CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Sobre las concepciones y conocimientos de los profesores de Geometría Analítica y el nuevo modelo educativo de matemáticas

Tesis que presenta:

Rafael Soto González

Para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias
en la especialidad de Matemática Educativa

Director de Tesis:

Dr. Antonio Rivera Figueroa

Ciudad de México   Octubre de 2018

Contenido

Resumen

En este trabajo, se reportan los resultados de una investigación acerca de las concepciones que tienen los profesores de bachillerato de la Geometría Analítica, así como de sus conocimientos disciplinares que tienen y aquéllos que son requeridos para llevar a cabo con éxito el curso, de acuerdo al Nuevo Currículo de Matemáticas, establecido por la Secretaría de Educación Pública dentro del Nuevo Modelo Educativo para la Educación Obligatoria. Uno de los objetivos fue averiguar si los profesores poseen conocimientos suficientes de la Geometría analítica que les permita entender los objetivos de esta disciplina, elegir estrategias adecuadas de enseñanza y diseñar actividades de aprendizaje, que les ayuden a planear y alcanzar los objetivos del curso.

El instrumento de investigación consistió en un cuestionario con 12 preguntas de respuesta abierta y de entrevistas no estructuradas que se llevaron a cabo con los profesores participantes. El propósito fue averiguar si los profesores conciben la Geometría Analítica (GA) en el plano como el área de la matemática que permite estudiar curvas en el plano, mediante su representación analítica, cuando ellas están definidas como lugares geométricos o mediante otros recursos (por ejemplo, mediante sistemas físicos o mecánicos) o si la conciben como el área de la matemática que se reduce a estudiar a las cónicas definidas como lugares geométricos en el plano, como se establece en los programas oficiales del curso de Geometría Analítica. También se trató de averiguar si los profesores consideran los ejes cartesianos como un sistema de referencia por excelencia para representar a las curvas, pero saben que en Geometría Analítica se puede acudir a otros sistemas de coordenadas como las polares, o diferentes tipos de representaciones como las ecuaciones paramétricas, por lo que una curva puede representarse en la forma $f(x, y) = 0$, en forma polar o en forma paramétrica. Por ejemplo, la ecuación de una circunferencia con centro en el origen y de radio 1, se representa en forma cartesiana como $x^2 + y^2 - 1 = 0$, en forma polar como $r = 1$ y en forma paramétrica como $\alpha(t) = (cos\, t, sen\, t)$. También se trató de indagar si el profesor está consciente y sabe que las cónicas (que son las curvas que se obtienen mediante la intersección de un cono doble con un plano variable) corresponden exactamente a la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola, concebidas

como lugares geométricos en un plano y sabe cómo se sustenta esta identificación. Otros temas de la Geometría Analítica que se consideraron en la investigación fueron los relacionados a las aplicaciones de las cónicas, sus propiedades focales y otras definiciones de las cónicas como lugares geométricos, diferentes a las que usualmente aparecen en los libros de texto, por ejemplo, aquélla que las unifica y que es expresada en términos de su excentricidad.

El cuestionario se aplicó a 10 profesores que cuentan con más de 3 años de experiencia impartiendo la asignatura, y que son el universo de los profesores de Geometría Analítica de las instituciones del nivel bachillerato del municipio de Tepeji del Río en el estado de Hidalgo.

En general, podemos decir que, en el mejor de los casos, los conocimientos de los profesores no van más allá de los conocimientos básicos que se requieren para establecer, a partir de las definiciones como lugares geométricos, las ecuaciones canónicas de la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola. En relación a los propósitos de la asignatura, su visión se limita a una discusión somera de las ecuaciones cuadráticas de algunas de las curvas, ya que su concepción sobre los objetivos de la GA, está fundamentada en los contenidos del currículo, así como en la forma en que se encuentran organizados. Una planeación adecuada, requiere que el profesor cuente con conocimientos profundos de la asignatura, que le permitan diseñar estrategias de aprendizaje, encaminadas a llevar a cabo con éxito un curso. En este contexto, la profesionalización y formación continua de los profesores, se convierte en un requisito fundamental para complementar la reforma que plantea el Nuevo Currículo de Matemáticas.

Abstract

In this work, we report the results of an investigation whose purpose is to find out if high school teachers possess the sufficient disciplinary knowledge to carry out successfully the analytical Geometry course, according to the **New Mathematics Curriculum**, established by the **Secretariat of Public Education** within the **New Educational Model for Compulsory Education**. An in-depth knowledge of Analytical Geometry will allow teachers to understand their objectives, choose appropriate teaching strategies and design the learning activities, which will help them plan and achieve the objectives of the course.

The research instrument consisted of a questionnaire with 12 open-ended questions and interviews that were carried out with the participating teachers, to find out if they conceive the Analytical Geometry as the area of mathematics that allows to study curves in the plane (or in space), through its analytical representation, when they are defined as geometric places or through other resources (for example, through physical or mechanical systems) or if they understand it as the area of mathematics that is reduced to studying conics, as it is established in the official programs of the Analytical Geometry course. It was also tried to find out if professors consider the Cartesian axes as a reference system par excellence to represent the curves, but they know that in Analytical Geometry one can go to other coordinate systems such as polar ones, or different types of representations such as parametric equations, so that a curve can be represented in the form $f(x, y) = 0$, in polar form or in parametric form. For example, the equation of a circle with center at the origin and of radius 1, is represented in Cartesian form as $x^2 + y^2 - 1 = 0$, in polar form as $r = 1$ and in parametric form as $\alpha(t) = (cost, sent)$. It was also tried to investigate if the teacher is aware and knows that the conics (which are the curves that are obtained by intersecting a double cone with a variable plane) correspond exactly to the circumference, parabola, ellipse and hyperbola, conceived as places geometrical in a plane and knows how this identification is sustained. Other topics of the Analytical Geometry that were

considered in the investigation were those related to the applications of the conics, their focal properties and other definitions of the conics as geometric loci, different from those that usually appear in textbooks, for example, the one that unifies them and that is expressed in terms of their eccentricity.

The questionnaire was applied to 10 professors who have more than 3 years of experience teaching the subject, and who are the universe of the professors of Analytical Geometry of the institutions of the baccalaureate level of the municipality of Tepeji del Río in the state of Hidalgo.

In general, we can say that, in the best of cases, the teachers' knowledge does not go beyond the basic knowledge required to establish, from the definitions as loci, the canonical equations of the circumference, parabola, ellipse and hyperbola. In relation to the purposes of the subject, his vision is limited to a brief discussion of the quadratic equations of some of the curves, since his conception of the objectives of the GA is based on the contents of the curriculum, as well as on the way they are organized. Adequate planning requires that the teacher have in-depth knowledge of the subject, which allows him to design learning strategies, aimed at carrying out a successful course. In this context, the professionalization and continuous training of teachers, becomes a fundamental requirement to complement the reform proposed by the **New Mathematics Curriculum**.

Introducción

Enseñar matemáticas es todo un reto para cualquier profesor; implica tener conocimientos pedagógicos, didácticos y disciplinares, para poder diseñar estrategias de enseñanza y actividades de aprendizaje que favorezcan la comprensión de los estudiantes, además de propiciar en ellos el desarrollo de habilidades como el razonamiento, el pensamiento crítico y reflexivo, plantear y resolver problemas, argumentar, analizar resultados, obtener conclusiones, tomar decisiones, etc. Sin embargo, no toda la responsabilidad del proceso de enseñanza–aprendizaje recae en el profesor, también depende del compromiso, la actitud positiva y propositiva del estudiante, de tener un libro de texto que sirva como apoyo, y de contar con un programa donde estén bien definidos los propósitos y los temas importantes del curso. En México, el avance en la enseñanza de las matemáticas dentro del nivel medio superior no ha sido adecuado. De acuerdo con la prueba Programa para la evaluación internacional del estudiante (PISA por sus siglas en inglés) que realiza la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) cada 3 años, nuestro país ha aumentado en promedio 5 puntos cada 3 años a partir del 2003 en matemáticas (OCDE 2016), y actualmente ocupamos el lugar 56 de 72 países que participan, con un puntaje de 408, el cual está por debajo de la media que establece la OCDE de 490 puntos (OCDE 2016). En otras palabras, de acuerdo con los objetivos de la prueba, los estudiantes de bachillerato en México mostraron un bajo desempeño en sus habilidades para aplicar sus conocimientos matemáticos en distintas situaciones contextuales o dentro de las mismas matemáticas.

A principios de la década pasada, hubo algunos intentos aislados por mejorar la calidad de la educación media superior (EMS) en nuestro país. Los bachilleratos de la UNAM y el IPN, así como de la Dirección General de Bachilleratos Generales, el consejo del Sistema Nacional de Educación Tecnológica y el CONALEP, fueron los primeros en instituir mejoras en la EMS, pensando en que contribuyeran al desarrollo individual y social de los jóvenes mexicanos (RIEMS 2008). En el 2008, se unificaron los esfuerzos de los distintos subsistemas de bachillerato y surgió la primera Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS), donde uno de los principales ejes, fue la creación de un marco curricular común con base en competencias. En el área de matemáticas, las competencias a desarrollar por los estudiantes durante su estancia en el bachillerato, se centran en construir e interpretar modelos matemáticos, formular y resolver problemas, explicar e interpretar resultados, argumentar soluciones y analizar relaciones entre variables (RIEMS 2008). Aunque los profesores han intentado aplicar la reforma y han buscado nuevas alternativas y estrategias para enseñar matemáticas en las aulas, el avance ha sido poco significativo, tal y como lo demuestran los resultados de la prueba PISA entre 2003 y 2015.

En el 2017, la Secretaría de Educación Pública propuso un Nuevo Modelo Educativo para la Educación Obligatoria (NME), donde el Nuevo Currículo de Matemáticas (NCM) pretende que al estudiar matemáticas, los estudiantes se centren en comprender el significado de las definiciones matemáticas para poder aplicarlas en distintos contextos y la vida cotidiana. Durante el proceso, también deben desarrollar habilidades como el razonamiento, el pensamiento crítico y reflexivo, el plantear y resolver problemas, analizar y sacar conclusiones, tomar decisiones, etc., además de prepararlos para las matemáticas superiores. De acuerdo al NCM 'se debe privilegiar la construcción del conocimiento matemático en situaciones contextuales, por sobre el aprendizaje memorístico y descontextualizado' (NCM 2017). De igual forma, propone cuáles son los objetivos que deben cumplirse, las competencias a desarrollar en los estudiantes y los contenidos que el profesor tiene que enseñar, para lograr esa transformación que se requiere en la enseñanza de las matemáticas. Por cierto, en nuestra opinión la memorización (llevada a cabo de manera adecuada) es indispensable en el aprendizaje de las matemáticas. En caso contrario, el alumno difícilmente podrá avanzar en la adquisición de nuevo conocimiento matemático.

Uno de los temas del NCM es la Geometría Analítica en el plano, la cual es la rama de las matemáticas que estudia curvas descritas como lugares geométricos en el plano o a través de situaciones físicas o mecánicas, mediante su representación analítica (comúnmente llamada ecuación algebraica). Esto implica conjuntar y conectar una serie de conocimientos de Aritmética, Algebra, Geometría y Trigonometría, con lo que se trata de desarrollar las habilidades matemáticas que se establecen como propósitos en el NCM, de ahí la importancia de incluirla en el tercer semestre del bachillerato.

Haciendo un análisis somero de los contenidos y propósitos que aparecen en el programa de GA, observamos la ausencia de algunos temas clásicos de esta asignatura y la falta de sugerencias didácticas explícitas para la impartición de la materia. También observamos que aun cuando se explica que la Geometría analítica consiste en el estudio de curvas que se definen como lugares geométricos, mediante su ecuación algebraica, difícilmente se logrará este objetivo ya que solamente se hace mención de las cónicas y la asignatura se limita al estudio de éstas. Al menos, a título de ejemplo expuesto sin detalle, deberían incluirse otras curvas diferentes a las cónicas. Uno de los temas importantes que brillan por su ausencia son las coordenadas polares y la obtención de las ecuaciones en estas coordenadas de algunas de las cónicas. También observamos que en el NCM se le da poca importancia a las ecuaciones paramétricas de las curvas, tema importante de la GA elemental. Expuesto así, el programa de GA trasmite una concepción limitada de esta área de la matemática y el curso se convierte en uno donde, en el mejor de los casos, se desarrollan destrezas algebraicas. Por cierto, no es claro que durante el curso deban establecerse las ecuaciones analíticas de las cónicas a partir de sus definiciones como lugares geométricos en el plano. La deducción de las ecuaciones ayudaría a comprender el propósito general de la GA. De acuerdo con el NCM pareciera que el objetivo que se logra es que la GA consiste en el estudio las ecuaciones cuadráticas que representan cada una de las cónicas. La formación y los conocimientos disciplinares del profesor, así como su concepción de lo que es la GA son fundamentales para que pueda identificar los aprendizajes clave, jerarquizarlos y ordenarlos, diseñar ambientes de aprendizaje idóneos, diseñar y plantear sus propios problemas y afrontar los retos que se presenten en el aula, de tal manera que puedan cumplirse los objetivos del curso.

Este trabajo de investigación tiene el propósito de averiguar si los profesores de bachillerato tienen conocimientos disciplinares de GA que le permitan planear de manera adecuada un curso, cumpliendo con las exigencias y los requerimientos establecidos por el Nuevo Currículo de Matemáticas.

En el capítulo 1 se plantea el problema de investigación y se describen los objetivos generales y particulares del NCM en la asignatura de GA. También se plantean las preguntas de investigación.

El capítulo 2 corresponde al marco de referencia. En este capítulo se hacen explícitos los contenidos matemáticos de la disciplina propios para el nivel bachillerato, así como algunos de los conocimientos matemáticos que sería deseable que el profesor poseyera para llevar a cabo con éxito la impartición de su curso. Por ejemplo, sería importante que el profesor conociese la justificación de por qué la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola reciben el nombre de cónicas. No solamente se trata de que el profesor perciba que las formas de estas curvas corresponden a las formas de las que se obtienen al cortar un cono doble con un plano, sino que realmente estas últimas satisfacen las condiciones que las describen como lugares geométricos en el plano. Por ejemplo, que la elipse que se observa en el plano que corta un cono, es el lugar geométrico de los puntos en el plano cuya suma de sus distancias a dos puntos fijos es una constante. Otro conocimiento que es importante que el profesor posea es sobre la diversidad de las aplicaciones o presencia de las cónicas en diversas situaciones físicas o de la vida diaria, lo que requerirá, también, un conocimiento de las propiedades focales de las cónicas.

En el capítulo 3, a título de marco conceptual para la investigación, se describen las ideas de Richard Skemp (1976) acerca de lo que significa comprensión en matemáticas.

De acuerdo con Skemp, comprensión instrumental, en una situación matemática, consiste en reconocer una tarea como una de una clase particular para la cual ya se conoce una regla, por ejemplo

- Para hallar el área de un rectángulo se multiplica largo por ancho.
- Para un triángulo, un medio de la base por la altura.
- Para un paralelogramo, multiplicamos la longitud de uno de dos lados paralelos por la distancia (perpendicular) entre ellos, etc.

La comprensión Relacional, consiste principalmente en relacionar una tarea con un esquema apropiado. Si ya se tiene un plan listo para usar, mucho mejor. Pero si no, uno no está perdido. Uno puede hacer un plan para la tarea particular que se tenga o puede uno adaptar un plan existente, o combinar partes de dos tales planes. Alguien que no conoce la regla para calcular el área de un trapecio puede aún calcularla dividiéndolo en un triángulo y un rectángulo o en dos triángulos y un rectángulo.

Según Skemp, para lograr una comprensión relacional de un conocimiento matemático es importante que el individuo construya un mapa conceptual alrededor de ese conocimiento. Estas ideas de mapa cognitivo, aplicadas a la Geometría Analítica, se utilizaron para el diseño del cuestionario y las entrevistas que se utilizaron durante la investigación.

En el capítulo 4, se describe la metodología de la investigación. La cual consistió en la aplicación de un cuestionario de 12 preguntas y entrevistas no estructuradas a un grupo de 10 profesores, todos ellos ingenieros de profesión, que son el universo de profesores de los cursos de GA que se imparten en los diversos planteles del nivel medio superior en el municipio de Tepeji del Río en el estado de Hidalgo. Todos los profesores participantes contaban, en ese momento, con una experiencia de al menos 3 años impartiendo la asignatura. El formato de diez de las preguntas del cuestionario fue de respuesta abierta. Las dos restantes fueron de opción múltiple, sin embargo, en todos los casos se les pedía que justificasen su respuesta. Uno de los objetivos del cuestionario era averiguar sobre la concepción que tienen los profesores de la GA. Deseamos averiguar si el profesor concibe la GA como el área de las matemáticas que estudia curvas en general, definidas geométrica o mecánicamente en un plano, mediante su representación analítica, o sólo como el estudio de las cónicas definidas geométricamente en el plano, tal y como se propone en los programas de estudio y libros de texto. También se trató de averiguar acerca de los conocimientos del profesor en relación con los contenidos expuestos en el marco de referencia. En relación con las entrevistas, se plantearon preguntas durante una charla con cada uno de los profesores, con el fin de profundizar sobre sus argumentos y respuestas que emitieron a las preguntas del cuestionario, de tal manera, que pudiésemos tener un panorama más amplio en cuanto a su concepción de la GA y sus conocimientos disciplinares sobre ella. Por ejemplo, tratamos de averiguar cuáles temas consideran que son de mayor relevancia dentro del curso, qué otros sistemas de referencia utilizan además del sistema cartesiano para describir curvas, también quisimos averiguar si construyen las ecuaciones algebraicas de las cónicas a partir de sus definiciones como lugares geométricos en el plano o simplemente enuncian las fórmulas para proceder con su estudio, etc.

En el capítulo 5, se reportan los resultados del análisis cualitativo que se hizo a la información recabada de las respuestas de los profesores a las preguntas del cuestionario, así como de las entrevistas. En el cuestionario, las respuestas de los profesores fueron muy escuetas, aun cuando se les solicitó que con base en su experiencia y conocimientos respondieran de manera amplia y sin límite de espacio. Sin embargo, proporcionaron información suficiente para darnos una idea general acerca de cómo conciben a la GA y sus conocimientos disciplinares. Por ejemplo, pudimos averiguar que la mayoría de los profesores conciben la GA como el área de la matemática que estudia otros lugares geométricos además de las cónicas, pero ellos consideraban como otros lugares geométricos las gráficas de funciones, por ejemplo, la de la función exponencial, también consideraban como lugares geométricos no tratados en los cursos a la mediatriz de un segmento o bisectriz de un ángulo. Consideraban importante incorporar estos casos en los cursos de GA para abrir la visión de los estudiantes. Así mismo, averiguamos que los profesores conocen algunas aplicaciones de las cónicas, pero no las asocian con sus propiedades focales y que conocen el sistema polar como un sistema de referencia que se utiliza para representar analíticamente curvas en el plano, aunque no pudieron describir a las cónicas en este sistema de coordenadas. Para averiguar acerca de sus conocimientos disciplinares, durante la entrevista se plantearon a los profesores preguntas como: ¿Conoce el Nuevo Currículo de Matemáticas para GA? ¿Conoce usted una justificación de por qué se les llama cónicas a la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola? ¿Es importante que en un curso se mencionen aplicaciones de las cónicas? ¿Utiliza en clase otro sistema de referencia además de las coordenadas cartesianas para obtener la representación algebraica de las curvas? ¿Qué es para usted un lugar geométrico? ¿Conoce la ecuación cuadrática general que describe a todas las cónicas?

En el capítulo 6 se presentan las conclusiones de la investigación. Con base en el análisis de las respuestas a las preguntas del cuestionario, de las entrevistas y de los comentarios espontáneos de los profesores, pudimos obtener información acerca de sus concepciones que tienen de los propósitos generales de la Geometría Analítica como área de la matemática y no solamente vista como asignatura del currículum, así como de sus conocimientos disciplinares. Averiguamos, por ejemplo, que los profesores conciben a la GA como el área de la matemática que estudia lugares geométricos mediante su ecuación algebraica, y consideran que es importante incorporar en un curso otros ejemplos de curvas además de las cónicas, refiriéndose con ello a las gráficas de funciones. Externaron en general que ellos planean el curso de acuerdo con la propuesta del currículo y los libros de texto, pero consideran que esta manera de estructurarlo no favorece el cumplimiento de los objetivos.

Capítulo 1

Planteamiento del Problema y preguntas de investigación

1.1 Planteamiento del problema.

Sin duda, el rol del profesor es muy importante para lograr los objetivos que se establecen en el Nuevo Currículo de Matemáticas, y se vuelve relevante su formación para afrontar el reto. De acuerdo con la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM 2000), en la enseñanza, para ser eficaces, los profesores deben conocer y entender profundamente las matemáticas que enseñan y ser capaces de hacer uso de ese conocimiento con flexibilidad. Entonces, tener conocimientos profundos de la disciplina que se enseña es un requisito importante dentro de dicha formación. Esto le permitirá al profesor tener la capacidad de diseñar actividades de aprendizaje que favorezcan el desarrollo de habilidades matemáticas y la comprensión de conceptos, de elegir las estrategias adecuadas para guiar a los estudiantes en la construcción del conocimiento, de construir ambientes que propicien el interés por aprender matemáticas, de identificar los aprendizajes clave en el currículo y articularlos, o de responder a los posibles cuestionamientos que hagan los estudiantes en clase.

Dentro del marco del Nuevo Modelo Educativo para la educación obligatoria (NME) establecido por la Secretaría de Educación Pública (SEP) en el 2017, se puede ver un intento del gobierno federal por cambiar algunos aspectos importantes en la educación básica, de tal manera que se pueda preparar con las herramientas necesarias a las niñas, niños y jóvenes, para afrontar los nuevos retos que aparecen en México y el mundo. El profesor juega un papel muy importante dentro de esta transformación, ya que es concebido como un profesional centrado en el aprendizaje de sus estudiantes, que genera ambientes de aprendizaje incluyentes, comprometido con la mejora constante de su práctica, capaz de adaptar el currículo a su contexto específico y que aprende constantemente (NME 2017). Por ello, el tercero de los cinco ejes que reorganizan este modelo (formación y desarrollo profesional de los maestros), considera fundamental la formación y desarrollo profesional del profesor, donde un punto importante que deben tener, es el dominio de los contenidos de los aprendizajes y de las estrategias para transmitirlos. En la cumbre de Oslo de la UNESCO (2015), "Educando para el desarrollo", se hizo énfasis en que *los profesores que tienen conocimientos disciplinares y pedagógicos adecuados, que están efectivamente capacitados, y que son sensibles a las diversas necesidades de aprendizaje, pueden hacer la gran diferencia en la educación de sus estudiantes.*

En el campo disciplinar de matemáticas, el Nuevo Currículo de la educación media superior, del Nuevo Modelo Educativo, considera que la algoritmia y la memorización son procesos necesarios pero no suficientes para aprender matemáticas. Ahora, el aprendizaje tiene que complementarse con el "uso del conocimiento matemático", es decir, los estudiantes deben plantear, resolver e interpretar situaciones matemáticas en distintos contextos, para que de esta manera, puedan encontrar un "significado contextual de los contenidos", que de sentido a estudiar matemáticas, que los prepare para las matemáticas superiores y que les dé la posibilidad de utilizarlas en su vida cotidiana. Al mismo tiempo, se pretende que los estudiantes, desarrollen la creatividad, el pensamiento lógico y el pensamiento crítico, que aprenda a argumentar, analizar resultados, comunicar ideas y hacer juicios adecuados, todo encaminado a la toma de decisiones.

Además de tener conocimientos pedagógicos y didácticos en su formación, los profesores tienen que adquirir y dominar conocimientos disciplinares que le permitan actuar y decidir de la mejor manera en el aula. Sin embargo, la mayoría de los profesores que imparten matemáticas en el nivel medio superior, son ingenieros de profesión, con una preparación que no está encaminada a la enseñanza, por lo que carecen de estos conocimientos pedagógicos y disciplinares, fundamentales para planear un curso. Entonces, identificar los aprendizajes clave y articularlos, así como diseñar estrategias de enseñanza–aprendizaje, se vuelve una tarea compleja, donde el currículo y un libro de texto son las únicas herramientas.

Es un hecho, que los estudiantes de nivel medio superior perciben una separación entre las matemáticas que se ven en la escuela y la vida cotidiana. Esto sucede, porque el currículo es generalmente una lista de temas desarticulados, donde no es posible identificar el propósito de la asignatura y los contenidos importantes, lo que provoca un aprendizaje de contenidos aislados. En el cuadro de la figura 1, se muestran los aprendizajes clave de la asignatura de matemáticas III (Geometría Analítica) propuestos por el NCM.

Eje	Componentes	Contenidos centrales
Lugares geométricos y sistemas de referencia. Del pensamiento geométrico al analítico.	**Sistema de referencia y localización: Elementos de Geometría analítica**	La Geometría analítica como método algebraico para la resolución de tareas geométricas. El tratamiento en diversos sistemas de coordenadas.
		Conceptos básicos del sistema de coordenadas rectangulares, orientación y posición en el plano. El papel del origen de coordenadas en los sistemas de referencia.
		Reconocimiento y construcción de los lugares geométricos: recta, circunferencia, elipse, parábola e hipérbola.
		Tratamiento visual y representaciones múltiples de los lugares geométricos: coordenadas rectangulares y paramétricas, puntos singulares, raíces y comportamiento asintótico.

