=O$ $:\ddot{O}:\times O \times$ $\times \times$
SQS	Formal	Formal	Formal
Correcto/Incorrecto	Correcto	Incorrecto	Correcto

Tabla 63. Representaciones para la molécula de Hidrógeno del docente en la entrevista.

Las producciones del docente son formales. Utiliza el subíndice 2 para representar al número de átomos en una molécula. El punto y la cruz representan electrones. En el modelo de Böhr se representan electrones compartidos. En el diagrama de rayas, una raya significa un enlace y en Matemáticas una raya representa un signo binario o unario. Doble raya paralela significa un doble enlace en química y en matemáticas es el signo de igual. El docente establece correctamente la equivalencia matemática y química (SMS, SQS) cuando escribe $O_2=2O$ indicando en ambos casos que hay dos átomos de oxígeno con diferente representación (Tabla 64).

Representación	O ₂	2O
Coefficiente	1	2
Letra	O	O
subíndice	2	1

Tabla 64. Equivalencia matemática de dos átomos de Oxígeno.

Aparece en el contexto Químico la operación de sustracción como completar en el octeto de Lewis. En este episodio, el docente recurre al concepto de enlace químico como compartición de electrones de valencia para representar a las moléculas de hidrógeno y oxígeno.

El docente no puede representar correctamente a la molécula de oxígeno con el modelo de Böhr, porque no estableció correctamente el número de electrones que debe tener el oxígeno en su capa de valencia que son 6. No establece un SMS para representar la cantidad de electrones que presenta.

En el episodio III “*Está salado*”, el docente representa al cloruro de sodio. En una de las producciones, aparecen dos símbolos químicos juntos (NaCl), indicando un enlace químico como una unión o suma de Sodio (Na) y Cloro (Cl₂), expresándose como una multiplicación en matemáticas. El docente confunde el concepto de valencia con el número de oxidación. El docente no se percató que *la valencia se asocia con un número natural y el número de oxidación con un número entero*.

El docente explica el enlace por transferencia de electrones, caracterizando a un enlace iónico. Relaciona incorrectamente a la valencia con el número de electrones de valencia. Muestra una dificultad cuando representa incorrectamente los números de oxidación del cloro y del sodio en el cloruro de sodio como: Na⁺¹Cl⁻⁷, debiendo representar los electrones cedidos o ganados y en este caso está anota los electrones de valencia como enteros positivos y negativos, adicionalmente no contempla al compuesto como neutro, ya que la suma de los números de oxidación debe ser cero y en este caso es seis negativo.

Los superíndices en Química expresan el número de oxidación que pueden ser enteros positivos, negativos o cero, y en Matemáticas indican los exponentes que pueden ser positivos, negativos o cero.

Aparece la sustracción o adición de cantidades negativas como quitar, similar a la sustracción de cantidades negativas en el modelo Chino, cuando se indica que un átomo puede ceder o ganar

electrones. No aparece la adición o sustracción de cantidades positivas porque las reacciones químicas se llevan a cabo a través de los electrones y no de los protones.

El docente no plantea matemáticamente la situación, si tiene un átomo neutro y recibe un electrón su carga resulta negativa: $(0) + (-1) = -1$. Posterior a los cuestionamientos del entrevistador, el docente corrige los superíndices de $\text{Na}^{+1}\text{Cl}^{-7}$ a $\text{Na}^{+1}\text{Cl}^{-1}$, que representan el número de oxidación y no la valencia. El docente conoce como sinónimos a la valencia y el número de oxidación incorrectamente.

El docente representa al cloruro de sodio como: $[\text{Na}]^+ [\text{Cl}]^-$ combinando la forma iónica con el modelo de Lewis. Muestra la transferencia de electrones porque aparece la cruz del sodio dentro del corchete del cloro. El corchete lo utiliza para separar las especies químicas, y en matemáticas se utiliza para agrupar y expresar un producto. Escribe “+” en el superíndice para representar una carga positiva, omitiendo el número “1” y “-” para representar al “1 -”. Caracteriza a un catión como un átomo con carga positiva y a un anión como un átomo con carga negativa.

El docente describe al cloruro de sodio como una sal, y cuando está disuelta en agua, un punto representa a un sodio positivo y otro punto al cloro negativo, tratando a los puntos como entidades cargadas eléctricamente como las bolitas en el modelo Chino.

El sujeto que aprende debe diferenciar en este caso que “el Cloro tiene una valencia de "1", "7" electrones de valencia y un número de oxidación de "1 -" cuando está combinado en el Cloruro de sodio.

En el episodio IV “*Un compuesto, el producto de una reacción*”, el docente visualiza a un compuesto como el producto de una reacción correctamente, para el caso de un *metal* más un *no metal*, mostrando dificultades en la obtención del número de oxidación y en el establecimiento de generalizaciones.

El docente visualiza un óxido metálico como el resultado de una reacción. Expresa correctamente la fórmula de un óxido metálico, en un SQS formal con signos aunque no respeta las reglas de los números de oxidación en: $\text{M}^n + \text{O}^{-2} \longrightarrow \text{M}_2\text{O}_n$ ya que los números de oxidación de los átomos cuando no están combinados es cero y utiliza n para el metal y -2 para el oxígeno. En este caso “n”

es cero y cuando el metal está combinado, es un número entero con restricciones, es decir, no puede tomar cualquier valor porque depende de las características del metal.

Realiza una generalización incorrecta cuando indica que todos los metales se combinan con una valencia de dos. Lo correcto para la reacción es: $M^0 + O_2 \longrightarrow M^{n+}_2O^{2-}_n$. En donde el subíndice “n” es un número natural y “n+” es un número entero. Existe una imprecisión al decir que todos los metales se combinan con una valencia de dos, ya que el subíndice dos en $M^{n+}_2O^{2-}_n$ corresponde al número de átomos del metal en el compuesto y no a su valencia.

El docente sabe que los números de oxidación a los que él les llama valencias, se deben de cruzar para formar parte de los subíndices. $M^{\overset{+n}{\curvearrowright}}O^{\overset{-2}{\curvearrowright}}$ para obtener $M^{n+}_2O^{2-}_n$.

Al solicitarle al docente que generalice la reacción para un compuesto cuyas especies son A y B, él propone la reacción $A^{+n} + B^{-m} \longrightarrow A_mB_n$ incorrectamente. Nuevamente no respeta el número de oxidación las especies A y B de cero cuando no están combinados. Una expresión más refinada de la generalización es: $A^0 + B^0 \longrightarrow A^{n+}_mB^{m-}_n$. Al cruzar los números de oxidación se convierten de números enteros a naturales, de cargas eléctricas a número de átomos.

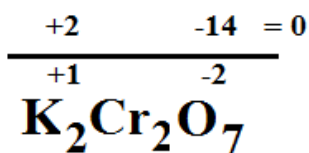
El docente indica la forma de escribir de los compuestos, el anión se anota del lado derecho y el catión del lado izquierdo, posteriormente menciona la forma de nombrar a los compuestos primero se nombra a la parte negativa con terminación “uro” le agrega un conector “de” y nombra la parte positiva, utilizando la nomenclatura. Por ejemplo, el compuesto “NaCl” es el cloruro de sodio.

En el episodio V “*El equilibrio*”, el docente indica el significado de los subíndices en la fórmula $K_2Cr_2O_7$ correctamente. Para el docente, el subíndice es el número de átomos de cada elemento, escribiendo “7O, 2Cr y 2K”. Cuando se le solicita que indique cómo están unidos los átomos en el compuesto, presenta una tendencia inhibitoria, diciendo no puedo representarlo. Se observa que los subíndices en la fórmula química, los utiliza como coeficientes.

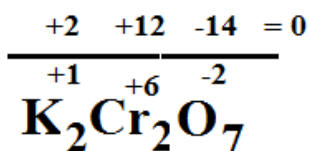
El entrevistador le cuestiona si con los números de oxidación podría representar cómo están unidos los átomos y el docente dice que esos números sólo le permiten ver si el compuesto está

equilibrado eléctricamente, manifestando la neutralidad eléctrica de la materia. Menciona incorrectamente que el oxígeno trabaja con una valencia de menos dos.

