

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

**Análisis de usos del conocimiento trigonométrico en el
discurso escolar de Ingeniería Mecatrónica**

Tesis que presenta:

Blanca Natalia Serrano Quevedo

Para obtener el grado de:

Maestra en Ciencias

en la especialidad de

Matemática Educativa

Directora de la Tesis:

Dra. Gisela Montiel Espinosa

Dedicatoria

*A Rosa María Quevedo Córdoba,
por sus consejos y apoyo incondicional durante toda mi formación académica.*

*A Miguel Ángel Serrano del Valle †,
quien me dio la fortaleza para luchar contra cualquier obstáculo.*

*A Yahir Uriel Guzmán Pérez,
por compartir conmigo esa pasión por las matemáticas.*

Agradecimientos

*Agradezco al
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT)
por su apoyo para esta investigación
realizada durante mis estudios de maestría.
Blanca Natalia Serrano Quevedo- CVU 776027*

Agradecimientos

Un sincero agradecimiento al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN) y a todo el personal académico y administrativo que me apoyaron durante mi formación.

En particular, a la Doctora Gisela Montiel Espinosa, quien me ha apoyado en cada decisión y me ha compartido su visión como investigadora. Gracias.

Contenido

Resumen	3
Abstract.....	4
Capítulo 1. Introducción.....	5
1.1 Problemática	5
1.2 Marco Bibliográfico	6
1.2.1 El conocimiento de los contenidos matemáticos.....	6
1.2.2 El conocimiento matemático puesto en uso	9
1.2.3 Matemáticas en el Contexto de las Ciencias y Ciencias en Contexto	9
1.2.4 Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME).....	11
1.3 Objeto de estudio	15
1.3.1 Hipótesis	15
1.3.2 Objetivo de investigación	16
1.3.3 Preguntas de investigación	16
Capítulo 2. Fundamento Teórico.....	17
2.1 Análisis socioepistemológico de lo trigonométrico	17
2.1.1 El discurso trigonométrico escolar	17
2.1.2 La construcción del conocimiento trigonométrico	18
2.1.3 De los objetos a las prácticas.....	19
2.2 El uso del conocimiento matemático: sus funcionamientos y formas.....	20
Capítulo 3. Método.....	22
3.1 El Plan de Estudios de la carrera de Ingeniería Mecatrónica de la UNAM	22
3.2 Acerca del Análisis de Contenido Cualitativo.....	23
3.2.1 Un Análisis de Contenido Cualitativo para el Plan de Estudios de Ingeniería Mecatrónica	24

Capítulo 4. Análisis Contextual.....	26
4.1 El Plan de Estudios: una parte del currículum.....	26
4.2 El diseño de un Plan de Estudios para carreras de Ingeniería	26
4.2.1 Propuestas para la elaboración del Plan de Estudios.....	26
4.2.2 Propuesta de Díaz-Barriga (1986).....	27
4.2.3 Propuesta de Grayson (1979)	28
4.2.4 Propuesta de Coll (1991).....	29
4.2.5 Propuestas actuales	32
4.3. El caso del Plan de Estudios de Ingeniería Mecatrónica	33
4.3.1 Los cambios del Mapa Curricular del 2010 reflejados en el Mapa Curricular del 2016	35
Capítulo 5. Análisis textual	36
5.1 Establecer la pregunta de investigación.....	36
5.2 Selección del material.....	36
5.3 Construcción del marco de codificación	38
5.3.1 Selección de datos	38
5.3.2 Estructuración del marco de codificación	54
5.4. División del material dentro de unidades de codificación.....	129
Capítulo 6. Análisis global y conclusiones.....	132
6.1 Análisis Global	132
6.2 Conclusiones.....	133
Trabajo futuro	135
Referencias	136
Anexo 1	143
Anexo 2	148

Resumen

La investigación se enmarca en la *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa* y es con base en ella que analizamos una expresión del *discurso Matemático Escolar* en términos curriculares a lo largo del Nivel Superior. En específico, revisamos el Plan de Estudios, así como los Programas de Estudios pertenecientes a la Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica ofertada en la Universidad Nacional Autónoma de México, con la intención de hacer una revisión y análisis de *usos* de las herramientas *razón trigonométrica*, *función trigonométrica* y *serie trigonométrica* (como partes del conocimiento trigonométrico) dentro de los libros de texto indicados en los Programas de Estudios.

Describimos una trayectoria de *usos* del conocimiento trigonométrico de la carrera de Ingeniería Mecatrónica con la intención de identificar una posible desarticulación entre estos.

Abstract

The research is part of the *Socio-epistemological Theory of Mathematics Education*. We based on this theory to analyze an expression of *school mathematical discourse* in curricular terms along the Bachelor's degree. In specific, we have reviewed the content of the Academic Program write of the Mechatronics Engineering degree, write given by The Universidad Nacional Autónoma de México, with the intention of reviewing and analyzing the *uses* of three trigonometric tools; *trigonometric ratio*, *trigonometric function* and *trigonometric series* (as parts of trigonometric knowledge) considering the textbooks indicated in the Study Program.

We have described a trajectory of *uses* of the trigonometric knowledge of the Mechatronics Engineering career with the intention of identifying a possible disarticulation between them.

Capítulo 1. Introducción

1.1 Problemática

La elaboración de los Planes de Estudios requiere de la participación de diferentes disciplinas. En particular, el diseño de los Planes y Programas de las carreras de Ingeniería ha considerado la inclusión de las matemáticas para la formación de un ingeniero. Así bien, estas son consideradas dentro del bloque denominado por el Consejo de Acreditación para la Enseñanza de la Ingeniería (CACEI, 2017) como Ciencias Básicas. Este organismo sugiere la distribución de las asignaturas a cursar a partir de seis bloques. El primero es Ciencias Básicas, en el cual, se incluyen asignaturas propias de la matemática, la física o la química.

Es importante notar que, la organización que siguen los contenidos en los Planes de Estudios para Ingeniería debe seguir las metas y objetivos planteados en el Perfil de Egreso. Sin embargo, estos se han impartido con un fin en sí mismos y no como los que persiguen los fines de la carrera. (Grayson, 1979)

En particular, las asignaturas de matemáticas no solo deben tener un fin en sí mismas, sino que deben fungir como una herramienta de uso para el ingeniero. (Camarena, 2009, 2013, 2015)

Por otro lado, la distribución de los cursos en el Plan de Estudios se ofrece de manera atomizada y linealizada. Siguen una secuencia que va de Ciencias Básicas a Materias Profesionales (figura 1.1). Con ello, los cursos dados del área de Ciencias Básicas serán meramente una sucesión de temas aislados y específicos. Los cuales, en lugar de llevar a los estudiantes a la práctica de la Ingeniería, lo llenan con herramientas conceptuales que él deberá integrar y dar sentido en su profesión. (Herrera, 1990)

En consecuencia, la atomización de estas asignaturas en el Plan de Estudios (como contenidos aislados) pone en evidencia una ruptura sobre la enseñanza de las matemáticas dentro de la Ingeniería puesto que, en el currículo se propone una formación integral, de tal manera que las matemáticas se puedan articular. “Pero en ninguna parte del currículo se especifica cómo lograrlo. Desde esta perspectiva, la desarticulación entre los cursos de

matemáticas y los de las demás asignaturas se convierte en un cotidiano conflicto para los alumnos.” (Camarena, 2009, p. 16)

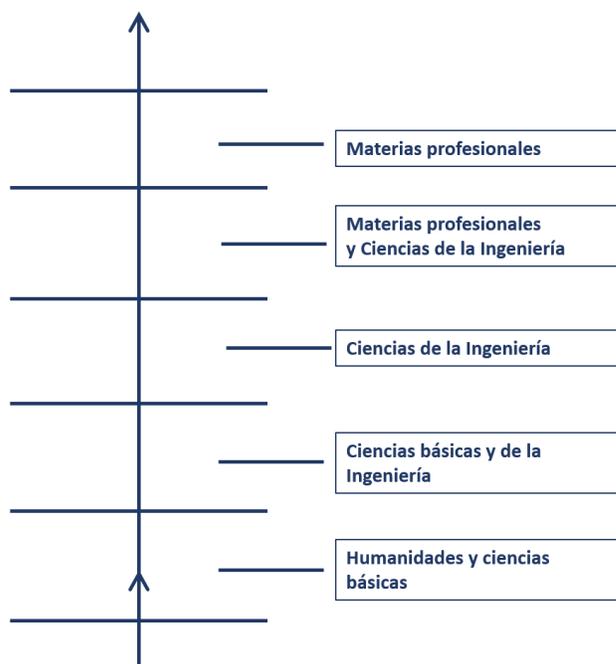


Figura 1.1. Modelo lineal del Plan de Estudios de Ingeniería. (Herrera, 1990, p.4)

Consecuentemente, hay una desarticulación en las asignaturas de los Planes de Estudios de las carreras de Ingeniería y esta se ha hecho evidente en diferentes investigaciones.

1.2 Marco Bibliográfico

A partir de diferentes enfoques es que se ha observado esta desarticulación y a su vez, se han generado algunas propuestas para atenderla.

1.2.1 El conocimiento de los contenidos matemáticos

Para algunos autores, la desarticulación es abordada en términos del conocimiento matemático. Entonces, la propuesta para articular las asignaturas quedaría en términos de los contenidos específicos de la matemática.

Tal es el caso de Rosas y Casanova (1998), quienes buscan conocer cómo son los conocimientos básicos de estudiantes de nuevo ingreso de la carrera de Ingeniería Civil, dentro del Instituto Politécnico Nacional (IPN). A partir de un análisis multidimensional

identificaron que hay carencia en el conocimiento matemático. Concluyen también que hay una separación entre conocimientos teóricos y prácticos.

Por lo tanto, hablan de una desarticulación de conocimientos prácticos y teóricos de la matemática. Esto lo podemos interpretar como una falta de contenido matemático, expresado como conocimiento que deberían adquirir.

Así, si se considera que el problema está determinado en términos del conocimiento, las propuestas quedarían bajo ese mismo enfoque. Como el caso de Perkin y Bamforth (2011), ellos generan cuatro iniciativas (escuela de verano, talleres, sesiones de matemáticas ‘de práctica’ programadas, sesiones adicionales de revisión de exámenes) para apoyar a los estudiantes de nuevo ingreso en la Universidad de Loughborough en Reino Unido. Estas iniciativas están dirigidas a los alumnos que se les ha identificado con problemas en sus conocimientos matemáticos previos o que tienen “lagunas” dentro del contenido matemático aprendido.

Partiendo de este enfoque, que considera al conocimiento de los contenidos matemáticos, podemos encontrar algunos trabajos que analizan los contenidos específicos como parte de las unidades de aprendizaje de los Planes de Estudios de las carreras de Ingeniería.

Tal es el caso de Flores (1980), quien presenta una descripción de los contenidos matemáticos que forman parte de las unidades de aprendizaje (asignaturas) del Plan de Estudios de la Ingeniería en Electricidad y Mecatrónica.

Flores (1980) también muestra que el Plan de Estudios de muchas de las carreras de Ingeniería se divide en tres tipos de materias: básicas o propedéuticas (necesarias para pasar a las siguientes), de la especialidad (las que intervienen en la formación del ingeniero en cada rama), humanísticas (con un enfoque de desarrollo para la vida). (p.5)

Así, las materias que corresponden a las básicas o propedéuticas tienen a su vez, la finalidad de proporcionar el conocimiento necesario para poder tomar los siguientes cursos. En consecuencia, la propuesta de articular las asignaturas dentro de la Ingeniería estaría en términos de aquel conocimiento que necesitan los estudiantes para poder acreditar sus cursos.

Por ejemplo, Duarte (1991) indica que hay prerrequisitos que deberían ser cubiertos por materias que preceden al curso de Ecuaciones Diferenciales en la Escuela de Ingeniería Civil

de la Universidad Autónoma de Sinaloa. Así, observa que, al momento de dar dicho curso, el estudiante carece de conocimientos matemáticos, como álgebra o trigonometría. Él considera que los programas de los llamados prerrequisitos no están bien distribuidos en cuanto al tiempo destinado para los temas que comprenden. Con ello, concluye que es necesario tomar en cuenta este punto en el momento de realizar una reforma curricular.

A partir de lo anterior, observamos que la distribución de los tiempos es uno de los factores que debe formar parte en la organización de los contenidos. Además, contempla que, al haber una carencia de conocimiento matemático, lo necesario es proporcionar los contenidos que hagan falta para proporcionar ese conocimiento.

Ahora bien, hemos abordado la investigación realizada en torno a los contenidos matemáticos y su distribución en los Planes de Estudios. Sin embargo, es preciso destacar que, dentro de las unidades de aprendizaje, el programa incluye Bibliografía Básica y complementaria para impartir los contenidos. Así, los libros de texto han venido a formar parte del análisis que se ha realizado dentro de los Planes de Estudios.

Arcos (2000) realiza una investigación en la que divide su trabajo en dos partes: análisis de textos y una propuesta de material para la enseñanza del primer curso de cálculo y cursos de Ciencias Básicas en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma del Estado de México (FIUAEM). El análisis lo realiza con base en extractos de libros que han sido utilizados constantemente en dicho curso, por varios profesores y a partir de los conceptos que se destacan del cálculo, por ejemplo, el término *diferencial*. Luego, identifica tópicos de cálculo diferencial y cómo se expresa en los libros de texto escogidos, para posteriormente, observar algunas diferencias y similitudes.

En el trabajo realizado por Arcos (2000) observamos que no solo nos interesa el qué, sino el cómo se ha de enseñar algún contenido matemático. Y es así como entra en juego otro factor dentro de la enseñanza en la Ingeniería: el factor humano.

Ahora bien, hablar del factor humano nos lleva a replantear la desarticulación de los contenidos matemáticos en los Planes de Estudios. Puesto que, para el diseño de un Plan de Estudios no solo nos restringimos a los contenidos (el qué). Hay más aspectos que deben ser

considerados. Uno de ellos es el docente. Su intervención es fundamental, incluso en la elaboración de los Planes de Estudios.

Al respecto Moreno (1993) realiza un análisis de los contenidos de los cursos de Probabilidad y Estadística en Ingeniería Civil, seleccionando cinco problemas que él considera relevantes para la aplicación de lo que denomina Conceptos Básicos. Así, él exhibe, en una de sus conclusiones, que “el principal problema para realizar reformas al plan de estudios de la carrera de Ingeniero Civil, [...] ha sido la falta de comunicación entre los profesores de diversos departamentos que la atienden” (p.127)

1.2.2 El conocimiento matemático puesto en uso

Si bien algunos autores han considerado que la problemática se sitúa en el conocimiento matemático, otros han determinado que, en el caso de la Ingeniería, es importante el uso que se le dé a este conocimiento.

A partir de tal afirmación, Romo y Oktaç (2007) analizan el conocimiento matemático puesto en uso de los ingenieros, revisando tesis elaboradas por ellos. En otras palabras, los objetos de análisis son tesis de maestría elaboradas por ingenieros y con el propósito de atender a la problemática propia de su contexto. El método de análisis para determinar el papel de la matemática que utiliza el ingeniero se clasifica en cuatro categorías: 1) Uso de concepto, 2) Componente matemático, 3) Relación entre conceptos matemáticos y conceptos propios de la Ingeniería y 4) Condición del elemento matemático.

A su vez, para realizar el análisis Romo y Oktaç (2007) consideran tres partes: objetivos, cuerpo de la tesis y conclusiones.

1.2.3 Matemáticas en el Contexto de las Ciencias y Ciencias en Contexto

Bajo el enfoque teórico de las Matemáticas en el Contexto de las Ciencias (MCC), el cual surgió en 1982 en el IPN en México, se considera que la matemática que se lleva en las carreras de Ingeniería no es una meta en sí misma (Camarena, 2013, 2009, 2015). Por lo tanto, se propone vincular a la matemática con otras ciencias.

La investigación realizada en torno a dicha teoría se desarrolla en la línea de investigación denominada Matemática Social. Se dirige a integrar los conocimientos y trabajar con la interdisciplinariedad en los cursos para ingenieros. Así, Camarena (2009, 2013) recopila

aquellos trabajos que se desarrollan bajo esta teoría y la recientemente denominada Ciencias en Contexto (CC).

Como parte de la intervención con el estudiante, estas teorías comprenden cinco fases vinculadas: curricular, didáctica, epistemológica, docente y cognitiva (figura 1.2).



Figura 1.2. Cinco fases de la MMC y Ciencias en Contexto CC. (Camarena, 2015, p. 112)

En la fase curricular es en donde se diseñan los programas de estudio de las *Ciencias Básicas* a partir de una metodología denominada *dipping*. En ella se vincula a la matemática con las asignaturas de Ciencias Básicas, también a la matemática con las Ciencias Básicas de la Ingeniería y, finalmente a la matemática con las especialidades de la Ingeniería. (Camarena, 2009, 2013, 2015)

Dentro de la fase curricular se llevan a cabo tres etapas: la etapa central, en donde se analizan los contenidos matemáticos, ya sea explícitos o implícitos dentro de los programas de Ingeniería; la etapa precedente, donde se identifican los conocimientos matemáticos previos de los estudiantes de nuevo ingreso; la etapa consecuente, que consiste en conocer cómo usan la matemática los ingenieros en el ámbito profesional. (Camarena, 2009, 2013)

Es en la etapa central donde, a partir de los cursos que se implementan en la carrera, se ubica el tema, su profundidad y sus aplicaciones dentro de la Ingeniería. A partir de lo anterior, se agrega el contenido matemático dentro de estos cursos, para lograr así que la impartición del tema sea sensata para el estudiante. (Camarena, 2009, p. 24)

Es así como, bajo el enfoque de la MCC se propone una modificación curricular en términos de lo contenidos, pero no los de índole matemática, sino de asignaturas que requieren de la herramienta matemática. Esto a su vez implica enseñar el contenido matemático en el momento en cual se requiera aplicar en otras asignaturas de Ingeniería.

En consecuencia, se propone una articulación de los contenidos matemáticos con otros cursos, situados en los Planes de Estudios de Ingeniería, partiendo de su aplicación. Es decir, bajo este enfoque se propone la aplicación del conocimiento matemático en momentos estratégicos que permitan ver una utilidad de la matemática en la Ingeniería.

1.2.4 Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME)

En la TSME se replantea el conocimiento en términos de la *actividad humana*. Se requiere poner en *uso* ese conocimiento dentro de situaciones de la vida real, ello es lo que permitirá constituir el *saber*. Así, para que el conocimiento se constituya en *saber*, se requiere de una construcción activa del sujeto (ser social). (Cantoral, 2013)

Por lo tanto, pensar en la desarticulación del contenido matemático dentro del Plan de Estudios, trasciende, puesto que nos enfocamos no en el contenido como parte del conocimiento matemático a enseñar, sino en el *uso* que se le da a ese conocimiento, es decir al *saber*.

Al respecto, Rodríguez (2009), quien reflexiona sobre la enseñanza de las matemáticas en las carreras de Ingeniería (en particular sobre la Serie de Fourier), observa que los contenidos que se plantean en los Planes de Estudios son aislados. También menciona que la *costumbre didáctica* del docente se relaciona con seguir algoritmos al momento de impartir los contenidos (que se traducen como conocimiento a enseñar). Por ello, su propuesta parte de que el conocimiento se construye con base en las *normas* y *usos* establecidos por la comunidad.

Así, bajo el referente de la TSME, Rodríguez (2009) hace hincapié en una matemática funcional para el ingeniero. Para ello, él trabaja dentro de las cuatro dimensiones que impactan la *construcción social del conocimiento matemático*, estas son *didáctica*, *epistemológica*, *cognitiva* y *social*.

A partir de la propuesta de Rodríguez (2009), hemos considerado abordar la problemática al seno de la TSME. Para ello, determinamos replantearla. Es decir, habíamos hablado de la *desarticulación de las asignaturas de matemáticas* a lo largo de los Planes de Estudios de las carreras de Ingeniería. Sin embargo, hemos notado que, al hablar de la desarticulación de las asignaturas, nos estaríamos centrando solamente en el contenido matemático distribuido a lo largo de las asignaturas. Lo cual, se reduce meramente en analizar el conocimiento matemático y no su *construcción social*. Es decir, el conocimiento matemático puesto en *uso* es lo que nos permite mirar nuestra problemática de una forma distinta.

Ahora bien, es preciso reflexionar sobre la manera en la que ha llegado a ser colocado el **conocimiento matemático**, redactado como parte de los **contenidos** organizados dentro de las **asignaturas**. Al respecto, Cantoral (2013) argumenta que al momento de introducir el *saber* en las aulas, se han generado *discursos* con el propósito de hacer llegar conceptos y procedimientos matemáticos que se han *despersonalizado y descontextualizado*, con lo que han perdido *el sentido y significado* que originalmente tenían. Así, se han reducido a temas aislados que son denominados **contenidos** o unidades temáticas que forman parte de las **asignaturas**.

Así, estas asignaturas son una expresión de estos *discursos* denominados dentro de la TSME como el *discurso Matemático Escolar* (dME).

Ahora bien, es importante aclarar que

La estructuración del *discurso Matemático Escolar* no se reduce a la organización temática de los contenidos, [...] sino que se extiende un tanto más allá, al llegar al establecimiento de bases de comunicación y a la formación de consensos, así como a la construcción de significados compartidos de los objetos y los procesos matemáticos, a su función normativa. (Cantoral, 2013, p. 64)

De esta manera, debemos tener en claro que el dME no se trata únicamente de los Planes de Estudio, sino que

El dME subyace a lo inmediatamente visible, lo ostensible, explícito u objetivo, los contenidos y sus concepciones: Planes y Programas de Estudio, libros de texto, exposición de aula, pero también a las creencias y concepciones de profesores,

estudiantes y comunidad académica en general. (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015, p. 14)

En consecuencia, consideramos a los Planes de Estudios como una manifestación explícita y visible del dME.

En relación con el *uso* del conocimiento matemático y el dME, Gómez (2015) habla del fenómeno de *opacidad*, en donde se ha olvidado el *uso* del conocimiento matemático y en donde el actual dME ha permitido dicha *opacidad*, pues es este mismo el que la genera. Así bien, ella trabaja un proceso de socialización del conocimiento matemático a partir de la denominada *Comunidad de Conocimiento Matemático*, en este caso, de ingenieros agrónomos. Con esto pretende contribuir al *Rediseño del discurso Matemático Escolar* (RdME).

Aclaremos aquí una distinción entre el *rediseño del discurso Matemático Escolar* (rdME) y el *Rediseño del discurso Matemático Escolar* (RdME). El primero se puede observar directamente en libros de texto, currículo, programas de estudio, etc. Mientras que el segundo, se relaciona con la ruptura de orden epistemológico con respecto al saber matemático. Lo anterior conlleva a proponer varios cambios en el dME. Uno de ellos refiere a su carácter utilitario del saber, porque, para el RdME, este carácter debe ser funcional (su valor de *uso*) considerando los diferentes marcos de referencia. (Reyes, 2016)

Partiendo entonces de una matemática funcional, Torres (2013), Pérez (2015) y Mendoza (2013) se enfocan en analizar los *usos* del conocimiento matemático en el área de la Ingeniería.

Torres (2013) realiza un análisis de los *usos* de la Estabilidad y la Simultaneidad dentro de una *Comunidad de Conocimiento Matemático* de Ingenieros Químicos. Para esto, observa el trabajo que desempeña un ingeniero en un laboratorio químico de la Comisión Federal de Electricidad.

A partir de sus observaciones, la autora identifica dos *usos* de la Simultaneidad de variaciones: local (simultaneidad de la derivada en términos de velocidad y concavidad) y global (todos los comportamientos en términos de la predicción). También identifica dos *usos* de la Estabilidad: local (Concentración de gases relacionada con el comportamiento

tendencial) y global (Estado del transformador dentro de lo esperado de acuerdo con los parámetros). (Torres, 2013, p. 120)

Por otro lado, Pérez (2015) analiza los *usos* de la gráfica por medio del debate de sus *funcionamientos* (fu) y *formas* (fo) dentro de una *Comunidad de Conocimiento Matemático* de Ingenieros Químicos Industriales. Observó que “el desarrollo de *usos* no se produce de manera secuencial, sino que depende de la *forma* para generar nuevos usos” (p. 73).

Cabe destacar que, para lograr una matemática funcional, la autora genera una Situación de Aprendizaje que le permitiera a los estudiantes desarrollar argumentaciones en términos de la predicción ($\mathcal{A}r(Pred)$), el comportamiento tendencial ($\mathcal{A}r(CT)$) y la optimización ($\mathcal{A}r(Op)$).

Esto, permitió dar nuevos *usos* (\mathcal{U}) a las gráficas, como se muestra en la figura 1.3. (Pérez, 2015)

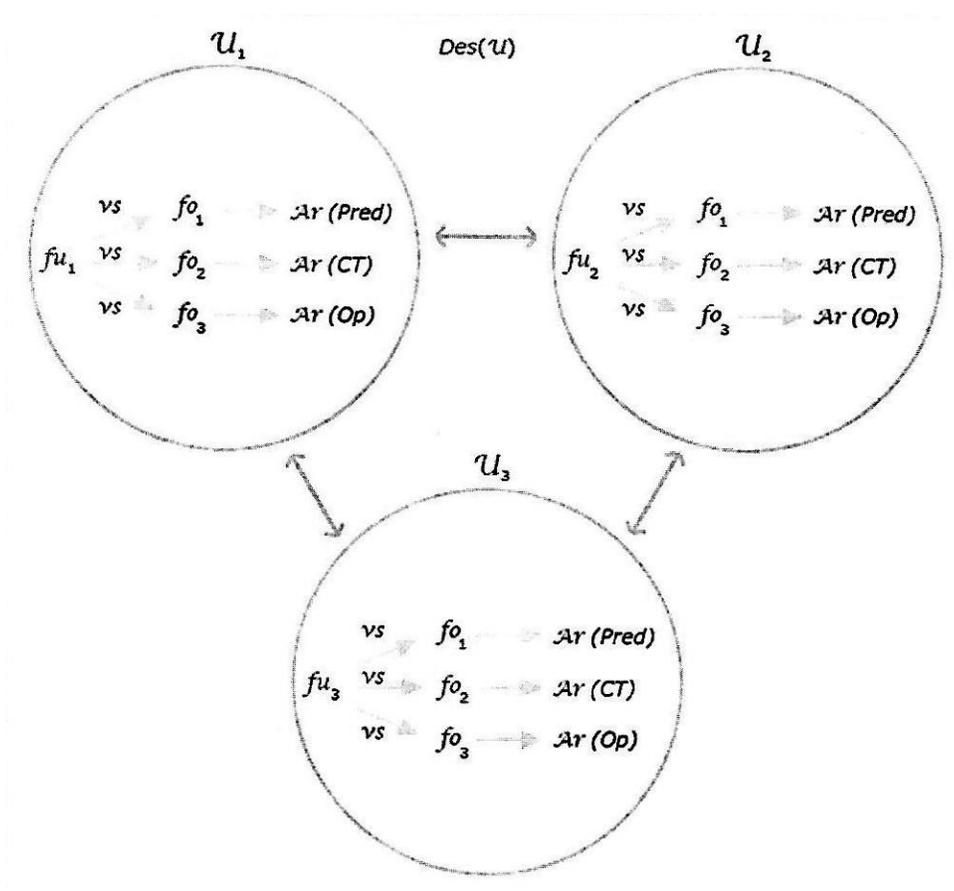


Figura 1.3. Desarrollo de usos generado por una problematización en una SA. (Pérez, 2015, p. 73)

Finalmente, Mendoza (2013), quien también da hincapié a la matemática funcional en una *Comunidad de Conocimiento* de ingenieros en formación, hace un análisis del *uso* de las gráficas en la resignificación de las ecuaciones diferenciales lineales para estudiantes de Ingeniería Civil.

Mendoza (2013) observa que “la matemática funcional [se encuentra] totalmente ausente en los objetivos de los programas de formación” (p. 70). Esto significa que debemos hacer evidentes los *usos* del conocimiento matemático dentro de los programas de formación del ingeniero.

Para ello, es que nos hemos centrado en reconocer estos *usos* que forman parte de la trayectoria que sigue un estudiante de Ingeniería. La cual, se manifiesta en el currículo, como una expresión del dME.

1.3 Objeto de estudio

Nuestra investigación se enmarca en la TSME. Particularizando en la dimensión didáctica, la cual “se ocupa de explicar la difusión del conocimiento a través del discurso matemático escolar y examina los efectos e implicaciones didácticas”. (Montiel, 2005, p. 101)

Ahora bien, vamos a enfocarnos en los *usos* del conocimiento trigonométrico, para ello, en el capítulo dos detallamos a qué nos referimos con *lo trigonométrico*. Particularmente, nos centramos en un análisis de los libros de texto sugeridos por los Programas de Estudio del Plan de Estudios de la Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica ofertada en la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). Con esto, pretendemos, por medio del análisis de *usos*, reconocer la trayectoria de *usos* del conocimiento trigonométrico a lo largo del Plan de Estudios.

1.3.1 Hipótesis

Si bien hemos reportado una desarticulación de contenidos matemáticos, explícitos en los Programas de Estudio de los Planes de Estudio de carreras de Ingeniería, consideramos, bajo el enfoque de la TSME, que esta desarticulación también está a nivel de *usos*.

En otras palabras, nuestra hipótesis es que existe una desarticulación a nivel de *usos* del conocimiento trigonométrico en el Plan de Estudios de la carrera de Ingeniería Mecatrónica.

Esto provoca, no solo dejar al estudiante con la responsabilidad de integrar el conocimiento trigonométrico, sino que tenga que darle *sentido* a este conocimiento. Lo cual es importante porque, si bien en el Perfil de Egreso se propone el desarrollo de estas habilidades, no se hace explícita la manera de lograrlo a lo largo del Plan de Estudios.

1.3.2 Objetivo de investigación

Para reconocer una posible desarticulación a nivel de *usos* del conocimiento trigonométrico, pretendemos **describir una trayectoria curricular de usos del este conocimiento, a lo largo de la carrera de Ingeniería Mecatrónica.**

1.3.3 Preguntas de investigación

¿Cuáles son los *usos* del conocimiento trigonométrico en la Malla Curricular de la Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica de la Universidad Autónoma de México?

¿De qué manera se genera la articulación o desarticulación entre los *usos* del conocimiento trigonométrico a lo largo de la trayectoria curricular?

Para ello, analizaremos los contenidos de los dentro de los libros de texto recomendados en los Programas de Estudio ubicados en la Malla Curricular de la carrera de Ingeniería Mecatrónica. Esto es para realizar un análisis al nivel de *usos* del conocimiento trigonométrico y reconocer así, la trayectoria de estos *usos*. La cual nos permitirá identificar la articulación o desarticulación entre los *usos* del conocimiento trigonométrico.

Capítulo 2. Fundamento Teórico

En el presente capítulo hacemos una distinción entre el conocimiento trigonométrico y el *conocimiento trigonométrico puesto en uso (lo trigonométrico)*, esto, a partir de la TSME. En otras palabras, centramos nuestra investigación en aquello que llamamos *lo trigonométrico* y para ello, es preciso aclarar su importancia bajo nuestro enfoque.

Cabe destacar que el análisis de *usos* del conocimiento trigonométrico lo realizaremos en términos de sus *funcionamientos y formas*. Por ello, es importante aclarar a qué nos referimos al utilizar estas herramientas de análisis dentro de la TSME.

2.1 Análisis socioepistemológico de lo trigonométrico

En la presente investigación, es importante distinguir entre trigonometría y *lo trigonométrico*. Hacemos esta distinción al seno de la TSME. Para ello, se requiere, en primera instancia reconocer al *discurso trigonométrico escolar* y, con esto, entender la pertinencia de su rediseño. Con esta intención es que se buscan generar argumentos que confronten a este discurso. Esos argumentos, obedecen a un cambio de paradigma, pasar de los *objetos* a las *prácticas*.

2.1.1 El discurso trigonométrico escolar

En la matemática escolar algunos *objetos trigonométricos*, como la *razón* y la *función trigonométrica*, se manejan de manera indistinta; cuando en realidad, a cada uno se le asocian *significados* distintos (Montiel y Jácome, 2014, p.1209). Esta confusión forma parte del *discurso trigonométrico escolar*.

De acuerdo con Montiel (2011), tres *fenómenos didácticos* se asocian al *discurso trigonométrico escolar*:

- *Aritmetización trigonométrica*, donde se destaca el proceso aritmético de las *razones trigonométricas* cuando se dividen las cantidades de las longitudes de dos lados del triángulo, en lugar de considerar su proceso geométrico que permite expresar relaciones de proporcionalidad. Y con esto, ha recibido un uso aritmético y algebraico (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015, p.25) por lo que sus

significados son como *división de longitudes, lineal*, o como *técnica para obtener un valor*. (Montiel y Jácome, 2014, p. 1214)

- *Extensión geométrico-analítico*, donde el tratamiento para la *función trigonométrica* es analítico y se parte del círculo trigonométrico para explicar sus características como su dominio, la conversión de la unidad de medida de grados a radianes y viceversa, su periodicidad, etcétera.
- *Indiferencia a la fundamentación analítica*, esto quiere decir que, al concluir el Nivel Medio Superior, como el estudiante ha operado (derivar o integrar) a las funciones trigonométricas, a su ingreso al Nivel Superior, el dME asume que él aprendió qué es y cómo operar a la *función trigonométrica*, por lo que genera una *indiferencia* ante explicaciones analíticas asociadas a la longitud de un arco, al uso del radián, entre otros.

2.1.2 La construcción del conocimiento trigonométrico

A partir de un análisis histórico del conocimiento trigonométrico, desde el enfoque de la TSME, Montiel (2011) ubica tres momentos asociados a tres *prácticas sociales: anticipación, predicción, formalización* que regulan, respectivamente, las tres *prácticas de referencia* denominadas como: *matematización de la astronomía, matematización de la física y matematización de la transferencia de calor*. Estos son llamados los tres momentos de *construcción social del conocimiento trigonométrico* (tabla 2.1).

Así, como se sintetiza en la tabla 2.1, a estos tres momentos se relacionan contextos y lenguajes distintos. En la matematización de la astronomía se realizaban construcciones geométricas que determinaban las distancias entre cuerpos celestes.

Para hacer un cambio al segundo momento, se hace una transición del contexto geométrico, en donde se asocia al triángulo inscrito en la circunferencia con las relaciones trigonométricas en un ambiente estático, al contexto analítico. Es decir, estas relaciones son consideradas ahora como cantidades trascendentes que se generan por el círculo. Es el estudio del movimiento lo que permite dar el paso de la anticipación a la predicción.

Finalmente, el estudio de la transferencia de calor es el paso que se da para pasar de la predicción a la formalización. Así, en el tercer momento, la autora plantea que se trata de un

contexto estacionario-analítico puesto que, a pesar de tener un flujo de calor constante (estabilidad), las temperaturas difieren en puntos distintos (variabilidad). (Montiel, 2011)

	Práctica social		
	Anticipación	Predicción	Formalización
Práctica de referencia	Matematización de la astronomía	Matematización de la física	Matematización de la transferencia de calor
Contexto	Estático-proporcional	Dinámico-periódico	Estacionario- analítico
Lenguaje	Geométrico-numérico	Curvas-ecuaciones	Funciones-límites
Racionalidad	Helenística-euclidiana	Física-matemática	Física-matemática
Herramienta	Razón trigonométrica	Función trigonométrica	Serie trigonométrica
Variables	$\text{sen } \theta$ (longitud) θ ángulo (en grados)	$\text{sen } x$ (distancia) x tiempo (radián-real)	$\text{sen } t$ (temperatura) t tiempo (real)
Escala de tiempo	Finita	Infinitesimal-infinito	Infinito

Tabla 2.1 Principios básicos para la construcción social del conocimiento trigonométrico en un escenario histórico. (Montiel, 2011, p. 123)

En cada momento, la autora ha distinguido elementos que, actualmente, forman parte del dME. Por ejemplo, las herramientas escolares que son nombradas *razones trigonométricas*, *funciones trigonométricas* y *series trigonométricas*. Otros elementos matemáticos que, si bien históricamente dan evidencia de su relación con el conocimiento trigonométrico, en el dME se les ha ubicado en otras áreas. Como es el caso del movimiento circular uniforme. (Montiel, 2011, p. 117)

Por tanto, en la presente investigación nos es importante reconocer aquellos elementos asociados a la construcción social del conocimiento trigonométrico, los cuales pueden no ser visibles directamente en el dME.

2.1.3 De los objetos a las prácticas

Con base en nuestro posicionamiento teórico, pasamos de centrarnos en los objetos (la razón, la función y la serie) que se distinguen en el dME, para pasar a centrarnos en las *prácticas*, es decir, “atender a la construcción de la relación, la funcionalidad y la formalidad trigonométricas, y sus respectivos desarrollos del pensamiento geométrico-proporcional, funcional-variacional y abstracto-formal [...]. De ahí la distinción entre hablar de *lo trigonométrico* y no de la Trigonometría. (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015, p. 16)

Si bien, en esta investigación distinguimos al **conocimiento trigonométrico** por medio de las herramientas *razón trigonométrica*, *función trigonométrica*, *serie trigonométrica* a lo largo del Plan de Estudios por medio de la revisión de los contenidos establecidos en los Programas de Estudio y desarrollados en su bibliografía sugerida; nuestra intención es reconocer los *usos* que tienen estas tres herramientas (como expresiones del conocimiento trigonométrico) que en el dME se han colocado dentro de la Trigonometría. Así, el reconocimiento de estos *usos* nos permitirá identificar los *significados* asociados a cada una de estas herramientas.

2.2 El uso del conocimiento matemático: sus funcionamientos y formas

Bajo el enfoque en el que hemos situado nuestra investigación, concebimos relevante el *uso* del conocimiento matemático. Este *uso* depende de una situación específica en la que tendrá *funciones* y *formas* distintivas.

El *uso* se refiere a la *función orgánica* propia de la situación planteada. Este se manifiesta por medio de *tareas* que forman parte de la situación. Así bien, la *forma* del uso corresponde al tipo de tareas. Algunos ejemplos de estas son: actividades, acciones, ejecuciones. (Cordero y Flores, 2007, p. 13)

Así bien, hablar del *uso del conocimiento matemático* implica entender sus *funcionamientos* y *formas*. A continuación, discutiremos con mayor detalle estos dos aspectos.

Suárez (2008) menciona que

el *funcionamiento* [describe] aquellas circunstancias relacionadas con el uso y la modelación, que hacen que un conocimiento sea útil para resolver un problema o para integrar una teoría y, [...] la *forma* [se refiere a] las clases de tareas que quedan determinadas por el funcionamiento pero también determinan nuevas formas y funcionamientos. (p. 7)

Por otro lado, Buendía (2012) considera que, el *funcionamiento* corresponde al rol que tiene ese conocimiento en un escenario específico. Por ejemplo, en el caso de la gráfica, los

funcionamientos relativos al *uso* de la gráfica están sujetos a las acciones a partir de una situación específica. (Cen, 2015, p. 32)

Ahora bien, para Buendía (2012) la *forma*, tiene que ver con la apariencia perceptible y la manera en la que el sujeto interactúa con ella a partir de una tarea. Por ejemplo, cuando calcula, argumenta, representa, etc.

En consecuencia, Buendía (2012) propone el análisis de los *usos* mediante la *forma* y *funcionamiento* (donde se plantea ¿para qué sirve al sujeto?) del conocimiento matemático específico. Y para ello, considera importante responder a estas tres preguntas: ¿qué hace?, ¿cómo lo hace? y ¿para qué lo hace?

De esta manera, Buendía (2012) destaca la importancia de lo que *hace* el sujeto con respecto a un conocimiento específico, por ejemplo, las gráficas cartesianas.

Por otro lado, es pertinente aclarar que, de acuerdo con Cen (2015), la *forma* ha sido referida o bien como la forma perceptible u observable, o bien relativa a las tareas que determinadas por los *funcionamientos*. En nuestro caso, nos referiremos a la *forma perceptible* como aquella observable y, para el segundo caso, como *forma*.

En consecuencia, para hablar de *usos* necesitamos plantear las acciones que realiza el sujeto con el conocimiento trigonométrico (es decir, las herramientas *razón trigonométrica*, *función trigonométrica*, *serie trigonométrica*). En nuestra investigación, partimos de lo que los libros de texto hacen *hacer* al estudiante de Ingeniería.

Al respecto, hacemos hincapié en la importancia que tienen los libros de texto, por su relación con los sujetos, así como con la institución. Estos libros han sido asociados como medios de difusión del conocimiento matemático, que sirven para normar el quehacer del docente y del alumno. Además, los libros de texto forman parte del dME. (Cen, 2006, p.52)

Capítulo 3. Método

Para poder responder a nuestras preguntas de investigación y, tomando en cuenta que nuestra investigación es documental, realizaremos un Análisis de Contenido Cualitativo (ACC) a los libros de texto seleccionados como Bibliografía Básica en cada programa del Plan de Estudios, que respondan a los temas específicos de las asignaturas. Esta técnica, denominada como método para Schreier (2012), utilizada para el análisis de textos se articula con los fundamentos teóricos (sobre la TSME) expuestos en el capítulo anterior.

Así, en el presente capítulo describimos brevemente nuestro material de análisis. Aunque, en el siguiente apartado detallaremos más acerca de su contexto (como parte de nuestro ACC).

Posteriormente, mencionaremos algunas características del ACC, así como los pasos propuestos por esta técnica de análisis y su aplicación en nuestra investigación.

3.1 El Plan de Estudios de la carrera de Ingeniería Mecatrónica de la UNAM

Como argumentamos anteriormente, nos interesa reconocer la trayectoria a nivel de los *usos* del conocimiento trigonométrico (*lo trigonométrico*) que sigue un estudiante de Ingeniería Mecatrónica a través del Plan de Estudios, el cual declara aquellas unidades de aprendizaje que deberá acreditar para tener así un *título* que le permita ejercer en el ámbito laboral como ingeniero mecatrónico.

Así, el Plan de Estudios delimita el camino que seguirá el estudiante para cumplir con un Perfil de Egreso y un Perfil Profesional. Particularmente, en el Programa Académico de Ingeniería Mecatrónica ofertado en la UNAM, el perfil profesional indica lo siguiente:

El Ingeniero Mecatrónico es el profesional que integra los conocimientos de las ciencias físicas y matemáticas con las ciencias de ingeniería en las áreas de control, electrónica, mecánica y computación para desarrollar su actividad profesional en las áreas de aplicación en el diseño mecatrónico, el control industrial de procesos, la automatización industrial y la robótica, tanto en el sector público como en el sector privado y a un nivel de emprendedor. (Facultad de Ingeniería de la UNAM, s.f.)

En el Anexo 1 se especifican los Objetivos Educativos del Programa, los Atributos del Egresado, el Perfil de Ingreso y el Perfil de Egreso.

El Plan de Estudios de la carrera había sido aprobado en el año 2008 y su implementación inició en el 2010. Posteriormente, se realizaron modificaciones en el Plan de Estudios, que fueron aprobadas en el 2015 e implementadas a partir del siguiente año. En el Anexo 2 se incluyen Mapa Curricular 2010 y Mapa Curricular 2016.