Figura 1. Contenidos centrales de Geometría analítica del Nuevo Currículo de Matemáticas

De acuerdo con esta propuesta, se estructura el programa de estudios de tal manera, que el curso comienza con el estudio del sistema de coordenadas cartesianas y de algunos conceptos básicos de Geometría Analítica, como la distancia entre dos puntos, la división de un segmento en una razón dada o la distancia de un punto a una recta. Después, se estudian algunas formas de representar la ecuación de una recta, por ejemplo, la ecuación punto–pendiente, la ecuación pendiente–ordenada al origen, así como las ecuaciones simétrica y normal. Por último, se estudia la representación algebraica de cada una de las cónicas. Se obtiene la ecuación de la cónica a partir de sus elementos y posición en el plano, después, se realiza el procedimiento a la inversa, se empieza con la circunferencia, después la parábola, la elipse y finalmente la hipérbola. Cabe señalar, que los libros de texto de GA para el bachillerato, presentan los temas de la misma manera que el programa de estudios, por lo que un profesor que no cuenta con conocimientos disciplinares profundos de la asignatura, tomará la propuesta del currículo o del libro de texto como guía para planear un curso. Esta manera de organizar un curso de GA propicia que los estudiantes adquieran conocimientos aislados y no entiendan el propósito de la asignatura, que es estudiar curvas mediante su representación analítica.

Para un profesor que imparte la asignatura de Geometría Analítica, es necesario conocer el propósito y los objetivos del curso, para que pueda elegir las estrategias de enseñanza y diseñar las actividades de aprendizaje que permitan cumplirlos. Además, tiene que ser capaz de ponderar y reestructurar los temas del programa de estudios, de responder adecuadamente a los cuestionamientos que surjan durante la clase o de plantear sus propios problemas. El profesor debe enviar mensajes correctos a los estudiantes, por ejemplo, como que un lugar geométrico es una curva definida por una condición estrictamente geométrica y que existen otros lugares además de las cónicas, así como que existe más de una forma de representar analíticamente a los lugares geométricos y que se puede elegir la que más convenga. Sin duda, el dominio de los contenidos es fundamental para que el profesor tenga una visión amplia del curso, pero para un buen desempeño del profesor no es suficiente que conozca los contenidos que establece el currículo, es deseable que tenga un conocimiento disciplinar profundo de la asignatura, aunque no todo lo enseñe en el aula. En GA, un profesor bien preparado, sabe que un lugar geométrico es una curva definida mediante una condición geométrica y conoce otros lugares geométricos además de las cónicas. También, conoce que las curvas que se obtienen al cortar un cono doble con un plano variable, corresponden con las curvas definidas en el plano como circunferencia, elipse, parábola e hipérbola, y conoce como justificarlo. Además, tiene presente diversas aplicaciones de las cónicas en distintos contextos y las asocia con sus propiedades focales. Así mismo, conoce más de una forma de representar analíticamente lugares geométricos, por ejemplo, coordenadas rectangulares, coordenadas polares o ecuaciones paramétricas, y entiende que hay formas de representación que convienen más que otras. Conoce también, la propiedad geométrica (excentricidad) con la cual se puede describir a todas las cónicas y que permite representarlas analíticamente con una misma ecuación algebraica.

El objetivo de esta investigación es averiguar si los profesores de GA, además de tener los conocimientos disciplinares que se incluyen en el NCM, cuentan con conocimientos más profundos de la asignatura, necesarios para tener una visión más amplia, que les permita identificar y ponderar los contenidos clave del currículo, para organizar, planear e impartir un curso, de tal manera que se cumplan los propósitos y objetivos.

1.2 Preguntas de investigación

Nuestra investigación se llevó a cabo alrededor de las siguientes preguntas generales

- ¿Concibe el profesor del nivel medio superior a la Geometría analítica como el área de las matemáticas cuyo objetivo es estudiar curvas en general mediante su representación analítica o como el área de la matemática que se reduce a estudiar a las cónicas?
- ¿Cuenta el profesor con los conocimientos adecuados y la conexión entre los distintos objetos de la Geometría analítica, que le permitan impartir con éxito un curso, de acuerdo con los propósitos y objetivos del Nuevo Currículo de Matemáticas?

Capítulo 2

Marco de Referencia

2.1 ¿Qué es la Geometría Analítica?

La Geometría analítica es de gran importancia en el estudio de las matemáticas, debido a que permite conectar conceptos y procedimientos de la Aritmética, Geometría y Algebra, para resolver problemas o hacer demostraciones geométricas de manera algebraica, lo que resulta más sencillo y eficiente. Además, es pieza fundamental para estudiar matemáticas más avanzadas, como es el caso del Cálculo, donde no es posible concebir el estudio de la variación y acumulación sin su ayuda. Por ello, tener una concepción adecuada del propósito de la GA es necesario para alguien que pretenda estudiarla o enseñarla.

En su libro, History of Analytic Geometry, Boyer menciona que la GA fue descubierta de manera simultánea por dos grandes matemáticos del siglo XVII. Uno de ellos, René Descartes (1596 – 1650), pretendía encontrar un método general que le permitiera rehacer la antigua Geometría griega y resolver antiguos problemas geométricos, pero además, que fuera útil para resolver nuevos problemas. Pierre de Fermat (1601 – 1665) por su parte, pretendía reformular la obra de Apolonio, utilizando como herramienta el Algebra. El trabajo de Descartes consiste en estudiar curvas definidas como lugares geométricos, de las cuales obtiene una ecuación algebraica respecto a un sistema de referencia. Esta ecuación le permite estudiar la curva la cual fue concebida originalmente como objeto puramente geométrico, de esta manera, resuelve problemas geométricos mediante la construcción de ecuaciones. Caso contrario, el trabajo de Fermat parte de una ecuación algebraica, la cual utiliza para determinar los elementos y características de la curva correspondiente (Urbaneja 2007). El trabajo de Fermat complementa los propósitos de Descartes y ambos dan lugar a la Geometría Analítica. Sin embargo, las ideas de Fermat podemos considerarlas como el origen de la Geometría Algebraica, que consiste en estudiar las curvas que se definen a través de ecuaciones polinomiales o sistemas de ecuaciones polinomiales de dos o más variables.

Actualmente podemos concebir en la Geometría Analítica dos propósitos: 1) Dada una condición geométrica que cumplen puntos en el plano, determinar su ecuación algebraica y 2) A partir de la ecuación algebraica determinar propiedades de las curvas (Lehmann 1962). Es común que los libros de Geometría Analítica se limiten al estudio de las cónicas, pero las ideas de Descartes son aplicables al estudio de todo tipo de curva, que de origen se describe en términos puramente geométricos, mediante alguna representación algebraica respecto a un sistema de referencia. Incluso es aplicable a curvas que son definidas mediante recursos físicos o mecánicos, por ejemplo, este es el caso de la Cicloide. Una vez que se tiene la representación algebraica de la curva se utiliza el poder del álgebra para determinar características de la curva. El proceso de partir de una ecuación algebraica para asociarla a la curva correspondiente es válido dentro del estudio de la GA, siempre y cuando, se trate de la ecuación cuadrática que incluye a todas las cónicas, curvas que están definidas como lugares geométricos y que además forman parte de la esencia de esta disciplina. Es posible estudiar otro tipo de ecuaciones diferentes a la cuadrática, que también pueden ser asociadas a ciertas curvas u objetos geométricos, sin embargo, es un estudio que va más allá del propósito original de la GA y que abarca otro tipo de conocimientos, a esta área de las matemáticas, se le conoce como Geometría algebraica.

La Geometría Algebraica, tiene su origen en el siglo XVII como consecuencia de la Geometría Analítica de Descartes y Fermat, que surge cuando se descubre la posibilidad de estudiar figuras geométricas a partir de las ecuaciones que las determinan. La Geometría Algebraica tuvo su apogeo en Italia en el siglo XIX (Narváez 2000). Actualmente es mucho más extensa y compleja, y también se encarga de estudiar sistemas de ecuaciones polinómicas, donde lo que importa son los conjuntos de soluciones que se obtienen. Entonces, podemos decir que la Geometría Algebraica surge como consecuencia de estudiar la GA en el sentido inverso, pero tiene un propósito diferente.

Entonces, ¿Qué es la Geometría Analítica? Es un área de las matemáticas que se encarga del estudio de curvas definidas como lugares geométricos u otros recursos físicos o mecánicos a través de su representación algebraica, las cuales se obtienen respecto a un sistema de referencia. La GA es una manera de estudiar Geometría utilizando las ventajas y el poder de la manipulación simbólica del Algebra. Un profesor que desea enseñarla tiene que transmitir a sus estudiantes la idea de que se van a utilizar herramientas algebraicas para estudiar figuras geométricas y curvas en el plano, donde para poder hacerlo se requiere lo que se llama sistema de referencia.

Además de conocer y tener bien definido el propósito de la GA, es necesario identificar los conocimientos clave en el programa de estudios, para que sea posible hacer una planeación adecuada que permita llevar a cabo con éxito el curso. Tener claro el propósito de la asignatura y contar con conocimientos disciplinares profundos sobre esta área de la matemática, permite a los profesores, plantear objetivos concretos, enviar los mensajes adecuados a los estudiantes, diseñar actividades de aprendizaje de calidad, así como dar orden y conexión a los contenidos del currículo. Por ejemplo, algunas de las preguntas sobre la GA, que es importante que el profesor pueda responder son: ¿Qué es un lugar geométrico? ¿Cuál es el papel de los sistemas de referencia? ¿Qué sistemas de referencia se pueden utilizar además de los ejes cartesianos? ¿Por qué podría ser útil utilizar más de un sistema de referencia? ¿Qué son las cónicas? ¿Cómo se justifica que las curvas que se obtienen al intersecar un cono doble con un plano corresponden a las cónicas concebidas como lugares geométricos en el plano? ¿Hay otros lugares geométricos que se pueden estudiar en la GA además de las cónicas? ¿Dónde se aplican las cónicas?

Este capítulo es el que ocupa mayor número de páginas, pero su gran tamaño se debió a nuestro interés por presentar una variedad amplia de contenidos relacionados con la GA que consideramos pueden ser de utilidad a los profesores, los cuales suponemos son futuros lectores potenciales. Algunos de los contenidos no son comunes en los libros de texto clásicos de la asignatura por lo que este trabajo podría ser una fuente importante para ampliar sus conocimientos sobre la Geometría Analítica.

2.2 Lugares geométricos

Desde los inicios de la Geometría en la época de los griegos, los lugares geométricos han sido objetos importantes de estudio para las matemáticas. Sus propiedades y comportamientos de algunos lugares geométricos han maravillado e intrigado a muchos, además de ser pieza importante en el desarrollo de las matemáticas y tener aplicación en contextos diversos.

Para enseñar GA en el plano, el profesor debe comprender el significado de lugar geométrico o *locus* (su plural es *loci*). En Geometría y Geometría Analítica del plano, lugar geométrico se refiere a la colección de todos los puntos del plano que satisfacen una o más condiciones geométricas dadas. Por ejemplo, circunferencia es la colección de todos los puntos del plano que están a la misma distancia de un punto común. Parábola es un lugar geométrico que consta de todos los puntos del plano cuyas distancias a una recta fija y un punto fijo son iguales. Una manera de referirse a los lugares geométricos es llamándoles curvas. En este caso, curva es un término genérico y no necesariamente corresponde a la noción intuitiva que en general se tiene del concepto de curva, por ejemplo, una recta como lugar geométrico puede referirse a ella como curva. Los lugares geométricos que comúnmente se estudian en GA son rectas, circunferencias, parábolas, elipses e hipérbolas. Estas curvas también se pueden concebir como aquellas que se obtienen al intersecar un cono doble con un plano variable, razón por la cual reciben el nombre de cónicas. Hay también lugares geométricos cuyas propiedades geométricas están asociadas a condiciones que podríamos llamar mecánicas, ya que son generados por algún movimiento de un objeto físico o punto geométrico, como la cicloide, que es el lugar geométrico descrito por un punto fijo de una circunferencia que rueda sin resbalar sobre una recta fija. También hay otras curvas que han jugado un papel importante en la historia de las matemáticas como es el caso de la cardioide, la catenaria, la lemniscata, los óvalos de Cassini, los óvalos de Maxwell, etc. En un curso, sería importante considerar distintos lugares geométricos, con la finalidad de mostrar una amplia gama de ejemplos a los estudiantes, que les permita comprender que el estudio de la GA va más allá de conocer y determinar las ecuaciones de las cónicas y de estudiar sus propiedades a partir de sus ecuaciones.

2.3 Sistemas de referencia

La representación algebraica es un recurso poderoso de la matemática para abordar problemas Geométricos, sin embargo, es importante tener claro que esto es posible si se recurre a los sistemas de referencia. Los primeros antecedentes que se tienen del uso de lo que puede ser considerado como un sistema de referencia, se remontan a la época de los griegos, cuando Apolonio utilizaba rectas diametrales y tangenciales, que trazaba sobre las cónicas, para estudiar sus propiedades. Oresme (1323 – 1382) fue el primero que tuvo la noción de representar puntos de una curva mediante la combinación de medidas horizontales (longitudes) y medidas verticales (latitudes), lo que representaba ya un esbozo de un sistema de coordenadas, pero, fue hasta el siglo XVII, cuando esta idea se consolidó en el trabajo de Descartes y Fermat (Urbaneja 2007). El sistema de referencia utilizado por Descartes, llamado sistema de coordenadas rectangulares o coordenadas cartesianas, en ese momento no era exactamente como lo conocemos ahora, pero ya cumplía con las características necesarias para convertirse en un instrumento importante e indispensable para el estudio de curvas y objetos geométricos mediante el Algebra.

Actualmente, podemos encontrar más de un sistema de referencia. Por ejemplo, además de las coordenadas cartesianas, también existen las coordenadas polares o las ecuaciones paramétricas, que permiten representar curvas en el plano. Tanto profesores como estudiantes deben entender que las representaciones algebraicas que se obtienen de cada curva dependen de los sistemas de referencia que adoptemos, y uno tiene libertad de elegir el sistema de referencia que se crea que más conviene, porque puede haber más de una elección de sistemas de referencia a los que podamos acudir.

2.4 Las cónicas

Las cónicas son lugares geométricos que ocupan un lugar muy importante en la historia de las matemáticas, y son los principales objetos de estudio en todos los programas de Geometría analítica.

El matemático griego Menecmo (vivió sobre el 350 A.C.) descubrió estas curvas, pero fue el matemático griego Apolonio (262-190 A.C.) de Perga, el primero en estudiar detalladamente las curvas cónicas y encontrar las propiedades planas que las definen. La obra de Apolonio sobre *Las Cónicas* es extensa y está formada por 8 libros. Los métodos que utilizó Apolonio para estudiar a las cónicas, consistían básicamente en trazar rectas sobre las curvas, lo que podría considerarse como usar un sistema de referencia, considerado esto como una anticipación de la Geometría Analítica actual (Urbaneja 2007). Apolonio llamó a las cónicas parábola, hipérbola y elipse.

Estas tres secciones cónicas, junto con la circunferencia, son curvas que se obtienen al intersecar una superficie cónica doble con un plano variable. Dependiendo de la posición del plano con respecto al eje o la generatriz del cono, será la forma de la curva. Una recta que gira alrededor de otra fija, con la cual se corta en un punto fijo (vértice), genera una superficie, que llamaremos cono doble. La recta fija se llama eje del cono y la recta que gira se llama generatriz del cono.

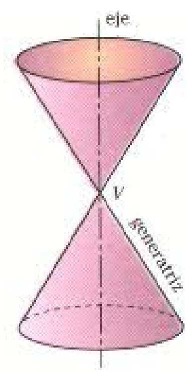


Figura 2. Cono doble

Si se corta el cono doble con un plano se obtiene una curva que llamaremos sección cónica o simplemente cónica. Variando la inclinación de este plano se obtienen diferentes tipos o formas de secciones cónicas. Si este plano variable es perpendicular al eje del cono, la curva que se obtiene es una circunferencia, es una curva cerrada. Al variar la inclinación del plano, dentro de determinado rango de inclinación, la curva cerrada que se obtiene es una elipse. Cuando el plano variable es paralelo a la generatriz, la curva que se obtiene es una parábola, se trata de una curva abierta, no es cerrada como una circunferencia o elipse. Cuando el plano es paralelo al eje del cono, se forma una hipérbola, una curva que consta de dos partes llamadas ramas las cuales son a su vez curvas abiertas.

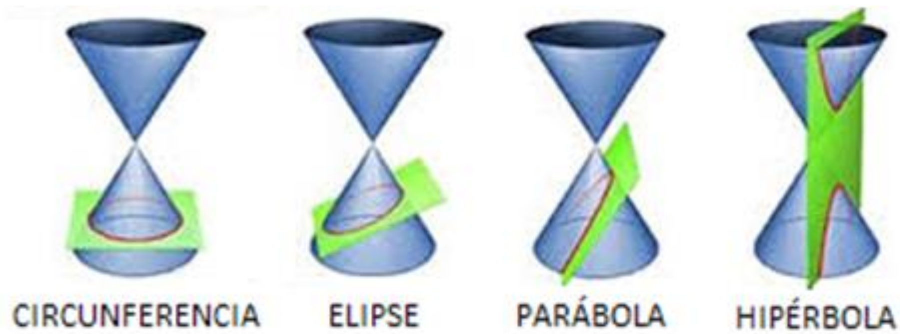


Figura 3. Distintos cortes en el cono doble

El origen del nombre *cónicas* para este grupo de curvas, proviene precisamente de que se obtienen al intersecar un cono. Al variar la posición del plano que intersecar al cono, nos muestra la manera cómo se obtienen las curvas y nos da una idea del aspecto que ellas tienen, pero su aspecto no es suficiente para poder afirmar que corresponden a las curvas, circunferencia, elipse, parábola e hipérbola, estudiadas como lugares geométricos en el plano.

2.5 Las cónicas como lugares geométricos

Una manera de justificar que las curvas obtenidas al intersecar un cono doble con un plano variable son circunferencia, parábola, elipse e hipérbola definidas éstas como lugares geométricos en el plano, es utilizando las esferas de Dandelín (Brannan, D.A. et al. 2012). Este método, establecido por Germinal Dandelín (1794 – 1847), un matemático Belga del siglo XIX, se basa en el hecho de que siempre existen una o dos esferas interiores al cono que son simultáneamente tangentes al plano y al cono, como se muestran en las figuras de la siguiente sección. Además el punto donde una de estas esferas toca al plano es un foco de la sección cónica. Para hacer la justificación, se considera también que si dos rectas se intersectan en un punto y también son tangentes a una misma esfera, las distancias del punto de intersección a los puntos de tangencia son iguales.

2.5.1 La circunferencia

Considere un plano perpendicular al eje del cono. La esfera de Dandelín E, es tangente a este plano en el punto F y es tangente al cono en una circunferencia C. Sea P un punto cualquiera de la curva cerrada. El segmento PP_1 es parte de la generatriz VV' y como el plano que corta al cono es paralelo al plano donde se encuentra la base, cuando P se mueve en la curva cerrada, la distancia del segmento PP_1 se mantiene constante. Debido a que dos rectas son iguales si se intersecar en un punto y son tangentes a una misma esfera, entonces $PP_1 = PF$. En conclusión, la distancia de un punto P de la curva cerrada al punto F que es un punto fijo, es siempre la misma, por lo tanto la curva es una circunferencia.

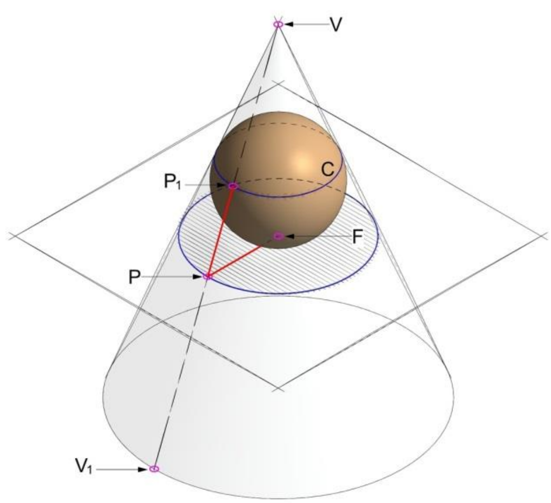


Figura 4. Esfera de Dandelín para la circunferencia

Por lo tanto, la circunferencia concebida como sección cónica es el lugar geométrico de todos los puntos que son equidistantes de un punto fijo. Es decir $CP = r$, donde C es el punto fijo y r la distancia constante, llamados centro y radio respectivamente.

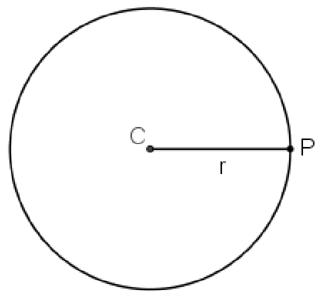
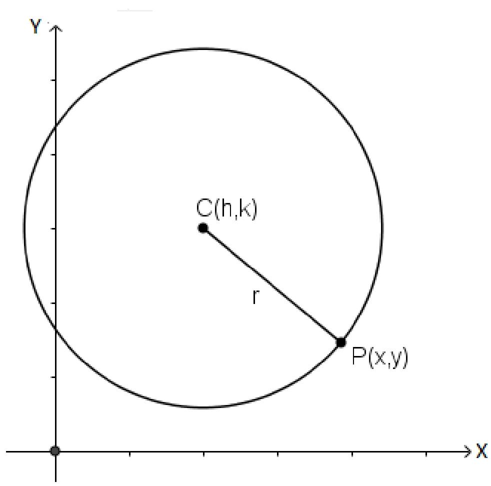


Figura 5. La circunferencia como lugar geométrico

Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera de una circunferencia de radio r y centro en $A(h, k)$, su ecuación canónica en coordenadas cartesianas se determina como:



La condición geométrica que define a la circunferencia es $|\overline{PC}| = r$.

$|\overline{PC}| = r$

$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{h})^{\mathbf{2}} + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{k})^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{r}^{\mathbf{2}}$$

Si el centro se encuentra en el origen:

$$\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{y}^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{r}^{\mathbf{2}}$$

2.5.2 La parábola

En la figura 8 el plano variable es paralelo a una generatriz. En esta figura la esfera de Dandelín es tangente al plano en el punto F y es tangente al cono en la circunferencia C. La intersección del plano paralelo a la directriz y el plano que contiene a la circunferencia C se llama directriz de la curva, la cual denotamos por d. El punto D es el punto en el pie de la perpendicular desde de P, un punto arbitrario sobre la sección cónica, a la directriz d.

Se sabe que $PF = PQ$ por ser tangentes a la esfera en los puntos F y Q desde el punto exterior P. También, $PQ = P_1Q_1$ por ser segmentos de generatrices comprendidas entre planos paralelos. Además, en la figura se muestra un paralelepípedo, por lo tanto $P_1Q_1 = PD$. Entonces, $PF = PQ = P_1Q_1 = PD$, es decir, $PF = PD$, lo que justifica que la curva cumple con la condición de que define una parábola como lugar geométrico en el plano.

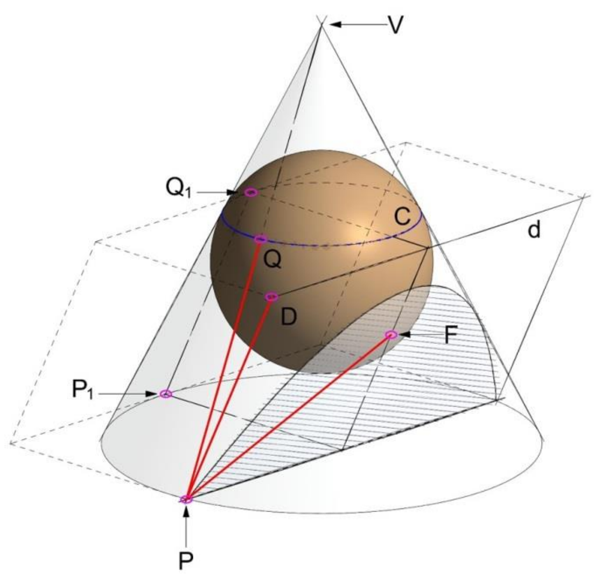


Figura 8. Esfera de Dandelín para la parábola

Una parábola es el lugar geométrico de todos los puntos que se encuentran a la misma distancia de una recta fija y un punto fijo. Es decir $PF = PD$, donde P es un punto móvil en el plano, F es un punto fijo llamado foco y D es el pie de la perpendicular desde P hacia la recta fija d llamada directriz.

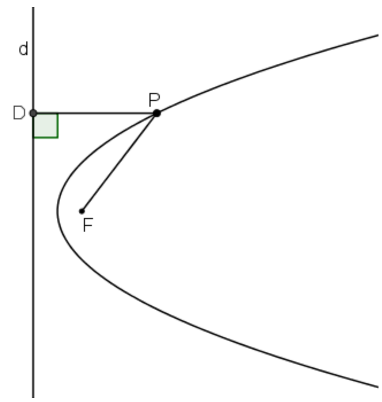
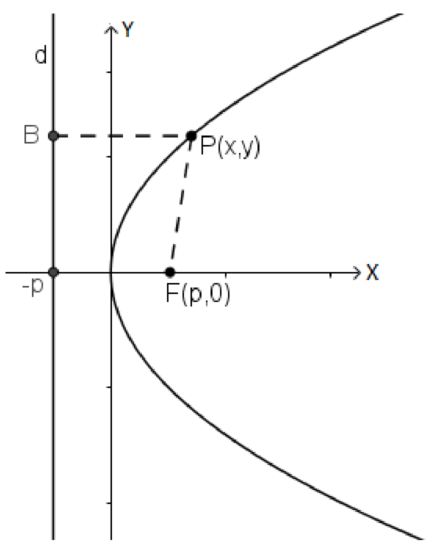


Figura 9. La parábola como lugar geométrico

Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera de una parábola, $B(-p, b)$ es el pie de la perpendicular desde P a una recta fija d, y $F(p, 0)$ es un punto fijo sobre el eje X, su ecuación canónica en coordenadas cartesianas se determina como:



La condición geométrica que define a la parábola es $|\overline{PF}| = |\overline{PB}|$.

$$|\overline{PF}| = |\overline{PB}|$$

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x + p|$$

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$\boldsymbol{y^2 = 4px}$$

Esta es la ecuación canónica de una parábola con vértice en el origen.