Mediante preguntas reflexivas hechas por el entrevistador, el sujeto de investigación logra determinar los números de oxidación de cada elemento en el compuesto. En este ejercicio, aparece un cambio de conducta del docente y por primera vez plantea la fórmula de manera formal e indica que los superíndices son números enteros y corresponden a los números de oxidación. Establece como una **suma** de los números de oxidación totales a la neutralización eléctrica de la molécula.



Pasa de un SQS a un SMS cuando piensa en $(+2) + (\text{espacio}) + (-14) = 0$. Resuelve por inspección el valor del espacio donde falta el número: $(+2) + \square + (-14) = 0$, encontrando el valor de +6, que multiplicado por dos átomos de cromo, le da +12.



Regresa al SQS y dice que este valor corresponde a la carga del átomo de cromo, hace la comprobación al sumar el total de cargas, está aplicando un modelo de equilibración: El modelo Chino.

Aquí aparecen los números como incógnitas, es decir se *pasa de los enteros a los negativos como del la aritmética al álgebra*, pero de una forma informal y no por medio de una ecuación.

Parece que se requiere una competencia alta en Química y en Matemáticas para poder proponer la forma en la que los átomos están unidos en un compuesto, ya que no se pudo llegar a proponer una estructura, pero aquí se ve *una oportunidad para trabajar la competencia matemática a partir de situaciones de la química*.

En el episodio VI “*Un paréntesis*”, el docente muestra los diferentes usos del paréntesis en química cuando se presentan 7 moléculas de fosfato de calcio “ $7\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$ ” y hace la comparación de éste con sus usos en las matemáticas.

El docente menciona que el coeficiente significa “7 veces”, en este caso el coeficiente en química tiene el mismo significado que en matemáticas. El sujeto menciona que el coeficiente se multiplica por el subíndice, así que le da un carácter de *operador multiplicativo*.

Otro uso que encuentra es el de agrupar para realizar una multiplicación del contenido con el subíndice, al preguntársele al docente de los usos similares en matemáticas y en química, responde que tiene dos usos principalmente, *la agrupación y la multiplicación*.

El paréntesis también sirve para asociar, así encontramos una triple función, la de *agrupar (juntar), multiplicar y asociar (formando enlaces)*, entonces el paréntesis agrupa a los iones fosfato, el número de átomos se encuentra multiplicando los subíndices por el coeficiente y asocia a los iones fosfato con los iones calcio al aparecer juntos en la fórmula indicando un enlace.

Más adelante aparece otro uso, el de separar, para no confundir el coeficiente de un átomo dentro del paréntesis con el que está fuera, así se puede distinguir entre 2 iones fosfato: $(\text{PO}_4)_2$; de 42 oxígenos PO_{42} . Esto nos lleva a un uso más general, el *uso de carácter sintáctico*, para no confundir los subíndices cuando en un compuesto, se tiene más de un mismo ión formado por diferentes átomos.

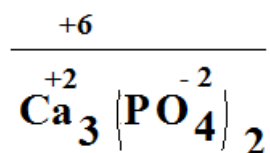
Entonces los usos del paréntesis en química que aparecen en este episodio son:

- El de agrupar.
- Para asociar.
- Carácter sintáctico, para separar los subíndices.
- Carácter multiplicativo.

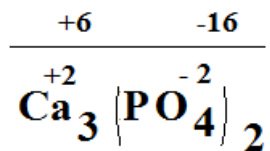
Hablando ahora de los usos del paréntesis, el docente los utiliza para cuantificar átomos, iones, cargas individuales y cargas totales.

Con el propósito de determinar las cargas individuales de los átomos, el docente parte primero de establecer el balance de carga total en el compuesto, encontrando que para completarlo tiene que encontrar una incógnita.

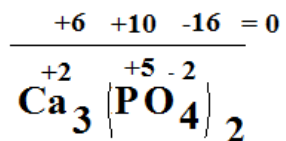
Aparece la multiplicación de enteros. Realiza la multiplicación mentalmente $(3)(+2) = +6$. Esta operación la visualiza como tres veces (porque hay tres átomos de Calcio) más dos (porque es el número de oxidación del ión calcio) igual a más seis (número de oxidación total de los iones calcio).



Procede a determinar la carga total de los oxígenos, el ión fosfato tiene cuatro oxígenos pero como fuera de este paréntesis hay un dos, multiplica $(4)(2) = 8$, después multiplica este 8 (oxígenos totales) por su número de oxidación (-2) , pero multiplica con números enteros y signa el resultado $(8)(2) = 16$; -16 , aquí aparece el número negativo como signado.

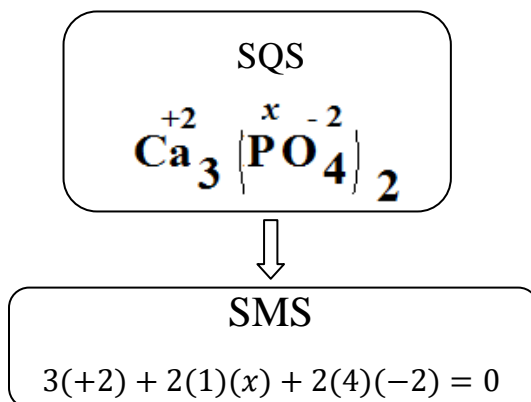


Ahora ya tiene el número de oxidación de los calcios y de los oxígenos, le falta el número de oxidación del fósforo, y lo encuentra estableciendo que, la suma de $+6 + \square -16 = 0$, como en la fórmula aparece un subíndice 2 que indica que hay dos fósforos, concluye por ensayo y refinamiento que el número de oxidación del fósforo debe ser $+5$, para obtener $(2)(+5) = +10$ y que se cumpla que $+6 + \boxed{+10} + (-16) = 0$.



Para evitar encontrar el número de oxidación faltante por ensayo y refinamiento o por inspección, el investigador pide al sujeto que explicita la situación con una ecuación, para ver si puede pasar de un SQS aun SMS, en un principio el docente se resiste presentando una tendencia inhibitoria, justificando que no tiene la necesidad de hacerlo.

Finalmente accede a plantear la ecuación, lo cual hace correctamente, parte de la fórmula química $Ca_3(PO_4)_2$ estableciendo matemáticamente que: $3(+2) + 2(1)(x) + 2(4)(-2) = 0$ (tres átomos de calcio por su carga más dos; más el doble de un fósforo por su carga “x”; más el doble de cuatro oxígenos por su carga menos dos; es igual a cero). Aquí se están multiplicando elementos de los naturales con elementos enteros: $\{ xy \} \forall x, \in N ; \forall y \in Z$ con resultado en Z.



El investigador le pregunta qué significa la “x” en esta ecuación, y dice de manera clara de representar el número de oxidación del fósforo, lo cual indica que regresó del SMS al SQS.

El docente no muestra seguridad si la ecuación le dará ese +5 que ya había encontrado, dice que tiene que resolverla para saber si efectivamente le dará ese número; procede a resolverla y sorprendido dice ¡Entonces sí se puede!

En el episodio VII llamado **“La incógnita”** se muestra cómo el docente supera la tendencia inhibitoria de utilizar ecuaciones para determinar los números de oxidación de los átomos en un compuesto. Se le pregunta de manera similar al capítulo VI, el número de átomos que hay en la fórmula química $9Al_2(SO_4)_3$, inmediatamente el docente procede a escribir la fórmula, establecer los números de oxidación que conoce y plantea la ecuación que determina el número de oxidación del átomo de azufre.

El docente pasa de un SQS “ $9Al_2^{+3}(SO_4^{-2})_3$ ”, a un SMS “ $2(+3) + 3x + 12(-2) = 0$ ”, utilizando para su resolución con el método Euleriano **apareciendo la división de enteros**.

$$\begin{aligned}
 2(+3) + 3x + 12(-2) &= 0 \\
 6 + 3x + (-24) &= 0 \\
 3x - 18 &= 0
 \end{aligned}$$

$$3x - 18 + 18 = 0 + 18$$

$$3x = +18$$

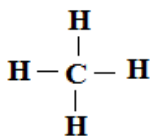
$$\frac{3x}{3} = \frac{+18}{3}$$

$$x = +6$$

La división de enteros es representada como dieciocho positivo entre tres igual a seis positivo. No es una división de naturales, traducido al SQS son enteros, debido a la carga. En este episodio es claro cómo la competencia Matemática influye en la competencia Química, ya que para obtener los resultados y su interpretación el sujeto tiene que moverse en ambos sistemas, y utilizar diferenciadamente los usos de cada uno de los signos y símbolos.