En esta investigación analizaremos el Plan de Estudios vigente (2016). Este considera diez semestres de formación, a lo largo de los cuales se organizan las asignaturas que corresponden a diferentes bloques: Ciencias Básicas, que se llevan en los primeros cuatro semestres; Ciencias de la Ingeniería, que se cursan a partir del quinto semestre y concluyen el octavo semestre; Ingeniería Aplicada, que son incluidas a partir del octavo semestre; Ciencias Sociales y Humanidades, que se distribuyen a lo largo de la carrera; Otras Asignaturas convenientes, que se cursan los primeros dos semestres, el séptimo y octavo semestre.

3.2 Acerca del Análisis de Contenido Cualitativo

El ACC se ha utilizado para describir e interpretar diferentes tipos de materiales que pueden ser visuales o verbales y que pueden venir de fuentes externas o datos recolectados por nosotros. Además, el ACC se destaca por ser: sistemático, debido a que, sin importar el material de análisis con el que se trabaje, siempre incluye la misma secuencia de pasos; flexible, puesto que permite considerar la teoría desarrollada por otras investigaciones y permite hacer modificaciones de acuerdo con el material a analizar; y por permitir una reducción de datos, es decir, el análisis se reduce a aquellos aspectos que son relevantes para la pregunta de investigación. (Schreier, 2012)

Con respecto al proceso para realizar un ACC, lo primero que se debe tener en claro son el tema y los objetivos del análisis, para así, poder determinar la formación de categorías que se establecerán en distintos niveles de abstracción. A su vez, se llevará a cabo un proceso de síntesis que permitirá reducir el material e ir estableciendo un orden. Posteriormente, es necesario hacer una revisión del marco de codificación y, en caso de ser necesario, modificar las categorías. Finalmente, tendremos un conjunto de categorías conectadas con el contenido

específico de nuestro material. Estas categorías pueden ser interpretadas con base en nuestra teoría y en términos de nuestra pregunta de investigación. (Schreier, 2012; Mayring, 2015)

Así, Schreier (2012) sintetiza esta secuencia en ocho pasos (figura 3.1).

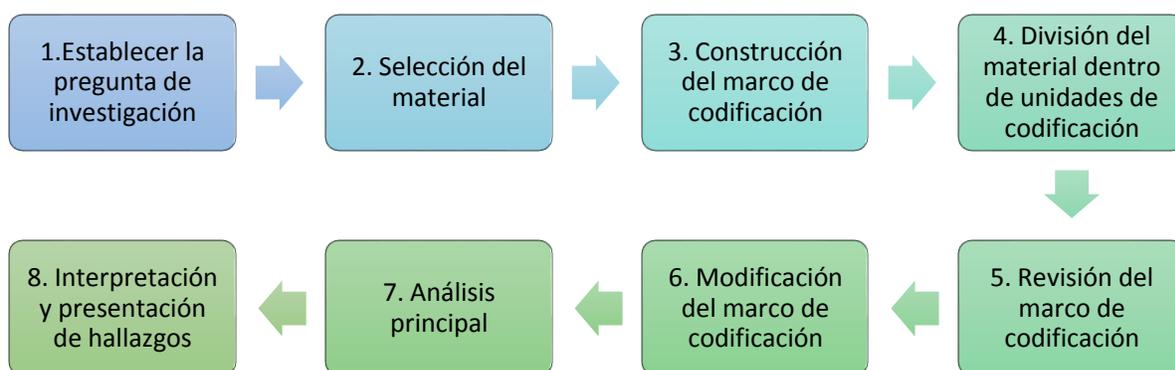


Figura 3.1. Los pasos en el ACC. (Schreier, 2012, p.6)

Ahora bien, como parte del ACC es necesario conocer el contexto en el cual se elabora el texto a interpretar (Schreier, 2012; Mayring, 2015). Es decir, para poder hacer una interpretación de nuestro Plan de Estudios, es necesario ponerlo en el contexto en el cual fue elaborado.

3.2.1 Un Análisis de Contenido Cualitativo para el Plan de Estudios de Ingeniería Mecatrónica

Debido a lo anterior, nuestro análisis toma en cuenta dos aspectos, el contextual y el textual. Con respecto al primero, es importante explicar en qué consiste y cómo se elabora un Plan de Estudios, pues necesitamos entender la estructura que tiene este documento y la finalidad con la que se diseña, así como las necesidades que demanda la población y que deben ser atendidas.

Por ello, el Plan de Estudios tiene, la intención de ofrecer aquellos Programas de Estudios, que, en su conjunto, al ser estudiados durante cierta cantidad de años, permitirán a aquel que los haya acreditado, reconocerse como Ingeniero Mecatrónico. Es por eso por lo que, es necesario comprender esta trayectoria curricular.

Con respecto a la parte textual, seguiremos el proceso que se basa en los ocho pasos expuestos por Schreier (2012).

Así bien, en el primer capítulo delimitamos nuestro objeto de estudio y establecimos las preguntas que guían esta investigación (primer paso del ACC). A partir de lo anterior, revisamos el Plan de Estudios del programa de la Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica de la UNAM. De igual manera, hacemos una revisión de los contenidos a estudiar dentro de los Programas de Estudio correspondientes a la Malla Curricular. Para ello, profundizamos en estos contenidos dentro de los libros de texto que se muestran como Bibliografía Básica en el Programa de Estudio de cada Unidad de Aprendizaje.

Es decir, realizamos la búsqueda e identificación del conocimiento trigonométrico expresado por medio de la *razón trigonométrica*, la *función trigonométrica* y la *serie trigonométrica* en los libros de texto que forman parte de los Programas de Estudio (segundo paso del ACC).

Ahora bien, una vez identificadas estas herramientas a lo largo de los programas pertenecientes al Plan de Estudios, hacemos un análisis de *usos* de este conocimiento trigonométrico mediante sus *funcionamientos* y *formas* (tercer paso del ACC). Cabe destacar que son los libros de texto los que nos permiten generar ese contexto específico donde se proponen las acciones que realiza el sujeto con respecto a la herramienta matemática.

De esta forma, nuestras unidades de codificación se realizan con base en las tres herramientas ya mencionadas y esclareciendo los *funcionamientos* y *formas* que engloban a cada herramienta a lo largo de cada semestre (cuarto paso del ACC).

Cabe aclarar que los pasos quinto y sexto, que consisten en la revisión y modificación de las unidades de codificación, fueron realizados durante el proceso de la investigación. En este escrito, presentamos el marco de codificación que resultó de estos pasos.

Finalmente, hacemos un análisis de la trayectoria de *usos* que sigue un estudiante de Ingeniería Mecatrónica a lo largo de los diez semestres establecidos para cursar las asignaturas de la Malla Curricular (séptimo paso). De esta manera, responderemos a nuestras preguntas planteadas al inicio de la investigación y podremos así comprobar o refutar nuestra hipótesis (octavo paso del ACC).

Capítulo 4. Análisis Contextual

Sin duda, el Plan de Estudios se elabora en un contexto determinado y para atender las necesidades específicas de la nación. En otras palabras, generar un Plan de Estudios, implica pensar no solo en las asignaturas que llevará el estudiante, o la cantidad de tiempo que se llevará. Se deben tomar en cuenta diferentes factores sociales que incluyen acuerdos nacionales e incluso internacionales.

Así, en este capítulo presentamos el contexto en cual se ubica nuestro Plan de Estudios. Para ello, consideramos importante tener claro el papel que juega este documento dentro del *currículum*, así como la elaboración de este. Además, son relevantes aquellos acuerdos que deberán cumplirse durante la carrera, así como la forma en la que el Plan de Estudios busca dar respuesta a estos.

4.1 El Plan de Estudios: una parte del currículum

Gaytán (2017) define al *currículum* como un conjunto de contenidos relacionados entre ellos y que siguen una lógica horizontal y vertical que ofrecen al estudiante los conocimientos necesarios para ejercer una profesión. Estos contenidos están relacionados-condicionados directamente con la ideología y cultura de la escuela y con la sociedad. Asimismo, el *currículum* describe los objetivos y fines, metodologías de enseñanza-aprendizaje y los procesos de evaluación educativa. (p.26)

Ahora bien, hablar del *currículum* no es lo mismo que hablar del Plan de Estudios. Para ello, Gaytán (2017) cita a Arnaz (1981) con la siguiente definición: “conjunto de contenidos a los que se postura como necesarios y suficientes para lograr determinados objetivos curriculares.” (p. 43)

4.2 El diseño de un Plan de Estudios para carreras de Ingeniería

4.2.1 Propuestas para la elaboración del Plan de Estudios.

A partir de las diferentes posturas que se han establecido para la elaboración de los Planes de Estudios. Se han generado diferentes propuestas que buscan cumplir las necesidades que en ese momento la sociedad demanda.

Sin embargo, los enfoques para responder a las necesidades bien pueden ser diferentes y la manera de generar la propuesta, en consecuencia, también varía dependiendo cómo conciben al *curriculum*.

Todo ello se ve reflejado en el momento de elaborar un Plan de Estudios, al cual le preceden estos aspectos.

4.2.2 Propuesta de Díaz-Barriga (1986)

En esta propuesta se ubican tres momentos básicos: “Construcción de un Marco Referencial, Elaboración de un Programa Analítico, e Interpretación Metodológica del mismo, como programa guía.” (Díaz-Barriga, 1986, p. 31-32)

En el caso del marco referencial es conveniente analizar un mapa curricular para saber lo que se va a integrar dentro del Plan de Estudios. Posteriormente, la elaboración del programa analítico debe considerar no solo los objetivos de aprendizaje, sino las características del curso, lo que se pretende desarrollar, su relación con otras asignaturas en términos de secuenciación.

Posteriormente, se deben establecer claramente los objetivos y contenidos a impartir en cada asignatura. “Estos contenidos se pueden agrupar en grandes grupos o bloques coherentes entre sí, lo que nos permite estructurar las unidades del curso” (Díaz-Barriga, 1986, p.47)

Es importante destacar que Díaz-Barriga (1986) retoma y explica el modelo pedagógico para el Diseño Curricular de Tyler considerándolo bajo un enfoque conductista, el cual se manifiesta en la palabra objetivos (figura 4.1).

Al respecto, el autor aclara que “cuando Tyler habla de actividad de aprendizaje, centra el problema en el alumno” (p.17) mientras que Díaz-Barriga (1986) propone que este problema considere la perspectiva tanto del alumno, como del docente.

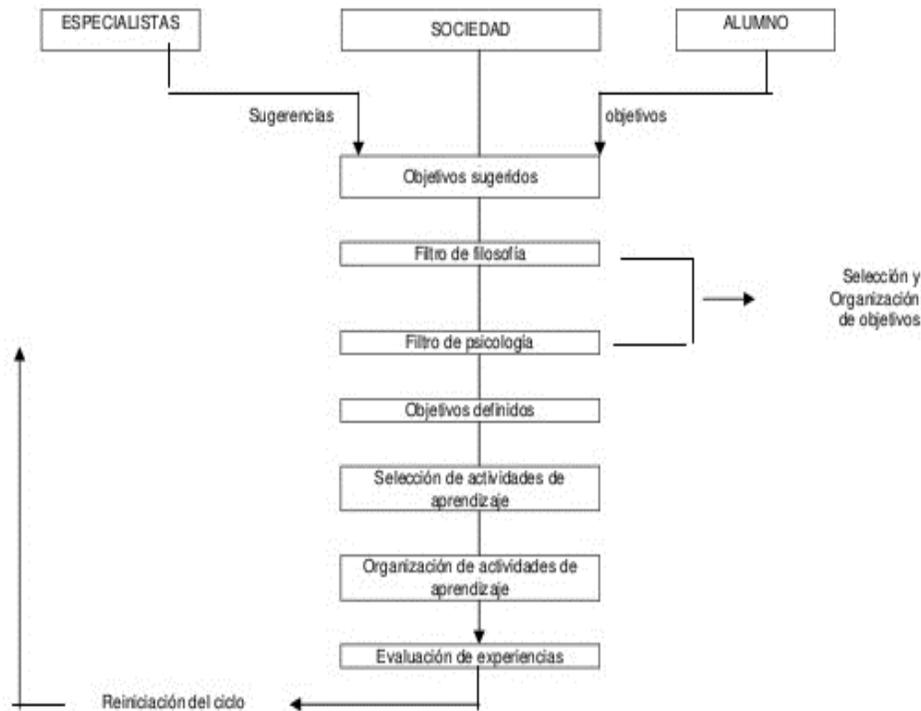


Figura 4.1. Modelo pedagógico lineal de R. Tyler. (Díaz-Barriga, 1986, p. 16)

4.2.3 Propuesta de Grayson (1979)

En este caso, de manera similar con lo que propone Díaz-Barriga (1986) y algunos estudiosos del currículo, como Tyler y Taba, se propone un esbozo general para ir particularizando a partir del esqueleto. Es decir, empezar en el macro-nivel y llegar al micro-nivel. Grayson (1979) particulariza en las necesidades y el contexto de la sociedad para la cual se van a generar la propuesta del Plan de Estudios. Así, los objetivos que se planteen para una carrera de Ingeniería deberán ser diferentes si se trata de un país, o incluso, un estado distinto.

Con respecto a la estructuración que deben llevar los Planes de Estudios de la Ingeniería, y para atender a la flexibilidad y no seguir la línea del proceso aditivo que se ha venido realizando anteriormente (agregar materias, cada vez más materias dentro del mismo Plan de Estudios) que debe guardar un Plan de Estudios, él propone una serie de cursos obligatorios y optativos.

Con respecto al diseño para la elaboración de Planes de Estudios, Grayson (1979) propone tres etapas que llevan una progresión secuencial sistemática: identificar el problema, estructurar el Plan de Estudios, poner en práctica y evaluar (figura 4.2).

Por otro lado, menciona que se deben considerar tres factores principales: continuidad, secuencia e integración. Estos elementos fueron propuestos por Tyler.

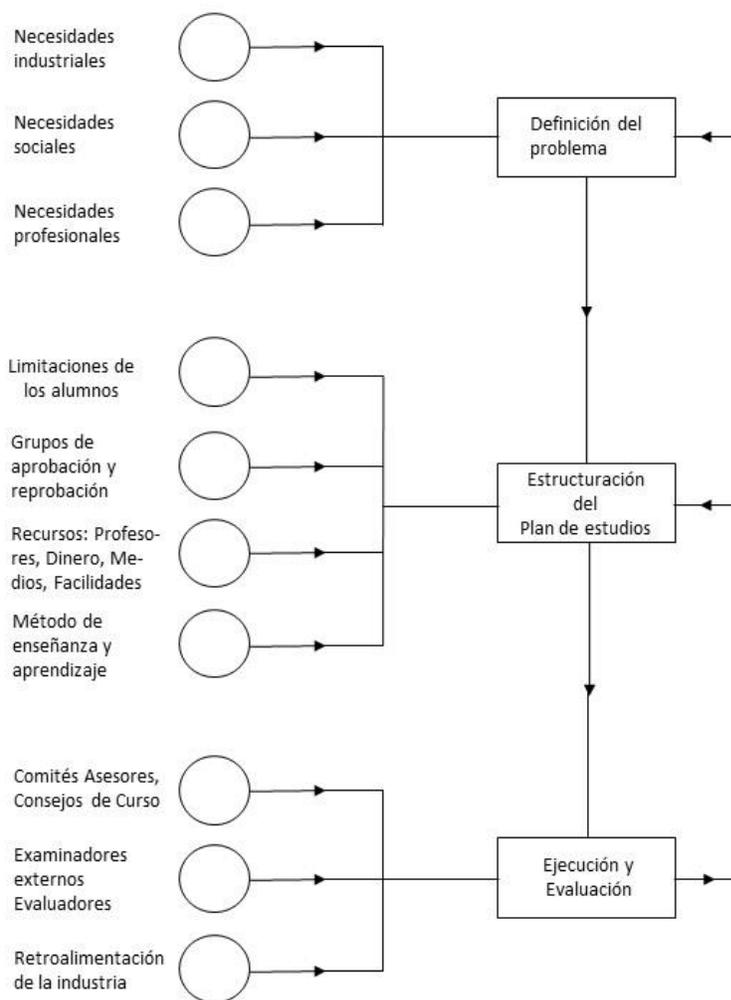


Figura 4.2. Etapas generales de una metodología de diseño del Plan de Estudios. (Grayson, 1979, p. 93)

4.2.4 Propuesta de Coll (1991)

Para Coll (1991), el Diseño Curricular “incluye [...] tanto aspectos curriculares en sentido limitado (objetivos y contenidos) como aspectos instruccionales (relativos al cómo enseñar).” (p. 33)

La propuesta de este psicólogo con respecto al Diseño Curricular se basa en dar respuesta a las siguientes preguntas: ¿qué enseñar?, ¿cuándo enseñar?, ¿cómo enseñar?, ¿qué, cómo y cuándo evaluar?

La primera pregunta consiste en entender las intenciones educativas de la escuela, para ello, Coll (1991) propone considerar tres elementos: *input* (relativo al contenido), *output* (resultados) y actividades (el proceso entre el *input* y el *output*).

Una vez planteado qué enseñar, viene la interrogante sobre cómo enseñar; es decir, el problema de la organización y secuenciación.

En la figura 4.3 se muestra el esquema que propone Coll (1991) para la organización de las intenciones educativas.

Así bien, una vez especificados los contenidos que permitirán concretar las intenciones educativas, se procede a la secuenciación de estos contenidos. Para ello, como se muestra en la figura 4.3, es necesaria una subdivisión de contenidos por área y por bloque, dependiendo si se trata de objetivos terminales o didácticos.

Los objetivos no necesariamente son en términos de conocimiento, pues estos pueden relacionarse con hechos, conceptos, principios, procedimientos, valores, normas y actitudes; los cuales se manifiestan directamente en los bloques de contenido. (Coll, 1991, p. 104)

Es así como nosotros proponemos la distinción entre **contenido matemático** y **conocimiento matemático**. Puesto que, con base en el autor, el primero corresponde a una componente curricular, particularmente, las asignaturas (Programa de Estudio) de matemáticas. El segundo puede estar dentro de los contenidos matemáticos. Aunque esto depende de la manera en la que se redacten los contenidos, es decir, el enfoque pedagógico con el que se proponen.

Por ejemplo, un contenido matemático puede incluir solo el conocimiento matemático, o también incluir este conocimiento asociado con habilidades, normas, actitudes, etcétera.

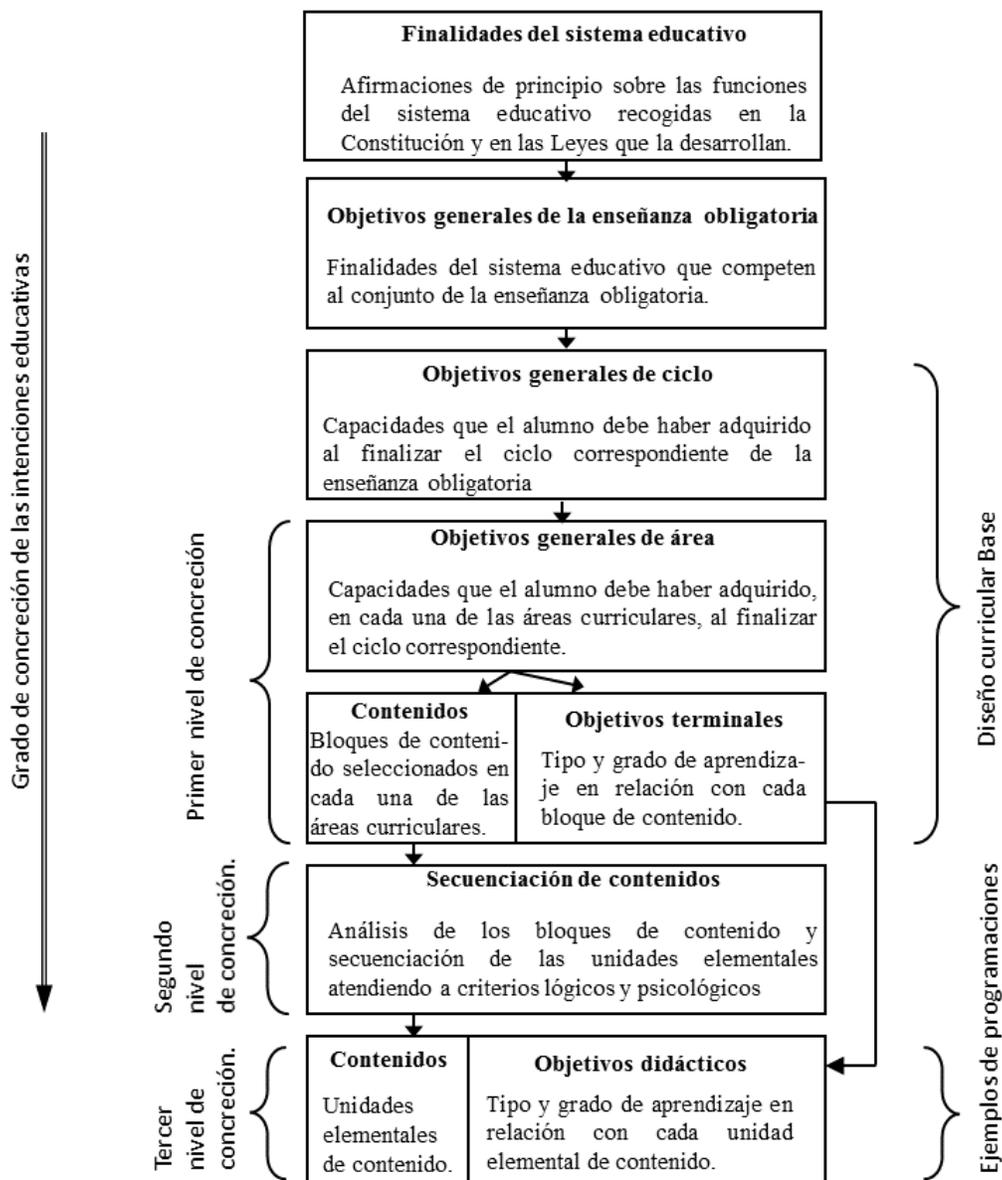


Figura 4.3. Proceso de concreción de las intenciones educativas en el modelo de Diseño Curricular para la enseñanza obligatoria. (Coll, 1991p.65)

Cabe aclarar que la ordenación se realiza no solo siguiendo una lógica de contenido, sino considerando también la estructura psicológica. En ese caso, refiere a considerar los principios del *aprendizaje significativo*. (Coll, 1991, p.105)

Ahora bien, para la organización del contenido se propone ir de lo general a lo más detallado y de lo simple a lo complejo esto, plantea Coll (1991) “tiene como finalidad que el alumno sea consciente en todo momento del contexto y de la importancia de los contenidos que son objeto de la enseñanza.” (p. 85)

Esta panorámica global se denomina epítome. Aquí se integrarán únicamente aquellos contenidos esenciales, es decir, aquellos que son fundamentales y representativos. Aquellos contenidos que forman parte del epítome son los objetos de enseñanza de forma aplicativa.

Así, el proceso de la elaboración consiste en ir realizando esta secuencia de resúmenes, síntesis y epítomes en diferentes niveles.

4.2.5 Propuestas actuales

En los últimos años se ha replanteado el enfoque bajo el cual se diseña un Plan de Estudios, quedando en términos de la concepción social que se tiene para el estudiante del Nivel Superior. Al respecto, Díaz-Barriga (2013) menciona que

Se intenta vincular a las instituciones de educación superior con el sector productivo, por lo que se ha planteado como eje primordial la reforma de la currícula de las instituciones de educación superior tomando como base de la formación el enfoque por competencias desde el cual se definen nuevos perfiles de egreso acordes con las necesidades de desarrollo de los diferentes países (p.89).

Así bien, esta reflexión propone una modificación del currículo en términos de los enfoques por competencias. Sin embargo, esta no es la única vía.

Derivado de las declaraciones mundiales en las que se dictaron las políticas para el nivel de Educación Superior, los contenidos orientan hacia los siguientes aspectos: Movilidad del estudiante, aprendizaje centrado en el estudiante, atención a la diversidad, calidad, tecnología educativa. (Díaz-Barriga, 2013, p. 90)

En el caso particular de la Ingeniería, y atendiendo a este nuevo enfoque por competencias, Langereis, Hu y Feijs (2013) proponen un modelo sobre la forma en la que se concibe el aprendizaje, esto busca modificar la manera en la que se distribuyen los contenidos en el

ámbito curricular. Además, ellos centran su atención en la modelación como una tarea importante para el ingeniero y que debe formar parte de su formación.

Así, en la figura 4.4 se plantea el modelo denominado por ellos como tradicional en donde primero se enseña el contenido matemático y, posteriormente, se aplica y se contrasta con el modelo basado en un enfoque por competencias donde se propone un proyecto y, a partir del mismo, se recurre a las herramientas tanto matemáticas como del área de Ciencias que se requieren para trabajar con el proyecto.

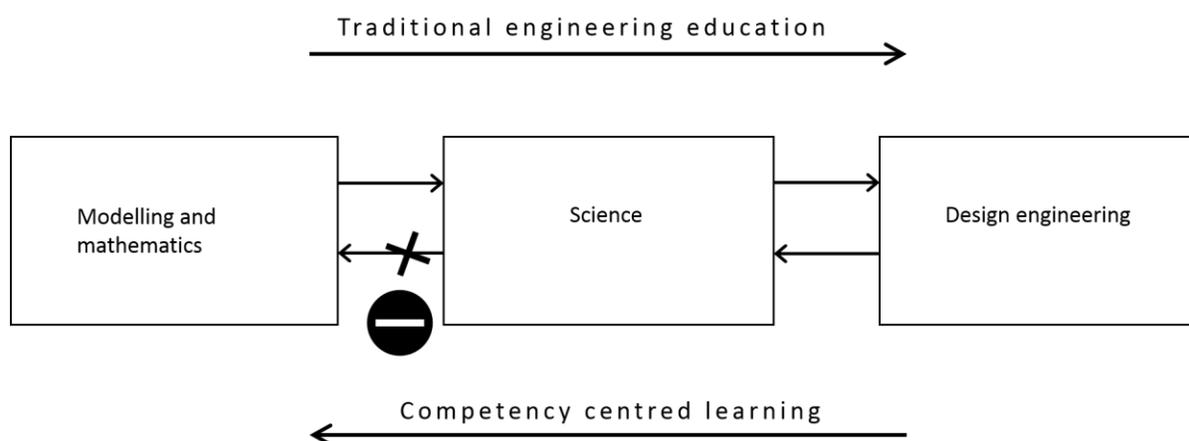


Figura 4.4. Dirección de aprendizaje unidireccional en la educación tradicional y la dirección opuesta en el aprendizaje centrado en competencias. (Langereis, Hu y Feijs, 2013, p. 556)

4.3. El caso del Plan de Estudios de Ingeniería Mecatrónica

A partir de las reflexiones anteriores podemos notar que el diseño del Plan de Estudios parte de reflexionar las necesidades de la población y de cómo responder a estas. Así, en el año 2010 se oferta por primera vez la carrera de Ingeniería Mecatrónica en la UNAM.

Como se muestra en la figura 4.3, se deben esclarecer no solo las necesidades, sino qué se pretende lograr. Esto se refleja en los objetivos y Perfil de Egreso y Profesional que se citaron en el capítulo anterior.

Consecuentemente, se plantea qué necesita saber (o saber hacer un ingeniero). Aquí es preciso aclarar la importancia del enfoque pedagógico bajo el cual se genera la propuesta de la carrera. Para este caso, el Perfil de Egreso se redacta considerando las cuatro partes de las competencias: conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes (donde se suelen incluir los

valores). Ello implicaría pensar en un enfoque basado en competencias, no solo en el perfil, sino en la elaboración del Plan de Estudios.

A partir de esto, es importante retomar la propuesta establecida en la figura 4.4, donde Langereis et al. (2013) proponen una dirección distinta para un aprendizaje por competencias. Esto, de manera enfocada en una asignatura, pero propuesto para toda la Malla Curricular. Es decir, a lo largo del Plan de Estudios. En su propuesta, consideran partir de la elaboración de proyectos, y considerar solo aquella matemática que habrán de necesitar, contrario a lo que se propone en lo que Langeris et al. (2013) denominan la educación de Ingeniería Tradicional, donde se aprende primero la matemática abstracta, luego las ciencias y posteriormente se aplica en la Ingeniería.

Es así, como podemos notar que, por un lado, el Perfil de Egreso considera un enfoque basado en competencias y, por otro lado, un Plan de Estudios que redacta objetivos, temas y contenidos sin hacer explícito las habilidades, actitudes, destrezas, etcétera, que se deben considerar para lograr ese perfil.

Ahora bien, el camino para llegar a este Perfil de Egreso es por medio del Plan de Estudios, quien nos dice qué enseñar. En el caso del Ingeniero Mecatrónico, qué matemática necesita, además del conocimiento de otras áreas, para poder responder a las necesidades que se le presenten en el ámbito laboral. Así, se dice lo que habrá de saber. Se propone una secuenciación con base en los contenidos. Por ejemplo, para explicar el funcionamiento del motor, primero necesita comprender diferentes aspectos de la matemática, la física, entre otros. Asimismo, primero se explican qué son las corrientes eléctricas, distinguir entre corriente directa y alterna, reconocer las razones trigonométricas en juego, etc. Y con ello, poder explicar cómo funcionan los diferentes motores.

Ahora bien, como menciona Díaz-Barriga (2013), actualmente, se busca que el Plan de Estudios cumpla con aspectos como la flexibilidad o como la movilidad. Para dar respuesta a estas necesidades, en los últimos semestres se proponen asignaturas denominadas como Movilidad, con la finalidad de que el estudiante pueda cursarlas en otros países. Por el lado de la flexibilidad, tenemos asignaturas como Temas Selectos de Programación I, ofertada en el sexto semestre, en donde se le permite al profesor que determine cuáles serán los

contenidos que trabajarán a lo largo del curso. Esas asignaturas se identifican como Temas Selectos y la mayoría se ofertan en el décimo semestre como Asignaturas Optativas.

4.3.1 Los cambios del Mapa Curricular del 2010 reflejados en el Mapa Curricular del 2016

El Mapa Curricular del año 2010 se modificó en el 2016. En el caso particular del conocimiento trigonométrico, observamos lo siguiente:

La inclusión del tema denominado como Trigonometría en la asignatura llamada Álgebra. Esto llevó a modificar la Bibliografía Básica y a mover el último tema de la asignatura llamada Estructuras Algebraicas, para colocarlo en la asignatura consecuente (Álgebra Lineal) como primer tema, llamado ahora Grupos y Campos y, por lo tanto, se eliminó el tema llamado Introducción al Álgebra Lineal del Plan de Estudios correspondiente al 2010.

Con esto podemos notar la importancia de incluir conocimiento de Trigonometría de manera explícita dentro del primer semestre. Sin embargo, es necesario identificar el tratamiento que le dan a este tema, pues dentro de nuestra investigación, nos interesa reconocer al conocimiento trigonométrico, pero más aún, sus *usos*.

Cabe destacar que la Bibliografía Básica para revisar dicho tema se eliminó del Plan de Estudios del año 2016. Es preciso aclarar que, para la presente investigación, consultamos el plan anterior con la intención de hallar el libro propuesto para tal tema y poder hacer la revisión de este.

Capítulo 5. Análisis textual

En este capítulo presentamos el marco de codificación como parte del proceso para realizar el ACC. Para su elaboración, es importante señalar que las categorías y subcategorías generadas en el marco de codificación tienen la intención de describir los *usos* del conocimiento trigonométrico a partir de sus *funcionamientos* y *formas*.

Ahora bien, de acuerdo con los ocho pasos planteados en la figura 3.1, haremos una breve referencia a los primeros dos, abordados en el capítulo 1.

5.1 Establecer la pregunta de investigación

Nuestro interés es reconocer los *usos* que tienen el conocimiento trigonométrico para el estudiante de Ingeniería Mecatrónica. Esto tiene la intención de conocer una trayectoria de *usos* del conocimiento trigonométrico a lo largo de dicha carrera y poder así, identificar si existe o no una desarticulación de estos *usos*.

5.2 Selección del material

Hacemos un acercamiento al Plan de Estudios y a los Programas de Estudio de cada asignatura que forma parte de este plan y con ello, revisamos los libros indicados en la Bibliografía Básica propuesta por cada programa para identificar las herramientas trigonométricas: *razón trigonométrica*, *función trigonométrica* y *serie trigonométrica*. Recordemos que, como lo indicamos en el capítulo 2, nos referimos a estas tres herramientas como parte del conocimiento trigonométrico.

Cabe aclarar que se consultó al menos uno de los libros propuestos dentro de la Bibliografía Básica y recomendado por cada tema. Es decir, todos los temas fueron cubiertos por al menos un libro de texto de los indicados en la Bibliografía Básica. Así bien, la identificación de los contenidos explicitados en los Programas de Estudio fue asociada con los capítulos y temas de al menos un libro de los propuestos en la Bibliografía Básica.

Posteriormente, se realizó la búsqueda del conocimiento trigonométrico en los capítulos, temas, subtemas o páginas asociadas a los contenidos de aprendizaje expuestos en los Programas de Estudio.

A continuación, se enlistan las asignaturas del Plan de Estudios en donde se encontró conocimiento trigonométrico:

- Primer semestre
 - Álgebra
 - Cálculo y Geometría Analítica
- Segundo semestre
 - Álgebra Lineal
 - Cálculo Integral
 - Estática
 - Física Experimental
- Tercer semestre
 - Cálculo Vectorial
 - Ecuaciones Diferenciales
 - Cinemática y Dinámica
 - Manufactura I
- Cuarto semestre
 - Electricidad y Magnetismo
 - Análisis Numérico
 - Matemáticas Avanzadas
- Quinto semestre
 - Análisis de Circuitos
 - Ingeniería de Materiales
 - Mecánica de Sólidos
 - Termofluidos
- Sexto semestre
 - Electrónica Básica
 - Mecanismos
 - Modelado de Sistemas Físicos
- Séptimo semestre
 - Diseño de Elementos de Máquinas
- Octavo semestre

- Máquinas Eléctricas
- Optativa de Ingeniería Aplicada
- Noveno semestre
 - Diseño Mecatrónico
 - Robótica
- Décimo semestre
 - Optativas de Ingeniería Aplicada

La lista de las asignaturas optativas para ingeniería aplicada, donde identificamos conocimiento trigonométrico, es la siguiente:

- Acústica y Óptica
- Dinámica de Maquinaria
- Introducción a Sistemas No Lineales
- Biomecánica
- Ingeniería Automotriz I
- Ingeniería Automotriz II
- Mecánica de Fluidos

Con excepción de Introducción a Sistemas No Lineales, las demás asignaturas pueden cursarse o bien en el octavo semestre, o bien en el décimo.

5.3 Construcción del marco de codificación

Una vez realizada la selección de nuestro material, procedemos a la elaboración del marco de codificación. Para ello Schreier (2012) separa este paso en dos partes: la selección de datos y la estructuración del marco de codificación.

5.3.1 Selección de datos

Una vez identificado el conocimiento trigonométrico en nuestro material y clasificado por asignatura, repetimos nuestro criterio de selección sobre los temas y contenidos de cada Programa de Estudio. De esta forma identificamos los contenidos asociados a las páginas de los libros de texto en donde se exhiben las herramientas trigonométricas. Las cuales, a su vez, se estructurarán como unidades de codificación en el siguiente apartado.

Así, los temas y contenidos en donde se identificó el conocimiento trigonométrico se muestran en la siguiente tabla. Su organización se realiza por semestres con la intención de plantear así una trayectoria de *usos*.

	Asignatura	Temas	Contenidos	Bibliografía consultada
Primer Semestre	Álgebra	1. Trigonometría	1.1 Definición de las funciones trigonométricas para un ángulo cualquiera.	Andrade, Castañeda, Nolasco y Parada (1990) ¹
			1.2 Definición de las funciones trigonométricas para un ángulo agudo en un triángulo rectángulo.	
			1.3 Signo de las funciones trigonométricas en los cuatro cuadrantes.	
			1.4 Valores de las funciones trigonométricas para ángulos de 30, 45 y 60 grados y sus múltiplos.	
			1.5 Identidades trigonométricas.	
			1.7 Ley de senos y ley de cosenos.	
	3. Números complejos	3.2 Forma polar o trigonométrica: definición de módulo, de argumento y de igualdad de números complejos en forma polar. Operaciones en forma polar: multiplicación, división, potenciación y radicación.	León (2014) ²	
		3.3 Forma exponencial o de Euler. Operaciones en forma exponencial: multiplicación, división, potenciación y radicación.		
	6. Matrices y determinantes	6.5 Transposición de una matriz y sus propiedades. Matrices simétricas, antisimétricas y ortogonales.	León (2014) y Swokowski y Cole (2011) ³	
		6.6 Definición de determinante de una matriz y sus propiedades. Cálculo de determinantes: regla de Sarrus, desarrollo por cofactores método de condensación.		
	Cálculo y Geometría Analítica	1. Secciones cónicas	1.5 Rotación de ejes	De Oteyza, Lam, Hernández, Carrillo y Ramírez (2015) ⁴
		2. Funciones	2.5 Funciones algebraicas: polinomiales, racionales e irracionales. Funciones pares e impares. Funciones trigonométricas directas e inversas y su representación gráfica	Stewart (2008a) y Andrade y Crail (2010)
2.9 Formulación de funciones como modelos matemáticos de problemas físicos y geométricos.				
3. Límites y continuidad		3.1 Concepto de límite de una función en un punto. Interpretación geométrica	Stewart (2008a)	
		3.2 Existencia de límite de una función. Límites de las funciones constante e identidad. Enunciados de		

¹ En los años 2006 y 2010 se realizaron reimpresiones de este libro. En el Programa de Estudio de la asignatura de Álgebra, la Bibliografía Básica considera la reimpresión del año 2010.

² La edición propuesta en la Bibliografía Básica refiere al año 2011.

³ La edición propuesta en la Bibliografía Básica refiere al año 2007.

⁴ La edición propuesta en la Bibliografía Básica refiere al año 2008

Segundo Semestre	Cálculo Integral		teoremas sobre límites. Formas determinadas e indeterminadas. Cálculo de límites	Stewart (2008a), Andrade y Crail (2010) y Larson y Edwards (2010a)	
			3.4 Obtención del límite de $\sin x$, $\cos x$ y $(\sin x) / x$ cuando x tiende a cero. Cálculo de límites de funciones trigonométricas		
			3.5 Concepto de continuidad. Límites laterales. Definición y determinación de la continuidad de una función en un punto y en un intervalo. Enunciado de los teoremas sobre continuidad.		
		4. La derivada y aplicaciones	4.4 Derivación de las funciones trigonométricas directas e inversas. Derivación de las funciones hiperbólicas, directas e inversas		
			4.6 Derivación de funciones expresadas en las formas implícita y paramétrica		
			4.8 Aplicaciones geométricas de la derivada: dirección de una curva, ecuaciones de la recta tangente y la recta normal, ángulo de intersección entre curvas		
			4.9 Aplicación física de la derivada como razón de cambio de variables relacionadas		
		6. Álgebra vectorial	6.5 Producto escalar y propiedades		Castañeda (2006)
			6.8 Ángulo entre dos vectores y cosenos directores		
			6.9 Producto vectorial, interpretación geométrica y propiedades		
			6.12 Representación cartesiana, paramétrica y vectorial de las cónicas		
			6.13 Curvas en el espacio. Representación cartesiana, paramétrica y vectorial.		
		7. Recta y plano	7.1 Ecuación vectorial y ecuaciones paramétricas de la recta. Distancia de un punto a una recta		Castañeda (2006)
			7.2 Condición de perpendicularidad y condición de paralelismo entre rectas. Ángulo entre dos rectas. Distancia entre dos rectas. Intersección entre dos rectas		
			7.4 Distancia de un punto a un plano. Ángulos entre planos		
7.8 Ángulo entre una recta y un plano					
Segundo Semestre	Álgebra Lineal	2. Espacios vectoriales	Grossman y Flores (2012)		
		4. Espacios con producto interno	Grossman y Flores (2012)		
	Cálculo Integral	1. Sucesiones y series	1.1 Definición de sucesión. Límite y convergencia de una sucesión. Sucesiones monótonas y acotada	Stewart (2008a)	
1.2 Definición de serie. Convergencia de una serie. Propiedades y condiciones para la convergencia					
1.4 Series de términos positivos. Criterios de comparación y del cociente o de D'Alembert.					
1.5 Series de signos alternados. Criterio de Leibniz					
1.7 Desarrollo de funciones en series de potencias. Serie de Maclaurin, de Taylor y desarrollo de funciones trigonométricas.					