Para determinar la ecuación canónica de una parábola con vértice fuera del origen, es necesario hacer una traslación de los ejes coordenados. Si se trasladan los ejes coordenados a un nuevo origen $O'(h,k)$ y las coordenadas de cualquier punto P antes y después de la traslación son (x,y), (x',y') respectivamente, las ecuaciones de transformación del sistema primitivo al nuevo sistema de coordenadas son $x = x' + h$ $y = y' + k$. Por lo tanto, la ecuación será $(y' - k)^2 = 4p(x' - h)$, o simplemente:

$$\boldsymbol{(y-k)^2 = 4p(x-h)}$$

2.5.3 La elipse

La figura 10 muestra un plano intersecando un cono de tal manera que se forma una curva cerrada. Muestra, además, las dos esferas de Dandelín, la esfera E_1 está por encima del plano, y la esfera E_2 está por debajo del mismo. Las esferas E_1 y E_2 son tangentes al cono en las circunferencias C_1 y C_2 respectivamente. Cada esfera es tangente al plano en los puntos de tangencia F_1 y F_2respectivamente. Consideremos un punto arbitrario P de la sección cónica.

La generatriz del cono que pasa por P y por el vértice V del cono, se intersecta con las circunferencias C_1 y C_2 en los puntos P_1 y P_2. Si se mueve P a lo largo de la curva cerrada, también se moverán P_1 y P_2 a lo largo de las dos circunferencias. La distancia de F_1 a P es igual a la distancia de P_1 a P, porque PF_1 y PP_1 son líneas que se intersectan en P y además son tangentes a una misma esfera E_1. Del mismo modo, la distancia de F_2 a P es la misma que la distancia de P_2 a P, por ser PF_2 y PP_2 líneas que se intersectan en P y ser tangentes a una misma esfera E_2. La suma de las distancias $PF_1 + PF_2$ es constante cuando P se mueve a lo largo de la curva cerrada, porque la suma de las distancias $PP_1 + PP_2$ también es constante, debido a que el segmento de la generatriz de P_1 a P_2 es constante. En conclusión si $PF_1 + PF_2 = 2a$ (donde $2a$ es una constante), entonces la curva cerrada que se obtiene de la intersección del plano con el cono cumple con la condición de una elipse concebida como lugar geométrico en el plano.

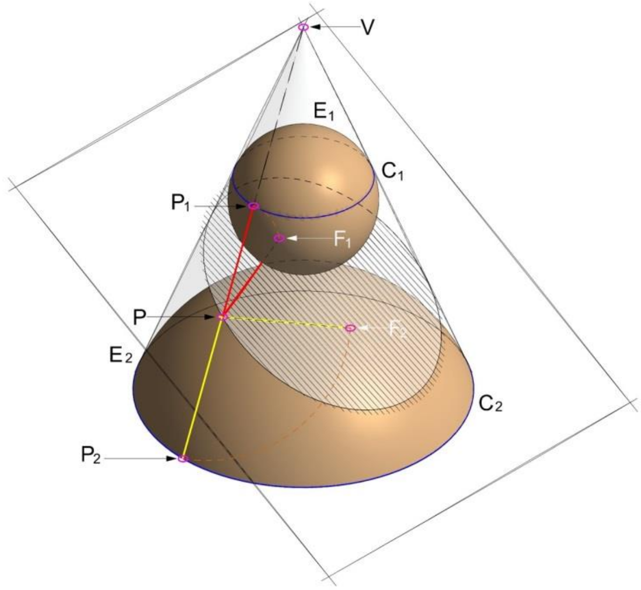


Figura 10. Esferas de Dandelín para la elipse

La elipse es el lugar geométrico de todos los puntos cuya suma de sus distancias a dos puntos fijos tiene siempre un valor constante. Es decir, $PF_1 + PF_2 = 2a$, donde P es un punto móvil en el plano, F_1 y F_2 los puntos fijos llamados focos, $2a$ es un valor constante.

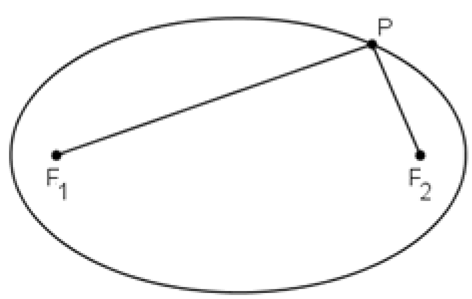


Figura 7. La elipse como lugar geométrico

La ecuación canónica de la elipse con centro en el origen o fuera del origen, se determina de una manera similar a la ecuación canónica de una parábola. Las ecuaciones son:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

2.5.4 La hipérbola

Para la curva formada por dos ramas que se muestra en la figura, consideramos que F_1 y F_2 son los puntos de tangencia de las esferas inscritas, superior e inferior, con el plano de corte, y que P es un punto sobre cualquiera de las ramas de la curva. C_1 y C_2 son las circunferencias donde las esferas son tangentes al cono. Por ser dos tangentes desde el punto P a una misma esfera, tenemos que $PF_2 = PP_2$, de la misma manera $PF_1 = PP_1$. Podemos concluir entonces que $PF_2 - PF_1 = PP_2 - PP_1 = P_1P_2$ que es una distancia constante. Por lo tanto, la curva es una hipérbola concebida como lugar geométrico en el plano.

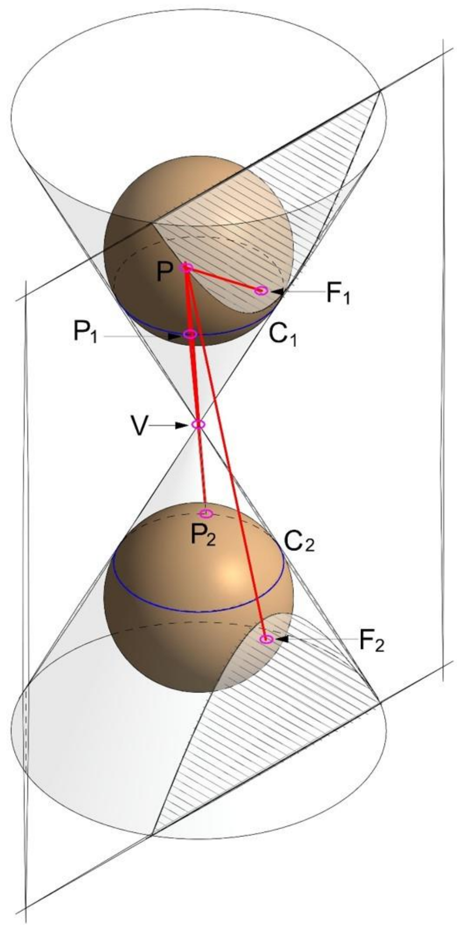


Figura 10. . Esferas de Dandelín para la hipérbola

La hipérbola es el lugar geométrico de todos los puntos cuyo valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos es siempre un valor constante. Es decir, $|PF_1 - PF_2| = 2a$, donde P es un punto móvil en el plano, F_1 y F_2 los puntos fijos llamados focos, $2a$ es un valor constante.

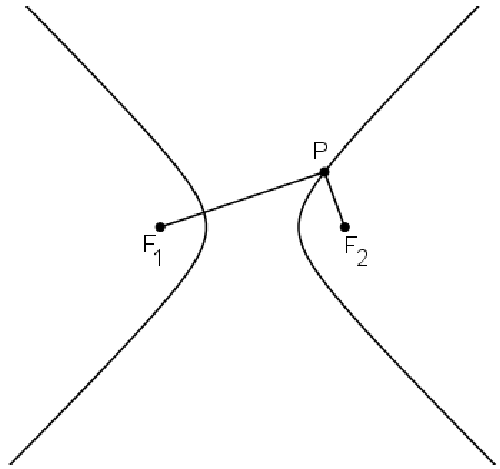


Figura 11. La hipérbola como lugar geométrico

La ecuación canónica de la hipérbola con centro en el origen o fuera del origen, se determina de una manera similar a la ecuación canónica de una parábola. En este caso se obtienen las ecuaciones

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

2.5.5 Definición de las cónicas en términos de directriz y excentricidad

Cada una de las cónicas puede definirse de una manera particular como lugar geométrico, sin embargo, existe una condición geométrica que las unifica y puede ser utilizada también para definirlas. Dada una recta fija L y un punto fijo F no contenido en esa recta, se llama cónica al lugar geométrico de un punto P que se mueve en el plano de L y F, de tal manera que la razón de su distancia de F a su distancia de L es siempre igual a una constante positiva e llamada excentricidad (Coxeter 1971).

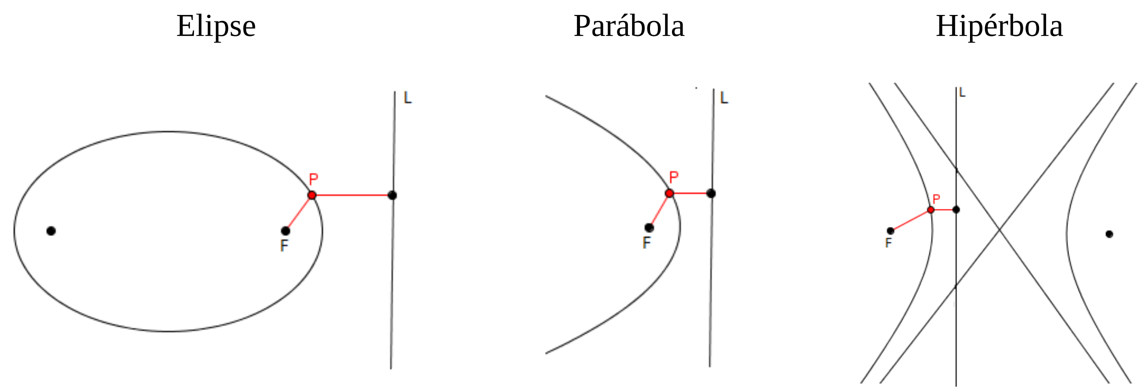


Figura 12. Definición general de cónicas

La cónica se llama *elipse* cuando $e < 1$, *parábola* cuando $e = 1$, *hipérbola* cuando $e > 1$. El punto F se conoce como foco y la recta L como directriz de la curva. La constante e, se llama excentricidad.

Para construir una ecuación de estas curvas tomemos un sistema de ejes cartesianos, Tomemos como eje y la directriz, y al foco en el punto $F(p, 0)$, donde $p \neq 0$. Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera del lugar geométrico como se muestra en la figura, entonces, la ecuación de las cónicas respecto este sistema de referencia se obtiene como sigue:

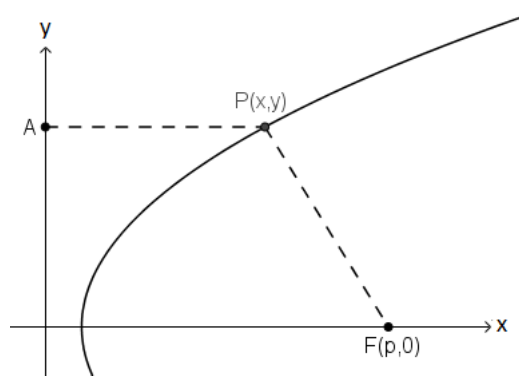


Figura 13. Definición general de cónicas en coordenadas rectangulares

Tenemos que $\overline{PA} = |x|$ y $\overline{PF} = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$, por lo tanto, para calcular la ecuación que corresponde a la condición geométrica establecida:

$$\frac{|\overline{PF}|}{|\overline{PA}|} = e$$

$$\frac{\sqrt{(x-p)^2 + y^2}}{|x|} = e$$

Después de algunas operaciones algebraicas e igualar a cero la ecuación:

$$\boldsymbol{(1-e^2)x^2 - 2xp + y^2 + p^2 = 0}$$

De esta ecuación se pueden estudiar dos posibles casos:

a) Cuando $e = 1$, el primer término es cero, y si se despeja la variable y, se obtiene la ecuación $y^2 = 2p\left(x - \frac{p}{2}\right)$, que representa una parábola con vértice en el punto $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ y cuyo eje de simetría es el eje x.

b) Cuando $e \neq 1$, después de algunas operaciones algebraicas para igualar a 1 la ecuación, se obtiene:

$$\frac{\left(x^2 - \frac{p}{1-e^2}\right)^2}{\frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2e^2}{1-e^2}} = 1$$

De aquí se obtienen dos subcasos. Si $e < 1$ se cumple que $1 - e^2 > 0$ y ambos denominadores en el primer miembro de la ecuación son positivos, por lo tanto el lugar geométrico es una Elipse. Para $e > 1$ se cumple que $1 - e^2 < 0$ y el denominador de y^2 es negativo, por lo que la ecuación es una Hipérbola.

Si se desea ver el procedimiento completo de cómo se obtienen las ecuaciones anteriores, se puede consultar el libro de Geometría analítica de J. Lehmann [1962, p. 220]

Por lo tanto, es posible determinar una ecuación que representa a la parábola, la elipse y la hipérbola, con respecto a una misma condición geométrica. El valor de la excentricidad determina el tipo de curva. Esta exposición sobre las cónicas, es poco común en los cursos de Geometría analítica, pero puede ser utilizada para generar una buena discusión en clase sobre sus propiedades.

Como ya se mencionó anteriormente, las coordenadas rectangulares no es el único sistema de referencia al que podemos acudir, en ocasiones es pertinente estudiar algunas curvas en otro sistema, ya que puede facilitar, por ejemplo, el trazado de la curva, el análisis de sus propiedades y las operaciones matemáticas.

A continuación obtendremos la ecuación general de las cónicas en coordenadas polares. Consideremos como directriz una recta fija L, perpendicular al eje polar que pasa por el origen y sea el foco F un punto fijo sobre el eje polar. La ecuación en coordenadas polares que describe el lugar geométrico de un punto $P(r, \theta)$, se obtiene de la siguiente manera:

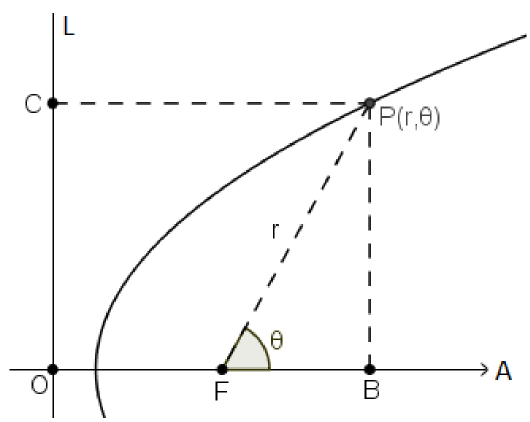


Figura 14. Definición general de cónicas en coordenadas polares

Desde P se trazan las perpendiculares al eje polar A y la recta L, para obtener los segmentos $\overline{PC}$ y $\overline{PB}$. El segmento $\overline{PF} = r$. De acuerdo con la definición general de cónica:

$$\frac{|\overline{PF}|}{|\overline{PC}|} = e$$

De la figura se observa que $|\overline{PC}| = |\overline{DF}| + |\overline{FB}|$, si se considera que $|\overline{OF}| = p$, entonces $|\overline{PC}| = p + rcos\,\theta$, y la ecuación será:

$$\frac{r}{p + rcos\,\theta} = e$$

Despejando r se obtiene:

$$r = ep + er\,cos\,\theta$$

$$r(1 - e\,cos\,\theta) = ep$$

$$\boldsymbol{r = \frac{ep}{1 - e\,cos\,\theta}}$$

El valor de e en la ecuación indica de que cónica se trata. Por ejemplo, la ecuación $r = \frac{4}{2 - cos\,\theta}$ se puede escribir como $r = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}cos\,\theta}$, entonces $e = 1/2$ y la curva es una elipse.

El análisis de esta ecuación, no solo gira entorno al valor de la excentricidad, podemos variar la posición de la directriz, por ejemplo colocar el eje polar de manera vertical, para ver qué sucede con las ecuaciones, sin embargo, esta es una discusión que no haremos en este trabajo para no extenderlo demasiado, pero se recomienda al lector llevarla a cabo como ejercicio.

La ecuación general que representa a las cónicas en coordenadas polares, es una manera sencilla de analizar a las curvas, sin embargo, es posible que para alguien, haya una opción que le parezca más adecuada o conveniente. Las representaciones algebraicas que se obtienen de cada curva, dependen de los sistemas de referencia que adoptemos, uno tiene la libertad de elegir el sistema de referencia que le facilite el estudio de las curvas; existen elecciones más convenientes que otras.

2.6 Propiedades focales de las cónicas

2.6.1 Parábola

Si se traza una recta tangente en un punto cualquiera P de una parábola, una recta que una el punto P con el foco, y una paralela al eje que pase por el punto P, el ángulo que forma la recta tangente con la recta al foco, es igual al ángulo que forma la recta tangente con la recta paralela al eje de la parábola:

Teorema: La normal a la parábola en un punto $P_1(x_1, y_1)$ cualquiera de la parábola, forma ángulos iguales con el segmento r que va de P_1 al foco, y la recta L que pasa por P_1 y es paralela al eje de la parábola (Lehmann 1962).

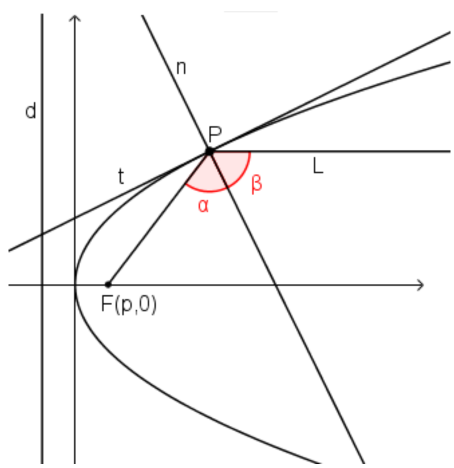


Figura 15. Propiedad focal de la parábola

- La ecuación de una recta tangente t a la parábola en un punto $P_1(x_1, y_1)$ es $y = \frac{2p}{y_1}(x + x_1)$, de donde se puede determinar que su pendiente es $\frac{2p}{y_1}$.
- La pendiente de la normal n es entonces $-\frac{y_1}{2p}$.
- La pendiente de r es $\frac{y_1}{x_1 - p}$.
- La pendiente de L es cero.

- Para calcular α se utiliza la fórmula para el ángulo entre dos rectas:

$$tan\ \alpha = \frac{-\frac{y_1}{2p} - \frac{y_1}{x_1 - p}}{1 - \frac{{y_1}^2}{2p(x_1 - p)}}$$

- Haciendo la simplificación y considerando que ${y_1}^2 = 4px_1$ ya que el punto $P_1(x_1\ , y_1)$ satisface la ecuación $y^2 = 4px$, se obtiene:

$$tan\ \alpha = \frac{y_1}{2p}$$

- Para calcular β también se utiliza para el ángulo entre dos rectas:

$$tan\ \beta = \frac{-\left(-\frac{y_1}{2p}\right)}{1} = \frac{y_1}{2p}$$

- Por lo tanto, $\alpha = \beta$.

2.6.2 Elipse

Si trazamos una recta normal a una elipse en un punto P, y trazamos además las rectas que unen dicho punto con los focos, entonces, los ángulos que forman esas dos rectas con la recta normal son iguales:

Teorema: La normal a una elipse en cualquiera de sus puntos es bisectriz del ángulo formado por los segmentos trazados desde el punto hacia los focos (Lehmann 1962).

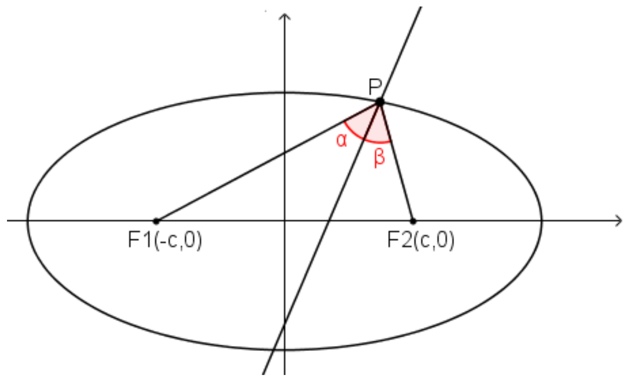


Figura 16. Propiedad focal de la elipse

- El teorema no pierde generalidad tomando la ecuación de la elipse en su forma $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.
- Sea n la normal a la elipse en un punto cualquiera $P_1(x_1\,, y_1)$ de la curva.
- La tangente a la elipse tiene ecuación $b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$, por lo tanto, su pendiente es $-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$. La pendiente de la normal es entonces $\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$.
- Las pendientes de los segmentos del punto P_1 a los focos son $\frac{y_1}{x_1-c}$ y $\frac{y_1}{x_1+c}$.
- Para calcular α utilizamos la fórmula para determinar el ángulo entre dos rectas:

$$tan\ \alpha = \frac{\frac{y_1}{x_1 - c} - \frac{a^2y_1}{b^2x_1}}{1 + \left(\frac{y_1}{x_1 - c}\right)\left(\frac{a^2y_1}{b^2x_1}\right)}$$

- Haciendo la simplificación, considerando que $b^2{x_1}^2 + a^2{y_1}^2 = a^2b^2$ debido a que el punto $P_1(x_1\,, y_1)$ está sobre la elipse y satisface la ecuación $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ y usando la relación $c^2 = a^2 - b^2$, tenemos:

$$tan\ \alpha = \frac{-c^2x_1y_1 + a^2cy_1}{b^2(a^2 - cx_1)} = \frac{cy_1}{b^2}$$

- De manera análoga, tenemos para β:

$$\tan\beta = \frac{\frac{a^2y_1}{b^2x_1} - \frac{y_1}{x_1+c}}{1+\left(\frac{a^2y_1}{b^2x_1}\right)\left(\frac{y_1}{x_1+c}\right)} = \frac{cy_1}{b^2}$$

- Por lo tanto, la normal n es la bisectriz del ángulo formado por los dos segmentos trazados desde el punto P hacia los focos, y $\alpha = \beta$.

2.6.3 Hipérbola

Si trazamos una recta tangente a una hipérbola en un punto P, y trazamos además las rectas que unen dicho punto con los focos, entonces, los ángulos que forman esas dos rectas con la recta tangente son iguales:

Teorema: La tangente a una hipérbola en cualquiera de sus puntos es bisectriz del ángulo formado por los segmentos trazados desde el punto hacia los focos (Lehmann 1962).

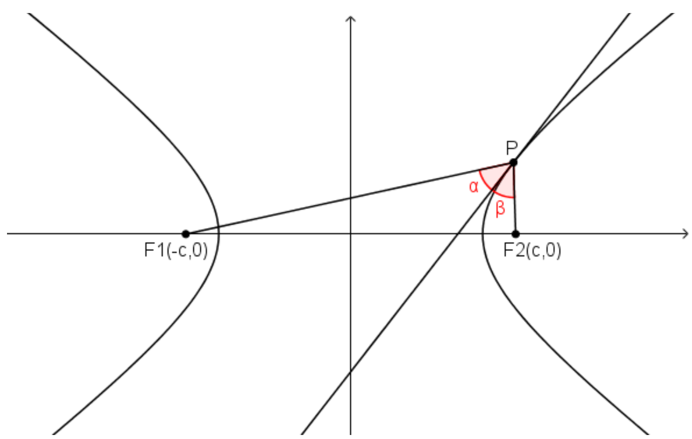


Figura 17. Propiedad focal de la hipérbola

Este teorema muy parecido al de la elipse, su demostración es similar por lo que se omite para no ser repetitivo.

2.7 Aplicaciones de las cónicas

Si miramos a nuestro alrededor y ponemos atención en nuestro entorno, es muy probable que encontremos una cónica, ya sea como parte del mundo en que vivimos o en alguna de sus muchas aplicaciones en distintos contextos. Las propiedades focales de estas curvas, demostradas anteriormente, juegan un papel importante en dichas aplicaciones.

2.7.1 Parábola

De acuerdo con la propiedad focal de la parábola, si se considera que la recta paralela al eje de la parábola, es por ejemplo, un haz de luz o una onda de sonido, ésta se reflejará al tocar la parábola y pasará por el foco. Caso contrario, si el haz o la onda saliera del foco, al tocar la parábola se reflejaría y saldría de manera paralela al eje. A este hecho se le conoce también como la propiedad focal de reflexión de la parábola, y hace posible algunas de las distintas aplicaciones de parábolas y paraboloides. A continuación, se mostrarán algunos ejemplos.

En la recepción de señales de TV, se utilizan antenas parabólicas, las cuales son un "plato" en forma de paraboloide, que se orientan de tal manera que recibe la señal paralela al eje del paraboloide o perpendicular al plato, que después refleja hacia la posición del foco, donde se encuentra el receptor (Bava 2013). Después, la señal ya concentrada, se envía a un dispositivo que pueda leerla.