El episodio VIII es llamado *“Estoy hidratado, punto y seguido”* porque aparece otro uso del punto en Química, cuando se le presenta al docente la fórmula $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ (sulfato de cobre II pentahidratado). El docente no explica inmediatamente el uso del punto, después de varias reflexiones con el investigador, infiere que este punto entre el agua y el sulfato de cobre significa “más”, deduciendo que la sustancia está hidratada y dice incorrectamente que el punto significa “hidratado”, siendo que está hidratado por las 5 moléculas de agua que están vinculadas a dicha sustancia. El punto, como lo mencionó antes significaría unión. Comenta además que el punto en matemáticas significa multiplicación y reitera que en este caso significa unión.

“Compartes, ganas o cedes” es el título del episodio IX de la entrevista hecha al profesor de telesecundaria, en él se muestran otros signos que comparten la química y las matemáticas. El docente representa a un enlace químico “con una rayita” utilizando la notación desarrollada para el metano (CH_4).



El signo raya significa un enlace en Química mientras que en Matemáticas puede significar un signo binario o unario.

El docente visualiza a la raya como un enlace covalente en el cuál los electrones son compartidos. Mientras que cuando se trata de un enlace iónico, semánticamente menciona que cuando una

especie cede un electrón, dejás a un elemento con carga positiva. Traduciendo el texto del docente tenemos en ambos sistemas:

SQS	$A^0 - 1e^- \rightarrow A^{+1}$
SMS	$0 - (-1) = +1$

Se puede apreciar que para contestar las preguntas del entrevistador, se requiere de conocimientos Matemáticos y Químicos, apareciendo continuamente entrecruzamientos de los SMS y los SQS.

El episodio X “*¡Reacciona!*” contiene el uso de los signo de la flecha (\longrightarrow) y el del igual (=), para indagar en sus significados, se le pregunta al docente cómo representa una reacción química y éste plantea una reacción de síntesis como $A + B \longrightarrow AB$, dice que es de síntesis porque está uniendo cosas separadas, así que en química puede ser que se combinen $A + B = AB$, pero en álgebra $A + B \neq AB$. El uso de la flecha en este caso es equivalente al signo igual con carácter unidireccional.

Se le pregunta el proceso inverso a la síntesis y responde que es la descomposición, anotando $AB \rightarrow A + B$, después de provocar que el docente vea las dos reacciones aparece la “*doble flecha*” cuando se le pregunta qué otro tipo de reacciones conoce. Entonces menciona a las reacciones “reversibles” planteando $A + B \rightleftharpoons AB$, asociando la doble flecha con el concepto de reversibilidad, también se relaciona a la doble flecha con el signo igual con un significado de bidireccionalidad.

Por otro lado se le plantea al docente una situación para ver si puede hacer una generalización de una reacción de doble sustitución, utilizando SMS y SQS. Se le pide que interprete y describa la situación cuando “se tiene AX más BY que da como productos AY más BX”, el docente responde que se están sustituyendo, que los compuestos (elementos) “X” y “Y” se están intercambiando de lugar como: $AX + BY \longrightarrow AY + BX$ y la interpreta como una doble sustitución de manera correcta. En Matemáticas se realizan sustituciones numéricas y sustituciones algebraicas cuando se cambia de variable.

En el episodio XI “*Agua y arena*”, continúa el proceso de indagación en el docente acerca del significado de las flechas sencilla y doble en una reacción química y su relación con el signo igual,

ya que no explicó el significado físico (o químico), su interpretación y relación. Para ello se le pregunta al docente nuevamente, qué indica la flecha, a lo que responde utilizando una nueva palabra: el *sentido* de la reacción, que va de *izquierda a derecha*, después escribe la reacción $A + B \rightleftharpoons AB$, refiere que las dos flechas están indicando que tiene *dos sentidos*, por eso se le conoce como reversible. Después dice que significan “*da resultado*” o “*da igual a*”. Este planteamiento ayuda a utilizar los SMS y SQS juntos para dar sentido a este tipo de expresiones, ya que el docente no menciona que, así como va la reacción de izquierda a derecha, la doble flecha indica que también va de derecha a izquierda y que el “*da como resultado*” o “*da igual*” ocurre en ambos sentidos de la reacción, entonces la doble flecha se asocia al signo igual pero con un carácter bidireccional.

Para ahondar más en el sentido de la reacción, se le plantea al docente la situación común de disolver sal, cloruro de sodio en agua y preguntarle qué ocurre, éste responde diciendo que hay una *disociación*, dice que ya no ve la sal pero sigue ahí, contrariamente cuando se le plantea si el arena se disuelve en agua, dice que no, que sólo se asienta, el sujeto no alcanza a visualizar que un proceso que se lleva a cabo está indicado con la flecha, ya que *los productos son más estables que los reactivos* y por ello la arena no se disuelve.

Se explora el concepto de estabilidad, se le pregunta cómo están en la naturaleza el sodio y el oro, a lo que responde, que el sodio está combinado y el oro está en forma de minerales, se le comenta que el oro está mezclado con minerales pero en forma libre como las pepitas de oro y se le pregunta qué tendrá que ver que el sodio se encuentre combinado y el oro no, el sujeto contesta que “sólo nos muestra cómo reaccionan”, “es un resultado” (mostrando el carácter unidireccional de la flecha en Química como el signo igual en Matemáticas). El entrevistado no alcanza a concretar que una reacción química se lleva a cabo cuando los productos son más *estables* que los reactivos en condiciones normales de temperatura (25°C) y presión (1 atm), entonces la flecha tiene este sentido de izquierda a derecha.

En el episodio XII *¡No siempre da cero!*, el docente debe obtener el número de oxidación del Cromo (Cr) en el anión $Cr_2O_7^{2-}$. La primera apreciación del docente es incorrecta, dando a entender que la suma de las cargas de los componentes de ese ión tiene que ser cero, cuando la

carga total de un anión es negativa y la de un catión positiva. Por los cuestionamientos realizados por el entrevistador, el docente se percató que este anión tiene una carga total del “menos dos”.

Plantea correctamente las expresiones Químicas y Matemáticas para calcular el número de oxidación del Cromo, pasando de SQS a SMS y de SMS a SQS.

SQS	SMS	SQS
$\frac{\text{Cr}_2\text{O}_7}{-2} = -2$	$\begin{aligned} 2x - 14 &= -2 \\ 2x &= -2 + 14 \\ 2x &= +12 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{+12}{2} \\ x &= +6 \end{aligned}$	$\frac{+12 \quad (-14)}{+6 \quad -2} = -2$

Se observa cómo la competencia Matemática que desarrolló al representar situaciones químicas por medio de ecuaciones, le facilita ahora resolver situaciones más complejas e interpretarlas, desarrollando así la competencia química.

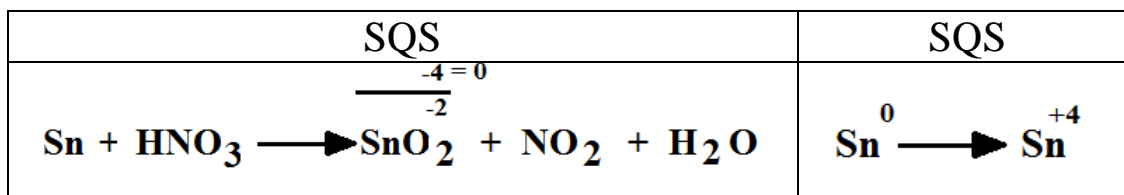
En el episodio XIII nombrado *¡Está cromado!*, se le pide al docente indique cuáles son los números de oxidación de los átomos presentes en diferentes óxidos de cromo “CrO, Cr₂O₃, CrO₂ y CrO₃”. Inicialmente el docente relaciona la estabilidad de un compuesto con su carga eléctricamente neutra, es decir, que el resultado de la adición de los números de oxidación es cero, asociando la neutralidad al cero. En esta oración, el docente pasó de plantear sumas y restas de naturales hacia la suma de enteros.