	2. Las integrales definida e indefinida	2.1 Concepto de sumas de Riemann. Concepto de integral definida. Interpretación geométrica y propiedades.	Stewart (2008a)
		2.2 Enunciado e interpretación geométrica del teorema del valor medio del cálculo integral	
		2.3 Definición de la integral indefinida a partir de la integral definida con el extremo superior variable. Enunciado y demostración del teorema fundamental de cálculo	
		2.4 Determinación de integrales indefinidas inmediatas. Cambio de variable	
		2.6 Regla de L'Hôpital y sus aplicaciones a formas indeterminadas en límites de funciones.	
		2.7 La integral impropia	
		3. Métodos de integración	
	3.2 Integrales de expresiones trigonométricas e integración por sustitución trigonométrica.		
	3.3 Integración por descomposición en fracciones racionales		
	3.4 Aplicaciones de la integral definida al cálculo de: área en coordenadas cartesianas, longitud de arco en coordenadas cartesianas y polares, y volúmenes de sólidos de revolución		
	4. Derivación y diferenciación de funciones escalares de varias variables	4.1 Definición de funciones escalares de variable vectorial. Región de definición	Stewart (2008b)
		4.2 Representación gráfica para el caso de funciones de dos variables independientes. Curvas de nivel	
4.3 Conceptos de límites y continuidad para funciones escalares de variable vectorial de dos variables independientes			
4.4 Derivadas parciales e interpretación geométrica para el caso de dos variables independientes. Vector normal a una superficie. Ecuaciones del plano tangente y de la recta normal.			
4.5 Derivadas parciales sucesivas. Teorema de derivadas parciales mixtas			
4.6 Función diferenciable. Diferencial total.			
4.7 Función de función. Regla de la cadena			
4.9 Concepto de gradiente. Operador nabla. Definición de derivada direccional. Interpretación geométrica y aplicaciones			
Física Experimental	3. Mecánica clásica	3.1 Campo de estudio de la mecánica clásica y de la dinámica. Conceptos de posición, desplazamiento, velocidad media, velocidad instantánea, rapidez, aceleración media y aceleración instantánea, masa, fuerza, peso, trabajo, energía, energía cinética y energía potencial gravitatoria. Planeación del experimento	Young y Freedman (2009b)
	6. Electromagnetismo	6.1 Campo de estudio del electromagnetismo. Conceptos de carga eléctrica y sus tipos, campo eléctrico, diferencia de potencial, corriente eléctrica y campo magnético. Planeación del experimento.	Young y Freedman (2009b)
	7. Movimiento ondulatorio	7.1 Conceptos de onda y onda viajera. Ondas longitudinales y transversales. Onda estacionaria. Ondas viajeras unidimensionales armónicas. Amplitud y longitud de onda, número de onda y frecuencia	Young y Freedman (2009a)

Tercer Semestre	Estática		angular. La función de onda para una onda armónica, frecuencia, rapidez de propagación y modos de vibración. Planeación del experimento	
		8. Óptica geométrica	8.3 Modelo matemático de la relación entre el ángulo de incidencia y el ángulo de reflexión; modelo matemático entre el seno del ángulo de incidencia y el seno del ángulo de refracción.	Young y Freedman (2009b)
		1. Fundamentos de la mecánica clásica newtoniana	1.3 Modelos de cuerpos que se emplean en la mecánica clásica y cantidades físicas escalares y vectoriales	Beer, Johnston, Mazurek y Eisenberg (2010) ⁵
		2. Conceptos básicos de la estática	2.2 Composición y descomposición de la representación vectorial de una fuerza	Beer et al. (2010)
			2.5 Diagrama de cuerpo libre	
		3. Sistemas de fuerzas equivalentes	3.1 Momentos de una fuerza con respecto a un punto y a un eje	Beer et al. (2010)
			3.6 Sistema general de fuerzas y su sistema fuerza-par equivalente	
	4. Centros de gravedad y centroides	4.3 Centroide de un área	Beer et al. (2010)	
	5. Estudio del equilibrio de los cuerpos	5.3 Condiciones necesarias y suficientes de equilibrio para un cuerpo rígido.	Beer et al. (2010)	
		5.5 Determinación de reacciones de apoyos y ligaduras de sistemas mecánicos en equilibrio		
	6. Fricción	6.3 Fricción en seco	Beer et al. (2010)	
	Cálculo Vectorial	1. Máximos y mínimos de funciones de dos o más variables	1.2 Deducción del criterio de la segunda derivada para funciones de dos y tres variables. Conceptos de matriz y determinantes hessianos. Resolución de problemas	Larson y Edwards (2010b)
		2. Funciones vectoriales	2.1 Definición de función vectorial de variable escalar y de función vectorial de variable vectorial. Ejemplos físicos y geométricos y su representación gráfica para los casos de una, dos o tres variables independientes. Concepto de campo vectorial.	Larson y Edwards (2010b)
2.2 Definición, interpretación geométrica y cálculo de la derivada de funciones vectoriales de variable escalar y de las derivadas parciales de funciones vectoriales de variable vectorial. Propiedades de la derivada de funciones vectoriales.				
2.7 Coordenadas polares. Ecuaciones de transformación. Curvas en coordenadas polares: circunferencias, cardioides, lemniscatas y rosas de n pétalos.				

⁵ La versión propuesta en la Bibliografía Básica corresponde al año 2013, décima edición.

Ecuaciones Diferenciales		2.8 Coordenadas cilíndricas circulares y coordenadas esféricas. Ecuaciones de transformación, factores de escala, vectores base y Jacobiano.	
	3. Integrales de línea	3.2 La integral de línea como modelo matemático del trabajo y sus representaciones vectorial, paramétrica y diferencial. Conceptos físico y matemático de campo conservativo.	Larson y Edwards (2010b)
		3.3 Concepto de función potencial. Integración de la diferencial exacta. Obtención de la función potencial en coordenadas polares, cilíndricas y esféricas. Relación entre la independencia de la trayectoria, la diferencial exacta y el campo conservativo.	
	4. Integrales múltiples	4.3 Superficies. Ecuación cartesiana, ecuaciones paramétricas y ecuación vectorial de superficies cuádricas.	Larson y Edwards (2010b)
		4.4 Aplicaciones de la integral doble en el cálculo de áreas, volúmenes y momentos de inercia. Cálculo de integrales dobles con cambio a otros sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonales.	
		4.5 Teorema de Green, aplicaciones.	
		4.6 Integral de superficie, aplicaciones. Cálculo del área de superficies alabeadas en coordenadas cartesianas y cuando están dadas en forma vectorial	
		4.7 Concepto e interpretación geométrica de la integral triple. Integral reiterada en tres dimensiones. Cálculo de la integral triple en regiones regulares. Cálculo de volúmenes. Integrales triples en coordenadas cilíndricas, esféricas y en algún otro sistema de coordenadas curvilíneas.	
		4.8 Teorema de Stokes. Teorema de Gauss.	
	1. Ecuaciones diferenciales de primer orden lineales y no lineales	1.1 Definición de ecuación diferencial. Ecuación diferencial ordinaria. Definición de orden de una ecuación diferencial	Zill (2015)
		1.2 Solución de la ecuación diferencial: general y particular. Definición de solución singular.	
		1.3 Problema de valor inicial	
		1.5 Ecuaciones diferenciales de variables separables	
1.7 Ecuaciones diferenciales exactas. Factor integrante.			
1.8 Ecuación diferencial lineal de primer orden. Solución de la ecuación diferencial homogénea asociada. Solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden			
2. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior	2.4 Solución de la ecuación diferencial lineal de orden n no homogénea. Método de coeficientes indeterminados. Método de variación de parámetros.	Zill, Wright y Cullen (2012)	
3. Transformada de Laplace y	3.1 Definición de la transformada de Laplace. Condición suficiente para la existencia de la	Zill et al. (2012)	

Cinemática y Dinámica	sistemas de ecuaciones diferenciales lineales	transformada de Laplace. La transformada de Laplace como un operador lineal. Teorema de traslación en el dominio de s (primer teorema de traslación). Transformada de la n -ésima derivada de una función. Derivada de la transformada de una función. Transformada de la integral de una función. Definición de las funciones: rampa, escalón e impulso unitarios, así como sus respectivas transformadas de Laplace. Teorema de traslación en el dominio de t (segundo teorema de traslación)	
		3.2 Transformada inversa de Laplace. La no unicidad de la transformada inversa. Linealidad de la transformada inversa. Definición de convolución de funciones. Uso del teorema de convolución para obtener algunas transformadas inversas de Laplace.	
	4. Introducción a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales	4.2 El método de separación de variables	Zill et al. (2012)
		4.3 Serie trigonométrica de Fourier. Serie seno de Fourier. Serie coseno de Fourier. Cálculo de los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier	
	1. Cinemática de la partícula	1.3 Movimiento rectilíneo. Ecuaciones y gráficas del movimiento. Movimientos, rectilíneo uniforme, con aceleración constante y con aceleración variable	Hibbeler (2010)
		1.4 Movimiento curvilíneo. Componentes cartesianas. Componentes normal y tangencial.	
	2. Cinética de la partícula	2.3 Movimiento rectilíneo: fuerzas constantes y variables.	Hibbeler (2010)
		2.4 Movimiento curvilíneo: componentes cartesianas y tiro parabólico; componentes normal y tangencial	
	3. Trabajo y energía e impulso y cantidad de movimiento de la partícula	3.1 Método de trabajo y energía	Hibbeler (2010)
		3.3 Método de impulso y cantidad de movimiento	
4. Cinemática del cuerpo rígido	4.1 Definición de movimiento plano. Definiciones de traslación pura, rotación pura y movimiento plano general	Hibbeler (2010)	
	4.2 Rotación pura. Velocidad y aceleración angulares del cuerpo rígido.		
	4.3 Movimiento plano general. Obtención de las ecuaciones de los diferentes tipos de movimiento plano de los cuerpos rígidos.		
	4.4 Cinemática de algunos mecanismos. Mecanismo de cuatro articulaciones		
5. Cinética del cuerpo rígido	5.2 Obtención de las ecuaciones cinéticas del movimiento plano del cuerpo rígido	Hibbeler (2010)	

Cuarto Semestre	Manufactura		5.3 Traslación pura. Magnitud, dirección y posición de la resultante de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo	Groover (2007) ⁶
			5.4 Rotación pura. Características del par de fuerzas equivalente al sistema que actúa sobre el cuerpo. Aceleración angular del cuerpo	
		3. Instrumentos de medición	3.1 Mesa de coordenadas, medición con láser.	
		8. Procesos con arranque de viruta	8.1 Procesos con arranque de virutas; sus bondades y limitaciones	
	8.3 Taladros, sus aplicaciones y clasificación. Tipos de brocas, barrenos pesados y barrenos ciegos, machueado, avellanado			
	Electricidad y Magnetismo	1. Campo y potencial eléctricos	1.2 Ley de Coulomb. Fuerza eléctrica en forma vectorial. Principio de superposición	Resnick, Halliday y Krane (2008) ⁷
			1.3 Campo eléctrico como campo vectorial. Esquemas de campo eléctrico	
			1.4 Obtención de campos eléctricos en forma vectorial originados por distribuciones discretas y continuas de carga (carga puntual, línea infinita y superficie infinita)	
			1.5 Concepto y definición de flujo eléctrico	
			1.8 Energía potencial eléctrica. Diferencia de potencial y potencial eléctricos	
		4. Magnetoestática	4.2 Fuerza magnética, como vector, sobre cargas en movimiento	Young y Freedman (2013)
			4.3 Definición de campo magnético (B).	
			4.5 Ley de Biot-Savart y sus aplicaciones. Cálculo del campo magnético de un segmento de conductor recto, espira en forma de circunferencia, espira cuadrada, bobina y solenoide.	
			4.7 Concepto y definición de flujo magnético. Flujo magnético debido a un conductor recto y largo, a un solenoide largo y a un toroide	
4.9 Fuerza magnética entre conductores, momento dipolar magnético				
5. Inducción electromagnética		5.1 Ley de Faraday y principio de Lenz	Young y Freedman (2013)	
		5.2 Fuerza electromotriz de movimiento		
Análisis Numérico		1. Aproximación numérica y errores	1.3 Conceptos de aproximación numérica y error	Burden y Faires (2011)
	1.4 Tipos de error: Inherentes, de redondeo y por truncamiento. Errores absoluto y relativo.			
	1.6 Aproximación de funciones por medio de polinomios			

⁶ La Bibliografía Básica propone la editorial Prentice-Hall. Sin embargo, la última edición que pertenece a esa editorial corresponde al año 1997. El autor, el año y la edición coinciden con descrita en la Bibliografía Básica del Programa de Estudio de Manufactura.

⁷ El libro consultado corresponde a la séptima reimpresión (2008), mientras que en la Bibliografía Básica se menciona la reimpresión que corresponde al año 2011. Los autores, la edición y la editorial coinciden entre la fuente consultada y la que se propone.

Matemáticas Avanzadas	2. Solución numérica de ecuaciones algebraicas y trascendentes	2.1 Métodos cerrados. Método de bisección y de interpolación lineal (regla falsa). Interpretaciones geométricas de los métodos.	Burden y Faires (2011)
		2.2 Métodos abiertos. Método de aproximaciones sucesivas y método de Newton-Raphson. Interpretaciones geométricas de los métodos y criterios de convergencia.	
		2.3 Método de factores cuadráticos.	
	4. Interpolación, derivación e integración numéricas	4.1 Interpolación con incrementos variables (polinomio de Lagrange).	Burden y Faires (2011)
		4.3 Derivación numérica. Deducción de esquemas de derivación. Extrapolación de Richardson.	
		4.4 Integración numérica. Fórmulas de integración trapecial y de Simpson. Cuadratura gaussiana	
	5. Solución numérica de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales	5.1 Método de la serie de Taylor	Burden y Faires (2011)
		5.2 Método de Euler modificado.	
		5.3 Método de Runge-Kuta de 2° y 4° orden.	
		5.4 Solución aproximada de sistemas de ecuaciones diferenciales	
		5.5 Solución de ecuaciones diferenciales de orden superior por el método de diferencias finitas.	
		5.6 El problema de valores en la frontera.	
	6. Solución numérica de ecuaciones en derivadas parciales	6.1 Clasificación de las ecuaciones en derivadas parciales	Burden y Faires (2011)
		6.2 Aproximación de derivadas parciales a través de diferencias finitas.	
1. Variable compleja	1.1 Funciones de variable compleja y mapeos	Aguilar y Monsiváis (2004)	
	1.3 Funciones analíticas y mapeos conformes		
	1.4 Integrales de línea de funciones de variable compleja		
	1.5 Teorema integral de Cauchy		
	1.6 Fórmulas integrales de Cauchy		
	1.7 Series de Laurent y teorema del residuo		
	2.1 Funciones periódicas y señales físicas		Hsu (1987) ⁸
	2.2 Propiedades de ortogonalidad de las funciones trigonométricas sobre un intervalo		
	2.3 Definición de las series trigonométricas de Fourier		
	2.4 Condiciones de Dirichlet y enunciado de las propiedades de convergencia		
	2.5 Propiedades de paridad		
	2.6 Forma compleja de la serie de Fourier		

⁸ La edición propuesta en la bibliografía básica corresponde al año 2002, cuya editorial pertenece a Pearson. Sin embargo, no hubo nuevas ediciones, solo reimpressiones en la editorial Addison-Wesley, hasta 1999. La versión consultada corresponde a la primera edición e impresión en español, impresa en Estados Unidos.

Quinto Semestre	Análisis de Circuitos		2.7 Espectros de frecuencias.	
		3. Análisis de Fourier (Transformada de Fourier)	3.1 La integral y la transformada de Fourier	Hsu (1987) y Zill et al. (2012)
			3.2 Ejemplos de transformadas de Fourier	
			3.3 Propiedades de la transformada de Fourier.	
			3.4 La transformada de Fourier discreta	
	Análisis de Circuitos	1. Elementos básicos de circuitos resistivos	1.2 Ley de Ohm y convención pasiva de signos; potencia eléctrica y conservación de la carga, resistores en serie y en paralelo, transformación deltaestrella.	Hayt, Kemmerly y Durbin (2012)
			1.3 Leyes de Kirchhoff, métodos de análisis de circuitos: por mallas y por nodos, principio de superposición	
		2. Circuitos resistivos con fuentes independientes y dependientes	2.3 Amplificador operacional como aplicación de circuitos con fuentes dependientes; configuración inversora, no inversora, el sumador, el seguidor y el comparador.	Hayt et al. (2012)
		3. Análisis del estado transitorio de circuitos RC, RL y RLC	3.3 Interpretación de las respuestas libre y forzada de los circuitos RC y RL con condiciones iniciales; respuesta a las señales básicas: escalón, impulso, exponencial y sinusoidal; aplicación del teorema de Thévenin para el planteamiento de la ecuación de circuitos RC y RL; análisis del circuito integrador con amplificador operacional	Hayt et al. (2012)
			3.4 Circuito RLC serie con fuente de voltaje y paralelo con fuente de corriente: modelo matemático, ecuación característica y valores característicos; análisis de los diferentes tipos de respuesta libre de circuitos de segundo orden y su relación con los valores característicos: no amortiguada, subamortiguada, críticamente amortiguada y sobreamortiguada; respuesta completa de circuitos de segundo orden con condiciones iniciales: respuesta libre, natural u homogénea y respuesta forzada, permanente o particular; método de variables de estado para el planteamiento del modelo matemático de circuitos eléctricos de segundo orden; modelo matricial de circuitos de segundo orden	
		4. Circuitos en estado sinusoidal permanente	4.1 Respuesta forzada de circuitos RC, RL y RLC a una excitación sinusoidal; función de excitación exponencial compleja; concepto de fasor; impedancia (resistencia y reactancia) y admitancia (conductancia y susceptancia) de elementos capacitivos e inductivos.	Hayt et al. (2012)
			4.2 Análisis de circuitos en estado sinusoidal permanente: fuentes dependientes, leyes de Kirchhoff y métodos de corrientes de malla y de voltajes de nodo usando fasores; aplicación de los teoremas de superposición y de Thévenin para el análisis de	

			<p>circuitos en estado sinusoidal permanente; diagramas fasoriales.</p> <p>4.4 Concepto de potencia instantánea y promedio; valor efectivo o eficaz (rms) de una señal periódica; concepto de potencia compleja; factor de potencia y ángulo de potencia; problemas de corrección del factor de potencia de una instalación eléctrica.</p>		
		Ingeniería de Materiales	<p>2. Fuerzas interatómicas y ordenamiento cristalino</p> <p>4. Comportamiento mecánico</p>	<p>2.2 Redes de Bravais</p> <p>4.5 Ley de Schmidt</p>	<p>Askeland, Fulay y Wright (2011)</p> <p>Askeland et al. (2011)</p>
	Mecánica de Sólidos	2. Antecedentes	2.2 Ecuaciones de equilibrio	2.4 Momento polar de inercia	Hibbeler (2011)
			4. Esfuerzo y deformación		
		4.2 Esfuerzo cortante	4.4 Deformación normal		
		4.5 Deformación a corte	4.6 Representación gráfica del estado de esfuerzo y de deformación por medio del círculo de Mohr		
		7. Esfuerzos por flexión y cortantes en vigas	7.2 Determinación de los esfuerzos en una viga sometida a flexión.	Hibbeler (2011)	
		8. Esfuerzos bajo cargas combinadas y transformación de esfuerzos	8.3 Transformación de esfuerzos y de deformaciones	Hibbeler (2011)	
	8.4 Círculo de Mohr para estados de esfuerzo y deformación en el plano				
	Termofluidos	3. Conceptos básicos de mecánica de fluidos	3.9 Bomba centrífuga (2hP).		Potter, Wiggert y Ramadan (2012) ⁹
Sexto	Electrónica Básica	2. Diodos	2.3 Aplicaciones: rectificadores, multiplicadores de voltaje, recortadores, fijadores y compuertas con diodos	Boylestad y Nashelsky (2009) ¹⁰ y Schilling, Belove,	

⁹ El libro consultado coincide con los datos redactados en la Bibliografía Básica (autores, nombre, lugar, edición y editorial), excepto en el año (2011).

¹⁰ El libro consultado coincide con los datos redactados en la Bibliografía Básica (autores, nombre, lugar, edición y editorial), excepto en el año (2010).

				Apelewicz y Saccardi (1993) ¹¹	
Mecanismos	1. Cinemática del cuerpo rígido plano y generalidades sobre mecanismos	1.2 Descripción del movimiento plano por medio de matrices y números complejos	1.3 Posición, velocidad y aceleración de los puntos de un cuerpo rígido en el plano. 1.4 Teoremas relativos al movimiento de cuerpos rígidos	Suh y Radcliffe (1978) ¹²	
	2. Análisis de mecanismos con pares inferiores	2.3 Análisis entrada-salida. Ecuación de Freudenstein	2.4 Análisis del movimiento de los puntos de la barra acopladora. 2.5 Movilidad de los mecanismos	Suh y Radcliffe (1978)	
	3. Síntesis de mecanismos con pares inferiores	3.2 Síntesis de mecanismos para generación de función	3.4 Aplicaciones de las trayectorias de los puntos de la barra acopladora al diseño de mecanismos con seis eslabones. 3.5 Mecanismos cognados y sus aplicaciones, ángulo de transmisión	Suh y Radcliffe (1978)	
	4. Análisis y síntesis de mecanismos con pares superiores	4.2 Análisis del mecanismo leva-seguidor de cara plana	4.4 Síntesis del mecanismo leva-seguidor de cara plana	Norton (2009) ¹³	
5. Trenes de engranes	5.2 Acoplamiento de los dientes de dos engranes. La involuta	5.3 Determinación del perfil de un diente de involuta	Norton (2009)		
6. Dinámica plana	6.1 Fuerzas y momentos en el plano	6.2 Momentos de inercia y teoremas.	Suh y Radcliffe (1978)		
Modelado de Sistemas Físicos	1. Modelado de sistemas físicos	1.3 Representación de sistemas mediante ecuaciones diferenciales	Rodríguez (1989)		
	2. Características dinámicas de los sistemas físicos	2.2 Sistemas de segundo orden: respuesta impulso, respuesta escalón, polos dominantes	Rodríguez (1989)		

¹¹ Se consultó la tercera edición cuya editorial corresponde a McGraw-Hill. En la Bibliografía Básica se propone la segunda edición, con editorial Alfaomega, del año 1991.

¹²El libro consultado coincide con los datos de la Bibliografía Básica, excepto en el año. Se recomienda la versión del año 1983, sin embargo, en nuestra búsqueda no encontramos registro que corresponda ese año.

¹³ La Bibliografía Básica recomienda la versión del año 2005, no indica edición.

Séptimo Semestre	Diseño de Elementos de Máquinas	1. Criterios de falla	1.1 Criterios de falla estática	Budynas y Nisbett (2008) ¹⁴
		2. Diseño de flechas	2.4 Sujeción de acoplamiento sobre flechas	Budynas y Nisbett (2008)
			2.5 Guía general de diseño de flechas	
		3. Diseño de engranes	3.1 Descripción general: tipos y aspectos geométricos de los engranes	Budynas y Nisbett (2008)
			3.2 Análisis de fuerzas en engranes	
			3.4 Engranes helicoidales: ecuaciones de esfuerzo y resistencia por flexión.	
			3.5 Engranes cónicos, rectos y helicoidales, transmisiones cruzadas	
			3.6 Transmisiones con tornillo sinfín-corona	
		4. Diseño de transmisiones con elementos flexibles	4.2 Tipos de bandas, parámetros geométricos y fuerzas involucradas en una transmisión. Uso de los diferentes tipos de banda y selección de elementos comerciales	Budynas y Nisbett (2008)
			4.4 Tipos de cadena, parámetros geométricos y fuerzas involucradas en una transmisión. Uso de los diferentes tipos de cadena y selección de elementos comerciales	
5. Cálculo y selección de rodamientos	5.3 Cargas estática y dinámica en rodamientos	Budynas y Nisbett (2008)		
6. Diseño de resortes y muelles	6.2 Resortes helicoidales, a compresión, extensión y torsión	Budynas y Nisbett (2008)		
7. Frenos y embragues	7.1 Cálculo de frenos de tambor	Budynas y Nisbett (2008)		
	7.2 Cálculo de frenos y embragues de disco y cónicos			
	7.3 Cálculo de frenos de cinta			
Octavo Semestre	Máquinas Eléctricas	1. Introducción a los principios de la máquina	1.1 Leyes básicas del magnetismo: leyes de Ampere, ley de Faraday, ley de Lenz, principios de la conversión de energía	Chapman (2012) ¹⁵
			1.2 Campo magnético y circuitos magnéticos	
			1.4 Corrientes: real o activa, reactiva y aparente en corriente alterna	
			1.5 Triángulo de potencias, factor de potencia.	
		2. Transformadores	2.1 Generalidades	Pérez (1994)
			2.5 Aspectos prácticos del circuito eléctrico equivalente; regulación de tensión o voltaje.	
		3. Motores de inducción	3.1 Generalidades y elementos que conforman el motor de inducción. Estator y rotor.	Pérez (1994) y Chapman (2012)
			3.2 Principio de operación del motor trifásico. Campo magnético giratorio	

¹⁴ En la Bibliografía Básica se sugiere la versión del año 2012, que corresponde a la novena edición.

¹⁵ La Bibliografía Básica recomienda la versión del año 2007, aunque no especifica la edición a utilizar. La cuarta edición corresponde al año 2005 y la quinta (la que se consultó en esta investigación), se publicó en el año 2012. Los datos de autor, título, país y editorial coinciden con los de la Bibliografía Básica y el libro utilizado.

Noveno Semestre	Diseño Mecatrónico	3.4 El rotor y su comportamiento eléctrico 3.5 Circuito eléctrico equivalente; análisis y determinación de sus parámetros. 3.8 Motores monofásicos de inducción.	Pérez (1994)			
				4. Máquinas síncronas	4.1 Generalidades	
					4.5 Principio de operación del motor síncrono	
		4.7 Control del factor de potencia, operación como condensador síncrono.				
		5. Máquinas de corriente directa		5.9 Fuerza electromotriz inducida	Chapman (2012)	
		7. Motores de uso especial		7.2 Motores de reluctancia	Chapman (2012)	
	Robótica	2. Descripción espacial de cuerpos rígidos	2.1 Conocimientos y técnicas de diseño mecánico, diseño electrónico, diseño de software.	Isermann (2005) ¹⁶		
			2.1 Sistemas de referencia. 2.2 Descripción de la posición. 2.3 Descripción de la orientación. 2.4 Traslación y rotación. 2.5 Formulación de Gibbs para la rotación. 2.6 Transformaciones homogéneas.	Barrientos, Peñin, Balaguer y Aracil (2007), Tsai (1999), Saha (2010), Ollero (2001) ¹⁷ y Craig (2005)		
					3. Cinemática espacial	3.1 Tipos de estructuras y método de Denavit Hartenberg
						3.2 Ecuaciones de cerradura en orientación y posición.
3.3 Cinemática de cadenas abiertas.						
3.4 Método solución de la cinemática directa e inversa.						
3.6 Singularidades.						
4. Dinámica de manipuladores		4.2 Ecuaciones de Newton-Euler.	Ollero (2001)			
		4.3 Ecuaciones de Euler-Lagrange.				
5. Sistemas de control		5.2 Linealización de modelos.	Saha (2010), Reyes (2011) y Craig (2005)			
		5.3 Controladores recurrentes: PD y PID.				
		5.4 Sistemas no lineales y variantes con el tiempo.				
Décimo		Acústica y Óptica	1. Conceptos básicos	1.3 Reflexión y refracción.	Young y Freedman (2009b)	
	1.5 Polarización.					
	2. Ondas	2.4 Ondas armónicas	Hecht (2000)			
		2.5 Grupos y paquetes de ondas. Velocidades de fase y de grupo				

¹⁶ El libro consultado coincide con el recomendado en la Bibliografía Básica, excepto en el año, puesto que se indica como 2003. La versión consultada corresponde a la segunda reimpresión, pero ambos son de la primera edición.

¹⁷ En la Bibliografía Básica se propone la versión del año 2007.

			2.8 Ondas planas y la ecuación diferencial de onda tridimensional.	
			2.9 Ondas esféricas	
		4. Ondas electromagnéticas	4.3 Ecuaciones de onda de los campos eléctricos y magnéticos	Hecht (2000) y Young y Freedman (2009b)
			4.4 Características de los campos en las ondas electromagnéticas	
		5. Fenómenos de reflexión y refracción	5.2 Leyes de la reflexión y la refracción	Hecht (2000) y Young y Freedman (2009b)
			5.3 Superficies reflectoras planas y esféricas	
			5.4 Superficies refractoras planas y esféricas	
			5.7 Lentes esféricas gruesas y delgadas	
			5.8 Sistemas de lentes	
		6. Fenómenos de propagación	6.7 Coeficientes y relaciones de Fresnel. Ángulo de Brewster.	Young y Freedman (2009b)
		7. Interferencia	7.1 Concepto de interferencia. Patrón de interferencia	Hecht (2000)
			7.4 Experimento de Young	
	7.5 Interferencia por doble reflexión			
	7.6 Interferómetros de Michelson y Fabry-Pero			
	8. Difracción	8.2 Difracción de Fraunhofer por aberturas rectangulares y circulares	Hecht (2000)	
		8.3 Rejilla de difracción		
		8.4 Difracción de Fresnel por aberturas circulares. Zonas de Fresnel		
	9. Polarización	9.1 Estados de polarización lineal y elíptica	Hecht (2000)	
		9.3 Ley de Malus		
Dinámica de Maquinaria	1. Dinámica del cuerpo rígido	1.1 Introducción a la cinemática espacial de cuerpos rígidos	Hibbeler (2010)	
		1.3 Momentos de inercia y teoremas.		
	2. Aplicaciones dinámicas	2.2 Balanceo estático y dinámico	Norton (2009) ¹⁸	
		2.4 Fuerzas recíprocas en motores		
		2.5 Motores en línea y en V		
	3. Introducción a las vibraciones mecánicas	3.1 Sistemas libres y amortiguados	Hibbeler (2010)	
3.3 Sistemas forzados respuesta a excitación armónica				
Introducción a Sistemas No Lineales	1. Introducción	1.1 Sistemas no lineales	Khalil (2002)	
	3. Comportamiento de sistemas dinámicos no lineales	3.4 No linealidades estáticas en sistemas dinámicos y su interpretación física: saturación, zona muerta, fricción de Coulomb, conmutador, huelgo, histéresis, no linealidades estáticas con efectos de histéresis.	Slotine y Li (1991)	
	4. Función descriptiva	4.3 Ecuaciones de sistema que incluyen la función descriptiva; gráficas y su interpretación.		

¹⁸ Se recomienda la quinta edición correspondiente al año 2013.

			4.4 Procedimiento para derivar funciones descriptivas específicas.	Slotine y Li (1991) ¹⁹
		5. Estabilidad de sistemas no lineales	5.3 Estabilidad: estabilidad de sistemas lineales (ecuación de Lyapunov) y estabilidad local de sistemas no lineales.	Slotine y Li (1991)
			5.4 Estabilidad en el sentido de Lyapunov: método directo, método indirecto (o por linealización).	
			5.5 Ejemplos de análisis de sistemas no lineales con base en los métodos directo e indirecto de Lyapunov.	
	6. Fundamentos de control no lineal	6.2 Control basado en linealización exacta (linealización por retralimentación)	Slotine y Li (1991)	
	Biomecánica	3. Modelo estático, cinemático y dinámico	3.1 Determinación de fuerzas. Sistemas estáticamente determinados e indeterminados	Hamill, Knutzen y Derrick (2015) ²⁰
			3.2 Métodos para la medida de fuerza	
			3.5 Análisis dinámico del movimiento	
		4. Biomecánica articular	4.2 Analogías mecánicas de las articulaciones.	Hamill et al. (2015)
			4.4 Articulación de la rodilla	
4.5 Otras articulaciones				
Ingeniería Automotriz I	2. Llantas y rines	2.3 Resistencias a la rodadura.	Reimpell, Stoll y Belzler (2001)	
	3. Elastocinemática de la rueda	3.2 Centro y eje de rotación del vehículo (Roll Centre and Roll Axis)	Reimpell et al. (2001)	
		3.3 Ángulo Camber.		
		3.4 Ángulo de convergencia (Toe)		
		3.5 Ángulo de la dirección y radio de giro (Steer angle and steering ratio).		
		3.6 Ángulo Kingpin (Kingpin inclination and kingpin offset)		
		3.7 Ángulo Caster.		
	5. Cinemática del resorte	5.3 Comportamiento de los resortes	Reimpell et al. (2001)	
		5.4 Tipos de resortes y amortiguadores		
	6. Dinámica del chasis	6.1 Centro de gravedad y propiedades de conducción	Reimpell et al. (2001)	
6.2 Comportamiento al frenado y aceleración				
Ingeniería Automotriz II	2. Mediación del flujo de potencia	2.1 Requerimientos de potencia	Lechner y Naunheimer (1999)	
	4. Encuadre del motor y la transmisión.	4.1 Diagrama de tracción	Lecher y Naunheimer (1999)	

¹⁹ En la Bibliografía Básica se recomienda el libro titulado *Ingeniería de Control Moderna*, con la autoría de Ogata, correspondiente a la primera edición. Sin embargo, no encontramos información para el tema recomendado (4. Función descriptiva). Por ello, revisamos el tema utilizando el libro de Slotine y Li (1991), el cual se recomienda para los demás temas de la asignatura.

²⁰ En la Bibliografía Básica se recomienda la tercera edición que corresponde al año 2008.

		6. Vehículos híbridos	6.2 Cálculo de las cargas del camino	Miller (2004) ²¹
		8. Planta de potencia y dimensionamiento	8.1 Especificación de la planta de potencia	Miller (2004)
			8.2 Dimensionamiento del sistema de impulsión.	
		9. Tecnologías en los sistemas híbridos	9.1 Tecnología en el sistema de impulsión eléctrica	Miller (2004)
	9.2 Almacenamiento de energía.			
	Mecánica de Fluidos	1. Introducción	1.3 Propiedades de los fluidos: densidad, peso específico, viscosidad, esfuerzo, presión, tensión superficial, módulo de elasticidad volumétrica, presión de vapor	White (2011) y Potter y Wiggert (2002)
		2. Estática de fluidos	2.1 Presión hidrostática.	White (2011) y Potter y Wiggert (2002)
			2.4 Fuerzas sobre superficies sumergidas	
			2.5 Flotación y estabilidad de la flotación	
		3. Ecuaciones de conservación en forma integral	3.5 Ecuación de Bernoulli	Potter y Wiggert (2002)
3.7 Ecuaciones de la cantidad de movimiento lineal y angular.				
6. Flujo compresible unidimensional	6.1 Ondas acústicas. Cono de Mach.	Potter y Wiggert (2002)		

5.3.2 Estructuración del marco de codificación

Las categorías y subcategorías del marco de codificación se describen con base en los *funcionamientos* y *formas* que tiene la *razón trigonométrica*, *función trigonométrica* y *serie trigonométrica*.

Así, el contexto que nos permite identificar los *usos* de cada herramienta se presenta en los libros de texto. Por ello, realizamos una discusión sobre el conocimiento trigonométrico y el contexto en el que se ubica dentro de los libros revisados para identificar sus *funcionamientos* y *formas*.

Dividimos el análisis en semestres para poder reconocer la trayectoria de *usos* que tiene cada herramienta trigonométrica y su relación temporal.

²¹ La Bibliografía Básica lo recomienda para los temas 1,2,3 y 4. Sin embargo, en el temario, los temas y contenidos coinciden en gran medida, con los enunciados en los temas 6,7, 8 y 9. Por lo que el libro de Lechner y Naunheimer (1999) es utilizado para los primeros cinco temas que coinciden con los indicados en su índice.

Primer Semestre

Dentro del primer semestre identificamos dos asignaturas en donde se aborda el conocimiento trigonométrico: 1) Álgebra y 2) Cálculo y Geometría Analítica.

En la asignatura de Álgebra el primer tema que se enseña es Trigonometría. En este caso, el **objetivo** a alcanzar es reforzar los conceptos trigonométricos. Para ello, la Bibliografía Básica propone abordarlo con Andrade et al. (1990).

Así bien, los autores consideran al triángulo rectángulo para explicar las razones trigonométricas de un ángulo agudo, como el que se muestra en la figura 5.1. Posteriormente muestran una tabla que expresa a cada una de las razones trigonométricas como cociente de las longitudes de dos lados del triángulo rectángulo que se muestra en la figura 5.1.

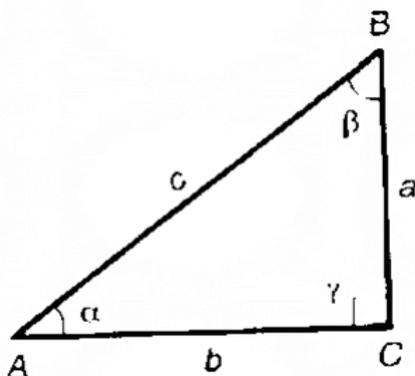


Figura 5.1 Triángulo rectángulo con ángulo $\gamma=90^\circ$. (Andrade et al., 1990,p. 41)

Así, Andrade et al. (1990) proponen ejercicios en los que se asocia a las razones trigonométricas como el cociente de dos números y estos representan el valor numérico de la longitud de los dos lados del triángulo, determinados por la razón trigonométrica elegida (seno, coseno, tangente, cotangente, secante o cosecante).

Así, la *forma perceptible* de la razón trigonométrica se expresa como el cociente del valor numérico de dos lados de un triángulo rectángulo. Por otro lado, su *funcionamiento* consiste en identificar el lado al que corresponde el valor numérico del numerador y del denominador, respectivamente.

Posteriormente, Andrade et al. (1990) muestran los casos particulares de dos triángulos: cuyos ángulos miden 30° y 60° , y cuyos ángulos miden 45° . Al respecto, en el primer caso,

deducen que el valor numérico del seno de 60° es igual al de coseno de 30° . Esto, porque los números asignados en el cociente son iguales.

De manera similar se deducen otras igualdades dentro de las razones trigonométricas. Por ello, solo nos referiremos a la explicación de la razón seno de un ángulo. En algunos casos se incluirán otras razones para su análisis. De lo contrario, habrá de asumirse que el uso de las demás razones trigonométricas es el mismo.

En el caso del ángulo de 45° , se propone un triángulo rectángulo con catetos que tienen la misma longitud, la unidad. Con base en esto, argumentan que ambos ángulos miden 45° . Posteriormente, aplicando el Teorema de Pitágoras para encontrar el valor numérico de la hipotenusa ($\sqrt{2}$), determinan el valor del seno de 45° expresado como cociente de 1 (valor del cateto opuesto) entre $\sqrt{2}$. Es decir:

$$\text{sen}45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

De esta manera, determina al seno de 45° como una razón cuyo dividendo es la unidad y el divisor es la raíz cuadrada del número dos. Pero estos adquieren un significado como longitudes puesto que, estas se relacionan con el triángulo en concreto de la figura 5.2.

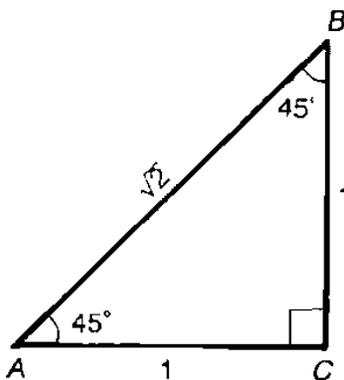


Figura 5.2 Triángulo rectángulo con ambos catetos iguales a la unidad y con ángulos en A y B con valor de 45° . (Andrade et al, 1990, p.45)

Es importante notar que, en este caso, su *forma perceptible* de la razón seno, sigue siendo un cociente de manera explícita entre dos longitudes que corresponden al cateto y a la hipotenusa.

Para el caso del triángulo con un ángulo de 60° y 30° se muestra el siguiente triángulo.

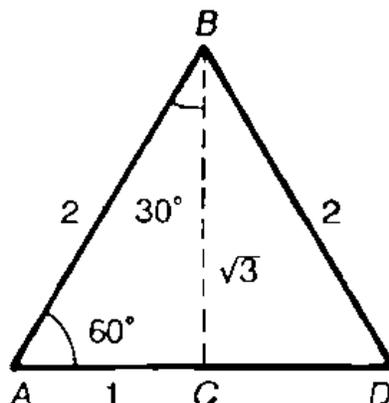


Figura 5.3 Triángulo equilátero ABD, cuya longitud de los segmentos AB y BD valen 2 unidades. (Andrade et al., 1990, p.44)

Andrade et al. (1990) hacen un planteamiento similar para el caso de los ángulos de 30° y 60° en donde el *funcionamiento* es identificar la igualdad de dos razones trigonométricas distintas. Las *formas* son por medio de la igualdad numérica del cociente con relación a la razón asociada. Por ejemplo, el seno de 60° es igual al cociente de la raíz cuadrada de 3 entre la raíz cuadrada de 2, lo que es a su vez igual al coseno de 30° . De esta manera se deducen las igualdades entre diferentes razones trigonométricas.

Posteriormente, se muestran algunos ejercicios en donde se pide encontrar el valor numérico de las expresiones. Cabe destacar que, para cada caso, la pregunta se expresa como un cociente. Por ejemplo,

$$\frac{(\sec 45^\circ \csc 45^\circ)^2}{\tan 45^\circ + \sec 60^\circ}$$

Como consecuencia, el *significado* asociado a la razón trigonométrica para este primer apartado corresponde a un valor numérico. Es decir, hallar la cantidad específica al sustituir cada uno de los datos, de los cuales ya se tiene la información basada en las deducciones que se hicieron sobre el ángulo de 45° y los ángulos de 60° y 30° .

Posteriormente, Andrade et al. (1990) hacen una transición de escenario. Es decir, pasan del triángulo que se presenta en la escuela, particularmente en la educación secundaria mexicana,

donde se presenta por primera vez el triángulo rectángulo y las razones trigonométricas asociadas al mismo (Cantoral et al.,2015), para pasar a un triángulo en el plano cartesiano.

Para esta explicación, Andrade et al. (1990) muestran en primera instancia, una tabla donde se exhibe la relación de signos de cada una de las razones, dependiendo del cuadrante en el que se “utilice” la razón trigonométrica. Por ejemplo, en el primer cuadrante, las razones seno y cosecante tienen signo positivo.

Para la explicación, dibujan un punto P determinado con coordenadas rectangulares (x,y) . La distancia del origen al punto P , es un segmento que tiene un ángulo θ con respecto al eje x . Como se muestra en la figura 5.4a.

Nótese que el punto P se ubica en el primer cuadrante, por lo que el signo de la coordenada x es positivo, al igual que la coordenada y . Con base en este diagrama se trazan los puntos P en los demás cuadrantes y su respectivo ángulo θ (figuras5.4b, 5.4c,5.4d).

A partir de ello se definen las razones trigonométricas del ángulo θ de la siguiente manera:

$$\text{sen}\theta = \frac{\text{ordenada}}{\text{distancia}} = \frac{y}{d}$$

$$\text{cos}\theta = \frac{\text{abscisa}}{\text{distancia}} = \frac{x}{d}$$

$$\text{tan}\theta = \frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}} = \frac{y}{x}$$

Así, la *forma perceptible* de la razón trigonométrica se determina como el cociente de dos longitudes en el plano cartesiano. Las longitudes se determinan por las coordenadas x y y , además de la distancia d , definida como una magnitud. Por lo tanto, el signo lo determinan x y y .

Así, calcular el seno de un ángulo mayor a 90° implica asociarlo con el plano cartesiano y estas longitudes. De esta manera, el ángulo ya no está “dentro” del triángulo rectángulo, con excepción del primer cuadrante, como se había enseñado en la escuela secundaria (Cantoral et al., 2015).

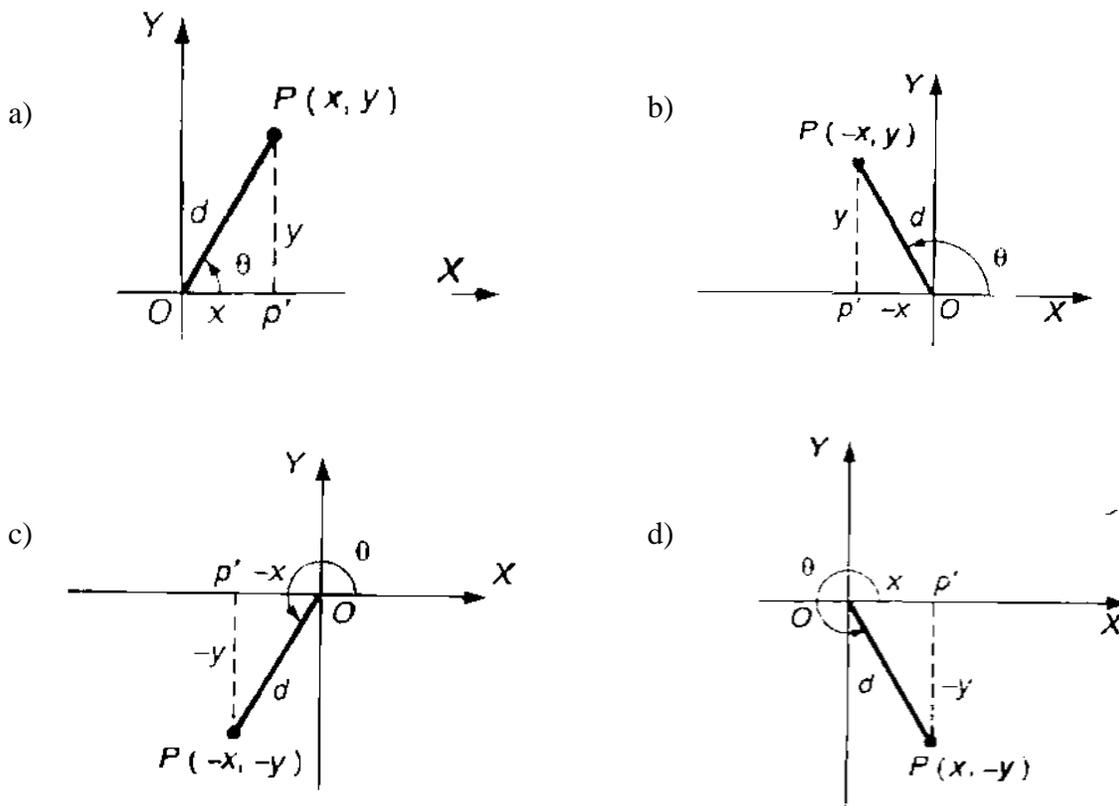


Figura 5.4 a) Posición del punto P en el primer cuadrante, b) posición del punto P en el segundo cuadrante, c) posición del punto P en el tercer cuadrante y c) posición del punto P en el cuarto cuadrante. (Andrade et al., 1990, pp. 50-51)

Para casos en los que el ángulo es mayor a 360° , Andrade et al. (1990) definen los ángulos coterminales como aquellos que resultan de restar múltiplos de 360° . Para ejemplificarlo, proponen encontrar el valor del seno de 405° . Para ello, primero realizan la resta de 405° menos 360° , lo que es igual a 45° . Así, a partir de los resultados anteriores, sustituyen seno de 45° como el cociente de la raíz cuadrada de 2, entre 2.