Figura 18. Antena de recepción para señal de TV

Un reflector tiene la función de hacer difusa la luz de una lámpara, además de distribuir la luz uniformemente en todas las direcciones a enfocar la luz en una dirección definida. También sirven para proteger las lámparas, evitar los deslumbramientos o darle color a la luz emitida. Un reflector parabólico es la forma más utilizada en luminotecnia. Cuando la fuente de luz está situada en el foco se produce un haz reflejado paralelo, es decir, utiliza la propiedad de reflexión de la parábola. En un automóvil, el faro es un paraboloide, en cuyo foco, se coloca la lámpara. Las ondas de luz emitidas por la lámpara son reflejadas perpendicularmente por las paredes del faro, lo que permite que la luz se concentre en el camino y que se disperse lo menos posible.

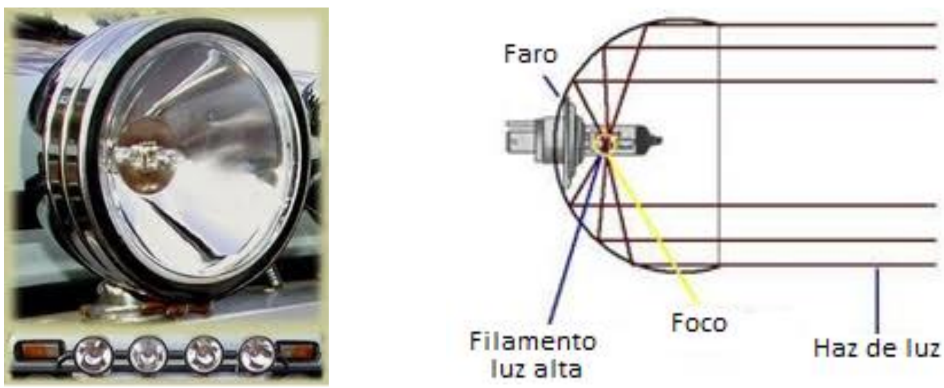


Figura 20. Faro de un automóvil. Los rayos de luz emitidos por el foco son reflejados por el faro de manera paralela al camino para tener mejor visión.

Un puente debe ser capaz de soportar su propio peso y el peso de los automóviles o personas que transitan sobre él. Utilizar arcos parabólicos en su construcción, es altamente rentable, debido a que distribuye de manera eficiente las cargas, dándole así mayor soporte y estabilidad, además de que permite usar la menor cantidad de material posible y aporta belleza estética al diseño.

La fuerza de compresión generada por el arco parabólico empuja hacia abajo la cubierta del puente, lo que distribuye el peso en cargas verticales que son transferidas a los soportes mediante cables, para que éstos se encarguen de disiparlas en la tierra donde están anclados (Cortés 2008). También se originan empujes horizontales que apuntan hacia los soportes del puente, para dar una mayor estabilidad.

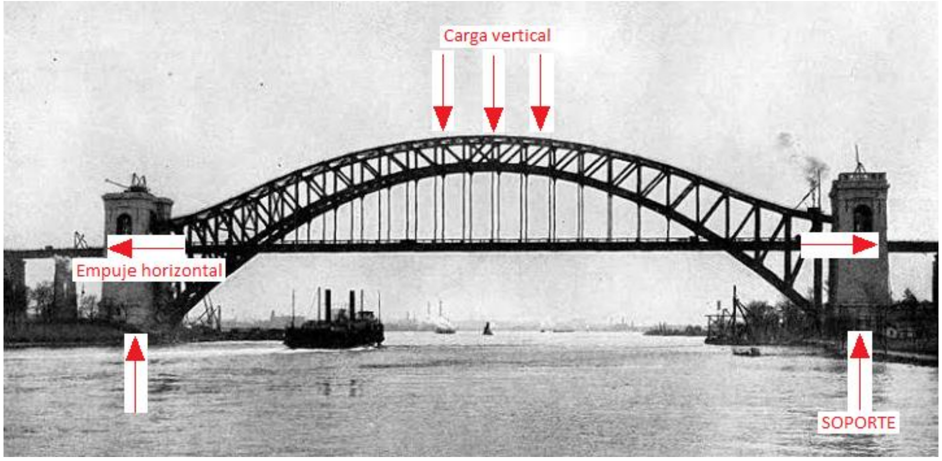


Figura 21. Distribución de cargas en un puente parabólico

Los arcos parabólicos pueden ser utilizados para construir puentes de todos tamaños, con estructuras de acero o concreto, con el arco por debajo o sobre la plataforma y con diseños hermosos y funcionales.

El puente Juscelino – Kubitschek, atraviesa el lago Paranoá en Brasilia, Brasil.

Puente Shenyang Ribbon, China.

Figura 22. Puentes parabólicos

2.7.2 Elipse

La propiedad focal de la elipse nos muestra por ejemplo, que si un haz de luz o una onda de sonido partieran de un foco, al reflejarse en cualquier punto de la elipse, pasará forzosamente por el otro foco. Esta propiedad reflectora de la elipse permite darle algunas aplicaciones en distintos contextos, como se ejemplifica a continuación.

En medicina, se utiliza un aparato llamado litotriptor, cuya función es primero localizar y visualizar cálculos renales sincronizando automáticamente ultrasonido y rayos X, para después pulverizarlos con ondas de choque y permitir su eliminación a través de la orina. Su funcionamiento consiste en colocar medio elipsoide de agua cerca del cuerpo del paciente, en el foco de esta parte se ubica un generador de ondas; el foco de la otra parte del elipsoide se debe localizar en los cálculos. Al accionar el generador, las ondas de choque se reflejarán en el medio elipsoide y pasarán por el cálculo localizado en el otro foco[2].

Figura 23. Litotriptor

[2]https://www.dalcame.com/wdescarga/lito.pdf

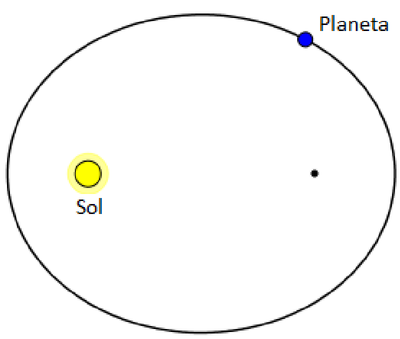
Las galerías de murmullos son construcciones que presentan una característica acústica muy peculiar. Son edificios donde la cúpula tiene forma elíptica, por lo que si una persona está parada en uno de los focos y emite un simple murmullo, nadie dentro de la galería podrá escucharlo, a menos que te encuentres parado en el otro foco, donde se escuchará claramente[3]. Este curioso fenómeno es resultado de la propiedad focal de la elipse y ha sido motivo para que muchos turistas visiten lugares como el Taj Majal en la India, la cámara de los suspiros de la Catedral de San Pablo en Londres, la galería de los suspiros del convento del Desierto de los Leones en la ciudad de México, el Tabernáculo mormón de Salt Lake City en USA o el salón de las estatuas del Capitolio en Washington D.C.

Figura 24. Galería de murmullos del Salón Nacional de Estatuas del Capitolio, USA.

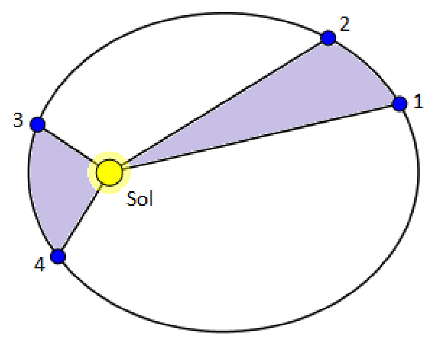
[3]http://www.cimat.mx/ciencia_para_jovenes/bachillerato/libros/algebra_angel_cap10.pdf

El astrónomo y matemático alemán Johannes Kepler, determinó de manera empírica, utilizando muchos datos precisos de los movimientos planetarios, que la órbita que sigue un planeta alrededor del sol, está descrita por una elipse. Gracias a esta teoría y las propiedades de la elipse, pudo establecer tres leyes que son muy importantes para comprender como se mueven los planetas. Básicamente, las Leyes de Kepler dicen lo siguiente:

1. Las órbitas que siguen los planetas alrededor del sol son elípticas, donde el sol se encuentra en uno de los focos.
2. Una línea del sol a un planeta dado barre áreas iguales en tiempos iguales.
3. Los periodos de los planetas son proporcionales a las longitudes del eje mayor de sus órbitas elevadas a la potencia 3/2[4].



Primera ley de Kepler. La órbita de un planeta es elíptica y el sol se ubica en uno de los focos.



Segunda Ley de Kepler. El área barrida por la recta entre 1 y 2, es la misma que el área barrida entre 3 y 4, si el tiempo transcurrido en ambos casos es el mismo.

Figura 25. Leyes de Kepler

[4]https://pwg.gsfc.nasa.gov/stargaze/Mkepl3laws.htm

Kepler no pudo demostrar analíticamente que las órbitas de los planetas alrededor del sol son elípticas, sin embargo, años más tarde, Isaac Newton lo consiguió, y en el proceso inventó el Cálculo. La demostración se puede ver en el libro de Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas de F. Simmons (1977). De igual manera, con el Cálculo, se pueden demostrar las Leyes de Kepler, y esto puede verse en cualquier libro de Física elemental para ingeniería. Ahora se sabe también, que algunos cometas tienen órbitas elípticas alrededor del sol como el cometa Haley, y que otros siguen órbitas parabólicas.

2.7.3 Hipérbola

Una aplicación de la propiedad focal de la hipérbola se encuentra en el telescopio de Cassegrain. Un espejo principal cóncavo con forma de paraboloide, concentra toda la luz que recibe del exterior en su foco, donde se coloca un espejo secundario convexo de forma hiperbólica, que a su vez, refleja la luz hacia un punto focal en el que se encuentra el observador. Este mismo diseño es utilizado también en telecomunicaciones satelitales y en radiotelescopios, ya que permite enfocar las radiofrecuencias de una manera eficiente[5].

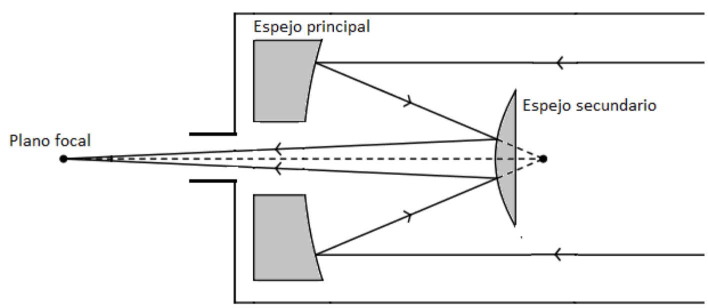


Figura 26. Diseño de un telescopio Cassegrain

[5]http://es.wikipedia.org/wiki/Telescopio_de_Cassegrain

Radio antena Cassegrain en el complejo de antenas JPL Goldstone

Telescopio Cassegrain

Figura 27. Ejemplos de Telescopio Cassegrain

El sistema de navegación Loran es utilizado para ubicar la posición de un receptor mediante la diferencia de tiempos de recepción de señal. Un grupo de estaciones emisoras terrestres se conforma con una estación maestra y dos o tres secundarias. La maestra proporciona una señal de sincronización temporal a las otras, tomada en el inicio de la transmisión. La señal que emiten las estaciones es un tren de pulsos sobre una portadora senoidal a 100KHz. Un receptor de navegación colocado en un barco o un avión, calcula las diferencias de tiempo de llegada entre la señal de la estación maestra y la señal de una secundaria. Todos los puntos con idéntica diferencia de tiempos con respecto a las dos estaciones, determinan el lugar geométrico de una hipérbola. La posición del receptor se obtiene con la intersección de por lo menos dos curvas[6]. Aunque el sistema Loran fue muy utilizado desde la segunda guerra mundial, actualmente ha sido desplazado por el GPS.

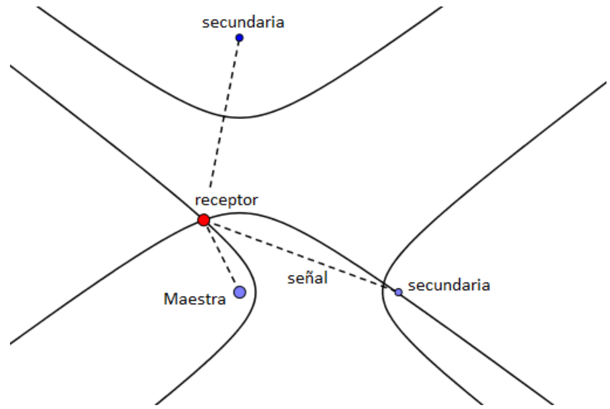


Figura 28. Sistema de navegación LORAN (Long Range Navigation)

Las estructuras hiperboloides aprovechan las propiedades estructurales de la geometría hiperbólica para ofrecer ventajas en la construcción, tales como: eficiencia estructural bajo condiciones de equilibrio estable, alto valor estético o reducción de costos y cantidades de material (Rodríguez 2015). Por su forma, estas estructuras distribuyen de manera uniforme por toda su superficie las fuerzas externas transmitidas, lo que permite mayor soporte utilizando menos material, por lo que se usan como módulos de soporte para apoyar objetos muy pesados, como la torre de control del aeropuerto de Barcelona. También las podemos encontrar en algunas construcciones donde se aprovecha su gran belleza estética, como en la torre de Kōbe en Japón o en la Basílica de Brasilia.

[6] https://greatbustardsflight.blogspot.com/2016/06/antes-del-gps-navegacion-hiperbolica.html

Vista nocturna de la Torre de Kōbe, Japón

Torre de control del aeropuerto de Barcelona

Figura 29. Aplicaciones de la hipérbola en la construcción

2.8 Otros lugares geométricos

2.8.1 Óvalos de Cassini

El astrónomo italiano Giovanni Cassini (1625 –1712) creía que era posible representar las órbitas que siguen los planetas de una mejor manera que con las órbitas elípticas de Kepler, así que concibió esta familia de curvas con base en sus observaciones al comportamiento de la Tierra moviéndose alrededor del sol (Fernández 2007). Su idea no prosperó, pero encontró un conjunto de curvas descritas por una condición geométrica muy interesante.

Un óvalo de Cassini, es el lugar geométrico de un punto P que se mueve en el plano de tal manera que el producto de sus distancias a dos puntos fijos (focos), es siempre igual a un valor constante. Para determinar de una manera sencilla la ecuación de las curvas, se utilizan coordenadas polares, donde el centro del óvalo coincide con el polo, y los focos están ubicados en el eje polar, con coordenadas $F_1(a\,,0)$ y $F_2(a\,,\pi)$.

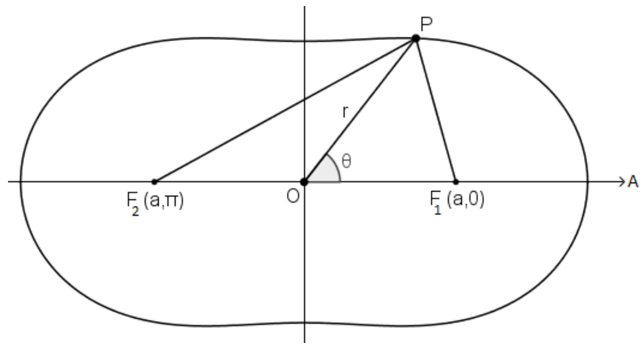


Figura 30. Condición geométrica de un Óvalo de Cassini

Considerando a la constante como b^2, tenemos:

$$|\overline{F_1P}| \cdot |\overline{F_2P}| = b^2$$

Se calculan las longitudes de los segmentos:

$$\sqrt{r^2 + a^2 - 2arcos(\theta - 0)} \cdot \sqrt{r^2 + a^2 - 2arcos(\theta - \pi)} = b^2$$

Haciendo las operaciones necesarias para despejar r, se obtiene:

$$r^4 - 2a^2r^2cos\ 2\theta = b^4 - a^4$$

$$\boldsymbol{r^2 = a^2cos\ 2\theta \pm \sqrt{b^4 - a^4sen^2 2\theta}}$$

Los parámetros a y b juegan un papel importante en estas curvas, ya que determinan su forma. Si la razón $\frac{b}{a} > 1$, el óvalo será solamente una curva continua cerrada (curvas 1 y 2). Si $\frac{b}{a} < 1$, se tendrán dos óvalos separados (curva 3).

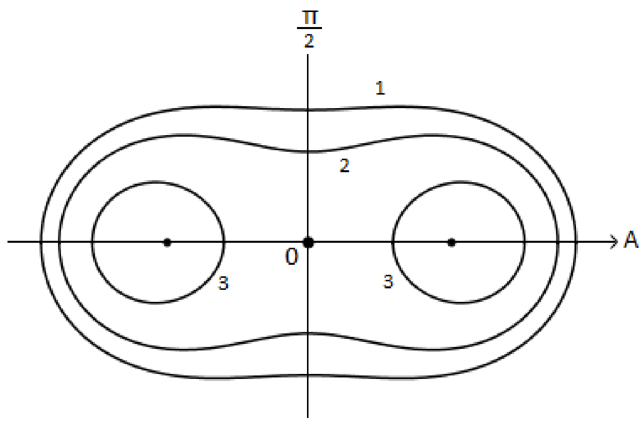


Figura 31. Ejemplos de óvalos de Cassini

Un caso especial de los óvalos de Cassini se presenta cuando $a = b$. Al sustituir esta condición en la ecuación $r^4 - 2a^2r^2cos\,2\theta = b^4 - a^4$, que es una de las ecuaciones equivalentes de estas curvas, se puede obtener fácilmente la expresión $\boldsymbol{r^2 = 2a^2cos\,2\theta}$, que corresponde a una curva formada por dos óvalos que se intersectan en un solo punto. Esta curva se conoce como **Lemniscata**, del griego *lemnisco* que significa lazo, y fue descrita por Jakob Bernoulli (1654 – 1705) (Fernández 2007). En matemáticas, se utiliza como el símbolo para representar al infinito (∞).

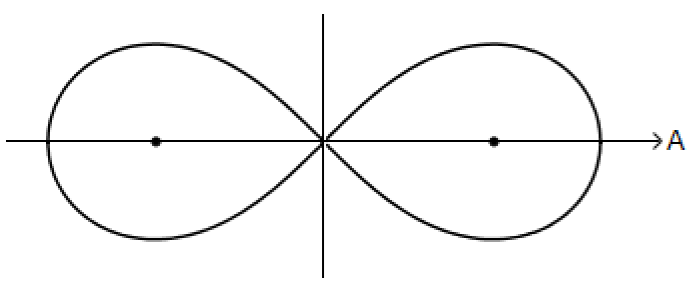


Figura 32. Lemniscata de Bernoulli

2.8.2 Óvalos de Maxwell

Un óvalo de Maxwell, es el lugar geométrico de los puntos que cumplen una misma combinación lineal con la distancia hacia dos puntos fijos. Es decir, si F y F' son dos puntos fijos, y denotamos como $\overline{FP}$ y $\overline{F'P}$ a las distancias de estos puntos a un tercer punto variable P, entonces P describe un óvalo cartesiano que cumple con la condición geométrica:

$$A \cdot \overline{FP} + B \cdot \overline{F'P} = a \text{ donde } A, B, a \text{ son constantes.}$$

También se puede escribir a la ecuación anterior como:

$$\overline{FP} + m \cdot \overline{F'P} = a \text{ donde } m, a \text{ son constantes.}$$

Para determinar la ecuación cartesiana que representa esta familia de curvas, sin perder generalidad, ubicaremos un punto fijo en el origen del plano y el otro sobre el eje x a una distancia c del origen.

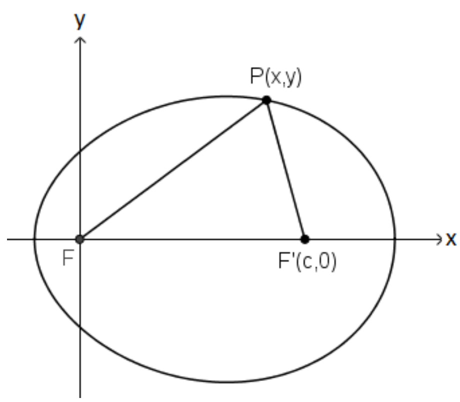


Figura 33. Condición geométrica de un óvalo de Maxwell

Determinando la magnitud de los segmentos $\overline{FP}$ y $\overline{F'P}$, la ecuación que representa los óvalos de Maxwell es:

$$\boldsymbol{\sqrt{x^2 + y^2} + m \cdot \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a}$$

Intentar reducir la ecuación es un proceso laborioso e innecesario, debido a que las expresiones equivalentes que se obtienen tienen mayor extensión y los parámetros a, c, m quedan acomodados de tal manera, que se complica su estudio.

Un caso particular de esta ecuación es que incluye a las cónicas. Cuando $m = 0$, la ecuación que se obtiene es $x^2 + y^2 = a^2$ que representa una circunferencia con centro en el origen del plano y cuyo radio es a. Si $m = 1$, entonces la ecuación obtenida será $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a$, que corresponde a una elipse, ya que representa que la suma de las distancias desde un punto a otros dos puntos fijos es un valor constante. Cuando $m = -1$, la curva obtenida, cumple con la condición geométrica de una hipérbola. Entonces, esta ecuación también puede ser utilizada como una definición general de las cónicas, aunque no incluya a la parábola, que no puede ser representada de esta manera.

Los parámetros a, c, m definen las distintas formas, posiciones y tamaños de los óvalos de Maxwell. Al cambiarlos se pueden obtener varios tipos con características similares, sin embargo, para hacer una exploración completa de estos óvalos, se recomienda utilizar algún software de Geometría dinámica.

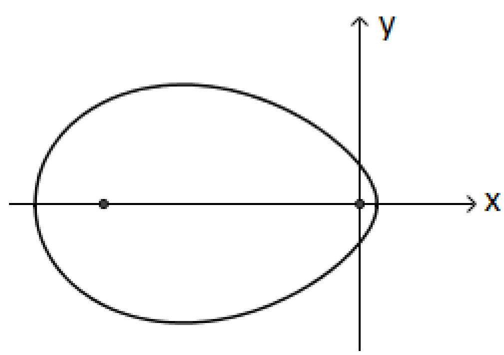


Figura 34. Ejemplo de Óvalo de Maxwell donde $c = -3$, $a = 5$ y $m = 1.5$

2.8.3 La cicloide

Sin duda, esta es una de las curvas más interesantes que existen en la literatura e historia de las matemáticas. Para muchos matemáticos fue todo un reto estudiarla y determinar sus propiedades, algunos fracasaron y otros tuvieron éxito después muchos años. Marín Mersenne (1588 – 1688) fue quien dio la definición a esta curva y además encontró que la longitud de su base es igual a la circunferencia del círculo que rueda. Galileo Galilei (1564 – 1642) le dio su nombre en 1599 y Gilles Personne de Roberval (1602 – 1675) calculó que el área bajo la curva es de $3\pi r^2$, donde r es el radio de la circunferencia. Fermat encontró un método para trazar una tangente a la curva, Blaise Pascal (1623 – 1662) resolvió los problemas del volumen y el área de la superficie y el sólido de revolución que se genera al hacer girar la cicloide con respecto al eje x y Christopher Wren (1632 – 1723) encontró que la longitud del arco es $8r$ (Fernández 2007).

La cicloide es el lugar geométrico descrito por un punto fijo P de una circunferencia que rueda sin resbalar sobre una recta fija.

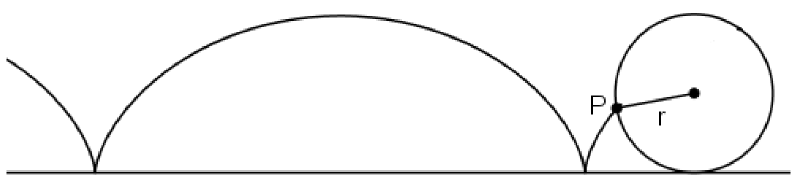


Figura 35. Condición geométrica de una cicloide

Si en una cicloide invertida se sueltan dos masas iguales a diferentes alturas y no existe fricción, podremos ver que ambas masas llegaran al final de la curva al mismo tiempo. Es decir, el tiempo que le toma a un objeto para que llegue al final de la curva es independiente del lugar de donde empieza el movimiento. Por lo tanto, se dice que la cicloide es Tautócrona (tauto – mismo y chrono – tiempo), propiedad que fue descubierta por Huygens (1629 – 1695) en 1659, y que utilizó para construir un reloj de péndulo de gran exactitud que fue utilizado durante mucho tiempo en observaciones astronómicas. Estudiando los relojes de péndulo, observó que cuando un cronómetro varía la amplitud de la oscilación, deja de contar correctamente, pero si la lenteja del péndulo en lugar de moverse en una circunferencia, se mueve a lo largo de una cicloide, entonces aunque la amplitud de oscilación varíe, el periodo se mantiene constante (Fernández 2007).

En el siglo XVII, Johann Bernoulli planteó y resolvió el problema de encontrar la trayectoria que permitiera a un cuerpo moverse de un punto a otro en el menor tiempo posible. La respuesta es precisamente la cicloide invertida, por lo que también es llamada braquistócrona (del griego brachistos, el menor, y chronos, tiempo). Matemáticos de la talla de Newton y Leibniz también resolvieron este problema (Fernández 2007). La importancia de encontrar la solución al problema de la braquistócrona radica en el hecho de ser el origen de una nueva área de las matemáticas llamada Cálculo de Variaciones.