Matematizando, el docente en los episodios anteriores realizaba la operación $2 - 2 = 0$, ahora plantea $(+2) + (-2) = 0$. Se muestra cómo el docente pasa de los naturales a los enteros. Esto nos lleva a pensar que la competencia Matemática se puede desarrollar a partir de la competencia Química y que se pueden utilizar contextos químicos para realizar reflexiones en Matemáticas.

Después de provocar la reflexión en el docente, cuando obtiene los números de oxidación del cromo para los diferentes compuestos, aparece el concepto del simétrico en el contexto químico, como: $(+a) + (-a) = 0$ mencionando que debe pensar en qué número le permite que su resultado sea cero”.

El episodio “*El balanceo*” es el nombre del episodio XIV. El docente presenta dificultades en la nomenclatura química, al nombrar al ácido nítrico. Así como aparecen dificultades para pasar de un SMS a otro más abstracto (de los Naturales a los Enteros), también se observan esas dificultades al pasar de un SQS a otro (de la fórmula química al nombre).

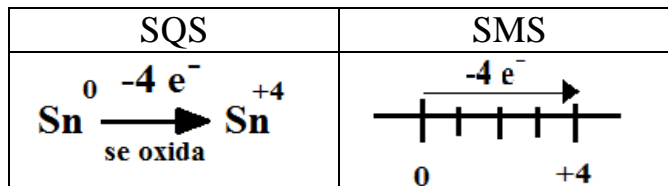
El docente utiliza correctamente el concepto del simétrico para determinar el número de oxidación “+4” del estaño (Sn) en el compuesto SnO₂. Después representa correctamente la semi-reacción, indicando correctamente que se oxida porque pierde cuatro electrones.



Se le solicita al docente representar la pérdida de electrones, anota: $0 + x = +4$, en donde $x = +4$. Esta representación Matemática indica que el átomo de estaño (Sn) gana cuatro protones, lo cual es imposible en una reacción Química. Una reacción química de óxido-reducción puede ser representada como la ganancia o la pérdida de los electrones que se encuentran en la capa de valencia.

Aunque matemáticamente “ $0 + 4$ ” es equivalente a “ $0 - (-4)$ ”, químicamente no son equivalentes, ya que “*ganar cuatro protones, no es equivalente a perder cuatro electrones*”. Por ello es necesario que en Matemáticas que se enseñe a restar números positivos sin utilizar una estructura equivalente. Se tiene entonces que “*sumar no es igual a restar*”.

El docente escribe químicamente la pérdida de electrones en la semi-reacción de oxidación, indicando que perder cuatro electrones es desplazarse a la derecha en la recta numérica correctamente.



El docente presenta dificultades para aceptar que el Nitrógeno oxida al Estaño, aunque plantea correctamente la semi-reacción de reducción de Nitrógeno, representa el cambio del número de oxidación en la recta numérica y con una ecuación matemática como:

SQS	SMS ₁	SMS ₂
$\begin{array}{ccc} +5 & +1e^- & +4 \\ \text{N} & \longrightarrow & \text{N} \\ \text{se reduce} & & \end{array}$		$\begin{aligned} 5 + x &= +4 \\ +5 - 5 + x &= +4 - 5 \\ +x &= -1 \end{aligned}$

El docente indica entonces que ganar un electrón (SQS) es equivalente a sumar menos uno, en su SMS₂.

Como el número de electrones perdidos o cedidos por el estaño no es igual al número de electrones ganados por el nitrógeno, entonces el docente propone balancear la ecuación, llamándole así a la reacción química. El investigador provoca la reflexión en el docente para que pueda realizar el balance de carga y de materia.

El docente concluye que las semi-reacciones son similares a las ecuaciones matemáticas y tienen las mismas propiedades. Deduce que al multiplicar la semi-reacción del nitrógeno por 4, la carga queda balanceada como se muestra a continuación:

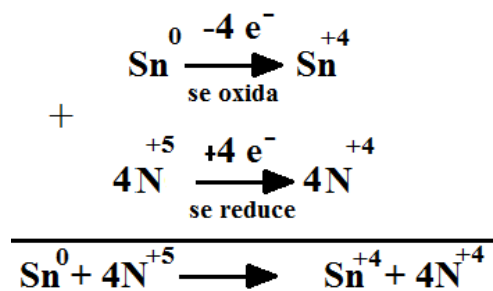
Ecuación original	Ecuación en proceso	Ecuación final
$\begin{array}{ccc} +5 & +1e^- & +4 \\ \text{N} & \longrightarrow & \text{N} \\ \text{se reduce} & & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} +5 & +1e^- & +4 \\ 4\text{N} & \longrightarrow & 4\text{N} \\ \text{se reduce} & & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} +5 & 4(+1e^-) & +4 \\ 4\text{N} & \longrightarrow & 4\text{N} \\ \text{se reduce} & & \end{array}$

Como el proceso de óxido-reducción ocurre simultáneamente, encontrar los coeficientes estequiométricos que hacen que la reacción quede balanceada, es equivalente a resolver un sistema de ecuaciones.

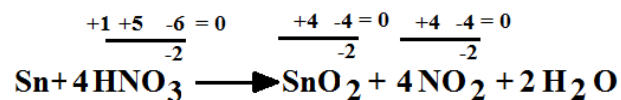
Cuando el número de electrones en ambas semi-reacciones es el mismo, se procede a sumarlas como las ecuaciones matemáticas en un sistema, apareciendo el equilibrio entre los electrones cedidos y ganados como:

$$-4e^- + 4e^- = 0$$

La suma de las semi-reacciones se realiza como se muestra a continuación:



Se concluye el balance de materia por tanteo, contabilizando que el número de átomos de cada especie presente en la reacción sea igual en los reactivos y en los productos, obteniendo la reacción balanceada:



En Química se utiliza el balanceo de reacciones por tanteo como en Matemáticas la búsqueda de las incógnitas en ecuaciones por ensayo y refinamiento.

Capítulo VI. Conclusiones finales

Para contestar las preguntas de investigación se analizaron los cuestionarios de los 59 alumnos, los cuestionarios de los 4 docentes y la entrevista del docente de telesecundaria.

En cuanto a la primera pregunta de investigación:

- *¿Cómo influye el nivel de competencia en matemáticas en el nivel de competencia en química?*

Se presentan las siguientes conclusiones como producto del análisis de los sujetos de investigación, alumnos, docentes y docente entrevistado:

En Matemáticas la mayoría de los alumnos pueden realizar operaciones de suma y resta de enteros correctamente mostrado en la pregunta PM1. Sin embargo, operan con reglas sintácticas sin sentido y cuando analizan preguntas del tipo “¿cómo deben ser los sumandos para que la suma sea mayor, menor o igual a cero? (PM2A), sólo 3 de los 59 alumnos contesta correctamente, apareciendo entre las producciones el evitamiento de los negativos, el predominio de la negatividad, el tomar como referencia los números cero y uno expresándolos en diferentes SMS.

Los docentes contestan correctamente las operaciones de suma y resta de enteros (PM1), y sólo el docente DP2 contesta correctamente las preguntas de análisis (PM2A). El docente que presentó un nivel de competencia formal, muestra en sus producciones diferentes medios de organización que le apoyan para realizar sus conjeturas y manifestar sus respuestas (Salinas, Gallardo, Mendoza, 2015).

Se encontró un vacío en los programas de Matemáticas de secundaria y de preparatoria. Se omite el estudio de una ecuación con dos incógnitas que involucra un número infinito de soluciones (PM3A). Las producciones de los alumnos son de tres tipos, las aritméticas, las algebraicas y las aritmético-algebraicas. En las aritméticas, 35 dan solución única con Naturales y 7 dan multiplicidad de soluciones con Naturales. En las algebraicas, unos despejan por hábito una variable en función de otra, mientras que otros tienen dificultades en la manipulación de las incógnitas. Y en las numérico-algebraicas pasan de lo algebraico a lo numérico, sin llegar a concluir en la solución.