Cabe aclarar que, para el caso de ángulos negativos, los autores suman múltiplos de 360° .

Al haber determinado anteriormente las razones trigonométricas de los ángulos de 30° , 45° y 60° , utilizan esta información para hallar los de 120° , 135° , 150° , 210° , 225° , 240° , 300° , 315° y 330° . Para esto, consideran a los ángulos suplementarios dentro del plano cartesiano. Por ejemplo, para determinar el valor numérico de las razones trigonométricas de 150° , consideran al ángulo de 30° . De tal manera que 150° más 30° es igual a 180° .

En la figura 5.5 se muestra el caso mencionado en el ejemplo anterior. Podemos observar que el triángulo con el que se trabaja es OPP' cuyo ángulo α vale 30° . Así, determinan que el

valor numérico del seno de 30° es igual al de 150° , de manera similar para las demás razones trigonométricas y para hallar los demás ángulos que se mencionaron en el párrafo anterior.

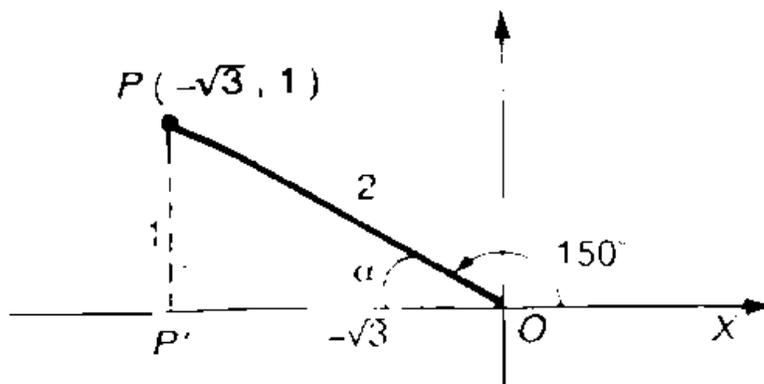


Figura 5.5 Diagrama para determinar las razones trigonométricas del ángulo de 150° . (Andrade et al., 1990, p.55)

Así, las explicaciones ofrecidas para hallar los valores numéricos de las razones trigonométricas de los ángulos giran en torno al plano cartesiano. Es decir, se preserva la *forma perceptible* de la razón trigonométrica como el cociente de dos longitudes correspondientes a las coordenadas de la posición de un punto en el plano cartesiano o a la distancia del origen a la posición de dicho punto. Cabe destacar que su *funcionamiento* es hallar el valor numérico de la razón trigonométrica de un ángulo asociado a un triángulo en el plano cartesiano. La *forma* para hallar ese valor considera la interpretación de la posición sobre el plano cartesiano, lo que le permitirá asociar a la posición del punto, con respecto a las longitudes que habrán de manifestarse en valores numéricos. Es decir, se requiere de una acción que llamaremos *geométrico-espacial*, la cual describimos como aquella acción que **demanda al estudiante el apoyo de habilidades visuales**, así como estrategias para manipular (mover, girar, cambiar de tamaño, proyectar de dos a tres dimensiones, o viceversa, etcétera) los objetos propuestos en los libros de texto.

Es preciso aclarar que, para calcular el seno de cualquier ángulo distinto a los que se explicaron, **no se especifica cómo hacerlo**, por lo que deducimos que estas operaciones se realizan con la calculadora, como se trabajaba en la educación secundaria mexicana.

Posteriormente, para abordar el contenido de las identidades trigonométricas y las leyes de los senos y cosenos, Andrade et al. (1990) muestran una clasificación de ecuaciones, **sin hacer explícito de dónde provienen** (figura 5.6). A partir de las ecuaciones dadas se solicita al estudiante simplificar expresiones trigonométricas (para el contenido de las identidades trigonométricas) o encontrar valores faltantes de un triángulo (en el contenido de leyes de senos y cosenos), por ejemplo, dados dos ángulos y un lado, calcular el valor de otro lado (figura 5.7).

Identidades pitagóricas:

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta = 1 \quad (1)$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \quad (2)$$

$$1 + \cot^2 \theta = \operatorname{csc}^2 \theta \quad (3)$$

Identidades inversas:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{\operatorname{csc} \theta} \quad \text{o} \quad \operatorname{csc} \theta = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \quad (4)$$

$$\operatorname{cos} \theta = \frac{1}{\operatorname{sec} \theta} \quad \text{o} \quad \operatorname{sec} \theta = \frac{1}{\operatorname{cos} \theta} \quad (5)$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta} \quad \text{o} \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} \quad (6)$$

Identidades por cociente:

$$\tan \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cos} \theta} \quad \text{o} \quad \cot \theta = \frac{\operatorname{cos} \theta}{\operatorname{sen} \theta} \quad (7)$$

Figura 5.6 Identidades trigonométricas organizadas en tres grupos: pitagóricas, inversas y por cociente. (Andrade et al., 1990, p. 70)

Es decir, las identidades trigonométricas tienen un *uso* algebraico porque la intención de las actividades es simplificar estas expresiones por medio de la elección y sustitución conveniente de otras expresiones equivalentes. Consecuentemente, su *funcionamiento* es reducir expresiones trigonométricas, mediante la *forma* hacer operaciones algebraicas.

Ahora bien, con base en la figura 5.7, notamos que las leyes de los senos y de los cosenos tienen un *uso* aritmético porque lo que se solicita es calcular el valor faltante por medio de la sustitución. Así, su *funcionamiento* es encontrar el valor numérico del ángulo o la longitud de un triángulo, por medio de la *forma* de sustitución de valores en la ecuación.

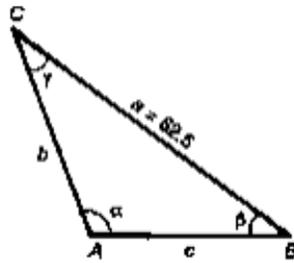


Figura 5.7 Ejemplo donde se pide hallar los valores de b , c y β donde $a=62.5$, $\alpha=112^{\circ}20'$ y $\gamma=42^{\circ}10'$. (Andrade et al. 1990, p. 85)

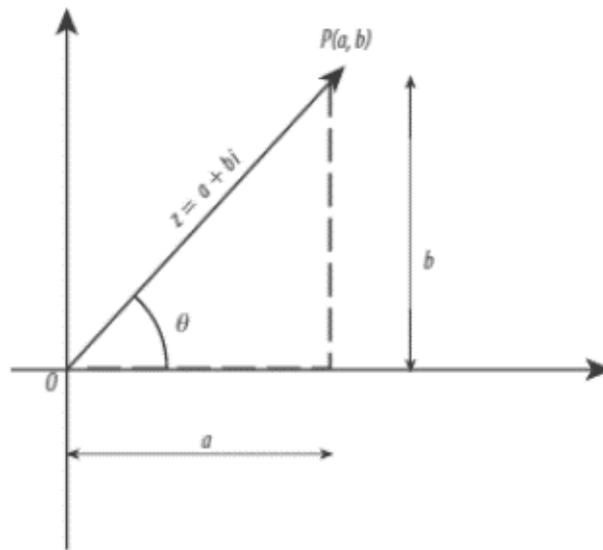


Figura 5.8 Número complejo en su forma cartesiana. (León, 2014, p. 42)

Ahora bien, en el segundo tema de la misma asignatura, Números Complejos, al explicar la forma polar o trigonométrica de estos, León (2014) plantea que la forma del número complejo se determina como un punto de coordenadas a y b como lo muestra la figura 5.8. Pero, para expresarlo de manera trigonométrica, se utiliza el ángulo y el radio, los cuales son determinados por la ecuación que considera el seno y coseno. Es decir:

$$z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Así su *funcionamiento* de la razón es para hallar los valores de la entrada real y compleja mediante la *forma* identificar el cateto opuesto (abscisa) y el cateto adyacente (ordenada) del triángulo rectángulo y la *forma* relacionar el ángulo θ con la longitud de la entrada real (por

medio del seno del ángulo) y la entrada compleja (por medio del coseno del ángulo). En consecuencia, la razón trigonométrica sirve para pasar de la forma polar a la forma cartesiana de un número complejo y viceversa.

Es importante aclarar que para León (2014) la forma polar o trigonométrica la define a partir de la fórmula de Euler:

$$z = re^{i\theta}$$

Sin embargo, de acuerdo con la organización de los contenidos que corresponden a este tema, primero se enseña la forma polar del número complejo y posteriormente la forma exponencial o de Euler. Por ello, inferimos que la denominada forma polar para León (2014) es la que, en el Plan de Estudios refiere como la forma exponencial.

Así, para llegar a esta ecuación León (2014) demuestra la fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Esto lo hace con las series de Taylor de las funciones $\sin(x)$, $\cos(x)$ y e^x y considerando $x = \theta i$. Cabe aclarar que la enseñanza del contenido de series de Taylor se aborda en el cuarto semestre, por lo que se requiere de haber enseñado un conocimiento previo para establecer la función de Euler, lo cual, **provoca una desarticulación sobre el conocimiento con el que cuenta el estudiante y el que se demanda** para esta demostración.

De esta manera, la fórmula de Euler utiliza a la herramienta función, y no razón, trigonométrica. Sin embargo, cuando León (2014) establece la igualdad

$$z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

Por un lado, utiliza la razón trigonométrica para pasar de la forma cartesiana a la que nosotros denominados como polar. Pero, por otro lado, utiliza a la función trigonométrica para transitar de la forma polar a la exponencial.

De esta manera se genera una desarticulación del *uso* que se le da a estas dos herramientas trigonométricas puesto que para este caso el *significado* asociado a la razón trigonométrica es como cociente de dos longitudes del triángulo, mientras que el *significado* asociado a la función trigonométrica es como una suma infinita de expresiones algebraicas.

Ahora bien, dentro del tema 6. Matrices y determinantes, León (2014) presenta la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \text{sen } x & -\text{cos } x \\ \text{cos } x & \text{sen } x \end{pmatrix}$$

Y pide que se compruebe si es una matriz ortogonal, es decir, comprobar si el producto de A con su transpuesta (A^t) es igual a la matriz unidad (I).

En este caso, una propuesta para resolver el ejercicio es haciendo el producto de las matrices, esto es:

$$AA^t = \begin{pmatrix} \text{sen } x & -\text{cos } x \\ \text{cos } x & \text{sen } x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{sen } x & \text{cos } x \\ -\text{cos } x & \text{sen } x \end{pmatrix}$$

Entonces, el producto de cada entrada queda de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} (\text{sen } x)(\text{sen } x) + (-\text{cos } x)(-\text{cos } x) & (\text{sen } x)(\text{cos } x) + (-\text{cos } x)(\text{sen } x) \\ (\text{cos } x)(\text{sen } x) + (\text{sen } x)(-\text{cos } x) & (\text{cos } x)(\text{cos } x) + (\text{sen } x)(\text{sen } x) \end{pmatrix}$$

Ahora bien, en el ejercicio se pretende que la primera entrada, al igual que la última, sean iguales a la unidad; mientras que las otras entradas sean iguales a cero. Una posible *forma* para llegar a estas igualdades es mediante la sustitución de identidades trigonométricas.

Cabe aclarar que, en este ejercicio, no se plantea si se trata de razones o de funciones trigonométricas. Además, cuando Andrade et al. (1990) muestran las identidades trigonométricas, lo hacían considerando a la razón trigonométrica.

Siguiendo este razonamiento, y si tomamos en cuenta que las entradas de la matriz que León (2014) ha propuesto para los demás ejercicios de ese tema, son valores numéricos específicos, inferimos que en este ejercicio se *usa* la razón trigonométrica. Por medio del *funcionamiento* simplificar a valores numéricos, cuya *forma* corresponde a identificar y sustituir identidades trigonométricas. Por lo tanto, en este ejercicio, se les da un tratamiento algebraico y aritmético a las razones trigonométricas.

Un ejercicio similar lo proponen Swokowski y Cole (2011) para calcular el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} \text{sen } x & \text{cos } x \\ \text{cos } x & -\text{sen } x \end{pmatrix}$$

Como en el caso anterior, el tratamiento de la razón trigonométrica seno y coseno es algebraico y aritmético donde su *funcionamiento* y *forma* son los mismos que en el ejercicio anterior.

Analizamos ahora cuáles son los *usos* del conocimiento trigonométrico encontrado en la asignatura de Cálculo y Geometría Analítica.

En el tema 1, Secciones Cónicas, contenido 1.5 Rotación de ejes, De Oteyza et al. (2015) proponen un punto P con coordenadas (x, y) y la intención es describir la posición del mismo punto, pero al realizar una rotación de los ejes cartesianos un ángulo θ (figura 5.9a).

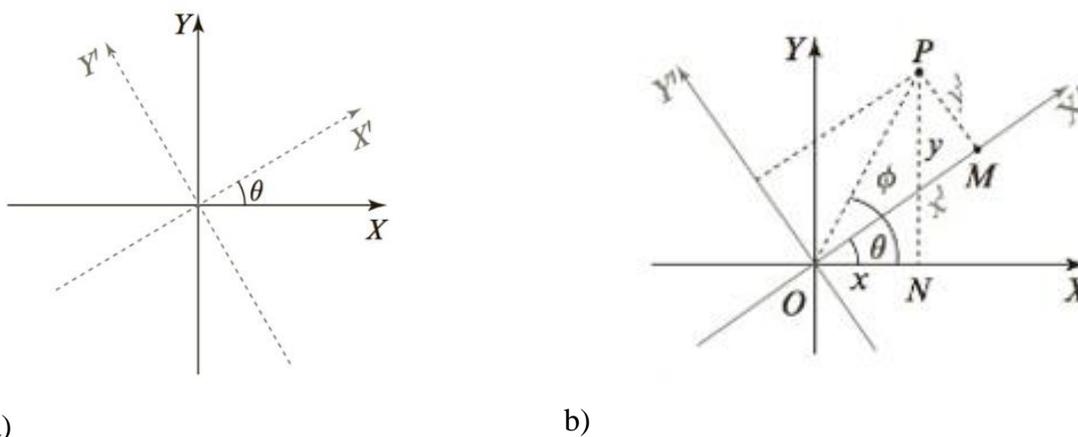


Figura 5.9 a) Rotación de ejes cartesianos en el sentido contrario a las manecillas del reloj, con respecto a los ejes X, Y . b) Posición del punto P con las coordenadas del eje $X'Y'$, a partir de las coordenadas del sistema original. (De Oteyza et al., 2015, p. 469)

De Oteyza et al. (2015) trabajan con los triángulos ONP y OMP y aclaran que, para el segundo, el ángulo que parte del eje X' hacia el punto P es la diferencia del ángulo $\phi - \theta$. De tal manera que, para obtener el valor de x' , la *forma* es asociar el cateto opuesto del ángulo $\phi - \theta$ del triángulo OMP con el valor de la coordenada x' . Es decir:

$$x' = r \cos(\phi - \theta)$$

Donde r se define como la distancia del origen al punto P .

Posteriormente, De Oteyza et al. (2015) aplican lo que ellos llaman fórmula del coseno de la diferencia de ángulos y obtienen lo siguiente:

$$x' = r(\cos\phi\cos\theta + \text{sen}\phi\text{sen}\theta) = (r\cos\phi)\cos\theta + (r\text{sen}\phi)\text{sen}\theta$$

Por otro lado, consideran al triángulo ONP y determinan la relación entre la coordenada y el ángulo \emptyset como sigue

$$x = r \cos \emptyset$$

y

$$y = r \sin \emptyset$$

Posteriormente, sustituyen estas igualdades en la ecuación de x' para tener así, la coordenada x' en términos de las coordenadas del punto P en el sistema original y del ángulo de rotación de los ejes. Se procede de manera similar para la coordenada y' .

Así, el *funcionamiento* de la razón trigonométrica es determinar las coordenadas de un punto P en el eje cartesiano. Sin embargo, es importante destacar que la *forma perceptible* de la razón trigonométrica de la suma de dos ángulos (o diferencia) se asocia con una fórmula, la cual, toma esta suma (o diferencia) de ángulos y la expresa en términos de lo que se ha trabajado anteriormente, es decir, razones trigonométricas de un ángulo y no de la suma (o diferencia) de ángulos.

En consecuencia, las *formas* que sigue este *funcionamiento* son: 1) asociar a las partes del triángulo rectángulo con las coordenadas y la distancia de un punto en el eje cartesiano; 2) sustituir fórmulas trigonométricas de suma y diferencia de ángulos.

Cabe destacar que la primera *forma* demanda de un proceso *geométrico-espacial*. Aunque bien, al realizar la suma o diferencia de ángulos y traducirla a una sustitución dentro de las fórmulas trigonométricas (como se indica en la segunda *forma*), se pierde el proceso geométrico que ayudaría a darle un *significado geométrico-espacial* a estas operaciones y su asociación con las razones trigonométricas.

En el siguiente tema (2. Funciones) Stewart (2008a) presenta a las funciones trigonométricas y enuncia algunas características propias del seno y coseno:

El dominio de la función seno y coseno es $(-\infty, \infty)$ y su alcance es $[-1, 1]$.

Las funciones seno y coseno son periódicas y tienen periodos 2π .

“La naturaleza periódica de estas funciones las hace adecuadas para modelar fenómenos repetitivos como por ejemplo las mareas, los resortes vibratorios y las ondas sonoras” (Stewart, 2008a, p. 33).

Por convención, la medida del ángulo x de las funciones trigonométricas es en radianes. La función tangente tiene periodos π . La función tangente se relaciona como el cociente de la función seno entre la función coseno.

Finalmente, el autor muestra las gráficas de las tres funciones trigonométricas (figura 5.10).

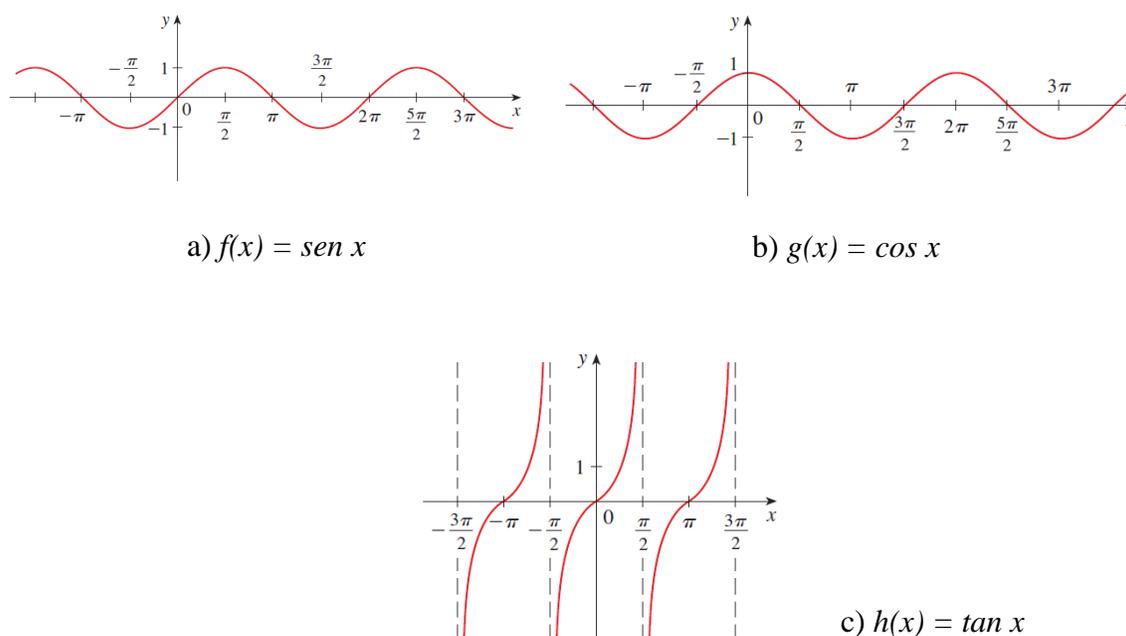


Figura 5.10 a) Gráfica de la función seno de x . b) Gráfica de la función coseno de x . c) Gráfica de la función tangente de x . (Stewart, 2008a, p. 32-33)

Algunos ejercicios que se proponen relativos a este tema consisten en calcular la función en un punto dado, Por ejemplo, Andrade y Crail (2010) plantean calcular $f(0)$, $f(\pi)$, para la función $f(\theta) = \sin 2\theta + \cos \theta$. (p.21).

Así, se le da un *uso* aritmético en estos ejercicios pues lo que se solicita es la sustitución de ángulos convenientes para calcular el valor numérico resultante.

Posteriormente, en los siguientes temas sobre límites, continuidad y derivada. Stewart (2008a) y Larson y Edwards (2010a) plantean varios ejemplos que consisten en calcular límites y derivadas de algunas funciones trigonométricas. Consideremos el siguiente caso:

Stewart (2008a) propone el estudio del límite de una función partiendo de una tabla en donde se anotan los valores de la variable dependiente cuando se “acercas” al límite propuesto y su valor evaluado en la función. Siguiendo este procedimiento, Stewart (2008a) determina el comportamiento de una función para valores cercanos al límite de la variable dependiente. Veamos dos ejemplos: El primero consiste en calcular el límite del cociente de seno del ángulo variable x entre x , cuando x tiende a cero. Es decir,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$$

Stewart (2008a) afirma que esa función no está definida cuando $x=0$. Posteriormente, solicita el uso de la calculadora (aclarando que se tiene que verificar que esté en radianes) para generar una tabla de valores x y $\frac{\text{sen } x}{x}$ (figura 5.11a) y muestra la gráfica de esta función (figura 5.11b). El autor aclara que, con base en la tabla y la gráfica, se puede deducir que el límite de esta función cuando x tiende a cero es 1.

a)

x	$\frac{\text{sen } x}{x}$
± 1.0	0.84147098
± 0.5	0.95885108
± 0.4	0.97354586
± 0.3	0.98506736
± 0.2	0.99334665
± 0.1	0.99833417
± 0.05	0.99958339
± 0.01	0.99998333
± 0.005	0.99999583
± 0.001	0.99999983

b)

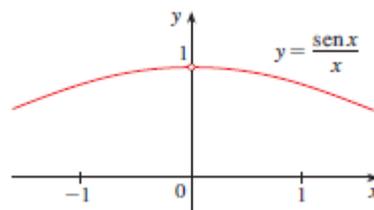


Figura 5.11 a) Tabla de valores asignados a la función que corresponde al cociente de seno de x entre x . b) Gráfica de la función $y = (\text{sen } x) / x$. (Stewart, 2008a, p. 91)

Si bien la intención de esta actividad es calcular el límite de una función trigonométrica, el procedimiento es similar para el cálculo de límites de funciones que no son trigonométricas (elaborar una tabla de valores y observar su comportamiento en la gráfica). Sin embargo, al observar su comportamiento por medio de la gráfica, distinguimos las peculiaridades de la función seno. Es decir, la *forma perceptible* de la función trigonométrica para estos ejercicios

corresponde a una función cuyo dominio son los números reales y el codominio es el intervalo cerrado $[-1,1]$.

De manera similar se trabajan algunos ejemplos con otras funciones trigonométricas dentro del tema 3. Límites y continuidad y 4. Derivadas.

Ahora bien, en el contenido 4.9 sobre aplicación física de la derivada, que se observa como razón de cambio de diferentes variables, Larson y Edwards (2010a) proponen varios ejemplos que relacionan al ángulo con la longitud. Estudiaremos el caso que se ilustra en la figura 5.12.

EJEMPLO 5 Ángulo de elevación variable

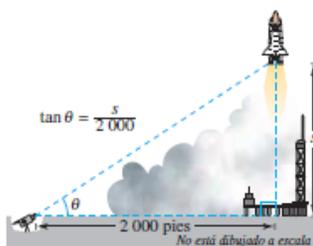
Calcular la razón de cambio del ángulo de elevación θ de la cámara que se muestra en la figura 2.37, diez segundos después del despegue.

Solución Sea θ el ángulo de elevación, como se muestra en la figura 2.37. Cuando $t = 10$, la altura s del cohete es $s = 50t^2 = 50(10)^2 = 5\,000$ pies.

Ritmo dado: $ds/dt = 100t$ = velocidad del cohete

Encontrar: $d\theta/dt$ cuando $t = 10$ y $s = 5\,000$

Utilizando la figura 2.37, relacionar s y θ mediante la ecuación $\tan \theta = s/2\,000$.



Una cámara de televisión, situada a ras del suelo, está filmando el despegue del transbordador espacial, que se mueve verticalmente de acuerdo con la ecuación de posición $s = 50t^2$, donde s se mide en pies y t en segundos. La cámara está a 2 000 pies de la plataforma de lanzamiento

Figura 2.37

Ecuación: $\tan \theta = \frac{s}{2\,000}$ Ver la figura 2.37.

$$(\sec^2 \theta) \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2\,000} \left(\frac{ds}{dt} \right)$$

Derivar con respecto a t .

$$\frac{d\theta}{dt} = \cos^2 \theta \frac{100t}{2\,000}$$

Sustituir $100t$ por ds/dt .

$$= \left(\frac{2\,000}{\sqrt{s^2 + 2\,000^2}} \right)^2 \frac{100t}{2\,000}$$

$\cos \theta = 2\,000/\sqrt{s^2 + 2\,000^2}$.

Cuando $t = 10$ y $s = 5\,000$, se tiene

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\,000(100)(10)}{5\,000^2 + 2\,000^2} = \frac{2}{29} \text{ radianes por segundo.}$$

De tal modo, cuando $t = 10$, θ cambia a razón de $\frac{2}{29}$ radianes por segundo.

Figura 5.12. Ejemplo de la derivada como razón de cambio de un ángulo de elevación variable. (Larson y Edwards, 2010a, p. 152)

En este caso, el *uso* que tiene la función trigonométrica describe un movimiento de un ángulo que se relaciona con su posición. Su *funcionamiento* es como razón de cambio de un ángulo de elevación variable con respecto a la función que describe la posición de un punto dependiente del tiempo. La *forma* es asociar las componentes del triángulo rectángulo con la posición y el ángulo de elevación θ para establecer así la *forma* relación del ángulo de elevación θ con la posición y la distancia horizontal, esto se realiza por medio de la razón tangente.

Posteriormente, se proponen algunos ejemplos que consisten en modelar algunos fenómenos que describen comportamientos periódicos. Por ejemplo, Stewart (2008a) plantea un fenómeno con movimiento armónico simple (figura 5. 13).

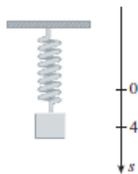


FIGURA 5

EJEMPLO 3 Un objeto que se encuentra en el extremo de un resorte vertical se desplaza hacia abajo 4 cm más allá de su posición de reposo, para estirar el resorte, y se deja en libertad en el instante $t = 0$. (Véase la figura 5 y observe que la dirección hacia abajo es positiva.) Su posición en el instante t es

$$s = f(t) = 4 \cos t$$

Encuentre la velocidad y la aceleración en el instante t y úselas para analizar el movimiento del objeto.

SOLUCIÓN La velocidad y la aceleración son

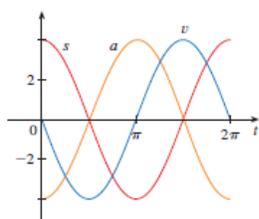


FIGURA 6

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(4 \cos t) = 4 \frac{d}{dt}(\cos t) = -4 \sin t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-4 \sin t) = -4 \frac{d}{dt}(\sin t) = -4 \cos t$$

El objeto oscila desde el punto más bajo ($s = 4$ cm) hasta el punto más alto ($s = -4$ cm). El periodo de la oscilación es 2π , el periodo de $\cos t$.

La rapidez (magnitud de la velocidad) es $|v| = 4|\sin t|$, la cual es máxima cuando $|\sin t| = 1$; es decir, cuando $\cos t = 0$. De modo que el objeto se mueve con la mayor rapidez cuando pasa por su posición de equilibrio ($s = 0$). Su rapidez es 0 cuando $\sin t = 0$; esto es, en los puntos alto y bajo. □

La aceleración $a = -4 \cos t = 0$ cuando $s = 0$. Alcanza la magnitud máxima en los puntos alto y bajo. Observe la gráfica en la figura 6. □

Figura 5.13 Ejemplo de un movimiento armónico simple (Stewart, 2008a, p. 193-194)

Podemos observar que, en esta actividad, el uso de la función trigonométrica es describir el comportamiento de un movimiento armónico simple. Su funcionamiento describe el movimiento de un objeto que se encuentra en el extremo de un resorte, mediante (forma 1) la relación entre la posición del objeto con respecto al tiempo, la cual se tiene por la función coseno y (forma 2) calcular la razón de cambio de la posición con respecto al tiempo y la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo. Finalmente, (forma 3) se asocian las funciones obtenidas con el comportamiento del objeto (periodo de oscilación y su magnitud máxima).

Ahora bien, en el tema 6. Álgebra vectorial los contenidos consisten en abordar las características del vector, su forma de operar (productos y sumas vectoriales) y sus diferentes formas de representarlo.

Así, Castañeda (2006) indica que un vector tiene magnitud, dirección y sentido. Los últimos dos se determinan a partir de lo que el autor define como ángulos directores, los cuales se establecen al colocar al vector en ejes coordenados (espacio cartesiano). Estos ángulos se representan en la figura 5.13

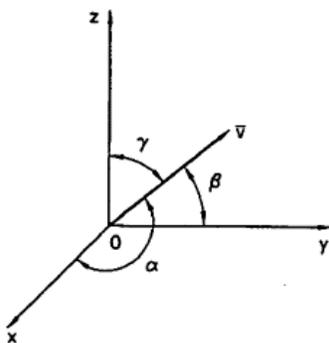


Figura 5.13 Ángulos directores del vector \vec{v} : α es el ángulo que forma \vec{v} con el eje de las abscisas; β es el ángulo que se forma entre \vec{v} y el eje de las ordenadas y γ con el de las cotas. (Castañeda, 2009, p. 30)

A partir de estos ángulos, el autor define a los cosenos directores como el coseno de cada ángulo director. Es decir, la razón trigonométrica coseno del ángulo director α se expresa como

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|}$$

De manera similar para los otros cosenos directores de los ángulos β y γ .

Así, la *forma perceptible* de la razón trigonométrica es como cociente de dos longitudes que se asocian con las coordenadas y las magnitudes del vector.

Se sigue que estos cosenos directores tienen un *uso* de descripción de vectores, es decir, su *funcionamiento* permite expresar al vector en términos de sus componentes \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} (forma trinómica) y viceversa. Esto se hace al (*forma*) asociar el cociente de la coordenada del eje correspondiente como el cateto adyacente respecto al ángulo director, con la magnitud del

vector en cada componente como la hipotenusa del triángulo rectángulo que se forma con cada ángulo director.

La razón trigonométrica coseno también tiene un *uso* para operar el producto entre vectores, ya sea producto punto o producto cruz. En el caso del producto punto, se asocian los dos vectores con el triángulo que se muestra en a figura 5.14.

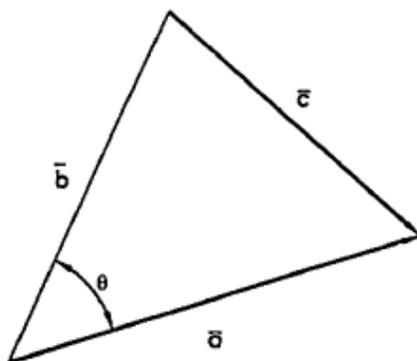


Figura 5.14 Producto punto de los vectores \vec{a} y \vec{b} , cuyo ángulo entre estos es θ . (Castañeda, 2006, p.45)

La intención es definir el producto punto dados el ángulo y la magnitud de los vectores \vec{a} y \vec{b} y para ello, Castañeda (2006) propone asociar estos vectores con el triángulo que se muestra en la figura 5.14, donde se utiliza un tercer vector llamado \vec{c} para “conectar” los dos lados del triángulo. Este vector resulta de la diferencia del vector \vec{a} menos \vec{b} .

Posteriormente, recurre a la ley de los cosenos como se muestra en la siguiente ecuación,

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

Al realizar algunos pasos de sustitución y operaciones algebraicas, el autor concluye que el producto punto de los dos vectores se reescribe como

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Ahora bien, la razón trigonométrica coseno tienen un *funcionamiento* que relaciona el ángulo de dos vectores con su producto punto. Para notar esto, Castañeda (2006) recurrió a la *forma* asociar los lados de un triángulo con tres vectores que se relacionan por medio de la resta

vectorial para poder (*forma*) utilizar la ley de los cosenos que relaciona a los tres lados y un ángulo.

Es pertinente aclarar que no se explica de dónde proviene esta ley, pero se aplica una vez establecida la figura 5.14.

Posteriormente, si se quiere saber si dos vectores son paralelos o perpendiculares, se recurre a la ecuación ya mencionada para identificar el valor del coseno del ángulo que, si es cero, implica que son perpendiculares y si es uno, son paralelos.

Así, el *uso* que tiene esta razón trigonométrica es para describir características que relacionan dos vectores.

Cabe destacar que, al utilizar la representación de los vectores en la figura 5.14, se involucra una asociación entre las operaciones de los vectores y su *significado* como lados de un triángulo. Así, destaca el proceso *geométrico-espacial* para relacionar lo que se opera algebraicamente, con lo que se representa por medio del triángulo.

Más adelante, se introduce el contenido 6.12 y para esto, Castañeda (2006) muestra cómo pasar de coordenadas cartesianas a polares, cilíndricas y esféricas. En el caso de las coordenadas cartesianas que se convierten a polares, plantea separar los componentes de las coordenadas cartesianas y notar su relación con el triángulo rectángulo cuyo valor de la hipotenusa lo llama r , el ángulo entre el eje de las abscisas y la hipotenusa lo llama θ y así, el *uso* de la razón trigonométrica es para transitar de las coordenadas cartesianas a las polares (o viceversa) de un punto. Este caso es similar al que se presentó en el tema 3. Números complejos en la asignatura de Álgebra.

Para pasar de las coordenadas cartesianas a las cilíndricas, se plantea la misma relación que con las coordenadas polares, y en el caso de la coordenada z , esta es igual que en las coordenadas cilíndricas. Luego, para analizar el caso del paso de las coordenadas cartesianas que describen la posición de un punto P como (x, y, z) a esféricas que describen la posición de este punto P como (ρ, θ, Φ) , utilizamos la figura 5.15.

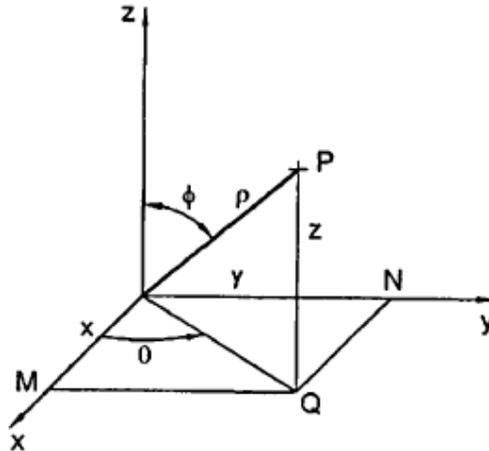


Figura 5.15 Punto P descrito en coordenadas cartesianas y en coordenadas esféricas. (Castañeda, 2006, p. 19)

Con base en la figura 5.15, Castañeda (2006) reconoce el triángulo rectángulo OPQ , del cual asocia a la hipotenusa con ρ y al cateto opuesto con OQ , partiendo del ángulo Φ . Así $OQ = \rho \text{ sen } \Phi$ y con esto, toma ahora el triángulo rectángulo OQM para relacionar el ángulo θ con la coordenada x . De manera similar con la coordenada y . Así,

$$x = OQ \cos\theta$$

y

$$y = OQ \text{ sen}\theta$$

Entonces el autor sustituye el valor de OQ en las dos últimas ecuaciones. Para poder relacionar a las coordenadas cartesianas con las coordenadas esféricas.

Así bien, el *uso* que tiene la razón trigonométrica es para cambiar de representación de coordenadas. Lo cual implica considerar la componente *geométrico-espacial* puesto que se requiere de una manipulación de lo que se muestra en la imagen del libro de texto, para realizar esa interpretación con respecto a cada lado y ángulo, así como la visualización de los triángulos rectángulos como parte de la figura 5.15 posicionados en el espacio cartesiano (tres dimensiones).

Finalmente, en el tema 7, Castañeda (2006) asocia a la recta como un vector, de tal suerte que su *uso* tiene el mismo significado vectorial que se trabajó en el tema 6.

Segundo Semestre

En el segundo semestre, las cuatro asignaturas colocadas en la tabla anterior corresponden a las Ciencias Básicas.

En el caso de Álgebra Lineal, para el tema 2 que corresponde a Espacios Vectoriales, Grossman y Flores (2012) presentan los vectores \mathbf{v} y \mathbf{w} como

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -\text{sen}(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y se pide demostrar que estos vectores resultan de rotar a los vectores unitarios de la base canónica un ángulo θ alrededor del eje z . Es decir, \mathbf{v} resulta de rotar \mathbf{e}_1 y \mathbf{w} de rotar \mathbf{e}_2 un ángulo θ , como se muestra en la figura 5.16a.

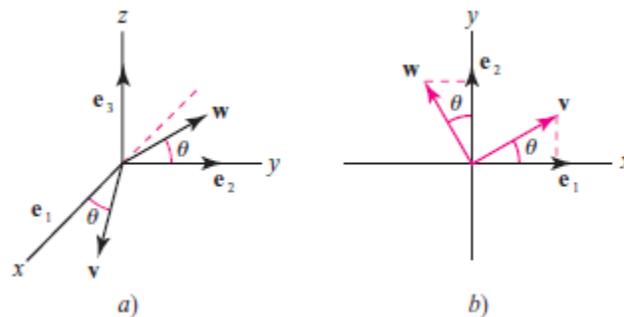


Figura 5.16 a) Rotación de los vectores unitarios un ángulo θ alrededor del eje z . b) Vectores rotados, vista del plano XY . (Grossman y Flores, 2012, p. 382)

Note que el vector unitario \mathbf{e}_3 no rota. Ahora bien, a partir de la figura 5.16b se presenta cada vector y su ángulo de rotación además de mostrar el triángulo rectángulo que se asocia para cada caso. Por ejemplo, para el vector \mathbf{v} se tiene que la magnitud de este corresponde a la hipotenusa. Ahora bien, el vector \mathbf{e}_1 se puede escribir de la siguiente manera

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así, el valor de la hipotenusa asociada al vector \mathbf{v} corresponde a la unidad. De esta manera, la componente del eje de las abscisas se relaciona como el lado adyacente del ángulo θ por medio de la razón coseno. Es decir,

$$\cos(\theta) = \frac{\text{componente en el eje } x}{1}$$

De manera similar para la componente en el eje y del vector \mathbf{v} .

En consecuencia, el vector \mathbf{v} se determina al analizar el cambio de posición con respecto al ángulo de rotación. Esto implica que la razón trigonométrica tiene un *uso* de transición del vector dada su dirección y magnitud a su forma trinómica. Es decir, su *funcionamiento* es descomponer el vector en sus componentes mediante la *forma* asociar al vector con el triángulo rectángulo en el plano cartesiano. Ahora bien, esto responde al *funcionamiento* de rotación del vector en el plano XY .

Posteriormente, Grossman y Flores (2012) indican que la matriz $Y = [v \ w \ e_3]$ se denomina la matriz de transición.

Por otro lado, en la asignatura de Cálculo Integral se aborda, como primer tema, las Sucesiones y Series. En el contenido 1.7 se explica el desarrollo de funciones trigonométricas como Serie de Potencias. En particular, Stewart (2008a) lo ejemplifica con la Serie de Maclaurion para la función seno de x . En la figura 5.17 se muestra este ejemplo.

En este caso, la función trigonométrica tiene la *forma perceptible* como suma de potencias infinita. Cabe aclarar que, para poder aplicar el teorema de Maclaurin, primero se toma el caso especial $x=0$ pero, debido a las características de la función trigonométrica como acotada y periódica, Stewart (2008a) deduce esta igualdad para toda x .

Es importante aclarar que el *funcionamiento* que permite usar a la función trigonométrica como una suma de potencias infinita es con base en su derivabilidad infinita. En otras palabras, las derivadas sucesivas permiten ir generando la suma de cada término alrededor del punto específico 0.

En los temas sucesivos 2 y 3, se recurre a las fórmulas de integración ya establecidas. En estos casos, los ejercicios tienen la intención de calcular o resolver la integral. Incluso, en el caso de los cambios de variable, se recomienda utilizar la tabla de identidades

trigonómicas para sustituir e integrar. En otras palabras, el uso que tienen las funciones trigonométricas en estos casos se asocia con un sentido algebraico y aritmético.

EJEMPLO 4 Determine la serie de Maclaurin para $\sin x$ y demuestre que representa a $\sin x$ para toda x .

SOLUCIÓN Acomode los cálculos en dos columnas como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\sin x & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \\ f^{(4)}(x) &= \sin x & f^{(4)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Puesto que la derivada se repite en un ciclo de cuatro, puede escribir la serie de Maclaurin como sigue:

$$\begin{aligned} f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots \\ = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Puesto que $f^{(n+1)}(x)$ es $\pm \sin x$ o bien, $\pm \cos x$, sabe que $|f^{(n+1)}(x)| \leq 1$ para toda x . De este modo puede tomar a $M = 1$ en la desigualdad de Taylor

$$\boxed{14} \quad |R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x^{n+1}| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

De acuerdo con la ecuación 10 el lado derecho de esta desigualdad tiende a 0 cuando $n \rightarrow \infty$, de modo que $|R_n(x)| \rightarrow 0$ según el teorema de compresión. Se infiere entonces que $R_n(x) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, de modo que $\sin x$ es igual a la suma de su serie de Maclaurin de acuerdo con el teorema 8. \square

Se establece el resultado del ejemplo 4 para referencia futura.