Ecuaciones paramétricas de la cicloide

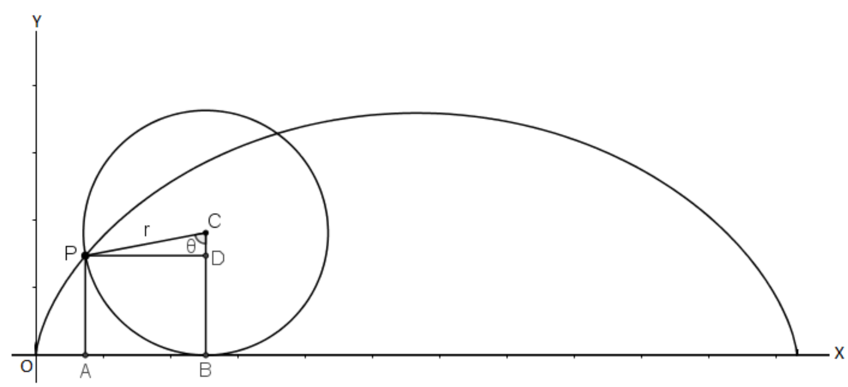


Figura 36. Condiciones para obtener las ecuaciones paramétricas de la cicloide

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico, r el radio y C el centro de la circunferencia que rueda. Se toma como parámetro el ángulo θ que gira la circunferencia al rodar, partiendo de su posición inicial en el origen. Sean A y B respectivamente los pies de las perpendiculares bajadas de P y C al eje x.

Se traza PD perpendicular a BC. Como la circunferencia rueda sin resbalar, desde O hasta B tenemos:

$$\overline{OB} = arco\,\overline{PB} = r\theta$$

Si θ se mide en radianes, se tiene entonces que:

$$x = \overline{OA} = \overline{OB} - \overline{AB} = r\theta - \overline{PD} = r\theta - rsen\theta$$

$$y = \overline{AP} = \overline{BD} = \overline{BC} - \overline{DC} = r - rcos\theta$$

Las ecuaciones paramétricas de la cicloide son:

$$\boldsymbol{x = r(\theta - sen\theta)}$$

$$\boldsymbol{y = r - rcos\theta}$$

2.8.4 La Cardioide

La cardioide es uno de los lugares geométricos considerados como mecánicos, ya que está descrito por la trayectoria que traza un punto fijo que se encuentra sobre el contorno de un círculo móvil que se mueve alrededor de otro círculo fijo que tiene el mismo radio. Su nombre proviene del griego *cardi*, corazón, y *eidos*, forma, es decir, significa “forma de corazón”.

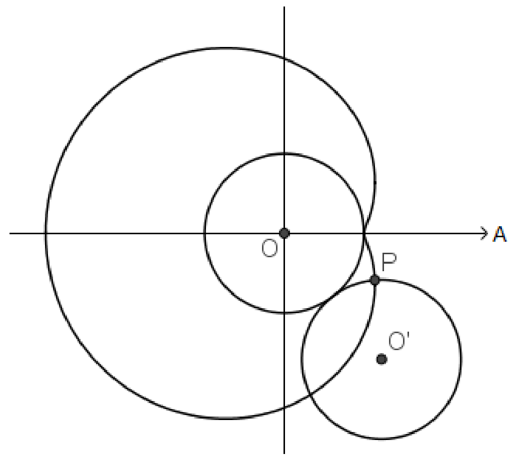


Figura 37. Condición geométrica de la cardioide

De acuerdo con la definición del lugar geométrico de esta curva, existen dos condiciones necesarias para trazarla: a) que el punto fijo se encuentre sobre el contorno del círculo móvil, b) que los radios de los círculos sean iguales, por esto, la cardioide es considerada como un caso especial del Caracol de Pascal. Sin embargo, también es un caso particular de los óvalos de Maxwell, que se obtiene cuando $m < -1$ y $a < 0$. Al igual que todas las curvas, es posible obtener su ecuación en distintos sistemas de referencia, y la elección de cual utilizar se hace a conveniencia, considerando la opción que permita una mejor manipulación de los símbolos o un mejor análisis del comportamiento. A continuación se muestran tres formas de representar a la cardioide, para ilustrar lo anterior.

Ecuación cartesiana: $(x^2 + y^2 \pm 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$

Ecuación polar: $r = 2a(1 \pm cos\,\theta)$

Ecuaciones paramétricas: $x = 2a\,cos\,t - a\,cos\,2t$; $y = 2a\,sen\,t - a\,sen\,2t$

Existen distintas curvas definidas como lugares geométricos que han sido motivo de estudio para matemáticos y físicos desde hace muchos años. En este trabajo de investigación, solo se mencionan algunas de las más conocidas o que han sido importantes en la historia de las matemáticas, como el caso de la Cicloide. Estas curvas, pueden ser consideradas en un curso de Geometría analítica además de las cónicas, con la finalidad de ampliar la visión de los estudiantes sobre el propósito de esta área de las matemáticas.

Capítulo 3

Comprensión instrumental y comprensión relacional

3.1 Concepciones de Skemp de la comprensión en matemáticas.

Para la elaboración del cuestionario y llevar a cabo las entrevistas, tomamos como referencia las ideas de Skemp, respecto a su concepción de lo que significa comprensión en matemáticas. En su artículo, Skemp (1976) considera dos tipos de comprensión: comprensión instrumental y comprensión relacional. En palabras simples, la comprensión instrumental se refiere al aprendizaje y aplicación de reglas o fórmulas sin justificación alguna y sin establecer conexiones con otros conocimientos. Por el contrario, la comprensión relacional se refiere al aprendizaje de reglas que son aprendidas mediante justificaciones, no necesariamente rigurosas o formales, y relacionándolas con otros contextos o como parte de un esquema más general.

De acuerdo a Skemp, comprensión instrumental, en una situación matemática, consiste en reconocer una tarea como una de una clase particular para la cual ya se conoce una regla, por ejemplo

- Para hallar el área de un rectángulo se multiplica largo por ancho.
- Para un triángulo, un medio de la base por la altura.
- Para un paralelogramo, multiplicamos la longitud de uno de dos lados paralelos por la distancia (perpendicular) entre ellos, etc.

La comprensión Relacional, consiste principalmente en relacionar una tarea con un esquema apropiado. Si ya se tiene un plan listo para usar, mucho mejor. Pero si no, uno no está perdido. Uno puede hacer un plan para la tarea particular que se tenga o puede uno adaptar un plan existente, o combinar partes de dos tales planes. Alguien que no conoce la regla para calcular el área de un trapecio puede aún calcularla dividiéndolo en un triángulo y un rectángulo o en dos triángulos y un rectángulo.

Según Skemp, para lograr una comprensión relacional de un conocimiento matemático es importante que el individuo construya un mapa conceptual alrededor de ese conocimiento.

Supóngase que una persona se muda a una gran ciudad, la cual nunca ha visitado. Durante los primeros días, sus amigos le enseñan a trasladarse desde el lugar donde va a residir a su oficina de trabajo. Las instrucciones que recibe consisten en varias indicaciones como caminar ciertas calles y llegar a un lugar donde tomará un autobús que le conducirá a otro lugar donde transbordará a otro medio de transporte. El regreso es similar, pero con indicaciones de nuevos lugares de espera de su transporte y conexiones. La persona aprende ese camino de ida y vuelta y lo hace tantas veces que con el paso de los días adquiere confianza para realizar los trayectos. Después le enseñan a trasladarse de su lugar de residencia a una sucursal de la empresa donde trabaja. Todos estos trayectos y otros más aprende a realizarlos de ida y vuelta con la suficiente confianza que desaparecen sus temores de extraviarse en la gran ciudad, pero todos los trayectos aprendidos tienen puntos de partida y puntos destino, fijos, y los realiza de manera automática. En sus fines de semana y días no laborables la persona decide, a iniciativa propia, explorar otros lugares de la ciudad, pero ahora sin tener un destino fijo, lo hace sólo porque le resulta grato conocer la ciudad y aprovecha para averiguar si hay algún lugar interesante, pero sobre todo trata de construir un mapa cognitivo de la ciudad. Estas dos maneras de desplazarse por la ciudad son de características bastante diferentes. El primer tipo de recorrido tiene como objetivo ir de un punto de partida fijo a un lugar fijo como destino, el cual empezó a aprenderlo con instrucciones bien determinadas, mismas que sigue al pie de la letra y llega a realizarlas de manera automática sin necesidad de razonar o pensar sobre las indicaciones que le dieron.

En el segundo tipo de recorrido, la persona tiene como objetivo ampliar y consolidar un mapa mental de la ciudad, lo cual Skemp (1976) considera un estado de conocimiento.

La realización de un trayecto que lleva a cabo la persona, siguiendo instrucciones bien establecidas mediante las cuales se le indica lo que debe hacer en cada punto del trayecto, es lo que caracteriza al primer tipo de recorrido. Pero, si en algún momento la persona se distrae y se equivoca al realizar su recorrido, probablemente se desorientará y difícilmente podrá retomar el camino correcto. Por el contrario, si la persona tiene un mapa mental de la ciudad estará en mejores posibilidades de recuperar su trayecto y también de crear nuevos trayectos con diversos puntos de partida y destinos sin perderse.

Los atributos, instrumental y relacional Skemp los aplica tanto a la comprensión, como a la enseñanza y el aprendizaje. También lo aplica a la matemática misma, así que concibe la matemática instrumental y la matemática relacional.

Un mapa cognitivo amplio y consolidado de la ciudad le permitirá a la persona relacionar y conectar diferentes trayectorias, lo cual le permitirá desplazarse por la ciudad sin temor a perderse y a su vez le permitirá descubrir lugares y diferentes maneras de llegar a ellos. En el terreno de las matemáticas un mapa cognitivo en un área específica de la matemática, en nuestro caso la Geometría Analítica, permitirá a la persona que lo posea, relacionar diferentes conceptos y objetos matemáticos, ver sus conexiones, y tendrá mejores recursos para abordar y resolver problemas que correspondan a esa área.

3.2 Comprensión relacional en Geometría Analítica.

Para lograr una enseñanza-aprendizaje relacional de la Geometría Analítica es necesario conocer los objetos matemáticos involucrados y cómo están relacionados o interconectados unos con otros. Desde el punto de vista de la comprensión relacional, es como hemos concebido el diseño de nuestro cuestionario el cual se describe en el siguiente capítulo que se refiere a la metodología. Las entrevistas también se llevaron a cabo desde este punto de vista, con el propósito de averiguar en qué medida el profesor posee conocimientos matemáticos relacionales en Geometría Analítica. Para el diseño del cuestionario que se aplicó durante la investigación, de la cual se hace este reporte, y que se describe en el siguiente capítulo, y también para llevar a cabo las entrevistas que se hicieron a los participantes, tomamos como marco teórico las ideas de Skemp sobre la comprensión instrumental y la comprensión relacional, en nuestro caso de la Geometría Analítica.

Como se establecieron en el marco de referencia, algunos de los conceptos importantes que entran en juego y que se consideraron para nuestro instrumento de investigación, son:

- Concepto de lugar geométrico
- Sistemas de referencia
- Sistemas de coordenadas
- Ecuaciones de curvas respecto a un sistema de referencia
- El concepto de cónica, como aquellas que se obtienen mediante la intersección de un cono doble y un plano con posición variable.
- Esferas de Dandelin
- Excentricidad y directriz de las cónicas. Definición y significados
- Ecuaciones de curvas respecto a diferentes sistemas de referencia
- Diferentes tipos de ecuaciones para una misma curva
- Ecuación cuadrática general
- Tangentes a las cónicas
- Propiedades focales de las cónicas
- Curvas generadas mediante recursos físicos o mecánicos

Todos estos objetos y elementos de la GA guardan estrechas relaciones entre ellos y es necesario comprender estas relaciones para organizar y darle coherencia a los diferentes contenidos de esta disciplina que le dan forma a los programas de estudio.

Capítulo 4

Metodología

4.1 Acerca del instrumento

El instrumento que utilizamos en la investigación constó de un cuestionario de 12 preguntas y algunas entrevistas no estructuradas que se hicieron a los participantes. Se diseñó para averiguar cómo conciben los profesores de bachillerato los propósitos de la GA. Quisimos averiguar si conciben la GA como el área de la matemática que estudia lugares geométricos en general mediante su representación algebraica o como el área de la matemática que estudia solamente las cónicas. Otro de los propósitos de la investigación fue averiguar si los profesores cuentan con los conocimientos disciplinares que propone el NCM, así como los no explícitos en el programa pero que son importantes para estructurar el curso. Por ejemplo, tratamos de averiguar si los profesores conocen lugares geométricos que no sean los de las cónicas, si deducen la ecuación algebraica a partir de su definición como lugar geométrico para cada una de las curvas circunferencia, parábola, elipse e hipérbola y también si conocen alguna justificación de que estas curvas corresponden a las curvas que se obtienen al cortar un cono doble con un plano variable. Otro de los propósitos fue averiguar si los profesores conocen representaciones de las cónicas que no sean ecuaciones cuadráticas, por ejemplo, representaciones polares o ecuaciones paramétricas. Otro tema de investigación fue sobre sus conocimientos de las propiedades focales de las cónicas y sus aplicaciones.

Finalmente, tratamos de que nuestro instrumento nos proporcionase información acerca de lo que el profesor considera relevante en un curso de GA y qué tan amplia es la discusión que hace durante su curso, sobre la ecuación cuadrática general para determinar la curva que representa.

Para asegurarnos que el instrumento cumpliera con su objetivo y aportara la mayor cantidad de información posible, como se dijo antes, se diseñó en dos partes, un cuestionario y una serie de entrevistas no estructuradas. El cuestionario constó de 12 preguntas de respuesta abierta, donde se pretendió que los profesores contestasen de manera precisa y que justificasen sus respuestas. Las respuestas a cada una de las preguntas del cuestionario se tomaron como base para obtener información sobre los conocimientos de los profesores ya sea para diseñar las preguntas que se les plantearon durante las entrevistas. Las entrevistas se realizaron de manera individual a cada profesor y tuvieron como propósito profundizar sobre los argumentos de los profesores en los que se apoyaron para emitir sus respuestas a las preguntas del cuestionario, así como averiguar a profundidad sobre los conocimientos disciplinares de los profesores y cuáles son sus estrategias de enseñanza de la GA.

Para aplicar el instrumento, se visitó a cada uno de los profesores en su salón de clase. Se les concedió una hora para responder el cuestionario y en todo momento nos hicimos visibles, sin que se sintieran vigilados, para que en caso necesario aclarásemos las dudas que le pudieran surgir. Después de revisar las respuestas del cuestionario, se procedió a realizar la entrevista, donde el tiempo de duración dependió de la disponibilidad y participación del profesor. Es importante señalar, que tanto las preguntas del cuestionario como las de las entrevistas, se plantearon intentando no herir la susceptibilidad de los profesores, de no cuestionar su inteligencia ni preparación, y mucho menos criticar su trabajo. Tratamos de que durante la sesión el profesor se sintiera consultado y no cuestionado.

4.2 Acerca de los participantes

Se aplicó el instrumento a 10 profesores que en ese momento contaban con una experiencia mínima de 3 años impartiendo la asignatura de GA y que además era el universo de profesores en los distintos bachilleratos ubicados en la ciudad de Tepeji del Río de Ocampo, en el estado de Hidalgo. Cuatro de ellos trabajaban en la preparatoria de la

Escuela Superior Tepeji de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, tres pertenecían al CBTIS No. 200, uno a la preparatoria particular Instituto Tepejano, otro al Colegio Particular Sor Juana Inés de la Cruz y uno más al sistema educativo CONALEP. La muestra se eligió de esta manera, para poder tener un panorama más amplio del nivel de conocimientos que tienen los profesores de esta asignatura en todo el municipio.

Es importante mencionar que todos los profesores son ingenieros de profesión, ninguno tiene formación como docente, por lo que (de acuerdo con sus propias palabras) cuentan con escasos conocimientos pedagógicos y didácticos.

4.3 Acerca de las preguntas del cuestionario

A continuación se muestran las preguntas del cuestionario y se describe el propósito de cada una de ellas.

1. De las siguientes opciones, elija la que mejor describa qué es la Geometría analítica.

a) Estudiar la recta, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola mediante sus ecuaciones algebraicas.
b) Estudiar curvas definidas como lugares geométricos mediante sus ecuaciones algebraicas.
c) Dada una ecuación algebraica, estudiar la curva que está representando.

El objetivo de esta pregunta es conocer cómo conciben los profesores el propósito de la GA. Es decir, si la conciben como el área de la matemática que estudia lugares geométricos mediante su representación analítica o si la conciben como el área de la matemática que estudia a las cónicas mediante su ecuación algebraica. Es una pregunta de opción múltiple, donde se consideraron las ideas más comunes que puede tener un profesor sobre el propósito de la GA. La primera opción de respuesta describe el propósito de la asignatura: estudiar curvas mediante sus ecuaciones algebraicas, sin embargo, considera únicamente a la recta y las cónicas, tal y como aparece en el NCM y los libros de texto. La segunda opción de respuesta también describe de manera adecuada el propósito de la GA, aunque lo hace de una forma más completa, ya que incluye a cualquier curva que esté definida en el plano (o espacio) por una condición geométrica. Se propuso como tercera opción de respuesta, el propósito de la Geometría Algebraica: dada una ecuación algebraica estudiar la curva que le corresponde. En los programas de estudio de GA del bachillerato, uno de los temas a tratar, es obtener los elementos y describir las características de las cónicas a partir de su ecuación algebraica, por lo tanto, es probable que los profesores consideren que este es el propósito de la GA.

2. ¿Considera necesario en un curso de Geometría analítica ilustrar el concepto de lugar geométrico con curvas que no sean la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola? ¿Puede dar una explicación breve a su respuesta?

El NCM, así como los libros de texto que se utilizan de apoyo para un curso de GA en el bachillerato consideran únicamente a la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola como ejemplos para ilustrar el significado de lugar geométrico. El estudio de las cónicas ha sido importante en la historia de las matemáticas, incluso están asociadas con el origen de la GA, además de que podemos encontrarlas aplicadas en distintos contextos. Sin embargo, existen otras curvas en el plano definidas como lugares geométricos (mediante condiciones geométricas) o mediante sistemas mecánicos o físicos, que también son objetos de estudio de la GA y que pudieran ser consideradas como ejemplos para comunicar el objetivo general de la GA. El propósito de esta pregunta, es conocer si los profesores comparten la propuesta del NCM y los libros de texto para ilustrar el concepto de lugar geométrico, o consideran necesario mostrar otras curvas para cumplir con este objetivo.

3. ¿Conoce algunos lugares geométricos además de la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola?

En los currículos de GA para el bachillerato, incluyendo el que propone el NCM, se considera exclusivamente a las cónicas como los lugares geométricos a estudiar mediante su ecuación algebraica. Sin embargo, además de las cónicas, existen otras curvas que también están definidas mediante una condición geométrica, mediante un sistema físico o un sistema mecánico y por lo tanto pueden representarse analíticamente. Por ejemplo, curvas como la Cicloide, los óvalos de Cassini o los óvalos de Maxwell, son curvas que han jugado un papel importante a lo largo de la historia de las matemáticas, y que pueden ser considerados por los profesores como ejemplos para ilustrar lugares geométricos en un curso de GA. El objetivo de esta pregunta es averiguar si los profesores conocen algunas de estas curvas. Objetos geométricos como la recta y expresiones matemáticas como las funciones, también pueden ser representados en un sistema de referencia o mediante una ecuación algebraica. La respuesta a esta pregunta, también puede darnos información acerca de cómo conciben los profesores a los lugares geométricos, es decir, como curvas descritas por una condición meramente geométrica, o como cualquier curva que pueda representarse de manera analítica mediante un sistema de coordenadas.

4. ¿Conoce alguna justificación de que las curvas que se obtienen al intersectar un cono doble con un plano son una circunferencia, parábola, elipse e hipérbola, definidas éstas cómo lugares geométricos en el plano?

Al intersectar un cono doble con un plano variable se obtienen curvas abiertas y cerradas conocidas como cónicas. En un curso de GA, se estudia a la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola mediante su ecuación algebraica, la cual se determina mediante su definición cómo lugar geométrico, por ejemplo, la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 - r^2 = 0$, se obtiene de la condición geométrica que se enuncia de la siguiente manera: una circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos en el plano que son equidistantes de un punto fijo. El objetivo de esta pregunta es averiguar si los profesores conocen alguna manera de justificar que las curvas que se obtienen al intersectar el cono doble con el plano variable, corresponden con la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola definidas como lugares geométricos en el plano. De ser afirmativa la respuesta, deseamos también, que los profesores expliquen dicha justificación.

5. ¿Sabe lo que son las esferas de Dandelín? Si su respuesta es afirmativa, ¿Puede explicar el papel que juegan en la Geometría analítica?

Las cónicas son curvas que se obtienen al intersectar un cono doble con un plano variable. De acuerdo con Dandelín, siempre existen una o dos esferas interiores tangentes al cono y al plano, además, el punto de tangencia entre el plano y una esfera corresponde con el foco de la sección cónica. Estas propiedades geométricas entre cono, plano y curva, son el fundamento que permite justificar de manera sencilla, que las curvas obtenidas al intersectar un cono doble con un plano variable son una circunferencia, parábola, elipse e hipérbola definidas éstas como lugares geométricos en el plano. El propósito con el que se planteó la pregunta 5, es averiguar si los profesores conocen las esferas de Dandelín, así como sus propiedades geométricas respecto al cono doble y al plano variable. Además, es importante averiguar si los profesores entienden la relevancia para la GA de tener una manera de justificar que las cónicas son exactamente las mismas curvas definidas en el plano como circunferencia, parábola, elipse e hipérbola, y que las esferas de Dandelín juegan un papel importante para hacerlo.

6. ¿Conoce algunas situaciones, sistemas o fenómenos físicos (aplicaciones) donde las cónicas jueguen un papel relevante?

Podemos encontrar a las cónicas en diversas situaciones de nuestro entorno o aplicadas en distintos contextos como la construcción, la tecnología y la ciencia. Las llantas de un automóvil, la trayectoria que describe un chorro de agua que sale de un aspersor en un jardín, las órbitas que siguen los planetas alrededor del sol, las lentes de un telescopio o un puente vehicular, son ejemplos de aplicación de las cónicas. El propósito de esta pregunta es averiguar si los profesores de GA conocen situaciones cotidianas o aplicaciones donde las características y propiedades geométricas de la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola jueguen un papel relevante.

7. ¿Conoce las propiedades focales de la parábola y la elipse? ¿Puede describirlas?

Las aplicaciones de las cónicas en diversos contextos son de distinta índole. La versatilidad de estas curvas para ser utilizadas en la ciencia, la construcción, la tecnología o las telecomunicaciones, es consecuencia de sus características y propiedades geométricas. Por ejemplo, las propiedades focales de las cónicas permiten que estas curvas puedan aplicarse desde un pequeño lente para unos anteojos, el faro de un automóvil o un telescopio, hasta la construcción de una enorme antena receptora que busca señales de radio en el universo. En el libro de GA de Lehmann, la propiedad focal de la parábola se describe de la siguiente manera: “La normal a la parábola en un punto $P(x, y)$ cualquiera de la parábola, forma ángulos iguales con la recta del foco a P y la recta que pasa por P y es paralela al eje de la parábola”. En el campo de la Óptica, se utiliza esta propiedad focal para explicar fenómenos de reflexión y refracción en lentes o espejos. Esta área de la Física la describe como: “Si un haz de luz es paralelo al eje de la parábola (un espejo o una lente), al reflejarse en ella, pasará por el foco. Si el haz de luz sale del foco, al reflejarse en la parábola saldrá de manera paralela al eje”. Por lo tanto, se tienen dos maneras distintas de describir la propiedad focal de la parábola, de manera geométrica o desde el punto de vista de la Óptica. Con la propiedad focal de la elipse sucede lo mismo, además de la manera geométrica de describirla, existe también una manera de hacerlo desde el punto de vista de la Óptica. Esta pregunta, se planteó con el propósito de averiguar si los profesores conocen las propiedades focales de la parábola y la elipse, además de cómo las describen. Así mismo, considerando que los profesores darán una respuesta completa a esta pregunta, deseamos averiguar si los profesores asocian estas propiedades focales con aplicaciones como el funcionamiento de un telescopio o la antena receptora de la señal de televisión. No se contempla la propiedad focal de la hipérbola, porque es similar a la propiedad focal de la elipse.

8. ¿Conoce algún otro sistema de referencia además del sistema de ejes cartesianos?

El sistema de coordenadas rectangulares es por excelencia el sistema de referencia que se utiliza en la GA para determinar la representación analítica de un lugar geométrico. Sin embargo, en un curso de GA impartido de manera adecuada, el estudiante entiende que existen más de una forma de representar una curva y que puede elegir el que más convenga. En el plano, además de las coordenadas cartesianas, las coordenadas polares o las ecuaciones paramétricas, también permiten obtener la ecuación algebraica de una curva. En el sistema de coordenadas polares, la posición de un punto P se localiza con respecto a un punto y una recta fija. La distancia entre el punto P y el punto fijo se denomina como r y el ángulo entre la recta fija y r se denomina como θ. La posición del punto P está definida por el valor de r para cada valor de θ. La representación analítica de una curva también puede hacerse mediante un par de ecuaciones, cada una de las dos variables está expresada en función de una tercera variable. Estas ecuaciones se denominan como ecuaciones paramétricas de la curva. Por ejemplo, una parábola en coordenadas cartesianas se representa como $4y^2 - 20x - 25 = 0$, en coordenadas polares como $r = \frac{5}{2-2cos\theta}$ y en ecuaciones paramétricas como $x = \frac{5}{4}t$, $y = \frac{5}{2}\sqrt{t+1}$. Esta pregunta tiene el propósito de averiguar si los profesores conocen otras maneras de representar analíticamente un lugar geométrico, además de las ecuaciones algebraicas descritas en coordenadas cartesianas.

9. ¿Conoce las ecuaciones polares de la recta, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola? ¿Puede dar ejemplos?