En la pregunta PM3, dos de los docentes contestan con Naturales, el docente DTS se percata que hay una infinidad de valores que satisfacen la igualdad, explicándolo en lenguaje natural, sin explicitar matemáticamente la solución. El docente DP2 contesta correctamente utilizando medios de organización y mediante una expresión algebraica.

Al comparar los resultados de las preguntas PM1, PM2A y PM3A, se revela en los alumnos no tener un nivel de competencia formal en Matemáticas. Ya que tener un nivel de competencia formal implica además de operar correctamente, actividades del pensamiento de orden superior, en este caso el analizar o dar diversas soluciones en una situación. Se manifiesta como un nivel de competencia Matemática formal implica el uso de diversos medios de organización como el presentado por el docente DP2.

En la pregunta PM4D se observa que la competencia Matemática influye en la competencia Química cuando los alumnos plantean una reacción Química (ecuación Química) con generalizaciones matemáticas. Para que sean correctos los planteamientos, los sujetos deben diferenciar la validez en Química de las generalizaciones Matemáticas, relacionando los significados de cada uno de los componentes que conforman ambos sistemas, como son las letras que representan reactivos y productos, los signos “+”, “=” o “→”. Se revela que la competencia Química depende de los entrecruzamientos que se dan en los SMS y los SQS, y que los sujetos tengan conciencia de sus analogías y diferencias.

Se encontraron algunos conceptos Matemáticos implicados en los SQS como son: los números Naturales, los números Enteros, los Simétricos, las Ecuaciones y los Sistemas de Ecuaciones. Se visualiza la necesidad de realizar sustituciones numéricas con naturales y con enteros.

En la entrevista se advierte cómo el docente hasta que puede diferenciar los naturales de los enteros, arriba a conceptos como valencia y número de oxidación, diferenciándolos. Tanto alumnos como docentes confunden los conceptos de valencia y número de oxidación, revelando que la falta del conocimiento y diferenciación de los enteros con los naturales les impide adquirir conceptos químicos. También se observa que los sujetos que generalizan matemáticamente, pueden realizar generalizaciones correctas en química. Los sujetos que diferencian el uso de los signos en ambos sistemas son más competentes tanto en Química como en Matemáticas.

Otras tendencias Matemáticas encontradas en los sujetos de estudio son: cerrar expresiones abiertas, realizar sustituciones numéricas para corroborar sus resultados algebraicos, operar sin sentido y despejar sin sentido.

En las producciones de los alumnos en la parte de Química es reducido el número de alumnos que contestan correctamente con un SQS formal, mientras que los docentes presentan SQS formales correctos e incorrectos en sus representaciones. Aparece confusión entre átomo con ión, un modelo fusionado incorrecto de un átomo, de un compuesto, de una molécula, así como de los diferentes significados que pueden tener los subíndices en la fórmula química dependiendo del punto de vista macroscópico y microscópico de la materia.

Una competencia formal en química implica el conocimiento de diferentes SQS que representen un átomo, un compuesto, una molécula así como en Matemáticas el uso de diferentes medios de organización. En general podemos decir que los sujetos de estudio mostraron una mejor competencia Matemática que Química.

Se observó en las producciones de los sujetos que el nivel de competencia matemática influye en el nivel de competencia química, porque algunos alumnos que contestaron correctamente en Matemáticas, contestaron correctamente en Química, aunque revelaron un nivel de competencia básico tanto en Matemáticas como en Química. En el docente DP2 presentó un nivel de competencia formal en Matemáticas y en Química. Se observa que cuando el sujeto puede realizar generalizaciones Matemáticas, también puede realizar generalizaciones Químicas.

En la entrevista se mostró que el docente cuando hace la reflexión acerca del número de átomos, del número de moléculas, de los números de oxidación, de los subíndices, del uso de los paréntesis, del balanceo de la reacción, está arribando a la comprensión de conceptos básicos de la Química mediante conceptos Matemáticos. Se descubre como la competencia Matemática influye en la competencia Química.

El docente DP2 es el único de los sujetos de estudio que balancea la ecuación de óxido-reducción correctamente implicando un pensamiento de orden superior. Éste docente tiene un nivel de competencia formal en Matemáticas y un nivel de competencia formal en Química. Por ello

podemos concluir que a mayor nivel de competencia Matemática, hay mayor nivel de competencia Química.

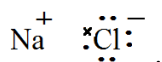
En cuanto a la segunda pregunta de investigación:

- ¿Cuáles son las analogías y diferencias en un SMS y un SQS en alumnos de educación media superior, y en docentes de educación media superior y de educación media básica?

A continuación se presentan las conclusiones concernientes a dicha pregunta de investigación:

Debemos comenzar por establecer que, de acuerdo a esta investigación y lo encontrado por Salinas, et al. (2015) **“El lenguaje Químico no es Matemático”**. Cada ciencia tiene su lenguaje específico y aunque la Química utiliza como herramienta a las Matemáticas, la primera tiene su interpretación y uso particular de signos, operaciones y representaciones.

El punto y la cruz se utilizan en Matemáticas y en Química como el producto (tabla 65), pero además en Química existen otros usos. En el modelo de Böhr, representan a los electrones ubicados en las órbitas atómicas, en el modelo de Lewis significan electrones que rodean al símbolo químico, se pueden combinar los puntos y las cruces, como en el cloruro de sodio



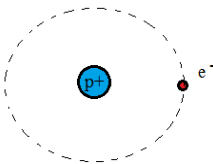
Signo	SMS	SQS
Punto “.”	Expresa multiplicación $5 \cdot 3 = 15$	Expresa multiplicación: $5 \cdot 3 = 15$
		Enlace coordinado en $\text{Cu SO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$
		Electrones en el modelo de Böhr 
		Electrones en el modelo de Lewis $\text{Na}^+ \quad \text{:}\ddot{\text{Cl}}\text{:}^-$
Cruz “×”	Expresa multiplicación $5 \times 3 = 15$	Expresa multiplicación $5 \times 3 = 15$
		Electrones en el modelo de Lewis $\text{Na}^+ \quad \text{:}\ddot{\text{Cl}}\text{:}^-$
Dos puntos “:”	Como división, o como relación entre dos cantidades.	Como relación entre dos cantidades en la ley de las proporciones múltiples.
		Como un par de electrones compartidos que forman un enlace. H:H

Tabla 65. Usos del punto, la cruz y dos puntos en los SMS y SQS

Los signos de “+” y de “-” son utilizados en Química como en Matemáticas pero adicionalmente llevan a otros significados (tabla 66).

Signo	SMS	SQS
“+”	Coeficiente implícito de uno positivo en una expresión algebraica $x + y = 6$	Como coeficiente implícito de uno positivo $H_2 + F_2 = 2HF$ $+F_2 = 1F_2$
		Como superíndice implícito de uno positivo H^+ ión Hidrógeno
	Signo binario (adición) $5+3$	Signo binario (adición) $3KCl = KCl + KCl + KCl$
	Signo unario en un número positivo $+2$ como dos positivo	Signo unario en un número positivo y como el número de protones $+2$ como dos positivo
“-”	Coeficiente implícito de uno negativo en una expresión algebraica $x - y = 6$	Como coeficiente implícito de uno negativo $k + f - e - f = 0$ <i>Reactivos - Productos = 0</i>
		Como superíndice implícito de uno negativo F^- ión Fluoruro
	Signo binario (sustracción) $5 - 3$	Signo binario (sustracción) <i>Ceder electrones: restar negativos</i> $0 - 1e^- = +1$
	Signo unario -2 como dos negativo	Signo unario como resultado de ganar electrones $0 + 1e^- = -1$
	Operador	Como enlace entre dos átomos, en un diagrama de rayas. H-H (molécula de hidrógeno)
	Para expresar el simétrico de “a” como “-a”	Para expresar el par dialéctico de la carga del protón (+), la carga del electrón (-).
“±”	Como las dos soluciones de una ecuación cuadrática	Para expresar neutralidad de la carga de un neutrón

Tabla 66. Uso de los signos “+” y “-” en los SMS y los SQS.