$\boxed{15}$

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{para toda } x \end{aligned}$$

En la figura 2 se ilustra la gráfica de $\sin x$ junto con su polinomio de Taylor (o de Maclaurin)

$$\begin{aligned} T_1(x) &= x \\ T_3(x) &= x - \frac{x^3}{3!} \\ T_5(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \end{aligned}$$

Observe que cuando n se incrementa, $T_n(x)$ se vuelve una mejor aproximación para $\sin x$.

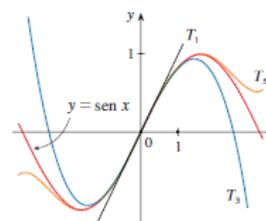


FIGURA 2

Figura 5.17 Ejemplo de construcción de la función seno de la variable x como serie de Maclaurin. (Stewart, 2008a, p. 739-740)

De manera similar para el tema 4, aunque es importante aclarar que, al tratarse de varias variables, estas pueden asociarse con vectores donde el uso de las razones trigonométricas responde a la descomposición del vector en sus componentes. Aquí, es importante aclarar

que las razones trigonométricas pasan a tener un tratamiento como funciones trigonométricas pues estas se derivan una vez que se descompusieron los vectores.

Esto no implica que haya una transición de la razón a la función de manera explícita, sino que, si nos ubicamos en un punto específico de un vector y los descomponemos a su forma trinómica, la herramienta utilizada había sido la razón trigonométrica, por tratarse de un momento específico. Sin embargo, si este vector es una función, entonces la razón trigonométrica pasará a ser función trigonométrica. Como lo vimos en la figura 5.12, para el caso en el cual la posición es una función que depende del tiempo y al relacionar el ángulo con esta posición, la expresión tangente tiene un papel de función.

Cabe aclarar que las funciones trigonométricas pueden tener varias variables por ejemplo $f(x,y) = \text{sen}(2x+3y)$. Aunque bien, su análisis se puede separar para cada componente.

En lo que concierne a la asignatura de Física Experimental, se hace un estudio general de la Física. En el tema que corresponde a Mecánica Clásica, Young y Freedman (2009a) abordan los conceptos de posición, desplazamiento, velocidad media, fuerza, peso, etc. Es importante hacer notar que se trata de vectores. Así, su tratamiento refiere a una magnitud y una dirección. Por ello, Young y Freedman (2009a) descomponen el vector en sus componentes del eje x y del eje y .

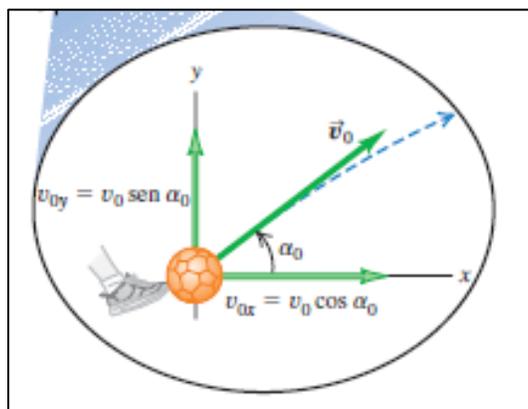


Figura 5.18 Las componentes de la velocidad inicial v_{0x} y v_{0y} de un proyectil (como un balón de fútbol) y su relación con la rapidez inicial v_0 y el ángulo inicial α_0 (Young y Freedman, 2009a, p. 81)

En la figura 5.18 se muestra el vector velocidad inicial que se separa en sus dos componentes. Para separarlo, utilizan las razones trigonométricas seno y coseno del ángulo que forma el

vector con el eje de las abscisas. De esta manera, el *uso* que tiene la razón trigonométrica es vectorial. Su *funcionamiento* es expresar la magnitud y ubicación del vector en el plano en términos de sus componentes. La *forma* es asociar a la magnitud del vector como la hipotenusa del triángulo rectángulo, el ángulo que determina la dirección del vector en relación con el ángulo del triángulo rectángulo de tal manera que la componente del eje x corresponda al cateto adyacente y la componente del eje y corresponda al cateto opuesto.

Con la *forma* anterior se determina la siguiente *forma* que corresponde a utilizar la razón trigonométrica seno para relacionar el ángulo antes mencionado con la componente del eje y del vector y la razón trigonométrica coseno para relacionar al mismo ángulo con la componente del eje x del vector.

Si, por otro lado, el *funcionamiento* consiste en determinar la dirección del vector en términos del ángulo que se forma con el eje x y lo que se conoce es la expresión del vector en términos de sus componentes, la *forma* es relacionar el ángulo con estas componentes que corresponden a las coordenadas del eje x y y , para establecer la relación, Young y Freedman (2009a) utilizan la razón trigonométrica tangente.

En el tema 6. Electromagnetismo, se trabaja con los vectores de \vec{E} (campo eléctrico) y \vec{B} (campo magnético). Así, se recurre nuevamente a la descomposición de sus componentes por medio de las razones trigonométricas. Además, estos vectores se operan mediante el producto cruz. Este se explica en la asignatura de Cálculo y Geometría Analítica en el primer semestre.

Cabe destacar que en el caso del producto cruz, Young y Freedman (2009a) determinan la magnitud del vector resultante como el producto de las magnitudes de los vectores con el seno del ángulo que se forma entre estos dos vectores (\emptyset). Por ejemplo, para determinar la fuerza magnética (\vec{F}), se calcula el producto cruz de la velocidad (\vec{v}), multiplicada previamente con el escalar que corresponde a la magnitud de una carga q , con el campo magnético (\vec{B}), que se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\vec{F} = q|\vec{v}||\vec{B}|\text{sen}\emptyset$$

Así, el *uso* que tiene la razón trigonométrica es para relacionar la magnitud de dos vectores. En este caso, si el ángulo entre los dos vectores no determina la dirección que tendrá el

producto cruz (pues este sigue “la regla de la mano derecha”) pero sí está relacionado con las magnitudes, una modificación del ángulo implica un cambio en la magnitud del vector \vec{F} .

En consecuencia, su *funcionamiento* está asociado con la relación del ángulo que tienen dos vectores y que influye en la magnitud de un tercer vector. Cuya *forma* implica distinguir el ángulo de los dos vectores para, (*forma*) sustituir los valores de cada magnitud, al igual que el ángulo, en la fórmula anterior. De esta manera, se pierde el *significado geométrico-espacial* de los vectores relacionados, así como la interpretación de “la regla de la mano derecha”.

Ahora bien, con respecto al tema 7. Movimiento ondulatorio, Young y Freedman (2009a) indican que el movimiento de una partícula se puede describir por medio de la función

$$y(x, t) = A \cos\left[\omega\left(\frac{x}{v} - t\right)\right] = A \cos 2\pi f\left(\frac{x}{v} - t\right)$$

Así, su *funcionamiento* de la función trigonométrica permite describir el comportamiento de una partícula, mediante la *forma* observar las diferentes componentes como la amplitud (A), la frecuencia angular (ω) o la rapidez de la onda (v) para asociarlas con el desplazamiento de la partícula.

En lo que indica el tema 8. Óptica geométrica, Young y Freedman (2009b) plantean que la ley de refracción se escribe como

$$\frac{\text{sen } \theta_a}{\text{sen } \theta_b} = \frac{n_b}{n_a}$$

Esto lo indican con base en la figura 5.19, donde se muestra el ángulo que forma el rayo incidente (θ_a) y su índice de refracción del material a (n_a) y el índice de refracción del material b (n_b) por el que se refracta el rayo con un ángulo θ_b .

La ley de Snell describe el comportamiento del rayo una vez que incide en otro material y este comportamiento se relaciona con el ángulo con el cual incide. Por ejemplo, si el ángulo de incidencia es completamente recto, entonces no habrá una refracción del rayo al pasar por otro material, sin importar cuáles sean los niveles de refracción. (Young y Freedman, 2009b, p. 1125)

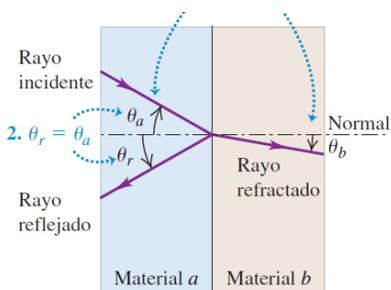


Figura 5.19 Leyes de reflexión y refracción o de Snell. (Young y Freedman, 2009b, p. 1125)

En consecuencia, el *funcionamiento* que tiene la razón trigonométrica en este caso es describir el comportamiento de un rayo cuando pasa por otro material. La *forma* es mediante el ángulo de incidencia o el ángulo de refracción que se relacionan con el nivel de refracción de los materiales.

En semestres posteriores (con excepción de Estática), cada tema de los que consideramos en la asignatura de Física Experimental se trabajará con mayor profundidad.

En el caso de la asignatura de Estática, se relaciona con los primeros contenidos de Física Experimental, aunque, posteriormente profundiza más en aspectos propios de la Estática.

En esta asignatura se trabaja con vectores que bien pueden representar fuerza, peso, momento, velocidad, aceleración, etcétera. Como lo comentamos en la asignatura anterior. En donde el *uso* de la razón trigonométrica es como descomposición vectorial.

Tercer Semestre

En el tercer semestre analizaremos cuatro asignaturas en las que identificamos herramientas trigonométricas. La primera a revisar es Cálculo Vectorial.

En el primer tema se consideran a las funciones trigonométricas, como funciones que se derivan y en donde es necesario hacer un uso adecuado de las identidades trigonométricas, así como sustituciones que simplifiquen los datos a operar. Es por ello por lo que, para este caso, la función trigonométrica tiene un *uso* algebraico, donde se hace hincapié en las derivadas, pero no en el comportamiento propio de la función trigonométrica.

Posteriormente, en el segundo tema se definen a las funciones vectoriales y se muestran las diferentes maneras de descomponer el vector en coordenadas rectangulares, esféricas o cilíndricas. Así, el *uso* que tiene la función trigonométrica es transitar en las diferentes formas

de representar un vector función. El *funcionamiento* es por medio del triángulo rectángulo que se asocia con la descomposición del vector en sus otras componentes dado su magnitud y dirección (o viceversa).

En el siguiente tema que corresponde a integrales de línea, Larson y Edwards (2010b) muestran el siguiente ejemplo de la figura 5.20.

El ejemplo siguiente muestra cómo usar una integral de línea para hallar la masa de un resorte (o muelle) cuya densidad varía. En la figura 15.11 obsérvese cómo la densidad de este resorte aumenta a medida que la espiral del resorte asciende por el eje z .

EJEMPLO 5 Hallar la masa de un resorte (o muelle)

Hallar la masa de un resorte que tiene la forma de una hélice circular

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}), \quad 0 \leq t \leq 6\pi$$

donde la densidad del resorte es $\rho(x, y, z) = 1 + z$, como se muestra en la figura 15.11.

Solución Como

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (1)^2} = 1$$

se sigue que la masa del resorte es

$$\begin{aligned} \text{Masa} &= \int_C (1 + z) \, ds = \int_0^{6\pi} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right) dt \\ &= \left[t + \frac{t^2}{2\sqrt{2}} \right]_0^{6\pi} \\ &= 6\pi \left(1 + \frac{3\pi}{\sqrt{2}}\right) \\ &\approx 144.47. \end{aligned}$$

La masa del resorte es aproximadamente 144.47.



Figura 15.11

Figura 5.20 Ejemplo para hallar la masa de un resorte (o muelle). (Larson y Edwards, 2010b, p. 1073)

En este ejercicio se utilizan las funciones trigonométricas coseno y seno para describir la forma del resorte, que, en este caso, se trata de una hélice circular. Es decir, debido a la forma del resorte es como Larson y Edwards (2010b) le asocian una función vectorial que describa la posición de este, “a lo largo” del eje z . Si bien la intención de la actividad es calcular el valor de la masa del resorte, el *uso* que tiene la función trigonométrica determina la forma que tiene un resorte. De tal manera que su *funcionamiento* es describir la densidad del resorte conforme este asciende. Y donde, se destaca la forma, asociar la forma del resorte con una hélice circular, que, a su vez, se traduce como una función vectorial. Esto requiere del apoyo

geométrico-espacial para relacionar este movimiento con el de una hélice, lo que permitirá utilizar las funciones trigonométricas.

En el tema 4. Integrales múltiples, Larson y Edwards (2010b) utilizan las formas paramétricas en algunas integrales de superficie, como lo ejemplificamos con la figura 5.21.

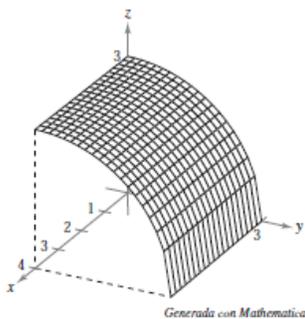


Figura 15.49

EJEMPLO 4 Evaluación de una integral de superficie

En el ejemplo 2 se mostró una evaluación de la integral de superficie

$$\iint_S (x + z) \, dS$$

donde S es la porción, en el primer octante, del cilindro $y^2 + z^2 = 9$ entre $x = 0$ y $x = 4$ (ver la figura 15.49). Evaluar esta misma integral, ahora en forma paramétrica.

Solución En forma paramétrica, la superficie está dada por

$$\mathbf{r}(x, \theta) = x\mathbf{i} + 3 \cos \theta \mathbf{j} + 3 \sin \theta \mathbf{k}$$

donde $0 \leq x \leq 4$ y $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Para evaluar la integral de superficie en forma paramétrica, se empieza por calcular lo siguiente.

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i}$$

$$\mathbf{r}_\theta = -3 \sin \theta \mathbf{j} + 3 \cos \theta \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 \sin \theta & 3 \cos \theta \end{vmatrix} = -3 \cos \theta \mathbf{j} - 3 \sin \theta \mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta\| = \sqrt{9 \cos^2 \theta + 9 \sin^2 \theta} = 3$$

Por tanto, la integral de superficie puede ser evaluada como sigue.

$$\begin{aligned} \iint_D (x + 3 \sin \theta) 3 \, dA &= \int_0^4 \int_0^{\pi/2} (3x + 9 \sin \theta) \, d\theta \, dx \\ &= \int_0^4 \left[3x\theta - 9 \cos \theta \right]_0^{\pi/2} \, dx \\ &= \int_0^4 \left(\frac{3\pi}{2}x + 9 \right) \, dx \\ &= \left[\frac{3\pi}{4}x^2 + 9x \right]_0^4 \\ &= 12\pi + 36 \end{aligned}$$

Figura 5.21 Ejemplo donde se pide calcular la integral de superficie por medio de formas paramétricas. (Larson y Edwards, 2010b, p. 1116)

En este ejemplo, se recurre a las expresiones paramétricas que describen la superficie de un trozo de un cilindro. La intención del ejercicio es calcular la integral de superficie que representa al primer octante de un cilindro de radio 9.

Ahora bien, el *uso* que tienen las funciones trigonométricas es similar al ejemplo anterior pues describen la forma que tiene una superficie en el espacio. La *forma* utilizar la representación paramétrica de la cónica $y^2+z^2=9$.

Con respecto a la asignatura Ecuaciones Diferenciales, a lo largo de los temas se explican qué son las ecuaciones diferenciales y las soluciones de estas. Además de su clasificación. Posteriormente se plantea la Transformada de Laplace en el tema 3 que permite resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales.

Si bien la función trigonométrica forma parte de estos temas, la *forma* en la que se utiliza es para derivar, sustituir, asociar con identidades trigonométricas u operarla. Es decir, recibe un *significado* algebraico. Aunque, en este último tema destacamos el siguiente ejemplo sobre el péndulo doble.

■ **Péndulo doble** Tal como ilustra la FIGURA 4.6.2, un péndulo doble oscila en un plano vertical debido a la influencia de la gravedad. Para desplazamientos pequeños $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$, se puede demostrar que el sistema de ecuaciones diferenciales que describe el movimiento es

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)l_1^2 \theta_1'' + m_2 l_1 l_2 \theta_2'' + (m_1 + m_2)l_1 g \theta_1 &= 0 \\ m_2 l_2^2 \theta_2'' + m_2 l_1 l_2 \theta_1'' + m_2 l_2 g \theta_2 &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Como se indica en la figura 4.6.2, θ_1 se mide (en radianes) desde una línea vertical que se extiende hacia abajo a partir del eje del sistema, y θ_2 se mide desde una línea vertical que se extiende hacia abajo a partir del centro de la masa m_1 . La dirección positiva es hacia la derecha y la negativa hacia la izquierda.

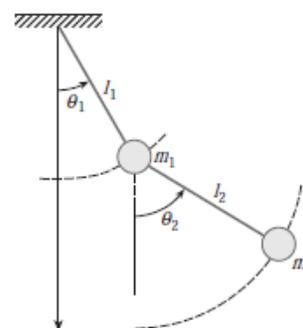


FIGURA 4.6.2 Péndulo doble

EJEMPLO 3 Péndulo doble

Se deja como ejercicio completar los detalles mediante la transformada de Laplace para resolver el sistema (6) cuando $m_1 = 3, m_2 = 1, l_1 = l_2 = 16, \theta_1(0) = 1, \theta_2(0) = -1, \theta_1'(0) = 0$ y $\theta_2'(0) = 0$. Debe encontrar que

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \frac{1}{4} \cos \frac{2}{\sqrt{3}} t + \frac{3}{4} \cos 2t \\ \theta_2(t) &= \frac{1}{2} \cos \frac{2}{\sqrt{3}} t - \frac{3}{2} \cos 2t. \end{aligned} \tag{7}$$

Figura 5.22. Ejemplo sobre el movimiento de un péndulo doble. (Zill et al., 2012, p. 235-236)

En este ejemplo, la función trigonométrica sea *usa* para describir el movimiento de un péndulo. Su *funcionamiento* consiste en relacionar el desplazamiento de las masas con los ángulos. Aunque es claro indicar que este movimiento se describe para pequeños desplazamientos.

Ahora bien, en el siguiente tema (4. Introducción a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales) se introducen las series trigonométricas, las cuales son presentadas por Zill et al. (2012) como un conjunto ortogonal que se puede escribir como serie ortogonal de funciones como se muestra a continuación

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right)$$

Seguendo el mismo desarrollo para el cálculo de los coeficientes a_n, b_n , como en el análisis de los desarrollos de series ortogonales. A la serie descrita anteriormente se le define como serie (trigonométrica) de Fourier de una función f definida en el intervalo $(-p, p)$ y donde

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x dx$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin \frac{n\pi}{p} x dx$$

Una vez presentada la serie de Fourier, la primera actividad consiste en el cálculo de los coeficientes de la serie (como lo indica el programa de la asignatura en el contenido 4.3). Así, se pretende que el estudiante calcule los coeficientes para poder presentar una función dada como serie de Fourier. Consecuentemente, la *forma perceptible* que tiene la serie trigonométrica es como parte de una sumatoria infinita que se asocia con la representación de una función.

Así, el *funcionamiento* de la serie trigonométrica determina la representación de una función en términos de una sumatoria que involucra senos y cosenos.

Con respecto a la asignatura Cinemática y Dinámica consideran a los vectores para representar el movimiento de un objeto, como lo habíamos argumentado en la asignatura Física Experimental y Estática. Es decir, la descomposición vectorial para el eje horizontal y vertical. Un ejemplo así, lo plantea Hibbeler (2010) sobre el movimiento de un proyectil (Figura 5.23).

Como podemos observar, la velocidad inicial se descompone para la parte horizontal y vertical y, posteriormente, se analiza el movimiento del proyectil para los casos de manera separada.

La máquina desmenuzadora está diseñada para que lance virutas de madera a $v_0 = 25$ pies/s como se muestra en la figura 12-22. Si el tubo está orientado a 30° con respecto a la horizontal, determine a qué h , las virutas chocan con la pila si en este instante caen en la pila a 20 pies del tubo.

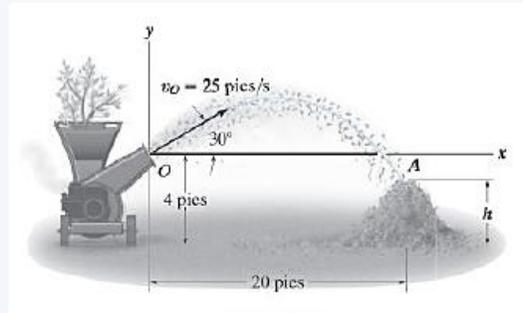


Fig. 12-22

SOLUCIÓN

Sistema de coordenadas. Cuando se analiza el movimiento entre los puntos O y A , las tres incógnitas son la altura h , el tiempo de vuelo t_{OA} y el componente vertical de la velocidad $(v_A)_y$ [observe que $(v_A)_x = (v_O)_x$]. Con el origen de las coordenadas en O , figura 12-22, la velocidad inicial de una viruta tiene los componentes de

$$(v_O)_x = (25 \cos 30^\circ) \text{ pies/s} = 21.65 \text{ pies/s} \rightarrow$$

$$(v_O)_y = (25 \sin 30^\circ) \text{ pies/s} = 12.5 \text{ pies/s} \uparrow$$

Además, $(v_A)_x = (v_O)_x = 21.65$ pies/s y $a_y = -32.2$ pies/s². Como no necesitamos determinar $(v_A)_y$, tenemos

Movimiento horizontal.

$$\begin{aligned} (\rightarrow) \quad x_A &= x_O + (v_O)_x t_{OA} \\ 20 \text{ pies} &= 0 + (21.65 \text{ pies/s}) t_{OA} \\ t_{OA} &= 0.9238 \text{ s} \end{aligned}$$

Movimiento vertical. Si relacionamos t_{OA} con las elevaciones inicial y final de una viruta, tenemos

$$\begin{aligned} (+\uparrow) \quad y_A &= y_O + (v_O)_y t_{OA} + \frac{1}{2} a_y t_{OA}^2 \\ (h - 4 \text{ pies}) &= 0 + (12.5 \text{ pies/s})(0.9238 \text{ s}) + \frac{1}{2}(-32.2 \text{ pies/s}^2)(0.9238 \text{ s})^2 \\ h &= 1.81 \text{ pies} \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

NOTA: podemos determinar $(v_A)_y$ por medio de $(v_A)_y = (v_O)_y + a_y t_{OA}$.

Figura 5.23 Ejemplo sobre el movimiento que describe un proyectil. (Hibbeler, 2010, p.42)

Ahora bien, para descomponer al vector en las componentes, no hacen explícito el uso del triángulo rectángulo que se muestra en las asignaturas de Cálculo y Geometría Analítica y Cálculo vectorial. Es decir, podemos asumir que, para este momento, los estudiantes se quedan con las fórmulas de las funciones trigonométricas que le permitan separar el vector

sin necesidad de observar el triángulo rectángulo. Esto genera una pérdida en el proceso *geométrico-espacial*.

De esta manera, el *uso* de las funciones trigonométricas es transitar de una representación del vector, a otra. Y, en este ejemplo, el *funcionamiento* de la función trigonométrica es para descomponer el vector a su forma trinómica y así, (*funcionamiento*) descomponer el movimiento del objeto como dos casos independientes. La *forma* es por medio de la sustitución *algebraica* y *aritmética* de fórmulas que descomponen un vector función.

Caso contrario, cuando el vector se representa en su forma trinómica y se requiere conocer su magnitud y dirección, se utiliza la razón trigonométrica tangente, como lo muestra el ejemplo de la figura 5.24

En este caso, para poder calcular el ángulo entre las dos componentes se utiliza la razón tangente. Y se recurre (*forma*) al triángulo rectángulo para asociar a las componentes en x y y con los catetos adyacente y opuesto.

Es importante notar que en este caso se recurre a la razón trigonométrica porque las componentes son valores numéricos de las longitudes del triángulo y no funciones.

La elección del sistema de referencia y el diagrama de cuerpo libre son importantes para la descomposición del vector. Lo ilustramos con el siguiente ejemplo (figura 5.25)

En ese caso podemos apreciar que el triángulo asociado para la descomposición no es horizontal, como lo planteaba el ejemplo del movimiento del proyectil. De esta forma, el vector que indica la cantidad de peso queda como el cateto adyacente del triángulo. Así, el *funcionamiento* de la función trigonométrica seno es similar al del ejercicio anterior, pero una *forma* que toma realce es identificar el triángulo asociado al vector que se descompone. Esta *forma* implica el manejo de habilidades *geométrico-espaciales*, puesto que se necesita manipular al triángulo (ubicarlo en la imagen, así como sus componentes y establecer el referente del triángulo rectángulo) para poder descomponerlo.

En el instante que se muestra en la figura 12-45a, los automóviles A y B viajan con una rapidez de 18 m/s y 12 m/s, respectivamente. Asimismo, en este instante, A experimenta una desaceleración de 2 m/s² y B tiene una aceleración de 3 m/s². Determine la velocidad y aceleración de B con respecto a A.

SOLUCIÓN

Velocidad. Los ejes x, y fijos se establecen en un punto arbitrario en el suelo, y los ejes x', y' trasladantes se fijan al carro A, figura 12-45a. ¿Por qué? La velocidad relativa se determina con $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$. ¿Cuáles son las dos incógnitas? Si utilizamos un análisis vectorial cartesiano, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \\ -12\mathbf{j} &= (-18 \cos 60^\circ \mathbf{i} - 18 \sin 60^\circ \mathbf{j}) + \mathbf{v}_{B/A} \\ \mathbf{v}_{B/A} &= \{9\mathbf{i} + 3.588\mathbf{j}\} \text{ m/s}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$v_{B/A} = \sqrt{(9)^2 + (3.588)^2} = 9.69 \text{ m/s} \quad \text{Resp.}$$

Observemos que $\mathbf{v}_{B/A}$ tiene componentes $+\mathbf{i}$ y $+\mathbf{j}$, figura 12-45b, su dirección es

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{(v_{B/A})_y}{(v_{B/A})_x} = \frac{3.588}{9} \\ \theta &= 21.7^\circ \quad \text{Resp.}\end{aligned}$$

Aceleración. El automóvil B tiene componentes tanto tangenciales como normales de aceleración. ¿Por qué? La magnitud de la componente normal es

$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{(12 \text{ m/s})^2}{100 \text{ m}} = 1.440 \text{ m/s}^2$$

Al aplicar la ecuación de la aceleración relativa se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \\ (-1.440\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) &= (2 \cos 60^\circ \mathbf{i} + 2 \sin 60^\circ \mathbf{j}) + \mathbf{a}_{B/A} \\ \mathbf{a}_{B/A} &= \{-2.440\mathbf{i} - 4.732\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

Aquí $\mathbf{a}_{B/A}$ tiene componentes $-\mathbf{i}$ y $-\mathbf{j}$. Por tanto, con la figura 12-45c,

$$\begin{aligned}a_{B/A} &= \sqrt{(2.440)^2 + (4.732)^2} = 5.32 \text{ m/s}^2 \quad \text{Resp.} \\ \tan \phi &= \frac{(a_{B/A})_y}{(a_{B/A})_x} = \frac{4.732}{2.440} \\ \phi &= 62.7^\circ \quad \text{Resp.}\end{aligned}$$

NOTA: ¿es posible obtener la aceleración relativa $\mathbf{a}_{A/B}$ con este método? Vea el comentario al final del ejemplo 12.26.

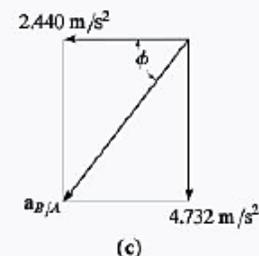
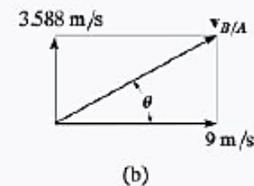
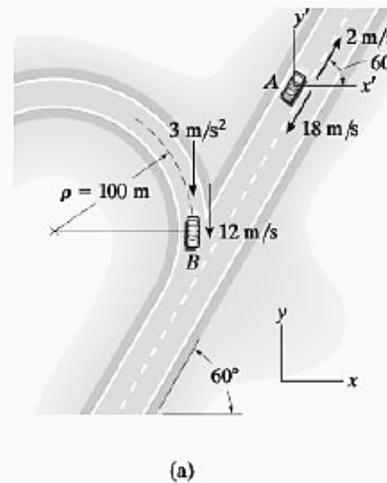


Fig. 12-45

Figura 5.24 Ejemplo sobre para determinar la magnitud y dirección del vector velocidad y aceleración. (Hibbeler, 2010, p. 91)

La caja de la figura 15-22a tiene una masa m y desciende por la rampa circular lisa de modo que cuando está en el ángulo θ su rapidez es v . Determine su cantidad de movimiento angular con respecto al punto O en este instante y la tasa de incremento de su rapidez, es decir, a_t .

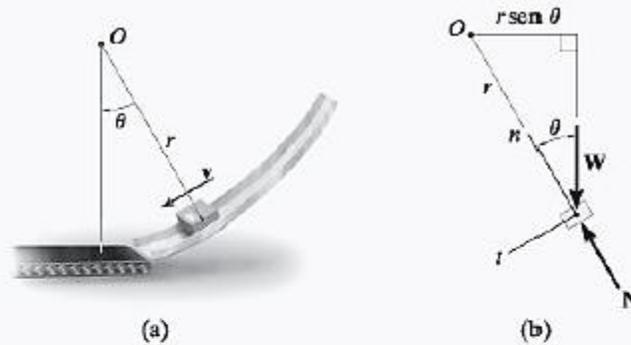


Fig. 15-22

SOLUCIÓN

Como v es tangente a la trayectoria, al aplicar la ecuación 15-12 la cantidad de movimiento angular es

$$H_O = rmv \curvearrowright \quad \text{Resp.}$$

La tasa de incremento de su velocidad (dv/dt) se determina con la ecuación 15-15. En el diagrama de cuerpo libre de la caja, figura 15-22b, se ve que sólo el peso $W = mg$ contribuye con un momento con respecto al punto O . Tenemos

$$\zeta + \Sigma M_O = \dot{H}_O; \quad mg(r \text{ sen } \theta) = \frac{d}{dt}(rmv)$$

Como r y m son constantes,

$$mgsen \theta = rm \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = g \text{ sen } \theta \quad \text{Resp.}$$

Figura 5.25 Ejemplo sobre el movimiento angular y los vectores que actúan sobre el objeto. (Hibbeler, 2010, p. 265)

Ahora bien, habíamos planteado que el movimiento del móvil queda descrito por vectores funciones, pero bien puede plantearse que el vector función mismo corresponda a las funciones trigonométricas. Por ejemplo, Hibbeler (2010) propone el ejercicio de la figura 5.26

F12-20. La posición de una caja que se desliza hacia abajo por una trayectoria helicoidal la describe $\mathbf{r} = [2 \text{ sen } (2t)\mathbf{i} + 2 \text{ cos } t\mathbf{j} - 2t^2\mathbf{k}]$ pies, donde t está en segundos y los argumentos del seno y coseno están en radianes. Determine la velocidad y aceleración de la caja cuando $t = 2$ s.



F12-20

Figura 5.26 Ejercicio que considera a las funciones trigonométricas que relacionan una trayectoria helicoidal. (Hibbeler, 2010, p.44)

En este caso, la trayectoria del móvil se describe por medio de las funciones trigonométricas puesto que, como lo hemos argumentado anteriormente, la trayectoria que describe un helicoides se puede representar con las funciones seno y coseno (figura 5.20).

Así, el *uso* que tienen las funciones trigonométricas es para describir la trayectoria helicoidal en el espacio. Porque su *funcionamiento* describe la posición con respecto al tiempo de un objeto que gira sobre dos ejes mientras sube o baja en el otro eje. En este tipo de trayectorias se suele recurrir a las coordenadas cilíndricas.

Ahora bien, realizamos un análisis dentro de la asignatura Manufactura, un primer momento donde se utiliza la razón trigonométrica es en el uso de la medición con láser (figura 5.27). Sin embargo, Groover (2007) solo explica que para calcular la profundidad de una pieza (D), se utiliza la fórmula

$$D = H - R = H - L \cot A$$

Y esto es con base en el diagrama, que se muestra en la figura 5.27. Aunque no hay explicación sobre la razón cotangente que forma parte de la fórmula. Tampoco se ofrecen ejemplos o ejercicios alusivos a este contenido.

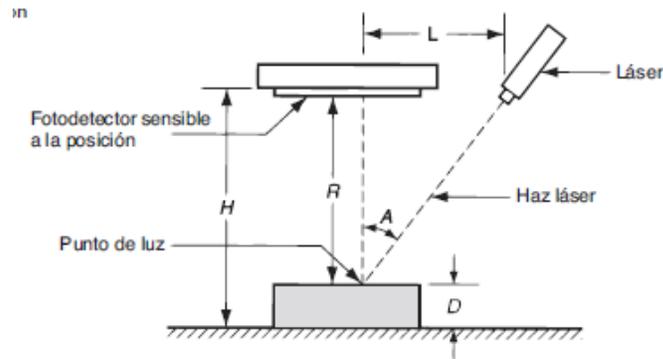


Figura 5.27 Triangulación láser para medir una dimensión de la pieza D . (Groover, 2007, p. 1007)

A partir del diagrama, podemos inferir que la razón trigonométrica tiene un *uso* como relación entre el ángulo de un triángulo y las longitudes de sus lados cuyo *funcionamiento* es para medir la dimensión (profundidad de un objeto) al proyectar un haz láser. Y la *forma* es asociar las longitudes del triángulo rectángulo con el ángulo A .

Otro momento en el cual se recurre a la razón trigonométrica es para la formación de viruta en el maquinado de metales. En la figura 5.28 se muestra el corte ortogonal de una herramienta en forma de cuña de tal manera que, al presionar la herramienta contra el material con el borde cortante perpendicular en la dirección de la velocidad del corte, se forma una viruta a lo largo del plano (plano de corte), esta hace un ángulo α con la superficie de trabajo.

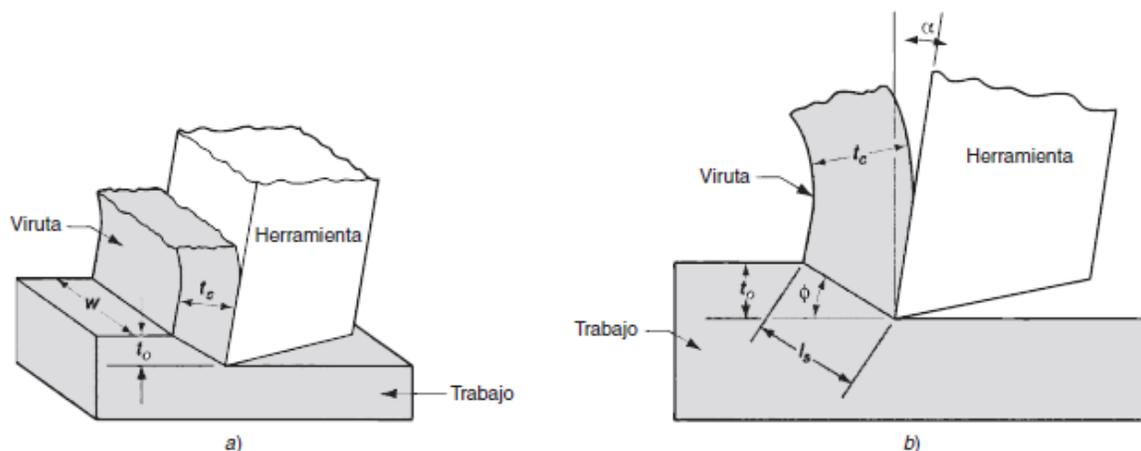


Figura 5.28 Corte ortogonal que forma una viruta. En a) se muestra el diagrama desde una perspectiva tridimensional, en b) se muestra la vista lateral, donde se analiza desde las dos dimensiones. (Groover, 2007, p. 487)

Con base en la figura 5.28 y la figura 5.29 se ejemplifica la deformación cortante durante la formación de viruta debido al corte ortogonal. Así, Goover (2007) indica que “la forma del

modelo de corte ortogonal permite establecer una relación importante entre el espesor de la viruta, el ángulo de inclinación y el ángulo del plano de corte.” (p. 487)

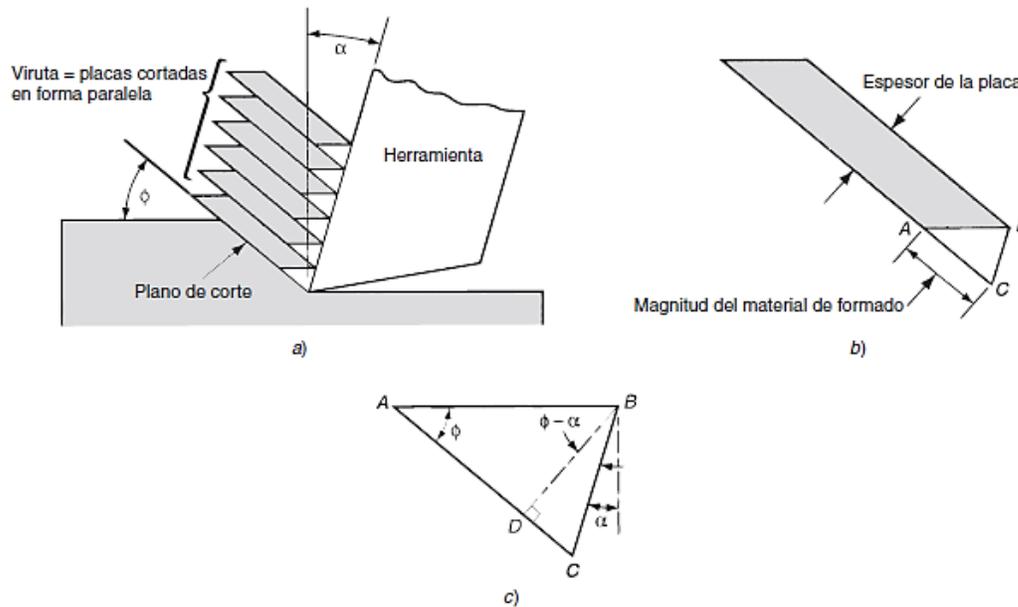


Figura 5.29. Deformación cortante durante la formación de viruta. a) Formación de viruta representada como una serie de placas deslizándose una respecto a la otra, b) una placa aislada que ilustra la definición de la deformación cortante basada en el modelo de placa paralela y c) Triángulo de deformación cortante. (Groover, 2007, p. 488)

De esta manera, propone l_s como la longitud del plano de corte, y, con el uso de la razón trigonométrica permite anticipar la relación del grueso de la viruta (llamada también relación de viruta) con respecto a los ángulos del corte. Esto sirve para (*funcionamiento*) asociar el espesor de la viruta antes de su formación (t_o) con el ángulo de corte Φ y el espesor después de formarse la viruta (t_c) con la diferencia de los ángulos $\Phi-\alpha$. Es decir, $t_o = l_s \text{sen } \Phi$ y $t_c = l_s \text{cos } (\Phi-\alpha)$. Mediante (*forma*) el uso del diagrama para asociar cada lado con el triángulo rectángulo.

Es importante aclarar que mediante el diagrama de la figura 5.28 **no se hace explícito el triángulo rectángulo** al que recurren para establecer la relación entre t_o y la diferencia de los ángulos $\Phi-\alpha$. Sin embargo, para determinar la ecuación que describe la deformación cortante para corte de metales, sí se hace explícito el triángulo y la relación de cada ángulo, como se muestra en la figura 5.29, a partir del cual se establecen la ecuación

$$\gamma = \frac{AD + DC}{BD} = \tan(\phi - \alpha) + \cot \phi$$

De tal manera que las razones trigonométricas de la fórmula anterior permiten describir la deformación cortante a partir del ángulo de inclinación que tiene la herramienta de corte y el ángulo del plano de corte. Así, por un lado, se obvia la identificación del triángulo rectángulo dentro de las representaciones del corte, por otro, muestra al triángulo que relaciona los ángulos formados por el corte y se asocia con cada lado, para generar así la ecuación anterior. Esto implica una ruptura en cuanto al proceso *geométrico-espacial* puesto que, en el primer caso es implícito y, para el siguiente, se hace explícito. De tal manera que, no se determina cuándo hacer al triángulo observable dentro del diagrama, y cuando se le deja de tarea al estudiante.

Finalmente, asociado con las condiciones de corte en el taladro, Groover (2007) indica que el ángulo de la punta de la broca se relaciona con la tolerancia de aproximación hacia el material a perforar (figura 5.30). Esta relación se establece mediante la ecuación

$$A = 0.5D \tan \left(90 - \frac{\theta}{2} \right)$$

Donde A es la tolerancia de aproximación, medida en milímetros o pulgadas, D es el diámetro de la broca y θ es el ángulo de la punta de la broca.

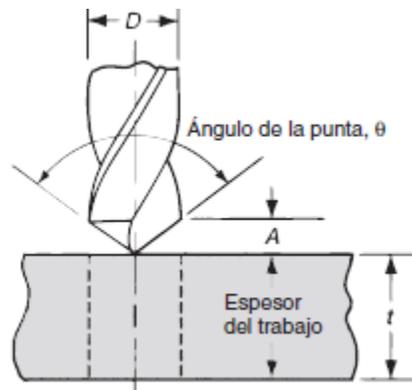


Figura 5.30 Ejemplo de agujero pasado, donde la broca sale en el lado opuesto del trabajo. (Groover, 2007, p.519)

En este caso, la razón trigonométrica permite determinar la tolerancia de aproximación partiendo del ángulo de la punta de la broca y “esta representa la distancia que la broca debe avanzar dentro del trabajo antes de alcanzar el diámetro completo”. (Groover, 2007, p. 519)

En consecuencia, el ángulo de la broca afecta la tolerancia ya que, a mayor tolerancia, mayor es el tiempo para taladrar el agujero. Por ello, el *funcionamiento* de la razón trigonométrica es como indicador del tiempo para taladrar un agujero pasado. Para esto, (*forma*) la razón tangente se opera con el diámetro para determinar la tolerancia de aproximación.

Cuarto Semestre

En el cuarto semestre identificamos conocimiento trigonométrico en las asignaturas: Electricidad y Magnetismo, Análisis Numérico y Matemáticas Avanzadas. Realizaremos nuestro análisis considerando ese orden de las asignaturas.

Los dos primeros temas descritos en la tabla que corresponden a la asignatura Electricidad y Magnetismo corresponden a contenidos que abordan la fuerza eléctrica y fuerza magnética y diferentes aspectos que se asocian a estas, como los campos magnéticos o el potencial eléctrico. Como lo vimos en Física Experimental, la fuerza eléctrica se describe como un vector y por ello, el *uso* que tiene la función trigonométrica es para transitar a la forma trigonométrica.

Entonces, al seguir este planteamiento, en el tema 5 se introducen dos contenidos: Ley de Faraday y Fuerza electromotriz de movimiento (fem). Ahora bien, Young y Freedman (2013) aclaran que la fem resultante depende del flujo magnético (Φ_B) el cual se define como el producto punto del campo magnético (\vec{B}) con el vector área (\vec{A}). Es decir:

$$\Phi_B = BA \cos \theta$$

De tal manera que la fem inducida es la deriva del flujo magnético

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Donde N es el número de espiras.