El propósito de esta pregunta es averiguar si los profesores conocen la representación analítica de la recta y las cónicas en coordenadas polares. En caso de ser afirmativa la respuesta, deseamos que los profesores la complementen proporcionando ecuaciones algebraicas en coordenadas polares de la recta, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola, para reafirmar que conocen el sistema de referencia polar y que tienen los conocimientos necesarios para representar curvas en él. Una ecuación algebraicas en coordenadas polares tiene coordenadas (r, θ), es decir, un lugar geométrico se describe con los valores que toma r para cada θ. Por ejemplo, la ecuación $rcos(\theta - 30°) = 2$ describe una recta, y la ecuación $r(2 + cos\theta) = 4$ describe una elipse.

10. ¿Conoce las ecuaciones paramétricas de la recta, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola? ¿Puede dar ejemplos?

El programa de GA del NCM, propone utilizar ecuaciones paramétricas para representar analíticamente lugares geométricos. Por lo tanto, tenemos interés por averiguar si los profesores conocen que la recta y las cónicas pueden ser definidas mediante dos ecuaciones, en las cuales, dos variables (generalmente x , y) pueden ser expresadas en función de una tercera variable (llamada parámetro). Para justificar una respuesta afirmativa, deseamos que los profesores proporcionen ejemplos de ecuaciones paramétricas que describan a la recta, la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola. Por ejemplo, las ecuaciones $x = asen\theta$, $y = acos\theta$ representan una circunferencia con centro en el origen del plano de radio a, y las ecuaciones $x = 5t$, $y = 2t + 2$ representan una recta cuya pendiente es 2/5.

11. ¿Qué definiciones recuerda o conoce de excentricidad?

La excentricidad es una condición geométrica asociada a las cónicas y sus ecuaciones algebraicas. En los libros de texto de GA para bachillerato, la excentricidad se define como la razón del semieje focal entre el semieje mayor ($e = c/a$), y está relacionada con la forma de la curva. Por ejemplo, en la elipse c es menor que a y la razón es un valor menor a uno. Si la excentricidad es cercana a uno, la elipse tiende a ser un óvalo alargado, pero si es cercana a cero, la elipse tiende a ser un óvalo similar a una circunferencia. La excentricidad también se define como la razón entre las distancia de un punto P a un punto fijo y una recta fija, y cuyo valor constante (menor, mayor o igual a uno) describe un lugar geométrico llamado cónica. El propósito de esta pregunta, es averiguar si los profesores conocen la definición de excentricidad, además, si la respuesta es afirmativa, es de nuestro interés averiguar si los profesores la recuerdan como la condición geométrica asociada a la forma de la curva o como la condición geométrica que define a todas las cónicas.

12. ¿Puede identificar a qué curva corresponde cada una de las siguientes ecuaciones?

a) $x = \cos\theta$
   $y = \operatorname{sen}\theta$

b) $4x^2 + 9y^2 = 36$

c) $r(1 - \cos\theta) = 6$

La pregunta 12 se planteó con el objetivo de confirmar las respuestas de los profesores a las preguntas 8, 9 y 10, cuyo propósito es averiguar si los profesores conocen otro sistema de referencia para representar curvas además del sistema cartesiano, así como para averiguar si conocen la representación analítica de la recta y las cónicas en coordenadas polares o en ecuaciones paramétricas. Para lograr el objetivo de la pregunta, se desea que los profesores identifiquen a qué cónica corresponde la representación analítica descrita en coordenadas cartesianas, coordenadas polares o ecuaciones paramétricas de las opciones de respuesta. La primera opción es una circunferencia representada en ecuaciones paramétricas, la segunda opción es una elipse descrita en coordenadas cartesianas, y la tercera opción es la ecuación algebraica de una parábola en coordenadas polares.

Capítulo 5

Análisis de resultados

Pregunta 1

1. De las siguientes opciones, elija la que mejor describa qué es la Geometría analítica.

a) *Estudiar la recta, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola mediante sus ecuaciones algebraicas.*
b) *Estudiar curvas definidas como lugares geométricos mediante sus ecuaciones algebraicas.*
c) *Dada una ecuación algebraica, estudiar la curva que está representando.*

En el cuestionario, 5 de los 10 profesores contestaron que la GA estudia a la recta y las cónicas mediante sus ecuaciones algebraicas. Durante la entrevista, comentaron que existen otros lugares geométricos además de las cónicas, sin embargo, mencionaron que el currículo considera suficiente para un curso de bachillerato estudiar a la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola, ya que son las curvas más comunes e importantes en GA, por todas las aplicaciones que tienen en distintos contextos. Por lo tanto, estos 5 profesores conciben a la GA como el área que estudia otras curvas además de las cónicas, aunque contestaron esta pregunta, de acuerdo con el propósito que ellos perciben del currículo que utilizan para impartir el curso. Para los 5 profesores restantes, la GA consiste en estudiar curvas definidas como lugares geométricos mediante sus ecuaciones algebraicas. Es decir, conciben que el propósito de esta área de la matemática incluye el estudio de otras curvas definidas como lugares geométricos además de las cónicas. Los profesores consideran que estas curvas no están incluidas en un curso, porque el currículo es muy extenso y no se cuenta con el tiempo suficiente para abordarlas, por lo que se elige a los lugares geométricos más representativos para alcanzar el objetivo: las cónicas. De los 10 profesores, ninguno considera que *dada una ecuación algebraica, estudiar la curva que está representado* se el propósito de la GA. Mencionan que en un curso, es importante que los estudiantes aprendan a identificar las características de una curva a partir de su ecuación algebraica, aunque este proceso no describe completamente el propósito de la GA, es solo parte de ella.

1. De las siguientes opciones, elija la que mejor describa que es la Geometría analítica.

   a) Estudiar la recta, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola mediante sus ecuaciones algebraicas.
   b) Estudiar curvas definidas como lugares geométricos mediante sus ecuaciones algebraicas.
   c) Dada una ecuación algebraica, estudiar la curva que está representando.

Figura 38. Respuesta del profesor 2

En el currículo de GA, no está claro que durante el curso, los estudiantes deban aprender a establecer las ecuaciones analíticas de las cónicas a partir de sus definiciones como lugares geométricos en el plano. La deducción de las ecuaciones ayudaría a comprender el propósito general de la GA, sin embargo, los profesores no consideran mostrarla, porque no es un tema que esté de manera explícita en el temario, además, 8 de los 10 profesores, aseguraron no tener los conocimientos necesarios para hacerlo. Para obtener las ecuaciones algebraicas de las cónicas, solo se sustituyen las características de la recta y las cónicas (por ejemplo, pendiente, centro, vértice, semieje mayor) en la fórmula ya establecida para cada caso. Todos los profesores concluyeron que deducir las ecuaciones algebraicas para la recta y las cónicas a partir de su definición como lugar geométrico en el plano, es una tarea necesaria e importante por realizar en un curso, ya que permitirá a los estudiantes entender el propósito de la asignatura.

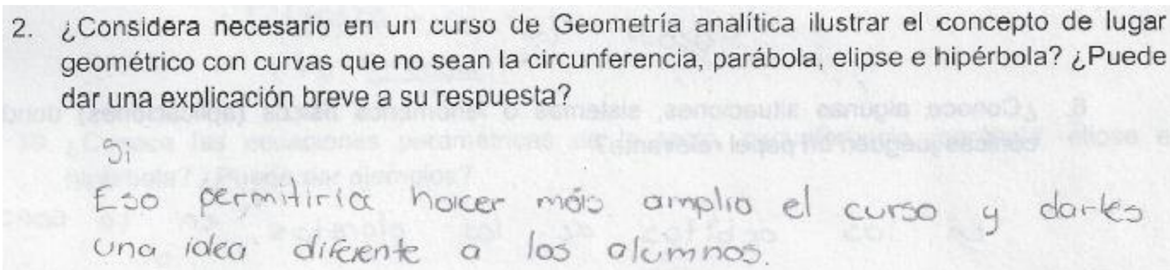
Identificar los contenidos centrales de un curso, es indispensable para hacer una planeación adecuada que permita impartirlo con éxito. Los 10 profesores coinciden en que los contenidos clave son aquellos que favorecen al cumplimiento de los objetivos. Ocho de los 10 profesores consideran que en GA, aprender a ubicar puntos en el plano cartesiano para poder trazar graficas de curvas y obtener sus características, además de aprender a determinar las ecuaciones algebraicas de la recta, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola, son los temas más importantes, ya que contribuyen a cumplir con el propósito de la asignatura, estudiar curvas mediante su representación analítica. Utilizar el sistema de coordenadas para poder ubicar puntos, calcular la distancia entre dos puntos, calcular el área de polígonos, calcular la pendiente de una recta o determinar la ecuación general de las cónicas, también son temas considerados como clave por todos los profesores, contenidos que están incluidos de manera explícita en el currículo. Ninguno mencionó la relevancia de conocer el significado de lugar geométrico, obtener las representaciones analíticas de las cónicas en otros sistemas de referencia además de las coordenadas cartesianas o mostrar que las cónicas se obtienen al intersectar un cono doble con un plano variable.

Las respuestas al cuestionario y la entrevista, nos permiten concluir que todos los profesores conciben a la GA como el área de la matemática que estudia curvas definidas como lugares geométricos mediante su representación analítica. Sin embargo, los contenidos del currículo, así como la manera en que está organizado, influye para que los profesores modifiquen esta concepción y transformen el propósito del curso de estudiar curvas mediante sus ecuaciones algebraicas, en un curso donde según ellos lo más relevante es realizar operaciones algebraicas.

Pregunta 2

2. ¿Considera necesario en un curso de Geometría analítica ilustrar el concepto de lugar geométrico con curvas que no sean la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola? ¿Puede dar una explicación breve a su respuesta?

Los profesores participantes en esta investigación conciben a la GA como el área de la matemática que estudia curvas definidas como lugares geométricos mediante su representación analítica. Además, 9 de los 10 profesores consideran que sería importante ilustrar el concepto de lugar geométrico con curvas que no sean las cónicas, ya que permitiría a los estudiantes entender que el campo de estudio de la GA es amplio, así como las posibilidades de aplicarla en distintos contextos. También, 6 de 10 profesores, consideran que no enfocarse únicamente en el estudio de las cónicas en un curso, favorecería la comprensión del concepto de lugar geométrico, aunque, comentaron que habría que tener cuidado en elegir cuáles son pertinentes para cumplir con este propósito.

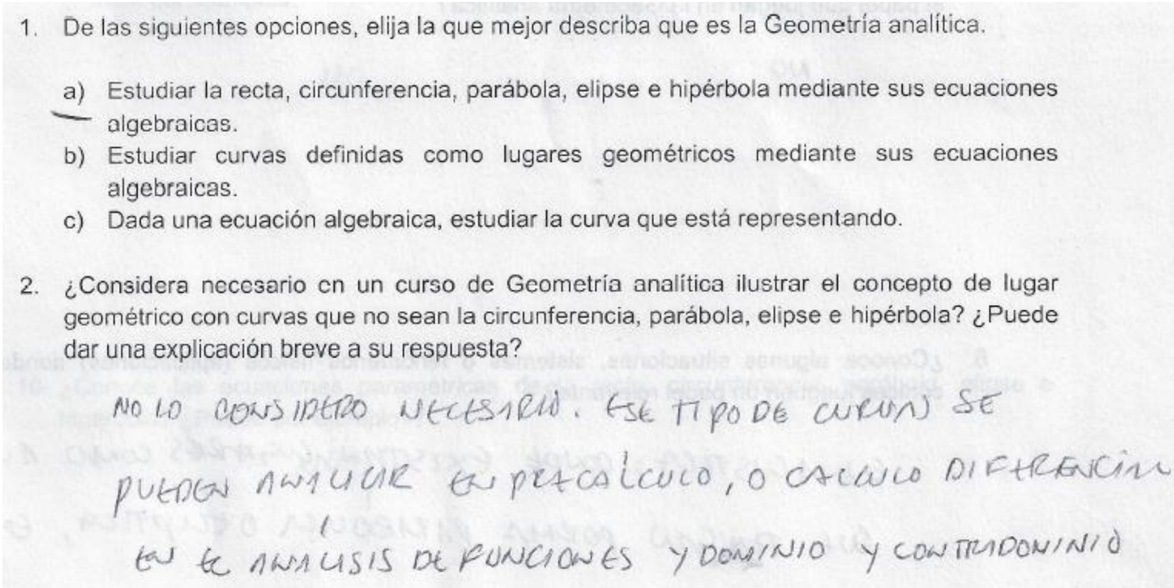


2. ¿Considera necesario en un curso de Geometría analítica ilustrar el concepto de lugar geométrico con curvas que no sean la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola? ¿Puede dar una explicación breve a su respuesta?

Si
Eso permitiria hacer más amplio el curso y darles una idea diferente a los alumnos.

Figura 39. Respuesta del profesor 10

Como lo propone el NCM, la recta, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola son los únicos ejemplos de lugares geométricos que los 10 profesores consideran al impartir un curso de GA. Nueve de los 10 profesores comentaron que el tiempo es una limitante para mostrar otros ejemplos que ayuden a comprender el significado de lugar geométrico, debido a que el programa es extenso, incluso afirman que tampoco es posible estudiar todas las cónicas, generalmente terminan el curso con la parábola. De acuerdo con la opinión de los profesores, si se desea ilustrar el concepto de lugar geométrico con otras curvas que no sean las cónicas, se tendrían que mostrar en clase y motivar a los estudiantes a conocerlas y estudiarlas en una actividad complementaria. Uno de los profesores considera que la recta y las cónicas son ejemplos suficientes para que los estudiantes comprendan qué es un lugar geométrico. Menciona como una mejor opción, la necesidad de poner mayor atención en las estrategias a utilizar para cumplir con este objetivo y no utilizar otras curvas como ejemplos, en su opinión, estas pueden estudiarse en otra área de la matemática como el Cálculo.


1. De las siguientes opciones, elija la que mejor describa que es la Geometría analítica.

a) Estudiar la recta, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola mediante sus ecuaciones algebraicas.
b) Estudiar curvas definidas como lugares geométricos mediante sus ecuaciones algebraicas.
c) Dada una ecuación algebraica, estudiar la curva que está representando.

2. ¿Considera necesario en un curso de Geometría analítica ilustrar el concepto de lugar geométrico con curvas que no sean la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola? ¿Puede dar una explicación breve a su respuesta?

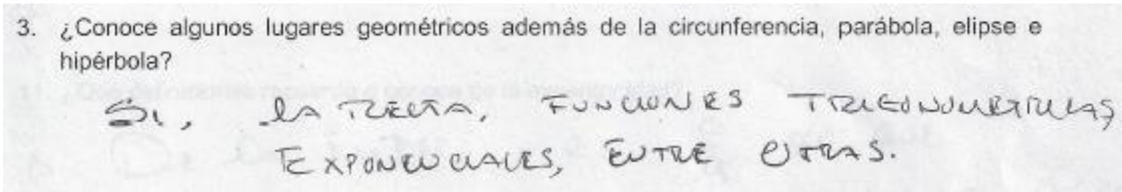
NO LO CONSIDERO NECESARIO. ESE TIPO DE CURVAS SE PUEDEN ANALIZAR EN PRECALCULO, O CALCULO DIFERENCIAL EN EL ANALISIS DE FUNCIONES Y DOMINIO Y CONTRADOMINIO

Figura 40. Respuesta del profesor 3

Pregunta 3

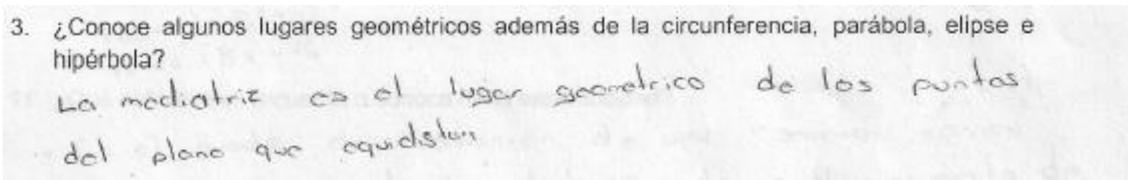
3. ¿Conoce algunos lugares geométricos además de la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola?

Con el propósito de que los estudiantes comprendan el significado de lugar geométrico en un curso de GA, 9 de los 10 profesores participantes en la investigación, de acuerdo con sus respuestas a la pregunta 2, consideran necesario ampliar la gama de curvas que propone el currículo para ejemplificarlos. Sin embargo, su conocimiento sobre las curvas que pueden ser utilizadas para cumplir este propósito es insuficiente. Tres de los 10 profesores mencionaron no conocer otros lugares geométricos además de las cónicas, y 7 de los 10 nombraron como únicos ejemplos a la recta, la mediatriz o las funciones. Considerando que un lugar geométrico está definido por una condición meramente geométrica, solo la mediatriz cumple con dicha condición. Al mencionarles a los profesores curvas que pueden ser descritas de manera geométrica, física o mecánica como la cicloide, cardioide, los óvalos de Cassini o de Maxwell, todos comentaron que no conocen ninguno de estos lugares geométricos. La falta de conocimiento de otras curvas definidas como lugares geométricos además de las cónicas, fue argumentada por 4 de los 10 profesores, con el hecho de que el currículo no lo contempla, por lo tanto, para planear su curso de GA, solo consideran las cónicas, incluyendo la recta o pares de rectas que se cortan.



3. ¿Conoce algunos lugares geométricos además de la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola?

SI, LA RECTA, FUNCIONES TRIGONOMETRICAS EXPONENCIALES, ENTRE OTRAS.



3. ¿Conoce algunos lugares geométricos además de la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola?

La mediatriz es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan

Figura 41. Respuestas de los profesores 6 y 1 respectivamente

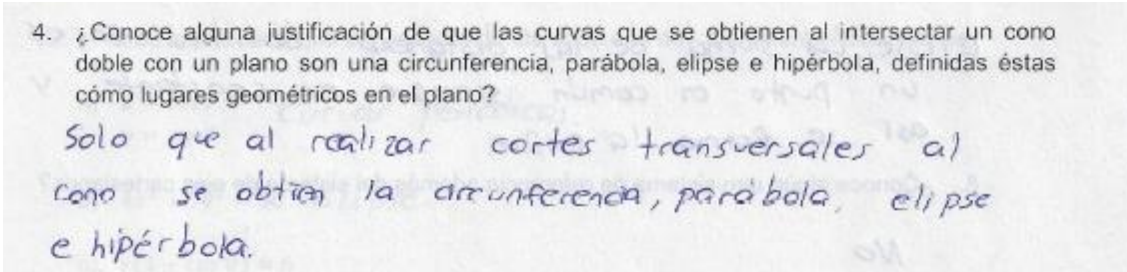
Asociado a la falta de conocimiento que tienen los profesores sobre otros lugares geométricos además de las cónicas, encontramos también que conciben el concepto de lugar geométrico de manera limitada o de manera incorrecta Un lugar geométrico está definido por una condición meramente geométrica. Para 8 de 10 profesores cualquier curva que se pueda trazar en el plano cartesiano es un lugar geométrico, esto incluye rectas, gráficas de funciones, las cónica, etc. Los 10 profesores conciben a la recta como el lugar geométrico de todos los puntos que tienen el mismo ángulo de inclinación. La medición de un ángulo se hace con respecto a un eje de referencia, por lo tanto, en un sentido estricto, esta no es una condición exclusivamente geométrica. La recta, es un objeto geométrico, definida por Euclides en su libro de los Elementos como: “Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella”. Una función es un lugar geométrico, de acuerdo con 4 de 10 profesores, porque es posible representarla con una curva en el plano cartesiano. La regla de asociación entre los elementos del conjunto X y los elementos del conjunto Y, es considerada por los docentes como la condición necesaria para poder trazar su gráfica en el sistema de coordenadas y determinar su ecuación. Una cónica es una curva que puede ser representada en el plano cartesiano mediante sus características y de la cual podemos obtener una ecuación algebraica. Esta es la concepción que tienen todos los profesores respecto a las cónicas como lugar geométrico. Aun cuando conocen las definiciones de las cónicas en el plano, algunos profesores no las identifican como lugares geométricos que cumplen condiciones geométricas, esto es, no identifican las definiciones de circunferencia, parábola, elipse e hipérbola como lugares geométricos. Por ejemplo, definen a la circunferencia como la curva formada por un número infinito de puntos cuya distancia a un punto común es constante. Sin embargo, desconocen que esta definición corresponde a lo que es un lugar geométrico. Los 2 profesores restantes conciben a un lugar geométrico como una curva descrita por condiciones meramente geométricas.

La planeación e impartición por el profesor de un curso de GA está basada en los contenidos del programa de estudio, en general, temas importantes de la GA que no están expuestos de manera explícita en el programa no son del dominio de los profesores, por ejemplo, conocimiento de otros lugares geométricos además de las cónicas, concepción adecuada del significado de lugar geométrico y traducción de la definición de una curva, como lugar geométrico, a su ecuación algebraica correspondiente.

Preguntas 4

4. ¿Conoce alguna justificación de que las curvas que se obtienen al intersecar un cono doble con un plano son una circunferencia, parábola, elipse e hipérbola, definidas éstas cómo lugares geométricos en el plano?

Esta pregunta del cuestionario causó confusión entre los profesores participantes en la investigación. Siete de los 10 profesores, entendieron que se les preguntaba acerca de si conocían cómo se obtienen la circunferencia, la parábola, elipse e hipérbola, por lo tanto, utilizando diferentes palabras, explicaron que las cónicas se generan al cortar un cono con plano en distintas posiciones. Tres de 10 profesores contestaron que no conocían ninguna justificación, aunque durante la entrevista también mencionaron que no habían entendido la pregunta, por lo tanto, durante la entrevista, fue necesario replantear la pregunta.



4. ¿Conoce alguna justificación de que las curvas que se obtienen al intersectar un cono doble con un plano son una circunferencia, parábola, elipse e hipérbola, definidas éstas cómo lugares geométricos en el plano?

Solo que al realizar cortes transversales al cono se obtien la circunferencia, parabola, elipse e hipérbola.

Figura 42. Respuesta profesor 5

El NCM propone como contenido específico de un curso, que los estudiantes conozcan cómo se obtienen las cónicas. Aun cuando 9 de 10 profesores conocen que a la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola se les llama cónicas porque se obtienen de intersecar un cono con un plano en distintas posiciones, solo 3 de ellos consideran importante ilustrarlo en un curso, utilizando figuras de plastilina o proyectando imágenes en el pizarrón, para los 6 restantes es más relevante enfocarse en determinar las ecuaciones algebraicas. Uno de los 10 profesores identifica a la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola como curvas llamadas cónicas, pero desconoce por qué se les nombra de esta manera.

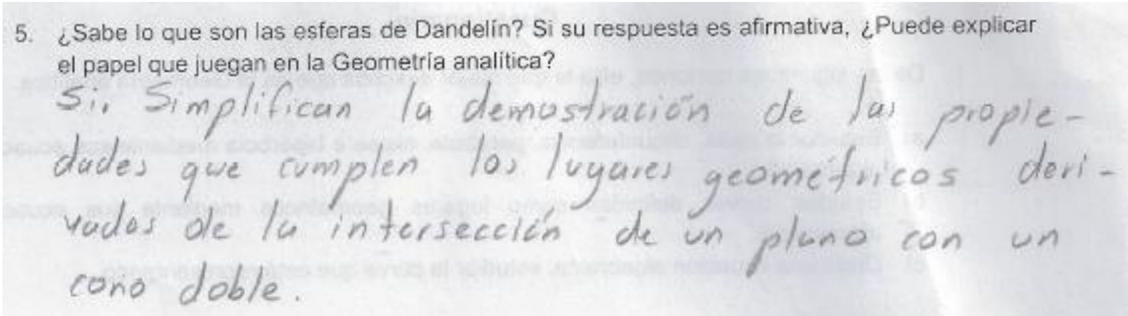
Los 10 profesores recuerdan la definición de circunferencia como lugar geométrico en el plano, pero presentan dificultades para recordar las definiciones de parábola, elipse e hipérbola. Aun así, podemos afirmar que todos ellos conocen estas definiciones de las cónicas como lugar geométrico, porque las consideran un contenido clave en el programa de GA (aunque no las puedan enunciar de memoria) y las enseñan en el curso. Sin embargo, no les dan un uso adecuado a las definiciones ya que solo las mencionan en clase a los estudiantes y no las utilizan para mostrar cómo se obtiene la representación analítica de cada curva. Esta situación se presenta porque los profesores no consideran las definiciones de las cónicas como condiciones geométricas que describen las curvas, y que al ser representadas en un sistema de referencia, permite determinar las ecuaciones algebraicas.

Existe conocimiento por parte de los profesores acerca de que al intersectar un cono doble con un plano variable se obtienen curvas abiertas y cerradas llamadas cónicas. Además, conocen las definiciones como lugares geométricos en el plano de la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola. Por lo tanto, al reformular la pregunta 4, se les preguntó si conocían alguna manera de justificar o argumentar que las cónicas que se obtienen al cortar un cono con un plano, son las mismas curvas que están definidas como lugares geométricos y de las cuales obtenemos las ecuaciones. Nueve de los 10 profesores desconocen cómo justificar que la curva que se obtiene al intersectar un cono con un plano perpendicular al eje, es la misma curva que se define en el plano como el conjunto de puntos que son equidistantes a un punto común. Dos de los 10 profesores comentaron que en todos los años durante los cuales han impartido la asignatura de GA, no se habían preguntado, cómo a partir de la curva generada al cortar un cono se obtiene su definición en el plano.

Pregunta 5

5. ¿Sabe lo que son las esferas de Dandelín? Si su respuesta es afirmativa, ¿Puede explicar el papel que juegan en la Geometría analítica?