La ubicación de los números en una expresión Matemática o Química, implica diferentes significados y usos, como es el caso de los coeficientes, los superíndices y los subíndices. En la tabla 67 se muestran los diferentes usos encontrados para estos números en función de su localización.

Posición del número	SMS	SQS	
Coeficiente	El coeficiente implica estructuras isomorfas $2xy = 2 \cdot xy$ $2xy = xy + xy$	El coeficiente implica dos estructuras isomorfas $2 KCl = 2 \cdot KCl = KCl + KCl$	
		El número de moles	El número de moléculas
		Los coeficientes estequiométricos en una reacción química implican la ley de la conservación de la materia.	
		En la configuración electrónica del Hidrógeno $1s^1$, el coeficiente representa el número cuántico principal, relacionado con el número de niveles de energía. Es el primer nivel energético. No puede tomar cualquier valor y son números Naturales.	
Superíndice	Exponente Positivos: $x^2 = x \cdot x$ Negativos: $x^{-2} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x \cdot x}$ Cero: $x^0 = 1$	Número de Oxidación: son números Enteros	Positivo: H^{+1} , indica que la especie queda cargada positivamente como resultado de haber perdido un electrón. Negativo: F^{-1} , revela que la especie queda cargada negativamente como resultado de haber ganado un electrón. Cero: $Ag^0, [AgCl]^0$, muestra que la especie es eléctricamente neutra.
		En $1s^1$ el superíndice representa el número de electrones que caben en ese orbital "s" y está restringido al modelo cuántico. Para el orbital "s" son 2 electrones como máximo y se usan números Naturales.	
		En H_1^1 el superíndice representa el número atómico, es decir, el número de protones y es un número Natural.	
		En p^+ y e^- el superíndice representa la carga de esa partícula y no el número de oxidación.	
Subíndice	x_1 es diferente de x_2 como el número de soluciones que puede tener una ecuación de segundo grado	En una fórmula química representan	El número de átomos desde el punto de vista microscópico. En $CuSO_4$ hay 4 átomos de oxígeno.
			El número de moles de átomos desde el punto de vista macroscópico. En $CuSO_4$ hay 4 moles de átomos de oxígeno.
		Indican la relación de átomos existentes en un compuesto. En $CuSO_4$ los subíndices del Cu y del S son 1 y están implícitos, indicando la relación de la combinación 1 átomo de Cu con 1 átomo de S con 4 átomos de O.	
		En H_1^1 el subíndice representa la masa atómica, es decir, la suma de la masa de los protones y neutrones.	

Tabla 67. Uso de los coeficientes, superíndices y subíndices en SMS y SQS.

El uso del paréntesis en ambos sistemas se encuentra en la tabla 68.

Signo	SMS	SQS	
“()”	Notación completa de adición y sustracción de Enteros $(+5) - (-5)$	En $\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$	Para agrupar los iones fosfatos como PO_4^{3-} .
	Como operador multiplicativo $4(-2)$		Para asociar los iones fosfato con los de Calcio indicando un enlace.
	Para expresar el simétrico de: $-(a - b)$		Uso de carácter sintáctico para separar los subíndices 4 del oxígeno con 2 de los iones fosfato.
	Al sustituir valores numéricos en expresiones algebraicas		Uso de carácter multiplicativo. Se multiplica el coeficiente por el número de átomos que se encuentran dentro del paréntesis, por el subíndice que se encuentra fuera del paréntesis para obtener el número de átomos totales de cada elemento.

Tabla 68. Usos de paréntesis en SMS y SQS.

Se encuentra para el “ Δ ” el uso en Matemáticas como diferencia, un “delta” de Temperaturas entre la Temperatura final y la Temperatura inicial, es decir: $\Delta T = T_{final} - T_{inicial}$. Mientras que en Química se usa para representar electrones con el modelo de Lewis $\begin{array}{c} \bullet\bullet \\ \bullet\text{Na}\bullet \\ \bullet\bullet \end{array} \begin{array}{c} \Delta\Delta \\ \Delta\text{Cl}\Delta \\ \Delta\Delta \end{array}$ y para representar la energía involucrada en una reacción química.

En la tabla 69 se muestran los usos del signo igual en ambos sistemas. El signo igual y la flecha son utilizados en una reacción química en ocasiones como sinónimos.

Signo	SMS	SQS
“=”	Unidireccional, lectura de izquierda a derecha $(+2) + (-10) =$	$\text{NaCl} = \text{Na}^+ + \text{Cl}^-$ El cloruro de sodio se disuelve en agua formando iones de sodio y de cloruro
	Unidireccional, lectura de izquierda a derecha: $a + b - c =$	
	Principio de Bidireccionalidad como principio de equivalencia o como equivalencia numérica: $14 + \underline{3} = 13 + 4$	Disolución \rightarrow $\text{NaCl} = \text{Na}^+ + \text{Cl}^-$ \leftarrow Evaporación
	Bidireccional, como equivalencia algebraica $5a + 2 = 2a + 8$	Equilibrio químico
	Signo de equivalencia	Doble enlace en la molécula de oxígeno. $\text{O} = \text{O}$

Tabla 69. Uso del signo “=” en los SMS y los SQS.

Los significados de la flecha encontrados en reacciones químicas son:

- Una flecha unidireccional con lectura de izquierda a derecha: reactivos que dan productos
- Doble flecha bidireccional con lecturas de izquierda a derecha y viceversa: sentido de equilibrio químico.

Las letras en Matemáticas significan números, números generales, constantes u operadores, pero en Química sólo algunas letras corresponden a los símbolos químicos o a la representación de las partículas atómicas (tabla 70). En la pregunta PQ1 aparece el uso de estas letras para representar al átomo de hidrógeno H. Además en química se encontraron usos específicos para las letras, pueden representar además de los elementos, los coeficientes estequiométricos, las configuraciones electrónicas, las incógnitas en las ecuaciones químicas matematizadas.

Signo	SMS	SQS
Letras	a, b, c son parámetros de una ecuaciones como $ax^2 + bx + c = 0$	En $aA + bB = cC + dD$ las letras minúsculas representan los coeficientes estequiométricos que hacen que la reacción cumpla con el balance de materia
		En $A + B = C$, A, B, C son elementos o compuestos en una reacción química
	x, y, z son incógnitas T como una etiqueta de la temperatura	En la generalización A_xB_y , "x" es el número de átomos del elemento A y "y" es el número de átomos del elemento B en ese compuesto
	Números especiales como π, e	"s", "p", "d" y "f" son orbitales e^- (electrones) p^+ (protones) N ó n_{\pm} (neutrones)

Tabla 70. Uso de las letras como signos en SMS y SQS.

La forma en la que se conforman las letras tiene diferentes significados en los SMS y los SQS. En Matemáticas, xy es el producto de dos números cualesquiera, se lee siempre de izquierda a derecha, y se anotan respetando el orden del abecedario. En Química HF es un compuesto formado por la unión de dos elementos por medio de un enlace, se lee dependiendo del tipo de compuesto, en este caso es Ácido fluorhídrico. Sin embargo para las sales como NaCl se lee de derecha a izquierda como cloruro de sodio.

Podemos concluir que un sujeto competente, ya sea estudiante o docente debe diferenciar y utilizar los signos adecuadamente en cada sistema, arribando a los conceptos. Como el diferenciar entre

valencia y el número de oxidación, diferenciando los naturales de los enteros. Es importante que el docente durante la enseñanza remarque que el uso de los signos puede ser más amplio en otros contenidos para no sesgar el pensamiento.

En cuanto a la tercera pregunta de investigación:

- *¿Cómo se entrecruzan los modelos de enseñanza de la matemática y de la química para la construcción de conceptos en un SQS?*

Aparece el modelo de la recta numérica como cantidades dirigidas tanto en Matemáticas como en Química. El modelo Chino como modelo de equilibración parece ser natural en la enseñanza de la Química, ya que el cero representa la neutralidad entre lo positivo y lo negativo, análogo a la naturaleza dialéctica de la carga entre un electrón y un protón.