En el caso particular de un alternador como se muestra en la figura 5.31²², podemos notar que la fem inducida varía con respecto al tiempo en forma sinusoidal. Esto ocurre debido a que el flujo magnético está asociado con la función trigonométrica seno.

Ejemplo 29.3 Generador I: un alternador sencillo

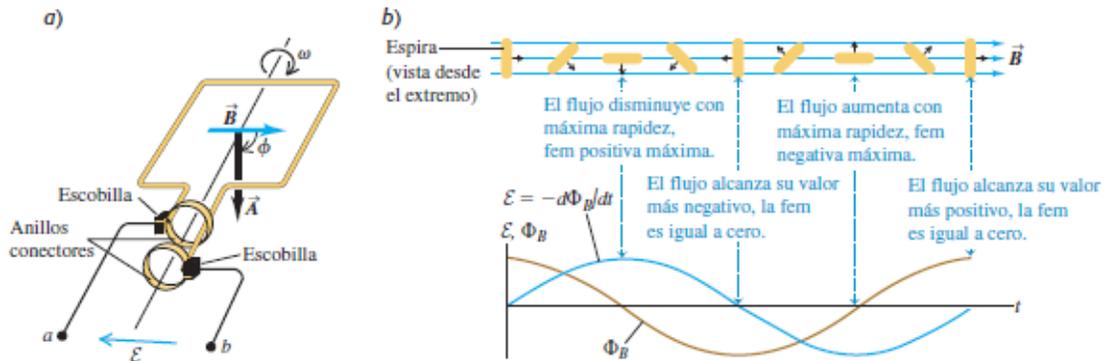


La figura 29.8a ilustra la versión sencilla de un *alternador*, que es un dispositivo que genera una fem. Se hace girar una espira rectangular con rapidez angular constante ω alrededor del eje que se indica. El campo magnético \vec{B} es uniforme y constante. En el momento $t = 0$, $\phi = 0$. Determine la fem inducida.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El campo magnético \vec{B} y el área A de la espira son constantes, pero el flujo a través de la espira cambia porque esta gira de modo que el ángulo ϕ entre \vec{B} y el vector área \vec{A} cambia

29.8 a) Diagrama de un alternador. Una espira conductora gira en un campo magnético, lo cual produce una fem. Las conexiones entre cada extremo de la espira y el circuito externo se hacen mediante un anillo conector en ese extremo. El sistema se ilustra para el momento en que el ángulo $\phi = \omega t = 90^\circ$. **b)** Gráfica del flujo a través de la espira y la fem resultante entre las terminales a y b , a lo largo de las posiciones correspondientes de la espira durante una rotación completa.



(figura 29.8a). Como la rapidez angular es constante y $\phi = 0$ en $t = 0$, el ángulo en función del tiempo está dado por $\phi = \omega t$.

EJECUTAR: El campo magnético es uniforme en toda la espira, por lo que el flujo magnético es $\Phi_B = BA \cos \phi = BA \cos \omega t$. Entonces, por la ley de Faraday [ecuación (29.3)] la fem inducida es

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(BA \cos \omega t) = \omega BA \sin \omega t$$

EVALUAR: La fem inducida \mathcal{E} varía en forma sinusoidal con respecto al tiempo (figura 29.8b). Cuando el plano de la espira es perpendicular a \vec{B} ($\phi = 0$ o 180°), Φ_B alcanza sus valores máximo y mínimo. En esos momentos, su razón instantánea de cambio es igual a cero y \mathcal{E} es cero. A la inversa, \mathcal{E} alcanza sus valores máximo y mínimo cuando el plano de la espira es paralelo a \vec{B} ($\phi = 90^\circ$ o 270°) y Φ_B cambia más rápidamente. Observe que la fem inducida no depende de la *forma* de la espira, tan solo de su área.

Figura 5.31 Ejemplo sobre inducción electromagnética. El caso de un alternador simple. (Young y Freedman, 2013, p. 963-964)

²² El ejemplo 29.3 fue extraído de Young y Freedman (2013), donde se incluye el código QR que redirige a un vídeo publicado en YouTube donde se explica este ejemplo.

De tal manera que, como lo argumentamos anteriormente, tiene un comportamiento periódico que representa el movimiento de la espira, como se muestra en la figura 5.31 en la gráfica de flujo.

De esta forma, el *funcionamiento* de la función trigonométrica permite anticipar el movimiento de una espira debido a la naturaleza periódica de la función seno. Esto es (*forma*) al relacionar el flujo magnético con la trayectoria que describe la espira.

Por otro lado, en la asignatura Análisis Numérico observamos algunos métodos que aproximan el valor numérico de cierta función alrededor de un punto. Burden y Faires (2011) proponen hacer aproximaciones con ejemplos que incluyen la función seno y coseno.

Un ejemplo que muestran Burden y Faires (2011), consiste en expresar a la función coseno de x por medio de la serie de Taylor. Posteriormente calculan el valor del coseno de un número específico y pretender reconocer el margen de error.

Es de nuestro interés debido a la *naturaleza* de la función trigonométrica de tal manera que, para calcular el coseno de un ángulo “sin necesidad de la calculadora”, se puede recurrir a la serie de Taylor que permitirá hacer aproximaciones dentro de algún intervalo.

Por otro lado, en los demás ejemplos que muestran Burden y Faires (2011), el uso de la calculadora para calcular las funciones trigonométricas de un ángulo es necesario para (*funcionamiento*) poder aproximar las soluciones con los métodos propuestos. Así, la *forma* de aproximar las soluciones con las funciones trigonométricas esta mediada por el uso de la calculadora.

Con respecto a Matemáticas Avanzadas, consiste en tres temas: 1 Variable compleja, 2 Análisis de Fourier (Series de Fourier) y 3 Análisis de Fourier (Transformada de Fourier).

En el primer tema, se utilizan los teoremas y fórmulas en las series trigonométricas como ejercicios a desarrollar dentro de los contenidos.

En el segundo tema se introducen las series de Fourier por medio de la explicación que se ofreció en la asignatura Ecuaciones Diferenciales, aunque aquí Hsu (1987) detalla más sobre algunas características propias de las series de Fourier.

Ahora bien, dentro de este tema, el contenido 2.7 trata sobre los espectros de frecuencia. Aquí, las series se utilizan para describir su comportamiento periódico. De hecho, Hsu (1987) afirma que

Los espectros de amplitud y fase no son curvas continuas sino que aparece una variable discreta [...]. La representación de los coeficientes complejos versus la variable discreta, especifica la función periódica $f(t)$ en el dominio de la frecuencia, así como $f(t)$ versus t especifica la función en el dominio del tiempo. (p. 58)

De esta manera, se proponen ejercicios para encontrar los espectros de frecuencia para una función periódica determinada por su periodo. Como se muestra en la figura 5.32

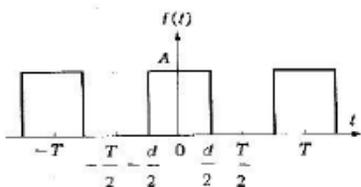


Figura 3.3 Un tren de pulsos rectangulares idénticos.

PROBLEMA 3.7 Encontrar los espectros de frecuencia para la función periódica $f(t)$, que se muestra en la figura 3.3, la cual consta de un tren de pulsos rectangulares idénticos de magnitud A y duración d .

Solución: la función $f(t)$ se puede expresar en un período como sigue:

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{para } -\frac{1}{2}d < t < \frac{1}{2}d \\ 0 & \text{para } -\frac{1}{2}T < t < -\frac{1}{2}d, \frac{1}{2}d < t < \frac{1}{2}T, \end{cases} \quad (3.46)$$

Figura 5.32 Ejemplo para encontrar los espectros de frecuencia para una función periódica que describe un tren de pulsos rectangulares idénticos. (Hsu, 1987, p. 58)

Así bien, el *funcionamiento* de la serie trigonométrica describe el comportamiento del espectro de frecuencia al analizar (*forma*) comportamiento del espectro de amplitud como una función discreta.

Posteriormente, Hsu (1987) explica lo que es la Transformada de Fourier. Cabe aclarar que el ejemplo anterior se asocia también con el contenido 3.4 puesto que, como lo mencionamos, la función que se analiza en tal ejemplo es discreta.

Quinto Semestre

Durante el quinto semestre se cursan cinco asignaturas, de las cuales, encontramos conocimiento trigonométrico en las siguientes: Análisis de Circuitos, Ingeniería de Materiales, Mecánica de Sólidos y Termofluidos.

Comenzaremos con la revisión de Análisis de Circuitos. En esta asignatura se trabaja con la corriente eléctrica, que Hayt et al. (2012) plantean como una función senoidal que depende

del tiempo, como se muestra en la figura 5.33 donde, en estos casos, se pide calcular la corriente i_L de los circuitos.

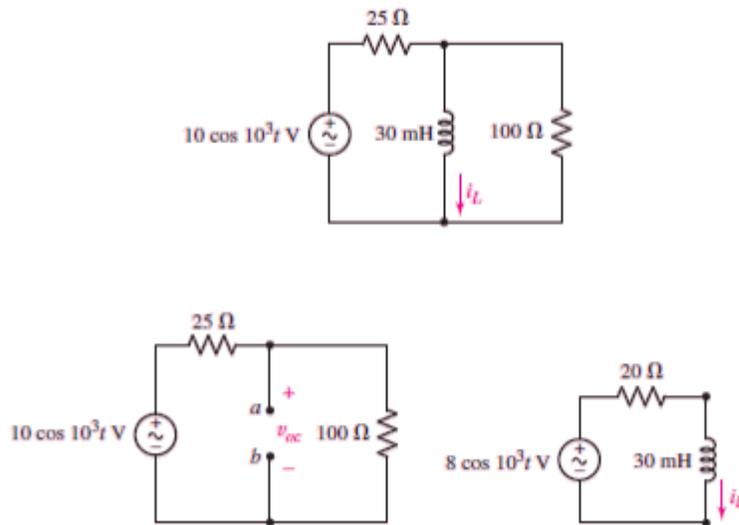


Figura 5.33 Diferentes circuitos con entradas de voltaje definido por funciones trigonométricas y se relacionan con la corriente. (Hay et al., 2012, p. 577)

En este aspecto, podemos reconocer a la función trigonométrica como aquella que describe el comportamiento de la corriente eléctrica (*funcionamiento*). Lo cual permite asociar características propias del circuito al tener una fuente senoidal (*forma*). Y esto determina el comportamiento de la corriente. Un caso particular se presenta con la corriente alterna, la cual describe el caso particular de una función senoidal.

Ahora bien, en la asignatura Ingeniería de Materiales, en el segundo tema, se abordan las Redes de Bravais que consisten en la estructura atómica de diferentes sistemas de cristales (figura 5.34a), lo cual los lleva a tener algunas características específicas. En la figura 5.34b se muestra una tabla que distingue estas características.

Estas características a nivel atómico les dan propiedades específicas a los materiales. En el caso particular de la Zirconia, Askeland et al. (2011) muestran el ejemplo de la figura 5.35.

De esta manera, para conocer el volumen de cambio de la transformación de la Zirconia de tetragonal a monocíclica, se requiere (*forma 1*) hacer uso de las ecuaciones expresadas en la tabla que muestra las características de las diferentes estructuras de los cristales. Esto, a su vez, permite (*forma 2*) ver el porcentaje de cambio de volumen, lo que (*funcionamiento*)

determina si el porcentaje de cambio no genera que la Zirconia se fracture en la transformación. En caso contrario, para estabilizar el cambio, sería necesario agregar algunos compuestos que permitan que no se fracture.

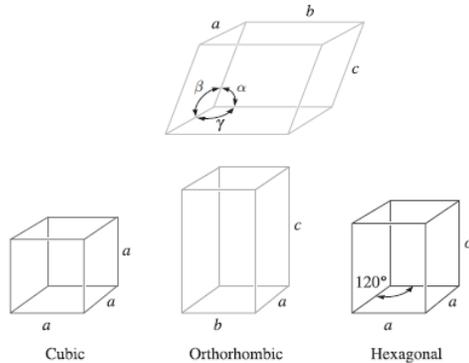


Figure 3-8 Definition of the lattice parameters and their use in cubic, orthorhombic, and hexagonal crystal systems.

a)

TABLE 3-1 ■ Characteristics of the seven crystal systems

Structure	Axes	Angles between Axes	Volume of the Unit Cell
Cubic	$a = b = c$	All angles equal 90° .	a^3
Tetragonal	$a = b \neq c$	All angles equal 90° .	a^2c
Orthorhombic	$a \neq b \neq c$	All angles equal 90° .	abc
Hexagonal	$a = b \neq c$	Two angles equal 90° . The angle between a and b equals 120° .	$0.866a^2c$
Rhombohedral or trigonal	$a = b = c$	All angles are equal and none equals 90° .	$a^3 \sqrt{1 - 3\cos^2\alpha + 2\cos^3\alpha}$
Monoclinic	$a \neq b \neq c$	Two angles equal 90° . One angle (β) is not equal to 90° .	$abc \sin \beta$
Triclinic	$a \neq b \neq c$	All angles are different and none equals 90° .	$abc \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$

b)

Figura 5. 34 Estructuras de Bravis. a) Algunos casos de las siete redes de sistemas cristalinos. b) Tabla que detalla en las características de cada estructura cristalina. (Askeland et al., 2011, p. 64)

En consecuencia, podemos determinar que el cálculo del volumen se relaciona directamente con el comportamiento de materiales y su estabilidad. En lo particular, para algunas estructuras de los siete sistemas cristalinos, el ángulo que forman algunos ejes determina el volumen, lo que a su vez lleva a distinguir las características propias de los cristales. Por lo tanto, la razón trigonométrica tiene un uso para determinar el volumen algunas estructuras cristalinas. Lo que permite identificar algunas propiedades de los cristales.

Example 3-6 Calculating Volume Changes in Polymorphs of Zirconia

Calculate the percent volume change as zirconia transforms from a tetragonal to monoclinic structure [9]. The lattice constants for the monoclinic unit cells are $a = 5.156$, $b = 5.191$, and $c = 5.304$ Å, respectively. The angle β for the monoclinic unit cell is 98.9° . The lattice constants for the tetragonal unit cell are $a = 5.094$ and $c = 5.304$ Å. [10] Does the zirconia expand or contract during this transformation? What is the implication of this transformation on the mechanical properties of zirconia ceramics?

SOLUTION

From Table 3-1, the volume of a tetragonal unit cell is given by

$$V = a^2c = (5.094)^2(5.304) = 137.63 \text{ \AA}^3$$

and the volume of a monoclinic unit cell is given by

$$V = abc \sin \beta = (5.156)(5.191)(5.304) \sin(98.9) = 140.25 \text{ \AA}^3$$

Thus, there is an expansion of the unit cell as ZrO_2 transforms from a tetragonal to monoclinic form.

$$\text{The percent change in volume} = \frac{(\text{final volume} - \text{initial volume})}{(\text{initial volume})} * 100 = \frac{(140.25 - 137.63 \text{ \AA}^3)}{137.63 \text{ \AA}^3} * 100 = 1.9\%$$

Most ceramics are very brittle and cannot withstand more than a 0.1% change in volume. (We will discuss mechanical behavior of materials in Chapters 6, 7, and 8.) The conclusion here is that ZrO_2 ceramics cannot be used in their monoclinic form since, when zirconia does transform to the tetragonal form, it will most likely fracture. Therefore, ZrO_2 is often stabilized in a cubic form using different additives such as CaO, MgO, and Y_2O_3 .

Figura 5. 35 Ejemplo sobre el comportamiento de la Zirconia al hacer un cambio de estructura. (Askeland et al., 2011, p. 73)

Ahora bien, el tema 4 corresponde al comportamiento mecánico en donde se aborda la Ley de Schmidt que consiste en calcular el esfuerzo cortante de un material metálico, en particular se trabaja con un cilindro de metal (figura 5.36)

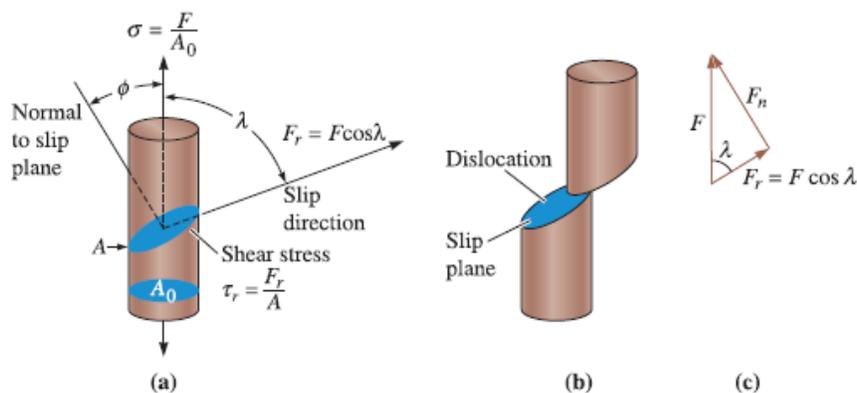


Figure 4-13 (a) A resolved shear stress τ is produced on a slip system. [Note: $(\phi + \lambda)$ does not have to equal 90° .] (b) Movement of dislocations on the slip system deforms the material. (c) Resolving the force.

Figura 5.36 Modelos para deducir la Ley de Schmidt. (Askeland et al., 2011, p. 132)

La ecuación que representa esta ley se describe como

$$\tau_r = \sigma \cos\Phi \cos\lambda$$

Para deducirla, en la figura 5.36 se traza un diagrama que separa al vector fuerza en sus dos componentes (F) y muestra al ángulo (λ) que se forma entre la normal al plano de deslizamiento A con la normal del área A_o . En consecuencia, el esfuerzo cortante se calcula al conocer los ángulos Φ y λ .

Así bien, la razón trigonométrica nos permite (*funcionamiento*) determinar el esfuerzo cortante de un material de aluminio a partir de los ángulos que se forman con la superficie y la normal al corte y con la superficie de corte y la normal al corte. Para esto, se requiere (*forma 1*) expresar el esfuerzo cortante como el cociente de la fuerza de corte entre el área de corte y al (*forma 2*) descomponer el vector de la fuerza y establecer el triángulo rectángulo para relacionar el área de corte con el área original con las partes de los lados del triángulo.

Por otro lado, en la asignatura Mecánica de Sólidos, se presenta la razón trigonométrica para descomponer los vectores asociados a las fuerzas de cuerpos sólidos deformables. De manera similar, permite pasar de la forma trinómica del vector a la que determina su dirección y magnitud.

Los vectores de fuerza se presentan en la deformación y en el esfuerzo normal y cortante de un objeto. Por esto, el *funcionamiento* que tiene la razón trigonométrica permite analizar la mecánica de un sólido al (*forma*) describir sus propiedades asociadas al equilibrio, esfuerzo y deformación.

Por ejemplo, Hibbeler (2011) plantea el caso de la figura 5. 37, de la flexión de una viga en donde se pide calcular el esfuerzo normal y la orientación del eje neutro.

En el ejemplo, podemos observar cómo el momento interno se separa en sus componentes sobre el eje Y y Z , partiendo del movimiento de flexión. Se construyen algunos triángulos para poder determinar los valores de los lados y relacionarlos así con los ángulos de flexión.

En este ejemplo, rectificamos lo que mencionamos en los párrafos anteriores. Es decir, descomponer el movimiento en las diferentes componentes del sólido y tomar en cuenta el movimiento giratorio sobre el eje Z . Esto demanda de un proceso *geométrico-espacial* para girar la figura y asociar las componentes una vez realizada la rotación de la viga.

La sección en Z de la figura 6-34a está sometida al momento flexionante de $M = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$. Con base en los métodos del apéndice A (vea los ejemplos A.4 o A.5), los ejes principales y y z se orientan de la manera mostrada para representar los momentos de inercia principales mínimo y máximo, $I_y = 0.960(10^{-3}) \text{ m}^4$ e $I_z = 7.54(10^{-3}) \text{ m}^4$, respectivamente. Determine el esfuerzo normal en el punto P y la orientación del eje neutro.

SOLUCIÓN

Para el uso de la ecuación 6-19, es importante que el eje z represente el eje principal para el momento de inercia *máximo*. (Tenga en cuenta que la mayor parte del área se ubica fuera de este eje.)

Componentes del momento interno. A partir de la figura 6-34a,

$$M_y = 20 \text{ kN} \cdot \text{m} \sin 57.1^\circ = 16.79 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_z = 20 \text{ kN} \cdot \text{m} \cos 57.1^\circ = 10.86 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Esfuerzo flexionante. En primer lugar deben determinarse las coordenadas y y z del punto P . Observe que las coordenadas y' y z' de P son $(-0.2 \text{ m}, 0.35 \text{ m})$. Si se usan los triángulos de construcción con distintos sombreados de la figura 6-34b, se tiene

$$y_P = -0.35 \sin 32.9^\circ - 0.2 \cos 32.9^\circ = -0.3580 \text{ m}$$

$$z_P = 0.35 \cos 32.9^\circ - 0.2 \sin 32.9^\circ = 0.1852 \text{ m}$$

Al aplicar la ecuación 6-17,

$$\begin{aligned} \sigma_P &= -\frac{M_z y_P}{I_z} + \frac{M_y z_P}{I_y} \\ &= -\frac{(10.86(10^3) \text{ N} \cdot \text{m})(-0.3580 \text{ m})}{7.54(10^{-3}) \text{ m}^4} + \frac{(16.79(10^3) \text{ N} \cdot \text{m})(0.1852 \text{ m})}{0.960(10^{-3}) \text{ m}^4} \\ &= 3.76 \text{ MPa} \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

Orientación del eje neutro. El ángulo $\theta = 57.1^\circ$ se muestra en la figura 6-34a. Así,

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \left[\frac{7.54(10^{-3}) \text{ m}^4}{0.960(10^{-3}) \text{ m}^4} \right] \tan 57.1^\circ \\ \alpha &= 85.3^\circ \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

El eje neutro está orientado como se muestra en la figura 6-34b.

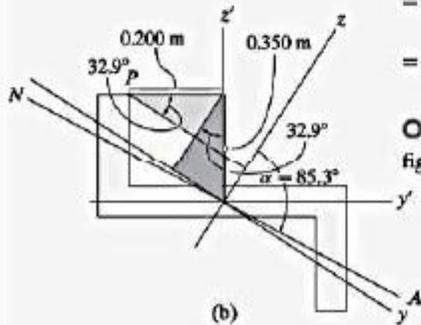
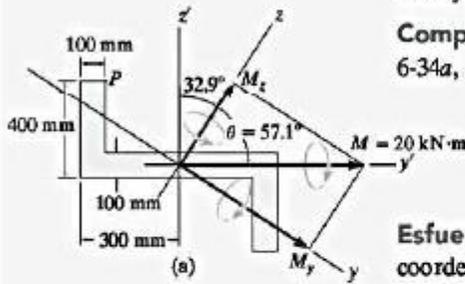


Figura 6-34

Figura 5.37 Ejemplo de una viga de sección Z que se flexiona. (Hibbeler, 2011, p. 308)

Por otro lado, en el tema 8, contenido 8.4 se aborda el círculo de Mohr. Este se utiliza para determinar el ángulo del esfuerzo cortante. Hibbeler (2011) plantea algunos ejemplos en donde se utiliza el círculo de Mohr, destacamos el que se muestra en la figura 5.38.

Debido a la carga aplicada, el elemento en el punto A sobre el eje sólido de la figura 9-18a, se somete al estado de esfuerzo mostrado en la figura. Determine los esfuerzos principales que actúan en este punto.

SOLUCIÓN

Construcción del círculo. A partir de la figura 9-18a,

$$\sigma_x = -12 \text{ ksi} \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = -6 \text{ ksi}$$

El centro del círculo se encuentra en

$$\sigma_{\text{prom}} = \frac{-12 + 0}{2} = -6 \text{ ksi}$$

El punto de referencia $A(-12, -6)$ y el centro $C(-6, 0)$ están representados en la figura 9-18b. El círculo se construye con un radio de

$$R = \sqrt{(12 - 6)^2 + (6)^2} = 8.49 \text{ ksi}$$

Esfuerzos principales. Los esfuerzos principales se indican mediante las coordenadas de los puntos B y D . Se tiene, para $\sigma_1 > \sigma_2$,

$$\sigma_1 = 8.49 - 6 = 2.49 \text{ ksi} \quad \text{Resp.}$$

$$\sigma_2 = -6 - 8.49 = -14.5 \text{ ksi} \quad \text{Resp.}$$

La orientación del elemento puede determinarse al calcular el ángulo $2\theta_{p_2}$ en la figura 9-18b, el cual se mide *en sentido antihorario* desde CA hasta CD . Esta orientación define la dirección θ_{p_2} de σ_2 y su plano principal asociado. Se tiene

$$2\theta_{p_2} = \tan^{-1} \frac{6}{12 - 6} = 45.0^\circ$$

$$\theta_{p_2} = 22.5^\circ$$

El elemento se orienta de manera que el eje x' o σ_2 esté dirigido a 22.5° *en sentido antihorario* desde la horizontal (eje x), como se muestra en la figura 9-18c.

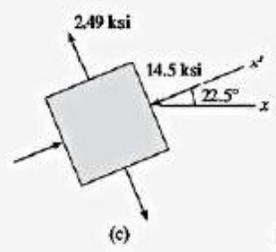
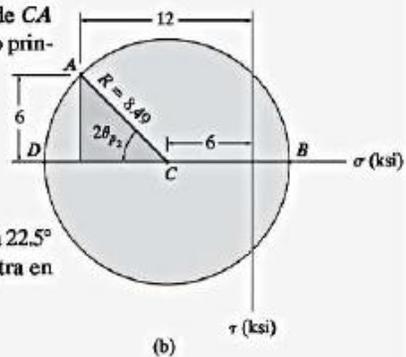
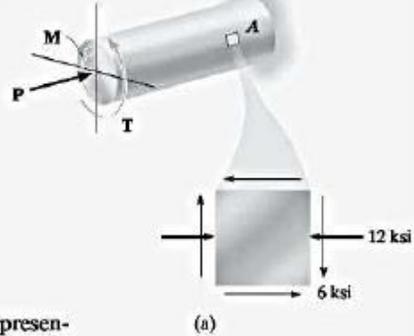


Figura 9-18

Figura 5.38 Esfuerzos principales con ayuda del Círculo de Mohr. (Hibbeler, 2011, p. 465)

En este caso podemos notar que el círculo de Mohr permite asociar los datos con un triángulo rectángulo en donde, para calcular el ángulo, se utiliza la tangente inversa. De esta forma, se asocian los esfuerzos principales como longitudes del triángulo, el cual se ubica de acuerdo con los signos de estos esfuerzos y se establece la relación de estos con la razón trigonométrica tangente, la cual permite conocer el ángulo de orientación.

Por lo tanto, podemos notar que la razón trigonométrica tiene un *uso* como relación entre el ángulo y sus lados. Como lo vimos en el primer semestre, sin embargo, en este caso, las longitudes del triángulo corresponden a los esfuerzos principales y el *sentido* que tiene la razón es para conocer la orientación del eje sólido al aplicar un esfuerzo.

En lo que respecta a la asignatura Termofluidos, en el contenido 3.9, Potter et al. (2012) explican el movimiento del flujo radial de una bomba (comúnmente llamada bomba centrífuga). Aquí, pretenden mostrar el torque T que actúa sobre el fluido y la presión teórica H y muestran así el siguiente diagrama (figura 5.39).

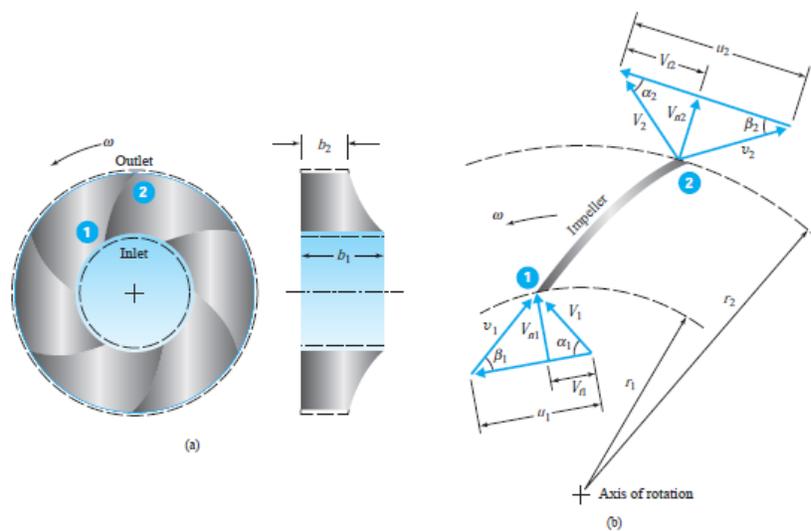


Fig. 12.3 Idealized radial-flow impeller: (a) impeller control volume; (b) velocity diagrams at control surfaces.

Figura 5.39 Patrón de la bomba centrífuga. (Potter et al., 2012, p. 602)

Para calcular la presión teórica H se considera la descomposición vectorial de las velocidades, como se muestra en la figura anterior, y se consideran otros parámetros que son la velocidad de giro u y la gravedad g .

La ecuación, también llamada relación de la turbomáquina de Euler, queda como

$$H_t = \frac{u_2 V_2 \cos \alpha_2 - u_1 V_1 \cos \alpha_1}{g}$$

Nuevamente, las razones trigonométricas tienen un *uso* como descomposición vectorial, en este caso, vector velocidad. Y estas tienen una *forma* para calcular la presión teórica.

Sexto Semestre

En el sexto semestre vamos a revisar las siguientes materias: Electrónica Básica, Mecanismos y Modelado de Sistemas Físicos.

En la asignatura Electrónica Básica, dentro del tema 2. Diodos se abordan las series trigonométricas para describir el movimiento de una carga. En el semestre anterior se trabajó la tensión de una fuente senoidal, es decir una fuente $v_i = V \cos \omega t$. En este caso se extiende el estudio para diodos ideales en los cuales se busca dibujar la forma de onda que representa la tensión de una carga y su valor medio como corriente continua.

Por ejemplo, en el caso de la onda senoidal rectificada en media onda, al describir el comportamiento de la carga con respecto al tiempo, se plantea su desarrollo en serie de Fourier. Entonces debido a su desarrollo con series trigonométricas, el diodo muestra frecuencias armónicas (figura 5.40).

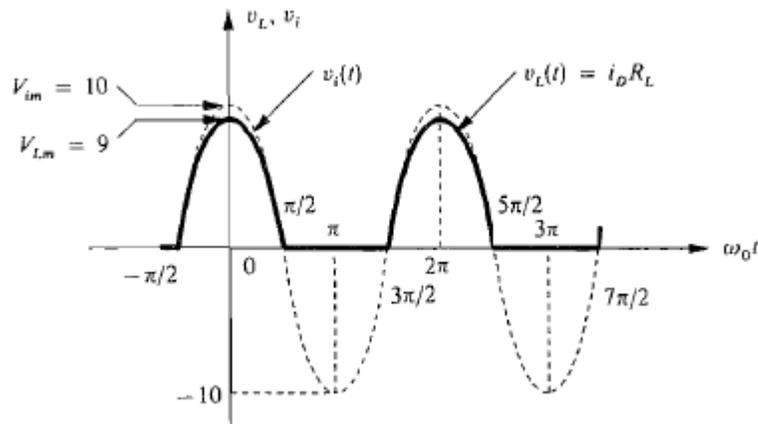


Figura 5.40 Las formas de onda de un circuito rectificador en media onda donde su valor medio se expresa como 2.86V. (Schilling et al., 1993, p. 4)

Con base en el argumento anterior, las series trigonométricas (*funcionamiento*) describen el movimiento armónico de una carga, con ello, si se encuentra un cambio en la forma de onda, es decir mediante la *forma* identificar un cambio en la cresta de la onda, implica un cambio de comportamiento de la onda y, por lo tanto, del diodo. Se observa en la figura 5.41.

De esta forma, las series trigonométricas se *usan* en los circuitos para describir el comportamiento de la corriente eléctrica.

En este caso, se tienen las siguientes consideraciones. El vector de la posición del punto B determina las ecuaciones de posición del acoplamiento de cuatro barras. Además, el eje de las abscisas será llamado Eje Real, mientras que el eje vertical está asociado con los números complejos. De esta forma, la descomposición vectorial queda en términos de la forma de Euler de un número complejo, como se había visto durante el primer semestre en la asignatura Álgebra. Es decir, el vector posición se describe como

$$\mathbf{r}_B = r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} = \mathbf{r}_1 + r_4 e^{i\theta_4}$$

Entonces, Suh y Radcliffe (1978) proponen asumir al vector \mathbf{r}_1 como fijo y que se conocen las longitudes r_2 , r_3 y r_4 y el ángulo θ_2 . Así, la ecuación que descompone el vector de posición \mathbf{r}_1 se escribe de la siguiente manera

$$\mathbf{r}_1 = r_2 e^{i\theta_2} + d e^{i\theta_d}$$

Esto implica que la descomposición del vector queda en términos de entradas complejas, es decir, en forma exponencial de números complejos. Sin embargo, por medio la relación entre la forma exponencial y la forma trigonométrica de los números complejos, se deduce la siguiente ecuación.

$$\text{sen}\theta_4 = \frac{-d \text{sen}\theta_d + r_3 \text{sen}\theta_3}{r_4}$$

Por lo tanto, la función trigonométrica, si bien forma parte de la descomposición vectorial, esta se relaciona por medio de la forma exponencial, lo que nos lleva distinguirla de la razón trigonométrica, puesto que, como planteamos en el primer semestre, la “igualdad” de forma exponencial y la trigonométrica se explica por medio de funciones y no de razones trigonométricas. Además, es importante notar que esta ecuación será derivada, lo que implica que tenga un manejo como función (ya que interesa describir el movimiento a partir de la ecuación).

Así, la función trigonométrica (*funcionamiento*) permite conocer la función que determina la posición de los diferentes vectores asociados al acoplamiento de cuatro barras. Para ello, la *forma* es la sustitución de las ecuaciones que relacionan la forma exponencial y la forma trigonométrica de los números complejos.

Ahora bien, para la velocidad del acoplamiento de cuatro barras se obtiene al derivar la posición \mathbf{r}_B , por lo que se obtiene la siguiente ecuación

$$r_2 \dot{\theta}_2 e^{i\theta_2} + r_3 \dot{\theta}_3 i e^{i\theta_3} = r_4 \dot{\theta}_4 e^{i\theta_4}$$

De ahí, nuevamente se cambia de la forma exponencial a la trigonométrica y se separan las componentes complejas con las imaginarias. Siguiendo este proceso para los tres vectores de posición, se tiene un sistema de ecuaciones que Suh y Radcliffe (1978) resuelven mediante la regla de Cramer y obtienen la siguiente expresión.

$$\dot{\theta}_3 = \dot{\theta}_2 \frac{r_2 \text{sen}(\theta_4 - \theta_2)}{r_3 \text{sen}(\theta_3 - \theta_4)}$$

Se sigue un proceso similar para en análisis de la aceleración del acoplamiento de cuatro barras.

Por lo tanto, el *uso* que tiene la función trigonométrica en este caso, es describir el movimiento de un acoplamiento de cuatro barras, su *funcionamiento* es predecir la posición, velocidad y aceleración de los componentes del acoplamiento de cuatro barras y esto es mediante la *forma 1*, descomponer el vector (visto como número complejo) en sus dos componentes y (*forma 2*) pasar de la forma exponencial a la forma polar del número complejo y, en caso necesario, (*forma 3*) sustituir identidades trigonométricas para simplificar ecuaciones.

En la asignatura Modelado de Sistemas Físicos, Rodríguez (1989) plantea que los sistemas de primer orden pueden ser de los siguientes tipos: eléctricos, mecánicos, térmicos, hidráulicos o híbridos. Al respecto, hace un repaso para resolver los sistemas de ecuaciones, donde algunas ecuaciones tienen funciones trigonométricas. Sin embargo, el proceso para resolverlas es el mismo que se siguió en el curso de Ecuaciones Diferenciales. De manera similar para el contenido 2.2.

En la asignatura Diseño de Elementos de Maquinarias en el segundo tema, se aborda el diseño de flechas. En particular, Budynas y Nisbett (2008) analizan los tornillos de potencia de rosca cuadrada, como se muestra en la figura 5.43a.

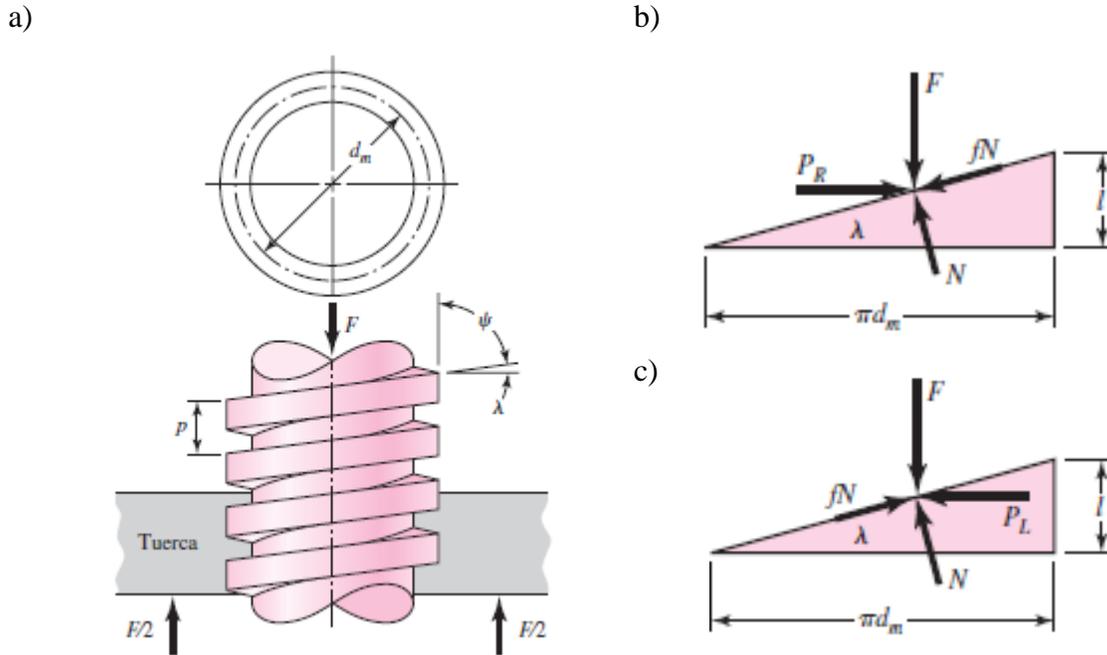


Figura 5.43 a) Parte de un tornillo de potencia. b) Diagrama de fuerza al subir la carga. c) Diagrama de fuerza al bajar la carga. (Budynas y Nisbett, 2008, p. 401)

Posteriormente, para determinar la suma de todas las fuerzas axiales que actúan sobre el área normal de la rosca (F) al subir la carga (figura 5.43b), se separa la fuerza normal (N) en sus componentes y se procede a hacer la suma de fuerzas para la componente horizontal (F_H) y la componente vertical (F_V), por lo que el sistema de equilibrio (cuando la suma de fuerzas es cero) se expresa con las siguientes ecuaciones

$$\sum F_H = P_R - N \operatorname{sen} \lambda - f N \operatorname{cos} \lambda = 0$$

$$\sum F_V = F + f N \operatorname{sen} \lambda - N \operatorname{cos} \lambda = 0$$

De manera similar para el caso cuando baja la carga (figura 5.43c).

En consecuencia, la razón trigonométrica tiene un uso como descomposición vectorial y esto tiene la intención de relacionar el sistema en equilibrio bajo la acción de estas fuerzas sobre el tornillo.

Ahora bien, en el caso de los engranes, Budynas y Nisbett (2008) establecen la relación $r_b = r \operatorname{cos} \Phi$ donde r_b es el radio de los círculos base de los engranes, r es el radio del círculo de paso y Φ es el ángulo de presión, como se muestra en la figura 5.44

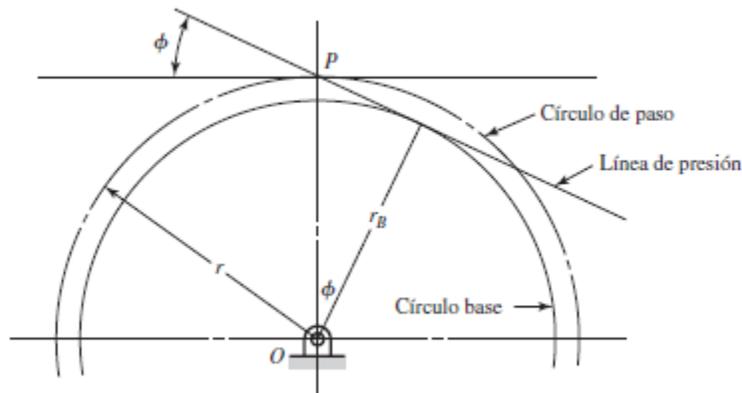


Figura 5.44 La configuración del engrane. (Budynas y Nisbett, 2008, p.660)

De manera similar, Budynas y Nisbett (2008) presentan un engrane recto que tiene un diámetro infinitamente grande (esto lo denominan cremallera), acoplado a un piñón. Por medio de la figura 5.45 los autores relacionan el paso base (p_b) con el paso circular (p_c) mediante la ecuación

$$p_b = p_c \cos \phi$$

Por lo tanto, en este caso, la razón trigonométrica se *usa* para determinar el comportamiento de un engrane de acuerdo con su forma. Es decir, su *funcionamiento* es determinar el comportamiento de los dientes de engranes a partir del ángulo de presión.