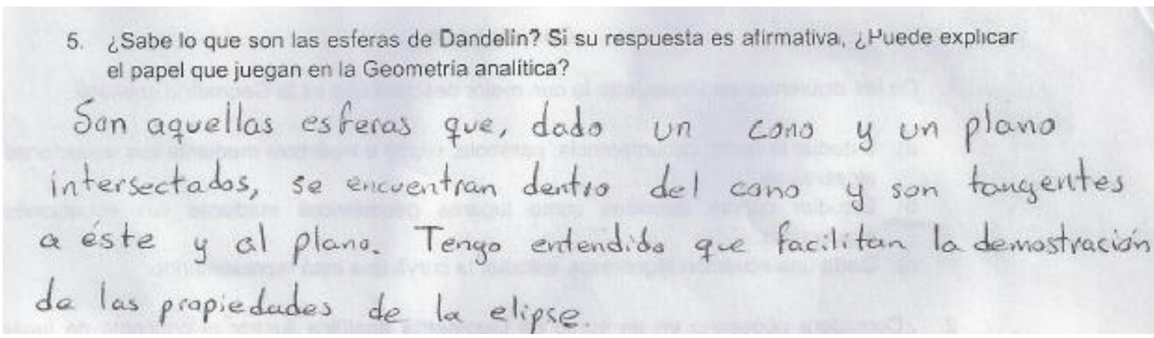
Todos los profesores afirmaron en la pregunta anterior, no conocer una manera de justificar que las curvas que se obtienen al intersectar un cono doble con un plano variable son las mismas curvas conocidas como circunferencia, parábola, elipse e hipérbola definidas éstas como lugares geométricos. Tres de los 10 profesores, al investigar en internet o en un artículo sobre cómo se generan las cónicas en un cono, se enteraron de la existencia de las esferas de Dandelín. Dos de los 3 profesores al profundizar un poco más en su investigación, encontraron que las esferas se utilizan para *demostrar* las propiedades geométricas de las cónicas obtenidas al intersectar el cono con un plano. Los 2 profesores no identifican que dichas propiedades geométricas son las que permiten definir a las cónicas como lugares geométricos en el plano, por lo que en la pregunta 4 contestaron que no conocían una manera de justificar la equivalencia entre las curvas generadas en el cono y las curvas definidas en el plano como circunferencia, parábola, elipse e hipérbola.



5. ¿Sabe lo que son las esferas de Dandelín? Si su respuesta es afirmativa, ¿Puede explicar el papel que juegan en la Geometría analítica?

Si, Simplifican la demostración de las propiedades que cumplen los lugares geométricos derivados de la intersección de un plano con un cono doble.

Figura 43. Respuesta del profesor 4



5. ¿Sabe lo que son las esferas de Dandelin? Si su respuesta es afirmativa, ¿Puede explicar el papel que juegan en la Geometría analítica?

Son aquellas esferas que, dado un cono y un plano intersectados, se encuentran dentro del cono y son tangentes a éste y al plano. Tengo entendido que facilitan la demostración da las propiedades de la elipse.

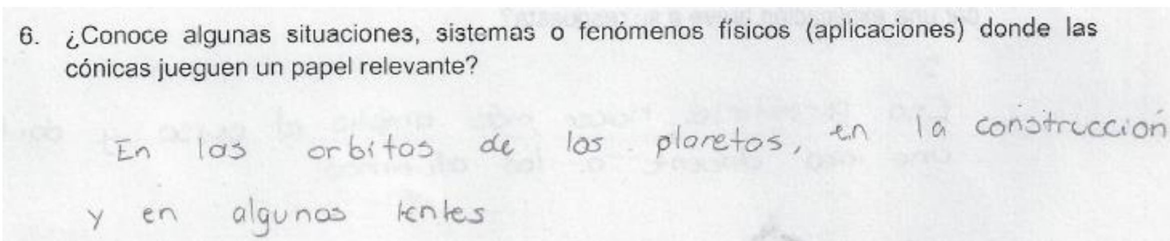
Figura 44. Respuesta del profesor 7

Las esferas de Dandelín fue un tema que despertó interés en los profesores. Siete de los 10 no las conocen, sin embargo, la entrevista dio pauta a querer saber sobre el papel que juegan en el estudio de la GA. Fue interesante para 4 de los 7 profesores, descubrir colocando esferas tangentes al cono y al plano, es posible justificar las definiciones de las cónicas que utilizan en clase para ejemplificar lugares geométricos, corresponden a las propiedades geométricas de las mismas curvas generadas en el cono. Además, de acuerdo con la opinión de los profesores, ilustrar a los estudiantes sobre la relación que existe entre las propiedades geométricas de las curvas obtenidas en el cono y las definiciones de las cónicas, es un tema importante que contribuye a la comprensión del concepto de lugar geométrico. Por lo tanto, ellos concluyen que el tema de las esferas de Dandelín debe estar incluido en el currículo de GA.

Pregunta 6

6. ¿Conoce algunas situaciones, sistemas o fenómenos físicos (aplicaciones) donde las cónicas jueguen un papel relevante?

El campo de aplicación de las cónicas es un tema conocido por 9 de 10 profesores. Sus conocimientos incluyen aplicaciones en ciencias como la física y la astronomía, en la arquitectura o la tecnología. Por ejemplo, conocen que la parábola, elipse e hipérbola se encuentran en las órbitas planetarias o en la trayectoria que sigue un proyectil al ser lanzado, que se utilizan en la construcción de un puente, el diseño de una antena receptora o en las lentes de un telescopio.



6. ¿Conoce algunas situaciones, sistemas o fenómenos físicos (aplicaciones) donde las cónicas jueguen un papel relevante?

En las orbitas de los planetas, en la construcción y en algunos lentes

Figura 45. Respuesta del profesor 10

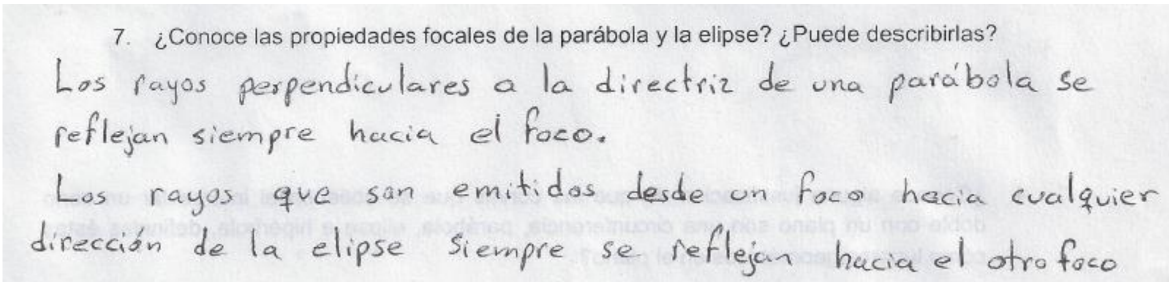
La contextualización de los contenidos que se encuentran en los programas de estudio para bachillerato, es uno de los principales propósitos que contempla el NCM, ya que usar, disfrutar y entender a las matemáticas en distintos contextos, posibilita la funcionalidad de los aprendizajes escolares en la vida cotidiana (NCM 2017). Todos los profesores concuerdan con este propósito, además, consideran que ilustrar aplicaciones de las cónicas, puede contribuir a despertar el interés de los estudiantes por la asignatura, a encontrarle sentido al curso de GA y a entender porque es importante aprender esta área de la matemática. De acuerdo con la opinión de los profesores, las aplicaciones de las cónicas en la ciencia y en nuestro entorno son muy variadas, por lo tanto, aquellas con las cuales los estudiantes tengan más contacto, ya sea en las distintas asignaturas que cursan o en su vida cotidiana, son las idóneas para considerar en un curso de GA.

En la práctica, las acciones de los profesores en el aula contradicen su opinión sobre la importancia de mostrar aplicaciones de las cónicas a los estudiantes. Ocho de los 10 profesores no consideran mostrar ejemplos de aplicación de estas curvas durante el curso, y 2 de 10 ocasionalmente las mencionan al inicio del tema. Los profesores centran la atención del curso en determinar las ecuaciones cuadráticas de las cónicas y las ecuaciones de la recta, como lo establece el currículo. Dentro de la planeación del semestre, no es posible incluir un tema como las aplicaciones de las cónicas (aun cuando lo consideran importante) porque el programa es extenso, es necesario cubrirlo completamente, agregar otros contenidos acortaría el tiempo designado para cada tema. Cuatro de los 10 afirmaron que diseñar una actividad extra clase, donde los estudiantes investiguen y descubran el uso de la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola en situaciones o fenómenos físicos es lo adecuado para abordar este tema.

Pregunta 7

7. ¿Conoce las propiedades focales de la parábola y la elipse? ¿Puede describirlas?

Una antena receptora tiene forma parabólica, recibe la señal del satélite de manera paralela al eje de la parábola, las ondas chocan con la antena y al reflejarse se concentran en el receptor, que está colocado en la posición del foco. Con estas palabras, describió uno de los profesores, la aplicación de la propiedad focal de la parábola en una antena receptora para señal de TV. En el cuestionario, 3 de 10 profesores describieron de manera adecuada las propiedades focales de la parábola y la elipse, 1 de 10 describió solo la propiedad de la parábola, los 6 restantes no las conocen. Los rayos perpendiculares a la directriz de la parábola se reflejan siempre hacia el foco, y los rayos emitidos desde un foco hacia cualquier dirección de la elipse siempre se reflejan hacia el otro foco, son ejemplos de las descripciones proporcionadas por 4 de 10 profesores en la pregunta 7. Sin embargo, sus conocimientos sobre propiedades focales de las cónicas se limitan a estos dos enunciados. El funcionamiento de una antena parabólica, fue el único ejemplo de aplicación de la propiedad focal de la parábola, que 2 de 4 profesores recordaron. Aun cuando conocen y enuncian la propiedad focal de la elipse, no tienen presente alguna aplicación. Además, ninguno de los 4 profesores conoce que si un rayo entra de manera perpendicular a la parábola siempre pasa por el foco, porque “la normal a la parábola en un punto P cualquiera de la parábola, forma ángulos iguales con la recta del foco a P y la recta que pasa por P y es paralela al eje de la parábola”.


7. ¿Conoce las propiedades focales de la parábola y la elipse? ¿Puede describirlas?

Los rayos perpendiculares a la directriz de una parábola se reflejan siempre hacia el foco.
Los rayos que son emitidos desde un foco hacia cualquier dirección de la elipse siempre se reflejan hacia el otro foco

Figura 46. Respuesta del profesor 7

Pregunta 8

8. ¿Conoce algún otro sistema de referencia además del sistema de ejes cartesianos?

Representar curvas en más de un sistema de referencia, es uno de los propósitos del NCM a considerar por los profesores en un curso de GA. Además del sistema de coordenadas cartesianas, las coordenadas polares es un sistema de referencia idóneo para representar curvas en el plano. Ocho de los 10 profesores conocen que los lugares geométricos pueden ser representados por un radio y un ángulo, cuyas magnitudes se miden a partir de un punto y una recta. Sólo uno de los 8 profesores cuenta con los conocimientos necesarios para determinar la ecuación polar de la recta y las cónicas a partir de sus condiciones geométricas. El currículo de GA del bachillerato de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, no propone el uso de coordenadas polares para representar curvas definidas como lugares geométricos, únicamente contempla convertir coordenadas cartesianas a polares y viceversa. De acuerdo con la opinión de los profesores que imparten clase en otros bachilleratos, sus currículos tienen la misma propuesta del programa de estudios de la UAEH. Esta es la razón por la que 7 de los 8 profesores conocen el sistema de referencia polar, pero sus conocimientos se limitan a transformar coordenadas de un sistema de referencia a otro. Dos de los 10 profesores solo conocen y han utilizado en el curso el sistema de coordenadas cartesianas.

El NCM no propone de manera explícita el uso de coordenadas polares en el curso de GA, sin embargo, presenta como propuesta para representar curvas en el plano a las ecuaciones paramétricas. Tres de los 10 profesores mencionan haber visto en un libro de texto o en algún artículo, curvas representadas en el plano mediante dos ecuaciones que dependen de una misma variable, aunque desconocen cómo hacer dicha representación. Siete de los 10 profesores no conocen las ecuaciones paramétricas. Uno de los profesores que mostró mayor disposición y participación, comentó durante la entrevista, que sus carencias en conocimientos como el uso de distintas formas de representar un lugar geométrico en el plano, así como de otros temas tratados en esta investigación, es producto de su conformismo por solo cumplir con lo establecido en el programa de estudio.

Las opiniones de los profesores con respecto a la importancia de utilizar otros sistemas de referencia para representar curvas en el plano, además del sistema cartesiano, está dividida. Los profesores no muestran a los estudiantes la representación de la recta y las cónicas en coordenadas polares o ecuaciones paramétricas en el curso, ya que el tiempo es limitado y el contenido del programa es extenso. La mitad de ellos, 5 de 10, consideran que para cumplir con el propósito del curso de GA de bachillerato (estudiar curvas mediante sus ecuaciones), utilizar coordenadas cartesianas es la opción adecuada. La recta y las cónicas, de acuerdo con su opinión, son lugares geométricos que pueden ser representados de manera sencilla y fácil de entender para los estudiantes en coordenadas $(x\,,y)$. En el nivel medio superior, el estudio de la GA debe ser básico, por lo tanto, es suficiente si los jóvenes aprenden a graficar curvas en el plano cartesiano. Por el contrario, 5 de 10 profesores, piensan que contar con más de una manera de representar curvas es importante, porque permite elegir la opción que más convenga.

El papel que juega el sistema de referencia para cumplir el propósito de la GA es fundamental, es el medio que hace posible obtener la representación analítica de una curva, definida como lugar geométrico en el plano. Los 10 profesores conocen el propósito de la GA, estudiar curvas mediante su ecuación algebraica, sin embargo, conciben al sistema de referencia como una herramienta necesaria para realizar operaciones que involucran rectas y curvas. Por ejemplo, trazar la gráfica de una cónica y determinar sus características, calcular el área de un polígono o aprender a ubicarse en un plano.

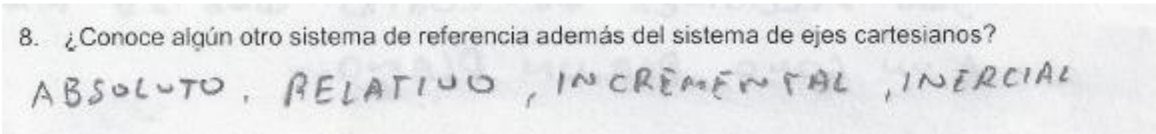

8. ¿Conoce algún otro sistema de referencia además del sistema de ejes cartesianos?
ABSOLUTO, RELATIVO, INCREMENTAL, INERCIAL

Figura 47. Respuesta del profesor 8

El NCM propone en sus contenidos centrales el estudio de la GA como método algebraico para la resolución de tareas geométricas, utilizando diversos sistemas de referencia. La pregunta 8 se planteó con el propósito de averiguar si los profesores conocen otros sistemas de referencia para estudiar curvas, además del sistema de coordenadas cartesianas. Cuatro de los 10 profesores tuvieron dificultades con el significado del término sistema de referencia. Algunos otros ejemplos de respuesta fueron, sistemas geográficos, ortogonales, de tiempo, de espacio, por lo que se evidenció de que no habían entendido bien la pregunta, o no tenían claro lo que es un sistema de referencia. Los otros 4 profesores, mencionaron a las coordenadas polares, y uno de ellos, también mencionó a las coordenadas esféricas y cilíndricas.*

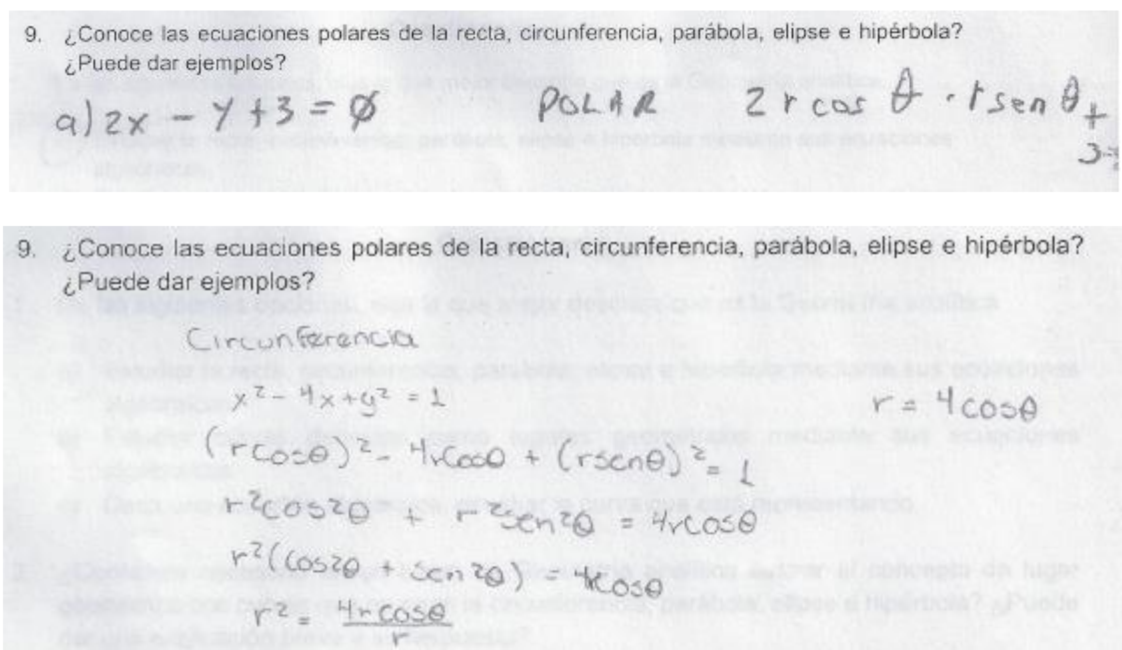
Pregunta 9

9. ¿Conoce las ecuaciones polares de la recta, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola? ¿Puede dar ejemplos?

El conocimiento de los profesores respecto al sistema de coordenadas polares, se extiende más allá de saber que un punto en el plano se representa mediante la magnitud de un radio y un ángulo, medida respecto a un punto y una recta. Ocho de los 10 profesores, afirman en el cuestionario y la entrevista, conocer las ecuaciones polares de la recta y las cónicas (los mismos que en la pregunta anterior mencionaron conocer el sistema de referencia polar). Los profesores externaron saber de la existencia de dichas ecuaciones porque han tenido la oportunidad de verlas en un libro de texto, en internet o cuando se encontraban estudiando el bachillerato o la licenciatura. En un curso de GA, estas ecuaciones no son parte de los contenidos incluidos en la planeación, porque el programa de estudios no lo contempla, razón por la cual, los profesores mencionaron sentirse con conocimientos limitados acerca del tema.

Identificar la ecuación algebraica de la recta, circunferencia, parábola, elipse o hipérbola, en coordenadas cartesianas, es una tarea que los 10 profesores pueden realizar sin complicaciones, debido a la experiencia con la que cuentan impartiendo la asignatura. Por ejemplo, reconocieron que la ecuación $x^2 + (y - 2)^2 - 9 = 0$ es una circunferencia o que la ecuación $x^2 = 16y$ representa una parábola. Sin embargo, 8 de 10 profesores admitieron no tener los conocimientos necesarios para determinar que una ecuación de la forma $r(1 + cos\theta) = 2$ corresponde a una parábola. Dos de los 10 pudieron identificarla. Uno de los profesores argumentó, que al no tener la necesidad de mostrar a los estudiantes las ecuaciones de las curvas en el sistema de coordenadas polares, propicia su falta de interés [de los profesores] por estudiarlas.

En la figura 48, se muestran las respuestas en el cuestionario a la pregunta 9, proporcionadas por 2 de 8 profesores que dijeron conocer el sistema de referencia polar y las ecuaciones polares de las cónicas.


9. ¿Conoce las ecuaciones polares de la recta, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola? ¿Puede dar ejemplos?

a) $2x - y + 3 = \emptyset$ POLAR $2r\cos\theta \cdot r\,sen\,\theta + 3 =$

9. ¿Conoce las ecuaciones polares de la recta, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola? ¿Puede dar ejemplos?

Circunferencia

$x^2 - 4x + y^2 = 1$ $r = 4\cos\theta$

$(r\cos\theta)^2 - 4r\cos\theta + (r\,sen\theta)^2 = 1$

$r^2\cos^2\theta + r^2 sen^2\theta = 4r\cos\theta$

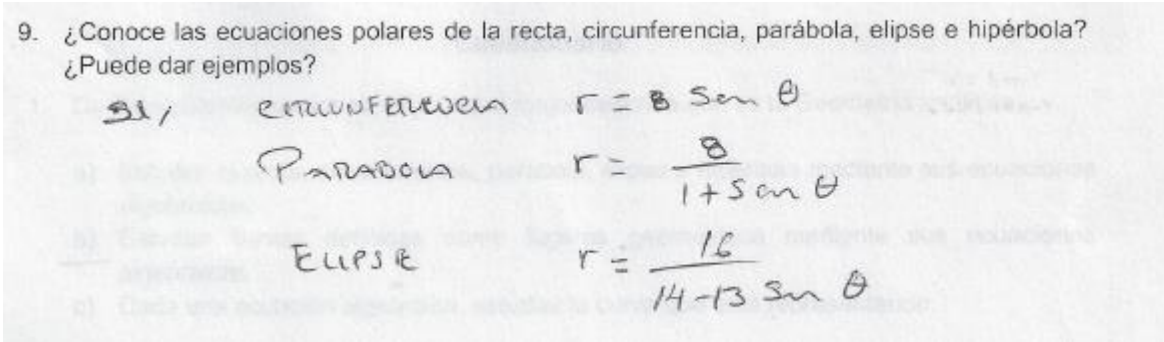
$r^2(\cos^2\theta + sen^2\theta) = 4r\cos\theta$

$r^2 = \frac{4r\cos\theta}{r}$

Figura 48. Respuestas de los profesores 8 y 10 respectivamente

Los currículos de GA de los distintos bachilleratos de acuerdo con los profesores, proponen en un curso la conversión de coordenadas cartesianas a polares, pero no considera estudiar a las ecuaciones de las cónicas en su forma polar. Para dar un ejemplo de la ecuación de una cónica en coordenadas polares, 6 de 10 profesores, plantearon la ecuación en forma cartesiana, después, mediante el uso de razones trigonométricas ($x = rcos\theta$ y $y = rsen\theta$), convirtieron la ecuación de coordenadas cartesianas a coordenadas polares. Dos de los 10 no conocen las ecuaciones polares de las cónicas. A partir de las características de la curva (cónica), los 10 profesores afirman poder obtener la representación analítica en forma cartesiana sin dificultad. Por ejemplo, si conocen dos puntos que pasan por una recta, determinan el valor de la pendiente y lo sustituyen en la fórmula $y - y_1 = m(x - x_1)$ para obtener su ecuación algebraica. De manera análoga, si se conocen las coordenadas del centro y la magnitud del radio, o las coordenadas del vértice y el foco, es posible obtener las ecuaciones algebraicas en coordenadas cartesianas de la circunferencia y parábola respectivamente. Sin embargo, realizar este procedimiento para encontrar la ecuación de una curva cuando sus características están expresadas en coordenadas polares, está fuera de su conocimiento. Es decir, para una circunferencia con centro en $(2\,,3)$ y radio igual a 2, saben que su ecuación canónica cartesiana es $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$, pero para una circunferencia con centro en $(4\,,\pi/3)$ y radio 3, desconocen como determinar la ecuación polar. Esta situación es un indicador de que la preparación de los profesores en el campo de la GA, está enfocada a cubrir los contenidos establecidos en el currículo. Por lo tanto, omiten aspectos importantes del propósito de la asignatura, como mostrar a los estudiantes como pueden representar lugares geométricos en más de un sistema de referencia, para elegir el que más convenga.

La figura 49 muestra la respuesta de uno de los 10 profesores que conoce las ecuaciones polares de la recta, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola. Además, proporciona ejemplos de ecuaciones de tres cónicas en coordenadas polares, incluso para dar un ejemplo de parábola y elipse, utiliza la ecuación que describe a todas las cónicas en función de la definición de excentricidad.


9. ¿Conoce las ecuaciones polares de la recta, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola? ¿Puede dar ejemplos?

SI, CIRCUNFERENCIA $r = 8 \text{ Sen } \theta$

PARABOLA $r = \frac{8}{1+5 \text{ sen } \theta}$

ELIPSE $r = \frac{16}{14-13 \text{ Sen } \theta}$

Figura 49. Respuesta del profesor 6

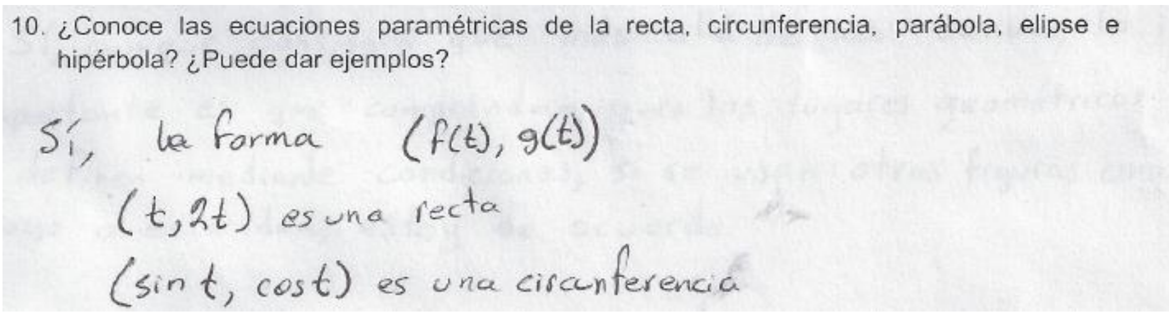
Pregunta 10

10. ¿Conoce las ecuaciones paramétricas de la recta, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola? ¿Puede dar ejemplos?