La recta numérica es usada en Química para representar el proceso de oxidación y reducción de las especies químicas que participan en una reacción. El proceso de oxidación es representado en una semi-reacción. Cuando un átomo pierde electrones se dice que se oxida, por ello el recorrido de la cantidad dirigida en la recta numérica es de izquierda a derecha, aumentando su número de oxidación. De la misma forma, una sustancia que se reduce gana electrones desplazándose en la recta numérica de derecha a izquierda, disminuyendo su número de oxidación representándose en la semi-reacción de reducción.

Los entrecruzamientos se presentan cuando los docentes muestran las semi-reacciones pasando de SQS a SMS y viceversa (Salinas, Gallardo y Mendoza, 2015).

Se advierte que sumar no es igual a restar en química, ya que ceder un electrón no es equivalente a ganar un protón. La primera es una reacción química y la segunda es una reacción nuclear. Es por ello que en la primera enseñanza de los enteros es conveniente usar el modelo chino, que permite sustraer números negativos como quitar y posteriormente los estudiantes lleguen a estructuras equivalentes construyendo sus reglas sintácticas.

Se puede realizar un estudio más profundo del significado de los signos, porque se reconoce que aún existe el uso de los signos en Matemáticas con otros significados, por ejemplo, el uso del punto para expresar producto punto, el uso de la cruz como el producto cruz, el uso de las letras

mayúsculas como matrices, el número “*e*” como una constante, el signo de identidad “ \equiv ” en Matemáticas es diferente al triple enlace en Química, los paréntesis como pares ordenados, matrices, vectores, intervalos de funciones, entre otros. Y no aparecen en nuestro estudio porque estos contenidos son desarrollados hasta niveles universitarios.

Algunos hallazgos encontrados en esta investigación.

- *El lenguaje Químico no es Matemático.*
- La Química utiliza como herramienta a las Matemáticas con una interpretación y uso particular de signos, operaciones y representaciones.
- Existen similitudes y diferencias en los SMS y los SQS, que el sujeto competente en ambas ciencias los diferencia, los complementa y los relaciona para dar sentido al problema de estudio en cuestión, en este caso el balanceo por el método de óxido reducción, utilizando ecuaciones que involucra la operatividad de enteros.
- La Competencia Matemática puede ayudar a adquirir la Competencia Química, a través de los entrecruzamientos de ambas ciencias. El sujeto competente en matemáticas puede arribar más fácilmente a comprender conceptos de la química, como átomo, molécula, ión, compuesto, enlace, reacción química, procesos de oxidación y reducción, valencia y número de oxidación, y la conservación de la materia en procesos químicos.
- Se puede enseñar matemáticas a partir de contextos químicos, se puede dar sentido a las operaciones de adición y sustracción de enteros a través de los conceptos químicos como el de la determinación del número de oxidación en compuestos y el balanceo por el método de óxido-reducción.
- *Sumar no es igual a restar* en química, ya que un átomo que cede 1 electrón, queda con una carga positiva y se representa este proceso como; $0 - (-1) = +1$, es decir, un átomo con carga cero, cede (sustracción) una carga negativa (-1) y queda cargado como uno positivo (+1), y aunque la expresión $0 + 1 = +1$ es sintácticamente equivalente, no representa el proceso de perder una carga negativa, al contrario, generaría un error de concepto en química porque representaría a un átomo con carga cero que gana una carga positiva (un protón) lo cual correspondería a una reacción nuclear, no a una reacción química.

- El Modelo Chino toma sentido de forma natural en un contexto de la química, en la determinación de los números de oxidación de los elementos en un compuesto.
- La sustracción de enteros como *quitar* tiene sentido en el Modelo Chino.
- La recta numérica puede ayudar a significar tanto las operaciones de enteros, como los procesos de óxido-reducción en las reacciones.
- La sustracción como completar o como diferencia tiene sentido en la Recta Numérica.
- Aunque le es fácil operar con la ley de los signos al entrevistado, éste procedimiento no le da sentido a las operaciones.
- Aparecen formas equivalentes intermedias del Modelo Chino hasta arribar al concepto del simétrico. (episodio IV)

$$\begin{array}{c} \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \end{array} \implies -11 + 0 = -11 \implies -11 + 1 - 1 = -11 \implies -11 + a - a = -11 \implies -11 + (a) + (-a) = -11$$

- Ante la posible pregunta del por qué se equilibran las cantidades positivas y negativas en el Modelo Chino para formar ceros, además de la respuesta filosófica, la neutralidad eléctrica de una carga positiva y una carga negativa, parece representar una situación concreta y comprensible porque este fenómeno puede observarse físicamente y reproducirse experimentalmente.

Algunas aportaciones de esta investigación son:

Se revela la importancia de recurrir al marco teórico de los MTL en una investigación en Matemática Educativa y en Química, ya que considera los modelos de enseñanza fundamentados en Química por Chamizo (2004) y relacionados con la componente de comunicación por Justi (2002). En ambas disciplinas se estudia la competencia formal de los sujetos mediante los procesos cognitivos. Se observó que los MTL son un marco adhoc en investigaciones de este tipo.

Se muestra la necesidad de la enseñanza multidisciplinaria de las Matemáticas con la Química. Por un lado, un contexto científico ayuda a desarrollar un conocimiento Matemático y a su vez, un concepto Matemático incompleto influye en la conceptualización incorrecta de conceptos Químicos. Por ello, se infiere que existe una retroalimentación cuando un sujeto

pasa de un sistema a otro, arribando a niveles de mayor abstracción tanto en Matemáticas como en Química.

Con base en los resultados de esta investigación, en la enseñanza de las Matemáticas se debe evitar el uso de reglas sintácticas sin sentido, así como el recurrir a estructuras sintácticas equivalentes durante la primera enseñanza de los enteros. El aprendiz debe significar las operaciones, posteriormente construir las reglas sintácticas y entonces podrá recurrir al uso de estructuras sintácticas equivalentes, para evitar errores conceptuales al aprender otras ciencias.

En los programas de estudio de Matemáticas en educación media básica y media superior se considera necesario incluir en los contenidos una ecuación con múltiples soluciones, porque en la realidad existen diversas soluciones para un mismo problema.

En cuanto a los signos utilizados en Matemáticas y en Química, los docentes durante la enseñanza deben poner énfasis en sus diferentes usos y realizar las aclaraciones pertinentes debido a la polisemia de estos en los SMS y en otros sistemas, en particular en SQS. Por ello es indispensable que un docente reconozca las analogías y diferencias de los signos presentadas en ambos sistemas.

Este estudio revela que un contexto Químico puede ser favorable para la enseñanza de las Matemáticas porque: 1) la naturaleza de los enteros y la naturaleza de la materia tienen el par dialéctico de lo positivo y lo negativo, 2) los recursos usados por los estudiantes y docentes en Química son generalizaciones de las reacciones y de los compuestos, 3) la nomenclatura química y las reacciones químicas tienen una Matemática implícita representada con ecuaciones, 4) el modelo Chino y el modelo de Böhr son análogos, 5) se usa el modelo de la recta numérica como referencia para identificar las especies que se oxidan y las que se reducen en una reacción. Tomando en consideración los aspectos anteriores, se propone una investigación futura que contemple los resultados de esta investigación para desarrollar una propuesta didáctica de la enseñanza de las Matemáticas a través de contextos científicos desde la perspectiva de la Educación Matemática Realista.