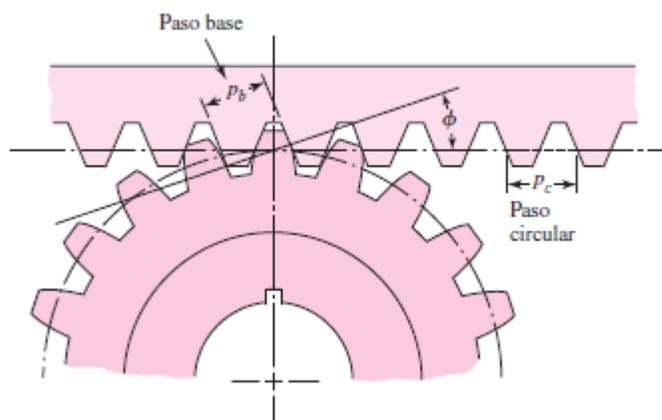


Figura 5.45 Piñón y cremallera con dientes de involuta. (Budynas y Nisbett, 2008, p. 662)

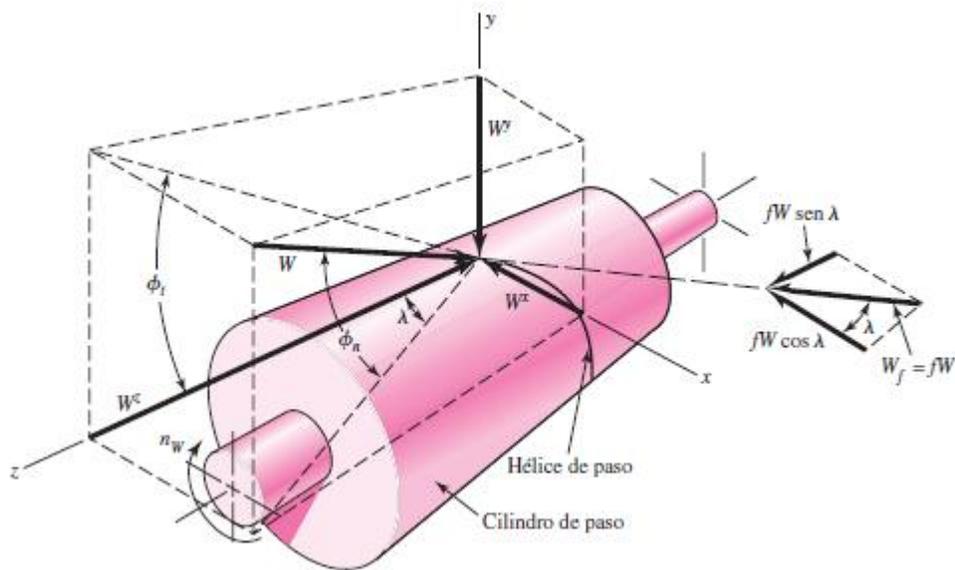


Figura 5.46 Dibujo del cilindro de paso de un tornillo sinfín; que muestra las fuerzas que se ejercen sobre el mismo por la corona sinfín (Budynas y Nisbett, 2008, p. 695)

Posteriormente, en la figura 5.46 se muestra un tipo de transmisión con tornillo sinfín. La fuerza W se descompone en cada componente por medio de las razones trigonométricas. De esta *forma* se analiza el movimiento en cada uno de los ejes del cilindro de paso.

Ahora bien, para calcular la eficiencia, esta se determina con la siguiente ecuación,

$$\eta = \frac{\cos \phi_n - f \tan \lambda}{\cos \phi_n - f \cot \lambda}$$

Podemos ver que la eficiencia depende de los ángulos ϕ_n y λ y del coeficiente de fricción. En otras palabras, la razón trigonométrica tiene un *funcionamiento* de eficiencia a partir del ángulo de presión.

Con respecto a los temas 4, 5 y 6, se muestran las fórmulas asociadas a los contenidos, que, si bien utilizan alguna razón trigonométrica, no se explica la deducción de esta. En los ejemplos, se recurre a sustituir los valores dados y hacer los cálculos necesarios. En ese sentido, las razones trigonométricas tienen nuevamente un *sentido* algebraico.

En el caso del tema 7, en el contenido 7.1 Budynas y Nisbett (2008) explican la configuración mecánica de los frenos de tambor por medio de la siguiente figura.

En Máquinas Eléctricas con respecto a los temas y contenidos donde se identificó conocimiento trigonométrico se retoman algunos tópicos vistos en asignaturas anteriores y los argumentos para abordarlos son similares. Tal es el caso de los temas 1, 2, 3, 5. Para el tema 3, contenido 3.8, se presenta un tema que no se había mencionado anteriormente.

En ese caso, Pérez (1994) muestra el diagrama de un motor monofásico y su ecuación asociada al flujo que incluye la función seno que depende del tiempo. Sin embargo, no se muestran detalles de cómo deducir la ecuación o la aplicación en ejemplos.

En el tema de máquinas sincrónicas el autor indica el diagrama que se muestra en la figura 5.48 sobre diagramas fasoriales.

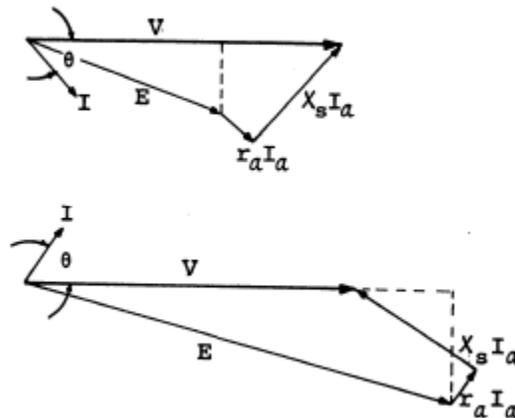


Figura 5.48 Diagramas de fasores correspondientes a un circuito equivalente del motor sincrónico. En el diagrama superior corresponde al factor de potencia de retraso, mientras que el diagrama inferior es para factor de potencia adelantado. (Pérez, 1994, p. 313)

Estos diagramas se utilizan para separar los vectores en sus componentes y encontrar así el valor de la hipotenusa que se relaciona con la fuerza electromotriz. Entonces, el *funcionamiento* de la función trigonométrica permite calcular el factor de potencia (E), para esto, la *forma* es la construcción del triángulo rectángulo y su relación de cada lado con los vectores o componentes del vector asociados, por lo que para calcular el factor de potencia se sigue la *forma* asociación con la hipotenusa y los dos catetos, para esto es necesaria la *forma* descomposición vectorial de los fasores $r_a I_a$ y $X_s I_a$.

Finalmente, en el tema 7 sobre motores de uso espacial, Chapman (2012) muestra cómo un campo magnético oscilatorio estacionario se divide en dos campos magnéticos iguales pero que giran en direcciones contrarias (figura 5.49).

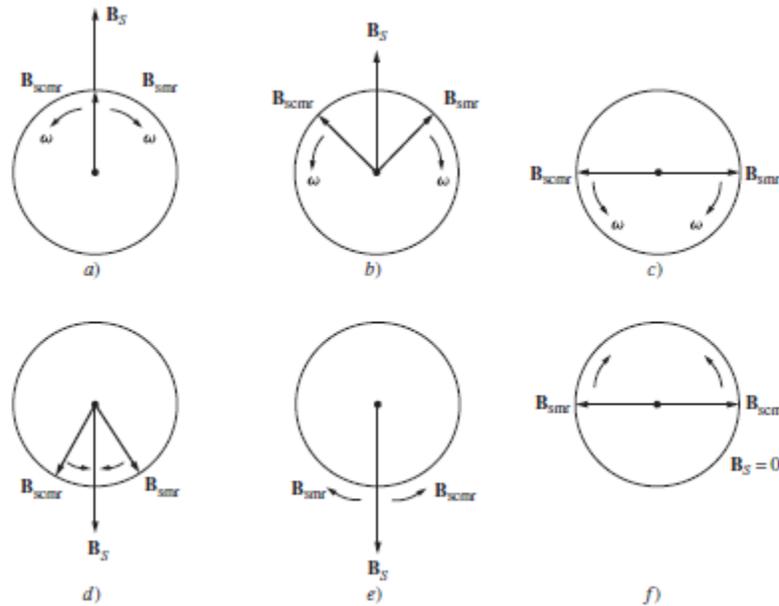


Figura 5.49 Transformación de un campo magnético oscilatorio único en dos campos magnéticos de igual magnitud pero que giran en direcciones opuestas. La suma vectorial de estos campos siempre está en el plano vertical. (Chapman, 2012, p. 419)

Las expresiones

$$\mathbf{B}_S(t) = (B_{m\acute{a}x} \cos \omega t) \hat{j}$$

$$\mathbf{B}_{SMR}(t) = \left(\frac{1}{2} B_{m\acute{a}x} \cos \omega t \right) \hat{i} - \left(\frac{1}{2} B_{m\acute{a}x} \sin \omega t \right) \hat{j}$$

y

$$\mathbf{B}_{SCMR}(t) = \left(\frac{1}{2} B_{m\acute{a}x} \cos \omega t \right) \hat{i} + \left(\frac{1}{2} B_{m\acute{a}x} \sin \omega t \right) \hat{j}$$

indican el comportamiento del campo magnético con respecto al tiempo.

Las funciones trigonométricas tienen el *funcionamiento* de proyectar un movimiento circular de posición con respecto al tiempo. Esto lo habíamos observado en el movimiento de un cuerpo helicoidal, donde dos de las componentes (*forma*) se relacionan con las funciones seno y coseno.

En la asignatura Diseño Mecatrónico se hace un repaso de algunos conceptos vistos en semestres anteriores como el voltaje inducido y la (*forma*) descomposición vectorial de fuerzas. Posteriormente, se propone la aplicación de un método de diseño de sistemas mecatrónicos con base en la información vista.

Séptimo Semestre

En el séptimo semestres, en Diseño de Elementos de Máquinas, se aborda el diseño de engranes, de transmisiones con elementos flexibles, de resortes y muelles. Para ello, Budynas y Nisbett (2008) recurren al *uso* de la descomposición vectorial por medio de razones trigonométricas. Particularmente, en el caso de los engranes, se realiza (*funcionamiento*) un análisis de fuerzas, que permita determinar el comportomaniento y decidir sobre tipo de engrane a utilizar con base en (*funcionamiento*) la descripción de sus componentes que se (*forma*) asocian al triángulo rectángulo en el plano, lo que implica (*forma*) utilizar las ecuaciones de esfuerzo y resistencia por flexión, a partir de la identificación, por medio de la (*forma*)observación y distinción de características propias de un engrane helicoidal.

De esta forma, es necesario un proceso de identificación del triángulo en los diagramas, pero también, de reconcer la forma que describe el engrane para, utilizar así las ecuaciones pertinentes, que reconocen sus características con base en el tipo de engrane que se observa.

Ahora bien, para el diseño del freno del tambor, se utiliza la función trigonométrica (*uso*) para determinar el comportamiento de la presión del freno del tambor. Esto, mediante el *funcionamiento* de la representación del freno del tambor como un círculo asociado a este elemento de las máquinas. Para ello, la *forma 1* implica identificar el triángulo rectángulo, seguido de la *forma 2*, sustituye en las ecuaciones (con base en la representación del triángulo) las expresiones algebraicas que le permitirán operar a las funciones trigonométricas para (*funcionamiento*)predecir el momento de cambio.

Octavo Semestre

Durante este semestre, se encuentra la asignatura Máquinas Eléctricas, en la cual se retoman las herramientas trigonométricas para contenidos similares a los que se llevaron en los semestres previos. En particular, se retoman algunas leyes de magnetismo (tema 1). Para

estudiar así, el comportamiento de los transformadores, los motores de inducción y las máquinas sincrónicas. Así, se retoma el contenido de asignaturas previas relacionadas con Física.

Destacamos aquí el caso del factor de potencia que Chapman (2012) desarrolla por medio de funciones trigonométricas. Cabe aclarar que no se utilizan diagramas, sino que, directamente se hacen explícitas las ecuaciones que, por (*forma*) medio de un proceso algebraico, permiten el (*funcionamiento*) cálculo del factor de potencia.

Noveno Semestre

En la asignatura Robótica, en el tema 2 se hace un repaso sobre el tratamiento de vectores para determinar una posición, así como la orientación (lo que hemos llamado dirección) además de los vectores de rotación y traslación. La determinación del vector posición por medio de las diferentes coordenadas se aborda desde el primer semestre, en la asignatura Cálculo y Geometría Analítica, posteriormente, en el segundo semestre se retoma para describir la posición de un móvil en Física Experimental y Estática donde se considera de relevancia el cambio de coordenadas (cartesianas, cilíndricas o esféricas). Nuevamente, en Cinemática y Dinámica se aborda la representación del vector posición y el sistema de referencia. Posteriormente, en el quinto semestre se analiza el movimiento de cuerpos rígidos en Mecánica de Sólidos dentro del sistema de coordenadas, comúnmente para casos que descomponen el vector en el plano. Ahora bien, en Mecanismos, se particulariza en describir el movimiento (por medio de vectores función posición) de mecanismos como el acoplamiento de las cuatro barras. Para hacer el análisis, se recurre al diagrama que describa tal movimiento. En tal momento, la descomposición vectorial cambia de representación puesto que anteriormente tenía un *significado* como expresión trigonométrica de la forma trinómica del vector. A partir de este momento, el *significado* de la función trigonométrica se establece por su relación con la función exponencial de un número complejo.

En este semestre, la asignatura Robótica presenta la descripción de la posición de un vector empleando cada sistema de coordenadas visto durante la carrera (cartesianas, cilíndricas y esféricas). En este caso, la representación del vector no se expresa como su forma trinómica (por medio de los vectores unitarios \hat{i} , \hat{j} y \hat{k}), sino como el vector columna, es decir la

representación matricial 3x1. Así, por ejemplo, un vector posición (P) se puede representar como

$$P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

Donde p_x , p_y y p_z son las coordenadas de cada eje.

Ahora bien, para explicar la obtención de la matriz de rotación en términos del ángulo de rotación del sistema de OUV (figura 5.50), Barrientos et al. (2007) definen a la matriz como sigue

$$R = \begin{bmatrix} i_x i_u & i_x j_v \\ j_y i_u & j_y j_v \end{bmatrix}$$

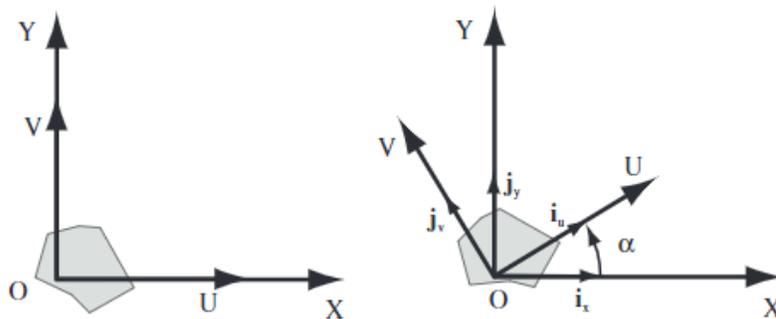


Figura 5.50 Orientación de un sistema OUV respecto a otro OXY en un plano. (Barrientos et al., 2007, p.69)

De esta forma, los autores indican que, al realizar los productos punto correspondientes, entonces se obtiene la siguiente matriz de rotación

$$R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen } \alpha \\ \text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

En consecuencia, la rotación de un vector de posición resulta de multiplicar a este vector por la matriz de rotación y se obtiene un nuevo vector que giró un ángulo específico. De manera similar, Barrientos et al. (2007) explican esto para un sistema de tres dimensiones como se muestra en las figuras 5.51 y 5.52.

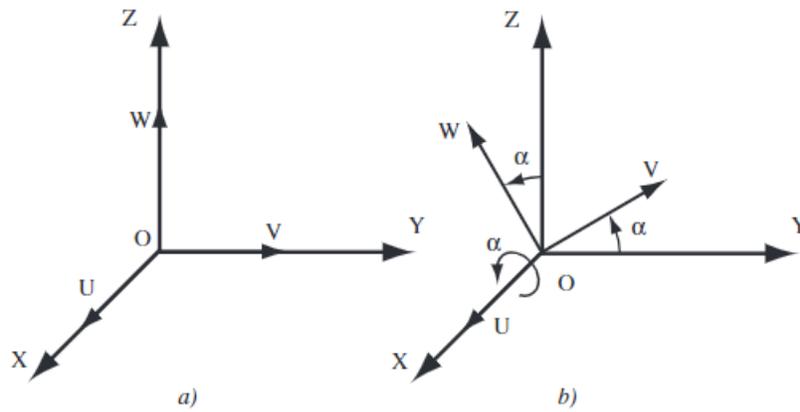


Figura 5.51 Sistema de referencia $OXYZ$ y solidario al objeto $OUVW$. (Barrientos et al., 2007, p.70)

La figura 5.51b corresponde a la rotación alrededor del eje OX del sistema $OUVW$, con el eje OU y viene representada mediante la siguiente matriz

$$\mathbf{Rot}_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\text{sen } \alpha \\ 0 & \text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

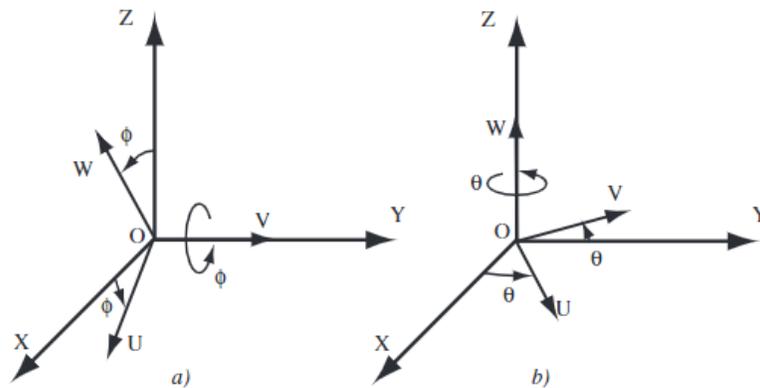


Figura 5.52 Rotación del sistema $OUVW$ con respecto a los ejes OY y OZ . (Barrientos et al., 2007, p.71)

La figura 5.52 a corresponde a la rotación alrededor del eje OY del sistema $OUVW$, con el eje OV y viene representada mediante la matriz

$$\mathbf{Rot}_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \text{sen } \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}$$

La figura 5.52 b corresponde a la rotación alrededor del eje OZ del sistema $O'UVW$, con el eje OW y viene representada mediante la siguiente matriz

$$\mathbf{Rot}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta & 0 \\ \text{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por otra parte, dentro de las transformaciones homogéneas, las matrices de rotación tienen un papel importante ya que con ellas podemos generar otro tipo de matrices llamadas Matrices de Transformación Homogénea que permiten la representación conjunta de la posición y de la orientación (localización) de un sólido en el espacio y que viene representada de la siguiente manera

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3 \times 3} & \mathbf{p}_{3 \times 1} \\ \mathbf{f}_{1 \times 3} & \mathbf{w}_{1 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ \text{Perspectiva} & \text{Escalado} \end{bmatrix}$$

De acuerdo con Barrientos et al. (2007) una matriz de transformación homogénea se puede aplicar de diferentes maneras como se muestra en la figura 5.53.

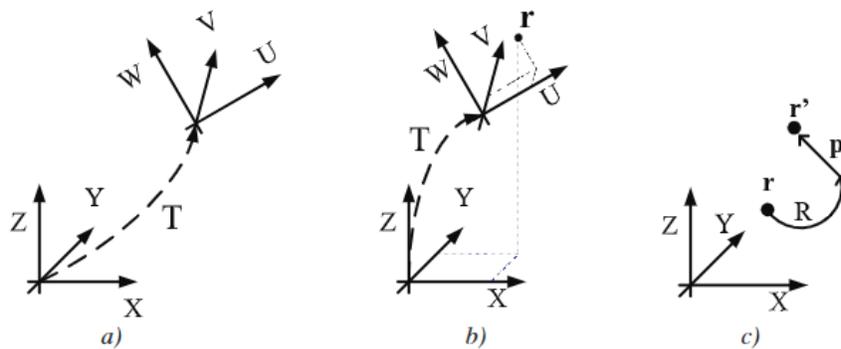


Figura 5.53 Aplicaciones alternativas de las Matrices de Transformación Homogénea. (Barrientos et al., 2007, p.78)

En la figura 5.53a se representa la posición y orientación de un sistema girado y trasladado $O'UVW$ con respecto a un sistema fijo de referencia $OXYZ$. En la figura 5.53b se representa la transformación de un vector \mathbf{r} expresado en coordenadas con respecto a un sistema $O'UVW$ a su expresión en coordenadas del sistema de referencia $OXYZ$. Finalmente, en la figura 5.53c se representa la rotación (\mathbf{R}) y translación (\mathbf{p}) de un vector \mathbf{r} con respecto a un sistema de referencia fijo $OXYZ$ para transformarlo en el vector \mathbf{r}' .

Ahora bien, hemos mencionado que una matriz de transformación sirve para representar giros y traslaciones sobre un sistema de referencia. Esta utilidad tiene aún más importancia cuando se componen las matrices homogéneas para describir diversos giros y traslaciones consecutivos sobre un sistema de referencia determinado.

Por ejemplo, una matriz que representa un giro de un ángulo α sobre el eje OX , seguido de un giro de un ángulo ϕ sobre el eje OY y de un giro de un ángulo θ sobre el eje OZ , puede obtenerse por la siguiente composición de matrices básicas de rotación

$$\mathbf{T} = \mathbf{Rotz}(\theta)\mathbf{Roty}(\phi)\mathbf{Rotx}(\alpha)$$

Cabe mencionar que el orden de aplicación de las transformaciones es muy importante debido a que el producto de matrices no es conmutativo y, por ello, obtendríamos un resultado distinto si invertiésemos el orden.

Por lo tanto, las razones trigonométricas seno y coseno tienen el siguiente *uso*, describen un movimiento rotatorio con respecto al ángulo de giro. Es decir, su *funcionamiento* como parte de un sistema matricial, permite describir la rotación de un vector en el plano o el espacio, esto se realiza mediante la *forma* multiplicar a la matriz de rotación del vector para determinar la posición del nuevo vector girado.

Por otra parte, de acuerdo con Saha (2010), un manipulador robótico consiste en eslabones conectados por articulaciones de un solo grado de libertad y, para controlar el efector final respecto a la base, es necesario encontrar la relación entre los sistemas de coordenadas adjuntos al efector final y la base. Esto puede obtenerse con la matriz de transformaciones homogéneas.

Es por ello por lo que se necesita primero ver la descripción de la posición y orientación del cuerpo rígido para obtener la composición de transformaciones de coordenadas entre los sistemas consecutivos. Para ello existe una convención llamada Convención de sistemas de referencia y parámetros de Denavit y Hatenberg (*DH*) la cual sirve para definir un sistema de eslabones, como se muestra en la figura 5.54.

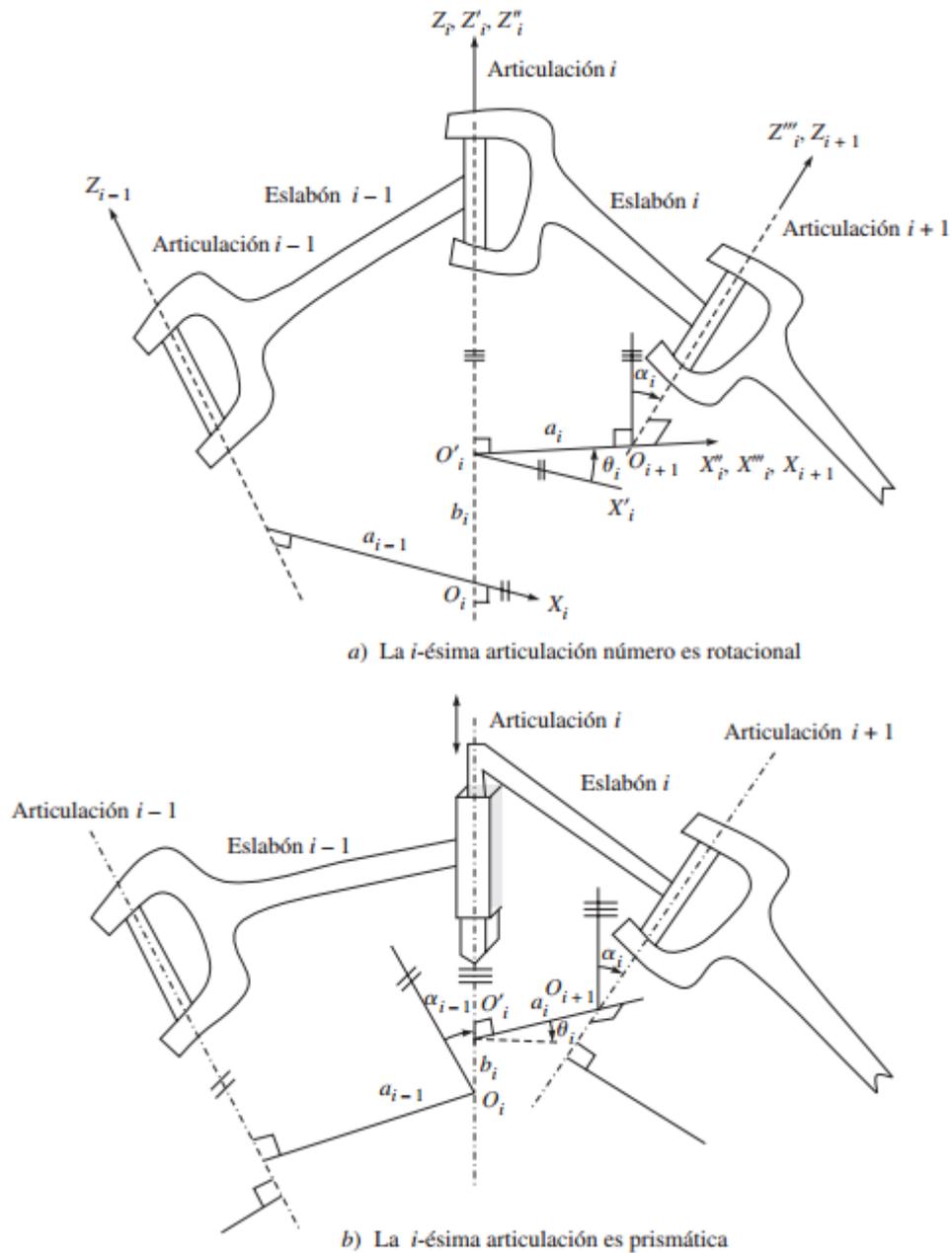


Figura 5.54 Convención de sistemas de referencia y parámetros de Denavit – Hartenberg (DH). (Saha, 2010, p.101)

Dentro de la cinemática de los robots existen dos problemas fundamentales a resolver:

- 1) El problema cinemático directo, que consiste en determinar cuál es la posición y orientación del extremo final del robot a partir de sus coordenadas articulares. Por ejemplo, un robot de 2 grados de libertad como se muestra en la figura 5.55

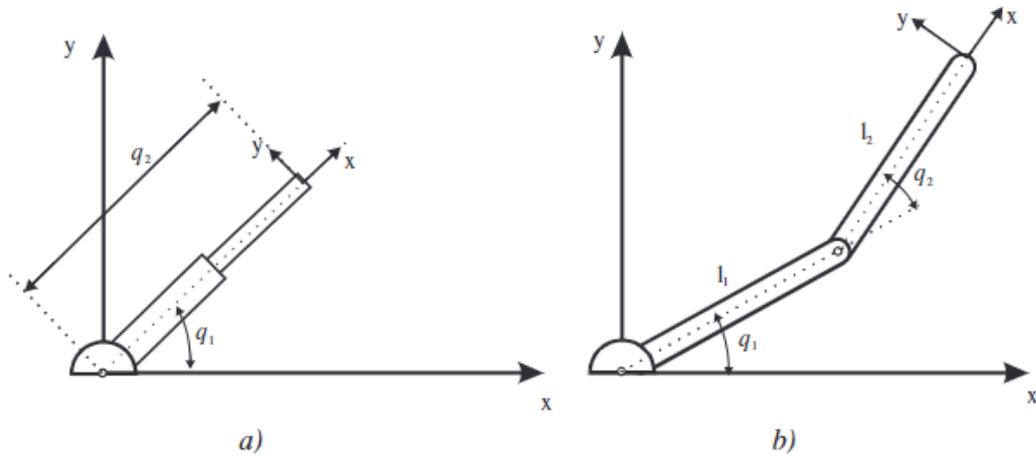


Figura 5.55 Robots planares de 2 grados de libertad. (Barrientos, 2007, p.121)

Donde, para el robot polar de la figura 5.55a obtendremos la siguiente relación

$$x = q_2 \cos q_1$$

$$y = q_2 \operatorname{sen} q_1$$

$$z = 0$$

Por otro lado, para el caso del robot articular de la figura 5.55b tenemos la relación

$$x = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2)$$

$$y = l_1 \operatorname{sen} q_1 + l_2 \operatorname{sen}(q_1 + q_2)$$

$$z = 0$$

La obtención de estas relaciones puede ocurrir en ciertos casos (robots con pocos grados de libertad).

2) El problema cinemático inverso consiste en resolver la configuración que debe adoptar un robot para una posición y orientación del extremo conocido. Por ejemplo, un robot de 3 grados de libertad como se muestra en la figura 5.56.

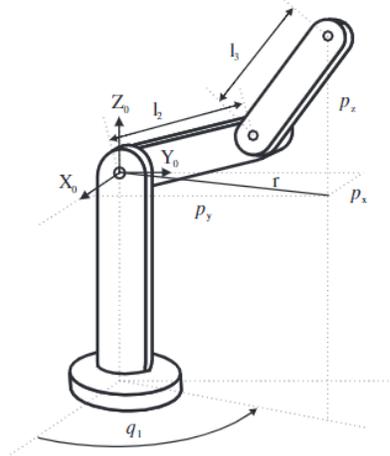


Figura 5.56 Robot articular. (Barrientos, 2007, p.136)

Ahora bien, en la figura 5.55 se muestra que, en este robot su estructura planar queda definida por el ángulo de la primera variable articular q_1 el cual se obtiene como:

$$q_1 = \arctg\left(\frac{p_y}{p_x}\right)$$

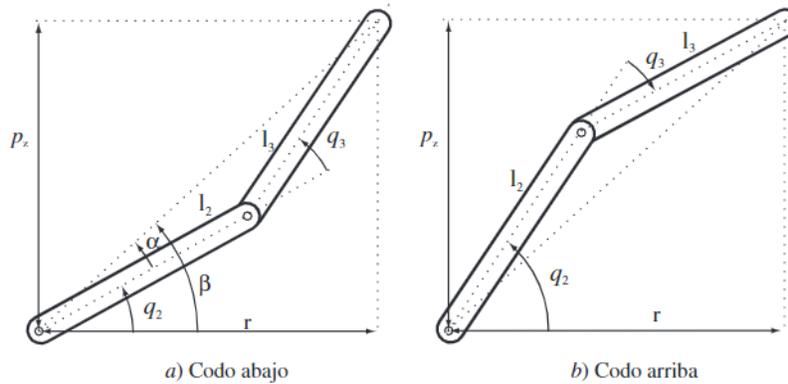


Figura 5.57 Elemento 2 y3 del robot de la figura 5.55 contenidos en un plano, en a) configuración codo abajo y b) configuración codo arriba. (Barrientos, 2007, p.138)

Ahora, al considerar los dos posibles movimientos que puede tener el codo del robot, como se muestra en la figura 5.57 y mediante la ley del coseno, Barrientos (2007) obtiene

$$r^2 = p_x^2 + p_y^2$$

$$r^2 + p_z^2 = l_2^2 + l_3^2 + 2l_2l_3 \cos q_3$$

Luego, al combinar las dos ecuaciones anteriores y desparar $\cos q_3$ se tiene

$$\cos q_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3}$$

Con esta expresión, q_3 queda en función del vector de posición del extremo \mathbf{p} .

Por motivos de ventajas computacionales, Saha (2010) menciona que es conveniente utilizar la expresión arcotangente en lugar del arcoseno, puesto que utilizando las identidades trigonométricas y las razones trigonométricas se tiene

$$\text{sen } q_3 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 q_3}$$

$$q_3 = \text{arctg} \left(\frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 q_3}}{\cos q_3} \right)$$

$$\text{donde } \cos q_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3}$$

Así, existen 2 posibles soluciones para q_3 de acuerdo con el signo positivo o negativo que se tome en la raíz. Estas configuraciones corresponden a codo arriba (figura 5.57b) y codo abajo (figura 5.57a) del robot.

Por lo tanto, nuevamente podemos observar que las razones trigonométricas forman parte de las matrices de rotación y de las transformaciones homogéneas, cuya intención es (*funcionamiento*) encontrar la relación y describir la posición y orientación de sistemas consecutivo de articulaciones de los robots. Mediante la *forma* asociar con el triángulo rectángulo las posiciones de movimiento y (*forma*) utilizando identidades trigonométricas y ley coseno para sustituir y simplificar las ecuaciones que representan el movimiento del objeto móvil que forma parte del robot.

Cabe destacar la importancia que tiene el proceso *geométrico-espacial* para la identificación de los triángulos, su movimiento, así como la asociación de sus lados y ángulos con respecto a los diagramas (como se muestra en la figura 5.54). Incluso, para la deducción de las ecuaciones que describen diferentes posiciones de los robots, se hace uso de apoyo visual, particularmente, de la descomposición de las imágenes y la representación de los triángulos, para denotar así la “participación” de las razones trigonométricas.

Décimo Semestre

En el décimo semestre se ofrecen cinco materias optativas sobre el área de Ingeniería Aplicada, de aquellas ofertadas en el Plan de Estudios se encontraron siete que incluyen conocimiento trigonométrico. A continuación, analizaremos estas asignaturas.

En Acústica y Óptica es importante aclarar que, a partir de la revisión de la Bibliografía Básica, no se encontraron los temas relativos a Acústica en los libros de texto por lo que, si bien reconocemos que el conocimiento trigonométrico forma parte de este tópico, no fue incluido en la selección y análisis debido a lo anterior.

Ahora bien, en esta asignatura se retoma el tema de óptica de Física Experimental durante el segundo semestre. Aunque, en esta ocasión, se pretende profundizar en la naturaleza de la luz como una onda electromagnética.

De acuerdo con Hecht (2000), una onda armónica (también llamada onda sinusoidal u onda armónica simple) se describe por medio de la función

$$\varphi(x) = A \text{ sen}(kx - \omega t)$$

Así, las funciones trigonométricas seno (o coseno) describen el movimiento de una onda armónica la cual, es periódica (*funcionamiento*).

En el caso particular de la luz, analizada por la óptica física, se presenta como una onda sinusoidal. A su vez, en el estudio de las ondas electromagnéticas, el campo magnético y el campo eléctrico siguen este movimiento sinusoidal. En particular, para el análisis de la luz en la interferencia, difracción y polarización, el campo eléctrico visto como vector, se separa en sus dos componentes y se analiza para un momento específico. En consecuencia, la razón trigonométrica tiene un *uso* como descomposición del vector campo magnético, puesto que se estudia al vector y su descomposición en un instante, y en este caso, no se estudia el comportamiento de la onda sinusoidal, lo que implicaría hablar de función y no de razón trigonométrica.

Ahora bien, esto implica que, por parte de la razón trigonométrica tiene dos *funcionamientos* distintos: como descomposición vectorial del campo eléctrico y, en la óptica geométrica como la asociación de la distancia de un punto focal a otro, así como los ángulos de incidencia

o reflexión, con el triángulo rectángulo, de tal manera que se establezca (*funcionamiento*) la relación del ángulo con la distancia focal

Por parte de la función trigonométrica (es decir, su manejo como movimiento sinusoidal), esta describe (*funcionamiento*) el movimiento de una onda armónica particularmente describe el movimiento de la onda electromagnética. Específicamente, los vectores campo eléctrico (E) y campo magnético (B) forman parte de este movimiento sinusoidal.

En lo que respecta a Dinámica de Maquinaria, dentro del primer tema se aborda un ejemplo de cinemática tridimensional de un cuerpo rígido (figura 5.58). En este caso, el movimiento de un giroscopio cuya velocidad angular ω se separa en la forma trinómica vectorial con respecto al sistema de coordenadas cartesianas, quedará determinado por las funciones seno y coseno. Se pide calcular la velocidad angular en el instante $\theta=60^\circ$.

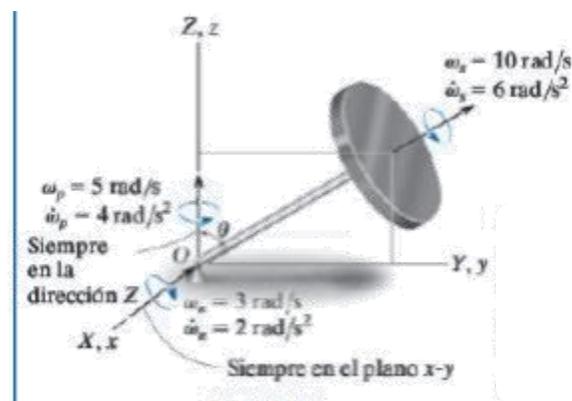


Figura 5.58 Representación del movimiento de un giroscopio. (Hibbeler, 2010, p. 556)

Para resolver el ejercicio, una vez que se descompone el vector de la velocidad angular, se sustituyen los valores dados y se determina la velocidad angular.

De esta forma, el *funcionamiento* que tiene la función trigonométrica permite representar al vector como su forma trinómica, es decir, descomponer el vector en sus componentes \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} . Ahora bien, en el caso del tercer tema, Hibbeler (2010) plantea un ejemplo de movimiento armónico.

En este caso, corresponde al de un resorte como se muestra en la figura 5.59a. Aquí, la ecuación que representa la posición con respecto al tiempo se compone de la suma de dos funciones trigonométricas. Al derivar con respecto al tiempo, se muestran la velocidad y

luego, la aceleración cuando se deriva una vez más. De tal manera que el movimiento descrito corresponde al de una onda como se muestra en la figura 5.59b. Cabe aclarar que la posición

$$x = A \operatorname{sen} \omega_n t - B \operatorname{cos} \omega_n t$$

la muestra Hibbeler (2010) como solución a la ecuación diferencial

$$\ddot{y} + \omega_n^2 y = 0$$

que describe el movimiento de una onda.

Por lo tanto, las funciones trigonométricas, tiene un *uso* como el comportamiento de una onda armónica generada por la posición de equilibrio de un resorte.

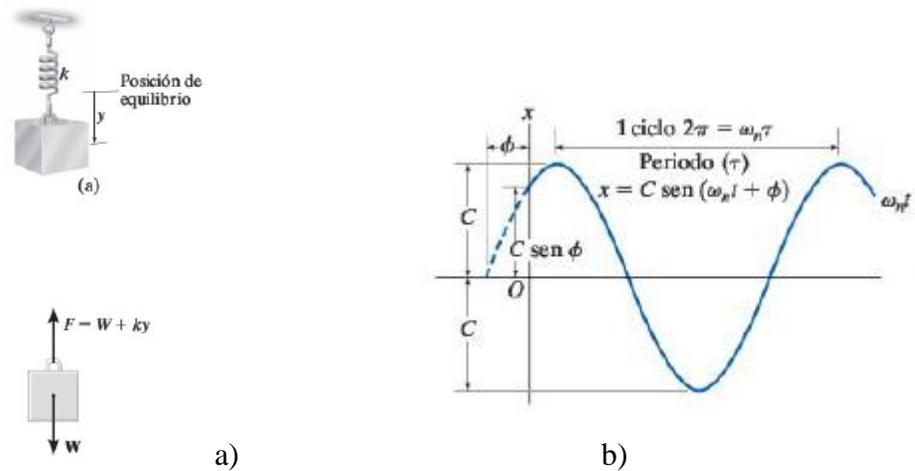


Figura 5.59 a) Un objeto de masa m cuelga de un resorte. Se muestra el diagrama de cuerpo libre. b) Descripción del movimiento ondulatorio a partir de la posición de equilibrio del resorte. (Hibbeler, 2010, p. 633-634)

La asignatura Introducción a Sistemas No Lineales consiste en hacer un análisis de este tipo de sistemas. Por ejemplo, el movimiento descrito por un péndulo (figura 5. 60) en el cual se requiere de las funciones trigonométricas para (*funcionamiento*) describir su movimiento en la dirección tangencial se asocia con la función trigonométrica seno del ángulo θ . Este tipo de fenómeno corresponde a un Sistema no lineal.

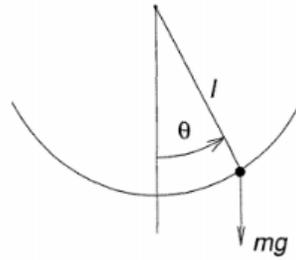


Figura 5.58 Movimiento de un péndulo. (Khalil, 2002, p.4)

A lo largo del curso se explica la estabilidad y algunos métodos de linealización, en tal caso, los ejemplos utilizan las funciones trigonométricas, las cuales se operan (derivan, integran o simplifican por medio de identidades trigonométricas) con la intención de mostrar en qué consisten estos métodos.

Ahora bien, en la asignatura Biomecánica se plantean diferentes modelos matemáticos que representen la mecánica del cuerpo humano. Estos modelos asocian los vectores de posición, fuerza, velocidad, etcétera para describir el comportamiento del cuerpo en relación con un tipo de movimiento específico.

Por ejemplo, en la figura 5.59 se muestran las dos componentes vectoriales de la fuerza debido al sentido en el que se genera el movimiento de esa parte del cuerpo.

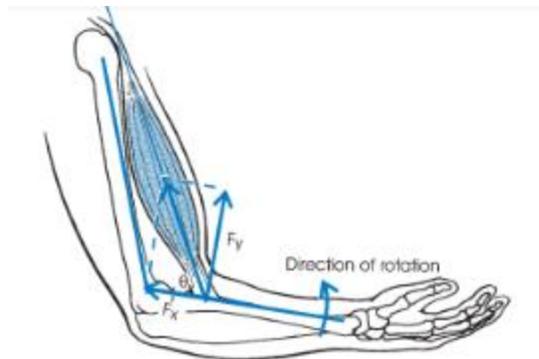


Figura 5.59 El vector que corresponde a la fuerza muscular, el ángulo de tracción (θ) y sus componentes vertical y horizontal. (Hamill et al., 2015, p.362)

En este caso, la razón trigonométrica permite descomponer la fuerza en sus dos componentes de tal manera que se puede relacionar la fuerza ejercida en relación con el ángulo de tracción. Además, cuando el ángulo es recto, entonces la componente que actúa únicamente es la

fuerza perpendicular al brazo. De esta forma, el *funcionamiento* de la razón trigonométrica relaciona la fuerza ejercida de un músculo con el movimiento en un punto debido al ángulo de tracción. Lo que permite llevar a la *forma 1* descomposición del vector fuerza, para *forma 2* identificar el ángulo de rotación en el movimiento.

Por otro lado, en la asignatura Ingeniería Automotriz I se analizan diferentes componentes del automóvil, como son las suspensiones, los amortiguadores, la comba, el chasis, los muelles, etcétera.

Para realizar dicho análisis, Reimpell et al. (2001) reconoce las fuerzas que actúan en cada parte del automóvil, posteriormente las separa en sus componentes. De esta forma, la razón trigonométrica se *usa* para descomponer al vector en sus componentes. Ahora bien, en algunos casos, como es el análisis de comba, Reimpell et al. (2001) asocia (*forma*) el triángulo rectángulo al modelo para (*funcionamiento*) establecer la relación entre la distancia y el ángulo de las partes que lo integran.

De manera similar, en Ingeniería Automotriz II el *funcionamiento* que tiene la razón trigonométrica corresponde a la descomposición vectorial una vez (*forma*) identificados los triángulos rectángulos en los diagramas. Igualmente, en la asignatura Mecánica de Fluidos.

5.4. División del material dentro de unidades de codificación

Una vez identificado el conocimiento trigonométrico y al hacer un análisis de sus *usos* a partir de sus *funcionamientos* y *formas*, categorizamos nuestras unidades de codificación para cada semestre con base en la herramienta trigonométrica identificada.

Cabe destacar que, como lo hemos observado a lo largo de la trayectoria al nivel de *usos*, estas herramientas han tenido un *uso* algebraico y aritmético de manera transversal en la carrera.