La representación de lugares geométricos en ecuaciones paramétricas es un tema que no forma parte de los contenidos de los currículos de GA que actualmente se utilizan en los bachilleratos de los distintos subsistemas, por lo tanto, no tenemos la necesidad de investigar y preparar estos temas. Este argumento fue utilizado por uno de los profesores para justificar que 8 de 10 no conocen el sistema de referencia donde se representan curvas mediante dos ecuaciones que dependen de un mismo parámetro. El sistema de coordenadas cartesianas es por excelencia para los docentes, el sistema de referencia que se utiliza para obtener la representación analítica de la recta y las cónicas en un curso de GA, porque así lo sugiere el programa de estudios. Por lo tanto, los profesores planean sus clases pensando en enseñar a los estudiantes a determinar las ecuaciones algebraicas de las curvas exclusivamente con referencia a pares ordenados (x , y), relativos a un sistema de ejes cartesianos, limitando la posibilidad a los jóvenes de conocer otras formas de representar analíticamente lugares geométricos. Las coordenadas polares no son consideradas por los profesores en un curso, porque no están contempladas en el currículo, aunque las conocen, sin embargo, las ecuaciones paramétricas no forman parte del contenido porque los profesores no saben de su existencia.

De los 2 de los 10 profesores que conocen las ecuaciones paramétricas, uno de ellos mencionó haberlas encontrado en un libro de GA, lo que despertó su interés por estudiarlas.

La figura 50 muestra su respuesta a la pregunta 10 del cuestionario. Afirma conocer la representación paramétrica de la recta, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola, además, expresa que una curva se representa en este sistema de referencia mediante dos ecuaciones que depende de un mismo parámetro: $x = f(t)$, $y = g(t)$. También dio un ejemplo de cómo se representa una recta y una circunferencia por medio de ecuaciones paramétricas.


10. ¿Conoce las ecuaciones paramétricas de la recta, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola? ¿Puede dar ejemplos?

Sí, la forma $(f(t), g(t))$

$(t, 2t)$ es una recta

$(\sin t, \cos t)$ es una circunferencia

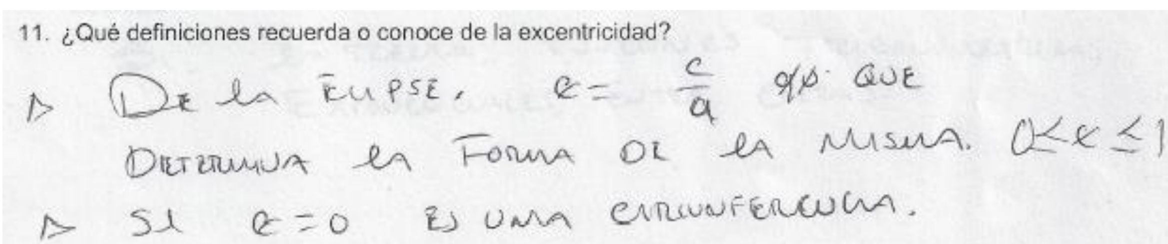
Figura 50. Respuesta del profesor 7

El NCM considera el estudio de la recta y las cónicas mediante sus ecuaciones algebraicas representadas en distintos sistemas de referencia. Propone explícitamente el uso de ecuaciones paramétricas para representar algebraicamente curvas en el plano, como una opción diferente a las coordenadas cartesianas. De los 10 profesores participantes en esta investigación, ninguno conoce la propuesta del NCM para un curso de GA, además, 8 de 10 no conocen las ecuaciones paramétricas. En la entrevista, se les cuestionó a los profesores sobre la importancia de mostrar a los estudiantes la representación paramétrica de las cónicas, de acuerdo como lo establece el NCM. Cinco de los 10 profesores opinan que un curso de GA para bachillerato debe ser elemental, por lo tanto, es suficiente para cumplir con el objetivo de la asignatura, obtener las ecuaciones algebraicas de las curvas en coordenadas cartesianas. Los 5 profesores restantes, consideran importante conocer y aprender a usar las ecuaciones paramétricas, para después valorar la viabilidad de enseñarlas en clase.

Pregunta 11

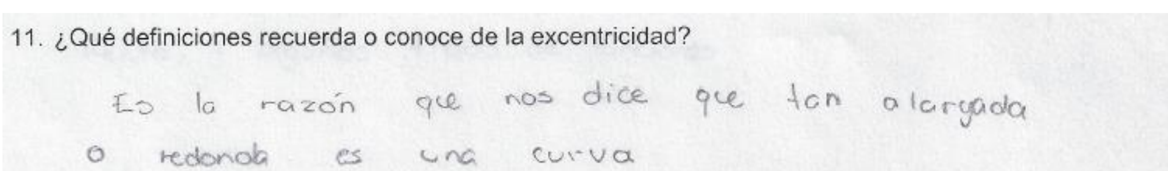
11. ¿Qué definiciones recuerda o conoce de la excentricidad?

La definición de excentricidad que los profesores recuerdan está asociada con la forma de la cónica. En una elipse o una hipérbola, el semieje focal es la distancia que existe entre el centro y el foco (c), el semieje mayor es la distancia que existe entre el centro y el vértice (a). Ocho de los 10 profesores, conocen y definen a la excentricidad (e) como la razón entre el semieje focal y el semieje mayor, cuyo valor indica que tan alargada es la curva. Por ejemplo, en una elipse la razón c/a toma valores en el intervalo $(0,1)$, si el valor está cerca de 0, la curva tendrá una forma parecida a una circunferencia, pero si el valor se encuentra cercano a 1, la elipse será alargada. Determinar la excentricidad de una cónica, comentan, es equivalente a calcular el lado recto, las coordenadas del centro o el vértice, es decir, obtener una característica que proporcione información necesaria para estudiar a la curva.


11. ¿Qué definiciones recuerda o conoce de la excentricidad?

▷ DE LA ELIPSE, $e = \frac{c}{a}$ q/p QUE DETERMINA LA FORMA DE LA MISMA. $0 < e \leq 1$

▷ SI $e = 0$ ES UNA CIRCUNFERENCIA.


11. ¿Qué definiciones recuerda o conoce de la excentricidad?

Es la razón que nos dice que tan alargada o redonda es una curva

Figura 51. Respuesta de los profesores 6 y 10 respectivamente

Durante la entrevista, los 8 profesores mencionaron desconocer que la excentricidad puede definirse también como la razón entre las distancias que existen de un punto de la curva hacia un punto fijo y una recta fija. Definida así, la excentricidad es una condición geométrica mediante la cual es posible describir a la parábola, elipse e hipérbola. Dos de los 8 profesores afirman haber escuchado sobre la ecuación algebraica que representa a todas las cónicas, sin embargo, no conocen la ecuación,

La figura 52 muestra la respuesta de uno de los 10 profesores que define a la excentricidad como la razón entre las distancias que existen de un punto de la curva hacia un punto fijo y una recta fija. También, conoce a la excentricidad como la razón entre el semieje focal y el semieje mayor, sin embargo, considera que la definición de excentricidad adquiere mayor relevancia, cuando se entiende como una condición geométrica que puede ser utilizada para determinar una ecuación algebraica que incluye a todas las cónicas, que si se relaciona únicamente con la forma de la curva. Uno de los 10 profesores no conoce la definición de excentricidad.

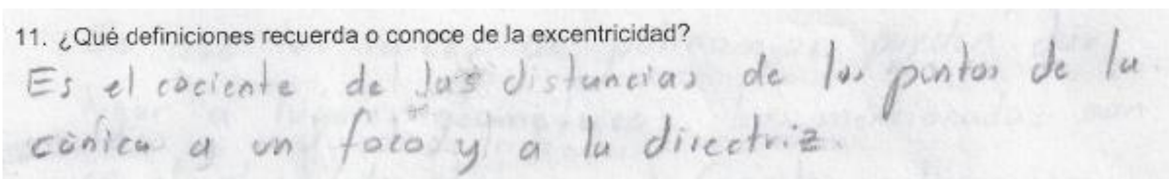

11. ¿Qué definiciones recuerda o conoce de la excentricidad?
Es el cociente de las distancias de los puntos de la cónica a un foco y a la directriz.

Figura 52. Respuesta del profesor 4

Pregunta 12

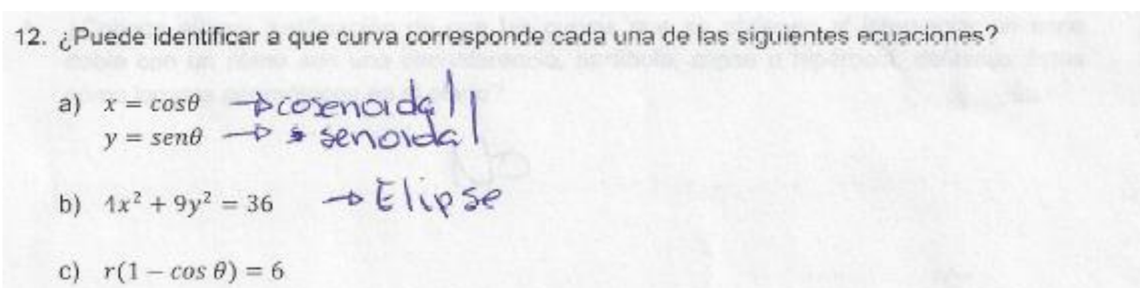
12. ¿Puede identificar a qué curva corresponde cada una de las siguientes ecuaciones?

a) $x = cos\theta$
   $y = sen\theta$

b) $4x^2 + 9y^2 = 36$

c) $r(1 - cos\,\theta) = 6$

El currículo de GA y el libro de texto son la única guía que los 10 profesores participantes en esta investigación consideran para planear un curso. Prueba de ello, son sus respuestas a la pregunta 12. El programa de estudios solo propone el sistema de coordenadas cartesianas como el medio para obtener la representación analítica de la recta, la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola, descartando otras opciones que también podrían ser útiles e ilustrativas para los estudiantes, como las coordenadas polares o las ecuaciones paramétricas. Por lo tanto, los conocimientos de los profesores respecto al estudio de curvas mediante un sistema de referencia se limitan al plano cartesiano. Ocho de los 10, identificaron que la ecuación algebraica en coordenadas cartesianas $4x^2 + 9y^2 = 36$ corresponde a una elipse, describieron el procedimiento para transformar la ecuación a su forma canónica para determinar que tiene centro en el origen, semieje mayor y menor igual a 3 y 2 unidades respectivamente. En la entrevista, se pudo apreciar la familiaridad que los profesores tienen con las ecuaciones algebraicas de las cónicas representadas en coordenadas cartesianas. Dos de los 10 profesores, confundieron la curva con una circunferencia.



12. ¿Puede identificar a que curva corresponde cada una de las siguientes ecuaciones?

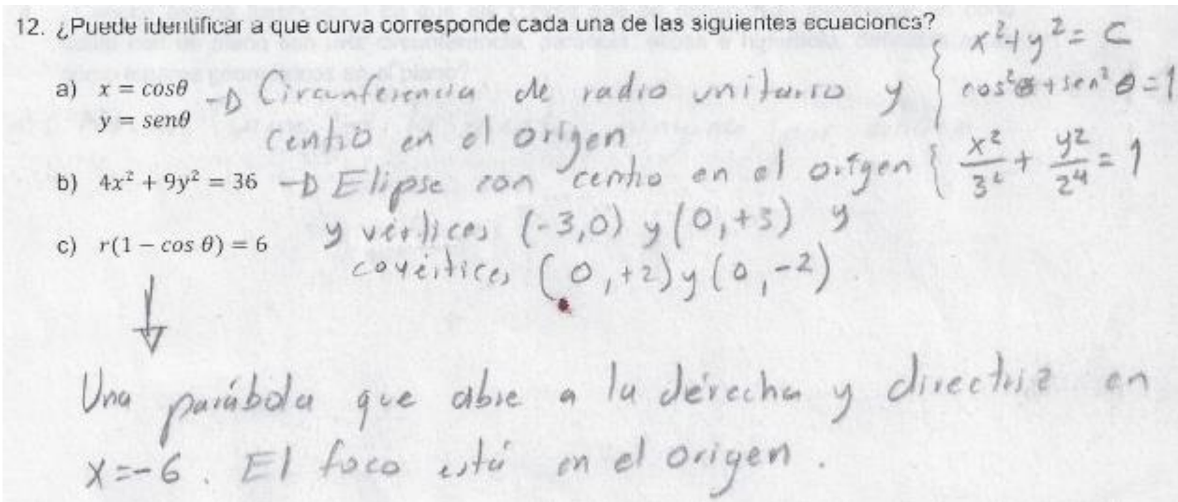
a) $x = cos\theta$ → cosenoidal
$y = sen\theta$ → senoidal

b) $1x^2 + 9y^2 = 36$ → Elipse

c) $r(1 - cos\,\theta) = 6$

Figura 53. Respuesta del profesor 2

En las preguntas 9 y 10, averiguamos que 2 de los 10 profesores conocen las coordenadas polares y las ecuaciones paramétricas, además saben representar curvas en los dos sistemas de referencia. Las respuestas de ambos profesores a la pregunta 12, sustentan sus respuestas anteriores, y confirman que cuentan con los conocimientos para estudiar lugares geométricos en distintas representaciones. Por ejemplo, 1 de los 2 profesores identificó de manera adecuada todas las curvas (figura 54), respondió que la curva descrita en ecuaciones paramétricas corresponde a una circunferencia, la ecuación algebraica en coordenadas cartesianas es una elipse y la curva representada en forma polar es una parábola. También, mencionó algunas de las características de las cónicas, como la magnitud del radio y la ubicación del centro de la circunferencia, la posición de los vértices y la magnitud de los ejes en la elipse, así como el lugar donde se encuentra el foco y la directriz de la parábola.



12. ¿Puede identificar a que curva corresponde cada una de las siguientes ecuaciones?

a) $x = cos\theta$, $y = sen\theta$ —> Circunferencia de radio unitario y centro en el origen { $x^2+y^2=C$, $cos^2\theta+sen^2\theta=1$ }

b) $4x^2+9y^2=36$ —> Elipse con centro en el origen y vértices (-3,0) y (0,+3) y covértices (0,+2) y (0,-2) { $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$ }

c) $r(1-cos\,\theta)=6$

Una parábola que abre a la derecha y directriz en $x=-6$. El foco está en el origen.

Figura 54. Respuesta del profesor 4

La falta de conocimientos sobre el sistema de coordenadas polares y las ecuaciones paramétricas de 8 de los 10 profesores, les impidieron identificar a las curvas descritas en un sistema de referencia diferente a las coordenadas cartesianas, así como tampoco pudieron dar ejemplos de las ecuaciones polares y paramétricas de las cónicas en las preguntas 9 y 10 respectivamente. El NCM propone el estudio de curvas definidas como lugares geométricos (la recta y las cónicas) mediante distintos sistemas de referencia. Aun cuando no menciona de manera explícita al sistema de coordenadas polares, es una opción importante para que los estudiantes representen a la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola, además del sistema de coordenadas cartesianas. Ocho de los 10 profesores conocen que una curva puede ser descrita mediante pares ordenados (r, θ), aunque no cuentan con los conocimientos necesarios para obtener e identificar la representación analítica. Las ecuaciones paramétricas son consideradas por el NCM como una alternativa para estudiar curvas en GA, sin embargo, la mayoría de los profesores (8 de los 10) no las conocen.

Capítulo 6

Conclusiones

La visión de los profesores sobre la GA se limita a determinar la representación analítica de la recta y las cónicas. Aun cuando conciben que esta área de la matemática estudia curvas definidas como lugares geométricos mediante sus ecuaciones algebraicas, en la práctica, durante el curso concentran su atención en enseñar a los estudiantes a obtener exclusivamente las ecuaciones algebraicas de la recta, la circunferencia, la parábola y la elipse. La ecuación de la hipérbola es un tema que difícilmente se puede abordar durante el semestre por falta de tiempo, de acuerdo con su experiencia. Mostrar en clase como hacer la transición de la definición como lugar geométrico de una curva, a su ecuación algebraica (aunque el currículo no lo proponga de manera explícita), ayudaría a cumplir con el propósito de un curso de GA. Sin embargo, los profesores poseen conocimientos insuficientes para transformar una condición geométrica en una representación algebraica mediante un sistema de coordenadas.

En relación con los conocimientos disciplinares que poseen los profesores de GA, podemos concluir, que únicamente cuentan con los conocimientos básicos requeridos para obtener las ecuaciones algebraicas de la recta, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola. La incipiente preparación de los profesores en GA, les permite cumplir con el propósito del currículo, de enseñar a los estudiantes a ubicar lugares geométricos en el plano cartesiano, identificar sus elementos y determinar sus ecuaciones canónicas a partir de sustituir una fórmula establecida. Las posibilidades de identificar los temas clave del programa de estudios, de jerarquizar y organizar los contenidos para cumplir con el propósito del curso, de diseñar actividades adecuadas para favorecer el aprendizaje o de mandar los mensajes pertinentes a los estudiantes respecto a la esencia de la GA, se ven limitadas por la falta de conocimientos disciplinares de los docentes.

Es importante para los profesores ampliar el panorama de los estudiantes, con respecto al propósito de la GA que establece el currículo. Ilustrar con otras curvas un curso, además de las cónicas, permitiría a los jóvenes, contar con una mayor gama de posibilidades para vincular esta asignatura, con otras áreas de las matemáticas o con aplicaciones en distintos contextos, como la ciencia y la tecnología. Los profesores consideran difícil abordar otras curvas en clase, ya que el temario es muy extenso y el tiempo de duración del semestre es insuficiente. Independientemente de la validez de este argumento, podemos decir, que su formación disciplinar no es suficiente para cumplir con este objetivo. Mostrar distintas curvas a los estudiantes en un curso, involucra que los profesores cuenten con una concepción adecuada del significado de lugar geométrico, es decir, como una curva descrita en el plano por condiciones geométricas, físicas o mecánicas, además de conocer distintos ejemplos de curvas, incluyendo a las cónicas, que correspondan a estos tres tipos de descripciones. Los docentes en general desconocen curvas definidas como lugares geométricos distintas a las propuestas en el currículo.

Los profesores saben que las cónicas se obtienen al intersecar un cono doble con un plano variable, conocimiento importante propuesto por el NCM dentro de sus contenidos específicos, pero sus conocimientos son a nivel de cultura general y desconocen cómo se transita de su descripción como secciones cónicas a su definición como lugar geométrico. Aun cuando los profesores tienen presente las definiciones de las cónicas como lugares geométricos en el plano, ya que las enuncian durante el curso, tienen dificultades para determinar sus ecuaciones algebraicas. De acuerdo con la opinión de la mitad de los profesores, saber cómo realizar esta justificación, ayudaría a los estudiantes a entender el significado de lugar geométrico. Al inicio de la investigación, los docentes no conocían las esferas de Dandelín ni el papel que juegan en la GA, sin embargo, después de las entrevistas, concluyeron que es un nuevo conocimiento interesante que habían adquirido y que quizá sería un método adecuado para llevar a cabo esta tarea, aunque se les aclaró que no necesariamente debe enseñarse a los alumnos pero que es un conocimiento que fortalece su profesionalización como profesor de GA .

La preocupación de los profesores por cubrir en su totalidad el programa de estudios, les impide ser más flexibles al planear un curso, es decir, se enfocan en abordar únicamente los temas del currículo, sin considerar otros conocimientos que juegan un papel importante para ayudar a cumplir el propósito de la asignatura que no están incluidos en los contenidos del semestre. Por ejemplo, los profesores tienen claro que mostrar aplicaciones de las cónicas en distintos contextos, permite ampliar la visión de los estudiantes respecto a la importancia de estudiar Geometría Analítica, sin embargo, dentro de sus actividades en clase, no están contempladas, porque de acuerdo con su opinión, los tiempos del curso son insuficientes. En general, todos los docentes identifican la aplicación de las cónicas en distintas ciencias como la Física, Astronomía y Economía, en áreas como la Arquitectura, las Telecomunicaciones o la Tecnología. En el caso de los profesores participantes que conocen las propiedades focales de la parábola y la elipse, podemos decir, que sus conocimientos se encuentran aislados, cuando observamos que solo pueden proporcionar ejemplos de aplicación, sin asociarlos a las propiedades focales de las curvas. Insuficiencia de conocimientos, falta de conexión entre ellos, son características que presentaron los profesores durante la investigación.

Obtener la representación analítica de una curva en distintos sistemas de referencia, es un contenido central del NCM, las coordenadas cartesianas y las ecuaciones paramétricas son los sistemas propuestos para realizar esta tarea. Aunque las coordenadas polares no están consideradas de manera explícita, también son una opción adecuada para representar curvas. Los profesores participantes en esta investigación cuentan con escasos recursos para cumplir con este propósito del NCM. Sus conocimientos y habilidades no van más allá de utilizar coordenadas cartesianas para obtener las ecuaciones algebraicas de las cónicas, ya que desconocen la existencia de las ecuaciones paramétricas, y aunque algunos elementos de las coordenadas polares carecen de los conocimientos suficientes para construir la representación analítica mediante este sistema a partir de sus definiciones como lugares geométricos.

En general, podemos concluir que los conocimientos disciplinares de los profesores de Geometría Analítica participantes en esta investigación, no van más allá de los conocimientos básicos para determinar las ecuaciones algebraicas de la recta y las cónicas en el sistema de coordenadas rectangulares. La incipiente formación disciplinar de los profesores, limita su visión en un curso, impidiéndoles identificar los temas relevantes de la GA y destacar los objetivos importantes de la asignatura para poder jerarquizarlos y ordenarlos, con la finalidad de cumplir los propósitos del programa. Además, afecta directamente en la elección de adecuadas estrategias de enseñanza y en el diseño de actividades que favorezcan el aprendizaje. En este contexto, podemos decir, que lo que sería deseable un programa para ampliar y fortalecer la formación disciplinar de los profesores que les permita cumplir con las exigencias que plantea El Nuevo Currículo de Matemáticas y llevar a cabo con éxito un curso.

Impartir con éxito un curso de Geometría Analítica, implica que los estudiantes comprendan que el propósito de la asignatura es estudiar lugares geométricos mediante su representación analítica. También, es importante entender el significado de lugar geométrico y utilizarlo para obtener su ecuación algebraica, conocer distintos ejemplos de curvas en el plano además de las cónicas y conocer sus aplicaciones en distintos contextos. Que sepan los estudiantes cómo se originan las cónicas y que es posible justificar sus definiciones como lugar geométrico, aun cuando esto no se haga en clase, así como representar lugares geométricos en más de un sistema de referencia. Cumplir con esta tarea, requiere una formación adecuada de los profesores. La profesionalización y la formación continua de los profesores es de suma importancia. Los profesores deben adquirir y ampliar conocimientos didácticos y disciplinares,

Referencias

Bava, J. A. (2013). *Antenas reflectoras en microondas*. Editorial de la Universidad Nacional de la Plata (EDULP).

Boyer, C. B. (2012). *History of analytic geometry*. Courier Corporation.

Brannan, D.A., Esplen, M.F., Gray, J.J. *Geometry*, Second Edition, Cambridge University Press, New York, 2012

Cortés, E. (2008). Geometría del equilibrio de estructuras en arco. Latin-American of Physics Education, 2(2), 15.

Coxeter, H. (1971). *Fundamentos de geometría*. México: Limusa

Fernández, G. M. C. (2007). Galería de curvas en el plano. *Foro-Red-Mat: Revista electrónica de contenido matemático*, (24), pp.1-117.

Lehmann, C. H. (1962). *Geometría Analítica*. Editorial Hispano Americana

Narváez, L. (2000). Discurso de ingreso en la Real Academia de Sevilla de Ciencias. *Memorias de la Real Academia Sevillana de Ciencias*, (6), pp. 85-103.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standars for schools mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). (2016). Resultados de la prueba PISA 2015. Recuperado de http://www.oecd.org/pisa/pisaenespaol.htm

Rodríguez Cancela, D. (2015). Cubiertas laminares modulares de paraboloide hiperbólico: Módulos agrupables de bordes rectos.

Secretaría de Educación Pública. (2017). *Modelo Educativo para la Educación Obligatoria*. Ciudad de México: SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2017). *Nuevo Currículo de la Educación Media Superior, Campo disciplinar de Matemáticas bachillerato general*. Ciudad de México: SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2008). *Reforma Integral para la Educación Media Superior*. México: SEP.

UNESCO. (2015). *Investing in teachers is investing in learning. A prerequisite for the transformative power of education,* Paris: UNESCO.

Urbaneja, P. M. G. (2007). Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica. *Sigma: revista de matemáticas = matematika aldizkaria*, (30), pp. 205-236.

Páginas web

http://www.oecd.org/pisa/pisaenespaol.htm
http://es.wikipedia.org/wiki/Telescopio_de_Cassegrain
https://pwg.gsfc.nasa.gov/stargaze/Mkepl3laws.htm
https://greatbustardsflight.blogspot.com/2016/06/antes-del-gps-navegacion-hiperbolica.html
http://www.cimat.mx/ciencia_para_jovenes/bachillerato/libros/algebra_angel_cap10.pdf
https://grlum.dpe.upc.edu/manual/sistemas de iluminación-luminarias-reflectores.php
https://www.dalcame.com/wdescarga/lito.pdf
http://www.matmor.unam.mx/es/investigación/geometría-algebraica