Referencias Bibliográficas

- Baldor, A. (1998). *Álgebra*. México: Publicaciones cultural, S.A de C.V.
- Barker, V. (2000) Beyond appearances: Students' misconceptions about chemical ideas. *Royal Society of Chemistry*, 1-79.
- Barnet, R., Ziegler, M. & Byleen, K. (2000). *Álgebra*. México: McGraw Hill.
- Barthes, R. (1971). *Elementos de semiología*. Madrid: Alberto Corazón.
- Beauchot, M. (2004). *La semiótica. Teorías del signo y el lenguaje en la historia*. México: FCE.
- Benson, S. (2012). *Cálculos Químicos. Una introducción al uso de las matemáticas en la química*. México: Limusa.
- Bishop, J., Lamb, L., Philipp, R., Whitacre, I., Schappelle, B. y Lewis, L. (2014). Obstacles and Affordances for Integer Reasoning: An analysis of Children's Thinking and the History of Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education* 45, nº 1: 19-61.
- Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa*. Barcelona España: CEAC.
- Bofferding, L. (2014). Negative Integer Understanding: Characterizing First Grader's Mental Models. *Journal for Research in Mathematics Education*. 45, nº 2: 194-245.
- Bravo, A., Rincón, C. & Rincón, H. (2012). *Álgebra superior*. México, D.F.: Facultad de Ciencias, UNAM.
- Bruno, A. y Martinón, A. (1996). Números negativos, sumar=restar. *Uno* 10: 123-132.
- Cárdenas, A. (2006). Dificultades de aprendizaje en Química: caracterización y búsqueda de alternativas para superarlas. *Ciência & Educação* 12, nº 3: 333-346.
- Castillo, L. (1992). *La co-existencia de dos lenguajes simbólicos : el lenguaje algebraico y el lenguaje químico (un estudio experimental)*. Mexico: Tesis de maestría CINVESTAV.
- Castillo, L. y Gallardo, A. (1996). «Pragmática de los lenguajes químico y algebraico en el ámbito escolar.» *Educación Matemática* 8, nº 2: 41-56.
- Chamizo, J.A., Nieto, E. y Sosa, P.(2004). “La enseñanza de la química en México. III. Estudio transversal de conocimientos de química desde secundaria hasta licenciatura”. *Educación Química*, nº 15: 108-112.
- Chamizo, A. (2006). Los modelos de la química. *Educación química* 17, nº 4: 476-482.
- Chang, R. y Goldsby, A. (2013). *Química*. México: Mc Graw Hill.

- Cid, E., y P. Bolea. (2007). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. *II Congreso Internacional sobre Teoría Antropológica de lo Didáctico UZES.*, 1-16.
- Córdova, J. (1995). *Esquemas de Resolución de Problemas de Química General*. México: Tesis Doctoral. CINVESTAV.
- Courant, R. & Robbins, H. (2014). *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales*. Traducido por M. Manrique. Mexico, D.F.: Fondo de Cultura Económica.
- Cruz, D., Chamizo, J. y Garritz, A. (1986). *Estructura atómica. Un enfoque químico*. Delaware, E.U.A.: Addison-Wesley Iberoamericana, S. A.
- Filloy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias* 26, n° 3: 327-342.
- Filloy, E., Rojano, T. y Solares, A. (2010). Problems Dealing With Unknown Quantities and Two Different Levels of Representing Unknowns. *Journal for Research in Mathematics Education* 41, n° 1: 55-80.
- Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México, D. F.: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Furió-Mas, C., & Domínguez-Sales, C. (2007). Problemas históricos y dificultades de los estudiantes en la conceptualización de sustancia y compuesto químico. *Enseñanza de las Ciencias* 25, n° 2: 241-258.
- Galagovsky, L. (2004). Del aprendizaje significativo al aprendizaje sustentable. Parte 2: Derivaciones comunicacionales y didácticas. *Enseñanza de las Ciencias* 22, n° 3: 349-365.
- Galdós, L. (2007). *Matemáticas Galdós*. Madrid-España: Cultural, S. A.
- Gallardo, A. (1994). *El Estatus de los Números Negativos en la Resolución de Ecuaciones Algebraicas*.
- Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. Editado por Kluwer Academic Publishers. *Educational Studies in Mathematics* 49: 171-192.
- Gallardo, A. y Basurto, E. (2009). Formas semánticas equivalentes en problemas del pasado y del presente. *Educación Matemática* 21, n° 3 Diciembre: 67-94.
- Gallardo, A. y Hernández, A. (2006). The zero and the negativity among secondary school students. Editado por Charles University. *Proceedings of the PME* 3: 153-160.

- Gallegos, L. (2002). *Comparación entre la evolución de los conceptos históricos y las ideas de los estudiantes: el modelo de la estructura de la materia. Disertación doctoral, Facultad de Filosofía y Letras, . UNAM. México.*
- Glaeser, G. (1981). Epistemologie des nombres relatifs.» *Recherches en Didactique des Mathematiques* 2, n° 3: 303-346.
- González, J., Iriarte, M., Jimeno, M., Ortiz, A., Ortiz, A., Sanz, E. y Vargas-Manchuca, I.(1990). *Números enteros*. Madrid. España.: Síntesis.
- Justi, R., Gilbert, J. (2002). Models and modelling in Chemical Education. Editado por Kluwer. *Chemical Education: Towards Research-based Practice*.
- Lizcano, E. (1993). *El imaginario colectivo. La construcción social del número y el infinito*. Barcelona, España.: Paidós.
- Macgregor, M. & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation. Editado por Kluwer Academic Publishers. *Educational Studies in Mathematics* 33: 1-19.
- Matus, L., Benarroch, A. y Nappa, N. (2011). La modelización del enlace químico en libros de texto de distintos niveles educativos. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias* 10, n° 1: 178-201.
- Méndez, D., Gallardo, A. y Bruno, A. (2014). Significado que atribuyen al cero futuros docentes de primaria. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*. 11.
- Mestrallet Guerre, R. (1980). *Communication, Linguistique et Sémiologie. Contribution à l'étude de la sémiologie. Études sémiologique des systèmes de signes de la chimie (Doctoral dissertation, Thesis), Faculty of Letters, Universidad Autònoma de Barcelon*.
- Molina, M. (2006). Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria. *Tesis doctoral Granada*.
- Morris, C. (1958). *Fundamentos de la teoría de los signos*. México: UNAM.
- Mounin, G. (1981). *Una semiología del sistema de signos de la química*. México: Coordinación de humanidades, UNAM.
- Peirce, C. (1974). *La ciencia de la semiótica*. Buenos Aires: Nueva Visión.
- Perales, F.J. y J. Jiménez. (2004). Las ilustraciones en los libros de Física y Química de la ESO. *Revista Educación Abierta. Aspectos didácticos de Física y Química* 12. I.C.E de la Universidad de Zaragoza, 11-65.
- Pimentel, G., y Spratley, R. (1971). *Understanding Chemistry*. San Francisco: Holday Day.

- Pozo, J., Gómez, M. Limón, M. y Sanz, A. (1991). *Procesos cognitivos en la comprensión de la ciencia: las ideas de los adolescentes sobre la química*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Ramírez, M. y Rodríguez, P. (2011). EL signo igual y su significado en los libros de texto de primer ciclo de educación primaria. Editado por Gabriel Fernández García, Lorenzo Blanco Nieto y Mercedes Palarea Media. Margarita Marín Rodríguez. *Investigación en educación matemática XV. Universidad de Castilla-La Mancha*, 503-512.
- Salinas, G., Gallardo, A. y Mendoza, E. (2015). Entrecruzamiento de los sistemas matemáticos de signos y los sistemas químicos de signos. Editado por M. Molina y M. Planas C. Fernández. *Investigación en Educación Matemática XIX*, 491-501.
- Scerri, E. (2013). *La tabla periódica: una breve introducción*. Madrid: Alianza Editorial, S. A.
- Schubring, G. (1986). Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs. *Petit X.*, nº 12: 5-32.
- SEP. *Programa de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Secundaria. Ciencias*. México.
- SEP. *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Secundaria. Matemáticas*. México, D. F.
- Suckling, C. S. (1978). *Chemistry through models*. Cambridge: Cambridge University Press.
- UNAM, Matemáticas. (1996). *Escuela Nacional Preparatoria. Programa de estudios de la asignatura de Matemáticas IV*.
- UNAM, Química. (1996). *Programa de estudios de la asignatura de Química III. Escuela Nacional Preparatoria.*.
- Wheeler, D. (1996). The transition from arithmetic to algebra in problem solving. En *Approaches to Algebra*, editado por C. Kieran y L. Lee N. Berdnarz, 147-149. Kluwer Academic Publishers.