Semestre	Herramienta trigonométrica	<i>Usos</i>
1	Razón	Relación entre dos longitudes de un triángulo y un ángulo
		Representación polar de un número complejo
	Función	Determinar las longitudes a partir de un ángulo variable

		Descomposición vectorial a la forma trinómica		
		Relación entre la forma polar y la forma de Euler de un número complejo		
		Descripción del movimiento de un ángulo con respecto a una posición variable		
		Descripción de un movimiento armónico simple		
2	Razón	Descomposición vectorial a la forma trinómica		
		Determinar el ángulo entre dos vectores		
	Función	Descomposición vectorial a la forma trinómica		
		Relación entre dos longitudes de un triángulo y un ángulo		
		Descripción de un movimiento ondulatorio		
3	Razón	Relación entre dos longitudes de un triángulo y un ángulo Relaciona el ángulo de la punta en tiempo de demora para una perforación		
		Función	Describir el movimiento de un resorte a lo largo de un eje Representar el movimiento de un péndulo Descomposición vectorial a la forma trinómica	
	Serie	Representar una función por medio de senos y cosenos		
	4	Función	Describir y anticipar el movimiento de una espira Modelar el comportamiento de la fem inducida por un alternador	
			Serie	Describir el comportamiento de un espectro de frecuencia
5		Razón	Relación entre dos longitudes de un triángulo y un ángulo Descomposición vectorial a la forma trinómica Determinar el esfuerzo cortante de un cilindro de aluminio Calcular el volumen de algunas estructuras cristalinas	
	Función		Describir e comportamiento de la corriente eléctrica	
	6		Función	Describir el movimiento de un acoplamiento de cuatro barras
			Serie	Describir el comportamiento de la corriente eléctrica

7	Razón	Descomposición vectorial
		Determinar el comportamiento de un engrane de acuerdo con su forma
	Función	Predecir el comportamiento de la presión del freno de tambor
8	Función	Calcular el factor de potencia
9	Razón	Relacionar el ángulo de la punta en tiempo de demora para una perforación
		Describir la posición de un vector por medio de un sistema de coordenadas
		Describir el movimiento (posición y orientación) articulado
		Rotar un vector en el plano o respecto a un eje (en tres dimensiones)
10	Razón	Relación entre dos puntos focales y un ángulo
		Descomposición vectorial a la forma trinómica
	Función	Descripción del movimiento de las ondas electromagnéticas
		Descomposición vectorial a la forma trinómica
		Predecir el comportamiento de una onda armónica
		Descripción de un movimiento armónico simple generado por un resorte
	Descripción del movimiento de un péndulo	

Capítulo 6. Análisis global y conclusiones

En el presente capítulo presentamos el análisis global (séptimo paso del ACC). Es decir, hacemos un análisis de la trayectoria de *usos* del conocimiento trigonométrico a lo largo de la carrera de Ingeniería Mecatrónica. Finalizamos con la presentación de nuestras conclusiones.

6.1 Análisis Global

Desde el primer semestre que cursa un estudiante de Ingeniería Mecatrónica, hasta su último semestre, trabaja con las herramientas trigonométricas: *razón, función y serie*. A lo largo de la Malla Curricular y, en particular, en los Programas de Estudio, la presentación de los contenidos donde el estudiante trabaja con las herramientas trigonométricas se anuncia como el aprendizaje de conocimientos específico. Sin embargo, esta presentación no es congruente con las actividades que se proponen en todos los libros de texto. Particularmente, aquellos que corresponden a las asignaturas llamadas *Ciencias de la Ingeniería e Ingeniería Aplicada* (se presentan en el Anexo 2).

Inferimos que esto ocurre precisamente por el tratamiento que tienen los contenidos, ya que son herramientas que son funcionales para áreas específicas y el énfasis corresponde a la actividad que se desarrolla en el contexto específico y no en enseñar un conocimiento como en los primeros semestres. Como se puede observar en el caso del tema Trigonometría, en donde el objetivo es repasar los contenidos vistos en el Nivel Medio Superior. Aunque, posteriormente, la herramienta trigonométrica no es objeto de análisis, sino que son sus *usos* los que permiten asociar diferentes significados.

Ahora bien, a lo largo de la trayectoria, podemos observar que las asignaturas que corresponden a área de Ingeniería Aplicada permiten que tenga un *significado* congruente con los *usos* que tienen las herramientas trigonométricas. En otras palabras, los *usos* están asociados a necesidades propias de la comunidad del ingeniero y responden, con una manera más explícita a dicha necesidad.

Cabe destacar que, a lo largo de este análisis podemos observar dos *fenómenos didácticos* presentados por Montiel (2011):

- La *Aritmetización trigonométrica*. Hemos observado que, en los libros de texto, el tratamiento que han tenido las *razones trigonométricas*, al igual que la *función trigonométrica* ha sido, en ocasiones, como representaciones algebraicas o aritméticas, donde la intención es “despejar” o “hallar” el valor numérico de la “variable $\text{sen}(x)$ ”, o alguna otra expresión trigonométrica. De tal forma que el cálculo de este valor se reduce al uso de la calculadora o, en otros casos, se utilizan las identidades trigonométricas para hacer cambios en cuanto a la operatividad *algebraica*. Lo que, en consecuencia, permite hacer visible este fenómeno de *aritmetización trigonométrica*.

-La *Indiferencia a la fundamentación analítica*. Al inicio de la carrera, durante el primer semestre, se presentan objetos matemáticos propios de la Trigonometría. Se asume que el estudiante ya ha trabajado con ellos durante el Nivel Medio Superior. Por lo tanto, en los libros de texto correspondientes al primer semestre, al presentar a la herramienta *razón trigonométrica*, se muestra un repaso de algunas expresiones que el estudiante deberá recordar a lo largo de la carrera, puntualizando en su tratamiento algebraico y aritmético. Durante el mismo semestre, en otra asignatura, se presenta a la *función trigonométrica*, se describen sus características en cuanto al dominio, gráfica y codominio. Pero, en caso de que el estudiante lo requiera, se muestra en el anexo del libro el paso de la *razón* a la *función trigonométrica*. Es decir, se asume que el estudiante ya trabajó con esta transición en el nivel previo. Por lo que, en el Nivel Superior se presenta una *indiferencia a la fundamentación analítica* con respecto al paso de la *razón trigonométrica* hacia la *función trigonométrica*.

Por lo tanto, estos *fenómenos* que se presentan en el discurso trigonométrico escolar también son observables en el Nivel Superior, más en específico, en Ingeniería.

6.2 Conclusiones

A partir del análisis realizado, podemos observar una desarticulación en la trayectoria de usos del conocimiento trigonométrico puesto que, en el inicio del semestre, el proceso de transición analítica de la *razón* a la *función* no forma parte de los contenidos a enseñar, de igual manera, en los libros de texto, se dejan en el Anexo para aquellos que deseen detallar

al respecto. Esto implica una desarticulación en cuanto al *uso* que tiene cada herramienta y, por lo tanto, sus *significados* asociados.

Como complemento a lo anterior, los *usos* que tienen las herramientas nos hacen evidente esta desarticulación puesto que, en una misma actividad, pueden entrar en juego la *razón* y la *función*, de tal manera que puede tener un *uso* como *razón* y, a su vez, un *uso* como *función*, en un mismo contexto. De esta forma, los significados asociados al *uso* que tiene cada herramienta trigonométrica pueden ser los mismos. Esto puede generar una confusión en cuanto a la naturaleza propia de cada herramienta, su sentido y su *uso* y llevar a considerarlos como dos herramientas que se *usan* y operan de la misma manera.

Ahora bien, otro fenómeno que se observó a lo largo de esta trayectoria está asociado con los *usos* algebraico, aritmético y *geométrico-espacial* del conocimiento trigonométrico. Un factor que desfavorece la propia *naturaleza* de lo *trionométrico*, es el fuerte arraigo a su *uso* aritmético y *algebraico*. Por otro lado, el apoyo *geométrico-espacial* permite dar *sentido* del conocimiento trigonométrico, como lo podemos observar en diferentes contextos que se presentaron.

Finalmente, como aporte a la comunidad de ingenieros, este trabajo puntualiza sobre la desarticulación que existe no solo del conocimiento matemático para el ingeniero, sino de sus *usos*. Así, al dar cuenta de ello, podemos generar estrategias que permitan la articulación de estos, lo que permitiría dirigirnos a al desarrollo de habilidades que forman parte del Perfil de un ingeniero.

Trabajo futuro

Es importante notar los *usos* que tienen el conocimiento trigonométrico, así como su trayectoria, para poder determinar, de manera curricular, estrategias que permitan articular estos *usos*. Sin embargo, bajo el enfoque de la TSME se puede argumentar que la trayectoria de *usos* permite notar los cambios de estos, lo cual podría robustecerse al plantearnos no una articulación, sino una evolución que diera pie al *desarrollo de usos*.

Como complemento, hemos de notar la pertinencia de los libros de texto como parte fundamental para la enseñanza de la Ingeniería. Sin embargo, esto puede enriquecerse al considerar *otras* dimensiones que amplíen este estudio, considerando así al docente, al alumno, a la sociedad y otros agentes que bien pueden influir en el fenómeno de la desarticulación, a nivel de *usos* del conocimiento trigonométrico dentro de la comunidad de ingenieros.

Referencias

- Aguilar, J. y Monsiváis, G. (2004). *Apuntes de variable compleja*. México: UNAM. Facultad de Ingeniería
- Andrade, A.A., Castañeda, E., Nolasco, J.E. y Parada, J. (1990). *Antecedentes de geometría y trigonometría* (3a ed.). México: Trillas-UNAM. Facultad de Ingeniería.
- Andrade, A.A. y Crail, S.C. (2010). *Cuaderno de ejercicios de cálculo diferencial*. México: UNAM. Facultad de Ingeniería.
- Arcos, J.I. (2000). *Acerca de la enseñanza del cálculo en escuelas de ingeniería. Un acercamiento infinitesimalista* (Tesis de Doctorado) Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Departamento de Matemática Educativa. Ciudad de México, México.
- Askeland, D.R., Fulay, P.P. y Wright, W.J. (2011). *The Science and Engineering of Materials* (6ª ed.). Estados Unidos: Cengage Learning.
- Barrientos, A., Peñin, L.F., Balaguer, C. y Aracil, R. (2007). *Fundamentos de robótica* (2ª ed.). España: McGraw-Hill.
- Beer, F.P., Johnston, E.R., Mazurek, D.F. y Eisenberg, E.R. (2010). *Mecánica vectorial para ingenieros. Estática* (9ª ed.) México: McGraw-Hill.
- Boylestad, R.L. y Nashelsky, L. (2009). *Electrónica: Teoría de Circuitos y Dispositivos Electrónicos* (10ma ed.). México: Pearson.
- Budynas, R. y Nisbett, J.K. (2008). *Diseño en ingeniería mecánica* (8va ed.). México: McGraw-Hill.
- Buendía, G. (2012). El uso de las gráficas cartesianas. Un estudio con profesores. *Educación Matemática*, 24(2), 9-35.
- Burden, R.L. y Faires, J.D. (2011). *Análisis numérico* (9ª ed.). México: Cengage Learning.
- Camarena, P. (2009). La matemática en el contexto de las ciencias. *Innovación Educativa*, 9(46), 15-25.
- Camarena, P. (2013). A treinta años de la teoría educativa "Matemática en el Contexto de las Ciencias". *Innovación Educativa*, 13(62), 17-44.

- Camarena, P. (2015). Teoría de las ciencias en contexto y su relación con las competencias. *Ingenium*, 16(31),108-127.
- Cantoral, R. A. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.
- Cantoral, R. A., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (8), 9-28.
- Castañeda, E. (2006). *Geometría Analítica en el Espacio*. México: UNAM. Facultad de Ingeniería.
- Cen, C.L. (2006). *Los funcionamientos y las formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato* (Tesis de Maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Departamento de Matemática Educativa. Ciudad de México, México.
- Cen, C.L. (2015). *Una caracterización del uso de las gráficas de las funciones con profesores de bachillerato* (Tesis de Doctorado). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Departamento de Matemática Educativa. Ciudad de México, México.
- Chapman, S.J. (2012). *Máquinas eléctricas* (5ª ed.). México: McGraw-Hill
- Coll, C. (1991). *Psicología y Currículum*. México: Paidós.
- Consejo de Acreditación de la Enseñanza de la Ingeniería. (2017). *Marco de Referencia 2018 del CACEI en el Contexto Internacional*. Ciudad de México, México: Autor. Recuperado de http://cacei.org.mx/docs/marco_ing_2018.pdf
- Cordero, F. y Flores, R. B. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(1), 7-38
- Oteyza, E., Lam, E., Hernández, C., Carrillo, A. y Ramírez, A. (2015). *Geometría analítica y trigonometría* (3a ed.). México: Pearson.
- Craig, J.J. (2005). *Introduction to Robotics: Mechanics and Control* (3ª ed.). Estados Unidos: Pearson.
- Díaz-Barriga Arceo, F., Lule González, Ma. de L., Pacheco Pinzón, D., Saad Dayán, E. y Rojas-Drummond, S. (2013). Metodología de diseño curricular para educación superior. México: Trillas.
- Díaz-Barriga, Á. (1986). *Didáctica y curriculum* (4ta ed.). México: Nuevomar.

- Duarte, R. E. (1991). *El curso de ecuaciones diferenciales como meta y guía para el diseño curricular de los cursos de matemáticas en ingeniería* (Tesis de Maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Departamento de Matemática Educativa. Ciudad de México, México.
- Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México. (s.f.). Ingeniería Mecatrónica. Recuperado de:
http://www.ingenieria.unam.mx/programas_academicos/licenciatura/mecatronica.php
- Flores, J. (1980). *Análisis de contenidos matemáticos de las materias de especialidad en una escuela de ingeniería (Para el Diseño de Cursos Básicos de Matemáticas)* (Tesis de Maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Departamento de Matemática Educativa. Ciudad de México, México.
- Grayson, L.P. (1979). *La elaboración de los planes de estudio de ingeniería*. Paris, Francia: UNESCO.
- Groover, M.P. (2007). *Fundamentos de manufactura moderna* (3a ed.). México: McGraw-Hill
- Grossman, S.I. y Flores, J.J. (2012). *Álgebra lineal* (7ma ed.). México: McGraw-Hill.
- Hamill, J., Knutzen, K.M. y Derrick, T.R. (2015). *Biomechanical Basis of Human Movement* (4a ed.). Estados Unidos: Lippincott Williams & Wilkins.
- Hayt, W.H., Kemmerly, J.E. y Durbin, S.M. (2012). *Análisis de circuitos en ingeniería* (8va ed.) México: McGraw-Hill.
- Hecht, E. (2000). *Óptica* (3a ed.). España: Addison Wesley.
- Herrera, R. (1990). Crítica al modelo ortodoxo de la enseñanza de la ingeniería e ideas para su modificación. *Tecnología en marcha*, 10(1), 3-16.
- Hibbeler, R.C. (2010). *Ingeniería mecánica. Dinámica* (12a ed.). México. Pearson.
- Hibbeler, R.C. (2011). *Mecánica de materiales* (8a ed.). México: Pearson.
- Hsu, H.P. (1987). *Análisis de Fourier*. Estados Unidos: Addison-Wesley.
- Isermann, R. (2005). *Mechatronic Systems: Fundamentals*. Estados Unidos: Springer.
- Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear Systems* (3a ed.). Estados Unidos: Prentice-Hall.

- Langereis, G., Hu, J. y Feijs, L. (2013). How to Introduce Mathematical Modelling in Industrial Design Education? En G.A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum y J.P. Brown (Eds.), *Teaching Matematical Modelling: Conncting to Research and Practice* (pp.551-561). Países Bajos: Springer. doi: 10.1007/978-94-007-6540-5_47
- Larson, R. y Edwards, B. (2010a). *Cálculo 1 de una variable* (9a ed.). México: McGraw-Hill.
- Larson, R. y Edwards, B. (2010b). *Cálculo 2 de varias variables* (9a ed.). México: McGraw-Hill.
- Lechner, G. y Naunheimer, H. (1999). *Automotive Transmissions. Fundamentals, Selection, Design and Application*. Alemania: Springer.
- León, J. (2014). *Álgebra*. México: Grupo Editorial Patria.
- Mayring, P. (2015). Chapter 13 Qualitative Content Analysis: Theoretical Background and Procedures. En A. Bikner-Ahsbahr, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (pp. 365-380). Países Bajos: Springer. doi: 10.1007/978-94-017-9181-6
- Mendoza, E. J. (2013). *La matemática funcional en una comunidad de conocimiento: el caso de las ecuaciones diferenciales lineales en la ingeniería* (Tesis de Maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Departamento de Matemática Educativa. Ciudad de México, México.
- Miller, J.M. (2004). *Propulsion Systems for Hybrid Vehicles*. Reino Unido: The Institution of Electrical Engineers.
- Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica* (Tesis de Doctorado). Instituto Politécnico Nacional. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. Ciudad de México, México.
- Montiel, G. (2011). *Construcción de Conocimiento Trigonométrico. Un estudio Socioepistemológico*. México: Díaz de Santos.
- Montiel, G. y Jácome, G. (2014). Significado Trigonométrico en el Profesor. *Boletim de Educação Matemática*, 28(50), 1193-1216. doi: 10.1590/1980-4415v28n50a10
- Moreno, M. A. (1993). *Evaluación, revisión y sugerencias a los contenidos de los cursos de probabilidad y estadística de la carrera de ingeniería civil en la Universidad de Sonora* (Tesis de Maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Departamento de Matemática Educativa. Ciudad de México, México.

- Norton, R.L. (2009). *Diseño de Maquinaria* (4a ed.). México: McGraw-Hill.
- Ollero, A. (2001). *Robótica. Manipuladores y robots móviles*. España: Alfaomega Marcombo.
- Pérez, I. C. (2015). *Los usos de la gráfica en una Comunidad de Ingenieros Químicos Industriales en Formación. Una base para el diseño de una situación de aprendizaje* (Tesis de Maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Departamento de Matemática Educativa. Ciudad de México, México.
- Pérez, V. (1994). *Generadores, motores y transformadores eléctricos*. México: UNAM. Facultad de Ingeniería.
- Perkin, G. y Bamforth, S. (2011). A variety of approaches to the provision of mathematics help for first-year engineering undergraduates. *International Journal of Electrical Engineering Education*, 48(1), 79-91.
- Potter, M.C. y Wiggert, D.C. (2002). *Mecánica de fluidos* (3a ed.). México: Thomson.
- Potter, M.C., Wiggert, D.C., Ramadan, B.H. (2012). *Mechanics of Fluids* (4a ed.). Estados Unidos: Cengage Learning.
- Reimpell, J., Stoll, H. y Betzler, J.W. (2001). *The Automotive Chassis: Engineering Principles* (2a ed.). Reino Unido: Butterworth-Heinemann.
- Resnick, R., Halliday, D. y Krane, K.S. (2008). *Física Volumen 2* (5a ed.). México: Patria.
- Reyes, D. (2016). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para la transformación y la mejora educativa* (Tesis de Doctorado). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Departamento de Matemática Educativa. Ciudad de México, México.
- Reyes, F. (2011). *Robótica. Control de robots manipuladores*. México: Alfaomega
- Rodríguez, F.J. (1989). *Dinámica de Sistemas*. México: Trillas.
- Romo, A. y Oktaç, A. (2007). Herramientas metodológicas para el análisis de los conceptos matemáticos en el ejercicio de la ingeniería. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(3), 117-143.

- Rosas, M.E. y Casanova, F. (1998). Estudio de los conocimientos teóricos básicos de los alumnos de nuevo ingreso a ingeniería civil del Instituto Politécnico Nacional. *Educación Matemática*, 10(1), 48-60.
- Saha, S.K. (2010). *Introducción a la robótica*. México: McGraw-Hill.
- Schilling, D.L., Belove, C., Apelewicz, T. y Saccardi, R.J. (1993). *Circuitos electrónicos: discretos e integrados* (3a ed.). México: McGraw-Hill.
- Schreier, M. (2012). *Qualitative Content Analysis in Practice*. Reino Unido: SAGE.
- Slotine, J.-J.E. y Li, W. (1991). *Applied Nonlinear Control*. Estados Unidos: Prentice-Hall.
- Stewart, J. (2008a). *Cálculo de una variable* (6ta ed.). México: Cengage Learning.
- Stewart, J. (2008b). *Cálculo de varias variables* (6ta ed.). México: Cengage Learning.
- Suárez, L. (2008). *Modelación- Graficación, Una categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un Estudio Socioepistemológico* (Tesis de Doctorado). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Departamento de Matemática Educativa. Ciudad de México, México.
- Suh, C.H. y Radcliffe C.W. (1978). *Kinematics and Mechanisms Design*. Estados Unidos: John Wiley & Sons.
- Swokowski, E.W. y Cole, J.A. (2011). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* (13a ed.). México: Cengage Learning.
- Torres, L.M. (2013). *Usos del Conocimiento Matemático. La Simultaneidad y Estabilidad en una Comunidad de Conocimiento de la Ingeniería Química en un Escenario de Trabajo* (Tesis de Maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Departamento de Matemática Educativa. Ciudad de México, México.
- Tsai, L.-W. (1999). *Robot Analysis: The mechanics of serial and parallel manipulators*. Estados Unidos: Wiley.
- White, F.M. (2011). *Fluid Mechanics* (7a ed.). Estados Unidos: McGraw-Hill.
- Young, H.D. y Freedman, R.A. (2009a). *Física Universitaria Vol. 1* (12a ed.). México: Pearson.

Young, H.D. y Freedman, R.A. (2009b). *Física Universitaria con Física Moderna Vol. 2* (12a ed.). México: Pearson.

Young, H.D. y Freedman, R.A. (2013). *Física universitaria con física moderna Vol.2* (13a ed.). México: Pearson.

Zill, D.G. (2015). *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado* (10a ed.). México: Cengage Learning.

Zill, D.G., Wright, W.S. y Cullen, M.R. (2012). *Matemáticas Avanzadas para ingeniería* (4^a ed.). México: McGraw-Hill.

Anexo 1*****

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ingeniería

INGENIERÍA

☰

Ingeniería Mecatrónica

Inicio / Programas Académicos / Licenciatura / Ingeniería Mecatrónica



El objetivo de la carrera de Ingeniería Mecatrónica es formar profesionales de alto nivel, capaces de trabajar a través de las fronteras de las disciplinas componentes (ingeniería mecánica, ingeniería electrónica, y la ciencia de la computación / tecnología de la información), para identificar y usar la combinación correcta de tecnologías, como la mecánica de precisión, el control y los sistemas de cómputo que proveen la solución óptima al desarrollo de productos, procesos y sistemas autónomos, programables e inteligentes.

La solicitud de ingreso a la licenciatura de Ingeniería Mecatrónica se deberá hacer a partir del segundo semestre y hasta el cuarto semestre, contados a partir de su ingreso a la licenciatura origen. Los alumnos serán seleccionados por el comité de admisión a la licenciatura al terminar el semestre en el que realizaron la solicitud de acuerdo a los criterios de selección.

***** La información que se presenta en el Anexo 1 fue recuperada de la página de internet de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México. http://www.ingenieria.unam.mx/programas_academicos/licenciatura/mecatronica.php

🕒 **Objetivos educacionales del programa**

1. Los egresados desarrollan proyectos de análisis o diseño de ingeniería mecatrónica aplicando conocimientos técnicos, habilidades en solución de problemas y adaptándose a las nuevas tecnologías.
2. Los egresados forman parte de grupos multi o interdisciplinarios en su lugar de trabajo.
3. Los egresados se integran con facilidad y éxito al sector productivo o de servicios en empresas afines a la ingeniería mecatrónica ya establecidas.
4. Los egresados se desempeñan profesionalmente en el área de la Ingeniería Mecatrónica y/o áreas afines en empresas que hayan generado ellos mismos o dedicándose a la práctica particular de su profesión.
5. Los egresados se actualizan por medio de cursos, diplomados, especialidades o posgrados.

🕒 **Atributos del egresado**

1. Identificar, plantear y resolver problemas de ingeniería mecatrónica aplicando conocimientos de las ciencias básicas, ciencias de la ingeniería e ingeniería aplicada.
2. Analizar, aplicar o proponer procesos de diseño de ingeniería que contribuyan al desarrollo de proyectos que satisfagan necesidades en el área de la ingeniería mecatrónica.
3. Participar en el desarrollo y realización de experimentación adecuada, el análisis e interpretación de los datos obtenidos, así como utilizar su formación ingenieril para establecer conclusiones.
4. Comunicarse efectivamente de forma oral y escrita con diferentes audiencias.
5. Identificar sus responsabilidades éticas y profesionales en el ejercicio de la carrera y realizar juicios informados que consideren el impacto de las soluciones de ingeniería mecatrónica en los contextos económico, ambiental y social.
6. Reconocer la necesidad de formarse y actualizarse permanentemente, así como tener la habilidad de identificar el conocimiento complementario, interpretarlo y aplicarlo.
7. Trabajar en equipo para el establecimiento, planeación y cumplimiento de metas, fechas límite, así como para analizar riesgos e incertidumbre.
8. Identificar las tecnologías de punta y emergentes con el fin de integrarlas para generar soluciones innovadoras a problemas de ingeniería mecatrónica.

⊕ Perfil de ingreso

El estudiante interesado en ingresar a la Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica, en la Facultad de Ingeniería de la UNAM, deberá ingresar inicialmente a alguna de las siguientes licenciaturas; Ingeniería Mecánica, Ingeniería en Computación, Ingeniería Industrial e Ingeniería Eléctrica y Electrónica. Para ello deberá ser egresado de la Escuela Nacional Preparatoria, del Colegio de Ciencias y Humanidades o de otros programas de Educación Media Superior. Es necesario que haya cursado el área de las Ciencias Físico-Matemáticas o el conjunto de asignaturas relacionadas con estos campos de conocimiento en el Colegio de Ciencias y Humanidades, o en otros planes de estudio de Educación Media Superior.

Después de cursar los dos primeros semestres de la carrera de origen el alumno deberá contar con los siguientes conocimientos, habilidades y actitudes: poseer conocimientos sólidos de matemáticas en álgebra, geometría analítica y cálculo diferencial e integral de funciones de una variable; también debe contar con conocimientos de física, particularmente en lo que respecta a temas relacionados con mecánica clásica, la electricidad, el magnetismo así como conocimientos generales de química y de computación.

Es también conveniente que el estudiante posea conocimientos de inglés, por lo menos a nivel de comprensión de textos. Por lo que respecta a las habilidades, es importante que tenga disposición para el trabajo en equipo, capacidad de análisis y síntesis, y de adaptación a situaciones nuevas, así como espíritu creativo.

⊕ Perfil profesional

El Ingeniero Mecatrónico es el profesional que integra los conocimientos de las ciencias físicas y matemáticas con las ciencias de ingeniería en las áreas de control, electrónica, mecánica y computación para desarrollar su actividad profesional en las áreas de aplicación en el diseño mecatrónico, el control industrial de procesos, la automatización industrial y la robótica, tanto en el sector público como en el sector privado y a un nivel de emprendedor.

📌 Perfil de egreso

General:

Los egresados de la Facultad de Ingeniería deberán poseer: capacidades para la innovación, potencial para aportar a la creación de tecnologías y actitud emprendedora. Tendrán ideas claras sobre modelado matemático de fenómenos físicos y optimización; estarán abiertos tanto al aprendizaje continuo como a la interdisciplinariedad. Deberán contar con conocimientos sólidos de su idioma con capacidad de comunicación oral y escrita, así como de otra lengua, preferentemente inglés, cuando menos a nivel de comprensión de lectura; con sensibilidad social y ética profesional; y con potencialidad y vocación para constituirse en factor de cambio.

Específico:

Al finalizar su formación profesional, el egresado de la licenciatura en Ingeniería Mecatrónica poseerá los siguientes conocimientos, habilidades y actitudes:

Conocimientos:

- Sólida formación en física y matemáticas.
- Dominio de los conceptos fundamentales de la mecánica, la electrónica, el control y la computación.
- Conocimientos de amplio espectro en las distintas ramas que integran a la mecatrónica, lo que le permitirá al egresado participar con éxito y adaptarse a los cambios de las tecnologías en este campo y, en su caso, generarlos.

Aptitudes y habilidades:

- Para evaluar y seleccionar el equipo necesario para la integración de las disciplinas de la mecatrónica tomando en cuenta aspectos ecológicos, sociales y económicos.
- Para modelar, simular e interpretar el comportamiento de los sistemas mecatrónicos.
- Para desarrollar, operar y mantener procesos productivos que impliquen la transformación de materia, energía e información.
- Para diseñar, construir, operar y mantener los sistemas mecatrónicos y sus componentes.
- Para crear, innovar o evaluar las tecnologías relacionadas con la mecatrónica.
- Para integrar y coordinar personas y grupos interdisciplinarios.
- Para participar en programas de investigación y estudios de posgrado.
- Para evaluar la relación costo-beneficio de los productos y sistemas mecatrónicos.
- Para obtener información acerca de la situación tecnológica que guardan las empresas en nuestro país y de las perspectivas que se presentarán en el futuro.
- Para crear con actitud empresarial nuevas fuentes de empleo.

Actitudes:

De tipo profesional:

- Ser creativo e innovador.
- Tener actitud emprendedora y de liderazgo.
- Tener confianza en su preparación académica.
- Tener una mente abierta orientada hacia la solución de problemas de ingeniería.
- Ser honesto, responsable y crítico.
- Comprometido con su actualización, superación y competencia profesional.

De tipo social:

- Tener conciencia de la problemática nacional basada en el conocimiento de la realidad del país y su interrelación con el mundo globalizado, con una actitud humanista y de servicio hacia la sociedad.
- Mantener una ética profesional.
- Promover el cambio en la mentalidad frente a la competitividad internacional.
- Aplicar los aspectos del desarrollo sustentable en el diseño e implantación de los productos y procesos mecatrónicos.

Anexo 2

FACULTAD DE INGENIERÍA PLAN DE ESTUDIOS DE LA CARRERA DE INGENIERÍA MECATRÓNICA

Aprobado por el Consejo Técnico de la Facultad de Ingeniería en su sesión ordinaria del 15 de octubre de 2008

Semestre	ASIGNATURAS CURRICULARES***					Créditos		
	Obligatorios	Optativos	Total	Obligatorios	Optativos	Total	Obligatorios	Optativos
1	ÁLGEBRA 9 t:4.5; p:0.0; T=4.5	CÁLCULO DIFERENCIAL 9 t:4.5; p:0.0; T=4.5	GEOMETRÍA ANALÍTICA 9 t:4.5; p:0.0; T=4.5	COMPUTACIÓN PARA INGENIEROS (L+) 8 t:3.0; p:2.0; T=5.0	CULTURA Y COMUNICACIÓN 6 t:3.0; p:0.0; T=3.0	41		41
2	ÁLGEBRA LINEAL 9 t:4.5; p:0.0; T=4.5	CÁLCULO INTEGRAL 9 t:4.5; p:0.0; T=4.5	ESTÁTICA 9 t:4.5; p:0.0; T=4.5	COSTOS E INGENIERÍA ECONÓMICA 8 t:4.0; p:0.0; T=4.0	INTRODUCCIÓN A LA ECONOMÍA 9 t:4.5; p:0.0; T=4.5	44		44
3	ECUACIONES DIFERENCIALES 9 t:4.5; p:0.0; T=4.5	CÁLCULO VECTORIAL 9 t:4.5; p:0.0; T=4.5	CINEMÁTICA Y DINÁMICA 9 t:4.5; p:0.0; T=4.5	TERMODINÁMICA (L+) 11 t:4.5; p:2.0; T=6.5	DIBUJO MECÁNICO E INDUSTRIAL (L) 6 t:2.0; p:2.0; T=4.0	44		44
4	ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO (L+) 11 t:4.5; p:2.0; T=6.5	ANÁLISIS NUMÉRICO (L) 7 t:2.5; p:2.0; T=4.5	TERMODINÁMICA APLICADA 8 t:4.0; p:0.0; T=4.0	MATEMÁTICAS AVANZADAS 8 t:4.0; p:0.0; T=4.0	PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA 9 t:4.5; p:0.0; T=4.5	43		43
5	ANÁLISIS DE CIRCUITOS (L) 10 t:4.0; p:2.0; T=6.0	MECÁNICA DE SÓLIDOS 8 t:4.0; p:0.0; T=4.0	MECÁNICA DE FLUIDOS I (L+) 10 t:4.0; p:2.0; T=6.0	INGENIERÍA DE MATERIALES (L+) 10 t:4.0; p:2.0; T=6.0	LITERATURA HISPANOAMERICANA CONTEMPORÁNEA 6 t:3.0; p:0.0; T=3.0	44		44
6	ELECTRÓNICA BÁSICA (L) 10 t:4.0; p:2.0; T=6.0	MECANISMOS 8 t:4.0; p:0.0; T=4.0	LABORATORIO DE MÁQUINAS TÉRMICAS 4 t:0.0; p:4.0; T=4.0	INGENIERÍA DE MANUFACTURA (L+) 10 t:4.0; p:2.0; T=6.0	MODELADO DE SISTEMAS FÍSICOS 8 t:4.0; p:0.0; T=4.0	40		40
7	CIRCUITOS DIGITALES (L) 10 t:4.0; p:2.0; T=6.0	DISEÑO DE ELEMENTOS DE MÁQUINAS 8 t:4.0; p:0.0; T=4.0	TECNICAS DE PROGRAMACIÓN 8 t:4.0; p:0.0; T=4.0	ÉTICA PROFESIONAL 6 t:3.0; p:0.0; T=3.0	INSTRUMENTACIÓN 8 t:4.0; p:0.0; T=4.0	40		40
8	MÁQUINAS ELÉCTRICAS (L) 10 t:4.0; p:2.0; T=6.0	CONTROL AUTOMÁTICO 8 t:4.0; p:0.0; T=4.0	ASIGNATURA OPTATIVA 8 t:4.0; p:0.0; T=4.0	SEMINARIO DE INGENIERÍA 4 t:0.0; p:4.0; T=4.0	DISEÑO Y MANUFACTURA AVANZADOS POR COMPUTADORA (L) 10 t:4.0; p:2.0; T=6.0	32	8	40
9	DISEÑO MECATRÓNICO 10 t:4.0; p:2.0; T=6.0	SISTEMAS ELECTRÓNICOS LINEALES (L) 7 t:3.0; p:1.0; T=4.0	ASIGNATURA OPTATIVA 8 t:4.0; p:0.0; T=4.0	ROBÓTICA (L) 10 t:4.0; p:2.0; T=6.0	RECURSOS Y NECESIDADES DE MÉXICO 6 t:3.0; p:0.0; T=3.0	33	14	47
10	ASIGNATURA OPTATIVA 8 t:4.0; p:0.0; T=4.0	ASIGNATURA OPTATIVA 8 t:4.0; p:0.0; T=4.0	ASIGNATURA OPTATIVA 8 t:4.0; p:0.0; T=4.0	ASIGNATURA OPTATIVA 8 t:4.0; p:0.0; T=4.0	PROYECTO DE INGENIERÍA 6 t:0.0; p:6.0; T=6.0	6	32	38
<p> Asignaturas de ciencias básicas (127 créditos distribuidos en 14 asignaturas) Créditos obligatorios 367 Asignaturas de ciencias de la Ingeniería (107 créditos distribuidos en 13 asignaturas) Créditos optativos (mín.) 54 Asignaturas de Ingeniería aplicada (122 créditos distribuidos en 14 asignaturas) Asignaturas de ciencias sociales y humanidades (39 créditos distribuidos en 6 asignaturas) Total 421 Otras asignaturas convenientes (26 créditos distribuidos en 4 asignaturas) </p>						<p>PENSUM ACADÉMICO: 3464 HORAS</p>		

(L+) Indica laboratorio por separado
(L) Indica laboratorio incluido
— Indica Seriación obligatoria

NOTAS:

★ La suma incluye el número de créditos optativos mínimos
t: Horas teóricas
p: Horas prácticas
T: Total de horas teóricas y prácticas

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
PLAN DE ESTUDIOS DE LA LICENCIATURA EN
INGENIERÍA MECATRÓNICA

ASIGNATURAS CURRICULARES****

PLAN 2016

Semestre						Créditos			
						En obligatorias	En optativas	Totales	
1	ÁLGEBRA 1120 8 1m4.0; pm0.0; Tm6.0	CÁLCULO Y GEOMETRÍA ANALÍTICA - 1121 12 1m6.0; pm0.0; Tm6.0	QUÍMICA (L+) 1123 10 1m4.0; pm2.0; Tm6.0	REDACCIÓN Y EXPOSICIÓN DE TEMAS DE INGENIERÍA 1124 6 1m2.0; pm2.0; Tm4.0	FUNDAMENTOS DE PROGRAMACIÓN (L) 1122 10 1m4.0; pm2.0; Tm6.0	46	0	46	
2	ÁLGEBRA LINEAL 1220 8 1m4.0; pm0.0; Tm4.0	CÁLCULO INTEGRAL 1221 8 1m4.0; pm0.0; Tm4.0	ESTÁTICA 1223 8 1m4.0; pm0.0; Tm4.0	FÍSICA EXPERIMENTAL (L) 1221 10 1m4.0; pm2.0; Tm6.0	DIBUJO MECÁNICO E INDUSTRIAL (L) 1209 6 1m2.0; pm2.0; Tm4.0	40	0	40	
3	PROBABILIDAD 1436 8 1m4.0; pm0.0; Tm4.0	CÁLCULO VECTORIAL 1321 8 1m4.0; pm0.0; Tm4.0	ECUACIONES DIFERENCIALES 1322 8 1m4.0; pm0.0; Tm4.0	CINEMÁTICA Y DINÁMICA 1322 8 1m4.0; pm0.0; Tm4.0	MANUFACTURA I (L+) 1225 8 1m2.0; pm4.0; Tm6.0	CULTURA Y COMUNICACIÓN 1222 2 1m6.0; pm2.0; Tm2.0	42	0	42
4	ESTADÍSTICA 1569 8 1m4.0; pm0.0; Tm4.0	ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO (L+) 1414 10 1m4.0; pm2.0; Tm6.0	ANÁLISIS NUMÉRICO 1433 8 1m4.0; pm0.0; Tm4.0	MATEMÁTICAS AVANZADAS 1424 8 1m4.0; pm0.0; Tm4.0	TERMODINÁMICA (L+) 1437 10 1m4.0; pm2.0; Tm6.0	TALLER SOCIOHUMANÍSTICO 2 1m6.0; pm2.0; Tm2.0	44	2	46
5	ANÁLISIS DE CIRCUITOS (L) 1550 10 1m4.0; pm2.0; Tm6.0	INGENIERÍA DE MATERIALES (L+) 1570 10 1m4.0; pm2.0; Tm6.0	MECÁNICA DE SÓLIDOS 1540 8 1m4.0; pm0.0; Tm4.0	TÉCNICAS DE PROGRAMACIÓN (L) 1472 10 1m4.0; pm2.0; Tm4.0	TERMOFLUIDOS (L+) 1409 10 1m4.0; pm2.0; Tm6.0		48	0	48
6	ELECTRÓNICA BÁSICA (L) 1691 10 1m4.0; pm2.0; Tm6.0	INGENIERÍA DE MANUFACTURA (L+) 0507 10 1m4.0; pm2.0; Tm6.0	MECANISMOS 1659 8 1m4.0; pm0.0; Tm4.0	TEMAS SELECTOS DE PROGRAMACIÓN I 1964 6 1m2.0; pm2.0; Tm4.0	MODELADO DE SISTEMAS FÍSICOS 0508 8 1m4.0; pm0.0; Tm4.0	OPTATIVA(S) DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANIDADES 6 1m2.0; pm2.0; Tm4.0	42	6	48★
7	CIRCUITOS DIGITALES (L) 1996 10 1m4.0; pm2.0; Tm6.0	SISTEMAS ELECTRÓNICOS LINEALES 1973 10 1m4.0; pm0.0; Tm4.0	DISEÑO DE ELEMENTOS DE MAQUINAS 1782 8 1m4.0; pm0.0; Tm4.0	INGENIERÍA ECONÓMICA 1734 8 1m4.0; pm0.0; Tm4.0	INTRODUCCIÓN A LA ECONOMÍA 1413 8 1m4.0; pm0.0; Tm4.0		42	0	42
8	MAQUINAS ELÉCTRICAS (L) 0549 10 1m4.0; pm2.0; Tm6.0	INSTRUMENTACIÓN 0510 8 1m4.0; pm0.0; Tm4.0	ASIGNATURA OPTATIVA 8 1m4.0; pm0.0; Tm4.0	DESARROLLO EMPRESARIAL (P) 1059 6 1m2.0; pm2.0; Tm4.0	CONTROL AUTOMÁTICO 0552 8 1m4.0; pm0.0; Tm4.0	OPTATIVA(S) DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANIDADES 4 1m2.0; pm0.0; Tm2.0	32	12	44★
9	DISEÑO MECATRÓNICO (L) 0563 10 1m4.0; pm2.0; Tm6.0	AUTOMATIZACIÓN INDUSTRIAL (L) 0572 8 1m2.0; pm4.0; Tm6.0	DISEÑO Y MANUFACTURA ASISTIDOS POR COMPUTADORA (L+) 0972 10 1m4.0; pm2.0; Tm6.0	ROBÓTICA (L) 1225 10 1m4.0; pm2.0; Tm6.0	ÉTICA PROFESIONAL 1052 6 1m2.0; pm2.0; Tm4.0		44	0	44
10	ASIGNATURA OPTATIVA 8 1m4.0; pm0.0; Tm4.0	ASIGNATURA OPTATIVA 8 1m4.0; pm0.0; Tm4.0	ASIGNATURA OPTATIVA 8 1m4.0; pm0.0; Tm4.0	ASIGNATURA OPTATIVA 8 1m4.0; pm0.0; Tm4.0	ASIGNATURA OPTATIVA 8 1m4.0; pm0.0; Tm4.0	RECURSOS Y NECESIDADES DE MÉXICO - 2080 8 1m4.0; pm0.0; Tm4.0	8	40	48★

- Ciencias Básicas (140 créditos)
- Ciencias de la Ingeniería (108 créditos)
- Ingeniería Aplicada (128 créditos)
- Ciencias Sociales y Humanidades (42 créditos)
- Otras Asignaturas Convenientes (30 créditos)

Créditos de asignaturas obligatorias: 388
 Créditos de asignaturas optativas: 60*
 Créditos totales: 448
 Horas teóricas: 3136
 Horas prácticas: 896
 Pensum académico (horas): 4032

Notas

- (L+) Indica laboratorio por separado
- (L) Indica laboratorio incluido
- (P) Indica prácticas incluidas
- t Indica horas teóricas
- p Indica horas prácticas
- T Indica total de horas
- Indica seriación obligatoria

- ★ La suma incluye el número de créditos optativos mínimos.
- * El alumno deberá cursar asignaturas de la lista recomendada, o asignaturas de cualquier otra carrera que se imparta en la Facultad de Ingeniería o en cualquier Escuela o Facultad de la UNAM, hasta completar un mínimo de 48 créditos.
- **** El mapa curricular señala el número mínimo de créditos que el alumno deberá cursar para considerar cubierto su plan de estudios, sin embargo, podrá cursar créditos adicionales que sean de su interés. Cada alumno podrá cursar semestralmente como máximo 60créditos, cualesquiera que sea la suma de asignaturas.